

2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADISTICA ESPECTRAL DE UN BILLAR DE SIERPINSKI

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ENRIQUE LARCOS PICHARDO

DIRECTOR: DR. JORGE FLORES VALDES



MEXICO, D. F.

ENERO, 1999.

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION DE FISICA

271117

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"ESTADISTICA ESPECTRAL DE UN BILLAR DE SIERSPINSKI"

realizado por ARCOS PICHARDO ENRIQUE

con número de cuenta 8652125-3 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DR. JORGE FLORES VALDES

Propietario

DR. RAFAEL ANGEL BARRIO PAREDES

Propietario

DR. FRANCOIS ALAIN LEYVRAZ WALTZ

Suplente

DR. THOMAS HENRY SELIGMAN SCHURCH

Suplente

DR. LUIS BENET FERNANDEZ

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA  
Coordinador de Licenciatura.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA  
DIRECCIÓN GENERAL DE INSTITUCIONES EDUCATIVAS FEDERATIVAS

A MIS PADRES

JUANA PICHARDO      Y      ENRIQUE ARCOS

A MIS SOBRINOS:

BETY  
LAURA  
ULISES  
CESAR  
ANDRÉS  
DANIEL  
JORGE  
HECTOR

A mi familia Arcos  
y  
a mi familia Pichardo

Con cariño a:

IRENE PACHECO LOPEZ

Y

ENRIQUE ARCOS PACHECO

## AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a la **Universidad Nacional Autónoma de México** la oportunidad que me ha dado de obtener una formación profesional dentro de sus aulas, así como a todas las instancias que dependen de ella y que de alguna forma han colaborado en mi formación profesional, en particular a la **Facultad de Ciencias y al Instituto de Física**.

Agradezco a mis asesores de tesis, el

**Dr. Jorge Andrés Flores Valdés**  
y el  
**Dr. Thomas H. Seligman Schurch**

todo el apoyo y la paciencia que han tenido con mi trabajo.

Asimismo quiero agradecer al **Dr. Francois Leyvraz Waltz** el apoyo y las sugerencias que me dio durante mi trabajo de tesis.

Quiero agradecer de manera muy especial a la  
**M. en C. Gabriela Báez Juárez**  
y al

**Dr. Rafael Méndez Sánchez**  
toda la ayuda y amistad que me han brindado.

Agradezco a todos los miembros del sínodo sus comentarios y sugerencias, así como la revisión de este trabajo.

Agradezco al **Dr. Luis Benet Fernández** y al **Dr. Rafael Angel Barrio Paredes** haber aceptado ser parte del sínodo.

También agradezco al **M. En C. Hugo Hernández** todo el apoyo y ayuda que me ha dado en la última etapa de mi trabajo.

Agradezco al **M. En C. Carlos Mejía** y al **Físico Arturo Velasco** todas las orientaciones de cómputo que en su momento me dieron.

Agradezco a **Lizette y Martha** todo el apoyo administrativo.

Finalmente quiero agradecer profundamente la comprensión y la paciencia que han tenido conmigo mis padres **Enrique Arcos Mendoza** y **Juana Pichardo Velásquez**, mi hermano **Alejandro Arcos Pichardo** y mi esposa **Irene Pacheco Lopez**.

## ÍNDICE

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Índice	iv
<b>Resumen</b>	v
<b>1 Introducción</b>	1
<b>2 El Billar de Sierpinski</b>	3
2.1 Billares Acústicos	7
<b>3 Estadísticas Espectrales</b>	11
3.1 Número Confiable de Niveles	11
3.2 Repulsión de Niveles	12
3.3 Varianza del Número de Niveles	16
<b>4 Método del Elemento Finito</b>	17
4.1 Fundamento del Elemento Finito	17
4.2 Discretización de la Región	18
4.3 Sistema de Ecuaciones Generalizado	20
4.3.1 Solución del Sistema	21
<b>5 Resultados</b>	23
5.1 Comparación de la $N(E)$ teórica con la $N(E)$ Numérica	23
5.2 Repulsión de Niveles	26
5.3 Rigidez Espectral	28
<b>6 Conclusiones</b>	32
<b>7 Apéndice</b>	35
<b>8 Bibliografía</b>	43

## RESUMEN

En la presente tesis se analiza la estadística espectral de cuatro regiones bidimensionales que tienen la forma de las cuatro primeras generaciones del fractal conocido como tapete de Sierpinski.

El objetivo de realizar las estadísticas es estudiar las propiedades de fluctuación del espectro de frecuencias de las cuatro regiones, y entonces determinar cuál es la tendencia de los espectros, a ser tipo Poisson o tipo GOE, conforme aumenta la generación del fractal. La realización del trabajo es como sigue:

- se generan los billares para las cuatro generaciones del fractal.
- se obtienen los elementos de matriz que representan estas regiones usando el método del elemento finito.
- se realizan las diagonalizaciones correspondientes y se obtienen los eigenvalores del sistema.

Posteriormente se realizaron estadísticas sobre los espectros obtenidos con el propósito de caracterizar las fluctuaciones del espectro y con esto inferir si el espectro de las regiones es el de un sistema tipo Poisson o el de un sistema tipo GOE, además de observar cuál era la tendencia de este comportamiento conforme aumenta la generación del fractal.

Un cálculo previo a las estadísticas fue el cálculo del número confiable de niveles de energía de los espectros obtenidos. Para ello, comparamos las curvas generadas por la fórmula de Weyl y el número de estados  $N(E)$  de los espectros calculados numéricamente.

Las estadísticas analizadas son la  $p(s)$ , que nos muestra cuál es la probabilidad de que el espaciamiento entre niveles consecutivos de energías se encuentre en el intervalo  $(s, s+ds)$ , y la  $\Sigma^2(L)$  que es la varianza del número estadístico  $n(L)$  que cuenta el número de niveles contenidos en el intervalo  $[n, n+L]$ .



## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

En años recientes existe un gran interés en el estudio de sistemas ondulatorios cuyo límite de rayos es caótico. La investigación en sistemas con paredes de potencial infinito —conocidos como billares— ha sido de especial interés. En esta tesis se estudian las fluctuaciones espectrales de un billar acústico. La característica de este billar es que tiende a una estructura fractal.

Si estudiamos el potencial de velocidades en una región  $R$ , la ecuación que describe la dinámica ondulatoria correspondiente está dada por la ecuación de Helmholtz con condiciones de Neumann a la frontera:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2)\phi &= 0 && \text{dentro de } R \\ \hat{n} \cdot \nabla \phi &= 0 && \text{en } \partial R. \end{aligned} \quad (1.1)$$

El objetivo de este trabajo es estudiar las propiedades estadísticas del espectro de frecuencias de las cuatro primeras generaciones de un billar fractal. Como referencia se comparará con las predichas por el ensamble ortogonal gaussiano (GOE) y con las de una secuencia aleatoria sin correlaciones tipo Poisson.

En el capítulo 2 veremos algunas clases de billares, así como las características principales del fractal denominado *carpeta de Sierpinski* que será nuestro sistema a estudiar. En particular se explica la forma de desimetrización de la región que usamos para estudiar el espectro de energías del sistema original.

En el tercer capítulo se revisarán los fundamentos de las estadísticas espectrales. Se pondrá especial atención en la distribución de espaciamientos de primeros vecinos  $p(s)$  y

en la rigidez espectral  $\Sigma^2(L)$  indicando cual es el significado físico de los resultados de estas estadísticas.

Posteriormente, en el capítulo 4 se explica brevemente el método de cálculo numérico que se utiliza –el método de los elementos finitos- y cómo se implementa para resolver el problema de las cuatro generaciones del fractal estudiado. Se indica el problema de la finura de la malla, los tamaños de los billares fractales y la forma de resolver el sistema de eigenvalores generalizado: por diagonalización o por métodos iterativos.

En el capítulo 5 se analizan los resultados de las estadísticas realizadas sobre los espectros de las regiones estudiadas. Se muestran las comparaciones de las densidades acumuladas de niveles –numéricas- con los promedios teóricos dados por la fórmula de Weyl para las distintas generaciones.

Por último, se dan las conclusiones basadas en los resultados obtenidos de este trabajo.

## Capítulo 2

### EL BILLAR DE SIERPINSKI

Un billar clásico es una región bidimensional  $R$  acotada por curvas continuas en cuyo interior se mueve una partícula. El potencial de este sistema está dado por:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 0 && \text{dentro de } R \\ V(x,y) &= \infty && \text{de otra manera.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Las trayectorias que las partículas siguen son líneas rectas que al chocar elásticamente con las paredes siguen las leyes de la reflexión, dado que la velocidad normal a las paredes cambia de signo mientras que la velocidad tangencial es la misma antes y después del choque. Con esta dinámica los sistemas se clasifican en caóticos, integrables o mixtos. En los segundos es posible encontrar una constante de movimiento adicional a la energía. Una trayectoria típica de un billar circular, el cual es integrable, se muestra en la Fig. 2.1. En ésta se muestra una cáustica. Por otra parte, una trayectoria típica de un billar caótico se muestra en la Fig. 2.2. En todos los billares -caóticos o integrables- se pueden encontrar algunas órbitas periódicas. Éstas se clasifican en estables o inestables y en aisladas y no aisladas. En la Fig. 2.3 se muestran algunas trayectorias periódicas en un rectángulo.

En la figura 2.4 vemos algunas trayectorias periódicas inestables en el billar de Sinaí. En la figura 2.5 se muestran algunas órbitas periódicas aisladas marginalmente inestables en el estadio de Bunimovich.

Es importante señalar la existencia de este tipo de órbitas debido a que en el caso del billar fractal -tema de esta tesis- existe una cantidad importante de trayectorias periódicas marginalmente inestables que pudieran influir significativamente en nuestros resultados.

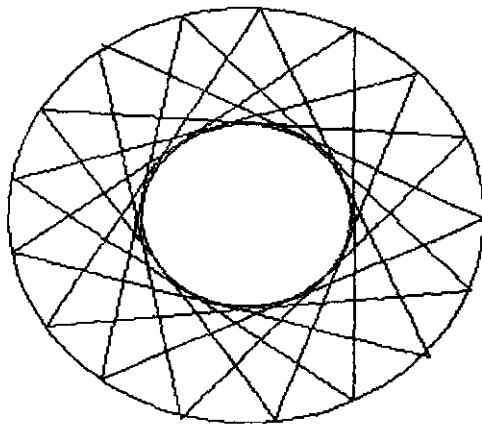


Figura 2.1 Trayectoria típica en un billar circular.

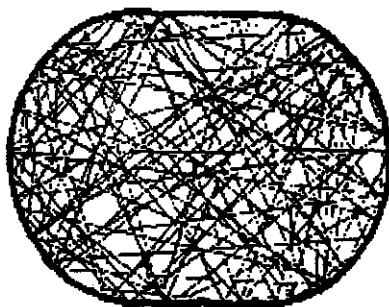


Figura 2.2 Trayectoria típica en un estadio de Bunimovich

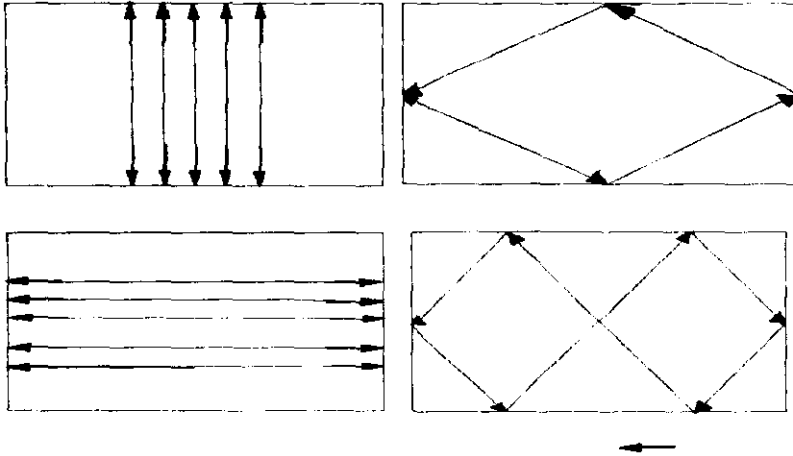


Figura 2.3 Trayectorias periódicas de un billar rectangular

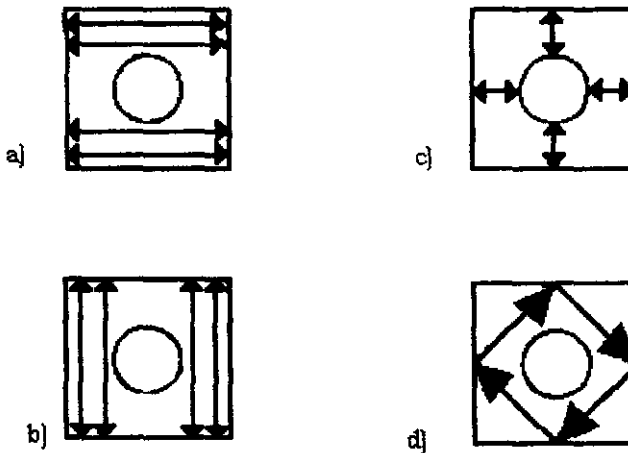


Figura 2.4 Órbitas periódicas aisladas y no aisladas en un billar de Sinai

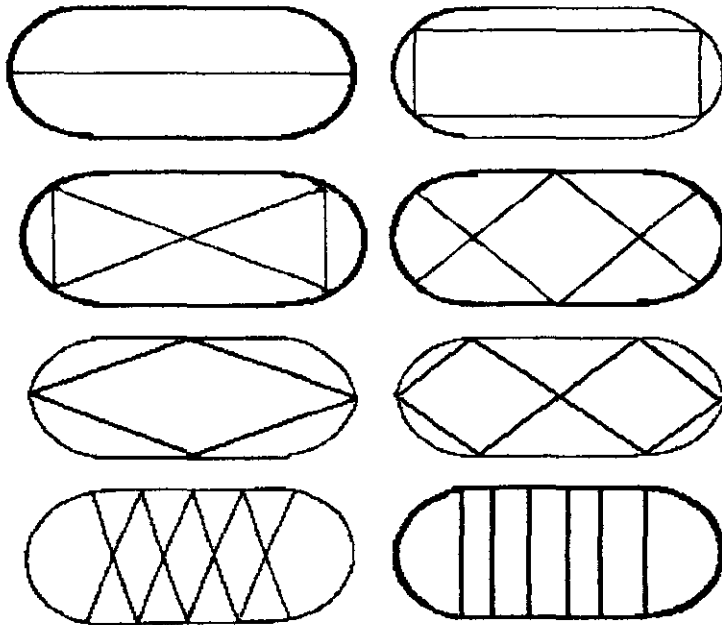


Figura 2.5: Órbitas periódicas aisladas y no aisladas del estadio de Bunimovich

El análogo cuántico de los billares clásicos son los billares cuánticos. Éstos se rigen por la ecuación de Schrödinger. Para el potencial  $V(x,y)$  dado en la ecuación 2.1, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es la siguiente:

$$\left( \nabla^2 + \frac{2mE_n}{\hbar^2} \right) \psi_n = 0 \quad \psi_n \text{ dentro de } R \quad (2.2)$$

$$\psi_n = 0 \quad \psi_n \text{ en } \partial R,$$

donde  $\nabla^2$  es el operador laplaciano,  $\hbar$  es la constante de Planck,  $m$  es la masa de la partícula y  $\psi$  es la función de onda.

La condición a la frontera del billar es  $V = \infty$  y entonces la función de onda debe anularse

en  $\partial R$ . Esta ecuación corresponde también a la ecuación de eigenvalores de una membrana con condiciones a la frontera de Dirichlet homogéneas. Es decir, es una ecuación de Helmholtz con condiciones de Dirichlet a la frontera.

## 2.1 BILLARES ACÚSTICOS

La dinámica de un sistema continuo (fluido) ante la presencia de perturbaciones acústicas puede plantearse en términos del desplazamiento del fluido. Sin embargo, el estudio de un sistema acústico se vuelve más sencillo si trabajamos en términos del potencial de velocidades, el cual está relacionado con el vector desplazamiento  $\chi(r,t)$  por

$$\dot{\chi}(r,t) = -\nabla\phi(r,t).$$

En acústica, el potencial de velocidades para el flujo de un fluido a través del cual el sonido se transmite, es una función escalar cuyo gradiente nos da la velocidad del flujo. El potencial de velocidades  $\phi$  satisface la ecuación de onda bidimensional[3][4], que en coordenadas cartesianas toma la siguiente forma

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

donde  $v$  es la velocidad del sonido en el medio. Para una frontera rígida no existe flujo a través de las paredes y entonces la condición de frontera  $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{n}}\right)_{\partial R} = 0$  debe satisfacerse.

La ecuación de la situación estacionaria es

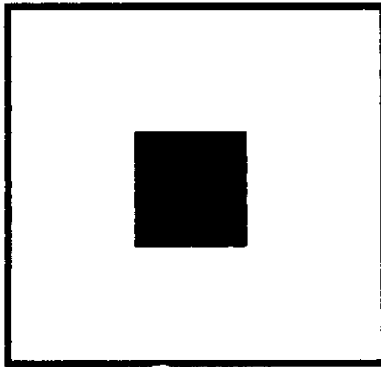
$$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0 \quad \text{en } R \quad (2.4)$$

$$\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0 \quad \text{en la frontera } \partial R.$$

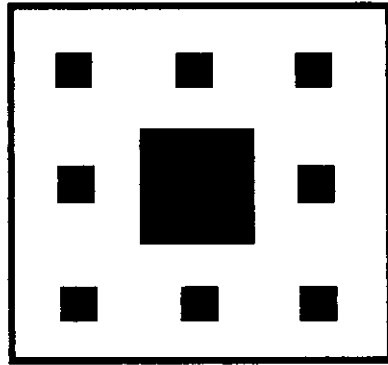
Esta ecuación es, nuevamente, una ecuación de Helmholtz para el potencial de velocidades  $\phi$ , pero ahora con condiciones a la frontera de Neumann. Lo anterior significa que el fluido confinado en la región que nos interesa no puede atravesar las paredes del recipiente y por lo tanto la velocidad normal a la pared en la frontera  $\partial R$  es cero. Las soluciones de esta ecuación dependen de la forma de la región.

Los billares tema de esta tesis son billares acústicos. En particular, nos enfocaremos a encontrar los eigenvalores correspondientes a la Ec. 2.4 con las condiciones de frontera de Neumann.

Las formas de los billares que nos interesan en este trabajo corresponden a las cuatro primeras generaciones del tapete de Sierpinski, una región cuyo límite es fractal. En las figuras 2.6 y 2.7 se muestra la forma que tienen las regiones en estudio, las 4 primeras generaciones del fractal.

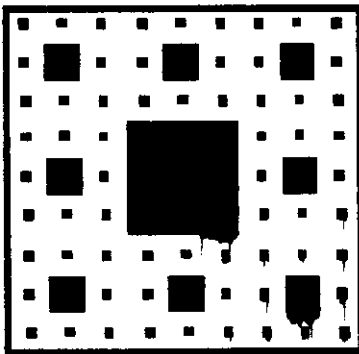


**GENERACIÓN UNO**

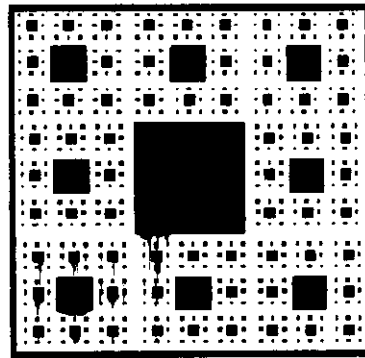


**GENERACIÓN DOS**

Figura 2.6 Generación uno y dos del tapete de Sierpinski.



**GENERACIÓN 3**



**GENERACIÓN 4**

Figura 2.7 Generaciones 3 y 4 del tapete de Sierpinski.



Estos billares presentan simetrías de reflexión respecto de un eje vertical, uno horizontal y las dos diagonales. es decir, son invariantes ante reflexiones ( $C_{4v}$ ), y además presentan también invariancia ante rotaciones de  $90^\circ$ . En la figura 2.8 se muestran dichos ejes de simetría. Con el fin de evitar la mezcla de espectros correspondientes a cada una de las simetrías de reflexión, las regiones originales se han desimetrizado, y finalmente se han obtenido regiones con las formas que se presentan en la figura 2.9.

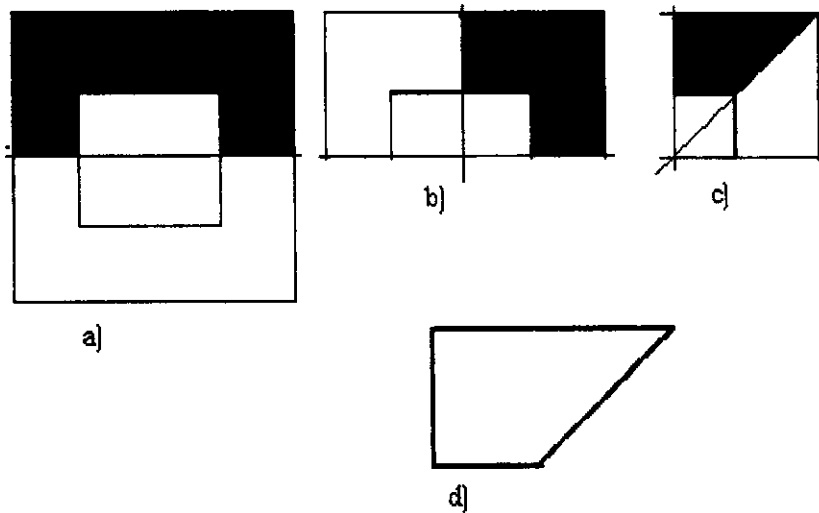


Figura 2.8 Desimetrización de la primera generación del tapete de Sierpinski.

## Capítulo 3

# ESTADÍSTICAS ESPECTRALES

Las propiedades de un espectro de frecuencias las caracterizamos mediante una serie de estadísticas sobre dicho espectro. En nuestro caso, el propósito de realizar las estadísticas es el de poder comparar las propiedades de los espectros obtenidos numéricamente con las propiedades de los espectros tipo Poisson, o con los de tipo GOE - los cuales están asociados con comportamientos integrables o caóticos de los sistemas clásicos correspondientes -.

Primero, encontraremos la función  $N(E)$  del espectro numérico de niveles de energía, y posteriormente se comparará este cálculo con el resultado que nos proporciona la fórmula de Weyl. Después, calculamos las dos estadísticas que ya hemos mencionado en esta tesis, la  $\rho(s)$  - distribución de primeros vecinos - y la  $\Sigma^2(L)$  - varianza del número de niveles en el intervalo  $[\alpha, \alpha \cdot L]$ -, las cuales se analizarán en el siguiente párrafo.

### 3.1 NÚMERO CONFIABLE DE NIVELES

Comenzamos con la función escalera o densidad acumulada de niveles. Ésta nos da el número de niveles de energía del espectro del billar por debajo de la energía  $E$  (este espectro se obtiene de resolver la ecuación independiente del tiempo o ecuación de eigenvalores). Esta función se puede escribir de la forma siguiente

$$N(E) = \sum_i \Theta(E - E_i), \quad (3.1)$$

donde  $\Theta$  es la función de Heaviside. La  $N(E)$  se incrementa en 1 cada vez que  $E = E_i$ , donde  $E_i$  es el  $i$ -ésimo nivel de energía del espectro.

La expresión de la  $N(E)$  la podemos escribir en la forma siguiente:

$$N(E) = \langle N(E) \rangle - N_{fluc}(E), \quad (3.2)$$

es decir, podemos obtener la  $N(E)$  como la suma de un término promedio más un término fluctuante. Una expresión encontrada para el término  $\langle N(E) \rangle$  en el caso de billares es

$$\langle N(E) \rangle \approx \frac{AE}{4\pi} \mp \frac{P\sqrt{E}}{4\pi} + K, \quad (3.3)$$

conocida como fórmula de Weyl[5]. Esta expresión toma en cuenta el área  $A$  del billar y el perímetro  $P$  de la región (el signo  $\mp$  se usa dependiendo de las condiciones a la frontera de Dirichlet o de Neumann respectivamente. En nuestro caso, usamos las de Neumann). El término  $K = \text{constante}$  contiene información de la curvatura y la topología del billar. Bohigas[5] indica que la  $K$  es un término que toma en cuenta la curvatura local de la frontera de la región. La expresión para  $K$  es la siguiente

$$K = \frac{1}{12} \int_{CR} k(l) dl, \quad (3.4)$$

donde  $k(l)$  es la curvatura local de la región. El valor de  $K$  en caso de hoyos de forma cuadrada es  $K=1/4$  [6]. Éste es un resultado interesante, debido a que en las regiones en estudio aparecen hoyos de esta forma en la tercera y cuarta generaciones, y por lo tanto, deberá tomarse en cuenta en el momento de hacer el cálculo de la fórmula de Weyl correspondiente a estas regiones.

### 3.2 REPULSIÓN DE NIVELES ( $p(s)$ )

Para calcular la estadística espectral se comienza por desdoblar el espectro original en una secuencia de números  $x_i$ , que se obtienen al realizar un mapeo

$$E_i \rightarrow x_i, \quad (3.5)$$

donde  $x_i$  es

$$x_i = \langle N(E) \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

Este mapeo se realiza con el fin de quedarnos solamente con la parte de las fluctuaciones del espectro. De esta forma se encuentra que la secuencia de  $x_i$  tiene un espaciamento promedio de niveles igual a uno y no depende de la forma de la  $\langle N(E) \rangle$ .

En este trabajo se desdobló el espectro mediante un polinomio de cuarto grado. De esta manera la expresión para las fluctuaciones es la siguiente:

$$\delta_i = x_i - \langle x_i \rangle, \quad (3.7)$$

donde la  $\langle x_i \rangle$  es, por construcción,

$$\langle x_i \rangle = i - 1/2, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

La primera estadística que se hace sobre el espectro ya desdoblado es la estadística de la separación de niveles  $p(s)$ . Con ella se encuentra la probabilidad de que dos niveles  $x_i, x_{i+1}$  estén separados entre  $s$  y  $s + ds$ . Un análisis de los límites de la  $p(s)$  nos muestra que si

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) \rightarrow 0, \quad (3.9)$$

dos niveles consecutivos  $x_i, x_{i+1}$  tienen muy poca probabilidad de estar juntos o, dicho de otra forma, existe una repulsión de niveles. En 1957, Wigner al modelar espectros de núcleos atómicos, encontró repulsión de niveles de energía, y propuso la siguiente expresión para la  $p(s)$  de los espectros nucleares:

$$p(s) \sim (\pi/2) s \exp(-\pi s^2/4). \quad (3.10)$$

En la teoría de matrices aleatorias esta distribución se parece mucho a la GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble).

Esta característica de repulsión de niveles se encuentra también en sistemas que son clásicamente caóticos, como lo es un billar de Sinai o un estadio de Bunimovich. En la Fig 3.1 observamos cómo es la distribución para un estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Dirichlet. Se observa claramente como la  $p(s)$  tiene un comportamiento muy similar a la de un sistema tipo GOE.

Por otro lado, al realizar estadísticas sobre sistemas genéricos que son integrables se encontró que

$$\lim_{s \rightarrow 0} p(s) \approx 1. \quad (3.11)$$

es decir, que existe una probabilidad grande de encontrar niveles de energía consecutivos muy juntos. La expresión que nos modela el comportamiento para el espectro de un sistema integrable es una distribución tipo Poisson:

$$p(s) = e^{-s}. \quad (3.12)$$

En la gráfica de la figura 3.2 se muestra la  $p(s)$  del espectro de un rectángulo que se calculó con el método del elemento finito. En este caso, la  $p(s)$  del espectro se comporta como la de un sistema tipo Poisson.

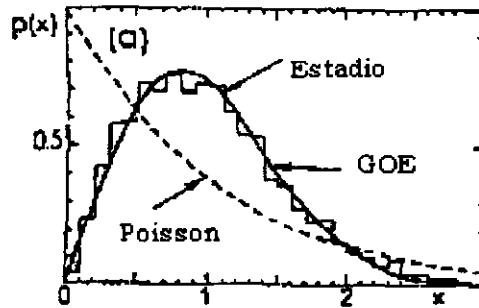


Figura 3.1: Distribución del espaciamiento de primeros vecinos para el estadio de Bunimovich con condiciones a la frontera de Dirichlet (tomada de [13]).

En la actualidad hay indicaciones de la existencia de una tercera distribución que corresponde a la región de transición entre comportamientos GOE y Poisson[7]. Bogomolny presenta resultados numéricos que sugieren que para ciertos sistemas dinámicos la estadística espectral muestra repulsión de niveles, pero se desvían notablemente por los predichos por la teoría de matrices aleatorias. En este caso, la expresión encontrada analíticamente para la  $p(s)$  es

$$p(s) = 4s \exp(-2s). \quad (3.13)$$

En la gráfica 3.3 se muestran las tres distribuciones.

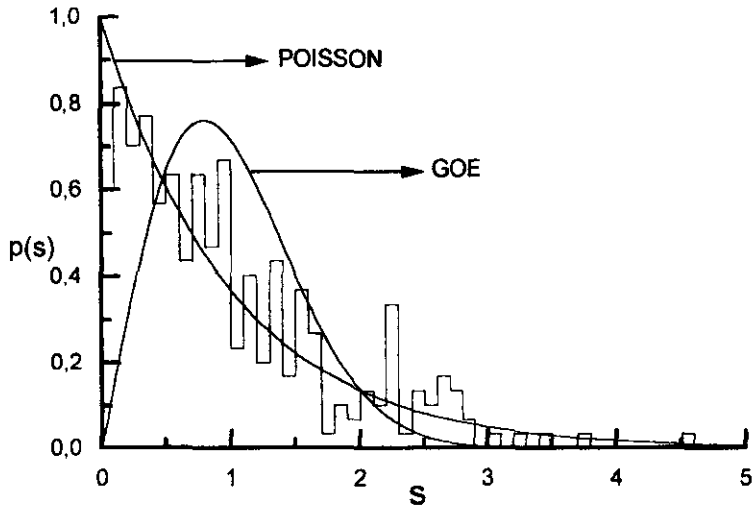


Figura 3.2 Distribución de espaciamentos de primeros vecinos de un rectángulo.

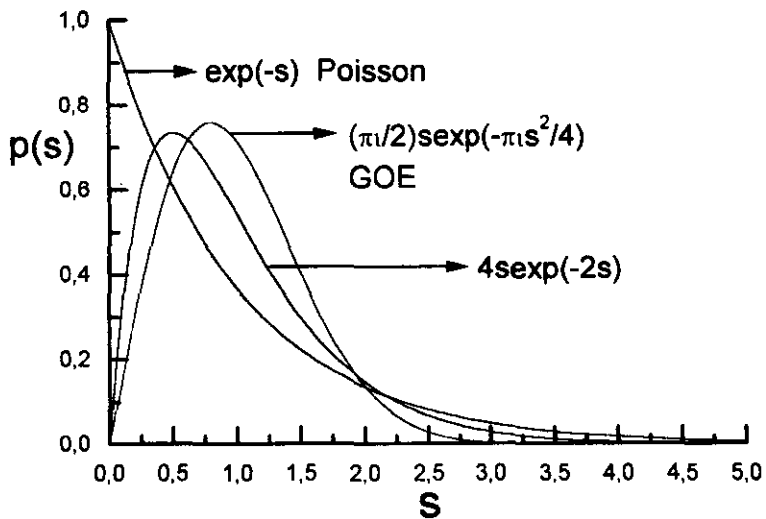


Figura 3.3: Gráficas de las tres dsitribuciones para la repulsión de niveles  $p(s)$ .

### 3.3 VARIANZA DEL NÚMERO DE NIVELES ( $\Sigma^2(L)$ )

La otra estadística que calculamos para el espectro desdoblado es la varianza del número de niveles en el intervalo  $[\alpha, \alpha + L]$ .

$$\Sigma^2(\alpha, L) = \langle n^2(\alpha, L) \rangle - \langle n(\alpha, L) \rangle^2, \quad (3.14)$$

donde  $n(\alpha, L)$  cuenta el número de niveles contenidos en el intervalo  $[\alpha, \alpha + L]$ .

Nuevamente se encuentra que la forma de la  $\Sigma^2(L)$  depende del sistema que estemos estudiando. Así, para una distribución de un sistema tipo GOE se ha encontrado que la expresión analítica de la curva  $\Sigma^2(L)$  es

$$\Sigma^2(L) = (2 - \pi^2) \ln L + .44, \quad L \gg 1 \quad (3.15)$$

mientras que para un sistema tipo Poisson la expresión es

$$\Sigma^2(L) = L \quad (3.16)$$

En la figura 3.4 se muestran las gráficas de ambas curvas.

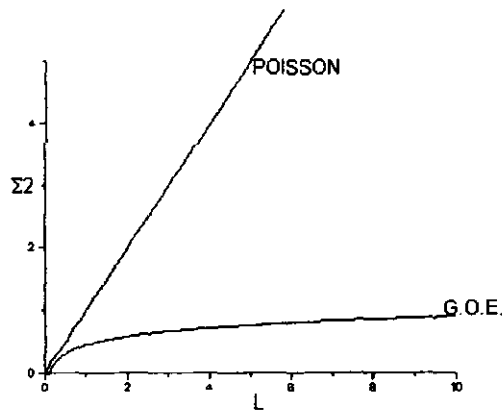


Figura 3.4: Curvas de las expresiones analíticas de la varianza para un sistema tipo GOE y uno tipo Poisson.

## Capítulo 4

# MÉTODO DEL ELEMENTO FINITO

En este capítulo veremos un método para encontrar las soluciones de la ecuación de Helmholtz para el potencial de velocidades  $\phi$

$$\begin{aligned}\nabla^2 + \lambda \phi &= 0 \text{ en } R, \\ \partial \phi / \partial n &= 0 \text{ en la frontera } \partial R,\end{aligned}\tag{4.1}$$

para billares de forma arbitraria. En los casos en que la forma de la región es muy complicada o en los casos que no existe una solución analítica de la ecuación, la manera de solucionar el problema es mediante un método numérico que calcule de manera aproximada los espectros de energía de las regiones bajo estudio. Un método que introduce de manera natural las condiciones a la frontera de Neumann es el método del elemento finito[2].

## 4.1 FUNDAMENTO DEL ELEMENTO FINITO

El fundamento del método de los elementos finitos está basado en la siguiente aseveración, mostrada por Méndez [2][11] aplicando el principio de mínima acción y un principio variacional al caso de una membrana:

"Resolver la ecuación de Helmholtz con condiciones a la frontera  $\partial R$  de Neumann o



Dirichlet equivale a extremar  $F$  sobre una región  $R$ , donde  $F$  es la funcional

$$F = \frac{1}{2} \int_R ((\nabla \phi)^2 - \lambda \phi^2). \quad (4.2)$$

Aquí  $\phi$  es el potencial de velocidades.

El principio variacional para la ecuación 4.1 nos lleva a la siguiente ecuación

$$\delta F = \int_R (\nabla \phi \cdot \delta(\nabla \phi)) da - \lambda \int_R \phi \delta \phi da = 0, \quad (4.3)$$

de donde obtenemos la condición siguiente:

$$- \int_R (\nabla^2 \phi + \lambda \phi) \delta \phi da + \oint_{\partial R} (\hat{n} \cdot \nabla \phi) \delta \phi ds = 0, \quad (4.4)$$

lo que nos indica que los integrandos deben ser cero tanto en la región  $R$  como en la frontera  $\partial R$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 + \lambda \phi &= 0 \text{ en } R, \\ \hat{n} \cdot \nabla \phi &= 0 \text{ en } \partial R. \end{aligned} \quad (4.5)$$

que es precisamente la ecuación de Helmholtz con condición de Neumann a la frontera  $\partial R$ .

Más detalles de la demostración se encuentran en las referencias[2][10][11]. Aquí sólo indicaremos que en el caso de una solución numérica por medio del elemento finito sólo se toma un conjunto finito de funciones admisibles sobre las cuales se extremiza, dada la imposibilidad de tomar un conjunto continuo de ellas. De esta forma, la función  $\phi$  se escribe como una combinación lineal de tales funciones

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_i(x, y), \quad (4.6)$$

donde las  $\alpha_i$  son constantes por determinar y las  $\Phi_i$  son funciones cuya forma dependerá de la manera de discretizar la región.

## 4.2 DISCRETIZACIÓN DE LA REGIÓN

La discretización utilizada en el elemento finito consiste en dividir a la región estudiada en

celdas básicas de forma triangular o rectangular. Méndez[2] propone una malla triangular de tamaño fijo lo que nos genera elementos de matriz idénticos en el interior de la región, quedando sólo por ajustar los elementos del contorno, con el fin de que ajusten lo mejor posible con la frontera de la región, y así evitar errores considerables en el cálculo (Fig. 4.1).

En la situación que estudiamos en esta tesis la malla se ajusta exactamente a la frontera de las regiones estudiadas y por lo tanto no tenemos el problema de los elementos del contorno. Esto lo mostramos en la Fig. 4.2.

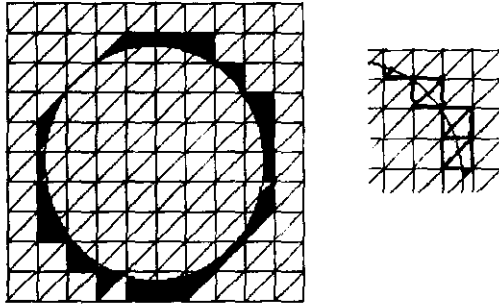


Figura 4.1: Gráfica que nos muestra una región sumergida en una malla triangular de tamaño fijo. Se muestra el problema de los elementos de contorno.

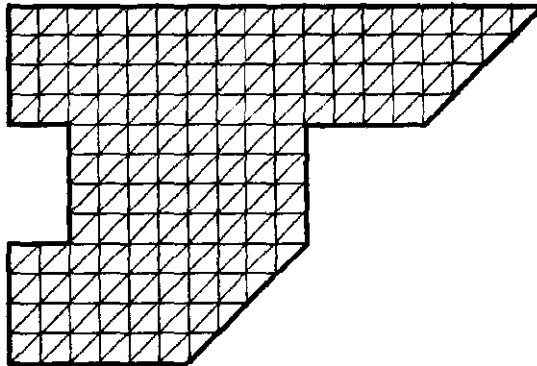


Figura 4.2: Gráfica que nos muestra como las regiones estudiadas se ajustan perfectamente a la malla, evitando así el problema de los elementos de contorno.

La herramienta computacional aquí desarrollada utiliza una malla cuyas celdas básicas tienen forma hexagonal anisotrópica, con separación unitaria entre nodos. Sobre esta malla y en cada uno de los nodos se define cada una de las funciones base  $\Phi_i(x,y)$  de nuestro cálculo. En la Fig.4.3 mostramos la forma de estas funciones para esta elección de celdas básicas

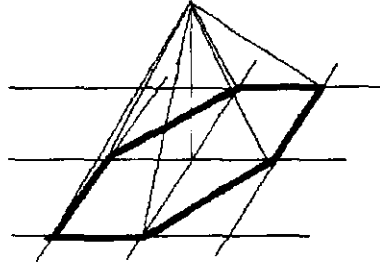


Figura 4.3 Gráfica de las funciones base para el caso de una malla bidimensional con celdas básicas de forma hexagonal.

### 4.3 SISTEMA DE ECUACIONES GENERALIZADO

Extremar el funcional  $F = F(\phi)$  con  $\phi$  dada en la ec. 4.2 nos conduce al problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales de  $n \times n$  de la forma

$$Ax = \lambda Bx. \quad (4.7)$$

donde los elementos de matriz están dados por

$$A_{ij} = \int_R \nabla \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \, da. \quad (4.8)$$

$$B_{ij} = \int_R \Phi_i \Phi_j \, da. \quad (4.9)$$

y  $x$  es el eigenvector con componentes  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . La matriz  $A$  está asociada directamente con el operador Laplaciano  $\nabla^2$  y la matriz  $B$  aparece como consecuencia de no haber tomado las  $\Phi_i(x,y)$  ortogonales, es decir, la base no es ortogonal.

Un cálculo explícito de los elementos de matriz  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  se puede consultar en la

referencia [2]; el programa de cómputo hecho en este trabajo hace uso de dichos resultados y calcula de manera automática todos los elementos de matriz de las matrices  $A$  y  $B$ . Además empaqueta, de la misma forma como lo hace el programa de Méndez, ambas matrices, guardando sólo los elementos que son distintos de cero en un par de matrices correspondientes a  $A$  y  $B$ , y guardando los índices de dichos elementos en otra matriz que denominamos matriz de posiciones.

### 4.3.1 SOLUCIÓN DEL SISTEMA

La parte restante de este capítulo se dedicará a indicar el método utilizado para resolver el sistema de ecuaciones generalizado implicado en este trabajo.

Tenemos dos maneras de resolver el sistema de ecuaciones: por diagonalización de las matrices o por métodos iterativos. La selección del cualquiera de estos dos métodos depende básicamente del tamaño de las matrices, aunque también influyen características como la escasez, la positividad, simetría o si son matrices reales o complejas. Las características de las matrices que se manejan en este caso son;  $A$  es real y simétrica,  $B$  es positiva definida y también real y simétrica. Ambas matrices son ralas - tienen muy pocos elementos distintos de cero- y la dimensión depende del número de puntos o nodos con los que se discretice la región.

Es conveniente discretizar las regiones con el mayor número de puntos o, lo que es lo mismo, utilizar la malla más fina posible, con el fin de lograr un cálculo más preciso. Las limitaciones de memoria en las computadoras nos indican cuál es el tamaño máximo de las matrices a diagonalizar en caso de elegir el método de diagonalización.

Para realizar esta tesis se trabajó con el método de diagonalización. Esta elección se debió a que las diagonalizaciones producen cálculos más precisos que las iteraciones, aunque también debido a que los tiempos requeridos de CPU por parte de los métodos iterativos son demasiado grandes.

La región correspondiente a la segunda generación del fractal se discretizó con una malla de 10621 puntos, lo que nos hizo diagonalizar matrices de  $10621 \times 10621$ , que fue la máxima dimensión de matrices con la que se pudo aplicar este método. Las diagonalizaciones se llevaron a cabo en la máquina BERENICE32 de la U.N.A.M en la cual están instaladas paqueterías de álgebra lineal. En particular el paquete que nosotros

usamos fue el EISPACK.

Para la primera generación del fractal la discretización produjo matrices de  $8281 \times 8281$ . La elección de la finura de la malla se hizo de acuerdo al máximo tamaño de las matrices que se podían diagonalizar.

Finalmente, sólo nos resta indicar que las matrices correspondientes a las regiones de las generaciones tres y cuatro fueron diagonalizadas en la misma máquina. El orden de estas matrices fue de  $9631 \times 9631$  para la tercera generación y  $9043 \times 9043$  para la cuarta generación.

## Capítulo 5

# RESULTADOS

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos para las cuatro regiones que corresponden a las cuatro primeras generaciones del tapete de Sierpinski.

### 5.1 COMPARACIÓN DE LA $\langle N(E) \rangle$ TEÓRICA CON LA $N(E)$ NUMÉRICA

Aquí se muestra la comparación de las gráficas  $\langle N(E) \rangle$  teórica - calculada con la fórmula de Weyl- con la  $N(E)$  de los espectros numéricos. El número de estados confiables que se pueden estimar de acuerdo a las gráficas de las figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 es por lo menos de 800 para las cuatro regiones - generaciones 1,2,3, y 4 del fractal, respectivamente -. Los espectros se obtuvieron - como se indicó en el capítulo anterior- mediante diagonalizaciones de sistemas que contenían matrices de distintas dimensiones de acuerdo a la discretización de cada una de las regiones.

En las gráficas la curva teórica corresponde, en todos los casos, a la fórmula de Weyl dada por la siguiente expresión

$$\langle N(E) \rangle \approx \frac{AE}{4\pi} \mp \frac{P\sqrt{E}}{4\pi} + K + P_{err}, \quad (5.1)$$

donde, como se indicó antes,  $A$  es el área de las regiones,  $P$  su perímetro,  $K$  es la constante que incluye información de la curvatura de la frontera y de la topología de las regiones y  $P_{err}$  es el polinomio que Báez y Méndez[8] han encontrado como corrección al error sistemático introducido por el método del elemento finito. En el apéndice mostramos los cálculos de la  $\langle N(E) \rangle$  para cada una de las regiones.

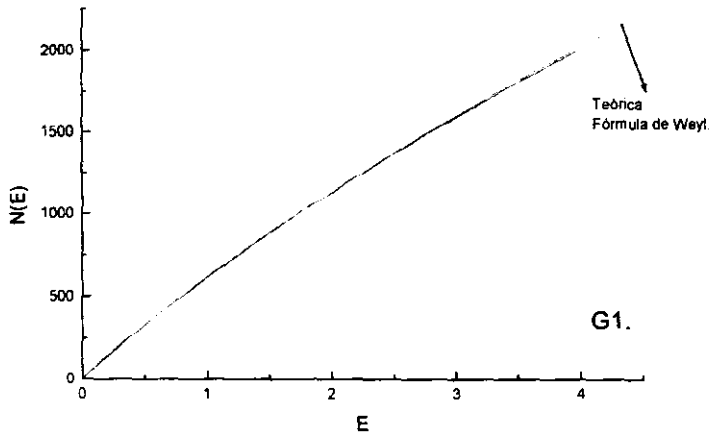


Figura 5.1:  $N(E)$  de la primera generación. Se observa un buen ajuste entre ambas curvas de por lo menos 1000 estados.

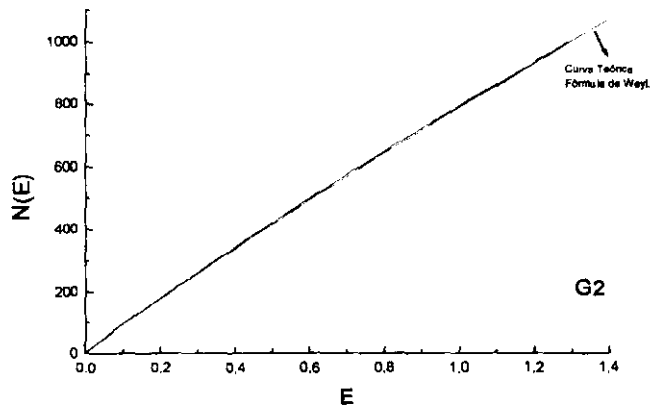


Figura 5.2:  $N(E)$  de la segunda generación. Se observa un ajuste por lo menos de 800 estados confiables.

En las dos primeras gráficas notamos un ajuste muy bueno de ambas curvas, las teóricas y las numéricas. Estas gráficas corresponden a la primera y segunda generación del fractal

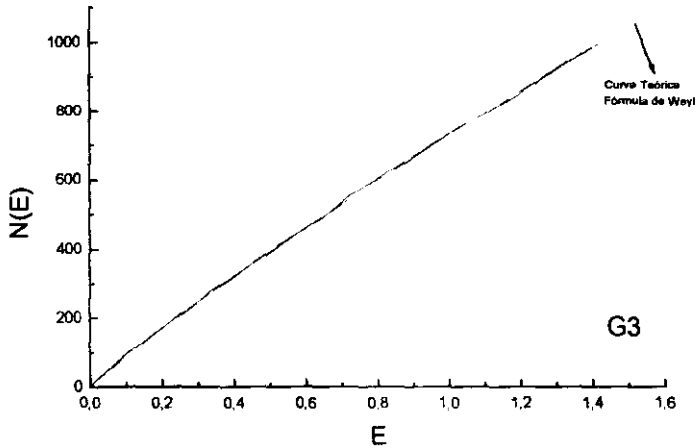


Figura 5.3 La  $N(E)$  de la tercera generación presenta pequeñas oscilaciones alrededor de la curva teórica.

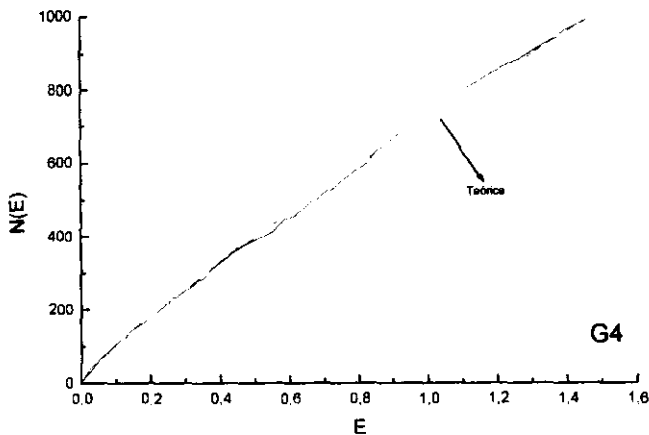


Figura 5.4: En la cuarta generación las oscilaciones son aun mayores que en la generación anterior. Sin embargo, notamos que ambas curvas no se separan considerablemente.



En la tercera y en la cuarta gráfica notamos ciertas oscilaciones de las curvas numéricas. Estas oscilaciones pensamos que se deben a la introducción de hoyos en las regiones.

El hecho que las curvas ajusten satisfactoriamente nos permite confiar en los resultados estadísticos siguientes.

## 5.2 REPULSIÓN DE NIVELES

Aquí se muestran las gráficas de la distribución de primeros vecinos  $p(s)$  -probabilidad de encontrar dos niveles de energía entre  $s$  y  $ds$ -. En las figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 mostramos las estadísticas de los espectros de las cuatro regiones. Se han tomado los primeros 400 eigenvalores de los espectros de los cuales los primeros 50 se han eliminado y finalmente se hizo la estadística con los 350 estados siguientes.

Observamos, en la gráfica de la Fig 5.5, que existe una tendencia a un comportamiento tipo GOE en el caso de la primera generación, mientras que en la gráfica correspondiente a la segunda generación se puede ver más marcada la tendencia a un comportamiento tipo GOE (gráfica de la Fig 5.6).

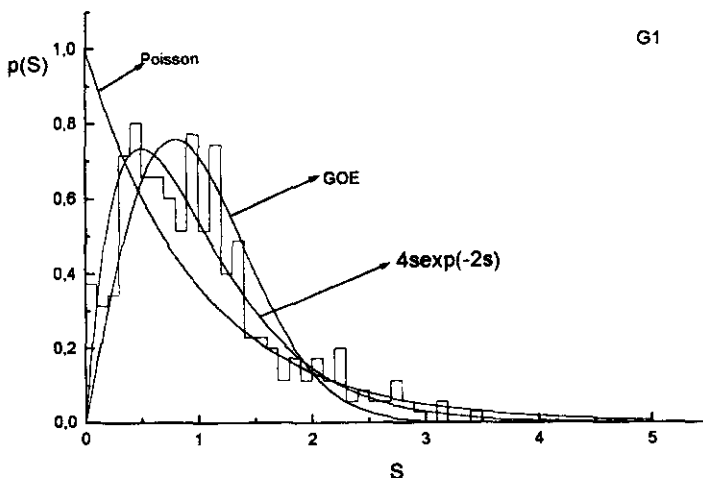


Figura 5.5:  $p(s)$  del espectro de la primera generación.

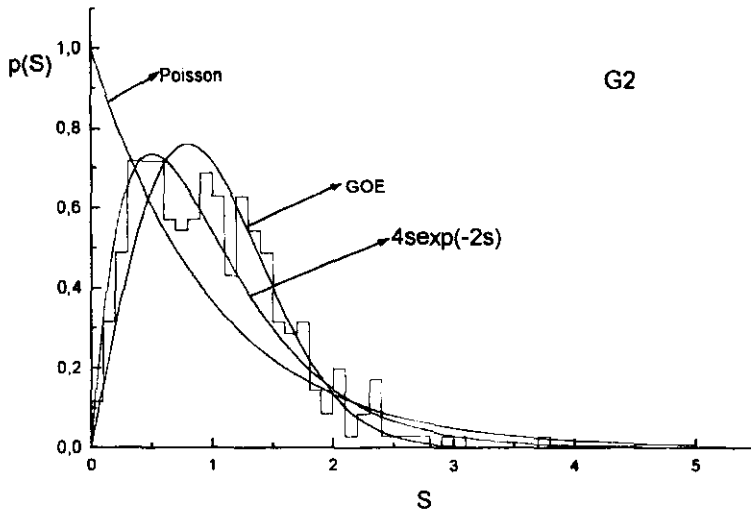


Figura 5.6: Distribución de primeros vecinos del espectro de la segunda generación.

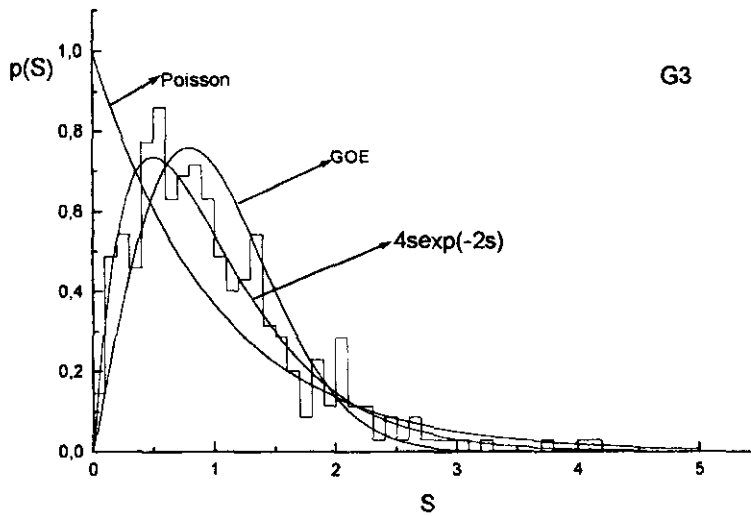


Figura 5.7:  $p(s)$  correspondiente al espectro de la tercera generación.

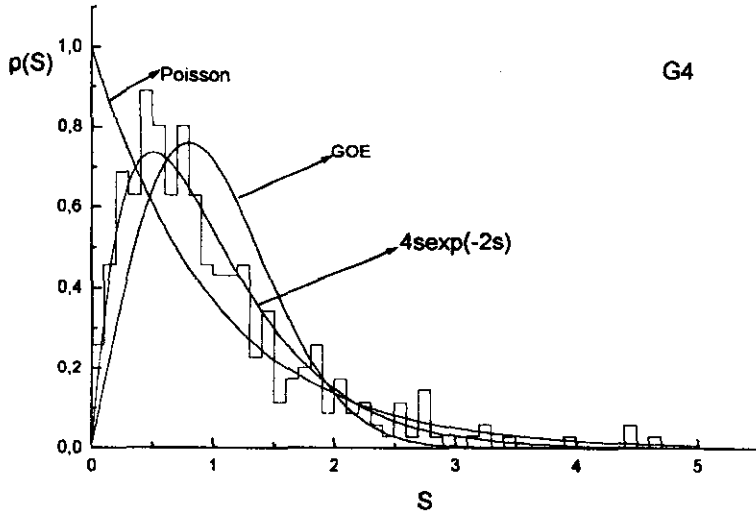


Figura 5.8: Gráfica de la  $p(s)$  de la cuarta generación.

En la gráfica de la Fig 5.7 se nota una ligera tendencia a separarse del comportamiento GOE pero no lo suficiente como para considerarse que el comportamiento es de un sistema tipo Poisson. Sin embargo se nota un buen ajuste con la curva que corresponde a sistemas pseudo-integrables[7]. Por último, en la gráfica 5.8 observamos que la tendencia a ser un sistema tipo Poisson es mayor que en el caso anterior, pero nuevamente se nota un buen ajuste con la curva correspondiente a los sistemas pseudo- integrables.

### 5.3 RIGIDEZ ESPECTRAL

Las siguientes cuatro gráficas nos muestran la varianza del número de niveles para el intervalo  $L$ . Cada una de ellas corresponde a cada una de las generaciones del

fractal que estudiamos. En los resultados siguientes se han tomado del estado 50 al 400 para realizar las estadísticas.

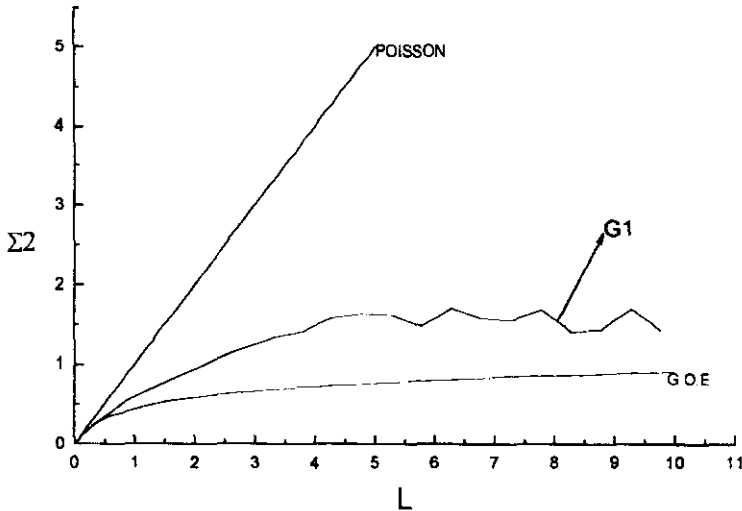


Figura 5.9: Varianza del espectro de la generación uno.

La gráfica 5.9 muestra que la varianza que presenta el espectro de la generación uno tiene una ligera tendencia a comportarse como la de un sistema tipo GOE. La gráfica 5.10 indica que para la segunda generación la varianza del espectro se acerca más que la generación anterior a la de un sistema tipo GOE. Esto concuerda con los resultados que obtuvimos al observar las gráficas de la  $p(s)$ , es decir, se observan las mismas tendencias en el análisis de ambas clases de estadísticas. En el análisis de las gráficas 5.11 y 5.12 observamos claramente como la varianza de los espectros de la tercera y cuarta generación se alejan rápidamente de la curva de un sistema tipo GOE, tendiendo a tener un comportamiento tipo Poisson. Esta tendencia se observa mucho más acentuada para la cuarta generación. Nuevamente este resultado concuerda con los resultados obtenidos del análisis de la estadística  $p(s)$ . En la gráfica 5.13 se muestra una comparación de las varianzas en donde se observa claramente como es la evolución de estas varianzas conforme cambia la generación del fractal.

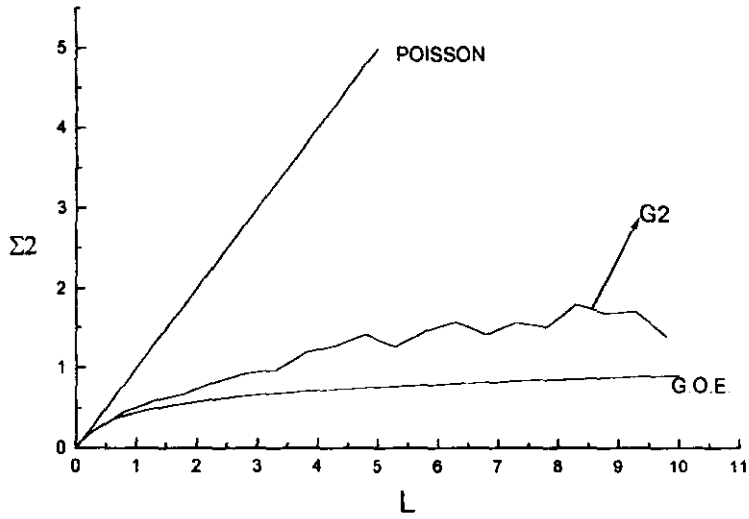


Figura 5.10: Varianza correspondiente al espectro de la segunda generación

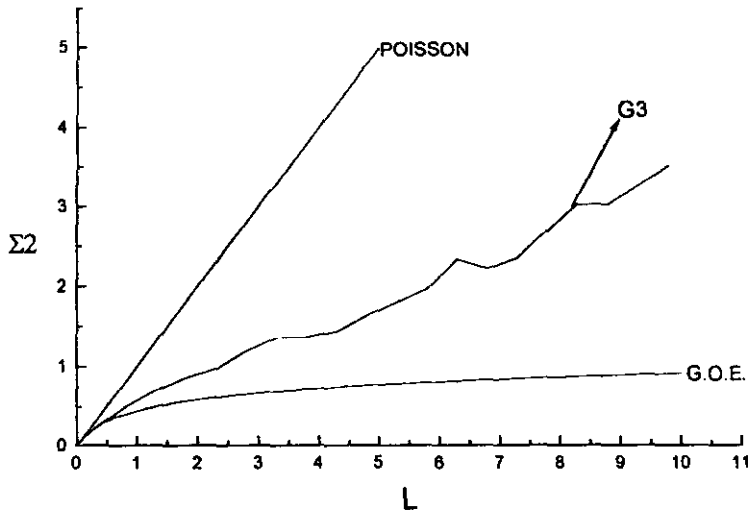


Figura 5.11: Varianza del espectro de la tercera generación

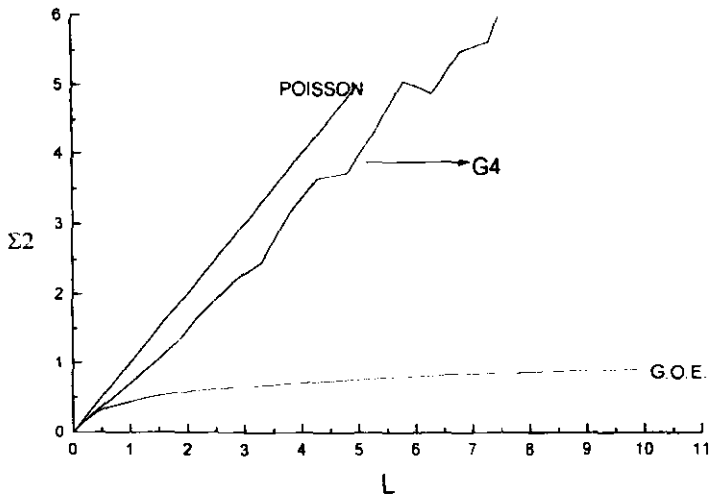


Figura 5.12 Varianza del espectro de la cuarta generación

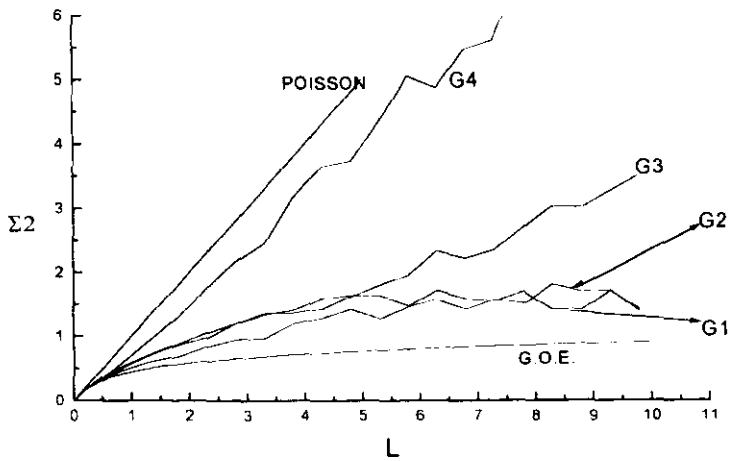


Figura 5.13: Comparación de las varianzas de los espectros de las cuatro regiones estudiadas

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES

En este trabajo se obtuvieron las estadísticas espectrales de cuatro regiones correspondientes a las cuatro primeras generaciones del billar fractal denominado tapete de Sierpinski. Los resultados nos muestran una tendencia del sistema a ser un sistema tipo Poisson conforme la generación del fractal aumenta. Sin embargo, las curvas de la  $\rho(s)$  de la tercera y cuarta generación muestran un claro ajuste con las curvas correspondientes a la de los sistemas pseudo-integrables.

Los resultados del ajuste de las curvas de la  $N(E)$  para las distintas regiones analizadas nos muestran que tenemos por lo menos 800 estados confiables, lo que nos hace confiar en los resultados estadísticos obtenidos.

Las estadísticas indican que el sistema tiende inicialmente a ser un sistema tipo GOE. Los resultados para la distribución de primeros vecinos de la primera generación coinciden con los encontrados por Cheon y Cohen [12]. Sin embargo, los resultados estadísticos de la tercera y cuarta generaciones nos indican que esta tendencia inicial se pierde rápidamente, revirtiéndose y observándose una clara tendencia final a ser un sistema tipo Poisson.

Las fluctuaciones de la  $N(E)$  numérica en la tercera y la cuarta generación aparecen cuando se introducen los hoyos en las regiones. Los resultados experimentales de Sridhar[9] en cavidades de microondas con condiciones de Dirichlet a la frontera y en los hoyos, nos indican que la  $N(E)$  puede tener fluctuaciones. En este trabajo de tesis se encontraron también fluctuaciones en la  $N(E)$  pero ahora con condiciones a la frontera y en los hoyos de Neumann.

La introducción de hoyos ordenados hace que aparezca un gran número de órbitas periódicas, de distintos periodos y cada vez más pequeños conforme aumenta la generación del fractal. En la primera generación tenemos sólo una familia de este tipo de órbitas periódicas. La segunda generación presenta tres familias de órbitas cuyos periodos se van reduciendo. En la tercera generación aparecen otras dos familias más, y la cuarta generación tiene finalmente siete familias de órbitas periódicas. Las siguientes figuras nos muestra esta situación.

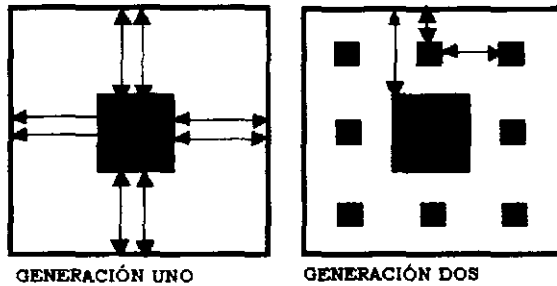
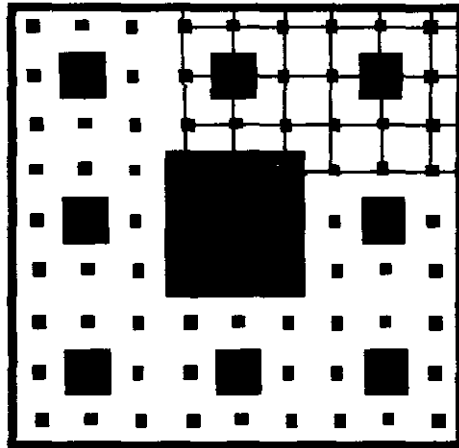


Figura 6.1: La primer generación presenta una familia de órbitas periódicas, mientras que la segunda generación presenta tres familias de estas órbitas periódicas.

El hecho de que en estos grupos de órbitas el valor absoluto del momento lineal se conserve, así como que el periodo de las órbitas sea cada vez más pequeño nos hace pensar que la tendencia a ser tipo Poisson es correcta. También pensamos que la coincidencia de los resultados estadísticos con el comportamiento de sistemas pseudo-integrables es correcta.





### GENERACIÓN 3

Figura 6.2: Nuevas órbitas de la tercera generación. En esta generación tenemos 5 familias de órbitas periódicas,

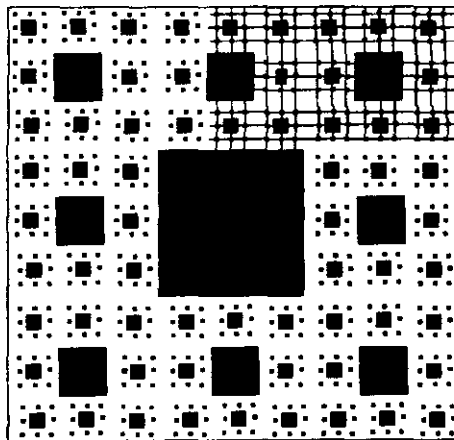


Figura 6.3 En la cuarta generación aparecen dos familias más de órbitas periódicas que junto con las que aparecen en las generaciones anteriores suman siete familias diferentes para esta generación,

## Capítulo 7

# APÉNDICE

A continuación mostramos el cálculo de los parámetros que intervienen en la fórmula de Weyl dada por la siguiente expresión

$$\langle N(E) \rangle \approx \frac{AE}{4\pi} + \frac{P\sqrt{E}}{4\pi} + K, \quad (7.1)$$

donde, como se indicó antes,  $A$  es el área de la región,  $P$  el perímetro y  $K$  la constante que trae información sobre la curvatura y topología de la región.

El cálculo de los valores de  $K$  para las distintas regiones se muestra a continuación. La contribución que hace cada esquina y cada cuadrado se ha calculado de acuerdo a la siguiente expresión dada por Baltes[6]

$$c(\alpha) = \frac{\pi^2 - \alpha^2}{24\pi\alpha} = \frac{1}{24} \left( \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\alpha}{\pi} \right), \quad (7.2)$$

donde  $\alpha$  representa el ángulo interior de la esquina, con  $0 < \alpha < 2\pi$ .

Así, tenemos los siguientes resultados para los ángulos correspondientes a las distintas esquinas que nos aparecen en las cuatro regiones que estudiamos

$$c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{32},$$

$$c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{16},$$

$$c\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{7}{288},$$

$$c\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-5}{144}.$$

Para un cuadrado completo la curvatura es

$$\sum_{i=1}^4 c(\alpha_i) = 4c\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}. \quad (7.3)$$

La primera y segunda generación del fractal no tienen hoyos interiores, por lo tanto, la contribución al término de curvatura es sólo debido a la frontera exterior de las regiones. El cálculo correspondiente nos produce los siguientes resultados

$$K(G1) = c\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2c\left(\frac{\pi}{2}\right) + c\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5}{32} + \frac{1}{8} + \frac{7}{288} = .30555\dots, \quad (7.4)$$

$$K(G2) = c\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4c\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3c\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 3c\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5}{32} + \frac{4}{16} + \frac{21}{288} - \frac{15}{144} = .375,$$

La tercera y cuarta generación tiene hoyos cuadrados interiores que contribuyen al término  $K$ . El cálculo de la  $K$  correspondiente a la tercera región - esta región tiene seis hoyos - es

$$K(G3) = c\left(\frac{\pi}{4}\right) + 8c\left(\frac{\pi}{2}\right) + 7c\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 9c\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{6}{4} = -0.9861.$$

La cuarta generación tiene 66 hoyos cuadrados. Por lo tanto, el valor de la  $K$  correspondiente es

$$K(G4) = c\left(\frac{\pi}{4}\right) + 16c\left(\frac{\pi}{2}\right) + 15c\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 21c\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{66}{4} = -15.7028.$$

Por otro lado, es necesario indicar que el método numérico utilizado introduce un error sistemático en el cálculo de los eigenvalores correspondientes. El cálculo de dicho error introducido por el método del elemento finito lo ha hecho Báez y Méndez. La expresión encontrada por Báez *et al*[8] para el polinomio  $P_{err}$  que corrige dicho error es el siguiente:

$$P_{err} = A(4.60055 - 13.75335 * E - 10.44418 * E^2 + .456011 * E^3) / 2500, \quad (7.7)$$

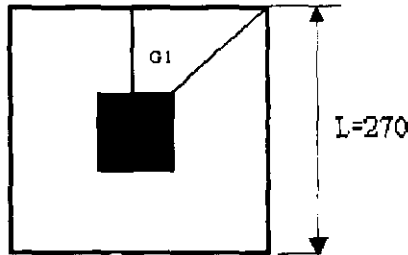
donde  $A$  es el área de las regiones.

De esta forma, la expresión corregida de la fórmula de Weyl es

$$\langle N(E) \rangle \approx \frac{AE}{4\pi} \mp \frac{P\sqrt{E}}{4\pi} + K + P_{err}. \quad (7.8)$$

Finalmente, sólo nos resta indicar que la elección de las dimensiones de las regiones se hizo de acuerdo al tamaño máximo de las matrices que podíamos diagonalizar. Así, para la primera generación se utilizó una malla menos fina que en el caso de las demás regiones, situación que no altera nuestros resultados.

Las siguientes gráficas nos muestran como ha sido la elección de la dimensión  $L$  de las distintas regiones, donde  $L$  corresponde al tamaño de uno de los lados de la región cuadrada estudiada

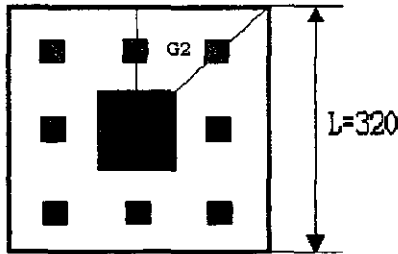


GENERACIÓN UNO

Figura 7.1 Dimensión de la primera generación

En la siguiente tabla se resumen los valores de los distintos parámetros que intervienen en la fórmula de Weyl para el cálculo de la  $N(E)$ .

Región	Area = A	Perimetro = P	K
G1	$(\frac{1}{9})L^2$	$(1 + \frac{\sqrt{2}}{3})L$	.3055555
G2	$(\frac{8}{81})L^2$	$(\frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{9})L$	.375
G3	$(\frac{64}{729})L^2$	$(\frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{27})L$	-0.9861
G4	$(\frac{512}{96561})L^2$	$(\frac{4}{3} + \frac{10}{9} + \frac{84}{27} + \frac{8\sqrt{2}}{81})L$	-15.7028



GENERACIÓN (2,3 y 4)

Figura 7.2: Dimensión de las regiones de las generaciones 2,3 y 4.

Finalmente, mostramos las gráficas de la  $N(E)$  de las cuatro generaciones donde comparamos los resultados numéricos, obtenidos por medio de la diagonalización de las matrices que representan a cada una de las regiones de acuerdo al método del elemento finito, con la curva teórica obtenida con la fórmula de Weyl dada por la ecuación 7.8.

En todas las gráficas observamos un buen ajuste de ambas curvas de por lo menos 800 estados, aunque la tercera y cuarta generación presentan algunas oscilaciones que creemos son debidas a la introducción de los hoyos cuadrados.

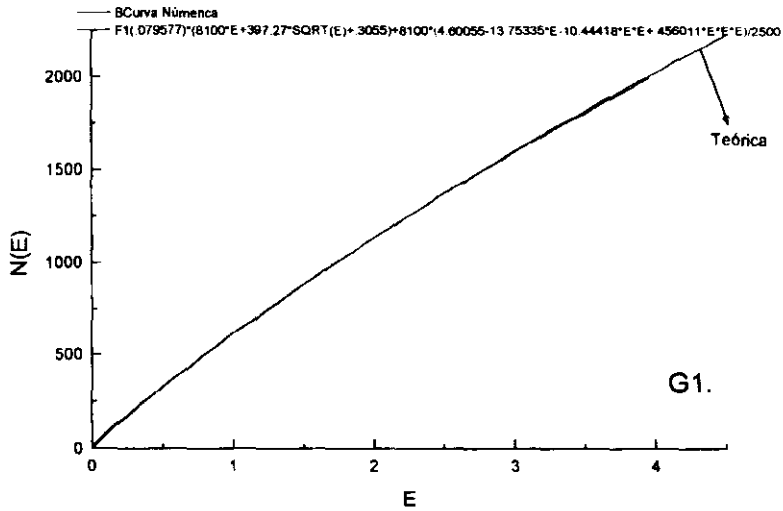


Figura 7.3:  $N(E)$  de la primera generación

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

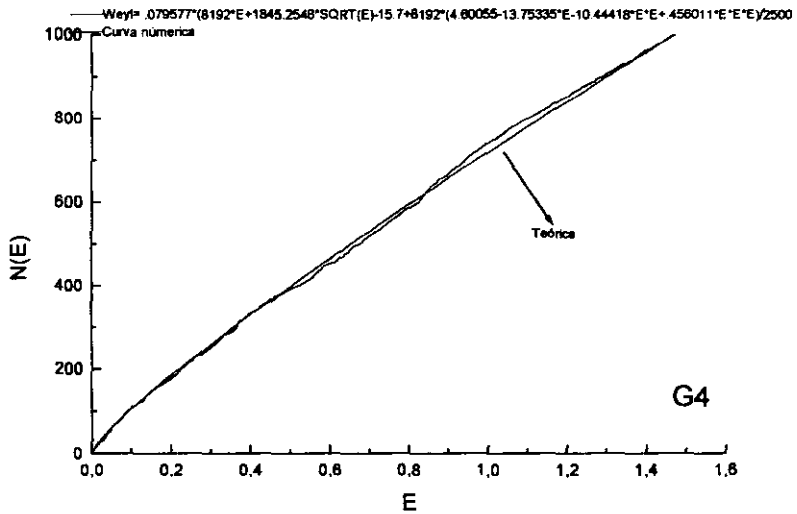


Figura 7.6: Resultado de la comparación de la  $N(E)$  teórica y numérica de la cuarta generación.

## Capítulo 8

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Báez J. G. (1993), "Caos Acústico". Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [2] Méndez R.A. (1992), "Calculo de Modos Resonantes en Cavidades Arbitrarias Bidimensionales", Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.
- [3] Lawrence E. Kinsler (1988), "Fundamental of Acoustics", John Wiley & Sons Inc.
- [4] Tikhonov A.N. (1990), "Equations of Mathematical Physics". Dover Publications Inc.
- [5] Bohigas O. (1989), "Chaos and Quantum Physics", Les Houches Summer School, eds. M.J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier, New York, 1991)
- [6] Baltes Heinrich.(1976) "*Spectra of Finite Systems: A Review of Weyl's Problem*", Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich. B.I Wissenschaftsverlag.
- [7] E.B. Bogomolny, U. Gerland, and C. Schmit (1998) "*Models of Intermediate Spectral Statistics*", Division de Physique Théorique, Institut de Physique Nucléaire.91406 Orsay Cedex, France January 1998.
- [ 8] G. Báez, F. Leyvraz, R.A. Méndez y T.H. Seligman "*A finite element algorithm for high laying eigenvalues and eigenfuntions whit homogeneous Neumann and Dirichlet boundary conditions*", Laboratorio de Cuernavaca, Instituto de Fisica, University of México(UNAM), México City, MÉXICO.
- [9] S.Srihar, D.Hogenboom, A.Kudrolli, "*Experimental Eigenvalue Spectra of Rough and Multiply-Connected Billiards*", Departamentof Physics, Northeastern University, Boston, MA 02115.



- [10] P.L Lewis, "The Finite Element Method (Principies and Applications)", Addison Wesley Publishin Company,1991
- [11] Oxelsoon and V.A Barker , " Finite Element Solution of Boundary Value Problems", Academic Press, Inc . 1984
- [12] Cheon and Cohen (1989) " *Quantum Level Statistics of Seudointegrable Billiards*", Physical Review Letters, vol 12 , num 24 , 2769-2772.
- [13] Martin C.Gutzwiller " Chaos in Classical and Quantum Mechanics" Springer-Verlag, 1990, New York inc.