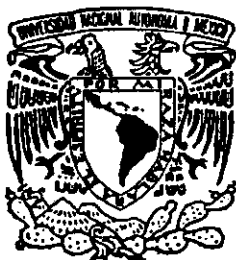


10561

3
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS
SUPERIORES CUAUTITLAN**

**APLICACION DE LA TEORIA DE LAS
BOLAS DE CONTROL DE LA CALIDAD A LOS
PROCESOS DE PINTURA ELECTROFORETICA
AUTOMOTRIZ**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRIA EN FISICOQUIMICA
(METODOS Y METROLOGIA)**

P R E S E N T A :
MANUEL CRESCENCIANO NORIEGA CRESPO

**ASESOR:
M.C. GUILLERMO A. VAZQUEZ COUTIÑO**

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEX. 1999

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

270112



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES-CUAUTITLAN

COORDINACION GENERAL DE ESTUDIOS DE POSGRADO

CARTA DE VOTOS APROBATORIOS

Coordinación General de Estudios de Posgrado
FES - Cuautitlán
Presente.

Por medio de la presente nos permitimos comunicar a usted que revisamos la tesis titulada "APLICACION DE LA TEORIA DE LAS BOLAS DE CONTROL DE LA CALIDAD A LOS PROCESOS DE PINTURA ELECTROFORETICA AUTOMOTRIZ".

que presenta el (la) alumno (a) MANUEL CRESCENCIANO NORIEGA CRESPO

con Núm. de cuenta 7420573-2 N° Exp. 100911017

para obtener el grado de MAESTRIA EN FISICOQUIMICA (METODOS Y METROLOGIA)

Considerando que dicha tesis reúne los requisitos necesarios para ser discutida en el Examen de Grado correspondiente, otorgamos el voto aprobatorio.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"

Cuautitlán Izcalli a 23 de Noviembre de 19 98.

NOMBRE DE LOS SINODALES

PRESIDENTE: DR. ALBERTO ROJAS HERNANDEZ

VOCAL: M.C. GUILLERMO A. VAZQUEZ COUTIÑO

SECRETARIO M.C. RICARDO P. HERNANDEZ GARCIA

1er. SUPL. DRA. MARIA TERESA RAMIREZ SILVA

2do. SUPL. M.C. RAFAEL VILLALOBOS GARCIA

**APLICACION DE LA TEORIA DE LAS BOLAS DE CONTROL DE CALIDAD A
LOS PROCESOS DE PINTURA ELECTROFORETICA AUTOMOTRIZ.**

INDICE.

CAPITULO I.-INTRODUCCION

CAPITULO II.-FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA FRACTAL Y SU CONEXION CON LA
"TEORIA DEL CAOS".

CAPITULO III.-ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LAS BOLAS DE CONTROL
DE CALIDAD.

CAPITULO IV.-CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LAS BOLAS
DE CONTROL DE LA CALIDAD.

CAPITULO V.-CONCLUSIONES Y APLICACIONES

GLOSARIO DE TERMINOS

B-anillo minimal sobre el sistema G
 $B_r(x)$.-bola cerrada de centro x y radio r
 $B^o_r(x)$.-bola abierta de centro x y radio r
C_n.-volumen de una bola n -dimensional de diámetro 1.
 d_c .-diámetro de control de calidad
 d_E .-dimensión euclidiana
 d_f .-dimensión fractal
 d_T .-dimensión topológica
 ϵ .-radio de esferas p -dimensionales
 $\xi_{i,1}$.-función iterativa que representa el estado de un sistema
 F .-transformada de Fourier de una función $f(t)$
 f .-difeomorfismo
 $f(\xi)$.-función promedio de calidad
G.-sistema de conjuntos
 G^{-1} son mapeos diferenciables de \bar{G} .
 $H^s(F)$.-la medida de Hausdorff s -dimensional
K.-entropía de Kolmogorov
LIC.-límite inferior de control
LSC.-límite superior de control
 L^n .-medida de Lebesgue n -dimensional
 ℓ .-factor de escalamiento
m.-anillo de todos los subconjuntos
R.-sistema de conjuntos no vacío
 \mathfrak{R}^m .- espacio euclidiano m -dimensional
 r_c .-radio de control de calidad
 $S(w)$.-potencia de espectro
T.-totalidad de anillos de conjuntos contenidos en m
 t^* .-tiempo crítico
U .-un subconjunto no-vacío del espacio euclidiano n -dimensional
 μ .-medida sobre \mathfrak{R}
 \emptyset .-conjunto vacío
 λ .-exponente de Lyapunov
Z.-flujo de velocidad dada por un campo vectorial

CAPITULO I.

1.0-INTRODUCCION.

Tradicionalmente en la industria automotriz se ha procurado cumplir con las especificaciones, la demanda y las exigencias de los clientes. Por otro lado, el aumento en el índice de exportaciones ha hecho que las empresas modifiquen sus políticas con miras al logro del objetivo de hacer de la producción un proceso dinámico que tienda a la mejora continua; para ello, se emplean gráficos de control, (específicamente, Control Estadístico del Proceso), que son la radiografía apta conocida para el estudio de las variables que intervienen, desde el proveedor, hasta el consumidor.

Se dice que un proceso está bajo control, si se está en posición de juzgar qué hay que hacer para permitir que la fabricación del producto reúna las especificaciones de la característica de calidad deseada. Durante el control

estadístico de un proceso, resulta bastante útil el cálculo de los valores de algunas medidas de tendencia central y de algunas medidas de dispersión usuales (se incluyen en el apéndice "A" las definiciones más usuales). Estos valores son estimados, ya que están sujetos a errores de muestreo; cualquier conclusión deducida de un número pequeño de observaciones (25 subgrupos o menos), debe considerarse como alternativa pendiente de confirmación o de cambio según la trayectoria que presente el gráfico de control y las pruebas que se vayan acumulando.

Una vez estudiado el gráfico conforme a las posibles causas de variabilidad, se llevan a cabo las acciones (una por una), que dicha interpretación recomienda; o bien se espera a tener más datos para actuar.

De aquí, podemos definir que el **Control Estadístico del Proceso**, es la herramienta que nos sirve para conocer como varía el proceso y así poder tomar las acciones apropiadas para lograr y mantener un proceso en control, pudiendo mejorar la calidad de los procesos.

En el control estadístico del proceso es usual distinguir entre variables y atributos. Se dice que la calidad viene expresada mediante variables, cuando se registra la medida real de una característica de calidad. Se lleva un control por atributos, cuando se anota, registra o graba (por ejemplo, en algún medio electrónico conveniente), el número de artículos que cumplen y el número de los que no cumplen con cierta especificación de control de calidad.

Dependiendo del tipo de medición, de la aplicación y del uso típico que se requiera, el Control Estadístico del Proceso(convencional) nos provee de diferentes gráficos tales como:de variables y atributos, gráficos de control X-R,gráficas de control X-S,gráficas de control de medianas, gráficas de lecturas individuales, y gráficas de control por atributos; dentro de las cuales se dispone de cuatro clases de gráficos diferentes que pueden dividirse en dos categorías:A)Gráfica por fracción defectiva ó rechazada(P) y gráfica por número de defectos (np) en una muestra.B)Gráfica por muestra (c) y gráfica de defectos por unidad(u).

En la tabla I se muestra un análisis comparativo de los distintos tipos de gráficos de control convencionales que se utilizan con más frecuencia en la industria; se hace énfasis en el uso típico, las ventajas y las desventajas de los distintos tipos de gráficos ahí presentados. En las figs.2 y 3 se muestran ejemplos de los principales tipos de gráficos convencionales de control arriba mencionados.

Una discusión más detallada sobre el uso y aplicación de los gráficos convencionales, puede encontrarse en la literatura de control estadístico de la calidad, la cual es bastante amplia,se recomienda ver(manual módulo 11 spc ITSM,Quality Control by Juran),

El control de los procesos en la industria automotriz y en la mayoría de las industrias manufactureras existentes hoy en día se realiza haciendo uso de gráficos como el que fué propuesto por primera vez en 1924, en los

VARIABLES	PARAMETROS GRAFICADOS	USO TÍPICO	VENTAJAS	DESVENTAJAS	COMENTARIOS
\bar{X} y R_s	Promedio de un subgrupo y rango o desviación estándar.	Procesos Máquina-dominante.	Buena sensibilidad en la variación estadística de un proceso.	Respuesta lenta, relación indirecta entre los límites de tolerancia y los de especificación.	Frecuencia y número de subgrupos usados para calcular y recalcular los límites de control.
\bar{X} y R	Individual y rango de subgrupo	Donde únicamente se dispone de una observación por lote.	Fácil de graficar y explicar. Se compara directamente con los límites de tolerancia	No es tan sensible como la carta \bar{X} y R.	
CumSum	Suma acumulativa de la desviación de promedios de subgrupos a partir de un valor de referencia.	Productos de costo elevado.	Rápida respuesta.	Compleja y difícil de explicar.	Rápidez y facilidad en el PPM-Control.
ATRIBUTOS					
P	Fracción rechazada.	Para monitorear la calidad de unidades complejas con más de una característica de interés o cuando se dispone únicamente de datos de atributos.	Datos usualmente sencillos de obtener.	Los datos de atributos no son tan útiles en el diagnóstico del proceso como los datos de variables	Eventualmente, todos los gráficos de atributos podrían volverse obsoletos.
M_p	Número de unidades defectuosas.				
U	Número de defectos en una muestra.				
C	Número de defectos en una muestra.				

TABLA 1. ANALISIS COMPARATIVOS DE LOS DISTINTOS TIPOS DE GRAFICOS DE CONTROL.

laboratorios Bell por el físico W.Shewhart, y por gráficos que de alguna manera se derivan de este.

Sin pretender extendernos demasiado en los aspectos históricos del Control de Calidad; es importante hacer mención de que hacia 1927, W.Deming fué iniciado en la teoría de los gráficos de control de Shewhart, por su jefe C.Kunzman, quien lo envió a Londres para formarse, nada menos que con uno de los más brillantes estadísticos teóricos que ha dado el mundo: Sir Ronald A.Fisher. La importancia de W.Deming, en el mundo del control de calidad, queda atestiguado por el premio Deming de calidad que es otorgado anualmente en Japón a la mejor idea para una mejora de calidad. Este hecho resultó un tanto irónico, dado que W.Deming, era virtualmente un desconocido en su propio país(los E.U.); hasta que cierto grupo de dirigentes de la industria automotriz norteamericana(en los 80s), preocupados por la creciente amenaza representada por los automóviles manufacturados en Japón, enviaron una comitiva a dicho país; comitiva que de regreso a los E.U., informó a los dirigentes de la industria automotriz norteamericana, que el "secreto" de los japoneses, estaba en el control estadístico del proceso de manufactura de los automóviles de ese país; control que en dicho país había sido introducido por Deming. ¡Un profesor norteamericano desconocido en su propio país! Los detalles de esta historia pueden consultarse en(Gabor Andrea, "The Man Who Discovered Quality", Penguin Books, New York, 1992.). El otro gran impulsor del control de la calidad en E.U. fué Juran, lo cuál es bastante entendible si recordamos que

el manual más famoso de control de calidad(y tal vez uno de los más completos)es precisamente el"Juran's Quality Control Handbook".

Uno de los propósitos de este trabajo,consiste en continuar y extender una teoría conocida como de "**Las Bolas de Control de Calidad**", cuyos fundamentos y terminología fueron inventados en México a mediados de 1993 por G.A.Vázquez Coutiño, cuando dirigía la tesis de un ing.militar mexicano(J:Villeda) que tenía por objeto la incorporación de la tecnología fractal al control estadístico de calidad en los procesos industriales, partiendo de datos tomados precisamente de la industria automotriz y con la asesoría técnica del que esto escribe(ing.Manuel Noriega C.) y de G.A.Vazquez Coutiño, obtuvo el primer "atractor de calidad" de que se tenga noticia, no solo en la industria automotriz(específicamente la Ford y G.M), sino en la industria química,petroquímica,de alimentos y de manufactura en general. Un año después,en 1994, otro brillante ing.industrial militar(J.Zepeda), dirigido por Vázquez Coutiño,introdujo en su tesis llamada"teoría de las bolas de control de la calidad", el concepto de "línea de control de calidad a 45o" aplicando la teoría a la industria de los ladrillos refractarios(en ese entonces,se tomaron datos proporcionados por la empresa Vitromex).

En este trabajo que ha sido motivado por la intervención del que escribe esta tesis, en la aplicación en la industria automotriz de la teoría de las "**Bolas de Control de la Calidad**" desde sus inicios (esto es ,en 1993) se ha

escogido como base de estudio, uno de los procesos fisicoquímicos más importantes dentro de la aplicación de la pintura automotriz.

1.1-Antecedentes del proceso E-Coat:

La historia de la primera electrodeposición como proceso de primarios automotrices fue bien descrita por Peter Revelt en 1976.

Un consultor académico para una compañía Automotriz(G.E.F.Brewer hacia 1985), sugirió la electrodeposición electroforética para eliminar algunos de los problemas observados en el pintado por inmersión de partes automotrices como son: la falta de mojado en partes huecas, esquinas y zonas de difícil acceso. Después de algunas demostraciones con trabajos de laboratorio; los procedimientos se escalaron para su aplicación a nivel de ingeniería de producción y manufactura patentándolos y creando una nueva industria.

1.2-Bases de la electrodeposición de pintura:

La mayoría de las pinturas con base de agua(solvente agua) pueden ser depositadas en un electrodo, simplemente porque existe una carga en la superficie de cualquier partícula de pigmento y en los enlaces entre moléculas y partículas.

Al espacio entre un par de electrodos cargados se les asocia y se le impone una diferencia de potencial eléctrico dada en volts. El electrodo cargado negativamente atraerá a los iones y partículas cargadas positivamente y los electrodos positivos atraerán a los aniones.

La ecuación de Smoluchowski cuyo estudio es clásico en la termodinámica de los procesos irreversibles[ref.Mazur y de Groot]describe los factores de control para el movimiento de las partículas cargadas en un campo eléctrico. Dichos factores se listan a continuación:

- 1.-La viscosidad del medio de dispersión .
- 2.-La constante dieléctrica del medio de dispersión.
- 3.-La densidad de carga en la superficie de la partícula.

Una vez que los electrodos se cargan, las partículas y moléculas dispersas se moverán hacia el electrodo apropiado.

En la actualidad existen 3 procesos funcionando. Electroforesis(movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico), la Electrólisis(que consiste básicamente en el "rompimiento" del agua) y la Electro-osmosis(movimiento osmótico de agua y de partículas solubles fuera de la película de coagulación).

Las partículas cargadas y el polímero, pueden existir en 3 ambientes en cada uno de los sistemas. El primero, la dispersión de "bulto", que es como si uno recibiera una capa de pintura del proveedor. La segunda es la capa límite, donde los cuerpos dispersados migran hacia abajo debido a que la concentración es creciente. La tercera es la llamada del depósito en la

superficie, siendo en la superficie donde se encuentra la acción. La película cargada se empieza a descargar por algunos mecanismos llevados a cabo en la superficie coagulándola; así, si la capa o película es aniónica, los iones carboxilato son neutralizados por iones hidrógeno liberados durante la electrólisis del agua para formar oxígeno gaseoso.

En la superficie del ánodo, el pH puede ser menor de 2, lo cual es suficiente para producir ácido metil/metacrilato. En el cátodo los polímeros acrílicos son neutralizados por el ión hidróxido liberado de la electrólisis del agua al liberar el hidrógeno.

Existen ecuaciones que describen el proceso de electrodeposición a través de electrodos, (ver F.Beck,Prog.in Org.Chem.4.1.1976), considerando velocidades de migración y difusión, como ayuda para la explicación de la electrodeposición o la de Guruswamy (ver S.Guruswamy,Met.Fin.p.29 oct.1979) que usa ecuaciones que describen la deposición de hule de látex sobre un electrodo. Dentro de los procesos mas importantes, debido a que es utilizado por la mayor parte de la industria Automotriz, está el de Hays and White (ver D.R.Hays and C.S.White.Paint Tech.,41(535),461.Aug 1969), quienes describen la representación de un circuito equivalente(usando capacitores y resistores), para crear un baño de electrodeposito,describiendo además la técnica necesaria para obtener una buena película, logrando una buena uniformidad de ésta sobre todo el sustrato;no dejando partes sin pintar, nada de gotas espesas ni deposición en partes huecas;también se cumple el objetivo de controlar las variables de este proceso. La gran ventaja de poder controlar o dirigir el proceso,además de la calidad de película obtenida es que nos permite una gran disminución en las emisiones de

C.O.V.s(Compuestos Orgánicos Volátiles), por lo cuál es un proceso sumamente apreciado por la industria automotriz actual.

Para finalizar, conviene describir cuáles son la variables o atributos que se han seleccionado para ser medidos y controlados en el proceso de E-Coat en la industria automotriz considerado para su estudio(Ford No.Co.)

Las variables principales a considerar en este proceso , son el voltage de aplicación, ya que de la correcta aplicación del mismo hacia la unidad depende la buena aplicación de pintura, y el espesor de película que nos va a proporcionar la protección adecuada contra la corrosión. Ambas variables están directamente correlacionadas; es decir a mayor voltage se tiene un mayor espesor, por lo que estas son las variables a controlar en el proceso de aplicación de la pintura electroforética(E-coat).

CAPITULO II.

FUNDAMENTOS DE GEOMETRIA FRACTAL Y SU CONEXION CON LA "TEORIA DEL CAOS".

2.0 INTRODUCCION:

-Galileo, hacia 1623 mencionaba que "La filosofía escrita en este gran libro (el de la naturaleza) está abierto continuamente a nuestra mirada, pero no puede ser entendido a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje en el que está escrito. Y está escrito, en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son los triángulos, los círculos y otras figuras geométricas, sin las cuáles sería humanamente imposible entender una sola palabra de él; sin lo anterior, uno estaría [continuamente] vagabundeando por un laberinto oscuro."

Benoit Mandelbrot, el matemático judío-polaco-francés (y ahora ciudadano norteamericano) que acuñó la palabra "**fractal**", y quien es considerado como el iniciador de la GEOMETRIA FRACTAL; liberó a la geometría, de la tiranía

de las líneas rectas, las formas geométricas convencionales (o euclidianas) y los sólidos regulares.

Mandelbrot se atrevió a evidenciar lo que parecía obvio: "Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, la corteza (terrestre) no es suave y ni siquiera la luz viaja en línea recta."

Galileo, tenía razón en parte, pero se había equivocado de dialecto geométrico, pues el dialecto preferido por el "gran libro de la naturaleza" y el que corresponde a formas irregulares del mundo real es precisamente el de la GEOMETRIA FRACTAL.

-Pero. ¿qué es un fractal? En términos muy técnicos puede mencionarse la siguiente definición debida a Mandelbrot y propuesta en 1982: "Un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica".

Esta definición requiere de una detallada discusión de que es lo que se entiende por dimensión de Hausdorff-Besicovitch (d_*), lo cual se hará más adelante; y de una manera más simple y fácil de calcular, conocida como dimensión de similitud (d_s), que se utiliza frecuentemente para estimar la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

De hecho, hacia 1986, Mandelbrot propuso una nueva definición de fractal, que está íntimamente relacionada con el concepto de "auto-similitud":

"Un fractal, es una forma (geométrica) hecha de partes similares al todo de alguna manera."

En los fractales, se pueden observar figuras geométricas que consisten en motivos idénticos, que se repiten dentro de sí mismos a escalas cada vez más reducidas.

Es importante mencionar, que la primera definición de Mandelbrot, es poco satisfactoria, dado que, si bien se ajusta a la descripción de un cierto número de fractales, también excluye a otro gran número de conjuntos que deberían ser considerados como fractales [K.Falconer,1990].

En una comunicación personal de Mandelbrot a Feder (1987), el "inventor" de la GEOMETRIA FRACTAL confesó que "aún falta una nítida y completa caracterización de los fractales".

K.Falconer(1990) en su libro"FRACTAL GEOMETRY:MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS", hace notar que la definición de "fractal" debería ser considerada de la misma forma que un biólogo intenta dar una definición de "vida"; en realidad no hay una definición simple y rápida de "vida", mas bien, una lista de propiedades características de los seres vivientes, tales como su habilidad para reproducirse, para moverse o para existir, hasta cierto punto,de manera independiente de su ambiente. Siguiendo esta filosofía y en analogía con la forma de asignar ciertas propiedades características al concepto"vida", nos referimos al conjunto F (que puede ser considerado como un conjunto de puntos contenido en cierto espacio) como a un fractal cuando se observen las siguientes características(Falconer):

i) F tiene una estructura fina;esto es, detalle a escalas arbitrariamente pequeñas.

- ii) F es demasiado irregular como para ser descrito en el lenguaje geométrico tradicional, tanto local como globalmente.
- iii) A menudo F tiene o exhibe alguna forma de autosimilitud, tal vez en forma aproximada o estadística. Un objeto auto-similar tiene la propiedad de que una parte de él, cuando se amplifica, luce como el todo. Cuando un fractal es exactamente auto-similar, cada pequeña porción de F al ser amplificada, reproducirá exactamente una porción más grande; si se consideran fractales estadísticamente auto-similares, una amplificación de F, lucirá o se parecerá a F, pero no será exactamente como F.

El concepto unificador que se "oculta" detrás de la conexión entre la geometría fractal, la teoría del caos y las leyes de potencias, es precisamente el de autosimilitud o invarianza frente a cambios de dimensión o escala; es un atributo de muchas leyes de la naturaleza y de innumerables fenómenos del mundo que nos rodea. La autosimilitud es una de las simetrías, que modelan (en forma decisiva) nuestro universo y nuestros esfuerzos para comprenderlo [M.Schroeder,].

- iv) Usualmente, la "dimensión fractal" de F (que tiene que ser definido de alguna manera) es mayor que su dimensión topológica. Existen fractales para los cuales se requiere de más de un exponente de escalamiento para ser caracterizados; de tales exponentes, la dimensión de Hausdorff es solo uno; a dichos fractales generalizados se les conoce como tifractales [M.Schroeder].

v) En la mayor parte de los casos F se define por medio de un algoritmo recursivo.

2.1-MEDIDA Y DIMENSION DE HAUSDORFF Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES ASOCIADOS.

Anteriormente, se definió un fractal (Mandelbrot, 1982), en términos de la llamada dimensión de Hausdorff-Besicovitch; para entender las matemáticas asociadas al concepto de fractal, es esencial tener cierta familiaridad con la medida y la dimensión de Hausdorff. A su vez, será necesario recordar algunos conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos, de la topología general y de la teoría de la medida. Comenzaremos por introducir algunas operaciones elementales de la teoría de conjuntos.

Sean A o B conjuntos arbitrarios; se llame **unión** $A \cup B$ de estos conjuntos al conjunto compuesto de todos los elementos pertenecientes por lo menos a uno de los conjuntos A o B . En forma análoga se define la suma de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos: si A_α son conjuntos arbitrarios, su suma $\cup A_\alpha$ es la colección de elementos, cada uno de los cuales pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A_α .

Se denominará **intersección** $A \cap B$ de los conjuntos A y B al conjunto compuesto por todos los elementos pertenecientes tanto al conjunto A como al conjunto B , la intersección de un número cualquiera (finito o infinito) de conjuntos A_α es la colección $\cap A_\alpha$ de elementos pertenecientes a cada uno de los conjuntos A_α .

La operación de resta o diferencia $A \setminus B$ de los conjuntos A y B consiste en la colección de aquéllos elementos de A que no pertenecen a B . A veces se escribe $A - B$, en vez de $A \setminus B$ para denotar la diferencia de los conjuntos A y B .

La diferencia simétrica $A \Delta B$ de los conjuntos A y B se define mediante:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Se denomina "**sistema de conjuntos**" a todo conjunto cuyos elementos son, en sí ciertos conjuntos. Denotaremos con letras tipo "**symbol**" mayúsculas a los sistemas de conjuntos.

Un sistema no vacío de conjuntos R se llama **anillo** si de $A \in R$ y $B \in R$ se deduce que $A \Delta B \in R$ y $A \cap B \in R$. Como para cualesquiera dos conjuntos A y B .

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$$

$$\text{y } A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$$

resulta que si $A \in R$ y $B \in R$, también pertenecen a R los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$.

En consecuencia, un anillo de conjuntos es un sistema de conjuntos invariante respecto a las operaciones de unión, intersección, resta y diferencia simétrica. Todo anillo es, además, invariante respecto a las operaciones siguientes:

$$C = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad D = \bigcap_{k=1}^n A_k$$

Por otro lado, todo anillo contiene al **conjunto vacío** ϕ dado que $A \setminus A = \phi$.

El sistema que sólo consta del conjunto vacío representa el menor anillo de conjuntos posible.

A un conjunto E , se le denominará **unidad** del sistema de conjuntos G si $E \subset G$ y si además $\forall A \in G$ se verifica la siguiente igualdad.

$$A \cap E = A$$

La unidad E de un sistema de conjuntos G es simplemente el conjunto máximo de este sistema que contiene todos los demás conjuntos que figuran en G .

Un **álgebra de conjuntos** es un anillo de conjuntos provisto de la unidad.

Los siguientes teoremas son importantes en relación al concepto de anillo de conjuntos:

Tm.1-La intersección $R = \bigcap_{\alpha} R_{\alpha}$ de un conjunto cualquiera de anillos es también un anillo.

Tm.2-Cualquiera que sea el sistema no vacío de conjuntos G , existe un anillo y sólo uno, $R(G)$ que contiene a G y está contenido en cualquier anillo R que contiene G .

El Tm.1-se desprende directamente de la definición de anillo de conjuntos. Para demostrar el Tm.2, primero hay que hacer notar que el anillo $R(G)$ queda unívocamente determinado por el sistema G . Con el objeto de demostrar la existencia de este anillo, se considerará la unión $X = \bigcup_{A \in G} A$ de todos los conjuntos A que figuran en G y el anillo $m(X)$ de todos los subconjuntos del conjunto X . Sea T la totalidad de los anillos de conjuntos contenidos en $m(X)$ y contienen a G .

La intersección

$$B = \bigcap_{R \in T} R$$

de todos estos anillos será precisamente el anillo $R(G)$. Así, cualquiera que sea el anillo R^* y que contenga a G ; la intersección

$$R = R^* \cap \mathfrak{m}(X)$$

será un anillo de T y por lo tanto,

$$G \subset R \subset R^*$$

esto es, B verifica la condición de ser, en efecto, el anillo minimal sobre el sistema G y se denota $R(G)$.

σ -anillo.-Un anillo de conjuntos se llama σ -anillo si junto con toda sucesión de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , contiene la unión.

$$S = \bigcup_n A_n$$

δ -anillo.-Un anillo de conjuntos se llama δ -anillo si junto con toda sucesión de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n , contiene la intersección.

$$D = \bigcap_n A_n$$

Naturalmente, se le denomina **σ -álgebra** a todo σ -anillo con unidad y **δ -álgebra** a todo δ -anillo con unidad. En realidad ambos conceptos coinciden: toda σ -álgebra es al mismo tiempo una δ -álgebra y toda δ -álgebra, una σ -álgebra. Lo anterior se deduce de las siguientes relaciones de dualidad.

$$\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcap_n (E \setminus A_n)$$

$$\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$$

Las δ -álgebras, ó equivalentemente las σ -álgebras se conocen comunmente como **álgebras de Borel** ó sencillamente, **B-álgebras**.

Si se tiene un sistema de conjuntos G , siempre existe al menos una B-álgebra que contiene este sistema. Hagamos:

$$X = \bigcup_{A \in G} A$$

y consideremos el sistema B de todos los subconjuntos del conjunto X .

Entonces B es una B -álgebra que contiene a G . Si \bar{B} es una B -álgebra arbitraria que contiene a G y \bar{X} es una unidad, todo $A \in G$ está contenido en \bar{X} y por lo tanto, $X = \overline{\bigcup_{A \in G} A} \subset \bar{X}$. Una B -álgebra \bar{B} se llama irreducible (respecto a G) cuando $\bar{X} = \bigcup_{A \in G} A$. Esto es, una B -álgebra irreducible que no contiene puntos no pertenecientes a ninguno de los conjuntos $A \in G$.

Para las B -álgebras irreducibles es aplicable un teorema análogo al Tm.2, que se demostró anteriormente para anillos de conjuntos.

Tm.3. Cualquiera que sea el sistema de conjuntos no vacío G , existe una B -álgebra $B(G)$ irreducible (respecto a este sistema) que contiene a G y que está contenida en cualquier B -álgebra que contiene a G .

La demostración es análoga a la del teorema 2. La B -álgebra $B(G)$ se llama **B -álgebra minimal** sobre el sistema G o clausura boreliana del sistema G .

En la teoría fractal desempeñan un papel importante los llamados **conjuntos de Borel** o **B -conjuntos**; esto es, los conjuntos de la recta numérica pertenecientes a la B -álgebra minimal sobre la totalidad de los segmentos $[a, b]$.

En particular, si se designa con (x^1, x^2, \dots, x^m) a las coordenadas del punto $\bar{x} \in \mathfrak{R}^m$, siendo \mathfrak{R}^m el espacio euclidiano m -dimensional; podemos asociar con un conjunto u una σ -álgebra que contenga a los conjuntos de puntos del tipo:

$$\{ \bar{x} : a_1 \leq x^1 < b_1 \dots a_m < x^m < b_m \}$$

donde $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ son números reales.

A tales conjuntos se les denomina **paralelepípedos semiabierto a la derecha**. Las sumas finitas de paralelepípedos semiabierto a la derecha forman el

álgebra \mathcal{U}_0 en \mathfrak{R}^n . La mínima σ -álgebra \mathcal{U} , que contiene el álgebra \mathcal{U}_0 , coincide con la mínima σ -álgebra de los conjuntos que contienen todos los conjuntos abiertos y cerrados de \mathfrak{R}^n . Esta σ -álgebra se denomina **boreliana** (ó de Borel) y a los conjuntos de \mathcal{U} , borelianos. Para propósitos de aplicación se considerará entonces, que la clase de los conjuntos de Borel es la colección más pequeña de los subconjuntos de \mathfrak{R}^n que reúne las siguientes propiedades [Falconer]:

i) Cada conjunto abierto y cada conjunto cerrado es un conjunto de Borel.

ii) La unión de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel, es un conjunto de Borel; además, la intersección de cada colección finita o contable de conjuntos de Borel es también un conjunto de Borel.

2.1a-Concepto de medida.- No sería posible llegar muy lejos en la teoría de fractales si no se estudian los conceptos básicos de la teoría de la medida. Se denominará μ , **medida sobre \mathfrak{R}^n** , si μ asigna un número no negativo (inclusive ∞) a cada subconjunto de \mathfrak{R}^n , tal que [Falconer, Kolmogorov,]

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$

c) Si A_1, A_2, \dots, A_n es una secuencia contable (finita) de conjuntos, entonces:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

d) Si (A_i) es una sucesión de conjuntos de Borel medibles disjuntos dos a dos, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

a esta propiedad de la medida, se le conoce como **aditividad numerable** o **σ -aditividad** [Kolmogorov & Fomin].

Si en particular, $A \subset B$ y A puede expresarse como la unión disjunta $A = B \cup (A \setminus B)$, entonces una consecuencia inmediata de esta ecuación es:

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

e) Si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

nótese aquí, que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$, de modo que:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i))$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A_1) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k (\mu(A_{i+1}) - \mu(A_i)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$$

De manera más general, si para $\delta > 0$, A_δ son conjuntos de Borel crecientes cuando δ decrece, esto es, si $A_\delta \subset A_{\delta'}$ para $0 < \delta < \delta'$; entonces:

$$\mu\left(\bigcap_{\delta > 0} A_\delta\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(A_\delta)$$

Una clase especial y muy importante de medida es la llamada **medida de Lebesgue** en \mathfrak{R}^n . Si el conjunto $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n : a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$

es un paralelepípedo en \mathfrak{R}^n , el volumen n -dimensional de A está dado por

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

La medida de Lebesgue n-dimensional L^n puede considerarse como una extensión del volumen n-dimensional para una gran clase de conjuntos. En esta tesis, será de utilidad definir la medida de Lebesgue en \mathfrak{R}^n mediante.

$$L^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

donde el infimum se tome sobre todas las cubiertas de A por los paralelepipedos A_i .

En la teoría de fractales, la **medida de Hausdorff** [Falconer], juega un papel crucial, como tendremos oportunidad de ver.

Sea U un subconjunto no-vacío del espacio euclidiano n-dimensional, \mathfrak{R}^n , el diámetro de U se define como:

$$|U| = \sup \{ |x-y| : x, y \in U \}$$

Si $\{U_i\}$ es una colección contable de conjuntos cuyo diámetro es a lo más δ , que cubren F; esto es:

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$$

con $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i, se dirá que $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F.

Supóngase que F es un subconjunto de \mathfrak{R}^n y que s es un número no-negativo.

Para cualquier $\delta > 0$, se define:

$$H_s^\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es una } \delta\text{-cubierta de } F \right\}$$

Aquí se ve que en tanto δ sufre un decremento, la clase de cubiertas permisibles de F se reduce, y por lo tanto, el infimum $H_s^\delta(F)$ se incrementa aproximándose al límite cuando $\delta \rightarrow 0$. Así:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_s^\delta(F)$$

se denominará a $H^s(F)$ la **medida de Hausdorff s-dimensional** de F.

No es difícil demostrar, que en efecto H^s es una medida; en primer lugar

$$H^s(\emptyset) = 0$$

Si A está contenido en F , entonces:

$$H^s(A) \leq H^s(F)$$

Además, si $\{F_i\}$ es cualquier colección contable de conjuntos de Borel disjuntos, entonces.

$$H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$$

La medida de Hausdorff s -dimensional H^s sobre subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $0 \leq s \leq n$; son en realidad, una generalización de la medida de Lebesgue L^n a dimensiones que no son necesariamente enteras. De hecho, es posible mostrar [Falconer] que, para subconjuntos de \mathbb{R}^n , con $0 < s < n$; son en realidad, una generalización de la medida de Lebesgue L^n a dimensiones que no son necesariamente enteras. De hecho, es posible mostrar [Falconer] que, para subconjuntos de \mathbb{R}^n la medida de Hausdorff n -dimensional es igual a la medida de Lebesgue L^n (esto es, el volumen n -dimensional) multiplicado por una constante; así, si F es un subconjunto de Borel de \mathbb{R}^n :

$$H^n(F) = C_n \text{ vol}^n(F)$$

Siendo $C_n = \pi^{(1/2)^n} / 2^n (n/2)!$ el volumen de una bola n -dimensional de diámetro 1.

Una propiedad, básica en la teoría de fractales, de la medida de Hausdorff s -dimensional, es la llamada **propiedad de escalamiento**.

Si $F \subset \mathbb{R}^n$ y $\ell > 0$ entonces

$$H^s(\ell F) = \ell^s H^s(F)$$

donde $\ell F = \{\ell x : x \in F\}$; esto es, el conjunto F está "escalado" por un factor ℓ .

Otra propiedad importante de la medida de Hausdorff es la llamada **condición de Hölder del exponente α** : Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y $f: F \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad (x, y \in F);$$

para las constantes $C > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces para cada S

$$H^{s/\alpha}(f(F)) \leq C^{s/\alpha} H^s(F)$$

El caso $\alpha=1$, es particularmente importante

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in F)$$

aquí f se denomina **el mapeo de Lipschitz**, y

$$H^s(f(F)) \leq C^s H^s(F)$$

Si f es una **isometría**, esto es, si

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{entonces: } H^s(f(F)) = H^s(F)$$

Como caso particular, es importante hacer notar que la medida de Hausdorff es invariante ante translaciones, esto es;

$$H^s(F+a) = H^s(F)$$

donde

$$F+a = \{x+a : x \in F\}$$

En forma análoga, puede demostrarse que la medida de Hausdorff es también **"invariante ante rotaciones"**.

2.1.b-Dimensión de Hausdorff.-Si $t > s$ y $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F , entonces

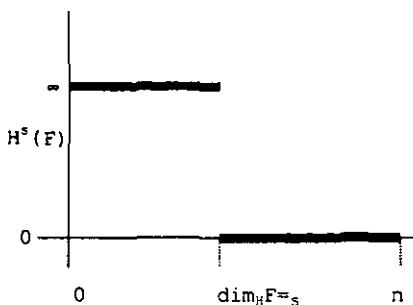
$$\sum_i |U_i|^t \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s$$

después de tomar el infimum a ambos lados de dicha desigualdad, se obtiene

$$H_t^s(F) \leq \delta^{t-s} H_s^s(F)$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se ve que si $H^s(F) < \infty$ entonces $H^t(F) = 0$ para $t > s$. En un gráfico de $H^s(F)$ vs s (Fig 2.1) se muestra que hay un valor crítico de s

para el cuál $H^s(F)$ "salta" de ∞ a $= 0$. A este valor crítico, se le denomina **dimensión de Hausdorff** de F , y se escribe como $\dim_H F$; algunos autores se refieren a esta dimensión como **la dimensión de Hausdorff-Besicovitch**.



Fig(2.1). Gráfica de $H^s(F)$ vs. s para un conjunto F . La dimensión de Hausdorff es el valor de s para el cuál $H^s(F)$ "salta" de ∞ a 0 .

La dimensión de Hausdorff se define fundamentalmente como.

$$\dim_H F = \inf\{s: H^s(F) = 0\} = \sup\{s: H^s(F) = \infty\} \text{ de modo que,}$$

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < \dim_H F \\ 0 & \text{si } s > \dim_H F \end{cases}$$

En particular, si $s = \dim_H F$, entonces $H^s(F)$ puede ser 0 o ∞ o puede satisfacer.

$$0 < H^s(F) < \infty$$

Un conjunto de Borel que satisfaga la última condición se denomina un **s-conjunto**.

La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

- i) Propiedad de los conjuntos abiertos. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\dim_H F = n$, puesto que F contiene una bola de volumen n -dimensional positivo.

ii) Propiedad de los conjuntos suaves Si F es, una subvariedad m -dimensional continuamente diferenciable, (esto es, una superficie m -dimensional) de \mathbb{R}^n , entonces $\dim_{\mathbb{H}} F = m$. En particular, las curvas suaves tienen dimensión 1 y las superficies suaves tienen dimensión 2. Esto puede deducirse de la relación entre la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue.

iii) Monotonicidad . Si $A \subset F$, entonces $\dim_{\mathbb{H}} F \geq \dim_{\mathbb{H}} A$. Esto se deduce en forma inmediata de la propiedad $H^s(A) \leq H^s(F)$ para cada s .

iv) Estabilidad contable. Si F_1, F_2, \dots es una secuencia contable de conjuntos, entonces.

$$\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} (\dim_{\mathbb{H}} F_i)$$

De hecho,

$$\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \geq \dim_{\mathbb{H}} F_j$$

para cada j , de acuerdo con la propiedad de monotonicidad.

Por otro lado, si $s > \dim_{\mathbb{H}} F_i \forall i$, entonces $H^s(F_i) = 0$,

de modo que $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$

v) Propiedad de los conjuntos contables. Si F es contable, entonces $\dim_{\mathbb{H}} F = 0$, dado que si F_i es un punto simple, $H^1(F_i) = 1$ y $\dim_{\mathbb{H}} F_i = 0$; así por la propiedad de estabilidad contable.

$$\dim_{\mathbb{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = 0$$

vi) Invariancia geométrica. Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ y supóngase que $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \quad (x, y \in F)$$

entonces $\dim_{\mathbb{H}} f(F) \leq (1/\alpha) \dim_{\mathbb{H}} F$

Corolario a) Si $f:F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación de Lipschitz, entonces

$$\dim_{\mathbb{H}} f(F) \leq \dim_{\mathbb{H}} F$$

Corolario b) Si $f:F \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una bi-transformación de Lipschitz esto es, si.

$$C_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq C_2|x-y| \quad (x,y \in F)$$

donde $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, entonces, $\dim_{\mathbb{H}} f(F) = \dim_{\mathbb{H}} F$

Se tiene aquí una propiedad fundamental de la dimensión invariante ante bi-transformaciones de Lipschitz.

vii) Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim_{\mathbb{H}} F < 1$ es totalmente inconexo.

Definiciones equivalentes de la dimensión de Hausdorff.

Antes de dar una definición equivalente que conduzca a la dimensión de Hausdorff, conviene introducir un par de definiciones que serán de utilidad tanto en la definición equivalente de dimensión de Hausdorff como en lo que denominaremos en un capítulo posterior la "Teoría de las Bolas de Control de Calidad" (TBCC).

Una "bola cerrada" de centro x y radio r se define mediante.

$$B_r(x) = \{y: |y-x| \leq r\}$$

en forma análoga, se define una bola abierta como:

$$B_r^\circ(x) = \{y: |y-x| < r\}$$

Un tipo de cubrimiento que puede ser utilizado para definir medidas que conduzcan a la dimensión de Hausdorff, consiste en considerar bolas esféricas, esto es. $B_\delta^s(F) = \inf \{ \sum |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es una } \delta \text{ cubierta de } F \text{ por bolas} \}$

de esta forma se obtiene la medida, $B^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} B_\delta^s(F)$

y una "dimensión" a la cual $B^s(F)$ salta de ∞ a 0. De hecho $H^s_\delta(F) \leq B^s_\delta(F)$, dado que cualquier δ -cubierta de F es un cubrimiento permitido en la definición de H^s_δ . Además, si $\{U_i\}$ es una δ -cubierta de F , entonces también lo es $\{B_i\}$; donde para cada i , se escoge a B_i como una bola que contenga a U_i y de radio $|U_i| \leq \delta$. De este modo,
$$\sum |B_i|^s \leq \sum (2|U_i|)^s = 2^s \sum |U_i|^s$$
 y tomando el infimo se obtiene.
$$B^s_{2\delta}(F) \leq 2^s H^s_\delta(F)$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ se llega a,
$$H^s(F) \leq B^s(F) \leq 2^s H^s(F)$$

Con lo anterior, los valores de s a los cuales H^s y B^s saltan de ∞ a 0 son iguales; de modo que las dimensiones definidas por las dos medidas también son iguales.

2.1.c-DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE DIMENSION.

Aunque la dimensión de Hausdorff es la de definición básica en la que se trabaja en la Geometría Fractal, existen otras definiciones que se usan ampliamente y que resultan mas prácticas desde el punto de vista de su implementación para el tratamiento de datos en una computadora. Resulta fundamental la idea de "medida a escala δ ". Así, para cada δ , se mide un conjunto de modo que se ignoren las irregularidades de tamaño menor a δ , y luego se observa como se comportan tales mediciones cuando $\delta \rightarrow 0$. En

particular, puede suceder que una dimensión de F sea determinada por una ley de potencias obedecida por la medida $M_\delta(F)$ cuando $\delta \rightarrow 0$. Si $M_\delta^s(F) \approx C \delta^s$ para C y s constantes; puede decirse que F tiene dimensión s , con C vista como la longitud s -dimensional de F . Tomando logaritmos,

$$\log M_\delta(F) \approx \log C - s \log \delta$$

Si la diferencia de los dos lados tiende a 0 con δ , entonces:

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log M_\delta(F) / (-\log \delta)$$

Dimensión de la caja o dimensión de capacidad (d_c).

Esta definición data de los años 50s y también se le conoce como dimensión de la información (d_i). Aunque ahora se sabe que estrictamente $d_c > d_i$ (Grasberger y Procaccia, 1983).

Sea F subconjunto acotado no vacío de \mathcal{R}^n y sea $N_\delta(F)$ el número más pequeño de conjuntos de diámetro de a lo más δ que pueden cubrir F . Entonces, las dimensiones de la caja (box counting dimensions) inferiores y superiores de F se definen respectivamente como:

$$\underline{\dim}_B F = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$$

Si ambas dimensiones son iguales, nos referiremos a dicho valor común como a la dimensión de la caja de F (también denominada dimensión de capacidad)

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(F) / (-\log \delta)$$

en la ecuación anterior $N_\delta(F)$ puede ser:

i) el número mínimo de bolas cerradas de radio δ que cubren F .

ii) el número mínimo de cubos de lado δ que cubren F

iii) el número máximo de bolas distintas de radio δ con centros en F .

La lista anterior podría extenderse aún más; en la práctica se adopta la definición que sea más conveniente para una aplicación dada.

En particular, y dentro del contexto de la teoría del caos y de la teoría de las bolas de control de la calidad, se evaluará la dimensión fractal d_F (asociándola con la dimensión de la caja) de un atractor extraño (concepto que se discutirá más adelante) mediante.

$d_F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$ donde $N(\epsilon)$ es el número de esferas p -dimensionales de radio ϵ requeridos para cubrir el atractor.

Dimensión de similitud. Ya antes se ha mencionado que "un fractal, es una forma (geométrica) hecha de partes similares al todo" y que es posible observar en los fractales, figuras geométricas que consisten en motivos idénticos, que se repiten dentro de sí mismos a escalas cada vez más reducidas. Lo anterior está íntimamente relacionado con el concepto de autosimilitud, esto es, si se toma una pequeña porción de un fractal y se amplifica, será posible reproducir una porción más grande de dicho fractal.

Formalmente, la autosimilitud es la propiedad de los objetos o conjuntos en donde por magnificación, amplificación o aumento, los subconjuntos de un conjunto lucen como el todo (cualquiera que sea la escala).

Antes de obtener una expresión que nos permita calcular la dimensión de similitud d_s de un objeto fractal se comenzará por asociar una dimensión topológica d_t a ciertos objetos geométricos bien conocidos. Por ejemplo, la dimensión topológica de un punto es $d_t = 0$, la dimensión topológica de las

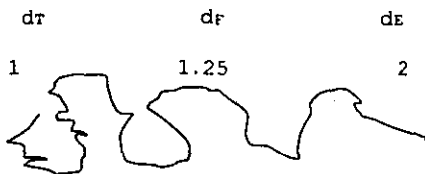
costas, los círculos y en general de las curvas es $d_f = 1$, dado que consisten únicamente de líneas sin área. Análogamente, en el caso de superficies se tendrá que $d_f = 2$, y para objetos con volumen $d_f = 3$, etc.

La dimensión euclidiana d_E es el número de coordenadas que se requieren para determinar o definir un conjunto de elementos geométricos. Ya Mandelbrot había propuesto en 1952 que "un fractal es por definición un conjunto para el cual la dimensión de Hausdorff-Besicovitch excede estrictamente la dimensión topológica." Con las definiciones anteriores resulta natural incluir como casos límite para la dimensión fractal (o de Hausdorff-Besicovitch) a la dimensión topológica d_T y a la dimensión euclidiana.

$$d_T < d_f < d_E$$

Además Pfeifer y Obert (1989), propusieron que la diferencia $d_f - d_T$ es algo así, como una medida del desorden del sistema si $d_f - d_T$ el sistema está ordenado o ligeramente desordenado; si $d_T < d_f$ el sistema estará fuertemente desordenado. (Ver fig.2.1), en la cual se presenta de manera contrastante el papel que juegan la dimensión topológica d_T , la dimensión fractal d_f y la dimensión euclidiana d_E .

d_T	d_f	d_E
1	1.00	1
<hr/>		
1	1.02	2
<hr/>		



(Fig.2.2) comparación de las dimensiones topológica, fractal y euclidiana.

Para obtener una expresión para el cálculo de la dimensión de similitud nos ayudaremos de la fig2.3; en la cuál se representan una línea, un área y un volumen respectivamente. Para la línea, las 3 dimensiones discutidas anteriormente resultan ser iguales a 1, esto es, $d_T=d_F=d_E=1$, algo análogo se tiene en el caso del cuadrado en donde $d_T=d_F=d_E=2$. De manera similar, para el cubo $d_T=d_F=d_E=3$.

En dicha figura se comenzará por considerar la línea de longitud L , a la cual se dividirá en $N=q$ partes, cada una de las cuales tiene longitud ℓ . entonces:

$$N=L/\ell=q \quad \text{y} \quad \ell=L/q$$

Adermás conviene definir una razón de escalamiento r como el inverso del número de partes en las que se ha dividido la línea, el cuadrado, el cubo, etc. esto es:

$$r = 1/q$$

y en el caso de la línea, como $N=q$, entonces

$$r = 1/q = 1/N \text{ con lo cuál } Nr^1 = 1$$

en el caso del cuadrado.

$$\ell = L/q \text{ y } N = (L/\ell)^2 = q^2$$

con lo cual

$$r = 1/q = 1/N^{1/2} \text{ y } Nr^2 = 1$$

para el cubo de lado L,

$$\ell = L/q \text{ y } N = (L/\ell)^3 = q^3, \text{ por lo tanto}$$

$$r = 1/q = 1/N^{1/3} \text{ con lo que } Nr^3 = 1$$

Si continuáramos con dimensiones superiores a 3, hallaríamos una ecuación de tipo

$$Nr^D = 1$$

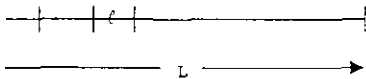
El genio de Mandelbrot consistió en reconocer que dicha ecuación (aparentemente tan sencilla), podía extenderse a dimensiones no enteras.

Después de aplicar logaritmos la ecuación anterior queda:

$$d_s = D = \log N / \log (1/r)$$

aquí d_s es la dimensión de similitud la cual se utiliza frecuentemente para estimar la dimensión fractal o de Hausdorff-Besicovitch, por la facilidad con que es posible calcularla en el caso de algunos fractales deterministas.

q partes



$$d_T = d_F = d_S = 1$$

$$N = q \text{ partes}$$

$$N = L/\ell = q$$

$$r = 1/q = 1/N$$

$$Nr = 1$$

$$d_T = d_F = d_S = 2$$

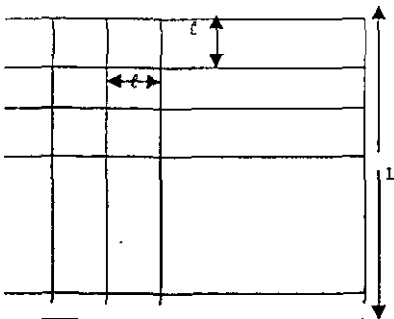
$$N = q^2 \text{ partes}$$

$$N = (L/\ell)^2 = q^2$$

$$r = 1/q = 1/N^2$$

$$Nr^2 = 1$$

q partes



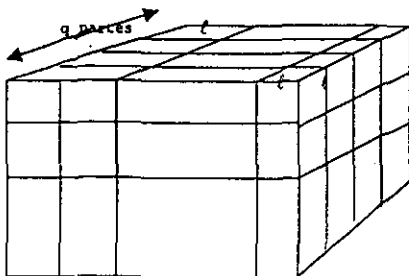


Fig (2.3)

$$dr=dr=dr= 3$$

$$N = q^3 \text{ partes}$$

$$N = (L/l)^3 = q^3$$

$$r = 1/q = 1/N^{1/3}$$

$$Nr^3 = 1$$

generalizando $Nr^D = 1$

y

$$D = ds = \log N / \log (1/r)$$

La dimensión de similitud (ds) y la de capacidad (dc) están relacionadas; si se parte de la ecuación que define la dimensión de similitud (ds)

$$N = 1/r^{ds} = (L/l)^{ds} = (L/\epsilon)^{ds} = N(\epsilon)$$

donde $l = \epsilon$, y N depende de ϵ , se obtendrá para ds :

$$ds = \log N(\epsilon) / (\log L + \log 1/\epsilon)$$

Si se considera en dicha ecuación el límite cuando ϵ es muy pequeño, el término que involucra L se hace despreciable; esto sugiere definir la dimensión de capacidad (como ya antes se ha hecho) como:

$$dc = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon) / \log (1/\epsilon)$$

Existen aún otras definiciones de dimensión, tales como la dimensión de la información d_i , la dimensión de correlación d_c (o de Grassberger y nsiones superiores Procaccia) y dimede orden q , $d^{(q)}$, que serán discutidos más adelante en relación con el concepto de atractor; que es de fundamental importancia en la teoría del caos y que resulta básico en la teoría de las bolas de control de la calidad. (tbcc).

2.1.d-Análisis de sistemas dinámicos y teoría del CAOS.

El análisis de sistemas dinámicos (ASD) constituye una poderosa herramienta en el estudio de fenómenos que exhiben un comportamiento multiperiodico, caótico o aleatorio. El control de calidad de los procesos industriales pueden exhibir una gran variedad de comportamientos y muestra una variedad que no es fácil de estudiar mediante un algoritmo simple. Comencemos por definir algunos conceptos fundamentales.

Espacio de estado. Espacio matemático abstracto cuyas coordenadas son las variables de estado o las componentes de un vector de estado. También es usual referirse al "espacio-fase", debido a que en mecánica dicho espacio, es un espacio matemático abstracto cuyas coordenadas corresponden a las coordenadas generalizadas y a los momentos generalizados. En los sistemas dinámicos, el espacio-fase, tiene usualmente como variables de estado, a la variable x , a su primer derivada \dot{x} , y a las derivadas de orden superior $x^{(n)}$.

Sistema dinámico. Es un sistema cuyo estado cambia con el tiempo (t). En las aplicaciones se encuentran dos tipos principales de sistemas de sistemas dinámicos: aquellos para los cuales la variable de tiempo es descrita ($t \in \mathbb{Z}$ o \mathbb{N}) y aquellas para las cuales t es continua ($t \in \mathbb{R}$).

Los sistemas dinámicos discretos pueden representarse mediante una función iterativa del tipo:

$$\vec{\xi}_{t+1} = \vec{f}(\vec{\xi}_t), \quad t \in \mathbb{Z} \text{ o } \mathbb{N}$$

aquí, $\vec{\xi}_t$ representa el estado del sistema a un tiempo t. Además t pertenece al dominio de los números enteros \mathbb{Z} o al de los naturales \mathbb{N} . Cuando t es continua, la dinámica se representa usualmente mediante un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales del tipo.

$$(d/dt) \vec{\xi} = \vec{\dot{\xi}} = \vec{F}(\vec{\xi}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Algunas veces el espacio de estado es euclidiano o un conjunto del espacio euclidiano, pero también puede tener una estructura no euclidiana; tal como la del círculo, la esfera, el toroide o cualquier otra variedad diferenciable.

Por lo general se consideran 2 casos especiales de las ecuaciones anteriores:

i) Para los sistemas discretos \vec{f} es un difeomorfismo.

ii) Las soluciones del sistema autónomo de ecuaciones diferenciales que sirven para modelar un sistema dinámico pueden ser descritas por un "flujo" cuya velocidad está dada por el campo vectorial $\vec{\Xi}$.

Como cualquier descripción de la teoría de i) e ii) involucra mapeos o aplicaciones diferenciables, conviene dar algunas definiciones adicionales. Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Entonces una función $g: U \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que es de clase C^r , si es r -veces continuamente diferenciable, $1 \leq r \leq \infty$.

Sea además V un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m y $\bar{G}: U \rightarrow V$. Dadas las coordenadas (x_1, \dots, x_n) en U y (y_1, \dots, y_m) en V ; \bar{G} puede ser expresado en los términos de las funciones componentes $g_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, donde:

$$y_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \quad i=1, \dots, m$$

El mapeo \bar{G} se denomina m C^r -mapeo si g_i es C^r para cada $i=1, \dots, m$. Se dice además que \bar{G} es diferenciable si es un C^r -mapeo para algún $1 < r < \infty$, y que es suave si es C^∞ . Los mapeos que son continuos pero no diferenciables se denominan convencionalmente C^0 -mapeos.

Difeomorfismo. Se dice que \bar{G} es un difeomorfismo si es una biyección y tanto \bar{G} como \bar{G}^{-1} son mapeos diferenciables. \bar{G} se denominará un C^k -difeomorfismo si tanto \bar{G} como \bar{G}^{-1} son C^k -mapeos.

En particular, la biyección $\bar{G}: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo si y solo si $m=n$ y si la matriz de las derivadas parciales (esto es el jacobiano)

$$D \bar{G}(x_1, \dots, x_n) = [\partial g_i / \partial x_j]^{n \times n}$$

es no singular para cada $\vec{x} \in U$. Si \bar{G} cumple con la definición de difeomorfismo siendo \bar{G} y \bar{G}^{-1} mapeos continuos en vez de diferenciables, entonces se dirá que \bar{G} es un homomorfismo.

Sistema dinámico determinista. Sistema dinámico cuyas ecuaciones de movimiento, parámetros y condiciones iniciales son conocidos y no son estocásticos o aleatorios. Algunos sistemas deterministas pueden llegar a exhibir movimientos aperiódicos que aparentan ser aleatorios.

Movimiento caótico. Denota básicamente un tipo de movimiento que es altamente sensible a las condiciones iniciales. Es un movimiento para el cual las trayectorias de un sistema que parte de condiciones iniciales ligeramente diferentes, divergen exponencialmente. A este tipo de movimiento se le asocian exponentes de Lyapunov y entropías de Kolmogorov positivas (ambos conceptos se discutirán en detalle más adelante).

Contrariamente a lo que se pudiera pensar el movimiento o comportamiento caótico no es un fenómeno raro. Si se considera un sistema dinámico descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales de n orden, tendrán que tomar en cuenta las siguientes condiciones para que se pueda tener comportamiento caótico:

- a) El sistema tiene al menos tres variables dinámicas independientes.
- b) Las ecuaciones de movimiento contienen al menos un término no lineal que acopla a varias de las variables dinámicas en las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales pueden expresarse en la forma:

$$dx_1/dt = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$dx_2/dt = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$dx_n/dt = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Un ejemplo histórico de un sistema dinámico determinista lo constituye el modelo meteorológico de Lorentz, que fué propuesto hacia 1963 para simular el comportamiento del clima. Dicho modelo consiste en un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales acopladas.

$$dx/dt = \dot{X} = \sigma(y-x)$$

$$dy/dt = \dot{Y} = rx-y-xz$$

$$dz/dt = \dot{Z} = xy-bz$$

donde σ, r y b son parámetros positivos. La solución de dicho sistema y similares se ha vuelto una tarea bastante accesible desde que comenzaron a aparecer en el mercado del software internacional, paquetes tan sofisticados como "**Matemática**" de Stephan Wolfram, o "**Maple**" e incluso "**Reduce**" que es un programa no tan moderno escrito en **LISP**, pero que tiene ciertas ventajas con respecto a otros sistemas. Solo a manera de ilustración, se darán las instrucciones que requiere **Matemática** V.2.1, para resolver el modelo de Lorentz, con $\sigma=3, r=26.5$ y $b=1.0$ y las siguientes condiciones iniciales $x(0)=z(0)=0, y(0)=1$.

```

In[]:=NDSolve [{x'[t]==-3*(x[t]-y[t]),

               y'[t]==-x[t]*z[t]+26.5*x[t]-y[t],

               z'[t]== x[t]*y[t]-z[t],

               x[0]== z[0]==0,y[0]==1},

              {x,y,z},{t,0,20},Max Steps → 3000]

Out[22]={{x→ Interpolating Function[{0.,20.},<>],

          y→ Interpolating Function [{0.,20.},<>],

          z→ Interpolating Function [{0.,20.},<>]}}

```

NDSolve permite hallar la solución numérica del sistema de EDO's (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) considerado. Para graficar la solución del modelo de Lorentz, se seleccionan como variables de estado x , y y z .

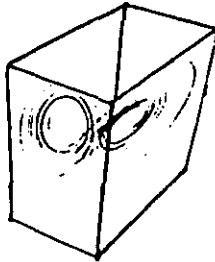
En los términos de Matemática.

```

In[]=ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t],y[t],z[t]}/.%,{t,0,20},PlotPoints1000]
Para más detalles ver.Manual de Mathematica(#3.9.7 pag702-703 y fig2.3.)

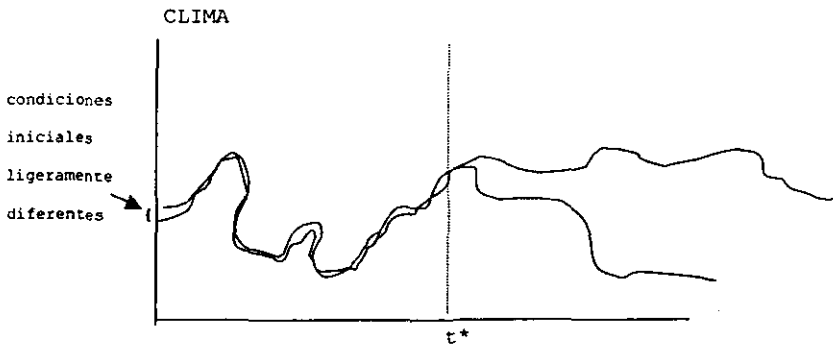
```

Fig.2.3



ATRACTOR DE LORENTZ

En la fig.2.5., se representa esquemáticamente una sola de las variables(x,y o z)del modelo de Lorentz, a lo que denominaremos sencillamente "CLIMA". Obsérvese que una ligera variación en las condiciones iniciales provoca una fuerte divergencia(de tipo exponencial) en el comportamiento del CLIMA a partir de un cierto tiempo crítico t^*



Aquí ambas curvas comienzan a mostrar una fuerte divergencia en su comportamiento

Fig.2.5.Sensibilidad a las condiciones iniciales,un ejemplo tomado de la meteorología.

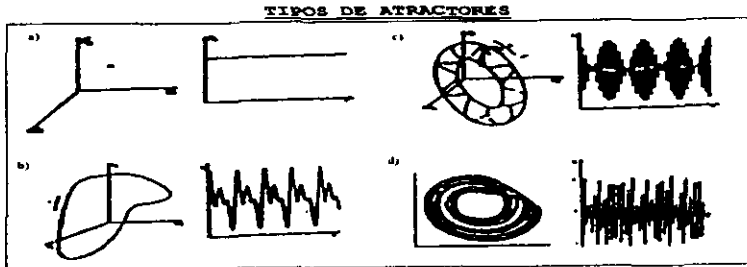
Efecto mariposa. Se refiere a la dependencia sensible a las condiciones iniciales en la solución de ecuaciones diferenciales o en diferencias asociadas a la modelación matemática de un sistema dinámico.

El primer ejemplo de este tipo de sistemas fué descubierto por H. Poincaré (1892) durante el estudio de un problema conocido como de los 3 cuerpos. Ya hacia 1903, Poincaré había notado que "...pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, pueden provocar grandes diferencias en el fenómeno final". Así, pequeños errores en las condiciones iniciales, provocan grandes errores en el fenómeno final. De esta forma la predicción se vuelve imposible, al menos de un tiempo crítico t^* en adelante como lo descubriría (o redescubriría) Lorentz en su modelo meteorológico hacia 1961-1963. Hasta ahora, se ha ilustrado la manera de generar un atractor particular; pero cuya importancia es histórica, dado que con él comenzó prácticamente la moderna teoría del caos: El atractor de Lorentz. Sin embargo, no se ha dado aún una definición formal del concepto de atractor. Se comenzará por dar las siguientes definiciones:

Atractor. (Rusell, Hanson y Ott, 1980): es un subespacio de algún espacio ordinario N -dimensional hacia el cual la solución de un sistema dinámico N -dimensional se acerca asintóticamente a tiempos largos.

Otra definición de atractor debida a F. Moon (1987), es la siguiente: Un atractor es un conjunto de puntos o un subespacio en el espacio de estado hacia el cual una "historia de tiempo" se aproxima asintóticamente. Los siguientes son ejemplos clásicos de atractores dinámicos:

- los puntos fijos
- los ciclos límite (denotan periodicidad)
- una superficie toroidal asociada a movimientos cuasiperiódicos.



- a) Atractor de punto fijo, representativo de un estado estable.
- b) Atractor de ciclo límite, representativo de un régimen periódico
- c) Atractor toroidal, representativo de un régimen cuasiperiódico
- d) Atractor extraño, el cual puede representar un régimen caótico (no todos los atractores extraños son caóticos).

Conjunto Compacto. Un conjunto A es compacto si cualquier colección de conjuntos abiertos, los cuales cubren A ; tienen una subcolección finita la cual también cubre A ; es decir, un conjunto compacto es un conjunto que es cerrado y acotado.

Atractor (J.D. Farmer et al., 1983) es un conjunto compacto de valores A , con la propiedad de que hay un vecindario de valores A , tales que para casi cualquier condición inicial, el conjunto límite de las órbitas del sistema es A . Así casi cualquier trayectoria en este vecindario de A , pasa arbitrariamente cerca de cualquier punto A .

Atractor extraño. (F.Moon,1987): se refiere a un conjunto atractor en el espacio de estado sobre el cual se mueven órbitas caóticas. Es un atractor que no es un punto fijo(en equilibrio), no es un ciclo límite, ni un atractor cuasiperiódico(toroidal). Un atractor extraño, es un atractor en el espacio de estado al que se le puede asociar una dimensión fractal.

Hay que hacer notar que en la definición anterior debida a Moon, se supone que todos los atractores extraños, por el hecho de serlos, son también caóticos.

Sin embargo, Brindley en 1991 llamó la atención sobre el hecho de que: "aunque por algún tiempo los conceptos de atractor extraño y comportamiento caótico eran vistos como sinónimos, se ha reconocido la existencia de atractores extraños no caóticos en osciladores forzados no lineales cuasiperiódicos.

Para evitar confusión, hay que definir de manera precisa los términos usados. Así, "extraño" se refiere a la estructura del atractor y un atractor extraño es un atractor el cual no es:

- un conjunto finito de puntos.
- una curva cerrada.
- una superficie suave o suave por partes.
- un volumen acotado por una superficie suave o suave por partes.

La palabra "caótico" se refiere al comportamiento de las trayectorias sobre el atractor; el atractor es caótico si las órbitas cercanas al mismo divergen con el tiempo, lo cuál implica sensibilidad infinita con respecto a las condiciones iniciales. Dicha divergencia se mide en términos del exponente(o del espectro de exponentes) de Lyapunov(el cuál definiremos con precisión más adelante), y de hecho un atractor extraño no caótico, es un

objeto cuya geometría no corresponde a ninguno de los casos anteriormente citados y para el cual, las órbitas típicas tienen exponentes de Lyapunov negativos.

2.1.e- Caracterización y generación de atractores extraños.

La caracterización de los atractores como extraños o no extraños, puede en principio hacerse generando el atractor en un espacio de estados cuyas variables de estado corresponden a variables con retardo; esto es, dada la sucesión de datos de tiempo $x(t)$, es posible generar el atractor del sistema dinámico en estudio, graficando $x(t)$.vs $x(t+\Delta t)$; lo anterior si se desea ver la forma del atractor en dimensión euclidiana $d_E=2$. En $d_E=3$, se tendría que graficar $x(t)$.vs $x(t+\Delta t)$.vs $x(t+2\Delta t)$.

Una alternativa para generar atractores a partir de una sucesión de datos de tiempo $x(t)$, consiste en graficar en el espacio-fase: $x(t)$.vs $x'(t)$, donde $x'(t)$ corresponde a la primera derivada (calculada por lo general numéricamente). Lo anterior es válido en $d_E=2$. Si se quiere generar el atractor en $d_E=3$ se tendrá que graficar $x(t)$.vs $x'(t)$.vs $x''(t)$, donde $x''(t)$ se refiere a la segunda derivada con respecto a t (la cual también se calcula numéricamente). Un simple análisis visual en el espacio de estados o en el espacio-fase, podría ser suficiente para caracterizar un atractor como extraño o no extraño; aunque un análisis más detallado de la estructura de un atractor generado en $d_E=3$, puede conducirnos a tomar cortes transversales de dicho atractor, los cuales reciben el nombre técnico de "Secciones de Poincaré" y permiten evidenciar la estructura interna (por ejemplo en $d_E=2$) de dicho atractor (ver Fig.2.6).

Si la Sección de Poincaré forma un patrón geométrico bien definido, digamos una curva cerrada, esto podría indicar comportamiento periódico o

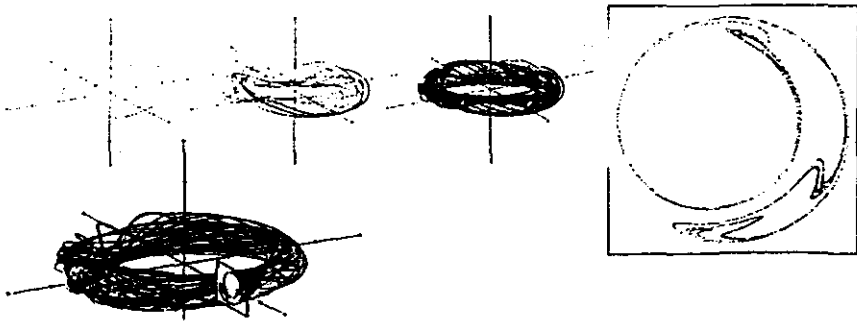
cuasiperiódico; si el patrón geométrico formado es complicado, pero aún puede considerarse como un patrón de reconocimiento bien definido, tendremos la posibilidad de estar ante la presencia de un atractor extraño caótico. Si no se observa ninguna estructura en la sección de Poincaré, esto indicará comportamiento aleatorio o estocástico.

La caracterización de los atractores extraños, como caóticos o aleatorios requiere del cálculo de todo un conjunto de parámetros, entre los cuáles se encuentran: la dimensión fractal, del exponente (o del espectro de exponentes) de Lyapunov y de la entropía de Kolmogorov.

Por lo que respecta a la dimensión fractal del atractor, d_f , esta se puede estimar haciendo uso de la definición de dimensión de la caja o de capacidad d_c , la cual es aproximadamente igual a la dimensión fractal,

$$d_f = d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon) / (\log 1/\epsilon)$$

donde $N(\epsilon)$ es el número de cubos de lado (ϵ) , o de esferas p -dimensionales de radio (ϵ) requeridas para cubrir el atractor.



2.1.1. Cálculo de la dimensión de correlación d_c de Grassberger y Procaccia.

Aunque es posible implementar el llamado algoritmo de la "dimensión de caja" o dimensión de capacidad (d_c), en las aplicaciones comerciales se prefiere hacer el cálculo de la dimensión de correlación d_c o dimensión de Grassberger y Procaccia; quienes para calcularla a partir de una serie de tiempo propusieron el siguiente algoritmo.

Dada una serie de tiempo escalar $X(t)$, el primer paso es reconstruir un espacio de pseudofase para el sistema de interés. La señal experimental, $X(t)$, se digitaliza con un retardo de tiempo de Δt ; los valores de la señal $X(i\Delta t)$ y $X(i\Delta t + r)$, se consideran para $i=0,1,2,\dots,m$. Definiendo así el vector de la serie de tiempo como:

$$X_i(t) = (X(i\Delta t), X(i\Delta t + r), \dots, X(i\Delta t + (p-1)r)) \text{ con } i = 0, 1, 2, \dots, (m - (p-1)k)$$

Donde $r = k \Delta t$, $k=1,2,\dots$ y p es la dimensión del vector $X_i(t)$. (págs 56-59 de la tesis de Kathia C. Robles Aragón. Aplicación de la teoría de las Bolas de Control de Calidad a la Industria de los Jugos Tropicales.

2.1.2. Dimensión generalizada.

Existen varias definiciones de dimensión, tales como la de capacidad, la de información, la de correlación o de Gressberger y Procaccia etc., que pueden compactarse en una sola definición general:

$$d^{(q)} = 1/(q-1) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\ln \sum_{i=1}^n (p_i)^\epsilon / \ln \epsilon]$$

donde p_i es la i -ésima probabilidad y q es el orden de la dimensión a calcular.

2.1.3. Cálculo de la dimensión fractal.

La velocidad promedio a la que se genera la información puede ser una medida del comportamiento caótico de un sistema; otra medida es la *dimensión del atractor*. Si un sistema es simple, su comportamiento debe ser descrito por un atractor de baja dimensión en el espacio de estados.

Una manera comúnmente usada para estimar la dimensión fractal es la dimensión de similitud basada en el concepto de autosimilitud. La dimensión de similitud, d_s , de una forma autosimilar se expresa como:

$$Nr^{d_s} = 1$$

$$d_s = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln N}{\ln r}$$

Donde N es el número de partes similares dentro de un todo, representado por q , y r es el grado de similitud o escalonamiento de una parte individual del todo.

Dado que la dimensión en el plano euclidiano es 2, cualquiera que sea el valor de la integral de q , la superficie completa del cuadro puede ser tomada como $N=q^2$ partes. De esta manera, cada parte se puede deducir del todo por un grado de similitud de:

Demostrando que $Nr^2 = 1$.

$$r = \frac{1}{q} = \frac{1}{N^{1/2}}$$

Dada una serie de tiempo escalar $X(t)$, el primer paso es reconstruir un espacio de pseudofase para el sistema de interés. La señal experimental, $X(t)$ se digitiza con un retardo de tiempo de Δt ; los valores de la señal ($m+1$) y $X(i+\Delta t)$, se consideran para $i=0, 1, 2, \dots, m$. Definiendo así el vector de la serie de tiempo como:

$$X_i(t) = (X(i+\Delta t), X(i+\Delta t+r), \dots, X(i+\Delta t+(p-1)r))$$

Con $i=0, 1, 2, \dots, (m-1)k$

Donde $r=k \cdot \Delta t$, $k=1, 2, \dots$ y p es la dimensión del vector $X_i(t)$.

Por consiguiente, con el paso del tiempo t , se obtiene una serie de vectores p -dimensionales que representan el retrato p -dimensional del sistema, p se refiere a la dimensión del espacio de fase donde se encuentra embebido el atractor. Debido a la divergencia de trayectorias, muchos pares (X_i, X_j) con $i \neq j$ serán pares de puntos, esencialmente aleatorios, dinámicamente no correlacionados. No obstante, si los puntos se encuentran sobre el atractor, estarán espacialmente correlacionados. Esta correlación espacial puede medirse con la correlación integral $C(r)$ definida como:

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2}$$

(número de pares (i, j) cuya distancia $|X_i(t) - X_j(t)| < r$)

Formalmente,

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m H(r - |X_i(t) - X_j(t)|)$$

Esta correlación, se relaciona con la función de correlación estándar donde $H(\bullet)$ es la función de Heavyside.

Grassberger y Procaccia establecieron que para pequeñas r 's, la $C(r)$ se escala como una potencia que es función de r :

$$C(r) = r^v$$

Y el exponente de correlación, v , es igual a la dimensión fractal del atractor dada por:

$$v = \frac{\ln C(r)}{\ln(r)}$$

2.2.Exponente de Lyapunov.

En un sistema caótico las predicciones a largo plazo del estado del sistema son imposibles, porque la incertidumbre se incrementa con una rapidez exponencial en el tiempo.

La pérdida del poder predictivo se debe a la propiedad de que las órbitas(trayectorias), resultantes de condiciones iniciales cercanas; que divergen en promedio con rapidez exponencial. Orbitas cercanas corresponden a sistemas cuya separación es muy pequeña. Así, esos sistemas cuyas diferencias no se resuelven desde el inicio, dan como resultado comportamientos totalmente diferentes.

Los coeficientes de divergencia o convergencia de las órbitas, llamados exponentes de Lyapunov, son de fundamental importancia en el estudio del caos. Cuando los exponentes de Lyapunov son positivos, indican la divergencia de las órbitas y caos, y establecen la escala de tiempo en la cual la predicción de estado es posible.

Cuando los exponentes de Lyapunov son negativos, establecen la escala de tiempo en la cual el estado transiente del sistema decaerá.

Para ilustrar las propiedades de los exponentes de Lyapunov, se emplea la siguiente ecuación de mapeo unidimensional generado por la ecuación en diferencias

$$X(n+1)=rX(n)(1-X(n)) \quad (1)$$

Se puede obtener la ecuación que describe el comportamiento del exponente de Lyapunov a partir de la resolución de la ecuación de diferencias tomando el parámetro r , siendo la solución.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \log_2 |f'(X(i))| \quad (2)$$

El límite superior n es necesario, si se obtiene una cantidad que describa ambos comportamientos a largo plazo y es independiente de la condición inicial. La densidad probable del mapeo, es simplemente, la colección normalizada de funciones delta que señala la ubicación $X(i)$ visitada por una trayectoria.

$$p(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \sum_{i=0}^{n-1} \delta(X - X(i)) \quad (3)$$

Combinando 2 y 3 se obtiene:

$$\lambda = \int p(X) \log_2 |f'(X)| \quad (4)$$

donde la integral es tomada sobre el dominio del mapeo. El exponente de Lyapunov es entendido como "la deformación (estiramiento local) determinada por el logaritmo de la magnitud de la pendiente y , es ponderada mediante la probabilidad de encontrar la cantidad de deformación".

Cálculo del exponente de Lyapunov.

El exponente de Lyapunov es una medida cuantitativa del valor con el cual divergen las trayectorias cerca del espacio de estados. Las órbitas caóticas tienen por lo menos un exponente de Lyapunov positivo. Para órbitas periódicas, todos los exponentes de Lyapunov son negativos. El exponente de Lyapunov es cero cerca de una bifurcación. En general, hay tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones dinámicas.

Para el cálculo de este parámetro en este trabajo se utilizó el programa Chaos Data Analyzer (CDA).

2.3-Entropía de Kolmogorov.

Cualitativamente, la entropía de Kolmogorov, o K , permite distinguir entre sistemas regulares e irregulares. K es cero en sistemas deterministas, finita y positiva en sistema caóticos e infinita en sistemas aleatorios.

J.D.Farmer define a la entropía de Kolmogorov, de la siguiente manera: "Considere un sistema dinámico con ℓ grados de libertad. Suponiendo que el espacio de fase F -dimensional se divide en cajas de tamaño ϵ^F y que existe un atractor cuya trayectoria $X(t)$ se encuentra en la cuenca de atracción; si el sistema se mide a intervalos regulares de tiempo τ , entonces, la probabilidad de que $X(t-\tau)$ visite la caja i_1 , $X(t=2\tau)$ visite la caja i_2 , ..., y $X(t=d\tau)$ visite la caja i_d , es $p(i_1, \dots, i_d)$. Luego entonces, la entropía de Kolmogorov se define como:

$$K^{(q)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} 1/d\tau \sum_{i_1, \dots, i_d} p(i_1, \dots, i_d)$$

El conjunto de entropías de Reyni de orden q introducen la noción de entropías generalizadas $K^{(q)}$, las cuales se definen como:

$$K = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow \infty} (1/d\tau) (1/q-1) \ln \sum_{i_1, \dots, i_d} p^{(q)}(i_1, \dots, i_d)$$

De todas las cantidades $K^{(q)}$, K_2 es la más simple de calcular a partir de una serie de tiempo, la cual tiene las siguientes propiedades:

- 1.- $K_2 \geq 0$,
- 2.- $K_2 \leq K$
- 3.- K_2 es infinita para sistemas aleatorios y,
- 4.- $K_2 \neq 0$ para sistemas caóticos.

Para efectos de este trabajo se consideró que la entropía de Kolmogorov está representada por la suma de los exponentes de Lyapunov positivos. Expresado en forma algebraica:

$$K = \sum \lambda.$$

2.4-Análisis Espectral.

El análisis espectral consiste en tomar una señal continua y separar sus frecuencias componentes, mostrando la contribución de cada una de ellas en la señal total. Este análisis sirve para diagnosticar el caos por su capacidad para detectar periodicidad a partir de señales aperiódicas, caóticas o aleatorias.

Los espectros *discretos*, característicos de señales periódicas y algunas caóticas, contienen uno o más picos pequeños. Los picos de mayor frecuencia son múltiplos exactos de algunos de más baja frecuencia. Un espectro *continuo*, característico de señales aleatorias y algunas caóticas, exhiben curvas que encierran un gran número de frecuencias que no guardan relación numérica entre ellas.

Para distinguir un espectro continuo y un espectro discontinuo se usa la transformada de Fourier.

2.4.1 Transformada de Fourier.

En 1822, Fourier publicó en el libro "The analytical theory of heat", su teorema, en el cual establece que cualquier señal puede descomponerse en una suma de señales sinusoidales.

Cada componente sinusoidal varía desde un máximo a un mínimo, siendo la variación del ciclo sinusoidal conocido como armónica fundamental: la función matemática que describe la fase y el máximo para cada una de las armónicas es la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier, como instrumento matemático, es una función que describe la amplitud y fase de cada senoide: la amplitud define la altura del senoide y la fase especifica el punto inicial en el ciclo del senoide.

La transformada de Fourier de una función $f(t)$, se define como:

$$F(w) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Donde $F(w)$ es llamado espectro en frecuencia de $f(t)$, en general, $F(w)$ es una función compleja de w , por lo que:

$$F(w) = |F(w)| e^{j\theta}$$

Donde el valor absoluto de $F(w)$ es la magnitud y $\theta(w)$ es el ángulo de fase, el cuadrado de la transformada de Fourier nos define la potencia, la cual muestra la amplitud de las frecuencias de una serie de tiempo. La potencia de espectro es una función real definida para la transformada de Fourier como:

$$S(w) = |F(w)|^2$$

El cálculo de la transformada y el de la potencia de Fourier, para una serie de tiempo, actualmente se realizan mediante programas de computadora que permiten reducir considerablemente el tiempo de cálculo.

La ventaja de este método es que sirve para analizar una función cuyas propiedades son totalmente desconocidas.

El análisis espectral es insensible al ruido, pero su aplicación está limitada a determinar la presencia o ausencia de señales periódicas. El análisis espectral, por sí solo, no puede distinguir un proceso caótico de uno aleatorio.

2.5-Tabulación de resultados.

En la tabla 2.1 se muestran los resultados que se pueden obtener de cada una de las pruebas sobre señales periódicas, caóticas y aleatorias a partir de una señal desconocida.

TECNICA	PERIÓDICO	CAÓTICO	ALEATORIO
Espacio de fase	Trayectorias traslapadas	Bandas, espacios vacíos, dependencia sensible al estado inicial	Ninguna estructura
Mapeo de retorno	Puntos traslapados	Bandas, espacios vacíos, dependencia sensible al estado inicial.	Ninguna estructura
Sección de Poincaré	Distribución uniforme de puntos	Distribución no aleatoria de puntos	Distribución aleatoria de puntos
Exponente de Lyapunov	Cero	Positivo	Cero
Dimensión fractal	Usualmente baja	Usualmente baja	Frecuentemente alta, pero puede ser baja.
Análisis espectral	Discreto	Discreto ó continuo	Continuo
Entropía de Kolmogorov	Cero	Finita y positiva	Infinita

TABLA 2. 1 RESULTADOS ESPERADOS DE LAS TECNICAS ANALITICAS SOBRE SEÑALES ESTANDAR.

CAPITULO III.

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LAS BOLAS DE CONTROL DE CALIDAD.

3.0-INTRODUCCION.

En un intento por describir los cambios que pueden ocurrir en las tendencias de variación de las características de calidad, de cualquier producto, se ha propuesto la **Teoría de las Bolas de Control de Calidad**. El término bola de control se adoptó para especificar el área de variación dentro de la cuál se considera técnicamente que el proceso se encuentra bajo control.

3.1-ATRACTOR DE CALIDAD.

En un sentido matemático abstracto, un atractor de calidad puede definirse como una región limitada de un espacio de estado n-dimensional, hacia el cuál, se aproximan las órbitas del sistema que muestran la evolución de una serie de eventos de calidad. La divergencia de estas órbitas, constituyen en realidad, una medida cualitativa de la variación del proceso.

En un sentido práctico, un atractor de calidad puede considerarse como un gráfico altamente sensible, particularmente útil para procesos que requieren un fino control de la variación. Puede emplearse en el análisis de datos de variables, pudiendo extenderse al de atributos. Aquí, el tamaño de muestra puede variar, pero es necesario una gran cantidad de datos par calcular la dimensión fractal, d_f , el exponente de Lyapunov, λ y la entropía de Kolmogorov, K.

Los límites de control están definidos por una bola de radio r y centro u, referidos a las coordenadas de los puntos correspondientes al valor de la función promedio de calidad $f(\bar{\xi})$ (promedio de medias, $\bar{\bar{X}}$ promedio de los rangos, R; etc.) El radio de control se calcula en función del diámetro de control como:

$$r_c = d/2 = \text{LSC} - \text{LIC} / 2$$

LSC: límite superior de control

LIC: límite inferior de control

3.2-BOLA DE CONTROL DE CALIDAD.

Los diferentes puntos de un atractor de calidad, generados en un espacio euclidiano n-dimensional R^n , pueden denotarse por los vectores de posición u, v, \dots , definidos por las componentes:

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Así, en topología general se considera a una bola cerrada de centro u y radio r , como:

$$B_c(u) = \{v : |v-u| \leq r\}$$

y una bola abierta como:

$$B_o(u) = \{v : |v-u| < r\} \text{ siendo } |v-u| = \left[\sum_{i=1}^n |v_i - u_i|^2 \right]^{1/2}$$

Es fácil ver que una bola cerrada constituye, básicamente, un conjunto compacto que contiene a su frontera de acotamiento. En un espacio euclidiano

en R^2 y R^3 , corresponde a los casos particulares del disco y la esfera, respectivamente.

Con estos elementos, la Teoría de las Bolas de Control de Calidad, define a una bola de control de calidad, como:

$$B: [\bar{f}(\xi)] = \{v: |v - \bar{f}(\xi)| \leq r_c\}$$

con las siguientes propiedades:

1.-Es una bola cerrada con centro $[\bar{f}(\xi), \bar{f}(\xi), \dots]$

$$2.-|v - \bar{f}(\xi)| = \left[\sum_{i=1}^n |v - \bar{f}_i(\xi)|^2 \right]^{1/n}$$

3.-Para gráficos de variables, $\bar{f}(\xi)$ toma el valor de

- i) El promedio de las medidas
- ii) El promedio de los rangos
- iii) El promedio de las desviaciones estándar.

4.-Para gráficos de atributos $\bar{f}(\xi)$ puede tomar los valores:

- i) El promedio del No. de unidades defectuosas en la muestra \bar{np} :
- ii) El promedio del % de unidades defectuosas en la muestra \bar{p} :
- iii) El promedio del No. de defectos en la muestra \bar{c} ; o
- iv) El promedio del No. de defectos por unidad, \bar{u} .

En R^2 , una bola de control es el caso particular de un disco cuya frontera corresponde a la ecuación de una circunferencia con centro $[\bar{f}(\xi), \bar{f}(\xi)]$ y radio r_c :

$$[f(\xi) - \bar{f}(\xi)]^2 + [f(\xi) + N_* \Delta(\xi) - \bar{f}(\xi)]^2 = r_c^2$$

siendo N_* un entero que puede tomar los valores $N=1, 2, \dots, N_c$

3.3-BOLA DE CONTROL LOCAL; GLOBAL Y OPTIMA:

Una causa parcial en un principio, y que se va pronunciando más con el transcurso del tiempo, ocasiona un cambio de nivel o un cambio en las tendencias de variación. Los factores que pueden provocar esta condición son: un nuevo operador; un nuevo método de prueba; cambios de especificación; cambio en el método de control; cambio de lotes o de materia prima; equipo nuevo; cambio de capacidad del equipo; instrucciones mejoradas; y otros.

Si este cambio ocurre, puede detectarse fácilmente en una curva de espacio de estados como un cambio definido en una sola dirección, que conduce necesariamente, a un desplazamiento del atractor.

Los atractores correspondientes a dos distintos niveles, muestran la aparición de un punto fijo, justo en el cambio de la especificación de control de un nivel a otro. Los dos atractores son extraños y pueden ser

caóticos, y definen en realidad, atractores de control local(ACL); cada uno de los cuales corresponde a una BOLA DE CONTROL LOCAL(BCL), considerando que el centro del atractor es el centro de una bola con radio r_i :

$$BCL_i = B_i[\bar{f}(\xi_i)]$$

i = nivel de especificación de control

$$r_i = LSC_i - LIC_i / 2$$

De hecho, este radio marca el límite dentro del cual, el proceso está bajo control. Las órbitas fuera de la frontera de acotamiento sugieren en alguna medida el grado de variación del proceso.

La fig 3.1, muestra las bolas de control local asociadas a cada atractor. El desplazamiento de los atractores, que sucede con cada cambio en la especificación de control, sugiere la noción de atractores y bolas de control desplazantes.

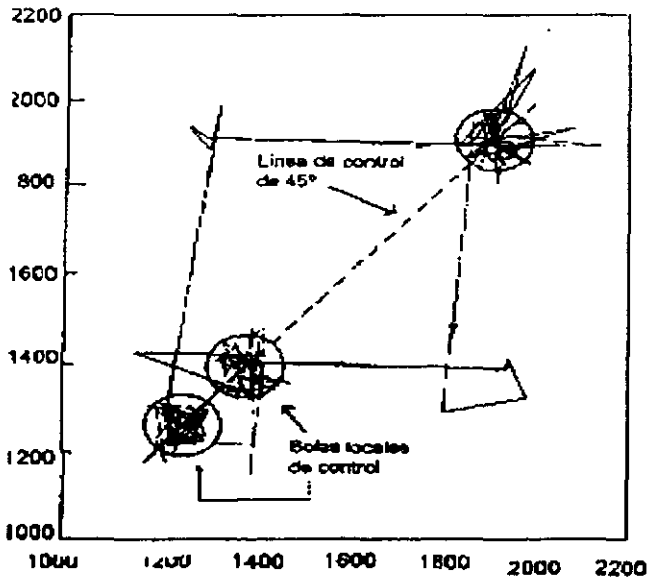
Sin embargo, es importante hacer notar, que este desplazamiento ocurre exclusivamente a lo largo de un eje de control, que corresponde a una línea recta de un espacio de estado, con una pendiente de 45°.

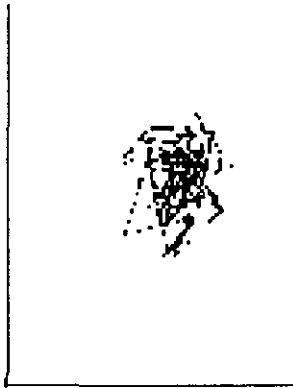
Si el atractor de calidad es generado en R^2 , graficado $f(\xi \rightarrow N\Delta \xi)$. vs $f(\xi)$, con $N=1$; en lugar del punto fijo, puede aparecer un atractor extraño, tal como lo muestra la figura referida.

Por otro lado, es posible llegar a tener varios cambios en el nivel de especificación, lo cual, generará los correspondientes atractores y bolas locales de control. En todos los casos, se observará la aparición de puntos fijos asociados a cada salto en el nivel de especificación de control.

La importancia de estos gráficos radica en su habilidad para mostrar la evolución de la "información de las cartas de control", de donde se deduce la posible existencia de una BOLA DE CONTROL OPTIMA(BCO) hacia la cual, es deseable que el proceso se aproxime. Además, la trayectoria seguida por las bolas locales de control sugieren la idea de una BOLA DE CONTROL GLOBAL(BCG) que acota su movimiento

FIG.3.1.BOLAS LOCALES DE CONTROL





CURVA DE ESPACIO ESTADO

Pero este acontecimiento, solo es válido en el sentido longitudinal del desplazamiento de los atractores sobre el eje de control. En tal caso, y de ser requerido, puede estimarse el centro de una BCG, con coordenadas cuyo valor corresponde a la media aritmética del valor de los LIMITES DE ESPECIFICACION, superior e inferior.

El problema, ahora, consiste en localizar una bola cercana a la de control óptimo(BCCO). Para los casos en los que existen dos y tres cambios repentinos de nivel, se adoptó el criterio de tomar, para el primer caso, el promedio aritmético de la suma de las coordenadas de los centros de las bolas de control 1 y 2, a fin de determinar el centro (X_{BCCO}, X_{BCCO}) de la BCCO:

$$\bar{X}_{BCCO} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2}$$

El hecho de que el desplazamiento de las bolas de control ocurra prácticamente en una sola dirección, demuestra que un criterio útil, es tomar el promedio de las coordenadas de los centros de las bolas de control correspondiente a cada cambio de especificación, i.

$$\bar{X}_{TBCC} = (1/n) \sum_{i=1}^n \bar{X}_i$$

Hay que hacer notar, que este criterio para localizar a la bola de control de calidad óptima no es único; existen otras maneras bien conocidas de calcular promedios. Una alternativa, podría consistir en calcular por ejemplo la media geométrica. Por otro lado, podría considerarse en la localización de la bola de control óptima, el criterio de optimizar un "índice de funcionamiento" al estilo de lo que hacen los que se dedican al "control estocástico" [Onésimo H. Lerma.] .

Sin embargo, aquí el problema principal consiste en definir explícitamente dicho índice de "funcionamiento" en términos de variables económicas, lo cual es un problema particular de cada industria en la que se pretende aplicar la TBCC.

Finalmente, aunque no se disponga de una manera de definir un "índice de funcionamiento" o "función de objetivo" en términos de variables económicas; es posible optimizar en el espacio de estados, el control global, minimizando las oscilaciones de los atractores locales sobre la línea de control a 45° y minimizando el radio de la bola local de control.

CAPITULO IV.

APLICACION DE LA TEORIA DE LAS BOLAS DE CONTROL DE LA CALIDAD AL PROCESO DE E-COAT EN LA INDUSTRIA AUTOMOTRIZ.

4.1-Plantamiento del problema.

¿Presenta el sistema de electrodeposición del primario(E-COAT) un comportamiento determinista y multiperiodico, caótico ó aleatorio? Y el conocimiento de lo anterior, en qué forma puede ser utilizado para implementar un conjunto de acciones que permitan optimizar la calidad de este proceso?

Para contestar esta serie de preguntas es necesaria la obtención de información y datos generados por esta.

4.2.-Obtención y generación de la información.

El análisis se llevó a cabo sobre 1041 datos de lecturas individuales de espesores de E-COAT graficados en cartas de control X-R, y para hacer el análisis se graficaron espesores de E-COAT versus el tiempo.

El análisis fué realizado mediante:

- Espacio de estados
- Mapeo de retorno
- Distribución de probabilidad
- Dimensión fractal
- Exponente de Lyapunov

- Análisis espectral(espectro de Fourier)
- Entropía de Kolmogorov
- Teoría de las Bolas de Control de Calidad

4.3-Resultados.

Espacio de estados.

Para los datos generados, se observó la formación de un atractor con trayectorias traslapadas, lo que demuestra la característica de un comportamiento periódico.

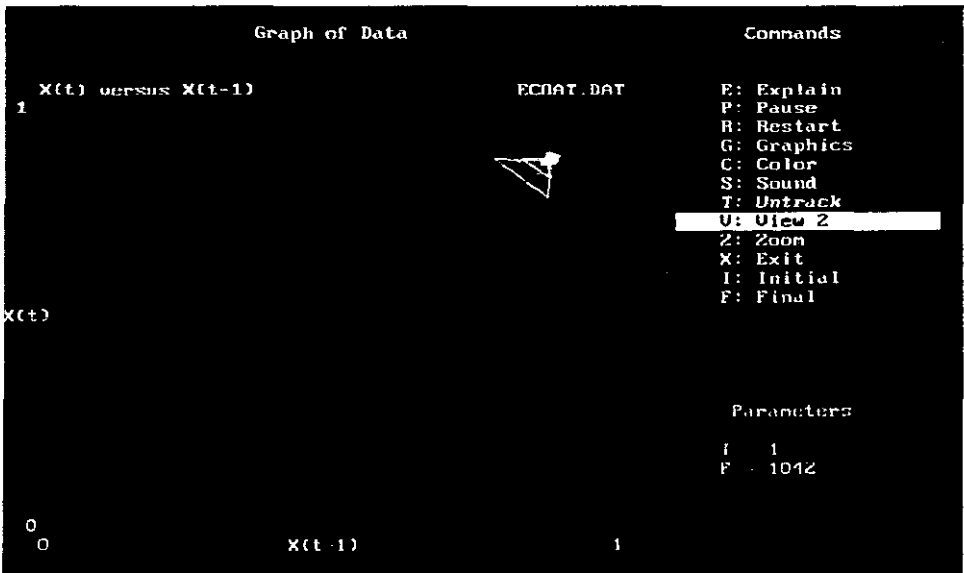


Fig.4.1 Espacio de estados $x(t)$ vs. $x(t=1)$

4.3.a-Mapeo de Retorno.

Para la gráfica de mapeo de retorno, se observa una estructura con puntos traslapados, lo que sugiere un comportamiento periódico.

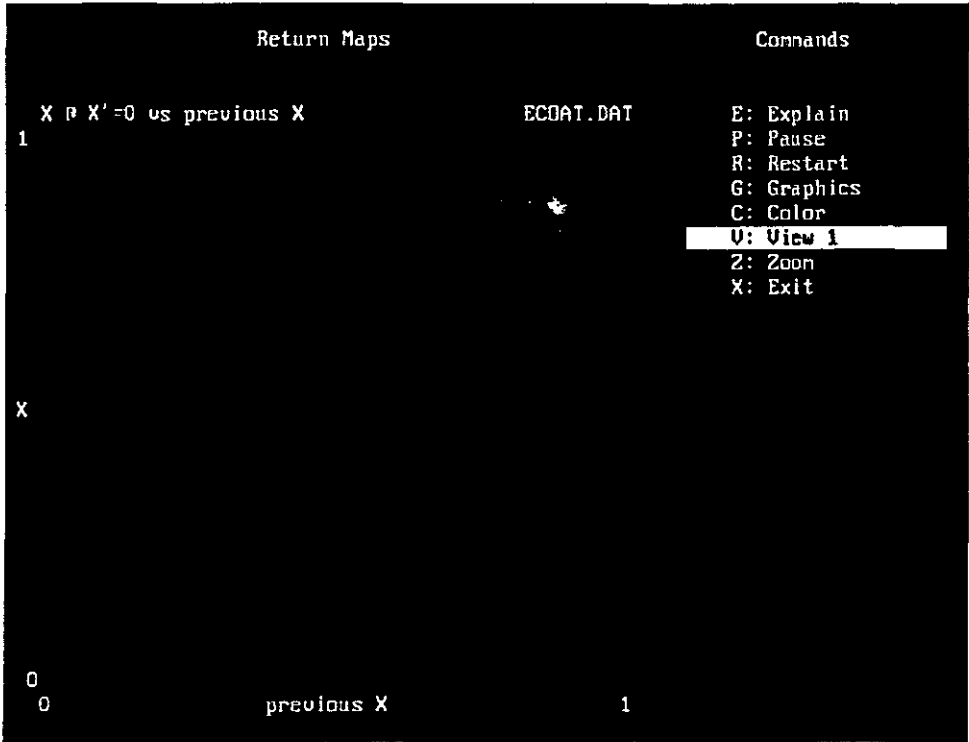


Fig 4.2 Mapeo de retorno $x'=0$ x

4.3.b-Distribución de probabilidad.

En esta gráfica se observan dos cosas importantes; la primera es que la gráfica presenta un sesgo hacia el lado derecho, lo que quiere decir que la mayoría de los datos están cercanos a la especificación superior, y esto afecta en el costo de la unidad (la hace más cara). La otra situación es que la mayoría de los datos se concentra en una sola barra, lo que nos indica que posiblemente el método de medición no es el más adecuado; esto es, que carece de la precisión necesaria dado que estamos hablando del orden de milésimas de pulgada, que los elcómetros no nos pueden proporcionar.

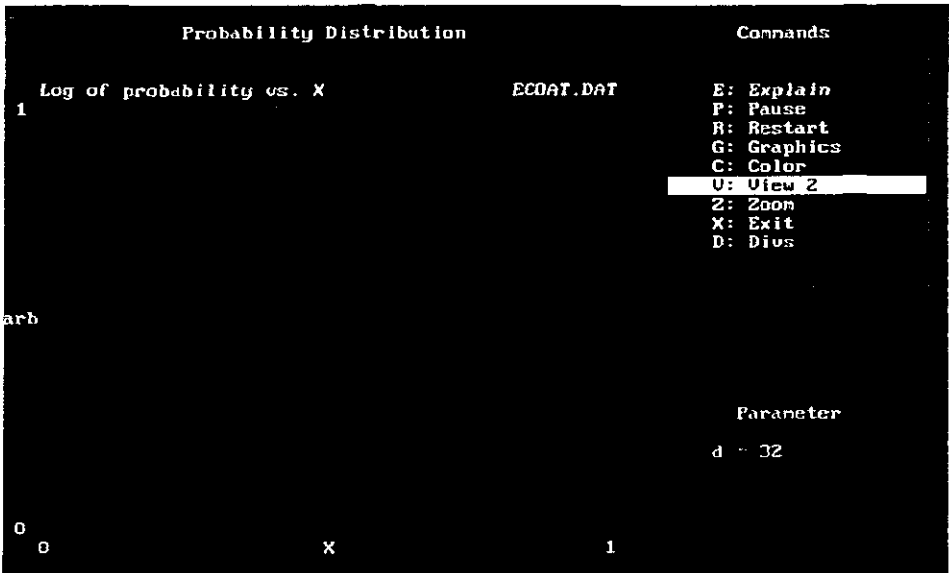


Fig. 4.3 Distribución de probabilidad log de probabilidad vs. x.

4.3.c-Dimensión Fractal.

La dimensión fractal se calculó a partir de la pendiente de la curva generada por el procedimiento de conteo de cajas y a partir del método de correlación obteniéndose los siguientes resultados.

Dimensión de la Caja	Dimensión de correlación	
D=1	1.23±.003	.8711349±.001
D=2	1.00±.012	.8708833±.000
D=3	1.08±.013	.8698916±.001
D=4	.994±.006	.8706912±.001
D=5	2.36±.006	.8709869±.000
D=6	1.07±.005	.8703475±.000
D=7	2.70±.017	.8705763±.001
D=8	1.67±.004	.8709446±.001
D=9	1.26±.007	.8706434±.000
D=10	.963±.019	.8706253±.001

4.4.d-Exponente de Lyapunov.

El conjunto de datos presentó exponentes máximos de Lyapunov positivos para las siguientes dimensiones, que aunque positivos son muy pequeños, por lo que pudiese existir una combinación de aleatorio y un pequeño comportamiento caótico, debido posiblemente al sistema de medición utilizado. A continuación se presentan los datos obtenidos.

D=1	.031±.004
D=2	.029±.005

D=3 .023±.002
 D=4 .023±.011
 D=5 .020±.007
 D=6 .019±.004
 D=7 .020±.001
 D=8 .018±.002
 D=9 .016±.003
 D=10 .015±.000

4.4.e-Análisis espectral.

Mediante el método de Fourier(Power spectrum) y el de la máxima entropía(Dominant frequencies), se encontró un espectro sin picos dominantes, denotando un comportamiento continuo por lo que se considera como un patrón aleatorio.

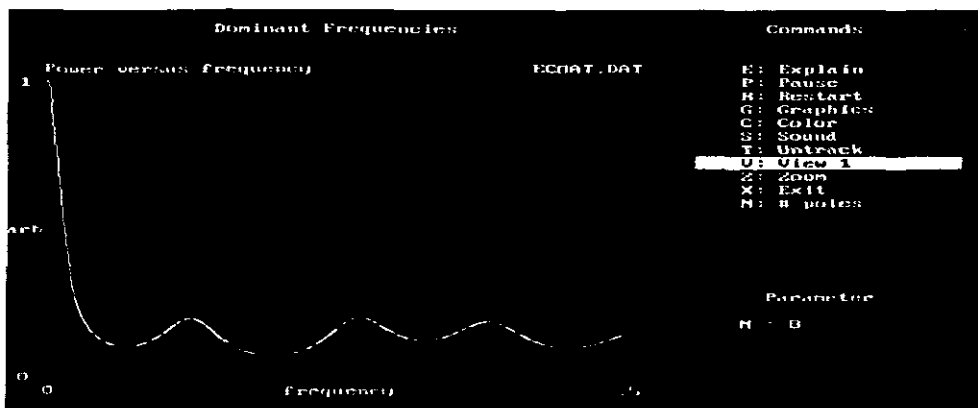


Fig.4 Frecuencias Dominantes potencia vs. frecuencia

4.4.f-Entropía de Kolmogorov.

Para los datos presentados al tener exponentes de Lyapunov positivos obtendremos un coeficiente de Kolmogorov positivo, lo que redundaría en el mismo criterio aplicado a los coeficientes de Lyapunov.

4.5-Teoría de las Bolas de Control de la Calidad.

Una vez generados los atractores de calidad respectivos con centro (\bar{X}, \bar{X}) , se procedió al cálculo del radio de control que define la bola de control de calidad. Dicho radio como ya vimos en el capítulo anterior, se calcula a partir de límites de control superior e inferior, como se muestra a continuación:

A) *Establecimiento de los límites de control.*

$$LSC = \bar{x} + 3s$$

$$LC = \bar{x}$$

$$LIC = \bar{x} - 3s$$

-Para la serie de datos de E-COAT se tiene:

$$LSC = .896$$

$$LC = .876$$

$$LIC = .857$$

B) Obtención del radio de control.

$$r_c = LSC-LIC/2 = .896-.857/2 = .019$$

$$y d_c = 2r_c = 2(.019) = .039$$

C) Establecimiento del centro. (\bar{X}, \bar{X})

-La media de la serie de datos fue .876, por lo tanto el centro de la bola de control estará localizado en (.876, .876)



Fig.4.5.Gráfica $x(t)$ vs. $x(t-1)$.

Como se puede observar en esta figura, para el conjunto de datos, todos los puntos estan dentro de la bola, lo que según la TBCC, indica que el proceso está dentro de control.

Debido a que se encontró un solo atractor para este conjunto de datos, la idea del control óptimo concuerda perfectamente con la bola de control generada, y por tanto, ya no se introduce, para este proceso, el concepto de bola cercana a la de control óptimo(BCCO).

El diagnóstico del comportamiento de datos es una mezcla de comportamiento , aleatorio y en muy poca medida caótico.

Este tipo de comportamiento, puede estar asociado tanto a la dependencia (criterio) de la gente que hace las gráficas de control, como a la falta de precisión del equipo, como a posibles variaciones dentro del voltaje de aplicación(equipo) de la pintura.todas ellas son disfrazadas mediante el manipuleo de datos y gráficos de control. Lo que quiere decir que se pueden implementar nuevos conceptos para tener una "fotografía" mas real y apegada a estos procesos.

Las acciones de control a nivel práctico que se pueden implementar para mejorar el proceso de E-COAT, se mencionan en el capítulo siguiente.

CAPITULO V.

5.0-CONCLUSIONES Y APLICACIONES.

1.-La Entropía de Correlación como cota aproximada de la Entropía de Kolmogorov, es uno de los parámetros más importantes en el estudio del caos. Sin embargo; el conjunto de técnicas gráficas y numéricas, del caos determinístico son indispensables para comprobar la estructura del comportamiento del proceso de control de calidad en los procesos industriales.

2.-Las bolas de control permiten acotar a los atractores de calidad, y son susceptibles de interpretación al evaluar la dimensión fractal, el exponente de Lyapunov y la entropía de correlación; estas dos últimas cantidades relacionadas con el grado de predicción del sistema, lo que nos permite contar con un modelo sencillo que puede ayudar a visualizar las tendencias de variación del sistema en estudio.

3.-Aunque la teoría de las Bolas de Control de Calidad tiene un fundamento matemático complejo, puede explicarse empleando un modelo gráfico relativamente sencillo; en el cuál lo unico que hay que hacer para saber si el proceso se encuentra dentro ó fuera de control, es identificar las zonas

dentro de la bola local y global que corresponden a causas comunes de variación.

6.-En virtud de la alta sensibilidad de este gráfico para mostrar la variación, es recomendable su empleo para procesos de control fino de calidad. Una posible aplicación es en la elaboración de patrones de medición en las áreas científica y tecnológica.

7.-No obstante que los ejemplos correspondan a procesos con posibilidades altamente aleatorias, es conveniente aclarar que éstos son casos particulares. En muchos procesos industriales, particularmente en aquellos que involucran cinéticas de reacción, se ha detectado comportamiento caótico.

5.1-Aplicaciones:

En el caso específico del proceso de E-COAT, que es el centro de este estudio, se puede tener una mejora inmediata en el proceso, mediante la aplicación de la teoría de las Bolas de Control de Calidad.

1.-Se puede hacer una interfase entre el programa CDA(Caos Analyser Data)utilizado en este trabajo; y los datos alimentados de los espesores de E-COAT correlacinados con el voltaje esto es(a mayor voltaje, mayores espesores y viceversa)esto se podra conectar a través de una PC con monitor conectada a un PLC5, a su vez el PLC5 estará conectado a los rectificadores de voltaje y a dos alarmas, una de tipo sonoro y otra de tipo visual.(Fig.5.1)

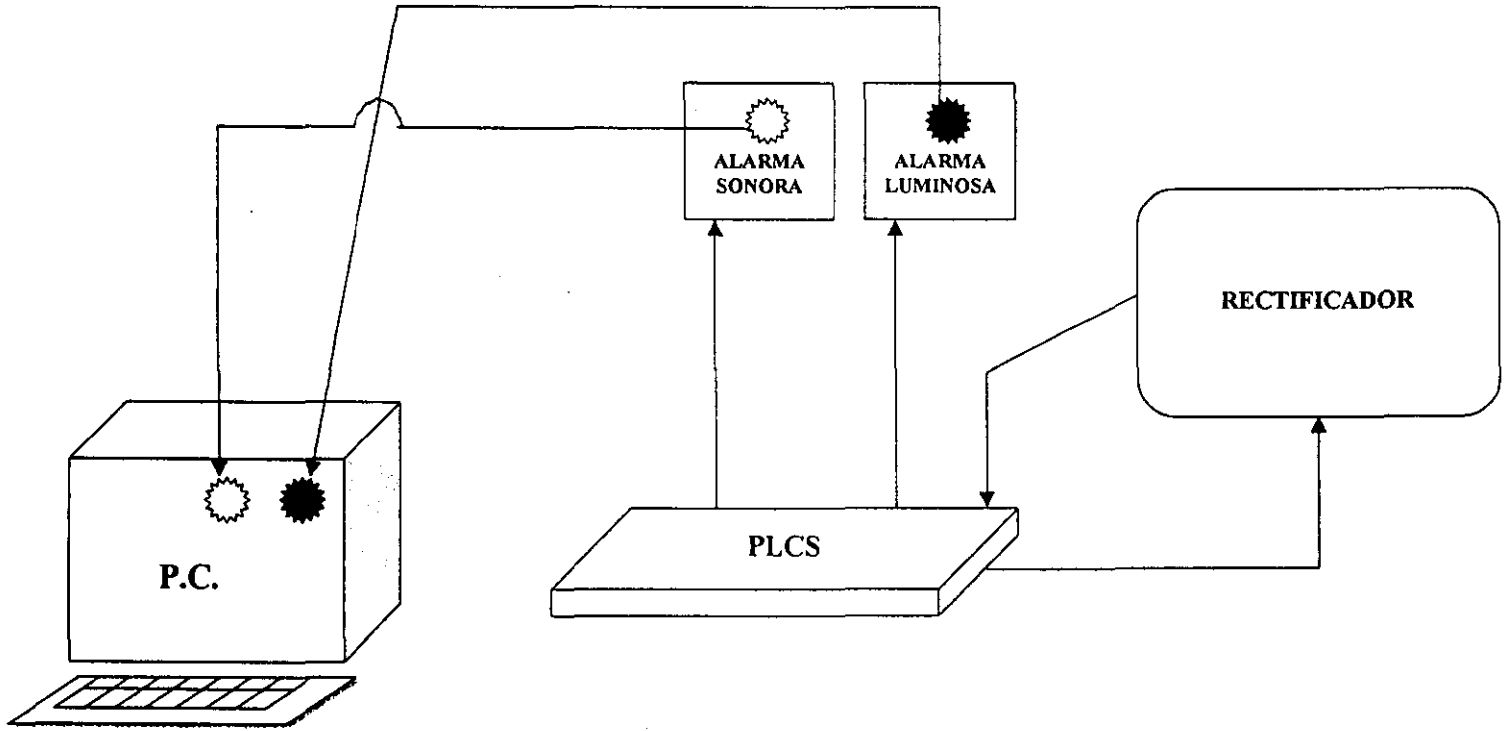


Fig. 5.1 SISTEMA DE MONITOREO PROPUESTO

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

De esta manera el encargado de monitorear el proceso, podrá hacerlo con solo mirar la pantalla de la pc en donde se observará el movimiento del atractor dentro de la **Bola de Control de Calidad**, y en el momento en que observe que el atractor tienda a moverse hacia afuera de dicha Bola, podrá realizar los ajustes necesarios al proceso para evitar que este se salga de control.

Si por otro lado no se encuentra en ese momento en su area de trabajo, al momento que el atractor tendiera a salirse de la Bola de Control de Calidad, se activaría una alarma sonora y una visual, avisando que hay alguna falla dentro del proceso y con esto poder acudir de inmediato a hacer los ajustes necesarios al mismo. Inclusive en alguna condición extrema , pudiese programar el equipo, para que se parara el sistema, hasta analizar cual es el problema. Existe también la posibilidad de que los ajustes necesarios para controlar el proceso se hagan de manera automática.

Como es fácil observar el desarrollo de este trabajo tiene aplicación inmediata a nivel industrial, permitiéndonos llevar a cabo un monitoreo mas sencillo y mucho más confiable que los métodos de control de calidad utilizados actualmente

5.2.-propuestas para trabajos futuros;

1.-Extender la TBCC al caso multivariable y particularmente al caso de cartas de control que sí están correlacionadas en el tiempo.

2.-Desarrollar más la teoría en el sentido de definir hasta donde el sistema industrial particular lo permita, con "índice de funcionamiento" o "función objetivo" a optimizar, de manera explícita.

3.-Proponer una manera mejor que la entropía de Kolmogorov para clasificar sistemas dinámicos como:regulares(determinísticos o periódicos), caóticos o aleatorios. Aquí la pregunta clave es ¿donde hay que colocar a los sistemas dinámicos mixtos?

4.-Se puede desarrollar este tipo de control para todos los sistemas automatizados de aplicación de pintura (robots, reciprocants, turbocampanas, etc.), teniendo alta confiabilidad en el monitoreo y control de los parámetros de aplicación.

BIBLIOGRAFIA:

- 1.-HANS LAUWERIER "FRACTALS".PRINCETON SCIENCE LIBRARY.
- 2.-BAKER G.L. AND P. "CHAOTIC DYNAMICS AN INTRODUCTION"
CAMBRIDGE GOULLUB J. UNIVERSITY PRESS CAMBRIDGE.1991
- 3.-LIBRO II MODULO CEP, *ITSM* 1991.
- 4.-JURAN J.M. "JURAN'S QUALITY CONTROL HANDBOOK".MC.GRAW HILL 1988.
- 5.-J.DOYNE FARMER."DYNAMICAL SYSTEMS GROUP".PHYSICS DEPT. UC STA. CRUZ
CA.95064 USA. 29 DEC.1980.
- 6.-JAMES P.CRUTCHFIELD,J.DOYNE FARMER AND OTHERS."FINDING ORDER IN
CHAOS".
- 7.-TIMOTHY A.D.,MP.GEORGE.A.DAIAMOND.LOS ANGELES CALIF."A PRIMER ON CHAOS
THEORY AND ITS APPLICATION TO CADRDIOLGY.DEC.1990"
- 8.-ROBERT L.MASON.SOUTH RESEARCH INST.SN ANTONICO.T.X. "MONITORING A
MULTIVARIATE STEP PROCESS."
- 9.-BRACEWELL.R.N."The Fourier Transform" ,Scientific American,USA,1989
- 10.-KAIFEN HE,Crisi-induced transition to spatiotemporally chaotic
motions,Phys.rev.lett,v.80,n.4,26 Jan 1998.
- 11.-A REYNI,TIMOTY:et al;A primer on chaos theory and its application on
cardiology,p:1431.
- 12.-VAZQUEZ-COUTIÑO y Julio Villeda,Teoría de las Bolas de Control de la
Calidad,reporte interno del Centro Cientifico Cultural,1993.
- 13.-VILLEDA JULIO,Incorporación de la tecnología fractal al Control
Estadístico de la Calidad en los procesos industriales.Tesis
profesional.Escuela Militar de Ingenieros,México,D,F.1993.

- 14.-WOLF:et al;Quantifying chaos with Lyapunov statistical process control,
The Cooper Union, School of Engineering, Cooper Square, USA, p:274-276.
- 15.-ROBLES KATHIA:Aplicación de la teoría de las Bolas de Control de Calidad a la industria de los jugos tropicales.Tesis profesional de la Escuela de Ciencias Químicas, Universidad la Salle, México, dD, F.1998.
- 16.-ZEPEDA JAVIER,Teoría de las Bolas de Control de la Calidad.Tesis profesional.Escuela Militar de Ingenieros.México, D.F.1994.
- 17.-L.T.FAN, D.NEOGI, M.YASHIMA:Elementary Introduction to Spatial Temporal Fractal. Springer-Verlag, Berlin , 1991.
- 18.-MANFRED SCHROEDER. Fractals chaos Power laws. Ed.Freeman, 1991.
- 19.-M.F.BARNSELY, R.L.DEVANEY, BB.MANDELBROT.The Science of Fractals IMAGES. Springer-Verlag, 1991.
- 20.-A.N.KOLMOGOROV, S.V.FOMIN.ELEMENTOS DE LA TEORIA DE FUNCIONES Y DEL ANALISIS FUNCIONAL. Ed.MIR. Moscu, 1975
- 21.-KENNETH FALCONER.Fractal Geometry. Wiley, 1990.

APENDICE "A"

DEFINICIONES:

ATRIBUTOS-Son datos cualitativos que pueden ser contados para su registro y análisis. Como ejemplo se pueden tener características tales como la presencia o no de una etiqueta y la instalación o no de todos los tornillos requeridos.

CONTROL ESTADÍSTICO-Es la condición que describe un proceso en el cual todas las causas especiales de variación han sido eliminadas y solamente permanecen las causas comunes; ésto se evidencia en la gráfica de control por la ausencia de puntos fuera de los límites de de control y por la ausencia de patrones no casuales o tendencias dentro de los límites de control.

DESVIACION ESTANDAR-Es una medida de la dispersión de la producción del proceso o de la dispersión de una muestra estadística tomada del proceso (p.e. de promedios de subgrupos); se denota por la letra griega (σ).

DISTRIBUCION-Es la forma de describir los resultados de un sistema de variación por causas comunes, en la cual el comportamiento de los valores individuales no es predecible pero cuyos resultados como conjunto tienen un patrón que puede ser descrito por su ubicación.

DISTRIBUCION NORMAL-Es una distribución por variables, simétrica y con forma de campana que subyace en las gráficas de control por variables. Cuando los datos se distribuyen normalmente, alrededor del 68.26% de las mediciones individuales estarán comprendidos entre más y menos una desviación estándar de la media; alrededor del 95.44% entre más y menos dos desviaciones estándar y alrededor de 99.73% entre más y menos tres desviaciones estándar de la media. Estos porcentajes son la base para establecer los límites de control y el análisis de las gráficas de control.

GRAFICA DE CONTROL-Es una representación gráfica de una característica de un proceso, mostrando valores graficados de algún estadístico obtenido de esa característica, y uno o dos límites de control. Tiene dos usos básicos: como un juicio para determinar si el proceso estuvo dentro de control, y como una ayuda para lograr y mantener el control estadístico.

LECTURA INDIVIDUAL-Es la medición de una sola característica.

LIMITE DE CONTROL-Es una línea(o líneas) de una gráfica de control usada como base para juzgar el significado de la variación de subgrupo a subgrupo. La variación fuera del límite de control es evidencia de que causas especiales están afectando al proceso. Los límites de control son calculados

a partir de los datos del proceso y no deben ser confundidos con los límites especificados por ingeniería.

MEDIA-Es el promedio de los valores de un grupo de mediciones.

MUESTRA-Es uno o más eventos o mediciones individuales seleccionados de la producción de un proceso.

MUESTRA ALEATORIA-Muestras elegidas de manera tal que cualquier item resultante del proceso tiene igual probabilidad de ser elegido, sin importar ningún tipo de ordenamiento existente como la secuencia de producción.

PROMEDIO-Es la suma de los valores de las mediciones dividida por la cantidad (tamaño de muestra) de mediciones y se indica con una barra sobre el símbolo de los valores que son promediados: p.e., \bar{X} es el promedio de los valores de X de un subgrupo; \bar{X} es el promedio de los subgrupos; \bar{p} es el promedio de los valores p de todos los subgrupos.

RANGO-Es la diferencia entre el mayor y menor valor de un subgrupo. El rango esperado se incrementa con el tamaño de la muestra y con la desviación estándar .

VARIABLES-Son aquellas características de una parte que pueden ser medidas. Como ejemplos se tiene la longitud en milímetros, la resistencia en ohms, esfuerzo de cierre de una puerta en kilogramos y el par de apriete de un tornillo en Newton-metro.

TABLA I

Las gráficas de control por atributos al igual que las gráficas de control variables, son de gran utilidad ya que también nos proporcionan información relevante sobre el comportamiento del proceso.

dependiendo de la muestra que estamos midiendo existen cuatro tipos de gráficas por atributos:

GRAFICAS p.-para proporción de unidades defectuosas(cuando los tamaños de muestra no son constantes).

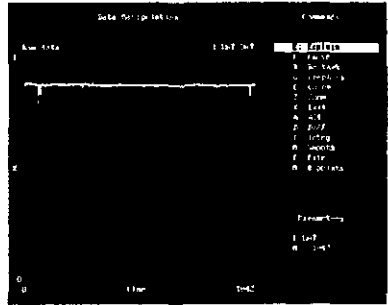
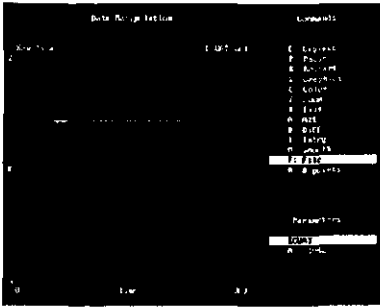
GRAFICAS np.-para número de unidades defectuosas(cuando los tamaños de muestra son constantes).

GRAFICAS c.-para número de defectos por unidad(para tamaños de la muestra constante).

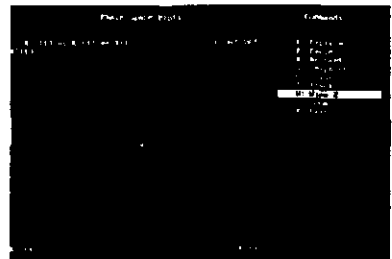
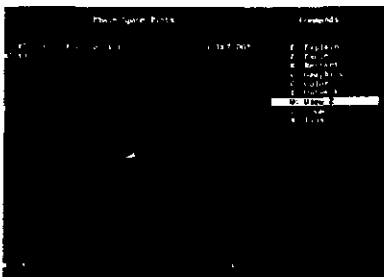
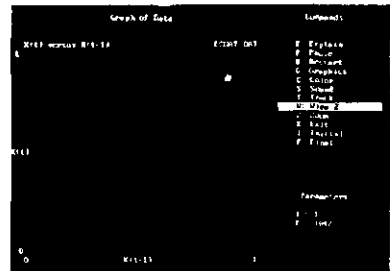
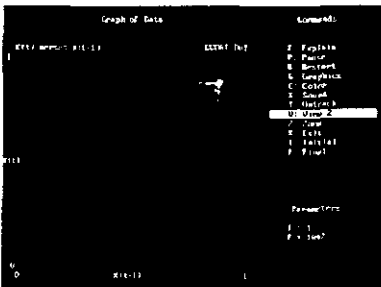
GRAFICAS u.-para números de defectos por unidad (para tamaños de la muestra no necesariamente constantes).

ANEXOS

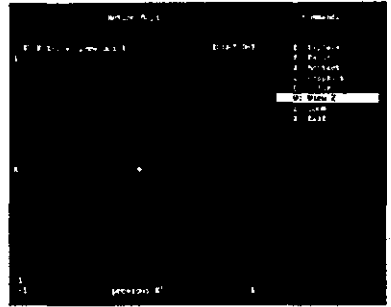
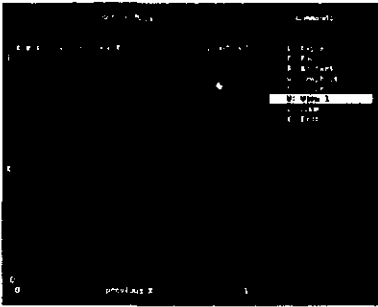
Datos vs. Tiempo



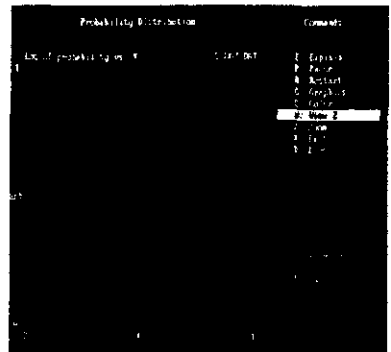
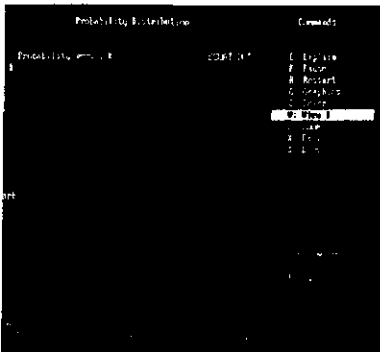
Curva en el espacio de estados



Mapeo de retorno

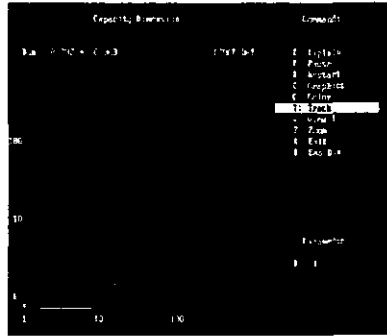
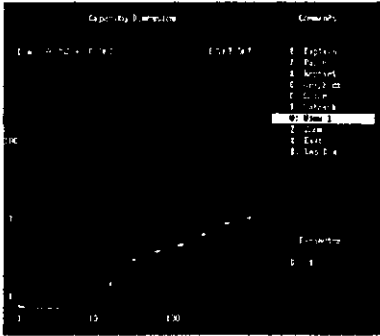


Distribución de probabilidad

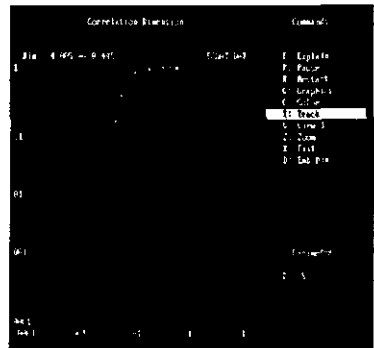
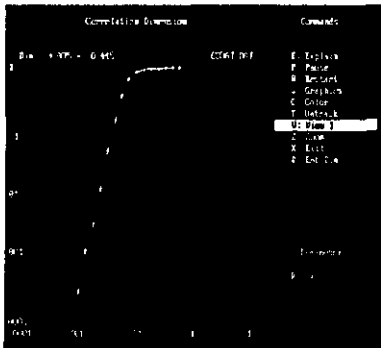


Dimensión Fractal

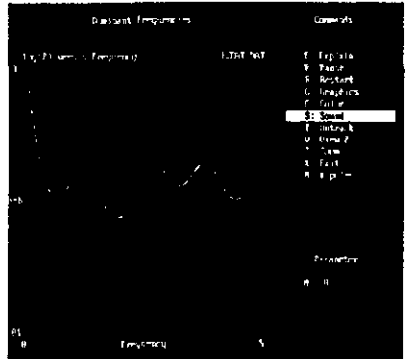
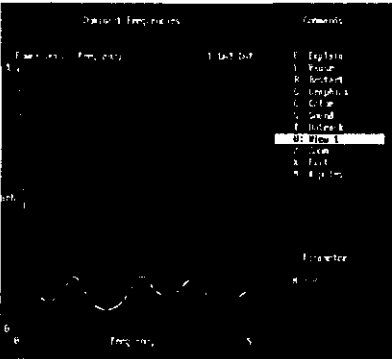
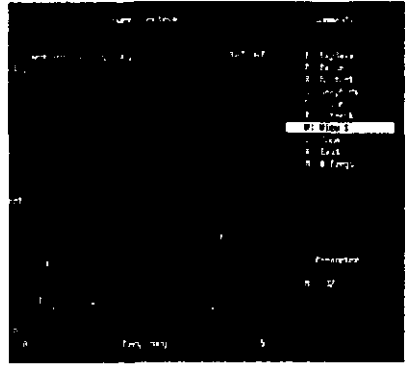
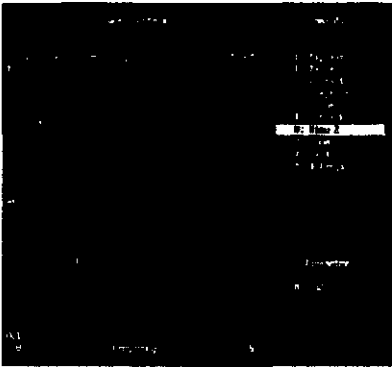
a) Por el método de cajas



b) Por el método de correlación



Análisis Espectral



Exponente de Lyapunov

