

2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"No separabilidad en la mecánica cuántica"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

FÍSICO



PRESENTA:

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR

270604



Director de tesis

DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

1999



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"No separabilidad en la mecánica cuántica"

realizado por PATIÑO JAIDAR ERICK LEONARDO

con número de cuenta 9450361-6 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH

Propietario

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

Propietario

DR. RAMON LOPEZ PEÑA

Suplente

DR. GERMINAL COCHO GIL

Suplente

M. EN C. IGNACIO CAMPOS FLORES

Carlos Villarreal
Ramon Lopez Peña

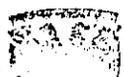
Germinal Cocho Gil

Ignacio Campos Flores

Consejo Departamental de Física

Roberto Alejandro Ruelas Mayorga

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura.



Facultad de Ciencias
Departamento de Física

AGRADECIMIENTOS

DR. GERMINAL COCHO

DR. CARLOS VILLARREAL

DR. RAMON LOPEZ

M. en C. IGNACIO CAMPOS

DR. JOSE VICON

**A LA MEMORIA DEL
MTRO. RAMON COSTA**

Índice general

	Pg.
Capítulo 1 Introducción.	
1.1 Resumen	1
1.2 Por qué retomar el tema de la no-separabilidad en la mecánica cuántica.	1
1.3 Explicación básica de las definiciones de no-separabilidad y no-localidad en la mecánica cuántica.	3
1.4 Estados enredados.	5
1.5 Diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica.	6
Capítulo 2 La no-separabilidad en la mecánica cuántica	
2.1 No localidades asociadas a la interpretación	8
2.2 No-separabilidad consecuencia de las predicciones de la mecánica cuántica	9
Capítulo 3 Teorema de Einstein, Podolsky y Rosen	
3.1 El artículo original	21
3.2 La respuesta de Bohr	26
3.3 Análisis e implicaciones	27
Capítulo 4 Teorema de Bell	
4.1 Antecedentes	29
4.1.1 El teorema de Von Neumann	29
4.1.2 El teorema de Bell-Kochen-Specker	32
4.1.3 Teorías contextuales	35
4.1.4 Motivación para el teorema de Bell	36
4.2 Formulación de las desigualdades de Bell	36
4.3 Implicaciones del teorema de Bell	40
Capítulo 5 Realización experimental del argumento Einstein-Podolsky-Rosen.	
5.1 Propuestas experimentales	44
5.2 Realización experimental	52
5.3 Críticas a la realización experimental	58

5.4 Diferentes aproximaciones	70
5.5 Átomos enredados	74
5.6 Apéndice A. Tabla de algunos resultados del experimento de Aspect.	77
Capítulo 6 Teoremas de no-separabilidad con desigualdades I.	
6.1 Diferencias con pruebas anteriores	79
6.2 Usando espines	79
6.3 Usando direcciones de propagación	83
6.4 Algunas conclusiones	85
6.5 Apéndice A. Deducción del estado inicial para el experimento con espines.	86
6.6 Apéndice B. Predicciones estadísticas para el experimento con espines.	88
6.7 Apéndice C. Predicciones estadísticas para el experimento usando direcciones de propagación.	89
Capítulo 7 Teoremas de no-separabilidad sin desigualdades II.	
7.1 Diferencias con argumentos anteriores	91
7.2 El experimento hipotético	91
7.3 Prueba de escalera	95
7.4 Realizaciones experimentales	98
7.5 Críticas a la realización experimental	100
7.6 Apéndice A. Resultados de las mediciones en los experimentos de Hardy	102
Capítulo 8 Conclusiones. La situación al momento actual.	
8.1 La no-separabilidad desde el punto de vista teórico	104
8.1.1 Fundamentación	104
8.1.2 Posibles aplicaciones	105
8.2 La no-separabilidad desde el punto de vista experimental	109
8.3 Soluciones propuestas por las diferentes interpretaciones	110
8.3.1 Interpretación de Copenhague	110
8.3.2 Interpretación de ensemble	111
8.3.3 Interpretación de los muchos mundos	111
8.3.4 Diferencias generales	112
8.4 Que queda por hacer para esclarecer la incógnita	112
8.4.1 Electrodinámica estocástica.	114

1. Introducción

1.1. Resumen

En el presente trabajo se hace una recopilación del papel que ha desempeñado la no separabilidad en la mecánica cuántica, desde las formas generadas por la interpretación hasta las conclusiones sustentadas en las predicciones de la mecánica cuántica. Se hace un relato de cómo se estructuraron los argumentos teóricos que conducen a un comportamiento no-separable de la naturaleza, y de cómo estos argumentos pasaron al plano experimental. Se exponen algunas críticas a tal realización experimental con el fin de hacer ver que los experimentos que se han llevado a cabo hasta la fecha no son del todo contundentes, y que aún existen dudas razonables al respecto de que el comportamiento último de la naturaleza sea no-separable. Con fundamento en todo lo descrito se plantea cual es la situación al momento actual, es decir, qué es lo que se puede establecer de manera contundente y qué es lo que no, así como cuales son las expectativas de las diferentes interpretaciones. También se plantea cuales serían las posibles aplicaciones en caso de que la no-separabilidad se verificara.

1.2. Por qué retomar el tema de la no separabilidad en la mecánica cuántica

Para gran parte de la comunidad científica, la mecánica cuántica es una teoría esencialmente no-separable, y no cree que haya mucho que preguntar al respecto. Sin embargo, la opinión del presente autor, es que esta actitud podría cerrar las puertas a interesantes investigaciones. Independientemente de si la naturaleza presenta o no un comportamiento no-separable, aún hay mucho por entender sobre el tema.

Supóngase que en efecto se verifican las propiedades no-separables de los microsistemas. La respuesta no termina en ese punto; muy por el contrario, cabe preguntar por qué se comportan así los microsistemas: ¿existe algún mecanismo que los mantenga correlacionados, aún a grandes distancias?; si lo hay, ¿cuál es éste? ¿cómo se vincula con los fundamentos de la mecánica cuántica? ¿cuáles de las interpretaciones son compatibles con la explicación de este comportamiento? Es factible que en el camino por responder preguntas como estas y muchas otras, se encuentren fenómenos muy interesantes.

En el caso contrario, es decir, que se encontrara que las predicciones no separables no se verifican, habría un gran impacto también. Se tendría que comenzar

por encontrar en que punto falló la teoría. Después de tanto tiempo de un éxito tras otro para el aparato matemático de la mecánica cuántica, sería sorprendente encontrar algún rubro en que ésta no acertara, y sería menester investigar por qué. En el camino hacia tan pretenciosa meta se esclarecería mucho al respecto del realismo, y de si la naturaleza está formada por objetos externos al conocimiento humano.

El vínculo entre las respuestas a la no separabilidad y un veredicto definitivo para las diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica es muy grande. Al parecer de muchos, la interpretación es un asunto de poca importancia en tanto los cálculos pragmáticos sean correctos. Sin embargo, esto no es del todo cierto, ya que las líneas de investigación se pueden ver fuertemente sesgadas dependiendo de cuál sea la explicación detrás de los fenómenos. En el siglo II a.c. Apolonio de Perga propuso dos modelos que describían los movimientos planetarios con precisión adecuada a las observaciones de la época. Uno de los modelos usaba circunferencias excéntricas a manera de órbitas sobre las que se movían los planetas. El nombre de excéntricas viene de que el centro de estas circunferencias no coincidía con el de la tierra, sino que giraba en círculos alrededor de éste. El otro modelo usaba circunferencias de dos tipos, unas llamadas deferentes y otras epiciclos. El deferente era un círculo cuyo centro coincidía con el de la Tierra, y el epiciclo era un círculo cuyo centro se movía sobre el perímetro del deferente, para que finalmente el planeta se moviera sobre el perímetro del epiciclo. Ambos modelos predecían los mismos movimientos planetarios; de hecho siglos después se demostró que geoméricamente son equivalentes. Sin embargo, no puede ser que ambos modelos sean correctos, a pesar de que durante los siglos siguientes se hizo de lado la pregunta de cuál de los dos sería el adecuado. Lo que ahora es claro, es que en el intento de dar respuesta a tal cuestionamiento, se encontraron muchas cosas, entre otras, las bases de las teorías de la gravitación, así como lo trabajos de Kepler, que no fueron sólo un perfeccionamiento en la exactitud de las predicciones, sino un gran paso adelante en la comprensión de fenómenos que nunca se hubieran considerado relacionados entre sí.

Ante tal situación, es imperativo intentar dar respuesta a la interrogantes planteadas por la no-separabilidad. A pesar de que ésta no sea ni lejanamente la intención del presente trabajo, sí se intenta hacer una recopilación de algunos de los conocimientos obtenidos hasta el momento, así como las perspectivas que quedan abiertas para las respuestas.

1.3. Explicación básica de las definiciones de no-separabilidad y no-localidad en la Mecánica Cuántica

En la construcción de la ciencia física se considera con mucha frecuencia que se tiene la capacidad de aislar un sistema; se supone en consecuencia que es posible estudiar algún sistema particular, de tal manera que todos los fenómenos que se susciten en él no tendrán relación con sucesos externos. En la práctica varía mucho la manera de conseguir este aislamiento, pero la idea central es bloquear por completo las interacciones que pueda tener el sistema de interés con el mundo exterior (todo aquello no será motivo de estudio en ese momento). Hay muchas formas de interacción; para ciertos casos, pueden ser fuerzas mecánicas entendidas clásicamente, para otros, se trata de interacciones por medio de campos y en otros muchos casos existe un contacto térmico. La suposición que se hace es que si se consigue aislar por completo las interacciones, se estará en posibilidad de estudiar al sistema en forma individual.

Sin embargo, hay ocasiones en las que se supone que se ha logrado bloquear por completo las interacciones y aún así se observan efectos del exterior sobre el sistema. La tendencia general en estos casos ha sido encontrar la forma de interacción que no se había contemplado y aislarla también. Incluso se ha suscitado que se piense en un nuevo tipo de interacción.

Si llegara el caso en que realmente se hubiera bloqueado todo tipo de interacción directa y aún así el sistema siguiera siendo afectado por situaciones externas a él, entonces se hablaría de “no-separabilidad”, puesto que el sistema no se puede separar del resto del mundo. Entre todas las definiciones que se dan de “no-separable”, ésta será la que se considere en este trabajo.

Una buena forma de evitar las interacciones entre el sistema y el supuesto causante de éstas, sería poner distancia de por medio. La teoría de la relatividad muestra que la velocidad de la luz es un límite natural a las velocidades. Partiendo de esto, es claro que cualquier interacción tendría que viajar a una velocidad menor o igual a la de la luz. Supóngase que al tratar de aislar un sistema se encuentra que, aún con lo que se consideró sería un blindaje suficiente, el estado del sistema sigue dependiendo de algo externo a él. Lo que se pretende es determinar si en realidad la causa de esta situación es que el sistema es no-separable, o como opción alternativa, que existe un tipo de interacción que no ha sido tomada en cuenta. Para esclarecer esto, se aleja al sistema del agente externo que perturba su estado, es decir, se colocan ambas partes a una cierta distancia (Δl). Lo siguiente es modificar al agente externo, evento A , de tal manera que se sepa que dicha modificación causará una perturbación en el estado del sistema, evento B .

Se denota como Δt el tiempo entre los eventos A y B . Si se considera que hay un vínculo de interacción física que conecta A con B , según los principios de la relatividad mencionados, la siguiente desigualdad tendría que ser válida

$$\Delta t \geq \frac{\Delta l}{c} \quad (1.1)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Si (1.1) se cumple existe la posibilidad de que haya alguna interacción que no había sido considerada. Por el otro lado, si (1.1) se viola existen al menos dos opciones:

a) Con esto se demuestra el carácter no-separable del sistema, puesto que no hay interacción que viaje más rápido que la luz, por lo que se puede concluir que el sistema ha sido aislado de toda interacción, y aún así depende de al menos un agente externo.

b) Existe algún tipo de interacción que se propaga con una velocidad mayor a la de la luz. Por lo tanto, la teoría de la relatividad es por lo menos incompleta ya que no considera esta situación.

Sin importar cual de los casos anteriores sea el real, cualquier teoría que considere válida la violación de (1.1) es una teoría "no-local". Así como existen muchas definiciones de no-separable, también existen muchas definiciones de no-local, pero una vez más, la que se asumirá en el cuerpo del presente trabajo será la mencionada en este párrafo.

Es necesario ver las múltiples posibilidades que existen como combinaciones de las definiciones anteriores. Por ejemplo, la no-localidad no tiene por qué implicar no-separabilidad, puesto que aún se puede pensar en interacciones que viajen más rápido que la luz. Una teoría no-separable no tiene por qué ser también no-local, puesto que podría pasar que las modificaciones en un agente no-separable de un sistema, afectaran al último de manera local, es decir, satisfaciendo (1.1). Por otro lado, la afirmación de no-localidad, aunada a que la teoría de la relatividad fuera correcta en su totalidad, implica no-separabilidad, dado que no hay interacción que explique las observaciones. Es claro que las variantes de combinaciones de estas definiciones son muy amplias; pero no es el propósito de este trabajo explicarlas todas, así que se espera que sea suficiente con lo dicho hasta el momento.

En lo subsecuente cualquier referencia a los términos ya explicados debe de ser entendida apegiándose a las definiciones aquí presentadas.

1.4. Estados enredados

Una definición quizá un poco prematura aquí, pero de gran importancia en el desarrollo de todo el estudio de la no-separabilidad, es la de los estados enredados¹. Un estado enredado involucra al menos dos subsistemas, cuyas características están fuertemente coorelacionadas. La explicación se hará para un estado de dos subsistemas; la generalización es inmediata.

La descripción de un sistema cuántico está dada por una función de onda Ψ , la cual, en general, puede ser desarrollada en términos de los estados propios ψ_n de un operador arbitrario A que puede actuar sobre este sistema, es decir,

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n,$$

con $A\psi_n = a_n\psi_n$, donde a_n es un número real.

Los coeficientes del desarrollo determinan la probabilidad de encontrar al sistema en el estado descrito por ψ_n . Si el operador A se aplica sobre el sistema, y se determina que está en el estado ψ_i , la función de onda deja de ser una combinación lineal de las ψ_n para convertirse en un estado de un solo término con el correspondiente valor específico para el operador A , y mientras no se le vuelva a perturbar el sistema permanecerá en el estado ψ_i para tiempos posteriores. A este proceso se le conoce como "reducción del paquete de onda" o "colapso de la función de onda".

Cuando el sistema descrito por Ψ esta constituido por dos subsistemas I y II, puede darse el caso de que el desarrollo de Ψ tome la forma

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n \varphi_n, \quad (1.2)$$

donde las ψ_n son estados propios de un operador A que puede actuar sobre el subsistema I y los φ_n son lo análogo para un operador B en el subsistema II. Si en (1.2) se cumplen las condiciones

$$\psi_n \neq \psi_m \quad \forall n \neq m \quad (1.3)$$

y

$$\varphi_i \neq \varphi_j \quad \forall i \neq j \quad (1.4)$$

se tiene un estado no factorizable (para estos operadores), en el sentido de que no hay ningún grupo de términos que se puedan agrupar por factorización. Para

¹El término enredado es una traducción de "entangled".

un estado descrito de esta forma, si se aplica A sobre I , y se determina que su estado es ψ_i , automáticamente se sabe que el estado de II es φ_i , ya que el colapso de la función de onda “proyectó” al sistema sobre el término i de (1.2). Esto es lo que se llama un “estado enredado”, caracterizado por el hecho de que la determinación de una propiedad de uno de los subsistemas lleva al conocimiento de alguna propiedad del otro subsistema.

Las maneras de alcanzar un estado del tipo de (1.2) que cumpla con (1.3) y (1.4) son diversas, y a lo largo del presente trabajo se expondrán ejemplos específicos así como aplicaciones de éstos.

Es importante notar que el carácter de enredado no depende de la separación que hay entre los subsistemas, puesto que no se ha hecho referencia alguna a cuales son éstos, o cual es su disposición espacial.

1.5. Diferentes interpretaciones de la mecánica cuántica

Es bien sabido que la mecánica cuántica es objeto de diferentes interpretaciones. Una interpretación es el conjunto de significados que se le asigna a los diferentes entes que aparecen en el aparato matemático de la mecánica cuántica, es decir, es el eslabón entre el nivel empírico y el abstracto. Para algunas interpretaciones la función de onda, que es la única forma de descripción de un sistema cuántico que se tiene, se considera como la más refinada de las descripciones. Para algunas otras interpretaciones, se considera que ni siquiera es un objeto real, sino exclusivamente un ente matemático abstracto, que ayuda a calcular las propiedades de los sistemas.

La interpretación más común es la de Copenhague, que precisamente por ser la más difundida se le conoce como “ortodoxa”. Para esta interpretación la descripción proporcionada por la función de onda es completa, en el sentido de que no hay mas información que la que esta contiene, el carácter probabilístico es intrínseco y se refiere a cada sistema en lo individual. Se considera que la descripción accesible de la naturaleza está dada por probabilidades. Para que esto sea consistente, se supone que un sistema no tiene propiamente definidas todas sus características, sino que tiene en potencia varias de ellas. Por ejemplo, un electrón que no está en un estado definido de su posición, es un electrón que no está en ningún lado, pero que está en potencia en todos los lugares a los cuales tiene acceso. No se debe confundir con la situación en la que se trata de falta de conocimiento; es decir, que el electrón esté en alguna parte pero que los observadores desconozcan el lugar, sino que el electrón mismo no tiene una posición definida hasta que se le observa.

Para esta interpretación la mecánica cuántica es una teoría terminada; no hay forma de conocer más a fondo las características de los sistemas, ya que éstos no tienen características más a fondo.

En contraparte se encuentra (entre otras) la interpretación de ensemble, para la cual la descripción proporcionada por la función de onda se refiere a un ensemble de sistemas, cada uno con características propias, que de manera estadística reproducen las predicciones cuánticas. En este contexto la posición (como un ejemplo de observable) de uno de los sistemas está definida, pero dentro del ensemble, distribuida y atada a un comportamiento que, colectivamente y para sistemas en las mismas condiciones, guardan las dispersiones predichas por la mecánica cuántica.

Para esta interpretación la mecánica cuántica es una teoría incompleta, que sólo permite una aproximación estadística al comportamiento fundamental de los microsistemas. Es algo similar a lo que proporciona la termodinámica respecto a sistemas macroscópicos, donde la presión, la temperatura, la energía, etcétera, son únicamente características estadísticas del comportamiento de sus subsistemas.

La diferencia entre las interpretaciones mencionadas de mayor trascendencia para el presente trabajo es que: para una de ellas los sistemas no tienen características propias y definidas (no existen tales). Lo único que el sistema tiene como propiedades son las probabilidades de encontrarse en cierto estado (como se hizo ver al respecto de la posición del electrón). Para la otra interpretación, cada sistema individual tiene propiedades, las cuales son desconocidas para el nivel de descripción de la mecánica cuántica pero existentes (el electrón tiene una posición independiente del grado de conocimiento del observador). Esta es la diferencia entre el enfoque realista objetivo y el positivista. Existirán otras diferencias cuya importancia se pueda manifestar durante el desarrollo del trabajo, pero serán, en cierta manera, consecuencia de esta diferencia fundamental.

2. La no localidad en la mecánica cuántica.

2.1. No localidades asociadas a la interpretación.

A lo largo del desarrollo de la mecánica cuántica se han planteado varias razones por las que se considera que está es una teoría en esencia no local; los argumentos son de diversa naturaleza, pero algunos de ellos son intrínsecos de una interpretación particular, un ejemplo se encuentra en la llamada paradoja de De Broglie, esencialmente esta paradoja se refiere a lo siguiente.

En el caso de un electrón encerrado en una caja de paredes rígidas y de forma cúbica; la función de onda Ψ que describe el estado estacionario del electrón es totalmente simétrica respecto a las dimensiones de la caja, es decir, que se refiere a una densidad de probabilidad ρ , tal que si el cubo es partido a la mitad de cualquiera de las formas posibles, la integral de la densidad de probabilidad sobre el volumen de cualquiera de las dos partes, es exactamente igual a un medio. Supongase que por medios mecánicos se es capaz de partir dicha caja a la mitad usando un plano que sea violentamente introducido de forma perpendicular a cuatro de las caras y paralelo a las dos restantes, a continuación se separan las dos partes y se llevan a lugares distantes; después de esto, la función de onda se acomodaría para cada mitad, pero manteniéndose presente el hecho de que la integral de ρ sobre el volumen de éstas sería un medio. La interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica sostendría que, dado que la función de onda Ψ contiene toda la información del sistema, el electrón no está contenido en una sola de las mitades, ni es tampoco que se encuentre ausente, sino que se encuentra "en potencia" en ambas mitades con una posibilidad de un medio; de tal forma que la presencia o ausencia del electrón se "vuelve realidad" solamente en el momento de realizar una medición para determinarlo; hasta antes de esto el resultado es completamente incierto. La función de onda antes de la medición es una combinación lineal, en igual proporción, de dos funciones de onda, una correspondiente a la presencia del electrón en una de las mitades y otra correspondiente a la presencia del electrón en la otra mitad. Después de realizada la medición, se encuentra que la función de onda es sólo una de éstas, y ya no una combinación de ambas, a esto se le llama "colapso de la función de onda". La razón por la que esto introduce una no localidad es que si se asume la interpretación de Copenhague y se considera realizar una medición en una de las mitades, la función de onda se colapsa para esa mitad y se puede aseverar que el electrón está presente o ausente en esa mitad, pero en ese mismo instante, como consecuencia, es posible determinar si el

electrón se encuentra presente o ausente en la otra mitad, ya que son situaciones mutuamente excluyentes el que se encuentre en una o se encuentre en la otra así que lo que se consigue es colapsar la función de onda en una de las dos mitades por medio de realizar una observación en la otra. Esto es claramente una situación no local, ya que se puede escribir una función de onda que exprese la presencia del electrón en una de las mitades en función de la presencia o ausencia en la otra mitad.

Esta es una no localidad sólo si se considera la interpretación de Copenhague. Pero si la interpretación que se considera es la de ensemble, la paradoja desaparece automáticamente, puesto que no es aceptado que la función de onda contenga toda la información de las dos partículas, así que puede ser perfectamente aceptable que la presencia o ausencia del electrón esté ya determinada desde antes de la medición, aunque la función de onda no sea capaz de proporcionar esta información. De esta forma el evento A (la medición en una de las mitades) no afecta a B (la medición sobre la otra mitad), ya que de igual manera el resultado de B era preexistente a la medición, y por lo tanto independiente del resultado de A.

Como es notorio este tipo de no-localidades exclusivas de la interpretación son casi evidentes en su forma de ser llevadas a una interpretación local, pero no todas las situaciones son iguales. Hay casos en los cuales, el suponer la preexistencia de los valores posibles en el resultado de una medición es contradictorio con las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica. No solo estos casos son de interés, sino que existen ocasiones en que las propiedades de una partícula quedan determinadas a partir de las propiedades de otra que está distante de ella y que son consecuencia de las predicciones de la mecánica cuántica. Justamente a estos dos tipos de no-localidades serán a los que se enfocará este trabajo, dejando de lado cualquier tipo de discusión referente a situaciones similares a la paradoja de De Broglie. A la descripción del segundo tipo de no-localidades será a lo que se enfoque la siguiente sección.

2.2. Las no-localidades consecuencia de las predicciones de la mecánica cuántica.

Ahora serán expuestos algunos ejemplos de situaciones en las cuales según la interpretación de Copenhague no se mantienen el principio de separabilidad o el de localidad.

El primero que se mencionará se refiere a un sistema de dos partículas, donde

el estado más general antisimetrizado, en términos de la posición de las partículas, que se puede encontrar es el siguiente:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_n(x_1)\varphi_m(x_2) \pm \varphi_m(x_1)\varphi_n(x_2)] f dp; \quad (2.1)$$

x_1 y x_2 se refieren a las posiciones de la partícula 1 y 2 respectivamente. El segundo término de esta función de onda, que aparece sumando o restando es debido al principio de simetrización. Éste es claramente un estado enredado, puesto que por ejemplo, si se determina que la partícula 1 está en el estado n , automáticamente la función de onda se proyecta sobre el primer término de (2.1), y consecuentemente la partícula 2 se encuentra en el estado m . Nótese también que si se desea calcular la velocidad de la partícula 1, se obtiene:

$$v_1 = \frac{\hbar}{2m_1} \left(\frac{\nabla_1 \Psi^*}{\Psi^*} - \frac{\nabla_1 \Psi}{\Psi} \right) \quad (2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi^*(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_n^*(x_1)\varphi_m^*(x_2) \pm \varphi_m^*(x_1)\varphi_n^*(x_2)] \\ \nabla_1 \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_m(x_2) \nabla_1 \varphi_n(x_1) \pm \varphi_n(x_2) \nabla_1 \varphi_m(x_1)]; \end{aligned} \quad (2.3)$$

desde luego ∇_1 se refiere al gradiente tomado respecto a x_1 .

En la expresión (2.2) queda de manifiesto que v_1 depende de x_2 , pese a que se trata de partículas que no interactúan "directamente".

Al analizar este resultado desde el punto de vista de la interpretación de Copenhague se tiene de inmediato que el principio de separabilidad se viola. Esto es claro puesto que se supone que (2.2) describe por completo la velocidad de la partícula uno, así que si se aíslan ambas partículas y se realiza una observación para determinar v_1 , el resultado de ésta puede ser modificado por una observación en la posición de la partícula dos.

Sin embargo si se asume la interpretación de ensemble, esta violación de la separabilidad desaparece, puesto que v_1 no es considerada una propiedad de la partícula 1, sino del sistema compuesto de ambas partículas. La función de onda Ψ no tiene sentido más que haciendo referencia al sistema de ambas partículas, por lo tanto cualquier predicción estadística se refiere a una predicción del estado general, es decir, que en efecto la partícula 1 tiene una v_1 bien definida, y que sólo

puede tener un valor determinado para cierto estado del sistema completo, así que no es que la posición de la partícula 2 modifique la velocidad de la partícula, sino que para una x_2 dada, v_1 sólo puede tener un valor específico por ser ambas parte de un sistema. Así que (2.2) proporciona la velocidad de la partícula 1 cuando se encuentra inmersa en el sistema particular donde Ψ tiene sentido y en cual se encuentra incluida la partícula 2; de tal forma que no es de sorprender el que v_1 dependa de la posición de la partícula dos e incluso de otras propiedades.

Algunos problemas estadísticos, que no se analizarán en detalle por el momento pero que son discutidos ampliamente en el capítulo 4, dedicado a las desigualdades de Bell, podrían surgir al suponer que los valores de x_1, x_2, v_1 , etc. existen previamente a las observaciones.

Las predicciones de la mecánica cuántica establecen relaciones entre los resultados de la aplicación de los operadores sobre una función de onda, y es justamente en términos de estas relaciones que se encuentra que no hay valores preexistentes que sean consistentes entre sí. La conclusión usual es que con esto queda demostrado que las variables dinámicas no tienen un valor determinado antes de realizar una observación. Esto implicaría la negación del realismo. Sin embargo el cuestionamiento principal a este respecto es acerca de los operadores que en principio representan a las variables dinámicas, ya que las relaciones que se encuentran son aplicables a los operadores, y los operadores demuestran ser representantes legítimos de las variables dinámicas sólo en el caso de que los valores de las variables que representan sean medidos, de tal manera que queden inmersas en su resultado las condiciones globales del sistema, es decir en forma contextual. La gran suposición, que lleva a la negación del realismo, es que los operadores son representantes legítimos de las variables dinámicas en toda circunstancia, por lo tanto de manera no contextual, y en consecuencia toda relación que se aplique a los operadores, también debería de ser aplicable a las variables, sin embargo, esta hipótesis no es evidente, ni ha sido satisfactoriamente comprobada, lo cual deja abierta una puerta para una comprensión realista.

Para hacer ver una contradicción entre las predicciones cuánticas y el realismo, se expondrá un experimento imaginario. En este experimento se hace uso de radiación γ , polarizadores y detectores, por lo que una discusión previa respecto a algunas propiedades de estos es obligada ahora.

Considerese primero un rayo de luz no polarizada dirigida hacia un polarizador PA (figura 2.1) con su eje de polarización vertical. La luz después de atravesar el polarizador tendrá su campo eléctrico vibrando en la dirección vertical. Para

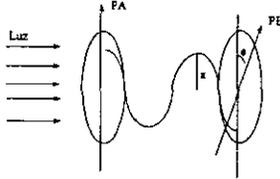


Figure 2.1: Luz atravesando dos polarizadores subsecuentes

verificar esto se puede poner un segundo polarizador PB y comprobar que si su eje está orientado en la dirección vertical ($\theta = 0$), toda la luz que haya pasado por PA, pasará también por PB, y por el contrario si su eje está horizontal ($\theta = \frac{\pi}{2}$) la luz será bloqueada por completo. Para ángulos intermedios, la fracción de luz que después de pasar por PA consigue también pasar por PB está dada por $\cos^2 \theta$ (la ley de Malus).

Es posible dudar si es cierto que esta luz que pasó por PA está en verdad polarizada, y para respondernos (al menos parcial más no contundentemente) se puede suponer que no se modifica en realidad, sino que para un polarizador se tienen ángulos de inclinación del vector de polarización por los cuales la luz consigue atravesar y otros por los cuales no lo consigue. Si se supone un modelo muy ingenuo donde (figura 2.2) a las direcciones comprendidas en A, les sea permitido el paso y a las direcciones comprendidas en A' no (lo mismo para las áreas B y B'), podemos verificar que para $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ los resultados son los mismos que los ya mencionados; pero si se superponen las áreas de los polarizadores (figura 2.3), es fácil ver que sólo pasarán las direcciones del vector de polarización que esté comprendido en la zona marcada con cuadrícula (que es la superposición de A y B); esta fracción del área original A está dada por $1 - \frac{2\theta}{\pi}$, así que partiendo de que todas las direcciones de polarización son igualmente probables, esto deberá de ser igual a "la parte" de la luz que pasa a través de PA y de PB, y como es notorio, esto no coincide con la ley de Malus. Para cualquier modelo donde los vectores de polarización no sean modificados por los polarizadores, se

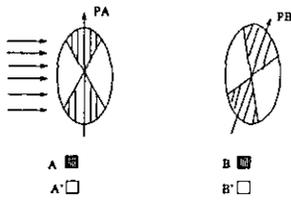


Figure 2.2: Modelo inadecuado del funcionamiento de dos polarizadores.

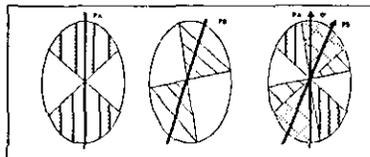


Figure 2.3: Direcciones de polarización que no son bloqueadas

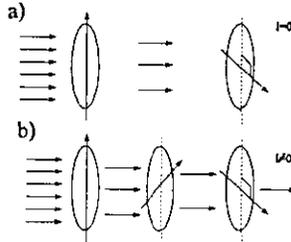


Figure 2.4: Modificación de la intensidad de la luz saliente por medio de insertar un polarizador intermedio

presentará una situación similar. Si se piensa en un caso un poco más general para el cual no se modifique la luz al atravesar los polarizadores (sino que sólo parte de ella sea absorbida) sería problemático explicar lo siguiente: Al colocar dos polarizadores ideales con sus ejes de polarización perpendiculares (figura 2.4a) la luz será bolqueada en su totalidad. Si ahora se introduce un polarizador con su eje formando un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ respecto al eje de cualquiera de los otros dos (figura 2.4b), lo que se observa es que en este caso, un medio de la luz que ya pasó por el primer polarizador atraviesa también el segundo, lo cual corresponde a la ley de Malus evaluada en $\frac{\pi}{4}$, y de esta luz que ha conseguido pasar por los dos primeros la mitad atraviesa también el último (nuevamente coincidiendo con la ley de Malus evaluada en $\frac{\pi}{4}$). Desde luego este resultado es imposible si no es permitido que el polarizador intermedio altere la luz que incide sobre éste.

Dado lo anterior se puede pensar que el resultado de que la luz atraviese un polarizador es, en efecto, que quede polarizada a lo largo del eje del polarizador. La conclusión es que de la luz polarizada que incida sobre un polarizador, solo pasará una fracción dada por la ley de Malus como $\cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo entre el eje del polarizador y la dirección de polarización de la luz incidente.

Una vez habiendo discutido esto se planteará el experimento imaginario: un pión es una partícula que decae en un tiempo muy corto en dos fotones cuyos estados de polarización están correlacionados dado que el pión es una partícula pseudoescalar (de espín cero y paridad negativa), se encuentra (Yang 1950) que

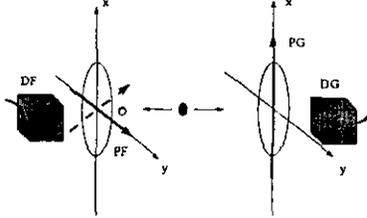


Figure 2.5: Pión decayendo en medio de dos polarizadores

el estado de los fotones (salvo normalización) está descrito por :

$$e_{F_x}e_{G_y} + e_{F_y}e_{G_x} \quad (2.4)$$

donde e_{F_x} es el estado que describe un fotón polarizado en la dirección x viajando en dirección z ; e_{G_y} describe a un fotón polarizado en la dirección y viajando en dirección $-z$, y las permutaciones se refieren a los diferentes planos de polarización.

Coloquese un pión en medio de dos polarizadores, uno con su eje en la dirección y (PF) y otro con su eje en la dirección x (PG) (figura 2.5). Para este dispositivo se puede predecir que si un fotón pasa por PG, eso indica que el estado de los fotones fue proyectado sobre la segunda parte de la expresión 2.4, por lo tanto el fotón viajando en la dirección z , pasará por PF, ya que su estado queda determinado como e_{F_y} . Así que para todos los fotones que pasen por PG, ocurrirá que el fotón sobrante del decaimiento del pión pasará por PF, es decir, que si hay detección en G, la probabilidad de detección en F es 1. Ahora supongase que PF está a un ángulo θ respecto a y , entonces la ley de Malus se aplica de nuevo (ya que el fotón está polarizado en y y el eje del polarizador a un ángulo θ respecto a éste) y se encuentra que si hay detección en G, la probabilidad de detección en F es igual a $\cos^2 \theta$.

Regresando a la situación de la figura (2.5), dado que los piones decaen aleatoriamente, todas las direcciones de polarización son igualmente posibles, así que la mitad de las veces que un pión decaiga y los fotones salgan en la dirección de los brazos del dispositivo, habrá un conteo en G, y consecuentemente en F (por las

razones ya expuestas), así que la mitad de la veces ambos contadores detectarán el arribo de un fotón, siendo esta la predicción de la mecánica cuántica.

Se analizará la situación anterior desde otro punto de vista: cuando un pión decae, lo hace en dos fotones cuyas polarizaciones son perpendiculares; considerese que al momento en que el fotón en dirección de PG llega a él, tiene un ángulo entre su dirección de polarización y el eje del PG θ , así que la posibilidad de que pase por éste es igual a $\cos^2 \theta$. Consecuentemente el fotón que viaja hacia PF también forma un ángulo θ entre su dirección de polarización y el eje de PF (recordando que PF y PG tienen ejes perpendiculares). Dado que los polarizadores pueden estar a gran distancia, tenemos que el evento de que un fotón pase, no debería tener influencia alguna sobre el que pase el otro fotón. El que un fotón pase o no pase depende de sus propiedades y su interacción con el polarizador, y no puede ser afectado por la interacción del otro fotón con el otro polarizador (con esta aseveración se está introduciendo la hipótesis de separabilidad), así que la probabilidad de que haya detección en F y en G para el mismo decaimiento debería de ser la multiplicación de las probabilidades por separado, que resulta en $\cos^4 \theta$. Dado que θ está indeterminado y se supone que los polarizadores no afectan la manera en que decae el pión, todos los valores de θ son igualmente probables; así que la probabilidad de que se de la detección en ambos contadores está dada por el promedio de $\cos^4 \theta$, sobre todos los ángulos, que es $\frac{3}{8}$ así que el suponer verdaderas todas las hipótesis mencionadas encuentra como consecuencia una probabilidad de detección conjunta en DG y DF de $\frac{3}{8}$, contradiciendo el resultado cuántico que es $\frac{1}{2}$. Es decir que la conclusión a la que se llega es que (dado que la probabilidad de que un fotón pase por PG es de $\frac{1}{2}$) si un fotón pasa por PG, entonces la probabilidad de que el otro pase por PF es de $\frac{3}{4}$, contrario a la predicción cuántica que indica que es igual a 1 .

Lo que se ha conseguido aquí es poner en evidencia la contradicción entre las predicciones de un modelo clásico de probabilidades —el cual entre sus hipótesis incluye la separabilidad— y las predicciones sustentadas por la mecánica cuántica. Lo que falta ahora es entender que es lo que en realidad pasa.

Para que la detección en DG esté asegurada, se necesita que el fotón viajando en esta dirección esté polarizado exactamente a lo largo del eje de PG, pero esto no tiene por que ser el caso para la mitad de las ocasiones, así que una salida automática sería pensar que la interacción en PF o la medición en F, afecta al otro fotón antes de llegar a PG y lo polariza paralelo o perpendicular al eje de PG según sea el caso lo cual indicaría que existe una interacción entre los fotones, es

decir que la medición en PG afecta en realidad la medición en PF. Si éste no fuera el caso, solo $\frac{3}{8}$ de las veces que hay detección en F, habría una en G. Matemática y experimentalmente todo se comporta como si el fotón viajando en dirección del polarizador PF es polarizado por la medición realizada en PG.

A partir de este punto hay varias alternativas a seguir:

- i) Las predicciones de la mecánica cuántica son erróneas.
- ii) Las predicciones de la mecánica cuántica son correctas, pero es una teoría incompleta puesto que no explica cual es el mecanismo de interacción entre los fotones (o entre las observaciones).
- iii) Las predicciones de la mecánica cuántica son correctas, y este análisis no la hace ver como una teoría incompleta, puesto que no hay necesidad de explicar el mecanismo de interacción entre los fotones (o entre las mediciones), ya que no existen cosas tales como las propiedades intrínsecas de los fotones (enfoque positivista propio de la interpretación convencional de Copenhague).

Entre estas tres posturas (que no agotan las posibles opiniones) se establece un debate de importancia. Se han realizado experimentos [1] con la intención de comprobar las predicciones de la mecánica cuántica, y se ha encontrado una aparente concordancia en los resultados, aunque hay críticas que cuestionan la validez de éstos [2]. Con estas críticas y algunas otras se ve que aunque no sea inválido el experimento, al menos no parece ser conclusivo, así que partiendo de esto se verán cuales son los puntos favorables y desfavorables de cada postura.

Si (i) fuera cierto se podría recuperar el realismo y la localidad, pero contrapuesto a esto se encuentra el gran éxito de la mecánica cuántica en cuanto a la predicción de muchos otros efectos, así que no resulta convincente el pensar en esta opción; sin embargo, se podrían idear modelos que reprodujeran los resultados verificados (con experimentos cuyo análisis sea contundente) y que fallaran al tratar de explicar las predicciones de dudosa verificación. Esta es una alternativa un tanto impopular ya que el formalismo de la mecánica cuántica cuenta con un desarrollo consistente, lo que hace dudoso pensar que se requiere un formalismo nuevo que haga caer en desuso el ya existente.

Quizá entre las posturas (ii) y (iii) pareciera haber una diferencia más sutil, ya que ambas proponen que la mecánica cuántica es acertada en sus conclusiones respecto a los posibles experimentos; sin embargo, la diferencia entre estas posturas es de gran trascendencia, puesto que para (ii) aún existen preguntas fundamentales que responder al respecto del comportamiento cuántico. Esto rebasa en mucho al presente análisis, puesto que se esperaría una explicación para los "postulados

cuánticos” y la posibilidad de deducir todos los efectos observados en este contexto a partir de “primeros principios”. En esta dirección se encuentra la opción de variables ocultas, las cuales han sido violentamente atacadas encontrando teoremas que demuestran que no puede existir un modelo de variables ocultas que sea consistente con las predicciones cuánticas; quizá el más notable sea el propuesto por J.S. Bell [3]. En este teorema se deducen las llamadas desigualdades de Bell, que son violadas por las predicciones cuánticas (este tema será abordado a mayor profundidad en el capítulo 4) y que en experimentos realizados parecen¹ ser violadas de manera práctica también. Esto ha desalentado la búsqueda en este sentido. Por otro lado, se ha incrementado la indagación con modelos que no impliquen variables ocultas pero, que puedan explicar el comportamiento cuántico, no sólo en términos de efectos de no separabilidad, sino con una visión general, de una manera natural y simple, un ejemplo muy destacado de esto es la electrodinámica estocástica [4].

Desde el punto de vista de (iii), no hay problema en aceptar los postulados de la mecánica cuántica, puesto que éstos son consistentes, y han demostrado tener la validez para predecir de manera acertada los efectos observados. Pero a cambio de esto es necesario asumir una postura positivista², así como abandonar la posibilidad de completar la mecánica cuántica de manera que se fundamente en primeros principios. La pérdida del realismo, así como el introducir postulados axiomáticos —como asegurar que un sistema debe de cumplir con la ecuación de Shödinger sin explicar por qué— en esta teoría para hacerla funcionar, son las dos principales “desventajas” de esta opción. Es factible que no haya consenso en considerar estas dos características como desventajas, pero así se consideran en este trabajo. Cabe resaltar que también habría que cerrar las puertas a la investigación en el sentido de los fundamentos de la mecánica cuántica, ya que éstos pierden sentido al considerarlos inexistentes, y se enfocan sólo en encontrar efectos para poder analizarlos (o predecirlos si es el caso) con la herramienta, *completa* de la mecánica cuántica, y el refinamiento de las precisiones alcanzadas por cálculos previos y aproximados.

Las explicaciones posibles asumiendo cada una de las posturas anteriores son

¹En realidad las desigualdades que se ven violadas son las llamadas “desigualdades fuertes de Bell”, que son las desigualdades originales aunadas a ciertas hipótesis experimentales (la discusión a profundidad es expuesta en capítulos posteriores).

²Para una definición del positivismo físico véase “La mecánica cuántica y sus interpretaciones”, Brody et al, *Revista Mexicana de Física*, 25 (1976) E31-E62.

las siguientes:

i) El análisis, con estadística clásica y la introducción de la separabilidad, es incompleto mas no incorrecto, puesto que no considera los factores que son responsables del comportamiento cuántico, y es justo en esa dirección en la que hay que trabajar para encontrar un modelo que permita una predicción que coincida con la alcanzada por la mecánica cuántica, que en sí es acertada. El efecto de no separabilidad es sólo una consecuencia de este modelo que no se conoce, donde pueden ser afectadas, ya sea las mediciones o las propiedades mismas del fotón, se supone (*a priori*) que la no separabilidad dejaría de ser un efecto sorprendente y propio sólo de la mecánica cuántica, para entenderse como un reflejo más de la física tal como la conocemos colocada en el entorno apropiado.

ii) El análisis, con estadística clásica y la introducción de la separabilidad, es no sólo incorrecto, sino inválido en el terreno de la mecánica cuántica, ya que ésta es una teoría que rompe con los análisis clásicos de manera natural dado los postulados en que se sustenta. No hay nada que explicar, se puede estar seguro de que las predicciones cuánticas se cumplirán sin error alguno al menos que éste sea introducido por aproximaciones en los cálculos. No hay interacción por explicar, ya que las propiedades de los fotones existen sólo en la medida del grado de conocimiento de éstos por parte del observador, hasta que el fotón atraviese un polarizador dado se podrá deducir su estado.

Con esto se concluye la presentación de situaciones en las que la no separabilidad aparece de manera natural en la mecánica cuántica, y se ve como las diferentes interpretaciones canalizan los esfuerzos posteriores en diversas direcciones. En lo subsecuente se plantearán situaciones con análisis correspondientes a las diferentes interpretaciones, para hacer ver las conclusiones a las que se pueden llegar hasta el momento.

REFERENCIAS

- [1] Aspect, A. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91-94 (1992).
- [2] Caroline H. Thompson, *Foun. of Phys. Lett.* **9**, 357-382 (1996)
- [3] J. S. Bell, "Speakable and unspeakable in quantum mechanics" Cambridge University Press, 1987.

3. Einstein, Podolsky y Rosen.

3.1. El artículo original.

Tras haber asistido a una cátedra impartida por Bohr (1933), Einstein planteó la siguiente situación imaginaria: Supongase que hay dos partículas que se ponen en movimiento una hacia la otra con el mismo, -y muy grande-, momentum, y que interactúan entre sí por un período corto de tiempo en una posición conocida, para después separarse y continuar su camino. Ahora supongamos que un observador interactúa con una de las partículas una vez que ésta se encuentra lejos de la región de interacción. Si este observador decide medir el momentum de esta primera partícula, dadas las condiciones del experimento, este observador será capaz de deducir el valor del momentum de la otra partícula. Si en lugar de esto el decide medir la posición de la partícula, el observador tendrá la capacidad de inferir donde está la otra. Según la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, la posición y el momentum de la segunda partícula son indeterminadas (dentro de cierto comportamiento estadístico) hasta que se realiza la medición sobre la primera, momento en el cual se determina. Esta es una deducción completamente correcta proveniente de manera simple de los principios de la mecánica cuántica, pero ¿no es esto paradójico? Después de que todas las interacciones físicas han desaparecido ¿cómo puede el estado final de una partícula ser influenciada por una medición realizada en la otra?

Dos años después de que Einstein planteó este dilema, un artículo fue publicado por él mismo junto con Boris Podolsky y Nathan Rosen [1]. El cuerpo central de este artículo fue el desarrollo de la situación discutida en una presentación más formal. El argumento general es el siguiente: Un elemento de la realidad física no puede ser determinado por una consideración filosófica *a priori*, sino que debe de ser encontrado a partir de los resultados de mediciones experimentales. En consecuencia los autores proponen lo que ellos llaman "un criterio de realidad"; *Si el valor de una cantidad física para un sistema puede ser predicho con certeza (es decir con probabilidad igual a 1) sin perturbarlo en ninguna forma, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad.* Sobre este criterio se aclara que, aunque no agota todas la maneras de reconocer un elemento de realidad física, al menos aporta uno. Por otro lado también hay que notar que no es un principio contundente o absoluto, sino el que los autores consideran pertinente.

Considérese ahora el caso de una partícula con un sólo grado de libertad; según la interpretación ortodoxa de la mecánica cuántica, el comportamiento de

ésta estará determinado por el estado en que se encuentre, a su vez descrito en su totalidad por la función de onda ψ . Correspondiente a cada observable físico A, hay un operador que puede ser designado por la misma letra A. Si ψ es una función propia de A, entonces

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \quad (3.1)$$

donde a es un número, y en consecuencia la cantidad física A tiene con probabilidad 1 el valor a , siempre que la partícula esté en el estado descrito por ψ . Congruentemente con el principio de realidad, para una partícula en el estado ψ en el que la ecuación (3.1) se cumple, existe un principio de realidad correspondiente al observable A. Tómese por ejemplo,

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \quad (3.2)$$

donde h es la constante de Planck, p_0 es algún número constante, y x es la variable independiente. Dado el operador correspondiente al momentum de la partícula

$$p = (h/2\pi i) \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.3)$$

se obtiene

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i) \frac{\partial \psi}{\partial x} = p_0 \psi. \quad (3.4)$$

Como para el estado dado por (3.2) el momentum tiene con certeza el valor p_0 , tiene sentido decir que el momentum de la partícula en este estado es real y vale p_0 .

Por otro lado, si la ecuación (3.1) no se cumple para este estado, no es posible decir que la cantidad física A tenga un valor dado. En particular esto es así para la coordenada de la partícula. El operador correspondiente, llámese q , es el resultado de multiplicar por la variable independiente, x . Así,

$$q\psi = x\psi \neq \text{const.}\psi. \quad (3.5)$$

De esta forma, para la mecánica cuántica lo único que se puede decir dada esta función de onda es que al realizar una medición sobre la posición de la partícula, hay una probabilidad relativa de que el resultado quede comprendido entre a y b , la cual está dada por

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a. \quad (3.6)$$

Es claro que todos los valores para las coordenadas son igualmente probables, dado que el resultado anterior no depende del origen de a o de b , sino exclusivamente de $b - a$. Lo que se concluye es que la coordenada no tiene un valor que se pueda predecir y sólo con una medición se podría determinar. Pero esto alteraría al sistema y modificaría su estado; tras haber determinado la coordenada de la partícula, ésta ya no estaría en el estado dado por (3.2). La conclusión usual en mecánica cuántica es que *si el momentum de una partícula es conocido con precisión, su coordenada no es una realidad física*.

En general, como es sabido, para cualesquiera operadores que no conmuten, representantes de cantidades físicas (A y B), el conocimiento preciso del valor de uno de ellos implica la imposibilidad de saber el valor del otro para el mismo estado.

De aquí surgen las alternativas: 1) La descripción de la realidad dada por la función de onda es incompleta, o bien 2) Cuando los operadores representantes de dos cantidades físicas no conmutan, dichas cantidades no pueden tener una realidad física simultánea. Si ambas correspondieran a un elemento de realidad, tendrían valores determinados, y para que la descripción de la mecánica cuántica fuera completa sería necesario que éstos valores fuesen obtenibles a partir de la función de onda. Como éste no es el caso, las dos alternativas se presentan como mutuamente excluyentes.

Supóngase ahora que se tienen dos sistemas, I y II, a los que se les permite interactuar durante el intervalo $t = 0$ hasta $t = T$, después del cual se supone que toda interacción entre los dos sistemas desaparece. Supóngase también que los estados de los sistemas I y II antes del tiempo $t = 0$ eran conocidos, de esta forma, con la ayuda de la ecuación de Schrödinger, se puede calcular el estado del sistema combinado I+II para cualquier tiempo subsecuente, en particular para $t \geq T$. Désígnese esta función de onda con la letra ψ . Algo que no es posible hacer desde el punto de vista de la descripción aportada por la mecánica cuántica es determinar el estado en que cada sistema se encuentra. Esto sólo se puede hacer por medio una o más mediciones, lo cual implica la "reducción del paquete de onda". Es conveniente explicar con claridad a que se refiere dicha "reducción".

Sean a_1, a_2, a_3, \dots los valores propios de un operador representante de la cantidad física A para el sistema I, y $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$ las correspondientes funciones propias, donde x_1 se refiere a las variables usadas para la descripción del primer sistema. Es posible escribir la función de onda de la manera que sigue

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \quad (3.7)$$

donde x_2 se refiere a las coordenadas usadas para describir al sistema II. Y aquí las funciones $\psi_n(x_2)$ son sólo los coeficientes del desarrollo de la función ψ en una serie de funciones ortogonales $u_n(x_1)$. Ahora supóngase que se realiza una medición de A en el sistema I, y se encuentra el valor a_k , esto quiere decir que el sistema está en el estado $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$, concluyendo que el sistema II está en el estado dado por $\psi_k(x_2)$. A esto se le conoce como la reducción del paquete de onda: el paquete dado por la serie infinita en (3.7), es reducido a un sólo término.

La reducción del paquete de onda no pasa en exclusiva para un operador, sino que se puede reducir el paquete de onda respecto a distintos operadores. Los vectores $u_n(x_1)$, están determinados por el observable correspondiente a A , pero análogamente para un observable representado por un operador B , es posible desarrollar

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2)u_s(x_1), \quad (3.8)$$

donde φ_s son los nuevos coeficientes y u_s se refieren a los vectores propios del operador B . Si ahora es el observable B el medido, y resulta tener un valor b_r (correspondiente a v_r) la conclusión es que el sistema I está en el estado dado por $v_r(x_1)$, y el sistema II en el estado $\varphi_r(x_2)$, que en principio puede ser diferente de $\psi_k(x_2)$. Así es claro que como consecuencia de una medición realizada en el sistema I, el sistema II puede ser dejado en estados descritos por dos diferentes funciones de onda, dependiendo del observable que se mida en I. Sin embargo, para el momento de la medición se supone que ya no hay interacción entre los sistemas. Así que en principio no habría forma de que una medición en el sistema I afectara el estado del sistema II. Así que por medio de este procedimiento es posible asignar dos funciones de onda diferentes a la misma realidad (el estado del sistema II después de la medición en el sistema I).

Esto podría no ser un problema, a menos que estas dos funciones fueran propias de operadores que no conmuten, lo cual puede ocurrir, como se mostrará con el siguiente ejemplo. Supóngase que cada uno de los dos sistemas es una partícula; y que la función de onda está dada por

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \quad (3.9)$$

donde x_0 es una constante. Si el operador A es el momento de la primera partícula, entonces usando (3.4) sus funciones propias serán

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/\hbar)px_1} \quad (3.10)$$

correspondiente al valor propio p . Dado que aquí se tiene un espectro continuo, en lugar de (3.7) se escribirá

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \quad (3.11)$$

donde

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}. \quad (3.12)$$

Esta ψ_p es una función propia del operador

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \quad (3.13)$$

correspondiente al valor propio $-p$ del momento de la segunda partícula. Ahora tómesese B como la posición de la primera partícula, cuyas funciones propias son

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x), \quad (3.14)$$

correspondientes al valor propio x . Se escribe lo equivalente a (3.8) como

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (3.15)$$

donde

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(2\pi i/h)(x - x_2 + x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0). \quad (3.16)$$

Esta $\varphi_x(x_2)$ es función propia del operador

$$Q = x_2 \quad (3.17)$$

correspondiente al valor propio $x + x_0$ de la coordenada de la segunda partícula.

Dado que

$$[P, Q] = h/2\pi i, \quad (3.18)$$

se ha mostrado que en general es posible que las funciones ψ_k y φ_r sean propias de operadores que no conmutan.

En el caso general planteado, considérese que las funciones ψ_k y φ_r son funciones propias de operadores que no conmutan, entonces dependiendo de la medición que se decida realizar en el sistema I, se puede predecir con certeza, ya sea el valor de la cantidad física P o bien el de la cantidad física Q . De acuerdo con el criterio de realidad planteado con anterioridad, en el primer caso se debe de considerar a la cantidad P como un elemento de realidad, y en el segundo a Q

como tal. Sin embargo, ya que se está dando por supuesto que no hay ninguna interacción entre los dos sistemas, la medición en I no puede modificar la realidad de II, así que ambas funciones (ψ_k y φ_r) pertenecen a la misma realidad, y por lo tanto los valores de P y Q son *ambos* elementos de realidad. Dado que Einstein, Podolsky y Rosen ya habían hecho ver la contradicción que existe entre que: 1) La mecánica cuántica proporciona una descripción completa, y que 2) Dos operadores que no conmuten tengan una realidad simultánea, a la conclusión que llegan es que la única alternativa posible es la negación de 1.

Hay algunos detalles sutiles al respecto de este artículo, uno de los cuales es mencionado por los mismos autores; la objeción que se podría hacer es acerca del “criterio de realidad”, argumentando que éste no sea suficientemente restrictivo, y consecuentemente se esté considerando como elemento de realidad algo que no lo es. Como ellos mismos hacen notar, esta conclusión no sería alcanzada si se partiera de que para que dos o más cantidades físicas fueran consideradas elementos de realidad *simultáneas* fuera necesario poder medirlas o predecirlas *simultáneamente*. Desde este punto de vista y dado que las cantidades P y Q se pueden predecir sólo una o la otra en la misma ocasión, esto llevaría a que no son simultáneamente reales. Y no sólo eso, sino que la realidad de P y Q depende de las condiciones de medición para el sistema I, que en principio no perturban al sistema II.

Este último exhibe manifiesta de forma muy clara la naturaleza no local de la mecánica cuántica si se le acepta como una descripción completa. Lo que se está afirmando en este caso es que la realidad del sistema II no puede ser separada de la realidad del sistema I. Para los autores del artículo original no existe una definición razonable de realidad que pueda aceptar este hecho.

3.2. La respuesta de Bohr

Cuando Bohr recibió el artículo original abandonó el trabajo que le ocupaba para dedicarse a dar respuesta al citado artículo. Su argumentación fundamental fue referida al “principio de complementariedad”¹, por medio del cual rechazaba el criterio de realidad propuesto por los autores.

El criterio de realidad usado por EPR dice: *Si el valor de una cantidad física para un sistema puede ser predicho con certeza (es decir con probabilidad igual a*

¹El principio de complementariedad carece de un enunciado preciso, dado que la explicación dada por el mismo Bhor es un tanto obscura. Para el presente trabajo una idea intuitiva, que se puede formar a lo largo de la lectura del mismo, será suficiente.

1) *sin perturbarlo en ninguna forma, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad.* El primer cuestionamiento ataca el hecho de que en este principio se encuentra la suposición de que no se perturba al sistema en ninguna forma. La opinión de Bohr es que esto no puede pasar como tal. Plantea ejemplos donde cada medición que se realiza se ve afectada por mediciones que se pudieron haber realizado anteriormente. Encadenando todo en un gran dispositivo experimental, se alcanza una situación en la que no hay ninguna medición que deje de perturbar a las demás. Recalca que hay que ser cauteloso al diferenciar los aparatos de medición de los objetos bajo observación. Y sin dar un argumento contundente, sostiene que si un dispositivo está diseñado para medir cierta cantidad física, éste es incompatible con algún otro que esté diseñado para medir otra cantidad cuyo operador no conmute con el de la primera. Así que al parecer el resultado de las mediciones lo plantea como contextual. Como no se puede realizar una medición simultánea de dos cantidades conjugadas, concluye que el sistema se afecta desde el momento en que se elige la medición a realizar, ya que parte de lo que se considera dispositivo experimental está conformado también por el objeto observado. Esto lo refiere nuevamente al principio de complementariedad, donde cualesquiera cantidades físicas que sean representadas por operadores que no conmuten, son cantidades complementarias de la misma realidad, es decir, que agotan su descripción, son parte de ella, pero no pueden ser conocidas simultáneamente, así que para conocer una es necesario perder el conocimiento de la otra.

Es interesante notar que la respuesta de Bohr fue, de una u otra forma, la misma objeción que los autores previeron. Lo que se está diciendo es que no se puede hablar de dos elementos de realidad simultáneamente, a menos que se puedan medir ambos al mismo tiempo, o bajo las mismas condiciones experimentales.

3.3. Análisis e implicaciones

Para Einstein, Podolsky y Rosen la pérdida de separabilidad es inconcebible: en su opinión no podemos construir una definición de la realidad de un sistema que dependa de la realidad de otro, por lo que ellos sostienen que la mecánica cuántica es incompleta en su descripción. Al término de su artículo se plantean la pregunta: “¿Es posible encontrar una descripción completa de los fenómenos cuánticos?”, y adelantan que en su opinión la respuesta es afirmativa, dejando para más adelante el trabajo de encontrar tal descripción. Desde este punto de vista, es deseable un modelo que pueda reproducir las predicciones cuánticas, pero que además

permita caso a caso determinar las cantidades físicas, y en consecuencia predecir los resultados de las posibles mediciones. Esta búsqueda desembocó en las teorías de variables ocultas, las cuales rescatarían a la física de la no separabilidad, y abrirían una puerta a la búsqueda de un modelo más refinado, pero esto será discutido en el capítulo 4.

Desde el punto de vista de Bohr, la no separabilidad de los fenómenos cuánticos es algo que no debe preocupar, sino más bien ser entendido como una de las características intrínsecas de los mismos. No sólo no es prioritario encontrar la razón de esta no separabilidad, ni lo que mantiene enredados a los sistemas, sino que es intrascendente, puesto que esto no se refiere a la física, la que en su opinión solo se ocupa de experimentos y sus resultados.

No sólo esto es dejado de lado, sino que también hay otro punto que escapa a su respuesta, y es probablemente uno de los más difíciles de abordar con el ánimo de resolverlo: si las mediciones en el sistema I se realizan a una cierta distancia del lugar donde se encuentra el sistema II, la interrogante sería ¿en qué momento se modifica la realidad del sistema II a partir de la medición en el sistema I?

Existen varias respuestas posibles. Una de ellas es que el colapso de la función de onda es instantáneo, lo que está sin embargo en clara contradicción con la teoría de la relatividad, ya que si se realiza una medición sobre el sistema II con una diferencia Δt de tiempo después de que se llevó a cabo la medición en el sistema I, de tal forma que $\Delta t < d/c$, -donde d es la separación entre las posiciones donde fueron hechas las mediciones y c es la velocidad de la luz-, sería necesario algún tipo de comunicación supralumínica para que se realizaran las predicciones cuánticas.

Otra posible respuesta sería que no sea la medición sobre I lo que repercute en II, sino que desde la misma decisión de la medición en I ya está determinado lo que acontecerá en II; así que no hay necesidad de transmisión de información de ningún tipo, sino que desde antes de las mediciones existía tal información. A este respecto cabe la duda de que pasaría si el dispositivo pudiera ser modificado de forma aleatoria mientras se realiza el experimento.

En torno a las diferentes respuestas se han propuesto experimentos, unos sólo son teóricos (no se han llevado a la práctica) y otros se han realizado. Algunos de estos serán expuestos en este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] A. Einstein, B. Podolsky y N. Rosen, Phys. Rev, 47, 777 (1935).

4. El teorema de Bell

4.1. Antecedentes

4.1.1. El teorema de Von Neumann

Después del artículo publicado por Einstein, Podolsky y Rosen, se pensaba en teorías o modelos que proporcionaran predicciones exactas sobre las mediciones de los fenómenos cuánticos, pero que fueran capaces de reproducir los resultados estadísticos de la mecánica cuántica. Estaba en consideración la posibilidad de que cada sistema "portara consigo" la información que determinara todos sus observables físicos, y a este tipo de planteamientos se les llamó de variables ocultas, puesto que las encargadas de determinar cuál de los valores posibles sería el resultado de una medición, eran variables que no estaban contenidas en la descripción que aportaba la función de onda.

Con el afán de hacer ver que este tipo de teorías no era posible, von Neumann [1] estableció el teorema que lleva su nombre, con el que concluía que no hay modelos de variables ocultas que reproduzcan las predicciones cuánticas. A continuación se analizará el teorema de von Neumann (a la manera en que lo hizo Albertson en 1961 [2]), así como el porqué de su insuficiencia.

El teorema en cuestión trata con operadores hermitianos y algunas de sus propiedades. La deducción parte de las siguientes suposiciones respecto de tales operadores y sus observables asociados:

i) Si un observable es representado por un operador hermitiano R , entonces una función f de este observable es representada por $f(R)$.

ii) La suma de varios observables representados por R, S, \dots está dada por $R + S + \dots$, sin importar si éstos conmutan o no.

iii) La correspondencia de los observables con los operadores Hermitianos es uno a uno, es decir que a todo observable le corresponde un operador hermitiano, y viceversa.

iv) Si el observable R es no negativo, entonces $\langle R \rangle \geq 0$.

v) Para observables arbitrarios (como los de ii) y a, b, \dots números reales cualesquiera, se debe de cumplir para sus valores esperados

$$\langle aR + bS + \dots \rangle = a \langle R \rangle + b \langle S \rangle + \dots$$

para cualquier estado en que los valores esperados sean calculables.

Con estas hipótesis se puede proceder como sigue. Un operador hermitiano R se puede reescribir como

$$\begin{aligned} R &= \sum_{n,m} |n\rangle R_{nm} \langle m| \\ &= \sum_n U^{(n)} R_{nn} + \sum_{n,m; m < n} \{V^{(nm)} \text{Re} R_{mn} + W^{(nm)} \text{Im} R_{mn}\} \end{aligned}$$

donde $R_{nm} = R_{mn}^* = \langle n| R |m\rangle$ son números y

$$\begin{aligned} U^{(n)} &= |n\rangle \langle n|, \\ V^{(nm)} &= |n\rangle \langle m| + |m\rangle \langle n|, \\ W^{(nm)} &= i(|n\rangle \langle m| - |m\rangle \langle n|) \end{aligned}$$

son, cada uno de ellos, operadores hermitianos. Dada iii) todos estos operadores deben ser considerados como observables (por ser hermitianos), y como tales, ii) y v) aplican para ellos, por lo que se puede reescribir

$$\langle R \rangle = \sum_n \langle U^{(n)} \rangle R_{nn} + \sum_{n,m; m < n} \{ \langle V^{(nm)} \rangle \text{Re} R_{mn} + \langle W^{(nm)} \rangle \text{Im} R_{mn} \}$$

lo cual a su vez puede ser reescrito en términos de la matriz de densidad

$$\langle R \rangle = \sum_{n,m} \rho_{nm} R_{mn} = \text{Tr}(\rho R), \quad (4.1)$$

con los elementos de la matriz de densidad dados por

$$\begin{aligned} \rho_{nn} &= \langle U^{(n)} \rangle \\ \rho_{mn} &= \frac{1}{2} \langle V^{(nm)} \rangle + \frac{1}{2} i \langle W^{(nm)} \rangle \quad (m < n) \\ \rho_{nm} &= \frac{1}{2} \langle V^{(nm)} \rangle - \frac{1}{2} i \langle W^{(nm)} \rangle \quad (m < n). \end{aligned}$$

Dado que los valores esperados de los observables son reales, la matriz de densidad (con los elementos anteriores) resulta claramente hermitiana. Considerando un operador de proyección $P = |\phi\rangle \langle \phi|$ en lugar de R , y tomando en cuenta que

$$\langle P \rangle = \langle P^2 \rangle \geq 0 \quad (4.2)$$

es automático que

$$\text{Tr}(\rho P) \geq 0$$

lo cual lleva a

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$$

para todo estado ϕ .

Si existieran las variables ocultas, éstas, al definir para cada caso particular los resultados de las observaciones, permitirían formar subensembles cuyos integrantes tuvieran determinados los posibles resultados de las observaciones. Estos estados no tendrían dispersión, es decir, que para cada observable se cumpliría

$$\langle (R - \langle R \rangle)^2 \rangle = 0, \quad (4.3)$$

es decir,

$$\langle R^2 \rangle = \langle R \rangle^2, \quad (4.4)$$

usando $R \rightarrow P = |\phi\rangle \langle \phi|$ que como se mencionó cumple con (4.2) se obtiene

$$\langle P \rangle = \langle P \rangle^2.$$

Aplicando el resultado (4.1)

$$\text{Tr}(\rho |\phi\rangle \langle \phi|) = [\text{Tr}(\rho |\phi\rangle \langle \phi|)]^2$$

se obtiene

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \langle \phi | \rho | \phi \rangle^2$$

con solución 1 ó 0. Como el valor esperado varía suavemente con ϕ , el valor de $\langle \phi | \rho | \phi \rangle$ debe de mantenerse constante con valor 0 o con valor 1 para todo ϕ . Por lo cual

$$\rho = 1, \text{ o } \rho = 0,$$

para todo ensemble libre de dispersión.

Pero ambos casos deben de ser descartados, puesto que para $\rho = 0$ los valores de todos los observables dentro del subensemble serían 0, lo cual no podría reproducir los valores predichos por la mecánica cuántica al hacer un tratamiento estadístico de los subensembles. El caso $\rho = 1$ no proporciona un estado libre de dispersión, puesto que para más de una dimensión

$$\langle 1 \rangle = \text{Tr}(1) = d$$

con d la dimensión del espacio, así que el lado izquierdo de (4.3) se transforma en

$$\langle R^2 \rangle - 2 \langle R \rangle^2 + \langle R \rangle^2 \langle 1 \rangle$$

lo que es diferente de 0, por lo tanto no es un ensemble libre de dispersión, cayendo así en una contradicción, y debe excluirse.

De lo anterior von Neumann concluye que no puede haber estados libres de dispersión. Las hipótesis i) a v) las considera naturales y parte esencial de la mecánica cuántica. Este teorema no llega a la esencia de un argumento del tipo EPR, puesto que en su demostración no involucra estados enredados. El teorema de Von Neumann sólo involucra a los observables y sus representantes sobre un ensemble, y sus conclusiones aplican sobre éste. Sin embargo las hipótesis asumidas no son correctas, como se verá a continuación.

La debilidad del teorema radica en suponer válida ii) aun para observables que no conmutan. Cuando dos observables no conmutan, en principio no pueden ser medidos de forma simultánea, por lo que no tienen valores definidos¹, así que no hay razón real para suponer esta validez. Esto es válido para los observables de manera estadística, es decir, los valores esperados satisfacen

$$\langle \phi | R + S | \phi \rangle = \langle \phi | R | \phi \rangle + \langle \phi | S | \phi \rangle \quad (4.5)$$

pero esto es sólo para el promedio. La suposición que está implícita en ii) es que *para cada sistema individual* el valor de R y de S deben de cumplir (4.5). En efecto la relación se cumple de manera global, pero no hay razón para imponerla caso a caso.

Esta debilidad fue notada pocos años después de que von Neumann estableciera su teorema por Gret Hermann (1935) [3], pero parece haber sido ignorada del todo. Fue hasta 1966 cuando John Bell volvió a notar que las hipótesis del teorema dado no contaban con un pleno fundamento. Al notar esto propuso una nueva demostración [4], la cual es completamente análoga a una proporcionada por S. Kochen y E. P. Specker (1967) [5], por lo que se le menciona en la literatura como Bell-Kochen-Specker o sólo Kochen-Specker. Este teorema sólo fue un precedente a lo que hoy se conoce como teorema de Bell.

4.1.2. El teorema de Bell-Kochen-Specker

El siguiente teorema busca demostrar que no es posible asignar, de manera consistente, valores predeterminados a distintos observables para un cierto sistema. Se presentarán dos demostraciones, una para un espacio de configuración de cuatro

¹Esto es válido para casi cualquier interpretación, puesto que se supone cierto para un ensemble en la interpretación estadística, y válido para un sistema en la ortodoxa

dimensiones, y otra para un espacio de ocho dimensiones. Los argumentos son como sigue (éstas no son las deducciones propuestas originales, sino pruebas más modernas y simples del mismo teorema [6]).

Para cuatro dimensiones se utilizan dos partículas independientes de espín $\frac{1}{2}$. Los observables a considerar son construidos a partir de las matrices de Pauli y sus características generales son una consecuencia directa de las propiedades de éstas. Toda matriz de Pauli referente a una de las partículas conmuta con las de la otra partícula, es decir² $[\sigma_i^1, \sigma_j^2] = 0$. De las propiedades de las matrices se sigue que $\sigma_i^n \sigma_j^n = \epsilon_{ijk} \sigma_k^n$, para $n = 1, 2$. Una vez recordado esto considérense los observables acomodados en el arreglo (4.6)

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x^1 & \sigma_x^2 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \\ \sigma_y^1 & \sigma_y^2 & \sigma_y^1 \sigma_y^2 \\ \sigma_x^1 \sigma_y^2 & \sigma_x^2 \sigma_y^1 & \sigma_x^1 \sigma_x^2 \end{array} \quad (4.6)$$

donde los subíndices han sido escritos como las direcciones ortogonales usuales para evitar confusiones con los superíndices. Sólo falta hacer notar tres propiedades de estos conjuntos de observables para encontrar la imposibilidad deseada.

a) Cada una de las líneas o columnas en el arreglo está formada por operadores que conmutan por pares (la validez de esta afirmación resulta inmediata construyendo el conmutador de cualquier par y usando las propiedades mencionadas de las matrices de Pauli).

b) El producto de los observables en cualquiera de las columnas es 1, excepto para la última columna a la derecha cuyo valor es -1.

c) Dado que los valores asignados a observables que conmutan deben de cumplir con las identidades que cumplan los observables mismos, los valores mencionados en b) implican que el producto de los *valores mismos* de los observables en cada renglón y las primeras dos columnas debe de ser 1, y -1 para la última columna de la derecha.

Para este momento la imposibilidad ya es obvia. Nótese que c) es imposible de satisfacer, puesto que la multiplicación de todos los renglones implica que la multiplicación de los 9 valores asignados a los observables debe de ser igual a 1, pero la multiplicación de las tres columnas implica que debe de ser igual a -1.

La conclusión es que no se puede asignar de manera consistente valores numéricos simultáneos a todos los observables involucrados.

²En la notación usada el superíndice se refiere al sistema, y el subíndice se refiere a la matriz de Pauli correspondiente a cierta dirección.

Antes de entrar en un análisis de esta deducción, se expondrá otra forma de llegar a una contradicción similar, pero ahora usando un espacio de ocho dimensiones.

Ahora se usarán tres partículas independientes de espín $\frac{1}{2}$ y sus respectivas matrices de Pauli. En lugar de la figura (4.6) se usarán los observables de la figura (4.7)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \sigma_y^1 \\
 & & & & & & \cdot \\
 & & & & & & \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 \quad \sigma_y^1 \sigma_y^2 \sigma_x^3 \quad \sigma_y^1 \sigma_x^2 \sigma_y^3 \quad \sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \sigma_x^3 \qquad \qquad \qquad \sigma_y^3 \\
 & & & & & & \sigma_x^1 \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \sigma_y^2 \qquad \qquad \qquad \sigma_x^2
 \end{array} \tag{4.7}$$

que forma una estrella de cinco picos.

Para esta figura las observaciones son totalmente análogas a las de la figura anterior.

- a) Los observables en cada línea de la estrella conmutan por pares.
- b) El producto de los observables en cada línea es igual a 1, excepto la línea horizontal, cuyo valor es -1.
- c) Dado que los valores asignados a observables que conmutan deben de cumplir con las identidades que cumplan los observables mismos, los valores mencionados en b) implican que el producto de los *valores mismos* de los observables en cada línea debe de ser 1 para todas ellas menos para la línea horizontal, para la que debe de ser -1.

De nueva cuenta c) no se puede satisfacer, ya que la multiplicación de todas las líneas debe de tener el valor -1, pero (en este caso sin requerir de otra multiplicación) cada observable está contenido en dos líneas, por lo que aparece dos veces en la multiplicación total. Los valores que aparecen en la multiplicación son los cuadrados de los observables, que siempre es 1, por lo que la multiplicación debe de ser 1.

Ambas derivaciones son muy simples, y no es claro (como lo es en el teorema de von Neumann) que exista un *error* o alguna hipótesis injustificable. Sin embargo el mismo Bell notó alguna objeción que se podría hacer a este argumento, lo que conduce al terreno de las teorías contextuales.

4.1.3. Teorías contextuales

En ambas deducciones se hace un suposición fuerte: A cualquier observable R se le asigna un valor independiente de los observables que sean medidos junto con él. En ambas deducciones se supone que el valor de R , elemento de cualquiera de los renglones, columnas o líneas (conjuntos en general), es independiente de cual de los conjuntos se esté considerando. Hay que notar que los observables pertenecientes a diferentes conjuntos no conmutan en general, así que no pueden ser medidos simultáneamente, por lo que no hay evidencia para afirmar que se cumple esta hipótesis implícita en las deducciones anteriores. La pregunta es ¿por qué el valor de R ha de ser el mismo cuando simultáneamente se miden S y T que cuando se mide U y V ? (S, T, U y V observables que conmutan todos con R , pero no entre sí).

A las teorías que responden a la pregunta anterior diciendo que no sólo no hay razón para que el valor sea el mismo, sino que, en efecto, en general es diferente, se les llama teorías contextuales. Su argumento general es que la medición que se está llevando a cabo no es la medición de R , sino la medición de $[R, S, T]$, o bien $[R, U, V]$, que son medidas diferentes y por lo tanto, medidas con valores que pueden ser diferentes. Estas mediciones implican contextos distintos para los sistemas en los que se realizan, que pueden modificar en efecto los resultados que proporcionarán.

La aceptación de la contextualidad hace que toda deducción contrafactual carezca de sentido. No es posible hablar del resultado que hubiera tenido un experimento que no se realizó. En el desarrollo de la ciencia física se hace uso constante de argumentos contrafactuales, aunque sería deseable que esto no fuera necesario.

Las probabilidades referentes a sistemas cuánticos en una teoría contextual, son probabilidades condicionales, es decir; es la probabilidad de que ocurra cierto evento *dado que* se está realizando determinado experimento.

Hasta el momento todo lo expuesto se refiere solamente a la posibilidad de completar la mecánica cuántica con teorías de variables ocultas, pero no se hace ninguna referencia a la no separabilidad o no localidad, conceptos que se introdujeron al intentar descartar las teorías contextuales.

4.1.4. Motivación para el teorema de Bell

Bell notó que la posibilidad de que este contexto afectara las mediciones en realidad no es una hipótesis descabellada, pero también se dió cuenta de que había (al menos) una forma de descartar esta opción. Supóngase que las mediciones de cada uno de los observables se realizan por medio de aparatos diferentes, los cuales se encuentran distantes el uno del otro. Si la única diferencia para los aparatos entre medir S, T y medir U y V radica en la disposición de aparatos distantes al lugar donde se realiza la medición de R , ésta debe de ser independiente de tal elección (suponiendo que no existe alguna acción a distancia). Por lo tanto si se consigue construir un experimento donde las mediciones no se realicen todas sobre el mismo lugar, es natural pensar que unas mediciones no pueden tener efecto sobre las otras. Bell no sólo se percató de estos hechos, sino que también estudió tal arreglo experimental hipotético y de ahí concluyó las desigualdades y el teorema de Bell.

4.2. Formulación de las desigualdades de Bell

Para el teorema de Bell, así como para el teorema EPR, el papel de los estados enredados cobra fundamental importancia. En este caso se hace uso de un estado enredado compuesto por dos partículas de espín un medio, preparadas para tener un espín total cero moviéndose libremente en direcciones opuestas, de tal suerte, que las cantidades correlacionadas sean sus espines. Se pueden realizar mediciones sobre alguna componente de los respectivos espines σ_1, σ_2 , por medio de aparatos Stern-Gerlach. Si se lleva a cabo una medición de $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es un vector unitario en alguna dirección, y se obtiene el valor $+1$, entonces se sabe que al medir $\sigma_2 \cdot \mathbf{a}$ se obtendrá el valor -1 (ya que el espín total se debe de conservar). A partir de aquí es introducida la hipótesis de separabilidad, considerando que la medición sobre la partícula 1 no afecta la medición sobre la partícula 2. Esta suposición, no resulta difícil de aceptar, principalmente dado que las mediciones pueden ser realizadas en lugares distantes, y no habría porque pensar que la orientación de un aparato pudiera afectar el resultado de la medición hecha por el otro. Dado que se puede predecir con certeza el resultado de medir alguna componente de σ_2 , por medio de la medición previa del valor de σ_1 sobre la misma componente, esto implicaría que el resultado de tal medición está predeterminado. Lo anterior escapa del alcance de la descripción dada por la función de onda, lo cual permitiría la existencia de una teoría más completa.

Supóngase que esta descripción más completa está dada por parámetros λ , los cuales no están restringidos a ser un sólo parámetro, sino pueden ser un conjunto o incluso un conjunto de funciones, y de igual forma no importa si son continuos o discretos. En cualquier caso, se escribirá λ como un sólo parámetro continuo. El resultado A de medir $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$ está determinado por \mathbf{a} y por λ , así como el resultado B de medir $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$ está determinada por \mathbf{b} y por λ . Los resultados solo pueden indicar espín paralelo o antiparalelo a la dirección de medición, denotados por $+1$ y -1 , por lo que se pueden escribir como

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1, B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1 \quad (4.8)$$

Es importante insistir en la hipótesis de separabilidad que implica que el resultado de A en la partícula 1 no depende de la orientación \mathbf{b} , así como el resultado B es independiente de \mathbf{a} .

Si $\rho(\lambda)$ es la distribución de probabilidad de λ , entonces el valor esperado del producto de ambas componentes es

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) \quad (4.9)$$

lo cual debe de ser igual a la predicción cuántica

$$\langle \sigma_1 \cdot \mathbf{a} \sigma_2 \cdot \mathbf{b} \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (4.10)$$

Justamente la conclusión, con base en las desigualdades de Bell, es que esto no es posible.

Podría preferirse una descripción en la cual A dependiera de parámetros diferentes a los que determinan B , pero este caso está comprendido en el anterior, puesto que λ puede representar cualquier número de parámetros.

Dado que ρ es una distribución normalizada

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1 \quad (4.11)$$

y dado (4.8), P en (4.9) no puede valer menos de -1 . Alcanza el valor de -1 en $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ sólo cuando

$$A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{b}, \lambda) \quad (4.12)$$

excepto en algunos puntos λ de medida 0. Con esto (4.9) puede ser escrita como

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int d\lambda A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) \quad (4.13)$$

Si se hace uso de otro vector \mathbf{c} se puede concluir

$$\begin{aligned} P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) - A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda)A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda) - 1] \end{aligned}$$

donde usando (4.8) se obtiene

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\mathbf{b}, \lambda)A(\mathbf{c}, \lambda)].$$

Se ve que la segunda parte de la integral de la derecha es justamente $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, y resulta

$$1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \geq |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \quad (4.14)$$

Esta es una desigualdad de Bell, en la primera forma que el la obtiene [7], y es solamente una conclusión matemática. A continuación se verá como es que esta se relaciona con la mecánica cuántica, lo que es en sí el teorema de Bell.

A menos que P sea constante, el lado derecho de (4.14) es en general del orden de $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ para valores pequeños de $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$. Por lo tanto $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ no puede ser estacionario en el valor mínimo (-1 cuando $\mathbf{b} = \mathbf{c}$), y en consecuencia no puede ser igual a la predicción cuántica (4.10).

Tampoco la predicción cuántica puede ser aproximada con arbitraria precisión a partir de un modelo de la forma (4.9), como se demuestra a continuación. La falla de la aproximación en puntos aislados no será de importancia, así que en lugar de (4.9) y (4.10) se considerarán

$$\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ y } -\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

donde la barra denota un promedio independiente de $P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ y $-\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}'$ sobre los vectores \mathbf{a}' y \mathbf{b}' comprendidos en pequeños ángulos sólidos alrededor de \mathbf{a} y \mathbf{b} . Supóngase que para cualesquiera \mathbf{a} y \mathbf{b} la diferencia está acotada por ε

$$|\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}| \leq \varepsilon \quad (4.15)$$

Ahora se verá que ε no puede ser arbitrariamente pequeño.

Supóngase que para toda \mathbf{a} y \mathbf{b}

$$|\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \delta \quad (4.16)$$

entonces de (4.15)

$$|\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \varepsilon + \delta; \quad (4.17)$$

de (4.9)

$$\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A}(\mathbf{a}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda), \quad (4.18)$$

donde

$$|\overline{A}(\mathbf{a}, \lambda)| \leq 1 \text{ y } |\overline{B}(\mathbf{b}, \lambda)| \leq 1; \quad (4.19)$$

de (4.17), (4.18) con $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A}(\mathbf{b}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda) + 1] \leq \varepsilon + \delta; \quad (4.20)$$

de (4.18)

$$\begin{aligned} \overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) [\overline{A}(\mathbf{a}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda) - \overline{A}(\mathbf{a}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A}(\mathbf{a}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda) [1 + \overline{A}(\mathbf{b}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) \overline{A}(\mathbf{a}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{c}, \lambda) [1 + \overline{A}(\mathbf{b}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \end{aligned}$$

Usando (4.19) se tiene

$$\begin{aligned} |\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A}(\mathbf{b}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + \overline{A}(\mathbf{b}, \lambda) \overline{B}(\mathbf{b}, \lambda)] \end{aligned}$$

Así que usando (4.18) y (4.20)

$$|\overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - \overline{P}(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + \overline{P}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \varepsilon + \delta$$

Finalmente usando (4.17)

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| - 2(\varepsilon + \delta) \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2(\varepsilon + \delta)$$

6

$$4(\varepsilon + \delta) \geq |\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - 1 \quad (4.21)$$

Aquí se pone de manifiesto que existen vectores \mathbf{a}, \mathbf{b} y \mathbf{c} para los cuales estas desigualdades implican que para una δ pequeña pero finita ε no puede ser arbitrariamente pequeña. Por ejemplo tómesse $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1/\sqrt{2}$. En este caso

$$4(\varepsilon + \delta) \geq \sqrt{2} - 1$$

Así que las predicciones cuánticas no pueden ser reproducidas precisamente y ni siquiera con una aproximación arbitraria, por un modelo del tipo que plantea (4.9)

El ejemplo usado anteriormente tiene la ventaja de que es muy simple de visualizar. De manera más formal se puede considerar el caso de un operador Hermítico (H) con un conjunto completo de estados propios, el cual es un observable. El resultado es fácilmente extendido: si este operador tiene un espacio de estados propios con dimensión mayor que dos, se pueden encontrar siempre subespacios de dimensión dos, y definir operadores formalmente análogos a σ_1 y σ_2 que tomen valor cero fuera de este subespacio. Haciendo uso de estos operadores de manera enteramente análoga al procedimiento de Bell, es posible llegar a las mismas conclusiones. Así que siempre y por lo menos para un estado sobre el cual pueda actuar el operador (H), las predicciones cuánticas son incompatibles con la suposición de separabilidad.

Lo que Bell concluye es que, en consecuencia, cualquier teoría a la que se le agreguen parámetros para determinar los resultados de mediciones individuales, sin perder las predicciones estadísticas aportadas por la mecánica cuántica, debe de tener un elemento por medio del cual la disposición en un aparato de medición pueda afectar la lectura de otro, sin importar que tan lejos estén entre sí.

4.3. Implicaciones del teorema de Bell

La conclusión a la que llega Bell, después de haber derivado las desigualdades y hacer ver que éstas pueden ser violadas bajo ciertas condiciones por los sistemas cuánticos, es que cualquier teoría a la que se le agreguen parámetros para determinar los resultados de mediciones individuales sin perder las predicciones estadísticas aportadas por la mecánica cuántica, debe de tener un elemento por medio del cual la disposición en un aparato de medición pueda afectar la lectura de otro sin importar que tan lejos estén entre sí. Esta conclusión no es del todo sustentable, y esto lo hace ver László E. Szabó [8]. Lo que en realidad prueban las desigualdades de Bell, es la incompatibilidad de las predicciones cuánticas con una teoría, que él llama de "propiedades". Una teoría de propiedades se entiende

como una teoría donde la probabilidad de que el resultado de una medición sea A , es la probabilidad de que el sistema que se observa tenga la propiedad \tilde{A} , donde por propiedad se entiende que siempre que se realice la medición sobre un sistema con la propiedad \tilde{A} , el resultado será A . En el teorema de Bell, esta propiedad está incluida en el parámetro λ , por lo tanto es este el tipo de interpretaciones que queda descartado. Szabó propone de forma alternativa una interpretación que llama "mínima", para la cual la probabilidad de que el resultado de una medición sea A , es la probabilidad *condicional* de que el resultado sea A , dado que la medición a fué realizada.

Por sutil que pudiera parecer la diferencia, ésta es esencial, ya que el primer tipo de teorías, queda descartado, (si se aceptan las predicciones de la mecánica cuántica como verdaderas) por medio de las desigualdades de Bell, ya que la "propiedad" en este caso está siendo representada por el parámetro λ . Sin embargo la "interpretación mínima" no queda descartada por este teorema, dado que ni siquiera se refiere a este tipo de probabilidades. Para la "interpretación mínima" carece de sentido hacer referencia a la probabilidad de que A hubiera sido el resultado de la medición en a , mientras que la medición que en realidad se practica es b , ya que las probabilidades a las que se refiera son *condicionales*. El teorema de Bell asume una interpretación de propiedades, y en consecuencia es factible concluir las desigualdades deseadas. Esta interpretación se introduce de forma no explícita en el momento en que se reescribe (4.9) en la forma (4.13), usando (4.12), ya que a pesar de que (4.12) es cierta en principio, (4.13) no sólo usa este resultado, sino que también intercambia B por A ; suponiendo que la medición de A en la dirección a *tendría* el mismo resultado independientemente de la medición que se realiza en la dirección a, b , o incluso si no se realiza. El suponer esto es lo que permite integrar juntas las probabilidades $A(a, \lambda)$ y $A(b, \lambda)$, de otra forma esta integral no tendría sentido alguno.

Aún ante el argumento planteado por Szabó, las alternativas no son mucho más alentadoras. Después de su argumentación, son factibles dos opciones: 1) Existe algún medio por el cual la disposición de un aparato de medición puede afectar la lectura de otro sin importar que tan lejos estén entre sí. 2) Las probabilidades a las que se refiere la mecánica cuántica son condicionales.

La primera opción deja abierta la puerta para la explicación de este medio de "enlace" entre los aparatos de medición o los sistemas; pero hasta el momento, no se ha propuesto una solución de consenso general a este problema -para quienes lo consideran un problema-.

Por otro lado: ¿que implicaría que las probabilidades fueran condicionales? Hay que notar que esta opción tiene gran parecido con las teorías contextuales. Sólo que en este caso la hipótesis de contextualidad parece ser más difícil de justificar. En las teorías contextuales, sólo hacía falta entender que las mediciones conjuntas afectarían al sistema, y por lo tanto, los resultados dependerían del conjunto de operadores que se usara. En el presente caso, el problema es mayor, puesto que las mediciones se están realizando sobre entidades físicas con distancia de por medio, por lo que resulta muy cuestionable que estas mediciones puedan afectarse entre sí. Si se considera una teoría determinista hasta las últimas consecuencias, esto no debe causar problema alguno, ya que la disposición de los aparatos de medición está también determinada por su pasado común; es decir, que en realidad a y b serían también función de λ . De tal forma que existiría una función $a(\lambda)$ y una $b(\lambda)$, así que en lugar de expresiones no-separables como lo que propone Bell del tipo

$$A(a, b, \lambda) \text{ y } B(a, b, \lambda)$$

se presentaría como

$$A[a(\lambda), b(\lambda), \lambda] \text{ y } B[a(\lambda), b(\lambda), \lambda]$$

lo que no es otra cosa que

$$A(\lambda) \text{ y } B(\lambda),$$

expresiones que evidentemente no tienen un comportamiento no-local. Sin embargo la sola propuesta de una realidad por completo determinista tiene consecuencias profundamente no-separables.

Las repercusiones de plantear la existencia de una expresión del tipo $A(\lambda)$ o $B(\lambda)$ son muy profundas, ya que éstas son independientes de si la decisión de a fué tomada por medio de un dispositivo mecánico, o por un observador, en cuyo caso, al parecer, no tendría libre albedrío, sino que su "decisión" estaría dictada por los parámetros λ . Esta es una discusión que se escapa de las pretensiones del presente trabajo. Aquí la discusión se limita a hacer notar que en este caso las funciones $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ tendrían que ser impresionantemente complicadas para poder garantizar que las predicciones buscadas se cumplan bajo todo tipo de circunstancias.

REFERENCIAS

- [1] J. von Neumann, "Mathematische Grundlagen an Quanten-mechanik" (Springer-Berlin) 1932. Traducción al ingles; "Mathematical Foundations of Quantum Mechanics" (Princeton University, Princeton, N.J.) 1955.
- [2] Albertson, J., Am. J. Phys. **29**, 478, (1961).
- [3] Hermann, G., "Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik (Anzug)," Abhandlungen der Freis'schen Schule **6**, 75 (1935). Resumen; Jammer M., "The philosophy of Quantum Mechanics", Wiley, New York, p.273, (1974).
- [4] Bell J. S., Physics **1**, 195 (1966)
- [5] Kochen, S. y E. P. Specker, J. Math. Mech, **17**, 59, (1967).
- [6] N. D. Mermin, Rev. Mod. Phys. **65**, 803 (1993).
- [7] Bell J. S., "Speakable and unspeakable in Quantum Mechanics, Cambridge University, Cambridge, (1987).
- [8] L. E. Szabó, Fond. Phys. Lett., **8**, 417 (1995).

5. Realización experimental del argumento Einstein-Podolsky-Rosen

5.1. Propuestas experimentales

Como se vió en el capítulo anterior, J. Bell propuso una forma de llevar el argumento EPR a términos experimentales donde los resultados podrían estar en contradicción con los “modelos realistas locales” (MRLs) o con las predicciones de la mecánica cuántica. Los primeros experimentos fueron realizados alrededor de 1970 [1] y parecieron indicar que las predicciones de la mecánica cuántica estaban en lo correcto y que los MRLs tendrían que ser descartados. Esta primera conclusión, aunada al gran éxito de la mecánica cuántica para explicar una inmensa serie de efectos, — el espectro de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, la física atómica de estados ligados, etc.—, marcaron muchos de los experimentos que se propondrían posteriormente, dado que la mecánica cuántica era demasiado exitosa para intentar encontrar evidencia experimental que la contradijera. En su mayoría los experimentos buscaban demostrar la imposibilidad de MRLs. Aún con la gran controversia que causaban las suposiciones al respecto de los dispositivos y análisis de datos, se establecía cada vez más la verificación de la mecánica cuántica. Desde luego para cada experimento fueron deducidas las desigualdades cuya violación se buscaría demostrar.

Un experimento en el cual el dispositivo se encontrara fijo, no sería suficiente para demostrar la presencia de un elemento de comunicación con velocidad superior a la de la luz, ya que se puede argumentar que los mismos instrumentos de medición se afectan entre sí de manera sistemática y sostener que está determinado el observable que se medirá desde antes de que tome lugar esta medición y por lo tanto los eventos no son del todo causalmente desconectados. Tomese el evento A como la determinación de la disposición del equipo de medición sobre el sistema I — haciendo uso de los términos usados en el capítulo sobre EPR, donde los sistemas I y II están enredados—, A' la medición sobre el sistema I, B la determinación de la disposición del equipo que medirá al sistema II y B' la medición sobre el sistema II. Si A está causalmente conectado con B — y consecuentemente también con B' —, entonces hay lugar para alguna interacción (compleja o simple, pero factible) que reproduzca las predicciones cuánticas, ya que A podría tener efecto en B y B' sin necesidad de una acción con velocidad mayor a la de la luz. Cabe remarcar que justamente éste es un punto clave para la deducción seguida

por Bell, puesto que justamente él parte de que B' es independiente de A , y su conclusión es que no existe un modelo en el que esto se cumpla y las predicciones cuánticas sean reproducidas.

Ahora bien, si por el otro lado el dispositivo modifica de forma *aleatoria* en lapsos de tiempo muy pequeños —determinados según las necesidades específicas del experimento en cuestión— de tal manera que el evento A esté causalmente desconectado de los eventos B y B' , y aún así las predicciones cuánticas se cumplan, los MRLs quedan descartados —a excepción hecha por un grupo de propuestas que se discutirán posteriormente—. En función de generar experimentos con este tipo de desconexión causal, tomaron importancia las propuestas de experimentos con analizadores que varían en el tiempo.

Una propuesta muy bien planteada y que en efecto, fue llevada a cabo, es la de Alain Aspect y su grupo [2]. A continuación será presentada la propuesta y en la siguiente sección se revisará el experimento como tal, y junto con otro experimento desempeñado por el mismo Aspect y su grupo, que no involucra variación temporal en su realización.

Lo primero que especificó Aspect para su experimento fueron las partículas con las que se trabajarían, ya que en principio para probar desigualdades de Bell, cualesquiera partículas que puedan estar correlacionadas son eficientes. La decisión fue trabajar con fotones, dado que es fácil con decaimientos en cascada obtener pares de fotones cuya polarización esté correlacionada. Este es un paso determinante para el experimento por muchas razones; pero una de las principales es que para esto hay que suponer, con todas sus consecuencias, que los fotones son partículas, postura que ha sido reconocida durante tiempo por múltiples investigadores, pero también ha sido cuestionada intensamente por otros; desde Schrödinger hasta físicos actuales (Clauser, Santos, Marshall, Lamb, etc.).

Una vez elegidos los fotones como las “partículas” de experimentación, es necesario explicar un poco la forma en la que se llevaría a cabo el experimento. Previo a la propuesta de Aspect, se había pensado en realizar experimentos con polarizadores que cambiaran su dirección de polarización de forma rápida; pero esto implicaba complicaciones técnicas puesto que es difícil rotar un cuerpo de dimensiones finitas en lapsos de nanosegundos, así que Aspect decidió utilizar conmutadores ópticos (figura 5.1), capaces de dirigir un fotón en la dirección de un polarizador u otro de manera alternante en periodos muy pequeños. De esta forma el conmutador C_A manda a los fotones ν_A en dirección del polarizador I_1 en un momento, e instantes después su estado cambia y dirige a los fotones ν_A

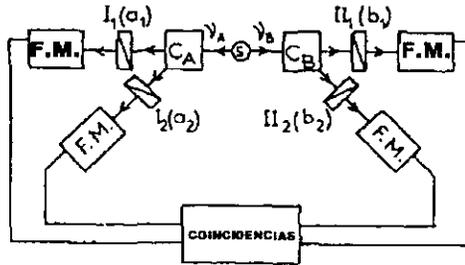


Figure 5.1: Posible arreglo experimental con conmutadores que dirigen a los fotones hacia los polarizadores I_i o II_j .

en dirección del polarizador I_2 ; el conmutador C_B funciona de manera similar con ν_B . Las direcciones de los polarizadores I_1 y I_2 pueden ser diferentes (de igual forma para los polarizadores II_i), así que el resultado es elegir la dirección de polarización en la que serán “medidos” ν_A y ν_B . Los periodos durante los cuales los conmutadores se mantienen en el mismo estado, se seleccionan estocásticos, así que dos estados en los que se encuentre el conmutador, en momentos separados por un tiempo más largo que el de correlación, son estadísticamente independientes. El tiempo de correlación se hace menor que L/c donde L es la separación entre los conmutadores y c la velocidad de la luz. Con esto se consigue que la “elección” de la dirección de medición para ν_A esté causalmente desconectada con una “decisión” para ν_B .

Como ya se mencionó, las desigualdades que se violarán son específicas, y por lo tanto es necesario deducir las desigualdades modificadas. Usando el mismo formalismo de variables ocultas utilizado por Bell, se parte de que cada par de fotones tiene un estado determinado, caracterizado por una variable oculta λ —que al igual que para el trabajo de Bell puede representar un conjunto de parámetros—. Dado que el dispositivo experimental ahora cambia explícitamente su configuración con el tiempo, es importante especificar el tiempo en que se selecciona cada una de las distribuciones, probabilidades y otros elementos participantes en el cálculo. Se denota como t_1 el tiempo de emisión de un par de fotones en el sistema de referencia del laboratorio y como $\tilde{u}(\lambda, t_1)$ la distribución de probabilidad

de λ al tiempo t_1 . Para el tiempo $t_2 = t_1 + L/2c$ los fotones ν_A y ν_B se encontrarán con los conmutadores. Son definidas las (así llamadas por Aspect) "funciones de conmutación" $\widehat{\alpha}_i(t)$ y $\widehat{\beta}_j(t)$ (con $i, j = 1, 2$), que pueden tomar los valores 1 ó 0 dependiendo, respectivamente, de si los fotones son dirigidos hacia los canales correspondientes a los subíndices o no. Desde luego estas funciones son independientes de λ . Se denota con t_3 el tiempo para el cual los fotones son analizados por los polarizadores, y por $\widehat{A}_i(\lambda, t_3)$ y $\widehat{B}_j(\lambda, t_3)$, las correspondientes funciones de respuesta, que toman los valores 1 ó 0, dependiendo de si los fotones atraviesan los correspondientes polarizadores. Así que el producto de $\widehat{\alpha}_i(t_2) \widehat{\beta}_j(t_2) \times \widehat{A}_i(\lambda, t_3) \widehat{B}_j(\lambda, t_3)$ adquiere el valor 1 si ambos fotones ν_A y ν_B emergen de los polarizadores I_i y II_j y el valor 0, de cualquier otra forma. Finalmente la probabilidad de que los fotones ν_A y ν_B emerjan en coincidencia de los polarizadores I_i y II_j está dada por

$$P_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T dt_1 \int d\lambda \widehat{u}(\lambda, t_1) \widehat{\alpha}_i(t_2) \widehat{\beta}_j(t_2) \times \widehat{A}_i(\lambda, t_3) \widehat{B}_j(\lambda, t_3), \quad (5.1)$$

donde la λ que se considera es la inicial, al tiempo t_1 de emisión.

Este resultado se puede generalizar al caso en que los polarizadores por sí mismos cuenten con variables ocultas que contribuyan al resultado final. Se denotarán como λ'_{I_i} y λ'_{II_j} los parámetros instrumentales de cada polarizador, de tal suerte que ahora la función de respuesta de cada polarizador es $\widehat{A}_i(\lambda, \lambda'_{I_i}, t_3)$ y $\widehat{B}_j(\lambda, \lambda'_{II_j}, t_3)$. Así que la probabilidad adquiere la forma

$$P_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T dt_1 \int d\lambda \int \dots \int d\lambda'_{I_1} \dots \lambda'_{II_2} \left[\widehat{u}(\lambda, \lambda'_{I_1}, \dots, \lambda'_{II_2}, t_1, t_3) \times \widehat{\alpha}_i(t_2) \widehat{\beta}_j(t_2) \widehat{A}_i(\lambda, t_3) \widehat{B}_j(\lambda, t_3) \right], \quad (5.2)$$

donde $\widehat{u}(\dots)$ es la distribución de λ al tiempo t_1 y de los parámetros instrumentales ($\lambda'_{n,m}$) al tiempo t_3 . Podrían existir correlaciones entre los parámetros instrumentales, pero éstos para presentarse al tiempo t_3 tendrían que encontrar su origen en causas comunes en tiempos $t < t_1$, así que es posible incluirlas en los parámetros λ .

De acuerdo con el principio de separabilidad el parámetro λ en tiempos $t \leq t_1$ describe de forma completa cualquier *correlación* entre las respuestas instrumentales al tiempo t_3 ; por lo tanto la distribución de la probabilidad condicional de los parámetros instrumentales (dado un valor particular de λ), es factorizable. De

esta forma, reexpresando $\hat{u}(\lambda, \lambda'_{I_1}, \dots, \lambda'_{I_2}, t_1, t_3)$ en función de la distribución de probabilidad $\rho(\lambda, t_1)$ de λ al tiempo t_1 y de la distribución de la probabilidad condicional de cada parámetro instrumental, $P_{i,j}$ en (5.2) adopta la forma

$$P_{i,j} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T dt_1 \int d\lambda \rho(\lambda, t_1) \hat{\alpha}_i(t_2) \hat{\beta}_j(t_2) \times \hat{A}_i(\lambda, t_3) \hat{B}_j(\lambda, t_3), \quad (5.3)$$

donde $\hat{A}_i(\lambda, t_3)$ y $\hat{B}_j(\lambda, t_3)$ son los valores promediados (sobre el respectivo parámetro instrumental) de las funciones de respuesta al tiempo t_3 .

Al integrar en el tiempo, se deben de tomar en cuenta las posibles interacciones entre los diversos instrumentos. Es claro que, por ejemplo, la respuesta del polarizador I_i al tiempo t_3 puede depender del estado del conmutador C_A en tiempos $t \leq t_2$, y del estado del conmutador C_B para tiempos $t \leq t_2 - L/c$. De forma similar la emisión al tiempo t_1 puede depender del estado de ambos conmutadores en tiempos $t \leq t_1 - L/2c$. Así que tomando en cuenta estas posibles interacciones, y usando varias propiedades como operación estocástica independiente de los conmutadores y tiempos de correlación menores que L/c , la probabilidad $P_{i,j}$ se puede factorizar como

$$P_{i,j} = \alpha_i \beta_j \int d\lambda \rho(\lambda) A_i(\lambda) B_j(\lambda), \quad (5.4)$$

donde α_i y β_j son promedios temporales de las funciones de conmutación, $\rho(\lambda)$ es una función con las propiedades de una distribución de probabilidad, y $A_i(\lambda)$ y $B_j(\lambda)$ son funciones relacionadas con la respuesta de los polarizadores I_i y II_j , limitadas por las desigualdades

$$\begin{aligned} 0 &\leq A_i(\lambda) \leq 1, \\ 0 &\leq B_j(\lambda) \leq 1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Siguiendo la misma notación, las probabilidades de que un fotón emerja del polarizador I_i o II_j son respectivamente

$$\begin{aligned} P_{i0} &= \alpha_i \int d\lambda \rho(\lambda) A_i(\lambda), \\ P_{0j} &= \beta_j \int d\lambda \rho(\lambda) B_j(\lambda). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Usando el principio de separabilidad se concluye (5.6), que es similar a las definiciones proporcionadas por los MRLs, pero (como afirma Aspect) existen grandes diferencias, ya que en los MRLs (así como en el trabajo de Bell) se supone

que la probabilidad de detección para un canal, depende únicamente de λ y de la orientación del polarizador correspondiente, y no se ve afectada por la orientación del polarizador del otro canal. Aquí por el contrario, se supone que sí pueden tener efecto las orientaciones de un polarizador en la probabilidad de detección del otro, pero que al hacer el tratamiento con analizadores que varían en el tiempo, y considerando su independencia estadística, etc. se logra encontrar una forma factorizable. Asegura Aspect: "En nuestro experimento todas las orientaciones permanecen sin cambio durante todo el curso del experimento; por lo tanto, en la ecuación (5.4) $\rho(\lambda)$ no depende de los índices i ó j ; así como $A_i(\lambda)$ no depende del índice j (ni $B_j(\lambda)$ depende del índice i)."

En consecuencia, usando las desigualdades (5.5)

$$-1 \leq U \leq 0, \quad (5.7)$$

con (omitiendo λ para darle una forma más simple)

$$U \equiv A_1 B_1 - A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_2 B_2 - A_2 - B_1.$$

Tras multiplicar por $\rho(\lambda)$ e integrar, se obtiene

$$-1 \leq S \leq 0, \quad (5.8)$$

con

$$S \equiv \frac{P_{11}}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{P_{12}}{\alpha_1 \beta_2} + \frac{P_{21}}{\alpha_2 \beta_1} + \frac{P_{22}}{\alpha_2 \beta_2} - \frac{P_{20}}{\alpha_2} - \frac{P_{01}}{\beta_1}. \quad (5.9)$$

La desigualdad (5.8) es isomorfa a las desigualdades de Bell generalizadas. Pero en contraparte se encuentra que la predicción cuántica, que es

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{2} \alpha_i \beta_j \cos^2(a_i, b_j), \\ P_{i0} &= \frac{1}{2} \alpha_i, \\ P_{0j} &= \frac{1}{2} \beta_j, \end{aligned} \quad (5.10)$$

lleva a una violación de la desigualdad (5.8), que encuentra su extremo para

$$(a_1, b_1) = (b_1, a_2) = (a_2, b_2) = \begin{cases} 22.5^\circ \\ 0 \\ 67.5^\circ \end{cases}$$

y

$$(a_1, b_2) = \begin{cases} 67.5^\circ \\ 0 \\ 202.5^\circ \end{cases} .$$

Para estas orientaciones se tienen los siguientes valores de S

$$S = \begin{cases} 0.207 \\ 0 \\ 1.207 \end{cases} .$$

A partir de este punto Aspect hace notar que todas las cantidades involucradas en la ecuación (5.9) son probabilidades de emergencia (ya sea simple o en coincidencia) que en principio podrían ser medidas si se diseñan conmutadores que cumplan con las características que se impusieron como requerimiento para la deducción de (5.9) Así que se puede someter a prueba experimental a los MRLs.

Como se señala incluso en la propuesta original, las cantidades involucradas no son medibles en la práctica por varias razones. Una de ellas es que los fotomultiplicadores ópticos —que son los detectores usados en este experimento— tienen una eficiencia cuántica baja, así que la proporción de coincidencias detectadas será menor que la real para las correspondientes orientaciones de los polarizadores. Por otro lado, de todos los pares emitidos en los procesos de cascadas atómicas, sólo una fracción se aleja en direcciones precisamente opuestas, puesto que se está considerando un decaimiento de tres cuerpos, así que puede ocurrir que un fotón ν_A se encuentre con el conmutador C_A y sea analizado, mientras que el fotón ν_B correspondiente se pierde por no haber ido en la dirección precisamente opuesta, invalidando la medición del índice de detecciones simples como representante de la probabilidad de que un solo fotón atraviese el polarizador correspondiente. Debido a los problemas, para realizar el experimento, Aspect hace una serie de suposiciones para relacionar lo medido con una desigualdad que sea verificable. .

Denotando por N la tasa promedio de emisión de pares procesados —es decir, pares que lleguen ambos a los conmutadores correspondientes— y por $\epsilon_{i j}$ un factor numérico que sea representante de la eficiencia cuántica de los fotomultiplicadores, la tasa de *detección* de coincidencias puede ser expresada como

$$N_{i j}(a_i, b_j) = \epsilon_{i j} P_{i j} N. \quad (5.11)$$

Una de las primeras suposiciones de Aspect es que $\epsilon_{i j}$ no depende de que los fotones hayan o no pasado por los polarizadores. Viendo la ecuación (5.11), es

notorio que en su mismo planteamiento está implícita en cierta forma otra de las suposiciones, que es que N no se ve alterado por la presencia o ausencia de los polarizadores, aunque desde la deducción de las desigualdades generalizadas sí se permite que alteren a $\hat{u}(\lambda, t)$. Así que la tasa de detección conjunta en los canales I_i y II_j cuando los correspondientes polarizadores no estén presentes, estará dada por

$$N_{i j}(\infty, \infty) = \epsilon_{i j} \alpha_i \beta_j N, \quad (5.12)$$

donde $\alpha_i \beta_j$ es la probabilidad de que los conmutadores dirijan a los fotones conjuntamente hacia los canales correspondientes. Dividiendo (5.11) entre (5.12) se obtiene

$$\frac{P_{i j}}{\alpha_i \beta_j} = \frac{N_{i j}(a_i, b_j)}{N_{i j}(\infty, \infty)} \quad (5.13)$$

cuyo lado derecho es la división de dos cantidades que son medibles, consiguiendo así poner en términos de éstas los primeros cuatro términos de la ecuación (5.9).

Aún hace falta enunciar una suposición que es necesaria para expresar los últimos dos términos de (5.9) como una relación entre cantidades medibles. Se supone que la probabilidad de que un fotón emerja de un polarizador no se ve afectada por la presencia o ausencia del otro polarizador, aunque es importante recalcar que se permite que la propia respuesta sea modificada.

Así que si se retira el polarizador II_j la probabilidad de que ν_A atraviese el polarizador I_i y que coincidentemente ν_B se dirija sobre el canal II_j es simplemente $\beta_j P_{i 0}$, por lo que la tasa de detección conjunta con el polarizador II_j ausente es

$$N_{i j}(a_i, \infty) = \epsilon_{i j} \beta_j P_{i 0} N. \quad (5.14)$$

Obteniendo finalmente al dividir (5.14) entre (5.12)

$$\begin{aligned} \frac{P_{i 0}}{\alpha_i} &= \frac{N_{i j}(a_i, \infty)}{N_{i j}(\infty, \infty)}, \\ \frac{P_{0 j}}{\beta_j} &= \frac{N_{i j}(\infty, b_j)}{N_{i j}(\infty, \infty)}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

con lo que los dos últimos términos de (5.9) resultan medibles.

Con todo esto es posible reescribir (5.9) como

$$S = \frac{N_{1 1}(a_1, b_1)}{N_{1 1}(\infty, \infty)} - \frac{N_{1 2}(a_1, b_2)}{N_{1 2}(\infty, \infty)} + \frac{N_{2 1}(a_2, b_1)}{N_{2 1}(\infty, \infty)} \quad (5.16)$$

$$+ \frac{N_{2,2}(a_2, b_2)}{N_{2,2}(\infty, \infty)} - \frac{N_{2,j}(a_2, \infty)}{N_{2,j}(\infty, \infty)} - \frac{N_{i,1}(\infty, b_j)}{N_{i,1}(\infty, \infty)}$$

Las cuatro primeras cantidades se pueden medir al mismo tiempo sin tener que detener el experimento; las otras cantidades se supone que serán medidas en experimentaciones auxiliares que Aspect llama de "calibración".

Con esto se supone que se ha logrado deducir una desigualdad verificable experimentalmente, y por lo tanto haber obtenido una propuesta experimental que permite poner a prueba los MLRs contra la mecánica cuántica. Hay que insistir en que fue necesario hacer varias suposiciones cuya validez parece no ser descabellada, pero que serán discutidas a mayor profundidad más adelante.

A continuación se expondrá la realización experimental de dos propuestas, una de las cuales es la expuesta anteriormente.

5.2. Realización experimental

El primero de los experimentos que serán descritos [3], es uno en el que no se utilizan dispositivos que varíen en el tiempo. En este experimento, que fue el primero en realizarse, se busca comprobar la violación de la desigualdad deducida por Clauser y Horne [4]. Tomando como de costumbre $P_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$ como la probabilidad de encontrar el resultado ± 1 en la dirección \vec{a} (para la partícula 1) y el resultado ± 1 en la dirección \vec{b} (para la partícula 2), se tiene que

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = P_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + P_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - P_{-+}(\vec{a}, \vec{b}) \quad (5.17)$$

es el coeficiente de correlación para la medición de ambas partículas. Definiendo

$$S = E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}'), \quad (5.18)$$

cantidad que necesita de mediciones en cuatro diferentes direcciones para su determinación y estará restringida por la desigualdad recién citada

$$-2 \leq S \leq 2 \quad (5.19)$$

En contradicción con (5.19) las predicciones cuánticas pueden alcanzar valores de $S = \pm 2\sqrt{2}$ para algunos ángulos.

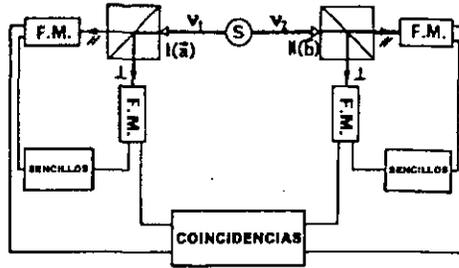


Figure 5.2: Dispositivo experimental en el que se hace uso de cuatro brazos con el fin de hacer verdaderas mediciones dicotómicas.

Varios experimentos para contradecir esta desigualdad han sido realizados, pero todos los anteriores al de Aspect contaban exclusivamente con analizadores de un canal. Analizadores de un canal se refiere a dispositivos donde los fotones eran analizados por un polarizador seguido por un fotomultiplicador, y se consideraba que el fotón analizado tenía polarización paralela al eje del polarizador si se producía una detección en el fotomultiplicador, o perpendicular en caso contrario. Este análisis es pobre, puesto que como ya se mencionó anteriormente, la eficiencia de los fotomultiplicadores es considerablemente baja, y en consecuencia muchas veces no hay detección aún si el fotón consigue atravesar el polarizador. Esto aumenta el conteo de detecciones simples, y disminuye el conteo de detecciones en coincidencia, puesto que para un par correlacionado de fotones, puede suceder que un fotón sea detectado en un brazo del dispositivo, mientras que el otro no, y el análisis no es capaz de diferenciar si esto fué una detección legítima simple, o si la falta de detección de uno de los fotones fué debida a la baja eficiencia del fotomultiplicador. Aún con esto los experimentos así realizados conseguían deducir las cantidades de (5.17), que no eran medibles, por medio de algunas suposiciones, que parecerían ser razonables, pero que podrían representar un punto de duda sobre la validez de los resultados.

En este sentido es la aportación de Aspect, puesto que él lleva a cabo un experimento con cuatro brazos (figura 5.2), en el que los fotones inciden sobre polarizadores "dicotómicos" es decir, con un divisor, los cuales dirigen fotones con

orientaciones perpendiculares hacia diferentes fotomultiplicadores, consiguiendo así que las detecciones sean mucho más similares a los experimentos ideales con espacios dicotómicos.

Usando esta técnica, se consigue hacer en una sola corrida experimental, un conteo de las cuatro tasas de coincidencias $R_{\pm\pm}(\vec{a}, \vec{b})$, lo que conduce directamente al coeficiente de correlación de las mediciones en las direcciones \vec{a} y \vec{b}

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) - R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})}{R_{++}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{--}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{+-}(\vec{a}, \vec{b}) + R_{-+}(\vec{a}, \vec{b})} \quad (5.20)$$

Así que, según Aspect, es suficiente repetir esta medición para otras tres selecciones de orientaciones para poder usar la desigualdad (5.19) como una prueba directa de los MRLs. Hay que resaltar una vez más que, aún habiendo reducido las suposiciones que se tienen que hacer para poder someter a prueba la desigualdad deseada, no se han erradicado del todo. Para la validez de (5.20) es necesario suponer que la muestra de pares *analizados* es representativa de todos los pares *emitidos*. Esta suposición es defendida apoyándose en la simetría que guarda el experimento para el tratamiento en cualquiera de los cuatro brazos del dispositivo (la validez de esta argumentación será discutida posteriormente).

Aspect asegura que con este dispositivo, no sólo reduce los errores en el conteo, sino que también puede verificar algunos otros hechos experimentales, por ejemplo el que la suma de las cuatro tasas de conteo sean constantes para las diferentes orientaciones. Este es un punto trascendente, puesto que puede dar lugar a réplicas que se verán en lo subsecuente.

Los pares correlacionados son resultado de un decaimiento en cascada ($J = 0$) \rightarrow ($J = 1$) \rightarrow ($J = 0$) en el calcio 40, que es excitado selectivamente por medio de láseres. Se consiguen pares de fotones correlacionados (con longitudes de onda $\lambda_1 = 551.3$ nm y $\lambda_2 = 422.7$ nm) con polarizaciones correlacionadas. Los polarizadores son cubos formados por dos prismas, con capas antirreflejantes en sus superficies externas y con un medio dieléctrico entre ellos. El cubo I en la figura 5.2 transmite los fotones con polarización en el plano de incidencia para la hipotenusa del prisma (esto se considera paralelo a \vec{a}), y refleja la polarización ortogonal (perpendicular a \vec{a}). El cubo II funciona de forma similar. Los índices de reflexión y transmisión cobran importancia, tanto para el manejo de incertidumbre, como para las predicciones cuánticas. Los valores medidos fueron $T_1^{\parallel} = R_1^{\perp} = 0.950$ y $T_1^{\perp} = R_1^{\parallel} = 0.007$ para λ_1 , mientras que para

λ_2 , $T_1^{\parallel} = R_1^{\perp} = 0.930$ y $T_1^{\perp} = R_1^{\parallel} = 0.007$ (todos los valores tienen asociada una incertidumbre de ± 0.005). Cada polarizador fue montado en un mecanismo rotatable, junto con los dos fotomultiplicadores correspondientes, a todo este ensamble Aspect le llama "polarímetro". Las ganancias de los fotomultiplicadores fueron ajustadas para que las eficiencias de detección en el conteo fueran las mismas en ambos brazos del polarímetro, 2×10^{-3} para 422nm, y de 10^{-3} para 551nm —aquí hay que resaltar que esto introduce una asimetría para el análisis de cada par correlacionado—. Las tasas de conteos sencillos, de alrededor de 10^4 s^{-1} , en presencia de la fuente se consideran altas en comparación con las tasas de conteo de radiación de fondo de aproximadamente 10^2 s^{-1} . Se colocan filtros (selectivos para 422 o 551nm) frente a cada uno de los polarímetros. Las ventanas de coincidencia se fijan en 20 ns; dado que esta ventana es larga en comparación con la vida media del estado intermedio del decaimiento (5 ns), Aspect afirma que todas las coincidencias verdaderas son detectadas. Para el análisis se deduce (de forma no explícita en el artículo publicado) la tasa de detección de coincidencias accidentales a partir de la tasa de detecciones simples, y del ancho de la ventana de coincidencia. El resultado es de aproximadamente 10 detecciones accidentales por segundo, que al ser sustraídas del total, dan entre 0 y 40 detecciones por segundo dependiendo de las orientaciones, así que las detecciones "accidentales" son del orden de las detecciones "verdaderas". Cada corrida duró alrededor de 100 s, y $E(\vec{a}, \vec{b})$ fue determinado con una precisión estadística típica de ± 0.02 . La suma de las cuatro tasas de coincidencia, es decir, lo que se consideró como el tamaño de la muestra, fue de 80 Hz.

La violación más grande de la desigualdad (5.19) se da para los ángulos mencionados en la sección anterior $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}') = (\vec{a}', \vec{b}') = 22.5^\circ$ y $(\vec{a}, \vec{b}') = 67.5^\circ$. Cinco corridas se llevaron a cabo para cada una de estas orientaciones —variando las orientaciones absolutas, para suprimir imprecisiones sistemáticas—, y el promedio resultó

$$S_{\text{exp}} = 2.697 \pm 0.015 \quad (5.21)$$

La incertidumbre indicada es la proveniente de la ley de Poisson para el conteo de fotones. Con polarímetros simétricos la predicción cuántica es

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = F \frac{(T_1^{\parallel} - T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} - T_2^{\perp})}{(T_1^{\parallel} + T_1^{\perp})(T_2^{\parallel} + T_2^{\perp})} \cos 2(\vec{a}, \vec{b}) \quad (5.22)$$

(para este experimento $F = 0.984$; y es necesario introducirla dado que los ángulos

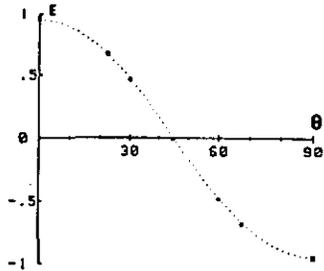


Figure 5.3: Gráfica de la correlación de polarización en función del ángulo relativo de los polarímetros. Los puntos son los obtenidos experimentalmente y la línea punteada es la predicción cuántica.

sólidos de detección son finitos). Así que para este experimento

$$S_{MC} = 2.70 \pm 0.05 \quad (5.23)$$

La incertidumbre, según Aspect, se da por pequeñas faltas de simetría entre los canales de los polarímetros. Y resalta, algo que es de vital trascendencia (se verá en la sección siguiente por qué), que se encontró una variación de $\pm 1\%$ en la eficiencia de detección cuando se rotaban los polarímetros. Aspect pretende atribuir este hallazgo a los “pequeños desplazamientos del rayo de luz incidente en el fotocátodo”, y enuncia que el efecto de estas variaciones no puede provocar variaciones en S_{MC} mayores del 2%.

Sus resultados se muestran en la figura 5.3, que muestra que los “resultados” experimentales y las predicciones cuánticas, tienen una concordancia mejor que del 1%.

Este es uno de los experimentos realizados; otro de ellos es el que involucra analizadores dependientes del tiempo, que ya fue descrito en la sección anterior. La realización experimental difiere poco de la propuesta. Sólo han de ser aclarados algunos detalles.

Primero, los fotones se obtienen por medio de una excitación de dos fotones con un proceso de cascada con $(J = 0) \rightarrow (J = 1) \rightarrow (J = 0)$ en calcio. Con lo que se consigue —con gran eficiencia— un par correlacionado con longitudes de

onda $\lambda_1 = 422.7$ nm y $\lambda_2 = 551.3$ nm. —la vida media en el estado intermedio es de 5 ns aproximadamente.

El cambio entre un canal y otro se realiza cada 10 ns, dado que este tiempo, así como la vida media en el estado intermedio del proceso de cascada es pequeño comparados con L/c , que es aproximadamente de 40 ns; los eventos de detección en un canal y el cambio de orientación en el otro, tienen una separación de tipo espacial.

Los cambios de canal se realizan por medio de interacciones óptico-acústicas, con una onda supersónica en agua. Los fotones se hacen incidir con el ángulo de Bragg (para este medio) que es de 5×10^{-3} , así que los posibles canales de emergencia son en la misma dirección, o con un desvío del doble de este ángulo (para una deducción detallada de lo anterior véase [5].) Los fotones no son desviados cuando la amplitud de la onda es nula, lo que ocurre dos veces durante un periodo acústico. Un cuarto de periodo después de este nodo, la amplitud es máxima y la desviación sería total, si se tuviera una potencia de 1 W en la onda acústica. En el experimento real éste no es el caso, por lo que la desviación es parcial, aunque muy cercana a la total.

Un punto importantísimo en esta realización, es que, como Aspect mismo aclara, los dispositivos de cambio de canal están aproximadamente a 6 m de distancia de la fuente, así que se hace uso de polarizadores y reflectores, para hacerles llegar a éstos. Afirmo haber sido muy cuidadoso en mantener la polarización en todo momento, lo cual lo verifiqué contemplando que se cumpliera la ley de Malus para todo rayo que se considerara polarizado. La manera de contar las coincidencias fue con un dispositivo electrónico con una ventana de coincidencia de 18 ns, de tal forma que se contaron las coincidencias simultáneas, así como las coincidencias con un retraso menor a esto. Para el análisis final, las coincidencias “reales” fueron obtenidas por sustracción. Las corridas experimentales duraban alrededor de 12000 s, que comprenden tres situaciones, 4000 s con los dos polarizadores en su lugar, 4000 s sin ninguno de los dos polarizadores, y una última con un polarizador en su lugar y otro ausente.

Bajo todas estas condiciones experimentales la S_{exp} resultó

$$S_{\text{exp}} = 0.101 \pm 0.020,$$

que viola la desigualdad (5.8) por 5 desviaciones estandar. Y se resalta que la predicción cuántica para S con estos ángulos es de 0.112, por lo que se considera en una concordancia excelente.

5.3. Críticas a la realización experimental

Incluso antes de analizar las implicaciones de los resultados de los experimentos descritos (a lo cual se dedicará buena parte de la conclusión del presente trabajo) se hará una revisión de la validez de los mismos. En buena medida esta discusión sigue los planteamientos de Caroline H. Thompson en varios artículos, en uno de los cuales proporciona lo que ella llama “una analogía intuitiva para los experimentos tipo EPR” [6]. Esta analogía en realidad es un modelo local y realista en su totalidad, que reproduce los resultados de los experimentos de Aspect. El nombre de este artículo es “La bola caótica”, nombre que proviene de la forma en que reproduce los resultados por medio de una bola con rotación caótica sobre su centro y la forma en que dos observadores la describen. Tal reproducción es posible aprovechando algunas de las “debilidades” en el análisis de datos de los experimentos realizados por medio de las hipótesis y suposiciones experimentales (algunas enunciadas de forma explícita en el cuerpo de los trabajos, y otras implícitas en las consideraciones de conteo u otras instancias del experimento), que podrían parecer obvias en algunos casos o muy fáciles de aceptar en otros. Así Thompson, basada en el hecho de que estos resultados pueden ser obtenidos a partir de una situación local y ser interpretados de forma no local por medio de un análisis incorrecto, concluye que aún no se ha llevado a cabo un experimento que demuestre de forma satisfactoria la existencia de un comportamiento no local.

Con el fin de entender la manera en que llega a esta conclusión, se expondrán las bases del modelo de la bola caótica, se enunciarán las suposiciones experimentales más comunes, y finalmente se verá cuales de ellas ayudan a que el modelo sea capaz de reproducir los resultados de los experimentos, cuales son parte del experimento de Aspect, y por que razón se podrían considerar injustificables.

La descripción de la bola caótica es la siguiente: Se parte de una esfera fija en su centro, pero con libertad de rotar de forma caótica en cualquier dirección; esta bola está marcada en dos puntos diametralmente opuestos, uno con una N y el otro con una S . Supónganse que dos observadores, Ana y Beto (A y B), la contemplan como se ve en la figura 5.4; ellos servirán de detectores. Su dirección de observación está determinada por los vectores a y b , con ángulo entre ellos ϕ .

Cada uno de ellos cuenta con una hoja con dos columnas, marcadas N y S respectivamente y T renglones. En determinados momentos ambos marcan en el renglón correspondiente, la columna adecuada dependiendo de que letra se encuentra en el hemisferio de la esfera que le es posible ver. Una vez realizadas las T observaciones, la información de ambas hojas es transferida a una tercera,

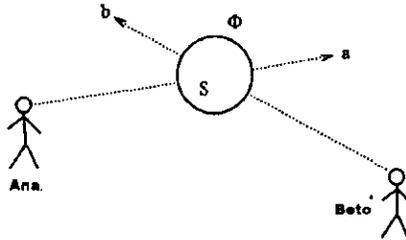


Figure 5.4: La bola caótica. Los vectores a y b se refieren a las direcciones de observación, siendo Φ el ángulo entre éstos.

en la cual se resumen los números de “coincidencias” (NN , SS , SN , NS). Por medio de estas mediciones y comparaciones, fueron obtenidas todas las cantidades necesarias para determinar la correlación entre los resultados de cada observador, y poder deducir si en realidad se encontraban mirando la misma bola o si se trató de un efecto óptico, mientras que en realidad veían dos bolas que podrían describir movimientos independientes o poco correlacionados.

Suponiendo que se trata de una sola bola, sería de esperar que las proporciones entre los números de las diferentes coincidencias, estuvieran relacionadas con las áreas marcadas en las figuras 5.5 7 y 5.6. Para entender a que se refieren estas áreas, considérese una esfera imaginaria sobrepuesta a la esfera que se mueve; el área de la esfera que ve Ana es la mitad de ella, así como el área que ve Beto. Las áreas en cuestión son: el área que ambos consiguen ver, el área que ninguno consigue ver, el área que Ana ve pero Beto no, y el área que Beto ve pero Ana no. Estas cuatro áreas serán denominadas según el resultado de las observaciones que resultarían si la S estuviera dentro de esa área, por ejemplo, si la S está en la región que ambos pueden ver, el resultado es SS , si la S está en la región que ve Ana, pero Beto no (es claro que Beto vería la N hacia él) el resultado sería SN (dónde se entiende que el primer literal se refiere a la observación de Ana, y el segundo a la de Beto), la denominación de las dos áreas restantes es automática. Las áreas NS y SN son proporcionales a ϕ , mientras que las áreas NN y SS son proporcionales a $(\pi - \phi)$, así que los valores esperados para NN , SS , etc. son

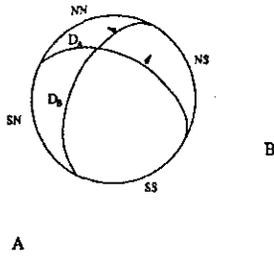


Figure 5.5: Esfera dividida en las áreas que serán observadas por Ana y Beto. Los círculos para cada uno de ellos se denominan D_A y D_B . Las literales que marcan las regiones se refieren a los que Ana y Beto registrarían respectivamente si el sur estuviera en esa zona.

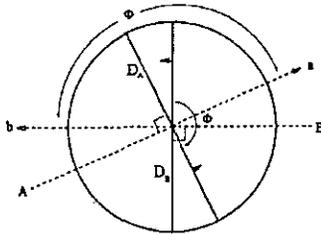


Figure 5.6: Vista que indica las fracciones de la esfera como función del ángulo entre los vectores de observación.

proporcionales a ϕ^2 .

Evaluando la "función de correlación" se obtiene:

$$\hat{C} = \frac{NN + SS - NS - SN}{T},$$

donde estas cantidades se refieren a las veces que se presentó cada medición a lo largo del muestreo.

Suponiendo que T es suficientemente grande como para reducir los errores aleatorios, los resultados deben de ser tales que:

$$\hat{C} = \begin{cases} +1, & \phi = 0 \\ 0, & \phi = \frac{\pi}{2} \\ -1, & \phi = \pi. \end{cases}$$

Para valores intermedios de ϕ , \hat{C} asume valores entre $+1$ y -1 siguiendo una función lineal.

Hasta aquí podría parecer un modelo ingenuo y carecer de toda posibilidad de reproducir las predicciones cuánticas, o incluso de alguna predicción que fuera digna de notarse. Pero basta con permitir uno o dos errores de detección experimental para obtener resultados poco esperados (ha de ser remarcado que los experimentos realizados a la fecha cuentan con errores similares a los que se proponen).

Uno de estos errores está dado por bandas no detectadas; supóngase que Ana y Beto están parados muy cerca de la esfera, de tal manera que el área que consiguen ver es menos de la mitad de la esfera, y habrá (para cada uno) una banda perimetral que escape a su vista, permitiendo que existan posiciones de la esfera para las cuales alguno de ellos (dependiendo de su orientación) no vea ni la S ni la N . Esto modifica la situación de la esfera imaginaria que se había establecido antes, puesto que ahora no está dividida por círculos, sino por bandas (como se ve en la figura 5.7). Las áreas anteriormente descritas también cambian, de hecho todas se reducen, claro que proporcionalmente las áreas más pequeñas son más afectadas por este cambio. Es necesario resaltar que el área total de falta de detección depende del ángulo entre los observadores, siendo máxima cuando se encuentran a $\frac{\pi}{2}$.

En términos de la función de correlación, cada vez que alguno de los dos no vea ni S ni N , la observación del otro debe de ser anulada, puesto que estos datos son inútiles para la determinación de \hat{C} . El problema ahora es que ya no es obvio cual

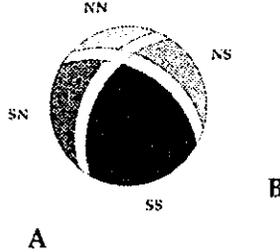


Figure 5.7: Esfera que señala las bandas que no son observadas.

debe de ser el denominador del cálculo realizado con anterioridad. Así que será usado lo que se acostumbra en los experimentos del tipo EPR, y \hat{C} se cambiará por E , es decir

$$E = \frac{NN + SS - NS - SN}{NN + SS + NS + SN}. \quad (5.24)$$

Al denominador se le llamará T_{obs} .

Esta parecería ser una buena aproximación, ya que para $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ los valores encontrados coinciden perfectamente con los de \hat{C} , y no sólo eso, sino que si se intenta determinar la probabilidad de que uno sólo de ellos vea N o vea S , se encontrará un número muy cercano a $1/2$. Claro que habrán otros efectos, por ejemplo, si están parados muy cerca de la esfera, verán solo unos discos pequeños, así que habrán valores de ϕ para los que nunca será detectada una coincidencia (los discos no se traslapan), y no se puede calcular C con (5.24), ya que el numerador y el denominador serán cero; pero este caso será ignorado por lo pronto. Un trazo aproximado de la relación general entre E y el ángulo ϕ se encuentra en la gráfica de la figura 5.8, donde la línea recta punteada representa las predicciones del modelo básico (sin bandas no detectadas), y la línea continua es un trazo aproximado (ya que las matemáticas para proporcionar una expresión exacta son muy complejas y este modelo sólo pretende una descripción cualitativa). Hay algunos puntos de coincidencia, pero lo que se obtiene de forma general son resultados sesgados para algunos valores de ϕ , y esto se debe a que las regiones de información que se pierden, no son aleatorias. Otra consecuencia

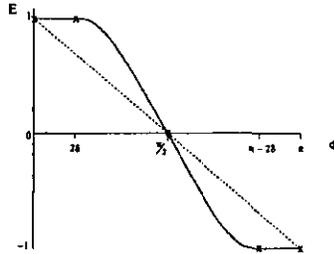


Figure 5.8: Estimación del valor de la correlación E como función del ángulo ϕ . Esta gráfica es aproximada, pero los puntos X son exactos. Usando δ se denota la mitad del ángulo que sustiende desde el centro de la esfera el ancho de la banda ignorada.

es que T_{obs} depende de ϕ , puesto que, como ya se mencionó, el área ignorada de observaciones cambia con ϕ .

El dibujo puede aproximar a una curva sinusoidal, y tener una pendiente mayor -en magnitud- en algunos puntos.

Vale señalar que resultados aún más extraños podrían ser obtenidos por medio de asimetrías en el experimento. Por ejemplo, si Ana puede ver toda la esfera, pero Beto sólo puede ver parte de ella, las predicciones se modifican (T_{obs} es constante). Otra posible asimetría es que una de las letras sea más grande que la otra, así cuando los observadores estén en direcciones opuestas E sería diferente de cuando estén en la misma dirección. Y una combinación de ambas produciría situaciones aún más rebuscadas.

Hasta el momento se ha visto que este modelo puede dar como resultado una curva de tipo aproximadamente sinusoidal que sería difícil de diferenciar de los resultados experimentales reales (dentro de la incertidumbre asociada). Pero no es el único aspecto interesante de éste modelo, ya que también es posible ver que sus resultados violan muchas de las desigualdades de Bell.

En las desigualdades de Bell se hace uso, dentro de una sola desigualdad, de resultados referentes a diferentes realizaciones experimentales. Para obtener las cantidades involucradas serán necesarios tres subexperimentos con la bola caótica

con los observadores en diferentes orientaciones. Las desigualdades son

$$p_{NS}(a, b) + p_{NS}(b, c) \geq p_{NS}(a, c), \quad (5.25)$$

donde cada término se refiere a una probabilidad, con NS indicando el resultado de las coincidencias y los literales entre paréntesis, la dirección en la que observan Ana y Beto, respectivamente.

Es claro que para el modelo de la bola caótica con bandas no detectadas, la probabilidad de detección es variable, ya que depende del ángulo relativo. Dada esta situación, las cantidades presentes en (5.25) pueden ser definidas de diferente forma en función de como se entienda la noción de probabilidad. Por lo menos tres definiciones son posibles: la fracción de todos los eventos (normalizados con T , detectados o no) que se presentaron en coincidencia NS , la fracción de los eventos observados (T_{obs}) que se presentaron en coincidencia NS , o la fracción de los eventos que detectaron cada uno de forma individual que se presentaron en coincidencia NS . En este caso es factible trabajar con cualquiera de los tres ya que que cualquier cantidad es conocida, (pero en los experimentos reales no se conoce T), de tal manera que por lo pronto será usada la primera de estas definiciones. Dado que para esta definición de probabilidad la expresión es

$$p_{NS}(a, b) = \frac{NS(a, b)}{T} \quad (5.26)$$

con la misma T para todos los experimentos, la desigualdad (5.25) puede ser reescrita de la manera siguiente

$$NS(a, b) + NS(b, c) \geq NS(a, c) \quad (5.27)$$

No es difícil ver que la diferencia entre los dos lados de esta desigualdad corresponde a la zona sombreada de la figura 5.9. Esta diferencia es el resultado de una área que no es cubierta por la suma de las áreas correspondientes a $NS(a, b)$ y $NS(b, c)$, pero que sí está comprendida en el área de $NS(a, c)$. Es decir, que la desigualdad se viola.

En los experimentos llevados a cabo, desde luego no se conoce T , así que es obligado el uso de T_{obs} , pero se trabaja en zonas donde este último es aproximadamente constante, así que la violación anterior se presenta de igual forma.

La desigualdad (5.27), a pesar de ser la que Bell dedujo originalmente, no es la más usada —incluso en las realizaciones experimentales expuestas en este capítulo se hace uso de otras—. Las más comunes implican cuatro subexperimentos y son

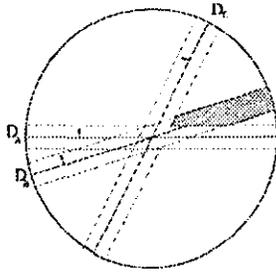


Figure 5.9: Diagrama que muestra tres direcciones de observación equivalentes a las direcciones de medición de espín usadas para las desigualdades de Bell. El área sombreada equivale a la cantidad que viola las desigualdades.

$$-2 \leq C(a, b) - C(a, b') + C(a', b) + C(a', b') \leq 2, \quad (5.28)$$

donde por ejemplo $C(a, b)$ se calcula como

$$C(a, b) = \frac{NN + SS - NS - SN}{T} \quad (5.29)$$

pero en la práctica se usa T_{obs} en lugar de T (con todas las implicaciones que esto puede tener).

Para ilustrar como es que la violación de esta desigualdad se puede dar, es necesario considerar cuatro diagramas como el expuesto en la figura 5.10, donde las zonas están marcadas con el signo + o -, dependiendo de su contribución al término en cuestión. Si se consideran los ángulos $a = 0, a' = \pi/2, b = \pi/4$ y $b' = 3\pi/4$, y son dibujados los tres diagramas restantes (además de la figura 5.10), resulta claro que cada término de (5.28) contribuye con cantidades iguales, así que si se logra demostrar que alguno de estos términos puede ser mayor que $\frac{1}{2}$ usando bandas sin detección, se logrará demostrar que la desigualdad se viola. Con este propósito partiendo de la ecuación 5.24, y considerando que se cuenta con detectores perfectos, se puede sustituir $NN = SS = x$ y $NS = SN = y$, y considerando que se hace una gran cantidad de observaciones (para evitar

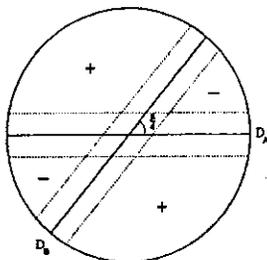


Figure 5.10: Diagrama que indica las zonas que, sustrayendo las bandas ignoradas contribuyen para cada valor en una desigualdad del tipo de Bell.

pequeñas desviaciones) se encuentra

$$E = \frac{x - y}{x + y}, \quad (5.30)$$

En este punto pueden ser introducidas las bandas sin detección, introduciendo la cantidad Δ que debe de ser sustraída por cada área, por lo que (5.30) ha de ser reemplazada por

$$E = \frac{(x - \Delta) - (y - \Delta)}{(x - \Delta) + (y - \Delta)} = \frac{x - y}{x + y - 2\Delta}. \quad (5.31)$$

Ya que en el numerador los errores se cancelan, pero en el denominador no, y como Δ es mayor que 0, las E determinadas con (5.31) son mayores que las producidas por (5.30). A partir de (5.31) es evidente que E puede alcanzar valores mayores a $\frac{1}{2}$, y de hecho (5.28) es generalmente deducida haciendo uso de (5.30), así que cualquier reemplazo de (5.30) por alguna estimación que pueda alcanzar valores mayores a ésta, implicará una posible violación de (5.24).

En su mayor parte la discusión anterior aporta una posible explicación de la violación de (5.19), pero no hace referencia alguna a (5.8), así que esta discusión es obligada en este momento.

Al respecto del experimento de Aspect que involucra analizadores dependientes del tiempo, se pueden enunciar varias objeciones (comunicación personal).

Al parecer la sustracción de conteos accidentales no es suficientemente cuidadosa. Al analizar la tabla de resultados expuesta en la tesis de Aspect, se encuentra un problema serio: existen muchos conteos sencillos y ruido que se mantienen para todo ángulo. Esto puede afectar los resultados en dos sentidos; uno de ellos es que si el conteo de detecciones sencillas es fundamentalmente ruido, los conteos en coincidencia pueden parecer una fracción mucho menor de lo que es en realidad. Esto pasa ya que las coincidencias sobre NN , por ejemplo, se calculan típicamente como

$$\frac{NN}{T_{obs}}$$

Si en efecto el conteo de detecciones sencillas está tan afectada por ruido, T_{obs} crecerá, pero no necesariamente crecerá NN , dado que el ruido no está sincronizado (para que una detección en coincidencia tenga lugar es necesaria la sincronización de los pulsos), por lo que la detección simultánea será fundamentalmente aportada por los pares emitidos, mientras que T_{obs} será causada por la suma del ruido y las "partículas" emitidas (Únicamente con la intención de proporcionar una idea de la magnitud, una parte de la tabla de resultados de la tesis de Aspect se presenta en el apéndice A).

Esto puede ser suficiente para provocar una violación de las desigualdades que se exploran, y aún así al efecto del ruido se pueden sumar otras fallas.

Antes de argumentar sobre este aspecto se hará un listado de varias de las suposiciones experimentales más comunes (como las establece Thompson [7])

1.- Muestreo representativo

Se refiere a que los pares analizados se supone que constituyen en efecto una muestra representativa de *todos* los pares emitidos.

2.-Eficiencia de detección constante

La suma de las probabilidades de detección de + y - es constante; es decir, que no depende de la variable oculta (la eficiencia de detección no depende de la variable oculta).

3.-Ley de Malus

Se supone que ésta se cumple exactamente para los conteos realizados (y si no exactamente, sólo difiere por algunas constantes, pero la curva principal será siempre una senoide). La probabilidad de detección de una señal con polarización a un ángulo η del eje del polarizador es proporcional al $\cos^2 \eta$ (ésta es una suposición de la mecánica cuántica relacionada con el resultado empírico involucrando *intensidades electromagnéticas* de rayos completos. Los detectores

de "fotones simples" son diseñados de tal forma que las frecuencias de detección reproduzcan esto tan aproximadamente como sea posible).

4.-Los detectores pueden ser caracterizados completamente por sus "eficiencias cuánticas".

La probabilidad de detección es la misma para cada fotón, y es la dada por la eficiencia cuántica del detector. Es de notarse que dada la naturaleza cuántica de este concepto, esta suposición no tiene sentido a menos que la luz en realidad esté constituida por fotones.

5.-Ausencia de reforzamiento de la señal por la presencia de los polarizadores.

Se supone que la presencia de un polarizador enfrente de un detector no puede aumentar la probabilidad de detección, siendo sólo capaz de disminuirla.

6.-Ausencia de problemas de sincronización.

Se supone que los fotones A y B toman el mismo tiempo entre su emisión y su detección, excepto por variaciones meramente aleatorias (un tratamiento sistemático, considerando que las señales pequeñas tardaran más en ser detectadas, tendría como consecuencia una modificación en la evaluación estadística, en particular, para la sustracción de conteos accidentales).

7.-Invarianza rotacional.

Cada posible valor de la variable oculta es igualmente frecuente. En procesos de cascada esto implica que no existe una dirección de polarización preferencial, y para la conversión paramétrica a la baja implica (para la mayor parte de los experimentos) que la distribución de frecuencias es relativamente grande, así que todas las diferencias de fase son igualmente frecuentes.

En el proceso de verificación de (5.8) se agregan varias hipótesis experimentales. Haciendo referencia a la lista anterior, las de mayor importancia son 1, 6 y 7.

La hipótesis 1 desde luego se introduce, ya que se supone que las muestras tomadas son representativas, pero esto no es del todo justificable, pues como ya se hizo ver, puede existir mucha interferencia a causa del ruido. Para que las muestras fueran representativas sería necesario también que el criterio de sustracción de conteos accidentales fuera del todo justo, de lo contrario, se podría tener una muestra sesgada de las emisiones reales.

La hipótesis 6 se introduce al hacer la sustracción de conteos accidentales. Cuando los conteos se analizan, se supone que si dos pulsos llegan de dos diferentes detectores, uno con un cierto retraso respecto al otro, esto no fue un arribo en coincidencia, puesto que se considera que los pulsos tienen que ser simultáneos.

Si los detectores tardaran más en ser disparados por señales pequeñas (con lo que se abre la posibilidad de que los impulsos no sean fotones), este método de sustracción descontaría muchas de las coincidencias reales.

Para aclarar por qué la hipótesis 7 puede no ser cierta, es suficiente analizar que pasaría con los dos siguientes arreglos: un conteo de coincidencias para un polarizador a 180° y otro a 190° y, por el otro lado, el mismo conteo con los polarizadores en ángulos 20° y 30° respectivamente.

i) En caso de que la distribución de las variables ocultas no fuera homogénea, estos dos conteos podrían resultar diferentes, puesto que cabría la opción de que hubiera un intervalo de emisión preferencial comprendido entre algunos de estos ángulos, lo cual incrementaría el conteo para ellos.

ii) Si se afirma que la distribución de las posibles variables ocultas es homogénea, se supone que lo único relevante para el conteo es la diferencia de ángulo entre los polarizadores. Con esta hipótesis los conteos ejemplificados encontrarían resultados idénticos.

Aspect asume la postura ii, con lo que acepta también la hipótesis 7.

Por lo anterior debe de ser claro que las diferentes hipótesis no son del todo justificables, o al menos no dentro del contexto experimental, ya que al considerarlas ciertas no se hacen mediciones cuidadosas para verificarlas.

Todos los aspectos anteriormente mencionados deberían de ser suficientes para causar un cierta reserva al decir que ha sido demostrado que la localidad y separabilidad son violadas en la naturaleza. Con todas las dudas al respecto de la veracidad de los experimentos, debería ser claro que no son del todo definitivos y que aún hay mucho camino por andar.

Es importante ver que las críticas que se presentan en la sección anterior contra la realización experimental no son en ningún momento argumentos a favor de los MRL'S. La única intención es cuestionar el carácter de definitivo que se ha adjudicado a los experimentos llevados a cabo hasta la fecha. Para aquellos que creen en el realismo y en el comportamiento local, esto permite decir que aún no han sido presentados resultados experimentales contundentes que violen la localidad. Para quienes la mecánica cuántica es una teoría exacta, correcta y terminada, probablemente estas réplicas parecerían cuestionar sólo detalles experimentales.

Sin embargo, es importante presentar estos argumentos, de lo contrario se consideraría el realismo y la localidad como conceptos obsoletos.

Falta aún la realización de experimentos que violen contundentemente la localidad, si es que se desea contradecirla. De lo contrario, es necesario indicar

en que punto es que las predicciones no locales de la mecánica cuántica están equivocadas.

Para cerrar el presente capítulo hay que resaltar que, aún en el terreno experimental, la localidad como la entendemos, no debe ser descartada. Por lo tanto, se está en espera de al menos dos tipos de mejoras: experimentales, es decir mejoras técnicas, o propuestas teóricas que hagan mayor la contradicción entre la mecánica cuántica y la localidad, para que haciendo uso de dispositivos al alcance tecnológico, sea posible extraer información contundente.

5.4. Diferentes aproximaciones

Después de que Bell dedujera sus desigualdades usando espines, se ha pensado en muchas otras propiedades que pudieran tener efectos medibles relacionados con el comportamiento no separable predicho por la mecánica cuántica. Se ha intentado preparar átomos enredados, los cuales poseen niveles de energía correlacionados, de los que se hablará en la siguiente sección. A manera de ejemplo, y para mostrar las diversas naturalezas que pueden tener los observables involucrados en las mediciones de efectos no separables, se presenta ahora un experimento óptico.

En el caso del experimento que se describe a continuación, se hace uso del momento de emisión de un par de fotones como “propiedad desconocida” del sistema. Este tiempo se considera una incógnita, pero se correlaciona con los dos fotones por medio del siguiente mecanismo. Se considera un átomo que está excitado inicialmente; el estado excitado tiene una vida media suficientemente larga. Este átomo decae con la emisión de un fotón de longitud de onda λ_1 un tiempo t_1 después de la excitación original. El estado intermedio después del decaimiento tiene una vida media mucho menor que la del estado excitado anterior, así que decae emitiendo otro fotón, este de longitud de onda λ_2 un tiempo t_2 después del primer decaimiento, de tal forma que $t_1 \gg t_2$; si la diferencia es muy grande se puede considerar que los dos fotones fueron emitidos casi simultáneamente. El estado que se alcanza después de la emisión del segundo fotón se considera de vida media muy larga, o mejor, el estado base. Con esto se ha conseguido que los tiempos de emisión de los fotones estén correlacionados. Todos estos requerimientos son realizables, pues en buena medida los estados atómicos comunes cumplen los requerimientos señalados.

Desde luego que una interpretación realista sostendría que los fotones fueron emitidos en un tiempo dado, pero que éste es desconocido. La interpretación de

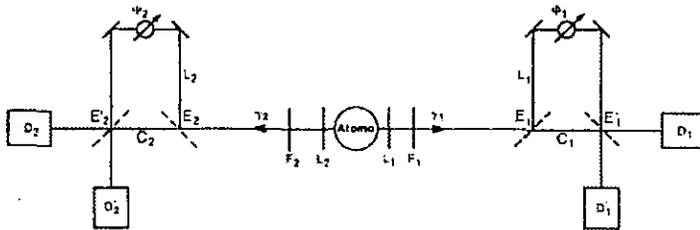


Figure 5.11: Interferómetro de diferencia de fases.

Copenhague sostiene que este tiempo de emisión es inexistente *a priori*; es decir, que sólo existe como posibilidad, y lo entiende como cualquier otro observable, que será determinado por medio de la detección eventual de ambos, o alguno, de los fotones. En principio, al igual que se pudo pensar al respecto de las demás incompatibilidades entre las interpretaciones, no parece haber alguna forma de realizar observaciones que parecieran distinguir cual de ellas es correcta. Sin embargo se encuentra que las dos interpretaciones proporcionan predicciones diferentes en algunos casos.

Considérese el dispositivo experimental esbozado en la figura 5.11. Los dos fotones (γ_2, γ_1) se coliman por medio de lentes hacia dos detectores distantes D_1 y D_2 . Los filtros F_1 y F_2 permiten sólo el paso a longitudes de onda λ_1 y λ_2 respectivamente. Cuando los espejos semitransparentes E_1 y E_2 no se insertan, las detecciones en coincidencia por D_1 y D_2 serán simplemente un pico muy delgado que mostrará la correlación mencionada para el tiempo de emisión. Esta observación no podría presentar ninguna contradicción entre la interpretación realista y la de Copenhague.

Para exhibir predicciones que en efecto difieren, se insertan los espejos semitransparentes E_1 y E_2 así como E'_1 y E'_2 . En este caso los fotones pueden recorrer los caminos cortos o largos hacia los detectores. La diferencia de recorrido para los dos fotones se considera la misma. En los caminos largos se insertan filtros modificadores de fase ϕ_1 y ϕ_2 . Ahora que los fotones también pueden ser detectados por D'_1 y D'_2 , el cálculo de las probabilidades de detección en coincidencia que predice la mecánica cuántica es un tanto complejo; una deducción simple se

puede encontrar en el artículo de Franson [8]. El resultado es

$$R_c = \frac{1}{4} R_0 \cos^2 (\phi_1 - \phi_2),$$

donde R_0 es el índice de detección cuando los espejos no se han introducido.

Esta expresión es análoga en su totalidad a la expresión que Bell usó. Por lo tanto a partir de ella y en la misma forma que se hace con la predicción para los espines, se pueden deducir relaciones entre las observaciones que se cumplirían si la naturaleza tuviera un comportamiento separable.

Un experimento reciente (octubre de 1998) se llevó a cabo con el fin de observar estas inconsistencias cuando los detectores están a 10km de distancia [9]. La desigualdad que se usa en este reporte es

$$S = |E(\phi_1, \phi_2) + E(\phi_1, \phi'_2) + E(\phi'_1, \phi_2) - E(\phi'_1, \phi'_2)| \leq 2 \quad (5.32)$$

donde las primas indican distintas fases (en analogía con las definiciones del teorema de Bell) y con E definida como

$$E(\phi_1, \phi_2) = \frac{R_{++}(\phi_1, \phi_2) - R_{+-}(\phi_1, \phi_2) - R_{-+}(\phi_1, \phi_2) + R_{--}(\phi_1, \phi_2)}{R_{++}(\phi_1, \phi_2) + R_{+-}(\phi_1, \phi_2) + R_{-+}(\phi_1, \phi_2) + R_{--}(\phi_1, \phi_2)} \quad (5.33)$$

donde los subíndices indican con + detección en los detectores no primados y con - detección en los primados.

Para calcular S en el experimento citado se hace ver que, si se determina experimentalmente que los conteos sencillos en los detectores son constantes (para diferentes fases), y que $E(\phi_1, \phi_2)$ es una función $E(\Delta)$ con $\Delta = \phi_1 + \phi_2$, entonces se encuentra que $S = |3E(\Delta) - E(3\Delta)| \leq 2$, y que si se encuentra que E es una función de tipo senoidal $E = V \cos(\Delta)$ con visibilidad V , entonces $S = V2\sqrt{2}$, por lo que observar una visibilidad mayor a 0.707 implicaría una violación de la desigualdad (5.32). Las observaciones corroboran todo lo predicho por la teoría cuántica, en el sentido que a continuación se discute. El comportamiento es senoidal como se muestra en la figura 5.12; se reporta una violación de las desigualdades, pero también se reporta una discrepancia con las predicciones cuánticas. Estos resultados, a diferencia de los obtenidos por Aspect, no son consecuencia de la sustracción de conteos accidentales, puesto que ninguna sustracción ha sido llevada a cabo. Sin embargo cuando se hace dicha sustracción se encuentra una concordancia muy alta con las predicciones cuánticas (del orden de $(0.955 \pm 0.01)2\sqrt{2}$ comparada con la predicción $2\sqrt{2}$).

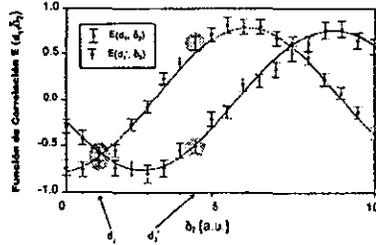


Figure 5.12: Gráfica de resultados del experimento mostrando la correlación $E(d_1, \delta_2)$ y $E(d'_1, \delta_2)$ como función de la fase δ_2 .

Hay que notar que para la deducción de la desigualdad (5.32) se ha supuesto que las eficiencias de detección son totales, lo cual es distante de la realidad, por lo que, una muy buena parte de los argumentos de la sección anterior se aplican también a este resultado experimental. Uno de los más relevantes es la definición de $E(\phi_1, \phi_2)$, cuyo denominador se refiere a los conteos detectados y no a las emisiones reales.

En la opinión de W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden y N. Gisin (autores del experimento anterior) la violación de la desigualdad (5.32) es confirmada y por lo tanto la posibilidad de variables ocultas locales descartada una vez más. Ellos mismos señalan que su experimento no es libre de errores debido a la posible dependencia de la eficiencia de detección con respecto a alguna variable oculta, lo que invalidaría la expresión para el denominador de (5.33).

Sin embargo, como ya se hizo ver, este es un punto suficientemente delicado como para considerar que esta simple duda reste el carácter de determinate a dicho experimento. Hasta la fecha no ha sido realizado un sólo experimento que evite el problema que presenta éste, por lo tanto, no es posible proclamar vencedora la existencia de efectos no separables.

5.5. Átomos enredados

Existe en realidad una gran polémica alrededor de lo que es un fotón. Consecuentemente los experimentos llevados a cabo por medio de estados enredados de fotones son susceptibles a discrepancias sobre como deben de ser entendidos los resultados que proporcionen. Para hacer frente a algunas de las críticas que se han hecho a las realizaciones experimentales, se han buscado formas de regresar al planteamiento original de EPR, en términos de partículas enredadas, dónde el concepto de partícula, en principio, tiene un significado clásico. Con este propósito existen investigaciones sobre la forma de producir estados enredados para átomos. Se han conseguido hasta cierto punto estados de este tipo; sin embargo las eficiencias de "producción" de estos estados no son suficientes para someter a prueba experimental las desigualdades de Bell. Los métodos actualmente utilizados [10] pueden ser mejorados, y en principio alcanzar dicha verificación o negación.

Una de las maneras de producir átomos enredados es como sigue. Se hace uso de una cavidad superconductor para microondas de alto Q . Los átomos que se usan están preparados en estados circulares de Rydberg [11], los cuales entran en la cavidad donde (indirectamente) intercambian un fotón¹, lo que los lleva a un estado enredado. Los pasos en detalle se describen a continuación.

Para cada átomo se puede considerar que sólo hay dos estados relevantes, comportándose así como un sistema de dos niveles, a los que se les llamará b (base) y e (excitado). La cavidad se encuentra originalmente en estado de vacío, es decir, sin radiación electromagnética contenida en ella. El estado compuesto por la cavidad en estado de vacío, un átomo en el estado b y otro átomo en el estado e será denotado por $|\Psi\rangle = |e_1, b_2, 0\rangle$ donde el subíndice indica a cual de los átomos se refiere el literal y el último número cuántico hace referencia al estado de la cavidad. Se denotará por Ω la frecuencia de Rabi en el vacío con que la cavidad y cada átomo intercambian radiación. Primero un átomo en estado e entra a la cavidad, y se hace que la interacción dure un tiempo t_1 tal que $\Omega t_1 = \frac{\pi}{2}$, con lo que se consigue que la probabilidad de que este átomo se mantenga en el estado e , y salga de la cavidad dejándola vacía (es decir sin afectarla) es de $\frac{1}{2}$ por lo que la probabilidad de que el átomo emita un fotón y salga de la cavidad en estado b

¹Si se desea una interpretación más independiente del concepto fotónico, se puede pensar en que intercambian radiación electromagnética con las características deseadas para producir la transición que se busca.

es de también $\frac{1}{2}$. Exactamente después de esto el estado total esta descrito por

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, b_2, 0\rangle - |b_1, b_2, 1\rangle) \quad (5.34)$$

que describe un estado correlacionado entre el átomo 1 y la cavidad. Un tiempo T después de que 1 salió de la cavidad, 2 entra en ella interactuando por un tiempo $t_2 = 2t_1$ tal que $\Omega t_2 = \pi$. De esta forma el intercambio entre la cavidad y 2 está asegurado (probabilidad =1), con lo que se consigue que si 1 dejó la cavidad vacía, 2 no tendrá cambio alguno en su estado, pero si 1 emitió un fotón, éste será absorbido por 2 con seguridad y el sistema pasa al estado

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, b_2, 0\rangle - |b_1, e_2, 0\rangle),$$

el cual es factorizable para la cavidad y se reescribe como

$$|\Psi_{\text{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, b_2\rangle - |b_1, e_2\rangle) |0\rangle. \quad (5.35)$$

Con esto se ha conseguido el estado deseado, es decir, un estado de máxima correlación entre los estados atómicos 1 y 2. Para átomos de Rydberg se pueden transformar con una gran eficiencia los estados e_i y b_i en estados propios del operador σ_j^z , con lo que se hace posible medir las cantidades involucradas en (5.18), obteniéndose una manera de someter a prueba las desigualdades de Bell usando átomos en vez de fotones.

Como ya se mencionó, la verificación de las desigualdades de Bell usando átomos enredados no ha sido exitosa, por que las eficiencias que se alcanzan son demasiado bajas. Para un estado correlacionado ideal descrito por (5.35) se debería cumplir que las probabilidades en coincidencia² $P_{eb} = P_{be} = \frac{1}{2}$ y por el contrario $P_{ee} = P_{bb} = 0$; sin embargo las detecciones producidas por el método descrito son $P_{eb} = 0.44$, $P_{be} = 0.27$, $P_{bb} = 0.23$ y $P_{ee} = 0.06$, reportados con errores estadísticos del orden de 0.03 [10]. Con estas probabilidades distantes a las ideales no es posible realizar un experimento que proporcione datos que sean contundentes para las discusiones al respecto de los comportamientos no separables. Las probabilidades ciertamente erróneas tienen diversas causas y ninguna de ellas es insuperable. Fundamentalmente existe el problema de que los átomos pueden hacer una transición $e \rightarrow b$ fuera de la cavidad, o la cavidad puede no contener al fotón cuando llegue 2, lo cual introduce variaciones en el estado final.

²En esta notación el primer subíndice se refiere al átomo 1 y el segundo, al átomo 2.

En cuestión de interpretaciones hay algo importante a notar al respecto del procedimiento anterior. Para la interpretación ortodoxa, el sistema colapsa su función de onda (5.35) al momento de realizar la medición sobre los átomos. Así que lo que ocurre cuando se realiza una medición sobre el átomo 2 (por ejemplo) y se encuentra que está en el estado b_2 , tiene una consecuencia inmediata, que es predecir que 1 está en el estado e_1 . Una correlación de este tipo es propiedad característica de cualquier sistema enredado, pero este sistema tiene una implicación adicional: en el momento en que se realiza la medición sobre 2 no sólo se determina el estado *actual* de 1, sino también se determina cual *fue* el estado intermedio de la cavidad. Es decir, que por medio de una medición sobre 2 se determinó si alguna vez (durante este proceso) hubo o no un fotón dentro de la cavidad. Hay que notar que hasta antes de realizar la medición, el campo dentro de la cavidad era sólo una posibilidad; pero después de que se realiza la medición se determina si existió o no, y éste es un comportamiento donde la información viaja en sentido contrario en el tiempo, es decir, que no sólo existe información que viaja con velocidad mayor a la de la luz, sino también un comportamiento inverso en el tiempo.

El proceso explicado puede fácilmente generalizarse para la producción de estados enredados de tres o más átomos. Para el caso de tres átomos es suficiente con tomar la cavidad en el estado original de superposición coherente de estados 0 y 3, es decir, $\Psi_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |3\rangle)$. Cuando el primer átomo en estado base entra a la cavidad, el estado $|b_1, 0\rangle$ no se modifica a causa de esta interacción, pero si el tiempo es escogido correctamente (de manera análoga al sistema para dos átomos), el estado $|b_1, 3\rangle$ se transformará en $|e_1, 2\rangle$ con probabilidad igual a 1, obteniéndose

$$\Psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b_1, 0\rangle - |e_1, 2\rangle).$$

Al proceder de igual manera para 2, se obtiene $|b_2, 2\rangle \rightarrow |e_1, 1\rangle$, y

$$\Psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b_1, b_2, 0\rangle - |e_1, e_2, 1\rangle)$$

y para 3

$$\Psi_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b_1, b_2, b_3, 0\rangle - |e_1, e_2, e_3, 0\rangle).$$

Factorizando $|0\rangle$ queda

$$\Psi_{III} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|b_1, b_2, b_3\rangle - |e_1, e_2, e_3\rangle) |0\rangle.$$

Es claro que para generalizar a n átomos basta con tomar la cavidad en el estado inicial de superposición coherente de $|0\rangle$ y $|n\rangle$, para después proceder de forma enteramente análoga a la descripción anterior.

Con lo anterior se puede concluir que hay esperanza de que sea posible en un futuro cercano realizar mediciones sobre estados enredados compuestos por sistemas macroscópicos, lo cual reduciría en gran medida las discusiones al respecto de las realizaciones experimentales. Alcanzar este objetivo demanda mejoras tecnológicas que permitan la preparación de los estados de manera más precisa.

5.6. Apéndice A

Tabla que muestra un fragmento de los resultados alcanzados por Aspect y su grupo.

C.E	b	A.R.	B	$B - c$	R.B.	C.S.	C.D.	D
4	0.0	0.0	57671	1671	143	98	23	75
12	180.0	0.0	58178	2178	137	98	24	74
13	180.0	0.0	57470	1470	137	95	22	73
21	360.0	0.0	57159	1159	145	94	23	71
5	22.5	22.5	57497	1497	138	87	23	64
11	157.5	22.5	57699	1699	133	86	22	64
14	202.5	22.5	57220	1220	131	87	23	64
20	337.5	22.5	57170	1170	141	87	23	64
6	45.0	45.0	57015	1015	111	62	23	39
10	135.0	45.0	57426	1426	96	63	23	40
15	225.0	45.0	56965	965	110	64	23	41
19	315.0	45.0	57041	1041	106	62	23	39
7	67.5	67.5	56898	898	98	38	38	15
9	112.5	67.5	56861	861	91	38	38	16
16	247.5	67.5	56093	93	104	38	38	15
18	292.5	67.5	56601	601	91	39	39	17
8	90	90.0	56820	820	88	28	28	6
30	90	90.0	56856	856	93	28	28	5
17	270	90.0	56676	676	88	29	29	6
32	270	90.0	56919	919	88	27	27	5

C.E: Corrida experimental; b : Ángulo del polarizador b ; A.R: Ángulo relativo entre los dos polarizadores; B : Conteo total en el detector B ; $B - c$: Conteos en

el detector B menos un número constante de conteos de fondo ($c = 56000$); R.B: Conteos por ruido en B ; C.S: Conteos sincronizados; C.D: Conteos desincronizados; D: Diferencia.

Nota: El polarizador a estuvo fijo a 0 grados para estas corridas experimentales.

Los datos han sido dispuestos en grupos de cuatro, donde todos los pertenecientes a un grupo comparten el mismo ángulo relativo, aunque el ángulo de disposición sea diferente en algunos casos.

REFERENCIAS

- [1] S. J. Freedman y J. F. Clauser, Phys. Rev. Lett. **28**, 938, (1972).
- [2] Alain Aspect, "Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics". Phys. Rev. D. **14**, 1944 (1976).
- [3] Alain Aspect, Philippe Grangier y Gérard Roger, "Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A new violation of Bell's Inequalities". Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).
- [4] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [5] *Quantum Electronics*, A. Yariv, (Wiley, Nueva York, 1975).
- [6] Caroline H. Thomson. Found. of Phys. Lett. **9**, 357 (1996)
- [7] Caroline H. Thomson, "The tangled methods of quantum entanglement experiments", Pagina de internet: <http://www.aber.ac.uk/~cat>.
- [8] J. D. Franson. Phys. Rev. Lett. **62**, 2205 (1989)
- [9] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, y N. Gisin. Phys. Rev. Lett. **81**, 3563 (1998).
- [10] E. Hagley, X. Maitre, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond y S. Haroche. Phys. Rev. Lett. **79**, 1, (1997).
- [11] P. Nussenzveig *et al.*, Phys. Rev. A **48**, 3991 (1993).

6. Teoremas de no separabilidad sin desigualdades I.

6.1. Diferencias con pruebas anteriores

Los teoremas presentados en este capítulo, al igual que el teorema de Bell, muestran la existencia de contradicciones entre las predicciones cuánticas y la suposición de la preexistencia de valores para todos los observables (e incluso la preexistencia de algún parámetro que determine el resultado de las mediciones). En las demostraciones que se analizan en el presente capítulo no se hace uso de desigualdades o predicciones estadísticas, sino que se determina con certeza el valor de un observable para una tercera (o cuarta) partícula a partir del valor de observables correlacionados de otras dos (o tres) partículas distantes. Lo que se consigue demostrar es que los observables no pueden tener, de manera consistente, valores preexistentes a las mediciones; haciendo ver que si se realizan determinadas mediciones en las otras partículas, el valor en la restante queda determinado, y si se realizan otras mediciones el valor en la partícula restante debería de diferir del previamente determinado.

Esto tiene varias consecuencias, pues no sólo aporta otra forma de entender la contradicción entre los MRLs y la mecánica cuántica, sino que también puede traer a escena nuevos experimentos cada vez menos refutables.

Existe más de una argumentación con las características descritas, pero las que serán expuestas aquí, por concretas y simples, son:

- i) La aportada por Greenberg, Horne y Shymony [1] (haciendo uso de espines),
- ii) la aportada por Greenberg y Choi [2] e independientemente por Mermin [3] (haciendo uso de direcciones de propagación).

6.2. Usando espines

Se estudia un sistema de cuatro partículas con espines correlacionados. Por comodidad experimental, sería conveniente que las partículas 1 y 2 viajaran (fijando así el sistema de referencia) en la dirección positiva de z y las partículas 3 y 4 en la dirección negativa de z . El rayo portador de las partículas 1 estaría ligeramente separado del rayo portador de las partículas 2, como se ve en la figura 6.1, para que pudieran entrar en diferentes aparatos Stern-Gerlach (y de forma similar para los rayos portadores de las partículas 3 y 4). Tal situación se puede conseguir del decaimiento de una partícula de espín uno en dos partículas I y II de espín uno y cada una decayendo en dos partículas de espín un medio. Éste es un sistema de

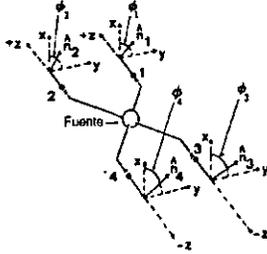


Figure 6.1: Disposición espacial de un posible estado enredado de cuatro partículas.

espín total uno con componente 0 en la dirección z , que permanece así durante todo el decaimiento. Después de que las cuatro partículas han sido creadas, el estado del sistema completo está descrito por el vector de estado: (veáse apéndice A del presente capítulo)

$$|\Psi\rangle = (1/\sqrt{2}) [|+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 |-\rangle_4 - |-\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4]. \quad (6.1)$$

El producto de los valores de los espines (1 o -1 en cada dirección n_i) está dado por (ver apéndice B)

$$E^\Psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4), \quad (6.2)$$

donde θ_i y ϕ_i son los ángulos polares y azimutales de \hat{n}_i .

Se impone por simplicidad la restricción de que \hat{n}_i esté en el plano x - y , obteniéndose así la expresión reducida ($\theta_i = \pi/2$)

$$E^\Psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -\cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4). \quad (6.3)$$

Con el fin deseado se hará uso de las siguientes correlaciones perfectas

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0 \\ \Rightarrow E^\Psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = -1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi \\ \Rightarrow E^\psi(\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3, \hat{n}_4) = +1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Resulta que para ciertas selecciones de los \hat{n}_i , (6.4) y (6.5) proveen una forma de predecir con certeza el estado de una de las partículas por medio de mediciones en las tres restantes¹. Por ejemplo, si se encuentra un valor +1 para tres de las partículas con un arreglo que cumple la restricción (6.4), automáticamente se determina que el valor del espín para la partícula restante debe de ser -1. Esto representa una diferencia importante con el teorema de Bell, donde las predicciones son sobre probabilidades. A partir de este punto sería posible seguir una deducción similar a la del capítulo 4, pero más usual es mostrar que dadas (6.4) y (6.5) se pueden encontrar inconsistencias. Haciendo uso del criterio de realidad propuesto por Einstein, Podolsky y Rosen y de la suposición de localidad, se propone la existencia de cuatro funciones, A, B, C y D con posibles valores ± 1 , que representan los resultados de las mediciones sobre las direcciones \hat{n}_i , que están completamente determinadas por el parámetro λ (propio del sistema y definido de forma idéntica al usado con el formalismo de variables ocultas estudiado en capítulos anteriores) y el ϕ_i correspondiente, así que para un λ dado (6.4) y (6.5) se reescriben como

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = 0 \\ A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = -1 \end{aligned} \quad (6.6)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi \\ A_\lambda(\phi_1)B_\lambda(\phi_2)C_\lambda(\phi_3)D_\lambda(\phi_4) = +1 \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde λ se ha colocado fuera del paréntesis para hacer explícito que las ecuaciones que se concluirán requieren de que se considere un λ común.

Ahora bien, a partir de (6.6) se puede concluir

$$A_\lambda(0)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1, \quad (6.8)$$

¹Esta determinación se consigue a pesar de que las partículas están distantes entre sí, a diferencia de el teorema de Bell-Kochen-Specker, en el que las distintas mediciones se pueden realizar en el mismo lugar.

$$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(0) = -1, \quad (6.9)$$

$$A_\lambda(\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(\phi) = -1, \quad (6.10)$$

$$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = -1. \quad (6.11)$$

Igualando (6.8) y (6.9) y dividiendo entre por $B_\lambda(0)D_\lambda(0)$ se encuentra que

$$A_\lambda(\phi)C_\lambda(\phi) = A_\lambda(0)C_\lambda(0). \quad (6.12)$$

De forma similar para (6.8) y (6.10),

$$A_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = A_\lambda(0)D_\lambda(0); \quad (6.13)$$

dividiendo (6.12) entre (6.13) se llega a

$$\frac{C_\lambda(\phi)}{D_\lambda(\phi)} = \frac{C_\lambda(0)}{D_\lambda(0)},$$

o de otra forma (usando $D_\lambda(\phi) = \frac{1}{D_\lambda(\phi)}$ ya que sus valores son ± 1)

$$C_\lambda(\phi)D_\lambda(\phi) = C_\lambda(0)D_\lambda(0), \quad (6.14)$$

que al ser introducida en (6.11) resulta en

$$A_\lambda(2\phi)B_\lambda(0)C_\lambda(0)D_\lambda(0) = -1, \quad (6.15)$$

que por comparación con (6.8) da

$$A_\lambda(2\phi) = A_\lambda(0) = \text{cte } \forall \phi. \quad (6.16)$$

Sin haber encontrado aún una contradicción matemática, (6.16) ya representa un problema para que estas funciones sean representantes de los valores medidos, puesto que se esperaría que A_λ dependiera de su argumento, y, en particular, por ejemplo que $A_\lambda(0) = -A_\lambda(\pi)$, lo cual con $\phi = \pi/2$ está en contradicción con (6.16). Se puede llegar a una contradicción matemática haciendo uso de (6.7) para establecer que

$$A_\lambda(\theta + \pi)B_\lambda(0)C_\lambda(\theta)D_\lambda(0) = +1, \quad (6.17)$$

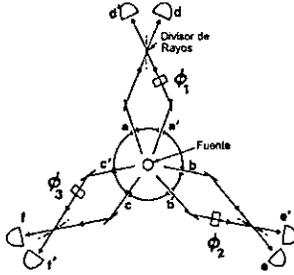


Figure 6.2: Arreglo experimental para hacer uso de las simetrías en las direcciones de propagación.

que en combinación con (6.9) conduce a

$$A_\lambda(\theta + \pi) = -A_\lambda(\theta). \quad (6.18)$$

Se confirma el cambio de signo predicho, pero se puede estar en contradicción con (6.16); por ejemplo para $\phi = \pi/2$ y $\theta = 0$.

Es importante señalar que para llegar a (6.12) es necesario suponer, como consecuencia de los principios de realidad y localidad, que $A_\lambda(\phi)$ (así como las demás funciones) tiene un valor definido, sin importar si se determina $A_\lambda(\phi)$ o $A_\lambda(\theta)$ (θ un ángulo cualquiera y diferente de ϕ) o incluso si no se realiza esa medición, que en buena medida es una suposición como la que se cuestiona en el capítulo 4, cuando se hace referencia a las “teorías de propiedades” estudiadas por Zsabó (ver sección 4.3 y las referencias).

6.3. Usando direcciones de propagación

Para seguir un argumento similar al de la sección anterior, pero haciendo uso de direcciones de propagación, se considera una partícula con valor medio 0 para su momento y que puede decaer en tres partículas de igual masa. Supóngase que el decaimiento ocurre en la región central de un dispositivo como el de la figura 6.2. Si cada una de las partículas resultantes porta la misma energía, sus direcciones de propagación tendrán que guardar simetría radial, y estarán

separadas por un ángulo de 120° (el requerimiento de igualdad de energías puede ser forzado colocando filtros frente a los detectores de la figura 6.2). La región de decaimiento está rodeada por un arreglo de seis aperturas, dispuestas de tal forma que tres de ellas (a, b y c) subtienen ángulos de 120° entre sí, y asimismo las restantes (a', b' y c'). Este arreglo permite que las partículas emerjan a través de a, b y c ó de a', b' y c' , siendo éstas dos alternativas mutuamente excluyentes. A la salida del dispositivo el estado está descrito por

$$|\Psi\rangle = 1/\sqrt{2} [|a\rangle_1 |b\rangle_2 |c\rangle_3 + |a'\rangle_1 |b'\rangle_2 |c'\rangle_3], \quad (6.19)$$

donde $|a\rangle_1$ indica la partícula 1 en el rayo de salida a , etc. La introducción de una fase, arbitraria pero fija, en alguno de los términos de (6.19) *no* modifica de forma trascendente las predicciones. Todos los rayos son reflejados de tal forma que, por ejemplo, a y a' se traslapan sobre un divisor 50-50, cuyas posibles direcciones de emergencia están monitoriadas por detectores d y d' , lo correspondiente ocurre para b y b' así como para c y c' (con detectores e, e' y f, f' respectivamente, como se ve en la figura 6.2). Antes de que a' incida sobre el divisor, pasa por una placa que puede introducir un defasamiento controlable con valor ϕ_1 , de tal forma que la evolución de $|a\rangle_1$ y $|a'\rangle_1$ están dadas por

$$|a\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\rangle_1 + i|d'\rangle_1) \quad (6.20)$$

y

$$|a'\rangle_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\phi_1} (|d'\rangle_1 + i|d\rangle_1), \quad (6.21)$$

y ecuaciones similares para la evolución de $|b\rangle_2, |b'\rangle_2, |c\rangle_3$ y $|c'\rangle_3$. Al introducir estas expresiones en (6.19) resulta una ecuación de ocho términos (ver apéndice C) que contiene las probabilidades de detección para cualquier terna de detectores (d, e, f), (d', e, f), etc. Los detectores se consideran perfectos, así que toda partícula causará que algún detector se dispare.

Las probabilidades de detección son (ver apéndice C)

$$P_{d e f}^{\Psi}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{8} [1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \quad (6.22)$$

$$P_{d' e f}^{\Psi}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{8} [1 - \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \quad (6.23)$$

y expresiones similares para las demás tercias de detectores. Si el número de literales primadas es par, el signo del seno es positivo y si es non, negativo. Evidentemente la suma sobre todas las tercias posibles es igual a uno. Como en casos anteriores se denota con +1 si se dispara un detector no primado y -1 en caso contrario. Con estos valores la predicción del valor esperado del producto de los resultados para cada partícula es (ver apéndice C)

$$E^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3). \quad (6.24)$$

Se pueden forzar correlaciones perfectas para algunos ángulos; por ejemplo

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \pi/2 \\ \Rightarrow E^\Psi(\phi_1, \phi_2\phi_3) = +1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

y

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 3\pi/2 \\ \Rightarrow E^\Psi(\phi_1, \phi_2\phi_3) = -1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

A partir de este punto es notoria la equivalencia de las ecuaciones (6.24), (6.25) y (6.26) con (6.3), (6.4) y (6.5), por lo que no es necesario repetir la deducción de las contradicciones; lo único que se modifica es que los ϕ_i representan el cambio de fase en lugar del ángulo azimutal del aparato Stern-Gerlach.

6.4. Algunas conclusiones

Se ha encontrado una contradicción entre las predicciones de la mecánica cuántica y los conceptos de realidad y separabilidad. El concepto de realidad es contradicho por la conclusión de que cada una de las partículas no puede “portar consigo” la información que dará lugar al resultado de todas las mediciones sobre ella, ya que, como se expuso, la misma medición sobre una partícula encuentra resultados diferentes dependiendo de las mediciones que se realicen en las demás. Por otro lado, este mismo punto contradice la suposición de separabilidad; el evento de medición sobre una de las partículas se ve afectado por una serie de eventos remotos, es decir, las mediciones sobre las partículas restantes.

Hay que resaltar que si la separabilidad es violada, la noción de realidad puede conservarse. Supóngase que es permitido que la medición sobre una partícula afecte las mediciones sobre otras partículas; en este caso, pueden existir elementos de realidad subyacentes a las mediciones, pero que sean afectados por eventos

remotos. Las predicciones del presente capítulo no estarían en contradicción con una situación de este estilo. Para Einstein esto sería “el fin de la física” [4], a menos claro, que se encontrara el medio por el cual los eventos están afectándose mutuamente. Por este camino se rescata el concepto de realidad a cambio de un “sacrificio” del de separabilidad.

Probablemente la manera de salvar el concepto de realidad, así como el de separabilidad, sería encontrar el medio por el cual los eventos distantes pueden perturbarse entre sí. De esta forma, podrían existir elementos de realidad, y recuperar la separabilidad si fuera posible aislar esta interacción— y aunque no lo fuese, por lo menos el comportamiento sería “inteligible”, y, no sólo consecuencia de principios introducidos exclusivamente en el régimen cuántico.

El problema que parecería saltar a la vista, es que el mencionado método de interacción se tendría que propagar con una velocidad superior a la de la luz. En ningún punto de las deducciones de este capítulo se hace explícito en que momento se escogen los ϕ_i , así que podría ser en un momento tal que los eventos de disposición de las ϕ_i , tuvieran una separación de tipo espacial con la medición sobre j ($j \neq i$). De lo anterior se deduce que la interacción tendría que propagarse con una velocidad superior a la de la luz. Esto en realidad no es tan sorprendente, puesto que a todo lo largo de la deducción se ha hecho uso de la mecánica cuántica convencional, para la cual no existe un límite de las velocidades naturales, es decir, que la velocidad puede ser tan grande como se desee. Así que no debe de extrañar llegar a una conclusión no relativista, si se partió de una teoría que no lo es.

Un comentario final es que para la interpretación de Copenhague la respuesta al problema planteado se encuentra en el principio de complementariedad. Este establece, de alguna forma, que dos observables conjugados no pueden ser medidos simultáneamente. Su aplicación es extendida un poco más diciendo que no tiene sentido hablar del resultado que hubiera tenido una medición, de haberse realizado ésta en vez de la que tuvo lugar —si las dos mediciones involucradas se refieren a observables conjugados. Como ya se hizo notar, para la deducción de (6.12) es necesario suponer que una afirmación de este tipo sí tiene sentido.

6.5. Apéndice A

El proceso a describir consiste en una serie de decaimientos: El primer paso está dado por una partícula de espín 1, que decae en dos partículas, I y II, de espín 1, cada una de las cuales decae nuevamente, ahora en dos partículas de espín

$\frac{1}{2}$. El resultado final son cuatro partículas de espín $\frac{1}{2}$. Durante todo el proceso se considera que el espín total se mantiene constante e igual a 1, y que la componente z se mantiene igual a cero. Esto implica que las cuatro partículas resultantes están correlacionadas, por lo que se genera un estado enredado constituido por cuatro subsistemas. El estado completo se denotará por $||SM\rangle\rangle$, con S el espín total² y M la proyección total sobre z . Los estados de I y II se denotarán por $|m\rangle_I$ y $|m\rangle_{II}$, donde m es la componente z del espín del estado I o II respectivamente. Para las cuatro últimas partículas se usará $|m\rangle_i$, donde i se refiere a la partícula en cuestión y m es lo análogo a los casos anteriores.

Para deducir la expresión para este estado enredado se examinará cada uno de los decaimientos. Después del primero de ellos el estado es $||10\rangle\rangle$ y puede ser descrito por

$$||10\rangle\rangle = c_1 |1\rangle_I |-1\rangle_{II} + c_2 |0\rangle_I |0\rangle_{II} + c_3 |-1\rangle_I |1\rangle_{II}, \quad (6.27)$$

donde el cálculo de los coeficientes de Clebsch-Gordan puede ser difícil, pero se usará un método que explota las simetrías. En particular $||22\rangle\rangle$ es invariante ante el intercambio de las partículas I y II, puesto que este estado tiene que ser escrito como $|1\rangle_I |1\rangle_{II}$. El operador de descenso preserva esta simetría, así que el estado $||21\rangle\rangle$ tiene que ser simétrico ante el intercambio de I y II, lo cual implica que $||11\rangle\rangle$ es antisimétrico, ya que tienen que ser ortogonales entre sí. Una vez más se puede aplicar el operador de descenso y obtener $||10\rangle\rangle$, que será antisimétrico. Los únicos coeficientes que aseguran antisimetría y normalización en (6.27) son $c_1 = -c_3 = \sqrt{1/2}$ y $c_2 = 0$.

En el segundo decaimiento

$$\begin{aligned} |1\rangle_I &\longrightarrow |1/2\rangle_1 |1/2\rangle_2, \\ |-1\rangle_I &\longrightarrow |-1/2\rangle_1 |-1/2\rangle_2, \\ |1\rangle_{II} &\longrightarrow |1/2\rangle_3 |1/2\rangle_4, \\ |-1\rangle_{II} &\longrightarrow |-1/2\rangle_3 |-1/2\rangle_4, \end{aligned} \quad (6.28)$$

lo cual al sustituirse en (6.27) con los coeficientes adecuados resulta en

$$|\Psi\rangle = \left(\sqrt{1/2}\right) \{ |+\rangle_1 |+\rangle_2 |-\rangle_3 |-\rangle_4 - |-\rangle_1 |-\rangle_2 |+\rangle_3 |+\rangle_4 \}. \quad (6.29)$$

²A pesar de que el espín total se mantiene igual a 1, se hará uso de estados con espín distinto, por lo que esta notación será útil.

6.6. Apéndice B

El valor esperado del producto de los resultados de la medición del espín de cada partícula en la dirección correspondiente \mathbf{n}_i , se puede calcular para el estado (6.1) como

$$\begin{aligned}
 E^\Psi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) &= \langle \Psi | (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) (\mathbf{n}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | \Psi \rangle \quad (6.30) \\
 &= \frac{1}{2} [\langle ++-- | (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) (\mathbf{n}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | ++-- \rangle \\
 &\quad - \langle +-+- | (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) (\mathbf{n}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | +-+- \rangle \\
 &\quad - \langle --++ | (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) (\mathbf{n}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | --++ \rangle \\
 &\quad + \langle - - + + | (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) (\mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) (\mathbf{n}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | - - + + \rangle].
 \end{aligned}$$

Pero para cada una de las partículas se cumplen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 \langle + | (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) | + \rangle &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{-i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \theta, \\
 \langle + | (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) | - \rangle &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{-i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sin \theta e^{-i\phi},
 \end{aligned}$$

usando la misma matriz y los vectores de estado correspondientes se tiene además

$$\begin{aligned}
 \langle - | (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) | + \rangle &= \sin \theta e^{-i\phi} \\
 \langle - | (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) | - \rangle &= -\cos \theta.
 \end{aligned}$$

Usando esto en (6.30) el primer y último término resultan iguales a

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4,$$

mientras que al sumar los términos de enmedio y descomponer los exponentes en senos y cosenos, resulta $\sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)$. Así que, agrupando términos,

$$\begin{aligned}
 E^\Psi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \\
 &\quad - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos(\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_4)
 \end{aligned}$$

6.7. Apéndice C

Para describir la evolución del estado Ψ dado por (6.19) se pueden seguir las reglas de evolución (6.20) y (6.21) para la partícula 1 y las análogas para las partículas 2 y 3. El resultado es

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \longrightarrow & \frac{1}{4} \left[(1 - ie^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d\rangle_1 |e\rangle_2 |f\rangle_3 + (i - e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d\rangle_1 |e\rangle_2 |f'\rangle_3 \right. \\ & + (i - e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d\rangle_1 |e'\rangle_2 |f\rangle_3 + (-1 + ie^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d\rangle_1 |e'\rangle_2 |f'\rangle_3 \\ & + (i - e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d'\rangle_1 |e\rangle_2 |f\rangle_3 + (-1 + ie^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d'\rangle_1 |e\rangle_2 |f'\rangle_3 \\ & \left. + (-1 + ie^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d'\rangle_1 |e'\rangle_2 |f\rangle_3 + (-i + e^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) |d'\rangle_1 |e'\rangle_2 |f'\rangle_3 \right], \end{aligned} \quad (6.31)$$

de aquí es claro, por ejemplo, que la probabilidad de que haya una detección simultánea (suponiendo eficiencia igual a uno) en los detectores d, e y f es

$$\begin{aligned} P_{def}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \frac{1}{16} \left| (1 - ie^{i(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)}) \right|^2 \\ &= \frac{1}{8} [1 + \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)], \end{aligned} \quad (6.32)$$

y de forma análoga

$$P_{d'e'f}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{8} [1 - \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3)]. \quad (6.33)$$

Debido a que el número relevante para las probabilidades es el cuadrado del valor absoluto, todos los coeficientes en (6.31) se reducen a expresiones idénticas a (6.32) y (6.33). Cuando el número de detectores primados involucrados en la expresión es par, la probabilidad está dada por (6.32), y cuando el número sea impar, la probabilidad será la dada por (6.33).

Si se asocia el signo $+$ a cada conteo en un detector no primado y $-$ a cada conteo en un detector primado, el valor esperado del producto de los resultados es

$$\begin{aligned} E^\Psi(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) &= P_{def}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + P_{d'e'f'}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) + P_{d'e'f}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ &+ P_{d'e'f'}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{d'ef'}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{d'ef}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \\ &- P_{d'ef}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - P_{d'e'f'}^\Psi(\phi_1, \phi_2, \phi_3). \end{aligned}$$

Substituyendo las expresiones para las probabilidades involucradas, se cancelan los términos constantes y se obtiene

$$E^\Psi(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3).$$

REFERENCIAS

- [1] Daniel M. Greenberger *et al.* Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).
- [2] D. M. Greenberger y H. S. Choi. Presentación en la XIX "Workshop on quantum optics" Snowbird, Utah, Enero de 1989.
- [3] N. D. Mermin, Am. J. Phys. **58**, 731, (1990).
- [4] "Albert Einstein: Philosopher-scientist", Library of Living Philosophers, Evanston, Illinois (1949).

7. Teoremas de no separabilidad sin desigualdades II (Hardy)

7.1. Diferencias con argumentos anteriores

Existen varias razones para tratar por separado el trabajo de Lucien Hardy [1][2]. Una de ellas es histórica, pues este trabajo fue posterior a los que han sido expuestos. Otra razón es que tiene una diferencia esencial: hace uso de dos partículas únicamente. Por otro lado, expone de forma muy sintética las contradicciones entre las predicciones cuánticas y los MRL's. El objetivo de mostrar de nueva cuenta esta contradicción es proporcionar más perspectivas para comprender su causa y quizá, formar criterios al respecto. A pesar de todas estas diferencias, la deducción tiene algunas partes en común con las del capítulo 6, por ejemplo, en la forma de introducir los conceptos de realidad y separabilidad.

7.2. El experimento hipotético.

El presente experimento hipotético hace uso de dos interferómetros, dispuestos como muestra la figura 7.1. Uno de ellos —marcado con el signo negativo— es para electrones y otro —marcado con el signo positivo— es para positrones. Los divisores de rayos DR2[±] pueden ser removidos. Los detectores están marcados C[±], D[±]. El arreglo garantiza, dada la interferencia totalmente destructiva, que cuando se opera cada interferómetro no hay detección en D[±].

El funcionamiento es como sigue: en la entrada de los interferómetros se producen de manera simultánea un electrón y un positrón. Partiendo de que cada partícula incida sobre el interferómetro que le corresponde, el proceso que se lleva a cabo en el DR1[±] es

$$|S^\pm\rangle \longrightarrow \sqrt{1/2} (i|u^\pm\rangle - |v^\pm\rangle); \quad (7.1)$$

la operación en DR2[±] es

$$|u^\pm\rangle \longrightarrow \sqrt{1/2} (|c^\pm\rangle + i|d^\pm\rangle), \quad (7.2)$$

$$|v^\pm\rangle \longrightarrow \sqrt{1/2} (i|c^\pm\rangle + |d^\pm\rangle). \quad (7.3)$$

Desde luego los cambios de fase (i) son consecuencia de las reflexiones. Los procesos (7.2) y (7.3) tienen lugar cuando los DR2[±] están en su lugar. Pero como se mencionó son removibles, en cuyo caso se obtiene

$$|u^\pm\rangle \longrightarrow |c^\pm\rangle, \quad (7.4)$$

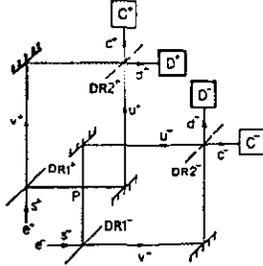


Figure 7.1: Interferómetros dispuestos para el experimento hipotético.

$$|v^\pm\rangle \longrightarrow |d^\pm\rangle, \quad (7.5)$$

si $DR2^\pm$ está ausente.

Partiendo del estado inicial $|S^+\rangle|S^-\rangle$, el estado evoluciona al pasar por $DR1^\pm$

a

$$\frac{1}{2} (i|u^+\rangle - |v^+\rangle) (i|u^-\rangle - |v^-\rangle). \quad (7.6)$$

Pero una parte de este estado implica que las partículas coincidieran en el punto P, dónde se dará una aniquilación produciendo radiación γ . Después de pasar este punto el estado se transforma en

$$\frac{1}{2} (-|\gamma\rangle + i|u^+\rangle|v^-\rangle + i|v^+\rangle|u^-\rangle + |v^+\rangle|v^-\rangle). \quad (7.7)$$

A partir de aquí se continúa el tratamiento por casos.

a) Si dos $DR2^\pm$ están ausentes, el estado evoluciona a

$$\frac{1}{2} (-|\gamma\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle + |d^+\rangle|d^-\rangle). \quad (7.8)$$

b) Colocando $DR2^+$ y dejando ausente $DR2^-$, (7.7) evoluciona a

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |c^+\rangle|c^-\rangle + 2i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle). \quad (7.9)$$

c) Con $DR2^-$ en su lugar y $DR2^+$ removido, (7.7) se transforma en

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (-\sqrt{2}|\gamma\rangle - |c^+\rangle|c^-\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + 2i|d^+\rangle|c^-\rangle). \quad (7.10)$$

d) Con ambos divisores en su lugar (7.7) conduce a

$$\frac{1}{4} \left(-2|\gamma\rangle - 3|c^+\rangle|c^-\rangle + i|c^+\rangle|d^-\rangle + i|d^+\rangle|c^-\rangle - |d^+\rangle|d^-\rangle \right) \quad (7.11)$$

Este es el punto adecuado para introducir la noción de realismo. Esto se hace suponiendo que el estado final antes de las mediciones está determinado por algún parámetro λ , que puede representar una o varias "variables ocultas". Además se incluye la hipótesis de separabilidad, al no permitir que el resultado de una medición sobre una partícula se vea afectado por las mediciones realizadas en la otra. En este experimento, para cada partícula se pueden realizar mediciones con los $DR2^\pm$ en su lugar o bien ausentes, lo cual se indicará como 0 ó ∞ , respectivamente. Como ejemplo de la notación anterior, e incluido el resultado de las mediciones, se tiene que: si el positrón o electrón es detectado en D^\pm con $DR2^\pm$ en su posición, se escribe $D^\pm(0, \lambda) = 1$, (e igualado a 0, si no hay detección). Esta notación es intrínsecamente separable, puesto que $D^+(0, \lambda)$ no depende de si $DR2^-$ esté o no en su posición.

Ahora se procederá a la deducción de las contradicciones. Para todo experimento

$$C^+(\infty, \lambda)C^-(\infty, \lambda) = 0. \quad (7.12)$$

Puesto que no hay término $|c^+\rangle|c^-\rangle$ en (7.8), usando (7.9),

$$D^+(0, \lambda) = 1 \Rightarrow C^-(\infty, \lambda) = 1, \quad (7.13)$$

ya que el estado se proyecta sobre el cuarto término. Análogamente de (7.10),

$$D^-(0, \lambda) = 1 \Rightarrow C^+(\infty, \lambda) = 1, \quad (7.14)$$

puesto que el estado se proyecta sobre el tercer término. Inspeccionando (7.11) es claro que $D^+(0, \lambda)D^-(0, \lambda) = 1$ es posible y pasa para $\frac{1}{16}$ de los experimentos, mismos para los cuales (usando (7.13) y (7.14)) $C^+(\infty, \lambda)C^-(\infty, \lambda) = 1$, lo cual contradice a (7.12). Así que una vez más se ha puesto en evidencia la contradicción entre las predicciones cuánticas y las suposiciones del realismo y la separabilidad. Al igual que en el capítulo anterior, fue fundamental la suposición de que el resultado que tendría una medición es independiente de si ésta se realiza o no. Por ejemplo, lo que (7.11) garantiza es que si ambos divisores $DR2^\pm$ están en su lugar, $\frac{1}{16}$ de los experimentos serán tales que $D^+(0, \lambda)D^-(0, \lambda) = 1$.

Los resultados alcanzados son consecuencia del "comportamiento ondulatorio" de las partículas. Por eso es de vital importancia que los interferómetros estén

dispuestos de tal forma que, cada uno funcionando por separado, imposibilite la detección en D^\pm (debido a interferencia destructiva). El punto esencial es considerar que (7.7) es una descripción exhaustiva del estado. Hay que notar que para todo el desarrollo se considera que los cuatro términos en (7.7) ocurren "en potencia" (como es típico entender para la interpretación ortodoxa). Si se asumiera que en realidad, después de haber pasado por el punto P, sólo uno de los términos en (7.7) es el que en realidad ocurre, los resultados serían del todo diferentes. Por ejemplo, la ecuación (7.13) no resulta cierta, ya que si, por ejemplo, sólo ocurre el último término de (7.7) y en $DR2^+$ se suscita una transmisión, las detecciones ocurrirían en D^+ y en D^- , contrario a lo predicho por (7.13).

De forma análoga puede verificarse que con este enfoque (7.14), no es necesariamente cierta. Así que en todo el trabajo de Hardy la noción de realidad se introduce hasta la medición final, pero no antes; lo cual tiene como consecuencia las contradicciones alcanzadas.

Como ya se hizo notar, si se consideraran como elementos de realidad los cuatro términos en (7.7) (y consecuentemente son mutuamente excluyentes) no existe contradicción alguna para los resultados finales, que difieren de los alcanzados por Hardy.

Sin embargo, los interferómetros de partículas funcionan, lo que da sustento a la interpretación ortodoxa. Esto no descarta el camino alternativo de encontrar una explicación para el funcionamiento de los interferómetros que no implique el suponer que las partículas *no* poseen una trayectoria a menos que sean observadas (como lo propone Heisenberg en 1927).

Para la deducción de (7.7) también se considera que lo que pase en $DR1^-$ es independiente de lo que pase en $DR1^+$. Tratándose de partículas que son emitidas por una fuente, ésto no tiene por que ser el caso. Supóngase que si e^- es reflejado, entonces e^+ es transmitido y viceversa. Entonces (7.7) cambiaría a

$$\sqrt{1/2} (i |u^+\rangle |v^-\rangle + i |v^+\rangle |u^-\rangle), \quad (7.15)$$

con lo que en los casos análogos la deducción seguiría de la forma

$$\sqrt{1/2} (i |c^+\rangle |d^-\rangle + i |d^+\rangle |c^-\rangle), \quad (7.16)$$

$$\frac{1}{2} (i |c^+\rangle |d^-\rangle - |d^+\rangle |d^-\rangle + i |d^+\rangle |c^-\rangle - |c^+\rangle |c^-\rangle), \quad (7.17)$$

$$\frac{1}{2} (i |c^+\rangle |d^-\rangle - |c^+\rangle |c^-\rangle + i |d^+\rangle |c^-\rangle - |d^+\rangle |d^-\rangle). \quad (7.18)$$

La forma correspondiente de (7.11) depende de si se consideran correlacionados o independientes los eventos de DR2[±]. Pero aún así es claro que a partir de (7.17) y (7.18) no se puede concluir nada similar a (7.13) ó (7.14), puesto que cada ket se presenta en dos términos. Así que si se permite la correlación, las contradicciones no se encuentran.

El argumento de Hardy, como él mismo lo hace ver, es del tipo de contradicción $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$ pero A no implica D . Las objeciones mencionadas cuestionan las implicaciones intermedias.

7.3. Prueba de escalera

Aún con las críticas anteriores, es de interés exponer una demostración más general haciendo uso de este tipo de implicaciones. La prueba siguiente se debe también a Hardy [2], y él la llamó "Prueba de escalera de no-localidad, sin desigualdades". La ventaja de esta prueba es que aumenta el número de casos para el que se dan las contradicciones.

Se considera un estado enredado de polarización para dos fotones A y B

$$|\Psi\rangle = \alpha |+\rangle_A |+\rangle_B + \beta |-\rangle_A |-\rangle_B; \quad (7.19)$$

se determinan $K+1$ direcciones sobre las cuales se pueden realizar mediciones de polarización. Si la medición se realiza sobre A o B, en la dirección K (A_k o B_k), los estados cuánticos son $|A_k\rangle$ o $|B_k\rangle$, con estados perpendiculares $|A_k^\perp\rangle$ o $|B_k^\perp\rangle$. Estos estados proveen una nueva base para describir los subsistemas A y B,

$$|+\rangle_A = C_k |A_k\rangle + C_k^\perp |A_k^\perp\rangle, \quad (7.20)$$

$$|-\rangle_A = (C_k^\perp)^* |A_k\rangle + (C_k)^* |A_k^\perp\rangle, \quad (7.21)$$

$$|+\rangle_B = C_k |B_k\rangle + C_k^\perp |B_k^\perp\rangle, \quad (7.22)$$

$$|-\rangle_B = (C_k^\perp)^* |B_k\rangle + (C_k)^* |B_k^\perp\rangle. \quad (7.23)$$

Hay que notar aquí que el hecho de que los coeficientes sean los mismos indica que la orientación respectiva entre sí de las direcciones A será igual a las orientaciones respectivas entre sí de las direcciones B.

Para encontrar contradicciones entre la mecánica cuántica y los MRL's, las A_k o B_k tienen que ser escogidas de tal modo que se satisfagan las demandas

$$P_K \equiv \text{prob}(A_K = 1, B_K = 1) \neq 0, \quad (7.24)$$

$$\text{prob}(A_k = 1, B_{k-1} = 0) = 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (7.25)$$

$$\text{prob}(A_{k-1} = 0, B_k = 1) = 0, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (7.26)$$

$$\text{prob}(A_0 = 1, B_0 = 1) = 0. \quad (7.27)$$

Siguiendo las líneas del artículo original, primero se demostrará que las demandas de (7.24) a (7.27) llevan a contradicciones con los MRL's, y después, para validar esta discusión se comprobará que tales estados son factibles para la mecánica cuántica.

Supóngase que se realizan mediciones sobre las direcciones A_K y B_K encontrando $A_K = 1$ y $B_K = 1$, esto es posible dado (7.24). Introduciendo el concepto de realismo, se puede afirmar que si B_{K-1} hubiera sido medido, el resultado hubiera sido $B_{K-1} = 1$, c.f. (7.25), y de forma análoga, dado (7.26), $A_{K-1} = 1$ hubiera sido el resultado de una medición en la dirección A_{K-1} . Así que se puede concluir $A_{K-1} = 1$ y $B_{K-1} = 1$, lo cual representa "descender un escalón en la escalera". Si el proceso se repite K veces se obtendrá $A_0 = 1$ y $B_0 = 1$, en contradicción con (7.27). Por lo tanto, el concepto de realidad no es compatible con (7.24) a (7.27).

Para demostrar que tales A_k y B_k existen, bastará con ver que existen coeficientes c_k y c_k^\perp que hacen que los requerimientos (7.24) a (7.27) se cumplan por simplicidad se tomarán α , β , C_k , C_k^\perp en los reales, y α , $\beta > 0$. Para que (7.27) se satisfaga se requiere que

$$\langle A_0 | \langle B_0 | | \Psi \rangle = 0. \quad (7.28)$$

Haciendo uso de (7.19) a (7.23) esto se cumple si $\alpha C_0^2 - \beta (C_0^\perp)^2 = 0$, lo cual se satisface idénticamente con

$$C_0 = N\beta^{1/2}, \quad C_0^\perp = N\alpha^{1/2}, \quad (7.29)$$

donde N es cualquier constante real. Para satisfacer (7.25) y (7.26), es necesario que

$$\langle A_k | \langle B_{k-1}^\perp | | \Psi \rangle = 0, \quad (7.30)$$

$$\langle A_{k-1}^\perp | \langle B_k | | \Psi \rangle = 0, \quad (7.31)$$

que junto con (7.19) a (7.23) implican $\alpha C_k C_{k-1}^\perp + \beta C_k^\perp C_{k-1} = 0$, lo cual se cumplirá si

$$C_k = -N'\beta C_{k-1}, \quad C_k^\perp = N'\alpha C_{k-1}^\perp, \quad (7.32)$$

con N' una constante real. Si se parte de $k = 0$ para expresar las demás C_k y C_k^\perp , se encuentra, haciendo uso de (7.29),

$$C_k = N'' (-1)^k \beta^{k+\frac{1}{2}}, \quad C_k^\perp = N'' \alpha^{k+\frac{1}{2}}, \quad (7.33)$$

con N'' una constante real, que puede ser distinta para cada k . La probabilidad P_K está dada por

$$P_K = |(\langle A_K | \langle B_K | | \Psi \rangle)|^2. \quad (7.34)$$

usando (7.19) a (7.23)

$$P_K = \left| \alpha C_K^2 - \beta (C_K^\perp)^2 \right|^2. \quad (7.35)$$

Con el resultado (7.33) en la última ecuación, y arreglando N'' para normalizar, se obtiene

$$P_K = \left(\frac{\alpha \beta^{2K+1} - \beta \alpha^{2K+1}}{\alpha \beta^{2K+1} + \beta \alpha^{2K+1}} \right)^2. \quad (7.36)$$

Esta expresión hace claro que para estados máximamente enredados ($\alpha = \beta$ en (7.19)) $P_K = 0$ para toda K , por lo que la presente deducción no es válida para pares máximamente enredados. Al analizar (7.36) se encuentra que:

K	P_K	α/β
1	$P_1 = 9\%$	0.46
2	$P_2 = 17.5\%$	0.57
3	$P_3 = 23.5\%$	0.64

donde α/β es el valor requerido para que se de el máximo P_K . Conforme se incrementa K , P_K tiende al 50%, y el cociente α/β se aproxima a la unidad.

Confome $K \rightarrow \infty$, P_K en (7.36) se acerca al más pequeño de α o β , por lo que $P_K = \frac{1}{2} - \delta$, o lo que es igual, $50\% - \delta$ (ya que aunque α y β se aproxima mucho a $\sqrt{1/2}$, éstas no pueden asumir idénticamente este valor, de lo contrario $P_K = 0$). Se comprueba así que se pueden escoger direcciones de medición tales que (7.24) a (7.27) se satisfagan según las predicciones de la mecánica cuántica.

De la misma forma que en la sección 7.2 el enfoque realista es parcial. Aunque en efecto se considera que los posibles resultados de las mediciones son independientes de la medición que se realiza en la práctica, la falta de realismo se introduce en (7.19), pues en el estado cuántico propuesto para esta ecuación ocurren en potencia $|+\rangle|+\rangle$ y $|-\rangle|-\rangle$. Una discusión análoga a la de la sección 7.2 se puede desarrollar a partir de este punto.

7.4. Realizaciones experimentales

Contrario a las dudas o críticas al respecto del argumento teórico expuesto en la sección 7.3, en el mismo artículo en el cual Hardy expone éste, también afirma haber corroborado experimentalmente los resultados anteriores.

Para el análisis de los datos, es necesario hacer uso de desigualdades. La que él usa es debida a Clauser y Horne [3], y es reescrita como

$$\begin{aligned} \text{prob}(A_k = 1, B_k = 1) - \text{prob}(A_{k-1} = 1, B_{k-1} = 1) \leq & \quad (7.37) \\ \text{prob}(A_k = 1, B_{k-1} = 0) + \text{prob}(A_{k-1} = 0, B_k = 1). \end{aligned}$$

Si se realiza una suma de estas desigualdades para $k = 1$ hasta K , en el lado izquierdo se cancelan todos los términos, menos el primero y el último, resultando

$$\begin{aligned} \text{prob}(A_K = 1, B_K = 1) - \text{prob}(A_0 = 1, B_0 = 1) \leq & \quad (7.38) \\ \sum_{k=1}^K [\text{prob}(A_k = 1, B_{k-1} = 0) + \text{prob}(A_{k-1} = 0, B_k = 1)] \end{aligned}$$

Para las direcciones escogidas en (7.3), todos los términos de (7.38) son 0, excepto el de extremo izquierdo, por lo que (7.38) se debería violar por una cantidad igual a P_K (dado por (7.36)). Será justamente esto lo que se intentará demostrar con el experimento.

Lo primero que se hace, —y lo más laborioso del experimento— es generar un estado como el descrito en (7.19). Para esto se usa conversión paramétrica a la baja, obteniéndose como resultado dos fotones correlacionados de la misma longitud de onda (702.2 nm). Estos fotones poseen polarizaciones correlacionadas, ambas horizontales, y el estado queda descrito por $|o\rangle_1 |o\rangle_2$. Después de ser producidos, los fotones se hacen incidir sobre un rotador de polarización, los que introducen ángulos de rotación ϕ_1 y ϕ_2 , y el estado queda

$$[\cos \phi_1 |o\rangle_1 + \sin \phi_1 |e\rangle_1] [\cos \phi_2 |o\rangle_2 + \sin \phi_2 |e\rangle_2], \quad (7.39)$$

donde $|o\rangle_i$ y $|e\rangle_i$ se refieren a polarización ordinaria (horizontal) y extraordinaria (vertical) respectivamente.

Después de esto en el camino 1 se introduce un arreglo de espejos como se ve en la figura 7.2. Este arreglo logra que el “largo” del camino 1 pueda variar en en su largo por una diferencia Δz , la cual es necesaria para el ajuste de fases relativas entre los fotones, ya que los fenómenos observados involucran la existencia de interferencia. El siguiente paso es separar las polarizaciones $|o\rangle$ y $|e\rangle$ de cada

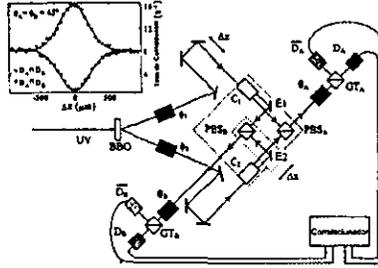


Figure 7.2: Dispositivo experimental para la verificación de la prueba de escalera.

camino, para lo cual se usa un cristal de calcita de 4 cm de largo. Una vez separados hay que mezclar las diferentes polarizaciones para obtener el estado deseado. El camino que seguirá $|e\rangle_1$ incide en un puerto de entrada de un divisor de rayos A, usado aquí como mezclador de rayos, mientras que en el otro puerto de entrada incide $|o\rangle_2$.

A está orientado de tal forma que transmite la polarización horizontal y refleja la vertical, así que $|o\rangle_2$ continúa en su trayecto, pero $|e\rangle_1$ se refleja y termina en la misma dirección de $|o\rangle_2$. Con esto se ha conseguido superponer los estados $|o\rangle_2$ y $|e\rangle_1$ en un mismo camino óptico. Lo mismo se hace para $|o\rangle_1$ y $|e\rangle_2$ con un divisor de rayos B. Tras haber pasado este punto, todos los fotones se encuentran sobre los caminos A y B. Para describir el estado en que se encuentra el sistema antes de los divisores A y B, se denotan con $X_{1,2}^{o,e}$ los largos de cada uno de los caminos ópticos medidos desde dónde se produce la conversión paramétrica a la baja (por ejemplo, X_1^o es el largo del camino óptico de $|o\rangle_1$); se obtiene que el estado está descrito por

$$\left[\cos \phi_1 e^{iX_1^o} |o\rangle_1 + \sin \phi_1 e^{iX_1^e} |e\rangle_1 \right] \left[\cos \phi_2 e^{iX_2^o} |o\rangle_2 + \sin \phi_2 e^{iX_2^e} |e\rangle_2 \right]. \quad (7.40)$$

Al pasar los divisores A y B el estado se transforma en

$$\left[\cos \phi_1 e^{iX_1^o} |o\rangle_B + \sin \phi_1 e^{iX_1^e} |e\rangle_A \right] \left[\cos \phi_2 e^{iX_2^o} |o\rangle_A + \sin \phi_2 e^{iX_2^e} |e\rangle_B \right]. \quad (7.41)$$

En este punto se hace una postselección, la cual sólo hace que permanezcan los casos en que un fotón termina en cada brazo (A ó B), lo que deja un estado

$$\cos \phi_1 \cos \phi_2 e^{i(X_1^o + X_2^o)} |o\rangle_B |o\rangle_A - \sin \phi_1 \sin \phi_2 e^{i(X_1^e + X_2^e)} |e\rangle_A |e\rangle_B. \quad (7.42)$$

Si se logra que $e^{i(x_1^0+x_2^0)} = e^{i(x_1^f+x_2^f)}$, (7.42) será de la misma forma que (7.19). Para que esta condición se satisfaga se coloca el divisor de rayo B y el espejo E_2 (ver figura 7.2) sobre una plataforma que se puede mover paralela al camino B, con un desplazamiento Δx . Tanto Δx como Δz se arreglan por medio de dispositivos computarizados. La visibilidad de interferencia al variar Δz fue de 92% (recuadro de figura 7.2).

Una vez fijo Δx , lo que se ha conseguido es el estado deseado (7.19). Desde luego para arreglar el cociente α/β (diferente para cada K) se usan diferentes valores de ϕ_1 y ϕ_2 . Una vez que este estado se consiguió (para cierta K), lo que resta es hacer las mediciones. Sobre A y B se realizan mediciones de polarización lineal por medio de rotadores de polarización, con ángulo de rotación variable ($\theta_{A,B}$) y un divisor de polarización Glan-Taylor fijo para transmitir la polarización horizontal y reflejar la vertical. Para cada salida hay un detector (un total de 4, dos para A y dos para B). Este proceso se considera equivalente a medir en las direcciones $\theta_{A,B}$.

Para establecer la conexión entre $\theta_{A,B}$ y α/β se escribe

$$|A(\theta)\rangle = \cos\theta_A |+\rangle_A + \sin\theta_A |-\rangle_A,$$

donde $|+\rangle_A$ corresponde a $|o\rangle$ y $|-\rangle_A$ a $|e\rangle$. Invirtiendo las ecuaciones (7.20) a (7.23) se obtiene que para A_K el θ_A (y lo mismo para θ_B) es

$$\tan(\theta_A^K) = \tan(\theta_B^K) = (-1)^K (\alpha/\beta)^{K+\frac{1}{2}}. \quad (7.43)$$

Por medio de esto se está en posibilidad de medir las ecuaciones las cantidades involucradas en (7.24) a (7.27), usando los canales de transmisión apropiados en cada caso. Para obtener probabilidades todas las mediciones se dividen entre N_c , la cual se obtiene como cuatro veces el conteo que se realiza cuando $\phi_1 = \phi_2 = \theta_A = \theta_B = 45^\circ$ y Δz es tal que no hay interferencia. Para esto se consideró que la cuarta parte de todos los fotones emitidos llegan en coincidencia para estos valores de los parámetros experimentales.

Las mediciones se realizaron para $K=1,2,3$ y los resultados están tabulados en el apéndice A. Es notorio que P_K es muy diferente de cero en cada caso, y las probabilidades restantes son muy cercanas a 0.

7.5. Críticas a la realización experimental.

El experimento fue realizado con gran cuidado; sin embargo hay por lo menos tres puntos de discusión.

El primero se refiere a la forma de preparar el estado (7.42). Para que el sistema evolucione en efecto a un estado descrito por (7.42) es necesario suponer que el resultado de atravesar los cristales de calcita no depende de propiedades de los fotones (parámetros o variables ocultas). Se supone que los dos posibles resultados de salida de la calcita se realizan en potencia. Esto es muy similar a lo que se hizo notar en la sección 7.3, ya que se justifica esta suposición dada la existencia de interferencia. Si esta suposición no fuera cierta el estado no estaría descrito por (7.40) tras haber pasado por los cristales de calcita; pudiera pasar que en lugar de (7.40) completa, hubiera sólo uno de los términos de cada factor, por lo cual el resto de la construcción del estado falla. *Esto tiene implicaciones directas sobre las conclusiones, puesto que si el estado no está en realidad descrito por (7.42) las probabilidades (conteos en este caso) encontradas no tienen porque ser contradictorias.*

Por otro lado la forma en que es considerado N_c supone que la muestra es representativa, así como que las posiciones de los instrumentos no pueden aumentar la probabilidad de detección. Como ya se discutió en la sección 5.3, este no tiene por que ser el caso. La debilidad radica en que el cociente entre el total de los fotones emitidos N_T y los que se detectan como N_c , no tiene por que ser igual al cociente entre los fotones que salen en coincidencia de los canales de transmisión justo antes de los detectores N_{CT} y el número de ellos que se detecta N_D . Al calcular las probabilidades por medio de dividir entre N_c la igualdad de estos cocientes está siendo supuesta; es decir, la probabilidad se calcula como

$$P = \frac{N_D}{N_c}, \quad (7.44)$$

cuando en realidad es

$$P = \frac{N_{CT}}{N_T}. \quad (7.45)$$

Para que estas dos expresiones sean equivalentes es necesario que

$$N_c = \alpha_1 N_T ; N_D = \alpha_2 N_{CT} ; \alpha_1 = \alpha_2; \quad (7.46)$$

así

$$P = \frac{N_D}{N_c} = \frac{\alpha_2 N_{CT}}{\alpha_1 N_T} = \frac{N_{CT}}{N_T}. \quad (7.47)$$

Pero (7.46) no tiene por que ser cierta, ya que α_i podría depender del arreglo experimental, y por lo tanto en general $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Esto puede causar grandes variaciones en las P medidas.

La tercera de las críticas se refiere a la deficiencia de los detectores en general. Como se dijo en la sección anterior las probabilidades se miden usando los canales de transmisión. Aquí hay un problema, pues después del último divisor de polarizaciones hay tres opciones para cada canal;

- i) Emergió un fotón en esa dirección y el detector lo contó.
- ii) No emergió un fotón y por lo tanto no hubo detección.
- iii) Sí emergió un fotón por ese canal, pero el detector no lo contó.

En el análisis del experimento ii y iii se consideran equivalentes; el gran problema es que para la deducción de (7.37) sólo se consideran dos casos; uno corresponde a i, el otro es ii, pero se supone que iii nunca ocurre. Esto puede desembocar en que para algunos casos la desigualdad (7.37), sea violada.

Una vez más cabe resaltar que todas las críticas aquí mencionadas sólo hacen un intento por reducir el carácter determinante de los experimentos. En ningún punto aportan una opción mejor, y esa puerta aún está abierta.

7.6. Apéndice A

Resultados de las mediciones en los experimentos de Hardy para P_K con $K=1,2,3$.

$(\theta_A, \theta_B) (^\circ)$	$P(\theta_A, \theta_B)$
$(\theta_1 = -18, \theta_1 = -18)$	0.089 ± 0.008
$(\theta_1 = -18, \theta_0^\perp = +34^\perp)$	0.008 ± 0.002
$(\theta_0^\perp = +34^\perp, \theta_1 = -18)$	0.009 ± 0.002
$(\theta_0 = +34, \theta_0 = +34)$	0.013 ± 0.003

$(\theta_A, \theta_B) (^\circ)$	$P(\theta_A, \theta_B)$
$(\theta_2 = +14, \theta_2 = +14)$	0.17 ± 0.01
$(\theta_2 = +14, \theta_1^\perp = -23^\perp)$	0.007 ± 0.002
$(\theta_1^\perp = -23^\perp, \theta_2 = +14)$	0.013 ± 0.003
$(\theta_1 = -23, \theta_0^\perp = +37^\perp)$	0.020 ± 0.004
$(\theta_0^\perp = +37^\perp, \theta_1 = -23)$	0.014 ± 0.003
$(\theta_0 = +37, \theta_0 = +37)$	0.029 ± 0.006

$K = 3$

$(\theta_A, \theta_B) (^{\circ})$	$P(\theta_A, \theta_B)$
$(\theta_3 = -12, \theta_3 = -12)$	0.23 ± 0.04
$(\theta_3 = -12, \theta_2^{\perp} = +18^{\perp})$	0.010 ± 0.002
$(\theta_2^{\perp} = +18^{\perp}, \theta_3 = -12)$	0.019 ± 0.006
$(\theta_1^{\perp} = -27^{\perp}, \theta_2 = +18)$	0.029 ± 0.007
$(\theta_2 = +18, \theta_1^{\perp} = -27^{\perp})$	0.024 ± 0.006
$(\theta_1 = -27, \theta_0^{\perp} = +38.5^{\perp})$	0.025 ± 0.007
$(\theta_0^{\perp} = +38.5^{\perp}, \theta_1 = -27)$	0.041 ± 0.009
$(\theta_0 = +38.5, \theta_0 = +38.5)$	0.033 ± 0.008

Resultados generales

K	N_c	S
1	5595 ± 130	0.059 ± 0.008
2	13620 ± 240	0.09 ± 0.01
3	3540 ± 178	0.05 ± 0.03

REFERENCIAS

- [1] Lucien Hardy, Phys. Rev. Lett. **68**, 2981 (1992).
- [2] D. Boschi, S. Branca, F. De Martini, y Lucien Hardy, Phys. Rev. Lett. **79**, 2755 (1997).
- [3] N. D. Mermin, Am. J. Phys. **62**, 880 (1995)

8. Conclusiones. La situación al momento actual

8.1. La no separabilidad desde el punto de vista teórico

8.1.1. Fundamentación

Para este momento debe de ser muy claro que las predicciones teóricas de la mecánica cuántica son contradictorias con la suposición de localidad. Esto, como ya se mencionó con anterioridad, no es de sorprender, puesto que la teoría ha sido elaborada sin considerar los diferentes sistemas de referencia, o al menos considerando que $t = t'$ para todos ellos. Sin embargo, no es igualmente claro que las predicciones sean contradictorias con el concepto de separabilidad. Lo anterior está dicho suponiendo que el desarrollo teórico no excluye interacciones —que evidentemente necesitarían propagarse con velocidades mayores a la de la luz— que provoquen el comportamiento no local. El problema fundamental de esto es que indicaría que la teoría de la relatividad es, por lo menos, incompleta, y sería necesario que su aplicación fuera restringida. Habría que pensar cómo es que una teoría que ha probado ser exitosa en el mundo macroscópico, falla en el mundo microscópico.

A nivel teórico es igualmente válido plantear la posibilidad de que la mecánica cuántica sea la que tiene una aplicación restringida. Es legítimo pensar que existan interacciones que no están contempladas por la mecánica cuántica. En realidad la interpretación usual no proporciona explicación alguna del porqué se presenta el comportamiento cuántico; muy por el contrario, se restringe a proponer de manera casi axiomática, que la ecuación de Schrödinger se debe cumplir y en función de ello deduce cualquier otra afirmación. Esta es una imagen en principio simple, pero conlleva problemas conceptuales fuertes, dado que limita la capacidad de entendimiento o de explicación, e impone lo que ha sido llamado con anterioridad la “infame frontera” entre el mundo de lo microscópico y lo macroscópico.

Hay que resaltar que la puerta no está cerrada para explicaciones basadas en principios más fundamentales de la física. Para muchos, esto no tiene sentido, puesto que se considera que tal búsqueda no mejorará las predicciones; pero como ya se mencionó en la introducción, el camino del desarrollo puede variar considerablemente en función de si se considera o no que hay razones físicas detrás del comportamiento cuántico. Una teoría que no asumiera como fundamental la ecuación de Schrödinger, podría explicar los estados estables del átomo como consecuencia de la interacción de éste con el mundo que lo rodea. Una teoría así podría también explicar algunos otros de los efectos cuánticos al considerar

al microsistema en interacción con su entorno, y no como una entidad aislada. Una interpretación, que sin perseguir este objetivo, hace referencia a la interacción del entorno, es la aproximación por decoherencia, en la que justamente se incorpora la idea de que el sistema no es el que está en un estado dado, sino que es el sistema en conjunto con su entorno, los que lo están. La explicación de esta aproximación está fuera del tema de estas conclusiones, pero una introducción a esta aproximación se puede encontrar en las referencias [1].

Si una explicación más profunda —en caso de que existiera— fuera en términos de interacciones inteligibles sistema-entorno, éstas explicarían cual es la causa de las predicciones para los estados enredados. Quizá las explicaciones estarían basadas en interacciones relativistas, y se vería el punto por donde debe de ser introducido el límite natural a las velocidades.

Esta última alternativa, por remota que parezca, no ha sido cancelada por ninguna de las predicciones teóricas, a menos que se considere en verdad que la descripción proporcionada por la mecánica cuántica sea totalmente completa.

Como se ha expuesto, desde el punto de vista teórico, lo único que se puede concluir es la contradicción entre la mecánica cuántica como una teoría completa y los conceptos de separabilidad y localidad. Al considerar a la mecánica cuántica como completa, se excluye automáticamente, por no ser parte de su formalismo, la existencia de interacciones que expliquen los fenómenos de enredo, por lo que no hay medio de interacción por el cual los estados se mantengan enredados; concluyendo que los sistemas son no-separables. Y por el otro lado, suponiendo que no hay correcciones que hacer a la teoría actual, se llega a que hay eventos que se afectan entre sí, con velocidades superiores a la de la luz.

8.1.2. Posibles aplicaciones

Casi sin importar las posturas personales respecto a las interpretaciones, la posibilidad de la existencia de un comportamiento no-local o no-separable, despierta la imaginación para pensar en las aplicaciones que éste tendría en caso de existir.

Quizá una de las primeras inquietudes sería que tan factible es usar la “comunicación” existente entre las diferentes entidades cuánticas para establecer comunicaciones macroscópicas. Tales comunicaciones tendrían aspectos muy interesantes; su eficiencia no disminuiría con la distancia, etc. Una de las propiedades que más podría llamar la atención, sería la posibilidad de construir sistemas de comunicación totalmente “privados”, puesto que, si se genera un estado enredado, y éste se usa para transmitir información, ésta será accesible sólo por aquellos que

posean las partículas o subsistemas involucrados en dicho estado.

Desafortunadamente esto no es posible, dado que los efectos no-locales sólo afectan de manera estadística al estado *completo*; las modificaciones en uno de los subsistemas solo pueden afectar al otro, de tal forma que los resultados estadísticos marginales —propios de ese subsistema— no se modifiquen. Con base en lo anterior se ha demostrado la imposibilidad de transmitir información de forma instantánea por medio de estados enredados [2] [3]. A pesar de esto, el interés por algunas de las características de este tipo de comunicación sigue vigente en varios aspectos.

Aún sin tener el carácter supralumínico que hubiera sido muy deseable, la comunicación por medio de estados enredados sigue siendo completamente privada, pero hay que echar mano de un análisis más completo para conseguirla. Primero hay que notar que toda manifestación de efectos no-locales implica la medición en todos los subsistemas involucrados en el estado enredado. Un desarrollo en estos términos es como se expone a continuación.

Supóngase que se tienen dos experimentadores Ana y Beto que desean comunicarse. Ana prepara un estado enredado compuesto por dos subsistemas (electrones, átomos, fotones, etc.) y manda uno de ellos a Beto. En su momento Beto opera sobre este subsistema con un operador unitario, escogido entre un grupo de cuatro —cuyos elementos conocen ambos experimentadores— y lo regresa a Ana, quien realiza una medición conjunta del estado completo, y determina cual de los cuatro operadores fue usado por Beto. Este sistema de comunicación es completamente seguro, puesto que sólo Ana, quien posee uno de los subsistemas, puede realizar la medición conjunta cuando Beto le regresa el otro subsistema.

Para analizar este procedimiento se puede empezar con un estado enredado de partículas con espín un medio descrito por $\sqrt{1/2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. A partir de este estado, por medio de la aplicación de un operador unitario sobre *solamente* la primera partícula, se pueden alcanzar estados de la forma

$$|\phi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\downarrow\downarrow\rangle + c|\uparrow\downarrow\rangle + d|\downarrow\uparrow\rangle,$$

donde para mantener la estadística marginal necesaria en cada uno de los subsistemas, se debe de cumplir que

$$|a|^2 + |d|^2 = |b|^2 + |c|^2 = \frac{1}{2},$$

y

$$a^*c + d^*b = 0.$$

Incluidos en este conjunto se encuentran en particular los cuatro estados mutuamente ortogonales

$$\begin{aligned} & \sqrt{1/2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \sqrt{1/2}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ & \sqrt{1/2}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle), \sqrt{1/2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (8.1)$$

Así que si Ana prepara un estado inicial $\sqrt{1/2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ y manda una de las partículas a Beto, éste puede actuar sobre ella por medio de un operador unitario que colocará al sistema conjunto en uno de los cuatro estados (8.1), y al ser regresada a Ana la partícula en la que operó Beto, este experimentador puede hacer una medición conjunta en la base (8.1) y determinar cual de los cuatro operadores usó Beto.

Por medio de este procedimiento se consigue una comunicación con cuatro alternativas, es decir, que con una sola señal se manda información que distingue entre cuatro opciones. Las computadoras usuales trabajan en código binario, de tal suerte que cada señal sólo distingue entre dos opciones —generalmente codificado en sí y no, o cero y uno—.

Es oportuno observar que el sistema descrito no requiere que la mecánica cuántica sea no-local o no-separable. Suponiendo que finalmente se encontrara la tan mencionada forma de interacción entre los subsistemas enredados, y ésta no se propagará con velocidad mayor que la de la luz, el razonamiento anterior no perdería su vigencia.

Otra posible aplicación de los comportamientos no locales es la teleportación. Esta opción ha sido explorada con éxito dentro de un contexto teórico. Lo que se teletransporta es un estado cuántico desconocido. En realidad el uso de la palabra teletransportación es un tanto espectacular, pues por lo general se entiende que un objeto o partícula es teletransportado si desaparece de un lugar para aparecer, en ese mismo instante, en otra parte. Esto no ocurre aquí, puesto que es necesaria la transmisión de información —de manera enteramente clásica— de un punto a otro para reproducir el estado que se está teletransportando. Lo que sí acontece es que un estado se destruye en un lugar para reconstruirse en otro, algún tiempo después.

Supóngase que Ana posee un sistema en un estado cuántico dado, conocido o no, y desea informar a Beto al respecto de todas las características de éste, para que construya una copia. La opción de realizar mediciones sobre este estado queda descartada, ya que esto lo modificaría al transformarlo en un estado propio del observable que se midió. Otra opción sería mandar el sistema en sí, pero

esto puede ser difícil y poco práctico. La alternativa que se plantea por medio de estados enredados es hacer interaccionar el sistema con uno de los subsistemas de un estado de este tipo —lo cual destruye el estado cuántico inicial— y con el otro subsistema construir un estado cuántico idéntico al que se destruyó. Esto se puede llevar a cabo para una partícula de espín un medio por medio del siguiente proceso.

Se crea un estado enredado del tipo

$$|\Psi_{23}^{(-)}\rangle = \sqrt{1/2} (|\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle)$$

donde se han colocado algunos subíndices en busca de mayor claridad. Los subíndices 2 y 3 se refieren a las dos partículas del estado enredado, dejando libre el subíndice 1 para la partícula en el estado cuántico que se desea teletransportar. El superíndice (-) se refiere al signo con que se agregan los estados puros. Se entregan a Ana y Beto las partículas 2 y 3, respectivamente. Supóngase ahora que Ana es quien tiene el estado cuántico a transportar que tiene la forma

$$|\phi_1\rangle = a |\uparrow_1\rangle + b |\downarrow_1\rangle$$

el cual hasta el momento no está correlacionado en ninguna forma con el par enredado. Para vincular este estado con el par enredado, Ana realiza una medición simultánea sobre las partículas 1 y 2 usando la base de operadores de Bell [4] cuyos estados propios son

$$\begin{aligned} |\Psi_{12}^{\pm}\rangle &= \sqrt{1/2} (|\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle) \\ |\Phi_{12}^{\pm}\rangle &= \sqrt{1/2} (|\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle) \end{aligned} \quad (8.2)$$

El estado completo para las tres partículas, antes de la medición que realiza Ana, está dado por

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{a}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle) \\ &\quad + (|\downarrow_1\rangle |\uparrow_2\rangle |\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\rangle |\downarrow_2\rangle |\uparrow_3\rangle) \end{aligned}$$

y es factorizable para el estado de la partícula 1. Es posible reescribir este estado en términos de los estados propios (8.2),

$$\begin{aligned} |\Psi_{123}\rangle &= \frac{1}{2} \left[|\Psi_{12}^{-}\rangle (-a |\uparrow_3\rangle - b |\downarrow_3\rangle) + |\Psi_{12}^{+}\rangle (-a |\uparrow_3\rangle + b |\downarrow_3\rangle) \right. \\ &\quad \left. + |\Phi_{12}^{-}\rangle (a |\uparrow_3\rangle + b |\downarrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^{+}\rangle (a |\uparrow_3\rangle - b |\downarrow_3\rangle) \right] \end{aligned} \quad (8.3)$$

de donde es claro que cada uno de los posibles resultados de la medición que realiza Ana tiene probabilidad $\frac{1}{4}$ de ocurrir¹. Esta medición proyecta a la partícula 3 en alguno de los cuatro estados puros involucrados en (8.3)

$$\begin{aligned} &(-a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle), \quad (-a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) \\ &(a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle), \quad (a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle). \end{aligned}$$

los cuales se pueden expresar respectivamente como

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle, \\ &\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle. \end{aligned} \quad (8.4)$$

con

$$|\phi_3\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

que es ya una copia idéntica del estado inicial de la partícula 1, que queda relacionado con el estado final de la partícula 3.

Bastará ahora con que Ana informe a Beto cual fué el resultado de la medición sobre 1 y 2, para que Beto sepa en que estado se encuentra la partícula 3 (vease la ecuación (8.3)). Finalmente, debido a que el cuadrado de cualquiera de los operadores involucrados en (8.4) es el operador identidad, por medio de una aplicación del operador correspondiente, Beto puede colocar la partícula 3 en un estado cuántico que será una réplica exacta del estado original de la partícula 1, completando la teletransportación del estado cuántico inicial.

El procedimiento anterior es fácilmente generalizable para estados enredados que involucran más de dos subsistemas [5].

8.2. La no separabilidad desde el punto de vista experimental

Se ha visto que a pesar de que los experimentos que se han llevado a cabo hasta el momento han sido realizados cuidadosamente, no han conseguido eliminar todas las dudas que existen respecto de su validez. Ciertamente los argumentos en

¹Los coeficientes a y b no afectan las probabilidades de la medición, puesto que el estado original $|\phi_1\rangle$ está normalizado, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

contra se refieren a detalles en las interpretaciones, pero estos detalles son de gran importancia.

La expectativa es encontrar deducciones teóricas que consideren las limitaciones experimentales, y así fundamentar todas las conclusiones de los experimentos, o, al menos, restringirse al uso de hipótesis directamente verificables.

Desde luego existe también la opción de obtener avances tecnológicos que permitan eficiencias de detección mayores. Sin embargo, este punto es un poco delicado, puesto que las formas de verificar que las eficiencias están siendo mejoradas se basan en las predicciones cuánticas, por lo que es fácil caer en argumentos circulares.

Así que la necesidad es aumentar la capacidad deductiva a partir de elementos existentes. Es en este punto en el cual se tiene que echar mano de refinamientos teóricos que contrarresten las imposibilidades prácticas. Se deben de encontrar situaciones en las que las predicciones de los experimentos difieran mucho más para diferentes interpretaciones.

Si cualquiera de los proyectos tecnológicos que involucran el comportamiento no-local o no-separable tuviera éxito, esto sería un argumento irrefutable para la aceptación de estos criterios —si existiera una máquina cuyo funcionamiento estuviera sustentado en la violación de estos principios, y ésta trabajara correctamente no habría duda de dicha violación. Aunque esto no elimina el interés en el estudio de estos fenómenos, ya que a pesar de ser elementos aplicados a la tecnología, seguiría habiendo un espacio para el cuestionamiento de su naturaleza, o el por qué ocurren.

8.3. Soluciones propuestas por las diferentes interpretaciones

La variedad de soluciones propuestas al problema discutido es muy amplia, dado que incluso una misma interpretación acepta más de una solución basada en sus conceptos.

8.3.1. Interpretación de Copenhague

Para la interpretación de Copenhague no hay problema alguno, al menos desde la perspectiva de la respuesta dada por el mismo Bohr. Para esta interpretación no hay propiedades del sistema, sino propiedades del sistema inmerso en un contexto experimental específico. Así que las mismas desigualdades de Bell carecen de sentido, ya que el mismo parámetro es considerado en diferentes mediciones, o sea en diferentes contextos experimentales, lo cual está explícitamente prohibido por

la interpretación. Por lo tanto los resultados no tienen por que ser consistentes con las desigualdades. Como se ve, resulta intrínseco a la interpretación que el sistema presentará ciertas propiedades para una disposición experimental, y otras, para alguna diferente.

Esto esquivaba el problema, pero no lo resuelve; de hecho ni siquiera agota las posibles preguntas. Por ejemplo, no es claro cómo se debería entender un resultado congruente con las predicciones cuánticas en el experimento de Aspect con analizadores variables en el tiempo. En este caso las condiciones experimentales varían a cada momento, y no hay forma en principio de que los subsistemas involucrados cuenten con toda la información en el momento de ser objeto de una medición. Incluso esta situación es característica para la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica, pues según ella se debe de entender que todo sistema cuántico compuesto es de esencia no-separable.

8.3.2. Interpretación de ensamble

Para la interpretación de ensamble caben varias posibilidades, lo único que debe de ser común a todas ellas es que los sistemas tienen características propias, que determinan su comportamiento en el desarrollo de un experimento. Hay que notar que esto no se contraponen con que dichas propiedades puedan ser modificadas aún por eventos distantes que ocurran durante la evolución.

Dentro de esta convicción cabe suponer que existe alguna interacción desconocida que correlaciona las propiedades de una parte del sistema con las de otra, aunque estén separadas. Una solución sería exhibir y especificar el medio de interacción, el cual podría propagarse con una velocidad inferior o superior a la de la luz; esto sería punto de controversia para distintas posturas teóricas. En particular dentro de este enfoque se inscribe la electrodinámica estocástica. Con esta teoría se han logrado avances considerables, por lo que se hablará con un poco más de profundidad en la última sección de este capítulo.

8.3.3. Interpretación de los muchos mundos

Esta interpretación no ha sido mencionada en este trabajo, pero posee cierta popularidad. Interpreta que los conflictos cuánticos se solucionan porque de hecho cada vez que una medición tiene lugar, la realidad se desdobla en ramas, cada una de ellas albergando uno de los resultados posibles de la medición. Esta propuesta busca romper con la frontera que existe entre los eventos del micromundo y el macromundo, ya que los desdoblamientos toman lugar a toda escala; así, cuando

un aparato de medición indica algún resultado, no es porque éste no tenga un comportamiento cuántico, sino que se debe a que el observador se encuentra en la rama de la realidad para la cual ese resultado es el único existente.

Según esta interpretación, la no separabilidad es consecuencia de que las diferentes realizaciones experimentales existen en diferentes ramas, en las cuales sólo existirán los resultados de los experimentos que sean compatibles con dichas condiciones experimentales. Esto en cierta forma resuelve el problema, pero lo hace por medio de una interpretación que es difícil de creer. Si un experimentador se da a la tarea de hacer diez mediciones por minuto, se dedica con ello a crear diez réplicas del universo por minuto.

8.3.4. Diferencias generales

Las diferencias fundamentales entre las interpretaciones, según el problema planteado, están en que algunas suponen que los sistemas poseen características propias y otras consideran que lo único real son los resultados de los experimentos, por lo que preguntar por las características de un sistema que haya provocado cierto resultado experimental, carece de sentido. Para algunas la no-separabilidad no es un problema, sino una característica esencial. Para otras, la no-separabilidad es una opción, pero no la única.

8.4. Qué queda por hacer para esclarecer la incógnita

Hay varios caminos que se podrían tomar con la intención de dar respuesta a las preguntas que se han planteado a lo largo del presente trabajo.

Por un lado, es posible desarrollar experimentos que cada vez aporten información más refinada respecto a la violación de las desigualdades de Bell. Tales experimentos no podrían depender de hipótesis que no sean corroborables, puesto que, como se vio en el capítulo 5, estas hipótesis pueden debilitar los argumentos hasta despojarlos de su carácter de definitivos. Para eso se requieren mejoras meramente tecnológicas, es decir, mejoras en los instrumentos; por ejemplo, en los detectores de las partículas involucradas en los experimentos.

A falta de dispositivos ideales, se pueden desarrollar argumentos que permitan un enfrentamiento más drástico entre las predicciones realistas y separables, contra las de la mecánica cuántica. Habría que encontrar comportamientos en la naturaleza que fueran una consecuencia directa de la no-separabilidad, con la esperanza de que tales comportamientos fueran más fáciles de someter a prueba que la existencia misma de la no-separabilidad. En este sentido se requiere de mucha

imaginación, pero sobre todo, de conocer profundamente el tema y entender cuál es su problemática.

En el mejor de los casos, por el camino planteado en los dos párrafos anteriores, se conseguiría llegar a un veredicto final entre las predicciones no-separables y los modelos realistas locales. Por deseable que fuera esta meta, no es ni por mucho el final de la historia. Los efectos no-separables no concluyen con su verificación o negación, ya que el paso inmediato posterior es responder porqué el de este veredicto. En este sentido existen algunas otras formas de intentar resolver las dudas al respecto de la no-separabilidad.

Otra manera de entender que hay detrás de los efectos no-separables predichos por la mecánica cuántica, es profundizar en los fundamentos mismos de ésta. El hecho de que la mecánica cuántica sea sujeto de tantas interpretaciones tan diferentes, es una clara muestra de insatisfacción con la teoría existente. Si los fenómenos cuánticos encontraran finalmente una explicación inteligible, es posible que esta misma explicación llegara a alguna de las dos alternativas mutuamente excluyentes:

- i) Dar un sustento a los efectos no-separables;
- ii) Considerar los efectos no-separables como consecuencia de una teoría incompleta.

Una teoría de este tipo podría recuperar la noción de realismo y la de separabilidad, o por lo contrario, podría descartarlas, o incluso pudiera rescatar alguna y eliminar otra. Lo que es seguro es que ésta aportaría respuestas más profundas, que tuvieran que ver con el porqué de las predicciones no-separables, y no sólo referirse a si éstas se cumplen o no. Para la interpretación ortodoxa una verificación sería suficiente, ya que con ello se concluiría que en efecto no hay por que buscar más allá, pero casi cualquier otra interpretación preferiría la innovación proporcionada por una teoría más completa. Una manera sería buscar algún fundamento de carácter realmente físico (es decir, no basado en el formalismo) para los postulados centrales de la mecánica cuántica, los cuales generalmente se asumen como ciertos. Una teoría que busca proporcionar justamente tal fundamento es la electrodinámica estocástica (EDE), la que se encuentra en una etapa inicial de desarrollo, pero que como ya se dijo, ha logrado explicar algunos de los fenómenos cuánticos con gran éxito —de especial interés para este trabajo resulta la conversión paramétrica a la baja. La EDE es una teoría que plantea muchas alternativas para ser exploradas en un futuro, por lo que es apropiado aprovechar aquí la oportunidad para presentar algunas de las ideas centrales que la sustentan.

8.4.1. Electrodinámica estocástica

A diferencia de la suposición usual de la mecánica cuántica, para la EDE un electrón atómico (que se considera una partícula localizada) sí radia, pero al mismo tiempo está absorbiendo radiación, de tal manera que la potencia media emitida es igual a la potencia media absorbida, manteniéndose en equilibrio electrodinámico que da lugar a las órbitas estables. La radiación que recibe el electrón proviene del campo electromagnético de punto cero. Este campo electromagnético puede suponerse generado por las mismas cargas aceleradas existentes en el Universo, de tal manera que toda carga está sometida a la influencia de un campo de fondo y, a su vez, contribuye para formarlo. Sin embargo, esto no es central para la teoría.

La pretensión de la EDE es explicar los fenómenos cuánticos por medio de la interacción de los sistemas con el campo de punto cero. En la versión llamada EDE lineal [6] se ha tenido éxito con los estados estacionarios atómicos y otros fenómenos, sin embargo, de gran trascendencia para este trabajo son los resultados referentes a la óptica estocástica, que es la rama óptica de la EDE [6].

La óptica estocástica entiende a la luz (radiación electromagnética en general) como un campo clásico, y busca una explicación del carácter cuántico de ésta, en particular del comportamiento corpuscular, como consecuencia de la presencia del campo de fondo.

El comportamiento de la luz dentro de diversos cuerpos materiales usualmente se considera un fenómeno meramente cuántico, pero la óptica estocástica ha tenido éxito al considerar no sólo el rayo de luz dentro del cuerpo material, sino la superposición de éste con el campo de punto cero. Para fijar ideas, considerese un experimento muy simple en que se supone que existe un sólo fotón, el cual atraviesa un divisor de rayos; se colocan detectores en ambos canales de salida del divisor. Normalmente se considera una demostración del comportamiento fotónico el hecho de que sólo uno de los detectores es disparado cada vez (excepto por algunos "errores experimentales" que se atribuyen a la presencia de dos fotones al mismo tiempo en el dispositivo). La óptica estocástica explica el fenómeno de manera muy sencilla y sin necesidad de recurrir al comportamiento corpuscular e indivisible de los fotones. Cuando la luz llega al divisor de rayos es efectivamente dividida, pero simultáneamente algunos modos relevantes del campo de fondo son alterados por el divisor. El resultado es que la radiación que emerge de cada canal del divisor es una superposición de la luz incidente y algunos modos del campo de punto cero. Debido a las diferencias de fases respecto de la luz incidente, resulta que si en un canal la superposición es constructiva, en el otro es destructiva (por

conservación de energía). De esta manera, la radiación que llega a uno de los detectores será reforzada por el campo de punto cero, mientras que para el otro será atenuada, provocando esto que sólo se dispare uno de ellos.

La hipótesis mencionada en capítulos anteriores de que la presencia de un polarizador frente a un detector no puede aumentar la probabilidad de que éste sea disparado, se ve poco sólida desde la perspectiva de la óptica estocástica. Considérese que al polarizador no sólo está entrando la radiación con la que se experimenta, sino también el campo de punto cero. La radiación que emerge hacia el detector es de nuevo una superposición, que puede dar lugar a interferencia constructiva y, como consecuencia, al fenómeno que se supone que no ocurre. Lo anterior fortalece considerablemente los argumentos en contra de varios de los experimentos realizados.

Dado que muchas de las pruebas experimentales de la violación de las desigualdades de Bell involucran la conversión paramétrica a la baja (CPB), el trabajo a este respecto de Santos y su grupo [7] [8] dentro de la óptica estocástica es muy importante.

Se considera usualmente que la CPB es un fenómeno de carácter exclusivamente cuántico, y que no hay una explicación o analogía clásica. En contraparte, lo que el grupo de Santos logra, es explicarla como el resultado de la superposición dentro del cristal no lineal del rayo incidente y el campo de punto cero.

Una de las razones por las que se considera que la CPB no puede ser considerada dentro de un marco clásico es que no hay solución de las ecuaciones de Maxwell en la que un rayo incidente pueda dividirse en dos rayos que cumplan simultáneamente con las relaciones de frecuencias que se dan en ésta y las leyes de conservación. Sin embargo, si al rayo incidente se le agrega el campo de punto cero, las ecuaciones de Maxwell se pueden resolver y encontrar como resultado el campo radiado que se busca [7]. La pregunta pertinente es entonces ¿por qué se detectan simultáneamente los pulsos? Normalmente esto se atribuye al carácter fotónico de la luz, ya que lo que se produce son dos fotones, que tienen tiempos específicos (aunque indeterminados) de arribo a los detectores. Santos *et al* hacen ver que esta coincidencia en tiempo es un resultado de la sincronización de fases entre los campos radiados hacia cada detector. La presencia del campo de punto cero hace que la amplitud del campo radiado sea máxima casi en coincidencia en ambos detectores, lo cual provoca que se disparen simultáneamente.

En otro artículo [8] el grupo de Santos analiza no sólo la correlación en el tiempo de detección, sino la probabilidad de detección conjunta como función del ángulo θ entre las polarizaciones que se miden. Lo que se estudia es la amplitud

y las diferencias de fase entre el campo en cada detector como función de θ . Si las polarizaciones consideradas son paralelas, la diferencia de fase es tal que siempre que la amplitud sea máxima en uno lo será en el otro, y como consecuencia siempre habrá detecciones en coincidencia. El resultado es que se reproducen las predicciones cuánticas de detección.

En todo desarrollo de la óptica estocástica no se necesita un elemento no-local o no-separable; todas las predicciones de tiempos y probabilidades de coincidencia son resultado de las amplitudes y defasamientos de campos clásicos que incluyen al campo de punto cero. El tratamiento no sólo explica los fenómenos supuestamente no-locales, sino también profundiza mucho en el comportamiento cuántico de la luz.

La EDE en general abre un camino para una comprensión más vasta de la mecánica cuántica, y no sólo de ésta, sino de un comportamiento más profundo de la Naturaleza. Cambia el carácter abstracto del comportamiento cuántico por uno inteligible, para el que es fácil imaginar los entes microscópicos en relación con su entorno.

A pesar de los éxitos de la EDE, no goza de gran popularidad, pero esto se debe en parte al grado de desarrollo en el que se encuentra, además de los obvios elementos psicológicos que se interponen. El punto de partida está dado, pero hay aún un largo trecho por recorrer antes de poner fin a las discusiones al respecto de cual de las teorías es la correcta. La opinión del autor es que no será posible verificar o negar el comportamiento no-separable hasta que se entiendan, al menos de forma más profunda, los fundamentos mismos de la mecánica cuántica.

REFERENCIAS

- [1] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O. Stamatescu y H. D. Zeh, "Decoherence and the appearance of the classical world in quantum theory", Springer, Berlin (1996).
- [2] G. C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber, *Lett. Nuovo Cimento* **27**, 293 (1980)
- [3] A. Shimony, en "Proceedings of the international symposium on foundations of quantum theory" (Physical Society of Japan, Tokyo, 1984).
- [4] S. L. Braunstein, A. Mann, y M. Revzen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3259 (1992).
- [5] H. Bennett *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

y las diferencias de fase entre el campo en cada detector como función de θ . Si las polarizaciones consideradas son paralelas, la diferencia de fase es tal que siempre que la amplitud sea máxima en uno lo será en el otro, y como consecuencia siempre habrá detecciones en coincidencia. El resultado es que se reproducen las predicciones cuánticas de detección.

En todo desarrollo de la óptica estocástica no se necesita un elemento no-local o no-separable; todas las predicciones de tiempos y probabilidades de coincidencia son resultado de las amplitudes y defasamientos de campos clásicos que incluyen al campo de punto cero. El tratamiento no sólo explica los fenómenos supuestamente no-locales, sino también profundiza mucho en el comportamiento cuántico de la luz.

La EDE en general abre un camino para una comprensión más vasta de la mecánica cuántica, y no sólo de ésta, sino de un comportamiento más profundo de la Naturaleza. Cambia el carácter abstracto del comportamiento cuántico por uno inteligible, para el que es fácil imaginar los entes microscópicos en relación con su entorno.

A pesar de los éxitos de la EDE, no goza de gran popularidad, pero esto se debe en parte al grado de desarrollo en el que se encuentra, además de los obvios elementos psicológicos que se interponen. El punto de partida está dado, pero hay aún un largo trecho por recorrer antes de poner fin a las discusiones al respecto de cual de las teorías es la correcta. La opinión del autor es que no será posible verificar o negar el comportamiento no-separable hasta que se entiendan, al menos de forma más profunda, los fundamentos mismos de la mecánica cuántica.

REFERENCIAS

- [1] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I. O. Stamatescu y H. D. Zeh, "Decoherence and the appearance of the classical world in quantum theory", Springer, Berlin (1996).
- [2] G. C. Ghirardi, A. Rimini y T. Weber, *Lett. Nuovo Cimento* **27**, 293 (1980)
- [3] A. Shimony, en "Proceedings of the international symposium on foundations of quantum theory" (Physical Society of Japan, Tokyo, 1984).
- [4] S. L. Braunstein, A. Mann, y M. Revzen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3259 (1992).
- [5] H. Bennett *et al.* *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895 (1993).

- [6] Luis de la Peña y Ana Maria Cetto. *The quantum dice, An introduction to stochastic electrodynamics*. Kluwer Academic Publishers (1996).
- [7] A. Casado, A. Fernandez-Rueda, T. Marshall, J. Martínez, R Risco-Delgado y E. Santos, "Dependence on crystal parameters of the correlation time between signal and idler beams in parametric down conversion calculated in the Wigner representation", preprint, (1998).
- [8] A. Casado, T. W. Marshall y E. Santos, *J. Opt. Soc. Am, B* **15**, 1572 (1998).