10
21

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

TEORIA DEL DUAL SIMPLEX

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LIC. EN MATEMATICAS APLICADAS
Y COMPUTACION
P R E S E N T A :

MARTINEZ GARDUÑO TOMAS

ASESOR: ACT. JORGE LUIS SUAREZ MADARIAGA

SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEX. 1999

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
CAMPUS - ACATLAN

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación

Martínez Garduño Tomás

Gen : 91 - 95

A mis Padres por haber soportado tanto esfuerzo y dedicación, a ti Papá gracias por enseñarme a ser correcto y responsable, a ti Mamá por enseñarme que siempre habrá un mañana no importando a lo que te enfrentes.

Un especial agradecimiento a aquella persona que me hizo encontrar la entereza y el coraje para seguir adelante, mil gracias Profesor Francisco Muñoz Chavez que Dios lo bendiga.

A esa bendita escuela de estudios y a todos aquellos que disfrutan estar en ella, luchando cada día por encontrar la forma de hacer que la excelencia de sus alumnos sea completa, Dios los bendiga ricamente.

Gracias Padre Mío, que siempre has sido mi compañero en todo momento........."Bendito seas por siempre"

TESINA PARA OBTENER EL TITULO DE
LIC. EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

TÍTULO :

TEORÍA DEL DUAL SIMPLEX

PRÓLOGO

Con el desarrollo trascendental y la necesidad de utilizar métodos mucho más sencillos y poderosos en la aplicación de la ciencia de la Investigación de Operaciones, es necesario considerar que esta ciencia ha venido desarrollando un cierto interés en los ingenieros y principalmente, en administradores; por lo que resulta importante tener un conocimiento claro del empleo y aplicación de los recursos necesarios que pudieran ser de gran ayuda en el desarrollo y solución de problemas que requieran ser planteados desde un enfoque más practico y, por ende, más manejable.
El procedimiento clásico para la solución de ciertos problemas tiene por lo general un patrón de comportamiento que responde a las siguientes etapas en el desarrollo de su estudio :

a) Planteamiento del problema
b) Construcción del modelo
c) Solución
d) Interpretación de los resultados obtenidos

Este proceso de etapas se utiliza todos los días, con frecuencia en forma inconsistente, en situaciones de problemas que resultan ser básicos.
Entre los administradores, ya sea en el sector público o privado, una de sus principales funciones es la de resolver problemas mediante la construcción de modelos, los cuales deben ser flexibles y fáciles de acoplar a la estructura de la organización con el fin de satisfacer posibles modificaciones futuras, es aquí donde la programación lineal juega un papel primordial (dentro de la solución de problemas) pues al acoplar un modelo lineal será lo más conveniente debido a que estos modelos cumplen con las exigencias necesarias para poder llevar acabo un buen desarrollo del estudio y solución del problema, contemplando posibles modificaciones sin perder su estructura operacional.

INTRODUCCIÓN

Dentro de la gama del desarrollo alcanzado hoy en día por distintas herramientas que permiten una probabilidad aceptable en la toma de decisiones de cualquier organización, podemos hacer uso de algunas de ellas, como son : los sistemas de información, los métodos estadísticos, la investigación de operaciones (principios de la segunda Guerra Mundial) y su gran relación con la programación lineal (mediados de siglo XX) al igual que otras se han ido perfeccionando con el paso del tiempo.

En nuestro caso, es muy importante hacer énfasis en la programación lineal , por lo que dentro de sus aplicaciones podemos mencionar el hecho de que varía desde la asignación de recursos escasos para diferentes usos finales hasta la determinación del patrón óptimo de fases para los semáforos en las calles de la ciudad, problemas de alisamiento, distribución, mezcla, ajuste y planeación, entre otros.

En el mundo de los negocios, ocurren pocos problemas de estas formas puras; más bien, los problemas presentan características de varios tipos, diferentes a los modelos de programación lineal (que no son otra cosa que modelos matemáticos), los cuales son relativamente nuevos, es decir se centran en la toma de decisiones en el campo de la administración. La mayoría de los análisis en ciencias de la administración se llevan acabo utilizando modelos matemáticos. Estos modelos se elaboran con base en entes matemáticos, que se asemejen lo más posible al problema a tratar; de aquí el porqué de la importancia de la programación lineal y su relación con la investigación de operaciones, ya que con base en esta herramienta se dará paso al tema principal que aborda el presente trabajo " El Método Dual Simplex ", una aplicación a lo que conocemos como la " Teoría de la Dualidad ", en donde se proporcionará un enfoque amplio y así poder comprender con mayor claridad este método.

En el capítulo I, se contempla una breve introducción sobre la teoría ya mencionada, para contar con un panorama básico sobre ésta; como segundo punto, se trata lo que se conoce como "problema de programación lineal" o el llamado problema primal -que será el primero en plantear- y así apoyar la resolución o la toma de la decisión apropiada de el problema a tratar, en cuanto al tercer apartado que conforma esta investigación " El problema dual "; es aquí donde comienza la aplicación de la Dualidad que sería el segundo problema a plantear y que juega un papel de gran relevancia para el método Dual Simplex; este problema como se irá observando está ligado estrechamente con el primer problema (el problema primal).

Cabe mencionar, como primer término que en el problema dual se presentan menos iteraciones para encontrar la solución óptima factible -que en este caso se le conoce como solución óptima dual factible- este y otros conceptos se estudiaran en esta sección.

En el cuarto apartado Fundamento Matemático; se planteará cada uno de los problemas mencionados mediante una justificación desde el punto de vista de las matemáticas desarrollando demostraciones , así como las interpretaciones matriciales y otras consideraciones que sean necesarias. En el quinto apartado "análisis de sensibilidad y la teoría de la dualidad"; se tomará como base el estudio del concepto de la interpretación económica desde el punto de vista del análisis de sensibilidad y el de la dualidad, tomando en cuenta que existe un nexo que relaciona a uno y otro, dado que la dualidad es el núcleo del análisis de sensibilidad de la programación lineal.

Ya con las herramientas teóricas obtenidas en el capítulo anterior podemos dar paso al siguiente capítulo " El Método del Dual Simplex "; que es, como ya se mencionó una aplicación de la Dualidad. Este método resuelve tanto el problema primal como el problema dual. En este capítulo se contemplan tres puntos a tratar, entre los cuales se tiene el caso en que se encuentre una solución básica dual factible -que es a la que se pretende llegar en cada iteración del método-, por lo que se describirán cuáles son sus principales características a cumplir. En el punto dos se contemplan varios objetivos a cumplir, dentro del planteamiento de lo que se conoce como el algoritmo Dual Simplex, en el cual se presentará un desgloce abarcando todas sus características , sus aplicaciones y sus condiciones necesarias para el buen desarrollo de este método.

Entre otros objetivos, se pretende un mejor entendimiento de las aplicaciones donde se consideran algunos ejemplos resueltos mediante el presente método y de esta manera, no sólo lograr su mejor entendimiento sino, alcanzar un conocimiento general tanto de sus aplicaciones como en los casos en donde no sea posible encontrar una solución dual factible, que es precisamente el siguiente punto a tratar : casos en que la solución no sea dual factible y en donde se estudian algunos problemas a seguir para observar en que situaciones se tienen que realizar algunas modificaciones o el aplicar algún método o artificio matemático para así determinar una solución dual factible, para llegar por consiguiente a una solución básica dual factible.

En el capítulo tres se compara con otros métodos, como su título lo indica ahora es necesario el comparar sus aplicaciones, alcances y potencialidades, para demostrar su mejor adaptabilidad a problemas en la toma de decisiones. Como primer punto se hace alusión al Método Simplex como recordatorio. En el segundo punto relación entre el Dual Simplex y el Simplex, en esta parte se plantean ventajas y desventajas de uno y otro método; asi como sus posibles relaciones , con propósito de dar una fundamentación objetiva y veraz al tema en cuestión. En el tercer punto, "otras consideraciones", se citan varias características del Método Dual Simplex dentro y fuera de la toma de decisiones desde varios puntos de vista.

En el cuarto y último capítulo, "aplicaciones e interpretaciones", se programa tanto el Método Simplex como el Dual Simplex, utilizando como herramienta principal el lenguaje de programación Turbo Pascal versión 6.0, con el fin de observar el comportamiento entre un método.

CAPÍTULO I

DUALIDAD

- 1.1 Introducción
- 1.2 El problema Primal
- 1.3 El problema Dual
- 1.4 Fundamento Matemático
- 1.5 El análisis de sensibilidad y la teoría de la dualidad

CAPITULO I DUALIDAD

1.1 INTRODUCCIÓN

Dentro de la Investigación de operaciones, se ha observado alcances en cada una de sus técnicas para la solución de problemas de recursos así como de decisiones, entre otras de sus características -dentro de la programación lineal- se ha alcanzado un logro trascendental en su desarrollo, y esto se debe al descubrimiento de lo que conocemos como el concepto de la teoría de la Dualidad[1], la cual indica que para cada problema de programación lineal existe un segundo problema gemelo a éste, que cumple con una relación especial y única con el primero. Estos dos problemas son pares o duales uno de el otro (de aquí el nombre de dualidad).

Entre otras aplicaciones de la dualidad, encontramos la relación entre el problema el problema dual y el problema original (llamado problema primal) que son de mucha utilidad en una gran variedad de casos, por mencionar algunos de ellos tenemos que de hecho la solución óptima del problema dual es la que nos proporcionará los precios sombra [información sobre la contribución económica de los recursos a la medida de desempeño (z)] de hecho, precio sombra es otro término para la variable dual. La relación entre estos dos problemas y el análisis de programación dual ha llamado mucho la atención no sólo a los administradores, sino también a los economistas y matemáticos, por varias razones en las que contamos con el hecho de que :

- El concepto de la dualidad aporta conceptos de suma importancia, que ayudan a aumentar el entendimiento de la programación lineal.
- El análisis de la dualidad es una herramienta poderosa en la solución de problemas de programación lineal; en donde se verá durante el desarrollo del presente trabajo que con frecuencia es más fácil resolver y encontrar soluciones óptimas de un problema de programación lineal encontrando la solución de su asociado dual.
- La Dualidad no sólo es una relación teórica bastante interesante; también ha resultado ser de inmenso valor para crear otras técnicas de investigación de operaciones. Por otra parte la dualidad tiene una útil interpretación económica y se usa ampliamente en la teoría económica. Además de ser de un interés teórico, es él núcleo del análisis de sensibilidad de la programación lineal; este concepto de análisis de sensibilidad es uno de los que se estudiarán es este capítulo ya que gracias a este se pueden ahorrar recursos, tiempo y dinero determinando el impacto del cambio de algunas restricciones o variables sin repetir completamente el proceso de solución, de esta misma forma es posible estimar predicciones a futuro y el llevar acabo varias consideraciones que nos ayuden a tomar una mejor decisión de nuestro problema. Estas y otras aplicaciones de sumo interés se verán en este capítulo.

---

[1] Aplicación correspondiente a un Problema de Programación Lineal en su forma original.
Operations Research: Principles and Practice. Chapter 6

1.2 EL PROBLEMA PRIMAL

La programación lineal toma como base el planteamiento de un modelo que busque asemejarse lo más posible a la realidad del problema real a considerar. Este tipo de modelo se le conoce como problema original o problema primal, el cual basa su planteamiento bajo lineamientos de un modelo simbólico o matemático. Por lo que la investigación de operaciones, es ante todo más que el ser una ciencia es el arte de abstracción del problema en forma creativa y de imaginación de cada uno de los analistas que buscan la solución mediante la investigación de operaciones. Al formular el modelo se supone de antemano que se sabe que todas las variables son cuantificables, por lo cual los símbolos matemáticos tienen como tarea el representar variables que tienen que cumplir cierta relación con las funciones matemáticas apropiadas para de esta manera buscar en lo más posible, esa semejanza con el sistema real a tratar.

Para que un sistema de ecuaciones tenga solución única, el número de incógnitas debe ser igual al número de ecuaciones y estas deben ser linealmente independientes. Si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones, algunas incógnitas quedarían en función de otras variables para calcular su valor y si el número de ecuaciones es mayor tendríamos soluciones múltiples.

Suponemos que de las n columnas de A se selecciona un conjunto de m columnas linealmente independientes y le llamaremos matriz B cuyo orden es de m x m.

$$B (X_B) = b$$

$$X = (X_{B},0)$$

sólo se puede resolver el vector X_B al hacer :

$$X = (X_B ,0)$$

es decir igualando las m primeras componentes de X a las XB y las restantes a cero

$$AX = b$$

Definición 1.-

Sea el conjunto AX = b de m ecuaciones simultáneas lineales con n variables y sea B cualquier submatriz de m x m una matriz no singular formada por las columnas de A, entonces si todas las n-m componentes de X no asociadas a las columnas de B se igualan a cero la solución resultante de ecuaciones se llama solución del sistema.

$$AX = b$$

respecto a la base B y las componentes de X asociadas a B se denominan variables básicas.

En algunos casos la formulación del modelo matemático para el problema primal puede ser muy compleja, por lo que se tendrán que hacer ciertas manipulaciones matemáticas para lograr una solución si no exacta, si aproximada.

Entre otras de las características que se encuentran en este modelo, podemos contar con la posibilidad de sugerir estructuras fisicas fijas, conllevando con esto una mayor manualidad matemática, de gran confianza y comprensión en sus datos. Esta estructura fisica basa su campo de aplicación en tres conjuntos básicos de elementos :

1) Variables de decisión y parámetros

Las variables de decisión son el conjunto de variables o incógnitas cuya magnitud se determina con la solución de un modelo de programación lineal.

Los parámetros representan las variables que se pueden controlar en el sistema bajo el modelo a seguir.

2) Restricciones

Uno de los elementos indispensables en el modelo, es la consideración de restricciones (implícitas o explícitas) que tomen en cuenta las limitaciones fisicas del sistema, es decir el limitar las variables de decisión a sus valores factibles o permitidos dentro del problema , ya sean del caso $\leq$, $\geq$ o =.

3) Función objetivo.

Se conoce como la función matemática que relaciona las variables de decisión y tiene la tarea de definir la efectividad del sistema. Una decisión correcta u óptima del modelo se obtiene cuando las variables de decisión toman cierto valor que producen como resultado un valor aceptable (dentro de nuestras exigencias) de la función objetivo, sujeta a las restricciones establecidas. Un mal planteamiento de la función objetivo nos conduce a una solución de poco valor para el problema, esto ocurre por lo general al despreciar algunos aspectos del sistema. Un ejemplo de esto se observa en el caso cuando se determina el nivel óptimo de producción, la función objetivo puede contemplar únicamente las metas de producción de departamento, haciendo a un lado las metas de mercado y finanzas, en este caso, el modelo sólo nos puede llevar a una solución subóptima que no sirva para el mejor interés de todo el sistema. Por lo cual ésto nos lleva a concluir que la función objetivo actúa como un indicador para el logro de una solución óptima ya sea de maximización o de minimización de acuerdo al problema a tratar.

Esta estructura básica de modelo para el problema primal tiene que cumplir con ciertas características de los problemas de programación lineal como son :

1) Un sólo objetivo.- Una sola función objetivo.

2) Proporcionalidad.-

Tanto la función objetivo como las restricciones deben ser proporcionales en relación a la fabricación de cada uno de los productos. Esto quiere decir que es necesario el establecimiento de linealidad en el modelo.

3) Divisibilidad.-

Esta característica se refiere al establecimiento de posibles asignaciones fraccionarias de los productos, en los casos en que la producción o asignación de artículos sea discreta, ya que no se asegura que la solución del problema de programación lineal sea entera.

4) Aditividad.-[2]

Las contribuciones de los productos individuales son aditivas. Es decir que el total es igual a la suma de las partes y que no hay efectos de interacción entre los niveles de producción.

5) No negatividad de los productos.-

Esto sugiere el establecer que no es posible fabricar menos de cero unidades de un producto (≥ 0).

En base a lo anterior, se puede definir un problema de la siguiente forma :

$$\text{Maximizar o minimizar } X = c_1x_1 + c_1x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

sujeto a

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \ (\leq, =, \text{o} \geq)\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \ (\leq, =, \text{o} \geq)\ b_2 \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \ (\leq, =, \text{o} \geq)\ bm \\ \qquad\qquad x_1, x_2, \ldots\ldots, xn \geq 0 \end{array}$$

de donde c_j, b_i, y $a_{i,j}$ con (i = 1,2,3,....,m; j = 1,2,.....,n) son valores que se determinan en el problema y x_j representa las variables de decisión, así como el nivel de actividad j.

---

[2] Modelos Cuantitativos para Administración. K. Roscoe Davis (pag.-26)

De aquí se pueden establecer modificaciones que fueran necesarias o en dado caso útiles para mejorar el planteamiento de el problema. Las modificaciones posibles se darían de la siguiente forma :

1) Cambio en el sentido de la función objetivo :

Maximizar $\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$ se puede plantear como Minimización $\sum_{j=1}^{n} (-C_j)X_j$

y viceversa.

2) Cambio en el sentido de una desigualdad :

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq b$: puede ser escrito como $\sum_{j=1}^{n} (-a_j)x_j \geq -b_i$

3) Convertir una desigualdad a una igualdad :

a) $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq b_i$ puede ser escrito como $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} + s_i = b_i$ donde $s \geq 0$

b) $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \geq b_i$ puede ser escrito como $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} - t_i = b_i$ donde $t \geq 0$

La variable S presentada en la ecuación (a) se conoce con el nombre de variable de holgura y condiciona a que tanto el problema primal como su dual asociado tengan solución factible y por ende se obtenga una solución óptima. En el caso de la variable t presentada en la ecuación (b) se le conoce como variable de excedente.

4) Convertir igualdades a desigualdades

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i$ para $i = 1,2,\ldots,m$ puede ser escrita como 2 desigualdades :

a) $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq b_i$ para $i = 1,2,\ldots,m$

y

b) $-\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \geq -b_i$

5) Una variable de cualquier signo puede escribirse como la suma de 2 variables no negativas : $X = X^+ - X^-$ donde $X^+ = \max\{0,x\}$ y $X^- = \max\{0,-x\}$

Ejemplo :

$$2X_1 + 5X_2 \qquad = 6$$

aplicando (a) y (b) tendríamos :

$$2X_1 + 5X_1 \leq 6$$
$$-2X_1 - 5X_1 \geq -6$$

Consideremos tres formulaciones equivalentes de un problema de programación lineal :

1) La forma canónica

$$\text{Maximizar } X_o = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i , \quad i=1,2,..,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j=1,2,...,n$$

con las siguientes características :

- Todas las variables de decisión tienen que cumplir la no negatividad
- Todas las (n) restricciones son del tipo ($\leq$)
- La función objetivo es de maximización

2) La forma mixta

$$\text{Maximizar o Minimizar } X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geq b_i, \quad i=1,2,...,k$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \quad i=1,2,..., k+1,....., m$$

$$X_j \geq 0$$

3) La forma estándar

$$\text{Maximizar } X_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j + s_i = b_i, \quad i=1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \; ; j=1,2,\ldots,n$$
$$s_j \geq 0 \; ; i=1,2,\ldots,m$$

donde s_i es una variable de holgura[3]

Con las siguientes características :

- Todas las variables son no negativas.
- En el caso de las restricciones todas son ecuaciones exceptuando para las restricciones que cumplen la no negatividad que en su caso se mantienen como desigualdades (≥ 0).
- Todos los elementos que se encuentran del lado derecho son no negativos.
- La función objetivo es de tipo maximización ó minimización.

Ejemplo :

Dado el problema de programación lineal (P), determinar :
a) Su forma canónica b) Su forma estándar.

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad X_0 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 \\ \text{s.a} \\ \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ \quad 8x_2 - 3x_3 \geq 30 \\ \quad 6x_1 - 4x_2 = 10 \\ \quad | x_2 - 7x_3 | \leq 60 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ \quad x_3 \text{ , irrestricta} \end{array} \right.$$

[3] Variable de holgura: variable de excedente que representa el excedente del lado izquierdo sobre el lado derecho (Introduction to Operations Research, 2a ed.Hiller and Liberman , Ed.Mc Graw-Hill)

a) Forma canónica :

1) Minimizar $X_0 = X_1 + 4X_2 - 5X_3$ es equivalente a :

Maximizar $(-X_0) = -X_1 - 4X_2 + 5X_3$

2) $8X_2 - 3X_3 \geq 30 \Rightarrow -8X_2 + 3X_3 \leq -30$

3) $6X_1 - 4X_2 = 10 \Rightarrow 6X_1 - 4X_2 \leq 10$ y

$6X_1 - 4X_2 \geq 10 \Rightarrow -6X_1 + 4X_2 \leq -10$

4) $| X_2 - 7X_3 | \leq 60 \Rightarrow -60 \leq X_2 - 7X_3 \leq 60$

$X_2 - 7X_3 \geq -60 \Rightarrow - X_2 + 7X_3 \leq 60$

y

$X_2 - 7X_3 \leq 60$

5) $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ variable irrestricta[4]

y

$X_0 = x_1 + 4x_2 - 5x_3$ de aquí tenemos que :

Max $w_0 = (-X_0) = -x_1 - 4x_2 + 5(X_3^+ - x_3^-)$

Por lo tanto :

$$
\begin{cases}
\text{Max} \quad w_0 = (-X_0) = -x_1 - 4x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{s.a} \\
\quad 2x_1 + 3x_2 \leq 20 \\
\quad - 8x_2 + 3 (x_3^+ - x_3^-) \leq -30 \\
\quad 6x_1 - 4x_2 \leq 10 \\
\quad -6x_1 + 4x_2 \leq -10 \\
\quad x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) \leq 60 \\
\quad -x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) \leq 60 \\
\quad x_1, x_2 \geq 0 \\
\quad x_3^+, x_3^- \geq 0
\end{cases}
$$

[4] Este tipo de variables las estudiaremos en el siguiente sección

b) Forma estándar

$$X_2 - 7X_3 \geq -60 \Rightarrow - X_2 + 7X_3 \leq 60$$

y

$$X_2 - 7X_3 \leq 60$$

ahora haciendo uso de las variables de holgura y de exceso en el problema (P) tenemos :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Minimizar } X_0 = x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 0s_1 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\
\\
\text{s.a} \\
\qquad 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 20 \\
\qquad 8x_2 - 3(x_3^+ - x_3^-) - t_1 = 30 \\
\qquad 6x_1 - 4x_2 = 10 \\
\qquad x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) + t_2 = 60 \\
\qquad -x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) + t_3 = 60 \\
\qquad x_1, x_2, s_1, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \\
\qquad x_3^+, x_3^- \geq 0
\end{array}\right.$$

1.3 EL PROBLEMA DUAL

Una aplicación más representativa de la programación lineal es la Dualidad y la ayuda que proporciona ésta a la toma de decisiónes en cuanto a su interpretación económica.
Este concepto nos indica que para cada problema de programación lineal ó primal existe un problema asociado a él conocido con el nombre de problema Dual. La existencia del problema dual es de gran utilidad ya que proporciona información muy importante en el tratamiento de problemas dentro de la programación lineal. El problema dual nos proporciona interpretaciones e informaciones importantes, que muestran que los análisis marginales están siempre involucrados implícitamente en el hecho de buscar la solución óptima a los problemas de programación lineal. En cuanto a la solución óptima del problema dual, ésta nos proporciona los costos o beneficios de los recursos escasos en el problema original.

Sea el problema de Programación lineal dado en su forma canónica llamado el problema primal (P) :

$$\text{Maximizar} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

(P) s.a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \quad \text{donde } i = 1,2,\dots,m$$

$$x_{i,j} \geq 0, \quad \text{donde } i=1,2,\dots\dots,n$$

Definición.- El problema dual (D) de (P) se define por :

$$\text{Minimizar} \quad y_0 = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i$$

(D) s.a

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq c_j, \text{ donde } j= 1,2,\dots,n$$

$$y_i \geq 0, \text{ donde } y= 1,2,\dots,m$$

en este caso $y_1, y_2, \dots, y_n$ son las variables duales.

El problema dual se obtiene del problema primal (y viceversa) siguiendo las siguientes propiedades :

1) Si el problema primal es de maximización el dual asociado es de minimización y viceversa.

2) Los coeficientes de la función objetivo en el problema primal pasan a ser coeficientes del vector de disponibilidad en el dual.

3) El problema de maximización tiene desigualdades ($\leq$) en el primal, el problema dual será de minimización con desigualdades ($\geq$) y viceversa.

4) Cada restricción de un problema está asociada con una variable en el otro y viceversa.

5) Los coeficientes de las restricciones en el problema primal, es decir la transpuesta de la matriz "A" de los coeficientes tecnológicos, será la matriz "A" de los coeficientes tecnológicos en el problema dual.

6) Las variables de ambos problemas deben cumplir la condición de no negatividad.

7) Los coeficientes del vector de disponibilidades del problema primal se convierten en los coeficientes de la función objetivo en el problema dual.

Sea el PPL dado en forma estándar :

$$\text{Maximizar} \quad x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.a

(P)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i, \quad \text{donde } _i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad \text{donde } _j = 1,2,\ldots,n$$

El dual del problema (P) está dado por :

(D)

$$\text{Minimizar} \quad Y_0 = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i$$

s.a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} y_i \geq C_j, \qquad j = 1,2,3,\ldots,n$$

y_i irrestricta en signo

Ejemplo :

(P)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Maximizar} \quad Xo = C_1X_1 + C_2X_2 \\ \text{s.a} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

(D)
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad Yo = b_1y_1 + b_2y_2 \\ \text{s.a} \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \geq C_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \geq C_2 \\ \qquad y_1 = \text{irrestricta} \\ \qquad y_2 \leq 0 \\ \text{si} \quad y_1 = y_1^+ - y_1^- \\ \qquad y_2 = y_2^+ - y_2^- \end{array}\right.$$

Minimizar $yo = b_1 (y_1^+ - y_1^-) + b_2 (y_2^+ - y_2^-)$

s.a

(D)

$$a_{11} (y_1^+ - y_1^-) + a_{21} (y_2^+ - y_2^-) \geq C_1$$
$$a_{12} (y_1^+ - y_1^-) + a_{22} (y_2^+ - y_2^-) \geq C_2$$

$$y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$$

Este resultado nos lleva a la conclusión de que las variables duales correspondientes a un primal en la forma estándar deben ser todas irrestrictas.

Ahora observaremos el comportamiento de una variable irrestricta en el problema primal y su relación con el problema dual en el siguiente ejemplo :

Maximizar $x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

(P) s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i, \text{ donde } i=1,2,3,\ldots,m$$

x_j irrestricta

el problema dual estará dado como :

Minimizar $y_0 = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i$

(D) s.a

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} y_i = C_j \quad \text{donde} \quad j = 1,2,..,n$$

$$y_i \geq 0, \quad \text{donde} \quad i = 1,2,..,m$$

Otra de las conclusiones que se determina a partir de este tratamiento, radica en el hecho de que para un problema primal de Maximización o de Minimización con todas las variables irrestrictas el problema dual asociado resulta ser un problema dual estandarizado.

Ejemplo :

Obtener el problema dual, asociado a la forma mixta del problema primal.

$$
(P)\quad \begin{cases}
\text{Minimizar } z_0 = 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
\text{s.a} \\
2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\
x_1 + 8x_2 - 7x_3 - 8x_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

su dual asociado sería entonces :

$$
(D)\quad \begin{cases}
\text{Maximizar } w_0 = z_0 = 8y_1 + 6y_2 \\
\text{s.a} \\
2y_1 + y_2 \leq 6 \\
3y_1 + 8y_2 \leq 2 \\
-5y_1 - 7y_2 \leq 3 \\
y_1 - 8y_2 \leq 4 \\
y_1 , y_2 = \text{irrestrictas en signo}
\end{cases}
$$

Aunque la forma canónica como la estándar son de suma importancia, la forma estándar es mucho más útil, ya que es la base de todos los cálculos de programación lineal para el método Simplex.[5]

La solución óptima del problema dual nos proporciona las siguientes características :

- Se obtiene como el mínimo de costo a diferencia del módelo primal que se obtiene como el máximo de ingresos.
- Nos proporciona las ganancias de los recursos escasos que se asignaron en el problema primal.
- Aporta la solución óptima del problema primal y viceversa.[6]

En el caso de la solución, tanto de un problema primal como de un problema dual , ésta se interpreta de la siguiente tabla óptima, obtenida del problema de programación lineal :

---

[5] Hamdy A. Taha Operations Research an Introduction Capítulo 4

[6] Principles of Operations Research Second Edition, Harvey M. Wagner Chapter.5

$$
(P)\quad \begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 40X_1 + 60X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \leq 2000 \\ \quad X_1 + 2X_2 \leq 1000 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}
$$

y su dual asociado :

$$
(D)\quad \begin{cases} \text{Minimizar } W_0 = Z_0 = 2{,}000Y_1 + 1{,}000Y_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3Y_1 + Y_2 \geq 40 \\ \quad 2Y_1 + 2Y_2 \geq 60 \\ \quad Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}
$$

La tabla final optima del problema primal está dada por :

Variables en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_2	0	1	-1/4	3/4	250
X_1	1	0	1/2	-1/2	500
$Z_j - C_j$	0	0	5	25	35,000

La solución dual estaría dada por :

$$
Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ con Min W0} = 35{,}0000
$$

y la solución primal sería:

$$
X = \begin{pmatrix} 500 \\ 250 \end{pmatrix} \text{con Max X0} = 35{,}000
$$

respectivamente.

1.4 FUNDAMENTO MATEMÁTICO

Tanto el problema primal como su problema dual asociado conllevan a la misma solución óptima en cuanto a la función objetivo es decir Max X_0 = Min Y_0, claro que con diferentes modificaciones entre uno y el otro, basan la aplicación de sus iteraciones mediante el algoritmo simplex.

Tienen a su vez, una cierta diferencia algebraica en el planteamiento inicial, por lo que es necesario establecer en qué radica la misma y por consiguiente qué relación existe entre ellos en cuanto a la representación de sus soluciones.

Por ejemplo consideremos el siguiente PPL en su forma primal:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 4X_1 + 3X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 2X_1 + 3X_2 \leq 6 \\ \quad 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

cuya forma matricial está dada por :

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = CX \\ &\text{s.a} \\ &\quad AX \leq b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

donde :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

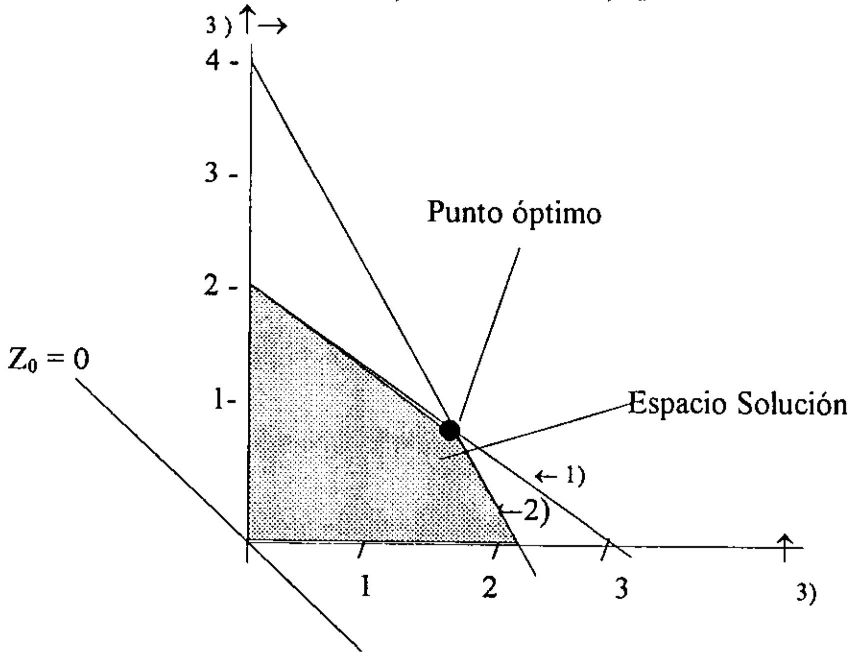
$$X = (X_1, X_2)$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$C = (4, 3)$$

La solución a este problema por medio del método gráfico estará dada por :

Ecuación	
1)	$2X_1 + 3X_2 \leq 6$
2)	$2X_1 + X_2 \leq 4$
3)	$X_1, X_2 \geq 0$



donde la función objetivo se constituiria por :

$$Z_0 = 4X_1 + 3X_2$$

si

$$Z_0 = 0 \Rightarrow 4X_1 + 3X_2 = 0$$

$$3X_2 = - 4X_1$$

$$X_2 = - 4X_1/3$$

Sustituyendo los valores del punto óptimo en la misma tenemos :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z_0 &= 4X_1 + 3X_2 \\ &= 4(1.5) + 3(1) \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

Aún si lo resolviéramos por el método Gauss-Jordan comprobamos el resultado :

$$2X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X_1 = 1.5 \quad y \quad X_2 = 1$$

Sustituyendo los valores en la función objetivo obtenemos que:

$$Z_0 = 4(1.5) + 3(1) = \mathbf{9}$$

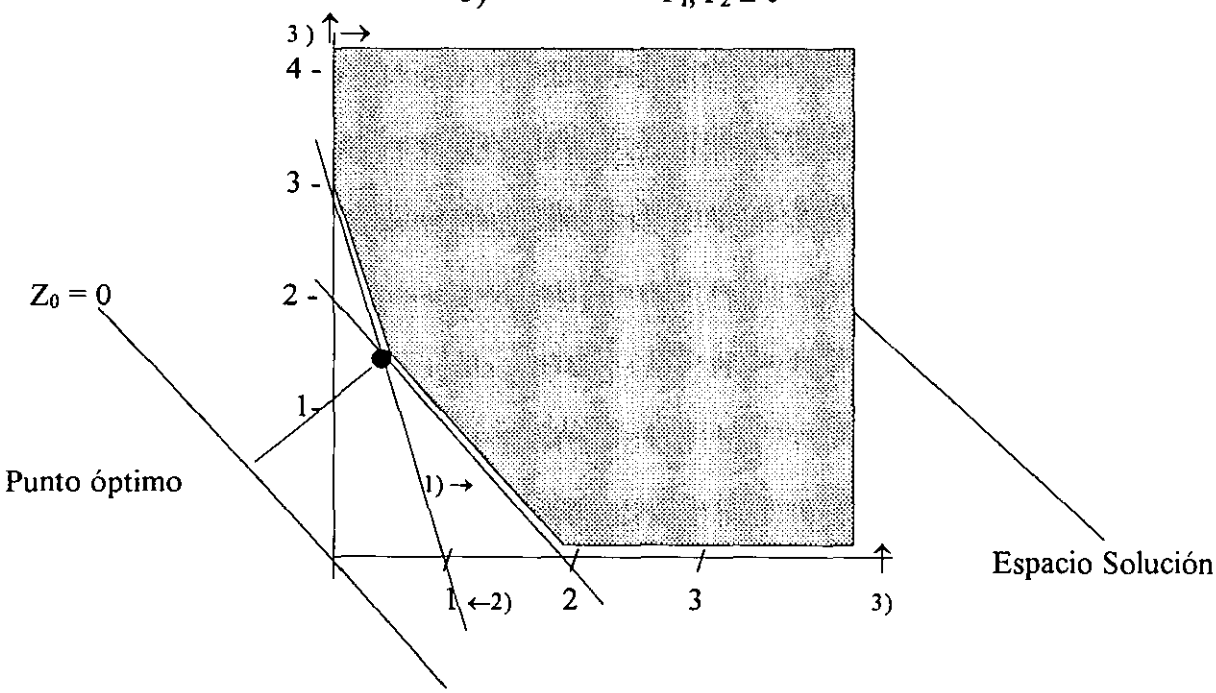
-que sería la misma solución para los dos casos-.
Podríamos comparar la soluciones del problema primal con las del problema dual la cual se presenta a continuación :

Problema dual :

$$(D) \begin{cases} \text{Minimizar } W_0 = Z_0 = 6Y_1 + 4Y_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 2Y_1 + 2Y_2 \geq 4 \\ \quad 3Y_1 + \ \ Y_2 \geq 3 \\ \quad Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solución a este problema por medio del método gráfico estará dada por :

Ecuación	
1)	$2Y_1 + 2Y_2 \geq 4$
2)	$3Y_1 + \ Y_2 \geq 3$
3)	$Y_1, Y_2 \geq 0$



donde la función objetivo se constituiría por :

$$W_0 = 6Y_1 + 4Y_2$$

si

$$W_0 = 0 \Rightarrow 6Y_1 + 4Y_2 = 0$$

$$6Y_1 = -4Y_2$$

$$Y_1 = -4\, Y_2/6$$

Se podría pensar en una solución no acotada pero recordemos que se trata de un problema de Minimización, por lo que nuestro punto óptimo es el valor mínimo que puede tomar la función objetivo, el cual esta dado por :

$$\begin{aligned} \text{Min } W_0 = Z_0 &= 6Y_1 + 4Y_2 \\ &= 6(.5) + 4(1.5) \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

Comprobando mediante el método Gauss-Jordan tendríamos :

$$\begin{aligned} 2Y_1 + 2Y_2 &\geq 4 \\ 3Y_1 + \ \ Y_2 &\geq 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & .5 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right)$$

$$X_1 = 1.5 \quad \text{y} \quad X_2 = 1$$

Sustituyendo los valores en la función objetivo tenemos :

$$W_0 = Z_0 = 6(.5) + 4(1.5) = \mathbf{9}$$

que sería la misma solución para los dos casos.

Todo lo anterior se complementa con la aplicación de los siguientes teoremas de la dualidad los cuales son de suma importancia.-

-Teorema de existencia .-

Dados un par de problemas duales P y D, una y solo una de las tres afirmaciones siguientes se cumplen :

i) Ninguno de los problemas tiene solución.
ii) Un problema no tiene solución y el otro tiene al menos una solución, pero esta no es optimal finita.
iii) Los dos problemas tienen soluciones optimales.

-Teorema débil de las las holguras complementarias.-

Dados un problema (P) y (D) respectivamente

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Max } Z = Cx \\ \text{s.a} \\ \\ Ax \le b \\ \quad x \ge 0 \end{cases} \qquad\qquad (D)\quad \begin{cases} \text{Min } W = Yb \\ \text{s.a} \\ \\ Y_A{}^T \ge c^T \\ \quad Y \ge 0 \end{cases}$$

una condición necesaria y suficiente para que $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ sean optimales es que :

$$1)\ \bar{Y}^T\ (AX - b) = 0$$

$$2)\ \bar{X}^T\ (C^T - A^T\,\bar{Y}) = 0$$

donde

1) (Solución óptima del problema dual) (holguras del problema primal) = 0
2) (Solución óptima del problema primal) (holguras del problema dual) = 0

- Teorema fuerte de las las holguras complementarias.-

Dado un par de problemas duales con soluciones factibles existe al menos un par de soluciones optímales $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ tal que :

$$1)\ (A\bar{X} - b) + \bar{Y}^T = 0$$

$$2)\ (C^T - A^T\,\bar{Y}) + \bar{X}^T = 0$$

- Teorema de la Dualidad[7]

En el caso en que ambos problemas, (P) y (D) tengan soluciones factibles, entonces el problema (P) tendrá una solución óptima X^*_j para j = 1,2,..,n, mientras que el problema (D) obtendrá una solución óptima Y^*_i para i = 1,2,..,m tal que

$$\sum_{j=1}^{n} C_j X_j = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$$

esto quiere decir que tanto la solución óptima de la función objetivo para el problema primal como el dual, serán idénticas; esto es :

$$Z_0 = W_0$$

para demostrar este teorema tomaremos en cuenta lo siguiente:

Ahora consideremos la representación del problema primal y su asociado problema dual :

a) Primal

$$\begin{aligned} &\text{Min } C^T X \\ &\text{s.a} \\ &\quad AX \geq b \\ &\quad X \geq 0 \end{aligned}$$

b) Dual

$$\begin{aligned} &\text{Max } b\lambda^T \\ &\text{s.a} \\ &\quad \lambda^T A \leq C^T \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

donde X son las variables del problema primal y λ las variables del problema dual.

Supongamos que de A seleccionamos un conjunto de m columnas linealmente independiente
y le llamaremos matriz B cuyo orden es de m x m

$$B\,(X_B) = b \text{ , es decir } (P)$$

Ya con la base B correspondiente, la solución óptimal estaría dada por :

$$X = (X_B, 0)$$

donde 0 son las variables que no se relacionan con la ecuación y lo restante es la igualación de las m primeras componentes de X a las X_B.

y donde una solución del problema dual en función de la base B sería la siguiente :

$$A = [\,B, D\,] \text{ , es decir } (D)$$

Como la solución básica

[7] Principles of Operations Research With Applications to Managerial Decisions
Wagner M Harvey Chapter 5

$$X_B = B^{-1}b \qquad \text{........1}$$

es óptimal, el vector r_D^T debe ser > 0

$$r_D^T = C_D^T - C_B^T\, B^{-1} D \geq 0$$

de aquí obtenemos :

$$C_D^T \geq C_B^T\, B^{-1} D \qquad \text{......................2}$$

entonces sea :

$$\lambda^T B = C_B^T \qquad \text{......................3}$$

$$\lambda^T = C_B^T\, B^{-1} \qquad \text{......................4}$$

del problema dual :

$$\begin{aligned} \lambda^T A &= \lambda^T [\, B, D \,] \\ &= [\, \lambda^T B, \lambda^T D \,] \end{aligned}$$

sustituyendo 3 y 4

$$\lambda^T A = [\, C_B^T\, , C_B^T\, B^{-1} D \,]$$

y el valor de $\lambda^T A \leq C^T$ donde

$$C^T = [\, C_B^T\, , C_D^T \,]$$

esto es C^T la solución del problema dual en función de la base B , por lo que resultaría :

$$\lambda^T A \leq C^T$$

$$[\, C_B^T\, , C_B^T\, B^{-1} D \,] \leq [\, C_B^T\, , C_D^T \,]$$

$\Rightarrow \lambda$ es factible para el dual

y

$$\lambda^T\ b$$

sustituyendo 4 y 1

$$\begin{aligned} \lambda^T\ b &= C_B^T\, B^{-1} b \\ &= C_B^T\, X_B \end{aligned}$$

Con lo que concluimos que el valor de la función objetivo dual para λ es igual al valor del problema primal esto es :

$$W_0 = Z_0$$

1.5 EL ANALISIS DE SENSIBILIDAD Y LA TEORIA DE LA DUALIDAD

En el presente apartado encontraremos varias características interesantes de la programación lineal y de la teoría de la dualidad.

Definición.-
La sensibilidad es un método para investigar el efecto que tienen cambios en los diferentes parámetros sobre la solución óptima de un problema PL. Se pueden cambiar los coeficientes de la función objetivo, los valores del segundo término de las ecuaciones de restricción o los coeficientes asociados directamente con las restricciones. Esto incluye analizar la sensibilidad de la solución óptima actual a las modificaciones en los datos de entrada.

La dualidad, o el planteamiento dual de los problemas de programación lineal, es una característica que ofrece un método para resolver una forma alternativa del problema de programación lineal. Una ventaja de la dualidad es que puede reducir la cantidad de cálculos de ciertos problemas de PL.
Sin embargo, es más importante la relación entre la dualidad y el análisis de sensibilidad y el hecho de que pueden ofrecerse aplicaciones adicionales de la programación lineal a través del uso del dual. Por otra parte, la dualidad tiene una última interpretación económica y se usa ampliamente en la teoría económica. Además de ser de interés teórico, la dualidad es él núcleo del análisis de sensibilidad de la programación lineal.[8]

Por otra parte, el análisis de sensibilidad es una técnica que gracias a ella podemos aplicar un análisis posterior al haber encontrado la solución óptima reduciendo el tiempo de aplicación del método. Lo anterior nos sugiere que la solución óptima podría ser engañosa o quizás en su caso mejorada y, justamente, es aquí donde comienza la tarea del análisis de sensibilidad.
En la mayoría de las situaciones en las que se podría enfrentar el análisis de la solución óptima -si no es que en todas- radica por lo regular en los criterios siguientes :

I) Cambios en la función objetivo (vector de costos C_j) ya sea en variables básicas y no básicas.
II) Cambios en los parámetros del lado derecho (disponibilidad de recursos los b_i)
III) Cambios en los coeficientes tecnológicos ($a_{i,j}$)
IV) Introducción de nuevas restricciones
V) Adición de nuevas variables

Este tipo de cambios pueden ser de forma discreta o continua, cumpliendo con la característica de la divisibilidad de los modelos de programación lineal. A continuación estudiaremos cada uno de estos cambios.

---

[8] Introducción a Técnicas de investigación de Operaciones.(Cap.4) George A. John Pag. 27

I) **Cambios en la función objetivo :**

Las posibles modificaciones en la función objetivo pueden afectar a la optimalidad de la solución actual, debido al proceso de realización surge una alteración en la pendiente de la recta de la función objetivo (o hiperplano en más de dos dimensiones). Si la pendiente se altera lo suficiente -ya sea en una u otra dirección- la solución óptima actual puede moverse a otro punto de la región factible, obteniendo en ésta una mayor optimalidad, en su caso, una menor. Aunque esto pude ocurrir, estas alteraciones nunca podrían afectar a la factibilidad de esta solución; sin embargo si afectarían a los valores (Z_j-C_j).

La aplicación que se utiliza con mayor frecuencia en el análisis de sensibilidad de la función objetivo implica encontrar el intervalo de valores dentro del cual puede quedar cada coeficiente de la función objetivo sin afectar a la optimalidad de la solución. Cada coeficiente es analizado por separado, quedando los otros parámetros y coeficientes sin modificación alguna.

Tomemos como ejemplo el siguiente PL :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 24X_1 + 20X_2 \\ \text{s.a} \\ -5X_1 + X_2 + X_3 = 12 \\ X_1 + X_2 + X_4 = 20 \\ 1/16X_1 + 1/24X_2 + X_5 = 1 \\ 1200X_1 - 800X_2 - X_6 \leq 0 \\ \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0 \end{cases}$$

cuya tabla final óptima es:

Valores en la base	C_j	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
X_2	0	0	0	1	1.40	0	0	0	40
X_4	20	0	1	0	.60	0	0	0	12
X_6	0	0	0	0	-.05	1	0	0	0
X_1	24	1	0	0	.40	0	0	0	8
Z_j - C_j	24	20	0	0	21.6	0	0	0	432

Supongamos que deseamos saber entre qué intervalos es posible modificar el coeficiente C_2 de tal forma que sea posible mejorar la solución óptima, la variable correspondiente a C_2 es X_2 , una variable básica. Una modificación en C_2 afectará en gran medida a todas las Z_j y por consiguiente a los (Z_j-C_j), exceptuando aquellos para las variables básicas. En el análisis observamos que conforme se modifica C_2 se afectan tanto Z_3 , como Z_5 ,por lo que se habría de encontrar el intervalo para estas variables, de tal forma que se respete la condición (Z_j-C_j) ≥ 0, por consiguiente se procede de la siguiente forma :

para C_2:

$Z_3 = C_2(1) + 0(0) + 0(0) + 24(0)$ y $Z_5 = C_2(0) + 0(0) + 0(1) + 24(0)$

$= C_2 - 0$ $= 0$

para (Z_3 - C_3), tenemos que: para (Z_5 - C_5), tenemos :

$(C_2) - 0 \geq 0$
$C_2 \geq -1$

$C_2 \leq 0$

Por lo que el intervalo para C_2 sería :

$$-1 \leq C_2 \leq 0$$

Este intervalo significa que el producto relacionado con C_2 puede ser modificado dentro del intervalo establecido sin perder de esta forma su optimalidad.

Consideremos ahora, el caso en que se trate de una variable no básica, por ejemplo el coeficiente C_4, esta modificación no afecta a ninguno de los valores C_j asociados con las variables básicas, ya que X_4 no es básica. De esta forma los valores Z_j y (Z_j-C_j) no reciben ninguna alteración exceptuando los valores ($Z_4 - C_4$). Por lo que siempre que C_5 cumpla con la condición de ($Z_4 - C_4$) ≥ 0 si $C_4 \leq 21.6$. Por lo tanto el intervalo para C_5 será :

$$-\infty \leq C_4 \leq 21.6$$

Siguiendo este procedimiento se pueden encontrar todos los intervalos para los C_4 y, en consecuencia si se quiere modificar el valor Cj de una variable se seguiría el mismo procedimiento; sin la necesidad de repetir todas las iteraciones. Pero siempre y cuando esa modificación respete los intervalos ya establecidos.

II) **Cambios en los b_i :**

En este momento del análisis tomaremos como ejemplo el siguiente PPL :

$$\text{Maximizar} \quad Z_0 = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

s.a

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$$
$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2$$
$$Xi \geq 0, \text{ con } i = 1,2,3.$$

cuya tabla final óptima es la siguiente, donde fue necesario encontrar la solución por medio del método de la M grande o solución con variables artificiales:

Variables en la base	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
X_2	0	1	-.2	.4	-1/5	1.6
X_1	1	0	1.4	.2	2/5	1.8
$Z_j - C_j$	0	0	60	5.8	9998.60	28.20

Antes de continuar es conveniente mencionar una propiedad que relaciona el problema primal y el problema dual[9], la cual nos ayudará a comprender con mayor claridad los conceptos que aplicaremos, teniendo en cuenta que se trata de una aplicación más de la dualidad, en el análisis de sensibilidad .

Propiedad I.- $X_B = B^{-1} b$

Ejemplo :

Supongamos que los elementos b_i en este caso el vector columna (5,2) es cambiado por el vector (8,4) -respectivamente- La nueva solución sería :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Por lo que los nuevos valores para X_1 y X_2 son respectivamente 12/5 y 16/5, como son positivos la solución actual mantiene la factibilidad y permanece óptima factible con $X_3 = 0$. Entonces el nuevo valor para Z_0 es:

$$Z_0 = 5(16/5) + 12(12/5) + 4(0)$$

$$= 224/5$$

Ahora en el caso en que el vector columna (5,2) sea modificado por el vector (4,11) tendríamos entonces:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 26/5 \end{pmatrix}$$

Aquí el vector nuevo resulta ser negativo en X_2 , por lo que no cumple con la condición de factibilidad $X_j \geq 0$, en consecuencia esta modificación deja infactible la solución óptima actual y será necesario restablecer la factibilidad utilizando como herramienta el "Método Dual Simplex" que estudiaremos en el CapítuloII.

[9] Operations Research An Introduction Hamdy A. Taha.

Otra de las cuestiones que surgen con frecuencia a este tipo de modificaciones radican en el hecho de aumentar uno de los recursos con el fin de lograr un incremento marginal en el valor de la función objetivo y que nos lleve a una mejor optimalidad factible, en la misma. Para esta aplicación hagamos mención a la siguiente interpretación de las variables del problema dual, en su función objetivo, la cual indica que :

$$W_0 = \sum_{I=1}^{m} b_i y_i$$

donde

b_i = Disponibilidad del i-ésimo recurso escaso
y_i = Contribución por unidad del recurso i-ésimo al valor de la función objetivo

La solución óptima es el máximo en Z_0 y el mínimo en W_0.

Consideremos la función objetivo dual dada en el PPL anterior :

$$W_0 = 5y_1 + 2y_2$$

De acuerdo a la solución del PPL las variables duales y_1 y y_2 tienen como resultado 5.8 y 9998.6 -respectivamente-, sustituyendo estos valores en la función objetivo, resultaría :

$$\begin{aligned} W_0 &= 5(\ 5.8\ ) + 2(\ 9998.6\ ) \\ &= 20026.2 \end{aligned}$$

En esta función observamos que si aumentamos el valor de y_1 , proporciona 5.8 por cada unidad aumentada; mientras que si aumentamos y_2 ,se disminuye a razón de 9998.6 el valor de W_0. El siguiente paso será, determinar en cuanto se puede incrementar a y_1 manteniendo el aumento de cada unidad adicional en 5.8. Si el incremento en la variable dual la representamos por Δ, este valor podríamos determinarlo mediante :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 + \Delta \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 + 2/5\Delta \\ 9/5 + \Delta/5 \end{pmatrix}$$

Para que X_2 y X_1 cumplan con la condición de factibilidad, se debe tener que

$$8/5 + 2/5\Delta \geq 0 \text{ y } \Delta/5 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta \geq -4 \text{ y } \Delta \geq -9$$

Si incrementamos X_1 :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2-\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 + \Delta/5 \\ 9/5 - 2/5\Delta \end{pmatrix}$$

Donde el incremento para que la solución permanezca factible es de $\Delta \leq 9/2$.

III) **Cambios en los coeficientes tecnológicos (los $a_{i,j}$) :**

Las modificaciones expuestas para este caso se refieren a los cambios posibles que se realicen sobre la matriz de los elementos $a_{i,j}$; esto es sobre los :

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \end{array}$$

el procedimiento a seguir es el siguiente :

$$Z_j - C_j = [(Z_i - C_i) a_{i,j}] - C_n X_n$$

La modificación en los coeficientes del vector a_j ocasiona un cambio relacionado al término Z_j-C_j correspondiente. El resultado de esta operación ocasiona tres criterios a seguir :

a) $Z_j - C_j \geq 0$ Solución óptima.
b) $Z_j - C_j < 0$ Aplicar el método simplex hasta obtener la nueva solución óptima teniendo cuidado de que el vector y_j de la tableu óptimo sea actualizado por otro Y_j'.

Ejemplo:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 40X_1 + 60X_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad 3X_1 + 2X_2 \leq 2000 \\ \qquad X_1 + 2X_2 \leq 1000 \\ \qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

y su dual asociado :

$$(D) \quad \begin{cases} \text{Minimizar } W_0 = Z_0 = 2{,}000Y_1 + 1{,}000Y_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad 3Y_1 + Y_2 \geq 40 \\ \qquad 2Y_1 + 2Y_2 \geq 60 \\ \qquad Y_1, Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

La tabla final optima del problema primal está dada por :

Variables en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_2	0	1	-1/4	3/4	250
X_1	1	0	1/2	-.5	500
$Z_j - C_j$	0	0	5	25	35,000

con Max X = 500 ,Min Y = 3/2 y Z = 35,000

y Z = 27

Supongamos que deseamos cambiar el vector columna $A_1 = (3,1)$ -que no es básico- por el vector columna (9,30), por consiguiente el problema a resolver sería entonces :

$$
(P)\quad \begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 40X_1 + 60X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 9X_1 + 2X_2 \leq 2000 \\ \quad 30X_1 + 2X_2 \leq 1000 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}
$$

aplicando el procedimiento tendríamos que :

$$
Z_1 - C_1 = (5\ ,\ 25) \begin{pmatrix} 9 \\ 30 \end{pmatrix} - 40 = 795 - 40 = 755
$$

como $Z_1 - C_1 = 755 > 0$ solución óptima, la nueva tabla final sería :

Variables en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_2	0	1	-1/4	3/4	250
X_1	1	0	1/2	-.5	500
$Z_j - C_j$	755	0	5	25	35,000

con Max X = 500 ,Min Y = 25 y Z = 35,000

IV) **Introducción de nuevas restricciones :**

Consideremos el siguiente problema :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = X_1 + 4X_2 + 2X_3 \\ \text{s.a} \\ X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 10 \\ 2X_1 + 2X_2 - 3X_3 \leq 18 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

cuya solución óptima esta dada por :

Variables en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_2	.33	1	1.33	.33	0	3.33
X_4	1.33	0	-5.67	-.67	1	11.33
$Z_j - C_j$	.33	0	3.33	1.33	0	**13.33**

si se quiere introducir una nueva restricción por ejemplo $5X_1 + 7X_2 - 5X_3 \leq 20$ se sustituye la solución encontrada si esta nueva restricción:

$$X_1 = 0\,,\ X_2 = 3.33,\ X_3 = 0,\ X_4 = 11.33,\ X_5 = 0$$

para ver si se satisface o no. En caso de que satisfaga la restricción la solución encontrada sigue siendo óptima.

Si se introduce la restricción $5X_1 + 7X_2 - 5X_3 \leq 20$, esta no se satisface y en consecuencia la solución óptima encontrada llega a ser infactible. Para este tipo de problema es necesario hacer una iteración más del método simplex, ya con la restricción añadida.

En este caso podríamos concluir que la solución óptima no se afecta con la introducción de las nuevas restricciones siempre y cuando se realicen bien las operaciones por lo cual estaríamos haciendo referencia a la reducción del cómputo del método simplex.

V) **Adición de nuevas variables :**

La adición de nuevas variable, es decir de una actividad mas producirá otros términos Z_j-C_j y en consecuencia nuevas variables duales Y_j. Los cuales se calculan de la siguiente manera :

$$Z_j - C_j = \Pi\, A_j - C_j$$ donde Π son las variables duales básicas en el renglón $-Z - C_j$

y

$$Y_j = B^{-1} a_j$$

Si :

a) $Z_j - C_j \geq 0 \rightarrow$ La nueva actividad no debe entrar a la base y su valor será cero.
b) $Z_j - C_J < 0 \rightarrow$ Se introduce el vector de variables duales Y_j en la tabla y procedemos a iterar con el método simplex hasta lograr la solución óptima.

Ejemplo :

Supongamos que se quiere aumentar una actividad X_6 con un costo de \$2 y su vector columna asociado de coeficientes tecnológicos (4,2), el nuevo problema seria :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 2X_6 \\ \text{s.a} \\ X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 4X_6 \leq 10 \\ 2X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 2X_6 \leq 18 \\ X_1, X_2, X_3, X_6 \geq 0 \end{cases}$$

calculando la nueva variable :

$$Z_6 - C_6 = (4/3,0) \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = 7/3$$

El valor resulta ser $Z_j - C_j \geq 0$, en consecuencia aplicamos el primer criterio; la actividad no debe entrar a la base y su valor será cero, de modo que no cambian los valores óptimos.

CAPÍTULOII

EL DUAL SIMPLEX

- 2.1 El algoritmo dual simplex
- 2.2 Casos en que la solución no sea dual factible
- 2.3 Solución básica dual factible

2.1 EL ALGORITMO DUAL SIMPLEX

En el desarrollo del capítulo anterior se explicó que la Teoría de la Dualidad es de suma importancia en la programación lineal y que tiene un campo muy amplio de aplicaciones dentro de la misma, como es el caso de la interpretación económica de las variables duales con respecto a las variables primales.

Por otra parte hemos visto que las relaciones que existen entre el problema primal y el problema dual, nos dan la pauta fundamental para hacer un buen análisis de sensibilidad, apoyando la definición I del Capítulo anterior, por consiguiente nos proporciona la justificación necesaria para tratar de explicar con mayor claridad un algoritmo que plantea una aplicación más de la dualidad y que nos ayuda a resolver una gran rama de problemas de la programación lineal; este algoritmo lo conocemos bajo el nombre del Método Dual Simplex. Este ayudará a resolver aquellos problemas que se derivaron de la alteración en los parámetros del lado derecho de un PPL, es decir, los bi; en el caso en que uno de los parámetros no cumpla la condición de factibilidad donde será necesario reestablecerla. Este tipo de modificación se encontró en la sección 1.5 inciso 2, del capítulo antecedente y es aquí donde la desarrollare.

Por lo pronto diremos que el Método Dual Simplex trata con soluciones no factibles pero si dual factibles y se dirige hacia una solución óptima dual factible buscando mantener la factibilidad dual, esto es todo ($C_j - Z_j$) ≥ 0 en el caso de ser un problema de maximización, mientras se trabaja hacia la factibilidad primaria ($X_i \geq 0$).

Ahora la pregunta que surge de inmediato y que aclararemos más adelante es ¿ Qué hacer si no se tiene una solución dual factible ?. Por el momento sólo daremos paso a la explicación del algoritmo dual simplex.

Durante el procedimiento del algoritmo se trabajara bajo la representación de los valores del PPL (D) siguiente y su tabla correspondiente por ejemplo :

$$
(D) \quad \begin{cases} \text{Maximizar } W_0 = -2Y_1 - 4Y_2 + 2Y_3 \\ \text{s.a} \\ -4Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \leq -6 \\ -3Y_1 + 2Y_2 - 6Y_3 \leq -7 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}
$$

Valores en la base	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
Y_4	-4	-3	-1	1	0	-6
Y_5	-3	-2	-6	0	1	-7
Ci - Zi	-2	-4	-2	0	0	0

Tomamos el valor mas negativo

en la que en este ejemplo los elementos de las Yi básicas en la base son Y_4 y Y_5 con un valor de -6,-7 respectivamente.

Y los elementos de las Yi no básicas en la matriz A están representados como :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

El algoritmo consta de los siguientes pasos a seguir :

<u>*Paso 0 ó de inicialización :*</u>

Obtener la forma canónica del PPL agregando respectivamente sus variables de holgura para determinar si se tiene un problema con una solución no factible pero sí dual factible cumpliéndo las siguientes condiciones :

En el Caso de :	*Condición*
Maximización	$C_j\text{-}Z_j \leq 0$
Minimización	$C_j\text{-}Z_j \geq 0$

ya establecido esto obtener el dual asociado al PPL primal ya en su forma canónica, se puede continuar al paso 1

<u>Paso 1 :</u>

a) Si los coeficientes de las Y_i no básicas en la matriz A son ≥ 0, el problema no tiene soluciónes factibles.

b) Si los elementos de las Y_i no básicas en la matriz A son < 0, seguir con el algoritmo efectuando el paso 2.

Paso 2:

a) Si los valores de las Y_i básicas en la base son ≥ 0, se ha encontrado la solución óptima dual factible.
b) Si los valores de las Y_i básicas en la base son < 0, seguir iterando el algoritmo. Continuar en el paso 3.

Paso 3 :

a) Condición de factibilidad :
Escoger de entre las variables en la base de las Y_i básicas la más negativa, esta será la variable que saldrá de la base
b) Condición de optimalidad.
De las variables Y_i no básicas elegir de la siguiente forma :

$$Y_i = (C_j - Z_j) / Y_i$$

la Y_i con el cociente más pequeño, ya sea que se trate de un problema de "minimización", o de "maximización" elegir el valor absoluto más pequeño y esta será la variable que entrará a la base, esto es :

$$Y_i = \left| (C_j - Z_j) / Y_i \right|$$

Si todos los denominadores son ≥ 0 el problema no tiene solución factible y, en el caso de empates romper estos arbitrariamente.
Hacer las operaciones de renglón ya conocidas y regresar al paso 1.

1) Resolver el *siguiente problema de programación lineal (PPL) mediante el algoritmo dual simplex.*

$$\begin{cases} \textit{Minimizar } Z_0 = 2X_1 + X_2 \\ \textit{s.a} \\ \qquad 3X_1 + X_2 \geq 3 \\ \qquad 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ \qquad X_1 + 2X_2 \leq 3 \\ \\ \qquad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0 Obteniendo su forma canónica asociada con las variables correspondientes de holgura obtenemos :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = -2X_1 - X_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad -3X_1 - X_2 + X_3 = -3 \\ \qquad -4X_1 - 3X_2 + X_4 = -6 \\ \qquad X_1 + 2X_2 + X_5 = 3 \\ \\ \qquad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

los X_i básicos son :

$$X_3 = -3,\ X_4 = -6,\ X_5 = 3$$

que es una solución no factible, pero sí dual factible, pues cumple con un problema de maximización con sus $C_j - Z_j \leq 0$, $-2X_1$ y $-X_2$.

Ahora obteniendo el dual asociado al primal tenemos :

$$\begin{cases} \text{Minimizar } W_0 = -3Y_1 - 6Y_2 + 3Y_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -3Y_1 - 4Y_2 + Y_3 + Y_4 = -2 \\ \quad -Y_1 - 3Y_2 + 2Y_3 + Y_5 = -1 \\ \quad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 1 en adelante :

Valores en la base	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5		
Y_4	-3	-4	1	1	0	-2	más negativo
Y_5	-1	-3	2	0	1	-1	
$C_i - Z_i$	-3	-6	3	0	0	0	
Y_1	1*	4/3	-1/3	-1/3	0	2/3	
Y_5	0	-5/3	5/3	-1/3	1	-1/3	< 0
$C_i - Z_i$	0	-2	2	-1	0	2	
Y_1	1	0	1	-7/9	4/5	2/5	> 0
Y_2	0	1*	-1	1/5	-3/5	1/5	> 0
$C_i - Z_i$	0	0	0	3/5	6/5	**12/5**	

se llegó a una solución óptima dual factible con los siguientes valores :

$$Y_1 = 2/5\ ,\ Y_2 = 1/5\ ,\ Y_3 = 0$$

con un mínimo $W_o = 12/5$ y variables duales $X_1 = 3/5$, $X_2 = 6/5$

Comprobando tenemos :

$$\begin{aligned} W_0 &= -3Y_1 - 6Y_2 + 3Y_3 \\ &= -3(\,2/5\,) - 6(\,1/5\,) + 3(\,0\,) \\ &= \mathbf{-12/5} \end{aligned}$$

$$-3Y_1 - 4Y_2 + Y_3 + Y_4 = -2$$

$$-3(2/5) - 4(1/5) = -2$$
$$\mathbf{-2 = -2}$$

$$-Y_1 - 3Y_2 + 2Y_3 + Y_5 = -1$$
$$-2/5 - 3(1/5) = -1$$
$$\mathbf{-1 = -1}$$

Estos PPL también podrían ser resueltos mediante la aplicación del algoritmo sobre la forma canónica del problema original, de tal forma que se tendrá :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = -2X_1 - X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad -3X_1 - X_2 + X_3 = -3 \\ \quad -4X_1 - 3X_2 + X_4 = -6 \\ \quad X_1 + 2X_2 + X_5 = 3 \\ \\ \quad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

los Xi básicos son :

$$X_3 = -3,\ X_4 = -6,\ X_5 = 3$$

que es una solución no factible pero si dual factible, ya que cumple con un problema de maximización con sus $C_j < 0$, $-2X_1$ y $-X_2$.

Paso 1 en adelante :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
X_3	-3	-1	1	0	0	-3	
X_4	-4	-3*	0	1	0	-6	
X_5	1	2	0	0	1	3	
$C_j - Z_j$	-2	-1	0	0	0	0	
X_3	-5/3*	0	1	-1/3	0	-1	< 0
X_2	4/3	1	0	-1/3	0	2	
X_5	-5/3	0	0	2/3	1	-1	< 0
$C_j - Z_j$	-2/3	0	0	-1/3	0	2	
X_1	1*	0	-3/5	1/5	0	3/5	> 0
X_2	0	1*	4/5	-3/5	0	6/5	> 0
X_5	0	0	-1	13/15	1	0	≥ 0
$C_j - Z_j$	0	0	0	-2/5	-1/5	**12/5**	

con una solución óptima dual factible :

$$X_1 = 3/5,\ X_2 = 6/5,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0,\ X_5 = 0 \quad \text{y un mínimo } Z_0 = 12/5$$

y las variables duales : $Y_1 = 0$, $Y_2 = 2/5$ y $Y_3 = 1/5$

Como se puede apreciar, al resolver el problema tanto en la forma canónica como dual asociada, obtenemos la solución de uno y otro, así como la información de cada uno de ellos.

Podríamos utilizar cualquiera de las dos formas, pero mediante observaciones, nos damos cuenta que se reducen los cálculos utilizando el problema dual; por lo que los siguientes ejemplos los resolveremos mediante su dual (utilizaremos la forma canónica más adelante .

2) Resolver el *siguiente problema de programación lineal (PPL)* .

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = 2X_1 + 3X_2 + X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 8 \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ \\ \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0 Obteniendo su forma canónica asociada con las variables correspondientes de holgura obtenemos :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = -2X_1 - 3X_2 - X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -X_1 - 4X_2 - 2X_3 + X_4 = -8 \\ \quad -3X_1 - 2X_2 + X_5 = -6 \\ \\ \quad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

los Xi básicos son :

$$X_4 = -8,\ X_5 = -6$$

una solución no factible; pero si dual factible, ya que cumple con un problema de maximización con sus $C_j < 0$, $-2X_1$, $-3X_2$ y $-X_3$.

Su dual asociado al primal es :

$$
\begin{cases}
\text{Minimizar } W_0 = -8Y_1 - 6Y_2 \\
\text{s.a} \\
\quad -Y_1 - 3Y_2 + Y_3 = -2 \\
\quad -4Y_1 - 2Y_2 + Y_4 = -3 \\
\quad -2Y_1 + Y_5 = -1 \\
\\
\quad Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0
\end{cases}
$$

Paso 1 en adelante :

Valores en la base	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5		
Y_3	-1	-3	1	0	0	-2	
Y_4	-4	-2	0	1	0	-3	
Y_5	-2	0	0	0	1	-1	
$C_i - Z_i$	-8	-6	0	0	0	0	
Y_3	0	-5/2	1	-1/4	0	-5/4	< 0
Y_1	1	1/2	0	-1/4	0	3/4	
Y_5	0	1	0	-1/2	1	1/2	< 0
$C_i - Z_i$	0	-2	0	-2	0	6	
Y_2	0	1	-2/5	1/10	0	1/2	> 0
Y_1	1	0	1/5	-3/10	0	1/2	> 0
Y_5	0	0	-1	13/15	1	0	≥ 0
$C_i - Z_i$	0	0	-4/5	-9/5	0	7	

obteniendo una solución óptima dual factible con :

$Y_1 = 1/2$, $Y_2 = 1/2$, $Y_3 = 0$, $Y_4 = 0$ y $Y_5 = 0$ con Mínimo $W_0 = 7$

3) Resolver :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = -X_1 - X_2 - X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad 2X_1 + X_2 + X_3 = 8 \\ \quad X_1 + 3X_2 \leq 3 \\ \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

que es eqeuivalente a :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = -X_1 - X_2 - X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 8 \\ \quad 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 8 \\ \quad X_1 + 3X_2 \leq 3 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0)

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = X_1 + X_2 + X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = -8 \\ \quad 2X_1 + X_2 + X_3 + X_5 = 8 \\ \quad X_1 + 3X_2 + X_6 = 3 \\ \quad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

las X_j básicos son :

$$X_4 = -8,\ X_5 = 8,\ X_6 = 3$$

que es una solución no factible, pero sí dual factible, ya que cumple $C_j\text{-}Z_j \geq 0$.
El dual asociado al primal es :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } W_0 = -8Y_1 - 8Y_2 + 3Y_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -2Y_1 + 2Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1 \\ \quad -Y_1 + Y_2 + 3Y_3 + Y_5 = 1 \\ \quad -Y_1 + Y_2 + Y_6 = 1 \\ \\ \quad Y_i \geq 0 \text{ para } i = 1,2,.., 6 \end{cases}$$

este problema no tiene solución, ya que no contamos con las variables básicas < 0, es decir, con una solución no factible .

4) Resolver :

$$
\begin{cases}
\text{Maximizar } W_0 = -2Y_1 - 10Y_2 - 14Y_3 \\
\text{s.a} \\
\qquad -4Y_2 - Y_3 + Y_4 = -8 \\
\qquad -2Y_1 - Y_3 + Y_5 = -3 \\
\qquad -12Y_2 - 4Y_3 + Y_6 = -15 \\
\qquad Y_i \geq 0 \text{ para i= } 1,2,..,6
\end{cases}
$$

Valores en la base	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
Y_4	0	-4	-1	1	0	0	-8
Y_5	-2	0	-1	0	1	0	-3
Y_6	0	-12	-4	0	0	1	-15
C_i-Z_i	-2	-10	-14	0	0	0	0
Y_4	0	0	1/3	1	0	-1/3	-3
Y_5	-2	0	-1	0	1	0	-3
Y_2	0	1	1/3	0	0	-1/12	5/4
C_i - Z_i	-2	0	-32/3	0	0	-5/6	25/2
Y_6	0	0	-1	-3	0	1	9
Y_5	-2	0	-1	0	1	0	-3
Y_2	0	1	1/4	-1/4	0	0	5/4
C_i-Z_i	-2	0	-23/2	-5/2	0	0	20
Y_6	0	0	-1	-3	0	1	39
Y_1	1	0	1/2	0	-1/2	0	3/2
Y_2	0	1	1/4	-1/4	0	0	2
C_i - Z_i	0	0	-21/2	-5/2	-1	0	**23**

con una solución óptima dual factible : $Y_1 = 3/2$, $Y_2 = 2$, $Y_3 = 0$, $Y_4 = 0$, $Y_5 = 0$ y $Y_6 = 39$ con un máximo : $W_0 = 23$.

El ejemplo 2 (los b_i) mencionado en el capítulo anterior de la sección 1.5 (análisis de sensibilidad y la teoría de la dualidad) queda como ejemplo a resolver.

2.2 CASOS EN QUE LA SOLUCIÓN NO SEA DUAL FACTIBLE

En la sección anterior (2.1) estudiamos el algoritmo dual simplex, resolviendo 4 ejercicios elementales que pudiesen ocurrir en su tratamiento, encontrando una aplicación interesante de cada uno de los temas antes vistos y que demostraran tener un papel de gran relevancia en el desarrollo de cada problema , como es el caso del planteamiento de la forma canónica del problema original, y la propiedad de la dualidad haciendo uso del problema dual asociado al problema primal en su forma canónica.

Se puede constatar -una vez más- la relación existente entre el problema primal y el problema dual enfocada al hecho de que obteniendo la solución a uno se obtiene la solución a el otro y viceversa, esto nos llevó al tratamiento de 2 casos en los que podríamos aplicar el algoritmo, pero que gracias al ejercicio 1 se pudo comprobar que el resolver el problema dual conlleva a menos cálculos del algoritmo.

En el desarrollo del presente trabajo hemos aprendido muchas características importantes de la programación lineal en una de sus ramas y que poco a poco han ido fundamentando el tema principal : "el algoritmo dual simplex", ahora estudiaremos otra característica que complementa lo hasta el momento planteado y que da respuesta a la pregunta realizada anteriormente ¿ Qué hacer si no se tiene una solución dual factible ?, si ésto ocurriese el algoritmo sería imposible de aplicar ya que se debe partir del hecho de tener esta solución, por lo que habrá que hacer uso de algún artificio matemático que nos de respuesta a esta cuestión.

En este apartado trataremos de explicar, de una forma breve, el artificio a utilizar, el cual consta del planteamiento de un problema que llamaremos " Problema solución " en lo sucesivo "PS".

Por consiguiente si no se cumple una de las condiciones anteriores se dice que el problema no tiene solución dual factible y será necesario el plantear un "PS".

El planteamiento del "PS" consiste en insertar una restricción en la forma de las variables originales del problema con un parámetro del lado derhecho $b_i = M$, con el fin de establecer una solución básica dual factible.

Ejemplo 1. Plantear la primera tabla del siguiente PPL mediante el algoritmo dual simplex

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -3X_1 - 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad X_1 + X_2 = 10 \\ \quad X_1 \qquad \geq 4 \\ \quad\; X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

obtenemos el problema en forma de desigualdades :

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -3X_1 - 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad X_1 + X_2 \leq 10 \\ \quad X_1 + X_2 \geq 10 \\ \quad X_1 \geq 4 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0)

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 3X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ \quad -X_1 - X_2 + X_4 = -10 \\ \quad -X_1 + X_5 = -4 \\ \quad X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2,.., 5. \end{cases}$$

los Xi básicos son :

$$X_3 = 10,\ X_4 = -10,\ X_5 = -4$$

que es una solución no factible y tampoco dual factible, ya que no se cumple con un problema de maximización y sus C_j-$Z_j < 0$, en consecuencia, habrá que plantear un "PS" que estará dado por :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 3X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ \quad -X_1 - X_2 + X_4 = -10 \\ \quad -X_1 + X_5 = -4 \\ \quad X_1 + X_2 + X0 = M \\ \quad X_i \geq 0 \text{ para } i = 0, 1,.., 6. \end{cases}$$

La tabla para este problema estará dada por :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_0	
X_3	1	1	1	0	0	0	10
X_4	-1	-1	0	1	0	0	-10
X_5	-1	0	0	0	1	0	-4
X_0	1	1	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	3	2	0	0	0	0	0

Ejemplo 2. Plantear la primera tabla del siguiente PPL mediante el algoritmo dual simplex

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 4X_1 + 5X_2 + 7X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad 2X_1 + 4X_2 + 5X_3 \geq 10 \\ \quad 5X_1 + 6X_2 \qquad\quad \geq 6 \\ \qquad\quad 8X_2 + 6X_3 \leq -8 \\ \qquad\quad X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0)

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -4X_1 - 5X_2 - 7X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -2X_1 - 4X_2 - 5X_3 + X_4 = -10 \\ \quad -5X_1 - 6X_2 + X_5 = -6 \\ \qquad - 8X_2 - 6X_3 + X_6 = -8 \\ \qquad X_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2,.., 6. \end{cases}$$

los X_i básicos son :

$$X_4 = -10,\ X_5 = -6,\ X_6 = -8$$

que es una solución no factible y tampoco dual factible ya que no se cumple con un problema de minimización con sus C_j-$Z_j > 0$, en consecuencia, habrá que plantear un "PS" que estará dado por :

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -4X_1 - 5X_2 - 7X_3 \\ \text{s.a} \\ \quad -2X_1 - 4X_2 - 5X_3 + X_4 = -10 \\ \quad -5X_1 - 6X_2 + X_5 = -6 \\ \qquad - 8X_2 - 6X_3 + X_6 = -8 \\ \quad X_1 + X_2 + X0 = M \\ \qquad X_i \geq 0 \text{ para } i = 0, 1,.., 6. \end{cases}$$

La tabla relacionada con este problema será entonces :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_0	
X_4	-2	-4	-5	1	0	0	0	-10
X_5	-5	-6	0	0	1	0	0	-6
X_6	0	-8	-6	0	0	1	0	-8
X_0	1	1	0	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	-4	-5	-7	0	0	0	1	0

La solución a estos ejemplos nos servirá para el estudio de la siguiente sección, donde serán resueltos con la aplicación de lo planteado aquí con el fin de obtener una solución básica dual factible y demostrar la utilidad de la aplicación del algoritmo dual simplex sobre la forma canónica y encontrar una solución óptima dual factible.

2.3 SOLUCIÓN BÁSICA DUAL FACTIBLE

Se menciono en la sección anterior posibles modificaciones en el algoritmo, en las cuales se explicará a continuación el por qué de ellas. Si se retoma el hecho de que el algoritmo trabaja partiendo de una solución no factible pero, sí dual factible, no existe ningún problema para encontrar una solución óptima dual factible, pero en el caso contrario de no contar con esta solución es necesario realizar algunas modificaciones las cuales constan en el establecimiento de un "Problema Solución" (PS), lo cual nos indica lo siguiente : si no se cuenta con la solución dual factible es necesario establecer una solución básica dual factible mediante la realización de una iteración del algoritmo sobre el PS determinando la condición de factibilidad sobre el valor de "M"; ya realizada esta tarea se procederá a la aplicación del algoritmo en forma normal hasta encontrar la solución óptima dual factible.

Esta corrección sobre el algoritmo consta de lo siguiente :

Paso 0 ó de inicialización :

Obtener la forma canónica del PPL agregando respectivamente sus variables de holgura y de aquí determinar sí se tiene un problema con una solución no factible pero sí dual factible cumpliendo las siguientes condiciones :

En el Caso de :	*Condición*
Maximización *Minimización*	$C_j - Z_j \leq 0$ $C_j - Z_j \geq 0$

de aquí surgen dos planteamientos a seguir :

a) En el caso de tener una solución dual factible: seguir el algoritmo normalmente, en caso contrario considerar el inciso b.

b) Si no se tiene una solución dual factible aplicar las siguientes consideraciones:

I) Plantear un "PS"

II)

II) Aplicar el algoritmo dual simplex bajo las siguientes correcciones :

Paso 3.-

a) Condición de factibilidad.- La variable que saldrá de la base será "M"

Paso 2.-

No importa el valor de las Y_i para la determinación del pivote.

Si los $C_j - Z_j \leq 0$ se ha obtenido una solución básica dual factible.

Si los $C_j - Z_j > 0$ se trata de un problema con una solución óptima finita por lo que no podemos seguir con el algoritmo.

III) Ya determinada la solución básica dual factible seguir con el algoritmo dual simplex normal e iterar sin ninguna corrección hasta encontrar la solución óptima dual factible.

1) Si el PS no tiene soluciones factibles el problema original tampoco las tiene.

2) Surgen dos casos a considerar:

i) Encontramos una solución óptima al PS y X_0 es una variable básica, en dicha solución $Xo > 0$ y además ninguna otra variable básica en el óptimo depende explícitamente de M

ii) Se tiene una solución factible óptima para el problema auxiliar y X_0 no es básica

a) El valor de Z depende en el óptimo explícitamente de M.
b) Que el valor de Z no depende explícitamente en el óptimo de M.

El valor de M puede ser arbitrario dependiendo de las necesidades del analista.

Ejemplos :

Procederemos a la solución de los ejercicios vistos en el inciso anterior.

1) Aplicaremos los criterios del inciso b) ya que se trata de una solución no dual factible, la tabla estará dada por :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_0		
X_3	1	1	1	0	0	0	10	
X_4	-1	-1	0	1	0	0	-10	
X_5	-1	0	0	0	1	0	-4	
X_0	1*	1	0	0	0	1	M	← Iterar sobre M
C_j-Z_j	3	2	0	0	0	0	0	
X_3	0	0	1	0	0	-1	10-M	
X_4	0	0	0	1	0	1	M-10	
X_5	0	1	0	0	1	1	M-4	
X_1	1	1	0	0	0	1	M	
C_j-Z_j	0	-1	0	0	0	-3	3M	

Solución básica no dual factible : $X_3 = 10$, $X_4 = -10$, $X_5 = -4$, $X_0 = M$

Con : $Z_j = 0$

Solución básica dual factible : $X_3 = 10-M$, $X_4 = M-10$, $X_5 = M-4$, $X_1 = M$

Con : $Z_j = -3M$

ya que $C_j-Z_j \leq 0$ hemos obtenido una solución básica dual factible.

Ahora procedemos a la aplicación del algoritmo dual simplex :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_0	
X_3	0	0	1	0	0	-1*	10-M
X_4	0	0	0	1	0	1	M-10
X_5	0	1	0	0	1	1	M-4
X_1	1	1	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	0	-1	0	0	0	-3	3M
X0	0	0	-1*	0	0	1	M-10
X_4	0	0	1	1	0	0	0
X_5	0	1	1	0	1	0	6
X_1	1	1	1	0	0	0	10
C_j-Z_j	0	-1	-3	0	0	0	6M-30
X_3	0	0	1	0	0	-1	10-M
X_4	0	0	0	1	0	1	M-10
X_5	0	1	0	0	1	1	M-4
X_1	1	1	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	0	-1	0	0	0	-3	**3M**

2) La tabla relacionada con este problema es :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_0	
X_4	-2	-4	-5	1	0	0	0	-10
X_5	-5	-6	0	0	1	0	0	-6
X_6	0	-8	-6	0	0	1	0	-8
X_0	1	1	0	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	-4	-5	-7	0	0	0	1	0
X_4	0	-2	-5	1	0	0	0	2M-10
X_5	0	-1	0	0	1	0	5	5M-6
X_6	0	-8	-6	0	0	1	0	-8
X_1	1	1	0	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	0	-1	-7	0	0	0	4	**4M**

Solución básica no dual factible : $X_4 = -10$, $X_5 = -6$, $X_6 = -8$, $X0 = M$, Con : $Z_j = 0$

Solución básica dual factible : $X_4 = 10\text{-}M$, $X_5 = M\text{-}10$, $X_6 = M\text{-}4$, $X_1 = M$, Con : $Z_j = -4M$

lo que implica que $Z \rightarrow +\infty$

como $Z_j \leq 0$ hemos obtenido una solución básica dual factible.

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_0	
X_4	0	-2	-5	1	0	0	0	2M-10
X_5	0	-1	0	0	1	0	5	5M-6
X_6	0	-8	-6	0	0	1	0	-8
X_1	1	1	0	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	0	-1	-7	0	0	0	4	4M
X_2	0	1	5/2	-1/2	0	0	0	5-M
X_5	0	0	5/2	-1/2	1	0	5	4M-1
X_6	0	0	14	-4	0	1	0	32-8M
X_1	1	0	-5/2	½	0	0	1	2M-5
C_j-Z_j	0	0	-9/2	-1/2	0	0	4	5+3M

X_4	0	-2	-5	1	0	0	0	2M-10
X_5	0	-1	0	0	1	0	5	5M-6
X_6	0	-8	-6	0	0	1	0	-8
X_1	1	1	0	0	0	0	1	M
C_j-Z_j	0	-1	-7	0	0	0	4	**4M**

3)

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 5X_1 - 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad 2X_1 + 2X_2 \geq 9 \\ \qquad 3X_1 + X_2 \geq 11 \\ \qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0)

Forma Canónica

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -5X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad -2X_1 - 2X_2 + X_3 = 9 \\ \qquad -3X_1 - X_2 + \quad + X_4 = 11 \\ \qquad X_i \geq 0 \text{ para } i = 1,2,..,4 \end{cases}$$

los X_i básicos son :

$$X_3 = -9 \text{ y } X_4 = -1$$

que es una solución no factible y tampoco dual factible, asi que habrá que plantear un “PS”

$$\begin{cases} \text{Minimizar } Z_0 = -5X_1 + 2X_2 \\ \text{s.a} \\ \qquad -2X_1 - 2X_2 + X_3 = 9 \\ \qquad -3X_1 - X_2 + \quad + X_4 = 11 \\ \qquad X_1 + X_2 + X0 = M \\ \qquad X_i \geq 0 \text{ para } i = 0,1,..,4 \end{cases}$$

Procedemos a iterar de acuerdo al inciso b)

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_0	
X_3	-2	-2	1	0	0	-9
X_4	-3	-1	0	1	0	-11
X_0	1	1	0	0	1	M
C_j-Z_j	-5	2	0	0	0	0
X_3	0	0	1	0	2	2M-9
X_4	-2	0	0	1	1	M-11
X_2	1	1	0	0	1	M
C_j-Z_j	-3	0	0	0	-2	-2M

$Z \rightarrow \infty$

Este problema no tiene solución óptima finita ya que C_j-$Z_j > 0$ $\forall$ j$\in$ J; esto quiere decir que tiene una solución óptima finita y en consecuencia no tiene solución básica dual factible.

CAPÍTULOIII

COMPARACIÓN CON OTROS MÉTODOS

- 3.1 El Método Simplex
- 3.2 Relación entre el Simplex y el Dual Simplex
- 3.3 Otras consideraciones

3.1 EL MÉTODO SIMPLEX

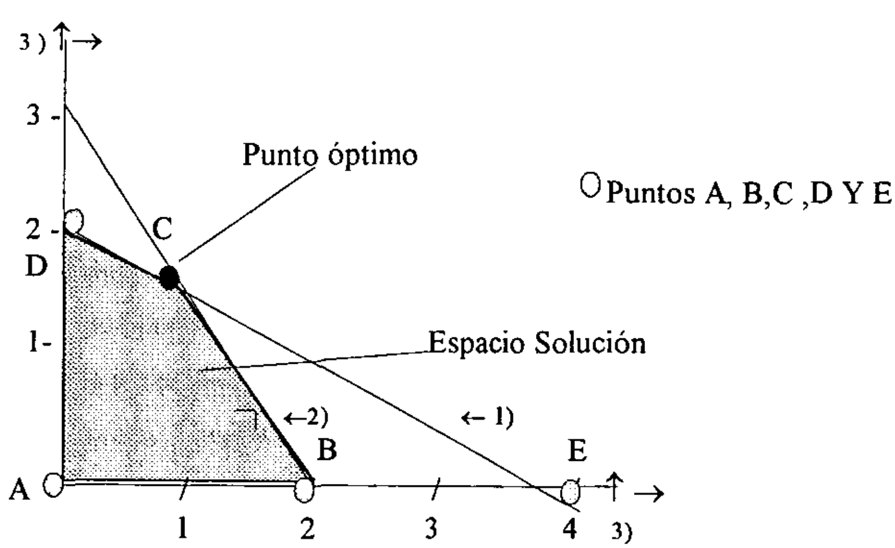
Este método se basa sobre el planteamiento del PPL en su forma estándar y comienza su aplicación siempre que se tenga una solución básica factible inicial (o punto extremo), es decir todos sus elementos tienen que ser $b_i \geq 0$ de lo contrario se tendría que aplicar otro método que fuera capaz de restablecer la factibilidad como es el caso del método dual simplex o la técnica de las variables artificiales. Por otra parte el simplex es de gran ayuda para resolver problemas muy extensos en las computadoras actuales, sin embargo en muchas ocasiones se le toma como un algoritmo que sólo busca alcanzar una solución óptima descuidando así la esencia del fundamento en su desarrollo; por lo que estudiaremos la solución en la que se fundamenta el método simplex, la cual es conocida como la solución gráfica, de aquí que se le conozca al simplex como un método algebraico, y no sólo eso, sino esta nos proporcionará las herramientas necesarias para entender con mayor claridad este método.

Comenzaremos partiendo del siguiente PPL y su solución gráfica hacia el desarrollo algebraico del método simplex.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Maximizar } Z_0 = 6X_1 + 8X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3X_1 + 6X_2 \leq 12 \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ \quad\quad X_1, X_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

La solución a este problema por medio del método gráfico estará dada por :

Graf.(1)



Cuyo punto óptimo C = (X_1, X_2) = (1,1.5), sustituyendo este en la función objetivo obtendríamos que :

$$Z_0 = 6X_1 + 8X_2$$

por lo que:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 6(1) + 8(1.5) \\ &= \mathbf{18} \end{aligned}$$

Valor óptimo en nuestro ejemplo.

Como ya mencionamos anteriormente, el desarrollo del método simplex se aplica sobre la forma estándar del PPL, obteniendo esto tendríamos :

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = 6X_1 + 8X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3X_1 + 6X_2 + X_3 \qquad = 12 \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \qquad + X_4 = 6 \\ \quad\quad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

las variables X_3 y X_4 son las variables de holgura para obtener una igualdad y que a continuación veremos su importancia.

Como se observa en la gráfica anterior el espacio de soluciones esta en función de los valores que pudiesen tomar las variables X_1, X_2, X_3 y X_4. Por ejemplo, observemos la ecuación 1) en la gráfica, el valor de la variable de holgura X_3 debe ser necesariamente 0 de lo contrario no se cumpliría la igualdad, esto es por ejemplo si X_3 = 1, entonces la ecuación sería :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 6X_2 + X_3 &= 12 \\ 3X_1 + 6X_2 + 1 &= 12 \\ 3X_1 + 6X_2 &= 12 - 1 \\ 3X_1 + 6X_2 &= 11 \end{aligned}$$

donde es necesario mover la línea CD hacia abajo y paralela así misma hasta que satisfaga la ecuación $3X_1 + 6X_2 = 11$, esto reduciría nuestro espacio de soluciones y no se considerarían todos los valores posibles para obtener un punto óptimo máximo. Ahora bien, este estudio se podría generalizar para todas las variables si así lo deseáramos, mediante las variables de no negatividad nuestra área esta dada por los puntos AED.

De forma similar también es posible analizar la variable de holgura X_4.

El punto óptimo observado en la gráfica (1), lo podríamos catalogar como un punto extremo de nuestro espacio de soluciones el cual maximiza el valor de nuestra función objetivo y que puede ser determinado mediante un procedimiento algebraico sobre el PPL, por ejemplo: El espacio de soluciones esta dado por los puntos extremos ABCD, los cuales son determinados por las ecuaciones del PPL, este, a su vez, se integra de 4 incógnitas con dos ecuaciones cuya diferencia en número es 2 y, proporciona una relación directa con un punto extremo el cual se compone de sus respectivas variables y que en este caso cada punto extremo analizando sus componentes tiene dos variables iguales a cero; supongamos el punto extremo "C" que es el punto óptimo y es precisamente el punto de intersección entre las dos ecuaciones, en primera instancia para que se cumpla este punto es necesario que tanto X_3 y X_4 valgan cero y las otras variables sean indistintas en valor.

El planteamiento anterior proporciona las soluciones básicas de las ecuaciones simultáneas definidas en la forma estándar.

En general, una solución básica para un conjunto de "m" ecuaciones lineales con "n" incógnitas estará dada por n-m variables iguales a cero, con base a esta se resolverán las "m" ecuaciones, el método simplex resuelve este problema mediante la iteración del algoritmo determinando las variables que se harán iguales a cero, las cuales se llamarán variables básicas y los restantes no básicas.

El método simplex se puede aplicar sólo en el caso de tener una solución básica factible inicial, es decir, un punto extremo factible que avanza sobre el espacio de soluciones hasta alcanzar un punto extremo factible óptimo, el cual tenga la facultad de mejorar el valor de nuestra función objetivo. Este avance sobre el espacio de soluciones se fundamenta bajo las dos condiciones siguientes:

1) La condición de óptimalidad.- Asegura que nunca se encontrará una solución inferior, en cuanto al punto de solución actual.
2) La condición de factibilidad.- Garantiza que el desarrollo del método iniciando de una solución básica factible, únicamente se encontrarán durante la aplicación del algoritmo las soluciones factibles.

El ejemplo en su forma estándar sería :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Maximizar } Z_0 = 6X_1 + 8X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3X_1 + 6X_2 + X_3 \qquad = 12 \\ \quad 3X_1 + 2X_2 \qquad + X_4 = 6 \\ \qquad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{array}\right.$$

Como se estableció es necesario tener una solución básica factible con todas sus variables de holgura no negativas y dos variables iguales a cero en cada ecuación, esto se observa directamente del PPL obteniendo lo siguiente:

$$X_3 = 12$$
$$X_4 = 6$$

con X_1 y X_2 iguales a cero, lo cual nos proporciona una solución obvia, pues estas variables conforman con sus coeficientes en las restricciones una matriz unitaria :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

. Las variables básicas son X_3 y X_4 y las otras son llamadas no básicas.

Ahora que ya tenemos una solución básica factible inicial debemos determinar un nuevo punto extremo o solución básica que mejore el valor de nuestra función objetivo. Esta operación se determina del renglón Z_0 un coeficiente de mayor valor negativo de las variables no básicas, la variable que se elige se dice que será la que entrará a la base transformandoce así en una variable básica, la variable que saldrá de la base estará determinada por la condición de factibilidad que estipula que en forma geométrica la intersección más cercana al punto "A" de la fig 1 será el valor del punto extremo que representa la variable que ha de salir. En el caso del método simplex esto se logra dividiendo el vector columna solución entre el vector columna de la variable que ha de entrar y se determinará la variable mediante la razón más pequeña de la división, lo cual se observa a continuación :

Variable que entrará a la base
↓

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	
→ X_3	3	6	1	0	12
X_4	3	2	0	1	6
$C_j - Z_j$	-6	-8	0	0	0

↑ Variable que saldrá de la base — ↑ Valor más negativo

Vector solución	Vector columna	Razón	
12	6	2	← Mínimo valor
6	2	3	

Hecho lo anterior, se procederá a la utilización del método Gauus-Jordan, como primer paso habrá que igualar a 1 el coeficiente de la intersección en la tabla de la variable que entrará y la que saldrá, este valor es 6 (en nuestro ejemplo) el cual será nuestro elemento pivote por lo que tendremos que multiplicar todo el renglón por 1/6 y, posteriormente, realizar las operaciones de renglón haciendo los coeficientes de arriba y de abajo, de nuestro pivote, iguales a cero.

Se repetirán las operaciones anteriores hasta que los valores de la parte izquierda de nuestro renglón C_j-Z_j sean positivos, nuestra tabla solución sería entonces :

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	
X_2	0	0	1/4	-1/4	3/2
X_1	1	0	-1/6	1/2	1
$C_j - Z_j$	0	0	1	1	18

$C_j - Z_j = (1,1) \geq 0$ por lo que no es posible encontrar una mejor solución y esta queda con los siguiemtes valores :

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 3/2$$

y valor óptimo máximo

$$Z_0 = 6(1) + 8(1.5)$$
$$= 18$$

Que es la misma solución óptima obtenida en la gráfica de la figura 1.

El método simplex realiza una extensión de las condiciones de factibilidad y óptimalidad bajo los siguientes lineamientos con base en lo aplicado anteriormente:

Condición de optimidad.- La variable que entrará en la base se determinará mediante el valor correspondiente en la ecuación Z_j de las variables no básicas; cumpliéndose, que en el caso de maximización se tomará aquella con mayor coeficiente negativo, en el caso de minimización se eligirá la que tenga el valor más positivo.

Condición de factibilidad.- La variable que saldrá de la base es aquella variable básica correspondiente a la razón más pequeña de los valores actuales de las variables básicas entre los coeficientes positivos de las restricciones de la variable que entrará. En el caso de que se encuentren con empates, estos serán rotos arbitrariamente.

Entonces el algoritmo simplex se regirá por los siguientes pasos a seguir:

Paso 0.-

Obtener la forma estándar del PPL

Paso 1.-

Observar si se tiene una solución básica factible inicial, sino es así será necesario restablecer la factibilidad mediante el método dual simplex o la técnica de las variables artificiales.

Paso 2.-

Aplicar las condiciones de optimalidad y de factibilidad iterando hacia una solución básica factible óptima, esto se hará hasta que los valores de la parte izquierda del renglón C_j-Z_j sean positivos.

Ejemplo.-

Resolver mediante el algoritmo simplex el siguiente PPL:

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = X_1 + X_2 \\ \text{s.a} \\ \quad 3X_1 + 3X_2 \leq 10 \\ \quad 2X_1 + X_2 \leq 4 \\ \quad X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ \quad X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 0.-

$$\begin{cases} \text{Maximizar } Z_0 = X_1 + X_2 \\ \text{s.a} \\ 3X_1 + 3X_2 + X_3 = 10 \\ 2X_1 + X_2 + X_4 = 4 \\ X_1 + 2X_2 + X_5 = 6 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 \end{cases}$$

Paso 1.-

$X_3 = 10$, $X_4 = 4$ y $X_5 = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Paso 2.-

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_3	3	3	1	0	0	10
X_4	2	1	0	1	0	4
X_5	1	2	0	0	1	6
$C_j - Z_j$	-1	-1	0	0	0	0
X_3	3/2	0	1	0	-3/2	1
X_4	3/2	0	0	1	-1/2	1
X_2	1/2	1	0	0	0	3
$C_j - Z_j$	-1/2	0	0	0	1/2	3
X_1	1	0	2/3	0	1	2/3
X_4	0	0	-1	1	1	0
X_2	0	1	-1/3	0	1	8/3
$C_j - Z_j$	0	0	1/3	0	0	**10/3**

Solución básica factible óptima : $X_1 = 2/3$ y $X2 = 8/3$

y

$$\begin{aligned} Z_0 \text{ óptimo máximo } Z_0 &= X_1 + X_2 \\ &= 2/3 + 8/3 \\ &= 10/3 \end{aligned}$$

Comprobación :

1) $3X_1 + 3X_2 + X_3 = 10$
$10 = 10$

2) $2X_1 + X_2 + X_4 = 4$
$4 = 4$

3) $X_1 + 2X_2 + X_5 = 6$
$6 = 6$

3.2 RELACIÓN ENTRE EL SIMPLEX Y EL DUAL SIMPLEX

Durante el desarrollo de nuestro estudio hemos recopilando varios conceptos los cuales han sido involucrados y desarrollados de acuerdo al tema principal de este trabajo, como lo : fue: el caso del problema primal y del problema dual con respecto a la teoría de la dualidad que en su tratamiento proporcionó la herramienta necesaria para relacionar dichos problemas dando pauta a un fundamento primordial en el estudio del método dual simplex; aunque no se mencionaron a su tiempo las razones por las que fue necesario el seguimiento de varios conceptos tanto algebraicos como teóricos, cada una de ellos se fundamenta por si sólo y se establece la relación entre el método simplex y el método dual simplex, ya expuesta bajo las conclusiones que podríamos establecer como resultado del estudio de cada capitulo.

Aunque esto es cierto, no esta de más mencionar las relaciones que unen a estos dos métodos.

Si bien tanto uno como el otro método resuelven problemas de programación lineal pero bajo diferentes circunstancias de inicio, las cuales son de suma importancia para la aplicación del método en cuestión, podríamos establecerlas en la siguiente tabla:

Solución de inicio	Método a aplicar
Solución básica factible	Método simplex
Solución básica dual factible	Método dual simplex

En la que podríamos preguntarnos qué relación existe entre una y otra solución de inicio. Esta relación radica en el hecho de que si el PPL no tiene solución básica factible de inicio es necesario restablecer la factibilidad y esto se logra mediante la aplicación del método dual simplex o los métodos de variables artificiales, los cuales se componen de la técnica de penalización y la técnica de las dos fases. Entre estos métodos, si retomamos el concepto de que el método simplex, se hace latente la gran ayuda para resolver problemas muy extensos en las computadoras actuales y lo relacionamos con la idea fundamental de la dualidad que nos dice que en muchas ocasiones resulta más sencillo resolver el problema dual que el problema primal ya que nos ahorraremos un número considerable de cálculos, entonces es preferible aplicar el método dual simplex, esta idea resulta de gran ayuda en la resolución de los PPL.

Otra de las relaciones entre estos dos métodos se refiere a que el método del dual simplex basa todos sus cálculos en el algoritmo simplex con algunas modificaciones pero al final de cualquiera de los métodos se llega a la misma solución y nos proporciona el valor de las variables no básicas del otro problema, siendo estas la solución de las variables básicas del mismo y viceversa. Por ejemplo consideremos las siguientes tablas finales del método dual simplex y el simplex de un mismo PPL :

Tabla 1.- Método simplex

Valores en la base	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
X_1	1*	0	-3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1*	4/5	-3/5	0	6/5
X_5	0	0	-1	13/15	1	0
$Z_j - C_j$	0	0	2/5	1/5	0	**12/5**

Tabla 2.- Método dual simplex

Valores en la base	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
Y_1	1	0	1	-7/9	4/5	2/5
Y_2	0	1*	-1	1/5	-3/5	1/5
Ci - Zi	0	0	0	-3/5	-6/5	**12/5**

en la tabla 1 observamos que X_4 y X_5 son las variables básicas correspondientes a Y_1 y Y_2 en la tabla 2 con un valor de :

$$Y_1 = 2/5 \text{ y } Y_2 = 6/5.$$

y

$$Z_0 \,(\,\text{Max}\,) = \mathbf{12/5}$$

Mientras que en la tabla 2, Y_4 y Y_5 corresponden a X_1 y X_2 y en la tabla 1 con un valor

$$X_1 = 3/5 \text{ y } X_2 = 6/5,$$

y

$$Z_0 \,(\,\text{Min}\,) = \mathbf{12/5}$$

respectivamente.

3.3 OTRAS CONSIDERACIONES

Dentro de esta sección se considerarán aquellas diferencias existentes entre el algoritmo dual simplex y el método simplex.

En el método simplex es necesario comenzar su aplicación sobre un PPL con una solución básica factible, es decir todos los $X_j \geq 0$. En muchos de los casos este tipo de solución no será considerada como una solución óptima en donde el renglón ($C_j - Z_j$) < 0 por lo que es imprescindible un acercamiento hacia la optimalidad siempre y cuando se mantenga la factibilidad, ya obtenida la optimalidad con todos sus elementos del renglón ($C_j - Z_j$) ≥ 0 se dice que se ha encontrado una solución básica óptima factible. El método simplex se inicia con una solución básica factible pero no dual factible, mientras que el dual simplex inicia con una solución inicial no básica factible pero si dual factible con algunos de sus elementos $X_j <$ 0 y todo su renglón ($Z_j - C_j$) ≥ 0, el algoritmo dual simplex itera bajo el requerimiento de mantener la factibilidad dual con todo el renglón ($Z_j - C_j$) ≥ 0 mientras se va avanzando hacia una factibilidad primaria obteniendo todos los $X_j \geq 0$.

Otra de las diferencias importantes radica en el planteamiento de las consideraciones de optimalidad y de factibilidad, en cada método esto es :

1) Condición de optimidad.-

En el método simplex la variable que entra en la base se determina mediante el valor correspondiente en la ecuación Z_j de las variables no básicas cumpliéndose que en el caso de maximización se toma aquella con mayor coeficiente negativo, en el caso de minimización se elige la que tenga el valor más positivo, mientras que en el dual simplex las variables Yi, no básicas, se eligen de la siguiente forma :

$$Y_i = (C_j - Z_j) / Y_i$$

la Y_i con el cociente más pequeño en el caso de tratarse con un problema de "minimización", en el caso de uno con "maximización" elegir el valor absoluto más pequeño esto es :

$$Y_i = | (C_j - Z_j) / Y_i |$$

Si todos los denominadores son ≥ 0 el problema no tiene solución factible y en el caso de empates romper estos arbitrariamente.

2) Condición de factibilidad.-

Para el simplex la variable que sale de la base es aquella variable básica correspondiente a la razón más pequeña de los valores actuales de las variables básicas entre los coeficientes positivos de las restricciones de la variable que entra. En el caso de con empates estos se romperán arbitrariamente.

En esta condición el dual simplex implica escoger de entre las variables de las Yi básicas la más negativa, esta será la variable que saldrá de la base.

El planteamiento de las condiciones anteriores es distinto tanto de un método como del otro aunque estas diferencias se fundamentan bajo la aplicación de la forma del PPL en su representación primal y su representación dual.
En algunas ocasiones como fue el caso del Capítulo II el resolver cualquiera de los dos problemas por el método dual simplex nos da el mismo valor del punto óptimo (ó extremo); en consecuencia otra diferencia que encontramos radica en su representación por la solución gráfica, comportándose como el ejemplo visto en la sección 1.4 del Capítulo I.
Hasta este momento hemos podido constatar que el método dual simplex resulta ser una herramienta de gran ayuda en el planteamiento y solución de los problemas de programación lineal expuestos en este trabajo, y sobre todo no hay que olvidar -que a diferencia del método simplex- es capaz de resolver aquellos problemas en los que el análisis de sensibilidad necesite restablecer, como ya vimos, la factibilidad.

CAPÍTULOIV

APLICACIONES E INTERPRETACIONES

- 4.1 Programación del Método Simplex

- 4.2 Programación del Método Dual Simplex

APLICACIONES E INTERPRETACIONES

En el siguiente apartado se considera la programación del método Dual Simplex y el método Simplex, con el fin de enriquecer la teoría hasta el momento definida. Los métodos citados se programaron bajo la plataforma del lenguaje orientado a eventos NewEra - Informix versión 6.2, proponiendo su programación en un solo paquete, es decir, dicho paquete contempla los dos métodos de la Programación Lineal.
Entre otra de las características que fueron necesariamente contempladas, contamos con el planteamiento de una flexibilidad usuario-sistema, obteniendo con esto el resultado de una aplicación sumamente sencilla a desarrollar y entender.
Este lenguaje de programación esta orientado al manejo de información en una base de datos Informix Online 5.0, en estos momentos este lenguaje se ha convertido en uno de los mas potentes dentro del mercado, gracias a su flexibilidad de manejo de información.
. Como primer punto se presentan varias pantallas de presentación entre las que se cuenta con una en la que se hace referencia al título del modulo. En las subsecuentes se presenta una ventana en la que se indica un menú de opciones, en las que se establecerá la que se desee ejecutar.

- En el caso de elegir el método Dual Simplex, este programa proporciona una ventana de elección con la forma fisica del PPL, esto es :

$$\begin{aligned} & W_0 = C_y \\ \text{s.a} & \\ & A_y \geq C \end{aligned}$$

posteriormente se procede a la captura de los Coeficientes de la Matriz A , el número de restricciones y variables así como los elementos del vector C_i y los de la función objetivo W. Con estos valores determinados es obtenida la solución.

- En el caso de elegir el método Simplex este proporciona una vez más una ventana de elección con la forma fisica del PPL esto es :

$$\begin{aligned} & Z_0 = Cx \\ \text{s.a} & \\ & Ax \geq C \end{aligned}$$

Una vez mas se procede a la captura de los coeficientes de la Matriz, el número de variaoles, así como el número de restricciones, estas serán integradas al sistema mediante un formato establecido en la pantalla; el siguiente paso es determinar los elementos del vector b_i y los de la función objetivo C_x. Con estos valores determinados es obtenida la solución.

CASO A APLICAR

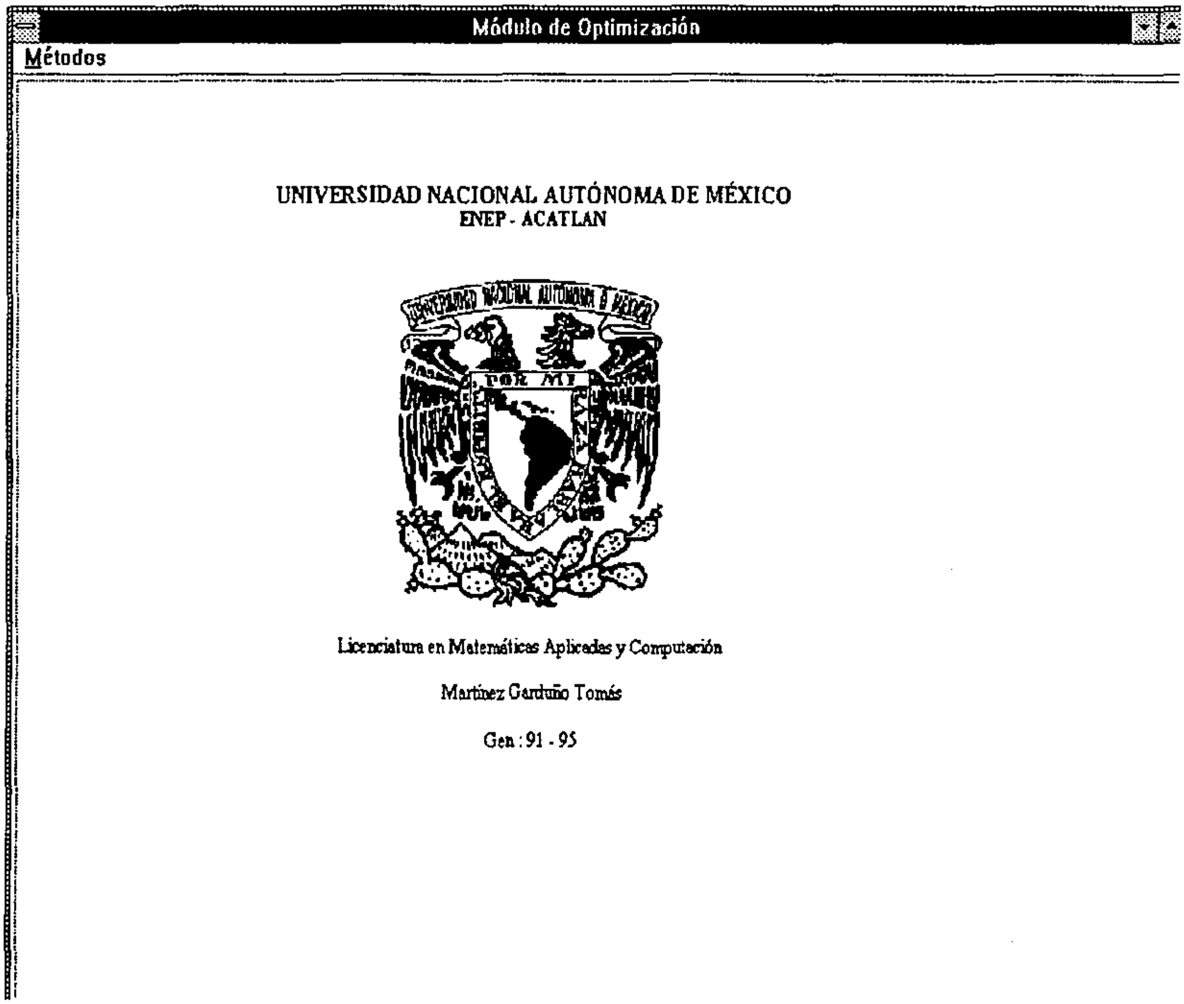
El gerente de producción de Los Laboratorios Quik S.A de C.V, necesita planear la combinación de elementos químicos para el siguiente pedido y no tiene claro cómo va a proceder para elaborar un plan de acuerdo a sus necesidades. Esta compañía es una de las mas importantes en la cual se producen entre otras cosas vacunas, vitaminas y otros. Entre los mas importantes se encuentran dos tipos de complejos vitamínicos que se elaboran en base a combinaciones de reactivos que se compran con proveedores externos. Cada dos meses el gerente debe determinar la cantidad de cada complejo vitamínico que deberá llevarse acabo. Dentro de su planeación deberá considerar el costo de cada uno de los reactivos y de esta forma determinar el precio de venta de cada uno de los tipos de reactivos y las restricciones que conlleva el producir dichos complejos dentro de las cuales deberá considerar la mano de obra y el equipo necesario. La determinación en este caso se vuelve un poco complicada ya que los pedidos por lo regular se surten directamente al cliente pero esta ocasión serán en base a un mayorista farmacéutico. El gerente deberá llevar acabo este plan de tal forma que se pueda obtener un máximo de utilidades y a su vez utilizar la cantidad mínima de cada ingrediente.

Los dos tipos de complejos que se elaboran son : el complejo "A" y "B". El complejo "A" se compone de 5% de Vitamina D , 5% de Acetato de D+alfatocoferol (Vitamina E) , 10% de ácido folico y 80% de Acetato de vitamina A y Betacaroleno, en cuanto el complejo "B" se compone de 5% de Vitamina D , 10% de Acetato de D+alfatocoferol (Vitamina E) , 5% de ácido folico y 80% de Acetato de vitamina B y Betacaroleno, el mayorista esta dispuesto a pagar $71.5 por el complejo "A" y $69 por el complejo "B" por cada Kg respectivamente, en cuanto a los productos naturales estos se tienen sin ninguna limitación teniendo estos un precio de $10 por Kg y en cuanto al concepto de mezclado se tiene un precio de $15 por el mismo. El problema al que se enfrenta el gerente es el de ¿ de que manera utilizar los recursos escasos (Vitamina D, Acetato de D+alfatocoferol (Vitamina E) , ácido folico) de que dispone, de tal forma de que se obtengan las mayores utilidades para la compañía.

En este caso los costos a tomar en cuenta son los de los ingredientes así como también los costos de mezclado, el cual es de $15 por Kg como habíamos mencionado.

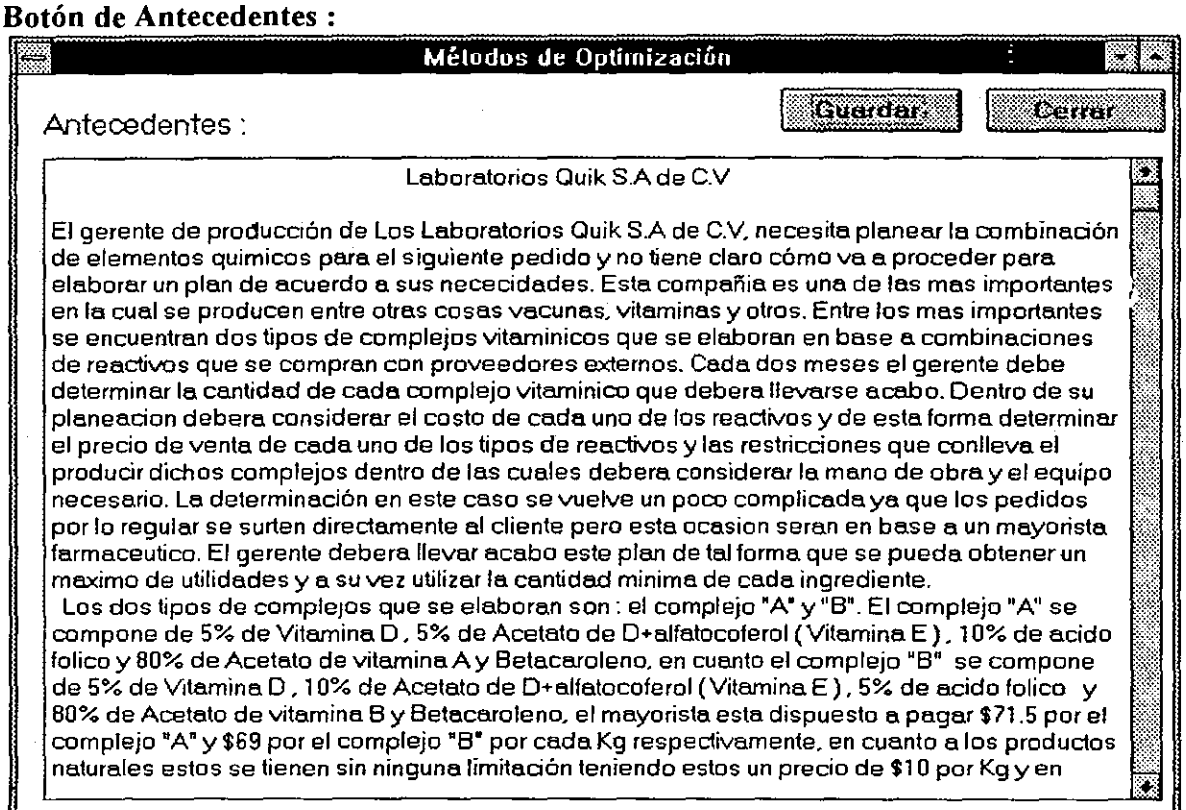
VENTANAS UTILIZADAS EN EL MODULO DE OPTIMIZACION

Presentación del modulo :

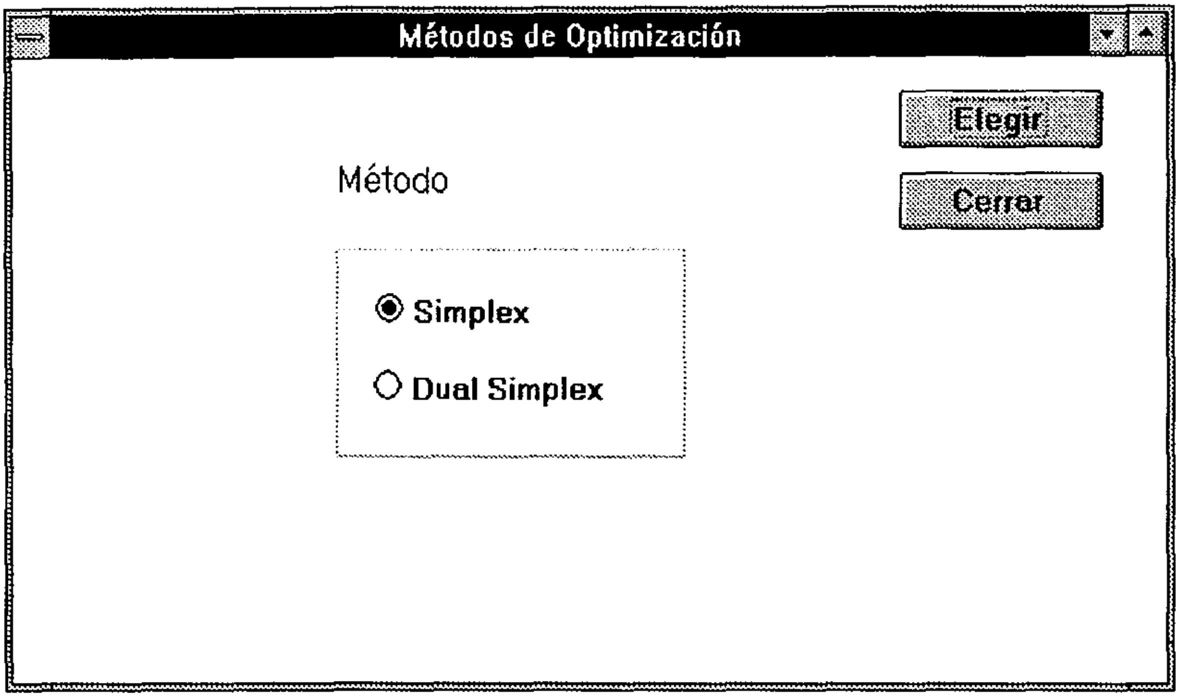


Menú de opciones (controlado por los botones)

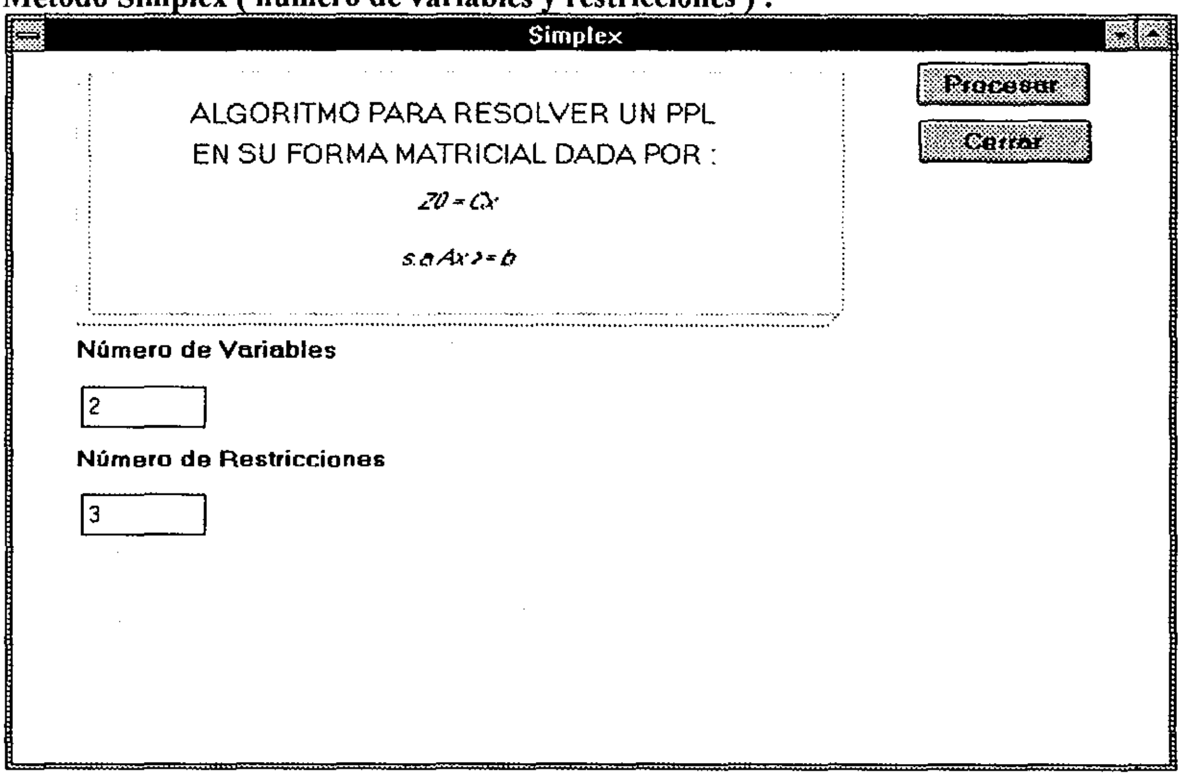
Botón de Antecedentes :



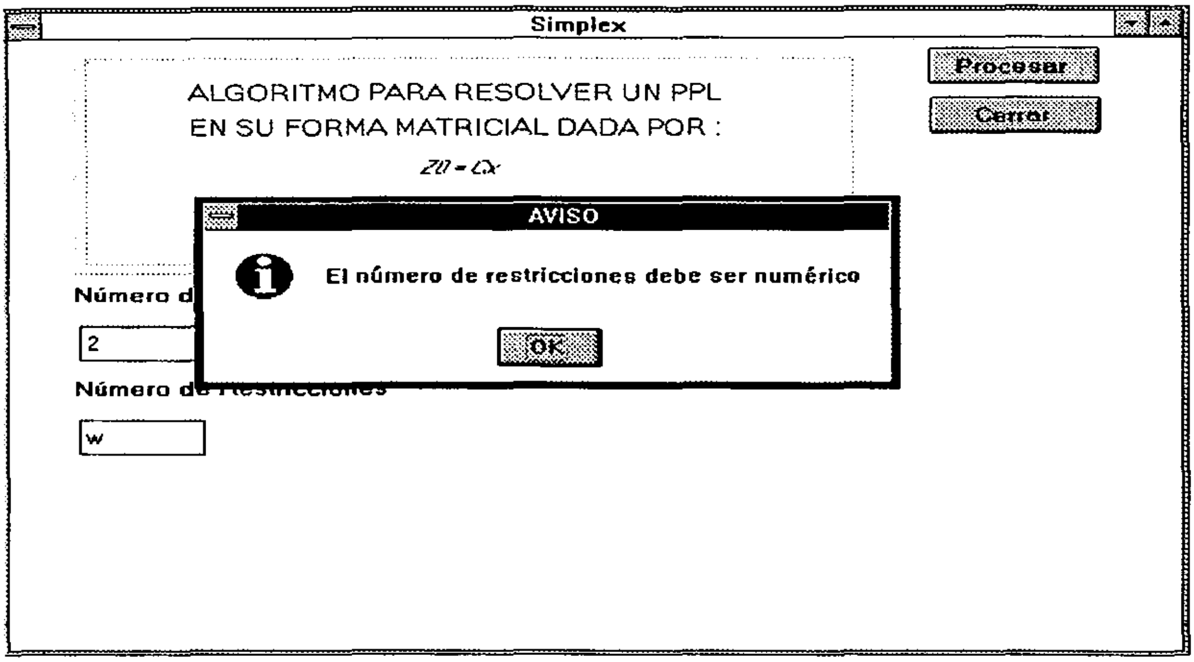
Botón de aplicaciones :



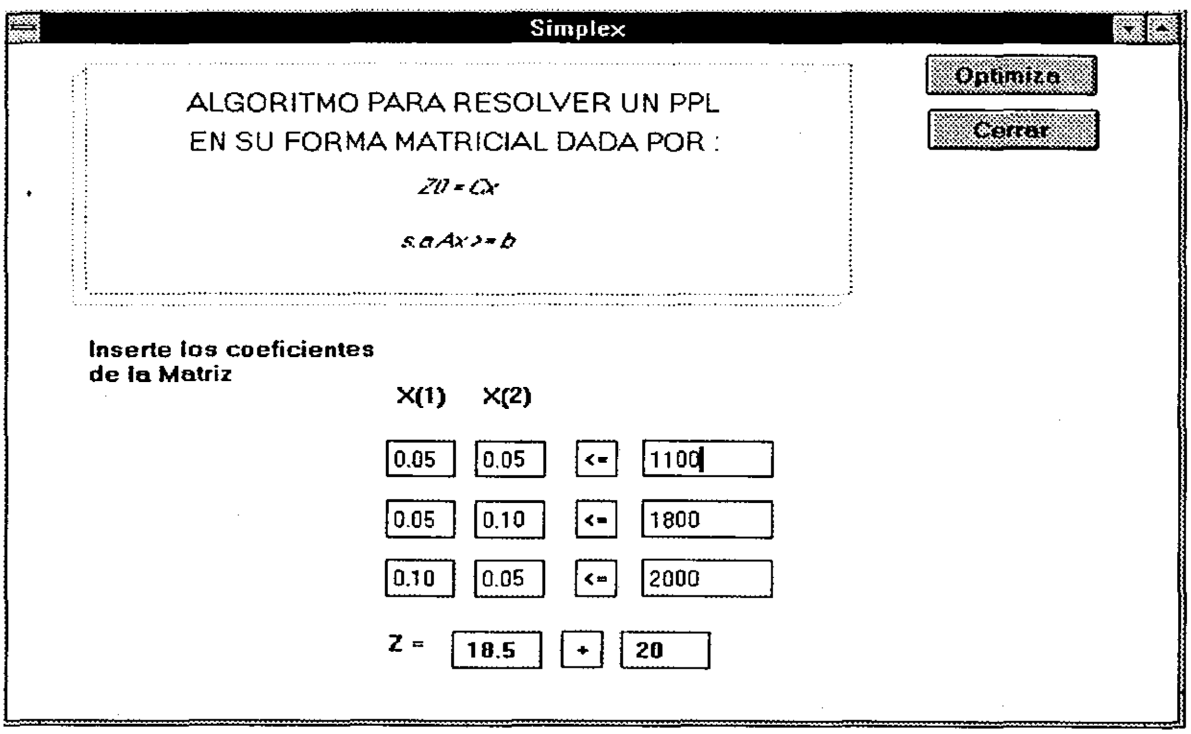
Método Simplex (número de variables y restricciones) :



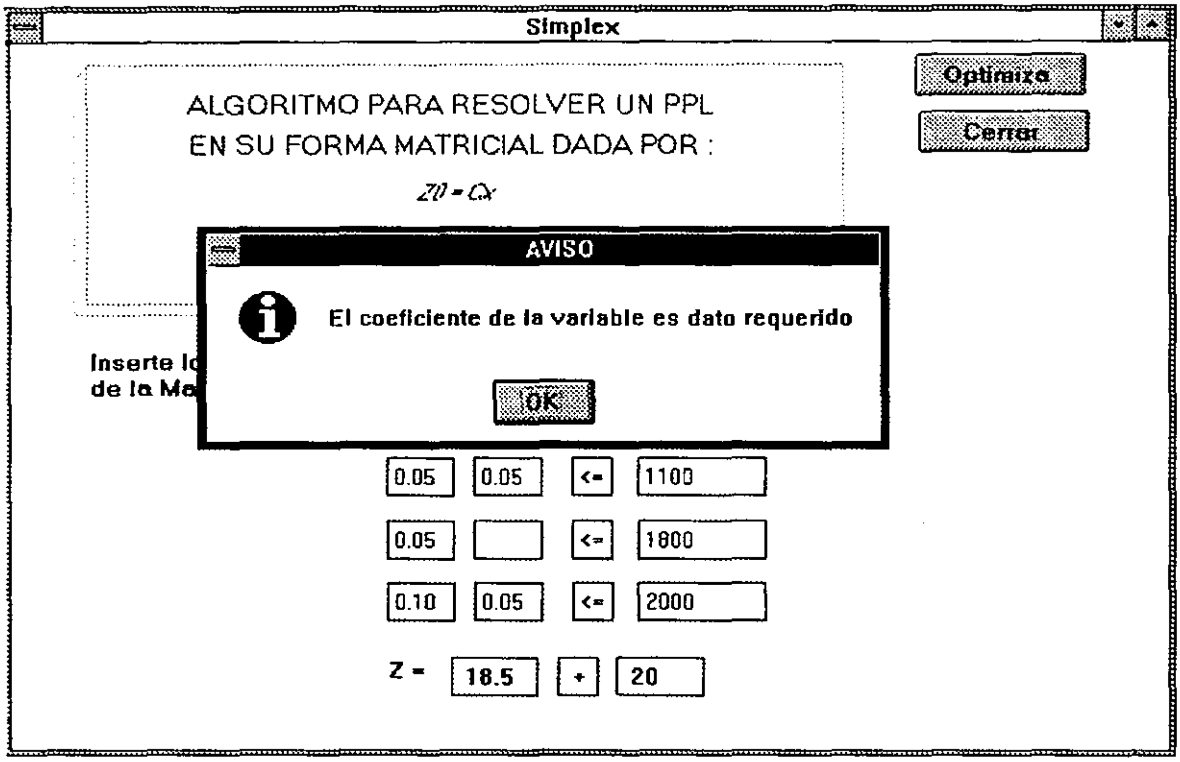
En el caso de capturar alfanuméricos estos son validados :



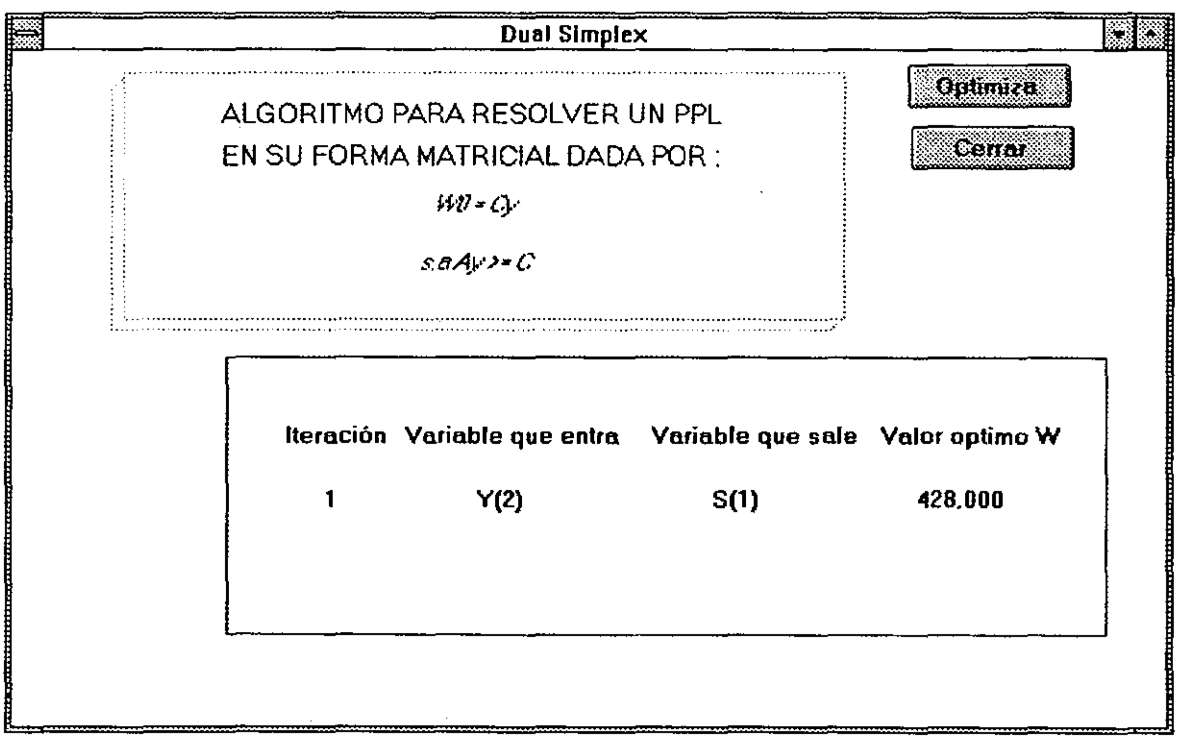
Botón Procesar (captura de la matriz de coeficientes) :



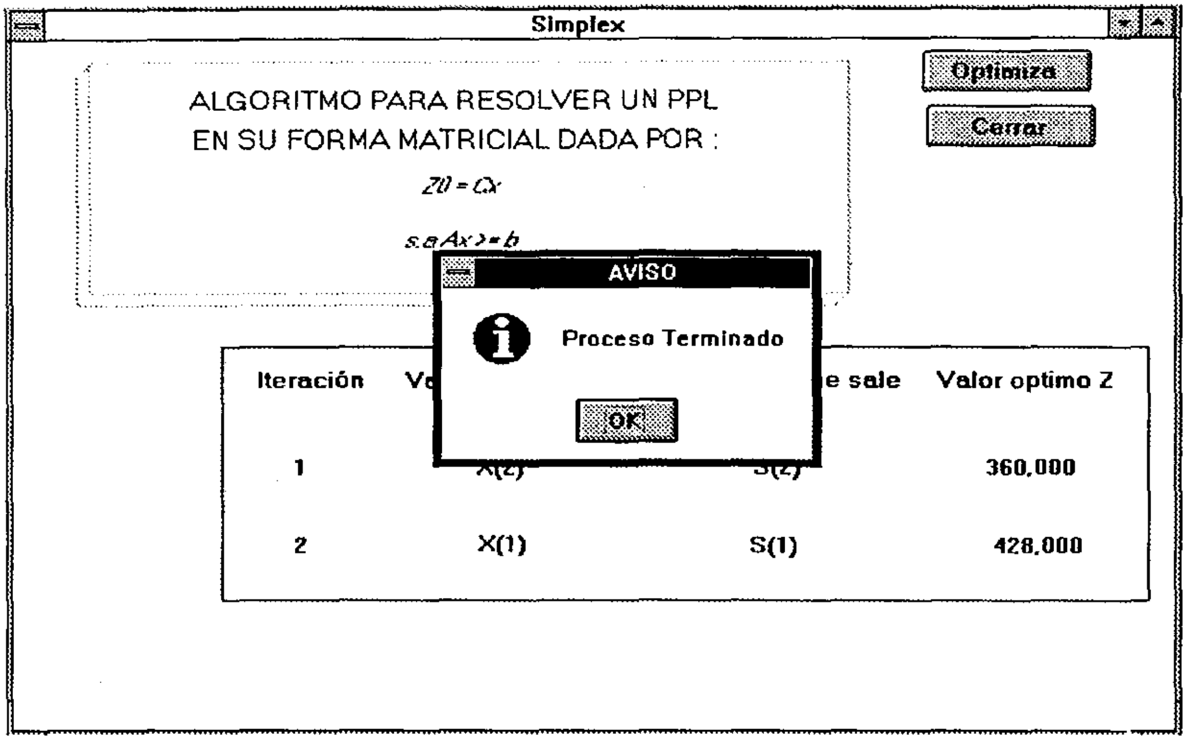
En el caso de no capturar algún coeficiente este es también validado :



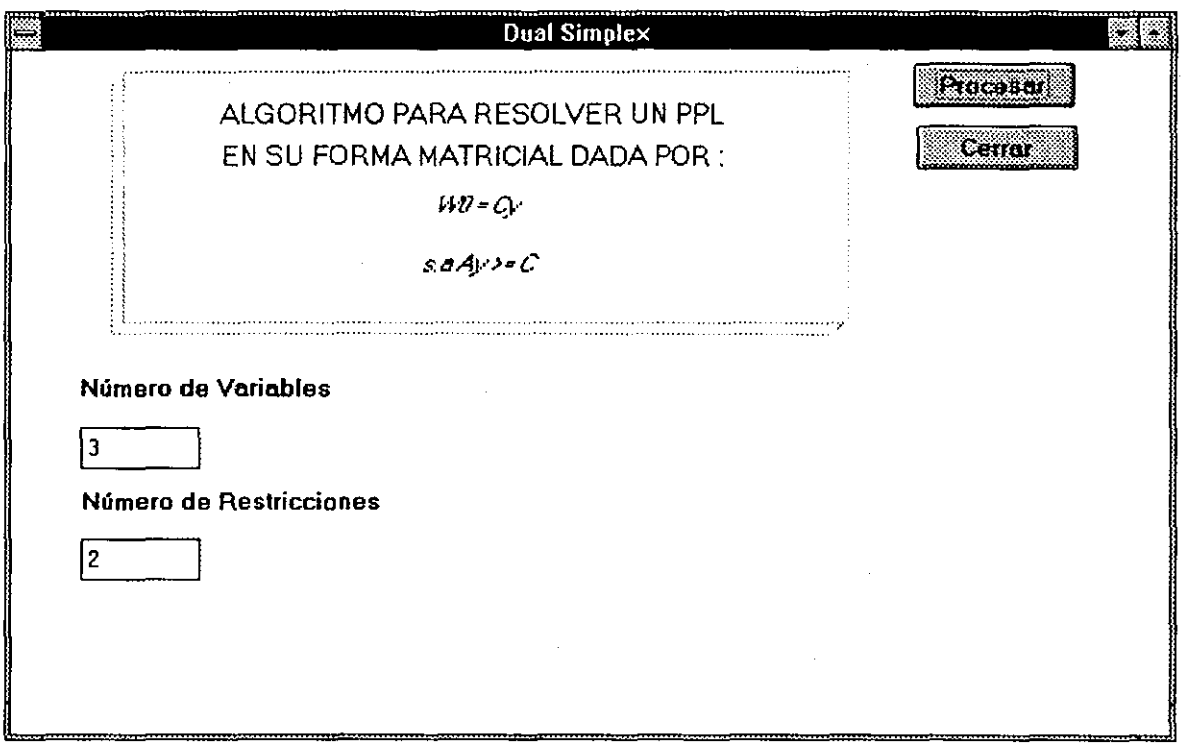
Botón Optimizar (dispara proceso) :



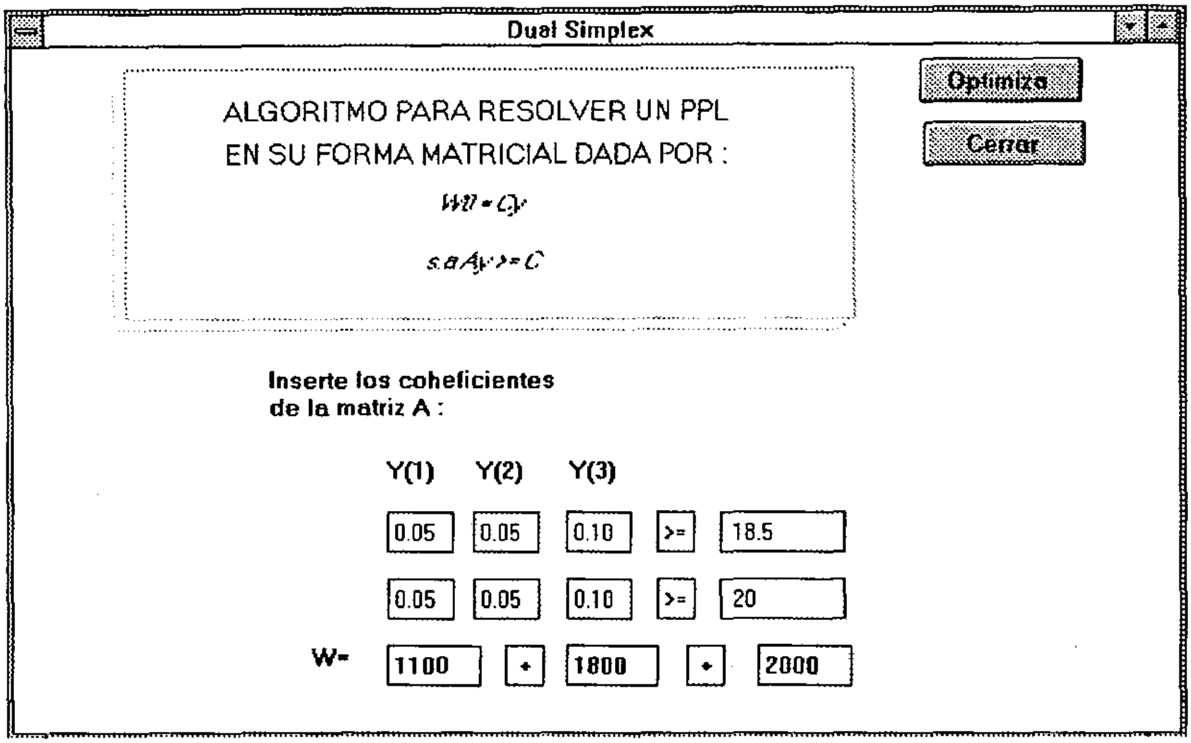
Termino de proceso (solución) :



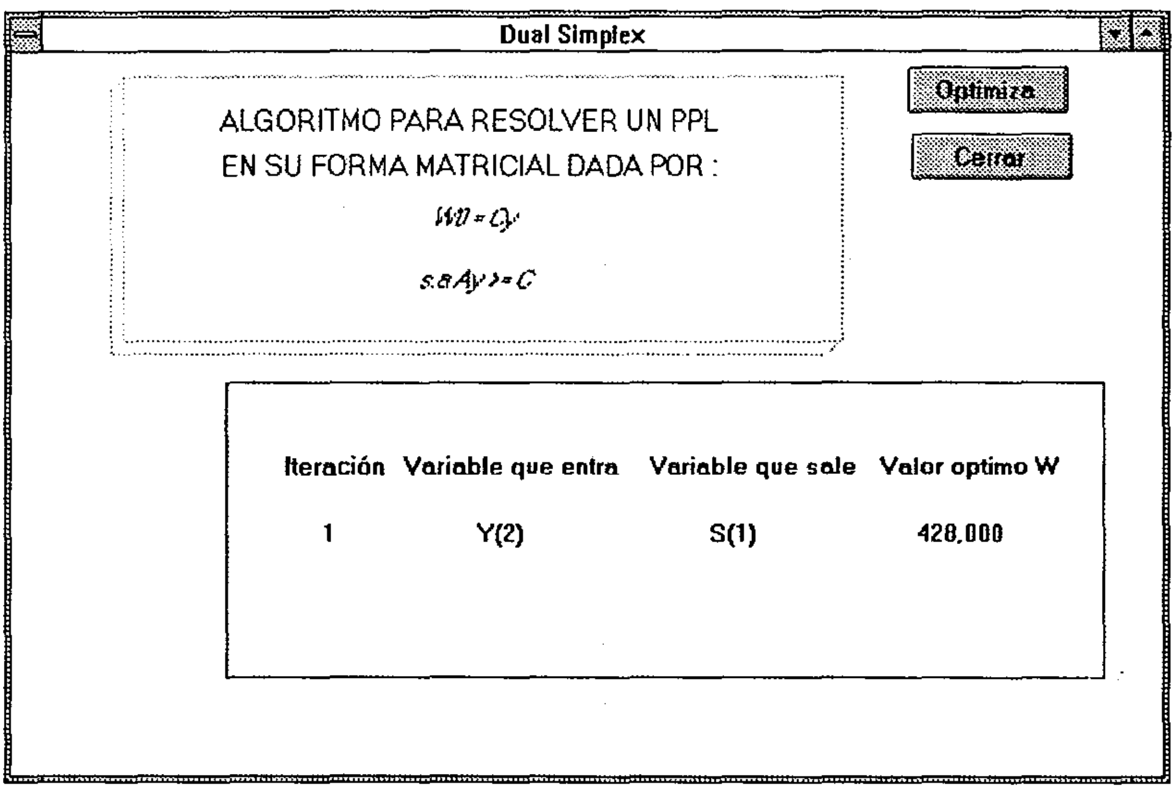
Método Dual Simplex :



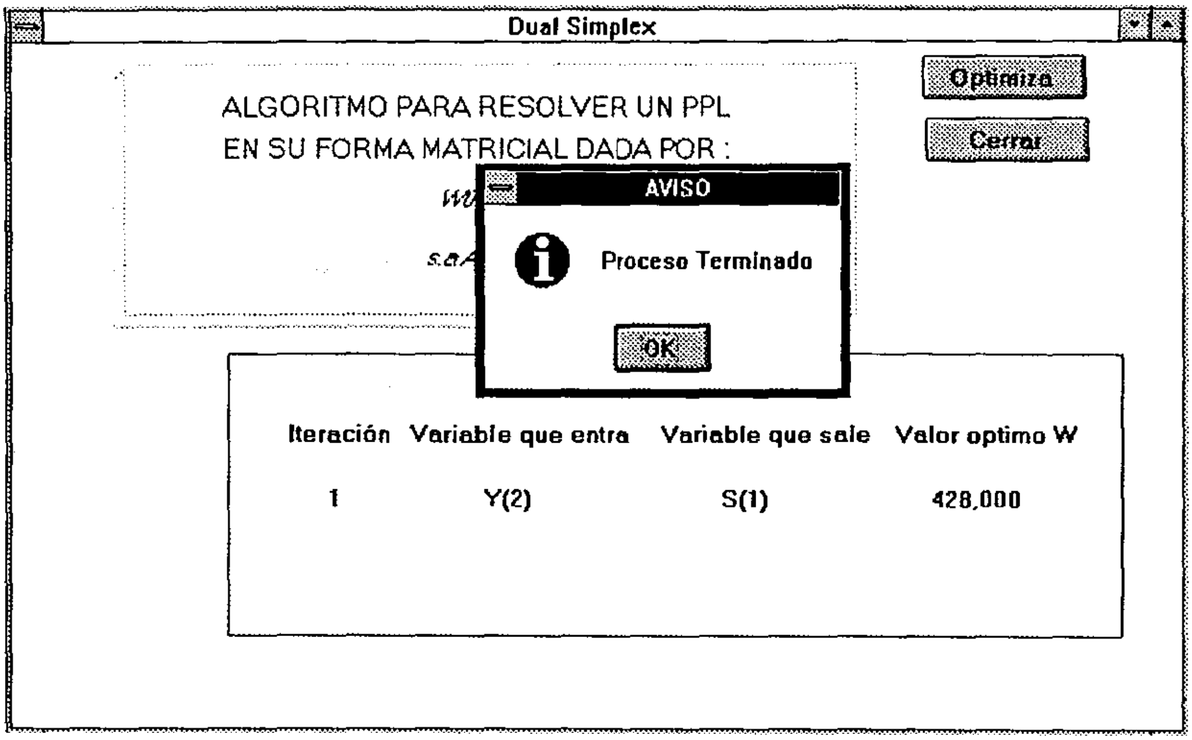
Captura de los coeficientes :



Botón Optmimizar (dispara el evento) :



Termino de proceso (solución) :



Conclusiones

El planteamiento del Método de la Dualidad como se vio es una herramienta muy poderosa en la solución de problemas de programación lineal, lo cual nos lleva a verificar que es más sencillo resolver un problema de programación lineal encontrando primero la solución a el problema que se le asocia llamado problema Dual. Gracias a esta afirmación el tamaño de los problemas de programación lineal influye para seleccionar entre resolver el problema original o su Dual, es decir si el original tiene más restricciones que variables, es preferible resolver el Dual, ya que serian necesarias menos iteraciones.

Dentro de la relación de los problemas Primal y Dual, sabemos de antemano que sus algoritmos se rigen bajo los lineamientos del Método Simplex y que su relación se da como:

Problema Primal	Problema Dual
Maximizar	Minimizar
Minimizar	Maximizar
Restricciones $\leq \boldsymbol{b_i}$	Restricciones $\geq C_i$
Restricciones $= b_i$	Variable y_i no restringida
Variable i no restringida	Restricción $= C_i$
Restricción $\geq b_i$	Restrición $\leq C_i$

En cuanto a la solución óptima en el caso de el modelo Primal, se observa como el máximo de ingresos, mientras que en el modelo Dual es el mínimo de costo; estas y otras relaciones entre los dos modelos son tan fuertes que de cierta forma son distintos desde el punto de vista matricial pero conllevan a la resolución del mismo problema.

Otras consideraciones obtenidas dentro de la Dualidad tenemos que la solución óptima del problema Dual, proporciona los precios en el mercado ó los beneficios de los recursos escasos asignados en el problema original, y la solución óptima del problema Dual aporta la solución óptima del problema original y viceversa.

Una de las condiciones necesarias para que tanto el Primal como el Dual tengan solución óptima es cumplir con el valor de una variable del primal por el valor de la variable de exceso correspondiente en el Dual igual a cero, mientras que es necesario que se cumpla que el valor de una holgura en el primal por el valor de la variable correspondiente en el Dual sea igual a cero, a esto se le conoce como "holgura complementaria".

La Teoría de la Dualidad como se mencionó es de gran ayuda para calcular la solución óptima en un número mínimo de iteraciones, sin embargo esto no es más que una de las ventajas que se observan en el desarrollo del presente trabajo, otra de ellas fue la existencia de un nexo muy importante con el análisis de sensibilidad "La interpretación económica del problema " de programación lineal. El análisis de sensibilidad es una herramienta sumamente poderosa en el tratamiento de la asignación de cambios dentro del problema ya sea en las variables, en el vector de costos, etc.. con el fin de evitar perdida de tiempo, dinero y recursos humanos, de alguna forma la teoría de la Dualidad hace de igual manera un estudio en el cuerpo del programa, tal que es necesario hacer cálculos e interpretaciones que sean convincentes para la mejor solución de las exigencias del problema basándoce primordialmente en el estudio de las variables, recursos e insumos en las cuales habrá que establecer criterios, con la tarea de hacer cambios de acuerdo a los resultados adquiridos en la solución óptima.

En el caso de el método Simplex, este comienza con una solución básica factible pero no óptima y en cada iteración, existe una aproximación hacia la optimalidad manteniendo la factibilidad.

Esto se desarrolla hasta llegar a una solución factble básica con todos los elementos :

$$(Z_j - C_j) \geq 0$$

Sólo en este caso se habrá llegado a una solución óptima. Este método realiza su tarea iterando en dirección a una función primaria factible/ dual factible.

En algunas ocasiones se llega a soluciones en que la solución inicial es primaria no factible / dual factible, esto se observa cuando algunas $X_j < 0$, pero todo el renglón $(Z_j - C_j) \geq 0$.

El método Simplex Dual maneja esta situación manteniendo la factibilidad dual [este hecho es que todo renglón $(Z_j - C_j) \geq 0$], mientras se itera hacia la factibilidad primaria con

$$(X_j \geq 0).$$

Este método resuelve el problema primario, así como el resolver el problema dual, esto nos lleva a enfatizar que el método Dual Simplex es una aplicación de la Dualidad.

La solución en este método es asociada a una base óptima si toda $X_j \geq 0$, por otra parte en el caso en que la variable que entra a la base $\propto_j < 0$ no es posible determinarla se dice entonces que se ha descubierto un problema primario no factible ya que es imposible seguir iterando hacia la factibilidad.

En el caso en que toda $\propto_j > 0$, donde $\propto_j$ es el coeficiente de tableu de la variable X_j en el renglón pivote el problema se dice que es dual no factible.

En el área de programación tanto el Método Simplex como el Dual Simplex son de gran ayuda para resolver problemas, ayudando a optimizar tiempo en el cálculo de los datos, así como se puede apreciar las potencialidades de cada método.

BIBLIOGRAFÍA

*Introducción a Técnicas de Investigación de Operaciones; Daellenbach G. Hans, George A, John, Mcnickie C. Donald, Ed.CECSA

*Investigación de Operaciones; Moskowitz Herbert, D.Wright Gordon, Ed.Prentice-Hall

*Investigación de Operaciones; Naghi Namakforoosh Mohammad, Ed.Limusa

*Métodos y Módelos de Investigación de Operaciones; Dr Prawda Witenberg Juan, Ed.Limusa

*Métodos Cuantitativos para la Toma de Decisiones en Admon; Gallagher A. Charles, Watson J. Hugh, Ed. MacGraw-Hill

*Módelos Cuantitativos para Administración; Roscoe Davis K, Mckeown G. Patrick Grupo Editorial Iberoamérica.

*Introduction to Operations Research, 2a Ed.; S. Hiller Frederick, Lieberman J.Gerald Ed.McGraw-Hill

*Introduction to Operations Research : A Computer Oriented Algorithmic Approach; E. Gillet,Ph.D Billy, Ed. McGraw-Hill

*Operations Research an Introduction 4a Ed; A. Taha Hamdy, Ed. Macmillan Publishing NewYor Company.

*Operations Research : Principles and Practice; Don T. Phipllips , A.Ravindran James J. Solberg , Ed. John Wiley & Sons

*Principles of Operations Research With Applications to Managerial Decisions Wagner M. Harvey, Ed. Prentice-Hall

*Developing Applications using INFORMIX - New Era Informix - México Andres Bello # 10 Polanco.