

29
20j



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL ANALISIS ESPECTRAL UNIVARIANTE DE SERIES
DE TIEMPO PARA LA DETECCION DE
CICLOS ECONOMICOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
A C T U A R I O
P R E S E N T A ;

Coralia Azucena Quintero Rojas

Director de Tesis: Dr. José Fernández García



FEBRERO DE 1999

TESIS CON
FALDA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"El análisis espectral univariante de series de tiempo para
la detección de ciclos económicos"

realizado por Coralia Azucena Quintero Rojas

con número de cuenta 9038562-5 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	Dr. José Fernández García
Propietario	
Propietario	Act. Javier Fernández García
Propietario	Dr. Alejandro Valle Baeza
Suplente	Dr. Santiago López de Medrano
Suplente	Fís. Antonio González Guzmán

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A.P. Ma. del Pilar Alonso Reyes

...No quería escribir una dedicatoria, por consideraría *cursis*. En su lugar, quise escribir un preámbulo pero no encontré las palabras ni la combinación adecuada de éstas que reflejaran con fidelidad mis pensamientos, por lo que ¡Hice lo que nunca pensé que haría!, terminé escribiendo una *cursi* dedicatoria pues al fin comprendí que lo *cursi* no les quita lo elocuente. Así que de todo corazón dedico este trabajo a mis padres: Silvia y Daniel, y a José Fernandez ("el Jefe")...

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	i
CAPÍTULO 1. SERIES DE TIEMPO	1
1.1 Serie de tiempo	1
1.1.1 Definición	1
1.1.2 Ejemplos de procesos estocásticos	3
1.2 Estacionariedad	8
1.2.1 La estacionariedad en sentido estricto	8
1.2.2 La estacionariedad en sentido amplio	9
1.2.3 La estacionariedad en sentido homogéneo	10
1.2.4 Ejemplos de series estacionarias y no estacionarias en los sentidos antes definidos	10
1.3 Las funciones de autocovarianza y autocorrelación	12
1.3.1 Definición y propiedades	12
1.3.2 La función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de segundo orden	16
1.3.3 Estimadores de la autocovarianza	16
CAPÍTULO 2. EL ANÁLISIS ESPECTRAL DE SERIES DE TIEMPO	22
2.1 El espectro de una señal	24
2.1.1 Definición del espectro de una señal	25
2.1.2 La relación entre el espectro y la función de autocovarianza muestrales	30
2.2 Definición del espectro de un proceso estocástico	31
2.2.1 Interpretación del espectro	35
2.2.2 La función de densidad espectral	36
2.3 Estimadores espectrales	36
2.3.1 Suavizamiento del espectro muestral	37
2.3.2 Otros estimadores espectrales suavizados	38
2.3.3 El valor esperado del estimador espectral suavizado	41
2.3.4 La varianza de los estimadores suavizados	42
2.3.5 Intervalo de confianza para el espectro teórico	43
CAPÍTULO 3. APLICACIONES	46
3.1 Algoritmo para la estimación suavizada de la densidad espectral	47

3.1.1	La formulación para el cálculo digital de los estimadores espectrales suavizados: la estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)	47
3.1.2	El algoritmo	48
3.2	El análisis espectral de series económicas	60
	ANEXO ESTADÍSTICO	75
	APÉNDICE. EL ANÁLISIS DE FOURIER	115
A.1	Las series de Fourier	115
A.1.1	La serie de Fourier trigonométrica	115
A.1.2	La serie de Fourier exponencial compleja	121
A.2	Existencia de la serie de Fourier	124
A.3	Espectros de línea de una función periódica	124
A.4	La transformada de Fourier	127
A.4.1	Existencia de la transformada de Fourier	127
A.4.2	El espectro de frecuencia de una función aperiódica	128
A.5	El teorema de convolución	129
A.5.1	Convolución en el dominio del tiempo	129
A.5.2	Convolución en el dominio de la frecuencia	130
	CONCLUSIONES	131
	BIBLIOGRAFÍA	135

INTRODUCCIÓN

Hoy día resulta prácticamente innegable el hecho de que una de las principales características del desarrollo del capitalismo industrial ha sido su inestabilidad. A los periodos de prosperidad y expansión han sucedido periodos de inestabilidad y desempleo cuya recurrencia histórica ha sido tal que ha dado lugar a la determinación de ciclos, de naturaleza y duración distintas, en la evolución de las economías capitalistas. Ejemplo de éstos son los *Juglar*, de 7 a doce años de duración; los *Kitchin*, de tres a cuatro años; los *Kuznetz*, de aproximadamente veinte años; o las *ondas largas* o *ciclos Kondratieff*, de cincuenta a sesenta años. De éstos, el Juglar o ciclo de los negocios es el más comúnmente conocido y es a él al que usualmente se hace referencia cuando se habla del "ciclo económico" por su marcada presencia en las variables referentes a la producción industrial¹. En cuanto a los otros, el Kitchin o ciclo menor se cree que se origina primordialmente en las fluctuaciones de los inventarios y del crédito bancario.² Por su parte, los ciclos Kuznetz están fuertemente relacionados con los "ciclos de la construcción" observados en Inglaterra y en los Estados Unidos.³ Por último, las ondas largas fueron mostradas por Kondratieff⁴ en la serie del índice de precios de Inglaterra de 1780 a 1925, aunque también han sido observadas en variables relativas a la producción como el PIB.⁵

En la determinación de éstos ciclos, las series de tiempo (en este caso económicas) han jugado sin duda un papel relevante, y su estudio continúa siendo de mucha importancia en el análisis económico; muestra de ello lo es el gran desarrollo de técnicas y métodos, principalmente estadísticos y econométricos, con el propósito de estimar y distinguir los diferentes tipos de fluctuaciones cíclicas que afectan a una serie dada. De éstos, los métodos generalmente utilizados para la detección de ciclos económicos son los relativos a las llamadas *técnicas para la extracción de señales de series de tiempo económicas*, constituidas básicamente por las *medias móviles* y el *suavizamiento exponencial*, mediante los cuales se busca evidenciar la evolución subyacente de las series de tiempo, de tal manera que refleje el comportamiento de la variable correspondiente en el largo plazo pues en el nivel subyacente se pueden detectar ciertas peculiaridades básicas del fenómeno, que en cambio pueden ser difícilmente perceptibles en la serie original.⁶ Dicho patrón subyacente suele ser considerado como un elemento mixto conformado por los componentes *ciclo* y *tendencia* de la serie.⁷ Así que dichas técnicas tienen como fin principal el separar el componente mixto de los restantes.

¹ Lewis, W. A. (1983), p. 9

² *Ibidem*, p. 17

³ Niveau, M. (1983), p. 128.

⁴ Kondratieff, N. D. (1992)

⁵ Véanse, por ejemplo, Metz, R. (1992) y Reijnders J. P. G. (1992).

⁶ Espasa, A. y J. R. Cancejo (1993), p. 304.

⁷ Con independencia del enfoque empleado en el análisis de series de tiempo, es comúnmente aceptado considerar que las series de tiempo están formadas por todos o algunos de los siguientes cuatro componentes: el *irregular*, que agrupa las

La técnica de *medias móviles* se basa en calcular promedios de conjuntos de la serie con igual número de datos, lo que da como resultado una nueva serie en la que se han eliminado o atenuado algunos de los componentes de la serie que "enmascaran" al componente mixto ciclo-tendencia. Por su parte, la técnica de *suavizamiento exponencial*, también conocida como de *medias móviles exponencialmente ponderadas*, se utiliza para eliminar el componente irregular de las series temporales; y a semejanza de lo que ocurre con la técnica de medias móviles, la aplicación del suavizamiento exponencial da lugar también a una nueva serie temporal en la que cada uno de sus elementos es calculado a partir de la observación actual y todas las anteriores de la serie original. La ponderación que se le da a las observaciones originales para obtener la nueva serie disminuye exponencialmente conforme más alejadas se encuentren éstas de la actual, lo que puede entenderse como que se le da más importancia a la información original conforme más reciente sea.

Otro método muy utilizado principalmente en los Estados Unidos por el *National Bureau of Economic Research (NBER)* para la detección de ciclos, concretamente del ciclo de los negocios, es el llamado *Census X-11*, desarrollado por el Departamento del Censo de los Estados Unidos y que consiste básicamente en estimar, mediante el uso de medias móviles, los componentes estacional, irregular y ciclo-tendencia de la serie temporal, es decir, este método es una aplicación particular de la técnica previamente mencionada de medias móviles.

Los métodos y técnicas antes expuestos se dice que pertenecen al *dominio del tiempo*, pues el comportamiento de las series es descrito en términos de la manera en que las observaciones en diferentes instantes están relacionadas estadísticamente.

Existe también otro tipo de métodos y técnicas, englobados por el término de *análisis espectral*, que se consideran como pertenecientes al *dominio de la frecuencia*, pues con tales métodos se trata de describir las fluctuaciones presentes en las series en términos del comportamiento recurrente de sus elementos constitutivos comparándolos con sinusoides de diversas frecuencias. Sin embargo, aun cuando estos métodos, debido a la manera en que están contruidos y fundamentados, resultan ser adecuados para el análisis de fenómenos periódicos, son muy poco conocidos y/o utilizados en la detección de ciclos económicos. Esto puede atribuirse, entre otras, a dos razones. Una de ellas es que contienen un grado de dificultad sensiblemente alto para su consideración en las Ciencias Sociales. La otra causa presumible es que las primeras aportaciones difundidas sobre el análisis espectral, así como su desarrollo y aplicaciones, fueron hechas en el ámbito de las

oscilaciones no sistematicas con una estructura completamente aleatoria; el *estacional*, que representa a los cambios con periodicidad no mayor de un año; la *tendencia*, que, aun cuando se carece de una definición precisa del término, se entiende como cualquier cambio sistemático y continuo durante un periodo prolongado de tiempo en el nivel de la serie; y el *cíclico*, que representa a los cambios marcadamente periódicos que se presentan sobrepuestos a la tendencia (J. Fernández, 1994, pp. B-11, B-12 y C-4).

telecomunicaciones a partir de los años cincuenta, básicamente en el análisis de la transmisión de señales,⁸ aunque a partir de los años sesenta hubo varias aportaciones al análisis estadístico de series de tiempo mediante las técnicas del análisis espectral así como aplicaciones concretas en la detección de ciclos económicos: ejemplo de ello son los trabajos de W. G. Jenkins y D. G. Watts⁹, P. Bloomfield¹⁰ y W. A. Fuller¹¹, y V. Ewijk,¹² J. P. G. Reijnders¹³ y R. Metz.¹⁴ No obstante lo anterior, existe el problema de que el material bibliográfico sobre el tema es muy escaso o poco difundido en nuestras principales bibliotecas y librerías, lo cual contribuye en gran medida al desconocimiento y uso de estos métodos.

Dentro del análisis espectral, existe un método muy útil en la detección de ciclos en series temporales, y que por tanto resulta muy adecuado para el análisis de la naturaleza cíclica de las series económicas, concretado en la *estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)*, que al igual que el resto de los métodos pertenecientes al dominio de la frecuencia es poco utilizado en el análisis económico, en general, y del desarrollo capitalista, en particular, por lo que uno de los objetivos centrales de este trabajo de tesis es presentar y explicar dicho método con el fin principal de hacerlo accesible a un grupo amplio de personas, con especial interés en aquellas que se desempeñan en las ciencias sociales y económicas, y que eventualmente estuvieran interesadas en emplearlo en la detección de ciclos económicos; es más, aun cuando el desarrollo del mismo requiera de cierta formalización y justificación, se ha tratado de resumirlo en un algoritmo que puede ser fácilmente seguido sin que para ello sea necesario contar con una "formación matemática fuerte". El otro objetivo aquí considerado consiste en aplicar esta metodología en el análisis de la naturaleza cíclica de algunas economías capitalistas.

Una cualidad que hace que la ESDE sea más recomendable para la detección de ciclos que los métodos del dominio del tiempo antes mencionados, es que su aplicación no cambia la naturaleza de las series con ella estudiadas, tal como sucede con las medias móviles o el suavizamiento exponencial pues, "matemáticamente, la técnica de las medias móviles constituye un filtro que se aplica a la serie temporal investigada y que da como resultado una nueva serie en la que se han eliminado o atenuado alguno o algunos de los componentes presentes en los datos originales..."¹⁵ Asimismo, "a semejanza de lo que ocurre con la técnica de medias móviles, la aplicación de la técnica de suavizamiento exponencial da lugar también a una nueva serie temporal pues se trata también de un tipo de 'filtro' que, en consecuencia, afecta a determinadas características de la serie

⁸ Blackman, R. B. y J. W. Tukey (1958) son considerados los pioneros en el desarrollo de las técnicas del análisis espectral, asimismo, a ellos se debe en gran parte la terminología empleada en este trabajo

⁹ Jenkins, G. M. y D. G. Watts (1968).

¹⁰ P. Bloomfield, (1976).

¹¹ W. A. Fuller (1976)

¹² Ewijk, C van (1982).

¹³ J. P. G. Reijnders (1992).

¹⁴ R. Metz (1992).

¹⁵ Fernández, J., *op cit*, p. C-6.

original. .”¹⁶ Con la ESDE, tampoco se pierde información de la serie estudiada, como sucede con las medias móviles, en la cual la serie resultante contiene menos datos que la serie original. Es decir, al calcular una media móvil de m elementos a una serie que contiene T observaciones, se perderán las $m/2$ observaciones iniciales y finales si m es impar.

En términos generales, el alcance del estudio de series de tiempo mediante la ESDE se limita solo a la detección y distinción de ciclos presentes en las series consideradas; esto es, el cálculo de la ESDE no comprende hacer un pronóstico o predicción sobre su comportamiento futuro, como podría ser el caso mediante el uso del suavizamiento exponencial. Tampoco permite establecer una calendarización o ubicación en el tiempo del o de los ciclos que con ella sean detectados, lo cual sí es posible realizar tanto con la técnica de medias móviles como con la de suavizamiento exponencial; sin embargo, ambas tienen en su contra el hecho de que provocan un desfase de los puntos críticos de la serie original, por lo que la utilización del filtro de medias móviles puede traducirse en que los máximos y mínimos locales de alguno o de varios de los ciclos se manifiesten anticipada o retrasadamente respecto al momento en que hayan ocurrido,¹⁷ mientras que la serie obtenida al aplicar el filtro de suavizamiento exponencial reacciona con retraso ante los cambios en la serie temporal original; esto es, los máximos y los mínimos de la variable observada aparecerán retrasados en la variable transformada con ese filtro.¹⁸

No obstante lo anterior, pueden obtenerse muy buenos resultados al combinar ambos grupos de técnicas en el análisis de series de tiempo, pues mientras con la ESDE se puede determinar qué ciclos son notorios en las series consideradas, con mínimo riesgo de generar ciclos espurios, éstos pueden ser evidenciados empleando alguno de los filtros mencionados, siempre y cuando se determinen la “magnitud” y el “sentido” del desfase resultantes al aplicar dichos filtros.

El material presentado en este trabajo se divide, a grandes rasgos, como sigue. En el primer capítulo se hace una revisión de diversas técnicas de análisis estadístico de series de tiempo, orientadas principalmente a la construcción del *correlograma* de las series. Asimismo, se plantea la definición de serie de tiempo como una realización particular de un *proceso estocástico* dado y se introduce el importante concepto de *estacionariedad*.

En el capítulo segundo se plantea propiamente lo referente al análisis espectral de series de tiempo, es decir, en esta parte se exponen los conceptos del análisis espectral, como el *periodograma* y el *espectro muestral* de la serie, a partir de los cuales se deduce una definición adecuada para el *espectro de un proceso estocástico*.

¹⁶ *Ibidem*, p. C-12.

¹⁷ *Ibidem*, p. C-8.

¹⁸ *Ibidem*, p. C-15.

En el tercer capítulo se deduce la expresión final para el cálculo de la *estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)* a partir de una serie de tiempo. Abusando del lenguaje, puede decirse que la ESDE es una radiografía del fenómeno o proceso estocástico reflejado en la serie temporal estudiada mediante la cual puede estimarse, con cierto nivel de confianza, la naturaleza cíclica del mismo; esto es, la ESDE permite saber qué tipo de ciclos explican en gran medida la variabilidad de las series o, dicho en otros términos, qué ciclos son sobresalientes en las mismas. Sin embargo, es posible que no todos los ciclos existentes en una serie sean detectados por la ESDE pues, como será argumentado posteriormente, la ESDE es una estimación de la varianza de la serie expresada como función de la frecuencia. Así, si el valor de la ESDE en cierta frecuencia es considerablemente alto, de manera que sobresalga entre el resto, querrá decir que la varianza de la serie original se explica en parte por un componente cíclico cuya recurrencia está dada por dicha frecuencia. Sin embargo, en la serie original bien puede haber componentes que aun cuando su carácter cíclico no deje lugar a dudas, su amplitud¹⁹ sea tan pequeña que prácticamente no contribuya en la varianza total, lo que impediría entonces que fuera notado mediante la ESDE. Otra posible causa para que un ciclo no sea detectado con esta técnica es que su recurrencia estadística en la serie sea tan pequeña o, dicho en otros términos, complete muy pocos ciclos dentro del periodo de tiempo observado, que su participación en la varianza de la serie sea más bien atribuida a cambios de carácter meramente aleatorio. Como ilustración de la técnica desarrollada en los dos capítulos anteriores, en este capítulo se resume en un algoritmo el procedimiento práctico para la obtención de la ESDE en el análisis de series temporales procurando, como es la intención en este caso, minimizar el grado de dificultad que implica dicho algoritmo para facilitar su comprensión y, eventualmente, su uso. De esta manera, para el cálculo de la ESDE sólo es necesario contar con una hoja de cálculo, como *Lotus* o *Excel*, y con un paquete econométrico, tal como *Econometric Views*.²⁰ Asimismo, en la sección final de este capítulo se aplica este método al análisis de la evolución de algunas economías capitalistas, en las cuales se verifica la presencia de ciclos cuyos periodos van de 2.5 a 12.5 años, correspondientes, tal vez, a los ciclos Kitchin y los Juglar, respectivamente, o, en el caso de los últimos, a los *ciclos marxistas de reposición de capital*. Estos resultados son posteriormente considerados y, en la medida de lo posible, interpretados en la parte dedicada a las conclusiones resultantes de aplicar este método en el análisis del comportamiento cíclico del desarrollo de algunas economías capitalistas.

Finalmente, se incluye un apéndice del segundo capítulo sobre el análisis de Fourier, un anexo estadístico sobre las aplicaciones del tercer capítulo, así como la bibliografía consultada para la elaboración de este trabajo.

¹⁹ La *amplitud* de un ciclo se define como la diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo del ciclo.

²⁰ Existe también un programa computacional de análisis de series de tiempo, llamado *Chaos Data Analyzer*, que contiene un criterio de análisis, llamado *Dominant Frequencies*, que proporciona resultados equivalentes a los de la ESDE

CAPÍTULO 1. SERIES DE TIEMPO

En este primer capítulo se abordarán algunos de los conceptos de probabilidad y estadística más importantes para el análisis estadístico que deberá realizarse sobre las series previo al análisis espectral de las mismas.

Para tal fin, en la sección 1.1 se define a las series de tiempo como realizaciones de procesos estocásticos. En la sección 1.2 se realiza la importancia de buscar que la serie estudiada sea *estacionaria* o, dicho en otros términos, que se encuentre en cierto estado de equilibrio estadístico que permita suponer que los elementos que caracterizan a la serie, como lo son la media, la varianza y las autocovarianzas, serán constantes a lo largo del tiempo. Por último, las funciones de autocovarianza y autocorrelación, así como algunas de sus propiedades, son presentadas en la sección 1.3.

Con el fin de facilitar la comprensión de los conceptos introducidos a partir de este momento, éstos serán ilustrados con ejemplos reales así como simulados mediante modelos específicos de procesos estocásticos, en particular, el análisis del proceso autorregresivo de segundo orden, AR(2), se ha escogido como una ilustración frecuente a lo largo de este trabajo pues sus características, como se verá más adelante, lo hacen ser un ejemplo adecuado para fines didácticos y expositivos.

1.1 SERIE DE TIEMPO

1.1.1 Definición.

Históricamente, fue a partir del siglo XIX cuando resultó notorio el interés por estudiar el comportamiento de una o más variables económicas, como los precios o el nivel de producto generado por alguna rama, de las cuales se llevaban registros cuantitativos, que al estar asociados con instantes particulares en el tiempo contaban con un orden natural debido a su carácter cronológico. A tales registros se les conoce como series económicas o series de tiempo y fue principalmente el estudio de estas series lo que dio lugar al planteamiento de hipótesis sobre la existencia de "ciclos" de diferente naturaleza y duración.¹ Así que una primera definición de carácter histórico de serie de tiempo consiste en asociarla con una colección de datos cuantitativos ordenados cronológicamente y cuyo estudio sugirió la existencia de ciclos con distintas características y duraciones en la evolución de la economía capitalista.

¹ J. Fernández, *op cit.*, p. B-4

Si bien la anterior definición proporciona una descripción clara de serie de tiempo, ésta no es suficiente pues no considera el carácter aleatorio o fluctuante de los datos que la conforman, lo cual se manifiesta, entre otras cosas, en que aun cuando se conozca, por ejemplo, la magnitud del producto agrícola obtenido, digamos que desde 1800 hasta el momento actual, no sería posible determinar con exactitud su valor futuro, en general, a partir de una serie dada no es posible predecir con total precisión los datos siguientes o, mejor dicho, el comportamiento futuro del fenómeno que generó dicha serie. Lo anterior hace necesaria otra definición de serie de tiempo: una serie de tiempo puede pensarse como una función $x(t)$ definida en un número finito de puntos con propiedades aleatorias e incluso fluctuantes. Si se considera además que el conjunto de datos que conforma la serie es solo uno de los muchos que se podrían obtener², es decir, si se asocia cada t de algún intervalo de tiempo $T=(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ con una variable aleatoria $x(t)$ y una función de distribución de probabilidades $f_{dp_x(x)}$ ³, la serie queda entonces descrita por un conjunto ordenado de variables aleatorias $\{x(t)\}$. A dicho conjunto se le llama *proceso estocástico*, concepto que será tratado a continuación. Así, *una serie de tiempo queda formalmente definida como una realización de un proceso estocástico*

Proceso estocástico. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad⁴ y sea T un conjunto numerable de índices. Entonces, un proceso estocástico es una función $X(t, \omega)$ real definida en $T \times \Omega$ tal que para cada t fija, $X(t, \omega)$ es una variable sobre el espacio (Ω, \mathcal{F}, P) . La función $X(t, \omega)$ es generalmente escrita como $X_t(\omega)$ o, simplemente, X_t .⁵

Para cada ω fijo, $X(t, \omega)$ es una función de t . A dicha función se le llama *realización* o *función muestral*. Así, si se observa la gráfica de alguna serie tal como el producto interno bruto o el índice de precios al consumidor es importante tener en mente que conceptualmente se está analizando la gráfica de $X(t, \omega)$ para alguna ω fija.

² Por ejemplo, en el caso del nivel de producto mencionado antes, se pudieron haber obtenido diversas series, de acuerdo con el momento preciso de 1820 en que se hubiera comenzado el registro.

³ Formalmente, una *variable aleatoria* X no es ni "variable" ni "aleatoria" sino que es una función que toma valores reales, definida en un espacio muestral Ω , tal que el conjunto $\{\omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. A la función $F_X(x) = P(\{\omega, X(\omega) \leq x\})$ se le llama *función de distribución* de la variable aleatoria X .

⁴ Ω es un espacio muestral; \mathcal{F} es una sigma-algebra, y P una función definida sobre \mathcal{F} que satisface los siguientes tres axiomas

1. $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Si A_1, A_2, \dots, A_n es una familia numerable de \mathcal{F} y $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$,

$$\text{entonces } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

⁵ W. A. Fuller 1976, pp. 1-3.

Si el conjunto de índices, T , contuviera un único elemento, el proceso estocástico sería una sola variable aleatoria y por tanto la función de distribución del proceso quedaría definida. Sin embargo, para procesos estocásticos con más de una variable es necesario considerar la *función de distribución conjunta* correspondiente.

Es importante aclarar que aun cuando se trata, como en este caso, de un análisis univariante pues el interés recae sobre la "historia" de una sola variable económica (independientemente de que ésta fuera una variable agregada como el PIB), cada dato de la serie representa el valor de una variable aleatoria en ese instante por lo que se requiere de la distribución conjunta de las variables aleatorias asociadas con la serie para caracterizar completamente al proceso que generó el conjunto de datos sobre la "variable" económica en estudio (en el caso del PIB, podría considerarse que el proceso correspondiente es el modo de producción capitalista industrial).

La **función de distribución conjunta** de un conjunto finito de variables aleatorias $\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}\}$ perteneciente a $\{X_t; t \in T\}$ se define como

$$F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}) = P\{\omega: X(t_1, \omega) \leq x_{t_1}, \dots, X(t_m, \omega) \leq x_{t_m}\} \quad (1.1)$$

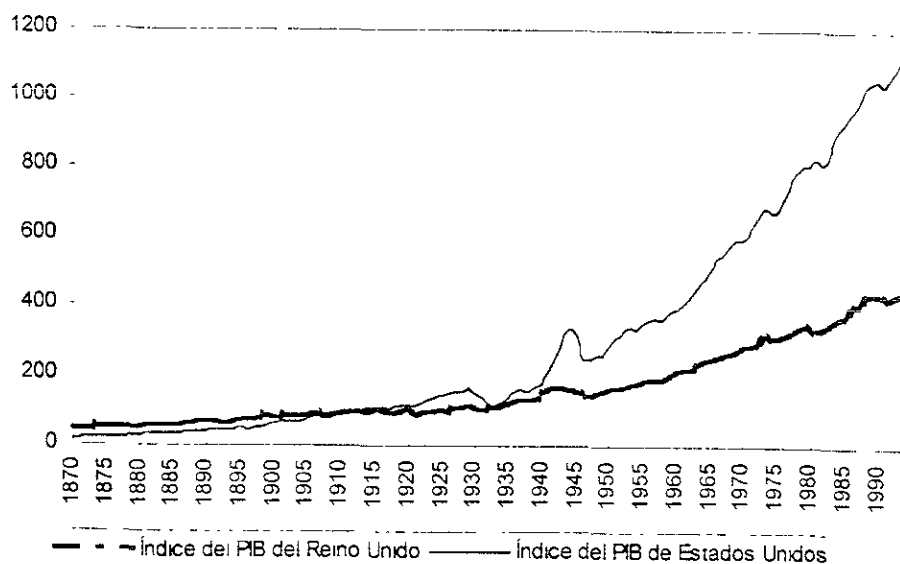
1.1.2 Ejemplos de realizaciones de procesos estocásticos

En la figura 1.1 se muestran las series de los índices del PIB de Estados Unidos y el Reino Unido para el mismo periodo de tiempo. *Ambas pueden considerarse como realizaciones del mismo proceso estocástico pues provienen de países en los cuales el desarrollo del capitalismo industrial ha sido similar*⁶ Así, siguiendo esta lógica, no tendría sentido comparar el PIB de México o Brasil con el de Estados Unidos y, en general, el de países del centro con los de la periferia, sino que lo razonable sería suponer que las series de los países periféricos corresponden a un proceso distinto al de los del centro, dadas las diferencias de surgimiento y evolución del capitalismo entre ambos grupos.

⁶ Considérese así aun cuando, como es sabido, en Estados Unidos el capitalismo es llevado por los conquistadores/colonizadores y en el Reino Unido 'nace de sus propias entrañas' en lo que se considera la forma clásica.

FIGURA 1.1

Índices del PIB de Estados Unidos y El Reino Unido de 1871 a 1994



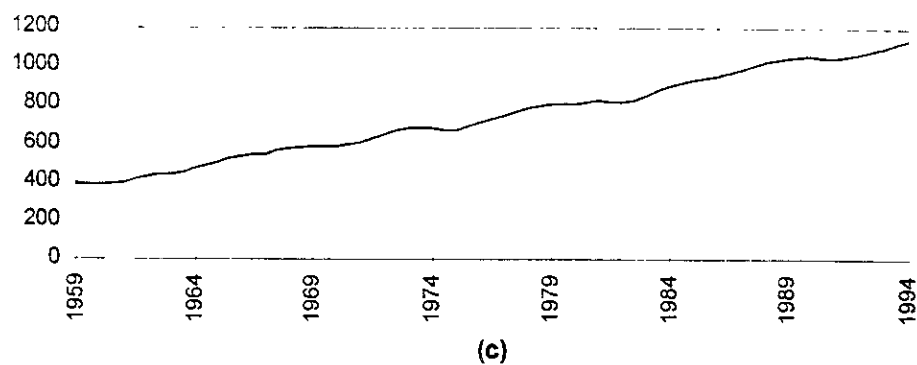
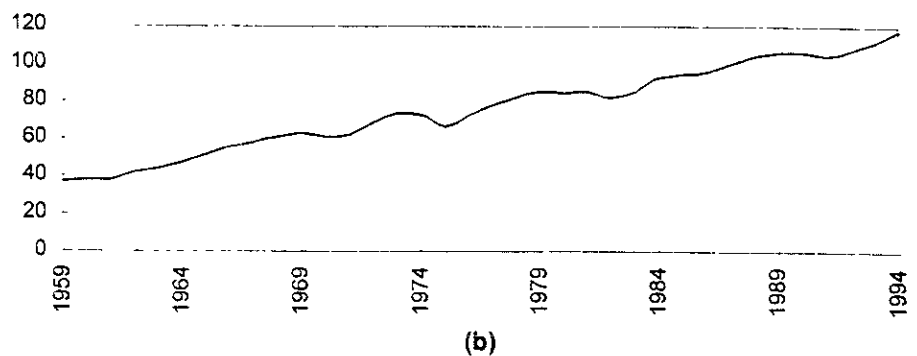
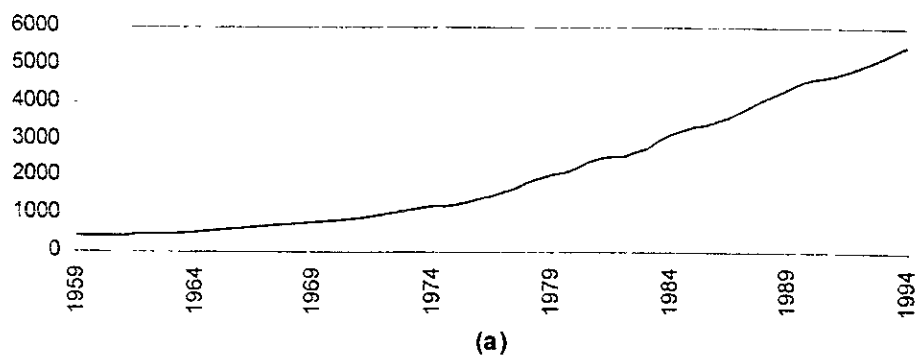
Fuente: Elaboraciones propias a partir de los datos de A. Maddison, 1997, pp. 215- 217.

Como puede apreciarse, aun cuando ambas son consideradas como realizaciones del mismo proceso estocástico, su apariencia gráfica es distinta.

Asimismo, la forma particular del capitalismo en el interior de cada país puede ser considerada como un proceso estocástico que podría ser parcialmente descrito por las series económicas correspondientes, es decir, mediante realizaciones del proceso. Por ejemplo, en la figura 1.2 se muestran tres series de variables económicas de los Estados Unidos considerándolas, claro está, como *realizaciones del proceso capitalista estadounidense*.

FIGURA 1.2

Tres realizaciones del proceso capitalista estadounidense:
 (a) Ingreso Nacional (en millones de dólares corrientes) 1959-94
 (b) Índice de producción industrial total (1987=100), 1959-94
 (c) Índice del PIB (1913=100), 1959-1994



Fuentes: (a) y (b), Department of Commerce, Bureau of Economic Analysis; (c), A. Maddison, *op cit*, pp. 215-217.

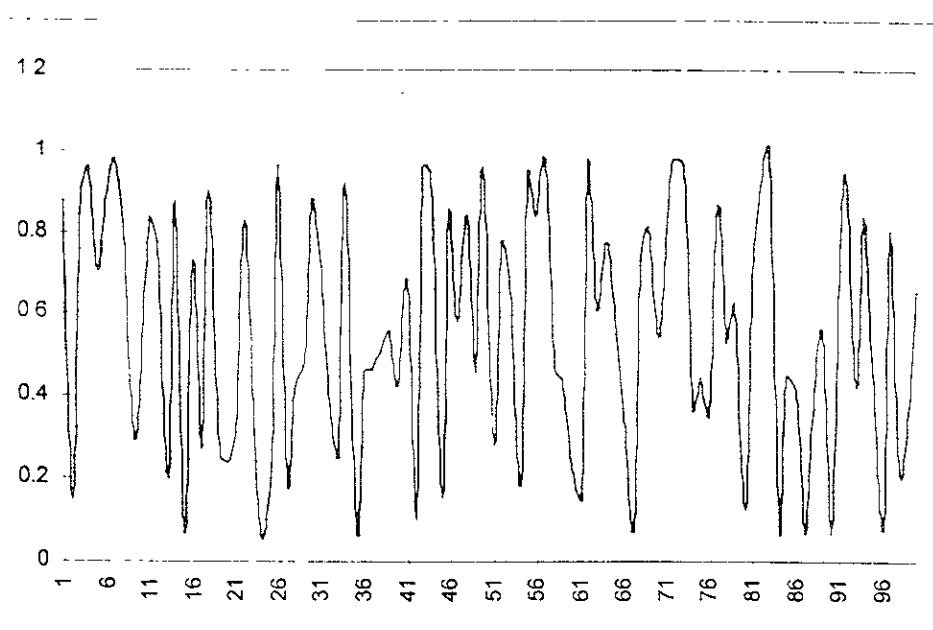
Ruido blanco.⁷ Una serie notoria es la formada por una secuencia de variables aleatorias independientes (no correlacionadas). $\{e_t, t \in Z\}$ ⁸, cada una con media cero y varianza σ^2 finita y positiva. Se dice entonces que e_t es una secuencia finita de variables aleatorias independientes normales $(0, \sigma^2)$.

La función de covarianza de $\{e_t\}$ es.

$$\gamma_e(h) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.2)$$

En la figura 1.3 se muestra una realización de cien datos de un proceso de ruido blanco. Este proceso será retomado y analizado en varias ocasiones en el presente trabajo debido a su singular importancia en el análisis de series de tiempo ya que con base en su análisis serán deducidos algunos resultados importantes del capítulo siguiente

FIGURA 1.3
Realización de tamaño cien de un proceso de ruido blanco



Fuente: Elaboración propia.

⁷ A las *series completamente aleatorias* generadas a partir de variables independientes idénticamente distribuidas se les considera frecuentemente como un modelo para el ruido en aplicaciones de la ingeniería, donde este es llamado *ruido blanco*. El calificativo de *blanco* tiene su origen en la analogía con la luz blanca y simplemente indica que todas las posibles oscilaciones periódicas están presentes con igual varianza. La gráfica de estas series tiende a confirmar visualmente lo anterior (Shumway, Robert H., 1988, p. 12).

⁸ Z representa al conjunto de los números enteros. $Z = \{ \dots, -1, 0, 1, \dots \}$.

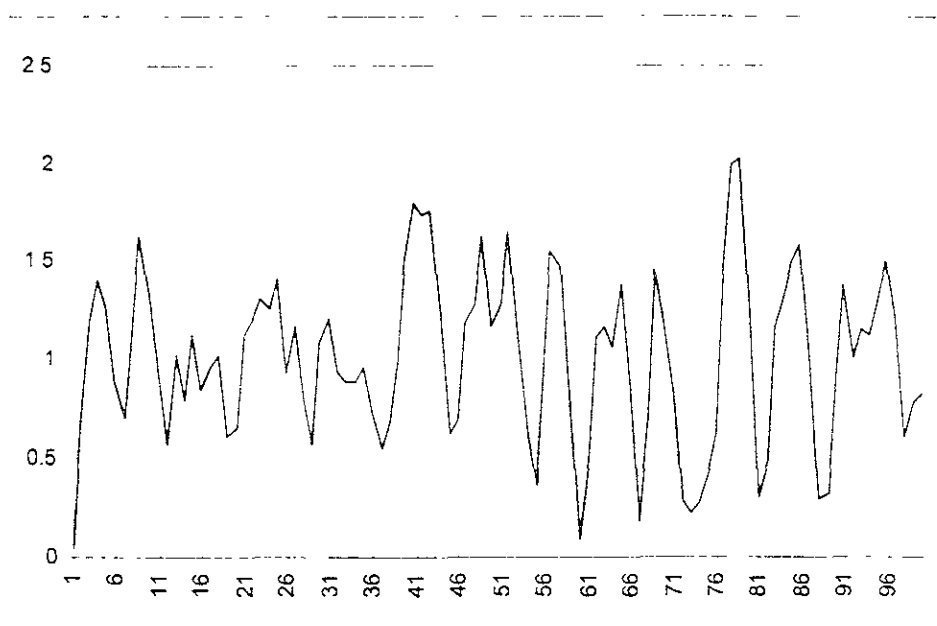
Un proceso autorregresivo de segundo orden, AR(2). Otro tipo de series muy utilizadas en la investigación económica son las generadas mediante procesos autorregresivos. Los modelos autorregresivos se basan en la idea de la dependencia de una observación cualquiera de la serie respecto a la anterior o las anteriores, más un término de error con las características de las perturbaciones aleatorias asociadas al proceso de ruido blanco.⁹ Así, por ejemplo, es razonable pensar que el valor actual de alguna variable como el PIB o el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, por mencionar algunas, está influenciado en mayor o menor medida por sus niveles observados en periodos anteriores.

La figura 1.4 muestra una realización de tamaño cien del proceso autorregresivo de segundo orden descrito por:

$$X_t = X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + Z_t \quad (1.3)$$

FIGURA 1.4

Realización de tamaño 100 del proceso autorregresivo descrito por (1.3)



Fuente. Elaboración propia de acuerdo con la ecuación (1.3)

⁹ Para una exposición completa y detallada de éstos modelos véase, por ejemplo, V. Guerrero, 1983.

1.2 ESTACIONARIEDAD

En general, las propiedades de un proceso estocástico dependen del tiempo, por lo que para analizarlo adecuadamente es necesario independizarlas primero de éste buscando alguna forma de "equilibrio" en el proceso (en este caso, en un sentido estadístico), de manera que sus propiedades estadísticas, reflejadas en las realizaciones o series de tiempo generadas por el mismo, sean constantes a lo largo de la serie y, por tanto, no varíen conforme lo haga el tiempo. Esta característica de estabilidad constituye la condición de estacionariedad:

"...En la práctica, muchas series de tiempo de variables económicas no son estacionarias. Por ejemplo, las economías de muchos países están en continuo desarrollo o crecimiento, causa por la cual los indicadores económicos típicos muestran una tendencia a lo largo del tiempo. Esta tendencia puede estar tanto en la media como en la varianza o en ambas. A tales series no estacionarias suele llamárseles evolutivas."¹⁰

1.2.1 La estacionariedad en sentido estricto

Una serie es *estrictamente estacionaria* si

$$F_{x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}) = F_{x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_m+h}}(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_m}), \quad (1.4)$$

esto es, si la función de distribución de probabilidades es la misma para cualquier conjunto de datos de la serie, de longitud n , que se utilice para calcularla, o sea si la distribución no varía ante desplazamientos en el tiempo por lo que será lo mismo calcularla con base en un conjunto de observaciones que comience en el momento t_1 , que en cualquier otro cuya primera observación sea en el tiempo t_1+h . Por consiguiente, el valor de los momentos de cualquier orden de ésta función será el mismo para todo segmento de la serie, de tamaño fijo, que se utilice para evaluarlos sin importar cuáles sean los datos inicial y final de tales segmentos; así, por ejemplo, el valor medio, la varianza y la covarianza de un proceso estacionario serán constantes a lo largo de todo el horizonte temporal.

Una serie de tiempo queda completamente definida, en un sentido probabilístico, si se conoce la función de distribución acumulativa para cualquier conjunto de variables aleatorias. Sin embargo, como en la mayoría de las situaciones prácticas solo se cuenta con una o pocas realizaciones del proceso que se esté analizando, no es posible conocer la forma de la función de distribución, por lo que es necesario establecer condiciones menos restrictivas de estacionariedad.

¹⁰ W. Fuller, *op cit*, p.4

1.2.2 La estacionariedad en sentido amplio

Cuando se considera que la distribución de probabilidad que caracteriza al proceso estocástico que genera la serie temporal estudiada es una *distribución normal* es entonces suficiente con considerar la media, μ y la función de autocovarianza, $\gamma(h)$, para caracterizar una serie estacionaria: si el proceso se supone normal, la función de distribución de probabilidad está completamente caracterizada por su media y su varianza¹¹ Bajo este supuesto, se define la *estacionariedad en sentido amplio*, con base solo en los primeros dos momentos estadísticos.

Un proceso estocástico será estacionario en sentido amplio si se cumplen las siguientes tres condiciones:¹²

(a) La esperanza matemática de la variable es finita y permanece constante a lo largo del tiempo:

$$E(X_t) = E(X_{t-k}) = E(X_{t+k}) = \mu < \infty, \forall t, k \in R \quad (1.5)$$

Como se observa en esta ecuación, la media del proceso, μ , carece del subíndice t , reflejando con ello su constancia a lo largo de todo el horizonte temporal.

(b) La varianza de la variable es finita y permanece constante a lo largo del tiempo:

$$Var(X) \equiv \sigma_X^2 \equiv \gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = E(X_{t-k} - \mu)^2 = E(X_{t+k} - \mu)^2 < \infty, \forall t \in R \quad (1.6)$$

(c) La autocovarianza de la variable, es decir, la covarianza entre observaciones de la misma variable depende únicamente de qué tan separadas se encuentran [las observaciones] en el tiempo, y no del periodo en que se presentan

$$Cov(X_t, X_{t-k}) \equiv \gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] < \infty, \forall t \in R \quad (1.7)$$

Más aún,

$$\gamma_{-k} = Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k \quad (1.8)$$

Dicho en otros términos, la autocovarianza de la variable X_t depende solo del valor de k , pero no del valor de t .

¹¹ J. Fernandez, *op cit.*, p. D-8

¹² *Ibidem*, pp D-8, D-9

Obsérvese que las tres condiciones de estacionariedad en sentido amplio quedan resumidas en la última ya que la media del proceso, μ , es constante y, si $k=0$, la autocovarianza es la varianza del proceso

1.2.3 Estacionariedad en sentido homogéneo

La estacionariedad en sentido homogéneo, también conocida como estacionariedad de primer orden o en media, es una condición todavía más débil que las anteriores: en este caso, se dice que un proceso es estacionario de primer orden si:

$$E(X_t) = \mu, \forall t \quad (1.9)$$

Nótese que solo se está exigiendo que la esperanza matemática de la variable sea constante a lo largo del tiempo sin imponer condición alguna sobre los segundos momentos respecto a la media (la varianza y la autocovarianza):

“...De ser cierta, la estacionariedad en sentido homogéneo implica que los valores que va tomando la serie temporal oscilan aleatoriamente alrededor de su valor medio; de ser así, esta condición se traducirá en que la serie de observaciones carece de tendencia, razón por la cual se dice que el proceso es estacionario o “estable” en media o nivel.

“Pero obsérvese que la condición no impone ninguna restricción sobre la varianza de las observaciones; esto es, el proceso puede ser estacionario a pesar de que las desviaciones respecto a ese valor medio no muestren necesariamente una dispersión constante en el tiempo.”¹³

1.2.4 Ejemplos de series estacionarias y no estacionarias en los sentidos antes definidos

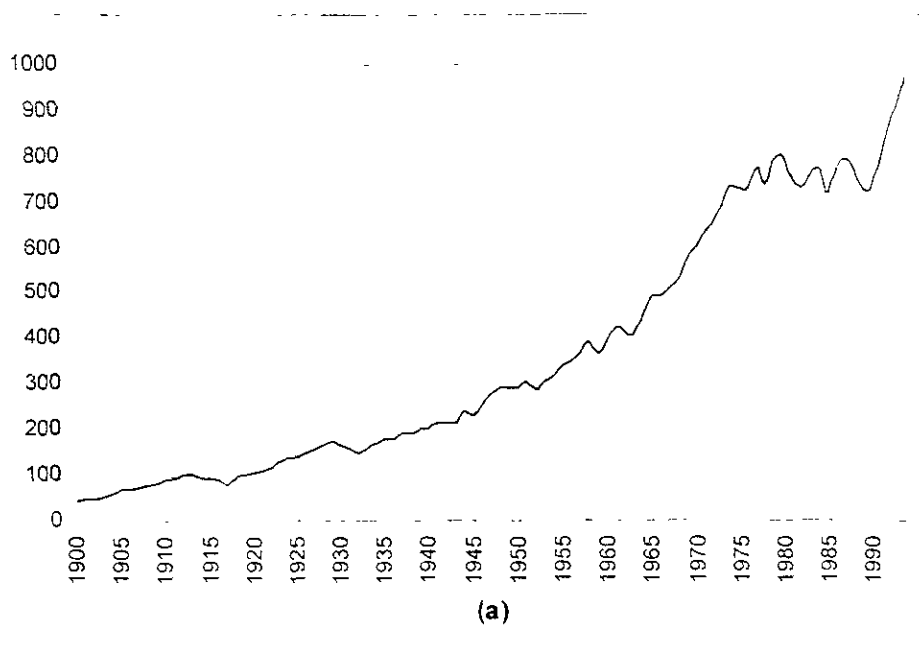
La serie de la figura 1 5a es claramente no estacionaria en la media pues muestra una tendencia obvia atribuible al crecimiento económico; sin embargo, la serie de la figura 1 5b, obtenida a partir de la primera, sí parece ser estacionaria tanto en media como en varianza (estacionaria en sentido amplio)

Hasta aquí, los juicios referentes a la estacionariedad o no (y en qué sentido) de las series mostradas son resultado de la simple inspección visual, pero posteriormente será probada de manera más formal la estacionariedad en sentido amplio (en media y varianza) de las series que se analicen pues es un requerimiento del análisis espectral a desarrollar sobre las mismas. Como en general las series de tiempo y, en particular, las series económicas no cumplen con dicha condición, una buena parte del análisis práctico de éstas está relacionado con transformaciones

que permitan extraer una serie estacionaria a partir de una no estacionaria. Por ejemplo en el caso de las series económicas, la transformación más utilizada es la que resulta de calcular sus tasas de crecimiento.

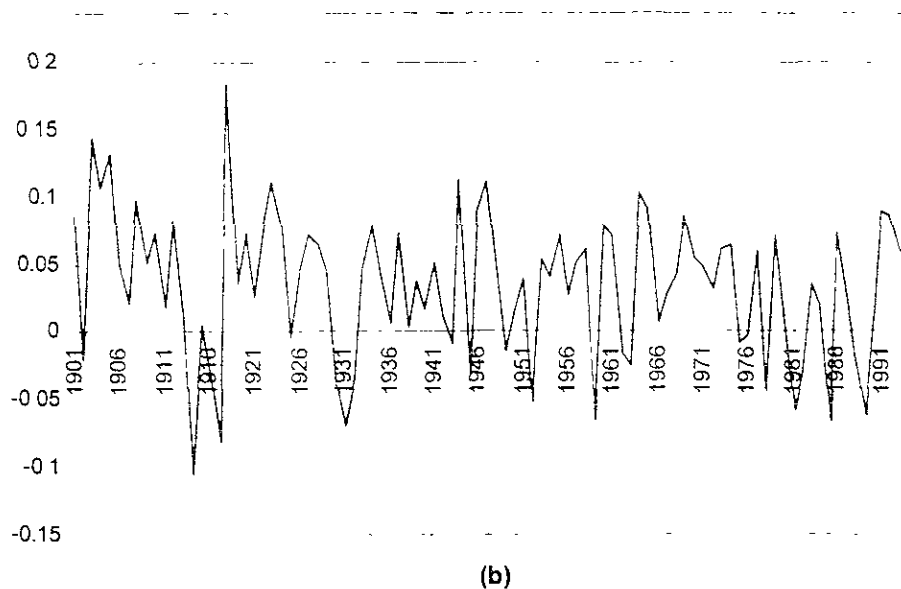
Una de las pruebas más recientes y utilizadas para determinar si una serie de tiempo es o no estacionaria de segundo orden es la llamada *prueba de Dickey-Fuller ampliada*, misma que será utilizada en el capítulo cuatro de este trabajo.¹⁴

FIGURA 1.5
(a) Índice del PIB de Argentina 1922-94
(b) Tasa de crecimiento del PIB de Argentina 1923-94



¹³ *Ibidem*, p. D-14

¹⁴ Para una descripción de esta prueba vease, por ejemplo, D. M. Lilien (de.), 1994.



Fuente: Elaboraciones propias a partir de los datos de A. Maddison, *op. cit.*, pp. 215-217

1.3 LAS FUNCIONES DE AUTOCOVARIANZA Y AUTOCORRELACIÓN

1.3.1 Definición y propiedades

La autocovarianza, y en general la covarianza, presenta algunas dificultades de interpretación porque su unidad de medida es el cuadrado de las unidades de la variable original, razón por la cual cuando se desean comparar, por ejemplo, las propiedades básicas de dos series de tiempo, es difícil decidir si la covarianza de una es "mayor" o "menor" que la covarianza de la otra pues, además, la escala del tiempo en que fueron tomadas las observaciones puede ser diferente en cada serie.

Para ilustrar lo anterior, supóngase que se tienen dos realizaciones de tamaño diez del mismo proceso estocástico, por ejemplo, el número de artículos defectuosos en una línea de producción, y que la separación entre las observaciones de la primera serie es de una hora y en la segunda serie de un día. Los datos hipotéticos se muestran en el cuadro 2.1 así como las estimaciones muestrales de la media y de las autocovarianzas y autocorrelaciones para el rezago $k=1$.

CUADRO 1.1

Número de artículos defectuosos de una línea de producción

t	serie 1 (unidades por hora)	serie 2 (unidades por día)
1	3	14
2	5	27
3	2	7
4	8	17
5	2	9
6	2	11
7	5	9
8	4	27
9	5	11
10	3	9
valor medio	3.9	14.1
autocovarianza para el rezago k=1	-1.791 (u/hora) ²	-18.661 (u/día) ²
autocorrelación para el rezago k=1	-0.55811779	-0.40314114

Fuente: Elaboración propia.

Como puede verse en el cuadro, si se ignoran las unidades de medida de cada serie, el valor de la autocovarianza resulta mayor, en valor absoluto,¹⁵ en la segunda serie que en la primera pero, procediendo de la manera correcta, es decir, dividiendo a cada autocovarianza entre la varianza muestral correspondiente, se obtienen las autocorrelaciones que son perfectamente comparables pues son independientes de la escala de medida utilizada en cada caso. Entonces, a partir de las autocorrelaciones puede concluirse que el grado de dependencia entre los datos de las series para el rezago de k=1 unidad de tiempo es menor en la segunda serie que en la primera y no lo contrario, como parecen indicarlo las autocovarianzas.

¹⁵ La autocovarianza en el rezago k=1 de un conjunto de n datos, {x(1), x(2), ..., x(n)}, se calculó como

$$Cov(k) = \sum_{t=1}^{n-1} (x(t) - \bar{x})(x(t+k) - \bar{x})$$

lo cual puede dar resultados negativos para algunos valores de k

El ejemplo anterior ilustra una de las razones principales de que se prefiera trabajar con la autocorrelación en lugar de la autocovarianza pues por la forma de calcularla, aquella no está influenciada por las unidades de medida o, mejor dicho, es adimensional.¹⁶

Así, la función de autocorrelación de una serie de tiempo estacionaria¹⁷ denotada por $\rho(h)$, se define como:

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}. \quad (1.10)$$

En la ecuación anterior se observa que si $h=0$, entonces,

$$\rho(0) = \frac{\gamma(0)}{\gamma(0)} = 1, \quad (1.11)$$

por lo que la función de autocorrelación es la función de autocovarianza normalizada a ser uno en $h=0$

Las funciones de autocovarianza y autocorrelación de una serie de tiempo estacionaria poseen varias características importantes que es conveniente resaltar ahora. Recuerdese que una función $f(x)$, definida para toda x que pertenezca a algún subconjunto particular de números reales, se dice que es *semidefinida positiva* si satisface que,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k f(t_j - t_k) \geq 0, \forall (a_1, a_2, \dots, a_n), (t_1, t_2, \dots, t_n) \in R \quad (1.12)$$

Los teoremas siguientes tienen como finalidad la deducción de una de las propiedades más útiles y conocidas de la función de autocorrelación: sus valores límite.¹⁸

¹⁶ No obstante, cuando sólo se analice una serie o bien cuando las series a comparar tengan iguales unidades de medida bastará con la información proporcionada por las autocovarianzas y los resultados cualitativos que se obtengan serán equivalentes a los obtenidos si se optara por usar las autocorrelaciones

¹⁷ Cuando la serie no es estacionaria, la función de autocorrelación se expresa como

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E[(X(t_1) - \mu(t_1))(X(t_2) - \mu(t_2))]}{\sqrt{(X(t_1) - \mu(t_1))} \sqrt{(X(t_2) - \mu(t_2))}} = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}.$$

Como puede observarse, la función de autocorrelación es el cociente entre la función de autocovarianza y el producto de las desviaciones estándar en los tiempos t_1 y t_2 .

¹⁸ Fuller, W. A., *op cit.*, pp 7-9

Teorema. La función de covarianza de una serie de tiempo estacionaria $\{X_t, t \in T\}$ es semidefinida positiva

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $E\{X_t\}=0$. Sean $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in T$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$, y $\gamma(t_j - t_k) \geq 0$ la covarianza entre X_{t_j} y X_{t_k} . Se sabe además que la varianza de una variable aleatoria, cuando está definida, es no negativa. Entonces,

$$0 \leq \text{Var} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j X_{t_j} \right\} = E \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k X_{t_j} X_{t_k} \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma(t_j - t_k) \right\}, \quad (1.13)$$

con lo que queda demostrado el teorema

Si se evalúa la ecuación (1.12) para $n=2$, se tiene que

$$0 \leq a_1^2 \gamma(0) + a_2^2 \gamma(0) + 2a_1 a_2 \gamma(t_1 - t_2), \quad (1.14)$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) \geq -a_1 a_2 \frac{\gamma(t_1 - t_2)}{\gamma(0)}. \quad (1.15)$$

Para $t_1 - t_2 = h$ y con $|a_i|=1$ se obtiene la tan conocida propiedad de las autocorrelaciones:

$$|\rho| \leq 1. \quad (1.16)$$

El siguiente teorema se refiere a la paridad de la función de covarianza

Teorema. La función de covarianza de una serie de tiempo estacionaria con valores reales es una función par de h . Esto es, $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

Demostración. Supóngase, sin pérdida de generalidad, que $E\{X_t\}=0$. Por la hipótesis de estacionariedad,

$$E\{X_t, X_{t-h}\} = \gamma(h), \forall t, t+h \in T \quad (1.17)$$

donde T , como antes, denota al conjunto de índices. Por lo tanto, si se toma $t_0 = t-h$,

$$\gamma(h) = E\{X_{t_0}, X_{t_0+h}\} = E\{X_{t_1-h}, X_{t_1}\} = \gamma(-h). \quad (1.18)$$

con lo que queda demostrado el teorema

El aporte práctico de este teorema es que basta evaluar la función de covarianza para valores no negativos de h . Evidentemente, lo anterior se cumple también para la función de correlación.

1.3.2 La función de autocorrelación de un proceso autorregresivo de segundo orden

Sea

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + Z_t. \quad (1.19)$$

la expresión genérica de un proceso autorregresivo de segundo orden. Este proceso resulta ser estacionario¹⁹ por lo que queda completamente descrito por su función de autocovarianza o, equivalentemente, por su función de autocorrelación. Dichas funciones se expresan como sigue:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 + \sigma_Z^2, & \text{si } k = 0 \\ \alpha_1 \gamma_{k-1} + \alpha_2 \gamma_{k-2}, & \text{si } k > 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

De aquí, si $\gamma_0 \neq 0$, se pueden dividir las autocovarianzas γ_1 y γ_2 entre γ_0 para obtener las llamadas ecuaciones de Yule-Walker

$$\rho_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 \quad (1.21)$$

y

$$\rho_2 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \quad (1.22)$$

que permiten obtener los valores de ρ_1 y ρ_2 en función de los parámetros autorregresivos α_1 y α_2 .

¹⁹ Para una exposición detallada de este resultado y los posteriores sobre procesos autorregresivos de segundo orden ver, por ejemplo, V. Guerrero, *op cit.*, pp. 8-14

En general la función de autocorrelación satisface

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2}, \quad k \geq 3. \quad (1.23)$$

De las ecuaciones de Yule-Walker se sigue que

$$\alpha_1 = \rho_1 \frac{1 - \rho_2}{1 - \rho_1^2} \quad (1.24)$$

y

$$\alpha_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (1.25)$$

de manera que al sustituir los valores de las autocorrelaciones ρ_1 y ρ_2 por sus valores estimados, se obtienen estimaciones para los parámetros α_1 y α_2 . Además, al resolver las ecuaciones de Yule-Walker para ρ_1 y ρ_2 se obtiene que

$$\rho_1 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2} \quad (1.26)$$

y

$$\rho_2 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1 - \alpha_2}. \quad (1.27)$$

A modo de ejemplo, retómese el proceso autorregresivo mostrado en la figura 2.4 para el cual

$$X_t = X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + Z_t \quad (1.28)$$

en este ejemplo, $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=-0.5$, y las dos primeras autocorrelaciones son $\rho_1=0.666$ y $\rho_2=0.166$; las siguientes autocorrelaciones pueden calcularse de manera iterativa mediante la ecuación (1.23) y así se obtienen los valores mostrados en la figura 1.5.

FIGURA 1.5

Función de autocorrelación teórica de un proceso autorregresivo de segundo orden con parámetros autorregresivos $\alpha_1=1$ y $\alpha_2=-0.5$; $k=30$



Fuente: Elaboración propia con datos generados de acuerdo con la ecuación (1.23)

En la práctica, como ya se ha mencionado antes, no suele ser posible conocer exactamente las funciones de covarianza y, por consiguiente, las de correlación, por lo que es necesario estimarlas a partir de registros finitos que en la mayoría de las situaciones son la única información sobre el proceso de que se dispone

1.3.3 Estimadores de la autocovarianza

El estimador de la función de autocovarianza para el caso de series de tiempo continuas es

$$c_{XX}(u) = \begin{cases} \frac{1}{N} \int_0^{N-u} (X(t) - \bar{X})(X(t+u) - \bar{X}) dt, & 0 \leq |u| \leq N \\ 0, & |u| > N \end{cases} \quad (1.29)$$

donde

u : rezago;

N : longitud de la serie.

Y el estimador más utilizado para la función de autocovarianza de una muestra $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ de una serie de tiempo discreta es

$$c_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

con

N : número de datos de la muestra,

$$\bar{x}: \text{media muestral}; \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t. \quad (1.30)$$

Los estimadores de la función de autocorrelación se deducen a partir de los de las autocovarianzas; así que el estimador de la autocorrelación para el caso continuo es

$$r_{XX}(u) = \frac{c_{YY}(u)}{c_{YY}(0)}, \quad (1.31)$$

donde $c_{xx}(0)$ es el estimador de la varianza; y para el caso discreto

$$r_{xx}(k) = \frac{c_{xx}(k)}{c_{xx}(0)}. \quad (1.32)$$

Para deducir el **valor esperado** de (1.30) supóngase que $x(t)$ es una realización de un proceso estocástico $X(t)$ Normal con media cero y varianza σ^2 lo cual puede ser expresado como

$$E(X(t)) = 0. \quad (1.33)$$

y

$$\text{Cov}(X(t), X(t+u)) = \gamma_{xx}(u), \quad (1.34)$$

donde

$$\text{Cov}(X(t), X(t)) = \gamma_{XX}(0) = \sigma^2.$$

Entonces, la esperanza de $c_{XX}(u)$ es, por (1.34)

$$E[c_{XX}(u)] = E\left[\frac{1}{N} \int_0^{N-u} X(t)X(t+u)dt\right] = \frac{1}{N} \int_0^{N-u} E[X(t)X(t+u)]dt$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^{N-u} \text{Cov}[X(t)X(t+u)]dt = \frac{1}{N} \int_0^{N-u} \gamma_{XX}(u)dt = \frac{1}{N} \gamma_{XX}(u)[t]_0^{N-u}$$

$$= \frac{1}{N} \gamma_{XX}(u)(N-u) = \begin{cases} \gamma_{XX}(u)\left(1 - \frac{u}{N}\right), & 0 \leq |u| \leq N \\ 0, & |u| > N. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E[c_{XX}(u)] = \begin{cases} \gamma_{XX}(u)\left(1 - \frac{u}{N}\right), & 0 \leq |u| \leq N \\ 0, & |u| > N \end{cases} \quad (1.35)$$

Debido a que estos estimadores se calculan con base en una realización del proceso estocástico que esté siendo investigado, tiene sentido preguntarse bajo qué condiciones es posible inferir sobre el mismo a partir de la sola realización con que se cuenta: "... Si se supone que cada realización es infinitamente larga (en el tiempo), el teorema ergódico establece que para procesos estocásticos, el promedio del conjunto (de medias, varianzas, momentos, momentos cruzados, etcétera muestrales) en cualquier punto es igual al correspondiente promedio en el tiempo de cualquiera de las series."²⁰

Entonces, cuando se satisface el supuesto de ergodicidad del proceso, pueden obtenerse el primero y segundo momentos a partir de una sola realización

²⁰ J. M. Gottman, pp. 62-65, citado en J. Fernández, *op cit*, p D-12.

Una condición necesaria de la ergodicidad es que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0. \quad (1.36)$$

lo cual en principio puede subonerse que se satisface para las series económicas pues es razonable pensar que entre mayor sea el tiempo que medie entre dos observaciones, la "influencia" de la primera en la segunda será prácticamente nula

Por último, es importante tener en cuenta que la información sobre el proceso estudiado inferida a partir de la apariencia visual de la función de autocorrelación puede ser incorrecta, especialmente si corresponde a series cortas, por lo que dicha información será complementada con la que se deduzca del espectro de la serie que como será visto en el capítulo siguiente, es una manera mas adecuada de describir una serie temporal

CAPÍTULO 2. EL ANÁLISIS ESPECTRAL DE SERIES DE TIEMPO

El concepto de regularidad o periodicidad en series de tiempo es de fundamental interés pues proporciona una manera de formalizar las nociones de dependencia o correlación entre puntos adyacentes. Por ejemplo, la generalidad de las series económicas ilustran una situación en la cual no es evidente si la variabilidad de los datos puede atribuirse solamente a un tipo de variación cíclica o a varios, aunque pueden obtenerse indicaciones preliminares sobre el número de diferentes clases de oscilaciones y de la magnitud de sus contribuciones a la varianza total de la serie mediante el análisis visual. Sin embargo, se necesita una identificación más precisa así como una evaluación de la significancia estadística de estas contribuciones. Ese es el tipo de cuestiones que pueden ser mejor respondidas utilizando las técnicas del *análisis espectral* ¹

Uno de los objetivos de este trabajo es analizar series de tiempo obtenidas de variables económicas con el propósito de detectar en ellas la presencia de fluctuaciones cíclicas y las periodicidades aproximadas de las mismas con el fin, de ser posible, de corroborar la existencia de ciclos en la evolución de la economía capitalista.

Para tal fin, en este capítulo será desarrollada una herramienta útil en la detección de componentes cíclicos en una serie temporal observada y, en particular, en una serie económica.² Dicha herramienta, llamada *estimador suavizado de la densidad espectral de la serie*, pertenece al *análisis espectral*, que comprende un conjunto de métodos que son considerados como propios del *dominio de la frecuencia*, pues describen las fluctuaciones presentes en una o más series en términos del comportamiento recurrente de los componentes de las mismas comparándolos con sinusoides de diversas frecuencias.

En términos generales, el análisis espectral reúne dos enfoques teóricos muy importantes: el análisis estadístico de series temporales y el análisis de Fourier. Lo referente al análisis estadístico necesario para desarrollar la técnica de análisis espectral que será presentada en este capítulo y contrastada empíricamente en el siguiente, fue expuesto ya en el capítulo 1. En cuanto al análisis de Fourier, aquí será solo mencionado pues no es el objeto de estudio central de este trabajo; no obstante lo anterior, en el apéndice correspondiente se resumen a grandes

¹ Shumway, R. H., *op cit*, p.47.

² En este punto es muy importante aclarar que es posible que dicha herramienta no detecte todos los ciclos presentes en la serie pues depende en gran medida de la relación entre el tamaño de ésta y la duración de los posibles ciclos el que estos puedan ser evidenciados mediante el procedimiento aquí propuesto; así, entre más veces sea abarcado el ciclo en la serie mejor será la detección del mismo. De esta manera, puede suceder que no sean mostrados, de haberlos, algunos de los componentes cíclicos si su periodo es muy grande con relación al tamaño de la serie. Entonces podría ocurrir que si se planteara por ejemplo la hipótesis de existencia de ciclos con duración aproximada entre 45 y 60 años y las series estudiadas solo abarcaran una o dos veces el periodo del ciclo, es muy probable que éstos no sean revelados por la técnica aquí empleada en cuyo caso, sin embargo, eso no sería razón suficiente para refutar la hipótesis de existencia de dichos ciclos.

rasgos las ideas del análisis de Fourier en que se basa el análisis espectral, aunque no está de más aclarar que el contenido del apéndice resultaría insuficiente si el objetivo de éste fuera dar a conocer y justificar, con la formalidad y suficiencia necesarias, el origen, aplicaciones, etcétera, de las técnicas de dicho análisis, por lo que su contenido se limita a una breve descripción del estudio de funciones que es posible realizar mediante los métodos de Fourier; con tal fin se presentan, y en la medida de lo posible se ilustra con ejemplos, conceptos tales como los de *serie y transformada de Fourier* y, con relación a la última y de gran importancia en cuanto a la mejor comprensión del material de este capítulo, el *espectro complejo de Fourier o espectro de líneas de una señal determinista* [del tiempo]

A grandes rasgos, se distinguen tres clases de análisis de series posibles mediante las técnicas de Fourier de acuerdo con las características del fenómeno que se pretenda estudiar, es decir, considerando si se trata de un proceso periódico, casi periódico o aperiódico. Sin embargo, cuando solo se cuenta con una única serie temporal del fenómeno estudiado, resulta una tarea realmente difícil, y en la mayoría de los casos poco factible, determinar con la precisión suficiente su naturaleza; es decir, no es posible afirmar con exactitud si la serie proviene de una función periódica o no pues podría suceder, por ejemplo, que a partir de la inspección visual de los datos se concluyera que la función o fenómeno correspondiente no es periódico cuando podría ser que completase un ciclo en un punto fuera del intervalo de tiempo comprendido por la serie o, por el contrario, completar un par de ciclos aparentes dentro del mismo y dejar de presentar tal patrón recurrente después de, digamos, tres o cinco veces la longitud de la serie. Además de lo anterior, debe decidirse si los datos pueden ser considerados como expresión única, aunque parcial si se trata de un registro finito, del fenómeno a estudiar o, por el contrario, solo como una realización de un proceso estocástico a partir de la cual no es posible deducir *a priori* las características intrínsecas del mismo.³ Por lo anterior, es conveniente entonces desarrollar un procedimiento que permita reconocer los patrones cíclicos en un fenómeno únicamente a partir de la o de las series disponibles, es decir, sin necesariamente saber de antemano si el proceso es o no periódico.

Con tal objeto, en las primeras secciones de este capítulo será tratado el concepto de *periodograma* para a partir de éste deducir la definición del *espectro de una señal*. Posteriormente, se plantean algunas modificaciones a la definición del espectro que consideren el carácter estocástico de ciertas series, como las económicas. Por último, se plantea un estimador para el *espectro teórico* a partir del *espectro muestral*, así como la construcción de intervalos de confianza para el espectro teórico.

³ Sin embargo, cuando se conoce con exactitud la naturaleza del fenómeno a estudiar, como es el caso de las funciones o procesos deterministas del tiempo, un análisis de tales procesos basado en los métodos de Fourier tratados en el apéndice resultara generalmente suficiente.

2.1 El espectro de una señal

Sea $x(t)$ una señal discreta observada en los instantes $t=-n\Delta, -(n-1)\Delta, \dots, (n-1)\Delta$; donde Δ es el espaciado entre las observaciones, esto es, se tiene un registro de $x(t)$ de longitud $N=2n$, formado por observaciones equidistantes en el tiempo. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\Delta=1$

Sean además $f_1=1/N$ y $f_k=k/N$, $k=1, 2, \dots, n$, las frecuencias *fundamental* y *armónicas* de $x(t)$, así, $f_1=1/N$ corresponderá a una función sinusoidal con periodo $T_1=N$ pues su recurrencia en la serie es de un ciclo cada N instantes. $f_2=2/N$, a otra sinusoidal con periodo $T_2=N/2$, y, por último, $f_n=n/N=n/2n=1/2$ corresponderá a un senoide con periodo $T_n=2$. Entonces, las fluctuaciones de mayor periodo que podrían detectarse en $x(t)$ serían aquellas que completaran un ciclo cada N unidades de tiempo y las de menor periodo las que cumplieran un ciclo cada dos unidades de tiempo. $f_n=1/2$ es llamada la *frecuencia de Nyquist*⁴ y es la frecuencia mas alta que puede ser detectada en una serie observada de tamaño N

Entonces, el *periodograma* o *espectro de líneas* de la señal $x(t)$ se define como⁵

$$P(f_k) = |X_k|^2 \quad (2.1)$$

donde

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{t=-n}^{n-1} x(t) e^{-i2\pi f_k t} \quad (2.2)$$

es la *transformada de Fourier discreta* de $x(t)$, o sea, X_k es la amplitud de los sinusoidales de $x(t)$ en las frecuencias armónicas f_k ⁶

Gráficamente, de acuerdo con la definición dada por (2.1), el periodograma está representado por los puntos de la forma $(f_k, |X_k|^2)$, $k=1, 2, \dots, n$, y muestra el cuadrado del valor absoluto de las amplitudes de los componentes sinusoidales de $x(t)$ correspondientes a las frecuencias armónicas f_k lo cual implica que si $x(t)$ contiene un componente de frecuencia distinto a las armónicas no será mostrado en el periodograma; así que entre mayor sea N , mejor será la detección de los sinusoidales pues la frecuencia fundamental se vuelve más pequeña y, por consiguiente aumenta el número de armónicas entre la frecuencia fundamental y la de Nyquist.

Así, por ejemplo, si se tiene una serie con cien datos, el componente de menor frecuencia que podría ser detectado en ella sería aquel con un periodo igual a cien unidades de tiempo (que

⁴ P. Bloomfield, 1976, p 27

⁵ *Ibidem* p 162.

corresponde a la frecuencia fundamental: $f_1=1/100$) y el de frecuencia mayor, uno cuya duración o periodo fuera de dos unidades de tiempo (correspondiente a la frecuencia de Nyquist $f_n=50/100=0.5$) También en dicha serie podrían detectarse fluctuaciones cíclicas cuya recurrencia fuera de dos ciclos cada 100 unidades de tiempo, tres ciclos cada 100 unidades de tiempo, . . . , 49 ciclos cada 100 unidades de tiempo correspondientes a las frecuencias armónicas $f_2=2/N$, $f_3=3/N$, . . . $f_{n-1}=49/100$, respectivamente. Esto implica que si en la serie existiera un componente cíclico cuyo periodo fuera de 56 años (considerando, por ejemplo, que los datos de la serie son anuales) éste no sería mostrado en el periodograma pues la frecuencia asociada con ese periodo, $1/56$, no corresponde a ninguna de las frecuencias armónicas de esa serie de 100 observaciones. Aun así, no todos los elementos detectados en la serie reflejarían el comportamiento del fenómeno observado porque no necesariamente todos ellos tienen recurrencia estadística de un segmento de la serie a otro, es decir, si se duplicara el registro y se calculara un periodograma para los primeros 100 datos y otro para los restantes bien podría suceder que las conclusiones obtenidas a partir de cada uno difirieran entre sí o, lo que es lo mismo, que en uno se hubieran detectado componentes cíclicos que en el otro no aparecieran. Lo anterior sugiere que el periodograma no es la mejor herramienta para detectar la naturaleza cíclica de algún fenómeno o proceso a partir de una serie, pues puede mostrar elementos que solo son "cíclicos" dentro del periodo de tiempo observado y que no estén presentes en series más largas.

2.1.1 Definición del espectro de una señal

El espectro de una serie empírica se define entonces como los aspectos del periodograma que muestran regularidad estadística de un segmento de la serie a otro, es decir, que sean característicos de la serie considerada en su totalidad y, por consiguiente, del proceso que la generó.⁷

El espectro, $\Gamma(f)$, de $x(t)$ se define como⁸

$$\Gamma(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} N |X_k|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} NP(f_k); \quad -\infty < f < \infty. \quad (2.3)$$

Esto es, el espectro de una señal $x(t)$ se define como el límite, cuando el número de observaciones, N , tiende a infinito, del periodograma de $x(t)$ multiplicado por N ; a $NP(f)$ se le llama *el espectro muestral de $x(t)$* y se denota como $C_{xx}(f)$ quedando expresado como

⁶ Ver el apéndice de este capítulo

⁷ P. Bloomfield, *op cit.* pp. 181 y 187

⁸ Jenkins, G. y D. Watts, 1968, pp. 210, 211 y 223.

$$C_{xx}(f) = NP(f) = N|X_k|^2 = N \frac{1}{N} \sum_{t=-n}^{n-1} x(t) e^{-2\pi i f t} \Big|_1^2, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, f \in R. \quad (2.4)$$

En la expresión anterior, $\frac{1}{2}$ es la frecuencia de Nyquist discutida anteriormente y es la frecuencia más alta que puede ser detectada en una serie de datos equidistantes entre si una unidad de tiempo.

Cuando se trata de señales deterministas del tiempo, la convergencia de $C_{xx}(f)$ a $\Gamma(f)$ es suave en el sentido de que la función $C'_{xx}(f)$ obtenida al incrementar la longitud del registro de N a N' debe ser una versión más completa de la función $C_{xx}(f)$ basada en el registro de longitud N pues considera un mayor número de frecuencias, es decir, para el caso de series obtenidas de señales deterministas $C_{xx}(f)$ resulta ser un estimador consistente de $\Gamma(f)$.

Sin embargo, la expresión del espectro dada por (2.3) no es satisfactoria cuando $x(t)$ es una realización de un proceso estocástico ya que generalmente la grafica de $C'_{xx}(f)$ obtenida de un registro de longitud $N' > N$ sera tan errática como la obtenida a partir de un registro de longitud N ; es decir, cuando la serie proviene de una señal de naturaleza estocástica, $C_{xx}(f)$ *generalmente no convergerá en ningún sentido estadístico* a algún valor límite cuando N tienda a infinito.

"...La objeción a la definición del espectro como el límite cuando el tamaño del registro tiende a infinito es que si $x(t)$ es la realización de un proceso estocástico, entonces la variable aleatoria correspondiente $C_{xx}(f)$ no converge en ningún sentido estadístico a un valor límite [pues] es falsamente argumentado que como la función de autocovarianza $c_{xx}(u)$ tiende en un sentido estadístico a la función de autocovarianza poblacional, γ_{xx} , cuando N tiende a infinito, entonces se pueda establecer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} c_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{xx}(u) e^{-2\pi i f u} du = \Gamma_{xx}(f).$$

"La falacia en el argumento anterior radica en que el hecho de que $c_{xx}(u)$ sea un estimador consistente de γ_{xx} , *de ninguna manera implica que esto se cumpla también para su transformada de Fourier, $C_{xx}(f)$* . De hecho, generalmente no es cierto que si se tiene un estimador consistente de un parámetro estadístico, su transformada de Fourier sea un estimador consistente de la transformada de Fourier de aquel parámetro.."⁹

⁹ *Ibidem*, p.211. Cursivas del autor.

El espectro muestral de un proceso de ruido blanco.¹⁰

Como ilustración del efecto de aplicar el análisis de Fourier a un proceso estocástico, se obtuvo una serie de 400 desviaciones aleatorias normales (ruido blanco gaussiano) y se calculó el espectro muestral para los 50, 100 y 200 términos iniciales, así como para la serie completa de 400 términos. En la figura 2.1 se muestran los espectros muestral y poblacional para $N=50$ y en la figura 3.2 los correspondientes a $N=100$, ambos calculados en las frecuencias $f=0.02, 0.04, \dots, 0.50$ ciclos por unidad de tiempo.¹¹

Como se observa en la figura, las fluctuaciones en $C_{zz}(f)$ son tan erráticas que sería difícil concluir sobre la base del diagrama que el verdadero espectro es una constante y que por tanto la serie de tiempo es ruido blanco. Nótese también que las fluctuaciones en $C_{zz}(f)$ para $N=100$

¹⁰ Ejemplo tomado de Jenkins, G. y D. Watts, *op cit* pp 211-213 y 235

¹¹ Nota sobre el espectro de un proceso de ruido blanco

No es posible definir un proceso estocástico continuo en el tiempo que sea análogo al proceso puramente aleatorio discreto definido en el capítulo 1 pues requeriría que $\rho_{zz}(0) = 1$ y $\rho_{zz}(u) = 0$ cuando $u \neq 0$, lo cual implicaría la discontinuidad de ρ_{xx} en $u = 0$, pero lo anterior no puede suceder pues si el proceso estocástico es continuo, entonces $\rho_{xx}(u)$ debe ser una función continua del rezago u .

Una manera de salvar esta dificultad es definir un proceso puramente aleatorio continuo, o *ruido blanco*, como un proceso que consista enteramente de impulsos contiguos no correlacionados. Su función de autocovarianza es por lo tanto

$$\gamma_{zz}(u) = \sigma_z^2 \delta(u),$$

donde $\delta(u)$ es la función delta de Dirac. Como $\delta(u)$ debe ser considerada como una función que es cero cuando $u \neq 0$ e infinito cuando $u = 0$, la covarianza entre puntos cercanos es cero pero a costa de hacer la varianza $\gamma_{zz}(0)$ del proceso infinita.

No obstante la varianza infinita del proceso, este puede ser considerado como el límite cuando τ tiende a cero del llamado proceso de Bachelier-Wiener $Y(t)$ cuya función de autocovarianza es

$$\gamma_{YY}(u) = \begin{cases} 0, & |u| > \tau \\ \frac{\sigma_z^2}{\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right), & |u| \leq \tau. \end{cases}$$

Entonces, usando la definición (3.10), el espectro del proceso de Bachelier-Wiener es

$$\begin{aligned} \Gamma_{YY}(f) &= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sigma_z^2}{\tau} \left(1 - \frac{|u|}{\tau}\right) e^{-j2\pi fu} du \\ &= \sigma_z^2 \left(\frac{\text{sen } \pi f \tau}{\pi f \tau} \right)^2, \quad -\infty < f < \infty. \end{aligned}$$

En el límite cuando τ tiende a cero, $\Gamma_{YY}(f)$ tiende a

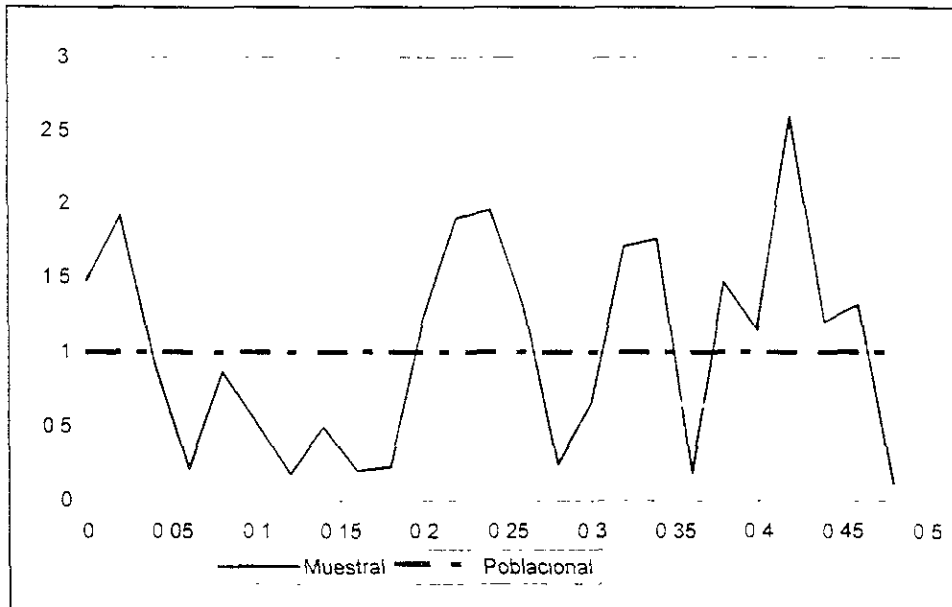
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Gamma_{YY}(f) = \Gamma_{ZZ}(f) = \sigma_z^2,$$

esto es, el espectro del ruido blanco es constante para toda f .

son tan amplias como para $N=50$, indicando la ausencia de convergencia estadística de cualquier tipo. El cuadro 2.1 resume los resultados obtenidos del espectro muestral para las series con $N=50$, 100, 200 y 400 términos. Como el espectro teórico tiene el mismo valor en todas las frecuencias, las fluctuaciones en $C_{zz}(f)$ pueden ser resumidas evaluando la media y la varianza sobre la frecuencia.

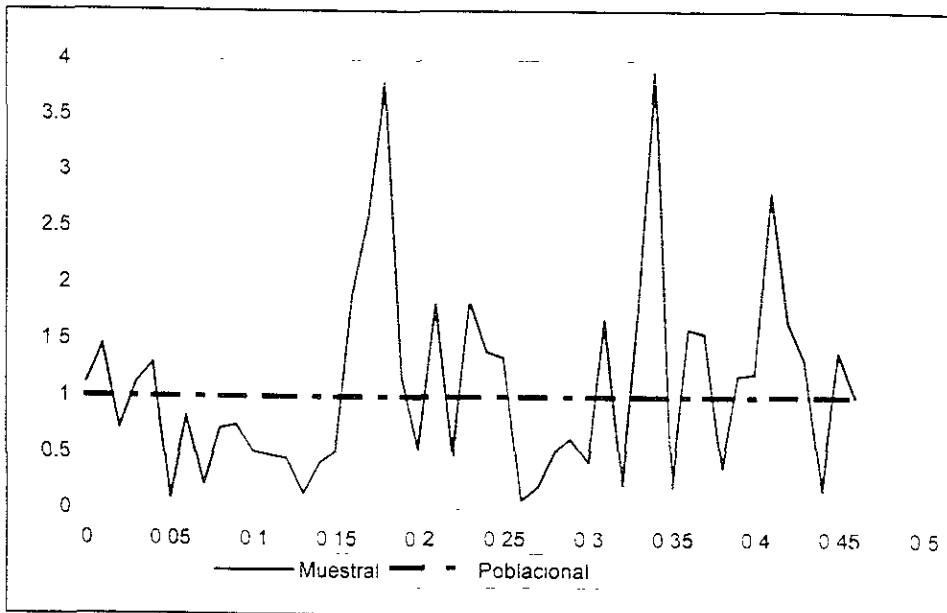
FIGURA 2.1

Espectros muestral y poblacional para un proceso de ruido blanco ($N=50$).



Fuente: Jenkins, G y D Watts. *op cit.* pp. 212 y 235.

FIGURA 2.2

Espectros muestral y poblacional de un proceso de ruido blanco ($N=100$)Fuente: *Ibidem*, pp. 212 y 235.

En el cuadro puede apreciarse que los valores medios para cada serie son cercanos a uno, el valor del espectro teórico. Por tanto, $C_{zz}(f)$ parece fluctuar alrededor de algún valor central. Sin embargo, también puede verse que las varianzas no disminuyen cuando N aumenta, indicando que la estimación del espectro obtenida de una muestra de $N=100$, 200 ó 400 datos no es mejor que aquella para $N=50$.

CUADRO 2.1

Comportamiento del espectro muestral del ruido blanco conforme se incrementa el tamaño de la muestra

N	50	100	200	400
media	0.85	1.07	1	0.95
varianza	0.630	0.777	0.886	0.826

Fuente: *Ibidem*

Una propiedad deseable para los estimadores es que su varianza disminuya cuando N se incrementa, a tal propiedad se le llama *consistencia*. Entonces, puede concluirse que $C_{zz}(f)$ no es un estimador consistente del espectro, al menos no en su presente forma.

Resumiendo lo anterior, para señales deterministas el espectro es el límite, en el sentido matemático usual, del espectro muestral $C_{xx}(f)$ cuando la longitud de la serie tiende a infinito.

Sin embargo, el ejemplo sobre un proceso de ruido blanco muestra que $C_{xx}(f)$ no es una herramienta adecuada para analizar el comportamiento de series de tiempo de naturaleza estocástica, ya que la razón básica de por qué falla el análisis de Fourier cuando se aplica a series de tiempo [de carácter estocástico] es que se basa en el supuesto de amplitudes, frecuencias y fases fijas, mientras que las series de tiempo están caracterizadas por cambios *aleatorios* en los tres elementos mencionados. Es por eso que los métodos de Fourier necesitan ser adaptados para tomar en cuenta la naturaleza aleatoria de las series de tiempo.¹²

2.1.2 La relación entre el espectro y la función de autocovarianza muestrales

Antes de dar una definición más precisa del espectro de un proceso estocástico estacionario es útil y necesario conocer la relación que existe entre el espectro muestral y la función de autocovarianza muestral, a saber¹³

$$C_{xx}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} c_{xx}(k) e^{-j2\pi fk}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

donde $c_{xx}(k)$ es la función de autocovarianza muestral de la serie. La transformada inversa de Fourier de (3.5) es

$$c_{xx}(u) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_{xx}(f) e^{j2\pi fu} df, \quad -N \leq u \leq N. \quad (2.6)$$

la cual, para $u=0$ se vuelve

$$c_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(f) df. \quad (2.7)$$

Por lo que, *el espectro muestral permite saber cómo se distribuye la varianza o potencia promedio de $x(t)$ sobre la frecuencia.*¹⁴

Cabe señalar que los dos pares de transformadas anteriores son identidades matemáticas que se cumplen independientemente de si $x(t)$ es determinista o una realización de un proceso estocástico.

¹² *Ibidem*, p. 213.

¹³ *Ibidem* p 213 - 215 en esas páginas se presenta una demostración formal de la relación

¹⁴ Esto es así porque la autocovarianza en el rezago $k=0$ es igual a la varianza.

2.2 Definición del espectro de un proceso estocástico

Para ayudar a comprender el comportamiento errático del espectro muestral de una señal no determinista del tiempo, es necesario considerar que el registro de $x(t)$ que se obtuvo en el intervalo $-N/2 \leq t \leq N/2$, fue sólo uno de los muchos que pudieron haberse observado: es decir, ese registro particular, $x(t)$, debe ser considerado como *una realización de un proceso estocástico* especificado por la serie de variables aleatorias $X(t)$ para $-N/2 \leq t \leq N/2$ ¹⁵. Por análogas razones, el espectro muestral $C_{xx}(f)$ debe ser considerado como una realización de la variable $C_{xx}(f)$, así como la función de autocovarianza muestral c_{xx} fue considerada como una realización de la variable aleatoria c_{xx} ¹⁶.

Una mejor estimación del espectro de un proceso estocástico se obtiene entonces al considerar a *todas las posibles realizaciones del proceso $X(t)$* y, por consiguiente, a *todas las realizaciones $C_{xx}(f)$* de la variable aleatoria $C_{xx}(f)$. Esto se logra calculando la esperanza de $C_{xx}(f)$.

Como suele suceder cuando se trabaja únicamente con realizaciones de procesos estocásticos, se desconoce la función de distribución conjunta de las variables aleatorias involucradas en el mismo, razón por la cual se está limitado a describir el proceso $C_{xx}(f)$ solo a partir de sus primeros momentos¹⁷.

El primer momento o el valor esperado del estimador del espectro muestral $C_{xx}(f)$ es

$$E[C_{xx}(f)] = \int_{-N}^N E[c_{xx}(u)] e^{-i2\pi fu} du, \quad (2.8)$$

como¹⁸

$$E[c_{xx}(u)] = \gamma_{xx}(u) \left(1 - \frac{|u|}{N}\right), \quad |u| \leq N,$$

¹⁵ Ver capítulo 1.

¹⁶ Por convención, cuando se hace referencia a una realización o muestra de una variable aleatoria se emplean minúsculas para los subíndices y cuando se trata de la variable o proceso aleatorio se emplean mayúsculas: así, por ejemplo, c_{xx} representa una realización de la variable aleatoria C_{xx} o, dicho en otros términos, c_{xx} es la autocovarianza obtenida de una muestra $x(t)$ de algún proceso aleatorio y C_{xx} es la autocovarianza poblacional de dicho proceso. La interpretación es análoga para $C_{xx}(f)$ y $C_{xx}(f)$.

¹⁷ Ver la explicación en el capítulo 2.

¹⁸ La justificación formal del valor esperado de $c_{xx}(u)$ se encuentra en el capítulo 1 de este trabajo.

entonces

$$E[C_{XX}(f)] = \int_{-N}^N \gamma_{XX}(u) \left(1 - \frac{|u|}{N}\right) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.9)$$

La ecuación anterior da la *distribución promedio* sobre todas las series de tiempo posibles de longitud N , de la *varianza sobre la frecuencia*. En la medida en que la longitud del registro, N , se incrementa, $E[P_{XX}(f)]$ tiende en el límite a

$$\Gamma_{XX}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[C_{XX}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.10)$$

A la función $\Gamma_{XX}(f)$ se le llama el *espectro de potencia de $X(t)$* o, de manera más concisa, el *espectro* y es el análogo natural de la varianza en el análisis estadístico clásico.¹⁹ Así, la ecuación anterior muestra que *el espectro es la transformada de Fourier de la función de autocovarianza del proceso $X(t)$* ²⁰

La transformada inversa del espectro es

$$\gamma_{XX}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{XX}(f) e^{j2\pi fu} df. \quad (2.11)$$

Si $u=0$, entonces

$$\gamma_{XX}(0) = \sigma_{XX}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{XX}(f) df, \quad (2.12)$$

por lo que $\Gamma_{XX}(f)$ muestra cómo se distribuye la varianza del proceso $X(t)$ sobre la frecuencia, de la misma manera que (2.7) muestra cómo es distribuida la varianza de una muestra particular de longitud N sobre la frecuencia. Específicamente, la varianza del proceso $X(t)$ debida a las frecuencias en el rango que va de f a $f+df$ es aproximadamente $\Gamma_{XX}(f)df$.²¹

¹⁹ Shumway, R. H., *op cit*, p. 47.

²⁰ $X(t)$ es el proceso que genera las series de tiempo observadas $x(t)$.

²¹ Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, pp. 217.

Para el caso de tiempo discreto, las relaciones correspondientes a (2.9) y (2.10) son

$$E[C_{XY}(f)] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{XY}(k) \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) e^{-j2\pi kf}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{XX}(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[C_{XX}(f)] = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(k) e^{-j2\pi kf}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

y finalmente

$$\gamma_{XY}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Gamma_{XY}(f) e^{j2\pi fk} df, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

Un ejemplo A continuación se muestra el espectro del proceso autorregresivo de segundo orden visto en el capítulo 1.

En la figura 2.3 se muestra una realización de 50 términos del proceso autorregresivo discreto

$$X_t = X_{t-1} - 0.5X_{t-2} + Z_t. \quad (2.16)$$

La serie correspondiente a la figura 2.3 parece ser periódica pues su forma, como puede apreciarse en la gráfica, se asemeja a la de un senoide con longitud decreciente. Sin embargo, el periodo, la amplitud y la fase de la misma cambian constantemente debido a la influencia del componente aleatorio Z_t .

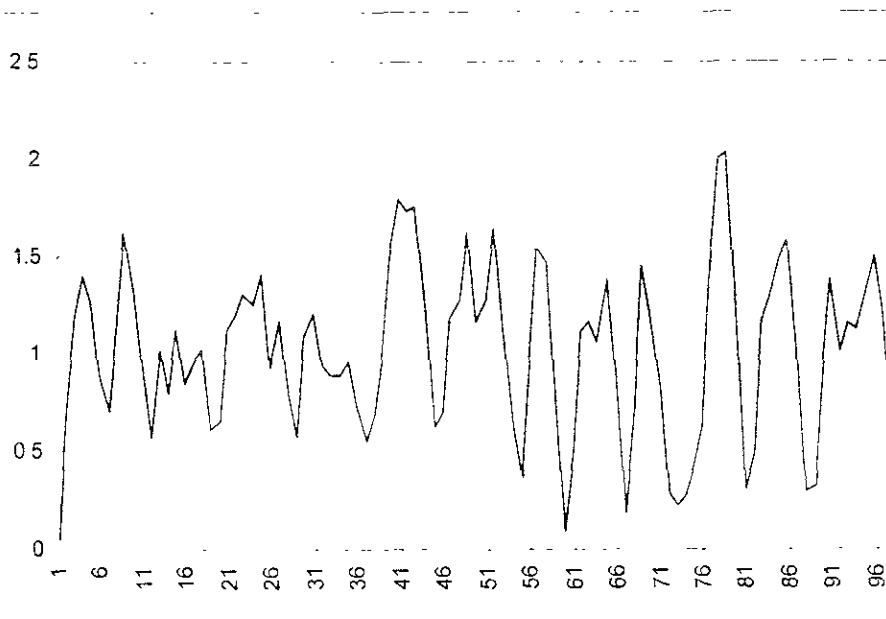
Este comportamiento periódico es mostrado también por la función de autocorrelación del proceso mostrada en la figura 2.4.

El espectro correspondiente (Figura 2.5), muestra un pico en la frecuencia $f_0 = 0.125 \text{ cput} = 1/8 \text{ cput}$. Sin embargo, como el proceso $X(t)$ no es exactamente periódico, el espectro no está concentrado solo en f_0 , sino que se dispersa sobre todas las frecuencias en el rango $-0.5 \leq f < 0.5$. Como puede notarse, el espectro se grafica solo para las frecuencias entre 0 y 0.5; esto es así porque como $\gamma_{XX}(u) = \gamma_{XX}(-u)$ entonces $\Gamma_{XX}(f) = \Gamma_{XX}(-f)$.²²

²² Shumway, R. *op cit*, p. 57.

FIGURA 2.3

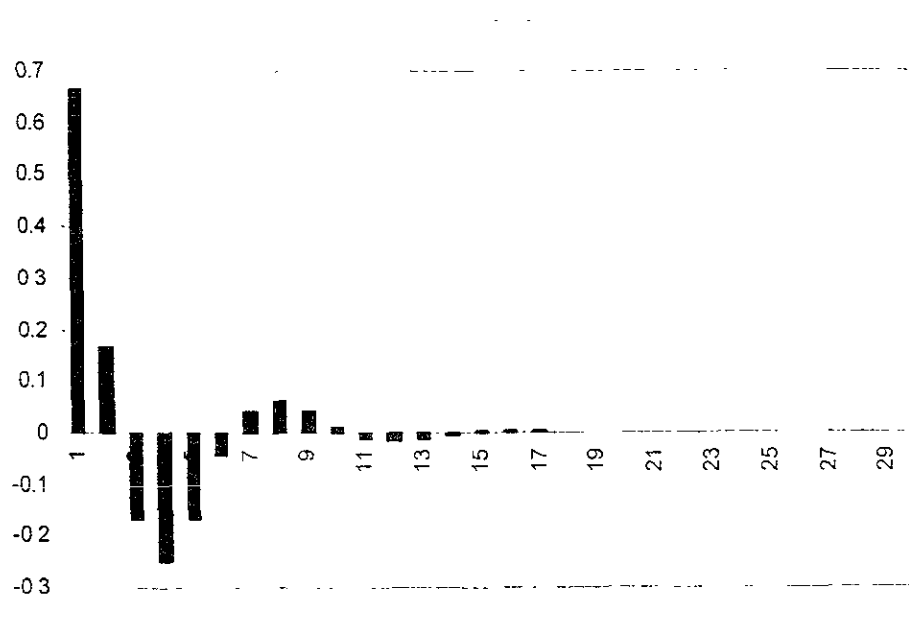
Realización de un proceso autorregresivo de segundo orden ($\alpha_1=1, \alpha_2=-0.5$ y $N=50$).



Fuente: Elaboración propia con datos generados de acuerdo con (2.13)

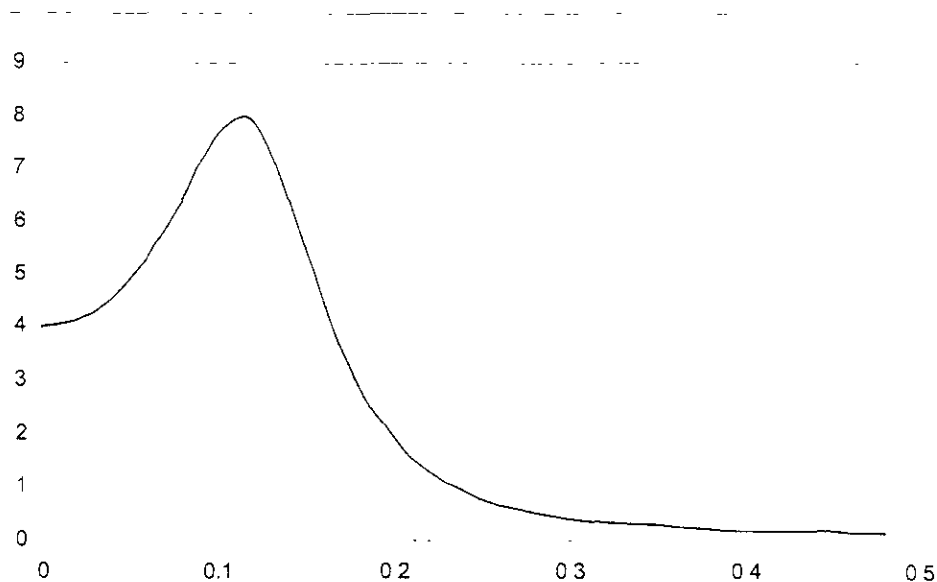
FIGURA 2.4

Función de autocovarianza poblacional del proceso (2.16)



Fuente. Elaboración propia.

FIGURA 2.5
Espectro poblacional del proceso (2.16)



Fuente: Jenkins, G. y D. Watts, *op cit.*, p 229

2.2.1 Interpretación del espectro²³

En términos generales, se tiene que si las correlaciones entre los datos de la serie siguen un patrón cíclico éste será mostrado en el espectro como un "pico" bien definido centrado en la frecuencia correspondiente al periodo aproximado del fenómeno en cuestión. Por el contrario, cuando la correlación entre los datos es tan pequeña que puede considerarse nula, es muy probable que el espectro sea casi llano, como el correspondiente al ruido blanco, reflejando que la varianza presente en la serie estudiada no es atribuible a alguna o algunas frecuencias en particular, es decir, en esa serie no existiría ningún movimiento periódico destacable sobre los demás.

Esto es así debido a la relación inversa que hay entre el periodo y la frecuencia, lo que implica que a las frecuencias altas les corresponda un periodo pequeño, mientras que los periodos amplios corresponden a frecuencias pequeñas o bajas.

Por otro lado, si la serie estudiada oscila muy rápidamente, entonces su espectro mostrará niveles significativos en las frecuencias altas y, si la serie es "suave", con cambios lentos, su espectro estará concentrado en las frecuencias bajas.

²³ Shumway, R. H. *op cit.*, capítulo 2.

2.2.2 La función de densidad espectral.

Así como en el dominio del tiempo es útil definir una medida adimensional del grado de dependencia entre los datos (la autocorrelación), en el dominio de la frecuencia también se define una medida de la varianza atribuible a cada frecuencia que es independiente de la escala de medida de la serie correspondiente. lo que hace que los espectros obtenidos de diversas series sean comparables entre sí. Dicha medida, llamada *función de densidad espectral*, se obtiene al normalizar $\Gamma_{XX}(f)$ dividiéndolo entre la varianza σ_X^2 y su expresión matemática es

$$\frac{\Gamma_{XX}(f)}{\sigma_X^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.17)$$

de donde se observa que la función de densidad espectral es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

2.3 Estimadores espectrales

En la sección anterior, el espectro de una serie de tiempo estocástica fue definido como

$$\Gamma_{XX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{XX}(k) e^{-j2\pi k f}, \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}.$$

Sin embargo, pese a que es una definición que contempla la naturaleza aleatoria de ciertos fenómenos, como es el caso de los económicos, en el análisis práctico de series de tiempo no es de mucha utilidad pues requiere conocer la función de autocovarianza poblacional del proceso, lo que no es posible a partir de una o pocas series de éste. Es por eso que resulta necesaria la construcción de *estimadores del espectro* del proceso estocástico con base en el espectro muestral que se obtenga de las series.

Del ejemplo del ruido blanco se deduce que el estimador del espectro muestral no es un estimador consistente del espectro de un proceso aleatorio discreto pues el valor de su varianza es independiente del número de observaciones, N , razón por la cual no disminuye en la medida en que se aumenta el tamaño de la serie.

En la sección siguiente se discutirá un procedimiento útil para disminuir la varianza del estimador muestral; a tal proceso se le llama *suavizamiento*.

2.3.1 Suavizamiento del espectro muestral²⁴

Una técnica ampliamente utilizada para reducir la varianza del estimador espectral muestral, esto es, para suavizarlo, consiste en promediar estimaciones obtenidas de subseries no encimadas de la serie original.

El procedimiento es como sigue:

Se divide la serie original, con N datos, en k segmentos cada uno con M=N/k datos. A partir de las subseries así obtenidas se forman k estimaciones espectrales, las cuales se promedian para obtener un estimador espectral medio de la forma

$$\bar{C}_{YY}(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C_{YY}^{(i)}(f), \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}, \quad (2.18)$$

donde $C_{XX}^{(i)}(f)$ es la estimación obtenida con el i-ésimo segmento.

Un ejemplo

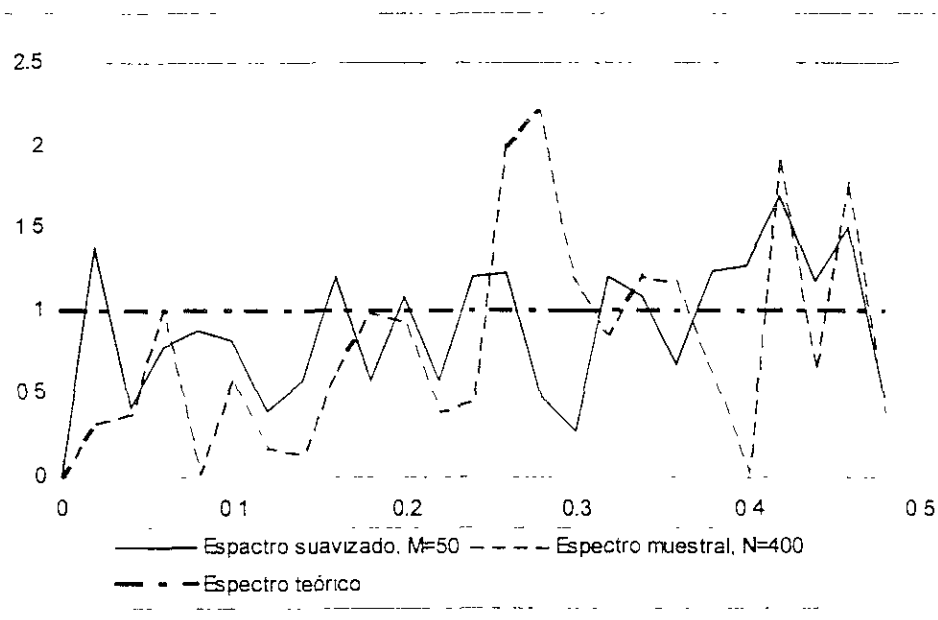
Supóngase que para el ejemplo sobre el ruido blanco de la sección anterior, en lugar de calcular $C_{XX}(f)$ para el total de la muestra, de tamaño N=400, se divide la serie en k=8 subseries de longitud M=N/k=50 y se evalúa un espectro muestral $C_{ZZ}^{(i)}(f)$, i=1, 2, ..., 8, para cada una. El promedio de los 8 espectros así obtenidos es

$$\bar{C}_{ZZ}(f) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 C_{ZZ}^{(i)}(f), \quad -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2},$$

en la figura 2.6 se grafican el espectro muestral y el promedio de los subespectros, así como el espectro teórico para las frecuencias $f=0, 0.02, \dots, 0.5$ cput. Nótese que la gráfica del promedio es más "suave" y cercana al espectro poblacional $\Gamma_{ZZ}(f)$ que el espectro muestral. Lo anterior parece indicar, entonces, que la variabilidad o volatilidad del espectro muestral con respecto al poblacional se reduce al promediarlo o suavizarlo sobre subseries.

²⁴ Esta sección se construyó tomando como referencia principal a Shanmugan, K. S. y A. M. Breipohl (1988), pp. 579-584

FIGURA 2.6
Comparación entre el espectro poblacional y el
espectro suavizado de la serie de ruido blanco



Fuente: Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, p.240.

A continuación se expondrá primero una formalización de este proceso y después una generalización del mismo.

2.3.2 Otros estimadores espectrales suavizados

Considérese el valor esperado del estimador $\bar{C}_{YY}(f)$ utilizado en la ilustración del procedimiento anterior. Dado que para el caso continuo

$$C_{xx}(f) = \int_{-N}^N c_{xx}(u) e^{-j2\pi fu} du, \quad -\infty < f < \infty, \quad (2.23)$$

se tiene que para las k subseries, cada una de longitud $M=N/k$,

$$C_{XX}^{(i)}(f) = \int_{-M}^M c_{XX}^{(i)}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.24)$$

Por lo que el estimador suavizado es

$$\bar{C}_{XY}(f) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k C_{XY}^{(i)}(f) = \int_{-M}^M \bar{c}_{XY}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.25)$$

donde

$$\bar{c}_{XY}(u) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-u} x(t)x(t+u) dt \right\}, u \geq 0. \quad (2.26)$$

Entonces, de acuerdo con lo visto en el capítulo 1 de este trabajo, la esperanza de $\bar{c}_{XY}(u)$ es

$$E[\bar{c}_{XY}(u)] = \gamma_{XY}(u) \left(1 - \frac{|u|}{M} \right) \quad (2.27)$$

y la esperanza de $\bar{C}_{XY}(f)$ es

$$E[\bar{C}_{XY}(f)] = \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|u|}{M} \right) \gamma_{XY}(u) e^{-j2\pi fu} du. \quad (2.28)$$

la cual, utilizando el teorema de convolución (A-28), del apéndice de este capítulo, puede escribirse como

$$E[\bar{C}_{XY}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{XY}(f-g) M \left(\frac{\text{sen } \pi g M}{\pi g M} \right)^2 dg. \quad (2.29)$$

Entonces, dividir la serie original, de longitud N , en k secciones de longitud M y formar el *estimador espectral suavizado* (2.25) es equivalente a multiplicar o "suavizar" el espectro muestral mediante la ventana espectral

$$W(f) = M \left(\frac{\text{sen } \pi M f}{\pi M f} \right)^2. \quad (2.30)$$

En el dominio del tiempo, esto es equivalente a multiplicar la función de autocovarianza por la *ventana de intervalo*

$$w(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{M}, & |u| \leq M \\ 0, & |u| > M \end{cases} \quad (2.31)$$

A las ventanas (2.30) y (2.31) se las llama *las ventanas espectral y de intervalo de Barlett*.

De manera general, los estimadores suavizados de la forma

$$\bar{C}_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) c_{XX}(u) e^{-j2\pi fu} du = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}_{XX}(u) e^{-j2\pi fu} du \quad (2.32)$$

tendrán una varianza menor que la del estimador muestral $C_{XX}(f)$. En (2.32), la función $w(u)$ que se escoja como ventana debe satisfacer las siguientes condiciones:²⁵

1. $w(0)=1$
2. $w(u)=w(-u)$
3. $w(u)=0, \quad |u| \geq M, \quad M < N$. (2.33)

Algunos ejemplos de ventanas de intervalo que son ampliamente utilizados en el análisis espectral se resumen en el cuadro 2.1 junto con las ventanas espectrales correspondientes

CUADRO 2.1
Ejemplos de ventanas de intervalo y espectrales

	Ventana de intervalo	Ventana espectral
Rectangular	$w = \begin{cases} 1, & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W(f) = 2M \left(\frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M} \right), -\infty < f < \infty$
Barlett	$w(u) = \begin{cases} 1 - \frac{ u }{M}, & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W(f) = M \left(\frac{\text{sen } \pi f M}{\pi f M} \right)^2, -\infty < f < \infty$
Tukey	$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right), & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W(f) = M \left(\frac{\text{sen } 2\pi f M}{2\pi f M} \right) \left(\frac{1}{1 - (2\pi f M)^2} \right), -\infty < f < \infty$

Fuente: Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, p. 244.

²⁵ *ibidem*, p. 243

Usando la propiedad de convolucion (A 28), la expresión (2.32) puede escribirse como

$$\bar{C}_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) C_{xy}(f-g) dg. \quad (2.34)$$

donde $C_{xx}(f)$ es el espectro muestral definido en (2.4) y

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) e^{-j2\pi fu} du \quad (2.35)$$

es la transformada de Fourier de $w(u)$.

La transformada inversa correspondiente a (2.35) es

$$w(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi fu} df. \quad (2.36)$$

De lo anterior, puede esperarse que el estimador suavizado $\bar{C}_{xy}(f)$ permita una mejor aproximación al espectro teórico, $\Gamma_{xx}(f)$, que el estimador muestral $C_{xx}(f)$; pero tal estimación puede ser aún mejorada si se consideran todas las posibles estimaciones sobre el total de las realizaciones del proceso $X(t)$, esto es, el valor esperado de $\bar{C}_{xy}(f)$.

2.3.3 El valor esperado del estimador espectral suavizado

Tomando la esperanza en la expresión (2.34) se obtiene

$$E[\bar{C}_{xy}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) E[C_{xy}(f-g)] dg. \quad (2.37)$$

Sin embargo, para N [recuérdese que N representa la longitud del registro] suficientemente grande, de (2.29) se deduce que

$$E[C_{xy}(g)] \approx \Gamma_{xy}(g), \quad (2.38)$$

entonces

$$E[C_{M}(g)] \approx \int_{-\infty}^{\infty} W(g) \Gamma_{M}(f-g) dg = \bar{\Gamma}_{M}(f). \quad (2.39)$$

A $\bar{\Gamma}_{M}(f)$ se le llama el *espectro suavizado medio*.

2.3.4 La varianza de los estimadores suavizados

Una propiedad importante de los estimadores anteriores es su varianza pues, como se verá, a partir de ésta se obtiene una medida de la reducción de la varianza que resulta al suavizar el espectro muestral con distintos valores de M . Esto puede utilizarse, entonces, como un criterio para decidir sobre la “bondad” de las estimaciones.

Según prueban Jenkins, G y D. Watts,²⁶ una aproximación a la varianza del estimador suavizado está dada por

$$\text{Var}[\bar{C}_{M}(f)] \approx \frac{\Gamma_{M}^2(f)}{N} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) du = \Gamma_{M}^2(f) \frac{I}{N} \quad (2.41)$$

donde

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) du \quad (2.42)$$

Por ejemplo, para la ventana de Barlett

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)^2 du = \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)^2 du = \frac{2}{3} M,$$

por lo que

$$\text{Var}[\bar{C}_{M}(f)] \approx \frac{\Gamma_{M}^2(f)}{N} \left(\frac{2}{3} M\right).$$

²⁶ La justificación de esa afirmación puede encontrarse en Jenkins, G y D. Watts, *op cit*, capítulos 2 y 6, y en P. Bloomfield, *op cit*, p.197

Lo anterior muestra que la varianza del estimador espectral suavizado puede reducirse haciendo pequeña la longitud, M^{27} , de los segmentos en que es dividida la serie original.

De (2.41) se tiene que

$$\frac{\text{Var}[\bar{C}_{wv}(f)]}{\Gamma_{wv}^2(f)} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) du = \frac{I}{N}, \quad (2.43)$$

donde I/N representa la reducción proporcional en la varianza que resulta de utilizar el estimador espectral suavizado en lugar del estimador muestral. En el cuadro 2.2 se indican los valores de la *tasa de varianza*, I/N , correspondiente a cada una de las ventanas del cuadro 2.1.

Como ilustración del concepto anterior, supóngase que M es igual a $(0.1)N$, es decir, supóngase que se divide la serie original en diez subseries ($k=10$). Entonces, para la ventana de Barlett, I/N es $(2/3)(0.1)=0.067$. Por lo tanto, al tomar un punto de truncamiento del 10% de la longitud de la serie, la varianza del estimador suavizado se reduce al 6.7% de la varianza del espectro muestral.

CUADRO 2.2

Propiedades de las ventanas espectrales

Ventana	I/N	Grados de libertad (ν)
Rectangular	$2M/N$	N/M
Barlett	$0.667M/N$	$3N/M$
Tukey	$0.75M/N$	$2.667N/M$

Fuente: Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, p. 252.

2.3.5 Intervalo de confianza para el espectro teórico

Para construir un intervalo de confianza para el espectro teórico a partir del espectro suavizado es necesario dar primero una aproximación a la distribución de $\bar{C}_{wv}(f)$. A este respecto, los autores antes mencionados²⁸ lo hacen mediante una distribución ji cuadrada, χ^2_ν , donde ν es el número de grados de libertad y está dado por

$$\nu = \frac{2N}{I}; \quad (2.44)$$

²⁷ A M también se le llama el *punto de truncamiento* de la serie

²⁸ Jenkins, G. y D. Watts, *op cit*, pp. 252-254, ver también P. Bloomfield, *op cit*, p. 197.

así que, como es sabido, entre mayor sea el número de grados de libertad más fiable será el estimador pues implica una varianza menor

Como $\frac{\nu \bar{C}_{\text{W}}(f)}{\Gamma_{\text{W}}(f)}$ se distribuye como una χ^2_ν , donde ν esta dada por (2.44), se sigue que

$$P\left\{\chi_\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\nu \bar{C}_{\text{W}}(f)}{\Gamma_{\text{W}}(f)} \leq \chi_\nu\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 1 - \alpha. \quad (2.45)$$

con

$$P\left\{\chi_\nu^2 \leq \chi_\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Entonces

$$P\left\{\chi_\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \chi_\nu^2 \leq \chi_\nu\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 1 - \alpha.$$

De (2.45) se tiene que

$$P\left\{\chi_\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{\nu \bar{C}_{\text{W}}(f)}{\Gamma_{\text{W}}(f)} \leq \chi_\nu\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} = 1 - \alpha,$$

de aquí que

$$P\left\{\frac{1}{\chi_\nu\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \geq \frac{\Gamma_{\text{W}}(f)}{\nu \bar{C}_{\text{W}}(f)} \geq \frac{1}{\chi_\nu\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}\right\} = 1 - \alpha. \quad (2.46)$$

por lo tanto, el intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para el espectro teórico es

$$P \left\{ \frac{\nu \bar{C}_{\nu}(f)}{\chi_{\nu}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)} \leq \Gamma_{\nu}(f) \leq \frac{\nu \bar{C}_{\nu}(f)}{\chi_{\nu}^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right\} = 1 - \alpha. \quad (2.47)$$

En la tercera columna del cuadro 2.2 se muestran los valores de ν correspondientes a cada ventana espectral. En este punto es importante aclarar que el intervalo se construye para una frecuencia específica.

Hasta aquí ha sido expuesta la deducción del espectro medio suavizado así como la justificación del por qué éste es una mejor aproximación al espectro teórico que el espectro muestral. Así, en el siguiente capítulo se aplicarán los conceptos aquí tratados en el problema práctico de la estimación del espectro de una serie observada y, en particular, de una serie económica.

CAPÍTULO 3. APLICACIONES

La finalidad principal en esta parte es plantear y ejemplificar un procedimiento útil en el análisis espectral práctico de series de tiempo aplicando lo expuesto en los dos capítulos anteriores.

El capítulo comienza con un algoritmo, lo más detallado posible, que describe los pasos a seguir para calcular la estimación suavizada de la densidad espectral, ESDE, de una serie de tiempo, en este caso, de una serie económica. La serie con la que se ilustra el algoritmo es la del índice del producto interno bruto (PIB) de los Estados Unidos de 1871 a 1994, según A. Maddison.¹ A continuación, se resumen los resultados obtenidos al aplicar dicho algoritmo, primero en las series del índice del PIB de varios países capitalistas, a saber Alemania, Francia, Italia, el Reino Unido, España, Argentina, Brasil, México, India y Chile y, por último, a las series de la tasa de ganancia de los Estados Unidos y del índice de precios de Inglaterra.

El criterio empleado para seleccionar tanto las variables como los países fue muy simple. El PIB fue considerado porque al ser una variable económica agregada, en principio se considera que reflejaría los cambios y movimientos en el ritmo de la evolución económica del país estudiado. En cuanto a los países, fueron tomados algunos de los considerados como pertenecientes al *centro* del sistema y otros a su *periferia*² y de los cuales se tuvieran series relativamente largas.³ Por su parte, la tasa de ganancia fue tomada en cuenta por considerarla "la variable" a estudiar en el análisis de largo plazo del crecimiento capitalista. Sin embargo, para este trabajo solo fue posible contar con la serie de la tasa de ganancia para los Estados Unidos presentada por G. Duménil y D. Lévy⁴ que contiene datos de 1869 a 1989. Asimismo, se incluyó una de las series históricas empleadas por Kondratieff⁵ para la detección de ciclos largos en Inglaterra durante el periodo comprendido entre 1871 y 1925.

¹ Maddison, A., *op cit*

² Para una exposición amplia de los conceptos de centro y periferia del sistema véase, por ejemplo, Vidal, J. M. y J. Martínez (1987), pp. 127-152

³ En el análisis de series temporales, suele ser un requisito estadístico el que estas sean significativamente "largas", y el qué tanto generalmente queda a juicio del investigador. Por ejemplo, para el análisis de series temporales en el dominio del tiempo se recomienda que la serie contenga al menos 50 o 60 observaciones (R. Mc Cloy y R. A. Hay, 1882, p. 20; E. Uriel, 1985, p. 18. Citados en J. Fernández, *op cit*, p. B-11)

⁴ Duménil, G. y D. Lévy (1993), pp. 353-361.

⁵ N. D. Kondratieff (1992), pp. 87-88.

3.1 ALGORITMO PARA LA ESTIMACIÓN SUAVIZADA DE LA DENSIDAD ESPECTRAL

Antes de comenzar propiamente con el algoritmo, es necesario deducir la expresión para el cálculo digital de la estimación suavizada de la densidad espectral

3.1.1 La formulación para el cálculo digital de los estimadores espectrales suavizados: la estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)

Sea x_t , $t=1, 2, \dots, N$; $N \in \mathbf{N}$ una serie temporal formada por los valores de una función real, $X(t)$; $t \in \mathbf{R}$, registrados cada Δ unidades de tiempo (en adelante, ut). Sin pérdida de generalidad, supóngase que el espaciamento entre los datos es igual a uno, esto es, $\Delta=1$.

Para esta serie, de acuerdo con lo establecido en el capítulo dos, la estimación espectral suavizada, $\bar{C}_{xx}(f)$, es

$$\bar{C}_{xx}(f) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w(k) c_{xx}(k) e^{-j2\pi f k}, -\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

donde la función de autocovarianza muestral, $c_{xx}(k)$, es

$$c_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), -(N-1) \leq k \leq N-1. \quad (3.2)$$

Como en el capítulo anterior, $w(k)$ es la ventana de intervalo con punto de truncamiento M ⁶. Debido a que, como se vio en el capítulo dos, $\bar{C}_{xx}(f)$ es una función par de la frecuencia, sólo es necesario calcularlo para el rango $0 \leq f < 1/2$. Sin embargo, para guardar la relación que existe entre el espectro y la varianza de la serie, es necesario duplicar el valor asociado con cada frecuencia en el rango $0 \leq f < 1/2$, con lo cual queda considerada tanto la varianza atribuida al componente de frecuencia f_k como la correspondiente a la frecuencia $-f_k$, $k=1, 2, \dots, M-1$.⁷

⁶ El punto de truncamiento, M , determina la longitud de las subseries en que se divide la serie original en el proceso de suavizamiento descrito en las secciones 2.3.1 y 2.3.2, pp. 37-41

⁷ Jenkins, G. y D. Watts, *op cit.* p. 259 y Shanmugan, K y A. M. Breipohl, *op cit.* pp. 146-147.

Con lo anterior, (3.2) se transforma en

$$\bar{C}_{xx}(f) = 2 \left\{ c_{xx}(0) + 2 \sum_{k=1}^{M-1} c_{xx}(k) w(k) \cos 2\pi f k \right\}, 0 \leq f < \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

y puesto que la función de autocovarianza es una función par del número de rezagos, k sólo se requiere evaluarla para $k \geq 0$.

Por último, si se utilizan las autocorrelaciones en lugar de las autocovarianzas para obtener una estimación espectral que sea adimensional, es decir, independiente de las unidades de medida de la serie, entonces

$$\frac{\bar{C}_{xx}(f)}{c_{xx}(0)} \equiv R_{xx}(f) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} r_{xx}(k) w(k) \cos 2\pi f k \right\}, 0 \leq f < \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

A $R_{xx}(f)$ se le llama la *estimación suavizada de la densidad espectral (ESDE)*

En la práctica, se sugiere⁸ utilizar un espaciado o separación de los puntos de la frecuencia del orden de $1/F$, donde F sea cuando menos 2 o 3 veces M , pues con éste generalmente se obtienen gráficas bien detalladas de $\bar{R}_{xx}(f)$. Así, la fórmula final para el cálculo de la estimación suavizada de la densidad espectral es

$$R_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} r_{xx}(k) w(k) \cos \frac{\pi l k}{F} \right\}, l = 1, 2, \dots, F. \quad (3.5)$$

3.1.2 El algoritmo

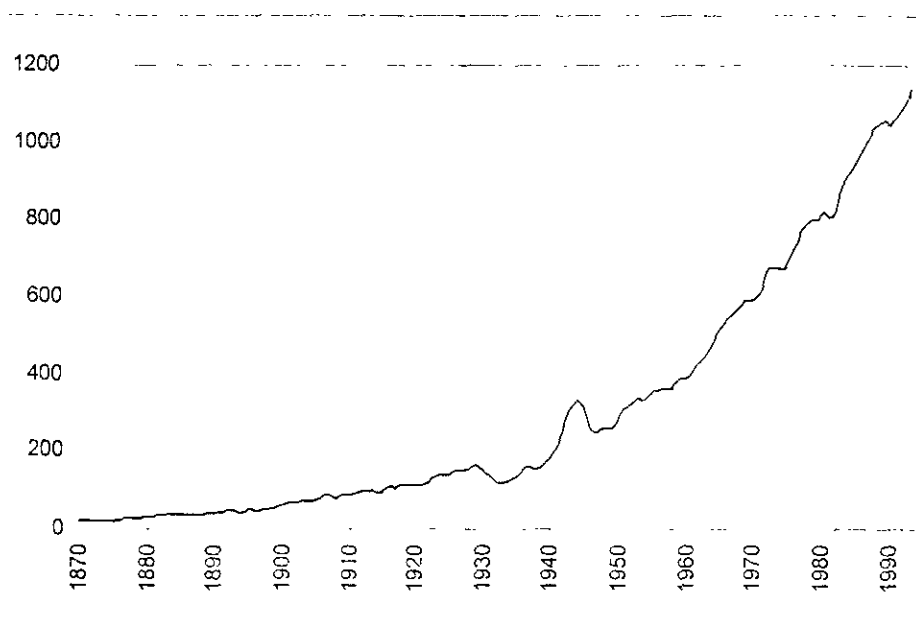
El algoritmo consta de dos fases. En la primera de ellas se realiza un análisis estadístico de la serie considerada aplicando los conceptos vistos en el capítulo uno, mientras que en la segunda se comienza propiamente con el análisis espectral de la serie.

Para ilustrar el procedimiento práctico aquí sugerido para la estimación del espectro, esto es, del cálculo de la ESDE, a partir de una serie de tiempo dada, considérese la serie del índice del PIB de

⁸ Sugerido por Cooley, J. W., P. A. W. Lewis y P. Welch; citado en Jenkins, W. y D. Watts, *op cit*, p. 261

los Estados Unidos mostrada en la figura 3.1 (esta serie es la misma que la mostrada en la figura 2.2c)

FIGURA 3.1
Índice del PIB de los Estados Unidos, 1870-1995 (1913=100)



Fuente: Elaboración propia con los datos de Maddison, A., *op cit*, pp. 215-217

Primera fase: Análisis estadístico preliminar de la serie

El **primer paso** del algoritmo consiste en la inspección visual de la serie. Como puede notarse, la serie tiene una tendencia claramente creciente, lo cual es una primera indicación de su no estacionariedad, misma que se ve confirmada por los resultados obtenidos al aplicarle la *prueba de Dickey- Fuller aumentada*⁹, según la cual, con un nivel de confianza del 99% puede afirmarse que la serie del índice del PIB es no estacionaria.¹⁰

Como fue establecido en los capítulos anteriores, la aplicación de la técnica de análisis espectral requiere que la serie sea estacionaria. Si no lo es, debe aplicársele alguna transformación que genere otra serie, a partir de la original, que pueda considerarse estacionaria y que conserve las características de la serie original.

⁹ Para una descripción sobre esta prueba véase, por ejemplo, Lilién, D. M., 1994, pp. 178-180.

¹⁰ Los resultados de las pruebas de estacionariedad se muestran en el anexo estadístico de este capítulo

El **segundo paso** consiste entonces en transformar la serie y confirmar que la serie resultante sea estacionaria. En este caso, la transformación que se utilizará es la tasa de crecimiento del índice del PIB, misma que se muestra en el figura 3.2

FIGURA 3.2
Tasa de crecimiento del índice del PIB de los Estados Unidos, 1871-1994



Fuente: Elaboración propia.

Según la prueba de Dickey-Fuller aumentada, con un nivel de confianza del 99% puede asegurarse que la serie de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos es estacionaria.

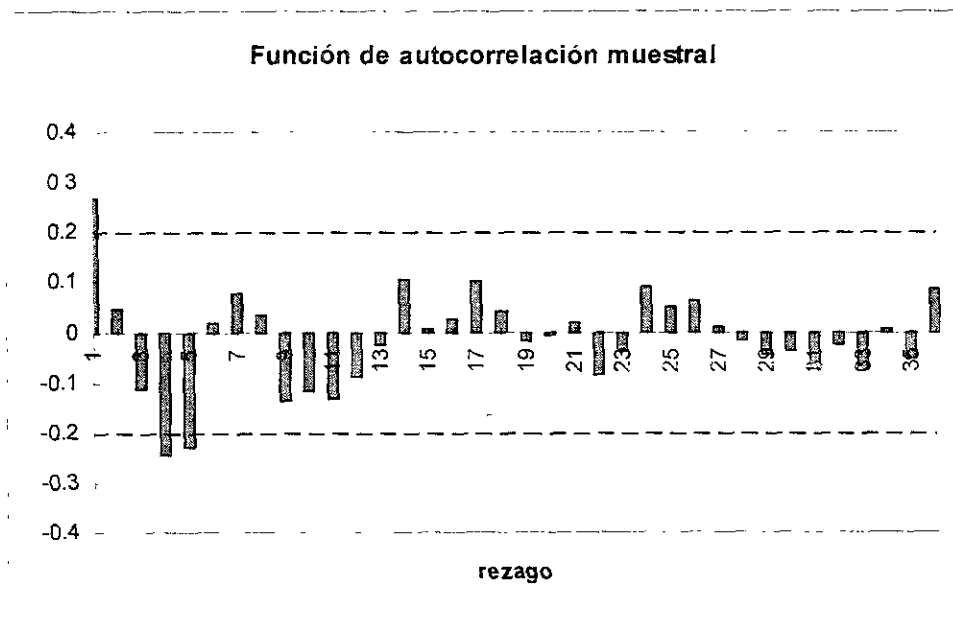
Como **tercer paso**, es recomendable graficar la función de autocorrelación de la serie transformada. Generalmente bastará con obtener las primeras $N/4$ correlaciones (N es el número de datos de la serie), salvo que se considere que las correlaciones más allá de las primeras $N/4$ son significativas. En este ejercicio y los siguientes se considerarán las primeras 36 correlaciones simplemente por ser este el número que por omisión calcula *Econometric Views* y porque 36 abarca más que la cuarta parte de la serie original.

La forma de la función de autocorrelación no permite concluir con toda certeza la presencia de ciclos en la serie; sin embargo, dado su comportamiento en cuanto a la alternancia de signos, es presumible que así sea; no obstante lo anterior, solo en los rezagos $k=1, 5$ y 6 se tienen valores significativos de las autocorrelaciones, según el intervalo establecido por *Econometric Views*,

mismo que se muestra, en líneas punteadas, en la figura 3.3. Debido a esto, es difícil afirmar, solo a partir de la información proporcionada por las autocorrelaciones muestrales, cuántos ciclos y de qué duraciones están presentes en la serie, por lo que los pasos siguientes del algoritmo consistirán en calcular la ESDE para determinar, con mayor claridad y confianza, la existencia de ciclos en la serie estudiada.

FIGURA 3.3

Función de autocorrelación muestral de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos para los primeros 36 rezagos



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con los datos generados por el paquete estadístico *Econometric Views*.

Segunda fase: El cálculo de la ESDE

Como fue visto en la sección 3.1.1, la formulación final para el cálculo de la ESDE es

$$R_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{M-1} r_{xx}(k) w(k) \cos \frac{\pi k l}{F} \right\}, l = 1, 2, \dots, F,$$

donde

l : índice o contador de los puntos de la ESDE

$r_{xx}(k)$: función de autocorrelación de la serie estacionaria (en este caso, la tasa de crecimiento del índice del PIB de los Estados Unidos, 1871 a 1994)

$w(k)$: ventana de intervalo

F : número de puntos deseados para la gráfica de la ESDE

k : número de rezagos

La ventana de intervalo puede ser cualquiera que cumpla las condiciones establecidas en (2.33). Por ejemplo, A. Ambardar¹¹ presenta una lista de quince ventanas que cumplen tales condiciones. En este ejercicio se utilizará la ventana de Barlett y en la sección 3.2 se repetirá el análisis para esta misma serie utilizando la ventana de Tukey, ambas mostradas en el cuadro 2.1. Ambas ventanas fueron seleccionadas porque su expresión matemática es sencilla, lo que facilita el cálculo de la ESDE.

El **cuarto paso** consiste en el cálculo de la ESDE utilizando la ventana de Barlett. Del cuadro 2.1 se tiene que la ventana de intervalo de Barlett es

$$w(u) = 1 - \frac{u}{M}, u \leq M; M > 0,$$

donde M , como antes, es el punto de truncamiento de la serie o, en otras palabras, la longitud de las subseries en que es dividida la serie analizada. Equivalentemente, M es el tamaño de la base de la ventana de intervalo, tal como fue expuesto en el capítulo 2.

Así pues, hay que determinar primero los valores de F y de M . Si bien el valor de F no es difícil de escoger pues F es, como ya se dijo, el número de puntos que se deseen calcular de la ESDE, se recomienda¹² que cuando menos abarque 2 o 3 veces M (por ejemplo, con $F=30$ puntos se obtiene una gráfica clara y suave de la ESDE); por su parte, para determinar el valor adecuado de M no hay un criterio específico, así que lo recomendable es escoger un valor inicial pequeño de M , digamos $M=3$ (esto es, se divide la serie estudiada en subseries con tres datos cada una) y calcular la ESDE para ese valor de M . Si la gráfica resulta llana en el sentido de que en ella no sobresale ningún pico, entonces debe rehacerse el cálculo considerando una M mayor; ¿qué tanto? Dos o tres veces el valor inicial, por ejemplo. Como puede notarse, el criterio para determinar M es bastante amplio; asimismo, tampoco hay manera de saber con certeza cuándo hay que detener el proceso de ajuste

¹¹ Ambardar, A. (1995), p. 645.

de la M. Así que la decisión sobre cuál M es la que proporciona la mejor estimación espectral queda, en gran parte, a juicio del investigador a partir de considerar tanto el conocimiento con que se cuente del fenómeno estudiado como el número de grados de libertad asociados con cada frecuencia sobresaliente de la gráfica de la ESDE, la longitud del intervalo de confianza que se calcule para el espectro teórico en dichas frecuencias y la magnitud de la varianza obtenida con cada valor de M.

Entonces, sea $F=30$ y comiencese con $M=3$. Así, la ESDE queda expresada como

$$R_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^2 r_{xx}(k) \left(1 - \frac{k}{3} \right) \cos \frac{\pi l k}{30} \right\}, l = 1, 2, \dots, 30$$

$$\begin{aligned} R_{xx}(l) &= 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^2 r_{xx}(k) \left(1 - \frac{k}{3} \right) \cos \frac{\pi l k}{30} \right\} \\ &= 2 \left\{ 1 + 2 \left[r_{xx}(1) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cos \frac{\pi l}{30} + r_{xx}(2) \left(1 - \frac{2}{3} \right) \cos \frac{2\pi l}{30} \right] \right\} \\ &= 2 \left\{ 1 + 2 \left[0.267 \left(\frac{2}{3} \right) \cos \frac{\pi l}{30} + 0.044 \left(\frac{1}{3} \right) \cos \frac{2\pi l}{30} \right] \right\}, l = 1, 2, \dots, 30. \end{aligned}$$

Para facilitar el cálculo de la expresión anterior se construye el siguiente cuadro:

¹² Ver capítulo 3, p. 48.

CUADRO 3.1

Cálculo de la ESDE de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos utilizando la ventana de Barlett con $M=3$

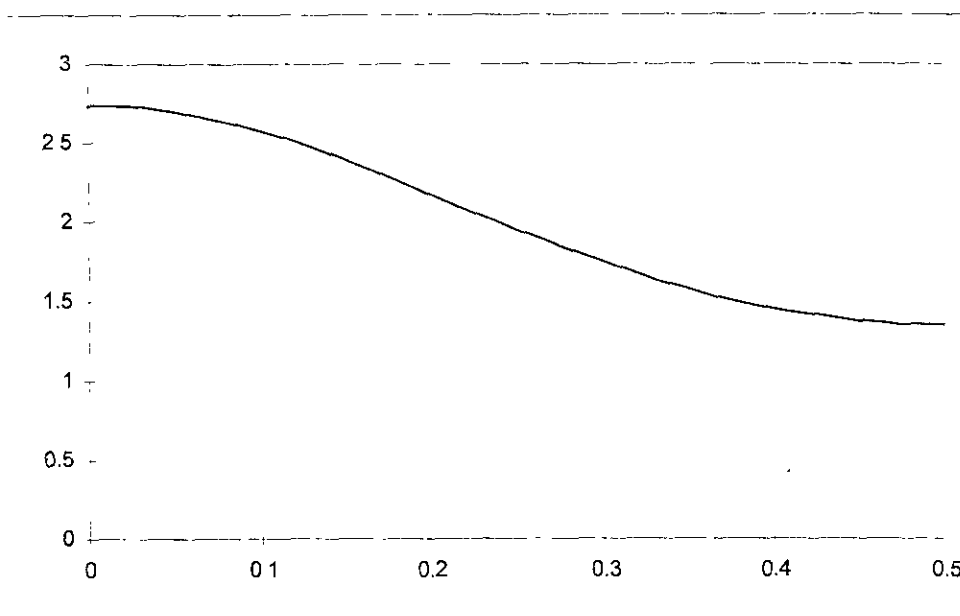
l	$f=l/2F$	$\cos(\pi^*l/F)$	I $(1+\cos(\pi/3))^*r(1)$ $*\cos(\pi^*l/F)$	$\cos(2\pi^*l/F)$	II $(1+\cos(2\pi/3))^*r(1)^*$ $\cos(2\pi^*l/F)$	ESDE: $R_{xx}(l)=2(1+I+II)$
0	0	1	0,3915	1	0.0170	2.8170
1	0.0167	0.9945	0.3894	0.9781	0.0166	2.8120
2	0.0333	0.9781	0.3829	0.9135	0.0155	2.7970
3	0.05	0.9511	0.3723	0.8090	0.0138	2.7722
4	0.0667	0.9135	0.3577	0.6691	0.0114	2.7381
5	0.0833	0.8660	0.3390	0.5000	0.0085	2.6951
6	0.1000	0.8090	0.3167	0.3090	0.0053	2.6440
7	0.1167	0.7431	0.2909	0.1045	0.0018	2.5854
8	0.1333	0.6691	0.2620	-0.1045	-0.0018	2.5204
9	0.1500	0.5878	0.02301	-0.3090	-0.0053	2.4497
10	0.1667	0.5000	0.1958	-0.5000	-0.0085	2.3745
11	0.1833	0.4067	0.1592	-0.6691	-0.0114	2.2957
12	0.2000	0.3090	0.1210	-0.8090	-0.0138	2.2145
13	0.2167	0.2079	0.0814	-0.9135	-0.0155	2.1317
14	0.2333	0.1045	0.0409	-0.9781	-0.0166	2.0486
15	0.2500	0.0000	0.0000	-1.000	-0.0170	1.9660
16	0.2667	-0.1045	-0.0409	-0.9781	-0.0166	1.8849
17	0.2833	-0.2079	-0.0814	-0.9135	-0.0155	1.8061
18	0.3000	-0.3090	-0.1210	-0.8090	-0.0138	1.7305
19	0.3167	-0.4067	-0.1592	-0.6691	-0.0114	1.6588
20	0.3333	-0.5000	-0.1958	-0.5000	-0.0085	1.5915
21	0.3500	-0.5878	-0.2301	-0.3090	-0.0053	1.5293
22	0.3667	-0.6691	-0.2620	-0.1045	-0.0018	1.4725
23	0.3833	-0.7431	-0.2909	0.1045	0.0018	1.4217
24	0.4000	-0.8090	-0.3167	0.3090	0.0053	1.3770
25	0.4167	-0.8660	-0.3390	0.5000	0.0085	1.3389
26	0.4333	-0.9135	-0.3577	0.6691	0.0114	1.3074
27	0.4500	-0.9511	-0.3723	0.8090	0.0138	1.2828
28	0.4667	-0.9781	-0.3829	0.9135	0.0155	1.2652
29	0.4833	-0.9945	-0.3894	0.9781	0.0166	1.2545
30	0.5000	-1.0000	-0.3915	1.0000	0.0170	1.2510

Fuente: Elaboración propia.

La última columna del cuadro anterior contiene los datos de la ESDE, cuya gráfica como función de la frecuencia (segunda columna) se muestra en la figura 3.4.

FIGURA 3.4

ESDE de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos usando la ventana de Barlett con $M=3$



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con los datos del cuadro 3.1.

El **sexto paso** se trata de la interpretación de la gráfica obtenida en el paso anterior. Como los datos de la serie estudiada son anuales, entonces la frecuencia, representada en el eje horizontal, está medida en ciclos por año.

El eje vertical corresponde a los datos de la ESDE que, por la forma de calcularla, es adimensional¹³ y su interpretación es similar a la que tiene la varianza en el dominio del tiempo. De manera general, se asume que si en la gráfica de la ESDE sobresale uno o más picos, querría decir que la varianza de la serie se debería a la presencia de componentes cíclicos en ella con frecuencias aproximadas a aquellas que presentan el pico. Por el contrario, el que la gráfica de la ESDE resulte llana usualmente es interpretado como indicador de la ausencia de ciclos en la serie analizada. Sin embargo, cuando la M utilizada es muy pequeña, como en el presente ejemplo, la gráfica llana podría indicar, más que la ausencia de ciclos en la serie, la necesidad de incrementar el valor de M . Análogamente, suele suceder que cuando M es demasiado grande, la ESDE presente más picos que los atribuibles a fluctuaciones cíclicas de la serie.

¹³ Ver capítulo 3, p. 48.

Como en este ejemplo el valor inicial de M fue muy pequeño, la gráfica de la ESDE no proporciona ninguna información sobre la naturaleza cíclica de la serie considerada por lo cual es necesario repetir los pasos quinto y sexto para un valor de M mayor, tal como M=9.

Repetición de los pasos quinto y sexto con M=9

Para M=9, la ESDE se expresa como

$$R_{xx}(l) = 2 \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^8 r_{xx}(k) \left(1 - \frac{k}{9} \right) \cos \frac{\pi dk}{30} \right\}, l = 1, 2, \dots, 30.$$

Para el cálculo de ésta se construye un cuadro análogo al anterior pero con más columnas pues el límite superior de la sumatoria se incrementó de 2 a 8. Para aligerar la ilustración del algoritmo, en el cuadro 3.2 solo se muestran las columnas correspondientes a la frecuencia y a la ESDE obtenida con M=9.

CUADRO 3.1

Cálculo de la ESDE de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos utilizando la ventana de Barlett con M=9

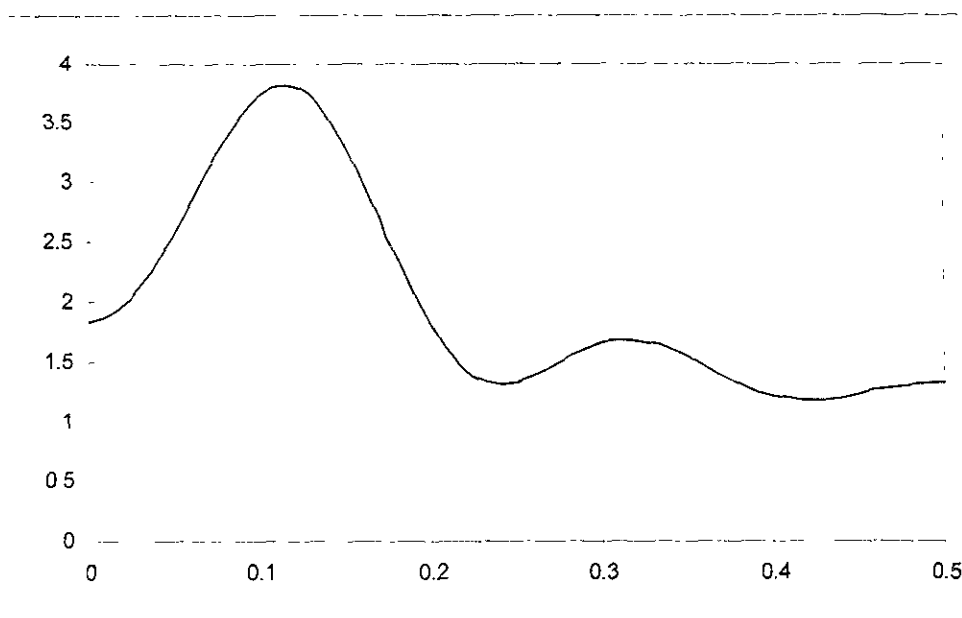
Frecuencia	ESDE (M=9)	Frecuencia	ESDE (M=9)	Frecuencia	ESDE (M=9)
0	1.8589	0.1667	2.9190	0.3333	1.5696
0.0167	1.9590	0.1833	2.3904	0.3500	1.4959
0.0333	2.2409	0.2000	1.9088	0.3667	1.3894
0.05	2.6513	0.2167	1.5472	0.3833	1.2803
0.0667	3.1102	0.2333	1.3414	0.4000	1.1949
0.0833	3.5242	0.2500	1.2853	0.4167	1.1485
0.1000	3.8047	0.2667	1.3383	0.4333	1.1425
0.1167	3.8866	0.2833	1.4418	0.4500	1.1669
0.1333	3.7446	0.3000	1.5381	0.4667	1.2042
0.1500	3.4006	0.3167	1.5862	0.4833	1.2358

Fuente: Elaboración propia.

En la figura 3.5 se presenta la gráfica correspondiente a los datos del cuadro 3.2.

FIGURA 3.5

ESDE de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos usando la ventana de Barlett con $M=9$



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del cuadro 3.2.

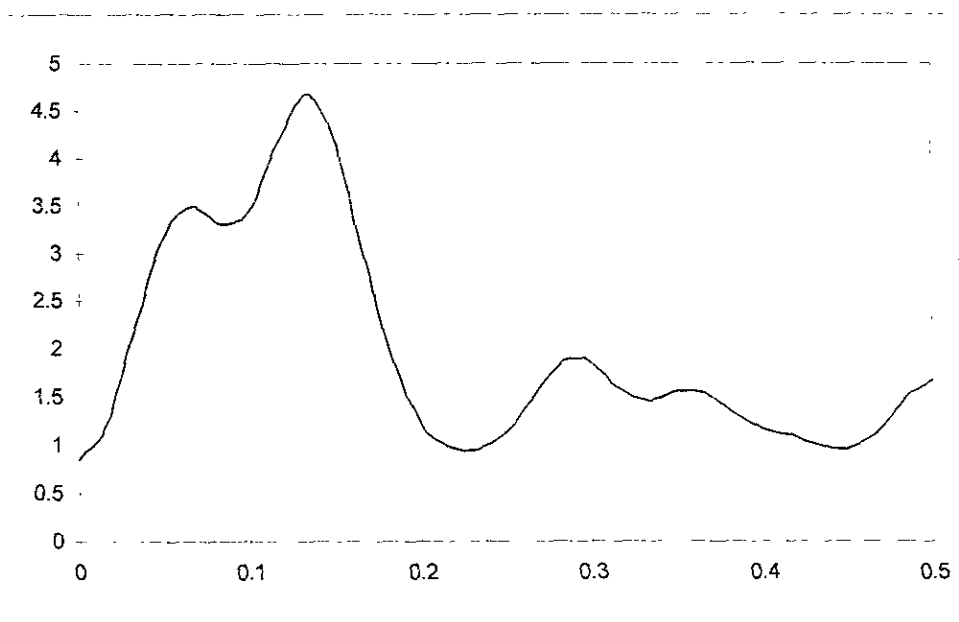
Como se aprecia en la gráfica, el incrementar el valor de M dio como resultado una estimación a partir de la cual sí puede obtenerse información útil sobre los ciclos presentes en la serie correspondiente. Los dos picos que sobresalen en la ESDE corresponden, de manera aproximada, a las frecuencias $f_1=0.125$ y $f_2=0.35$ ciclos por año. Al tomar los inversos de las frecuencias anteriores se obtienen los periodos aproximados de los ciclos detectados en la serie. Así, a la frecuencia f_1 le corresponde un periodo de 8 años, mientras que para f_2 se tiene un periodo de aproximadamente 3 años.

Como la ESDE es una aproximación del espectro y éste es la contraparte de la varianza en el dominio de la frecuencia, entonces puede afirmarse que la varianza de la serie original se debe básicamente a dos componentes cíclicos con periodos aproximados de 8 y 3 años, respectivamente.

Es en este punto cuando puede considerarse como satisfactoria la estimación obtenida con $M=9$ pues, como se ve en la figura 3.6, al aumentar el valor de M a 18, se obtiene una gráfica con tantos picos que se vuelve difícil rescatar información útil de ésta.

FIGURA 3.6

ESDE de la tasa de crecimiento del PIB de los Estados Unidos usando la ventana de Barlett con $M=3$



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con datos generados a partir de la expresión (3.5).

El escoger entonces $M=9$ como el punto de truncamiento que proporciona una mejor estimación de la naturaleza espectral de la serie se justifica también mediante la comparación de las tasas de reducción de la varianza que se obtienen para cada valor de M . Estas tasas se calculan como lo indica la segunda columna del cuadro 2.2. Así, para la ventana de Barlett, la expresión de la tasa de varianza es $I/N=(0.667)M/N$. Sustituyendo los valores de M se obtienen los siguientes resultados: 0.016, para $M=3$; 0.048, para $M=9$ y 0.09 para $M=18$. Lo anterior quiere decir que al dividir la serie en subseries de longitud tres, la varianza de la ESDE se reduce al 1.6% de la varianza del espectro muestral¹⁴, mientras que con $M=9$ la reducción es al 4.8% y para $M=18$, al 9%. Aun cuando la reducción de la varianza es mayor en el primer caso, la ESDE correspondiente se descarta como la mejor estimación de las tres pues resulta una curva sin picos. Por tanto, se elige la estimación obtenida con $M=9$ pues da una reducción de la varianza mayor que la de $M=18$ y, además, la información deducida a través de su forma gráfica es más clara que las otras dos.

Como último paso, se aconseja construir intervalos de confianza para el espectro teórico a partir de las frecuencias significativas mostradas por la ESDE para $M=9$.

¹⁴ Ver capítulo 2, pp 42-43.

Paso final (séptimo y último): Construcción de intervalos de confianza para el espectro teórico en las frecuencias $f_1=0.125$ y $f_2=0.35$ ciclos por año.

El intervalo de confianza del $100(1-\alpha)\%$ para una frecuencia dada, de acuerdo con la formulación final de la ESDE y con la expresión (2.47), es

$$P \left\{ \frac{\nu R_{xx}(f)}{\chi_{\nu} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)} \leq \Gamma_{xx}(f) \leq \frac{\nu R_{xx}(f)}{\chi_{\nu} \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right\}, \quad (3.6)$$

Para este ejercicio se construirán intervalos del 95% y 90% para las frecuencias $f_1=0.125$ y $f_2=0.35$ ciclos por año.

Por la tercera columna del cuadro 2.2 se sabe que el número de grados de libertad asociados con la ventana de Barlett es $\nu=3N/M$. Sustituyendo entonces $M=9$ y $N=124$ se tiene que $\nu=41.33$; sin embargo, como el número de grados de libertad debe ser entero, se toma $\nu=41$. De aquí que el intervalo de confianza del 95% para $f_1=0.125$ sea .

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{41 R_{xx}(0.125)}{\chi_{41} \left(1 - \frac{0.05}{2} \right)} \leq \Gamma_{xx}(0.125) \leq \frac{41 R_{xx}(0.125)}{\chi_{41} \left(\frac{0.05}{2} \right)} \right\} \\ &= P \left\{ \frac{41 R_{xx}(0.125)}{\chi_{41}(0.975)} \leq \Gamma_{xx}(0.125) \leq \frac{41 R_{xx}(0.125)}{\chi_{41}(0.025)} \right\} \\ &= P \left\{ \frac{41(1.931)}{59.34} \leq \Gamma_{xx}(0.125) \leq \frac{41(1.931)}{24.42} \right\} \end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo de confianza del 95 por ciento para el espectro teórico en $f_1=0.125$ ciclos por año es

$$(1.3341 \leq \Gamma_{xx}(0.125) \leq 3.2420).$$

Lo cual quiere decir que con un nivel de confianza del 95% puede afirmarse que el valor del espectro teórico en $f_1=0.125$ se encuentra entre 1.3341 y 3.2420.

Y el correspondiente al espectro teórico en $f_2=0.35$ es

$$(1.3403 \leq \Gamma(0.35) \leq 3.2570)$$

Análogamente, con un nivel de confianza del 90 por ciento se obtienen los siguientes intervalos:

Para $f_1=0.125$ el intervalo es

$$(1.4201 \leq \Gamma(0.125) \leq 2.9864),$$

y para $f_2=0.35$ queda

$$(1.4266 \leq \Gamma(0.35) \leq 3.0001).$$

Con esto concluye la presentación y ejemplificación del algoritmo que se sugiere seguir en el análisis espectral práctico de series de tiempo.

En la sección siguiente se aplica este procedimiento a once series económicas.

3.2 EL ANÁLISIS ESPECTRAL DE SERIES ECONÓMICAS

En esta sección se resumen los resultados obtenidos al realizar el análisis espectral de las series del índice del PIB de Francia, Estados Unidos, el Reino Unido, Alemania, Italia, España, Argentina, Brasil, Chile, India y México, y de las series del índice de precios de Inglaterra y de la tasa de ganancia de los Estados Unidos, con el fin de identificar, de haberlos, los ciclos presentes en ellas.

En todas las series, la prueba de Dickey-Fuller aumentada indicó, con un nivel de confianza del 99%, su no estacionariedad; sin embargo, las series correspondientes a la tasa de crecimiento de cada una resultaron, de acuerdo con dicha prueba, ser estacionarias con el 99% de confianza por lo que el análisis se realizó con base en estas últimas pues, como se expuso en los capítulos anteriores, la estacionariedad es un requisito que deben cumplir las series para ser analizadas mediante su ESDE.

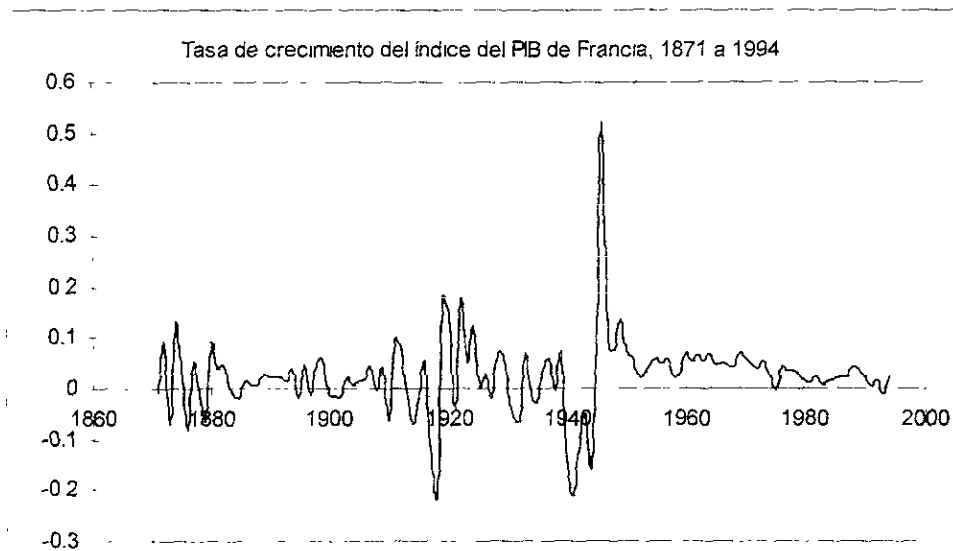
En todos los casos, por homogeneidad, se utilizó la ventana de Tukey; asimismo, el punto de truncamiento $M=9$ fue el que se consideró que proporcionaba la ESDE más clara y explicativa de la naturaleza cíclica de las series.

Como fue visto, la gráfica de la ESDE proporciona información sobre los ciclos que tienen una marcada presencia en la serie correspondiente o, de manera equivalente, muestra las frecuencias de los ciclos que provocan o explican la mayor parte de su varianza. Dichas frecuencias son básicamente aquellas en las cuales la ESDE muestra un "pico" notable bien definido. Sin embargo, en algunos casos, como ocurrió con las series de España y Brasil, la decisión sobre la significancia de algún "pico" resulta un tanto subjetiva pues su forma gráfica no es tan acentuada. No obstante lo anterior, la elección de las frecuencias está además respaldada por la construcción de intervalos de confianza para el valor del espectro teórico en tales frecuencias.

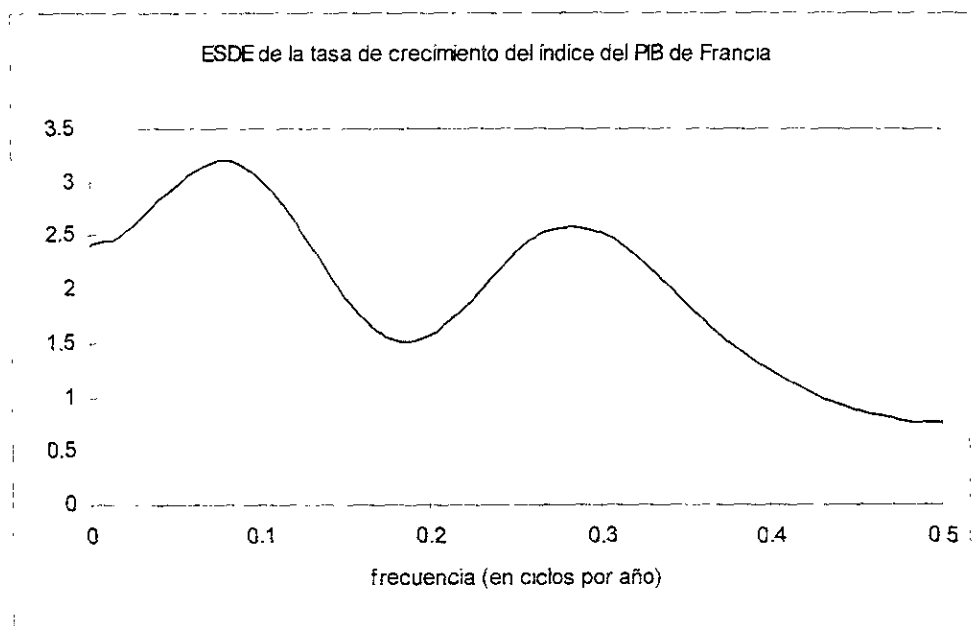
Con la intención de comparar la claridad de la información proporcionada por la ESDE sobre la naturaleza cíclica de una serie con aquella obtenida a partir de la inspección de su gráfica como función del tiempo, en cada caso se presenta la serie de la tasa de crecimiento y la ESDE calculada con base en ésta y, al final de las trece series analizadas, un cuadro con los principales resultados obtenidos, como el periodo aproximado de los ciclos detectados.

Finalmente, en el anexo estadístico de este capítulo se muestran los resultados de las pruebas de estacionariedad aplicadas, así como las gráficas de la serie original y de la función de autocorrelación muestral de su tasa de crecimiento junto con el intervalo de significancia sugerido por *Econometric Views* según el cual, se consideran nulas las autocorrelaciones que queden dentro de los límites de dicho intervalo.

FRANCIA

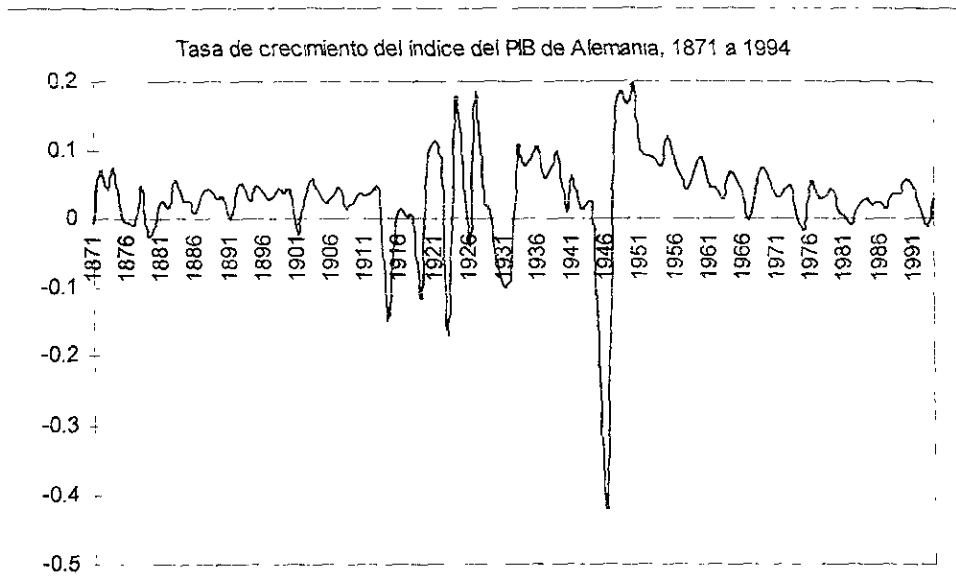


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.

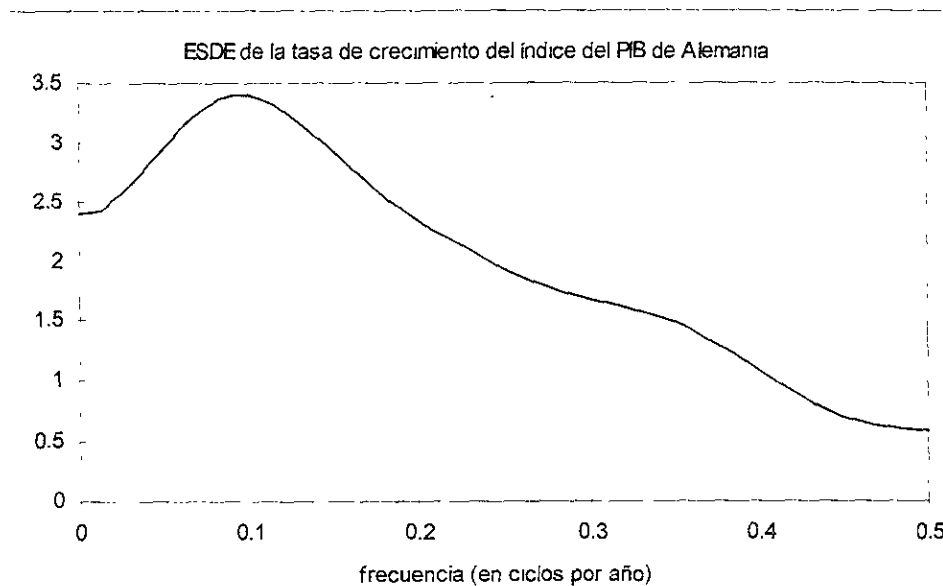


Fuente: Elaboración propia.

ALEMANIA

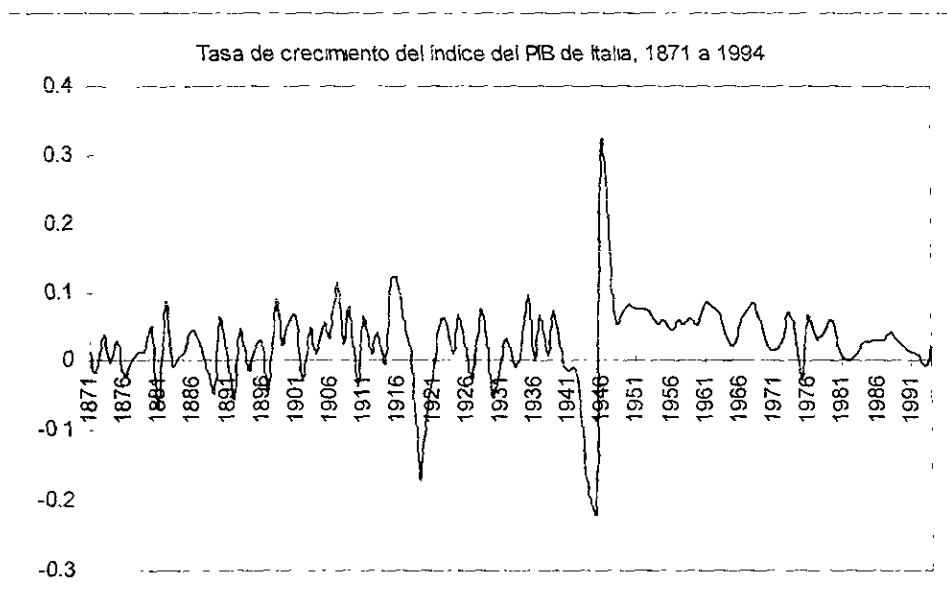


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.

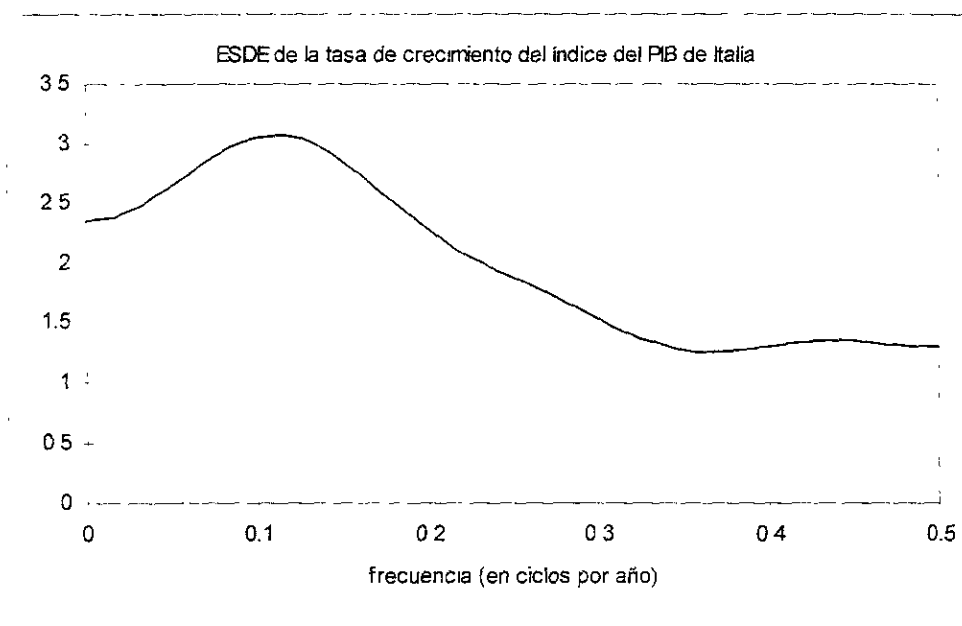


Fuente: Elaboración propia.

ITALIA

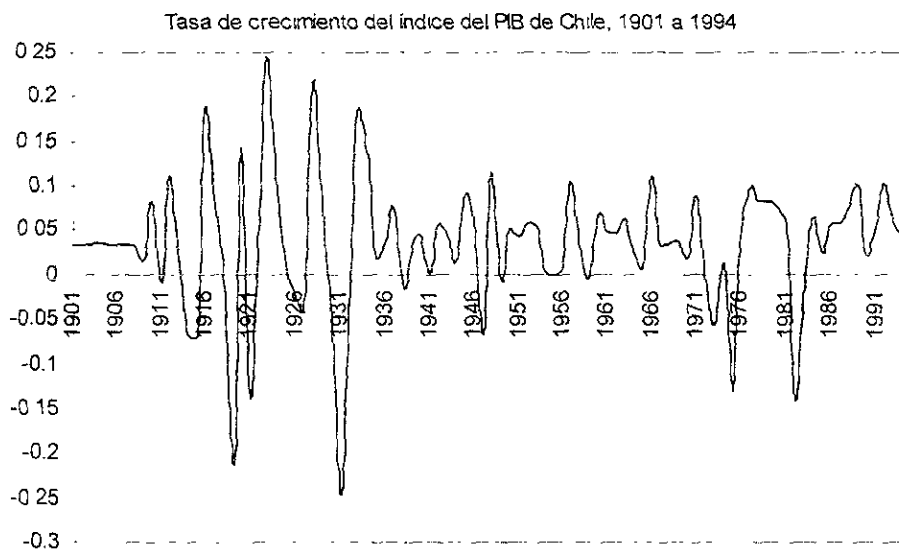


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.

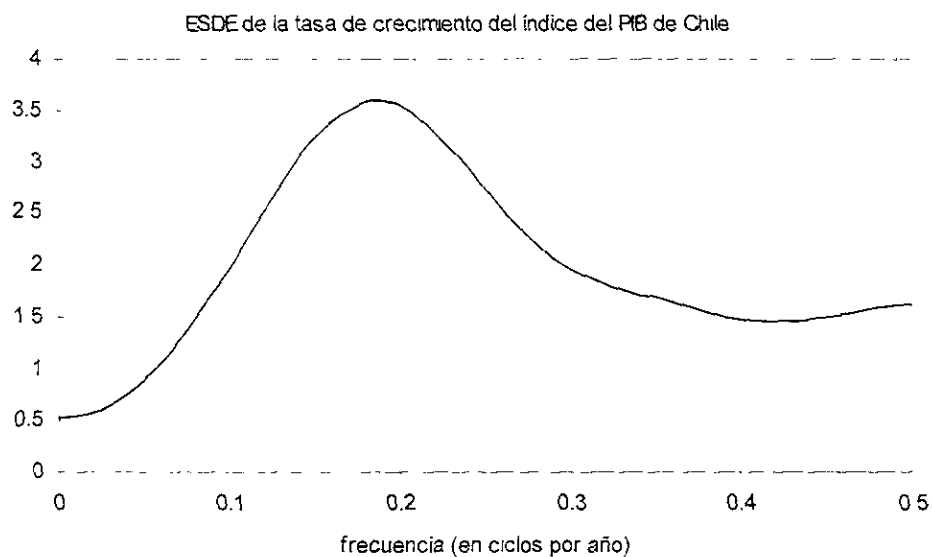


Fuente: Elaboración propia.

CHILE

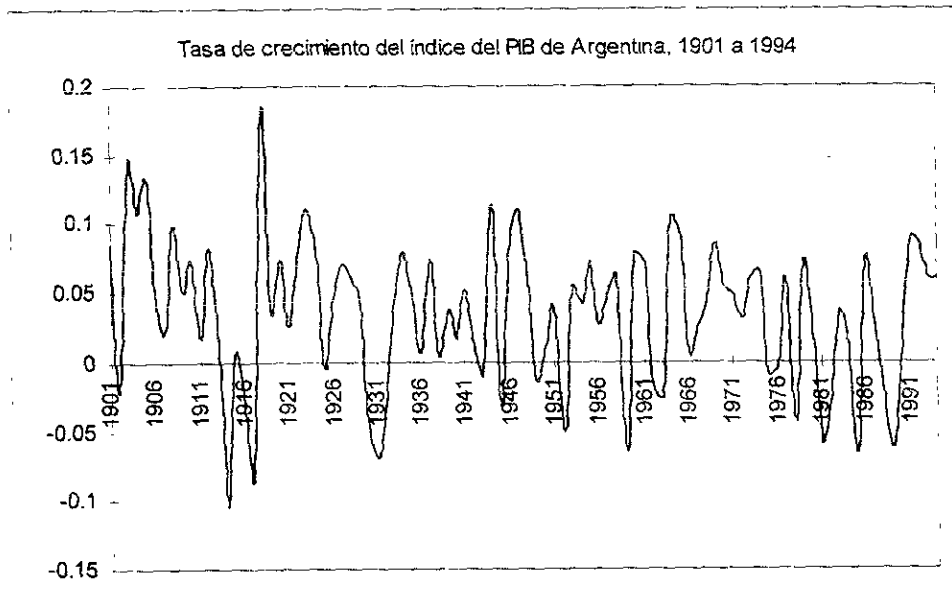


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.

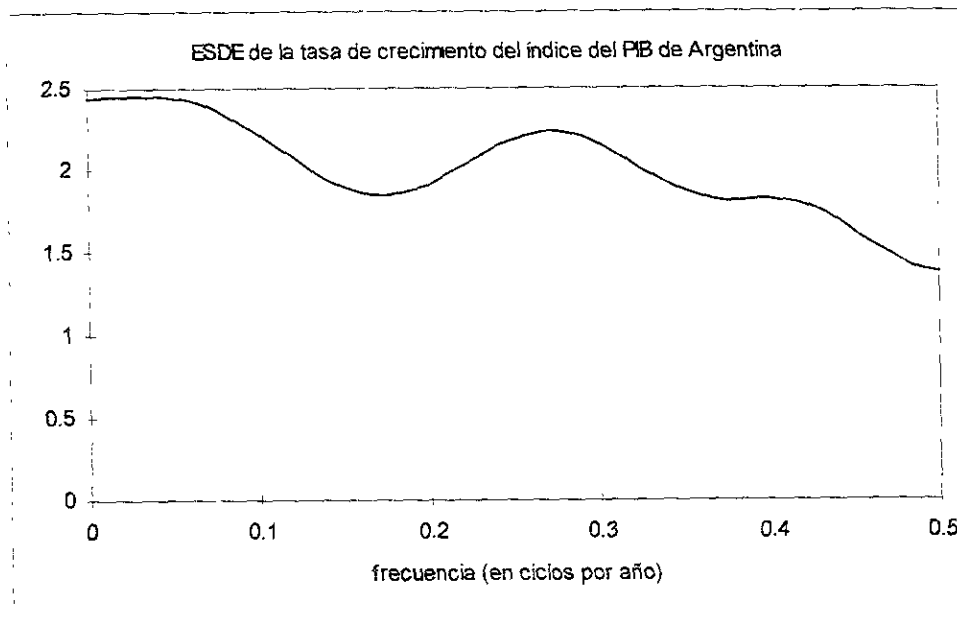


Fuente: Elaboración propia.

ARGENTINA

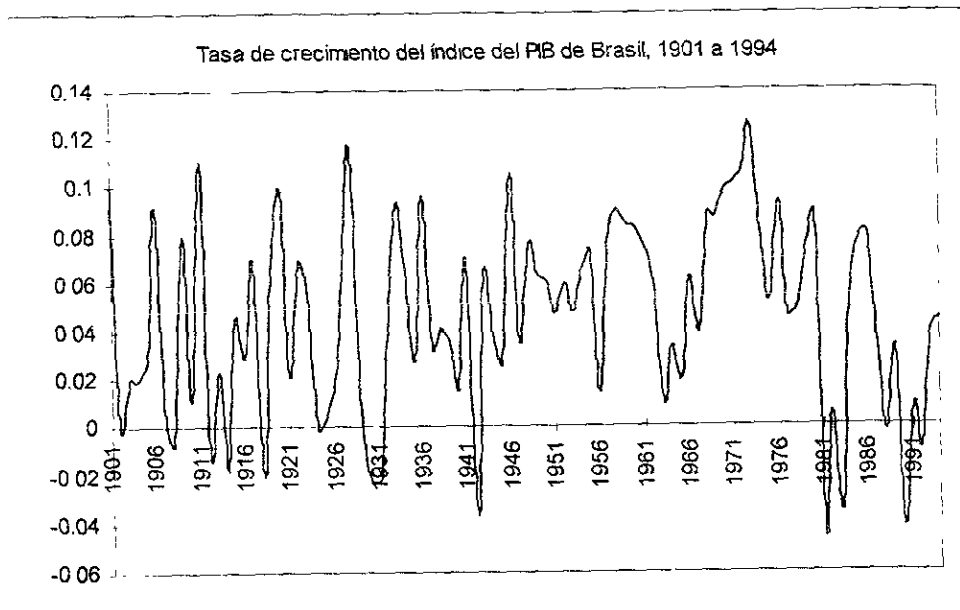


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.

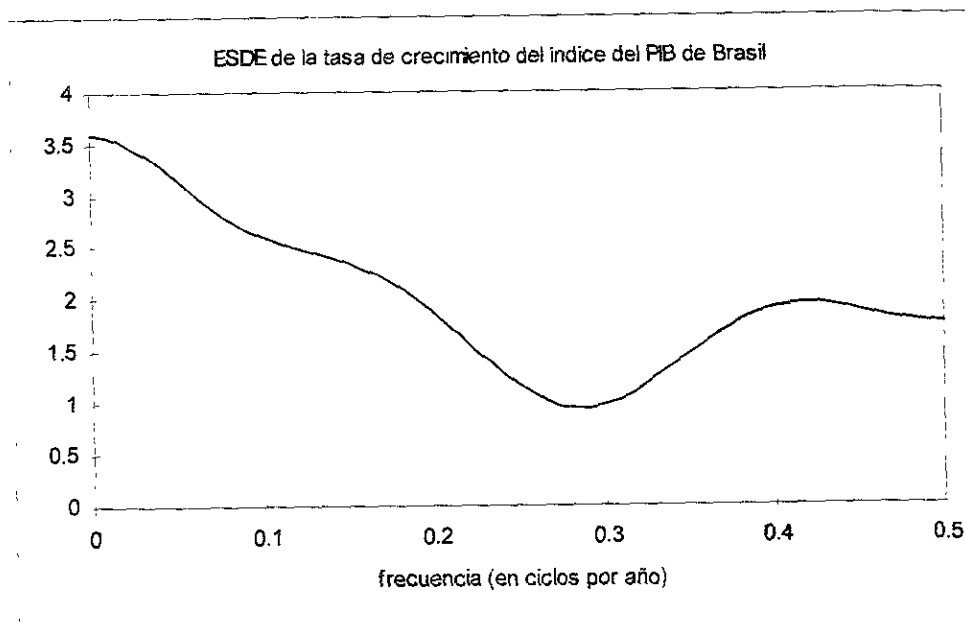


Fuente: Elaboración propia.

BRASIL

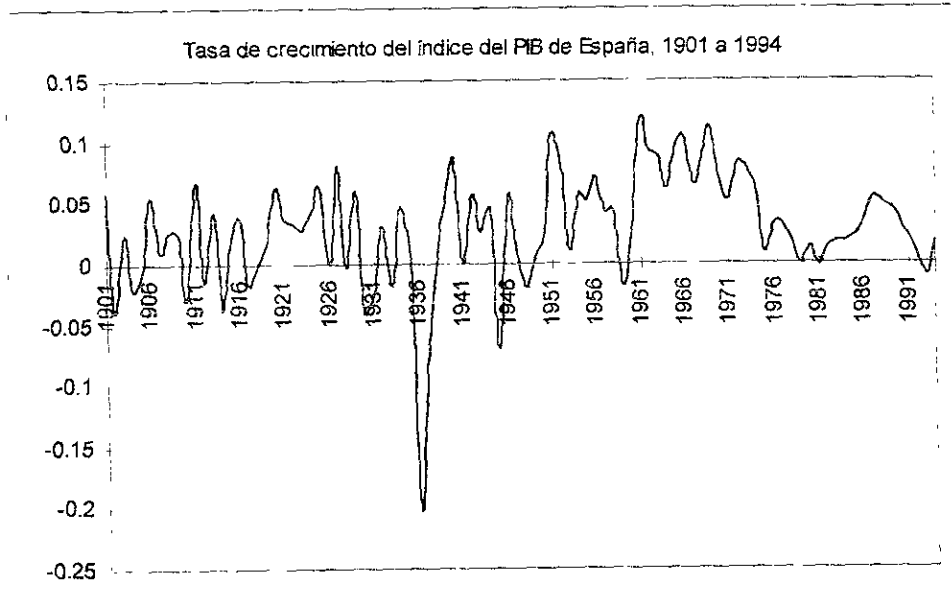


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.

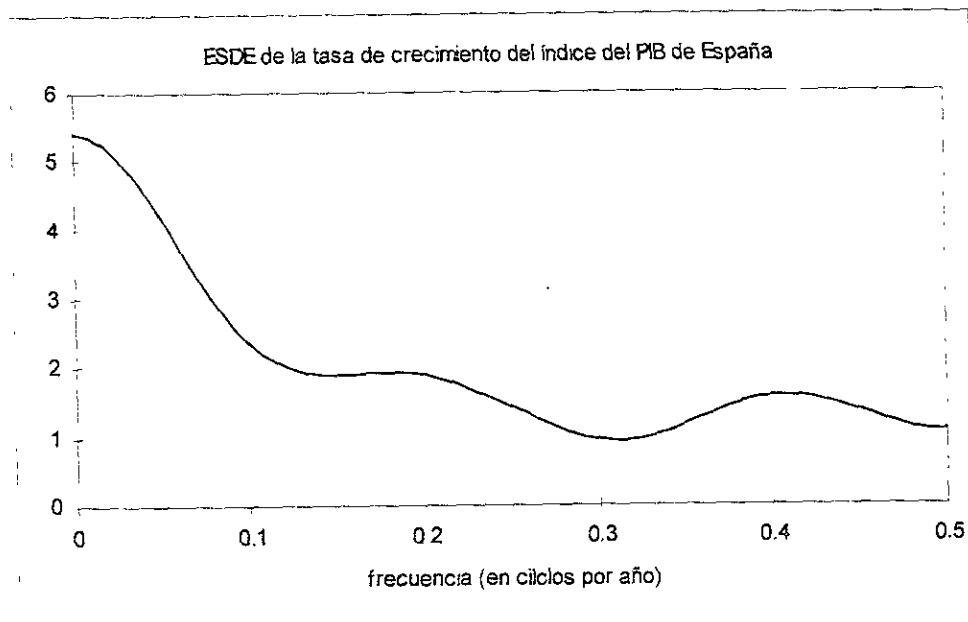


Fuente: Elaboración propia.

ESPAÑA



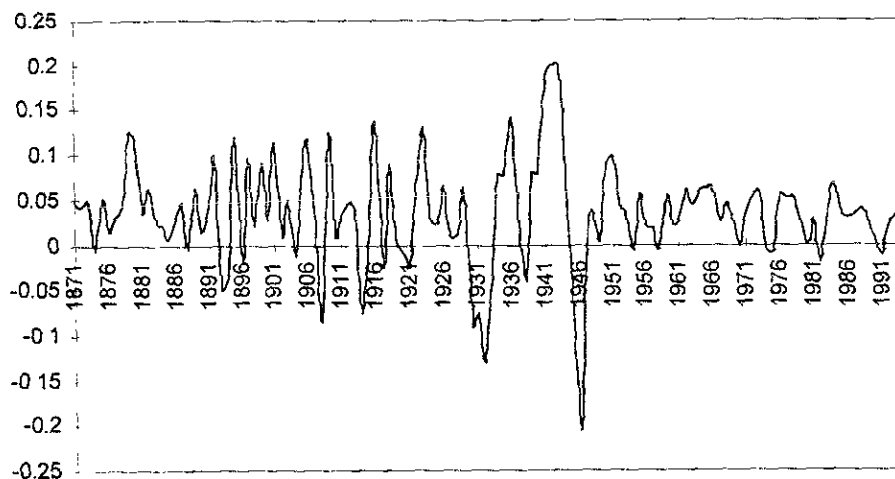
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 218-219.



Fuente: Elaboración propia.

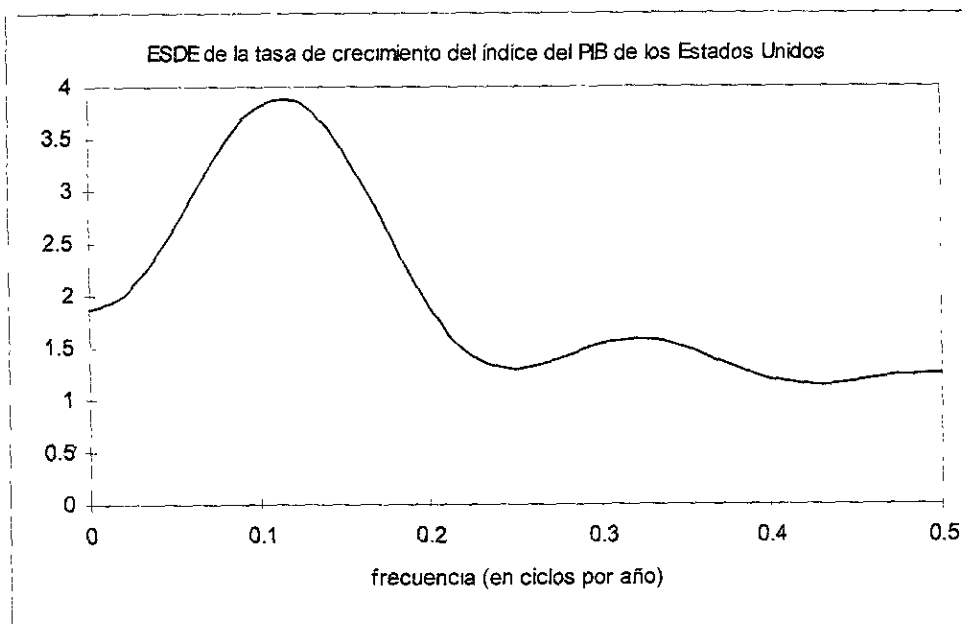
ESTADOS UNIDOS

Tasa de crecimiento del índice del PIB de los Estados Unidos, 1871 a 1994



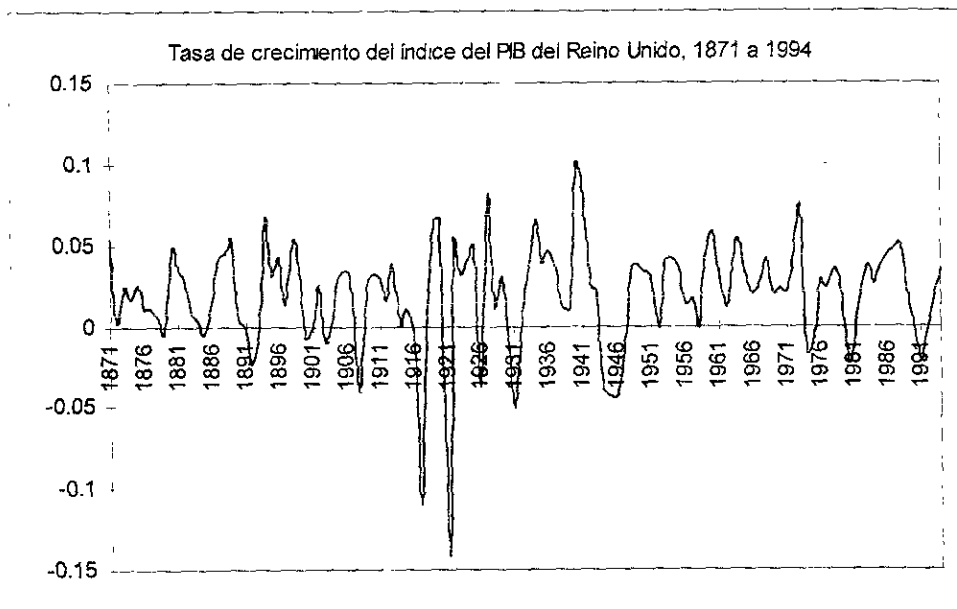
Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 214-217.

ESDE de la tasa de crecimiento del índice del PIB de los Estados Unidos

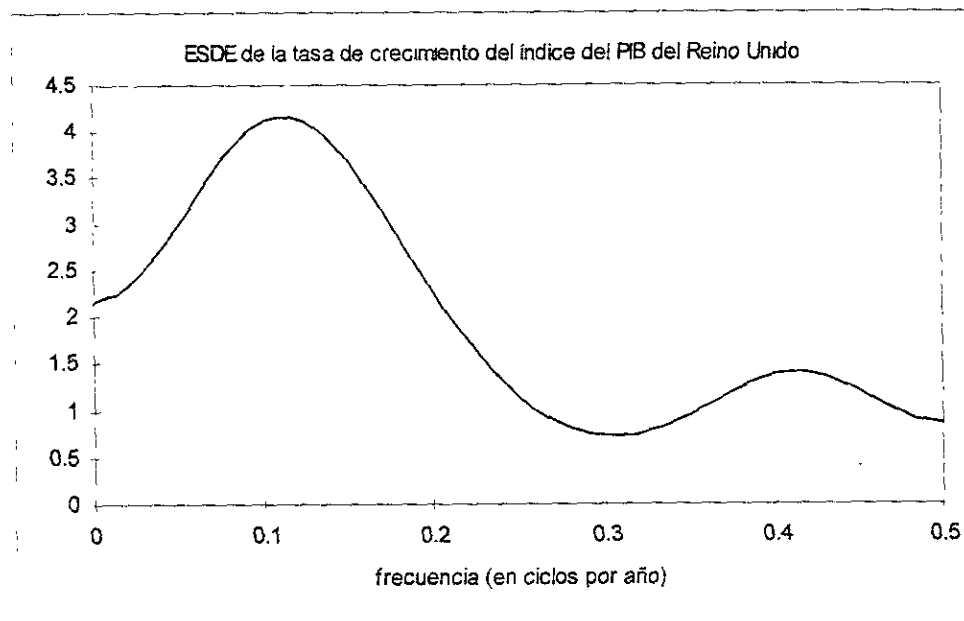


Fuente: Elaboración propia.

REINO UNIDO

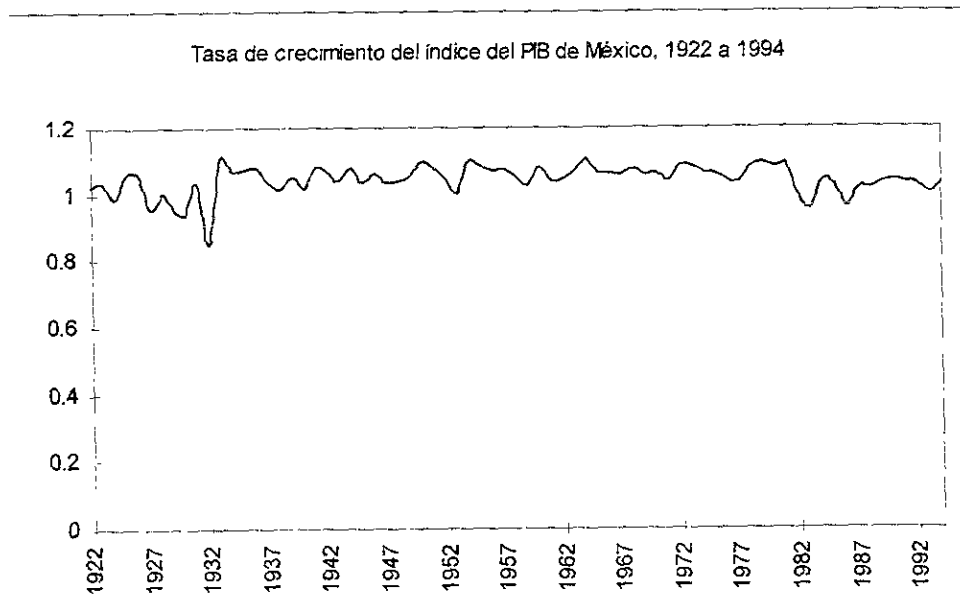


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 214-217.

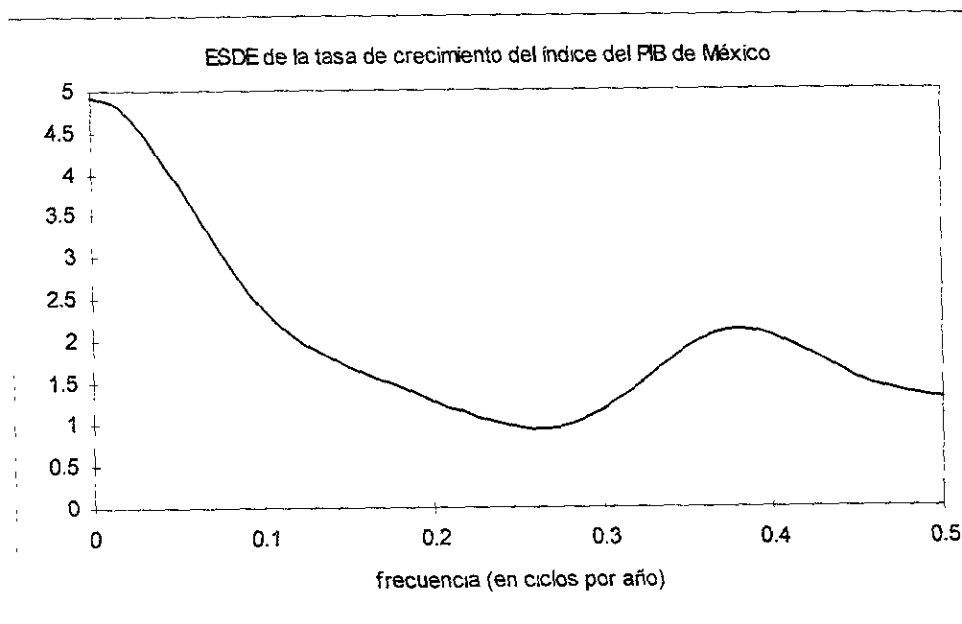


Fuente: Elaboración propia.

MÉXICO

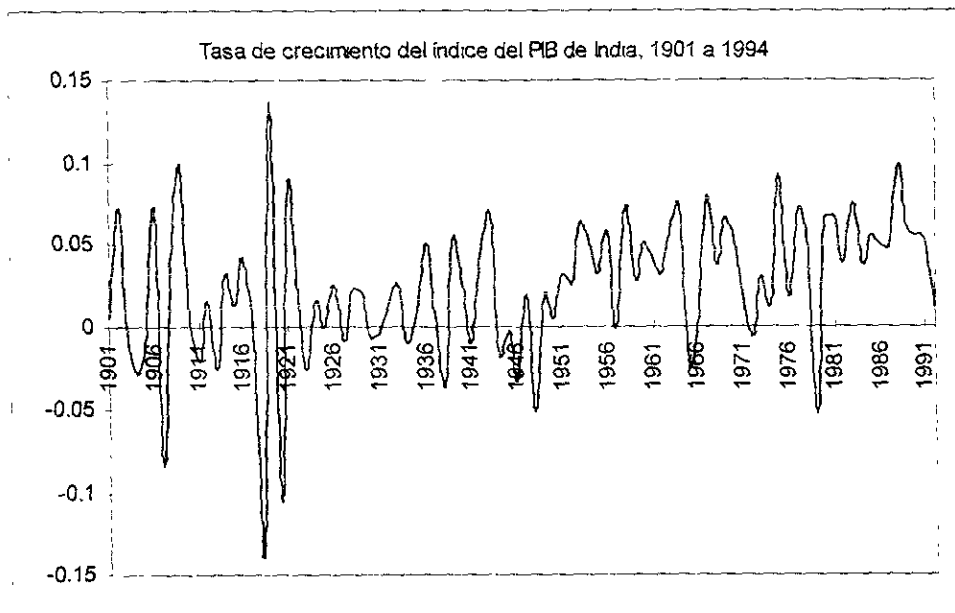


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp.222-223.

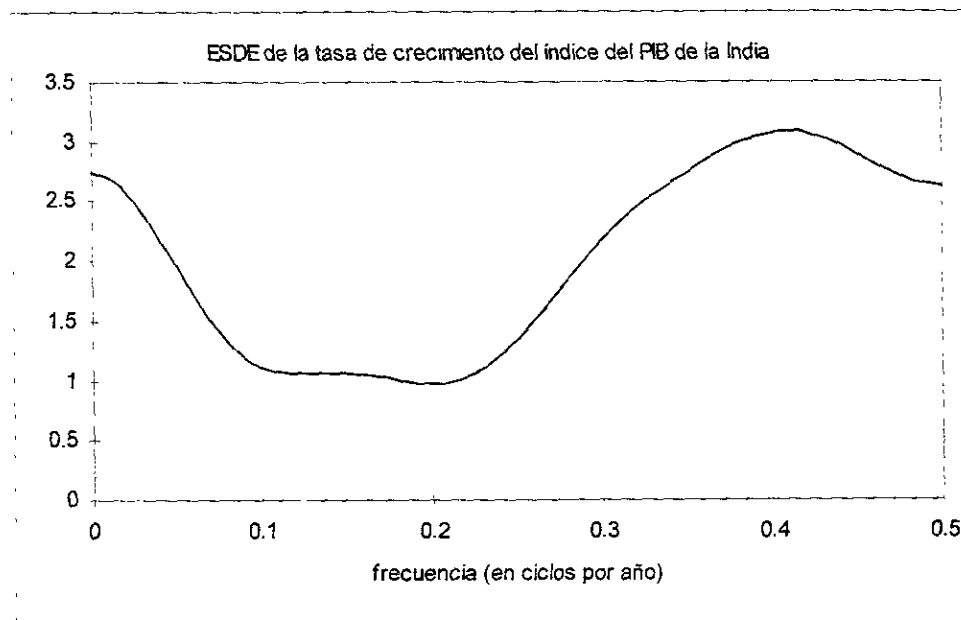


Fuente: Elaboración propia.

INDIA

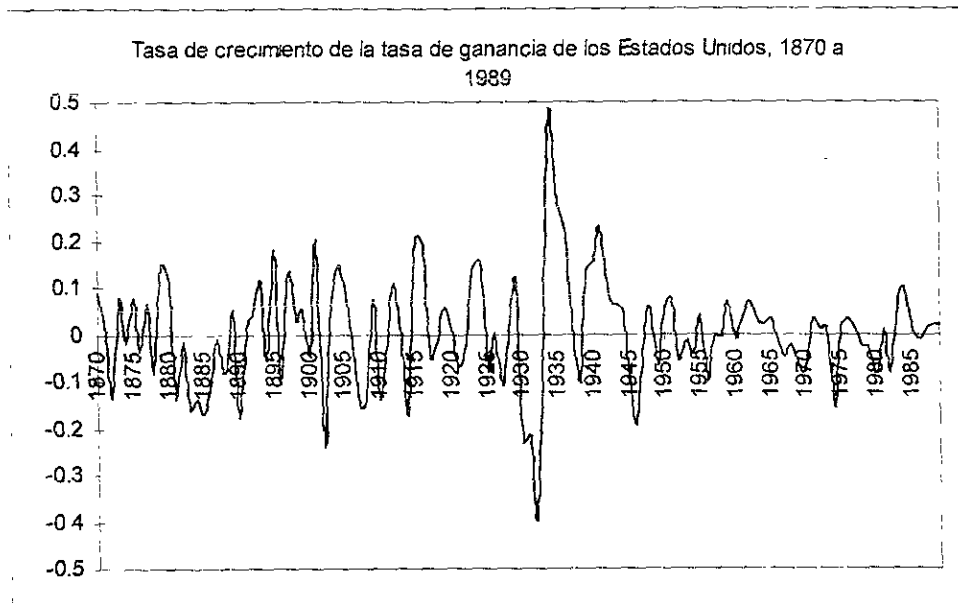


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp.224-2246

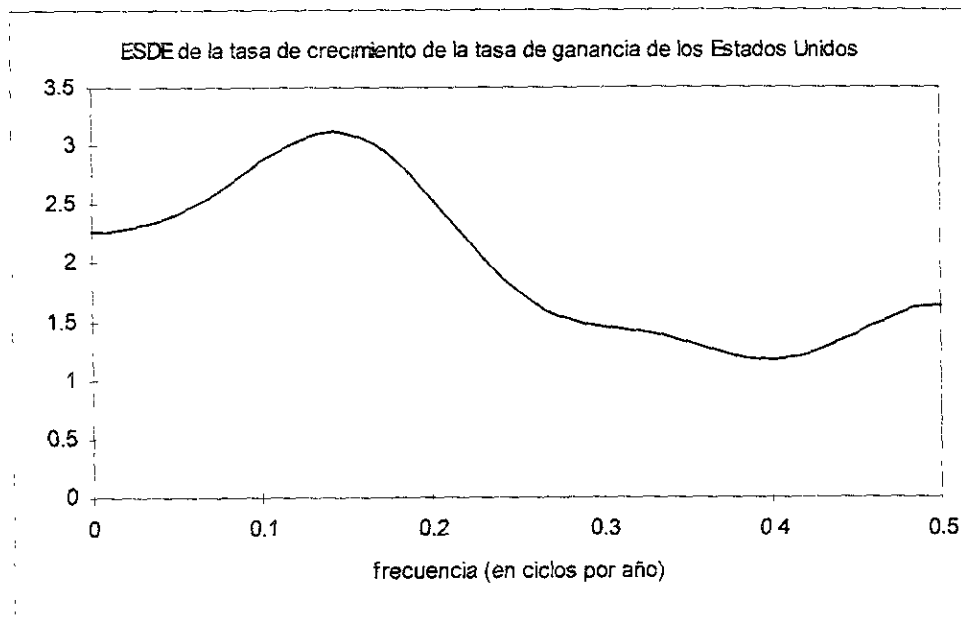


Fuente: Elaboración propia.

TASA DE GANANCIA DE LOS ESTADOS UNIDOS

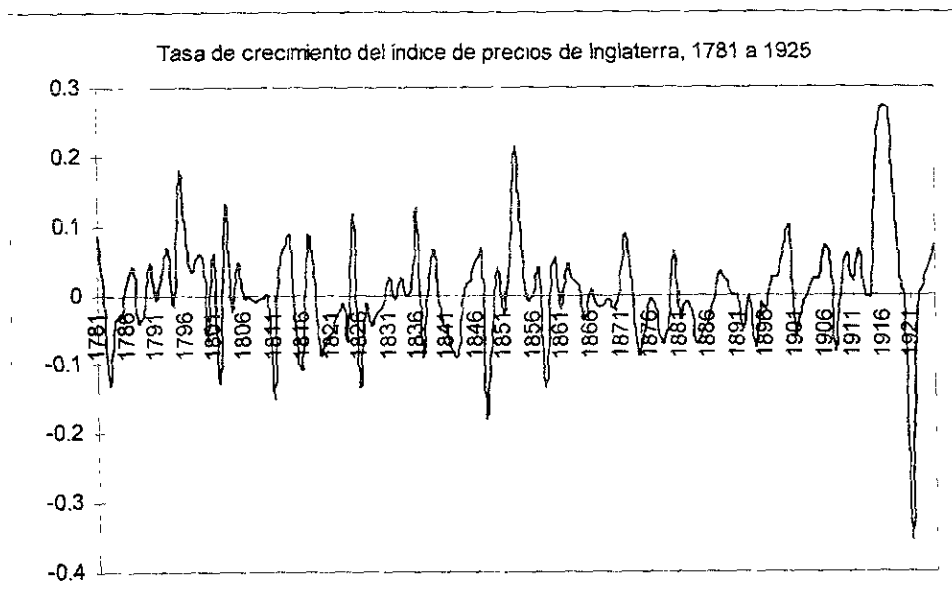


Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de Duménil, G. y D. Lévy, *op cit*, pp.354-361.

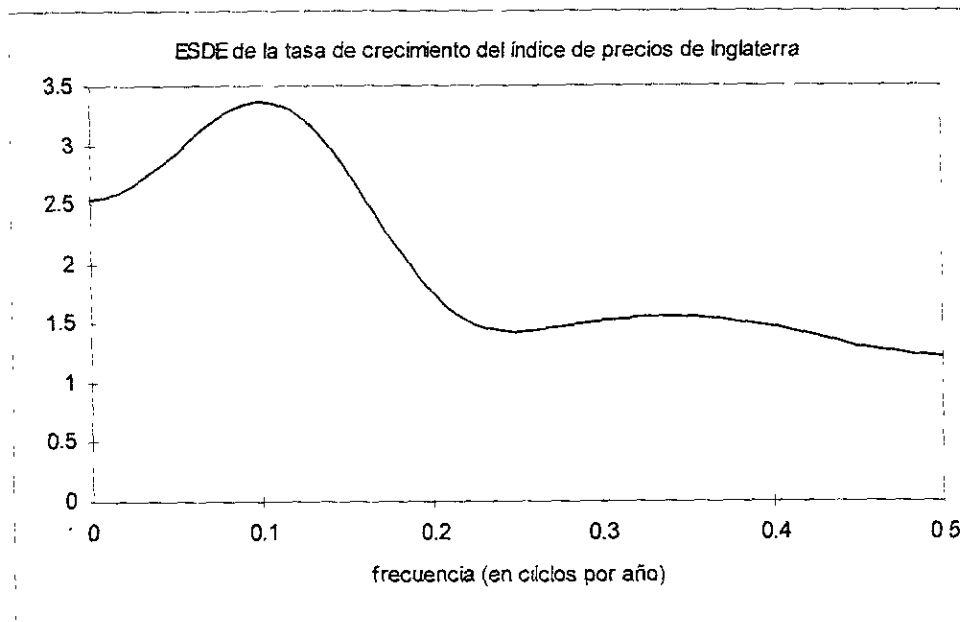


Fuente: Elaboración propia.

ÍNDICE DE PRECIOS DE INGLATERRA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de N. D. Kondratieff, *op cit*, pp.87-89



Fuente: Elaboración propia.

RESUMEN DE RESULTADOS

País	Frecuencias sobresaliente (f) en ciclos por periodo	Periodo (1/f) en años	$R_{xx}(f)$	Intervalo de confianza del 95% para el espectro teórico en f
Francia	0.08 y 0.28	12.5 y 3.5	3.2 y 2.58	(2.23, 5.77) y (1.8, 4.66)
Estados Unidos	0.11 y 0.325	9.09 y 3.08	3.89 y 1.55	(2.7, 7) y (1.08, 2.8)
Reino Unido	0.11 y 0.415	9.09 y 2.41	4.17 y 1.4	(2.9, 7.5) y (0.97, 2.52)
Alemania	.095	10.5	3.41	(46.06, 24.79)
Italia	0.11	9.09	3.07	(2.13, 5.52)
Argentina	0.27	3.7	2.23	(1.41, 4.09)
Brasil	0.41	2.44	1.93	(1.215, 3.531)
México	0.38	2.66	2.11	(1.26, 4.23)
India	0.41	2.44	3.08	(1.92, 5.71)
Chile	0.19	5.26	3.59	(2.5, 6.46)
España	0.41	2.44	1.571	(0.99, 2.875)
(Inglaterra) Índice de precios	0.1	10	3.36	(1.86, 7.8)
(Estados Unidos) tasa de ganancia	0.15	6.7	3.25	(2.07, 5.88)

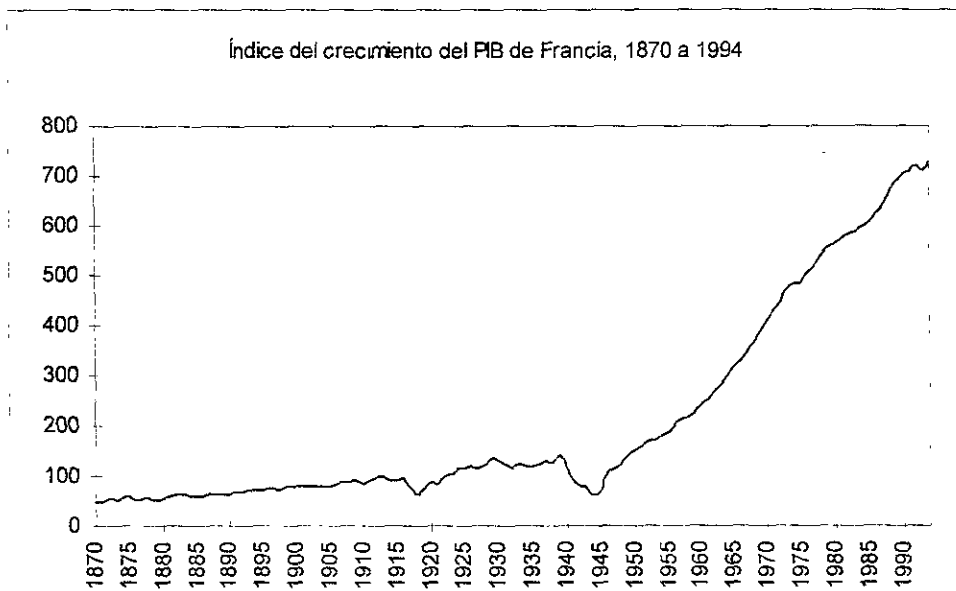
Fuente: Elaboración propia.

ANEXO ESTADÍSTICO

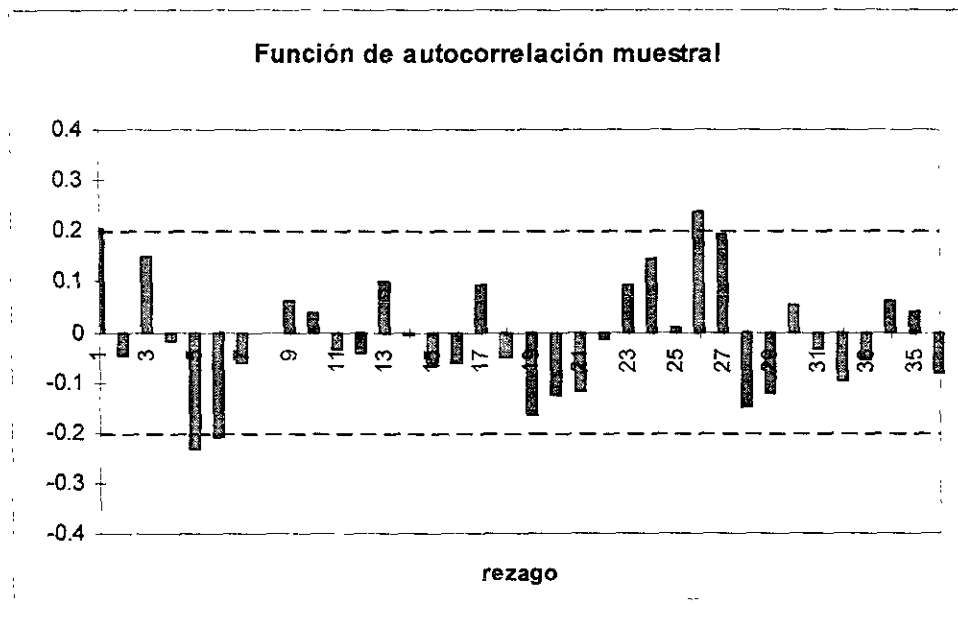
En esta parte se muestran, para cada serie considerada, las gráficas de la serie original (el índice del PIB de once de ellas, el índice de precios de Inglaterra y la tasa de ganancia de los Estados Unidos) y de la función de correlación muestral o *correlograma* junto con el intervalo de significancia para las autocorrelaciones sugerido por *Econometric Views*, así como los resultados obtenidos al aplicar la *Prueba de Dickey Fuller Aumentada* sobre estacionariedad tanto a las series originales como a sus tasas de crecimiento (para distinguirlas, cuando la prueba se realizó sobre el índice, al nombre del país correspondiente se le agregó una "I" al inicio). En todos los casos, según dicha prueba, puede afirmarse, incluso con un nivel de confianza del 99%, que la serie original no es estacionaria mientras, que la de su tasa de crecimiento sí resulta ser estacionaria.¹ El orden en que se muestran los resultados del anexo es el mismo que el seguido en el capítulo 3.

¹ Para una explicación de esta prueba y de los resultados que con ella se obtienen, véase Lilién, D. M. *et al*, *op cit*, pp. 178-183, o cualquier manual de *Econometric Views*.

FRANCIA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.

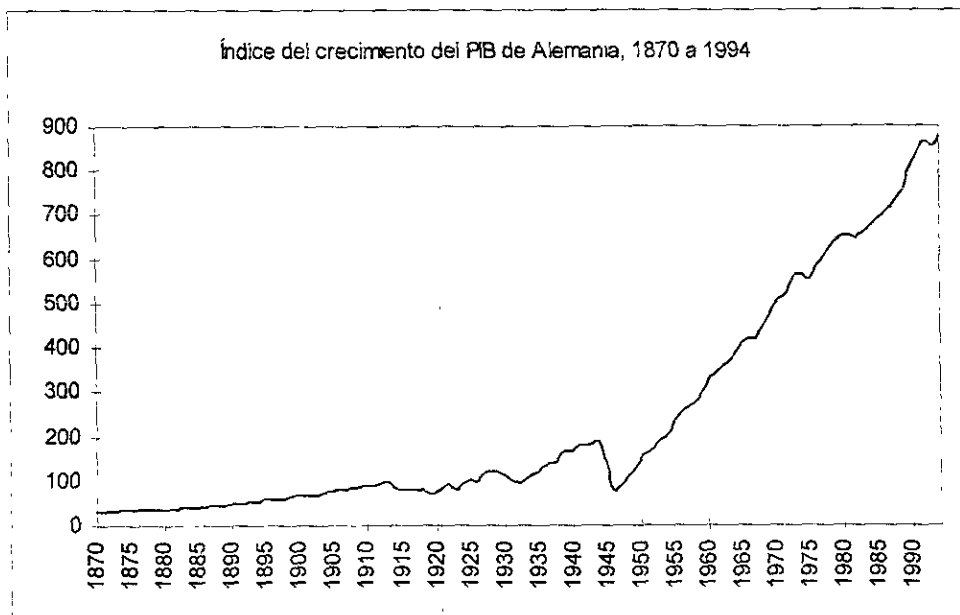


Fuente: Elaboración propia.

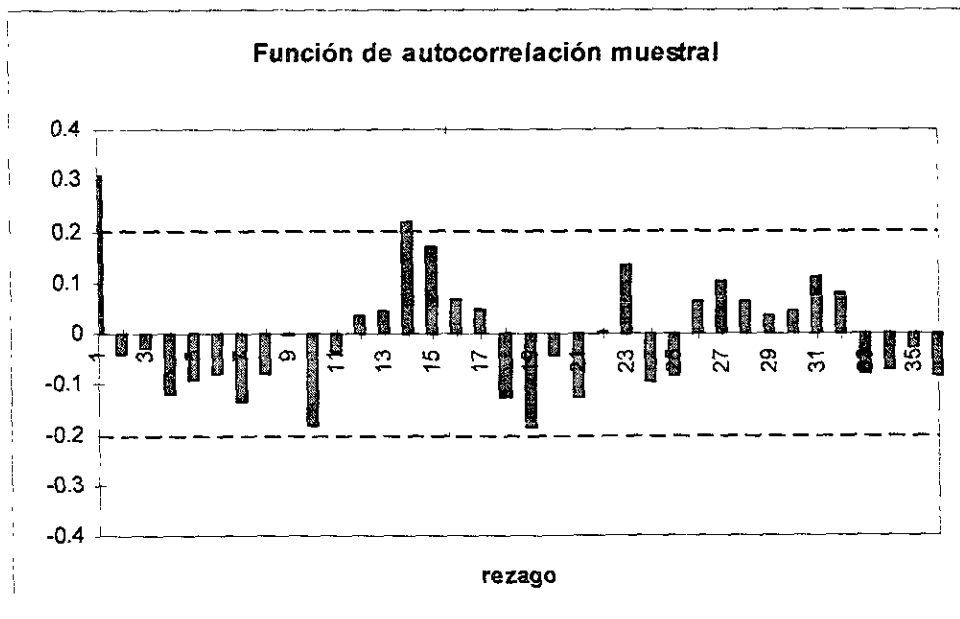
ADF Test Statistic	1.911601	1% Critical Value*	-3.4856	
		5% Critical Value	-2.8855	
		10% Critical Value	-2.5794	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IFRANCIA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:27				
Sample: 1875 1994				
Included observations: 120 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IFRANCIA(-1)	0.010341	0.005409	1.911601	0.0584
D(IFRANCIA(-1))	0.394792	0.095018	4.154907	0.0001
D(IFRANCIA(-2))	-0.042324	0.104952	-0.403269	0.6875
D(IFRANCIA(-3))	0.200687	0.104400	1.922284	0.0571
D(IFRANCIA(-4))	-0.027765	0.102243	-0.271557	0.7865
C	0.506206	1.066510	0.474638	0.6360
R-squared	0.376213	Mean dependent var	5.596667	
Adjusted R-squared	0.348854	S.D. dependent var	9.820241	
S.E. of regression	7.924308	Akaike info criterion	4.188577	
Sum squared resid	7158.591	Schwartz criterion	4.327951	
Log likelihood	-415.5872	F-statistic	13.75094	
Durbin-Watson stat	1.984884	Prob(F-statistic)	0.000000	

ADF Test Statistic	-5.412310	1% Critical Value*	-3.4861	
		5% Critical Value	-2.8857	
		10% Critical Value	-2.5795	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(FRANCIA)				
Date: 02/01/99 Time: 20:52				
Sample: 1876 1994				
Included observations: 119 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
FRANCIA(-1)	-0.872506	0.161208	-5.412310	0.0000
D(FRANCIA(-1))	0.175431	0.147820	1.186792	0.2378
D(FRANCIA(-2))	0.026720	0.135495	0.197204	0.8440
D(FRANCIA(-3))	0.245000	0.110603	2.215124	0.0288
D(FRANCIA(-4))	0.172453	0.089666	1.923287	0.0570
C	0.021434	0.007814	2.743069	0.0071
R-squared	0.442344	Mean dependent var	-9.60E-05	
Adjusted R-squared	0.417669	S.D. dependent var	0.095756	
S.E. of regression	0.073072	Akaike info criterion	-5.183506	
Sum squared resid	0.603371	Schwartz criterion	-5.043382	
Log likelihood	145.5649	F-statistic	17.92680	
Durbin-Watson stat	2.058652	Prob(F-statistic)	0.000000	

ALEMANIA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.



Fuente: Elaboración propia.

ESTA COPIA NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

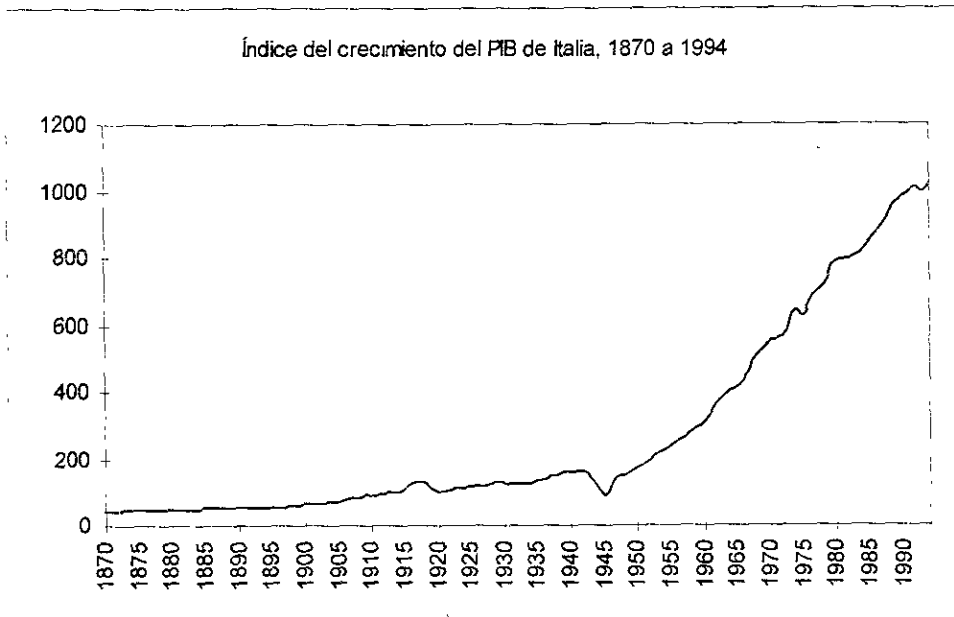
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on IALEMANIA

ADF Test Statistic	3.087281	1% Critical Value*	-3.4856	
		5% Critical Value	-2.8855	
		10% Critical Value	-2.5794	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IALEMANIA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:28				
Sample: 1875 1994				
Included observations: 120 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IALEMANIA(-1)	0.018137	0.005875	3.087281	0.0025
D(IALEMANIA(-1))	0.547775	0.095495	5.736187	0.0000
D(IALEMANIA(-2))	-0.320271	0.111399	-2.874984	0.0048
D(IALEMANIA(-3))	0.164299	0.111697	1.470938	0.1441
D(IALEMANIA(-4))	-0.108975	0.100483	-1.084510	0.2804
C	0.763744	1.397933	0.546338	0.5859
R-squared	0.380719	Mean dependent var	7.026667	
Adjusted R-squared	0.353557	S.D. dependent var	13.47141	
S.E. of regression	10.83124	Akaike info criterion	4.813576	
Sum squared resid	13374.00	Schwartz criterion	4.952950	
Log likelihood	-453.0872	F-statistic	14.01687	
Durbin-Watson stat	1.970452	Prob(F-statistic)	0.000000	

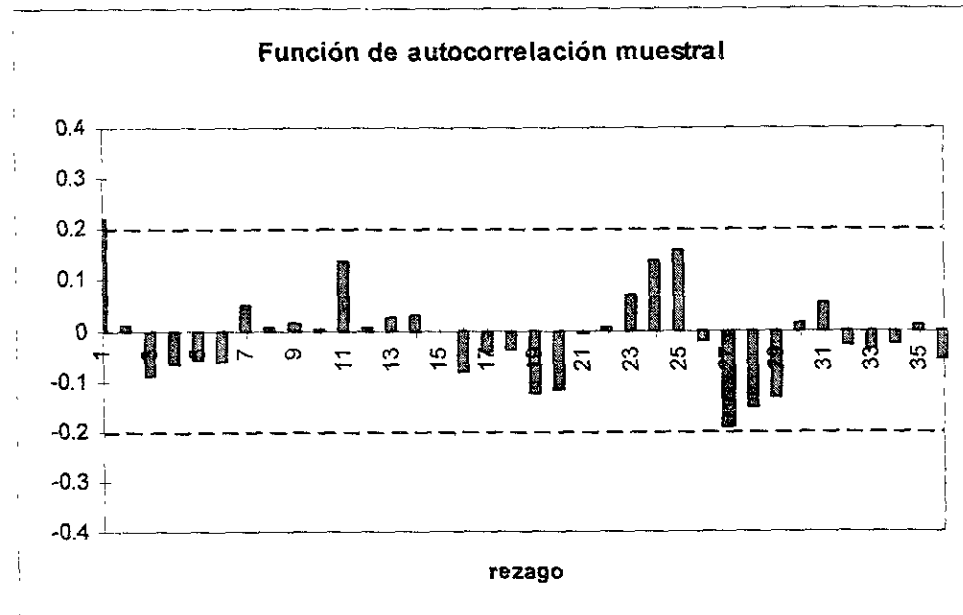
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on ALEMANIA

ADF Test Statistic	-5.143731	1% Critical Value*	-3.4861	
		5% Critical Value	-2.8857	
		10% Critical Value	-2.5795	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(ALEMANIA)				
Date: 02/01/99 Time: 20:58				
Sample: 1876 1994				
Included observations: 119 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
ALEMANIA(-1)	-0.871456	0.169421	-5.143731	0.0000
D(ALEMANIA(-1))	0.247277	0.148856	1.661180	0.0994
D(ALEMANIA(-2))	0.047805	0.134216	0.356183	0.7224
D(ALEMANIA(-3))	0.147394	0.109979	1.340207	0.1829
D(ALEMANIA(-4))	0.002883	0.093592	0.030807	0.9755
C	0.026655	0.008366	3.186232	0.0019
R-squared	0.375070	Mean dependent var	0.000188	
Adjusted R-squared	0.347419	S.D. dependent var	0.088428	
S.E. of regression	0.071434	Akaike info criterion	-5.228855	
Sum squared resid	0.576620	Schwartz criterion	-5.088731	
Log likelihood	148.2632	F-statistic	13.56407	
Durbin-Watson stat	2.002161	Prob(F-statistic)	0.000000	

ITALIA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 212-214.



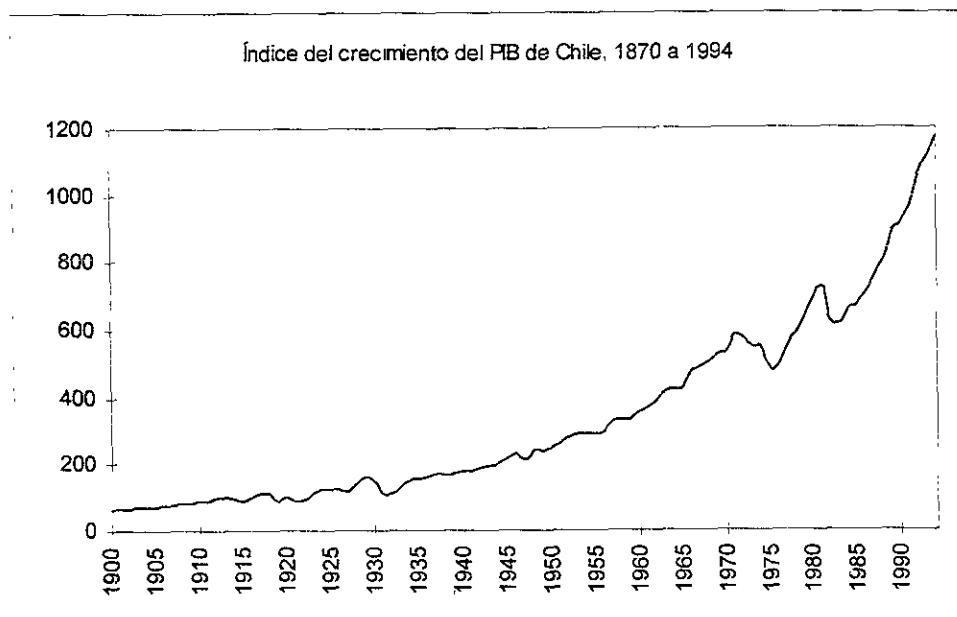
Fuente: Elaboración propia.

ADF Test Statistic	2.865323	1% Critical Value*	-3.4856	
		5% Critical Value	-2.8855	
		10% Critical Value	-2.5794	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IITALIA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:34				
Sample: 1875 1994				
Included observations: 120 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IITALIA(-1)	0.015954	0.005568	2.865323	0.0050
D(IITALIA(-1))	0.407862	0.095379	4.276236	0.0000
D(IITALIA(-2))	-0.067119	0.106989	-0.627347	0.5317
D(IITALIA(-3))	0.033313	0.106595	0.312515	0.7552
D(IITALIA(-4))	-0.025600	0.102478	-0.249805	0.8032
C	1.045714	1.300000	0.804395	0.4228
R-squared	0.400674	Mean dependent var	8.131667	
Adjusted R-squared	0.374388	S.D. dependent var	13.01916	
S.E. of regression	10.29759	Akaike info criterion	4.712526	
Sum squared resid	12088.60	Schwartz criterion	4.851901	
Log likelihood	-447.0242	F-statistic	15.24273	
Durbin-Watson stat	1.991229	Prob(F-statistic)	0.000000	

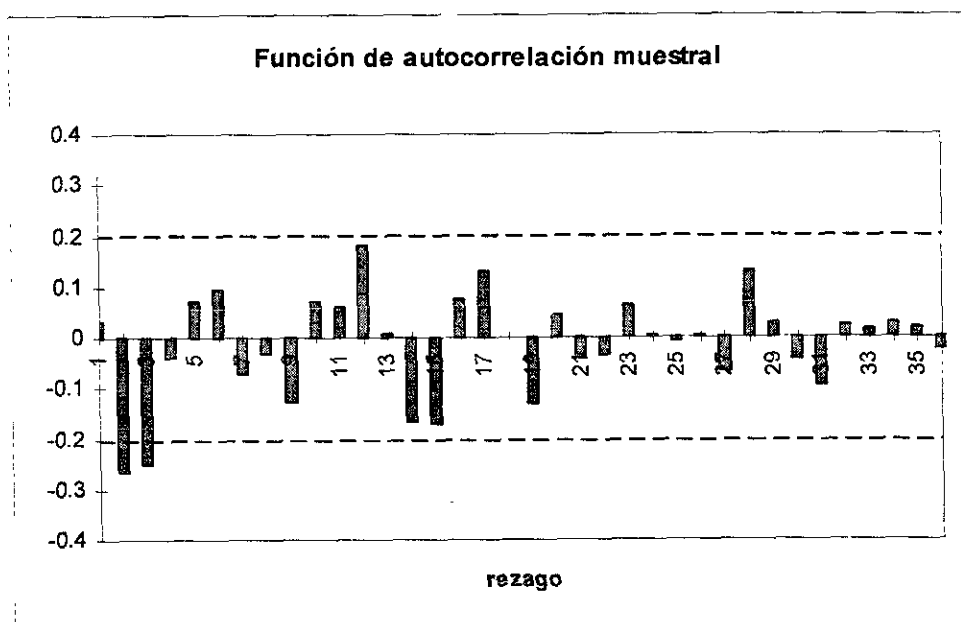
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on ITALIA

ADF Test Statistic	-5.012901	1% Critical Value*	-3.4861	
		5% Critical Value	-2.8857	
		10% Critical Value	-2.5795	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(ITALIA)				
Date: 02/01/99 Time: 20:59				
Sample: 1876 1994				
Included observations: 119 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
ITALIA(-1)	-0.911217	0.181774	-5.012901	0.0000
D(ITALIA(-1))	0.143811	0.161682	0.889470	0.3756
D(ITALIA(-2))	0.113616	0.139987	0.811621	0.4187
D(ITALIA(-3))	0.039188	0.118455	0.330823	0.7414
D(ITALIA(-4))	0.024346	0.093808	0.259534	0.7957
C	0.025652	0.007537	3.403431	0.0009
R-squared	0.391796	Mean dependent var	-5.75E-05	
Adjusted R-squared	0.364884	S.D. dependent var	0.075527	
S.E. of regression	0.060190	Akaike info criterion	-5.571380	
Sum squared resid	0.409386	Schwartz criterion	-5.431257	
Log likelihood	168.6435	F-statistic	14.55857	
Durbin-Watson stat	1.994060	Prob(F-statistic)	0.000000	

CHILE



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.



Fuente: Elaboración propia.

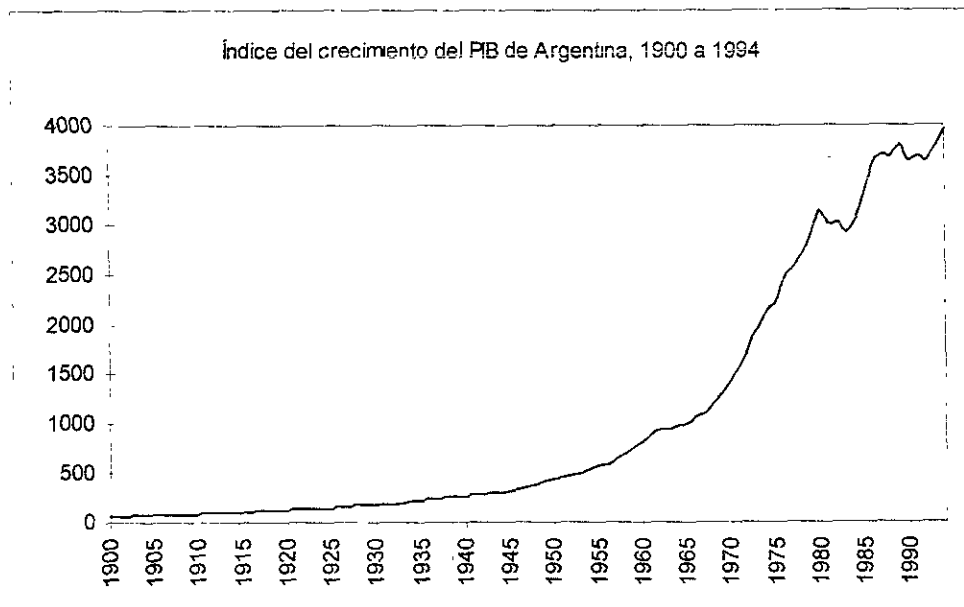
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on ICHILE

ADF Test Statistic	3.326970	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(ICHILE)				
Date: 02/01/99 Time: 21:42				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
ICHILE(-1)	0.040899	0.012293	3.326970	0.0013
D(ICHILE(-1))	0.190186	0.110942	1.714273	0.0900
D(ICHILE(-2))	-0.126173	0.115276	-1.094524	0.2767
C	-2.423444	4.163469	-0.582073	0.5620
R-squared	0.212850	Mean dependent var	11.55275	
Adjusted R-squared	0.185707	S.D. dependent var	26.37600	
S.E. of regression	23.80122	Akaike info criterion	6.382435	
Sum squared resid	49285.35	Schwartz criterion	6.492802	
Log likelihood	-415.5242	F-statistic	7.841786	
Durbin-Watson stat	1.991229	Prob(F-statistic)	0.000108	

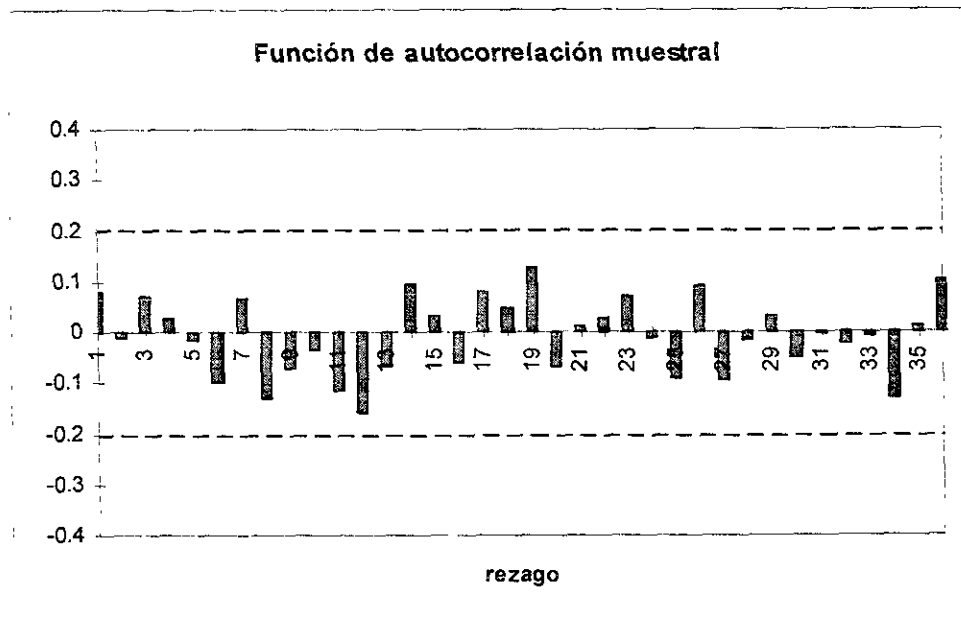
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on CHILE

ADF Test Statistic	-8.095046	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(CHILE)				
Date: 02/01/99 Time: 21:11				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
CHILE(-1)	-1.532541	0.189318	-8.095046	0.0000
D(CHILE(-1))	0.507004	0.141827	3.574797	0.0006
D(CHILE(-2))	0.251435	0.104408	2.408186	0.0181
C	0.052488	0.009950	5.274930	0.0000
R-squared	0.549824	Mean dependent var	0.000133	
Adjusted R-squared	0.534301	S.D. dependent var	0.106225	
S.E. of regression	0.072490	Akaike info criterion	-5.205651	
Sum squared resid	0.457168	Schwartz criterion	-5.095284	
Log likelihood	111.7337	F-statistic	35.41927	
Durbin-Watson stat	2.059782	Prob(F-statistic)	0.000000	

ARGENTINA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.



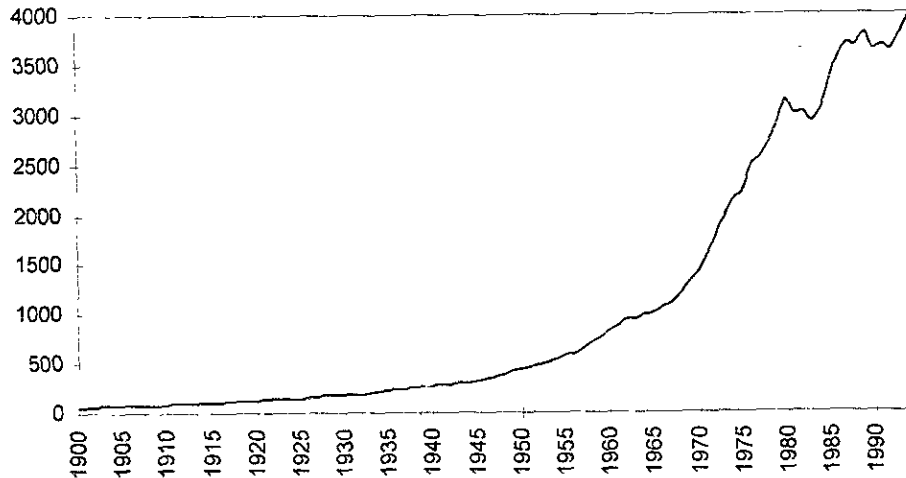
Fuente: Elaboración propia.

ADF Test Statistic	1.740378	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IARGENTINA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:40				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IARGENTINA(-1)	0.015582	0.008953	1.740378	0.0853
D(IARGENTINA(-1))	0.111848	0.107659	1.038909	0.3017
D(IARGENTINA(-2))	-0.221679	0.111680	-1.984946	0.0503
C	4.888180	3.786072	1.291095	0.2001
R-squared	0.081448	Mean dependent var	9.554945	
Adjusted R-squared	0.049774	S.D. dependent var	21.63788	
S.E. of regression	21.09251	Akaike info criterion	6.140796	
Sum squared resid	38705.76	Schwartz criterion	6.251164	
Log likelihood	-404.5296	F-statistic	2.571431	
Durbin-Watson stat	1.927668	Prob(F-statistic)	0.059299	

ADF Test Statistic	-4.969232	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(ARGENTINA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:08				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
ARGENTINA(-1)	-0.849520	0.170956	-4.969232	0.0000
D(ARGENTINA(-1))	-0.028088	0.141020	-0.199178	0.8426
D(ARGENTINA(-2))	-0.077045	0.103553	-0.744014	0.4589
C	0.028430	0.008040	3.535971	0.0007
R-squared	0.457285	Mean dependent var	-0.000921	
Adjusted R-squared	0.438571	S.D. dependent var	0.070863	
S.E. of regression	0.053096	Akaike info criterion	-5.828332	
Sum squared resid	0.245273	Schwartz criterion	-5.717965	
Log likelihood	140.0657	F-statistic	24.43504	
Durbin-Watson stat	2.040727	Prob(F-statistic)	0.000000	

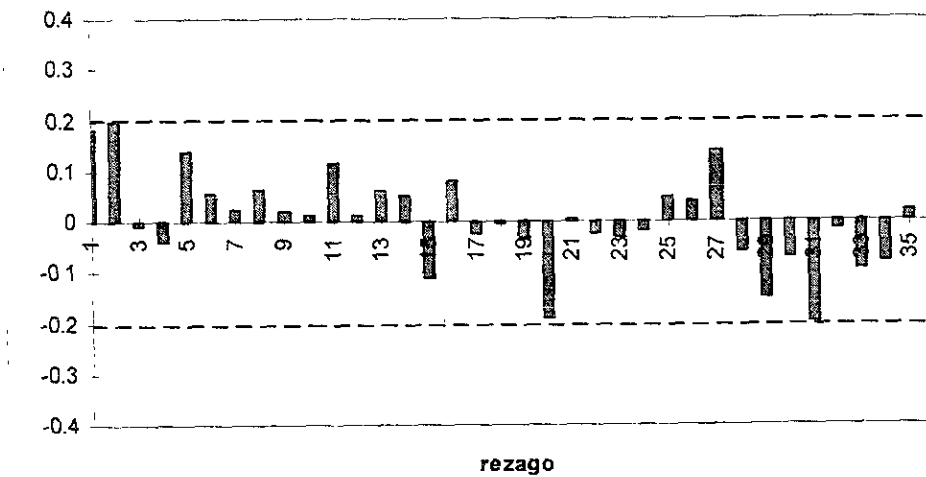
BRASIL

Índice del crecimiento del PIB de Brasil, 1900 a 1994



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.

Función de autocorrelación muestral

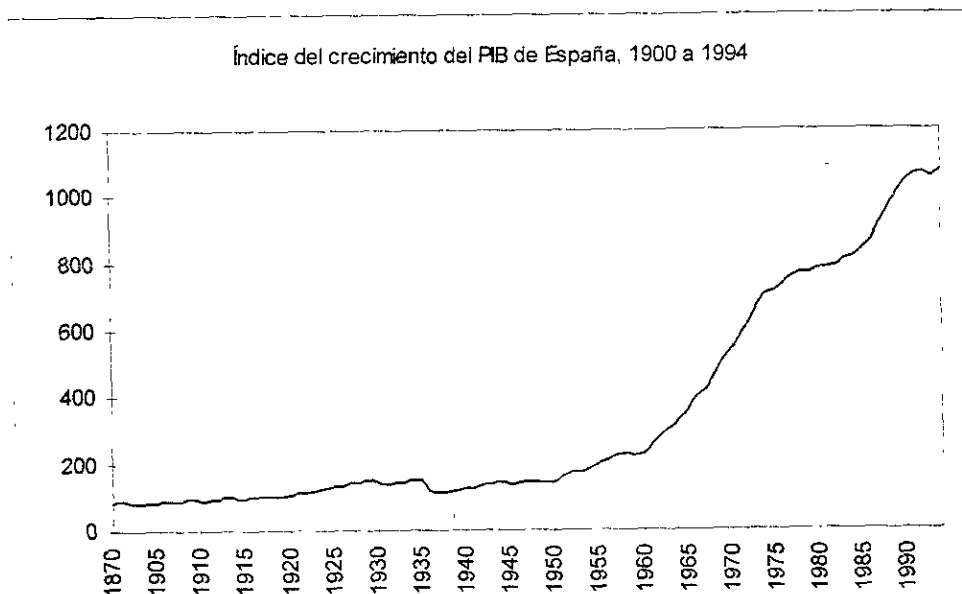


Fuente: Elaboración propia.

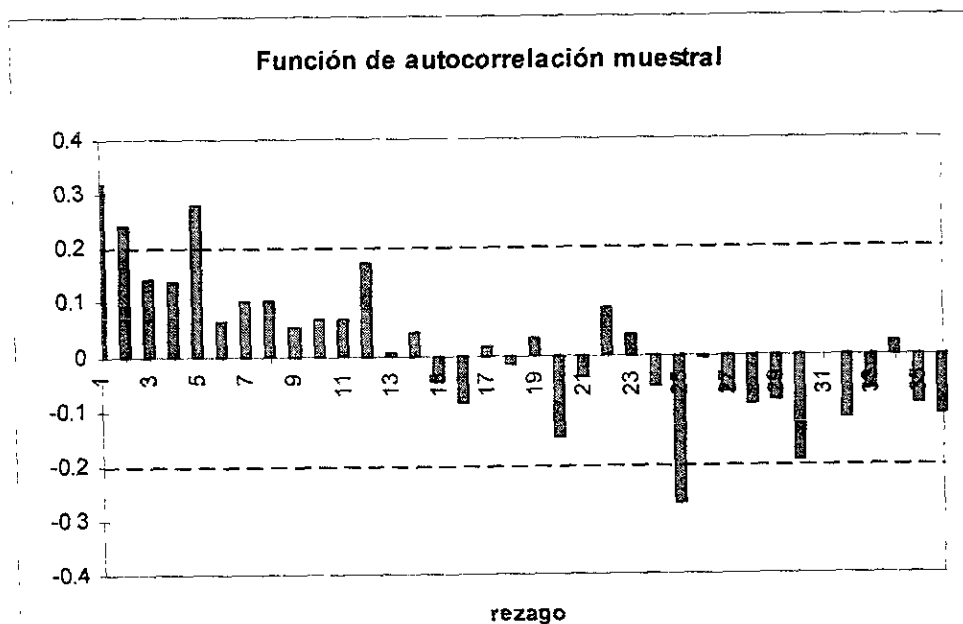
ADF Test Statistic	1.554399	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IBRASIL)				
Date: 02/01/99 Time: 21:41				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IBRASIL(-1)	0.010403	0.006693	1.554399	0.1237
D(IBRASIL(-1))	0.278193	0.107487	2.588148	0.0113
D(IBRASIL(-2))	0.235995	0.111918	2.108646	0.0379
C	10.28963	8.774609	1.172660	0.2441
R-squared	0.297816	Mean dependent var	40.90879	
Adjusted R-squared	0.273603	S.D. dependent var	74.16416	
S.E. of regression	63.20932	Akaike info criterion	8.335864	
Sum squared resid	347601.4	Schwartz criterion	8.446232	
Log likelihood	-504.4052	F-statistic	12.29972	
Durbin-Watson stat	1.833229	Prob(F-statistic)	0.000001	

ADF Test Statistic	-4.745014	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(BRASIL)				
Date: 02/01/99 Time: 21:09				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
BRASIL(-1)	-0.712305	0.150117	-4.745014	0.0000
D(BRASIL(-1))	-0.113830	0.137603	-0.827229	0.4104
D(BRASIL(-2))	0.076962	0.105454	0.729813	0.4675
C	0.032889	0.007991	4.115472	0.0001
R-squared	0.425557	Mean dependent var	0.000275	
Adjusted R-squared	0.405748	S.D. dependent var	0.050756	
S.E. of regression	0.039127	Akaike info criterion	-6.438947	
Sum squared resid	0.133187	Schwartz criterion	-6.328580	
Log likelihood	167.8487	F-statistic	21.48365	
Durbin-Watson stat	2.013905	Prob(F-statistic)	0.000000	

ESPAÑA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 218-219.

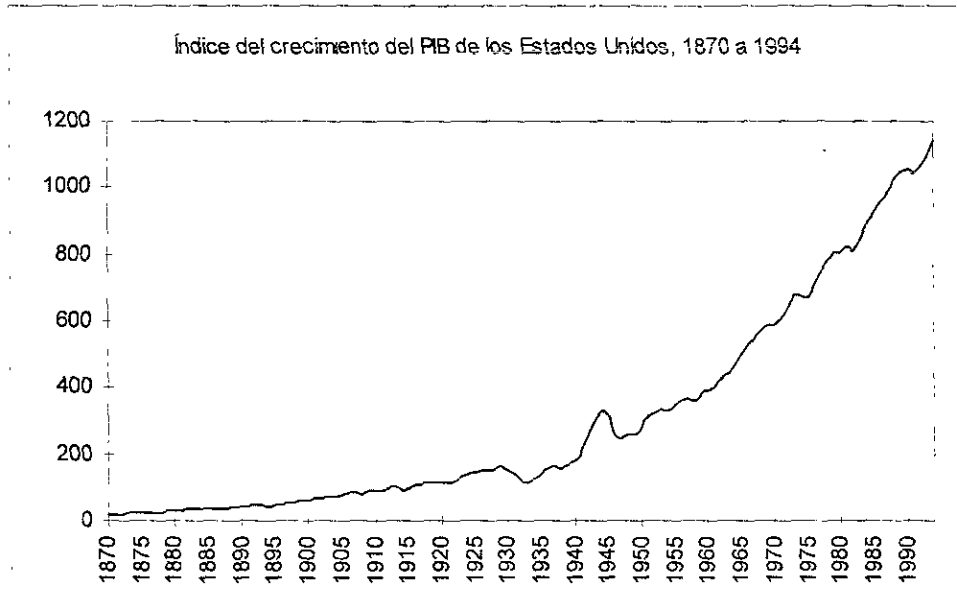


Fuente: Elaboración propia.

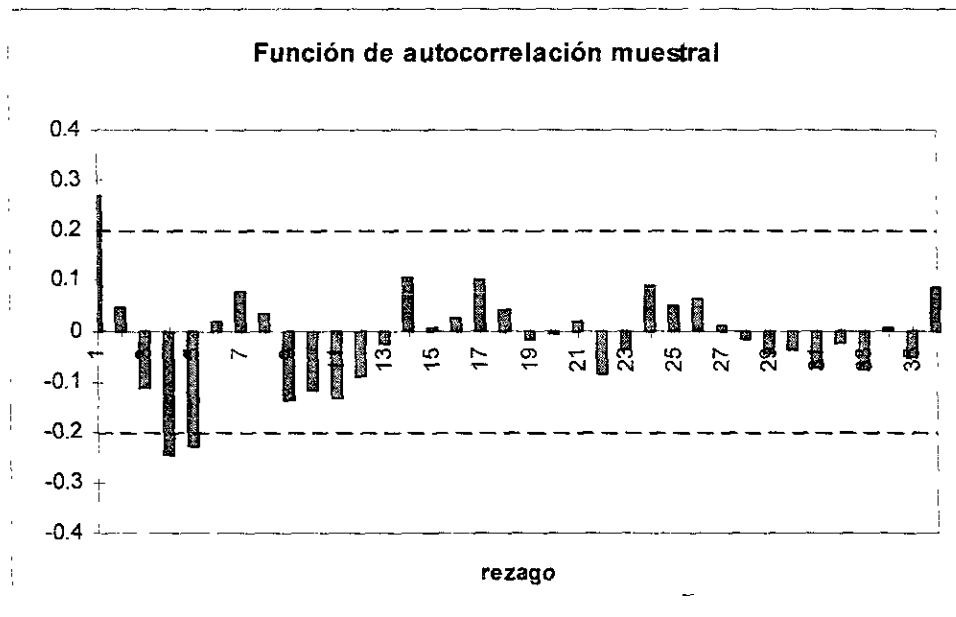
ADF Test Statistic	0.561436	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IESPA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:38				
Sample: 1904 1994				
included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IESPA(-1)	0.002728	0.004859	0.561436	0.5759
D(IESPA(-1))	0.697232	0.111545	6.250656	0.0000
D(IESPA(-2))	0.060381	0.117526	0.513767	0.6087
C	1.648224	1.536243	1.072892	0.2863
R-squared	0.602827	Mean dependent var	10.70549	
Adjusted R-squared	0.589131	S.D. dependent var	15.42958	
S.E. of regression	9.890220	Akaike info criterion	4.626053	
Sum squared resid	8510.031	Schwartz criterion	4.736421	
Log likelihood	-335.6088	F-statistic	44.01597	
Durbin-Watson stat	1.941821	Prob(F-statistic)	0.000000	

ADF Test Statistic	-4.017690	1% Critical Value*	-3.5031	
		5% Critical Value	-2.8932	
		10% Critical Value	-2.5834	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(ESPA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:05				
Sample: 1904 1994				
Included observations: 91 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
ESPA(-1)	-0.546546	0.136035	-4.017690	0.0001
D(ESPA(-1))	-0.170692	0.130486	-1.308118	0.1943
D(ESPA(-2))	-0.029134	0.105413	-0.276382	0.7829
C	0.015957	0.006048	2.638476	0.0099
R-squared	0.346768	Mean dependent var	-7.38E-05	
Adjusted R-squared	0.324243	S.D. dependent var	0.052865	
S.E. of regression	0.043457	Akaike info criterion	-6.228995	
Sum squared resid	0.164302	Schwartz criterion	-6.118627	
Log likelihood	158.2959	F-statistic	15.39463	
Durbin-Watson stat	1.989448	Prob(F-statistic)	0.000000	

ESTADOS UNIDOS



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, op cit, pp. 214-217.



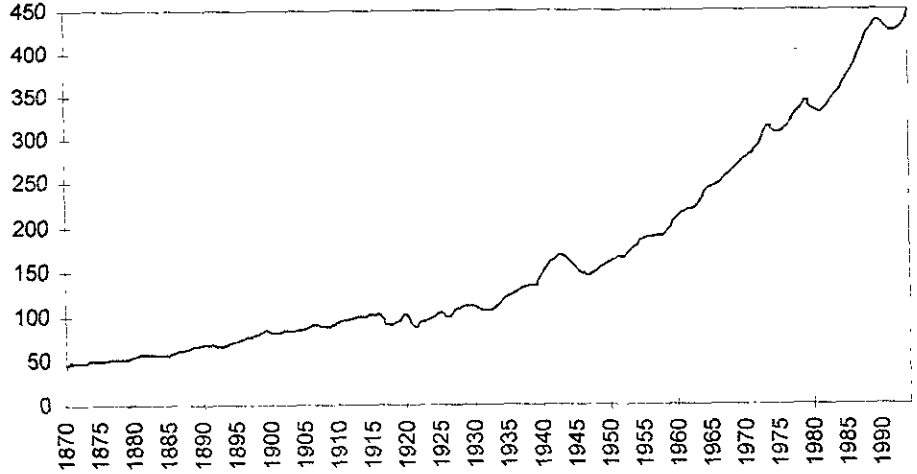
Fuente: Elaboración propia.

ADF Test Statistic	4.954120	1% Critical Value*	-3.4856	
		5% Critical Value	-2.8855	
		10% Critical Value	-2.5794	
*Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IEEUU)				
Date: 02/01/99 Time: 21:26				
Sample: 1875 1994				
Included observations: 120 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IEEUU(-1)	0.027886	0.005629	4.954120	0.0000
D(IEEUU(-1))	0.398401	0.094375	4.221470	0.0000
D(IEEUU(-2))	-0.220495	0.101249	-2.177741	0.0315
D(IEEUU(-3))	-0.079824	0.101261	-0.788296	0.4322
D(IEEUU(-4))	-0.192898	0.098811	-1.952203	0.0534
C	1.486345	1.637676	0.907594	0.3660
R-squared	0.410400	Mean dependent var	9.316667	
Adjusted R-squared	0.384541	S.D. dependent var	16.17504	
S.E. of regression	12.68951	Akaike info criterion	5.130258	
Sum squared resid	18356.70	Schwartz criterion	5.269633	
Log likelihood	-472.0881	F-statistic	15.87032	
Durbin-Watson stat	2.027585	Prob(F-statistic)	0.000000	

ADF Test Statistic	-6.460925	1% Critical Value*	-3.4861	
		5% Critical Value	-2.8857	
		10% Critical Value	-2.5795	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(EEUU)				
Date: 02/01/99 Time: 20:50				
Sample: 1876 1994				
Included observations: 119 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
EEUU(-1)	-1.151662	0.178250	-6.460925	0.0000
D(EEUU(-1))	0.375374	0.150771	2.489701	0.0142
D(EEUU(-2))	0.371405	0.132288	2.807553	0.0059
D(EEUU(-3))	0.298729	0.115449	2.587547	0.0109
D(EEUU(-4))	0.129534	0.093208	1.389734	0.1673
C	0.040604	0.008088	5.020021	0.0000
R-squared	0.411027	Mean dependent var	-0.000100	
Adjusted R-squared	0.384967	S.D. dependent var	0.070336	
S.E. of regression	0.055160	Akaike info criterion	-5.745927	
Sum squared resid	0.343818	Schwartz criterion	-5.605803	
Log likelihood	179.0290	F-statistic	15.77191	
Durbin-Watson stat	1.964628	Prob(F-statistic)	0.000000	

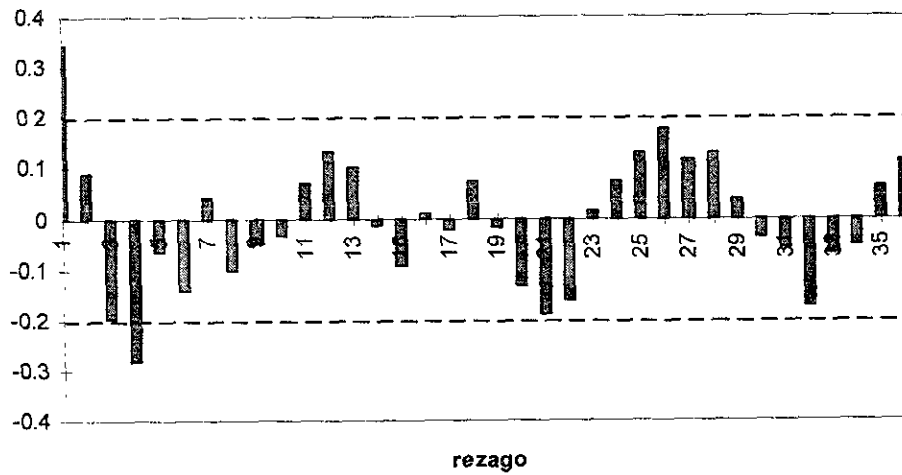
REINO UNIDO

Índice del crecimiento del PIB del Reino Unido, 1870 a 1994



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 214-217.

Función de autocorrelación muestral

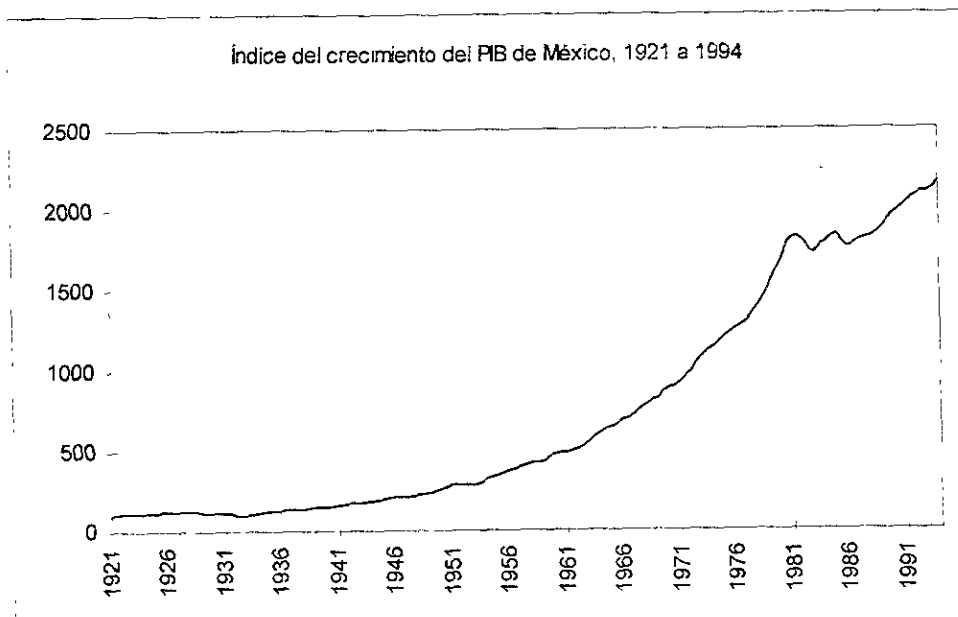


Fuente: Elaboración propia.

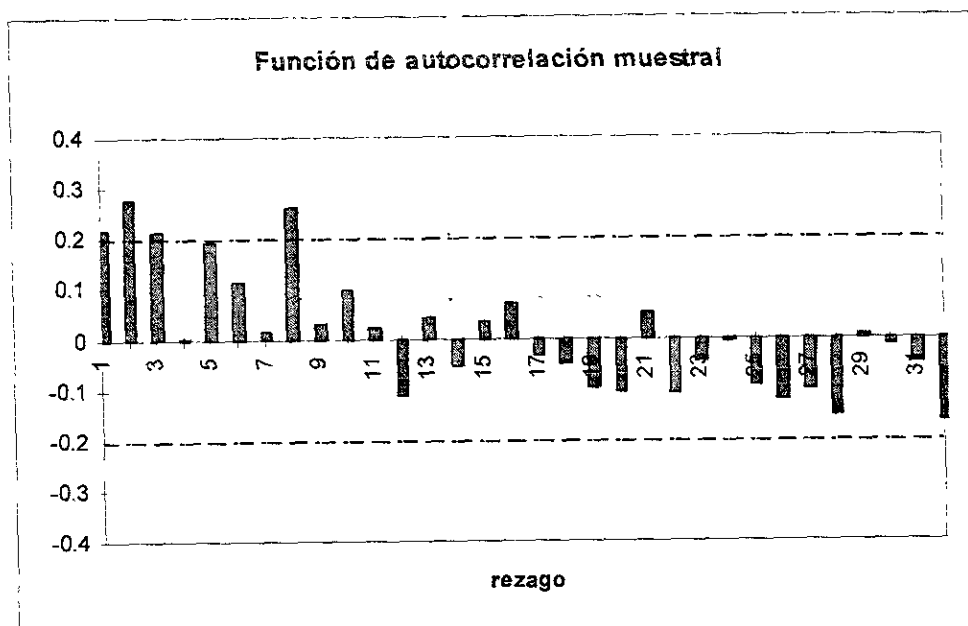
ADF Test Statistic	3.905611	1% Critical Value*	-3.4856	
		5% Critical Value	-2.8855	
		10% Critical Value	-2.5794	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IRU)				
Date: 02/01/99 Time: 21:24				
Sample: 1875 1994				
Included observations: 120 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IRU(-1)	0.022253	0.005698	3.905611	0.0002
D(IRU(-1))	0.369519	0.095140	3.883936	0.0002
D(IRU(-2))	-0.190506	0.100797	-1.889988	0.0613
D(IRU(-3))	-0.104557	0.101205	-1.033115	0.3037
D(IRU(-4))	-0.111333	0.102276	-1.088552	0.2786
C	-0.260825	0.828216	-0.314923	0.7534
R-squared	0.304342	Mean dependent var	3.325833	
Adjusted R-squared	0.273830	S.D. dependent var	5.828595	
S.E. of regression	4.966871	Akaike info criterion	3.254287	
Sum squared resid	2812.358	Schwartz criterion	3.393661	
Log likelihood	-359.5298	F-statistic	9.974716	
Durbin-Watson stat	2.001776	Prob(F-statistic)	0.000000	

ADF Test Statistic	-5.202436	1% Critical Value*	-3.4861	
		5% Critical Value	-2.8857	
		10% Critical Value	-2.5795	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(RU)				
Date: 02/01/99 Time: 20:43				
Sample: 1876 1994				
Included observations: 119 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
RU(-1)	-1.089056	0.209336	-5.202436	0.0000
D(RU(-1))	0.244617	0.182265	1.342097	0.1823
D(RU(-2))	0.132032	0.153574	0.859728	0.3918
D(RU(-3))	0.016359	0.124699	0.131189	0.8959
D(RU(-4))	-0.013495	0.094229	-0.143216	0.8864
C	0.020847	0.005068	4.113768	0.0001
R-squared	0.441571	Mean dependent var	8.73E-05	
Adjusted R-squared	0.416861	S.D. dependent var	0.043528	
S.E. of regression	0.033240	Akaike info criterion	-6.758922	
Sum squared resid	0.124850	Schwartz criterion	-6.618798	
Log likelihood	239.3022	F-statistic	17.87065	
Durbin-Watson stat	1.992927	Prob(F-statistic)	0.000000	

MÉXICO



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 222-223.

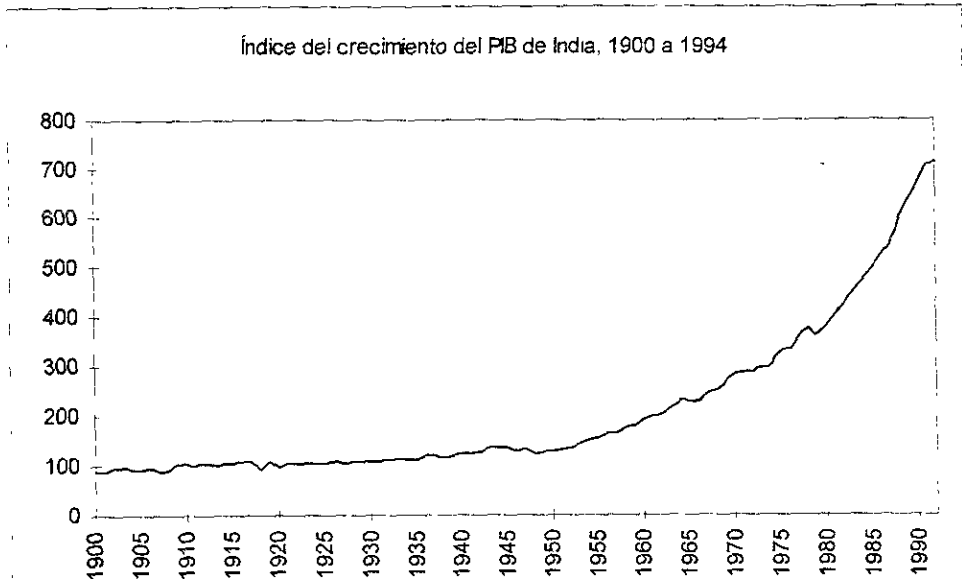


Fuente: Elaboración propia.

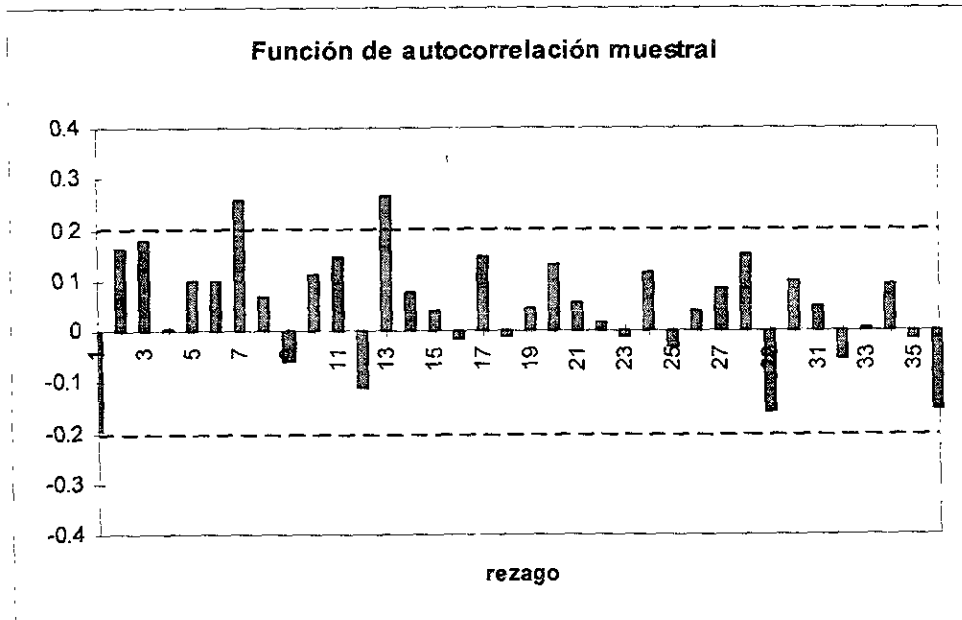
ADF Test Statistic	2.258625	1% Critical Value*	-3.5239	
		5% Critical Value	-2.9023	
		10% Critical Value	-2.5882	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IMEXICO)				
Date: 02/01/99 Time: 21:48				
Sample: 1924 1994				
Included observations: 71 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IMEXICO(-1)	0.015242	0.006749	2.258625	0.0272
D(IMEXICO(-1))	0.487947	0.123207	3.960372	0.0002
D(IMEXICO(-2))	-0.135454	0.127063	-1.066037	0.2902
C	7.905405	5.611078	1.408892	0.1635
R-squared	0.340810	Mean dependent var	28.84366	
Adjusted R-squared	0.311294	S.D. dependent var	37.85780	
S.E. of regression	31.41755	Akaike info criterion	6.949422	
Sum squared resid	66133.16	Schwartz criterion	7.076897	
Log likelihood	-343.4491	F-statistic	11.54665	
Durbin-Watson stat	1.917910	Prob(F-statistic)	0.000003	

ADF Test Statistic	-3.179320	1% Critical Value*	-3.5253	
		5% Critical Value	-2.9029	
		10% Critical Value	-2.5886	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(MEXICO)				
Date: 02/01/99 Time: 21:17				
Sample: 1925 1994				
Included observations: 70 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
MEXICO(-1)	-0.520705	0.163779	-3.179320	0.0022
D(MEXICO(-1))	-0.348130	0.155312	-2.241487	0.0284
D(MEXICO(-2))	-0.135231	0.120989	-1.117716	0.2677
C	0.544012	0.171063	3.180197	0.0022
R-squared	0.443581	Mean dependent var	0.000659	
Adjusted R-squared	0.418289	S.D. dependent var	0.055215	
S.E. of regression	0.042112	Akaike info criterion	-6.279388	
Sum squared resid	0.117047	Schwartz criterion	-6.150902	
Log likelihood	124.4529	F-statistic	17.53856	
Durbin-Watson stat	1.928624	Prob(F-statistic)	0.000000	

INDIA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de A. Maddison, *op cit*, pp. 224-226.

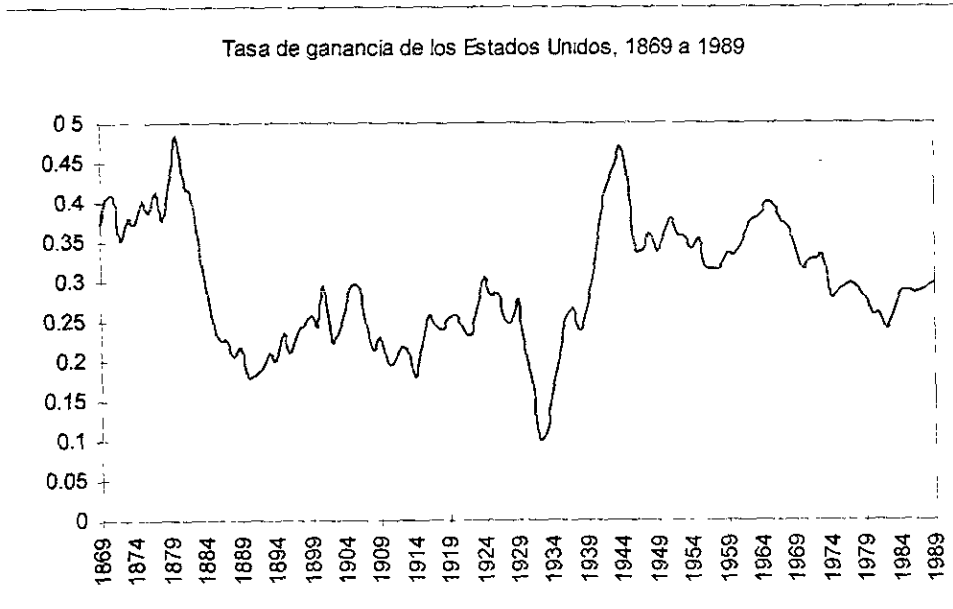


Fuente: Elaboración propia.

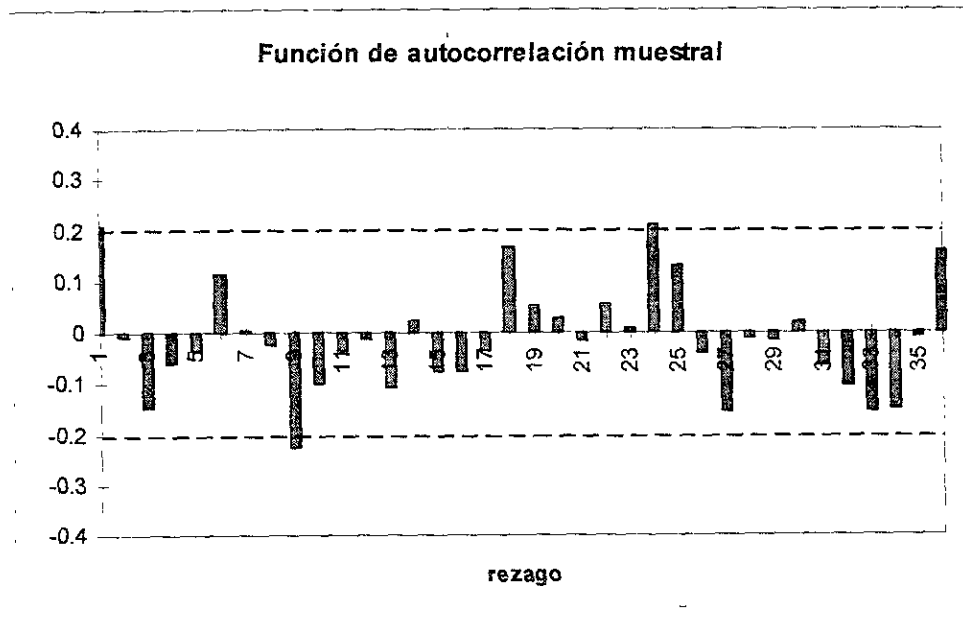
ADF Test Statistic	7.252578	1% Critical Value*	-3.5047	
		5% Critical Value	-2.8939	
		10% Critical Value	-2.5838	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IINDIA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:43				
Sample: 1904 1992				
Included observations: 89 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IINDIA(-1)	0.092725	0.012785	7.252578	0.0000
D(IINDIA(-1))	-0.300830	0.116131	-2.590449	0.0113
D(IINDIA(-2))	-0.142849	0.114170	-1.251200	0.2143
C	-8.962560	1.782584	-5.027849	0.0000
R-squared	0.622554	Mean dependent var	6.834831	
Adjusted R-squared	0.609233	S.D. dependent var	11.84415	
S.E. of regression	7.403942	Akaike info criterion	4.047928	
Sum squared resid	4659.561	Schwartz criterion	4.159777	
Log likelihood	-302.4183	F-statistic	46.73265	
Durbin-Watson stat	1.990355	Prob(F-statistic)	0.000000	

ADF Test Statistic	-3.989970	1% Critical Value*	-3.5047	
		5% Critical Value	-2.8939	
		10% Critical Value	-2.5838	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(INDIA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:13				
Sample: 1904 1992				
Included observations: 89 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
INDIA(-1)	-0.773887	0.193958	-3.989970	0.0001
D(INDIA(-1))	-0.418749	0.161038	-2.600315	0.0110
D(INDIA(-2))	-0.246571	0.104992	-2.348473	0.0212
C	0.018557	0.006416	2.892453	0.0049
R-squared	0.624429	Mean dependent var	0.000181	
Adjusted R-squared	0.611173	S.D. dependent var	0.067779	
S.E. of regression	0.042265	Akaike info criterion	-6.283711	
Sum squared resid	0.151835	Schwartz criterion	-6.171862	
Log likelihood	157.3396	F-statistic	47.10734	
Durbin-Watson stat	2.020027	Prob(F-statistic)	0.000000	

TASA DE GANANCIA DE LOS ESTADOS UNIDOS



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de G. Duménil, *op cit*, pp. 354-361.



Fuente: Elaboración propia.

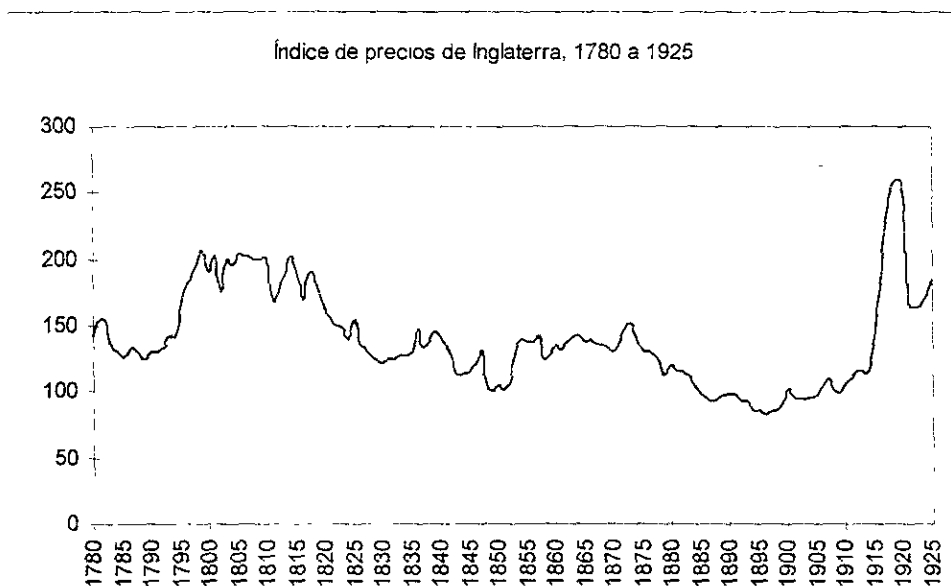
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on TGEEUU

ADF Test Statistic	-2.755981	1% Critical Value*	-3.4875	
		5% Critical Value	-2.8863	
		10% Critical Value	-2.5798	
*Mackinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(TGEEUU)				
Date: 02/01/99 Time: 21:52				
Sample: 1874 1989				
Included observations: 116 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
TGEEUU(-1)	-0.108202	0.039261	-2.755981	0.0069
D(TGEEUU(-1))	0.207814	0.093043	2.233535	0.0275
D(TGEEUU(-2))	0.087911	0.092445	0.950959	0.3437
D(TGEEUU(-3))	-0.037537	0.092801	-0.404488	0.6866
D(TGEEUU(-4))	0.043981	0.092103	0.477522	0.6339
C	0.031021	0.011819	2.624620	0.0099
R-squared	0.098587	Mean dependent var	-0.000716	
Adjusted R-squared	0.057613	S.D. dependent var	0.029938	
S.E. of regression	0.029063	Akaike info criterion	-7.026226	
Sum squared resid	0.092914	Schwartz criterion	-6.883799	
Log likelihood	248.9242	F-statistic	2.406114	
Durbin-Watson stat	1.997638	Prob(F-statistic)	0.041170	

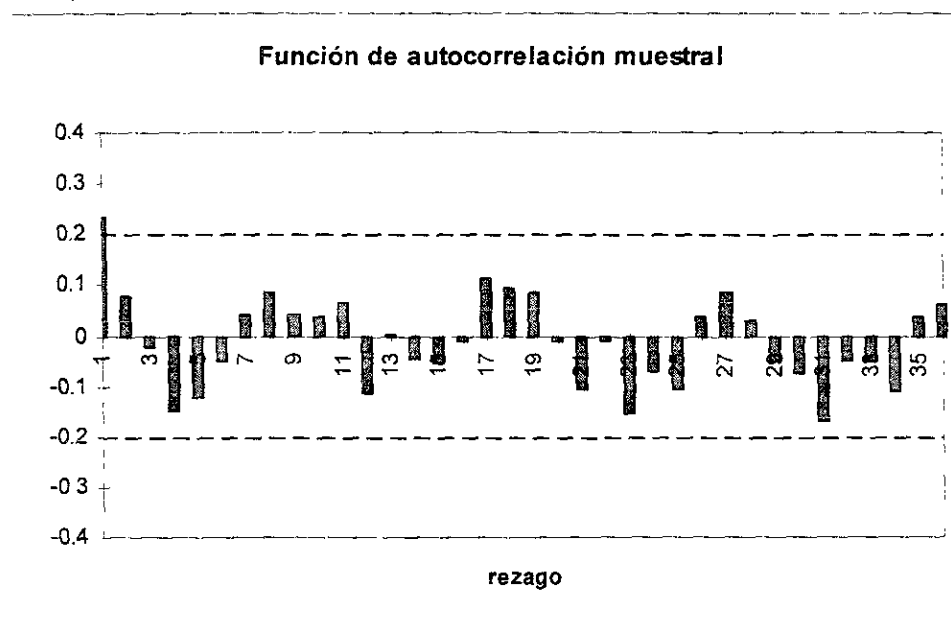
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on TGEEUU

ADF Test Statistic	-5.064819	1% Critical Value*	-3.4880	
		5% Critical Value	-2.8865	
		10% Critical Value	-2.5799	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(TGEEUU)				
Date: 02/01/99 Time: 21:00				
Sample: 1875 1989				
Included observations: 115 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
TGEEUU(-1)	-0.962521	0.190041	-5.064819	0.0000
D(TGEEUU(-1))	0.187069	0.167513	1.116740	0.2666
D(TGEEUU(-2))	0.165421	0.142046	1.164556	0.2467
D(TGEEUU(-3))	0.015133	0.120443	0.125643	0.9002
D(TGEEUU(-4))	0.026106	0.094498	0.276261	0.7829
C	0.004727	0.010864	0.435119	0.6643
R-squared	0.406029	Mean dependent var	0.000361	
Adjusted R-squared	0.378782	S.D. dependent var	0.147343	
S.E. of regression	0.116132	Akaike info criterion	-4.255291	
Sum squared resid	1.470046	Schwartz criterion	-4.112077	
Log likelihood	87.50128	F-statistic	14.90210	
Durbin-Watson stat	1.987286	Prob(F-statistic)	0.000000	

ÍNDICE DE PRECIOS DE INGLATERRA



Fuente: Elaboración propia a partir de los datos de N.D. Kondratieff, *op cit*, pp. 87-89.



Fuente: Elaboración propia.

ADF Test Statistic	-1.911136	1% Critical Value*	-3.4776	
		5% Critical Value	-2.8819	
		10% Critical Value	-2.5775	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IINGLATERRA)				
Date: 02/01/99 Time: 21:53				
Sample: 1785 1925				
Included observations: 141 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IINGLATERRA(-1)	-0.060007	0.031399	-1.911136	0.0581
D(IINGLATERRA(-1))	0.181471	0.084980	2.135462	0.0345
D(IINGLATERRA(-2))	0.113450	0.084902	1.336242	0.1837
D(IINGLATERRA(-3))	-0.070312	0.085387	-0.823456	0.4117
D(IINGLATERRA(-4))	-0.140403	0.084828	-1.655152	0.1002
C	8.701092	4.485225	1.939945	0.0545
R-squared	0.106159	Mean dependent var	0.382979	
Adjusted R-squared	0.073054	S.D. dependent var	13.12340	
S.E. of regression	12.63496	Akaike info criterion	5.114556	
Sum squared resid	21551.69	Schwartz criterion	5.240035	
Log likelihood	-554.6465	F-statistic	3.206710	
Durbin-Watson stat	2.007812	Prob(F-statistic)	0.009091	

ADF Test Statistic	-5.964647	1% Critical Value*	-3.4779	
		5% Critical Value	-2.8821	
		10% Critical Value	-2.5776	
*MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.				
Augmented Dickey-Fuller Test Equation				
LS // Dependent Variable is D(IPING)				
Date: 02/01/99 Time: 21:03				
Sample: 1786 1925				
Included observations: 140 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
IPING(-1)	-0.957303	0.160496	-5.964647	0.0000
D(IPING(-1))	0.167440	0.141410	1.184073	0.2385
D(IPING(-2))	0.221507	0.126942	1.744948	0.0833
D(IPING(-3))	0.207882	0.111661	1.861728	0.0648
D(IPING(-4))	0.077359	0.092359	0.837588	0.4038
C	0.005455	0.006400	0.852477	0.3955
R-squared	0.401319	Mean dependent var	0.000718	
Adjusted R-squared	0.378980	S.D. dependent var	0.095262	
S.E. of regression	0.075071	Akaike info criterion	-5.136728	
Sum squared resid	0.755180	Schwartz criterion	-5.010657	
Log likelihood	166.9195	F-statistic	17.96509	
Durbin-Watson stat	1.995838	Prob(F-statistic)	0.000000	

APÉNDICE. EL ANÁLISIS DE FOURIER

A.1 Las series de Fourier

En términos formales, se dice que la descomposición en series de Fourier de una función definida en el dominio del tiempo es la representación de la misma en términos de otra base en el dominio de la frecuencia.¹

Hay dos maneras de representar las series de Fourier: la trigonométrica y la exponencial compleja.

A.1.1 La serie de Fourier trigonométrica

Una función periódica puede representarse por la serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt: \text{ valor promedio de } f(t) \text{ en el intervalo } (-\pi, \pi)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt. \quad (\text{A.2})$$

Esta serie está compuesta por términos senos y cosenos cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental, $\omega_0 = 2\pi/T$, donde T es el periodo de la función.

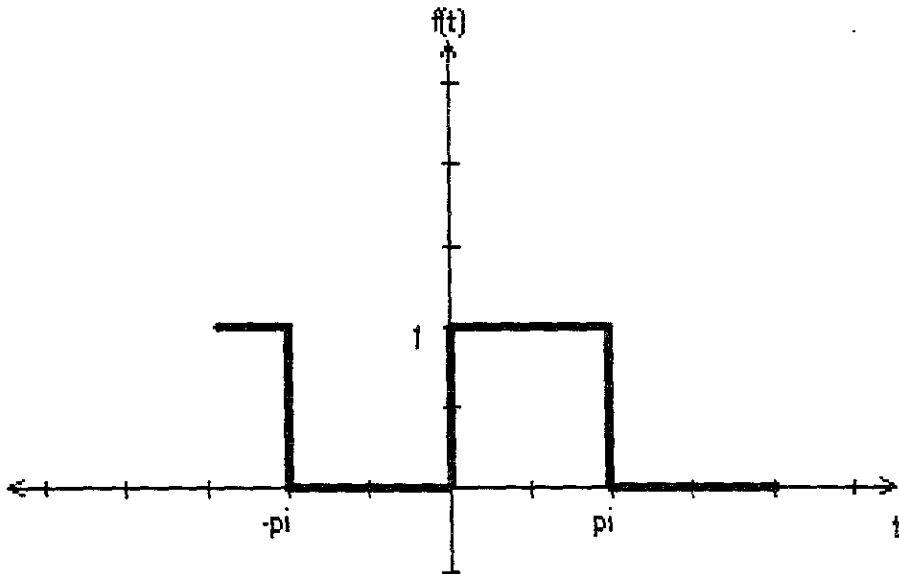
Ejemplo A.1. Sea $f(t)$ una función periódica real cuya definición matemática en el intervalo $-\pi < t < \pi$ es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

¹ Fuller, Wayne A., 1976, p. 1.

A $f(t)$ se le llama onda cuadrada con periodo $T=2\pi$ y se muestra en la figura A.1.

FIGURA A.1
La onda cuadrada



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con la expresión A.3.

Los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica de $f(t)$ son, de acuerdo con (A.3),

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} d\omega t = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\omega t) d\omega t = 0;$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen}(n\omega t) d\omega t = \frac{1}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)). \quad (\text{A.4})$$

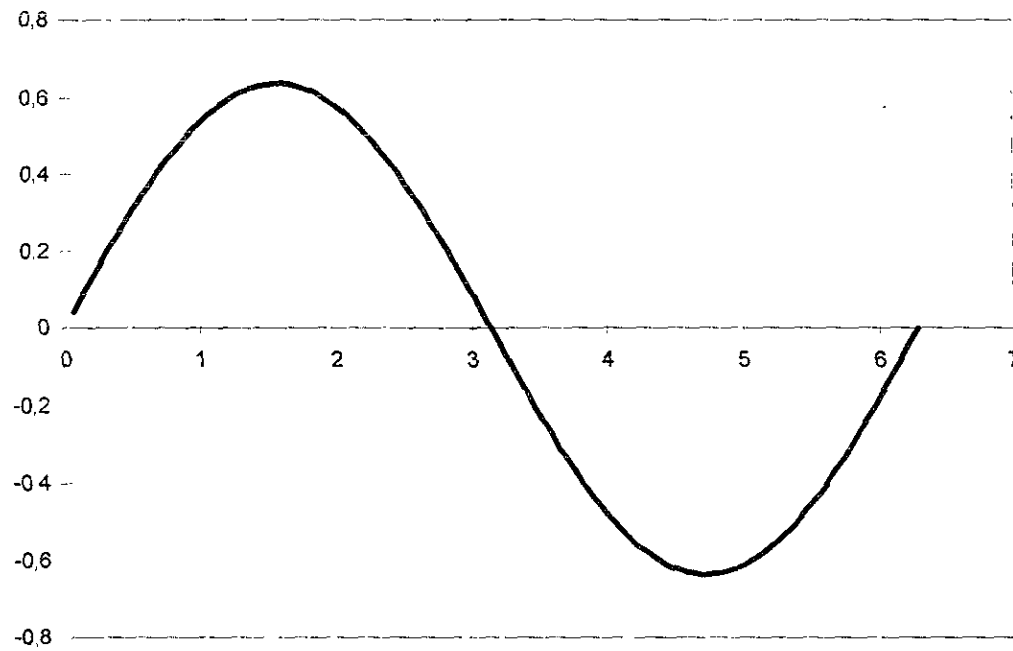
Las expresiones anteriores muestran que el valor promedio de la onda cuadrada en el intervalo $(-\pi, \pi)$ es $\frac{1}{2}$; además, como las amplitudes de los términos coseno son nulas, la representación

como serie de Fourier de $f(t)$, de acuerdo con (A.1), queda expresada únicamente con base en los términos seno, o sea

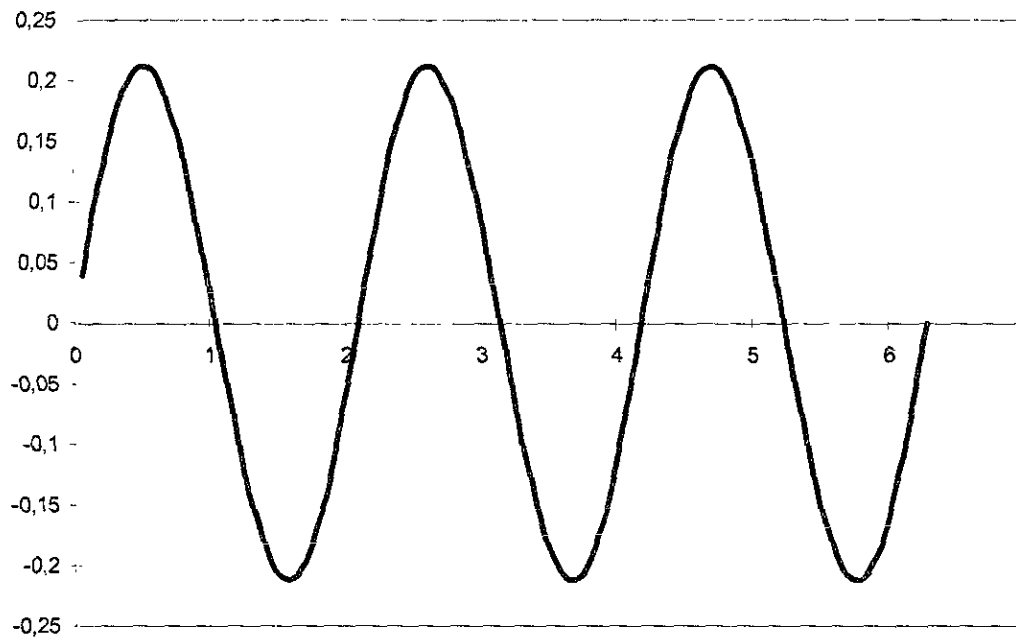
$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi n} (1 - \cos(n\pi)) \right] \text{sen}(n\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \text{sen}(n\omega_0 t) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \text{sen}(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \text{sen}(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \text{sen}(5\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

En la figura A.2 se muestran las armónicas fundamental, tercera y quinta, en el intervalo $(-\pi, \pi)$, que corresponden, en ese orden, a los primeros cuatro términos de la serie anterior.

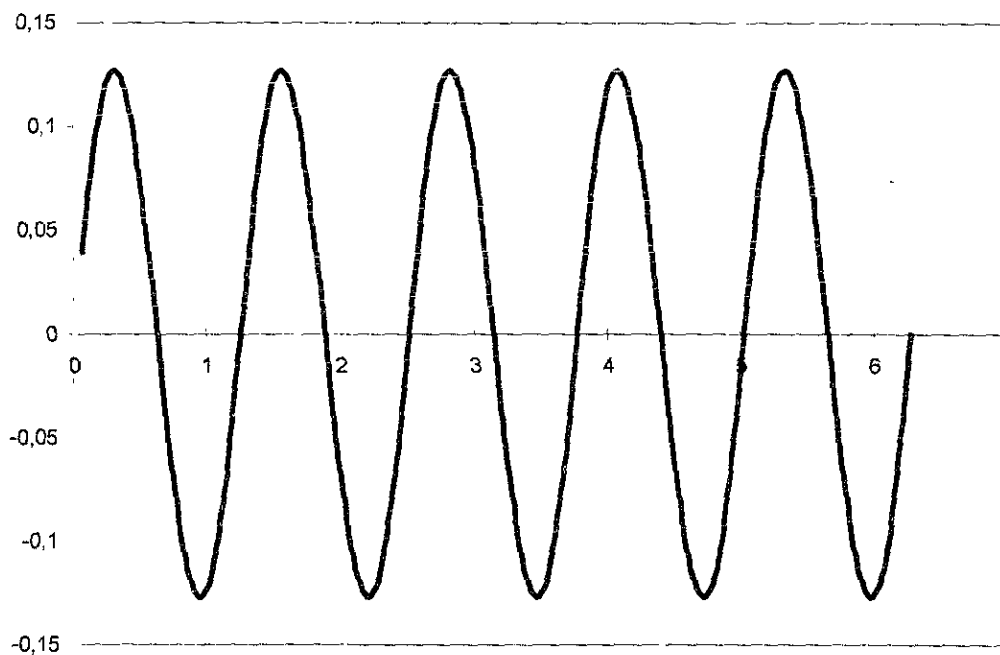
FIGURA A.2
(a) Fundamental



(b) Tercera armónica



(c) Quinta armónica

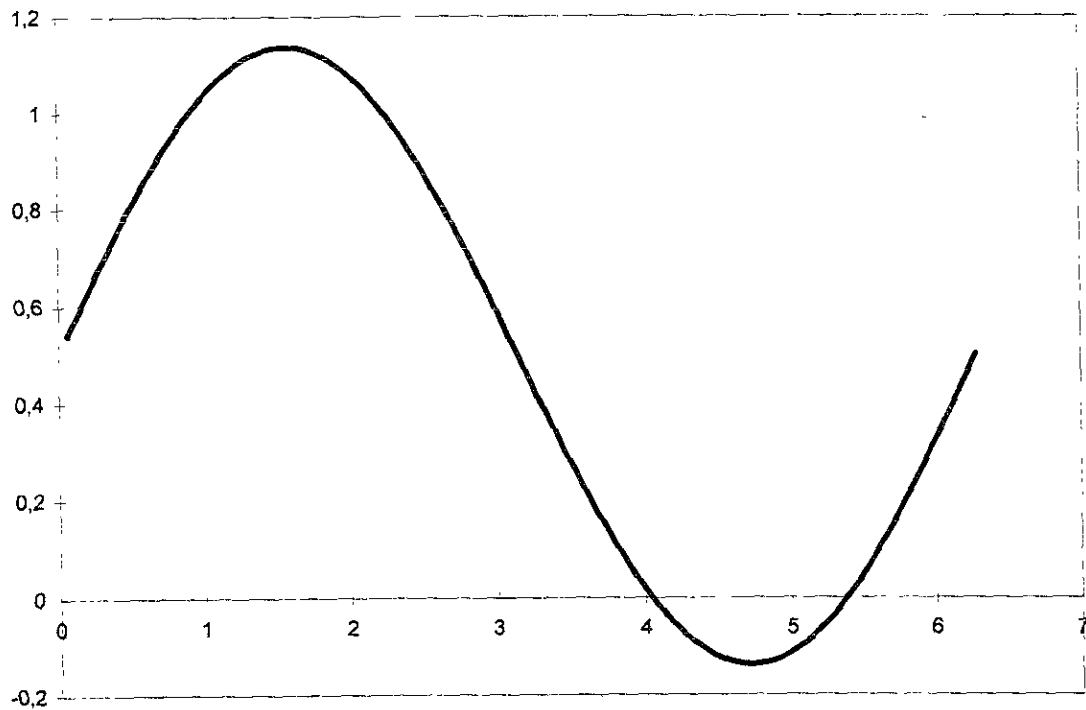


Fuente: Elaboración propia.

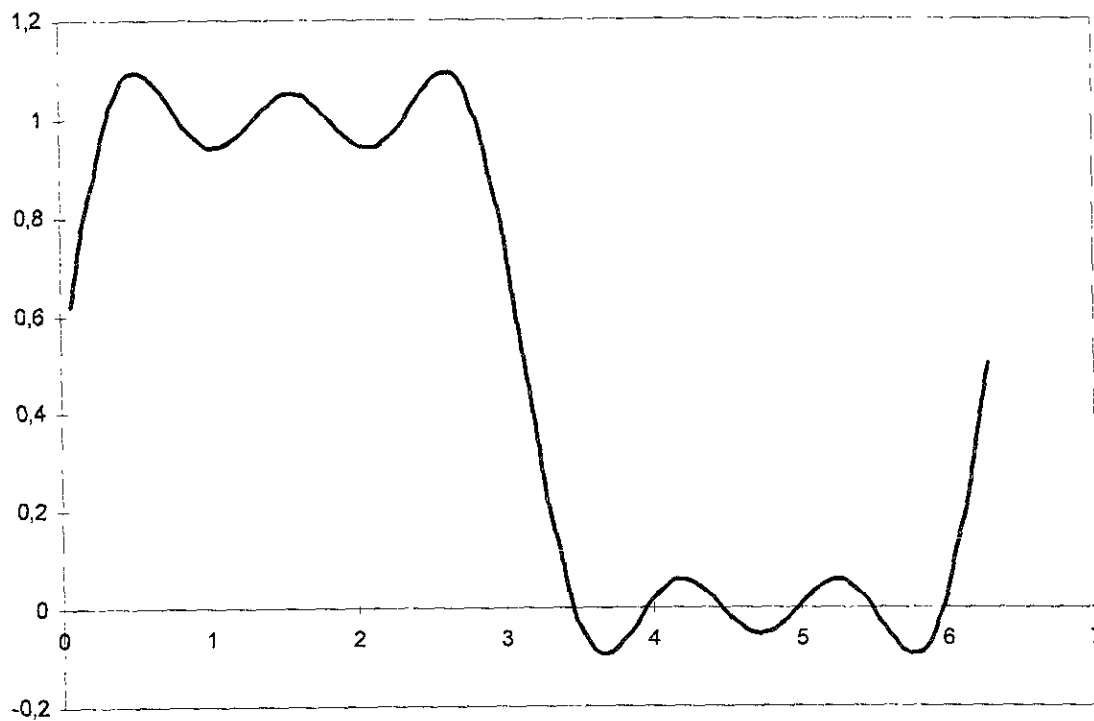
Gráficamente, la onda cuadrada es aproximada por la superposición de los componentes sinusoidales en que es descompuesta mediante la serie de Fourier. En la figura A.3 aparecen las aproximaciones de la onda cuadrada obtenidas con los dos, tres y cuatro primeros términos de la serie de Fourier (A.5).

Si se siguen añadiendo más armónicas con las amplitudes y frecuencias adecuadas se obtendrá una mejor aproximación para la onda cuadrada de tal manera que, en el límite, cuando el número de términos considerados tienda a infinito, sería la onda cuadrada.

FIGURA A.3
Aproximaciones a la onda cuadrada
(a) Con dos términos: el valor medio y la primera armónica



(b) Con cuatro términos: el valor medio y las armónicas fundamental, tercera y quinta



A.1.2 La serie de Fourier exponencial compleja

Una función periódica $f(t)$ también puede expresarse en términos de una suma de funciones exponenciales complejas. Dicha expresión se deduce, como se verá a continuación, de la forma trigonométrica dada por (A.1), la cual establece que

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \quad (\text{A.6})$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$ es la armónica fundamental de $f(t)$.²

Dado que el seno y el coseno se expresan en términos de las exponenciales como

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}), \quad (\text{A.7})$$

y

$$\text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}), \quad (\text{A.8})$$

entonces, sustituyendo las expresiones anteriores en (A.1) se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right] \quad (\text{A.9})$$

como $1/j = -j$, entonces

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} \right] \quad (\text{A.10})$$

Sean

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0; \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n); \quad (\text{A.11})$$

² Para una explicación más amplia sobre las *frecuencias armónicas* véase el capítulo 2 de este trabajo, pp. 2 y 3.

entonces

$$\begin{aligned}
 f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) \\
 &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

por lo tanto

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \rightarrow \text{Serie compleja de Fourier.} \tag{A.13}$$

Por último, al sustituir en (A.11) las expresiones de a_n , b_n , dadas en (A.2) se tiene que

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt; \tag{A.14}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left\{ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] dt \right\}$$

por lo que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; \tag{A.15}$$

y, análogamente

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt. \quad (\text{A.16})$$

Puesto que $f(t) e^{+j n \omega_0 t}$ es una función periódica con periodo T , entonces

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \forall n \in Z. \quad (\text{A.17})$$

Así, c_n es el coeficiente de amplitud que corresponde a la combinación, dada por (A.11), de los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica. Es decir, para cada n se tiene un componente sinusoidal con amplitud c_n .

Expandiendo $f(t)$ en (A.13) se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 && \rightarrow \text{valor promedio de } f(\omega t) \text{ en } (-\pi, \pi) \\ &+ c_1 e^{j\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j\omega_0 t} && \rightarrow \text{primer par armónico (fundamental)} \\ &+ c_2 e^{j2\omega_0 t} + c_{-2} e^{-j2\omega_0 t} && \rightarrow \text{segundo par armónico} \\ &\vdots && \vdots \\ &+ c_i e^{j i \omega_0 t} + c_{-i} e^{-j i \omega_0 t} && \rightarrow \text{i-ésimo par armónico.} \\ &\vdots && \vdots \end{aligned}$$

Esta expresión expandida hace evidente que la serie consta de un número infinito de funciones armónicas cuyas frecuencias son múltiplos de la frecuencia fundamental, ω_0 , del primer par armónico.

Como resumen de lo anterior, puede decirse que la serie de Fourier representa la conversión de una función periódica del tiempo en una función de la frecuencia; en otros términos, *la serie de Fourier es la vía de paso del dominio del tiempo al de la frecuencia, cuando se trata de funciones periódicas.*

En este punto es natural preguntarse si toda función periódica puede ser expresada en términos de una serie de Fourier, y la respuesta es que, como se establece en seguida, no todas las funciones periódicas tienen representación en series de Fourier.

A.2 Existencia de la serie de Fourier

Toda función periódica $f(t)$ que satisfaga las *condiciones de Dirichlet* dadas por³

1. $f(t)$ es absolutamente integrable sobre cualquier periodo; esto es,

$$\int_h^{h+T} |f(t)| dt < \infty, \forall h \in \mathbb{R}.$$

2. $f(t)$ solo tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo, y
3. En cualquier periodo, $f(t)$ solo tiene un número finito de discontinuidades.

puede ser expresada como una serie de Fourier.

A.3 Espectros de línea de una función periódica⁴

Sea $f(t)$ una función real periódica con periodo T cuya representación como serie de Fourier exponencial compleja está dada por

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (\text{A.18})$$

Los coeficientes c_n , $n \in \mathbb{Z}$, definen una función compleja de las frecuencias discretas $n\omega_0$ que será denotada por $c(n\omega_0)$. Entonces, de acuerdo con esto se tiene que $c(n\omega_0) = c_n$.

A la gráfica de $|c(n\omega_0)|$ contra $n\omega_0$ se le llama el *espectro de amplitud* de la función periódica $f(t)$. Entonces, el espectro de amplitud muestra las amplitudes de los diversos componentes sinusoidales de $f(t)$. Esta es la razón de por qué se conoce a tal diagrama como el espectro de amplitud de $f(t)$.

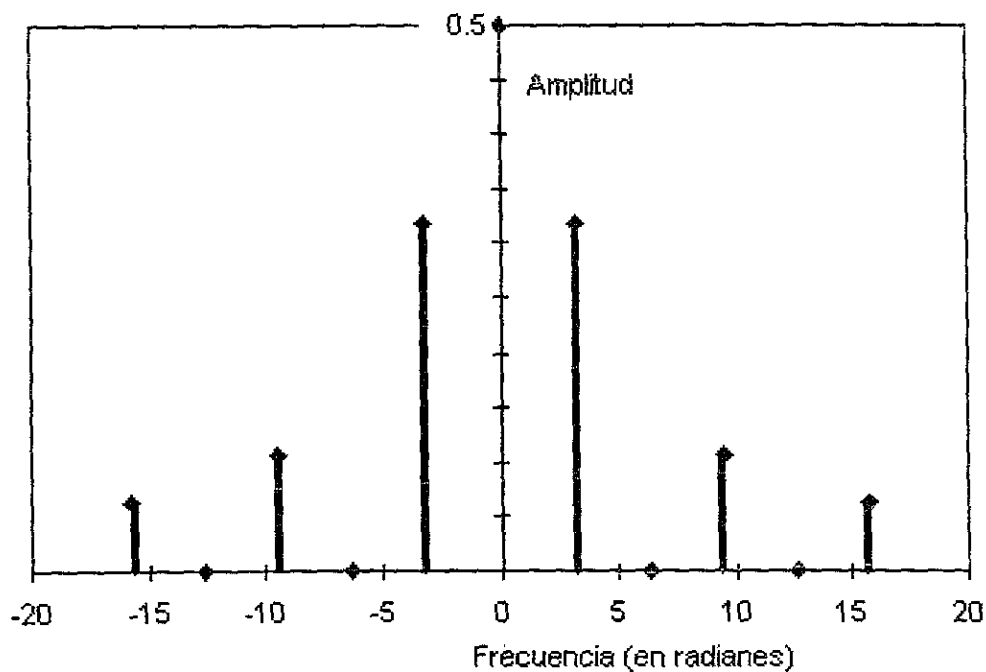
Debido a que el espectro de amplitud de una función periódica $f(t)$ generalmente se dibuja con rectas verticales que conectan los valores de $|c(n\omega_0)|$ con los puntos $\omega = n\omega_0$, es que a menudo se hace referencia a este espectro como *espectro de líneas*.

³ Kamen, 1996, E., pp. 413 y 414.

⁴ *Ibidem*, pp. 421 y 422.

Como ilustración de lo anterior, en la figura A.4 se muestra el espectro de amplitud de la onda cuadrada del ejemplo A.1.

FIGURA A.4
Espectro de amplitud de la cuadrada



Fuente: Kamen, E., *op cit*, p.422.

Las coordenadas de los puntos de la gráfica anterior se muestran en el cuadro A.1. En la columna izquierda se encuentran las primeras cinco frecuencias armónicas y en la columna derecha las amplitudes relativas a los sinusoides correspondientes a esas frecuencias.

CUADRO A.1
Coordenadas del espectro de líneas de la figura A.4

Frecuencia ($n\omega_0$)	Amplitud ($ c(n\omega_0) $)
$-5/\pi$	$1/5\pi$
$-4/\pi$	0
$-3/\pi$	$1/3\pi$
$-2/\pi$	0
$-1/\pi$	$1/\pi$
0	$1/2$
$1/\pi$	$1/\pi$
$2/\pi$	0
$3/\pi$	$1/3\pi$
$4/\pi$	0
$5/\pi$	$1/5\pi$

Fuente: *Ibidem*, p. 422.

Obsérvese que el espectro de amplitud es una función par de la frecuencia, $n\omega_0$, pues

$$|c(-n\omega_0)| = |c(n\omega_0)| \quad \text{para } n \geq 1. \quad (\text{A.19})$$

En el caso en el que la función $f(t)$ no sea periódica (o, equivalentemente, sea aperiódica), es decir, cuando no se cumpla que

$$f(t) = f(t + T); \quad T: \text{ periodo de } f(t),$$

las nociones de espectros de amplitud y de fase se construyen, como se mostrará a continuación, mediante la transformada de Fourier, y no ya de la serie de Fourier.

A.4 La transformada de Fourier

Dado que una función no periódica puede ser considerada como periódica de periodo infinito, y haciendo tender a infinito los límites de la integral de la serie de Fourier⁵, se tiene que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{A.20})$$

donde

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow \text{transformada de Fourier de } f(t). \quad (\text{A.21})$$

A (A.20) se le llama la *transformada inversa de Fourier* puesto que muestra cómo reconstruir $f(t)$ a partir de la transformada $X(\omega)$.

La representación integral de Fourier (A.21) de una función no periódica se puede considerar como una generalización de la representación en series de Fourier de una función periódica.⁶ Obsérvese además, que en contraste con una función periódica, una función aperiódica consta de un continuo de frecuencias; esto es, la variable de frecuencia ω que aparece en (A.21) es una variable continua, mientras que en el caso periódico, la variable de frecuencia es la variable discreta $n\omega_0$, $n \in \mathbb{Z}$.

A.4.1 Existencia de la transformada de Fourier

Se dice que la función $f(t)$ tiene una transformada de Fourier en sentido ordinario si la integral de la expresión (A.20) converge y esto sucede si⁷

1. $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades, máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo de tiempo que se considere, y
2. $f(t)$ es *absolutamente integrable*, lo cual significa que

⁵ Para una demostración formal del proceso de límite véanse, por ejemplo, Lathi, B. P., 1989, pp. 46-49 y Kamen, E., *op cit*, pp.434-437.

⁶ Kamen, E., *op cit*, p. 436

⁷ *Ibidem*, p. 437.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Cualquier función finita que cumpla con la condición establecida por 1 cumplirá también con 2, por lo que tendrá una transformada de Fourier en sentido ordinario.

A.4.2 El espectro de frecuencia de una función aperiódica

Sea $f(t)$ una función no periódica y $X(\omega)$ su transformada de Fourier. A $X(\omega)$ se le llama también el *espectro de frecuencia* de $f(t)$. La función magnitud $|X(\omega)|$ se conoce como el *espectro de amplitud* de la función y al ángulo de $X(\omega)$, $\angle X(\omega)$, que es el ángulo formado por el eje real del plano complejo y el vector descrito por $X(\omega)$, se le conoce como el *espectro de fase*. Estos espectros son las generalizaciones naturales de los espectros de línea de las funciones periódicas. Como en el caso periódico, el espectro de amplitud muestra las amplitudes de los sinusoidales de que consta la función, con la salvedad de que en el caso no periódico existe un continuo de componentes de frecuencia que constituyen la función.

Como un resumen de lo anterior, considérese el siguiente cuadro en el cual se comparan la serie y la integral de Fourier

Serie de Fourier (funciones periódicas)	Integral de Fourier (funciones no periódicas)
$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
$c_n = \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) e^{-jn\omega t} dt$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

Como puede apreciarse, la serie y la integral de Fourier son similares en estructura: c_n y $X(\omega)$ determinan las amplitudes espectrales y las dos permiten convertir una función en el dominio del tiempo en otra en el de la frecuencia.

Resumiendo los resultados anteriores, puede afirmarse que la transformada de Fourier permite expresar una señal dada en términos de sus componentes exponenciales. La función $X(\omega)$ es la

transformada de Fourier de $f(t)$ y representa las amplitudes de las diferentes componentes sinusoidales. Por lo tanto, $X(\omega)$ es la representación de $f(t)$ en el dominio de la frecuencia. De aquí que mientras la representación en el dominio del tiempo especifica la función en cada instante de tiempo, la representación en el dominio de la frecuencia especifica las amplitudes de las componentes de frecuencia de aquella misma función.

Por último, será expuesto uno de los instrumentos más útiles en el análisis de Fourier, a saber: el Teorema de *convolución*, mediante el uso del cual se obtienen con facilidad algunos de los resultados importantes presentados en el capítulo tres de esta investigación.

A.5 El teorema de convolución⁸

En este caso hay dos teoremas: el de la convolución en el dominio del tiempo y el de la convolución en el dominio de la frecuencia.

A.5.1 Convolución en el dominio del tiempo

Dadas dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ con transformadas $X(\omega)$ y $H(\omega)$, respectivamente, la *convolución* de $x(t)$ y $h(t)$ es una función, $y(t)$, que se expresa mediante la integral siguiente

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau; \quad (\text{A.22})$$

La convolución en un dominio induce la convolución en el otro dominio. Así, la *convolución* de dos funciones en el dominio del tiempo implica la multiplicación de las transformadas de dichas funciones en el dominio de la frecuencia. Esto se deduce a partir de calcular la transformada de Fourier de ambos extremos de la identidad anterior, con lo cual queda

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt, \quad (\text{A.23})$$

cambiando el orden de integración, y como $x(\tau)$ no es función de t , se tiene que

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau. \quad (\text{A.24})$$

⁸ Para una exposición intuitiva de la convolución véase, por ejemplo, *Ibidem*, pp. 91-95.

Mediante el cambio de variable, $p=t-\tau$, que implica que $dp=d\tau$ y $t=p+\tau$, se obtiene

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(p) e^{-j\omega(p+\tau)} dp \right] d\tau; \quad (\text{A.25})$$

como $e^{-j\omega\tau}$ no es función de p , la doble integral puede descomponerse como el producto de dos integrales

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(p) e^{-j\omega p} dp \quad (\text{A.26})$$

lo cual muestra que la convolución en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación en el dominio de la frecuencia, es decir

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \quad (\text{A.27})$$

A.5.2 Convolución en el dominio de la frecuencia

De manera similar, la convolución en el dominio de la frecuencia, esto es, la convolución, $G(\omega)$, del par de transformadas $H(\omega)$ y $X(\omega)$ se expresa como

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) X(\nu - \omega) d\omega \quad (\text{A.28})$$

y corresponde a la multiplicación de las funciones $h(t)$ y $x(t)$ en el dominio del tiempo, es decir

$$h(t)x(t) \leftrightarrow H(\omega) * X(\omega). \quad (\text{A.29})$$

Con esto termina la exposición de los conceptos relativos al análisis de Fourier utilizados en el desarrollo de la técnica del análisis espectral presentada en el capítulo 2.

CONCLUSIONES

Como fue visto en este trabajo, la ESDE es una herramienta del análisis espectral mediante la cual se puede estudiar la naturaleza cíclica de un fenómeno o proceso estocástico a partir de solo una o de algunas realizaciones de éste, representadas como series de tiempo. Así, por ejemplo, el desarrollo de algunas economías capitalistas fue analizado a través de la serie de la tasa de crecimiento de su índice del PIB, es decir, para cada uno de los países considerados fue supuesto que el proceso estocástico correspondiente era su desarrollo capitalista industrial, medido a través de una de sus realizaciones: la tasa de crecimiento del índice del PIB.

Los resultados obtenidos en dicho análisis indican que en las series de Argentina, México, India, España y Brasil se detectó un ciclo cuya duración aproximada va de los 2.63 a los 3.7 años. Por su parte, las series de Alemania, Francia, Italia, Estados Unidos y el Reino Unido tuvieron en común la presencia de un ciclo de entre 9.09 y 12.5 años; además, en Francia, Estados Unidos y el Reino Unido se observó un ciclo adicional con periodo comprendido entre 2.41 y 3.5 años. Asimismo, en la serie de Chile se detectó un ciclo de aproximadamente 5.26 años, el cual resulta ser muy largo como para considerarlo junto con los de Argentina, México, India, España y Brasil, y muy corto para agruparlo con los de Francia, Italia, Alemania, Estados Unidos y el Reino Unido, por lo que fue considerado un caso especial.

Resumiendo lo anterior, se tiene que, efectivamente, el desarrollo del capitalismo industrial en estas economías ha tenido un carácter cíclico. Si bien cada una de ellas presenta, según la gráfica de su ESDE, un patrón cíclico particular, pudieron ser diferenciados, de manera general, tres tipos de ciclos: uno con duración promedio de 10 años, otro de 2.96 años y uno más de, aproximadamente, 5 años. El ciclo de diez años parece corresponder al ciclo marxista de reposición de capital o al llamado ciclo de los negocios o ciclo Juglar, mientras que el segundo tiene una duración cercana a la del ciclo Kitchin; sin embargo, la explicación económica, o inclusive de otra naturaleza, del ciclo de 5.26 años encontrado en Chile no parece inmediata, e indudablemente es deseable contar con ella. No obstante lo anterior, es muy importante tener en cuenta que la validez de estos resultados (como de cualquier resultado estadístico) depende, en gran parte, de la veracidad de los datos utilizados, lo cual podría resultar difícil de asegurar con toda certeza.

Lo anterior sugiere una agrupación de estos países de acuerdo con su ESDE. De esta manera, quedarían repartidos básicamente en dos grupos. El primero formado por Argentina, México, India, España y Brasil, y el segundo por Alemania, Francia, Italia, Estados Unidos y el Reino Unido, si bien haciendo énfasis en que en este segundo grupo existe un subgrupo con los tres países que presentan un ciclo adicional (Francia, Estados Unidos y el Reino Unido). Finalmente, Chile, al no

poder ser incluido mediante el criterio de la ESDE en ninguno de estos dos grupos, queda considerado aparte de ellos.

Asimismo, se tiene la clasificación de acuerdo con el criterio de *centro y periferia del sistema*,¹ según la cual se considera que Alemania, Francia, Italia, Estados Unidos, España y el Reino Unido

¹ Como lo señalan J. M. Vidal y J. Martínez (1987), pp. 130-136, los países pertenecientes al *centro del sistema* son aquellos en los cuales el desarrollo del capitalismo tiene las siguientes características destacables:

La *primera* de ellas es su *carácter autónomo*. Es decir, en estas sociedades

"... Es la propia evolución del feudalismo, y, más exactamente, sus debilidades desde el punto de vista estructural, las que generan la aparición de nuevas clases sociales, especialmente la burguesa, que van a vehicular el proceso conjunto de desaparición del modo de producción feudal y la imposición del régimen capitalista de producción

"...La segunda característica de este desarrollo es que, como fruto del carácter autocentrado del proceso de acumulación del capital, existe una *articulación sectorial* en el desarrollo económico. Es decir, la existencia de proporcionalidad entre las secciones de producción de medios de producción y de medios de consumo, y la creación de una demanda solvente para la valorización- realización de la producción se manifiesta empíricamente con la construcción de un tupido tejido industrial interconexado.

"...Una tercera característica es la *involucración del Estado en el proceso de acumulación*, es decir, en la reproducción de la estructura económica, no ya como instancia superestructural, sino pasando a formar parte del nivel estructural-económico.

"...[La] cuarta característica del capitalismo autocentrado en la actualidad es la existencia de un complejo *militar-industrial*.

"...Lo que podríamos considerar *quinta característica* es, en realidad, una consecuencia de las anteriores. O, más concretamente, es la expresión fenoménica de la síntesis entre la infraestructura industrial y terciaria y la estructura de estas formaciones sociales. Nos referimos al fenómeno del *desarrollo*. El referirse coloquialmente a una sociedad «desarrollada» implica expresar toda una serie de fenómenos económicos y sociales: alta renta per cápita, alto consumo energético, disponibilidad de una amplísima gama de productos para el consumo industrial e individual, alta productividad del trabajo, tecnología avanzada, buenas comunicaciones y transportes, sistemas educativos y sanitarios que cubren a la casi totalidad de la población, sistemas políticos formalmente representativos, oferta privada para el ocio y la información, etc

"...Por último, debemos referirnos a la *expansión de las formaciones sociales centrales como necesidad y síntesis del desarrollo autocentrado a través de las fases del modo de producción capitalista*, expansión que llevó al colonialismo, imperialismo y, en la actualidad, a una tendencia latente de confrontación y pugna que puede acabar en situaciones distintas (superimperialismo, ultraimperialismo, etc.).

"...[Por otra parte] la capitalización de las estructuras socioeconómicas de las formaciones sociales periféricas es una consecuencia de la formación y expansión del capitalismo sistémico (mundial). Es decir, es fruto de la articulación o involucración que sufren estas sociedades en la reproducción de la acumulación que está teniendo lugar en las formaciones sociales capitalistas centrales. [...] Podemos considerar como características de este capitalismo periférico las siguientes:

- a) Es un desarrollo capitalista *inducido*, no autónomo. Es decir, no surge de la propia evolución de las contradicciones en las instancias de la formación social.
- b) Existe, pues, una *desarticulación* de este desarrollo capitalista que se manifiesta como antítesis del autocentramiento, a todos los niveles: *desconexión interindustrial* y *escasa difusión tecnológica* entre ramas de la producción; *desproporcionalidad* entre la sección I (básicamente productora de materias primas, agrícolas y mineras) y la sección II (que, muchos casos seguirá admitiendo, en cuanto a producción nacional se refiere, modos precapitalistas) *ausencia o deficiencia del mercado capitalista interno*; [...] *hipertrofia del sector terciario*...
- c) Es un desarrollo *extravertido*, orientado hacia afuera, en el sentido de que parte de su actividad productiva está destinada y regida al y por el mercado exterior; o, dicho de otra forma, debe servir de «complemento» a las economías del Centro del Sistema...

pertenecen al Centro del Sistema, mientras que Argentina, México, Chile, India y Brasil a su periferia.

De esta manera, puede afirmarse que la clasificación de estos países de acuerdo con su ESDE es consistente con la de centro-periferia, aun cuando esta última, por su definición, considera más aspectos que los reflejados en el PIB, lo cual da lugar, por ejemplo, a que Chile se incluya en el grupo de Argentina, México, India y Brasil, y España junto con Alemania, Francia, Italia, Estados Unidos y el Reino Unido, cosa que sería muy forzado hacer a partir de la ESDE.

En cuanto a la serie de la tasa de ganancia de los Estados Unidos, en ella se encontró un ciclo con duración promedio aproximada de 6.7 años, es decir, su duración es considerablemente menor a la del PIB.

Finalmente, para la serie del índice de precios de Inglaterra la ESDE mostró la presencia de un ciclo con duración promedio de 10 años, lo que resulta sin duda muy interesante pues recuérdese que en esa y otras series similares, Kondratieff² notó la presencia de ondas largas de ascenso y descenso del nivel de precios, con una duración conjunta aproximada de cincuenta a sesenta años. A partir de los resultados aquí obtenidos no puede negarse la existencia de los ciclos largos. Lo que sí puede afirmarse es que la mayor parte de la varianza de la serie analizada se explica por la presencia de un ciclo de 10 años. Esto significaría, por ejemplo, que en la serie bien puede haber ciclos cuya amplitud y por tanto su participación en la varianza de la serie, sea tan pequeña que no se les pueda distinguir de las perturbaciones asociadas con el ruido blanco. Tal pudo haber sido el caso de los ciclos largos lo cual, en principio, es razonable suponer dado que, estrictamente hablando, el hallazgo de Kondratieff no fue hecho directamente en las series del índice de precios, sino en versiones *filtradas*, con la técnica de medias móviles, de éstas.³ Como es sabido, las medias móviles tienden a eliminar o atenuar la dispersión de los datos de las series, y por tanto su varianza. De aquí que si se calculan con un número de datos y con ponderaciones adecuados, puede atenuarse la varianza provocada por movimientos cortos, y resaltarse aquella debida a las fluctuaciones más largas. Como se mencionó en la introducción, un procedimiento así constituye un 'filtro' que se le aplica a la serie en cuestión y mediante el cual se extrae de ésta algún componente de interés, como los ciclos largos. Tal fue, a grandes rasgos, el método empleado por R. Metz⁴ en la detección de ciclos largos en varias series económicas relativas a la producción. Por su parte, J.

d) Los efectos del desarrollo del capitalismo periférico así caracterizado se manifiestan en una serie de *fenómenos* que configuran lo que denominamos el *subdesarrollo*: baja productividad de la fuerza de trabajo, excepto en los sectores extravertidos (agrícolas o industriales); altísimo nivel cuantitativo de la sobrepoblación relativa (respecto al mercado capitalista de la fuerza de trabajo), [...] gran parte de la población está marginada del ámbito productivo capitalista (productores-consumidores).[...] Por otra parte, es también típica del subdesarrollo la disfuncionalidad del Estado respecto al proceso de acumulación interna..."

² Kondratieff, N. D., *op cit.*

³ Véase la introducción de este trabajo.

⁴ Metz, R., *op cit.*

Reijnders⁵, utilizando una técnica similar a la presentada en este trabajo, sí detectó ciclos largos en series de precios de Inglaterra pero, a diferencia de la serie aquí analizada, que va de 1780 a 1925, las series consideradas por J. Reijnders cubrían periodos de más de dos siglos y medio⁶, lo que refuerza el resultado empírico de que las series deben ser suficientemente largas con relación al periodo del ciclo buscado para que éste pueda ser detectado mediante el análisis espectral o, dicho en otros términos,, el ciclo debe tener cierta recurrencia estadística en la serie.

Por otra parte, aun cuando el análisis de series mediante esta técnica posibilita únicamente la detección de ciclos en éstas y, por tanto, en los procesos correspondientes, y no así su ubicación en el tiempo, aporta un mayor y mejor conocimiento del fenómeno en estudio, lo que sin duda ayuda a su comprensión. Igualmente, contar con la información proporcionada por la ESDE correspondiente resulta de gran utilidad si el interés es, por ejemplo, aislar o *filtrar* los elementos cíclicos de la serie del resto de sus componentes, pues conociendo la naturaleza cíclica de la serie en cuestión, se reduciría el riesgo de generar ciclos espurios durante el proceso de filtrado.

Por último, debe señalarse que dentro del análisis espectral de series de tiempo es posible realizar un *análisis multivariante* como una cierta generalización del *análisis univariante* considerado en este trabajo, lo cual permitiría, por ejemplo, estudiar el grado de dependencia o relación entre la naturaleza cíclica de dos o más fenómenos. Del mismo modo, dentro del ámbito de la frecuencia, pueden implementarse métodos que permitan la separación de los elementos cíclicos de la serie, como se hace en el dominio del tiempo, mediante el uso de promedios ponderados de elementos de la serie.⁷

⁵ Reijnders, *op cit*

⁶ Por ejemplo, la serie del índice de precios al por mayor cobre de 1700 a 1985.

⁷ Shumway, R., *op cit*, pp. 84-97.

BIBLIOGRAFÍA

- Ambardar, A. (1995), *Analog and Digital Signal Processing*, New Jersey, Prentice-Hall.
- Bellanger, M. (1984), *Digital Processing of Signal: Theory and Practice*, Chichester, John Wiley & Sons.
- Blackman, R. B. y J. W. Tukey (1958), *The Measurement of Power Spectra From the point of View of Communications Engineering*, New York, Dover Publications, Inc.
- Bloomfield, Peter (1976), *Fourier Analysis of Time Series: an Introduction*, New York, John Wiley & Sons.
- Box, George E. P. y Gwilym M. Jenkins (1976), *Time Series Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day.
- Cox, D. R. y P. A. W. Lewis (1978), *Statistical Analysis of Series of Events*, London, Chapman and Hall.
- Cuccia M. S., C. Louis (1952), *Harmonics, Sidebands and Transients in Communication Engineering as Studied by the Fourier and Laplace Analysis*, New York, McGraw-Hill.
- Davenport, Wilbur B. y William I. Root (1958), *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, Mass., McGraw-Hill.
- Espasa, A. y J. R. Cancelo (eds.), 1993, *Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*, Madrid, Alianza Editorial.
- Ewijk, C. van (1982), "A Spectral Analysis of the Kondratieff Cycle", *Kyklos*, no. 35, pp. 468-499.
- Fernández, José (1994), *Proceso de acumulación y crisis en México: una aproximación desde la perspectiva de las ondas largas*, tesis de doctorado, Universidad de Barcelona.
- Fuller, Wayne A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, New York, John Wiley & Sons.
- Hsu, Hwei P. (1986), *Análisis de Fourier*, México, Fondo Educativo Interamericano.

Jenkins, Gwilym M. y Donald G. Watts (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, San Francisco, Holden-Day.

Kamen, Edward W. (1996), *Introducción a señales y sistemas*, México, CECSA.

Kleinknecht, A., Mandel, E. e I. Wallerstein (eds.), 1992, *New Findings in long wave Research*, N.Y., St Martin's Press.

Kondratieff, N. D. (1992), *Los ciclos largos de la coyuntura económica*, México, Instituto de Investigaciones Económicas, UNAM.

Kraniauskas, Peter (1992), *Transforms in Signals and Systems*, England, Addison-Wesley.

Lathi, B. P. (1989), *Introducción a la teoría y sistemas de comunicación*, México, Limusa.

Lewis, W. A. (1983), *Crecimiento y fluctuaciones 1870-1913*, México, FCE.

Lilen, D. M., et al (1994), *Eviews User's Guide*, Irvine, Cal., QMS.

Metz, R. y W. Stier, "Filter Design in the Frequency Domain", en Kleinknecht et al (1992), pp. 45-79.

Metz, R., "A Reexamination of Long Waves in Aggregate Production Series", en Kleinknecht et al (1992), pp.80-119.

Niveau, M. (1983), *Historia de los hechos económicos contemporáneos*, Barcelona, Ariel.

Reijnders, J. P. G., "Between Trends and Trade Cycles: Kondratieff Long Waves Revisted", en Kleinknecht et al (1992), pp. 15-44.

Schwarz, M. y L. Shaw (1975), *Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation*, McGraw-Hill.

Shanmugan, K. S. y A. M. Breipohl (1988), *Random Signals. Detection, estimation and data analysis*, New York, John Wiley & Sons.

Shumway, R. H. (1988), *Applied Statistical Time Series Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall.

Taub, Herbert y Donald L. Schilling (1986), *Principles of Communication Systems*, New York, McGraw-Hill.

Vidal, J. M. y J. Martínez (1987), *Estructura económica y sistema capitalista mundial*, Madrid, Ediciones Pirámide.

Yaglom, A. M. (1962), *Stationary Random Functions*, New Jersey, Prentice-Hall.