UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACTORIZACIÓN DE FUNCIONES CONTINUAS EN PRODUCTOS TOPOLÓGICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

PRESENTA

(I.M.E) OSCAR JESÚS RENDÓN GÓMEZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. MIKHAIL TKACHENKO

MÉXICO, D. F. [redacted]

1999

Contenido

Agradecimientos

Doy las gracias al Doctor Mijail Tkachenko por haber aceptado dirigirme en la elaboración de este trabajo, mostrado un profundo interés en mi formación como matemático, dedicado el tiempo nesesario y suficiente en su terminación y por sus sabias enseñanzas.

Agradezco también al Doctor Luis Miguel Villegas Silva la ayuda que me prestó como compañero del seminario de topología de los viernes.

Doy las gracias a los Doctores Adalberto García Maynez Cervantes, Salvador García Ferreira y Angel Tamariz Mascarúa por haberm involucrado en la topología.

Expreso mi agradecimiento también a los Doctores Vladimir Tkachuk, Oleg Okunev, Richard Gordon Wilson y Sergei Antonyan por haber revisado este trabajo.

Finalmente agradezco el apoyo que me brindaron mis compañeros del seminario de topología: Constancio, Yolanda, Jerónimo e Ismael.

Esta tesis se la dedico a mis hermanos Juan Luis, Carlos a mis padres Juan y Margarita y a mis fantasias cerebrales.

Introducción

Este trabajo presenta algunos resultados sobre la factorización de funciones continuas en la topología general. Como es bien conocido, en una factorización nos interesa "descomponer" ciertas funciones en una composición de funciones relativamente más simples. De entre la gama de factorizaciones que puede admitir una función, consideramos aquella que se relaciona con el siguiente problema.

Dada una función continua f entre espacios topológicos, con dominio un producto topológico (de Tychonoff), ¿qué propiedades topológicas se deben imponer sobre los espacios involucrados de modo que la función f quede completamente determinada por sus valores en a lo más, una cantidad numerable de factores?

Cuando este problema tiene una solución diremos que f depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas, y si este es el caso, es posible definir una función g, tal que f admite la descomposición $f = g \circ \pi$, en donde π es la función que proyecta al dominio de la función sobre los factores de los que depende f.

Veamos una breve semblanza del desarrollo histórico del tema, sin pretender que ésta sea completa.

El primer resultado de esta clase de factorización se debe a Mibu [7], quién muestra que toda función continua con valores en los reales y definida sobre un producto de espacios compactos depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Su demostración se basa en el teorema de Stone-Weierstrass.

Durante el período comprendido entre 1952 y 1964 aparecieron cuatro resultados estrechamente relacionados. El primero de ellos se debe a Mazur [**15**]. Mazur estaba buscando propiedades de un espacio topológico que hicieran equivalentes los conceptos de continuidad y continuidad secuencial. Su teorema afirma que toda función secuencialmente continua definida en un producto de espacios segundo numerable (en donde el conjunto de factores tiene cardinalidad menor que el primer cardinal inaccesible), y con valores en un espacio Y, tal que Y es de Hausdorff y la diagonal de $Y \times Y$ es un conjunto G_δ, depende de una cantidad a lo más numerable de coordenadas. Utilizando este resultado probó, entre otros hechos, que toda función secuencialmente continua definida en un producto de espacios segundo numerables hacia un espacio métrico, es continua.

Por su parte Corson e Isbell [**6**] probaron que toda función continua cuyo dominio es un producto de espacios métricos separables y cuyo contradominio es un espacio métrico, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Con ayuda de este teorema obtienen resultados relacionados con espacios localmente finos.

El tercer resultado se debe a Ross y Stone [**19**]. Éste afirma que toda función continua definida en un producto de espacios separables y con valores en un espacio regular segundo numerable, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. En realidad se puede suponer que cada factor del producto es un K-espacio. Con este resultado presentaron una prueba distinta de la dada por Stone [**18**], con la que se muestra que $\mathbb{Z}^\alpha$ no es normal si $|\alpha| \geq \aleph_1$.

En el mismo año, Gleason generalizó el teorema de Ross y Stone utilizando en su prueba una idea diferente a la utilizada por ellos. Su resultado que apareció publicado en [**23**], afirma que, toda función continua definida en un producto de espacios separables, cuyo contradominio es un espacio de Hausdorff en donde cada punto es un conjunto G_δ, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Con este teorema Isbell [**23**] obtuvo más resultados de espacios localmente finos.

Después de este período, Miščenko [**17**] generalizó el teorema de Gleason de la siguiente manera. Toda función continua definida en un producto de espacios de calibre $\aleph_1$ con valores en un espacio de Hausdorff cuyos puntos son G_δ, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Miščenko también probó que si la cardinalidad del conjunto de factores es mayor que $\aleph_0$ y uno de los espacios (los cuáles tienen al menos dos puntos) no tiene calibre $\aleph_1$, entonces existe un espacio de Hausdorff Y en el que todos sus puntos son G_δ y una función continua del producto a Y, que depende de una cantidad no numerable de coordenadas.

Una generalización de los resultados anteriores fue propuesta por Engelking [**11**], quien consideró funciones definidas en Σ-productos de espacios y probó lo siguiente. Dado un producto de espacios T_1 con la propiedad de que cualquier producto finito de los factores es de Lindelöf, y dado un espacio Y de Hausdorff tal que la diagonal de $Y \times Y$ es un conjunto G_δ, si fijamos un punto arbitrario a en el producto, entonces cualquier función continua definida en $\Sigma(a)$ y con valores en Y, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Utilizando este teorema demostró entre otros resultados que, si un espacio métrico X es la imágen continua de un Σ-producto de una familia de espacios tal que todo producto finito de estos tiene la propiedad de Lindelöf, entonces X es separable.

Dentro del tema de la factorización, no podía faltar la participación de Arhangel'skiĭ [**2**], [**3**], quién probó que toda función continua, cuyo dominio es un subconjunto denso en un producto de espacios con peso red numerable y cuyo contradominio es un espacio regular con carácter numerable, depende de a lo más una cantidad numerable de factores. Con este, prueba resultados acerca de números cardinales, por ejemplo, si un espacio Y es regular, entonces el peso red de Y es menor o igual que el producto de la simplicidad de Y por su carácter.

En el caso en el que las funciones toman valores en los reales, aparecieron dos resultados íntimamente relacionados. El primero de ellos se debe a Comfort y Negrepontis [**4**] y considera productos de espacios con la topología κ-caja. El segundo se debe a Noble y Ulmer [**26**], quienes probaron que si X es un producto de espacios no triviales, X es completamente regular y Hausdorff , entonces cada función continua f definida en X y con valores en los reales, depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas si y sólo si X es seudo $\aleph_1$-compacto. También probaron que un espacio producto es seudo $\aleph_1$-compacto si y sólo si cada uno de sus subproductos finitos lo es.

El problema de la factorización se comenzó a estudiar en grupos topológicos a mediados de los 70's. El primer trabajo en esta área se debe a Ščepin [**28**] quién estudió funciones reales continuas de tipo contable (el equivalente de funciones factorizables en productos Tychonoff para grupos topológicos), definidas en S-espacios. Probó entre otros hechos que toda función real definida en un S-espacio X, es de tipo contable, si toda cubierta abierta de X contiene una subfamilia contable cuya unión es densa en todas partes. Y observa que, como todo grupo actua sobre sí mismo mediante traslaciones por la derecha, todos sus resultados sobre S-espacios conducen a resultados correspondientes para grupos topológicos.

Dentro del área de grupos topológicos, un trabajo clave es el presentado por Tkačenko [**29**], sobre grupos $\mathbb{R}$-factorizables. De entre los resultados que probó, con respecto a factorización, mencionamos el siguiente. Dado un producto de grupos topológicos, en donde cada factor tiene número de Nagami menor o igual que τ, y dado un subespacio S denso en el producto, toda función continua de S a un espacio X con peso menor o igual a τ, depende de a lo más τ coordenadas. Utilizando este hecho, deduce entre otras cosas que cualquier grupo topológico totalmente acotado es $\mathbb{R}$-factorizable.

Para terminar con esta breve semblanza, mencionaremos otros dos resultados.

Uno de ellos se debe a Hušek [**22**], cuya importancia es la siguiente. Utilizando un simple teorema de factorización, prueba un resultado de Comfort y Ross (el producto de grupos seudocompactos es seudocompacto), su generalización dada por Tkačenko (el producto de subconjuntos relativamente seudocompactos de grupos topológicos es relativamente seudocompacto en el producto de los grupos), y sus corolarios de [**30**].

Finalmente, mencionamos el trabajo de Uspenskiĭ [**31**], sobre compactos Dugundji. En su artículo también utiliza un teorema de factorización para probar el siguiente resultado. Dados, X un producto de espacios con peso red contable, S un subespacio de X y Y un compacto. Si Y es la imágen de S bajo una función regular, entonces Y es casi correcto (es decir, para cualquier cardinal regular no numerable τ menor o igual que el peso de Y, el producto topológico del intervalo unitario $I = [0, 1]$, I^τ es una imágen continua de Y).

Esperamos que esta breve e incompleta historia sea suficiente para motivar el estudio del problema de la factorización. A continuación presentamos un sumario de la tesis.

Presentamos nueve resultados ya conocidos acerca de factorización de funciones continuas.

Algunas de las pruebas originales fueron modificadas y una de ellas corregida.

En la primera parte se presentan los antecedentes necesarios topológicos y algebraicos, que se requieren en los resultados de factorización.

En la segunda parte se presentan los resultados de factorizaciones, estos fueron escogidos de forma tal que en sus demostraciones se aprecien distintas técnicas empleadas.

Los teoremas corresponden a K. Ross y A.H. Stone [**19**], A. Gleason (presentado en [**23**]), quien como ya comentamos generaliza el anterior, Engelking [**11**], Arhangel'skiĭ [**2**], Comfort y Negrepontis [**4**], E. V. Ščepin [**20**] para quien el dominio es un grupo topológico débilmente de Lindelöf y cuyo contradominio son los reales, M. Hušek [**22**].

Los dos últimos resultados corresponden a teoremas de factorización que utilizan el concepto de función regular, uno de ellos es debido a V. Uspenskiĭ [**31**] y el otro es debido a M. Tkačenko [**30**]. Ambos utilizan como dominio un subespacio de un producto, una función regular y contradominio un espacio regular.

Aunque los resultados de factorización son importantes por sí mismos, casi siempre se utilizan como una herramienta auxiliar para probar otro tipo de resultados, algunos de los cuáles ya se mencionaron.

La notación empleada es la usual. Así, $x \in X$ indica que x es un elemento de X y $x \notin X$ que x no pertenece a X; $J \subseteq S$ denota que J es un subconjunto de S y $J \subsetneqq S$ señala que J es subconjunto propio de S. Una familia indexada de conjuntos se escribirá $\{X_s\}_{s\in S}$ o $\{X_s : s \in S\}$. Utilizamos los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ para representar a los números naturales, enteros y reales respectivamente. Un superíndice $+$ en alguno de estos símbolos, se usará para el subconjunto de elementos positivos correspondiente, por ejemplo $\mathbb{R}^+$ simboliza a los reales positivos. El intervalo unitario $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ es denotado por I y el conjunto vacío por $\varnothing$. Los símbolos $\leq, \geq, <, >$ y $\neq$ se utilizan para indicar la relación que guardan entre sí elementos de un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$.

Al escribir $f : X \to Y$ estamos indicando que f es una función con dominio X y contradominio Y. La imagen inversa de un subconjunto B bajo f se representa mediante $f^{-1}(B)$ y $f(x)$ es el valor que toma la función en el punto x. Si f y g representan funciones, su composición, en caso de estar definida se escribirá $f \circ g$. Si $D \subseteq X$ y f denota una función con dominio X, la restricción de f a D se simboliza como $f\,|_D$. La cardinalidad de un conjunto J se escribe $|J|$ y si $\mathfrak{m}$ es un cardinal, $\mathfrak{m}^+$ es el sucesor de $\mathfrak{m}$.

Si X denota un espacio topológico y $A \subseteq X$, la cerradura de A en X se designa por $\overline{A}$ y si $D \subseteq X$ y $A \subseteq D$, la cerradura de A en D se representará por $\overline{A}$ o $cl_D(A)$ y el interior relativo de A en D por $int_D(A)$. Finalmente $D(\lambda)$ se utilizará para especificar al espacio discreto de cardinalidad λ. En particular se abreviará $D = D(2) = \{0, 1\}$ para el espacio discreto con dos puntos.

CAPÍTULO 1

Antecedentes

1. Preliminares

El propósito de este capítulo es establecer tanto la notación empleada como las definiciones básicas utilizadas a lo largo de este trabajo. Algunos de los resultados presentados en la tesis, se han establecido para espacios puramente topológicos y algunos otros involucran además una estructura algebraica. Por esta razón presentamos en primer término los conceptos de carácter puramente topológico y en segundo término los referentes a estructuras algebraicas.

2. El problema de factorización

Los resultados de factorización que son de nuestro interés se refieren a funciones cuyo dominio siempre es un producto topológico de espacios, o un subespacio de tal producto.

Dada una familia de espacios topológicos $\{X_s\}_{s\in S}$, denotaremos por $X = \prod_{s\in S} X_s$ al producto cartesiano con la topología Tikhonov, es decir aquella topología que tiene como la base abiertos básicos de la forma $U = \prod_{s\in A} U_s \times \prod_{s\in S\setminus A} X_s$ en donde A es un subconjunto finito de S, y para cada índice $s \in A$, U_s es un subconjunto abierto propio de X_s. Al conjunto A lo denotaremos por $coord(U)$ y lo llamaremos el *conjunto coordenado* de U. Si $J \subseteq S$, la función $\pi_J : \prod_{s\in S} X_s \to X_J = \prod_{s\in J} X_s$ dada por $(\pi_J(x))_i = x_i$ para cada $i \in J$ se llama la *función proyección* sobre X_J.

Uno de los objetivos que se persiguen al factorizar una función es el de conocer su complejidad. En realidad, ésta se encuentra fuertemente ligada con las propiedades que posee el producto topológico a través de sus factores. Dada una función, cada uno de los factores que intervendrán en su factorización, se debe de escoger de manera que nos ayude a obtener información acerca de su comportamiento. Para ello, es razonable imponer que por lo menos alguno de los factores séa más "simple" que la función a estudiar. De entre los diferentes tipos de factorizaciones que puede admitir una función dada nos interesa el siguiente.

DEFINICIÓN 1.1. Sea $X = \prod_{s\in S} X_s$ un producto topológico y sea Y un espacio. Se dice que una función continua $f : X \to Y$ *depende de a lo más κ coordenadas*, si existe $J \subseteq S$ tal que $|J| \leq \kappa$ y si siempre que dos puntos $x, y \in X$ satisfacen $\pi_J(x) = \pi_J(y)$, entonces $f(x) = f(y)$. Además, decimos que f es *factorizable en X_J*, si existe una función continua $g : X_J \to Y$ tal que $f = g \circ \pi_J$.

En el caso en que $\kappa = \aleph_0$ diremos que f depende de a lo más una cantidad numerable de coordenadas. Los resultados de factorización que se presentan en el capítulo II se refieren únicamente a este caso, debido a su aplicabilidad y fácil generalización, así como por razones históricas. Algunos resultados de factorizacion vía subproductos finitos son presentados por M. Hušek [**9**] y las técnicas de demostración utilizadas no son más simples que en el caso infinito.

Asociado con el concepto de factorización de funciones damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. Sean $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de conjuntos y $X = \prod_{s\in S} X_s$. Decimos que un subconjunto $W \subseteq X$ *depende sólo de $S_0 \subseteq S$* si siempre que $x \in W, y \in X$ satisfacen $\pi_{S_0}(x) = \pi_{S_0}(y)$, entonces $y \in W$ (en forma equivalente si $W = \pi_{S_0}^{-1}\pi_{S_0}(W)$).

El problema de factorización en general no es trivial. Si no imponemos algunas restricciones sobre el dominio y/o el contradominio, no podemos afirmar que exista solución. Un ejemplo de una función continua que depende de una cantidad no numerable de coordenadas fue propuesto por R. Engelking [**12**] (p.147) y se presenta a continuación.

Ejemplo 1. Sean $T = D(\mathfrak{c})$ el espacio discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y $D = \{0, 1\}$ el espacio discreto con dos puntos. Para cada $t \in T$, sea $D_t = D$. Considere $X = T \times \prod_{t\in T} D_t$ y $f : X \to D$ dada por $f(t, x) = \pi_t(x)$, para todo $(t, x) \in X$ y en donde $\pi_t : \prod_{t\in T} D_t \to D_t$ es la proyección. Entonces f depende de una cantidad no numerable de coordenadas.

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que f es continua. Sea (t', x') un punto fijo pero arbitrario de X. El conjunto $U' = \{t'\} \times (\{\pi_{t'}(x')\} \times \prod\{D_t : t \in T, t \neq t'\})$ es una vecindad abierta de (t', x'), y si $(t', y) \in U'$, entonces $f(t', y) = \pi_{t'}(y) = \pi_{t'}(x') = f(t', x')$. Esto prueba que f es continua en (t', x'), y como dicho punto fue arbitrario se sigue que f es continua.

Se afirma que f no depende de una cantidad contable de coordenadas. Supongamos lo contrario, es decir que existe $S \subseteq T, |S| \leq \aleph_0$ tal que si $(t, x), (s, y) \in X$ satisfacen $\pi_S(t, x) = \pi_S(s, y)$, entonces

$f(t,x) = f(s,y)$. Como $|T| > \aleph_0$, existe $l \in T$ tal que $l \notin S$. Considere los puntos $(l,z) \in X$, donde, $\pi_t(z) = 0$ para todo $t \in T$ y $(l,v) \in X$, tal que,

$$\pi_t(v) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in S; \\ 1, & \text{si } t \in T \setminus S. \end{cases} \tag{1}$$

Claramente $\pi_S(l,z) = \pi_S(l,v)$ y sin embargo $f(l,z) = \pi_l(z) = 0 \neq 1 = \pi_l(v) = f(l,v)$ lo cuál es una contradicción. ■

Otro ejemplo también debido a R. Engelking se puede encontrar en la tesis doctoral de Y. M. Ulmer [**16**].

Podemos afirmar entonces que el problema de factorizar ("numerablemente") una función continua $f : X \to Y$ donde X es un producto topológico y Y un espacio arbitrario consiste en:

1. Buscar condiciones sobre el producto X y sobre el espacio Y de tal manera que se garantice que la función f dependa de a lo más de una cantidad numerable de coordenadas, digamos J.
2. Definir una función $g : X_J \to Y$ tal que $f = g \circ \pi_J$ y probar que g es continua, es decir "factorizar" a f a traves de una proyección sobre un subproduto numerable.

En algunos casos, para probar que la función g es continua, podemos aplicar el siguiente resultado.

LEMA 1.3. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $\pi : X \to Z$ una función continua sobre y abierta. Si existe una función $g : Z \to Y$ tal que $f = g \circ \pi$, entonces g es continua.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un subconjunto abierto de Y. Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es abierto en X. De la igualdad $f^{-1}(V) = (g \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(g^{-1}(V))$ se sigue que $\pi(f^{-1}(V)) = \pi \circ \pi^{-1}(g^{-1}(V)) = g^{-1}(V)$, donde la última identidad se cumple debido a que π es sobre. Y utilizando el hecho de que π es abierta concluimos que $g^{-1}(V)$ es abierto en Z, lo que prueba que g es continua. ■

Generalmente siempre que aparece un teorema de factorización en la literatura, este es utilizado como una herramienta auxiliar para probar otro tipo de resultados. Por ejemplo, como ya mencionamos en la introducción, S. Mazur [**15**] y R. Engelking [**11**] la utilizaron para probar que una función secuencialmente continua sobre un producto es continua, H. H. Corson [**5**] hizo uso de ella para el estudio de Σ-productos, I. Glicksberg [**13**] para su resultado acerca de la compactificación de Čech-Stone de productos, J. R. Isbell [**23**] para espacios localmente finos. J. Keesling [**14**] dio una prueba simple mediante la factorización de funciones continuas del resultado de Noble [**25**] que X^α no es normal si X no es compacto y α es mayor o igual que el máximo entre el peso del espacio y ω_1. A. V. Arhangelskiĭ [**1**] aplica esa técnica en una investigaión de funciones cardinales, V. Uspenskiĭ [**31**] en compactos Dugundji, M. G. Tkačenko [**29**] en funciones cardinales para grupos topológicos. M. Hušek [**22**] la usa en otra prueba del resultado de M. Tkačenko [**30**] de que el producto de subconjuntos relativamente seudocompactos de grupos topológicos es relativamente seudocompacto en el producto de los grupos.

Esta lista es tan sólo una pequeña muestra de las aplicaciones potenciales de resultados de factorización. Nuestro interés es presentar los teoremas básicos que ilustren diferentes técnicas de demostración empleadas en esta área.

Vale la pena mencionar que debido a la gran cantidad de resultados acerca de factorizaciónes, este tema puede ya ser considerado como un área de investigación dentro de la topología.

Al lector interesado en el tema se le recomienda consultar el artículo de M. Hušek [**9**], en donde se describen algunos resultados conocidos acerca de factorizaciones en forma tabular.

3. Conceptos topológicos básicos

Presentamos ahora las condiciones puramente topológicas que serán utilizadas en los resultados de factorización, al imponerlas es posible garantizar que f admite una factorización.

Recordemos que en un espacio topológico, los primeros conceptos que se dan son en relación al número de abiertos que posee la topología, para ello se definen los conceptos de base y base local en un punto, y a través de ellos se dan los axiomas de contabilidad.

El *carácter de un punto* x en un espacio topológico X se define como el número cardinal más pequeño de la forma $|\mathcal{B}(x)|$, donde $\mathcal{B}(x)$ es una base local en el punto x, este número cardinal se denota como $\chi(x, X)$.

El *carácter de un espacio topológico* X se define como el supremo de todos los números $\chi(x, X)$, para $x \in X$; este número cardinal se denota por $\chi(X)$. Si $\chi(X) \leq \aleph_0$, diremos entonces que X satisface el *primer axioma de numerabilidad* o que *X es primero numerable*, es decir, cada punto x de X posee una base contable.

El *peso* de un espacio topológico X se define como el cardinal más pequeño de la forma $|\mathcal{B}|$ en donde $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y se denota por $w(X)$. Si $w(X) \leq \aleph_0$ diremos que el espacio X satisface el *segundo axioma de numerabilidad* o que es *segundo numerable*, lo que significa que el espacio X tiene una base contable.

Otro tipo de propiedades de un espacio, son los llamados axiomas de separación que se relacionan con las formas en que podemos separar puntos y conjuntos cerrados dentro del espacio. Los más utilizados son los siguientes.

Un espacio topológico X se llama un *espacio* T_1 si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen un conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $x_1 \in U$ y $x_2 \notin U$.

Un espacio topológico X se llama un *espacio* T_2, o un *espacio de Hausdorff*, si para cada par de puntos distintos de X existen vecindades ajenas que los contienen; es decir, si dados $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ existen conjuntos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Claramente, todo espacio T_2 es un espacio T_1.

Un espacio topológico X se llama un *espacio regular*, si X es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$, existen conjuntos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que $x \in U_1$, $F \subseteq U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Es claro que todo espacio regular es de Hausdorff.

Un espacio topológico X se llama un *espacio* $T_{3\frac{1}{2}}$, o un *espacio de Tikhonov*, o un *espacio completamente regular*, si X es un espacio T_1 y para cada $x \in X$ y cada conjunto cerrado $F \subseteq X$ tal que $x \notin F$ existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in F$. Se sabe que no todo espacio regular es de Tikhonov [**12**].

Un espacio topológico X se llama un *espacio* T_4, o espacio *normal*, si X es un espacio T_1 y para cada par de subconjuntos cerrados ajenos $A, B \subseteq X$ existen conjuntos abiertos ajenos $U, V \subseteq X$ tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. También es claro que todo espacio normal es regular, y del Lema de Urysohn se deduce que todo espacio normal es de Tikhonov.

Más propiedades que distinguen a un espacio de otro se dan a través de las llamadas funciones cardinales de acuerdo a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.4. Una *función cardinal*, es una función f, que le asigna a todo espacio topológico X un número cardinal $f(X)$ tal que, si X, Y son espacios homeomorfos, entonces $f(X) = f(Y)$. Para una función cardinal f, denotamos por hf la función cardinal cuyo valor sobre un espacio X es igual a $\sup f(M)$, donde el supremo es tomado sobre todos los subespacios M del espacio X. La función hf se llama *f-hereditaria*.

Veamos algunos ejemplos.

Recordemos que un conjunto A en un espacio topológico X se llama un *conjunto* G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos de X, es decir si existe una sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abiertos en X tal que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$. En relación con este concepto tenemos la siguiente función cardinal.

DEFINICIÓN 1.5. El *seudocarácter de un punto* $x \in X$, en donde X es un espacio T_1 es el número cardinal más pequeño denotado $\psi(x, X)$ de la forma $|\mathcal{U}|$, donde $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $\bigcap\mathcal{U} = \{x\}$. El *seudocarácter de un espacio* X que es T_1 se define como el supremo sobre todos los números $\psi(x, X)$ para $x \in X$, y se denota por $\psi(X)$.

Otra forma de expresar que un espacio tiene el seudocarácter numerable es diciendo que todos sus puntos son G_δ. Más ejemplos de funciones cardinales se presentan a continuación.

DEFINICIÓN 1.6. Sea X un espacio topológico. El número cardinal más pequeño $\boldsymbol{m} \geq \aleph_0$ tal que toda familia de conjuntos abiertos no vacíos disjuntos por pares tiene cardinalidad $\leq \boldsymbol{m}$, es llamado el *número de Souslin*, o la *celularidad* del espacio X y se denota por $c(X)$. Si $c(X) = \aleph_0$, decimos que el espacio X tiene la propiedad de Souslin o que satisface la *condición de cadena contable* (abreviado la ccc).

DEFINICIÓN 1.7. Decimos que un número cardinal $\boldsymbol{m} > \aleph_0$ es un *calibre* de un espacio X si toda familia de cardinalidad $\boldsymbol{m}$ formada por subconjuntos abiertos no vacíos de X, contiene una subfamilia de cardinalidad $\boldsymbol{m}$ con intersección no vacía. El número cardinal más pequeño $\boldsymbol{m} \geq \aleph_0$ tal que toda familia de cardinalidad $> \boldsymbol{m}$ formada por subconjuntos abiertos no vacíos de X contiene una subfamilia de cardinalidad $> \boldsymbol{m}$ con intersección no vacía se llama el *número de Šanin* del espacio X y se denota por $\check{s}(X)$. Claramente $\check{s}(X)$ es el número cardinal más pequeño $\boldsymbol{m} \geq \aleph_0$ con la propiedad de que el número cardinal $\boldsymbol{m}^+$ es un calibre del espacio X.

Observación. Ross y Stone [**19**] utilizan la siguiente definición relacionada con el concepto de un calibre: X es un (K)-*espacio* si toda familia no numerable de conjuntos abiertos contiene una subfamilia no numerable en la que cada par de conjuntos abiertos tiene intersección no vacía.

Ocurre entonces que todos los espacios separables tienen el número de Šanin numerable, todos los espacios con número de Šanin numerable son (K)-espacios; y todos los (K)-espacios satisfacen la *ccc*, es decir, tienen la celularidad numerable.

Una propiedad diferente de las anteriores se relaciona con el tipo de subespacios que posee un espacio dado de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.8. La *densidad* de un espacio X, es el número cardinal más pequeño de la forma $|A|$, donde A es un subconjunto denso de X, es decir $\overline{A} = X$. Este número cardinal es denotado mediante $d(X)$. Si $d(X) \leq \aleph_0$, decimos que el espacio es separable.

Sabemos que todo espacio segundo numerable es separable. Cercanamente relacionado con el concepto de densidad lo está el concepto de red para un espacio, ya que ambos tienen que ver de alguna manera con aproximación de puntos mediante subconjuntos.

DEFINICIÓN 1.9. Una familia $\mathcal{N}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es una red para X, si para cada punto $x \in X$ y cualquier vecindad U de x existe un $M \in \mathcal{N}$ tal que $x \in M \subseteq U$.

Claramente, cualquier base para X es una red para X. La familia de todos los subconjuntos de X que constan de un solo punto es otro ejemplo de una red.

DEFINICIÓN 1.10. El peso red de un espacio X es el número cardinal más pequeño de la forma $|\mathcal{N}|$, donde $\mathcal{N}$ es una red para X y se denota por $nw(X)$.

Es importante observar que si $\{X_n : n \in \omega\}$ es una familia de espacios topológicos con el peso red numerable, entonces también el peso red del producto es numerable, es decir $nw(\prod_{n\in\omega} X_n) \leq \aleph_0$.

Observación. En cualquier espacio topológico X, se tiene que la densidad hereditaria es menor o igual al peso red, es decir, $hd(X) \leq nw(X)$. Algunas desigualdades entre funciones cardinales aparecen en [**12**].

Finalmente en lo referente a funciones cardinales, están las que se relacionan con propiedades de las cubiertas abiertas del espacio.

Decimos que un espacio topológico X es un *espacio de Lindelöf*, o tiene la *propiedad de Lindelöf*, si X es regular y toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable. Más general, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.11. Sea X un espacio topológico. El número cardinal más pequeño m tal que toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad $\leq m$ es llamado el *número de Lindelöf* del espacio X y se denota por $l(X)$.

DEFINICIÓN 1.12. Un espacio topológico X es llamado *débilmente Lindelöf* si toda cubierta abierta de X contiene una subfamilia numerable cuya unión es densa en X.

En particular, cualquier espacio de Lindelöf es débilmente de Lindelöf, así como cualquier espacio con celularidad numerable.

En un cierto tipo de técnicas de demostración se utiliza el concepto de σ-producto que presentamos a continuación.

DEFINICIÓN 1.13. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos. En el producto $X = \prod_{s\in S} X_s$, sea $a \in X$ un punto fijo. Si $x \in X$, el *soporte* de x denotado $supp(x)$ es el conjunto dado como $supp(x) = \{s \in S : x_s \neq a_s\}$.

Si $U \subseteq X$, el *conjunto dependencia* de U denotado $coord(U)$ es el conjunto $coord(U) = \{s \in S : U_s \neq X_s\}$. El σ-producto de la familia $\{X_s : s \in S\}$ es el conjunto

$$\sigma(a) = \{x \in X : |supp(x)| < \aleph_0\}$$

con la topología inducida por el producto X.

Cambiando el orden de ideas recordemos que un espacio topológico X es *seudocompacto* si X es un espacio de Tikhonov y toda función real y continua definida sobre X está acotada. Una generalización de este concepto se da a continuación.

DEFINICIÓN 1.14. Sean κ, α cardinales tales que $\omega \leq \kappa \leq \alpha$. Un espacio topológico se llama (α, κ)-*seudocompacto*, si dados cualesquiera α conjuntos abiertos existe $x \in X$ tal que cada vecindad de x intersecta por lo menos a κ elementos de la familia dada.

Por ejemplo, los espacios (ω, ω)-seudocompactos son exactamente los espacios seudocompactos.

Algunas veces en el producto de espacios se considera otra topología diferente a la de Tikhonov llamada la *topología de caja*, como se da a continuación.

Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia no vacía de espacios Tikhonov X_s. Sea $X = \prod_{s\in S} X_s$ su producto cartesiano. Si κ es un cardinal infinito, la topología κ-caja en X es aquella que tiene como base a todos los conjuntos de la forma $U = \prod_{s\in S} U_s$, con U_s abierto para cada $s \in S$ y con $|coord(U)| < \kappa$. Por ejemplo, la topología producto usual es la ω-caja topología en X. Denotaremos al conjunto X con la κ-caja topología como $(X)_\kappa$.

Para números cardinales recordemos lo siguiente.

DEFINICIÓN 1.15. Sean α y κ cardinales. Entonces α es *fuertemente κ-inaccesible* si $\beta^\lambda < \alpha$ siempre que $\beta < \alpha$ y $\lambda < \kappa$.

Damos las dos últimas definiciones de tipo topológico que se utilizarán en adelante.

Supongamos que tenemos un espacio topológico X, una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos y una familia de funciones continuas

$\{f_s\}_{s\in S}$, donde $f_s : X \to X_s$ para cada $s \in S$. La *diagonal de las funciones* $\{f_s\}_{s\in S}$, $\triangle_{s\in S} f_s$ es la función continua $\triangle_{s\in S} f_s : X \to \prod_{s\in S} X_s$ tal que si $x \in X$, $(\triangle_{s\in S} f_s(x))_s = f_s(x)$ para toda $s \in S$.

En el caso en el que todos los espacios son iguales con X, es decir $X_s = X$ para toda $s \in S$ y las funciones f_s son la identidad en X_s, $f_s = id_{X_s} : X_s \to X_s$, la *diagonal del produto cartesiano* $Z = \prod_{s\in S} X_s$, es la imágen $\Delta = i(X) \subseteq \prod_{s\in S} X_s$ de la diagonal $i = \triangle_{s\in S} id_{X_s} : X \to Z$. Decimos que un espacio $\prod_{s\in S} X_s$ tiene la diagonal G_δ, si la diagonal Δ es un conjunto G_δ en $\prod_{s\in S} X_s$.

DEFINICIÓN 1.16. Sea X un espacio topológico. Decimos que X tiene la diagonal $\overline{G_\delta}$, si el subconjunto $\{(x,x) : x \in X\}$ de X^2 es la intersección contable de vecindades cerradas en $X \times X$.

Sea X un espacio topológico. Una función continua $f : X \to X$ es llamada una *retracción* de X, si $f \circ f = f$; el conjunto $f(X) \subseteq X$, es un *retracto* de X.

4. Algunos conceptos algebraicos

Pasemos ahora a algunas definiciones relativas a estructuras algebraicas.

DEFINICIÓN 1.17. Una triada $(S,*,e)$ se llama un *semigrupo con identidad* e_S, si S es un conjunto no vacío, $* : S \times S \to S$ es una operación binaria y e_S es un elemento de S tales que:

1. la operación es asociativa, es decir $a*(b*c) = (a*b)*c$ para cualesquiera $a,b,c \in S$;
2. $e_S * a = a * e_S = a$, para todo $a \in S$.

DEFINICIÓN 1.18. Un semigrupo $(S,*)$, es llamado un semigrupo topológico si se cumplen las siguientes condiciones:
(i) S es un espacio topológico y,
(ii) la operación $*$ del semigrupo es una función continua.

DEFINICIÓN 1.19. Sea $(S,*)$ un semigrupo topológico. Un subconjunto S' de S se llama un subsemigrupo topológico si se cumplen las siguientes condiciones:
(i) S' con la operación $*$ de S es un semigrupo;
(ii) S' hereda la topología de subespacio de S.

DEFINICIÓN 1.20. Sean X un conjunto no vacío, $(S,*,e_S)$ un semigrupo con identidad y $h : S \times X \to X$ una función que satisface:

1. $h(s,h(t,a)) = h(s*t,a)$, para cualesquiera $a \in X$ y $s,t \in S$;
2. $e_S a = a$, para todo elemento a de X.

Entonces la función h es llamada una acción de S sobre X por la izquierda, y X se llama un S-conjunto.

En adelante abreviaremos $h(s,a) = sa$ para $s \in S$ y $a \in X$, por lo que la primera condición se escribirá $s(ta) = (s * t)a$.

DEFINICIÓN 1.21. Sean S un semigrupo topológico y X un espacio topológico con la acción $h : S \times X \to X$. Decimos que X es un S-espacio si la acción h sobre X es una función continua.

Observemos que cualquier producto Tikhonov $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ de espacios topológicos se puede considerar como un S-espacio de la siguiente manera.

Para cada $\alpha \in A$, sea $S_\alpha = \{e_\alpha, a_\alpha\}$ el semigrupo topológico con la operación dada por: $e_\alpha * a_\alpha = a_\alpha * e_\alpha = a_\alpha, e_\alpha * e_\alpha = e_\alpha, a_\alpha * a_\alpha = a_\alpha$, y con la topología discreta. Sea $S = \prod_{\alpha \in A} S_\alpha$ el producto tikhonov de los espacios S_α, con la operación de semigrupo dada componente a componente, es decir si $s, t \in S$, entonces $(s * t)_\alpha = s_\alpha * t_\alpha$ para cada $\alpha \in A$. Es inmediato ver que S es un semigrupo con identidad $e \in S$, donde $(e)_\alpha = e_\alpha$ para toda $\alpha \in A$. Además, la operación $* : S \times S \to S$ es continua, puesto que sus composiciones con las proyecciones $\pi_\alpha : S \to S_\alpha$ claramente lo son.

Definimos la acción $h : S \times X \to X$ fijando un elemento $x^0 \in X$ y haciendo

$$(h(s,x))_\alpha = (sx)_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \text{si } s_\alpha = e_\alpha; \\ x^0_\alpha, & \text{si } s_\alpha = a_\alpha. \end{cases}$$

Con esta definición es una rutina comprobar que X es un S-conjunto, mas aún h es continua. En efecto, comprobemos que la composición de h con cada una de las proyecciones $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ es una función continua. Fijemos dos elementos $s \in S$ y $x \in X$ arbitrarios y consideremos un abierto U_α en X_α tal que $(sx)_\alpha \in U_\alpha$. Se presentan los siguierntes dos casos.
(i) Si $s_\alpha = e_\alpha$, consideramos los abiertos $V = \prod_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} S_\beta \times \{e_\alpha\}$ de S y $U = (\prod_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} X_\beta) \times U_\alpha$ de X, que contienen a s y a x respectivamente. Se tiene que si $(s', x') \in V \times U$, entonces $\pi_\alpha h(s', x') = \pi_\alpha(s'x') = (s'x')_\alpha = s'_\alpha x'_\alpha = e_\alpha x'_\alpha = x'_\alpha \in U_\alpha$, es decir $\pi h(V \times U) \subseteq U_\alpha$.
(ii) Si $s_\alpha = a_\alpha$, entonces los abiertos $V = \prod_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} S_\beta \times \{a_\alpha\}$ de S y $U = (\prod_{\beta \in A \setminus \{\alpha\}} X_\beta) \times U_\alpha$ de X, contienen a s y a x respectivamente. Se tiene que $\pi_\alpha h(V \times U) \subseteq U_\alpha$, ya que si $(s', x') \in V \times U$, entonces $\pi_\alpha h(s', x') = \pi_\alpha(s'x') = (s'x')_\alpha = s'_\alpha x'_\alpha = a_\alpha x'_\alpha = x^0_\alpha \in U_\alpha$.

Los casos anteriores prueban que h es continua.

Motivados por el hecho de que dado un grupo topológico compacto G y una función continua de valores reales sobre G, existe un subgrupo cerrado G_δ de G con la propiedad de que f es constante sobre cualquier clase lateral del subgrupo [**20**], damos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.22. Sean X un S-espacio y E un subconjunto de X.

1. E se llama de tipo contable si existe un subsemigrupo S' cerrado y G_δ de S tal que $S'E \subseteq E$, es decir para todo $s \in S'$ y para todo $x \in E$ se tiene que $sx \in E$.
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es una función de valores reales, se dice que f es de tipo contable si existe S' subsemigrupo cerrado y G_δ de S tal que $f(sx) = f(x)$ siempre que $s \in S', x \in E$. En este caso diremos que los elementos de S' dejan a f invariante.

DEFINICIÓN 1.23. Sea X un conjunto no vacío. Una *operación de Maltsev* en X es una función $m : X^3 \to X$ tal que $m(x,x,y) = m(y,x,x) = y$ para cualesquiera $x, y \in X$. El par (X, m) es llamado un *espacio de Maltsev.* Además, $A \subseteq X$ es *un subconjunto de Maltsev* si es cerrado bajo la operación m, es decir para todo $(x,y,z) \in A^3$ se tiene que $m(x,y,z) \in A$.

DEFINICIÓN 1.24. Sea X un espacio topológico y $m : X^3 \to X$ una operación de Maltsev en X. Si m es una función continua, entonces (X, m) es llamado un *espacio topológico de Maltsev.* Si la operación m es únicamente continua en su primera coordenada, entonces (X, m) es llamado un *espacio semitopológico izquierdo de Maltsev.*.

Veamos algunos ejemplos:

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo algebraico, entonces G es un espacio de Maltsev con la operación de Maltsev $m : G^3 \to G$ dada como $m(x,y,z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ para todos $x, y, z \in G$. F[illegible]te sentido, un espacio de Maltsev es una generalización d[illegible]cepto de grupo.
2. Cualquier cociente G/H de un grupo al[illegible]abeliano $(G, \cdot)$ por un subgrupo H de G es un espacio [illegible]sev si definimos la operación de Maltsev $m : (G/H$[illegible]como
   $m(xH, yH, zH) = x \cdot y^{-1} \cdot zH$ pa[illegible]esquiera $x, y, z \in G$.
3. Sean (X, m) un espacio topológico de Maltsev y $f : X \to X$ una retracción de X, entonces $Y = f(X)$ es un espacio de Maltsev. En efecto, definamos $s : Y^3 \to Y$ por $s(x,y,z) = f(m(x,y,z))$ para todos $x, y, z \in Y$. Si $x, y \in Y$, existen $a, b \in X$ tales que $x = f(a), y = f(b)$ y se cumple que
   $s(x,x,y) = s(f(a), f(a), f(b)) = f(m(f(a), f(a), f(b))$
   $= f(f(b)) = f(b) = y,$
   y también que

$$s(y,x,x) = s(f(b),f(a),f(a)) = f(m(f(b),f(a),f(a)) = f(f(b)) = f(b) = y.$$

Lo que prueba que (Y,s) es un espacio de Maltsev.

4. Para cada $\alpha \in A$, sea (X_α, m_α) un espacio de Maltsev. Entonces el producto $X_A = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ es un espacio de Maltsev con la operación m_A definida coordenada a coordenada, es decir con

$$m_A : (X_A)^3 \to X_A \quad \text{dada por} \quad (m_A(x,y,z))_\alpha = m_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$$

para cualesquiera $x,y,z \in X_A$ y $\alpha \in A$. Si además cada (X_α, m_α) es un espacio semitopológico izquierdo de Maltsev, entonces el espacio (X_A, m_A) con la topología producto también lo es.

Tenemos el siguiente concepto en espacios de Maltsev, equivalente al de homomorfismo en estructuras algebraicas.

DEFINICIÓN 1.25. Sean (X,m) y (Y,s) espacios de Maltsev. Una función $f : X \to Y$ se llama un *homomorfismo* si preserva la operación, es decir si $f(m(x,y,z)) = s(f(x),f(y),f(z))$ para todo $(x,y,z) \in X^3$.

Una propiedad interesante que tienen los homomorfismos cociente entre espacios semitopológicos izquierdos de Maltsev es la de ser abiertos, hecho que probamos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.26. *Sean (X,m) y (Y,s) dos espacios semitopológicos izquierdos de Maltsev y $f : X \to Y$ un homomorfismo cociente. Entonces f es una función abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar que $f^{-1}(f(A))$ es abierto para cada subconjunto abierto A de X. Sean $A \subseteq X$ un abierto arbitrario y $p \in f^{-1}(f(A))$. Existe $a \in A$ tal que $f(p) = f(a)$. Como $m(p,p,a) = a$ y m es continua en su primera coordenada, existe U abierto en X tal que $p \in U$ y $m(U,p,a) \subseteq A$. Sea $x \in U$, tenemos entonces que $f(x) = s(f(x),f(p),f(p)) = s(f(x),f(p),f(a)) = f(m(x,p,a)) \in f(A)$, de modo que $U \subseteq f^{-1}(f(A))$. ■

CAPÍTULO 2

Teoremas de Factorización

El objetivo principal de este capítulo es el de presentar algunos teoremas básicos de factorización. Todos los resultados expuestos a continuación son conocidos y han sido elegidos de manera que en sus demostraciones se empleen diferentes técnicas.

1. Resultados principales

Nuestro primer resultado se debe a K. Ross y A.H. Stone [**19**]. En el teorema se consideran un producto de espacios separables y una función continua hacia un espacio regular segundo numerable.

No obstante que el teorema de Ross y Stone fue generalizado por A. M. Gleason (resultado que apareció en [**23**]), las ideas utilizadas en ambas demostraciones son diferentes.

La prueba del teorema se basa en el hecho de que si cada factor X_s de un producto $X = \prod_{s\in S} X_s$ es separable, entonces la cerradura de cualquier subconjunto abierto de X, depende solo de un subconjunto contable de X (definición 1.2). Comencemos con el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1. *Sea $X = \prod_{s\in S} X_s$ un producto topológico, donde cada factor X_s es un espacio separable. Entonces $\check{s}(X) = \aleph_0$, es decir, el número cardinal $\aleph_1$ es un calibre de X. En particular, X es un (K)-espacio y satisface la ccc.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos mostrar que toda familia de abiertos en X con cardinalidad $\aleph_1$ admite de una subfamilia de la misma cardinalidad con intersección no vacía. Sea $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\gamma : \gamma \in \omega_\infty\}$ una familia de abiertos en X. Para cada $U_\gamma \in \mathcal{U}$, sea V^γ un subconjunto abierto básico no vacío en X tal que $V^\gamma \subseteq U_\gamma$. Considere la familia

$$\mathcal{W} = \{\mathcal{V}^\gamma : \gamma \in \omega_\infty\}.$$

Si $\mathcal{W}$ es contable, entonces uno de los conjuntos $V^* \in \mathcal{W}$ está contenido en $\aleph_1$ miembros de $\mathcal{U}$, digamos que $\mathcal{V} = \{\mathcal{U}_\xi \in \mathcal{U} : \mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{U}_\xi\}$ es dicha subfamilia de $\mathcal{U}$. Es claro entonces que $|\mathcal{V}| = \aleph_1$ y $\cap\mathcal{V} \neq \varnothing$.

Supongamos ahora que $|\mathcal{W}| = \aleph_1$. Sea $B = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} coord(V^\gamma)$. Definimos $Y = \prod_{\alpha\in B} X_\alpha$ y $Z = \prod_{\alpha\in S\setminus B} X_\alpha$ de modo que $X = Y \times Z$. Es claro que $|B| \leq \aleph_1$ y del teorema de Hewitt-Marczewski-Pondiczery se sigue que Y es separable y por tanto $\aleph_1$ es un calibre para Y. Ya que para cada $\gamma \in \Gamma, coord(V^\gamma) \subseteq B$, podemos escribir

$$V^\gamma = V_0^\gamma \times Z$$

con V_0^γ un conjunto abierto básico en Y. La familia $\mu = \{V_0^\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos de Y también tiene cardinalidad $\aleph_1$. Existe entonces μ' subfamilia de μ tal que $|\mu'| = \aleph_1$ y $\bigcap_{W \in \mu'} W \neq \varnothing$. Es claro que esta relación también es válida para la familia $\{W \times Z : W \in \mu'\}$ de subconjuntos de X. Finalmente definimos la familia $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : W \times Z \subseteq U \quad \text{para alguna } W \quad \text{en } \mu'\}$. Entonces $\mathcal{V}$ satisface $|\mathcal{V}| = \aleph_1$, y $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \neq \varnothing$. ■

El teorema 2.1 lo probó Šanin [**27**] en 1946. En realidad Šanin probó que si $\mathfrak{m}$ es un calibre de cada factor X_α y si $\mathfrak{m}$ es un cardinal regular no numerable, entonces $\mathfrak{m}$ también es un calibre de X.

El siguiente resultado es el hecho fundamental en el que está basada la prueba del teorema de Ross y Stone.

TEOREMA 2.2. *Sea $X = \prod_{s \in S} X_s$ un producto de espacios separables. Si U es un subconjunto abierto no vacío de X, entones su cerradura $\overline{U}$ depende solo de un subconjunto contable J de S.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U un subconjunto abierto de X. Por el lema de Zorn, U contiene una familia maximal $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos básicos disjuntos por pares. Por el teorema 2.1, $\mathcal{V}$ es contable. Digamos que $\mathcal{V} = \{U_n : n \in \omega\}$.

Sean

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n, \text{ y } J = \bigcup_{n=0}^{\infty} coord(U_n).$$

El conjunto J es contable y está contenido en S. Es claro que V está determinado por los índices en J, es decir, $coord(V) \subseteq J$. También $\overline{V}$ está determinado por los índices en J. En efecto, sean $x \in \overline{V}$ y $y \in X$ tales que $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ y sea W un abierto básico en X con $y \in W$. Entonces $x \in \pi_J^{-1}\pi_J(W)$ y como $x \in \overline{V}$, tenemos que $\pi_J(W) \cap \pi_J(V) \neq \varnothing$ de donde $W \cap V$ no es vacía, es decir $y \in \overline{V}$. Debido a la maximalidad de $\mathcal{V}$ tenemos que $\overline{U} = \overline{V}$, de modo que $\overline{U}$ está determinada por los índices en J. ■

Presentamos ahora el teorema de factorización de Ross y Stone [**19**], en el cual los factores son separables.

TEOREMA 2.3. *Sea $X = \prod_{s \in S} X_s$ un produto topológico de espacios separables. Sea $f : X \to Y$ una función continua en donde Y es* *un espacio regular segundo contable. Entonces f depende de a lo más un conjunto contable de coordenadas y f es factorizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una base contable de Y. Para cada $B \in \mathcal{B}$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es abierto en X. Por el Teorema 2.2, $\overline{f^{-1}(B)}$ está determinada por una cantidad contable de índices digamos $S_B \subseteq S$. Sea $J = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} S_B$, es obvio que J es contable.

Queremos probar que f depende de J. Sean $x, y \in X$ tales que $x_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in J$. Sea $f(x) = z \in Y$. Por la regularidad de Y podemos encontrar una sucesión $\{B_k\}_{k=1}^\infty$ formada por elementos en $\mathcal{B}$ tal que:

1. $\overline{B_{k+1}} \subseteq B_k$, y
2. $z = \bigcap_{k=1}^\infty B_k = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{B_k}$.

Utilizando ahora la continuidad de f, tenemos que

$$f^{-1}(z) = f^{-1}(\bigcap_{k=1}^\infty \overline{B_k}) = \bigcap_{k=1}^\infty f^{-1}(\overline{B_k}) \supseteq \bigcap_{k=1}^\infty \overline{f^{-1}(B_k)} \supseteq f^{-1}(z).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(z) = \bigcap_{k=1}^\infty \overline{f^{-1}(B_k)}$.

Como cada conjunto $\overline{f^{-1}(B_k)}$ está determinado por el conjunto de índices S_{B_k}, se sigue que el conjunto $f^{-1}(z)$ está determinado por los índices en J. Es claro que $x \in f^{-1}(z)$. Y ya que $x_\alpha = y_\alpha$ para cada $\alpha \in J$, el punto y también pertenece a $f^{-1}(z)$, es decir $f(y) = z = f(x)$.

Definimos $g : X_J \to Y$ como sigue: si $z \in X_J$, sea $x \in \pi^{-1}(z)$ y $g(z) = f(x)$. Si y es otro punto arbitrario en el conjunto π_J^{-1}, entonces $\pi_J(x) = z = \pi_J(z)$ y por lo tanto $f(x) = f(y)$. Lo que prueba que g está bien definida. Es claro que $f = g \circ \pi_J$ y por el lema 1.3, g es continua. ■

Veamos ahora el teorema de Gleason que aparece en el libro de J. Isbell [**23**].

En escencia el teorema dice que toda función continua f definida en un producto $X = \prod_{s\in S} X_s$, de espacios separables cuyo contradominio es un espacio de Hausdorff con seudocarácter numerable tiene la forma $f = g \circ \pi_J$, donde $J \subseteq S$ es un conjunto numerable que depende de f.

Una ligera modificación en el argumento de la prueba permite extenderlo a funciones cuyo dominio es un subconjunto abierto de un producto de espacios separables [**23**]. Más aun Juhász [**24**] prueba con el mismo argumento que si $d_I(X) = \sup\{d(X_s : s \in S\}$ y $\alpha = máx\{d_I(X), \psi(X)\}$, entonces cada función continua de $X = \prod_{s\in S} X_s$ a un espacio de Hausdorff depende de a lo más α coordenadas.

Cabe mencionar que el teorema de Gleason se utiliza para dar una prueba de que en todo espacio compacto diádico el peso coincide con el caracter [**24**].

TEOREMA 2.4. *Sean* $\{X_s \mid s \in S\}$ *una familia de espacios separables,* Y *un espacio de Hausdorff con* $\psi(Y) = \aleph_0$ *y* $f : \prod_{s\in S} X_s \longrightarrow Y$ *una función continua. Entonces* f *depende a lo más de una cantidad numerable* J *de índices, y* f *es factorizable en* X_J.

DEMOSTRACIÓN. Observe que para todo $p \in X$, $\{f(p)\}$ es un conjunto G_δ en Y, digamos que $\{f(p)\} = \bigcap_{n\in\omega} V_n$, donde $V_n \subseteq Y$ es un conjunto abierto para cada $n \in \omega$.
Entonces $f^{-1}f(p) = \bigcap_{n\in\omega} f^{-1}(V_n)$, en donde cada conjunto $f^{-1}(V_n)$ es abierto ya que f es continua. Sean $H_{p,n}$ abiertos canónicos tales que $p \in H_{p,n} \subseteq f^{-1}(V_n)$ para cada $n \in \omega$ y $H_p = \bigcap_{n\in\omega} H_{p,n}$, entonces $p \in H_p \subseteq f^{-1}f(p)$. Además, si definimos $J_p = \{s \in S \mid \pi_s(H_p) \neq X_s\}$ se tiene que $|J_p| \leq \aleph_0$ y $H_p = \pi_{J_p}^{-1}\pi_{J_p}(H_p)$.

Utilizando inducción, construiremos un conjunto numerable $J \subseteq S$ que usaremos para factorizar a f. Para ello fijemos un punto arbitrario $a \in X$ y definamos un operador sobre subproductos arbitrarios de X tal que a cada punto $q \in X_K$, con $K \subseteq J$, le asocia el punto denotado $q^0 \in X$ dado por

$$\pi_s(q^0) = \begin{cases} \pi_s(q), & \text{si } s \in K, \\ \pi_s(a), & \text{si } s \in S \setminus K. \end{cases}$$

Sabemos que $a \in H_a \subseteq f^{-1}f(a)$, definimos $J_0 = J_a$, y es claro que $|J_0| \leq \aleph_0$. Como el conjunto X_{J_0} es separable, existe $D_0 \subseteq X_{J_0}$ denso y numerable.

Sea $n \in \omega$ arbitrario y supongamos que hemos definido los conjuntos $J_0 \subseteq \cdots \subseteq J_n$, con $J_s \subseteq S, |J_s| \leq \aleph_0$, para toda $s \leq n$ y también conjuntos $D_0, \ldots, D_n$ tales que $D_s \subseteq X_{J_s}$ es denso numerable para toda $s \leq n$.

Para cada $q \in D_n$, el conjunto $J_{q^0} = \{s \in S \mid \pi_s(H_{q^0}) \neq X_s\}$ es numerable, sea $J_{n+1} = (\bigcup_{q\in D_n} J_{q^0}) \bigcup J_n$. Claramente J_{n+1} es numerable y el producto $\prod_{s\in J_{n+1}} X_s$ es separable. Sea $D_{n+1} \subseteq X_{J_{n+1}}$ denso numerable.

Hemos construído para cada $n \in \omega$, el conjunto $J_n \subseteq S$ con $|J_n| \leq \aleph_0$ y D_n denso numerable en X_{J_n}. Sea $J = \bigcup_{n\in\omega} J_n$. Es claro que $|J| \leq \aleph_0$.

Debemos mostrar que si $p, q \in X$ satisfacen $\pi_J(p) = \pi_J(q)$, entonces $f(p) = f(q)$ o, equivalentemente, que $f(p) = f((\pi_J(p))^0)$.

Si $q \in D_n$ para algún $n \in \omega$, definamos $\tilde{q} = \pi_J(q^0)$ y $\widetilde{D}_n = \{\tilde{q} \mid q \in D_n\}$. Entonces $\widetilde{D} = \bigcup_{n\in\omega} \widetilde{D}_n$ es denso en X_J. En efecto, si

$U \subseteq X_J$ es un abierto canónico no vacío, sea m el primer número natural tal que $coord(U) \subseteq J_m$. Como D_m es denso en X_{J_m}, se sigue que $\pi_{J_m}(U) \bigcap D_m \neq \varnothing$, $\widetilde{D}_m \bigcap U \neq \varnothing$ y por lo tanto $\widetilde{D} \bigcap U \neq \varnothing$.

Ahora, sea $p \in X$ arbitrario y supongamos que $f(p) \neq f(p^*)$, donde hemos abreviado $p^* = (\pi_J(p))^0$. Como Y es de Hausdorff, existen abiertos disjuntos U, V en Y con $U \ni f(p), V \ni f(p^*)$. Como f es continua, existen abiertos canónicos $U_p, V_{p^*} \subseteq X$ tales que $p \in U_p, p^* \in V_{p^*}$, y $f(U_p) \subseteq U, f(V_{p^*}) \subseteq V$.

Puesto que $\pi_J(p) = \pi_J(p^*)$, se tiene que $\pi_J(U_p) \bigcap \pi_J(V_{p^*}) \neq \varnothing$, y como $\widetilde{D}$ es denso en X_J, existe $d \in \widetilde{D} \bigcap \pi_J(U_p) \bigcap \pi_J(V_{p^*})$; claramente $d^0 \in V_{p^*}$ y entonces $f(d^0) \in V$.

Por otro lado, el punto $\bar{d} \in X$ dado por

$$\pi_s(\bar{d}) = \begin{cases} \pi_s(d), & \text{si } s \in J \ , \\ \pi_s(p), & \text{si } s \in S \setminus J, \end{cases}$$

pertenece a U_p y entonces $f(\bar{d}) \in U$. Por definición de $\bar{d}$ se tiene que $\pi_J(d) = \pi_J(\bar{d})$, esto es d y $\bar{d}$ coinciden en J. Puesto que $d^0 \in H_{d^0} \subseteq f^{-1}f(d^0)$ y $\pi_s(H_{d^0}) = X_s$ para todo $s \in S \setminus J$, se tiene que $\bar{d} \in H_{d^0}$, lo que implica que $f(d^0) = f(\bar{d})$. La última igualdad contradice al hecho de que $d^0 \in V_{p^*}, \bar{d} \in U_p$ y $f(V_{p^*}) \bigcap f(U_p) = \varnothing$. Concluimos por tanto que si $\pi_J(x) = \pi_J(q)$, entonces $f(p) = f(q)$. De aquí se sigue que la función $g : X_J \to Y$ dada por $g(x) = f \circ \pi_J^{-1}(x)$ está bien definida.

Finalmente como $f = g \circ \pi_J$ es continua y π_J es un mapeo continuo sobre y abierto, concluimos por el lema 1.3 que g es continua.

■

El siguiente resultado fue probado por Engelking [11] y es una generalización del teorema de Mibu y del teorema de Mazur quién supone que los factores del producto son espacios T_2 y tienen peso contable y el espacio contradominio Y es de Haudorff con diagonal un G_δ en $Y \times Y$.

El teorema de Engelking utiliza el concepto de *σ-producto.* La demostración que presentamos fue sugerida por M. Tkachenko y es más breve que la original. Comenzamos con un resultado auxiliar.

LEMA 2.5. *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos tales que todo producto finito $X_{s_1} \times X_{s_2} \times \cdots \times X_{s_k}$, tiene la propiedad de Lindelöf. Entonces para todo $a \in X = \prod_{s \in S} X_s$, el σ-producto $\sigma(a) \subseteq X$ también tiene esta propiedad.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $a \in X$ fijo y γ una cubierta abierta de $\sigma(a)$ formada con abiertos canónicos en X. Utilizando inducción construiremos una subfamilia numerable de γ que cubre a $\sigma(a)$.

Sean S_0 un subconjunto no vacío numerable de S, y

$$\sigma_0(a) = \{x \in \sigma(a) : supp(x) \subseteq S_0\}.$$

Claramente $\sigma_0(a) = \bigcup\{X_A \times \{\pi_{S\setminus A}(a)\} : A \subseteq S_0, |A| < \aleph_0\}$, donde $X_A = \prod_{s\in A} X_s$. De esta última igualdad, y de que por hipótesis X_A tiene la propiedad de Lindelöf para cualquier A finito, se sigue que $\sigma_0(a)$ también tiene esta propiedad. Sea $\gamma_0 \subseteq \gamma$ una subfamilia numerable tal que $\sigma_0(a) \subseteq \bigcup \gamma_0$. Esto termina nuestro primer paso inductivo.

Supongamos que ya tenemos definidos $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n$, con S_n subconjunto numerable de S, y $\sigma_0(a) \subseteq \sigma_1(a) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_n(a)$, donde

$$\sigma_i(a) = \{x \in \sigma(a) : supp(x) \subseteq S_i\}$$

tiene la propiedad de Lindelöf para cada $0 \leq i \leq n$; y $\gamma_0 \subseteq \gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \gamma_n$ son subfamilias numerables de γ tales que $\sigma_i(a) \subseteq \bigcup \gamma_i$ para cada $0 \leq i \leq n$. Entonces para cada $V \in \gamma_n$, sea $S_V = coord(V)$ y considere $S_{n+1} = (\bigcup\{S_V : V \in \gamma_n\}) \bigcup S_n$. Es obvio que $S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq S$ y que S_{n+1} es numerable. El conjunto

$$\sigma_{n+1}(a) = \{x \in \sigma(a) : supp(x) \subseteq S_{n+1}\}$$

satisface $\sigma_{n+1}(a) = \bigcup\{X_A \times \{\pi_{S\setminus A}(a)\} : A \subseteq S_{n+1}, |A| < \aleph_0\}$. Como ésta es una unión numerable de espacios cada uno con la propiedad de Lindelöf por hipótesis, entonces también $\sigma_{n+1}(a)$ tiene esta propiedad. Sea μ_{n+1} una subfamilia numerable de γ tal que $\sigma_{n+1}(a) \subseteq \bigcup \mu_{n+1}$; y definimos $\gamma_{n+1} = \mu_{n+1} \bigcup \gamma_n$.

Hemos obtenido entonces subconjuntos de S, $S_0 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq \ldots$, con S_n numerable; subfamilias de γ, $\gamma_0 \subseteq \cdots \subseteq \gamma_n \subseteq \ldots$, y subespacios con la propiedad de Lindelöf $\sigma_0(a) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_n(a) \subseteq \ldots$, tales que $\sigma_i(a) \subseteq \bigcup \gamma_i$ para cada $0 \leq i \leq n$.

Sean $S^* = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, $\sigma_{S^*}(a) = \bigcup_{n\in\omega} \sigma_n(a)$ y $\gamma^* = \bigcup_{n\in\omega} \gamma_n$. Entonces γ^* es subfamilia numerable de γ y $\sigma_{S^*}(a) \subseteq \bigcup \gamma^*$. Se afirma que γ^* es cubierta de $\sigma(a)$.

Sea $x \in \sigma(a)$ un punto arbitrario y considere $K = supp(x) \bigcap S^* \subseteq S^*$, digamos que $K = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Existe entones $i \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq S_i$. Queremos encontrar un elemento $V \in \gamma^*$ tal que $x \in V$. Para ello considere el elemento $y = \pi_{S_i}(x) \times \pi_{S\setminus S_i}(a) \in \sigma_{S_i}(a)$. Como γ_i cubre a $\sigma_i(a)$, existe $V \in \gamma_i$ tal que $y \in V$. Por la construcción tenemos la igualdad $S_{i+1} = S_i \bigcup(\cup_{V\in\gamma_i} S_V)$, por lo que $supp(V) \subseteq S_{i+1}$. Finalmente observamos que como los puntos y y x tienen las mismas coordenadas en S^*, $y \in V$ y $coord(V) \subseteq S_{i+1} \subseteq S^*$, entonces también $x \in V$, es decir, γ^* cubre a $\sigma(a)$, y $\sigma(a)$ tiene la propiedad de Lindelöf.
■

Con estos elementos presentamos el teorema de factorizaión de Engelking, con él que se prueba entre otros resultados que el producto cartesiano $X = \prod_{s\in S} X_s$ de espacios compactos es la compactificación de Stone-Cĕch de $\Sigma(a)$, para cualquier $a \in X$.

TEOREMA 2.6. *Sea* $\{X_s\}_{s\in S}$ *una familia de espacios topológicos tal que todos los productos cartesianos finitos* $X_{s_1} \times X_{s_2} \times \cdots \times X_{s_k}$*, donde* $s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$*, tienen la propiedad de Lindelöf, y sea* Y *un espacio con la diagonal* G_δ*. Entonces, para cada punto* $a \in X = \prod_{s\in S} X_s$*, y cada función continua* $f : \sigma(a) \to Y$ *existen un conjunto contable* $S^* \subseteq S$*, y una función continua* $g : \pi_{S^*}(\sigma(a)) \to Y$*, tales que* f *coincide con la composición* $g \circ \pi_{S^*}\big|_{\sigma(a)}$*, donde* $\pi_{S^*} : X \to X_{S^*}$ *es la proyeción.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Delta \subseteq Y^2$ la diagonal. Por hipótesis, $\Delta = \bigcap_{n<\omega} U_n$, con U_n abierto en $Y \times Y$ para cada $n \in \omega$.

Fijemos $n \in \omega$. Para cada $x \in \sigma(a)$ existe W_x^n abierto en Y tal que $f(x) \in W_x^n$ y $W_x^n \times W_x^n \subseteq U_n$, y como f es continua, existe U_x^n abierto en $\sigma(a)$ con $x \in U_x^n$ y $f(U_x^n) \subseteq W_x^n$. La familia $\mu_n = \{U_x^n : x \in \sigma(a)\}$ es una cubierta abierta de $\sigma(a)$, y por el Lema 2.5 existe γ_n subfamilia numerable de μ_n tal que $\sigma(a) \subseteq \bigcup \gamma_n$.

Sea $S_n \subseteq S$ con $|S_n| \leq \aleph_0$ tal que todo elemento $V \in \gamma_n$ sólo depende de S_n.

Afirmamos que f depende sólo de $S^* = \bigcup_{n\in\omega} S_n$, es decir queremos probar que si $x, y \in \sigma(a)$ son tales que $\pi_{S^*}(x) = \pi_{S^*}(y)$, entonces $f(x) = f(y)$.

Sean $x, y \in \sigma(a)$ tales que $\pi_{S^*}(x) = \pi_{S^*}(y)$. Para cada $n \in \omega$ sabemos que $\sigma(a) \subseteq \bigcup \gamma_n$, por lo tanto existe $U_z^n \in \gamma_n$ tal que $x \in U_z^n$ y $coord(U_z^n) \subseteq S_n$. De la hipótesis $\pi_{S^*}(x) = \pi_{S^*}(y)$ se sigue que $\pi_{S_n}(x) = \pi_{S_n}(y)$, y como U_z^n sólo depende de S_n entonces también $y \in U_z^n$. Luego entonces $(f(x), f(y)) \in f(U_z^n) \times f(U_z^n) \subseteq W_z^n \times W_z^n \subseteq U_n$, es decir para cada $n \in \omega$, $(f(x), f(y)) \in U_n$ y por tanto $(f(x), f(y)) \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \Delta$, lo que muestra que $f(x) = f(y)$ y f depende sólo de S^*.

Definamos ahora la función $g : \pi_{S^*}(\sigma(a)) \to Y$. Si $z \in \pi_{S^*}(\sigma(a))$, elegimos $x \in \sigma(a)$ con $\pi_{S^*}(x) = z$ y hacemos $g(z) = f(x)$. Si en lugar de x escogemos otro punto $y \in \sigma(a)$ con $\pi_{S^*}(y) = z$, entonces $\pi_{S^*}(x) = \pi_{S^*}(y)$, de donde $f(x) = f(y)$, lo que prueba que g está bien definida. Por la definición también tenemos que $f = g \circ \pi_{S^*}\big|_{\sigma(a)}$. Finalmente, como $\pi_{S^*}\big|_{\sigma(a)}$ es una función continua abierta y sobre concluimos por el lema 1.3 que g es continua. ∎

Los tres teoremas presentados hasta ahora utilizan el lema 1.3, para probar que la función g que factoriza a f es continua. Podría pensarse que este siempre es el caso. El siguiente resultado de Arhangel'skiĭ [**2**] en el que se consideran funciones continuas definidas en un subconjunto denso de un producto de Tikhonov de espacios con peso red numerable y con valores en un espacio regular con carácter numerable, no sólo no hace uso del lema mencionado, sino que no se puede aplicar, ya que las restricciones de las proyecciones del producto al subconjunto denso no son abiertas.

Este teorema es utilizado para probar resultados relativos a la invariancia de algunas funciones cardinales bajo funciones continuas como por ejemplo: si un espacio regular primero numerable Y es una imagen continua de un espacio que es denso en todas partes en un producto de espacios con una red contable, entonces Y tiene una red contable. Comencemos con el siguiente lema.

LEMA 2.7. *Sea* $X = \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$, *en donde* $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$, $S_i \subseteq S_{i+1}$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$ *y sea* A *un subconjunto de* X. *Si* $Z \subseteq A$ *es tal que* $\pi_{S_i}(Z)$ *es denso en* $\pi_{S_i}(A)$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$, *entonces* Z *es denso en* A.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in A$ y V un abierto canónico en X tales que $x \in V$, queremos probar que $V \cap Z \neq \varnothing$.

El conjunto $K = coord(V)$ es finito y $K \subseteq S$. Como por hipótesis $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ y la sucesión $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ es creciente, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq S_i$. Además, $\pi_{S_i}(V) \cap \pi_{S_i}(A)$ es abierto en $\pi_{S_i}(A)$ y por la densidad de $\pi_{S_i}(Z)$ en $\pi_{S_i}(A)$ tenemos que $\varnothing \neq \pi_{S_i}(Z) \cap \pi_{S_i}(V)$.

Para terminar veamos que $\varnothing \neq Z \cap V$. Sea $z' \in \pi_{S_i}(Z) \cap \pi_{S_i}(V)$, entonces z' es de la forma $z' = \pi_{S_i}(z)$ para algún $z \in Z$. Queremos probar que $z \in V$. Pero $V = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{i_n}(U_{i_n})$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con $U_{i_l} \subseteq X_{i_l}$ subconjuntos abiertos $l = 1, \ldots, n$. De aquí se sigue que $\pi_{i_l}(z) = z'_l \in \pi_{i_l}(V) \subseteq \pi_{i_l}\pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l}) \subseteq U_{i_l}$ para cada $l = 1, \ldots, n$, es decir $z \in V$, lo que termina la prueba.

■

Veamos ahora el resultado de Arhangel'skiĭ [**2**].

TEOREMA 2.8. *Sea* $X = \prod_{\alpha \in M} X_\alpha$ *un producto de Tikhonov, donde* $nw(X_\alpha) \leq \aleph_0$ *para cada* $\alpha \in M$. *Además, sean* $A \subseteq X$ *denso en* X *y* Y *un espacio topológico regular con carácter numerable. Entonces cualquier función continua* $f : A \to Y$ *depende de una cantidad numerable de coordenadas, es decir existen* $S \subseteq M, |S| \leq \aleph_0$ *y* $g : \pi_S(A) \to Y$ *una función continua tales que* $f = g \circ \pi_S|_A$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in A$ y sea μ_y una base local en $y = f(x) \in Y$ tal que $|\mu_y| \leq \aleph_0$. Por la continuidad de f, para cada $V \in \mu_y$ existe un subconjunto U_V abierto canónico en X tal que $x \in U_V$ y

$f(U_V \cap A) \subseteq V$. Sea $S_x = \bigcup\{coord(U_V) : V \in \mu_y\}$. Es claro que $S_x \subseteq M$ y $|S_x| \leq \aleph_0$.

Por recursión construiremos una sucesión $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de M y una sucesión $\{Z_i : i \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de A tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, $|S_i| \leq \aleph_0, S_i \subseteq S_{i+1}, |Z_i| \leq \aleph_0, Z_i \subseteq Z_{i+1}$ y $\pi_{S_i}(Z_i)$ es denso en $\pi_{S_i}(A)$.

Fijemos $z_0 \in A$ arbitrario y consideremos $S_0 = S_{z_0}$. Es claro que $|S_0| \leq \aleph_0$ y $S_0 \subseteq M$. Por la hipótesis y la observación hecha después de la definición 1.10 tenemos que $nw(X_{S_0}) \leq \aleph_0$ y como $hd(X_{S_0}) \leq nw(X_{S_0})$, existe $D \subseteq \pi_{S_0}(A)$ denso y numerable. Sea $Z_0 \subseteq A$ un subconjunto numerable tal que $\pi_{S_0}(Z_0) = D$. Esto termina nuestro primer paso de la construcción.

Supongamos que ya tenemos definidos $S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_n \subseteq M$, con $|S_n| \leq \aleph_0$ y $Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq \cdots \subseteq Z_n \subseteq A$, con $|Z_n| \leq \aleph_0$ tales que $\pi_{S_i}(Z_i)$ es denso en $\pi_{S_i}(A)$ para toda $i \leq n$.

Sea $S_{n+1} = S_n \cup (\bigcup\{S_x : x \in Z_n\})$. De la hipótesis inductiva y de que $|S_x| \leq \aleph_0$ para todo $x \in A$, se sigue que $|S_{n+1}| \leq \aleph_0$ y $S_{n+1} \subseteq M$. Por la misma observación hecha después de la definición 1.10, $hd(X_{S_{n+1}}) \leq nw(X_{S_{n+1}}) \leq \aleph_0$ y existe $B \subseteq A$ tal que $|B| \leq \aleph_0$ y $\pi_{S_{n+1}}(B)$ es denso en $\pi_{S_{n+1}}(A)$. Sea $Z_{n+1} = Z_n \cup B$. Es claro que $Z_n \subseteq Z_{n+1} \subseteq A, |Z_{n+1}| \leq \aleph_0$ y $\pi_{S_{n+1}}(Z_{n+1})$ es denso en $\pi_{S_{n+1}}(A)$.

Habiendo construido las sucesiones $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}, \{Z_i : i \in \mathbb{N}\}$, sean $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$ y $Z = \bigcup_{i=0}^{\infty} Z_i$. Note que $|S| \leq \aleph_0$, $|Z| \leq \aleph_0$ y $Z \subseteq A$.

Además tenemos que $\pi_S(Z)$ es denso en $\pi_S(A)$. En efecto, este hecho se sigue de observar que $\pi_{S_n}(Z)$ es denso en $\pi_{S_n}(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y aplicar el Lema 2.7.

Probemos ahora las siguientes dos afirmaciones:

($\star$) Si $U, U' \subseteq X$ son abiertos canónicos tales que $U_\alpha = U'_\alpha$ para toda $\alpha \in S$ y $\pi_S(U) \cap \pi_S(A) \neq \varnothing$ (y por tanto también $\pi_S(U') \cap \pi_S(A) \neq \varnothing$), entonces $\overline{f(U \cap A)} \cap \overline{f(U' \cap A)} \neq \varnothing$.

En efecto, como $\pi_S(U) \cap \pi_S(A) \neq \varnothing$, existe $x \in A$ tal que $\pi_S(x) \in \pi_S(U)$. Como $\pi_S(U)$ es abierto en X_S, $\pi_S(U) \cap \pi_S(Z) \neq \varnothing$. Sea $z^* \in Z$ tal que $z^*_\alpha \in U_\alpha = U'_\alpha$ para toda $\alpha \in S$. Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que $\overline{f(U \cap A)} \cap \overline{f(U' \cap A)} = \varnothing$. Sin pérdida de generalidad digamos que $f(z^*) = y^* \notin \overline{f(U \cap A)}$. Sea W un abierto en Y que contiene a y^* tal que $W \cap f(U \cap A) = \varnothing$. Ya que $z^* \in Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, $z^* \in Z_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por la construcción, existe entonces un abierto canónico V en X tal que $z^* \in V, f(V \cap A) \subseteq W$ y $coord(V) \subseteq S_{n+1} \subseteq S$. Entonces para toda $\alpha \in S, z^*_\alpha \in U_\alpha \cap V_\alpha$ y por lo tanto $U_\alpha \cap V_\alpha \neq \varnothing$. Además, $V_\alpha = X_\alpha$ para $\alpha \in M \setminus S$ y en este caso $U_\alpha \cap V_\alpha = U_\alpha \neq \varnothing$. Concluimos que $U \cap V \neq \varnothing$.

De la densidad de A en X y del hecho de que $U \cap V$ es abierto en X podemos afirmar que $U \cap V \cap A \neq \varnothing$ y entonces $\varnothing \neq f(U \cap V \cap A) \subseteq f(U \cap A) \cap f(V \cap A)$. Pero por otro lado $f(U \cap A) \cap W = \varnothing$ y $f(V \cap A) \subseteq W$ implican que $f(U \cap A) \cap f(V \cap A) = \varnothing$ que es una contradicción, y la primera afirmación queda probada.

($\star\star$) Si $U, U' \subseteq X$ son abiertos canónicos en X tales que $U_\alpha = U'_\alpha$ para toda $\alpha \in S$ y $\pi_S(U) \cap \pi_S(A) \neq \varnothing$, entonces $f(U' \cap A) \subseteq \overline{f(U \cap A)}$.

En efecto, supongamos que no. Sea $y \in f(U' \cap A) \setminus \overline{f(U \cap A)}$. Como Y es regular existe W abierto en Y que contiene a y y $\overline{W} \cap \overline{f(U \cap A)} = \varnothing$. Sea $z \in U' \cap A$ tal que $f(z) = y$. Por la continuidad de f, existe O abierto básico en X tal que $z \in O$ y $f(O \cap A) \subseteq W$. Como para toda $\alpha \in S$ tenemos que $z_\alpha \in U'_\alpha$, podemos suponer que $O_\alpha \subseteq U'_\alpha = U_\alpha$ para toda $\alpha \in S$.
Sea $\widetilde{O}$ un abierto básico en X tal que $\widetilde{O}_\alpha = U_\alpha$ si $\alpha \in M \setminus S$, y $\widetilde{O}_\alpha = \widetilde{O}_\alpha$ para toda $\alpha \in S$. Entonces $\widetilde{O} \subseteq U$ y por lo tanto, $\overline{f(\widetilde{O} \cap A)} \cap \overline{f(O \cap A)} \subseteq \overline{f(U \cap A)} \cap \overline{W} = \varnothing$, lo cuál contradice a ($\star$) y esto prueba ($\star\star$).

Aseguramos ahora que f depende sólo de S.

Sean $x, x' \in A$ tales que $\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(x')$ para todo $\alpha \in S$, queremos probar que entonces $f(x) = f(x')$. Supongamos lo contrario, esto es que $f(x) = y \neq y' = f(x')$.

Por la regularidad de Y existen W, W' abiertos en Y tales que $y \in W$, $y' \in W'$ y $\overline{W} \cap \overline{W'} = \varnothing$. Por la continuidad de f, podemos encontrar abiertos canónicos U, U' de X tales que $x \in U, x' \in U', f(U \cap A) \subseteq W$ y $f(U' \cap A) \subseteq W'$. Como $\pi_S(x) = \pi_S(x')$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $U_\alpha = U'_\alpha$ para toda $\alpha \in S$. Como $x \in U \cap A$, se tiene que $\pi_S(U) \cap \pi_S(A) \neq \varnothing$. Por ($\star$) concluimos que $\overline{f(U \cap A)} \cap \overline{f(U' \cap A)} \neq \varnothing$. Pero por otro lado, $\overline{f(U \cap A)} \cap \overline{f(U' \cap A)} \subseteq \overline{W} \cap \overline{W'} = \varnothing$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $f(x) = f(x')$.

Sea $g : \pi_S(A) \to Y$ la función dada por $g(y) = f(\pi_S^{-1}(y) \cap A)$. Entonces g es una función univaluada, hecho que se desprende de que f sólo depende de S.

También por la definición de g es claro que $g \circ \pi_S(x) = f(x)$ para toda $x \in A$. Para terminar con la demostración probemos que g es continua.

Sean $x' \in \pi_S(A)$, $y = g(x')$ y W un abierto arbitrario de Y con $y \in W$. Fijemos $x \in A$ tal que $\pi_S(x) = x'$. Entonces $f(x) = y$. Sea V un abierto en Y tal que $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$. Como f es continua, existe $U = \prod_{\alpha \in M} U_\alpha$ abierto canónico en X tal que $x \in U$ y $f(U \cap A) \subseteq V$.

Sean $U' = \pi_S(U)$ y $U^* = \pi_S^{-1}(U')$. Ya que $x' = \pi_S(x)$ y $x \in U$ se tiene que $x' \in U'$. También es claro que $\pi_S(U^* \cap A) = U' \cap \pi_S(A)$. Por consiguiente, $g(U' \cap \pi_S(A)) = g\pi_S(U^* \cap A) = f(U^* \cap A)$, y por ($\star\star$), $f(U^* \cap A) \subseteq \overline{f(U \cap A)}$. De donde $g(U' \cap \pi_S(A)) \subseteq \overline{f(U \cap A)} \subseteq \overline{V} \subseteq W$, lo que prueba la continuidad de g.

■

Vale la pena recalcar que a diferencia de los resultados anteriores la prueba de la continuidad de la función g en el teorema 2.8 no es de manera alguna trivial.

Veamos ahora un teorema de factorización para funciones continuas definidas en un subespacio denso de un producto (α, κ)-seudocompacto de espacios topológicos de Hausdorff con la topología κ-caja y que toman valores en un espacio métrico, debido a Comfort y Negrepontis[4].

Para ello necesitamos el siguiente resultado acerca de particiones debido a Erdös-Rado (una demostración del cuál se encuentra en [**21**]).

TEOREMA 2.9. *(Erdös-Rado) Sean $\omega \leq \kappa < \alpha$ cardinales tales que α es fuertemente κ-inaccesible y regular y sea $\{S_\xi : \xi < \alpha\}$ una familia de conjuntos tales que $|S_\xi| < \kappa$ para $\xi < \alpha$. Entonces existen $A \subseteq \alpha$ con $|A| = \alpha$ y un conjunto J con $|J| < \kappa$ tales que $S_\xi \cap S_{\xi'} = J$ siempre que $\xi, \xi' \in A, \xi \neq \xi'$.*

Con este antecedente, el resultado principal que prueban Comfort y Negrepontis [4] es el siguiente.

TEOREMA 2.10. *Supongamos que:*
(1) Tenemos cardinales $\omega \leq \kappa < \alpha$ donde α es fuertemente κ-inaccesible y regular;
(2) Existe un subconjunto $Y \subseteq (X_I)_\kappa$ tal que $\pi_J(Y) = X_J$ para cada $J \in [I]^{<\alpha}$ y,
(3) $(X_I)_\kappa$ es (α, κ)-seudocompacto para cada $J \in [I]^{<\alpha}$.

Entonces:

(a) Y es (α, κ)-seudocompacto y,

(b) toda función continua $f : Y \to Z$ en donde Z es un espacio métrico con métrica ρ, depende a lo más de α coordenadas.

DEMOSTRACIÓN. (a) De (2) se sigue que Y es denso en $(X_I)_\kappa$ y por lo tanto si dos abiertos de $(X_I)_\kappa$ se intersectan, estos contienen un punto común de Y. Entonces basta probar que dada $\mathcal{U}$ una familia de abiertos de $(X_I)_\kappa$ con $|\mathcal{U}| = \alpha$, existe $p \in Y$ tal que cualquiera de sus vecindades en $(X_I)_\kappa$ intersecta al menos a κ elementos de $\mathcal{U}$.

Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\xi \mid \xi < \alpha\}$ y que cada $U_\xi \in \mathcal{U}$ tiene la forma $U_\xi = \prod_{i \in I} U_i^\xi$ con cada U_i^ξ abierto en X_i y con $|coord(U_\xi)| < \kappa$. Por el teorema de Erdös-Rado aplicado a la familia $\{coord(U_\xi) : \xi < \alpha\}$ existen $A \subseteq \alpha$ con $|A| = \alpha$ y $J \subseteq I$ con $|J| < \kappa$ tales que $coord(U_\xi) \cap coord(U_{\xi'}) = J$ si $\xi, \xi' \in A$ y $\xi \neq \xi'$, es decir existe $\mathcal{V}$ subfamilia de $\mathcal{U}$

con $|\mathcal{V}| = \alpha$ tal que $coord(U) \cap coord(V) = J$ siempre que $U, V \in \mathcal{V}$ y $U \neq V$.

Si $J = \varnothing$, entonces cualquier punto p de Y funciona; en efecto, si W es un abierto básico de p en $(X_I)_\kappa$, digamos que $W = \prod_{i \in I} W_i$, entonces $|coord(W)| < \kappa$ y cada $i \in coord(W)$ pertenece a $coord(U)$ para a lo más un elemento U de $\mathcal{V}$. Es decir, $coord(W) \cap coord(U) = \varnothing$ para una cantidad menor de κ elementos y por tanto $W \cap U \neq \varnothing$ para al menos κ abiertos en $\mathcal{V}$.

Si $J \neq \varnothing, |J| < \kappa$, entonces de la hipótesis (3) existe $x \in X_J$ con la propiedad de que si W_J es una vecindad en $(X_J)_\kappa$ de x, entonces $W_J \cap \pi_J(U) \neq \varnothing$ para por lo menos κ elementos U de $\mathcal{U}$.

Por la hipótesis (2) podemos escoger $p \in Y$ tal que $\pi_J(p) = x$. Dada una vecindad canónica $W = W_J \times W_{I \setminus J}$ de p, donde W_J y $W_{I \setminus J}$ son abiertos canónicos en $(X_J)_\kappa$ y $(X_{I \setminus J})_\kappa$ respectivamente, sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ con $|V| = \kappa$ y tal que $W_J \cap \pi_J(U) \neq \varnothing$ para cada $U \in \cap V$.

Puesto que $\left|coord(W_{I \setminus J})\right| < \kappa$ y cada elemento de $coord(W_{I \setminus J})$ pertenece a $coord(U)$ para a lo más un elemento U de $\mathcal{V}$ (estamos fuera de J), existen κ elementos U de $\mathcal{V}$ para los que $coord(W_{I \setminus J}) \cap coord(U) \neq \varnothing$.

Sea $U \in \mathcal{V}$ uno de tales abiertos. Escojamos un punto $z \in W_J \cap \pi_J(U)$ y definamos $q \in X_I$ como sigue:

$$q_i = \begin{cases} z_i, & \text{si } i \in J; \\ \text{cualquier punto } r_i \in W_i, & \text{si } i \in coord(W_{I \setminus J}); \\ \text{cualquier punto } s_i \in U_i, & \text{si } i \in coord(W) \setminus J; \\ \text{cualquier punto } t_i \in X_i, & \text{si } i \in I \setminus (J \cup coord(W) \cup coord(U)). \end{cases}$$

De su definición, se sigue que el punto q pertenece a $W \cap U$, y por tanto W intersecta por lo menos a κ elementos de $\mathcal{V}$. Esto prueba (a).

(b) Es suficiente probar la siguiente afirmación:

$(*)$ Para cada $\varepsilon > 0$ existe J subconjunto no vacío de I con $|J| < \alpha$ tal que para cualesquiera $x, y \in Y$, si $\pi_J(x) = \pi_J(y)$, entonces $\rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

En efecto, si $(*)$ es válida, entonces para cada $n \in \mathbb{N}^+$ hacemos $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ y escogemos J_n subconjunto no vacío de I con $|J_n| < \alpha$ que satisface $(*)$ para $\varepsilon = \varepsilon_n$. Definimos $J = \cup\{J_n : n \in \mathbb{N}^+\}$. Es claro que $|J| < \alpha$ y si $x, y \in Y$ satisfacen $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ entonces $\rho(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$, de donde concluimos que $f(x) = f(y)$ puesto que ρ es métrica. Es decir f depende de a lo más J coordenadas.

Probemos $(*)$. Supongamos que no se cumple $(*)$, es decir existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para cada subconjunto J no vacío de I con $|J| < \alpha$

existen $x, y \in Y$ tales que $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ y $\rho(f(x), f(y)) > \varepsilon_1$. De este hecho vamos a contradecir la continuidad de f en un punto $\bar{y} \in Y$.

Para cada $\xi < \alpha$ utilizando indución, construiremos

$$x(\xi), y(\xi), U^\xi, V^\xi, A(\xi), J(\xi)$$

tales que:

1. $J(0) \neq \varnothing, J(0) \subseteq I, |J(0)| < \alpha$;
2. $x(\xi), y(\xi) \in X_I; A(\xi) = \{i \in I : x(\xi)_i \neq y(\xi)_i\}$;
3. $|A(\xi)| < \kappa$;
4. $A(\eta) \cap A(\xi) = \varnothing$ si $\eta < \xi$;
5. $x(\xi) \in U^\xi, y(\xi) \in V^\xi$, donde U^ξ, V^ξ son abiertos básicos en $(X_I)_\kappa$;
6. $U_i^\xi \cap V_i^\xi = \varnothing$ si $i \in A(\xi)$;
7. $coord(U^\xi) = coord(V^\xi)$;
8. $\rho(f(U^\xi \cap Y), f(V^\xi \cap Y)) > \varepsilon_1$;
9. si $0 < \xi < \alpha$, entonces $J(\xi) = \cup_{\eta\in\xi} J(\eta) \bigcup \cup_{\eta\in\xi} A(\eta), |J(\xi)| < \alpha$;
10. $\pi_{J_\xi}(x(\xi)) = \pi_{J_\xi}(y(\xi))$.

Sea $J(0)$ cualquier subconjunto no vacío de I on $|J(0)| < \alpha$. $J(0)$ cumple las propiedades (1) y (9). Como $(*)$ no se cumple, existen $x, y \in Y$ tales que $\pi_{J(0)}(x) = \pi_{J(0)}(y)$ y $\rho(f(x), f(y) > \varepsilon_1$. Por la continuidad de f existen U, V abiertos canónicos de $(X_I)_\kappa$ tales que $x \in U, y \in V$ y $\rho(f(U \cap Y), f(V \cap Y)) > \varepsilon_1$. Sea $C(0) = coord(U) \bigcup coord(V)$, es claro que $|C(0)| < \kappa$. Hacemos $x(0) = x$ y definimos $y(0)$ como

$$y(0)_i = \begin{cases} y_i, & \text{si } i \in J(0) \cup C(0); \\ x_i, & \text{si } i \in I \setminus (J(0) \cup C(0)). \end{cases}$$

Entonces $x(0) \in U, y(0) \in V, \pi_{J(0)}(x(0)) = \pi_{J(0)}(y(0))$ y $A(0) = \{i \in I : x(0)_i \neq y(0)_i\}$ satisface $|A(0)| < \kappa$. Esto hace que se satisfagan (10), (2), (3) y (4).
Para cada $i \in I$, escogemos abiertos U_i^0, V_i^0 en X_i tales que

$$\begin{gathered} x(0)_i \in U_i^0, \quad y(0)_i \in V_i^0 \\ U_i^0 \cap V_i^0 = \varnothing \quad \text{para } i \in A(0), \\ U_i^0 \subseteq U_i, \quad V_i^0 \subseteq V_i \quad \text{para } i \in I \setminus A(0) \quad \text{y} \\ U_i^0 = V_i^0 = U_i \cap V_i \quad \text{para } i \in I \setminus A(0). \end{gathered}$$

Por nuestra elección, los conjuntos definidos como $U^0 = \prod_{i\in I} U_i^0$ y $V^0 = \prod_{i\in I} V_i^0$ son abiertos canónicos en $(X_I)_\kappa$, y satisfacen $x(0) \in U^0, y(0) \in V^0, coord(U^0) = coord(V^0)$. Es decir hacen verdaderas a

(5), (6) y (7). Para terminar nuestro primer paso inductivo, observamos que también $U^0 \subseteq U, V^0 \subseteq V$, por lo que $\rho(f(U^0 \cap Y), f(V^0 \cap Y)) >$ *varepsilon*$_1$ es decir se tiene (8).

Sea $0 < \xi < \alpha$ fijo y supongamos que se tienen definidos

$$x(\eta), y(\eta), U^\eta, V^\eta, A(\eta), J(\eta)$$

para toda $\eta < \xi$ que satisfacen (1) a (10).

Utilizando (9) definimos $J(\xi) = \cup_{\eta \in \xi} J(\eta) \bigcup \cup_{\eta \in \xi} A(\eta)$. De (3) y (9) se sigue que $|J(\xi)| < \alpha$, puesto que α es regular. Así que ya se cumplen (1) y (9). Por hipótesis existen $x, y \in Y$ tales que $\pi_{J(\xi)}(x) = \pi_{J(\xi)}(y)$ y $\rho(f(x), f(y)) > \varepsilon_1$. Por la continuidad de f existen U, V abiertos básicos en $(X_I)_\kappa$ tales que $x \in U, y \in V$ y $\rho(f(U \cap Y), f(V \cap Y)) > \varepsilon_1$.

Sea $C(\xi) = coord(U) \cup coord(V)$, es claro que $|C(\xi)| < \kappa$. Sea $x(\xi) = x$ y definimos $y(\xi)$ como sigue

$$y(\xi)_i = \begin{cases} y_i, & \text{si } i \in J(\xi) \cup C(\xi); \\ x_i, & \text{si } i \in I \setminus (J(\xi) \cup C(\xi)). \end{cases}$$

Por la construcción tenemos que $\pi_{J(\xi)}(x(\xi)) = \pi_{J(\xi)}(y(\xi))$, es decir se cumple (10). Además, $x(\xi) \in U, y(\xi) \in V$ y $A(\xi) = \{i \in I : x(\xi)_i \neq y(\xi)_i\} \subseteq C(\xi)$ puesto que $x(\xi)$ y $y(\xi)$ pueden diferir sólo en $C(\xi)$; de aquí se sigue que $|A(\xi)| < \kappa$ y se cumplen (2) y (3).

Por otro lado, de la definición de $A(\xi)$ tenemos que $A(\eta) \subseteq J(\xi)$ si $\eta < \xi$ que junto con $\pi_{J(\xi)}(x(\xi)) = \pi_{J(\xi)}(y(\xi))$ implica que $A(\eta) \subseteq I \setminus A(\xi)$, es decir $A(\eta) \cap A(\xi) = \varnothing$ y se cumple (4).

Como para cada $i \in I$, X_i es de Hausdorff, encontramos U_i^ξ, V_i^ξ abiertos en X_i tales que

$$\begin{gathered} x(\xi)_i \in U_i^\xi, \quad y(\xi)_i \in V_i^\xi \\ U_i^\xi \cap V_i^\xi = \varnothing \quad \text{para } i \in A(\xi), \\ U_i^\xi \subseteq U_i, \quad V_i^\xi \subseteq V_i \quad \text{para } i \in I \setminus A(\xi) \quad \text{y} \\ U_i^\xi = V_i^\xi = U_i \cap V_i \quad \text{para } i \in I \setminus A(\xi). \end{gathered}$$

Por la construcción tenemos que los conjuntos $U^\xi = \prod_{i \in I} U_i^\xi, V^\xi = \prod_{i \in I} V_i^\xi$ satisfacen (5), (6) y (7); además también $U^\xi \subseteq U, V^\xi \subseteq V$, de donde $\rho(f(U^\xi \cap Y), f(V^\xi \cap Y)) > \varepsilon_1$, lo que hace que se cumpla (8) y hemos terminado nuestra construcción.

Considere la familia de abiertos de Y dada por $\mathcal{C} = \{U^\xi \cap Y \mid \xi < \alpha\}$. Se cumple que $|\mathcal{C}| = \alpha$, y como Y es (α, κ)-seudocompacto, hay un punto $\bar{y} \in Y$ de κ-acumulación para $\mathcal{C}$, es decir cualquier abierto W

en Y que contenga al punto $\bar{y}$ satisface $W \cap U^{\xi} \neq \varnothing$ para al menos κ elementos de $\mathcal{C}$. Veamos que f no es continua en $\bar{y}$. Vamos a probar que para todo abierto básico W en $(X_I)_\kappa$ que contenga a $\bar{y}$ existe $\xi < \alpha$ tal que $W \cap U^{\xi} \neq \varnothing$ y $W \cap V^{\xi} \neq \varnothing$.

En efecto, sea W un abierto básico en $(X_I)_\kappa$ tal que $\bar{y} \in W$, tenemos $|coord(W)| < \kappa$. Por (4), cada $j \in coord(W)$ pertenece a lo más a un $A(\xi)$. Sea $D = \{j \in coord(W) \mid j \in \cup_{\xi<\alpha} A(\xi)\}$. Entonces $|D| \leq |coord(W)| < \kappa$ y existe un $\xi' < \alpha$ tal que $coord(W) \cap A(\xi') = \varnothing$. Sea $x \in W \cap U^{\xi'}$ y considere el punto $y \in Y$ definido como

$$y_i = \begin{cases} z_i \in V_i^{\xi'}, & \text{si } i \in A(\xi'); \\ x_i, & \text{si } i \in I \setminus A(\xi'). \end{cases}$$

Como $U^{\xi'}$ y $V^{\xi'}$ coinciden en $I \setminus A(\xi')$, por la elección de y se sigue que $y \in W \cap V^{\xi'}$, es decir hemos encontrado un $\xi' < \alpha$ tal que $W \cap U^{\xi'} \neq \varnothing$ y $W \cap V^{\xi'} \neq \varnothing$.

Por la densidad de Y existen $x \in Y \cap W \cap U^{\xi} \subseteq Y \cap U^{\xi}$ y $y \in Y \cap W \cap V^{\xi} \subseteq Y \cap V^{\xi}$, es decir todo abierto básico W que contiene a $\bar{y}$ contiene puntos x, y tales que $\rho(f(x), f(y)) > \varepsilon_1$ lo que prueba que f no es continua en $\bar{y}$ y esto es una contradicción. Por tanto $(*)$ es válida y el teorema queda probado. ■

Con respecto a grupos topológicos también existen teoremas de factorización. Presentamos un teorema sobre factorización de funciones reales continuas sobre grupos topológicos G, los cuales tienen la propiedad de que cualquier cubierta abierta de G contiene una subfamilia numerable cuya unión es densa en G. Los espacios topológicos con tal propiedad son llamados débilmente de Lindelöf. El teorema 2.13 es debido a E. V. Ščepin[**28**].

Como es usual, dado un semigrupo topológico S con identidad e_S denotaremos al conjunto de las vecindades abiertas de e_S por $\mathcal{N}(e_S)$, es decir

$$\mathcal{N}(e_S) = \{U \subseteq S : U \text{ es abierto y } e_S \in U\}.$$

Proposición 2.11. *Sea S un semigrupo topológico con identidad e_S. Si $U \in \mathcal{N}(e_S)$, entonces existe $V \in \mathcal{N}(e_S)$ tal que $V * V \subseteq U$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}(e_S)$; como $e_S * e_S = e_S \in U$ y la operación $*$ es continua, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e_S)$ tales que $V_1 * V_2 \subseteq U$. Sea $W = V_1 \cap V_2$, claramente $W \in \mathcal{N}(e_S)$ satisface $W * W \subseteq U$. ■

Observemos que si un semigrupo es regular, en la proposición 2.11, podemos escoger a V tal que además satisfaga $\overline{V} \subseteq U$.

LEMA 2.12. *Sea S un semigrupo topológico regular con identidad e_S. Si G es un conjunto G_δ en S tal que $e_S \in G$, entonces existe S' subsemigrupo topológico cerrado y G_δ de S tal que $S' \subseteq G$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$, donde V_k es abierto en S para todo $k \in \mathbb{N}$. Construiremos utilizando inducción una sucesión de subconjuntos abiertos U_k de S con las siguientes propiedades para toda $k \in \mathbb{N}$:

1. $U_k \in \mathcal{N}(e_S)$;
2. $U_k \subseteq V_k$;
3. $U_{k+1} * U_{k+1} \subseteq U_k$;
4. $\overline{U_{k+1}} \subseteq U_k$.

Sea $U_0 = V_0$. Por la proposición 2.11 existe $U_1 \in \mathcal{N}(e_S)$ tal que $U_1 * U_1 \subseteq U_0 \bigcap V_1$ y $\overline{U_1} \subseteq U_0 \bigcap V_1$.

Supongamos que ya tenemos definidos $U_0, U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos abiertos de S que satisfacen las cuatro propiedades. Para definir U_{n+1}, aplicamos una vez más la proposición 2.11 para encontrar $W \in \mathcal{N}(e_S)$ tal que $W * W \subseteq U_n \bigcap V_{n+1}$ y $\overline{W} \subseteq U_n \bigcap V_{n+1}$ y hacemos $U_{n+1} = W$. Claramente este conjunto satisface las condiciones establecidas.

Sea $S' = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k$; es claro que S' es un subsemigrupo topológico G_δ de S contenido en G. Además S' es cerrado ya que

$$\overline{S'} = \overline{\bigcap_{k=0}^{\infty} U_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{U_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{U_k} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{k-1} = \bigcap_{k=0}^{\infty} U_k = S'.$$

■

El siguiente resultado nos proporciona una propiedad importante de S-espacios débilmente de Lindelöf.

TEOREMA 2.13. *Sea X un S-espacio, donde S es un semigrupo regular con identidad e_S, y sea U un subespacio débilmente de Lindelöf abierto de X. Entonces toda función real continua definida sobre U es de tipo contable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua real sobre U. Debemos encontrar un subsemigrupo topológico S' cerrado G_δ de S tal que $f(sx) = f(x)$ para toda $s \in S'$ y $x \in U$ siempre que $sx \in U$.

Fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in U$ existe $O_x \subseteq U$ abierto tal que $f(O_x) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x))$, donde $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(f(x)) = \{y \in \mathbb{R} : |y - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Entonces si $y, z \in O_x$ se tiene que $|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \varepsilon$.

Sea $x \in U$ un punto arbitrario. Como la acción $h : S \times X \to X$ es continua en (e_S, x), existen abiertos $V_x \subseteq S$ y $O_x' \subseteq U$ con $e_S \in V_x$ y $x \in O_x'$ tales que $h(V_x, O_x') \subseteq O_x$. Considere la cubierta abierta

$\gamma = \{O'_x : x \in U\}$ de U. Como U es un subespacio débilmente de Lindelöf, existe un subconjunto numerable $A \subseteq U$ tal que la unión de la familia $\mu = \{O'_x : x \in A\}$ es densa en U. Sea $V_\varepsilon = \bigcap\{V_x : x \in A\}$. Se afirma que $|f(sx) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todos los $x \in U, s \in V_\varepsilon$ tales que $sx \in U$.

Supongamos que no, entonces existen $x_0 \in U, s_0 \in V_\varepsilon$ tales que $s_0x_0 \in U$ y $|f(s_0x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$. Por continuidad de la acción de f y de la función valor absoluto, existe W vecindad abierta de x_0 tal que $|f(s_0y) - f(y)| > \varepsilon$ para toda $y \in W$, y como $\overline{\cup\mu} \supseteq U$, existe $x \in A$ tal que $W \bigcap O'_x \neq \varnothing$.

Sea $z \in W \bigcap O'_x$. Como $z \in W$ se tiene que $|f(s_0z) - f(z)| > \varepsilon$, y por otro lado $(s_0, z) \in V_x \times O'_x$ implica que $s_0z = h(s_0, z) \in O_x$ y también $z = h(e_S, z) \in O_x$ implica por la definición de O_x que $|f(s_0z) - f(z)| < \varepsilon$, lo cuál es una contradicción.

Sea $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{\frac{1}{n}}$, entonces si $s \in G, y \in U$ son tales que $sy \in U$ se tiene que $|f(sy) - f(y)| < \frac{1}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$, es decir $f(sy) = f(y)$.

Para finalizar la demostración del teorema aplicamos el lema 2.12 para encontrar un subsemigrupo S' cerrado G_δ de S contenido en G. ■

COROLARIO 2.14. *Sean* $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *un producto cartesiano débilmente de Lindelöf, y* $f : X \to \mathbb{R}$ *una función real continua. Entonces* f *depende de un número contable de coordenadas, es decir existe un subconjunto* B *de* A *con* $|B| \leq \aleph_0$ *y* $g : \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f = g \circ \pi_B$*, donde* $\pi_B : X \to \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ *es la proyección.*

DEMOSTRACIÓN. Por la observación hecha después de la definición 1.21, el producto Tikhonov X es un S-espacio, donde $S = \prod_{\alpha \in A} S_\alpha$ resulta ser un semigrupo topológico regular con identidad e_S. Por el teorema 2.13 existe S' subsemigrupo cerrado y G_δ de S tal que $f(sx) = f(x)$ para todo $s \in S'$ y para todo $x \in X$. Pero todo conjunto G_δ que contiene a la identidad e_S contiene un elemento $q \in S$, para él que sólo un número contable de coordenadas q_α es igual a la identidad $e_\alpha \in S_\alpha$.

Sea $B = \{\alpha \in A : q_\alpha = e_\alpha\}$. Se afirma que f depende sólo de B. En efecto supongamos que $x, y \in X$ satisfacen $\pi_B(x) = \pi_B(y)$, entonces por la definición de la acción de S en X tenemos que $qx = qy$, y como $f(qx) = f(x)$ y $f(qy) = f(y)$, concluimos que $f(x) = f(y)$.

Para definir la función $g : \prod_{\alpha \in B} X_\alpha \to \mathbb{R}$ en el punto $z \in \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$, sea $x \in X$ tal que $\pi_B(x) = z$, entonces hacemos $g(z) = f(x)$.

La función g está bien definida ya que si también $z = \pi_B(y)$ con $y \in X$, claramente se tiene que $f(x) = f(y)$. Además, por la definición de g se tiene que $f = g \circ \pi_B$.

Para finalizar la prueba aplicamos el lema 1.3 y concluimos que g es continua. ■

En particular, todo grupo topológico G se puede considerar como un G-espacio de una manera trivial, luego entonces utilizando el teorema 2.13 se factorizaran todas las funciones continuas reales definidas sobre un grupo topológico débilmente de Lindelöf a través de un cociente. Con este propósito establecemos los siguientes resultados.

LEMA 2.15. *Sea G un grupo topológico débilmente de Lindelöf. Si $U \in \mathcal{N}(e_G)$ es un abierto arbitrario, entonces existe V subconjunto G_δ de G con $e_G \in V$ tal que para todo $y \in G$ se cumple $yVy^{-1} \subseteq \overline{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para todo $x \in G$ existen abiertos $V_x \in \mathcal{N}(e_G)$ y $W_x \in \mathcal{N}(x)$ tales que $W_x V_x W_x^{-1} \subseteq U$. La colección $\mu = \{W_x : x \in G\}$ es cubierta abierta de G y por hipótesis contiene una subfamilia numerable $\gamma = \{W_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ cuya unión es densa en G. Sea $V = \bigcap_{i=0}^{\infty} V_{x_i}$. Es claro que V es un conjunto G_δ en G y $e_G \in V$. Afirmamos que si $y \in G$, entonces $yVy^{-1} \subseteq \overline{U}$.

Supongamos que no, entonces existe $x \in V$ tal que $yxy^{-1} \notin \overline{U}$. Por la continuidad de la operación del grupo esto mismo ocurre para todos los elementos de algún conjunto abierto que contiene a y, es decir existe U_y abierto tal que $U_y \ni y$ y $zxz^{-1} \notin \overline{U}$ para todo $z \in U_y$. Pero $U_y \bigcap W_{x_i} \neq \varnothing$ para algún $i \in \mathbb{N}$, luego entonces existe $z \in U_y \bigcap W_{x_i}$. Tenemos por un lado que $zxz^{-1} \notin \overline{U}$ puesto que $z \in U_y$ y por otro lado $zxz^{-1} \in U$ ya que $z \in W_{x_i}$ y $x \in V_{x_i}$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $yVy^{-1} \subseteq \overline{U}$ para todo $y \in G$. ■

LEMA 2.16. *Sea G un grupo topológico débilmente de Lindelöf. Entonces toda vecindad W de su identidad e_G contiene un subgrupo normal cerrado G_δ.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $W \in \mathcal{N}(e_G)$ fija pero arbitraria y sea $U \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{U} \subseteq W$. Utilizando inducción construiremos una sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos G_δ en G que cumplen las siguientes condiciones para todo $n \in \mathbb{N}$:
(i) $e_G \in U_n$;
(ii) $\overline{U_{n+1} * U_{n+1}} \subseteq U_n$;
(iii) $yU_{n+1}y^{-1} \subseteq U_n$, para toda $y \in G$.

Por el lema 2.15 existe U_0 subconjunto G_δ de G tal que $e_G \in U_0$, y para todo $y \in G$ se tiene que $yU_0y^{-1} \subseteq \overline{U}$.
Supongamos que ya hemos definido los conjuntos $U_0, U_1, \ldots, U_n$ tales que satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii). Para definir a U_{n+1}, consideremos a $U_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$, donde $E_k \in \mathcal{N}(e_G)$ es abierto para toda $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $W_k \in \mathcal{N}(e_G)$ tal que $\overline{W_k * W_k} \subseteq E_k$.

Aplicando el lema 2.15 al abierto W_k, encontramos V_k subconjunto G_δ de G tal que $e_G \in V_k \subseteq W_k$ y para toda $y \in G$, $yV_ky^{-1} \subseteq \overline{W_k}$. Sea $U_{n+1} = \bigcap_{k=0}^{\infty} V_k$. Entonces $e_G \in U_{n+1}$ y

$$\overline{U_{n+1} * U_{n+1}} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{V_k * V_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{W_k * W_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = U_n.$$

Además, si $y \in G$ es arbitrario, entonces

$$yU_{n+1}y^{-1} = \bigcap_{k=0}^{\infty} yV_ky^{-1} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{W_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k = U_n.$$

Esto termina nuestra construcción.
Sea $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Por las propiedades (i), (ii) y (iii) de cada U_n es inmediato ver que N es un subgrupo normal G_δ contenido en W y es cerrado ya que $\overline{N} = \overline{\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{n-1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = N$. ■

TEOREMA 2.17. *Si G es un grupo topológico débilmente de Lindelöf y $f : G \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe un subgrupo N cerrado normal G_δ en G, tal que f es constante en cada clase lateral de N en G.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos a G como un S-espacio de la manera trivial, es decir tomando a S como G e identificando la acción con la operación del grupo. Por el teorema 2.13 f es de tipo contable, es decir existe un subsemigrupo H de tipo G_δ en G tal que $f(hg) = f(g)$ para todo $h \in H$ y todo $g \in G$. Digamos que $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$, donde $W_n \in \mathcal{N}(e_G)$ para toda $n \in \mathbb{N}^+$. Por el lema 2.16, para cada $n \in \mathbb{N}^+$, existe $H_n \subseteq W_n$ subgrupo normal cerrado G_δ. Sea $N = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Es claro entonces que N es un subgrupo normal cerrado y G_δ en G tal que $N \subseteq H$, y por lo tanto f es constante sobre cada clase lateral. En efecto, sea Ng una clase lateral arbitraria y sean $x, y \in Ng$. Existen $n_1, n_2 \in N$ tales que $x = n_1g, y = n_2g$, por lo que $g = n_1^{-1}x = n_2^{-1}y$ y $f(n_1^{-1}x) = f(n_2^{-1}y)$. Como f es de tipo contable respecto al subgrupo N, concluimos que $f(n_1^{-1}x) = f(x)$ y $f(n_2^{-1}y) = f(y)$. Así que $f(x) = f(y)$ y f es constante sobre cada clase lateral. ■

Un resultado que utiliza una nueva técnica de demostración también relacionado con grupos topológicos y que generaliza el teorema de factorización para subgrupos de productos de grupos compactos probado por M. G. Tkačenko, es debido a M.Husek[**22**].

El siguiente teorema es el resultado principal y fue probado para subgrupos de productos de grupos compactos por M. G. Tkačenko, utilizando una técnica bastante diferente.

TEOREMA 2.18. *Sean (X_i, m_i) espacios topológicos izquierdos de Maltsev para cada $i \in I$, $X_I = \prod_{i \in I} X_i$ y $X \subseteq X_I$ un subespacio de Maltsev débilmente de Lindelöf. Entonces cualquier función continua $f : X \to Y$, en donde Y es un espacio topológico con diagonal $\overline{G_\delta}$ depende de una cantidad contable de coordenadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Por hipótesis $\Delta_Y = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$, con G_n abierto en $Y \times Y$ para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Para cada $n \in \mathbb{N}^+$, definimos

$$\mu_n = \{B \subseteq X_I : B \text{ es abierto canónico en } X_I,$$
$$B \cap X \neq \varnothing, f(B \cap X) \times f(B \cap X) \subseteq G_n\}.$$

Por la definición, μ_n es cubierta abierta de X para cada $n \in \mathbb{N}^+$. Sean $\gamma_n \subseteq \mu_n$ subfamilia numerable tal que $X \subseteq \overline{\bigcup\{C \cap X : C \in \gamma_n\}}$, $J_n = \bigcup\{coord(C) : C \in \gamma_n\}$ y $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$. Claramente J es contable y se afirma que f depende sólo de J. Sean $x, y \in X$ tales que $\pi_J(x) = \pi_J(y)$, queremos probar que $f(x) = f(y)$.

Supongamos que esto no ocurre, es decir que $f(x) \neq f(y)$; entonces existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $(f(x), f(y)) \notin \overline{G_n}$. Consideremos $U \times V \subseteq Y \times Y$ un abierto tal que $(f(x), f(y)) \in U \times V \subseteq (Y \times Y) \setminus \overline{G_n}$. Por continuidad de f encontramos W_x, W_y abiertos de X tales que $x \in W_x, y \in W_y$ y $f(W_x) \subseteq U, f(W_y) \subseteq V$. Como $m_I(x, x, y) = y$ y m_I es continua en su primer argumento, existe O abierto de X con $x \in O$ y $m_I(O, x, y) \subseteq W_y$, en donde la operación m_I se ha definido en el ejemplo (4) de la página 10. Existe $C \in \gamma_n$ que satisface $C \cap W_x \cap O \cap X \neq \varnothing$ pues $\cup\gamma_n$ es densa en X. Elegimos $w \in C \cap W_x \cap O \cap X$ y hacemos $z = m_I(w, x, y)$. Es claro que $z \in X \cap W_y$ y $\pi_J(z) = m_J(\pi_J(w), \pi_J(x), \pi_J(y)) = \pi_J(w)$.

Como $w \in C$ y $coord(C) \subseteq J$, de la última igualdad se sigue que también $z \in C$. Concluimos por un lado que como $z, w \in C \cap X$ y $C \in \gamma_n$, entonces $(f(w), f(z)) \in G_n$, y por otro lado $w \in W_x, z \in W_y$ implican que $f(w) \in U, f(z) \in V$, es decir $(f(w), f(z)) \in U \times V \subseteq (Y \times Y) \setminus \overline{G_n}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $f(x) = f(y)$. ■

El teorema anterior implica el siguiente resultado para grupos topológicos.

COROLARIO 2.19. *Sean $G = \prod_{i \in I} G_i$ donde para cada $i \in I$, G_i es un grupo topológico y H un subgrupo de G débilmente de Lindelöf.*

Entonces cualquier función continua f de H hacia un espacio métrico depende de una cantidad contable de coordenadas.

DEMOSTRACIÓN. Sean (Y, d) un espacio métrico y $f : H \to Y$ una función continua. Es claro que la diagonal Δ_Y en $Y \times Y$ es un conjunto $\overline{G_\delta}$. Por el ejemplo (1) de la página 10, para cada $i \in I$ el grupo topológico G_i es un espacio topológico izquierdo de Maltsev. También tenemos que H es un subespacio de Maltsev débilmente de Lindelöf. Tenemos entonces las hipótesis del teorema 2.18 y se sigue el resultado. ■

Es interesante notar que el mismo resultado sigue siendo válido si a cada grupo G_i le damos la topología más fina que hace continua en su primera coordenada a la operación $m_i : G_i^3 \to G_i$ dada por $m(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$. Dicha topología es llamada invariante izquierda.

2. Otro tipo de resultados

Presentamos en esta sección dos resultados que requieren de algunos coneptos adicionales a los presentados en el primer capítulo. Estos son el de función d-abierta y el de función regular. El primer resultado se debe a Uspenskiĭ [**31**], quien utiliza un teorema de factorización para probar el siguiente resultado. Sea X un producto de espacios con peso red contable, y sea S un subespacio de X. Entonces si Y es compacto y es la imágen de S bajo una función regular, entonces Y es *casi correcto*, significando esto último, que para cualquier cardinal regular nonumerable $\tau \leq w(Y)$, I^τ es una imágen continua de Y.

El otro resultado es de M. Tkačenko [**29**], quién prueba con la ayuda de un teorema de factorización entre otros hechos, que si G es un subgrupo de un grupo topológico K cuyo número de Nagami es a lo más contable, entonces G es $\mathbb{R}$-factorizable.

Tanto la noción de una función d-abierta como el siguiente resultado son debidos a M. Tkačenko.

PROPOSICIÓN 2.20. *Sean X, Y espacios topológicos y sea f una función continua $f : X \to Y$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Si U es abierto en X, entonces $f(U) \subseteq int\overline{f(U)}$, es decir $f(U)$ está contenido en el interior de su cerradura.*
2. *Si V es abierto en Y, entonces $\overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(\overline{V})$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea V un abierto en Y. Sabemos que si $f : X \to Y$ es continua, siempre se cumple $\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(\overline{V})$. Probemos la otra contención. Sean $x \in f^{-1}(\overline{V})$ y U un abierto en

X tal que $x \in U$, queremos probar que $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Por la hipótesis (1), $f(x) \in f(U) \subseteq int\overline{f(U)}$. Como $f(x) \in \overline{V}$ se sigue que $int\overline{f(U)} \cap \overline{V} \neq \varnothing$.

Sea $y \in int\overline{f(U)} \cap \overline{V}$. Sabemos entonces que $y \in \overline{V}$ y que existe un abierto W en Y tal que $y \in W$ y $W \subseteq \overline{f(U)}$, es decir $W \cap V \neq \varnothing$. Sea $z \in W \cap V$. Por la propiedad que tiene W se cumple que $z \in V$ y $z \in \overline{f(U)}$, de donde $V \cap f(U) \neq \varnothing$. Finalmente sea $t \in V \cap f(U)$, digamos que $t = f(u)$ para alguna $u \in U$. Concluimos que $u \in U \cap f^{-1}(V)$, es decir $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea U un abierto en X, y procedamos por contradicción. Existe entonces $y \in f(U)$ tal que $y \notin int\overline{f(U)}$, digamos que $y = f(x)$ para alguna $x \in U$. De aquí

$$y \in Y \setminus int\overline{f(U)} = \overline{Y \setminus \overline{f(U)}}.$$

El conjunto $V = Y \setminus \overline{f(U)}$ es abierto en Y y $y \in \overline{V}$, por lo que utilizando la hipótesis podemos escribir $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(\overline{V}) = \overline{f^{-1}(V)}$. Hemos encontrado que $U \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing$, es decir utilizando la definición de V, que $U \cap f^{-1}(Y \setminus \overline{f(U)} \neq \varnothing$. Este último hecho y $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ implican que $U \cap (X \setminus (f^{-1}(\overline{f(U)}) \neq \varnothing$ lo cuál es una contradiión, pues sabemos que $U \subseteq f^{-1}f(U) \subseteq f^{-1}(\overline{f(U)})$. ■

La proposición anterior es la base de la siguiente definición.

Definición 2.21. Una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos es *d-abierta* si satisface alguna de las dos condiciones (1) o (2) de la proposición 2.20.

Veamos algunos ejemplos.

1. Toda función abierta $f : X \to Y$ es claramente d-abierta puesto que en este caso se cumple $\overline{f^{-1}(V)} = f^{-1}(\overline{V})$ para todo abierto V de Y. Es entonces el concepto de función d-abierta la generalización natural de función abierta.
2. Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones d-abiertas, entonces su composición $g \circ f : X \to Z$ es d-abierta. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{(g \circ f)^{-1}(V)} = \overline{f^{-1}(g^{-1}(V))} &= f^{-1}(\overline{g^{-1}(V)}) \\ &= f^{-1}(g^{-1}(\overline{V})) = (g \circ f)^{-1}(\overline{V}).\end{aligned}$$

3. Sean $f : X \to Y$ una función d-abierta y D un subconjunto denso en X. Entonces la restricción de f a D, $f|_D : D \to Y$ es d-abierta. En efecto, utilizando la igualdad $(f|_D)^{-1}(V) = D \cap f^{-1}(V)$ tenemos que

$$\overline{(f|_D)^{-1}(V)}^X = \overline{D \cap f^{-1}(V)}^X = \overline{f^{-1}(V)}^X = f^{-1}(\overline{V}),$$

y de aquí

$$\overline{(f|_D)^{-1}(V)}^D = D \cap \overline{(f|_D)^{-1}(V)}^X = D \cap f^{-1}(\overline{V}) = (f|_D)^{-1}(\overline{V}).$$

2.1. Imágenes continuas de d-espacios.

DEFINICIÓN 2.22. Sean X, Y espacios topológicos con topologías $\mathcal{O}(X)$ y $\mathcal{O}(Y)$ respectivamente y sea S un subespacio de X. Una función $f : S \to Y$ se llama *regular* si existe una función $e : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ tal que:

1. $e(U) \cap S = f^{-1}(U)$, para todo $U \in \mathcal{O}(Y)$, y
2. Si U y V son abiertos disjuntos de Y, entonces $e(U) \cap e(V) = \varnothing$.

Por ejemplo, si S es denso en X, toda función continua $f : S \to Y$ es regular.

En efecto, definimos $e : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ como $e(U) = V$, donde $V \in \mathcal{O}(X)$ es el máximo abierto tal que $V \cap S = f^{-1}(U)$. Entonces la primera condición se satisface por la definición. Y si U y V son abiertos disjuntos de Y, entonces $e(U) = U_1$ donde $U_1 \cap S = f^{-1}(U)$ y $e(V) = V_1$ donde $V_1 \cap S = f^{-1}(V)$. De aquí se sigue que $\varnothing = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = U_1 \cap V_1 \cap S$, y por ser S denso en X, $U_1 \cap V_1 = \varnothing$, ó $e(U) \cap e(V) = \varnothing$. Esto prueba que f es regular.

Consideremos ahora espacios topológicos X, Y, Z con Y de Hausdorff, una función d-abierta $p : X \to Z$, un subconjunto S de X y una función regular $f : S \to Y$ con operador e. Dada $\gamma = \{U_1, U_2\}$ cubierta abierta de Y, construimos un subconjunto cerrado Z^* de Z como sigue.

Sea $\gamma = \{U_1, U_2\}$ una cubierta abierta de Y, y sea V_i el subconjunto abierto más grande de Z tal que $p^{-1}(V_i) \subseteq cl_X(e(U_i), i = 1, 2$. Definimos $Z_\gamma = cl_Z(V_1 \cup V_2)$ y

$$Z^* = \bigcap \{Z_\gamma \mid \gamma \quad \text{es cubierta abierta de } Y \text{ y } |\gamma| = 2\}.$$

Con estos elementos presentamos el siguiente teorema de factorización debido a Uspenskiĭ [**31**].

TEOREMA 2.23. *Sean X, Y, Z espacios topológicos con Y regular. Sean $p : X \to Z$ una función d-abierta, $S \subseteq X$, $f : S \to Y$ una función regular y Z^* el subespacio cerrado de Z construido arriba. Definimos $X^* = p^{-1}(Z^*)$. Entonces existe una única función continua $g : Z^* \cap p(S) \to Y$ tal que $f(x) = g(p(x))$ para todo $x \in X^* \cap S$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g(z) = (f \circ p^{-1})(z)$ para toda $z \in Z^* \cap p(S)$.

La existencia y la unicidad de la función g se basan en el siguiente hecho:

Afirmación. Para cada $x \in X^* \cap S$ y toda vecindad abierta O en Y de $f(x)$, existe W una vecindad abierta de $z = p(x)$ en Z tal que

$$f(p^{-1}(W) \cap X^* \cap S) \subseteq O.$$

Suponiendo que la afirmación ya estuviera probada, y que la función g existiera, su continuidad es inmediata: sean $z \in Z^* \cap p(S)$ y O una vecindad abierta arbitraria de $g(z)$, entonces por la afirmación existe W abierto en Z tal que $z \in W \cap Z^* \cap p(S)$ y este último conjunto es abierto en el dominio de g. Además, $p^{-1}(W \cap Z^* \cap p(S)) = p^{-1}(W) \cap X^* \cap S$ y por tanto $(f \circ p^{-1})(W \cap Z^* \cap p(S)) = f(p^{-1}(W) \cap X^* \cap S) \subseteq O$, lo que prueba la continuidad de g.

Pasemos a probar la afirmación.

Hecho 1. Si U es un abierto en Y y $x \in S \cap cl_X(e(U))$, entonces $f(x) \in cl_Y(U)$.

En efecto, si no ocurre esto, entonces existe un abierto V en Y tal que $f(x) \in V$ y $V \cap U = \varnothing$, por tanto $e(U) \cap e(V) = \varnothing$ y $x \in f^{-1}(V) = e(V) \cap S \subseteq e(V)$, lo cuál es una contradicción al hecho de que $x \in cl_X(e(U))$. El hecho 1 queda probado.

Sea $x \in X^* \cap S$ y sea O una vecindad abierta en Y de $f(x)$. Como Y es regular existen O_1, O_2 vecindades abiertas de $f(x)$ tales que $cl_Y(O_2) \subseteq O_1 \subseteq cl_Y(O_1) \subseteq O$. Entonces $\{O_1, Y \setminus cl_Y(O_2)\}$ es cubierta abierta de Y.

Sean $U_1 = e(O_1)$ y $U_2 = e(Y \setminus cl_Y(O_2))$, y sea V_i el conjunto abierto más grande en Z que satisface

$$p^{-1}(V_i) \subseteq cl_X(U_i), \quad \text{para} \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Por la definición de $Z^*, Z^* \subseteq cl_Z(V_1 \cup V_2)$.

Hecho 2. $W = Z \setminus cl_Z(V_2)$ es una vecindad de $p(x)$ en Z.

Probemos esta afirmación por contradicción. Supongamos así que $p(x) \in cl_Z(V_2)$, con $x \in S$. Entonces como p es d-abierta, se tiene que $x \in p^{-1}(cl_Z(V_2)) = cl_X(p^{-1}(V_2))$ y por la contención 2, $cl_X(p^{-1}(V_2)) \subseteq cl_X(U_2) = cl_X(e(Y \setminus cl_Y(O_2)))$, es decir $x \in S \cap cl_X(e(Y \setminus cl_Y(O_2)))$. Aplicamos ahora el hecho 1 con $U = Y \setminus cl_Y(O_2)$ para concluir que $f(x) \in cl_Y(Y \setminus cl_Y(O_2))$, lo cuál es una contradicción pues O_2 es vecindad abierta de $f(x)$. Esto prueba el segundo hecho.

Probemos ahora la afirmación principal. Por el hecho 2, W es vecindad del $p(x)$ en Z, y se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}(3)\qquad W \cap Z^* &\subseteq W \cap cl_Z(V_1 \cup V_2)\\ &= (Z \setminus cl_Z(V_2)) \cap [cl_Z(V_1) \cup cl_Z(V_2)]\\ &= (Z \setminus cl_Z(V_2)) \cap cl_Z(V_1) \subseteq cl_Z(V_1)\end{aligned}$$

y de estas,

$$(4)\qquad p^{-1}(W \cap Z^*) \subseteq p^{-1}(cl_Z(V_1)) = cl_X(p^{-1}(V_1)) \subseteq cl_X(U_1),$$

es decir, se cumple

$$(5)\qquad p^{-1}(W \cap Z^*) \subseteq cl_X(U_1).$$

Consideramos ahora $f(p^{-1}(W) \cap X^* \cap S) = f(p^{-1}(W \cap Z^*) \cap S) \subseteq f(cl_X(U_1) \cap S) = f(cl_X(e(O_1)) \cap S)$, en donde utilizamos la relación 5 para escribir la penúltima contención y la definición de $U_1 = e(O_1)$ en la última igualdad.

Para terminar probaremos que W es la vecindad buscada, es decir veamos que $f(cl_X(e(O_1)) \cap S) \subseteq cl_Y(O_1)$. En efecto, O_1 es un abierto en Y, y si $y \in f(cl_X(e(O_1)) \cap S)$, $y = f(x)$ para algún $x \in cl_X(e(O_1)) \cap S$. Por tanto del hecho 1 se sigue que $f(x) \in cl_Y(O_1)$. Esto prueba la afirmación

Veamos que g está bien definida, es decir, si $x_1, x_2 \in X^* \cap S$ satisfacen $p(x_1) = p(x_2) = z$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$.

Supongamos que la conclusión es falsa, es decir que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean O_1, O_2 abiertos en Y tales que $f(x_1) \in O_1, f(x_2) \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Por la afirmación probada, existen W_1, W_2 vecindades abiertas de z en Z tales que

$$f(p^{-1}(W_1 \cap X^* \cap S) \subseteq O_1, \quad f(p^{-1}(W_2 \cap X^* \cap S)) \subseteq O_2.$$

De aquí y de $z \in W_1 \cap W_2$ deducimos que $f(x_1) \in f(p^{-1}(W_1 \cap W_2) \cap X^* \cap S) \subseteq O_1 \cap O_2 = \varnothing$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto la función g está bien definida.

Además, sabemos que en este caso g es continua y por la definición satisface

$$(g \circ p)(x) = (f \circ p^{-1})(p(x)) = f(p^{-1}p(x)) = f(x).$$

Finalmente probemos la unicidad. Supongamos que existe otra funión $g_1 : Z^* \cap p(S) \to Y$ tal que $f(x) = (g_1 \circ p)(x) = (g \circ p)(x)$ para todo $x \in X^* \cap S$. Sea $z \in Z^* \cap p(X)$, digamos que $z = p(x)$ con $x \in X^* \cap S$, entonces $g_1(z) = g_1(p(x)) = f(x) = g(p(x)) = g(z)$, es decir $g_1 = g$. El teorema queda demostrado. ■

El siguiente resultado se debe a M. Tkačenko [**29**], quien lo utiliza para probar entre otros resultados que si G es un subgrupo de un grupo topológico K cuyo número de Nagami es a lo más contable, entonces G es $\mathbb{R}$-factorizable.

Consideremos un espacio X, un subespacio $S \subseteq X$ y una función regular $f : S \to Y$, con Y regular. Para cada punto $y \in Y$, sea $F(y) = \bigcap\{cl_X e(V) : y \in V, V \text{es abierto en } \quad Y\}$. Esta notación se usa en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.24. *Sean $\varphi : X \to H$ una función continua abierta y suprayectiva, y $N \subseteq H$. Supongamos que para cada $h \in N$ existe un punto $y_h \in Y$ tal que $\varphi^{-1}(h) \subseteq F(y_h)$. Definimos $\tilde{S} = S \cap cl_X(\varphi^{-1}(N))$. Entonces:*

1. *Para cada par V_1, V_2 de subconjuntos abiertos de Y tales que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$ ocurre que $\varphi(e(V_1)) \cap \varphi(e(V_2)) \cap \varphi(\tilde{S}) = \varnothing$.*
2. *Existe una función continua $\pi : \varphi(\tilde{S}) \to Y$ tal que $f|_{\tilde{S}} = \pi \circ \varphi|_{\tilde{S}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean V_1, V_2 subconjuntos abiertos de Y tales que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$, y sean $O_i = e(V_i), i = 1, 2$. Supongamos que $\varphi(O_1) \cap \varphi(O_2) \cap \varphi(\tilde{S}) \neq \varnothing$. Entonces $U = \varphi(O_1) \cap \varphi(O_2)$ es un subconjunto abierto no vacío de H. Como $\varphi(\tilde{S}) = \varphi(S \cap cl_X(\varphi^{-1}(N))) \subseteq \varphi(cl_X(\varphi^{-1}(N)) \subseteq cl_H(\varphi\varphi^{-1}(N)) \subseteq cl_H(N)$, se sigue que $\varnothing \neq U \cap \varphi(\tilde{S}) \subseteq U \cap cl_H(N)$. Sea $h \in U \cap N$. Ahora, la contención $\varphi^{-1}(h) \subseteq F(y_h)$ implica que $O_i \cap F(y_h) \neq \varnothing, i = 1, 2$. Consideremos el caso en el que $i = 1$ ya que el otro es similar. Sea $x \in O_1$ tal que $h = \varphi(x)$, es claro que $x \in \varphi^{-1}(h) \subseteq F(y_h)$ y por tanto $x \in O_1 \cap F(y_h)$

Ahora, de la definición de los conjuntos O_i se sigue que $y_h \in \overline{V_1} \cap \overline{V_2} \neq \varnothing$. En realidad, si esto no ocurre, entonces $y_h \notin \overline{V_i}$ para algún $i \in \{1, 2\}$ y existe un conjunto abierto W tal que $y_h \in W$ y $\overline{W} \cap \overline{V_i} = \varnothing$. De aquí $e(W) \cap e(V_i) = \varnothing$. Claramente $F(y_h) \subseteq cl_X(e(W)) \subseteq X \setminus e(V_i)$ y por lo tanto $F(y_h) \cap e(V_i) = \varnothing$, lo que es una contradicción.

Se tiene entonces que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} \neq \varnothing$, hecho que contradice a la elección de los conjuntos V_1, V_2. Y el resultado se sigue.

(2) Definimos la función $\pi : \varphi(\tilde{S}) \to Y$ como sigue: $\pi(z) = f(x_1)$, en donde $x_1 \in \tilde{S}$ satisface $\varphi(x_1) = z$. Veamos que π está bien definida, es decir si $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, entonces $f(x_1) = f(x_2)$. Supongamos lo contrario. Entonces existen $x_1, x_2 \in \tilde{S}$ tales que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ y $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sean V_1 y V_2 vecindades abiertas en Y de x_1 y x_2 respectivamente tales que $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. Se tiene que $x_i \in f^{-1}(V_i) = S \cap e(V_i)$, es decir $x_i \in e(V_i) = O_i (i = 1, 2)$, de donde $\varphi(x_1) \in \varphi(O_1) \cap \varphi(O_2) \cap \varphi(\tilde{S}) \neq \varnothing$, lo cuál contradice a (1). Por lo tanto $f(x_1) = f(x_2)$ y π está bien definida.

Probemos la continuidad de π. Sea $h \in \varphi(\tilde{S})$ y sea $V \subseteq Y$ un conjunto abierto tal que $y = \pi(h) \in V$. Sea W una vecindad abierta de y tal que $cl_Y(W) \subseteq V$. Considere los conjuntos $O = e(W)$ y $U = \varphi(O) \cap \varphi(\tilde{S})$. Entonces $h \in U$, en realidad, $h = \varphi(x)$ para algún $x \in \tilde{S}$, y $y = (\pi \circ \varphi)(x) = f(x)$. De aquí $x \in f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(W) = S \cap O$ y $h = \varphi(x) \in \varphi(O) \cap \varphi(\tilde{S}) = U$. Claramente U es abierto en $\varphi(\tilde{S})$.

Afirmamos que $\pi(U) \subseteq cl_Y(W) \subseteq V$. Supongamos que no, es decir que $\pi(U) \setminus cl_Y(W) \neq \varnothing$. Existen $y_1 \in Y \setminus cl_Y(W)$, y $h_1 \in U$ tales que $y_1 = \pi(h_1)$. Sea W_1 un subconjunto abierto en Y tal que $y_1 \in W_1$ y $cl_Y(W_1) \cap cl_Y(W) = \varnothing$. Consideremos ahora los conjuntos $O_1 = e(W_1)$ y $U_1 = \varphi(O_1) \cap \varphi(\tilde{S})$. Ya que $h_1 \in \varphi(O) \cap \varphi(\tilde{S})$, existe $x \in \tilde{S}$ tal que $h_1 = \varphi(x)$. Entonces $f(x) = \pi\varphi(x) = \pi(h_1) = y_1 \in W_1$, de donde $x \in O_1$. El punto h_1 satisface $h_1 \in \varphi(O) \cap \varphi(O_1) \cap \varphi(\tilde{S}) \neq \varnothing$, hecho que contradice a (1). Concluimos que $\pi(U) \subseteq V$ y π es continua. Esto termina la prueba del teorema. ■

Bibliografía

1. A.V. Arhangel'skiĭ, *About mappings on dense subspaces of topological products* , Doklady Akad. Nauk SSSR, 197 (1971),750-753.
2. A.V. Arhangel'skiĭ, *On mappings of everywhere dense subsets of topological products*, Soviet Math Dokl. Vol. 12 (1971), No.2, 520-524.
3. A.V. Arhangel'skiĭ, *Factorization theorems and function spaces: Stability and Monolithicity*, Soviet Math. Dokl. Vol. 26 91982), No.1, 177-181.
4. Comfort W. W., and S. Negrepontis. *Continuous functions on products with strong topologies*, Proc. 3rd Prague Top. Symp., 1971, Academia , Prague, 1972.
5. Corson H. H., *Normality in subsets of product spaces*. Amer. J. Math., 81 (1959),785-796.
6. Corson H. H., and Isbell J. R., *Some properties of strong uniformities*, Quart. J. Math. Oxford, 11 (2) (1960), 17-33.
7. Y. Mibu , *On Baire functions on infinite product spaces*, Proc. Japan Acad., Vol.20 (1944), 661-663.
8. Miroslav Hušek, *Products as reflections*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 13 (1972), 783-800.
9. Miroslav Hušek, *Continuous mappings on subspaces of products*, Instituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica. Vol. XVII (1976), 25-41.
10. Miroslav Hušek, *Mappings from products*, Topological Structures II, Mathematical Centre Tracts 115 (1979) 131-145.
11. R. Engelking, *On functions defined on cartesian products*, Fund. Math., Vol 59 (1966), 221-231.
12. R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.
13. I. Glicksberg *Stone -Čech compactifications of products*, Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959), 369-382.
14. J. Keesling, *Normality and infinite product spaces*, Adv. Math., 9 (1972), 90-92.
15. S. Mazur., *On continuous mappings in product spaces*, Fund. Math., 39 (1952), 229-238.
16. Ulmer Milton Don, *Continuous Funtions on product spaces*, Wesleyan University, Ph.D., 1970 Mathematics.
17. A. Miščenko, *Some theorems on the topological product of spaces*, Fund. Math. 58 (1966), pp. 259-284 (russian).
18. A. H. Stone *Paracompactness and product spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 54 (1948) 977-982.

19. Ross K. A., Stone A. H., *Products of separable spaces*, Amer. Math. Month. 71 (1964), 398-403.
20. E. V. Shchepin, *Real functions and canonical sets in Tikhonov products and topological groups*, Uspekhi Mat. Nauk 31:6 (1976), 17-27.
21. Azriel Levy, *Basic Set Theory*, Springer Verlag, 1979.
22. Miroslav Hušek, *Productivity of properties of topological groups*,Topology and its Applications 44 (1992), 189-196.
23. J. R. Isbell, *Uniform Spaces*, American Mathematial Society, 1964, 130-132.
24. I. Juhász*Cardinal Functions in Topology*, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1975, 55-56.
25. N. Noble, *Products with closed projections II*, Trans. Amer. Math. So., 160 (1971), 169-183.
26. N. Noble and Milton Ulmer, *Factoring Functions on Cartesian Products*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 163, 1972, 329-339.
27. N. A. Sănin, *On intersection of open subsets in the product of topological spaces*, C. R. (Doklady) Acad,Sci. URSS (N. S.) 53 (1946) 499-501. (Russian)
28. E. V. Shchepin, *Real functions and canonical sets in Tikhonov products and topological groups*, Uspehi Mat. Nauk 31 (1976), no.6,17-27. (Russian; English translation: Russian Math. Surveys 31 (1976), no. 6,17-27)
29. Michael G. Tkačenko, *Factorization theorems for topologcial groups and their applications*, Topology and its Applications 38 (1991) 21-37, North Holland.
30. Michael G. Tkačenko, *Compactness type properties in topological groups*, Czechoslovak Math. J. 38 (1988), 324-341.
31. V.V. Uspenskiĭ, *Topological groups and Dugundji compacta*, Math. USSR Sbornik, Vol. 67(1990), No.2.

Indice Alfabético