

2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONVECCION NATURAL DE UN FLUIDO
VISCOELASTICO CON SUPERFICIE DEFORMABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A :

EDGAR VAZQUEZ LUIS

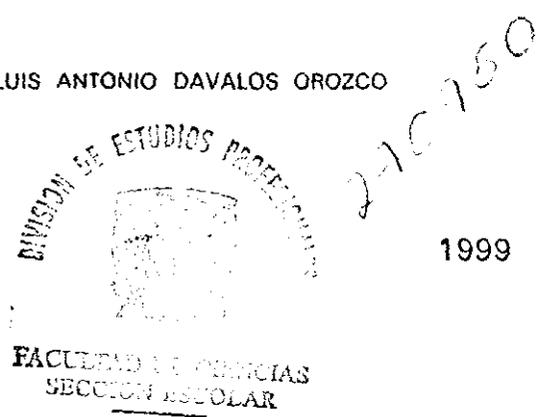


ASESOR: DR. LUIS ANTONIO DAVALOS OROZCO

MEXICO, D. F.

1999

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "CONVECCION NATURAL DE UN FLUIDO VISCOELASTICO CON SUPERFICIE DEFORMABLE"

realizado por EDGAR VAZQUEZ LUIS

con número de cuenta 8927735-1 , pasante de la carrera de FÍSICA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. LUIS ANTONIO DAVALOS OROZCO

Propietario

DR. GERARDO RUIZ CHAVARRIA

Propietario

DR. LUIS FELIPE DEL CASTILLO DAVILA

Suplente

DR. DAVID SALAS DE LEON

Suplente

DR. ANGEL ENRIQUE CHAVEZ CASTELLANOS

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

A la memoria de mi padre
Bernardino Vázquez Coachis.

A mi hermano Luis
por su ayuda y coraje

A mi hermana Rocío
por su ejemplo y bondad

A mi querida Adriana
por su paciencia y amor

A mis amigos Erick Murillo y Octavio Salinas esperando que siempre estemos juntos, a Gabriel Luna por los viejos tiempos, a mis compañeros Alan, Igor, Emigdio, Luis Becerril, mi compadre Alejandro Godínez, Yunuhén, Marco Arieli, Gabriela Murgía, Enrique Moreno, Manolo, Elsa Puente, Marco Noguez, Alberto Concha, Jose Luis del Río, Huitzilin, Muricio López, Mónica Jiménez y Jerónimo por ser personas que tanto me ayudaron a lo largo de mi carrera.

A mis primos Iván, Diana, Eunice, Arturo e Igor a quienes quiero y respeto.

A mis amigas Verónica, Quetzalli y Anabel a quienes doy gracias por todo lo que han compartido conmigo.

A la memoria de todos mis seres queridos que desgraciadamente ya no están conmigo.

Agradecimientos.

Quiero agradecer de manera muy especial al Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco por su ejemplo, enseñanza y por dirigirme esta tesis con tanta paciencia y dedicación

Agradezco al Dr. Angel Enrique Chávez Castellanos, al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría, al Dr. David Salas de Leon y al Dr. Luis Felipe del Castillo Dávila por haber aceptado ser miembros del jurado.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México (IIM-UNAM) por todas las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.

Al Programa Fundación UNAM de Iniciación Temprana a la Investigación y la Docencia (PITID).

Al Programa Beca Tesis de Licenciatura (PROBETEL) con complemento de beca IIM.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I Introducción a la mecánica de fluidos, fluidos viscoelásticos y estabilidad hidrodinámica	6
CAPÍTULO II Convección natural de una capa de fluido viscoelástico con superficie deformable	18
CAPÍTULO III Resultados numéricos	30
CONCLUSIONES	47
BIBLIOGRAFÍA	49

INTRODUCCIÓN

Entre los fenómenos más simples e interesantes en la teoría de estabilidad hidrodinámica encontramos el caso de una capa de fluido en un campo gravitacional calentada no uniformemente. Al principio se puede observar un equilibrio mecánico si las propiedades del fluido lo permiten. Si el gradiente de temperatura es cada vez más grande el equilibrio se vuelve inestable y las perturbaciones producen un movimiento convectivo. Por otra parte, si las propiedades del fluido son tales que imposibilitan el equilibrio, la convección se presentará aun para un gradiente de temperatura pequeño. Esto se aclarará cuando se discuta una cantidad adimensional muy importante llamada número de Rayleigh.

La investigación de la inestabilidad debida a la convección comienza con las primeras descripciones del fenómeno hechas por James Thompson en 1882 /1/. Después Bénard en 1900 /2/, realiza los primeros experimentos cuantitativos sobre la convección en una capa de fluido calentada por abajo. Rayleigh en 1916 /3/, resuelve el problema teórico de la estabilidad de una capa de fluido calentada por abajo con las dos superficies libres sin incluir el efecto de la tensión superficial, esto con la intención de intentar explicar los resultados obtenidos por Bénard. Posteriormente algunos otros autores realizaron estudios teóricos y experimentales acerca de la inestabilidad de una capa de fluido calentada por abajo. Se cambiaron las condiciones de frontera en las superficies y se incluyeron efectos de la tensión superficial. A partir de los años cincuenta la investigación de la estabilidad hidrodinámica y de la convección natural, en particular, resurgió debido a sus múltiples aplicaciones en fenómenos relacionados con la transferencia de calor, la geofísica y la astrofísica. Después se hicieron estudios teóricos y experimentales sobre el modo en que la estabilidad de una capa de fluido calentada por abajo es afectada al incluir los efectos de rotación y de campo magnético. Chandrasekhar en 1953 /4/ fue el primero en hacer estudios teóricos de los efectos de la rotación para los casos de dos superficies libres (sin fricción), dos rígidas (con fricción) y de una rígida y la otra libre, manteniéndolas a temperatura constante. Posteriormente, también incluyó el efecto del campo magnético que fue además combinado con el de la rotación /5/. Tomando estos trabajos como base se introducen nuevas variaciones al problema al considerar

que los fluidos son viscoelásticos, que pueden exhibir distintas propiedades en su estabilidad debido a su elasticidad. Los primeros estudios en la estabilidad lineal de una capa de fluido no newtoniana viscoelástica son, entre otros, los de Vest y Arpaci /6/ y los de Sokolov y Tanner /7/. Poco después, Takashima /8/ estudia la estabilidad de un fluido viscoelástico utilizando el modelo de Oldroyd. En adelante, para el mismo modelo, considera los efectos de rotación /9/ y campo magnético /10/. Más recientemente, Kolkka y Lerley /11/, dan resultados de la estabilidad lineal para una capa de fluido viscoelástico con diversas condiciones térmicas y de superficie. Kolkka y Lerley resuelven la discrepancias encontradas entre los resultados publicados previamente en la literatura /6, 7/.

Por otro lado, el tratamiento de la condición mecánica de superficie deformable es tratado por Izakson y Yudovich para el caso de fluidos newtonianos /12/ más recientemente, el problema con rotación y la condición de superficie deformable es tratado por Dávalos y López /13/.

El presente trabajo de tesis se inspiró precisamente en estos últimos estudios teóricos, así como en un artículo publicado por Benguria y Depassier /14/, en el que se estudian las inestabilidades de un fluido newtoniano calentado por abajo con la superficie de arriba libre pero deformable, a diferencia de los casos estudiados por Rayleigh y Chandrasekhar. En la investigación de esta tesis se incluye esta condición en la frontera libre superior para estudiar la estabilidad lineal de una capa de fluido viscoelástico calentada por abajo.

Con este objetivo se plantearon las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoelástico (utilizando el modelo de Oldroyd) y las condiciones de frontera del problema, derivando las ecuaciones lineales. En seguida, se hizo un análisis en términos de modos normales. La inestabilidad se presenta cuando el gradiente adverso de temperatura es lo suficientemente grande para que el parámetro adimensional R (llamado número de Rayleigh) exceda un cierto valor crítico. R representa el cociente de la fuerza desestabilizadora de flotación con respecto a las fuerzas viscosas. Como el fluido es viscoelástico aparecerán nuevos parámetros adimensionales: Γ_1 y E , donde el primero representa el tiempo de relajamiento y el segundo el cociente de los tiempos de retardo y de relajamiento. Al considerar el efecto de la deformación espacio-temporal de la superficie aparecen otros números adimensionales característicos del problema. Ellos son el número de Prandtl Pr y el número de Galileo G . El número de Prandtl aparece como un parámetro extra en todo problema de convección natural donde hay dependencia temporal. Al discu-

tir las ecuaciones correspondientes a nuestro problema se verá que aparece frente a la derivada temporal del la ecuación de balance de momento. Esto se debe a que Pr representa un cociente de tiempos de difusión. El número de Galileo representa la fuerza restauradora de gravedad sobre la deformación superficial. En el presente trabajo precisamente, se estudiará el problema de la sobreestabilidad, es decir, la inestabilidad convectiva oscilatoria. Entonces, el objetivo es encontrar los valores propios del número de Rayleigh y el número de onda de la perturbación a la cual está sujeto el sistema en función de los demás parámetros que satisfagan una condición de solubilidad impuesta por las condiciones de frontera. Esto se realizó numéricamente, buscando el valor del número de Rayleigh crítico R_c (a partir del cual comienza la convección) y su número de onda crítico correspondiente, variando los parámetros viscoelásticos y de deformación superficial.

Además, con el objeto de comparar los resultados con los de deformación superficial se hicieron cálculos de estabilidad termoconvectiva de una capa de fluido viscoelástico con superficie libre indeformable. Ellos serán presentados simultáneamente junto con los de superficie deformable.

Todos los cálculos, tanto para superficie deformable, como indeformable se hicieron con condiciones de frontera mecánicas en las que las superficies de abajo y de arriba no tiene fricción, y con condiciones de frontera térmicas en las que en la superficie inferior el flujo de calor es constante y en la superior la temperatura es constante. La meta es comparar los resultado con los publicados por Benguria y Depassier /14/ en las mismas condiciones para el caso newtoniano. Ellos encontraron que, para el fluido newtoniano, sólo en estas condiciones térmicas la sobreestabilidad se presenta con un gradiente de temperatura menor al necesario para convección estacionaria. En otras palabras, la sobreestabilidad puede "aparecer antes".

En el primer capítulo se presenta un resumen de los conceptos básicos de la mecánica de fluidos y de la descripción y comportamiento de los fluidos viscoelásticos. El objetivo es simplemente mostrar algunos conceptos generales y presentar las ecuaciones básicas que permitan realizar nuestro análisis posterior dentro de un marco formal. Se incluye además una descripción de las ideas más importantes de la estabilidad hidrodinámica.

En el segundo capítulo se obtienen las ecuaciones de movimiento y se establecen las condiciones de frontera del problema. Las ecuaciones se perturban y se hace un análisis lineal en términos de modos normales.

En el tercer capítulo se muestran los resultados numéricos obtenidos a

partir de dos métodos que ahí se describen para distintos parámetros viscoelásticos y varios valores del número de Galileo.

En el último capítulo se dan las conclusiones de la presente investigación.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA DE FLUIDOS, FLUIDOS VISCOELÁSTICOS Y ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA

Sistemas de referencia

Existen dos sistemas de coordenadas básicos que pueden ser empleados para describir el movimiento de un fluido. En el sistema euleriano se toma un pequeño volumen por donde pasa el fluido y se ve el cambio de todas las variables de flujo. Las variables independientes son t (el tiempo) y las coordenadas espaciales x, y, z .

En el sistema de referencia lagrangiano se sigue a una partícula que fluye por una cierta trayectoria. Esta trayectoria se identifica por las coordenadas $x_o, y_o, y z_o$ de la partícula a un tiempo dado t_o y se sigue el movimiento de esta en el tiempo (t). En este sistema las coordenadas x, y, z no son independientes ya que al dar un intervalo de tiempo ($t - t_o$) las componentes de la velocidad de la partícula determinan los cambios en las coordenadas $(x - x_o), (y - y_o)$ y $(z - z_o)$. Así, x, y, z y t no son independientes, las variables independientes son x_o, y_o, z_o y t .

La velocidad \vec{u} y la aceleración \vec{a} en la descripción lagrangiana son simplemente las derivadas temporales del vector de posición:

$$u_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

$$a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}$$

En la descripción euleriana, sin embargo, la derivada parcial $\partial / \partial t$ nos da tan sólo la razón de cambio local en el punto \vec{x} , y no la razón total de

cambio, vista por una partícula de fluido. La manera en que se relacionan los dos sistemas, considerando α como cualquier variable de campo, es a través de la derivada material definida como:

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\alpha \quad (1)$$

Donde \vec{u} es la velocidad de la partícula del fluido. El lado izquierdo de la expresión representa el cambio de α en el sistema lagrangiano y el lado derecho de la expresión representa el cambio total de α expresado en coordenadas eulerianas.

Teorema de Reynolds y Conservación de la Masa

El método elegido para derivar las leyes de conservación es usar el concepto de continuidad y seguir un elemento de volumen en el sistema lagrangiano. Estos dos ingredientes, en particular, nos permiten encontrar la derivada material de una integral de volumen en términos eulerianos:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \alpha(t) dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial\alpha(t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha\vec{u}) \right] dV \quad (2)$$

en donde $\alpha(\vec{x}, t)$ es una variable de flujo y \vec{u} es el campo de velocidades. Este es comúnmente llamado el teorema de transporte de Reynolds.

Consideremos una masa arbitraria de fluido con volumen V . Si esta masa se sigue conforme el fluido se desplaza, el tamaño y la forma del volumen cambian pero su masa permanece constante. Esto se conoce como el principio de conservación de masa. La equivalencia matemática de esta afirmación se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (3)$$

Usando el Teorema de transporte de Reynolds esta ecuación puede ser convertida en una integral de volumen en la cual el integrando solo tiene derivadas eulerianas, la variable de flujo es la densidad de masa ρ .

$$\int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] dV = 0 \quad (4)$$

Como el volumen es elegido arbitrariamente, la única manera de satisfacer la ecuación anterior es haciendo que el integrando sea cero. Así la ecuación que expresa la conservación de masa se escribe:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0 \quad (5)$$

o

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} u_i = 0 \quad (6)$$

Esta ecuación no sólo expresa en forma diferencial la conservación de la masa sino también nos dice que la velocidad y la densidad son continuas, por lo que a la Eq. (5) o a su forma (6) se le llama ecuación de continuidad.

Un fluido es incompresible cuando su volumen no cambia. Esto se expresa como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (7)$$

y como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

Ambas son importantes en fenómenos de fluidos estratificados. Si la densidad es constante en el tiempo y en el espacio, sólo se utiliza la segunda.

Conservación de momento

El principio de conservación de momento o ecuación de movimiento para un fluido es, en su forma más fundamental, una relación entre la razón de cambio del momento de una porción seleccionada del fluido y la suma de todas las fuerzas actuando en esa porción de fluido. Las fuerzas externas que actúan sobre la masa de fluido pueden ser clasificadas como :

(1) Fuerzas de Cuerpo: Son aquellas que aparecen por "acción a distancia". Éstas resultan de sumergir al fluido en algún campo de fuerzas, cuyo origen puede ser gravitacional, magnético, electrostático o electromagnético.

Estas son capaces de penetrar en el interior del fluido, actuar en todos los elementos del mismo y son proporcionales a la masa.

(2) Fuerzas de Superficie: Son aquellas que se aplican sobre un elemento de área, debido a la acción de los alrededores mediante contacto directo. Son proporcionales al área sobre la cual actúan, tienen origen molecular y son convenientemente expresadas por unidad de área.

(3) Fuerzas de línea: Las fuerzas de tensión superficial son llamadas fuerzas de línea ya que actúan en una línea y tienen una magnitud proporcional a la extensión de la línea. Aparecen en la interface entre dos fluidos.

Como veremos las tres fuerzas son consideradas al obtener la ecuación de movimiento, aunque la tercera aparece solamente como condición de frontera afectando a la presión. Sea \vec{f} una fuerza de cuerpo resultante por unidad de masa, entonces la fuerza total sobre una masa de fluido con volumen V y densidad ρ será:

$$\int_V \rho \vec{f} dV \quad (9)$$

Sea ahora \vec{P} , un vector de superficie representando la fuerza de superficie por unidad de área. Entonces la fuerza total que actúa en la superficie S que contiene el volumen V está dada por:

$$\int_S \vec{P} dS \quad (10)$$

Para el volumen de fluido V encerrado por la superficie material S , el cambio de momento en el sistema lagrangiano esta dado por:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV \quad (11)$$

de aquí que la conservación de momento será:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \vec{u} dV = \int_S \vec{P} dS + \int_V \rho \vec{f} dV \quad (12)$$

La fuerza de superficie \vec{P} puede relacionarse con el tensor de esfuerzos por $P_j = \sigma_{ij} n_i$ donde \vec{n} es un vector normal a la superficie. De esta forma la Eq. (12) en notación de índices se reescribe como:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho u_j dV = \int_S \sigma_{ij} n_i dS + \int_V \rho f_j dV \quad (13)$$

Aplicando al lado izquierdo de esta última ecuación el teorema de Reynolds y al mismo tiempo aplicando del lado derecho el teorema de Gauss obtenemos:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) \right] dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} dV + \int_V \rho f_j dV \quad (14)$$

Como antes, ésto es válido para cualquier volumen por lo que se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_j u_k) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j \quad (15)$$

Desarrollando el segundo término del lado izquierdo de la ecuación y considerando la ecuación de continuidad (5) se obtiene la ecuación de conservación de momento:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j \quad (16)$$

Cuando el fluido está en reposo los esfuerzos son hidrostáticos y la presión p del fluido es la presión termodinámica. Esta condición requiere que el tensor σ_{ij} sea de la forma:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}(\dot{\gamma}_{ij}) \quad (17)$$

El tensor σ_{ij} es simétrico y se descompone de manera natural en una parte $-p\delta_{ij}$ relacionada con los esfuerzos de presión y de otra τ_{ij} relacionada con los cambios de forma y de volumen, esto es, el tensor de esfuerzos viscosos que depende, en muchos casos, de manera compleja del tensor rapidez de corte $\dot{\gamma}_{ij}$ que se discutirá mas adelante. El tensor δ_{ij} es la delta de Kronecker. El término de la presión se supone negativo por convención. Introduciendo esta última ecuación en la Eq. (16) obtenemos :

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + f_j \quad (18)$$

La Eq. (16 o 18) es la ecuación de movimiento que relaciona la aceleración con la fuerza neta en un punto.

Conservación de la energía

El principio de conservación de la energía se introduce aquí como una aplicación de la primera ley de la termodinámica a un elemento de fluido en movimiento. Con esta ley en mente, consideramos de nuevo un elemento arbitrario de masa de fluido con volumen V y lo seguimos en un sistema de referencia lagrangiano. La energía total ϵ de esta masa por unidad de volumen es:

$$\epsilon = \rho e + \frac{1}{2} \rho u \cdot u \quad (19)$$

donde e es la energía interna que depende de la temperatura y del calor específico de la sustancia. La primera ley de la termodinámica nos dice que el cambio en la energía interna es igual a la suma del trabajo hecho más el aumento de calor al volumen material. Esto es:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \epsilon dV = \int_S u \cdot P dS + \int_V u \cdot \rho f dV - \int_S q \cdot n dS \quad (20)$$

siendo $\vec{q} \cdot \vec{n}$ el flujo de calor que sale del volumen de control. Ahora al miembro izquierdo de esta última ecuación se le aplica el teorema del transporte de Reynolds. En el miembro derecho se sustituye la definición $P_j = \sigma_{ij} n_i$, dada anteriormente y se usa el teorema de Gauss para obtener:

$$\begin{aligned} \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] \right\} dV \\ = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) dV + \int_V u_j \rho f_j dV - \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (21)$$

como el elemento de volumen es arbitrario, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\rho e + \frac{1}{2} \rho u_j u_j \right) u_k \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j \sigma_{ij}) + u_j \rho f_j - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (22)$$

Desarrollando las derivadas y usando las ecuaciones de balance de masa y momento se tiene finalmente:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \quad (23)$$

Ahora se incluyen ecuaciones constitutivas para e y para el vector flujo de calor \vec{q} .

Se establece la ley de Fourier donde el flujo de calor por conducción es proporcional al gradiente de temperatura:

$$q_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (24)$$

y por otro lado se tiene:

$$e = c_v T \quad (25)$$

siendo k la conductividad del fluido y c_v el calor específico a volumen constante. Obtenemos así, una nueva expresión:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (c_v T) + \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} (c_v T) = -p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (26)$$

donde se usó la Ec. (17). Esta última ecuación constituye una forma analítica para describir la conducción del calor en un sistema hidrodinámico. Al añadir las ecuaciones de continuidad, de movimiento y constitutivas para τ_{ij} tenemos un sistema cerrado de ecuaciones. Los desarrollos de las ecuaciones aquí presentadas se encuentran con detalle en /15/ y de manera condensada en /5/.

Conceptos básicos de fluidos viscoelásticos

Hasta el momento hemos visto las distintas leyes de conservación y las ecuaciones a las que nos han llevado, sin mencionar en ningún momento la forma del tensor de segundo orden τ_{ij} que aparece en las ecuaciones de movimiento (17,18) y de energía (26). La forma de este tensor se establece en esta sección para describir a los fluidos viscoelásticos.

Las propiedades mecánicas o reológicas son las que determinan como se deforma un material cuando se le aplica algún esfuerzo, o bien, recíprocamente,

determinan los esfuerzos internos cuando éste es deformado. Un estado de esfuerzo y deformación es descrito por los componentes de los tensores de esfuerzos y rapidez de corte, respectivamente. Las propiedades de los materiales determinan una relación específica entre el esfuerzo y el corte, la cual es una característica solamente del material. Esta relación es única para un material dado, y es llamada la ecuación reológica de estado o la ecuación constitutiva para el material.

Las propiedades obtenidas al considerar esfuerzos cortantes sobre un material definen la ecuación que relaciona el tensor de esfuerzos viscoso con el de rapidez de corte asociado con cambios de forma.

La rapidez de corte está definida como:

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (27)$$

Las ecuaciones constitutivas pueden reflejar la dependencia temporal característica del material al incluir derivadas o funciones integrales del esfuerzo viscoso y/o de la rapidez de corte con respecto al tiempo. De hecho, la manera en la cual la dependencia temporal deberá ser introducida en la ecuación constitutiva describe las propiedades que sirven como base para clasificar a los materiales. Así, un material que puede ser descrito por una ecuación que relaciona las componentes del tensor de esfuerzos con las del tensor de corte γ_{ij} solamente se define como puramente elástico. Un material para el cual todos las componentes de los esfuerzos son únicamente determinados por el cambio en las componentes del tensor de rapidez de corte está definido como puramente viscoso.

Si ninguna de estas dependencias discutidas arriba es adecuada para describir el comportamiento observado en un material dado, entonces en general se necesitará una dependencia temporal más compleja para describir los llamados materiales viscoelásticos. Dichos materiales tienen la característica de responder como elásticos y viscosos de modo que su ecuación constitutiva incluye derivadas de los esfuerzos de corte y de la rapidez de corte.

Como primer ejemplo de ecuación constitutiva tomaremos el modelo del fluido newtoniano incompresible donde los esfuerzos son proporcionales a la rapidez de corte:

$$\tau_{ij} = \mu \dot{\gamma}_{ij} \quad (28)$$

Aquí μ es la viscosidad de corte y $\mu \neq \mu(\dot{\gamma}_{ij})$. El modelo es generalmente adecuado para fluidos con un sola fase con estructura molecular relativamente simple, pero es inadecuada para suspensiones, polímeros u otros fluidos complejos.

Un modelo no lineal bastante idealizado para los fluidos viscoelásticos considera como base a la ley de Hooke que supone a los esfuerzos de corte como las fuerzas que son proporcionales al corte considerado como los desplazamientos. El modelo considera además que los esfuerzos de corte se desvanecen de manera proporcional a si mismos debido a la viscosidad. Este es conocido como el modelo de Maxwell /16/ que es suficiente para revelar los efectos básicos de la viscoelasticidad:

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu_0 \dot{\gamma}_{ij} \quad (29)$$

siendo λ el tiempo de relajación, μ_0 es la viscosidad a cero rapidez de corte y $\frac{D}{Dt}$ puede ser cualquiera de las siguientes derivadas:

La derivada convectiva inferior:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{D\tau}{Dt} + \{(\nabla\vec{v}) \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla\vec{v})^t\} \quad (30)$$

La derivada convectiva superior:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{D\tau}{Dt} - \{(\nabla\vec{v})^t \cdot \tau + \tau \cdot (\nabla\vec{v})\} \quad (31)$$

La derivada corrotacional:

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{D\tau}{Dt} + \Omega \cdot \tau - \tau \cdot \Omega \quad (32)$$

Donde aquí τ es un tensor, \vec{v} es el campo de velocidades, $\frac{D}{Dt}$ es la derivada material y $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ es el tensor rapidez de rotación.

El modelo tiene la ventaja de ser relativamente simple y es usado en movimientos rápidos dependientes del tiempo, no obstante, sus predicciones no son totalmente realistas.

Una extensión del modelo de Maxwell, que involucra dos parámetros λ_1 y λ_2 (los tiempos de relajación y de retardo, respectivamente), es una ecuación más general debida a Oldroyd /16/ y /17/:

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu_0(\dot{\gamma}_{ij} + \lambda_2 \frac{D\dot{\gamma}_{ij}}{Dt}) \quad (33)$$

donde $\frac{D}{Dt}$ es cualquiera de las derivadas mencionadas arriba.

Los modelos aquí seleccionados sirven simplemente como ejemplos representativos que han sido empleados para estudiar la estabilidad de los fluidos viscoelásticos. La validez de cualquier modelo será verificada según el grado con el que represente las observaciones experimentales. Para mayores detalles de los modelos con que se trabajó en la presente tesis tenemos las referencias /16/ y /17/.

Conceptos básicos de Estabilidad Hidrodinámica

Supongamos que tenemos un sistema hidrodinámico, en un estado estacionario, es decir, en un estado en el cual ninguna de las variables que describen al sistema es función del tiempo. Sean X_1, X_2, \dots, X_j un conjunto de parámetros que definen al sistema. Para estudiar la estabilidad de dicho sistema, lo que esencialmente se busca es determinar la reacción del sistema a pequeñas perturbaciones. Más específicamente, lo que uno se pregunta es qué ocurrirá en el sistema perturbado: ¿La perturbación desaparecerá gradualmente de tal forma que el sistema regresará al estado inicial o la perturbación crecerá en amplitud, en cuyo caso nunca volverá al estado original? En el primer caso decimos que el sistema es estable con respecto a esa perturbación en particular y en el segundo decimos que es inestable. Un sistema es considerado como inestable si hay un sólo modo de perturbación con respecto al cual es inestable. De la misma manera, un sistema es considerado como estable cuando lo es con respecto a cualquier perturbación a la que pueda ser sometido.

Si todos los estados iniciales son clasificados como estables o inestables con el criterio establecido anteriormente, entonces en el espacio de parámetros X_1, X_2, \dots, X_j hay un lugar geométrico que separa a las dos clases de estados, que define la estabilidad marginal. De acuerdo a ésto, un estado marginal es aquel de estabilidad neutral.

El lugar geométrico de los estados marginales en el espacio (X_1, \dots, X_j) está definido por una ecuación de la forma:

$$F(X_1, \dots, X_j) = 0 \quad (34)$$

La determinación de esta ecuación es uno de los principales objetivos en estabilidad hidrodinámica. Para obtener estos estados marginales es conveniente suponer que todos los parámetros del sistema, salvo uno, son constantes mientras el elegido es continuamente variado. De esta forma, el paso de un estado estable a uno inestable sucede cuando el parámetro que se varía toma un cierto valor que hace cero la función (34). Así, se dice que la inestabilidad comienza a partir de este valor marginal del parámetro mientras los demás tienen valores fijos.

La inestabilidad puede ser de dos tipos que corresponden al modo en el cual la amplitud de una pequeña perturbación puede evolucionar: pueden crecer (o amortiguarse) monótonicamente ó pueden crecer (o amortiguarse) mientras oscila. Si suponemos el primer caso, en el estado marginal, la perturbación exhibe un patrón de movimiento estacionario. En el segundo caso, en el estado marginal, la perturbación exhibe movimientos oscilatorios con una frecuencia definida. Cuando esta perturbación crece se conoce como sobreestable.

Para el tratamiento de un problema de estabilidad, uno comienza con un flujo inicial el cual representa un estado estacionario del sistema, luego se supone que las variables físicas que describen al flujo sufren incrementos infinitesimales. Al obtener las ecuaciones que gobiernan estos incrementos a partir de las ecuaciones de movimiento, se desprecian todos los términos que no sean lineales. La teoría derivada en base a esas ecuaciones linealizadas se llama teoría de estabilidad lineal.

De acuerdo a lo anterior, al hablar de estabilidad ésta será con respecto a toda perturbación infinitesimal posible. De aquí que para investigarla completamente sea necesario estudiar la reacción del sistema a toda perturbación posible. Para ello, en la práctica, expresamos una perturbación como una superposición de posibles modos básicos y examinamos la estabilidad del sistema con respecto a cada uno de ellos. Como ejemplo, consideremos por un momento un sistema confinado entre dos planos paralelos en el cual las variables físicas en el estado estacionario son funciones solamente de la coordenada espacial z normal a los planos.

En este caso, podemos analizar una perturbación particular en términos de ondas periódicas en dos dimensiones. Entonces si $A(x, y, z, t)$ representa una amplitud típica que describe a la perturbación, podemos expresarla como:

$$A(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y A_k(z, t) \exp[i(k_x x + k_y y)], \quad (35)$$

donde $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, es el número de onda asociado a la perturbación $A(x, y, z, t)$. Como las ecuaciones para las perturbaciones son lineales, la reacción del sistema a una perturbación general puede ser determinada si conocemos la reacción del sistema a perturbaciones de todos los números de onda. En particular, la estabilidad dependerá de su estabilidad a perturbaciones de todos los números de onda y la inestabilidad se obtiene de la inestabilidad a perturbaciones de un sólo número de onda. Entonces, de lo anterior se sigue que el estado marginal será de estabilidad neutral para perturbaciones a un número de onda particular k_c . Así, al principio de la inestabilidad se manifiestan movimientos que pueden presentarse con un patrón celular o movimiento oscilatorio en donde las dimensiones horizontales están dadas por la longitud de onda crítica $\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$.

En problemas con otros sistemas que impliquen otras geometrías, la perturbación tendrá que ser analizada de manera distinta; pero el punto esencial es que para todos los casos, la perturbación deberá ser desarrollada en términos de un conjunto apropiado de modos normales.

CAPÍTULO II

CONVECCIÓN NATURAL DE UNA CAPA DE FLUIDO VISCOELÁSTICO CON SUPERFICIE DEFORMABLE

Con la información del capítulo anterior estamos en posición de hacer una descripción matemática del problema que ahora se plantea. Consideremos una capa infinita bidimensional de fluido viscoelástico de Oldroyd, que en reposo ocupa el espacio confinado entre los planos $z = 0$ y $z = -d$ (ver Fig. 2.1). Sobre ella actúa un campo gravitacional constante $-g\hat{k}$ (siendo \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} los vectores unitarios en las direcciones x , y y z , respectivamente) y es calentada por un gradiente vertical y adverso de temperatura que hace que la densidad del fluido varíe como $\rho = \rho_0 \{1 - \gamma(T - T_0)\}$, siendo más densa arriba que abajo.

Aproximación de Boussinesq

Las ecuaciones que gobiernan a un fluido viscoelástico mostradas en el capítulo anterior son muy complejas y para poder entender su contenido físico es necesario realizar simplificaciones y aproximaciones. Una muy importante es la llamada aproximación de Boussinesq que lleva el nombre de quien la propuso en 1903 /5/. Esta aproximación se basa en que, como ya mencionamos, la diferencia de temperaturas entre las dos fronteras es pequeña y, por tanto, la variación de la densidad también lo será. El origen de esta aproximación proviene de que el coeficiente de expansión volumétrica γ es pequeño: para gases, líquidos y fluidos complejos no newtonianos está en el intervalo de 10^{-3} a 10^{-4} . De aquí que variaciones de temperatura de orden uno provocan variaciones de densidad a lo sumo del uno por ciento. Por tanto, las variaciones en los demás coeficientes deben ser del mismo orden, a excepción del término de flotación $g(\rho - \rho_0)$ en la ecuación de movimiento,

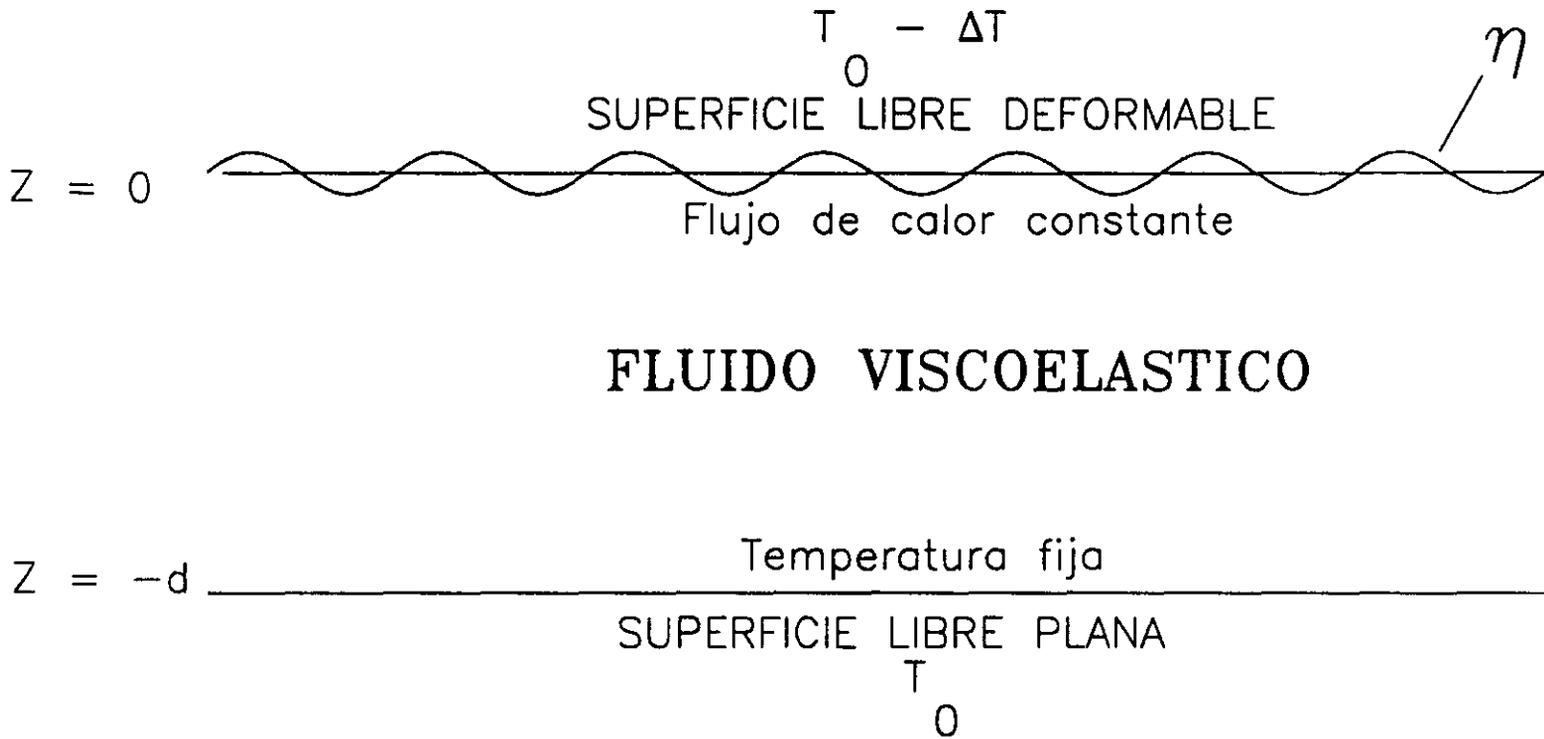


Fig. 2.1 Diagrama del sistema estudiado.

el cual es del mismo orden de magnitud que el término de inercia $u_k \partial u_i / \partial x_k$. Para la mayoría de los fluidos $d\mu_0 / (\mu_0 dT)$, $dk / (kdT)$ y c_v , son de órdenes menores a γ , de tal manera que μ_0 , k , y c_v , se toman como constantes dentro de esta aproximación.

Así, mediante la aproximación de Boussinesq las ecuaciones del capítulo anterior se simplifican como sigue:

El fluido es incompresible:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (36)$$

En la ecuación de movimiento la densidad solo varía en el término de la gravedad:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} - g \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) k_j \quad (37)$$

donde $\vec{k} = (0, 0, 1)$ siendo

$$\delta \rho = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \{ \gamma (T - T_0) \} \quad (38)$$

La ecuación de balance de energía también se simplifica ya que por incompresibilidad $-p \nabla \cdot \mathbf{u}$ es cero y el término $\tau_{ij} \partial u_j / \partial x_i$ se ignora porque, además de suponer gradientes de velocidad pequeños, es proporcional a $\mu_0 \gamma g d / k$ que para materiales ordinarios resulta un cociente del orden de 10^{-7} o 10^{-8} . Por tanto, ésta se reduce a la ecuación de difusión del calor:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \kappa \nabla^2 T \quad (39)$$

donde $\kappa = k / \rho_0 c_v$ es el coeficiente de difusividad térmica.

Las Ecs. (36), (37), (38) y (39) son las ecuaciones de balance dentro de la aproximación de Boussinesq. Su soluciones de la hidrostática son:

De la Ec. (39) es:

$$T_s = A(z + d) + T_0 \quad (40)$$

por lo que:

$$\rho_s = \rho_0 \{1 - \gamma(T_s - T_0)\} = \rho_0[1 - \gamma A(z + d)] \quad (41)$$

y de la Ec. (37):

$$p_s = p_\infty - g\rho_0[(1 - \gamma Ad)z - \gamma Az^2/2] \quad (42)$$

Siendo p_∞ la presión en $z = 0$ y $A > 0$ una constante térmica determinada por las condiciones de frontera.

Condiciones de Frontera

En la superficie de abajo las condiciones de frontera mecánicas pueden ser de dos tipos: podemos tener una superficie rígida (donde aparecen esfuerzos viscosos) o una libre (donde los esfuerzos tangenciales son cero) pero plana, es decir una superficie inderfomable. En el presente trabajo sólo se considera la frontera libre. La condición de frontera mecánica en la superficie de arriba es, por supuesto, la condición de una superficie auténticamente libre, es decir con deformación. Las condiciones de frontera térmicas en ambas superficies también pueden ser de dos tipos: las de una superficie conductora a temperatura constante o bien, las de una superficie donde el flujo de calor es constante.

Las condiciones de frontera mecánicas para la superficie libre sin deformación en $z = -d$ son:
la condición de tapadera

$$w = 0 \quad (43)$$

y la condición de ausencia de esfuerzos tangenciales:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad (44)$$

Como la Ec. (43) es válida para toda x y y , entonces por la Ecs. (44) y (36) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (45)$$

y con la ecuación de continuidad se convierte en:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (46)$$

La condición de frontera térmica en $z = -d$ es:
la temperatura se supone constante (superficie buena conductora):

$$T = T_0 \quad (47)$$

Ahora se discutirán las condiciones de frontera en la superficie deformable de arriba /18/. Si suponemos flujo bidimensional (o sea, se elimina la variación en la dirección "y") la superficie de arriba deformable se encuentra en $z = \eta(x, t)$.

Para dar las condiciones mecánicas y térmicas en $z = \eta(x, t)$ se requiere definir un vector unitario normal a la superficie:

$$\hat{n} = \frac{(-\eta_x, 1)}{\mathcal{N}} = (n_1, n_2), \quad (48)$$

donde el subíndice x indica derivada parcial y

$$\mathcal{N} = (\eta_x^2 + 1)^{1/2}.$$

Entonces, tenemos las siguientes condiciones de frontera en $z = \eta(x, t)$:

Condición cinemática:

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (49)$$

La diferencia de esfuerzos es cero:

$$(p - p_\infty) n_i = -\tau_{ik} n_k \quad (50)$$

Se ignora la tensión superficial y se considera que el fluido o atmósfera que está arriba en contacto con la capa de fluido con presión p_∞ , juega un papel pasivo.

La condición de esfuerzos normales se encuentra al multiplicar esta ecuación por n_k . Se supone que índices repetidos se suman. Por tanto, después de simplificar, se tiene:

$$(p - p_\infty) n_i n_i = -\tau_{ik} n_k n_i \quad (51)$$

que simplificando y sustituyendo tenemos:

$$p - p_\infty = \frac{1}{N^2} (2\tau_{12}\eta_x - \tau_{11}\eta_x^2 - \tau_{22}) \quad (52)$$

La condicion de frontera térmica en la superficie deformable de arriba es la de flujo de calor constante:

$$\hat{n} \cdot \nabla T = -\frac{F}{k} \quad (53)$$

donde F es el flujo de calor normal a la superficie.

Ecuaciones lineales para las perturbaciones

Aquí consideramos una pequeña perturbación alrededor de la solución hidrostática del fluido. Las perturbaciones se representan con letras primadas. Entonces las variables de flujo ahora son:

$$u = u'(\bar{x}, t)$$

$$\tau = \tau'$$

$$p = p_s + p'$$

$$T = T_s + \theta'$$

$$\rho = \rho_s + \rho'$$

Éstas se sustituyen en las ecuaciones de movimiento dentro de la aproximación de Boussinesq. Se ignoran términos de segundo orden o mayor. Primero se tiene que la velocidad se mantiene solenoidal:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (54)$$

Las ecuaciones de movimiento y de transferencia de calor para las perturbaciones son, respectivamente:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x_j} - g \frac{\rho'}{\rho_0} k_j \quad (55)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = A w' + \kappa \nabla^2 \theta' \quad (56)$$

siendo $\rho' = -\gamma \rho_0 \theta'$ la perturbacion de la densidad.

Las Ecs. (54) - (56) son las ecuaciones básicas de las perturbaciones dentro de la aproximación de Boussinesq.

Por otra parte, al linealizar la ecuación constitutiva para el modelo de Oldroyd para cualquiera de las derivadas se reduce a:

$$\tau'_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial t} = 2\mu_0 \left(\dot{\gamma}'_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}'_{ij}}{\partial t} \right) \quad (57)$$

Esta ecuación se usa para cambiar el tensor de rapidez de corte por el tensor de esfuerzos viscosos en la ecuación de movimiento y en las condiciones de frontera. Para ello primero se aplica $(1 + \lambda_1 \partial/\partial t)$ a ambos miembros de la Ec. (55) y después se usa la Ec. (57) (en adelante se quitarán las primas a las perturbaciones):

$$(1 + \lambda_1 \partial/\partial t) \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right) = (1 + \lambda_1 \partial/\partial t) \left(g\gamma\theta k - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \nu (1 + \lambda_2 \partial/\partial t) \nabla^2 v_j \quad (58)$$

Aquí se usó la definición de $\dot{\gamma}_{ij}$ Ec. (29) y $\nu = \mu_0/\rho_0$ es la viscosidad cinemática.

Al tomar el rotacional de la Ec. (58) dos veces se obtiene que la tercera componente de la velocidad satisface una ecuación independiente de las demás componentes:

$$(1 + \lambda_1 \partial/\partial t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w \right) = (1 + \lambda_1 \partial/\partial t) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) g\gamma + \nu \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w \quad (59)$$

Esta ecuación, junto con la de difusión del calor, forman un sistema cerrado de ecuaciones acopladas. Ellas serán suficientes para resolver el problema de estabilidad. Las soluciones para las componentes x y y se obtienen de las otras dos componentes usando la solución de w .

Para hacer esta ecuación adimensional se toma como longitud representativa a "d" el espesor de la capa de fluido sin perturbar, a d^2/κ como la unidad de tiempo, $\rho_0 d^3$ como la unidad de masa, k/d como unidad de velocidad y $-Ad$ como unidad de temperatura. Las ecuaciones lineales adimensionales para las perturbaciones son:

$$\left(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\text{Pr} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w - R \nabla_1^2 \theta\right) = \left(1 + E\Gamma \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^4 w \quad (60)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta \quad (61)$$

donde,

$$\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Se definen los siguientes parámetros adimensionales :

El número de Rayleigh:

$$R = \frac{g\gamma d^4 A}{\nu\kappa}$$

El número de Prandtl:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$$

El tiempo de relajamiento:

$$\Gamma = \lambda_1 \frac{\kappa}{d^2}$$

y cociente de tiempos de retardo y relajamiento:

$$E = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Tenemos entonces dos ecuaciones lineales adimensionales acopladas (60), (61). Falta encontrar las condiciones de frontera lineales de la perturbación.

En la superficie de abajo las condiciones de frontera para una superficie libre indeformable toman la forma:

$$w = u_z(-1) = w_x(-1) = 0 \quad (62)$$

y,

$$\theta(-1) = 0 \text{ (temperatura constante)} \quad (63)$$

En la superficie de arriba deformable:

$$\eta_t = w(\eta) \quad (64)$$

$$(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})p(\eta) = 2\mu(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t})w_x(\eta) \quad (65)$$

$$u_z(\eta) + w_x(\eta) = 0 \quad (66)$$

y

$$\theta_z(\eta) = 0 \text{ (flujo de calor constante)} \quad (67)$$

en donde los subíndices denotan derivadas parciales. Esta condición es realmente una aproximación que se usa debido a que el medio del otro lado de la frontera, en nuestro caso el aire, es muy mal conductor en relación con el líquido en convección. Es aplicable cuando el número de Biot es muy pequeño.

Modos Normales

Supongamos ahora, que las perturbaciones se desarrollan de la siguiente manera:

$$\psi = \Psi(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \sigma t\}$$

$$\theta = \Theta(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \sigma t\}$$

$$\eta = \Sigma(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \sigma t\}$$

$$p = \Pi(z) \exp \{i(k_x x + k_y y) + \sigma t\}$$

Aquí $\Psi(z)$ representa la amplitud de la función de corriente ψ , la cual se define en términos de la velocidad como:

$$\vec{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

De esta manera las ecuaciones que gobiernan las perturbaciones de un fluido viscoelástico de Oldroyd son, de las Ecs. (60) y(61):

$$\left(D^2 - k^2 - \frac{N\sigma}{Pr} \right) (D^2 - k^2) \Psi = ikNR\Theta \quad (68)$$

$$(D^2 - k^2 - \sigma) \Theta = ik\Psi \quad (69)$$

siendo $D = \frac{d}{dz}$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ y

$$N = \frac{1 + \Gamma_1 \sigma}{1 + \Gamma_1 E \sigma} \quad (70)$$

Ahora al combinar (68) y (69) se obtiene una única ecuación para Ψ :

$$\left(D^2 - k^2 - \frac{N\sigma}{Pr} \right) (D^2 - k^2 - \sigma) (D^2 - k^2) \Psi + k^2 NR \Psi = 0 \quad (71)$$

De esta manera hemos obtenido la ecuación que satisface la función de corriente, que está sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

Para la superficie de abajo libre indeformable:

$$\Psi(-1) = 0 \quad (72)$$

$$D^2 \Psi(-1) = 0 \quad (73)$$

con la condición térmica:

$$\Theta(-1) = 0 \text{ (temperatura constante)} \quad (74)$$

Para la superficie de arriba deformable las variables se desarrollan en series de Taylor alrededor de $z = 0$ y se dejan sólo términos lineales. Así, de las Ecs. (64) y (66)

$$\sigma\Sigma(0) + ik\Psi(0) = 0 \quad (75)$$

$$(D^2 + a^2)\Psi(0) = 0 \quad (76)$$

y de la condición de esfuerzos normales (65):

$$\Pi(0) + i\frac{P_r^2 G k}{\sigma}\Psi(0) + i\frac{2k P_r}{N}D\Psi(0) = 0 \quad (77)$$

donde se consideró que $dp_s(0)/dz = -g\rho_0$. Con ésto se obtiene un nuevo número adimensional definido por:

$$G = \frac{ga^3}{\nu^2} \quad (78)$$

conocido como número de Galileo. Si por otra parte se deriva con respecto a x la componente x de la Ec. (58) y se usan modos normales, se puede despejar la presión:

$$\Pi = -i\frac{P_r}{kN}(D^2 - k^2)D\Psi + i\frac{\sigma}{k}D\Psi \quad (79)$$

Si esta expresión se evalúa en $z = 0$ y se sustituye en la Ec. (77) se tiene:

$$\frac{\sigma D^3\Psi(0)}{N} - \sigma\left(\frac{3a^2}{N} + \frac{\sigma}{P_r}\right)D\Psi(0) - a^2 G P_r \Psi(0) = 0 \quad (80)$$

que corresponden a la condición de esfuerzos normales. Para la condición térmica:

$$D\theta(0) = 0 \text{ (flujo de calor constante)} \quad (81)$$

Como las ecuaciones son lineales la solución para Ψ en la ecuación (71) es de la forma:

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 (A_i \sinh[\alpha_i(z+1)] + B_i \cosh[\alpha_i(z+1)]) \quad (82)$$

siendo las α_i las raíces de la ecuación algebraica:

$$(\alpha^2 - k^2)^3 - (\alpha^2 - k^2)^2 \left(\frac{N}{Pr} + 1 \right) \sigma + \frac{N\sigma^2}{Pr} (\alpha^2 - k^2) + k^2 NR = 0 \quad (83)$$

De esta manera se tienen seis condiciones de frontera que deben ser traducidas todas para Ψ , que satisface una ecuación de sexto orden.

Las condiciones de frontera llevan a un sistema de ecuaciones lineales simultáneas para las A_i y las B_i . El sistema es homogéneo y, por tanto para que haya solución el determinante del sistema debe ser cero. El determinante del sistema será cero sólo para valores característicos de los parámetros del sistema que son σ , Pr , Γ , E , G , k y R . Sin embargo, se ha supuesto que los seis últimos deben ser reales. Es común buscar el valor característico de R en función de los otros parámetros y generalmente en función de k . Al tratar el caso marginal se supone que σ es imaginario puro.

En general, para una k dada, habrá una serie de valores de σ que hacen a R real positivo (con los otros parámetros fijos). Al variar k se encuentran nuevos valores de σ que hacen R real positivo. Dentro de éstos, sólo es de interés el valor de σ que corresponde a un mínimo de R positivo. Éstos son llamados los valores críticos R_c y σ_c correspondientes a k_c .

El significado de estos parámetros es que, conforme aumentamos la temperatura, el valor del número de Rayleigh crece, y cuando adquiere el valor R_c , en la curva marginal hay una perturbación caracterizada por el número de onda k_c , que se hace inestable en forma oscilatoria adquiriendo una frecuencia $\text{Im}(\sigma) = \lambda_c$ ($\text{Re}(\sigma) = 0$).

El problema de determinar R_c es difícil de realizar de forma analítica ya que a diferencia de los casos que son posibles de resolver analíticamente, se tiene una ecuación de sexto grado con coeficientes complejos cuyas raíces son no triviales. Por otro lado, como veremos, el cálculo de un determinante nos llevará a resolver una función compleja complicada. Sin embargo, hay subrutinas que ayudan a la solución numérica y simplifican el trabajo.

El caso del fluido newtoniano, ya investigado por Benguria y Depassier /14/, se obtiene de nuestras ecuaciones haciendo $\Gamma = 0$.

CAPÍTULO III

RESULTADOS NUMÉRICOS

De acuerdo a las condiciones de frontera planteadas en el capítulo anterior, el caso que estudiaremos es el de una capa de fluido con la superficie inferior libre plana a temperatura constante y la superficie superior libre deformable con flujo de calor constante.

Al considerar una solución para Ψ de la forma dada por la Ec. (82) las condiciones de frontera, Ecs. (72) y (73), quedan como:

$$\sum_{i=1}^3 B_i = 0 \quad (84)$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 B_i = 0 \quad (85)$$

Para las condiciones de la superficie deformable Ecs. (76) y (80) tenemos:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ A_i (\alpha_i^2 + k^2) \sinh(\alpha_i) + B_i (\alpha_i^2 + k^2) \cosh(\alpha_i) \right\} = 0 \quad (86)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\frac{\sigma}{N} \alpha_i^3 - \sigma \left(\frac{3k^2}{N} + \frac{\sigma}{Pr} \right) \right] (A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i)) \right\} \\ - \sum_{i=1}^3 \left\{ k^2 Pr G (A_i \sinh(\alpha_i) + B_i \cosh(\alpha_i)) \right\} = 0 \quad (87)$$

Finalmente, las condiciones térmicas Ecs. (74) y (81) son:

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \left(\alpha_i^4 - \alpha_i^2 \left(2k^2 + \frac{N\sigma}{Pr} \right) + k^4 + k^2 \frac{N\sigma}{Pr} \right) B_i \right\} = 0 \quad (88)$$

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ \left[\alpha_i^5 - \left(2k^2 + \frac{N\sigma}{Pr} \right) \alpha_i^3 + \alpha_i \left(k^4 + k^2 \frac{N\sigma}{Pr} \right) \right] (A_i \cosh(\alpha_i) + B_i \sinh(\alpha_i)) \right\} = 0 \quad (89)$$

El problema lo hemos convertido en uno numérico, que en notación matricial tiene la forma:

$$AC = 0 \quad (90)$$

siendo A una matriz de 6×6 que se forma al sustituir las soluciones a la Ec. (83) en las diferentes funciones que aparecen arriba, y C es la matriz de 6×1 formada por los coeficientes $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. Para poder tener una solución distinta de cero debemos pedir que el determinante de A se haga cero. Para cada uno de los valores de Γ, E, G y Pr fijos, se obtienen valores propios de R con respecto a k que hacen cero el determinante.

A continuación describiremos brevemente los dos métodos que se utilizaron para resolver el problema:

El primero es un método aproximado basado en el que Chandrasekhar utilizó en su monografía /5/ para distintos casos de estabilidad hidrodinámica. El método que presentamos aquí es novedoso porque por primera vez se aplica a un sistema convectivo con superficie deformable.

Primero, se supone una solución para la perturbación de la temperatura que satisfaga las condiciones de frontera superior e inferior de la forma:

$$\Theta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \pi z \right]$$

Por otro lado, se supone también que la perturbación de la función de corriente satisface:

$$\Psi = \sum_m A_m P_m$$

Estas soluciones se sustituyen en las ecuaciones para las perturbaciones con lo que es posible obtener una ecuación característica /5/ que nos proporciona distintas aproximaciones para R , dependiendo del número de términos que se tomen en el desarrollo de Fourier.

El segundo método se realizó con la finalidad de corroborar los resultados obtenidos por el método anterior. Este consiste en obtener directamente del determinante de la matriz A el valor propio de R por medio de un algoritmo en FORTRAN. Para ello se usó una subrutina que utiliza el método de Müller /19/ para obtener las raíces complejas de una función compleja. Esta subrutina se utilizó simultáneamente tanto para calcular las raíces de

la ecuación de sexto grado con coeficientes complejos, como para resolver la función compleja que resulta del determinante de A . Antes de obtener las raíces del determinante, a la matriz A se le hizo una descomposición LU que consiste en escribir a la matriz A como el producto de dos matrices, donde L es una matriz triangular inferior y U es una matriz triangular superior /20/.

Se tienen 5 parámetros adimensionales, sin incluir el número de onda y la frecuencia, lo que ya es un número bastante grande. Esto nos obliga a fijar el número de Prandtl en el valor que usaron Benguria y Depassier /14/, esto es, $Pr = 1$. De este modo también podremos hacer una comparación con el caso del fluido newtoniano.

En la Fig. 3.1, para $G = 1000$ y $Pr = 1$, se dan ejemplos representativos de dos comportamientos típicos de las curvas marginales que se encontraron al graficar el número de Rayleigh R contra el número de onda k para diferentes valores de Γ con E fijo. Se pueden comparar con la gráfica del caso Newtoniano, $\Gamma = 0$, que obtuvieron Benguria y Depassier /14/. Esto sucede para cualesquiera E y G , es decir, este comportamiento solo depende de Γ . También se encontró que en el caso límite $k \rightarrow 0$ siempre se tiene que $R \rightarrow 30$ para todo tipo de comportamiento. Hay un tipo más de comportamiento. En este caso, la curva es muy plana pero tiene una forma de letra griega ω en la cual hay dos mínimos, uno mayor que el otro con el trazo de enmedio muy corto. No se muestran gráficas de este comportamiento debido a las pequeñas diferencias existentes entre los dos mínimos. Al disminuir el valor de Γ se observa que el mínimo mayor pasa a ser el menor, lo que representa un salto tanto en k_c como en la frecuencia correspondiente.

En la Fig. 3.2 se dan otros ejemplos de comportamiento pero ahora con respecto a G . En las gráficas antes mencionadas se observa que a partir de un cierto número de onda las gráficas tienen un comportamiento general muy parecido al del caso newtoniano /14/ excepto por el valor del mínimo, que es el que nos interesa.

Aquí cabe mencionar, que el parámetro adimensional G incluye efectos de gravedad y como tal representa una fuerza "restauradora" sobre la superficie de la capa de fluido. Mientras más grande sea G más plana será la superficie.

En la Figs. 3.3, 3.4 y 3.5 se muestran curvas del Rayleigh crítico R_c con respecto a Γ para diferentes valores de E y G . Con el objeto de poder comparar también se calcularon las curvas correspondientes al caso de una capa de fluido viscoelástico con ambas superficies libres planas con las condiciones térmicas iguales a las del caso que estamos estudiando. Este problema tam-

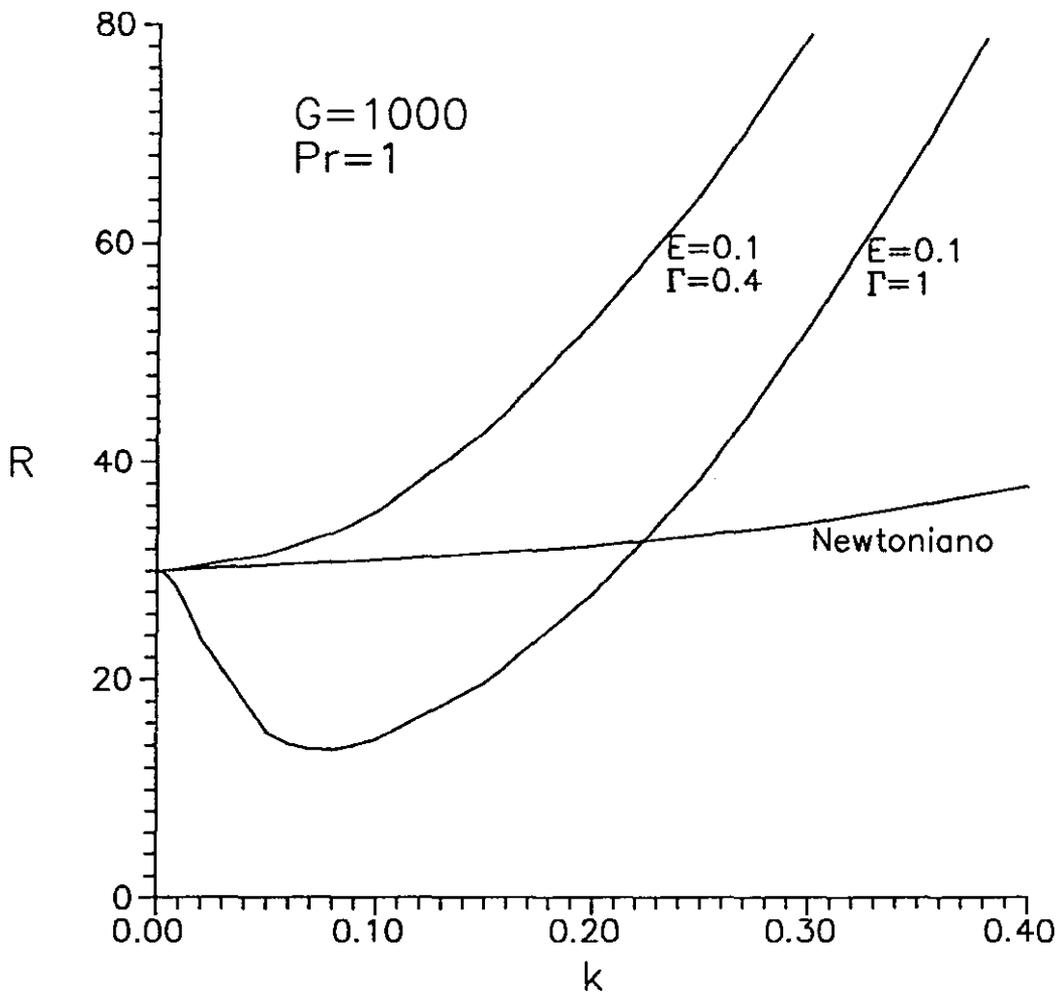


Fig. 3.1 Ejemplos de dos tipos de comportamientos observados respecto del parámetro Γ .

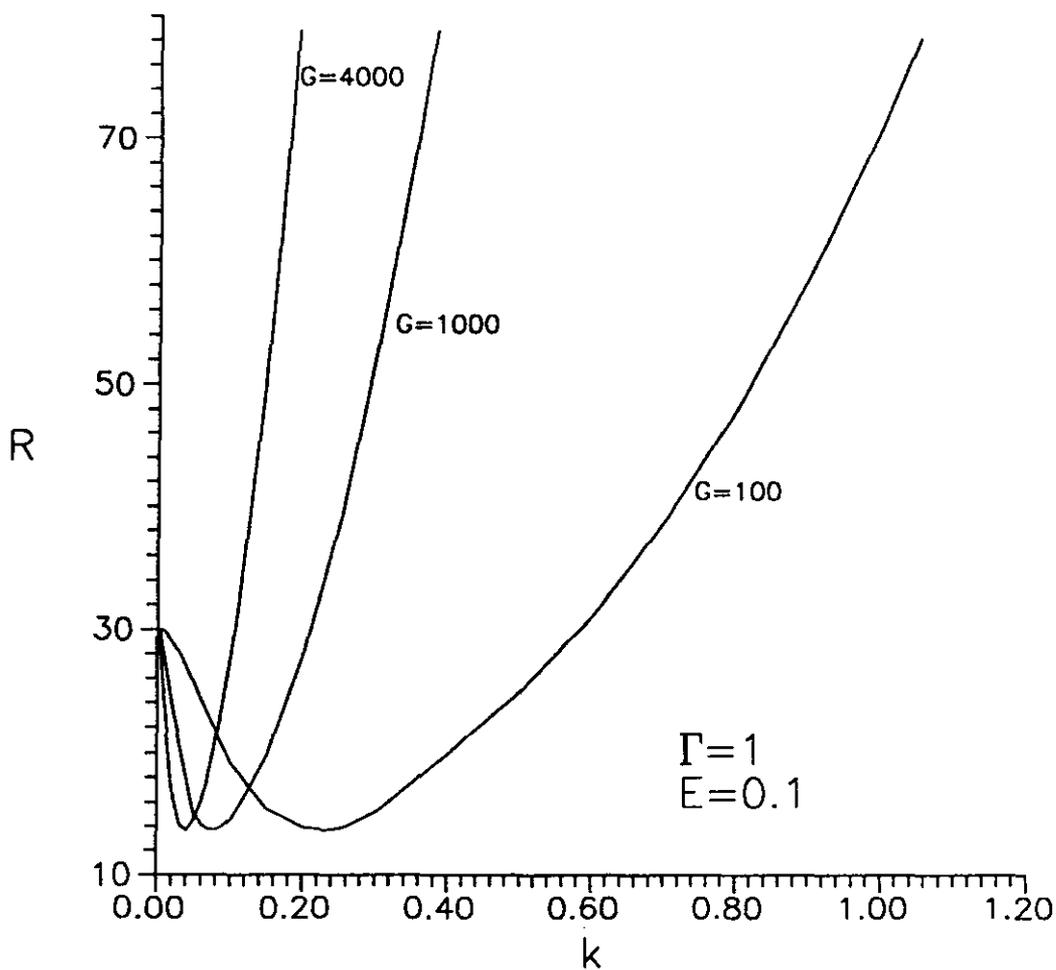


Fig 3.2 Ejemplos de tres tipos de comportamientos observados respecto del parámetro G .

poco ha sido investigado antes. En las gráficas se observa cómo la presencia de un tiempo de relajación da un efecto desestabilizador al fluido mientras que un tiempo de retardo resulta ser un factor estabilizador. Esto también fue señalado anteriormente para fluidos viscoelásticos con superficies planas por Vest y Arpaci /6/, cuando el fluido satisface el modelo de Maxwell; por Takashima /8/, para el caso libre-libre y sólido-sólido cuando el fluido satisface el modelo de Oldroyd y lo mismo por Kolkka y Ierley /11/. El hecho de que difieran los dos conjuntos de gráficas de R_c correspondientes al caso plano (líneas punteadas) y al caso deformable (líneas continuas) se debe en gran medida a la nueva inestabilidad sobreestable que se encuentra cuando la superficie se deforma. Cabe mencionar que todos los números de Rayleigh críticos R_c obtenidos aquí cumplen con la aproximación de Boussinesq que en términos de números adimensionales se escribe como:

$$R_c < Pr G$$

En las figuras también se grafican dos líneas horizontales correspondientes a otros dos números de Rayleigh críticos: una corresponde al caso de intercambio de inestabilidades o caso estacionario ($R_{sc} = 384.7$) y otra que corresponde al valor crítico para el caso sobreestable de una capa de fluido newtoniano con superficie deformable /14/ ($R_{on} = 30$). Esta última, además de dar un punto de referencia, limita los dos tipos de comportamiento señalados arriba, ya que para valores de Γ más pequeños que el de la intersección de la línea R_{on} con las curvas de criticidad ($\Gamma \approx 0.45$) se tiene que, para cualquier valor de E y G , $R_c = 30$, igual que para el caso newtoniano con superficie deformable. Cuando $\Gamma > 0.45$ se tiene otro tipo de comportamiento en el que $R_c < 30$, valor crítico que depende fuertemente de E y Γ .

Al tratar de determinar los valores críticos con los distintos valores de los parámetros, se tienen grandes dificultades cuando $E = 0.001$ y $E = 0$ ya que las curvas marginales oscilan muy cerca del mínimo. Otra dificultad es que, para estos valores, las curvas marginales son muy planas cerca del mínimo extendiéndose en un amplio rango del número de onda. Además, esto se agrava cuando el número de Galileo es pequeño. Por este motivo, no se muestra la curva crítica para el caso de un fluido de Maxwell con $G = 100$.

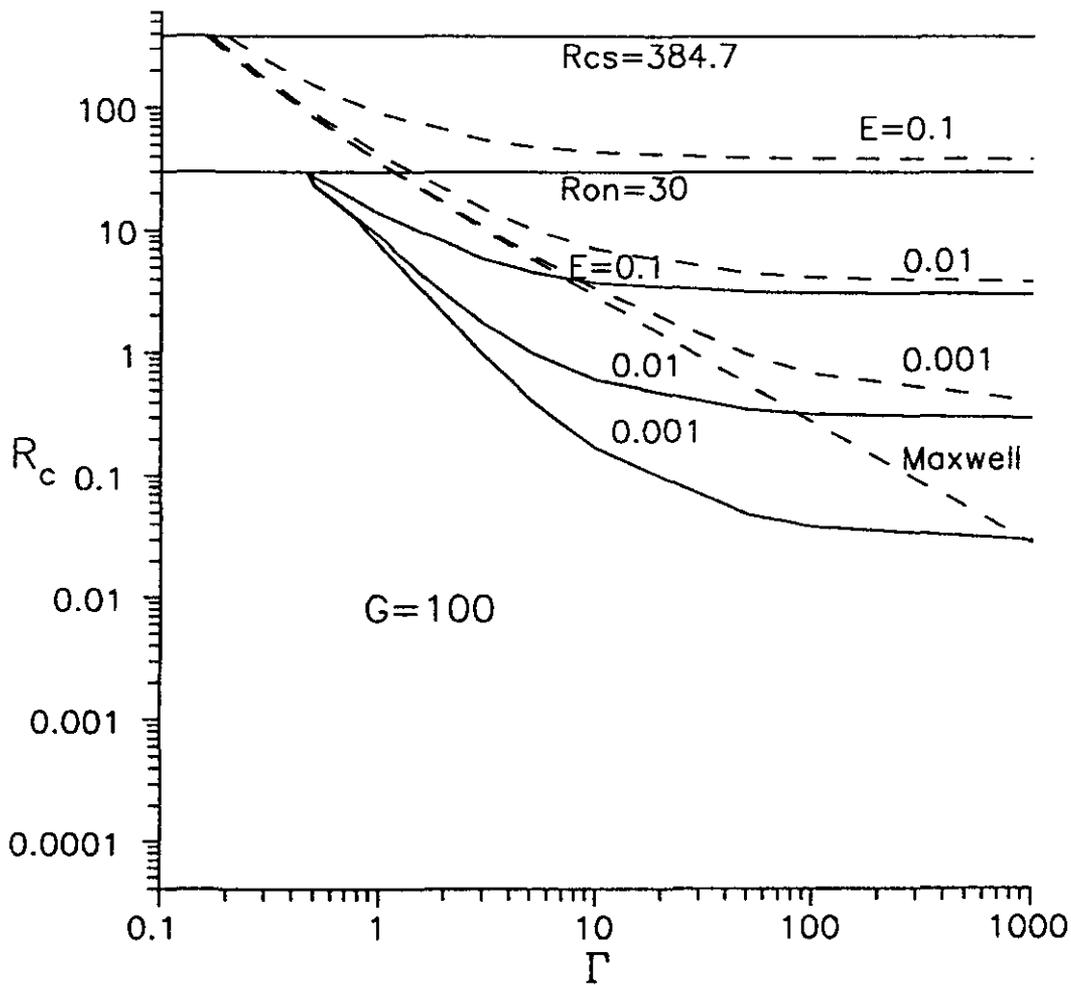


Fig. 3.3 Curvas de criticalidad. R_c vs Γ para $G = 100$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano (No se incluye el caso deformable para el fluido de Maxwell).

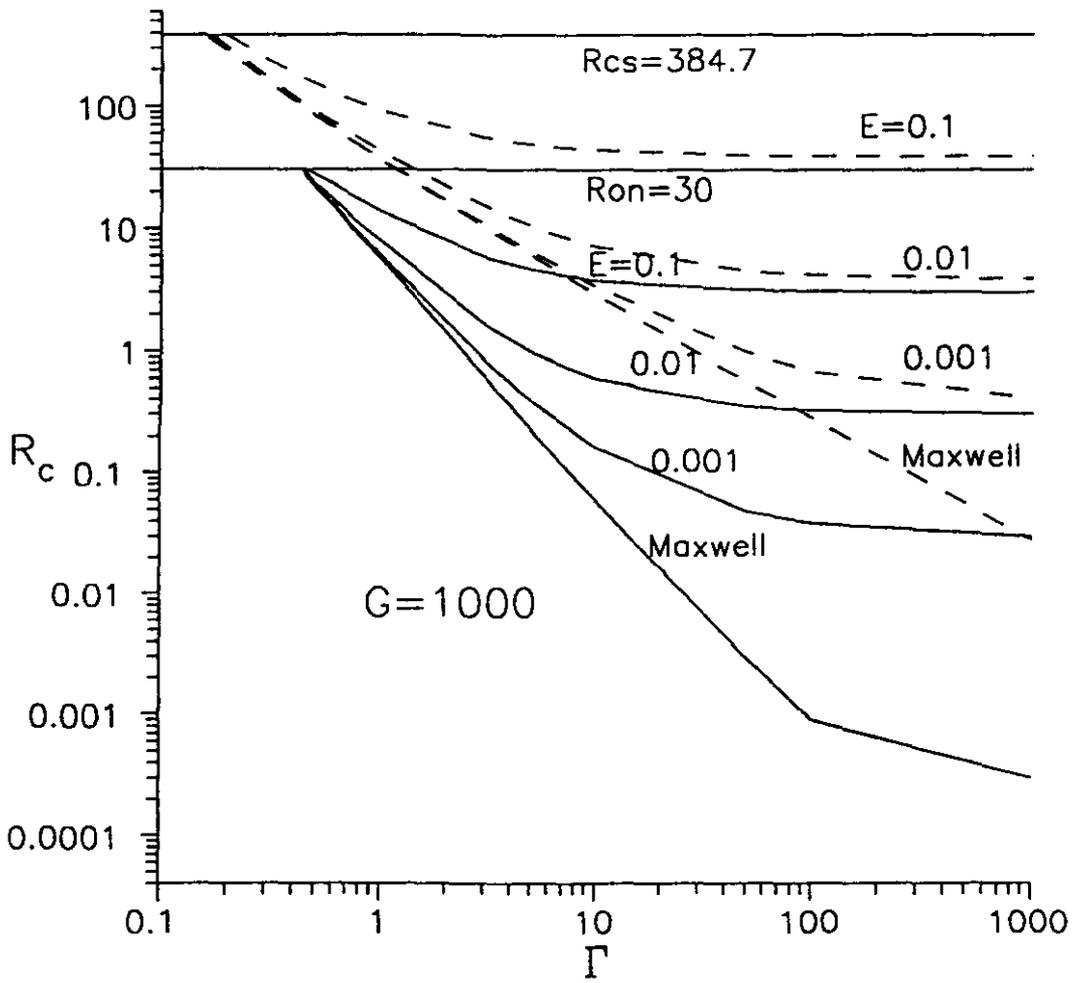


Fig. 3.4 Curvas de criticalidad. R_c vs Γ para $G = 1000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

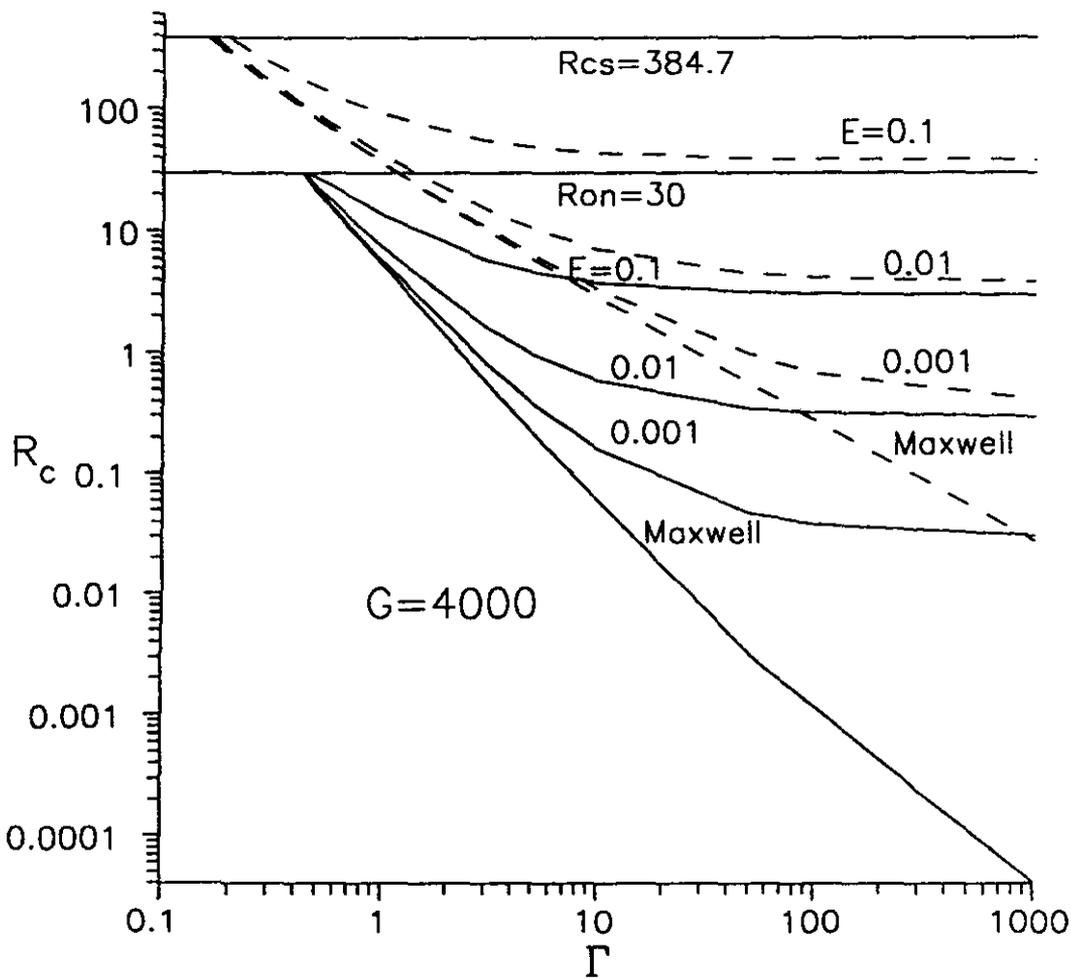


Fig. 3.5 Curvas de criticalidad. R_c vs Γ para $G = 4000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

Al preguntarnos por la dependencia de las curvas críticas con respecto al parámetro de deformación G , se observa un comportamiento sorprendente ya que la capa de fluido se vuelve mas inestable con G , aunque esta variación entre los valores de R_c es muy pequeña. Al parecer, el grado de libertad extra que ofrece la superficie deformable, aquí actúa de una forma totalmente contraria a lo que uno pensaría cuando el fluido es newtoniano de acuerdo a Izakson y Yudovich /12/ .

A continuación se muestran curvas del número de onda crítico K_c con respecto a Γ y curvas de la frecuencia crítica σ_{ic} con respecto a Γ para el mismo conjunto de parámetros. También se incluyen las curvas del caso plano indeformable.

Se puede observar de las gráficas que aparecen en las Figs. 3.6, 3.7 y 3.8, que si tenemos un fluido de Oldroyd dado, con el parámetro Γ aproximadamente mayor a 0.45 (punto de intersección entre la línea *Ron* y la curva marginal), el mínimo está dado para una k diferente de cero, es decir, la longitud de onda es finita. En caso contrario, para $\Gamma \leq 0.45$, encontramos que el valor del mínimo se encuentra en $K_c = 0$, es decir, la longitud de onda es infinita. Este caso es importante porque permite hacer un desarrollo a número de onda pequeño alrededor de $k = 0$.

Las Figs. 3.9, 3.10 y 3.11 muestran gráficas de σ_{ic} contra Γ para los correspondientes parámetros de las figuras anteriores. Aquí, se observa algo muy parecido a lo que sucede con los numeros de onda críticos, ya que para $\Gamma \leq 0.45$ la frecuencia correspondiente al límite $k \rightarrow 0$ es $\sigma \rightarrow 0$ y para $\Gamma > 0.45$ las frecuencias son finitas.

En las distintas gráficas, tanto de K_c como de σ_{ic} , hay un máximo para los distintos valores de E , esto significa que existe un fluido de Oldroyd (determinado por sus parámetros viscoelásticos) que tendrá, con respecto al parámetro Γ en el estado crítico, las celdas más pequeñas posibles y, por tanto, una frecuencia muy grande (no exactamente la máxima debido a que no se pudo encontrar coincidencia exacta con respecto a Γ).

En las graficas de las Figs. 3.6-3.11 donde encontramos máximos es posible observar tambien discontinuidades o "saltos". Este fenómeno resulta de que, para valores fijos de Pr , E , Γ y G , la función $R(k)$ encontrada con los dos distintos algoritmos de solución del problema tiene en general, más de un mínimo. En la vecindad de una discontinuidad, la función $R(k)$ tiene

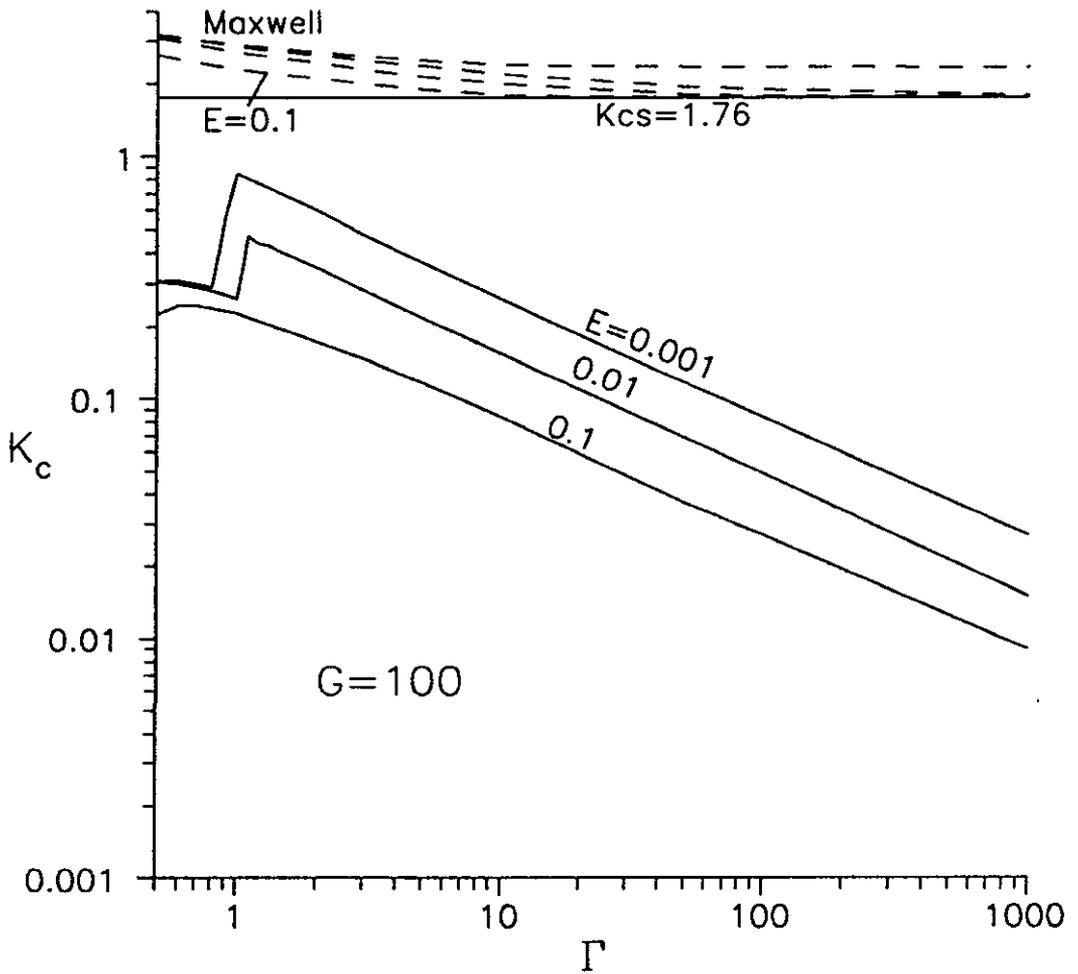


Fig. 3.6 Curvas de criticidad. K_c vs Γ para $G = 100$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

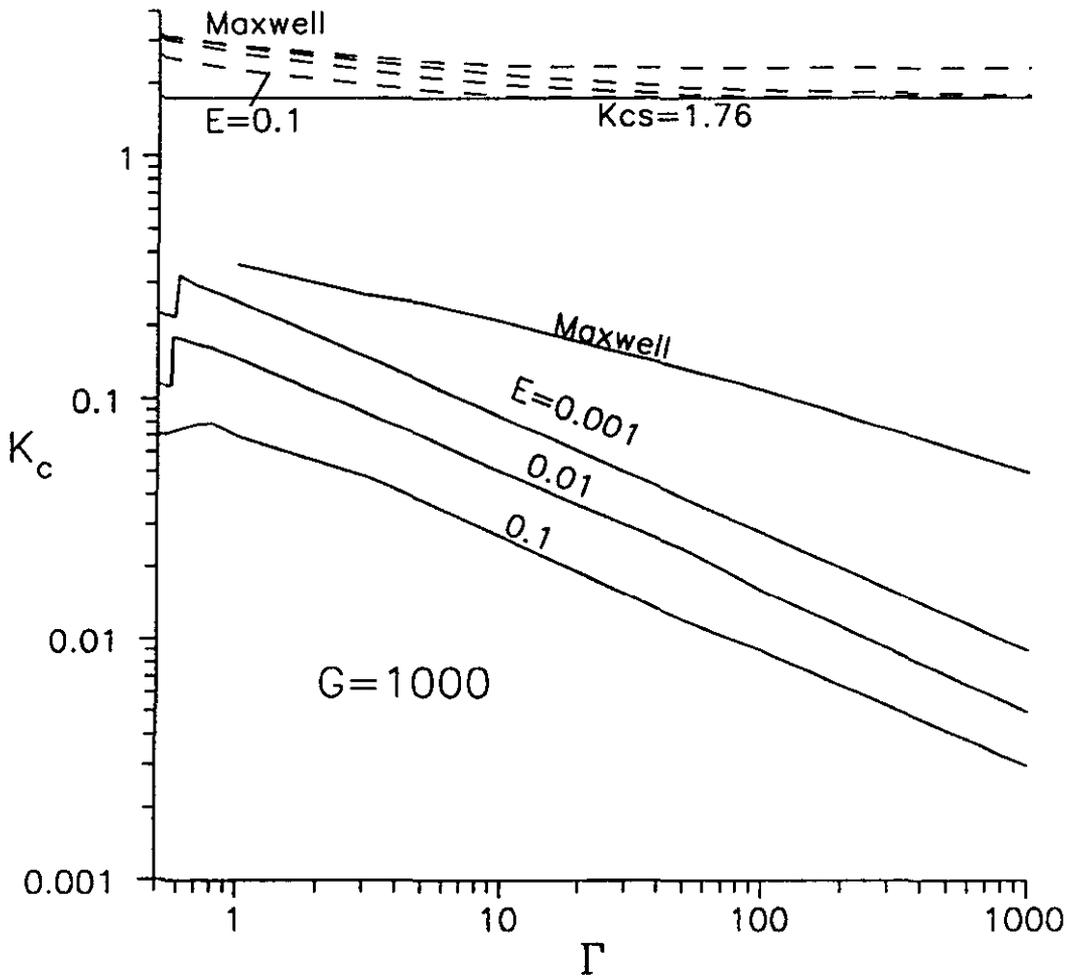


Fig. 3.7 Curvas de criticalidad. K_c vs Γ para $G = 1000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

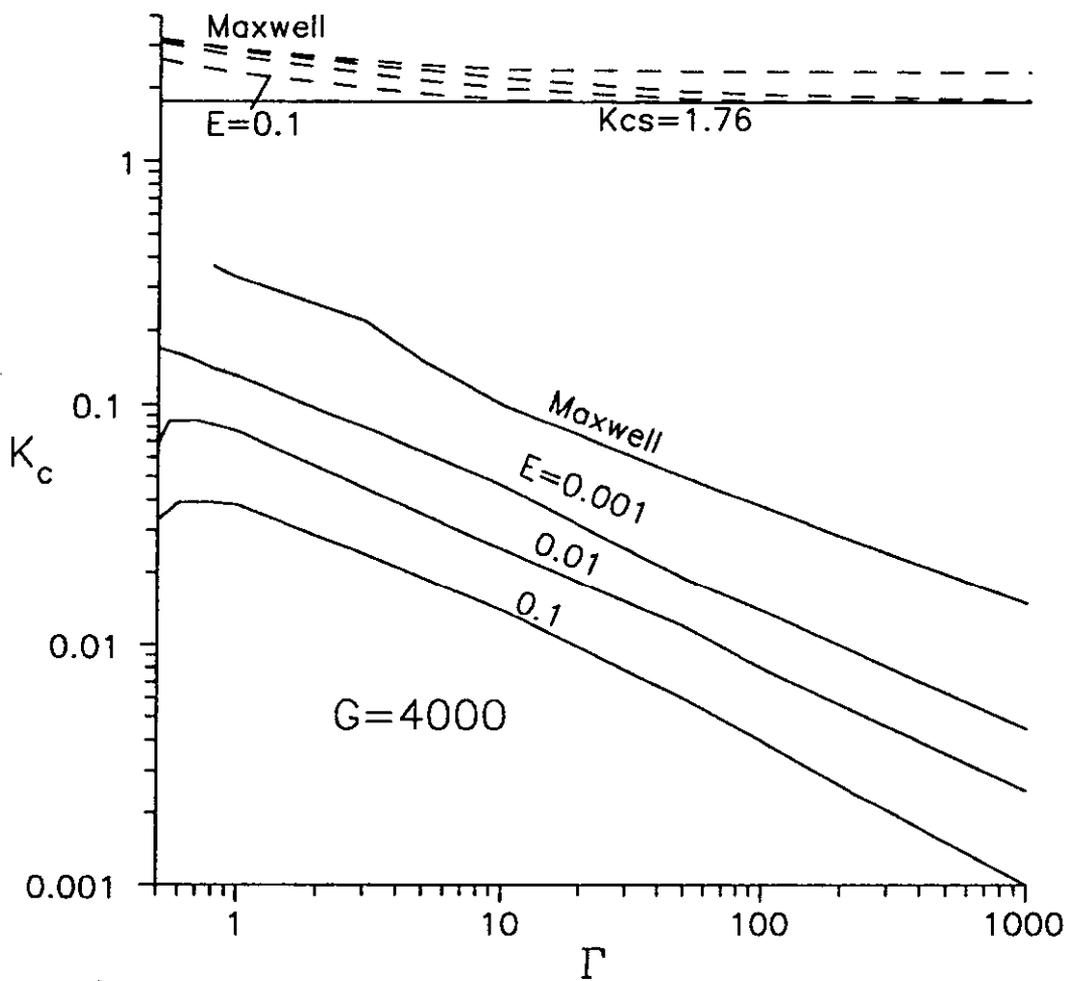


Fig. 3.8 Curvas de criticalidad. K_c vs Γ para $G = 4000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

un mínimo de casi igual magnitud para dos diferentes valores de k , y su disposición relativa se invierte para pequeños cambios en Γ . Esta misma situación fue observada por Takashima /9/ y /10/ en dos trabajos donde estudia la inestabilidad termoconvectiva de una capa de fluido viscoelástico de Oldroyd con el efecto de la rotación /9/ y del campo magnético /10/. Sin embargo, este comportamiento de la solución no ha sido observado en el caso de ausencia de fuerzas de cuerpo externas distintas de la gravedad. Esto nos lleva a concluir que la fuerza de gravedad actúa aquí también como una fuerza de cuerpo "extra", además de su función en la flotación, a través de su efecto restaurador de la deformación superficial de la capa de fluido viscoelástico.

Sobre la dependencia de k_c y σ_c con respecto al parámetro de deformación, se encontró que a medida que se incrementa G la longitud de onda disminuye para valores de Pr , E y Γ fijos. A diferencia de lo que sucede con R_c , aquí se presentan diferencias significativas que justifican la variación de G . Incrementando este parámetro se obtienen diferencias tales que el número de onda puede diferir hasta más de 5 veces en magnitud al pasar de $G = 100$ a $G = 4000$.

Para las frecuencias críticas se tiene un comportamiento muy similar al del número de onda. Se observa que a medida que G crece las frecuencias también aumentan, aunque sin tener las diferencias tan significativas como en el caso del número de onda.

En las figs. 3.6-3.8 se observa la gran diferencia que hay entre los números de onda del caso plano (líneas punteadas), con el deformable. En las gráficas se tiene como referencia el número de onda del caso estacionario $Kc_s = 1.76$. Respecto al parámetro G se tiene que este afecta gravemente la suavidad de las gráficas, teniéndose "saltos" más pronunciados en el caso $G = 100$ disminuyéndose hacia $G = 4000$. La última característica general de estas tres figuras es la discontinuidad que ocurre entre $\Gamma = 0.4$ y $\Gamma = 0.5$ (representado por eje K_c) para todo valor de E y G en donde $Kc \rightarrow 0$.

En las figs. 3.9-3.11 se observa cómo los valores para las frecuencias críticas en caso plano (líneas punteadas) se encuentran entre las gráficas para el caso deformable $E = 0.1$ y $E = 0.01$.

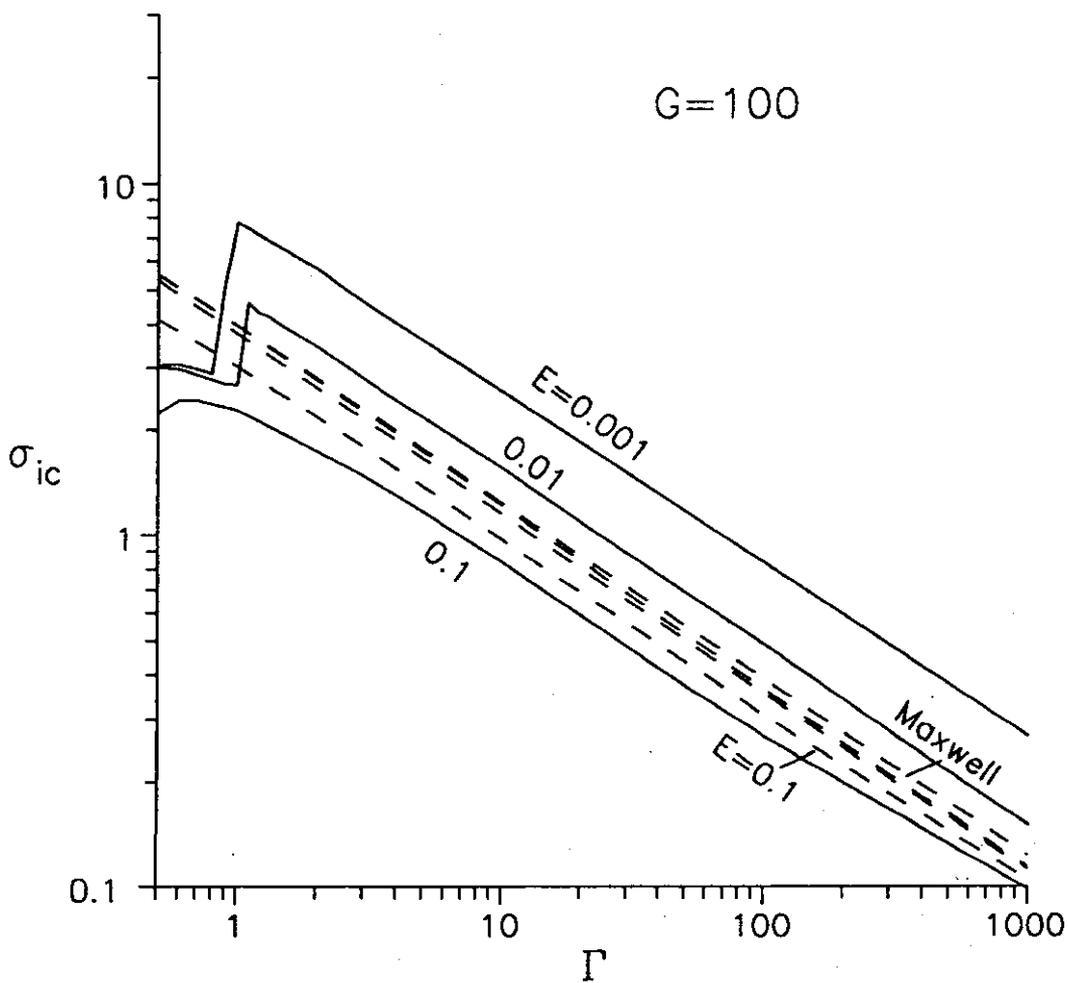


Fig. 3.9 Curvas de criticidad. σ_{ic} vs Γ para $G = 100$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

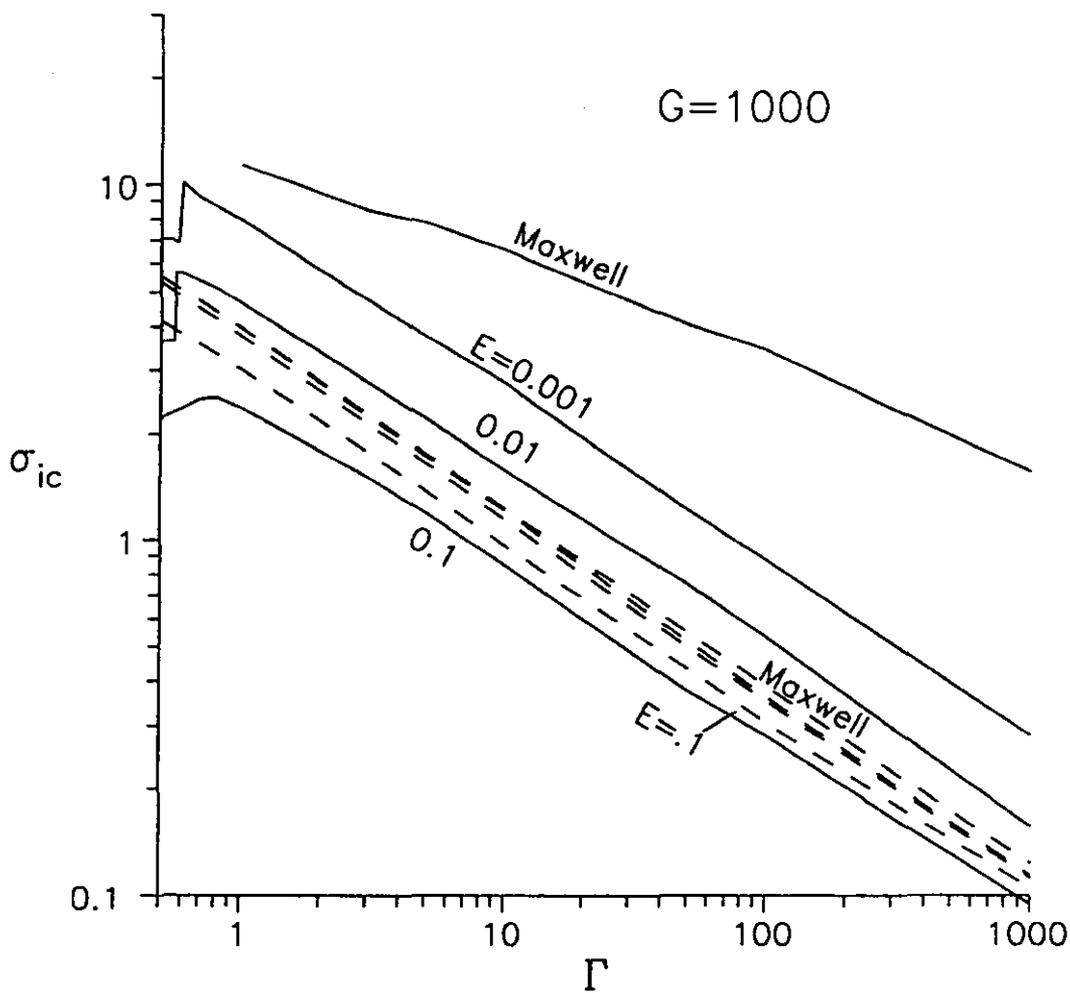


Fig. 3.10 Curvas de criticalidad. σ_{ic} vs Γ para $G = 1000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

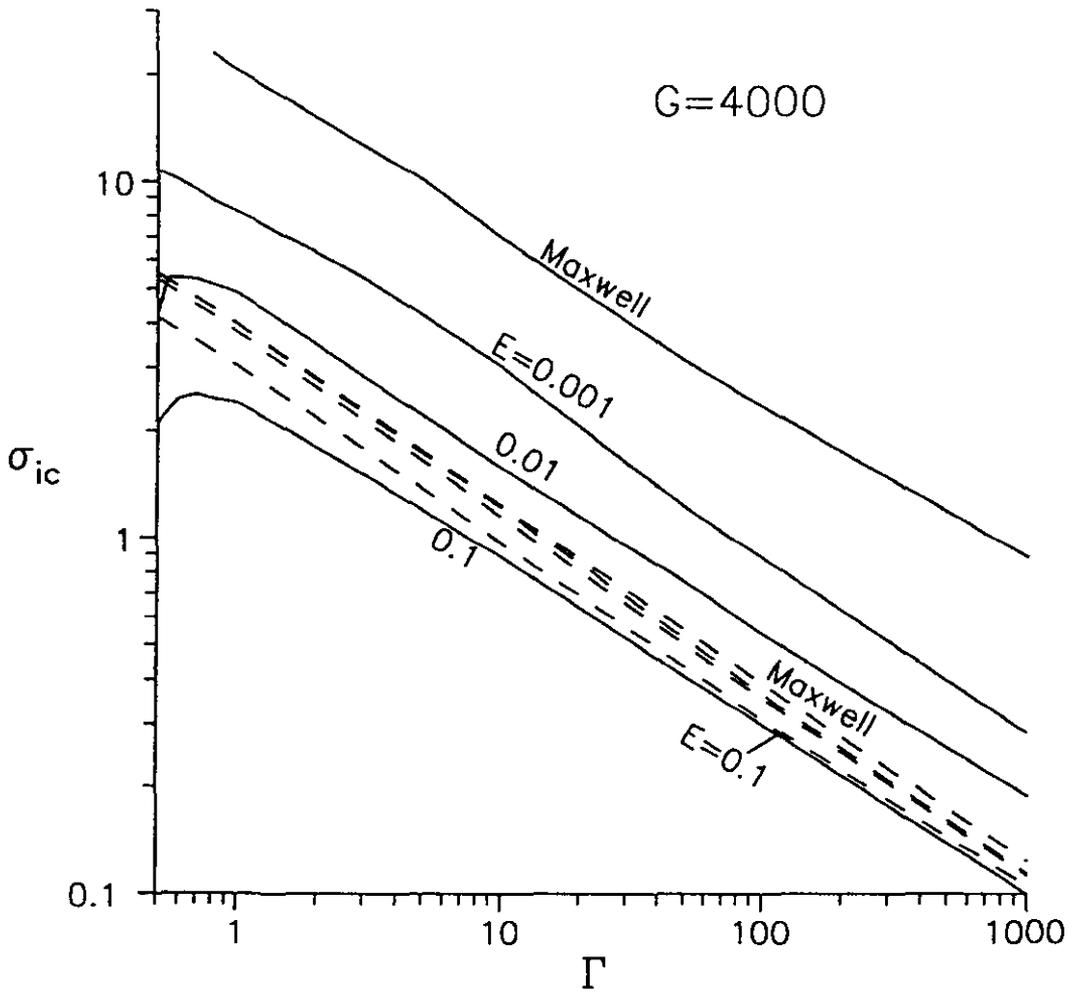


Fig. 3.11 Curvas de criticalidad. σ_{ic} vs Γ para $G = 4000$ con diferentes valores de E . Las líneas punteadas corresponden al caso plano

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos resuelto la estabilidad lineal termoconvectiva de una capa de fluido viscoelástico con superficie libre deformable. Examinamos con detalle la sobreestabilidad lineal para distintos fluidos viscoelásticos y sus ecuaciones lineales fueron resueltas por dos distintos métodos.

El incremento de los grados de libertad que ofrece la viscoelasticidad hace que el fluido sea más inestable que el fluido newtoniano. Esto contribuye a que los resultados obtenidos para el número Rayleigh crítico sigan dentro de la aproximación de Boussinesq, ésto es, $R_c < Pr G$. Además conduce a que los mínimos de las curvas marginales se encuentren a un número de onda finito con la propiedad $R_c < 30$ a partir de una Γ (≈ 0.4) dada, donde las curvas de criticalidad se intersectan con la recta $R = 30$ en las gráficas R contra Γ . Para valores más pequeños de esta Γ el comportamiento de R_c es similar al mostrado por un fluido newtoniano para cualquier G . Sin embargo, la inestabilidad difiere fuertemente en el comportamiento de los valores críticos del número de onda y de frecuencia. Hemos encontrado que debido a la presencia de dos mínimos de aproximadamente igual magnitud en las curvas marginales, se tiene un "salto" en las curvas críticas del número de onda y frecuencia cuando se aumenta Γ . Este "salto" es cada vez más suave convirtiéndose en un máximo a medida que se aumenta el valor de E y desaparece para grandes valores de G .

También Takashima, en sus artículos /9/ y /10/, observó "saltos" en las gráficas para frecuencias y números de onda críticos. En ellos se estudia la convección de una capa de fluido viscoelástico para dos distintas condiciones de frontera, considerando también los efectos de rotación /9/ y campo magnético /10/. Los resultados de estos dos trabajos muestran que las fuerzas externas actúan de tal modo que, para un cierto valor de Γ se tienen "saltos" en las curvas críticas. También se tienen resultados similares en el trabajo de Chandrasekhar /5/ cuando se estudian la estabilidad de capas de fluido newtoniano con interacción de rotación y de campo magnético,

así como en el artículo de Dávalos-Orozco y López-Mariscal /13/ donde se estudia la estabilidad de una capa de fluido newtoniano rotando con superficie deformable.

En contraste con estos resultados no han sido reportados "saltos" en las curvas críticas, para casos en que no hay fuerzas de cuerpo distintas a la gravedad. Esto nos lleva a concluir que los efectos de fuerza de cuerpo extra observados para nuestra capa de fluido se deben a una doble función de la fuerza de gravedad, una en la fuerza de flotación y otra como fuerza de cuerpo externa que restaura la forma original de la superficie deformada. Cuando este efecto es predominante en la convección natural del fluido viscoelástico se observan "saltos" en el número de onda y frecuencia críticos del presente trabajo.

Junto con estos nuevos resultados, otras conclusiones generales han sido obtenidas. Un incremento en el número adimensional Γ es siempre desestabilizador, en cambio un incremento en el parámetro viscoelástico adimensional E es estabilizador. El efecto de la deformación superficial para las condiciones de frontera estudiadas se presenta mediante una modificación de la condición térmica en la superficie de arriba. Con esta condición aparece una nueva inestabilidad de la capa de fluido, debida únicamente a la condición de deformabilidad de la superficie superior. Esto se concluye por comparación de los resultados para el caso con deformación y sin ella (curvas punteadas) en las graficas R_c vs Γ . Se encontró que la deformación superficial se caracteriza por el número adimensional G y cuyo incremento en magnitud es estabilizador.

A futuro, queda por investigar la inestabilidad no lineal de estos fenómenos convectivos tomándose como punto de partida las referencias /21/-/23/. El problema es complejo para el fluido newtoniano y lo es mucho más para el caso viscoelástico.

Referencias.

/1/ Thomson, J. "On a changing tessellated structure in certain liquids". Proc. Phil. Soc. Glasgow. 13, 464-8. (1882).

/2/ Bénard, H. "Les Tourbillons cellulaires dans une kappe liquide". Revue Gén. Sci. Pur. Appl. 11, 1261-71 y 1309-28. (1900).

/3/ Rayleigh, Lord. "On convection currents on a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side". Phil. Mag. London. 32, 529-46. (1916).

/4/ Chandrasekhar, S. "The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces". Proc. Roy. Soc. London. A, 217, 306-27. (1953).

/5/ Chandrasekhar, S. "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability". Dover Publications Inc., New York. (1981).

/6/ Vest C. M. and Arpaci V. S. "Overstability of a viscoelastic fluid layer heated from below." J. Fluid. Mech. 36, 3, 613 - 623. (1968).

/7/ Sokolov M. and Tanner R. I. "Convective stability of a general viscoelastic fluid heated from below" Phys. of Fluids. 15, 4, 534 - 539. (1972).

/8/ Takashima M. "Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. I" J. Phys. Soc. Jpn. 33, 2, 511 - 518. (1972).

/9/ Takashima M. "Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. II. Effect of Rotation" J. Phys. Soc. Jpn. 33, 3, 797 - 803. (1972).

/10/ Takashima M. "Thermal instability in a viscoelastic fluid layer. III. Effect of a Magnetic Field" J. Phys. Soc. Jpn. 33, 4, 1142 - 1148. (1972).

/11/ Kolkka W. R and Ierley R. G. "On the convected linear stability of a viscoelastic Oldroyd B fluid heated from below" J. of Non-Newtonian fluid Mechanics. 25, 209 - 236. (1987).

/12/ V. Kh. Izakson and V.I Yudovich, "Convection development in a liquid layer with a free boundary", Izv. AN SSSR Mekhanika Zhidkosti i Gaza, 3, 4, 23 - 28 (1968).

/13/ L. A. Dávalos-O and P. G. López-M. "Natural convection in a rotating fluid layer with deformable free surface". Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. 80, 75-102 (1995).

/14/ Benguria R. D. and Depassier M. C. "Oscillatory instabilities in the Rayleigh-Bérnard problem with a free surface" Phys. Fluids 30, 6, 1678 - 1682 (1987).

/15/Currie Iaing, "Fundamental mechanics of fluids".Mc. Graw Hill, New York, (1974).

/16/R. Darby. "Viscoelastic Fluids. An introduction to their properties and behavior". Edit. Dekker. New York. (1967).

/17/B. R. Bird, Armstrong R. C. and Hassager O. "Dynamics of Polymeric Liquids Vol. 1". Edit. Wiley-Interscience, U.S.A (1987).

/18/G. Z. Gershuni and E. M. Zhukhovitskii. "Convective stability of incompressible fluids". Keter Publishing House, Jerusalem Ltd., Jerusalem (1976).

/19/Müller D. E. " A method of solving algebraic equations using an automatic computer."Mathematical tables and other aids to computation (MTAC), vol.10, pp. 208-215. (1956).

/20/Press H. W., Flannery B. P, Teukolsky S. A. and Vetterling T. W. "Numerical Recipes. The art of scientific computing" Edit. Cambridge University Press. New York, pp. 31-55. (1988).

/21/Pavithran S. and Redekopp L. G."The coupling of gravity waves and convection: amplitude equations and planform selection". Studies in applied mathematics, 93 ,209-250. (1994).

/22/Aspe H. and Depassier M. C."Evolution equation of surface waves in a convecting fluid".Physycal Review A.,41,6 ,3125-3133. (1990).

/23/Alfaro C. M. and Depassier M. C."Solitary waves in a shallow viscous fluid sustained by an adverse temperature gradient". Physical Review Letters, 62, 22, 2597-2605. (1989)