



00362 2 Ley
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DETERMINACIÓN DE LA AMPLITUD Y
DE LA FASE DE UN PULSO LÁSER
ULTRACORTO USANDO FUNCIONES DE
HERMITE-GAUSS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A :

CARLOS JESÚS ROMÁN MORENO

Directores Dr. Roberto Ortega Martínez
de Tesis. Dr. Dmitrii Kouznetsov Kallistratova



MÉXICO, D. F.

1999

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2702/10



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Quiero manifestar mi agradecimiento al Dr. Roberto Ortega Martínez por su apoyo y dirección para la realización de esta tesis, así como en mi participación en otros proyectos.

Al Dr. Dmitrii Kouznetsov por su importante asesoría para el desarrollo de esta tesis y al Dr. Kurt Bernardo Wolf su importante apoyo y sugerencias brindados durante la realización de este trabajo.

Al los Drs. Augusto García Valenzuela, Neil Bruce y Jorge García Macedo por la revisión de este trabajo y las sugerencias realizadas.

Al Laboratorio de Óptica Aplicada del Centro de Instrumentos UNAM por las facilidades otorgadas.

A la DGAPA por la beca otorgada a través de los proyectos IN106595 y IN104597 y al CONACyT proyecto clave 4480-A9406, y al proyecto UNAM-BID 95-B3-L-0236 y a la Fundación UNAM, que a través del PITID, me apoyó para la realización de mis estudios de Posgrado.

A B. Mónica Pérez Ibarra por su apoyo y estímulo constante.

Contenido

1	Introducción	3
1.1	Fuentes de pulsos ultracortos ópticos	3
1.2	Aplicaciones de los pulsos ultracortos	4
1.3	Técnicas de Medición de los Pulsos Ultracortos	5
1.4	Objetivo y organización de esta tesis	6
2	Pulsos Ultracortos	7
2.1	Descripción matemática	7
2.1.1	Transformada de Hilbert	8
2.1.2	La señal analítica	9
2.1.3	Transformada de Fourier	10
2.1.4	Los dominios del tiempo y de la frecuencia	11
2.2	Técnicas de autocorrelación	12
3	Caracterización de Pulsos Ultracortos	14
3.1	Caracterización de Pulsos Ultracortos	14
3.2	Conclusiones	21
	Apéndices	22
A	Teorema de las Funciones de Hermite-Gauss autotransformables	22
B	Polinomios de Hermite	24
	Bibliografía	30

Capítulo 1

Introducción

En años recientes, la física y la tecnología de los pulsos ultracortos¹ han experimentado grandes avances. En la actualidad, es usual trabajar con pulsos ópticos de 10 fs en los laboratorios de investigación, incluso se tienen reportes de la producción de pulsos ópticos de 6 fs, algo que está muy cerca del límite fundamental en la región visible del espectro electromagnético [1], [2] y [3].

El éxito alcanzado en la generación de pulsos extremadamente cortos ha conducido al desarrollo de técnicas y dispositivos nuevos para detectar y medir a estos pulsos: los transistores de efecto de campo heteroestructurales han demostrado alcanzar velocidades de conmutación de 6 ps [4]. Sin embargo, para medir los pulsos de femtosegundos, hasta el momento, sólo se dispone de técnicas indirectas. El desarrollo de las técnicas para caracterizar a los pulsos ultracortos ha sido un área de investigación muy activa desde su aparición.

1.1 Fuentes de pulsos ultracortos ópticos

Con el descubrimiento del amarre de modos, es decir que la fase relativa de los modos longitudinales de oscilación dentro de la cavidad láser permanece fija, y en particular el amarre de modos pasivo con absorbedores saturables en la década de los 60, fue posible la producción de pulsos con duración de 1 nanosegundo ($1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$) con un láser de rubí de "pulso gigante" de 50 MW [5]. Un año más tarde, se consiguió la producción de pulsos en el intervalo de los subpicosegundos con un láser de Nd:vidrio también con amarre de modos pasivo [6] y [7]. Debido al gran ancho de banda intrínseco de los pulsos ultracortos, los láseres de colorante (dye) fueron la herramienta principal para estudiar los procesos físicos que intervienen en

¹ Por pulsos ultracortos se entiende aquellos pulsos con ancho temporal del orden de *picosegundos* (10^{-12} s) o de *femtosegundos* (10^{-15} s).

la formación de los pulsos ultracortos pues estos láseres tienen anchos de banda que abarcan del cercano ultravioleta al visible y cercano infrarrojo. Por ejemplo, el láser que de rodamina 6G es sintonizable desde 560 hasta 635 nm, y por esta razón, al menos en principio, puede generar pulsos de hasta 16 fs; no obstante, con los láseres de colorante se alcanzó pulsos de 30 fs [8].

El advenimiento de los láseres de estado sólido, tales como el de zafiro dopado con titanio ($\text{Ti:Al}_2\text{O}_3$ o Ti:Zaf) y las técnicas de amarre de modos con automodulación de fase (v. gr. amarre de modos con lente Kerr-KLM) permitieron la generación de pulsos de algunos cuantos femtosegundos en forma confiable, estable y reproducible [9], además, estos láseres son sintonizables desde el visible (719 nm) hasta el infrarrojo (920 nm), alcanzan energía pico del orden de los 13 nJ, y son capaces de emitir trenes continuos de pulsos de 76 MHz de repetición.

Estos avances han revivido el interés en los procesos ópticos no lineales. Otro acontecimiento muy importante ha sido la aparición de cristales no lineales sintéticos de alto umbral de daño. Estos descubrimientos han disparado el desarrollo de generadores y osciladores paramétricos ópticos muy eficientes, así como de generadores de armónicos, extendiendo el intervalo hacia el infrarrojo y al ultravioleta, donde aún no existen fuentes de radiación coherente. Por último, pero no por eso menos importante, el advenimiento de amplificadores de estado sólido o de exímero con alta potencia pico a escala de laboratorio ha abierto la puerta hacia la generación eficiente de radiación de longitud de onda corta [9]-[2].

1.2 Aplicaciones de los pulsos ultracortos

Los pulsos ultracortos han beneficiado en forma muy importante a otras áreas de la ciencia y de la tecnología. A continuación se describen algunos de ellos.

En la física del estado sólido es muy importante conocer de una forma más directa los procesos que ocurren en los semiconductores. Un ejemplo de ello es el estudio de la vida media de los fonones ópticos en los cristales. Con los pulsos ultracortos es posible observar directamente los tiempos de relajación extremadamente cortos y distinguir entre fonones coherentes y fonones incoherentes.

Otro ejemplo de la importancia de los pulsos ultracortos lo muestran sus propiedades de coherencia, que han sido de gran utilidad para el estudio de procesos dinámicos en los dominios del tiempo y de la frecuencia tales como las transiciones de tipo Raman y las transiciones dipolares eléctricas.

En el diseño de dispositivos electrónicos y sistemas de medición más rápidos, los pulsos ultracortos han permitido generar y medir transitorios electrónicos entre microondas y el infrarrojo lejano. Con base en pulsos de subpicosegundos se han desarrollado técnicas no invasivas que permiten analizar fotodetectores y transistores

de alta velocidad y circuitos integrados.

Varias técnicas de excitación y sondeo han sido desarrolladas para estudiar los procesos moleculares que ocurren con mucha rapidez y que hasta ahora, eran desconocidos. Como ejemplo de este tipo de fenómenos se puede mencionar la transferencia de energía vibracional intramolecular e intermolecular que ocurre en moléculas poliatómicas de los líquidos. En las moléculas más grandes, la redistribución intramolecular vibracional ocurre en un tiempo aproximado de 1 ps.

Los pulsos ópticos ultracortos son una herramienta ideal como monitor de una secuencia de procesos químicos. Investigaciones recientes de espectroscopia de picosegundos con pulsos infrarrojos han mostrado en forma directa la rapidez del movimiento y la localización de protones en fase condensada.

Es sorprendente saber que los procesos biológicos primarios son excesivamente rápidos, en algunos casos por debajo de 1 ps. Por ejemplo, el primer evento en el transporte de oxígeno por la hemoglobina, la disociación de los enlaces O_2 o CO , ocurre en aproximadamente en 350 fs [3].

Finalmente, los pulsos ultracortos son fundamentales para el estudio de los efectos no lineales en las fibras ópticas, lo cual traerá grandes beneficios para las comunicaciones en el futuro [10]; gracias su ancho de banda, estos pulsos pueden transportar una gran cantidad de información.

1.3 Técnicas de Medición de los Pulsos Ultracortos

La construcción de fuentes de pulsos ultracortos más controlados requiere de un mejor conocimiento de los procesos que participan en la formación de estos pulsos. Así mismo, la interpretación correcta de los resultados obtenidos en las técnicas basadas en pulsos ultracortos. Para esto se necesita determinar con la mayor precisión posible la intensidad y la fase de los pulsos ultracortos como funciones del tiempo [11]-[12]. Ahora, existen instrumentos electrónicos para registrar en tiempo real la intensidad y fase de tales pulsos en el intervalo de algunos cientos de picosegundos. La resolución de los fotodiodos más rápidos es del orden de 100 ps; y la cámara rápida (streak) puede caracterizar pulsos con ancho temporal de 1 ps o mayor, sin embargo, en el intervalo de los femtosegundos, la caracterización es posible sólo con técnicas indirectas [13], el desarrollo de las cuales ha sido un campo de investigación muy activo en los últimos años.

La mayoría de estas técnicas son una variación de la (auto)correlación en la que se recurre a fenómenos ópticos no lineales, tales como la generación del segundo armónico, la fluorescencia de dos fotones, etc. [14], [15]. El uso de los fenómenos

no lineales puede parecer una restricción fuerte a la aplicación de estas técnicas a pulsos muy energéticos, no obstante, se ha reportado la caracterización de pulsos con energía del orden de zeptojoules (10^{-21} J) [16]

1.4 Objetivo y organización de esta tesis

En esta tesis se propone un modelo para caracterizar los pulsos ultracortos

En el capítulo 2 se revisan la transformada de Fourier y de Hilbert con las que usualmente se construye la representación analítica de las señales ópticas. También se describen, brevemente, las técnicas de autocorrelación con generación de segundo armónico y de fluorescencia de dos fotones, que han sido las más usadas en la caracterización de los pulsos ultracortos. En el Capítulo 3, se desarrolla un método para caracterizar los pulsos ultracortos a segundo orden basandose en un desarrollo de la señal en términos de las funciones de Hermite-Gauss normalizadas. Esto es el tema principal de esta tesis. En el Capítulo 4 se dan las conclusiones obtenidas en este trabajo. En el apéndice A se da una demostración de la importante propiedad de autotransformación de las funciones de Hermite-Gauss con base únicamente en sus propiedades analíticas sin recurrir a analogías cuánticas. En el Apéndice B es una revisión de las propiedades e integrales relacionadas con las funciones de Hermite y Hermite-Gauss que se usaron en el desarrollo del Capítulo 3. Finalmente, se presentan las referencias a que se recurrió durante la preparación de esta tesis.

Capítulo 2

Pulsos Ultracortos

La naturaleza electromagnética de la luz, y comportamiento ondulatorio en muchos experimentos están establecidos desde hace mucho tiempo. Por esta razón, su propagación puede describirse con la ecuación de onda, la cual es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell del campo electromagnético. La solución de la ecuación de onda, comúnmente llamada función de onda, depende de las coordenadas espaciales y del tiempo, tiene la forma general

$$\psi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

donde \mathbf{k} , es el vector de propagación y ω es la frecuencia angular y están relacionadas a través de la velocidad de propagación de la onda, y ϕ es la constante de fase inicial. Ciertamente, la función de onda asociada con el campo electromagnético es de carácter vectorial, pero generalmente, basta hacer un tratamiento escalar, porque los detectores no distinguen entre las componentes del campo promediando la densidad de flujo de éste y, en última instancia, el campo vectorial puede reconstruirse a partir de sus componentes escalares.

Las soluciones de la ecuación de onda más fáciles de interpretar son las *ondas armónicas*

$$w(\mathbf{r}, t) = w_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi). \quad (2.1)$$

Gracias al *Principio de superposición*, cualquier otra solución puede sintetizarse como una combinación lineal de ondas armónicas (series de Fourier para funciones periódicas o integral de Fourier para funciones no periódicas).

2.1 Descripción matemática

En los experimentos de óptica y en las aplicaciones es de interés medir el campo electromagnético asociado con la luz, y es un hecho experimental que los detectores

responden al promedio del cuadrado del campo \mathbf{E} . Algunos detectores alcanzan un estado estacionario cuando, sobre ellos, incide un haz de potencia constante, en cambio otros, como las películas fotográficas, integran la potencia incidente durante un intervalo de tiempo.

En cualquier caso, los detectores hacen un promedio en el tiempo de la cantidad de luz que incide sobre un área finita, por lo que sólo tiene sentido hablar de la potencia promedio por unidad de área, es decir de la *irradiancia*. Cada componente del campo \mathbf{E} contribuye a la irradiancia total, la cual es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo eléctrico. En lo que sigue, se supone que el campo eléctrico está polarizado linealmente, y por lo tanto, basta representarlo con una función escalar. Su promedio temporal se designa como la *intensidad* y se representa por $I = \langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle$.

Antes de discutir los detalles de la generación y medición de pulsos láser ultracortos, es necesario establecer una descripción matemática de estos y definir la terminología utilizada. El perfil temporal de los pulsos ultracortos es su propiedad esencial.

Cualquier cantidad física como la luz puede describirse completamente por una función real, no obstante, algunas veces el tratamiento matemático se facilita considerablemente tomando funciones complejas. Un ejemplo de esto se encuentra en el uso de los fasores asociados con las onda armónicas Ec. (2.1).

2.1.1 Transformada de Hilbert

La *transformada de Hilbert* permite extender el concepto de fasores a funciones que no son monocromáticas, definir su envolvente y su frecuencia instantánea, como se hace en esta sección [17].

Dada la función real $E(t)$ su transformada de Hilbert se define por

$$\mathcal{H}\{E\}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(t') dt'}{t' - t} \quad (2.2)$$

en la que se toma el valor principal de Cauchy de la integral en el punto de discontinuidad $t = t'$.

La transformada de Hilbert puede expresarse como la convolución de $E(t)$ con $-1/\pi t$, esto es

$$\mathcal{H}\{E\}(t) = -\frac{1}{\pi} E * \frac{1}{t}, \quad (2.3)$$

calculando la transformada de Fourier de la transformada de Hilbert de $E(t)$ anterior se obtiene

$$\mathcal{FH}\{E\}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \mathcal{F}\{E\}(\omega) & \text{, para } \omega < 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \mathcal{F}\{E\}(\omega) & \text{, para } \omega > 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

La Ec. (2.4) indica que la transformada de Hilbert produce un cambio de fase de $-\pi/2$ radianes en el espectro de la función $E(t)$ para las frecuencias positivas y de $\pi/2$ radianes en las componentes de frecuencias negativas. En óptica y en análisis de señales la transformada de Hilbert de una señal real recibe el nombre de *cuadratura* de $E(t)$.

2.1.2 La señal analítica

Para una función real $E(t)$ se define la *señal analítica* compleja por

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + i\mathcal{H}\{E\}(t). \quad (2.5)$$

En particular, la transformada de Hilbert de $E(t) = \cos(\omega t)$ es

$$\mathcal{H}\{E\}(\omega t) = -\text{sig}(\omega)\text{sen}(\omega t), \quad (2.6)$$

entonces, la función analítica asociada a $\cos(\omega t)$ es

$$e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\text{sen}(\omega t), \quad (2.7)$$

que es la conocida expresión de Euler de la exponencial compleja. Este caso particular muestra que la función analítica se reduce a la representación compleja de las ondas armónicas.

La función analítica puede escribirse en forma polar como

$$\mathcal{E}(t) = A(t)e^{i\phi(t)} \quad (2.8)$$

Su módulo se conoce como *amplitud instantánea* o *envelope*, es decir

$$A(t) \equiv |\mathcal{E}(t)|, \quad (2.9)$$

y su frecuencia instantánea se define como la derivada respecto al tiempo de su fase

$$\omega_{\text{inst}} \equiv \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (2.10)$$

Los conceptos revisados en esta sección junto con la transformada de Fourier de la sección siguiente, son muy útiles para construir una representación apropiada de los pulsos ultracortos, y son la base del análisis de los métodos para caracterizar a estos pulsos.

2.1.3 Transformada de Fourier

Supóngase que la función $E(t)$ tiene transformada de Fourier definida por

$$\hat{E}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.11)$$

El Teorema de Fourier afirma que la función $E(t)$ puede expresarse por la transformada de Fourier inversa dada por

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

En general, la transformada de Fourier $\hat{E}(\omega)$ es una función compleja, que puede representarse como

$$\hat{E}(\omega) = \hat{A}(\omega) e^{i\hat{\phi}(\omega)}, \quad (2.13)$$

donde su módulo y fase son funciones reales. $|\hat{A}(\omega)|^2$ se conoce como *espectro de potencia* y $\hat{\phi}(\omega)$ es la *fase espectral*.

Una propiedad de la transformada de Fourier de gran importancia en óptica y en análisis de señales, donde las $E(t)$ es una función real, es que su transformada de Fourier es *simétrica conjugada*, es decir

$$\hat{E}^*(-\omega) = \hat{E}(\omega) \quad (2.14)$$

por lo tanto, su amplitud es una función par y su fase es impar, esto es

$$\hat{A}(-\omega) = \hat{A}(\omega) \quad \text{y} \quad \hat{\phi}(-\omega) = -\hat{\phi}(\omega), \quad (2.15)$$

respectivamente.

Con estas condiciones, la función $E(t)$ puede llevarse a la forma

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2\hat{A}(\omega) \cos[\omega t - \hat{\phi}(\omega)] d\omega \quad (2.16)$$

De la Ec.(2.16) se ve que una función real no contiene componentes de frecuencia negativas y la amplitud de las componentes de frecuencia positiva se duplica; entonces toda la información de la señal está contenida en la parte positiva de su espectro de frecuencias.

(Calculando la transformada de Hilbert de la Ec.(2.16) se tiene

$$\mathcal{H}\{E\}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2\hat{A}(\omega) \text{sen}[\omega t - \hat{\phi}(\omega)] d\omega. \quad (2.17)$$

Substituyendo las Ecs. (2.16) y (2.17) en la definición de la señal analítica, Ec. (2.5) se obtiene la señal analítica

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} 2\hat{E}(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad \omega \geq 0 \quad (2.18)$$

asociada a la señal real $E(t)$. Su transformada de Fourier está dada por la Ec. (2.11) es

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = \begin{cases} 2\hat{E}(\omega) & \text{para } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{para } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

2.1.4 Los dominios del tiempo y de la frecuencia

Con las funciones analíticas complejas $\mathcal{E}(t)$ y $\hat{\mathcal{E}}(\omega)$ puede definirse el pulso óptico en los dominios del tiempo y de la frecuencia, respectivamente. Escribiendo

$$\hat{\mathcal{E}}(\omega) = \hat{A}(\omega)e^{-i\hat{\phi}(\omega)} \quad (2.20)$$

se define la *amplitud espectral* $\hat{A}(\omega)$ y la *fase espectral* $\hat{\phi}(\omega)$.

Si el ancho de banda del pulso $\Delta\omega$ es pequeño comparado con la frecuencia promedio ω_0 , la señal compleja puede escribirse como

$$\mathcal{E}(t) = A(t)e^{i[\phi(t) - \omega_0 t]}. \quad (2.21)$$

En el caso de pulsos *cuasi-monocromáticos*, la amplitud $A(t)$ y la fase $\phi(t)$, en el dominio del tiempo, son funciones que varían lentamente con el tiempo. Entonces la *intensidad instantánea* está dada por

$$I(t) = \mathcal{E}(t)\mathcal{E}^*(t) = A^2(t). \quad (2.22)$$

Análogamente, la *intensidad espectral* se define como

$$\hat{I}(\omega) = \hat{\mathcal{E}}(\omega)\hat{\mathcal{E}}^*(\omega) = \hat{A}^2(\omega), \quad (2.23)$$

y de la identidad de Parseval se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}^2(\omega) d\omega. \quad (2.24)$$

es decir que la *energía total del pulso es proporcional al área encerrada por el perfil de la intensidad tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia*.

Lo anterior muestra que las descripciones del pulso en los dominios del tiempo y de la frecuencia son simétricas. En ambos casos, la estructura del pulso queda definida completamente por la intensidad y la fase, existiendo una correspondencia

biunívoca entre los perfiles de la intensidad, $I(t)$ e $\hat{I}(\omega)$. La relación general entre ambos perfiles la da el *Principio de Indeterminación*

$$\Delta t \Delta \omega \geq K \quad (2.25)$$

donde K es una constante del orden de la unidad, y cuyo valor depende la forma de $I(t)$ e $\hat{I}(\omega)$. El pulso más corto que puede obtenerse con un ancho de banda específico se denomina como pulso de *transformada limitada* o de *banda limitada*. En este caso su duración es

$$\Delta t = \frac{K}{\Delta \omega}. \quad (2.26)$$

El valor $\Delta t \Delta \omega / 2\pi$ recibe el nombre de *producto tiempo-ancho de banda* y es el parámetro más importante en el estudio de los pulsos láser ultracortos: se usa como una medida de que tan cerca está el sistema del amarre de modos ideal. Un pulso de banda limitada también puede definirse físicamente como un pulso *completamente libre de modulación de amplitud o frecuencia*.

2.2 Técnicas de autocorrelación

Como se vió en la sección anterior, es conveniente representar a una señal óptica con una función compleja descrita por su amplitud y por su fase. Sin embargo, sólo el promedio temporal de su intensidad se puede detectar y no su valor instantáneo, pues el campo electromagnético de la onda oscila muy rápido ($\omega \approx 10^{14}$ Hz). El problema se complica aún más en el caso de los pulsos ultracortos, pues debido a su duración extremadamente corta, los detectores no tienen tiempo de responder al estímulo de la radiación. Como los pulsos ultracortos son los eventos más cortos que pueden manejarse, son lo único con lo que pueden compararse, de aquí que la mayoría de las técnicas para su medición estén basadas en el uso de líneas de retardo óptico donde el pulso láser se divide con un divisor de haz y las dos réplicas viajan por trayectorias de longitud distinta antes de ser recombinadas. La medición de un intervalo de tiempo Δt se convierte en la medición de la diferencia de la longitud de las trayectorias $\Delta x = c\Delta t$, donde c es la velocidad de la luz.

Un arreglo usual recurre al uso de la generación de segundo armónico en un cristal con propiedades no lineales (por ejemplo un cristal KDP, BBO, etc) [18]. Los dos pulsos del láser, cuyas intensidades son, respectivamente, $I_1(\omega, t)$ y $I_2(\omega, t + \delta t)$ y una separación variable en el tiempo Δt , viajan colinealmente dentro del cristal no lineal KDP. Como la intensidad del segundo armónico es proporcional al cuadrado de la intensidad total del fundamental, se obtiene

$$I(2\omega, t, \Delta t) = A \{ [E_1(\omega, t) + E_2(\omega, t)] [E_1^*(\omega, t) + E_2^*(\omega, t)] \}. \quad (2.27)$$

El detector promedia las oscilaciones rápidas del campo de luz ($\omega \approx 10^{14}$ Hz). Por lo tanto, la señal detectada se describe mejor con la función de correlación. La función de autocorrelación de segundo orden normalizada de la intensidad dependiente del tiempo $I(t) = E(t)E^*(t)$ está definida por

$$G^{(2)}(\tau) \equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} I(t)I(t+\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} I(t)^2 dt} = \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{\langle I(t)^2 \rangle}. \quad (2.28)$$

La intensidad promedio medida $I(2\omega, \tau)$ de la onda del segundo armónico desplegada como una función del retardo $\Delta t = \tau$ entre los dos pulsos puede expresarse por la función de correlación $G^{(2)}(\tau)$. Cuando las intensidades son iguales, $I_1 = I_2$, se obtiene

$$I(2\omega, \tau) = A [G^{(2)}(0) + 2G^{(2)}(\tau)] = A [1 + 2G^{(2)}(\tau)]. \quad (2.29)$$

donde se ha usado $G^{(2)}(0) = 1$. Los otros términos cruzados en la Ec. (2.27) se promedian a cero. La intensidad del segundo armónico es máximo cuando $\tau = 0$, donde $I(2\omega, 0) = 3A$ y se acerca a un valor constante de fondo $I(2\omega, \infty) = A$ cuando $\tau \rightarrow \infty$. La razón señal/fondo es, por lo tanto,

$$R = \frac{I(2\omega, 0)}{I(2\omega, \tau)} = \frac{3G^{(2)}(0)}{G^{(2)}(0) + 2G^{(2)}(\tau)} = \frac{3}{1 + G^{(2)}(\tau)}. \quad (2.30)$$

En lugar del segundo armónico, a menudo se utiliza la fluorescencia inducida por dos fotones para monitorear y visualizar el perfil de los pulsos de picosegundos. La solución de colorante (dye) no absorbe en la frecuencia fundamental ω pero muestra fluorescencia a intensidades altas debidas a la absorción de dos fotones.

Capítulo 3

Caracterización de Pulsos Ultracortos

3.1 Caracterización de Pulsos Ultracortos

En este Capítulo se propone un método para caracterizar pulso ultracortos basado en las funciones de Hermite-Gauss [19].

Supóngase que el campo eléctrico del pulso está polarizado linealmente. La amplitud del pulso en el dominio del tiempo se mide con un autocorrelador, $|E(t)|^2$ y con un espectrómetro en el dominio de la frecuencia, $|\hat{E}(\omega)|^2$. Además, supóngase que ambos conjuntos de datos forman están relacionados por la transformadas de Fourier, entonces es posible reconstruir la fase del pulso [20], [21]

Se sabe que los pulsos ultracortos tienen un perfil del tipo gaussiano o de secante hiperbólica; ambas funciones tienen la propiedad de ser ellas mismas su transformada de Fourier, es decir son autotransformadas de Fourier. Por otra parte, las funciones de Hermite-Gauss definidas como

$$\varphi_n(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

son, también autotransformadas de Fourier, como estas funciones forman un conjunto ortonormal completo [22]; esto sugiere que la envolvente del pulso ultracorto se exprese como una superposición de funciones de Hermite-Gauss, es decir

$$E(t) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{H}_n(t) \right] e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (3.1)$$

y su transformada de Fourier de $E(t)$ estará dada por

$$E(\omega) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n c_n \hat{H}_n(\omega) \right] e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (3.2)$$

La intensidad del pulso es

$$|E(t)|^2 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_n^*) \dot{H}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m^* \dot{H}_n(t) \dot{H}_m(t) \right] e^{-t^2}, \quad (3.3)$$

y su espectro de potencia

$$\begin{aligned} |\dot{E}(\omega)|^2 = & \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n [c_n + (-1)^n c_n^*] \dot{H}_n(\omega) \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m i^{m+n} c_n c_m^* \dot{H}_n(\omega) \dot{H}_m(\omega) \right] e^{-\omega^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Obsérvese que los coeficientes complejos c_n del desarrollo de $\dot{E}(\omega)$ son los mismos que los del desarrollo de $E(t)$, multiplicados por la unidad imaginaria; y que, sin perder generalidad, el coeficiente de primer orden se ha tomado igual a la unidad, esto es $c_1 = 1$.

Los coeficientes del desarrollo se calculan con un algoritmo iterativo aleatorios y se comparan con la *función de barra de error*, \mathcal{V} , definida por

$$\mathcal{V} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (|E(t)|^2 - |E_0(t)|^2)^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} (|\dot{E}(\omega)|^2 - |\dot{E}_0(\omega)|^2)^2 d\omega, \quad (3.5)$$

en donde E es el campo medido y E_0 es una aproximación al mismo. El procedimiento termina cuando el valor de \mathcal{V} es menor que un valor predeterminado ϵ .

La función barra de error proporciona alguna información interesante acerca de las distorsiones de los pulsos gaussianos. Para ver esto, la aproximación al campo del pulso medido se expresa como la serie de funciones de Hermite-Gauss.

$$E_0(t) = \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} s_n \dot{H}_n(t) \right] e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (3.6)$$

y su espectro está dado por

$$\dot{E}_0(\omega) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n i^n \dot{H}_n(\omega) \right] e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (3.7)$$

El cuadrado de la amplitud de la aproximación al pulso y su espectro de potencia están dados por expresiones similares a las Ecs. (3.3) y (3.4), respectivamente.

$$|E_0(t)|^2 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n + s_n^*) \dot{H}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} s_n s_m^* \dot{H}_n(t) \dot{H}_m(t) \right] e^{-t^2}. \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} |\hat{E}_0(\omega)|^2 &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n [s_n + (-1)^n s_n^*] \hat{H}_n(\omega) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m i^{m+n} s_n s_m^* \hat{H}_n(\omega) \hat{H}_m(\omega) \right] e^{-\omega^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para calcular el término relacionado con el dominio del tiempo de la función barra de error, se resta la Ec. (3.8) de la Ec. (3.3), y para simplificar la notación se define

$$\alpha_n \equiv c_n - s_n, \quad (3.10)$$

entonces

$$|E(t)|^2 - |E_0(t)|^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} 2\text{Re}\{\alpha_n\} \hat{H}_n(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} c_n c_p^* \hat{H}_n(t) \hat{H}_p(t) \right] e^{-t^2}, \quad (3.11)$$

en donde se ha usado la identidad $2\text{Re}\{\alpha_n\} = \alpha_n + \alpha_n^*$.

Elevando al cuadrado la Ec. (3.11)

$$\begin{aligned} \left(|E(t)|^2 - |E_0(t)|^2 \right)^2 &= \left[4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \text{Re}\{\alpha_m\} \text{Re}\{\alpha_n\} \hat{H}_m(t) \hat{H}_n(t) \right. \\ &\quad + 4 \sum_{m,n,p=1}^{\infty} \text{Re}\{\alpha_m\} (c_n c_p^* - s_n s_p^*) \hat{H}_m(t) \hat{H}_n(t) \hat{H}_p(t) \\ &\quad + \sum_{m,n,p,q=1}^{\infty} (c_m c_n^* - s_m s_n^*) (c_p c_q^* - s_p s_q^*) \hat{H}_m(t) \hat{H}_n(t) \\ &\quad \left. \times \hat{H}_p(t) \hat{H}_q(t) \right] e^{-2t^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Despreciando los términos de orden superior al segundo en los coeficientes de la expansión, y tomando la Ec. (B.32) para integrar desde $-\infty$ hasta ∞

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|E(t)|^2 - |E_0(t)|^2 \right)^2 dt &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \text{Re}\{\alpha_m\} \text{Re}\{\alpha_n\} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_m(t) \hat{H}_n(t) e^{-2t^2} dt \\ &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}\{\alpha_m\} \text{Re}\{\alpha_n\} (-1)^{\frac{n-m}{2}} 2^{\frac{m+n-1}{2}}}{\sqrt{2^{m+n} m! n!} \pi} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \\ &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\text{Re}\{\alpha_m\} \text{Re}\{\alpha_n\} (-1)^{\frac{n-m}{2}} (m+n-1)!!}{\sqrt{2^{m+n+1} m! n!}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde m y n son ambas pares o ambas impares, pues de otro modo la integral se anula.

El término de la función barra de error correspondiente al dominio de la frecuencia se calcula en forma similar, por lo tanto, basta substituir α_m por $i^m \alpha_m$ y α_n por $i^n \alpha_n$ en la Ec. (3.13), esto es

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\dot{E}(\omega)|^2 - |\dot{E}_0(\omega)|^2 \right)^2 d\omega &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{i^m \alpha_m\} \operatorname{Re}\{i^n \alpha_n\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \dot{H}_m(\omega) \dot{H}_n(\omega) e^{-2\omega^2} d\omega \\ &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{i^m \alpha_m\} \operatorname{Re}\{i^n \alpha_n\} (-1)^{\frac{n-m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)}{\sqrt{2^{m+n+1}} m! n! \pi} \\ &= 4 \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{i^m \alpha_m\} \operatorname{Re}\{i^n \alpha_n\} (-1)^{\frac{n-m}{2}} (m+n-1)!!}{\sqrt{2^{m+n+1}} m! n!}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

en donde, otra vez, m y n son ambas pares o ambas impares.

Ahora, supóngase que la aproximación E_0 y el pulso medido E difieren solamente en el término de orden k en una cantidad muy pequeña $\epsilon \ll 1$, es decir,

$$\alpha_m = \epsilon \delta_{mk} \quad \text{y} \quad \alpha_n = \epsilon \delta_{nk} \quad (3.15)$$

entonces la Ec. (3.13) toma la forma

$$\mathcal{V}_\epsilon = 4 \frac{(\operatorname{Re}\{\epsilon\})^2}{\sqrt{2\pi} k!} \Gamma(k+1/2). \quad (3.16)$$

La Ec. (3.16) implica que si ϵ es un número imaginario puro la amplitud del pulso en el dominio del tiempo no se altera, o en forma equivalente, una perturbación imaginaria pura no es detectable con un autocorrelador; esto se ilustra en las figuras 1a, 2a, 3a y 4a.

Ahora, substituyendo (3.15) en la Ec. (3.14) se tiene

$$\mathcal{V}_w = 4 \frac{(\operatorname{Re}\{i^k \epsilon\})^2}{\sqrt{2\pi} k!} \Gamma(k+1/2). \quad (3.17)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2\pi} k!} \Gamma(k+1/2) \times \begin{cases} (\operatorname{Re}\{\epsilon\})^2, & \text{para } k \text{ par} \\ (\operatorname{Im}\{\epsilon\})^2, & \text{para } k \text{ impar,} \end{cases} \quad (3.18)$$

De la Ec. (3.18) se ve que las perturbaciones imaginarias puras de orden par no alteran el módulo del pulsos en el dominio de la frecuencia, (ver figuras 2b y 4b).

mientras que las perturbaciones reales de orden impar no lo alteran en el dominio de la frecuencia (ver figuras 5b y 7b).

Finalmente, la función barra de error toma la forma

$$\mathcal{V} = \frac{8\text{Re}^2\{\epsilon\}}{\sqrt{2\pi k!}} \Gamma(k + 1/2), \quad \text{para } k \text{ par}, \quad (3.19)$$

y

$$\mathcal{V} = \frac{4|\epsilon|^2}{\sqrt{2\pi k!}} \Gamma(k + 1/2), \quad \text{para } k \text{ impar}. \quad (3.20)$$

Las figuras 4a, b y 8a, b muestran la función de Hermite-Gauss de orden 4, la cual es, además, autotransformable-Fourier.

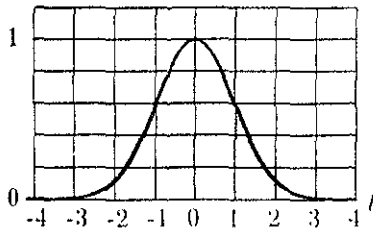


Fig. 1a. $|1 + 0.3iH_1(t)|^2 e^{-t^2}$

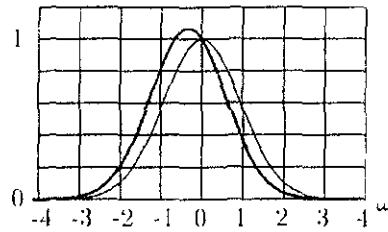


Fig. 1b. $|1 + 0.3iH_1(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

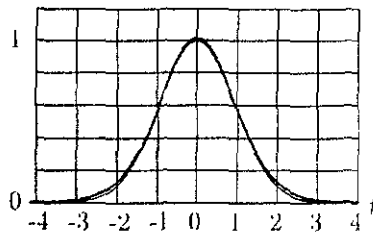


Fig. 2a. $|1 + 0.3iH_2(t)|^2 e^{-t^2}$

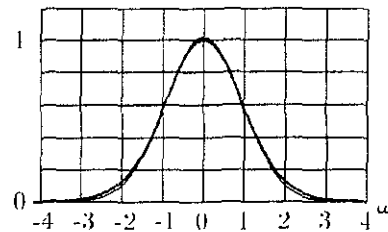


Fig. 2b. $|1 + 0.3iH_2(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

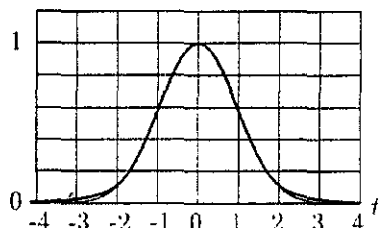


Fig. 3a. $|1 + 0.3iH_3(t)|^2 e^{-t^2}$

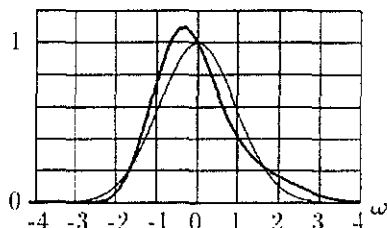


Fig. 3b. $|1 + 0.3iH_3(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

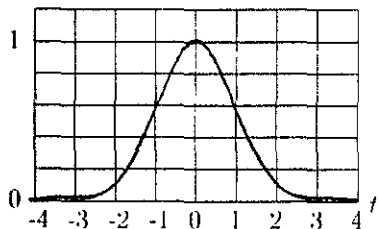


Fig. 4a. $|1 + 0.3iH_4(t)|^2 e^{-t^2}$

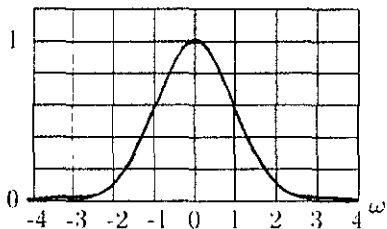


Fig. 4b. $|1 + 0.3iH_4(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

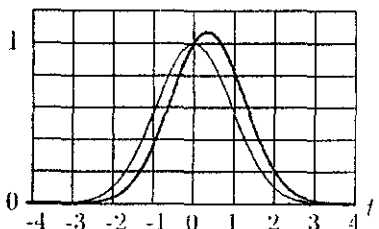


Fig. 5a. $|1 + 0.3H_1(t)|^2 e^{-t^2}$

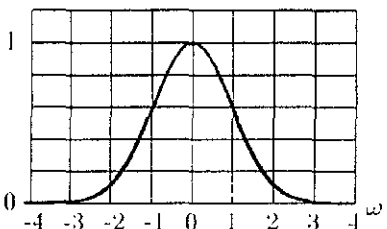


Fig. 5b. $|1 + 0.3H_1(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

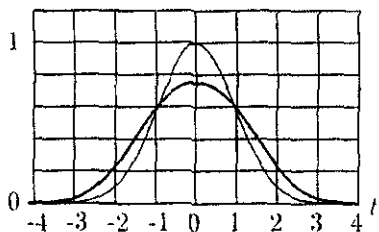


Fig. 6a. $|1 + 0.3H_2(t)|^2 e^{-t^2}$

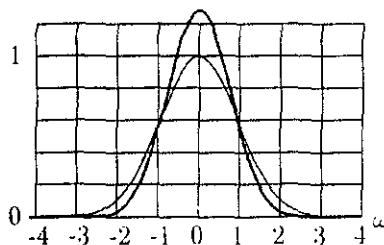


Fig. 6b. $|1 + 0.3H_2(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

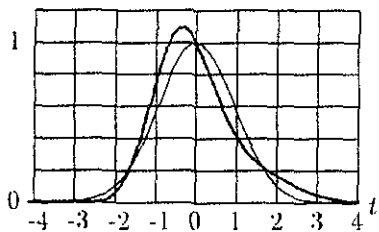


Fig. 7a. $|1 + 0.3H_3(t)|^2 e^{-t^2}$

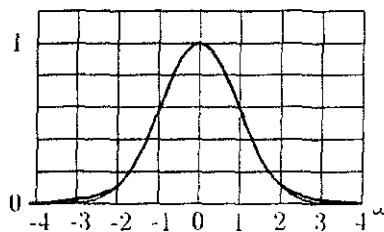


Fig. 7b. $|1 + 0.3H_3(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

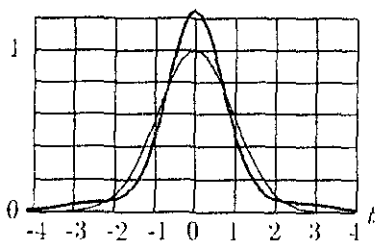


Fig. 8a. $|1 + 0.3H_4(t)|^2 e^{-t^2}$

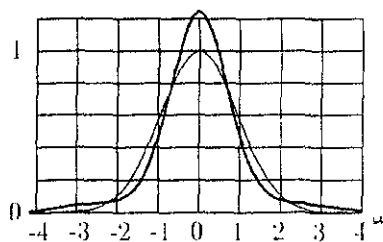


Fig. 8b. $|1 + 0.3H_4(\omega)|^2 e^{-\omega^2}$

3.2 Conclusiones

Generalmente, el perfil de un pulso ultracorto libre de distorsiones se modela con las funciones gaussiana, secante hiperbólica o exponencial unilateral [23]. Las dos primeras funciones son *autotransformadas de Fourier*, es decir que su transformada de Fourier es la misma función; propiedad que también poseen las funciones de Hermite-Gauss de orden múltiplo de cuatro. Lo anterior sugiere que los pulsos ultracortos con pequeñas perturbaciones se modelen con una superposición de funciones de Hermite-Gauss con coeficientes complejos, cada una de las cuales representa alguna perturbación. Por definición, el orden de la perturbación es el mismo de la función de Hermite-Gauss correspondiente.

Con este modelo las perturbaciones se clasificaron en *reales* o *imaginarias* de acuerdo con la naturaleza de su coeficiente, y en *pares* e *impares* por la paridad de la función de Hermite-Gauss correspondiente.

Las perturbaciones se clasificaron en *reales de orden par*, *reales de orden impar*, *imaginarias de orden par* e *imaginarias de orden impar*, de acuerdo con la naturaleza del coeficiente (real o imaginario) de la función de Hermite-Gauss y del orden de ésta

A segundo orden en los coeficientes del desarrollo de Hermite-Gauss, las perturbaciones imaginarias puras de ningún orden no alteran el módulo del pulso en el dominio del tiempo, independientemente del orden de la perturbación. Las perturbaciones imaginarias de orden par tampoco alteran el módulo del pulso en el dominio de la frecuencia, pero éste sí se ve alterado por las perturbaciones imaginarias de orden impar.

Las perturbaciones reales de orden impar no alteran el módulo del pulso en el dominio de la frecuencia, pero las de orden par sí lo alteran. Las perturbaciones reales de cualquier orden alteran el módulo del pulso en el dominio del tiempo.

Las perturbaciones dan información de componentes de frecuencia del chirp del pulso.

Este modelo puede ser usado para pulsos cuyo perfil de intensidad tenga la forma de la secante hiperbólica cuadrada o de una exponencial unilateral.

La caracterización a segundo orden de los pulsos ultracortos es más precisa que la técnica bien establecida de compuerta óptica resuelta en frecuencia.

La función de distribución de Wigner será considerada en el futuro.

La determinación de la amplitud y de la fase de un pulso láser ultracorto servirá para caracterizar experimentalmente los pulsos de láseres con anchos temporales de ns, ps y fs.

Apéndice A

Teorema de las Funciones de Hermite-Gauss Autotransformables

Teorema La transformada de Fourier de la función de Hermite-Gauss $H_n(t) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ es también la función de Hermite-Gauss

$$\mathcal{F} \left\{ H_n(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = i^n H_n(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad (\text{A.1})$$

Prueba. La Demostración se hace por inducción matemática sobre n . Para $n = 0$ se toma la expresión explicitata $H_0(t) = 1$, de donde el teorema es válido para $n = 0$.

Hipótesis de inducción: Supóngase que el teorema se satisface para $n = k$, esto es, $\mathcal{F} \left\{ H_k(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = i^k H_k(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}}$.

Despejando H_{k+1} de la Ec. (B.18)

$H_{k+1}(t) = 2tH_k(t) - 2kH_{k-1}(t)$ de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ H_{k+1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} &= 2\mathcal{F} \left\{ tH_k(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} - 2k\mathcal{F} \left\{ H_{k-1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} \\ &= -2i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F} \left\{ H_k(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} \\ &\quad - 2k\mathcal{F} \left\{ H_{k-1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Usando la hipótesis de inducción y derivando el primer término

$$\mathcal{F} \left\{ H_{k+1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = -2i^{k+1} [H'_k(\omega) - \omega H_k(\omega)] e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 & -2ki^{k-1} H_{k-1}(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}} \\
 & = i^{k+1} [-2H'_k(\omega) + 2\omega H_k(\omega) + 2kH_{k-1}(\omega)] e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Usando la Ec. (22.13.16) pag. 786 de [18], se tiene $H'_k(\omega) = 2kH_{k-1}(\omega)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{F} \left\{ H_{k+1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = i^{k+1} [2\omega H_k(\omega) - 2kH_{k-1}(\omega)] e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad (\text{A.4})$$

Usando nuevamente la Ec. (B.18)

$$\mathcal{F} \left\{ H_{k+1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = i^{k+1} H_{k+1}(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad (\text{A.5})$$

(fin de la prueba)

Corolario 1 *La transformada de Fourier de las funciones de Hermite-Gauss de orden múltiplo de cuatro son funciones de Hermite-Gauss del mismo orden, es decir son funciones autotransformables-Fourier, esto es*

$$\mathcal{F} \left\{ H_{4n}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}, t; \omega \right\} = H_{4n}(\omega) e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

Prueba. La prueba es inmediata haciendo $n \rightarrow 4n$ en el enunciado del teorema.

Apéndice B

Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite y algunas de sus propiedades se derivan en forma sencilla a partir de la *función generatriz* [22]

$$\psi(x, t) \equiv e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(t) \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{B.1})$$

Completando el cuadrado perfecto en el argumento de la exponencial en la función generatriz, derivando n veces la Ec. (B.1) respecto a x y evaluando en $x = 0$ se tiene la *representación de Rodrigues*

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}, \quad (\text{B.2})$$

en donde se ha utilizado la identidad

$$\left. \frac{\partial^n e^{-(t-x)^2}}{\partial x^n} \right|_{x=0} = (-1)^n \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}.$$

Los primeros nueve polinomios de Hermite son

$$H_0(t) = 1, \quad (\text{B.3})$$

$$H_1(t) = 2t, \quad (\text{B.4})$$

$$H_2(t) = 4t^2 - 2, \quad (\text{B.5})$$

$$H_3(t) = 8t^3 - 12t, \quad (\text{B.6})$$

$$H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12, \quad (\text{B.7})$$

$$H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120t, \quad (\text{B.8})$$

$$H_6(t) = 64t^6 - 480t^4 + 720t^2 - 120, \quad (\text{B.9})$$

$$H_7(t) = 128t^7 - 1344t^5 + 3360t^3 - 1680t, \quad (\text{B.10})$$

$$H_8(t) = 256t^8 - 3584t^6 + 13440t^4 - 13440t^2 + 1680. \quad (\text{B.11})$$

Derivando la Ec. (B.1) respecto a t

$$\begin{aligned}
 2xe^{-x^2+2xt} &= \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(t) \frac{x^n}{n!} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(t) \frac{x^{n+1}}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(t) \frac{x^n}{n!} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} 2H_{n-1}(t) \frac{x^n}{(n-1)!} &= \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(t) \frac{x^n}{n!} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} 2nH_n(t) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(t) \frac{x^n}{n!} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} [2nH_n(t) - H'_n(t)] \frac{x^n}{n!} &= 0
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

y como los polinomios t^n son linealmente independientes, todos los coeficientes deben anularse idénticamente, por los tanto

$$H'_n(t) = 2nH_{n-1}. \tag{B.13}$$

Derivando k veces la Ec. (B.13), con $k \leq n$,

$$\frac{d^k H_n(t)}{dt^k} = \frac{2^k n!}{(n-k)!} H_{n-k}(t), \tag{B.14}$$

y tomando $k = n$

$$\frac{d^n H_n(t)}{dt^n} = 2^n n!. \tag{B.15}$$

De las Ecs. (B.3) a (B.11) se ve que los polinomios de Hermite de orden par son funciones pares, y los de orden impar son funciones impares; más aún, la Ec. (B.15) implica que esto se cumple para todos los polinomios de Hermite, pues la derivada de una función par es una función impar y viceversa.

Derivando la función generatriz, Ec. (B.1), respecto a x

$$\begin{aligned}
 (-2x + 2t)e^{-x^2+2xt} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t)n \frac{x^{n-1}}{n!} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} (-2)H_n(t) \frac{x^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(t) \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} nH_n(t) \frac{x^{n-1}}{n!} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} (-2)nH_{n-1}(t) \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} 2xH_n(t) \frac{x^n}{n!} + 2xH_0(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nH_{n+1}(t) \frac{x^n}{n!} + H_1(t)
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

de donde al igualar los coeficientes de las potencias iguales de x se tienen

$$2xH_0(t) = H_1(x) \quad (\text{B.17})$$

y

$$H_{n+1}(t) - 2tH_n(t) + 2nH_{n-1}(t) = 0 \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B.18})$$

Con ayuda de las Ecs. (B.15) y (B.18) se obtiene la *Ecuación de Hermite* de orden n

$$\frac{d^2 H_n(t)}{dt^2} - 2t \frac{dH_n(t)}{dt} + 2nH_n(t) = 0. \quad (\text{B.19})$$

La Ecuación de Hermite es lineal, homogénea, de segundo orden con coeficientes que son funciones continuas de t , y por el teorema de existencia y unicidad [24] tiene dos soluciones linealmente independientes, una de las cuales es el polinomio de Hermite de orden n .

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \delta_{0,n}. \quad (\text{B.20})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \delta_{1,n}. \quad (\text{B.21})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} \delta_{0,n} + 2\delta_{2,n} \right). \quad (\text{B.22})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^3 H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \left(\frac{3}{2} \delta_{1,n} + 6\delta_{3,n} \right). \quad (\text{B.23})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^4 H_n(t) e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \left(\frac{3}{4} \delta_{0,n} + 6\delta_{2,n} + 24\delta_{4,n} \right). \quad (\text{B.24})$$

Para integrar $\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt$ se despeja $2nH_n(t)$ de la Ecuación de Hermite, (B.19), multiplicando por $H_m(t) e^{-t^2}$ e integrando para $-\infty < t < \infty$ se tiene

$$\begin{aligned} 2n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) \frac{d}{dt} (-e^{-t^2}) \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H'_n(t) e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes el primer término del lado derecho, usando la Ec. (B.13) y dividiendo por $2n$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt = 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) H_{n-1}(t) e^{-t^2} dt.$$

Suponiendo que $m < n$, y repitiendo el mismo procedimiento m veces para la integral del lado derecho se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt = 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-m}(t)e^{-t^2} dt.$$

De la Ec. (B.20), se tiene que la última integral es cero excepto cuando $n = m$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m^2(t)e^{-t^2} dt = 2^m m! \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.25})$$

La última integral, que es la condición de ortogonalidad de las funciones de Hermite-Gauss definidas por

$$\varphi_n(t) \equiv H_n(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (\text{B.26})$$

puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt = \sqrt{2^{m+n} m! n! \pi} \delta_{m,n} \quad (\text{B.27})$$

Para realizar la integral $\int_{-\infty}^{\infty} t^k H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt$ para $k > 0$ el integrando se escribe en la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)t^{k-1} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt.$$

Integrando por partes, y recordando que la exponencial e^{-t^2} tiende a cero más rápido que cualquier potencia de t se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^k H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt &= m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)H_n(t)t^{k-1}e^{-t^2} dt \\ &+ n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_{n-1}(t)t^{k-1}e^{-t^2} dt \\ &+ \frac{k-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)t^{k-2}e^{-t^2} dt \quad k > 0. \quad (\text{B.28}) \end{aligned}$$

Los casos particulares para $k = 1, 2$ y 3 , que son de especial interés en esta tesis, se escriben explícitamente a continuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} t H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt = 2^n m n! \sqrt{\pi} \delta_{m-1,n} + 2^m m! n \sqrt{\pi} \delta_{m,n-1}. \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 H_m(t)H_n(t)e^{-t^2} dt &= 2^n \frac{m! n!}{(m-2)!} \sqrt{\pi} \delta_{m-2,n} \\ &+ (2^{m-1} m! n + 2^{n-1} m n!) \sqrt{\pi} \delta_{m-1,n-1} \\ &+ 2^m \frac{m! n!}{(n-2)!} \sqrt{\pi} \delta_{m,n-2}. \quad (\text{B.30}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} t^3 H_m(t) H_n(t) e^{-t^2} dt &= 2^n \frac{m!n!}{(m-3)!} \sqrt{\pi} \delta_{m-3,n} \\
 &+ \left(2^{m-2} m!n + 2^n \frac{m!n!}{(m-2)!} \right) \sqrt{\pi} \delta_{m-2,n-1} \\
 &+ \left(2^{n-2} mn! + 2^m \frac{m!n!}{(n-2)!} \right) \sqrt{\pi} \delta_{m-1,n-2} \\
 &+ 2^m \frac{m!n!}{(n-3)!} \sqrt{\pi} \delta_{m,n-3} \\
 &+ 2^m m!n \sqrt{\pi} \delta_{m,n-1} \\
 &+ 2^n mn! \sqrt{\pi} \delta_{m-1,n}.
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

Primero se realiza la integral $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-2t^2} dt$.

Supóngase que n es par, de otro modo la integral es nula. Usando la representación de Rodrigues

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-2t^2} dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} \right) e^{-t^2} dt.$$

Integrando por partes el lado derecho y usando otra vez la Ec. (B.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(t) e^{-2t^2} dt = -2 \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}(t) t e^{-2t^2} dt$$

Nótese que la integral es nula cuando los índices tienen paridad distinta, ya que entonces el integrando es una función impar, por lo tanto se supone que las funciones de Hermite son de la misma paridad, esto es $m+n$ es par.

Con ayuda de la representación de Rodrigues, Ec. (B.2), la integral puede expresarse como

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-2t^2} dt = (-1)^{m-1+n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{d^{m-1} e^{-t^2}}{dt^{m-1}} \right) \left(\frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} \right) dt.$$

Integrando por partes el lado derecho y usando nuevamente la Ec. (B.2) se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-2t^2} dt = (-1) \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t) H_{n+1}(t) e^{-2t^2} dt.$$

Repetiendo el procedimiento anterior m veces

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t) H_n(t) e^{-2t^2} dt = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-m}(t) H_{n+m}(t) e^{-2t^2} dt.$$

Substituyendo la expresión para $H_0(t)$ dada en la Ec. (B.3) y la Ec. (B.20) se tiene finalmente

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)e^{-2t^2} dt = (-1)^{\frac{n-m}{2}} 2^{\frac{m+n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right) \quad (\text{B.32})$$

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Bibliografía

- [1] R. L. Fork, C. H. Brito-Cruz, P. C. Becker, and C. V. Shank. Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation. *Opt. Lett.*, 12(7):483-485, 1987.
- [2] I. P. Christov, V. D. Stoev, M. M. Murnane, and H. C. Kapteyn. Sub-10-fs operation of Kerr-lens mode-locked lasers. *Opt. Lett.*, 21:1493, 1996.
- [3] C. V. Shank. "Generation of Ultrashort Optical Pulses." *Topics in Applied Ultrafast Laser Pulses: Generation and Applications*, chapter 2, pages 5-34. Springer-Verlag, 2nd edition, 1993.
- [4] D. H. Auston. *Picosecond conductivity: High speed measurements of devices and materials*, volume 28 of *Semiconductors and semimetals*, chapter 3. 1a edition, 1996.
- [5] H. Mocker and R. Collins. Mode competition and self-locking effects in a q-switched ruby laser. *Appl. Phys. Lett.*, 7(10):270-273, November 1965
- [6] A. J. DeMaria, C. M. Ferrar, and G. E. Danielson Jr. Mode locking of a nd^{3+} -doped glass laser. *Appl. Phys. Lett.*, 8(1):22-24, January 1966.
- [7] A. J. DeMaria, D. A. Stetser, and H. Heynau. Self mode-locking of laser with saturable absorbers. *Appl. Phys. Lett.*, 8(7):174-176, April 1966.
- [8] J. A. Valdmanis, R. L. Fork, and J. P. Gordon. Generation of optical pulses as short as 27 fs directly from a laser balancing self-phase modulation, group velocity dispersion, saturable absorption, and saturable gain. *Opt. Lett.*, 10(3):131-133, 1985.
- [9] D. E. Spence, P.N. Kean, and W. Sibbett. 60-fsec pulse generation from a self-mode-locked Ti:sapphire laser. *Opt. Lett.*, 16:42, 1991.
- [10] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Book, New York, 1a edition, 1986.

- [11] E. B. Tracy. Measurement and interpretation of dynamic spectrogram of picosecond light pulses. *J. Appl. Phys.*, 42:3848. 1971.
- [12] B. S. Prade, J. M. Schins, E. T. J. Nibbering, M. A. Franco, and A. Mysvrowicz. A simple method for the determination of the intensity and phase of ultrashort optical pulses. *Optics Comm.*, 113:79, 1994.
- [13] I. A. Walmsley and J. D. Kafka. *Contemporary Nonlinear Optics*, chapter 4, pages 119–186. Quantum Electronics, Principles and Applications. Academic Press, Inc., Boston, 1st edition, 1992.
- [14] J. A. Armstrong. Measurement of picosecond laser pulse widths. *Appl. Phys Lett.*, 10(1):16–18, January 1967
- [15] W. Demtröder. *Laser Spectroscopy*, volume 5 of *Springer Series in Chemical Physics*. Springer-Verlag, New York, 1a edition, 1982.
- [16] R. Trebino, K. W. DeLong, D. N Fittinghoff, J. L. A. Bowie, M. A. Krumbügel, J. N. Sweetser, and R. T. Jennings. Measurement of the intensity and phase of ultraweak, ultrashort laser pulse. *Opt. Lett.*, 21(12):884–886, 21 1996.
- [17] R. N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. Electrical and Electronic Engineering Series, McGraw-Hill, Singapur, 2nd edition, 1986.
- [18] Pablo Loza Álvarez. Construcción de un láser de Ti:Zafiro de modos amarrados Tesis de Maestría, CICESE, Ensenada, B. C., Agosto 1995.
- [19] R. Ortega-M. C. J. Román-M., and D Yu Kouznetsov. On the second order characterization of ultrashort laser pulses. enviado con las correcciones y comentarios del arbitro al editor. *Journal of Modern Optics*, Nov. 1998.
- [20] T. I. Kuznetsova and D. Yu. Kuznetsov. A phase retrieval algorithm based on analogy for optical image processing. *Optics Comm.*, 61(6):374–377, March 1987.
- [21] R. W. Gerchberg and W. O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik*, 35(2):237–246, 1972.
- [22] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, volume 1. Interscience Publishing, Inc., New York, 1st edition, 1953.
- [23] Jean-Claude M. Diels, Joel J. Fontaine, Ian C. McMichel, and Francesco Simoni. Control and measurement of ultrashort pulses shape (in amplitude and phase) with femtosecond accuracy. *Appl. Opt.*, 24(9):1270–1282, May 1985.

- [24] W. E. Boyce y R. C. DiPrima. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Limusa, México, 3 edition, 1978.
- [25] R. Trebino, K. W. DeLong, D. N. Fittinghoff, J. N. Sweetser, M. A. Krumbügel, B. A. Richman, and D. J. Kane. Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating. *Rev. Sci. Instrum.*, 68(9):3277–3295, September 1997.
- [26] M. J. Stimson, D. J. Ulness, J. C. Kirkwood, G. S. Boutis, and A. C. Albrecht. Noisy-light correlation functions by frequency-resolved optical gating. *J. Opt. Soc. Am. B*, 15(2):505–514, February 1998.
- [27] B. A. Richman, M. A. Krumbügel, and R. Trebino. Temporal characterization of mid-ir free-electron-laser pulses by frequency-resolved optical gating. *Opt. Lett.*, 22(10):721–723, May 1997.
- [28] P. C. Sun, W. T. Masurenko, and Y. Fainman. Femtosecond pulse imaging: Ultrafast optical oscilloscope. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(5):1159–1170, May 1997.
- [29] J. N. Sweetser, D. N. Fittinghoff, and R. Trebino. Transient-grating frequency-resolved optical gating. *Opt. Lett.*, 22(8):519–521, April 1997.
- [30] D. J. Kane, G. Rodríguez, A. J. Taylor, and T. S. Clement. Simultaneous measurement of two ultrashort laser pulses from a single spectrogram in a single shot. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(4):935–943, April 1997.
- [31] W. J. Walecki, D. N. Fittinghoff, A. L. Smirl, and R. Trebino. Characterization of the polarization state of weak ultrashort coherent signals by dual-channel spectral interferometry. *Opt. Lett.*, 22(2):81–83, January 1997.
- [32] M. A. Krumbügel, J. N. Sweetser, D. N. Fittinghoff, K. W. DeLong, and R. Trebino. Ultrafast optical switching by use of fully phase-matched cascade second-order nonlinearities in a polarization-gate geometry. *Opt. Lett.*, 22(4):245–247, February 1997.
- [33] G. Taft, A. Rundquist, J. Squier, K. W. DeLong, I. P. Christov, H. C. Kapteyn, D. N. Fittinghoff, M. A. Krumbügel, J. N. Sweetser, and R. Trebino. Measurement of 10-fs laser pulses. *IEEE J. Sel. Topics Quantum Electr.*, 20(3):575–585, September 1996.
- [34] G. Taft, A. Rundquist, M. M. Murmane, H. C. Kapteyn, K. W. DeLong, R. Trebino, and I. P. Christov. Ultrashort optical waveform measurements using frequency-resolved optical gating. *Opt. Lett.*, 20(7):743–745, April 1995.

- [35] K. W. DeLong, R. Trebino, and W. E. White. Simultaneous recovery of two ultrashort laser pulses from a single spectrogram. *J. Opt. Soc. Am. B.* 12(12):2463-2466. December 1995.
- [36] D. N. Fittinghoff, K. W. DeLong, R. Trebino, and C. L. Ladera. Noise sensitivity in frequency-resolved optical-gating measurements of ultrashort pulses. *J. Opt. Soc. Am. B.* 12(10):1955-1967. October 1995.