

01168 29 3

115

59



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**PROBLEMA DE PRODUCCION-TRANSPORTE
CON COSTOS CONCAVOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

P R E S E N T A :

MARIA DEL ROCIO AVILA NUÑEZ

DIRECTORA: DRA. IDALIA FLORES DE LA MOTA

MEXICO, D. F.

ENERO DE 1999

TESIS CON
SELLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradezco,

A Dios por darme la oportunidad de llegar hasta aquí.

A mi mamá , a mi papá y a mis hermanos : Elda, José Luis y Rodrigo por darme siempre su apoyo, ayuda ,confianza , comprensión y más .

A la Dra. Idalia Flores De la Mota por su ejemplo, ayuda y disposición en la elaboración de este trabajo.

Al Dr. Ricardo Aceves García por su apoyo y confianza para la realización de estos estudios.

A Carlos por su confianza , comprensión y más.

A la U.N.A.M. por ofrecerme siempre oportunidades.

Rocío

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1: EL MODELO DE TRANSPORTE Y [PPT]

1.1	El modelo de transporte	6
1.1.1	Definición y estructura	6
1.1.2	El problema dual	11
1.1.3	La solución del modelo de transporte	14
1.1.4	Ejemplo	18
1.1.5	Casos especiales	27
1.2	El Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT]	28
1.2.1	Descripción	28
1.2.2	Antecedentes	31

CAPÍTULO 2: EL PROBLEMA PARAMÉTRICO DE [PPT]

2.1	Funciones cóncavas	36
2.2	Función cóncava y conos	42
2.2.1	Conceptos	42
2.2.2	Aplicación a un problema de minimización cóncava	47
2.3	El problema lineal paramétrico	49
2.3.1	Conceptos	49
2.3.2	Ejemplo	54
2.3.3	Aplicación a un problema de minimización cóncava	61
2.4	El problema de transporte paramétrico asociado a [PPT (k)]	64

CAPÍTULO 3 : REDES Y [PT(y)]	67
3.1 Redes y árbol de expansión	68
3.2 El modelo de transporte y el árbol de expansión	76
3.3 El problema [PT (y)]	82
3.3.1 Análisis del problema [PT (y)]	83
3.3.2 Cálculo de las piezas lineales	93
3.3.3 Cálculo de los vértices de las piezas lineales	103
CAPÍTULO 4 : SOLUCIÓN A [PPT (3)]	108
4.1 El algoritmo	109
4.2 Complejidad computacional	113
4.2.1 Complejidad computacional de un algoritmo	113
4.2.2 Complejidad computacional del algoritmo	121
4.3 El ejemplo	122
4.4 [PPT(3)] con restricciones de capacidad	137
4.5 Otros ejemplos	141
4.5.1 El problema [P(1,2)]	141
4.5.2 El problema [P(2,1)]	158
CONCLUSIONES	175
APÉNDICE	178
BIBLIOGRAFÍA	197

INTRODUCCIÓN

Todos los días tomamos decisiones por ejemplo ¿Qué ropa vestir? o ¿Qué ruta tomar para llegar a la escuela o al trabajo?, en estos casos la experiencia nos da la solución pero para decidir ¿Cuál es el mejor plan de distribución de cierto producto de un número de fábricas a un número de almacenes?, determinar el mejor diseño de una red de telecomunicaciones o ¿Cuál es la mejor ubicación de una fábrica?, además de la experiencia es necesario realizar un análisis más profundo, porque un error puede afectar la vida de muchas personas.

Un enfoque científico que ha ayudado para la fundamentación en la toma de decisiones es la Investigación de Operaciones. Esta ciencia aparece formalmente en la segunda guerra mundial, creada por grupos interdisciplinarios de científicos para resolver problemas de estrategia y táctica del manejo militar. Después de la guerra estos conocimientos se han utilizado en la ingeniería, la industria, el comercio, transporte, comunicaciones, servicios públicos, etc.. Por lo tanto, la Investigación de Operaciones se encarga del desarrollo y aplicación de métodos matemáticos para resolver problemas de decisión.

La Investigación de Operaciones trata con una gran diversidad de problemas , por ello , se divide en las siguientes ramas: Teoría de decisiones, Simulación de sistemas , Teoría de juegos, Optimización, Teoría de inventarios, Teoría de la espera.

El trabajo que se presenta pertenece al área de la Optimización, la cual se define como el conjunto de métodos que se encargan de determinar las “mejores” soluciones de ciertos problemas (frecuentemente reales) matemáticamente definidos. Se ha logrado el diseño de métodos de solución para problemas específicos como por ejemplo, para modelos de programación discreta se utilizan los métodos de planos de corte , ramificación y acotamiento, programación dinámica, etc. ; para modelos de Programación Lineal se usa el método simplex, el dual simplex, algoritmos de flujos en redes, etc. ; para modelos de Programación no Lineal se emplean técnicas de multiplicadores de Lagrange, programación no separable, direcciones factibles, etc. . Lo anterior , en un principio nos lleva a pensar que si se trata de resolver un problema de programación no lineal se utilizarán o desarrollarán técnicas o métodos referentes a este tipo de programación.

Por lo anterior , el objetivo de este trabajo es mostrar la utilidad de técnicas pertenecientes a la Programación Lineal como son: el modelo de transporte, la programación lineal paramétrica, modelos de redes y el análisis convexo en la resolución de problemas no lineales, lo cual se realizará al resolver un problema *NP-duro* utilizando un algoritmo polinomial que se genera con la combinación de las técnicas antes mencionadas.

También se espera que los lectores de este trabajo, aún los menos informados sobre estos temas, conozcan las bases de las técnicas de programación lineal y análisis convexo que aquí se exponen y constaten su aplicación en la resolución del problema que se muestra.

El problema que se analiza en este trabajo consiste en producir una cierta cantidad de productos en un número de fábricas y la distribución de éstos a un cierto número de almacenes, entonces se desea conocer el nivel de producción de cada fábrica y el plan de distribución de los productos, de tal manera que el costo total de producción – transporte sea el mínimo. La característica no lineal de este problema se encuentra en los costos de producción porque en ellos se incluyen costos de construcción, mantenimiento y operación de las instalaciones, los cuales presentan un comportamiento similar a las economías de escala representadas por funciones cóncavas. La función cóncava del problema que aquí se analiza se considera no separable, porque en condiciones reales si las fábricas requieren materia prima ésta se debe adquirir de uno o más proveedores, entonces el costo de suministrar materia prima puede ser no separable.

El problema anterior se conoce como el Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos y se denota como [PPT].

[PPT] tiene la característica especial de que se debe obtener el mínimo de una función cóncava lo cual es interesante porque por ejemplo, para el caso del mínimo de una función convexa si se encuentra una solución óptima local esto lleva a que se trata de una solución óptima global, y no así en el caso cóncavo debido a que pueden existir muchos mínimos locales para los cuales los criterios locales no dan información acerca del mínimo global.

Aunque algoritmos de programación no lineal han tratado de resolver este tipo de problemas no han tenido éxito debido a que sólo obtienen soluciones locales, no reconocen condiciones de optimalidad global y se desarrollan en un tiempo de ejecución exponencial.

Considerando lo anterior, se ha desarrollado la Optimización Global la cual busca al menos un mínimo global de una función objetivo que posee diferentes mínimos globales, los problemas que analiza esta área son *NP-duros* y por ello en varios problemas prácticos se maneja un número pequeño de variables.

[PPT] es un problema *NP-duro* debido principalmente al número de variables no lineales que representan el nivel de producción de las fábricas, por ello, se considerará un número fijo k de fábricas lo cual lleva a denotar al problema como [PPT(k)]. En este trabajo se resuelve el caso para $k=3$ porque que en él se muestra claramente el uso de las técnicas antes mencionadas, además de que para valores de $k > 5$ el problema se vuelve más teórico que práctico y el algoritmo ya muestra un comportamiento exponencial.

Este trabajo se desarrolla en la forma siguiente : En el capítulo 1 se expone el Problema de Transporte y el método que le da solución , además se describe el Problema de Producción -Transporte con Costos Cóncavos [PPT(k)]. En el capítulo 2 se establecen conceptos de análisis convexo, el problema lineal paramétrico y la aplicación de todo esto al problema [PPT(k)]. En el capítulo 3 se presentan conceptos de la teoría de redes y su aplicación al problema paramétrico de [PPT(3)]. En el capítulo 4 se establece el algoritmo que da solución a [PPT(3)], su complejidad computacional y ejemplos de su funcionamiento y aplicación. Se presenta un apéndice en el que se incluyen conceptos importantes para el desarrollo del trabajo, así como el algoritmo del método simplex dual revisado y un resumen de los problemas [P (1,2)] y [P(2,1)]. Finalmente, aparecen las conclusiones y la bibliografía.

CAPÍTULO 1

EL MODELO DE TRANSPORTE Y [PPT]

La necesidad e importancia de distribuir productos de fábricas a almacenes, o a otros lugares donde se requieren, a costo mínimo ha provocado que se busque la forma de dar solución eficiente a este problema. El modelo matemático que representa la situación anterior se conoce como el Modelo de Transporte. La Investigación de Operaciones a través de la Optimización ha desarrollado un método de solución para éste problema conocido como la Técnica de Transporte, basada en el método simplex.

En este capítulo se define y analiza el modelo de transporte, también se presenta la técnica de transporte, un ejemplo y la descripción del Problema Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT] .

1.1 EL MODELO DE TRANSPORTE

1.1.1 Definición y estructura

El modelo de transporte es un problema de programación lineal que modela matemáticamente la situación de distribución de productos entre fábricas y almacenes, buscando que esto se realice a costo mínimo. La solución del problema anterior consiste en determinar la cantidad de productos que será enviada de cada fábrica a cada uno de los almacenes.

El modelo de transporte puede representarse a través de una red en la cual las fuentes y los destinos son los nodos, los arcos que los unen son las rutas de transporte de la mercancía.

Los datos del problema son :

a_i capacidad de oferta de la fuente i ($i=1, \dots, m$),

b_j demanda en el destino j ($j=1, \dots, n$),

c_{ij} costo de transporte unitario entre la fuente i y el destino j ,

x_{ij} cantidad transportada desde la fuente i al destino j .

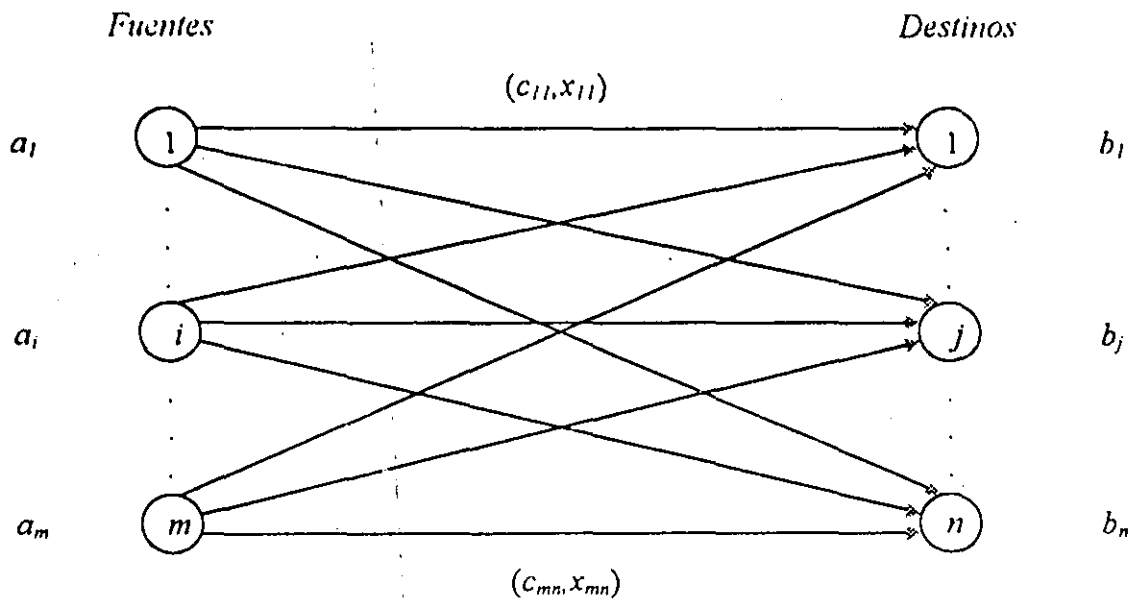


Figura 1.1 Representación del modelo de transporte como una red.

De acuerdo a lo anterior y utilizando programación lineal el modelo general de transporte queda representado como a continuación se muestra :

Minimizar
$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{restricciones de suministro}),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restricciones de demanda}),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

El modelo de transporte es factible si cumple con el teorema siguiente :

Teorema 1.1

Una condición necesaria y suficiente para que el modelo de transporte tenga solución consiste en que la oferta total sea igual a la demanda total, es decir,

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Demostración.

Del modelo general de transporte considerando las restricciones de suministro y demanda como igualdades se tiene

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i , \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j , \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

si se suma sobre todas las fuentes en la primera igualdad ésta no se altera como se muestra a continuación

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{i=1}^m a_i , \quad (1.1)$$

sumando sobre todos los destinos en la segunda igualdad

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^n b_j , \quad (1.2)$$

de (1.1) y (1.2) se tiene que

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j . \quad \blacksquare$$

El problema que cumple con la condición anterior se conoce como modelo de transporte equilibrado y su representación como programa lineal es la siguiente :

Minimizar
$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{restricciones de suministro})$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{restricciones de demanda})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Cuando el problema no se encuentra equilibrado es necesario crear una fuente (la demanda total es mayor que la oferta total) o un destino ficticio (la oferta total es mayor que la demanda total), que absorberá la diferencia y cuyo costo unitario de transporte asociado será nulo.

El modelo de transporte también se representa en forma matricial, como se muestra a continuación :

Minimizar
$$z = cx$$

sujeto a

$$Ax = d$$

$$x \geq 0$$

donde :

$$x^T = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

$$c = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}, c_{21}, \dots, c_{2n}, \dots, c_{m1}, \dots, c_{mn})$$

$$d^T = (a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \underbrace{I_n \ I_n \ I_n \ \dots \ I_n}_{m \times n \text{ columns}} \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right\} m+n \text{ renglones}$$

los vectores que componen la matriz A son :

$$1 = (1, 1, 1, \dots, 1)$$

$$0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$$

I_n es la matriz identidad de orden n .

La matriz A tiene una estructura especial, lo cual permite que el modelo de transporte sea más eficiente que el método simplex. Las características de la matriz A son las siguientes :

- El rango de A es de $m+n-1$. Esto quiere decir que la suma de los m primeros renglones es igual a la suma de los últimos n renglones, y cualquier submatriz cuadrada de A de orden $m+n-1$ es no singular.
- La matriz A es unimodular. Lo anterior indica que cualquier submatriz cuadrada de A de orden $m+n-1$ tiene un determinante que es igual a 0 ó a ± 1 .

1.1.2 El problema dual

El modelo de transporte basa su técnica de solución en el dual del problema lineal. Sean u_i y v_j las variables duales de las restricciones de la i -ésima fuente y el j -ésimo destino ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) respectivamente, entonces el problema dual es el siguiente:

$$\text{Maximizar } w = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

u_i y v_j irrestrictas.

Por consiguiente, la función objetivo se escribe como:

$$\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}^T \mathbf{u} + \mathbf{b}^T \mathbf{v}$$

donde

$$\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T,$$

$$\mathbf{v} = [v_1, \dots, v_n]^T,$$

a es el vector de ofertas,

b es el vector de demandas.

La función objetivo del problema primal se denotará como,

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Un vector \mathbf{x} que es factible para el problema de transporte es óptimo si hay un vector dual factible (\mathbf{u}, \mathbf{v}) para el cual

$$\alpha(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

realizando la operación anterior se obtiene,

$$\alpha(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m a_i u_i - \sum_{j=1}^n b_j v_j$$

$$\alpha(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} u_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} v_j$$

como \mathbf{x} es factible para el problema primal se pueden utilizar

$$a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \text{y} \quad b_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

entonces,

$$\alpha(\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}$$

de lo anterior se obtiene el resultado siguiente,

Teorema 1.2

Si (\mathbf{u}, \mathbf{v}) es algún vector dual (factible o infactible), entonces

$$\alpha(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij}$$

siempre que \mathbf{x} sea una solución factible.

Por condiciones de dualidad si el vector (\mathbf{u}, \mathbf{v}) es factible para el problema dual entonces \mathbf{x} es óptimo para el problema de transporte, es decir, si $\alpha(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entonces se cumple que \mathbf{x} es el óptimo.

Para la obtención de las variables básicas x_{ij} se debe considerar que a cada una de ellas le corresponde una restricción dual, generándose $m+n-1$ ecuaciones como la siguiente:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

y para las variables no básicas denominadas como x_{pq} se calcula

$$u_p + v_q - c_{pq}$$

y por la condición de optimalidad entra a la solución aquella variable no básica con el mayor valor positivo, puesto que se trata de un problema de minimización.

El modelo de transporte se puede representar a través de una tabla en la que se incluye toda la información del problema, como se muestra a continuación:

FUENTE	DESTINO				Suministro	u_i
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1	
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2	
...	
...	
...	
m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	a_m	
Demanda	b_1	b_2	...	b_n	z	
v_j						

Tabla 1.1

1.1.3 La solución del modelo de transporte

El modelo de transporte se resuelve a través del siguiente algoritmo llamado Técnica de Transporte :

- Paso 1.** Buscar una solución básica factible inicial.
 - Paso 2.** Determinar la variable no básica que entra.
 - Paso 3.** Determinar la variable básica que sale.
 - Paso 4.** Determinar la nueva solución básica factible.
- Regresar al paso 2.

A continuación se explican cada uno de los pasos del algoritmo .

Paso 1. Búsqueda de una solución básica factible inicial

Para encontrar la solución básica factible inicial se pueden utilizar *la regla de la esquina noroeste* y *el método de aproximación de Vogel*.

- *Regla de la esquina noroeste.*

Esta regla consiste en asignar a la celda x_{11} de la tabla del modelo de transporte la mínima cantidad de unidades de la demanda y suministro correspondientes, en caso de que aún la fuente i tenga que satisfacer algún suministro se pasa a la posición $x_{i,j+1}$, en caso contrario se continúa asignando unidades en la posición $x_{i+1,j}$ respetando las restricciones de demanda y suministro.

- *Método de aproximación de Vogel.*

El método consiste en obtener la diferencia entre los dos costos menores de cada renglón y columna de la tabla del modelo de transporte. Después se elige aquel renglón o columna con la mayor diferencia, y se asigna la mayor cantidad de unidades posible (el mínimo de la demanda y suministro correspondientes) a la variable con menor costo unitario. En caso de satisfacerse totalmente una demanda o un suministro se tacha el renglón o columna correspondiente y ya no se considera en las siguientes iteraciones del método. Este método proporciona una solución básica inicial cercana al óptimo. Al igual que la regla de la esquina noroeste la solución obtenida con esta técnica da como resultado $m+n-1$ variables básicas.

Paso 2. Determinación de la variable que entra

Para determinar la variable no básica que entra a la base se calcula el valor de las variables duales u_i y v_j con $i=1, \dots, m$ y $j=1, \dots, n$; para obtener lo anterior a cada variable básica x_{ij} le corresponde una ecuación de la forma

$$u_i + v_j = c_{ij},$$

obteniéndose así $m+n-1$ ecuaciones con $m+n$ incógnitas. Como el sistema de ecuaciones anterior tiene más incógnitas que ecuaciones la solución se obtiene fijando el valor de una variable, por ejemplo $u_i=0$ y así se obtienen los valores de las incógnitas restantes.

Después para cada una de las variables no básicas x_{ij} se calcula la siguiente ecuación

$$c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij},$$

y se elige como la variable que entra aquella que tiene el valor c_{ij} positivo mayor (condición de optimalidad).

Paso 3. Determinación de la variable que sale

Ya elegida la variable que entra se genera un ciclo que inicia y termina con ella y cuyas esquinas corresponden a variables básicas. Este ciclo cuenta con $m+n-1$ variables y a cada una de ellas le corresponde una casilla dentro de la tabla del modelo de transporte; a cada casilla se le asigna un signo + ó - siendo positivo el de la variable que entra y después los signos se alternan hasta cerrar el ciclo. La nueva variable básica se incrementará en un valor igual al menor de las variables

básicas actuales, pues, al ir sumando o restando esa cantidad, dependiendo si la casilla tiene un signo + ó -, se llegará al nivel cero y será la variable que salga (condición de factibilidad). El ciclo que se forma es único y el sentido en que se recorra es indistinto.

Paso 4. Determinación de la nueva solución básica factible

De la nueva solución se calculan nuevamente las variables duales utilizando las variables básicas y los correspondientes valores c_{ij} de las variables no básicas. Si todas las cantidades c_{ij} son no positivas (condición de optimalidad) entonces la solución obtenida es la óptima, en caso contrario se continua con el paso 2 del algoritmo.

Degeneración.

En el proceso de la técnica de transporte cuando en una solución básica aparecen dos o más variables básicas nulas se dice que hay un caso de degeneración. En el caso anterior se elige para salir una de las variables antes mencionadas y las demás se toman como variables básicas, esto genera algunas iteraciones adicionales lo cual no es tan grave, y por lo tanto, se puede utilizar el algoritmo sin ningún ajuste.

1.1.4 Ejemplo

El problema de transporte a resolver se muestra en la tabla siguiente :

		DESTINO			OFERTA	
		1	2	3		
FUENTE	1		7	1	2	20
	2		1	5	5	20
	3		4	1	4	25
DEMANDA		20	15	20		

Tabla 1.2

SOLUCIÓN

El problema no se encuentra balanceado porque ,

Demanda total = 55

Oferta total = 65

entonces es necesario crear un destino ficticio que absorba las 10 unidades sobrantes de la oferta total, como se muestra en la tabla de transporte siguiente:

Paso 2. Determinación de la variable que entra

Se calculan las variables duales a partir de las variables básicas,

$$x_{11} = u_1 + v_1 = c_{11} = 7 \quad u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 7$$

$$x_{12} = u_1 + v_2 = c_{12} = 1 \quad \Rightarrow v_2 = 1$$

$$x_{22} = u_2 + v_2 = c_{22} = 5 \quad \Rightarrow u_2 = 4$$

$$x_{23} = u_2 + v_3 = c_{23} = 5 \quad \Rightarrow v_3 = 1$$

$$x_{33} = u_3 + v_3 = c_{33} = 4 \quad \Rightarrow u_3 = 3$$

$$x_{34} = u_3 + v_4 = c_{34} = 0 \quad \Rightarrow v_4 = -3$$

Resolviendo para las variables no básicas se tiene,

$$x_{13} = c_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 1 - 2 = -1$$

$$x_{14} = c_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 - 3 - 0 = -3$$

$$x_{21} = c_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 4 + 7 - 1 = 10$$

$$x_{24} = c_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = 4 - 3 - 0 = 1$$

$$x_{31} = c_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 7 - 4 = 6$$

$$x_{32} = c_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 1 - 1 = 3$$

lo anterior también se puede obtener directamente de la tabla de transporte, como se muestra a continuación:

	1	2	3	4	
1	20	0	-1	-3	$20 u_1=0$
2	10	15	5	1	$20 u_2=4$
3	6	3	15	10	$25 u_3=3$
	20	15	20	10	
	$v_1=7$	$v_2=1$	$v_3=1$	$v_4=-3$	

Tabla 1.5

De los resultados anteriores la variable que entra es x_{21} porque tiene el mayor valor positivo.

Paso 3. Determinación de la variable que sale

En la tabla 1.5 se muestra el ciclo que indica a x_{22} como la variable que sale de la base porque tiene signo negativo y la menor cantidad, resultando una nueva solución básica factible con costo de 150 unidades monetarias. La tabla de transporte actualizada es:

	1	2	3	4	
1	5	15			20
2	15		5		20
3			15	10	25
	20	15	20	10	

Tabla 1.6

Paso 4. Determinación de la nueva solución básica factible

De la solución anterior se muestran en la tabla 1.7 las variables duales correspondientes, y se observa que todavía hay variables no básicas que pueden entrar a la base y mejorar la solución.

	1	2	3	4	
1	5	15			20 $u_1=0$
2	15		5		20 $u_2=-6$
3			15	10	25 $u_3=-7$
	20 $v_1=7$	15 $v_2=1$	20 $v_3=11$	10 $v_4=7$	

Tabla 1.7

Se continúa con el algoritmo regresando al paso 2. De la tabla anterior la variable que entra es x_{13} , la variable que sale es x_{23} y la solución es:

	1	2	3	4	
1	0	15	5		20
2	20				20
3			15	10	25
	20	15	20	10	

Tabla 1.8

Con costo de 105 unidades monetarias.

Calculando la tabla de transporte siguiente se tiene :

	1	2	3	4	
1	0	15	5		20 $u_1=0$
2	20				20 $u_2=-6$
3	5		15	10	25 $u_3=2$
	20 $v_1=7$	15 $v_2=1$	20 $v_3=2$	10 $v_4=-2$	

Tabla 1.9

De la tabla 1.9 la variable que entra es x_{31} , la variable que sale es x_{11} y la solución es :

	1	2	3	4	
1		15	5		20
2	20				20
3	0		15	10	25
	20	15	20	10	

Tabla 1.10

Con costo de 105 unidades monetarias.

Calculando la tabla de transporte siguiente se tiene :

	1	2	3	4	
1	0	15	5		20 $u_1 = 0$
2	20				20 $u_2 = -1$
3	0		15	10	25 $u_3 = 2$
	20 $v_1 = 2$	15 $v_2 = 1$	20 $v_3 = 2$	10 $v_4 = -2$	

The table includes additional annotations:

- Row 1: $u_1 = 0$
- Row 2: $u_2 = -1$
- Row 3: $u_3 = 2$
- Column 1: $v_1 = 2$
- Column 2: $v_2 = 1$
- Column 3: $v_3 = 2$
- Column 4: $v_4 = -2$
- Cell (1,2): 15, with a left-pointing arrow from cell (1,3) and a downward-pointing arrow to cell (3,2).
- Cell (1,3): 5, with an upward-pointing arrow from cell (2,3).
- Cell (3,2): 2, with a right-pointing arrow to cell (3,3).
- Cell (3,3): 15, with a right-pointing arrow to cell (3,4).
- Cell (1,2): 7, Cell (1,3): 1, Cell (2,1): 1, Cell (2,3): 5, Cell (3,1): 4, Cell (3,3): 1, Cell (3,4): 4, Cell (1,4): 2, Cell (2,4): 5, Cell (3,4): 0, Cell (1,1): 0, Cell (2,2): -5, Cell (2,3): -4, Cell (3,2): -2, Cell (1,2): -1, Cell (2,4): -2, Cell (3,4): -3.

Tabla 1.11

De la tabla 1.11 la variable que entra es x_{32} , la variable que sale es x_{33} y la solución es :

	1	2	3	4	
1		0	20		20
2	20				20
3	0	15		10	25
	20	15	20	10	

Tabla 1.12

Con costo de 75 unidades monetarias . Como se observa la solución es degenerada.

Calculando la tabla de transporte siguiente se tiene:

	1	2	3	4	
1		0	20		20 $u_1=0$
2	20				20 $u_2=-3$
3	0	15		10	25 $u_3=0$
	20 $v_1=4$	15 $v_2=1$	20 $v_3=2$	10 $v_4=0$	

Tabla 1.13

Como todos los valores correspondientes a las variables no básicas son no positivos , la solución óptima es :

$$x_{12}=0, x_{13}=20, x_{21}=20, x_{31}=0, x_{32}=15, x_{34}=10,$$

el costo total es de 75 unidades monetarias .

La representación del problema anterior y de su solución a través de redes se presenta en las figuras 1.2 y 1.3 respectivamente.

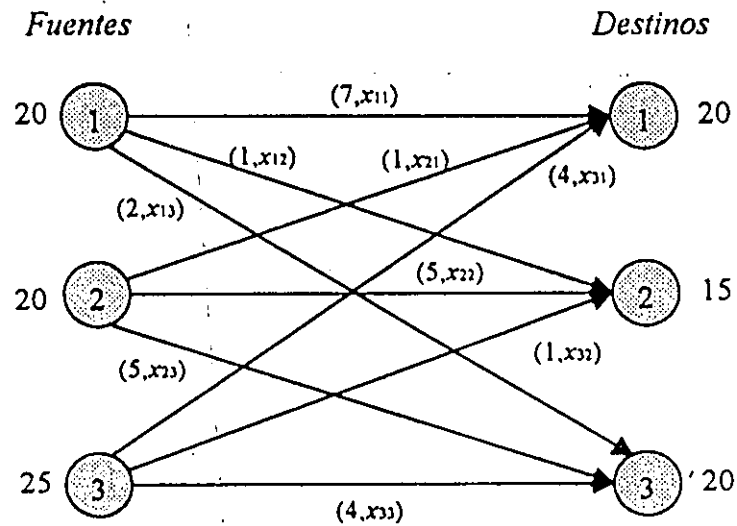


Figura 1.2

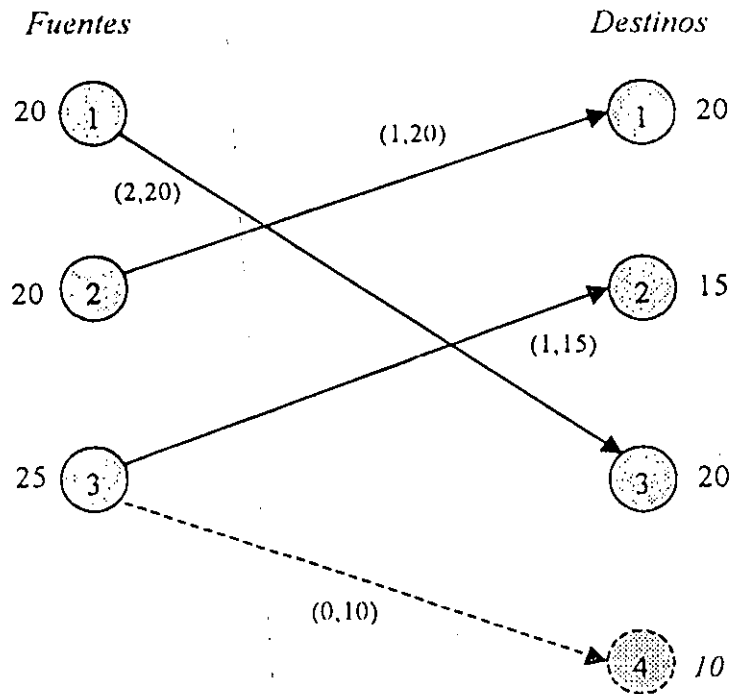


Figura 1.3

En la figura 1.3 se indica que la forma óptima de distribuir el exceso de oferta consiste en que la fuente 3 deje de suministrar 10 unidades de producto.

1.1.5 Casos especiales

Existen otros problemas como el problema de transbordo y el problema de asignación que se pueden resolver utilizando el modelo de transporte.

El problema de transbordo consiste en enviar un cierta cantidad de unidades de un conjunto de nodos origen a otro conjunto de nodos destino pasando a través de nodos llamados de transbordo. El objetivo del problema anterior es encontrar el plan de asignación y las rutas de transporte a costo mínimo. Para lograr que este caso especial se resuelva con la técnica de transporte, se considera a cada nodo de transbordo como un origen y destino a la vez; es importante señalar que este tipo de nodos no generan ni absorben unidades.

El problema de asignación consiste en asignar, por ejemplo un número de trabajadores o máquinas (fuentes) a tareas o lugares específicos (destinos) de tal manera que se minimicen los costos. En este caso especial se tiene una variable c_{ij} que representa el costo de asignar al trabajador i a la tarea j , por lo cual, se trata de un problema de base uno a uno, pues a cada trabajador le corresponde una tarea en particular. La variación de este caso especial con el modelo de transporte consiste en que cada demanda y suministro son igual a uno, por lo tanto, la solución esta dada por la asignación o la no asignación y en consecuencia las variables son binarias, es decir, toman el valor 1 ó 0 respectivamente.

1.2 EL PROBLEMA DE PRODUCCIÓN-TRANSPORTE CON COSTOS CÓNCAVOS [PPT]

En la práctica encontramos problemas tan diversos y complicados que consideramos que la forma en que se han resuelto no es tan mala, porque nos da una solución que si no es la mejor al menos nos ofrece información sobre ellos.

Como ya se mencionó el Problema de Transporte es importante pero como se sabe existen otros problemas que se derivan de éste, por ejemplo en este trabajo se analiza la problemática de producir una cierta cantidad de mercancía y distribuirla. Este problema considera que los costos de producción ya no son lineales (costos cóncavos) y por lo tanto el método de solución es diferente.

1.2.1 Descripción

El Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT] consiste en que un número de fábricas deben producir una cierta cantidad de productos y enviarlos a un número preestablecido de almacenes. El objetivo que se persigue al resolver el problema anterior es determinar el nivel de producción de cada fábrica y el plan de distribución de la mercancía de las fábricas a los almacenes, de tal manera que el costo total de producción-transportación sea el mínimo.

El Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT] se modela matemáticamente de la forma siguiente :

[PPT]

Minimizar $g(y_1, \dots, y_k) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{balance en las fábricas}),$$

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{demanda en almacenes}),$$

$$y_i \leq s_i \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{capacidad en la fábrica } i),$$

$$x_{ij}, y_i \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{condición de no negatividad}),$$

donde

k : número de fábricas F_1, \dots, F_k ,

m : número de almacenes B_1, \dots, B_m ,

$g(y_1, \dots, y_k)$: costo de producir y_i unidades en la fábrica F_i (función cóncava),

$c_{ij} \geq 0$: costo de transportar una unidad de la fábrica F_i al almacén B_j ,

$b_j > 0$: demanda del almacén B_j ,

$s_i > 0$: capacidad de producción de la fábrica F_i ,

$y_i \geq 0$: cantidad de producción (a determinar) en la fábrica F_i ,

$x_{ij} \geq 0$: número de unidades transportadas de la fábrica F_i al almacén B_j .

La función objetivo de [PPT] consiste de dos partes : los costos de producción y los costos de distribución o transportación. En este caso los costos de producción se

representan por una función cóncava . Es importante señalar que en éstos se incluyen los costos de construcción, mantenimiento y operación de las instalaciones, los cuales se comportan como las economías de escala . Las economías de escala representan el comportamiento de las cantidades de artículos producidos ,es decir , cuando el número de unidades de un producto aumenta el costo por unidad decrece, por lo cual se describen a través de funciones cóncavas. Los costos de transportación frecuentemente son lineales.

Esta composición de costos aparece en otras situaciones prácticas como en la planeación de redes de comunicación, transporte, aguas residuales , administración de fuentes de agua , control de tráfico aéreo , problemas de localización , planeación de la producción e inventarios , etc. .

La función $g(y) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función cóncava y no separable, porque considerando la situación real de que el costo de suministrar materia prima a un conjunto de fábricas de una o varias fuentes no siempre puede ser separable, por consiguiente, éste se incluye en el costo de producción.

Las restricciones de [PPT] son lineales y semejantes a las del modelo de transporte. Este problema pertenece a la clase de problemas de minimización de funciones cóncavas sujetas a restricciones lineales y convexas de la Optimización Global ("Minimización Cóncava"), entonces se trata de un problema *NP- duro*. La complejidad computacional de este problema se debe principalmente al número de fábricas por lo que se considerará un número fijo de ellas representado por la letra k , y el problema se denotará como [PPT(k)] .

La estructura de [PPT(k)] proporciona aspectos interesantes como el que su función objetivo sea no decreciente, lo que permite que el dominio factible se pueda dividir en partes más pequeñas identificadas a través de la estructura de red del problema , de tal manera que se localiza de una forma sencilla el mínimo global. Estas características se analizan en los capítulos siguientes.

1.2.2 Antecedentes

Los métodos de solución más generales para la Optimización Global se dividen en dos clases, estocásticos y determinísticos. Los métodos estocásticos convergen al óptimo global con una probabilidad aproximada cuando su tiempo de corrida llega a ser infinito (Törn y Zilinskas [1989], Schoen [1991]). Los métodos determinísticos toman ventaja de la estructura matemática del problema y frecuentemente garantizan la convergencia finita con un grado de exactitud preestablecido.

Varios problemas de Optimización Global tienen al menos las siguientes propiedades :

- i) la convexidad se presenta en forma limitada y frecuentemente es inusual ;
- ii) un óptimo global ocurre dentro de un subconjunto del límite del conjunto factible (este conjunto de puntos en \mathbb{R}^n se determina generalmente por un sistema de desigualdades).

Estas propiedades se utilizan mejor en los métodos determinísticos , porque combinan las herramientas analíticas y combinatorias en una forma más efectiva.

En la Optimización Global se encuentran diversas clases de problemas :

- a) Minimización de funciones cóncavas sujetas a restricciones lineales y convexas (“Minimización Cóncava” o “Programación Global Cóncava”).
- b) Minimización convexa sobre la intersección de conjuntos convexos y complementos de conjuntos convexos (“Programación Convexa Invertida”).
- c) Optimización Global de funciones que se expresan como una diferencia de dos funciones convexas (“d.c.- programación”, d.c. es una abreviación de “diferencia de dos funciones convexas”).

El problema que se analiza en este trabajo pertenece a la clase de problemas de Minimización de funciones cóncavas sujetas a restricciones lineales y convexas. Los planteamientos determinísticos para la Programación Global Cóncava usan técnicas enumerativas, métodos de planos de corte, ramificación y acotamiento, solución de problemas aproximados, métodos de programación bilineal o diferentes combinaciones de estas técnicas. Existen algunos métodos específicos para problemas donde la función objetivo tiene una estructura especial (cuadrática, separable, factorizable, etc.) o el conjunto factible tiene una geometría simplificada (hipercubo unitario, restricciones de red, etc.).

Estos métodos se clasifican de la siguiente manera :

- 1.- Métodos enumerativos que ordenan los puntos extremos.
- 2.- Métodos de planos de corte y técnicas de partición del dominio factible.
- 3.- Métodos de ramificación y acotamiento que usan aproximaciones de la función objetivo.
- 4.- Algoritmos de aproximación general.
- 5.- Proposiciones de programación bilineal.
- 6.- Métodos para programación cóncava global de gran escala.

Para este trabajo los métodos enumerativos que ordenan los puntos extremos son de gran importancia, pues una propiedad importante de las funciones cóncavas es que cada solución local y global se alcanza en un punto extremo del dominio factible. Esta propiedad hace al problema más tratable, considerando que la búsqueda de una solución óptima se puede restringir al conjunto de puntos extremos, aún cuando este conjunto en general puede ser muy grande para manejarlo.

Una forma obvia de resolver el problema de programación cóncava en el caso en que el dominio factible es un conjunto poliédrico, es la enumeración completa de los puntos extremos. Aunque la mayoría de los algoritmos en el peor de los casos degenerarán en una inspección completa de todos los vértices del poliedro, lo cual resultaría computacionalmente infactible para problemas grandes.

Cabot y Francis [1970] presentan el siguiente procedimiento para resolver el problema de programación cuadrática: primero se resuelve un programa donde la función objetivo lineal es un estimador inferior de la función objetivo original. Después Murty [1969] desarrolló un método que consiste en ordenar los puntos extremos, que se aplica usando este estimador inferior (función) para obtener una solución óptima al problema original. Taha [1973] también usó la idea de ordenar los puntos extremos basado en funciones de estimación lineal inferior.

Técnicas generales para la enumeración total de vértices se presentan en Balinski [1961], Burdet [1974], Dyer y Proll [1977], Manas y Nedoma [1974] y Rossler [1973]. Un estudio y comparación de los métodos para encontrar todos los vértices de un conjunto poliédrico está dado por Matheiss y Rubin [1980] y Dyer [1983]. La efectividad

computacional de los algoritmos de ordenamiento de puntos extremos se discuten en McKeown [1978].

Trabajos previos sobre [PPT (k)] donde los costos de producción se representan normalmente por una función cóncava y separable, incluyen entre otros resultados investigaciones locales heurísticas, Khumawala y Kelly [1974] , Feldman, Lehrer y Ray [1966] ; ramificación y acotamiento, Soland [1974] ; programación dinámica , Zangwill [1969] y descomposición / aproximación exterior Thieu [1987] , Horst y Tuy [1990] . También existen resultados sobre el caso especial cuando la función de los costos de producción es cóncava, separable y piezas lineales Efraysom [1966] , Soland [1974] .

CAPÍTULO 2

EL PROBLEMA PARAMÉTRICO DE [PPT]

Como ya se explicó la parte no lineal del Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT(k)] se encuentra en la función objetivo (en la parte de los costos de producción). Esta estructura ofrece una ventaja para obtener la solución , porque permite reducirlo a un problema de transporte paramétrico.

Para establecer la reducción anterior, en este capítulo, primero se analizan las características de una función cóncava y su comportamiento dentro de un cono convexo así como el problema de programación lineal paramétrica en el lado derecho, para después aplicar esto a un problema de minimización cóncava y particularmente en [PPT(k)].

2.1 FUNCIONES CÓNCAVAS

Cuando se dice que algo es cóncavo viene a nuestra mente la idea de curvatura, pero cuando se dice que la producción de una fábrica se encuentra representada por una función cóncava, se requieren más elementos de análisis que una sola idea.

En general, una función cóncava es aquella en la que si se toman dos puntos de ella y se unen a través de una línea ésta se encuentra debajo de la curva que describe la función. Ya que se tiene la idea de lo que es una función cóncava a continuación se presentan la definición y otros conceptos importantes para su estudio en este trabajo.

Definición 2.1

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ con $x_1 \neq x_2$. El segmento de línea que une x_1 y x_2 es

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ para } \lambda \in [0,1].$$

Definición 2.2

Un conjunto C en \mathbb{R}^n es convexo si, para cada $x_1, x_2 \in C$, el segmento de línea

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \text{ para } \lambda \in [0,1] \text{ pertenece a } C.$$

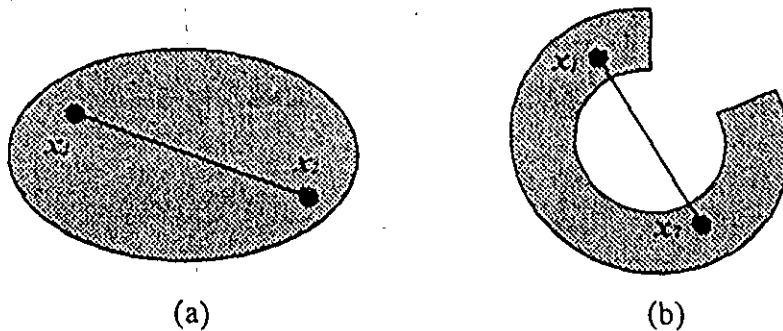


Figura 2.1 (a) Conjunto convexo (b) Conjunto no convexo.

Definición 2.3

a) Una función real $f(x)$ definida en un conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice cóncava si dos vectores x_1, x_2 , satisfacen la siguiente desigualdad :

$$x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) ,$$

b) se dice que una función es estrictamente cóncava si

$$x_1, x_2 \in C, x_1 \neq x_2, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

c) si f es (estrictamente) cóncava, entonces $g \equiv -f$ es (estrictamente) convexa,

d) se dice que una función es cuasicóncava si

$$x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min \{ f(x_1), f(x_2) \}.$$

De lo anterior toda función cóncava es una función cuasicóncava.

Por lo tanto, para una función cóncava el valor de ésta en los puntos sobre el segmento de la línea $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ es mayor o igual a la altura de la cuerda que une los puntos $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$ ver figura 2.2 .

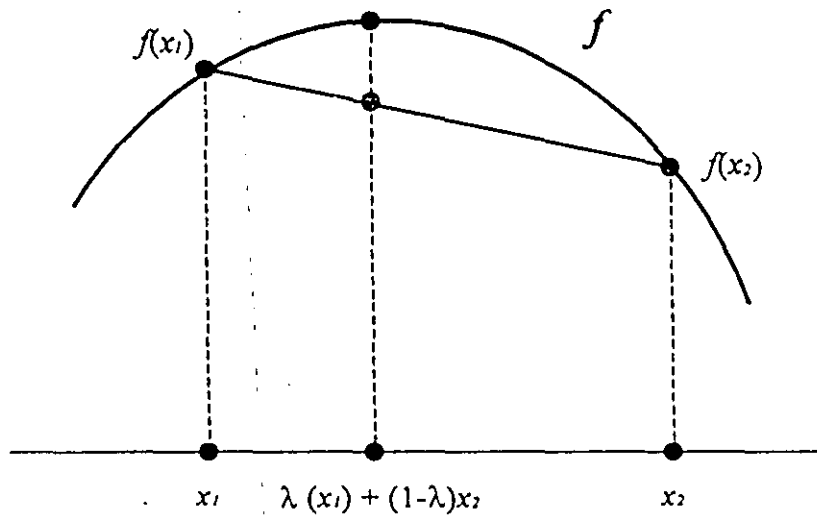


Figura 2.2 Función cóncava.

Ya establecida la definición de una función cóncava , ahora se determinará como se puede identificar una función de este tipo a través de su diferenciabilidad.

Teorema 2.4

Sea f una función diferenciable sobre un conjunto convexo abierto no vacío $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es cóncava si y sólo si para todo $\bar{x} \in C$, se tiene

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + (x - \bar{x}) \nabla f(\bar{x}) \text{ para cada } x \in C.$$

La demostración del teorema anterior se encuentra en el apéndice y en la referencia [13].

Si la función que se analiza puede diferenciarse dos veces existe otro criterio para determinar si es cóncava, como se muestra a continuación.

Definición 2.5

Sea C un conjunto no vacío en \mathbb{R}^n y sea $f: C \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, f se dice diferenciable dos veces en $\bar{x} \in \text{int } C$ si existe un vector $\nabla f(\bar{x})$, y una matriz $H(\bar{x})$ de $n \times n$ simétrica, llamada matriz Hessiana (ver apéndice), y una función $\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\bar{x}) (x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x})$$

para cada $x \in C$, donde el $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$.

Teorema 2.6

Sea f una función real continua doblemente diferenciable en un conjunto convexo abierto $C \subset \mathbb{R}^n$. Entonces f es cóncava si y sólo si la matriz Hessiana es negativamente semidefinida para cada punto en C .

La demostración del teorema anterior se puede consultar en el apéndice y en la referencia [3].

Otro aspecto importante de una función cóncava consiste en que puede ser separable, es decir, que se expresa como una suma de n funciones de una sola variable y su definición es la siguiente.

Definición 2.7

Una función separable f definida para \mathbf{x} en \mathbf{R}^n es aquella que puede expresarse como la suma de n funciones f_i de una única variable x_i , donde x_i es la i -ésima componente del vector \mathbf{x} , esto es,

$$f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n).$$

Como ya se explicó la función cóncava de [PPT] es no separable.

En general, un problema de minimización en optimización busca el mínimo de una función definida en un conjunto generado por desigualdades conocidas como restricciones. Si en un subconjunto del conjunto anterior existe un punto que evaluado en la función cumple con ser el menor se dice que la función tiene un mínimo relativo en ese punto, que también se conoce como solución local óptima o extremo relativo. Una característica de los puntos extremos relativos consiste en que la función es diferenciable en ellos y su derivada es igual a cero, es decir, si f es una función de una sola variable y x_0 es el punto extremo relativo entonces $df(x_0) = 0$ o si f es de varias variables $\nabla f(x_0) = 0$ y x_0 recibe el nombre de punto crítico.

Cuando en todo el conjunto no se encuentra algún otro punto que mejore la solución obtenida, se dice que se trata del mínimo global.

Para el caso del máximo los resultados anteriores son semejantes sólo que aplicados al mayor de los valores del conjunto.

En problemas lineales y donde se minimiza una función convexa sobre un conjunto convexo un mínimo local es también un mínimo global. Para las funciones cóncavas un máximo local de dicha función es global y si la función es estrictamente cóncava, entonces dicho máximo no se puede alcanzar en más de un punto.

Para el caso de minimizar una función cóncava en un politopo se puede tener un mínimo local en cada vértice del politopo, y aquí los criterios locales no dan información acerca del mínimo global. Una propiedad interesante con respecto al mínimo global de las funciones cóncavas se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.8

Sea $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Entonces el mínimo global de f sobre D se alcanza en un punto extremo de D .

Demostración.

El mínimo global de f sobre el conjunto compacto D existe por el teorema de Weierstrass (ver apéndice), debido a que una función cóncava definida sobre \mathbb{R}^n es continua en cualquier punto. Lo anterior es suficiente para mostrar que para cada $x \in D$ hay un punto extremo v de D tal que la desigualdad $f(x) \geq f(v)$ se cumple.

Por el teorema de Carathéodory o el teorema de representación (ver apéndice), hay un número natural $k \leq n+1$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v^i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (2.1)$$

donde $v^i \quad i = 1, \dots, k$ son puntos extremos de D . Se establece que v satisface $f(v) = \min\{f(v^i) : i = 1, \dots, k\}$. Entonces de la concavidad de f y de (2.1) se tiene

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v^i) \geq f(v) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) = f(v). \quad \blacksquare$$

2.2 FUNCIÓN CÓNCAVA Y CONOS

Los problemas de optimización global en los cuales la función objetivo incluye una función cóncava presentan una estructura en común. Esta característica consiste en que la función objetivo es no decreciente en ciertas direcciones, las cuales forman un cono convexo y esto permite dividir su dominio factible en subregiones sobre las cuales es más fácil identificar la solución óptima. Y en consecuencia se puede trabajar con un problema más tratable, con menos variables en la función objetivo y paramétrico en el lado derecho de las restricciones.

2.2.1 Conceptos

Considerando que es importante señalar conceptos que ayudan a comprender teoremas que formalizan las propiedades antes mencionadas, éstos se tratarán de manera informal debido a

que no son relevantes en todo el desarrollo del trabajo, pero si se desea obtener mayor información consulte el apéndice y la referencia [19].

Si se tiene una función cóncava f el conjunto de puntos en la parte inferior de ésta se conoce como epígrafe de la función y se indica como $epi f$. Si el epígrafe es no vacío y no tiene líneas verticales la función f es propia. Además si el epígrafe es un conjunto convexo no vacío en \mathbb{R}^{n+1} se asocia a éste un cono de recesión denominado $\theta^*(epi f)$.

Para entender lo anterior es necesario indicar que un cono convexo K se forma por semirrectas que salen de un vértice como se muestra en la figura 2.3 y su definición es la siguiente,

Definición 2.9

Un conjunto K en \mathbb{R}^n que cumple con $\lambda x \in K \quad \forall x \in K$ y $\lambda \geq 0$ se conoce como cono. Si K es convexo entonces K es un cono convexo.

Si $\lambda=0$ el cono siempre contiene al origen.

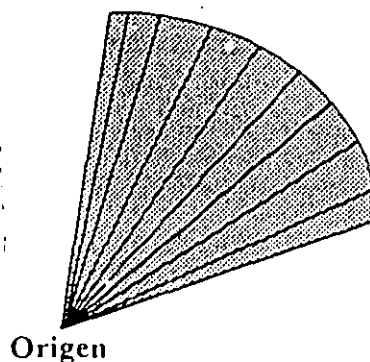


Figura 2.3 Cono convexo.

Al considerar el comportamiento infinito de las semirrectas que se generan en un cono convexo, se hace referencia a los conos de recesión.

Definición 2.10

Sea K un conjunto convexo en \mathbb{R}^n no vacío. K se extiende en la dirección de una semirrecta y , donde $y \neq 0$, si y sólo si $x + \lambda y \in K$ para todo $\lambda \geq 0$ y $x \in K$. El conjunto de todos los vectores $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen la condición anterior, incluyendo $y = 0$ se conoce como cono de recesión de K y se indica como 0^*K .

Las direcciones en las cuales se extiende K se denominan direcciones de recesión de K . El cono 0^*K es el cono más grande que se encuentra en K .

Regresando al cono $0^*(\text{epi } f)$, se tiene que todos los valores que le pertenecen forman un intervalo cerrado de \mathbb{R} no acotado en la parte inferior, por lo tanto corresponde al epigrafe de una función conocida como la *función de recesión de f* indicada por $f0^*$ es decir $0^*(\text{epi } f) = \text{epi}(f0^*)$.

En este momento ya es posible establecer el siguiente resultado.

Teorema 2.11

Sea f una función cóncava propia y sea y un vector. Si se tiene que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup f(x + \lambda y) > -\infty$$

para una x dada, entonces x tiene la propiedad de que $f(x + \lambda y)$ es una función no decreciente de λ , $-\infty < \lambda < +\infty$. Esta propiedad se cumple para toda x si y sólo si $(f^0)(y) \geq 0$. Cuando f es cerrada la propiedad anterior se mantiene si se cumple para algún valor de x que pertenezca al dominio de f .

Demostración.

Por definición $(f^0)(y) \geq 0$ si y sólo si el cono de recesión de $\text{epi } f$ tiene al vector $(y, 0)$, esto significa que $f(z + \lambda z) \geq f(z)$ para toda z y toda $\lambda \geq 0$. Así $(f^0)(y) \geq 0$ si y sólo si $f(x + \lambda y)$ es una función no decreciente de λ , $-\infty < \lambda < +\infty$, para toda x . Si f es cerrada entonces se cumple que $(f^0)(y) \geq 0$, por el teorema 20 que se encuentra en el apéndice, si existe al menos una $x \in \text{dom } f$ tal que $f(x + \lambda y)$ es no decreciente en λ ■

El problema que se analiza en este trabajo cumple con el teorema anterior, y por lo tanto, la función objetivo es no decreciente o monótona en un conjunto convexo formado por direcciones que determinan un cono.

Continuando con el análisis, se tiene que *el espacio lineal* de un conjunto convexo no vacío K consiste del vector cero y todos los vectores no nulos y tales que, para toda $x \in K$ la línea a través de x en la dirección de y se encuentra en K . Las direcciones de los vectores y en el espacio lineal se conocen como direcciones en las cuales K es lineal. El espacio lineal de K es el mayor subespacio que se encuentra en el cono convexo 0^+K y su dimensión se conoce como la linealidad de K . La dimensión de K menos la linealidad de K se denomina el rango de K y esto mide la no linealidad de K .

Lo anterior puede utilizarse para obtener del problema original otro muy parecido pero que se desarrolla en un espacio de menor dimensión.

Otro concepto interesante consiste en que el conjunto de todos los vectores y tales que $(f^0^*)(y) \geq 0$ se conoce como el cono de recesión de f , el cual es un cono convexo que contiene al 0 y que es cerrado si f es cerrada. Las direcciones del cono anterior se conocen como *direcciones de recesión de f* .

Ahora, en un caso más general el conjunto de vectores y tales que $(f^0^*)(y) \geq 0$ y $(f^0^*)(-y) \geq 0$ forman el mayor subespacio que existe en el cono de recesión de f conocido como *el espacio invariante de f* . Las direcciones de los vectores en este espacio se conocen como direcciones en las que f es constante.

Y como consecuencia se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.12

Sea f una función cóncava propia. Entonces todos los conjuntos de la forma $\{x \mid f(x) \geq \alpha\}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ tienen el mismo cono de recesión y el mismo espacio lineal, denominados el cono de recesión y el *espacio invariante de f* respectivamente.

Demostración.

Continuando con el teorema 2.11 y pertenece al cono de recesión de $\{x \mid f(x) \geq \alpha\}$, si y sólo si $\{x \mid f(x + \lambda y) \geq \alpha\}$, cuando $f(x) \geq \alpha$ y $\lambda \geq 0$. ■

Lo anterior indica que el dominio factible de la función f puede dividirse en subregiones y, por lo tanto, es más fácil identificar sobre cada una de ellas la mejor solución.

2.2.2 Aplicación a un problema de minimización cóncava

Aplicando los resultados anteriores a un problema de Minimización Cóncava se obtiene que éste cumple con *la Propiedad de Rango r* como se establece a continuación.

Sea el siguiente problema de optimización global,

$$\begin{aligned}
 \text{[P]} \quad & \text{Global mín} \quad f(z) \\
 & \text{sujeto a} \quad z \in D \\
 & \quad \quad \quad z = (y, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \\
 & \quad \quad \quad y \in S.
 \end{aligned}$$

donde

D : es un politopo en \mathbb{R}^{k+n} ,

S : es un politopo en \mathbb{R}^k ,

f : $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función cuasicóncava definida y continua en un conjunto convexo cerrado $\Omega \supset D$.

En este problema se busca un punto $x^0 \in D$ tal que $f(x^0) < f(x)$, donde x^0 es un vértice de D que representa la mejor solución, es decir, que x^0 es la solución global óptima.

Entonces se tiene un conjunto convexo $G = \{x \in \Omega : f(x) \geq f(x^0)\}$, que contiene a un cono

$$K = \{x \in \Omega : Ax \leq 0\},$$

tal que $(\forall x^0 \in D) x^0 + K \subset G$. El rango de la matriz A es igual a k .

"La propiedad de Rango r " que a continuación se define resume las características de la función objetivo del problema [P].

Definición 2.13 (Propiedad de Rango r)

Sea el problema de optimización global [P]. Existe un vector $c \in \mathbb{R}^n$ y $k = r-1$ vectores

linealmente independientes $p^1, p^2, \dots, p^k \in \mathbb{R}^k$ tal que para $z = (y, x) \in D$ y $z' = (y', x')$,

$p^i(y' - y) = 0, \quad i=1, 2, \dots, k$ y $c(x' - x) \geq 0$ implica $f(z') \geq f(z)$.

Y como resultado se asocia a [P] el problema lineal,

$$\begin{array}{ll}
 \text{[Q(u)]} & \text{Minimizar} \quad cx \\
 & \text{sujeto a} \quad p^i y = u_i, \quad i=1, \dots, k \\
 & \quad \quad \quad z = (y, x) \in D,
 \end{array}$$

en el cual u_1, u_2, \dots, u_k son parámetros, es decir, variables de las cuales depende la solución.

Este tipo de problema lineal se conoce como *problema paramétrico en el lado derecho* y

la programación lineal paramétrica se encarga de su estudio. A continuación se expone en que consiste un problema de este tipo y como se resuelve.

2.3 EL PROBLEMA LINEAL PARAMÉTRICO

La programación lineal paramétrica investiga las diferencias en la solución óptima de la programación lineal debido a cambios continuos predeterminados en los parámetros del modelo, como en los costos de la función objetivo o en el lado derecho de las restricciones.

Por lo importante que es el *problema paramétrico en el lado derecho* para [PPT(k)], a continuación se analiza y se da un ejemplo.

2.3.1 Conceptos

Sea el siguiente problema :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z(x) = cx \\ \text{sujeto a} & Ax = b + tb^* \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (2.2)$$

donde

A es una matriz de orden $m \times n$

$$t \geq \frac{-\bar{b}_i}{\bar{b}_i^*} \quad \forall i \quad \text{si } \bar{b}_i^* > 0,$$

$$t \leq \frac{-\bar{b}_i}{\bar{b}_i^*} \quad \forall i \quad \text{si } \bar{b}_i^* < 0.$$

Lo anterior indica que las desigualdades en t que resultan en el lado derecho de la tabla del método simplex en cada iteración se resuelven, es decir, se debe encontrar el conjunto de valores de t reales que cumplen simultáneamente con las m desigualdades. Lo anterior es resultado de la intersección de los conjuntos que describen las m desigualdades o también :

$$\bar{t}_B = \begin{cases} \text{mínimo} \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\bar{b}_i^*} : i, \text{ si } \bar{b}_i^* < 0 \right\}, \\ +\infty, \quad \text{si } \bar{b}_i^* \geq 0 \quad \forall i, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$t_B = \begin{cases} \text{máximo} \left\{ \frac{-\bar{b}_i}{\bar{b}_i^*} : i, \text{ si } \bar{b}_i^* > 0 \right\}, \\ -\infty, \quad \text{si } \bar{b}_i^* \leq 0 \quad \forall i, \end{cases} \quad (2.5)$$

que da como resultado el intervalo cerrado

$$t_B \leq t \leq \bar{t}_B,$$

conocido como *el intervalo característico* o *el intervalo óptimo* de la base B , porque todos los valores de t en él proporcionan una solución óptima factible.

En cada intervalo la solución óptima factible y el valor óptimo de la función objetivo varían linealmente en el parámetro t . Los valores óptimos de la función objetivo se

comportan como una *pieza lineal*, es decir, una función continua en el parámetro t como se establece a continuación.

Definición 2.14

Sea $f(t)$ una función real definida sobre el intervalo $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ de los reales. Esta función se conoce como *pieza lineal* si el intervalo anterior se divide en subintervalos, de tal manera que cada subintervalo $f(t)$ sea afín esto es, existen valores t_1, t_2, \dots, t_r tales que

$$f(t) = \delta_h + k_h t \quad \text{para } t_{h-1} \leq t \leq t_h, \quad h = 1, \dots, r+1$$

donde

$$t_0 = \underline{t}, \quad t_{r+1} = \bar{t} \quad \text{y } \delta_1, \dots, \delta_{r+1}; k_1, \dots, k_{r+1} \text{ son constantes.}$$

La función $f(t)$ es una *pieza lineal continua* si $\delta_h + k_h t_h = \delta_{h+1} + k_{h+1} t_h \quad \forall h = 1, \dots, r$.

k_h es la pendiente de la pieza lineal $f(t)$ en el intervalo t_{h-1} a t_h , para $h = 1, \dots, r+1$.

Teorema 2.15

El valor objetivo óptimo en un *problema de programación lineal paramétrico del lado derecho*, en el cual la función objetivo se minimiza es una función convexa de piezas lineales del parámetro.

Demostración.

$f(t)$ es una función de t que muestra el valor objetivo óptimo de (2.2) y $[t, \bar{t}]$ es el rango de valores de t en el cual el mismo problema es factible. Se considera que $f(t)$ es finita sobre $[t, \bar{t}]$. Sean t_1 y t_2 dos puntos cualesquiera en $[t, \bar{t}]$, y x_1, x_2 soluciones óptimas de (2.2) cuando $t = t_1$ y $t = t_2$ respectivamente.

Entonces $Ax_1 = b + t_1 b^*, x_1 \geq 0$; $Ax_2 = b + t_2 b^*, x_2 \geq 0$, y $f(t_1) = cx_1, f(t_2) = cx_2$.

Se define $0 \leq \alpha \leq 1$ y $x(\alpha) = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$.

De lo anterior

$$Ax(\alpha) = b + (\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)b^*, x(\alpha) \geq 0.$$

Por lo tanto $x(\alpha)$ es una solución factible para (2.2) si $t = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2$.

Es posible que $x(\alpha)$ no sea una solución óptima de (2.2) para el valor de t . Como (2.2) es un problema de minimización, $f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2)$, el valor óptimo en éste será menor o igual que el valor objetivo de cualquier solución factible para éste valor de t . Entonces

$$f(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \leq cx(\alpha) = \alpha(cx_1) + (1-\alpha)cx_2 = \alpha f(t_1) + (1-\alpha)f(t_2).$$

Así $f(t)$ es una función convexa de piezas lineales de t . ■

2.3.2 Ejemplo

Obtener todos los valores reales de $t \geq 0$ que dan solución al siguiente problema,

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y + 5z$$

sujeto a

$$x + 2y + z \leq 430 + 500t$$

$$3x + 2z \leq 460 + 100t$$

$$x + 4y \leq 420 - 200t$$

$$x, y, z \geq 0$$

SOLUCIÓN

Tomando $t=t_0=0$ $t=0$, se resuelve el problema

$$\text{Maximizar } z = 3x + 2y + 5z$$

sujeto a

$$x + 2y + z \leq 430$$

$$3x + 2z \leq 460$$

$$x + 4y \leq 420$$

$$x, y, z \geq 0$$

La solución óptima se muestra en la tabla siguiente.

Ejemplo	max						(Final) Iteration No: 3
Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6	Solution
z	4.00	0.00	0.00	1.00	2.00	0.00	1350.00
1) x2 y	-0.25	1.00	0.00	0.50	-0.25	10.00	100.00
2) x3 z	1.50	0.00	1.00	0.50	0.50	10.00	230.00
3) sx6	2.00	0.00	0.00	-2.00	0.00	20.00	20.00
+/-=(x+ s/S=slack/Surplus R=artif '=upper bd =-inv(B)							

Tabla 2.1

$${}^a X_B = \begin{bmatrix} y \\ z \\ sx_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 230 \\ 20 \end{bmatrix} \quad B_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el primer valor crítico t_1 se obtiene $B_0^{-1}b(t) \geq 0$.

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ sx_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 430 + 500t \\ 460 + 100t \\ 420 - 200t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 + 225t \\ 230 + 50t \\ 20 - 1100t \end{bmatrix}$$

resolviendo las desigualdades anteriores y utilizando las expresiones (2.4) y (2.5) se obtiene,

\bar{b}_0	\bar{b}_0^*
100	225
230	50
20	-1100

Tabla 2.2

$-\bar{b}_0/\bar{b}_0^*$	
$\bar{b}_0^* < 0$	$\bar{b}_0^* > 0$
	$-100/225 = -0.44$
	$-230/50 = -4.6$
$-20/-1100 = 0.018$	
<i>Mínimo</i> = $\bar{t} = 0.018$	<i>Máximo</i> = $\underline{t} = -0.44$

Tabla 2.3

entonces el intervalo de t es

$$-0.44 \leq t \leq 0.018.$$

En $t = \bar{t} = 0.018$ la desigualdad que representa la variable sx_6 es igual a cero, entonces para cualquier valor de $t > 0.018$ sx_6 tomará un valor negativo. Es necesario saber que sucede cuando $t > 0.018$, por lo tanto, se utiliza el método simplex dual siendo sx_6 la variable que sale, para lo cual se utilizan operaciones matriciales y cuyo algoritmo se muestra en el apéndice.

- Base para $t = t_j = 0.018$

$${}^0X_B = \begin{bmatrix} y \\ z \\ sx_6 \end{bmatrix}$$

y los costos de estas variables básicas se representan por,

$$C_B = [2 \ 5 \ 0]$$

$C_B B_0^{-1} = [1 \ 2 \ 0]$ y $(z_j - c_j)$ para $j = 1, 4, 5$ están determinadas por

$$\{C_B B_0^{-1} P_j - c_j\} = [1 \ 2 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - [3 \ 0 \ 0] = [4 \ 1 \ 2].$$

Sea $x_r = sx_6$ y se calcula α'_j para $j = 1, 4, 5$

$(\alpha_6^1 \ \alpha_6^4 \ \alpha_6^5) = (\text{renglón de } B_0^{-1} \text{ asociado con } sx_6) (P_1 \ P_4 \ P_5)$

$$(\alpha_6^1 \ \alpha_6^4 \ \alpha_6^5) = [-2 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [2 \ -2 \ 1],$$

$\theta = \text{mínimo} \left\{ -, \left| -\frac{1}{2} \right|, - \right\} = \frac{1}{2}$, por lo tanto entra la variable sx_6 .

Sea $i = 1$ y se calcula B_1^{-1} ,

$$\alpha^4 = B_0^{-1} P_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \xi = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -0 \\ +1 \end{bmatrix} \left(\frac{-1}{-2} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1} = E B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

para obtener el valor crítico t_2 se calcula

$$B_1^{-1}b(t) \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} y \\ z \\ sx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 430 + 500t \\ 460 + 100t \\ 420 - 200t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 - 50t \\ 230 + 50t \\ -10 + 550t \end{bmatrix}$$

resolviendo las desigualdades anteriores y utilizando las expresiones (2.4) y (2.5) se obtiene,

\bar{b}_1	\bar{b}_1^*
105	-50
230	50
-10	550

Tabla 2.4

$-\bar{b}_i/\bar{b}_i^*$	
$\bar{b}_i^* < 0$	$\bar{b}_i^* > 0$
$-105/-50=2.1$	
	$-230/50=-4.6$
	$10/550=0.018$
<i>Mínimo</i> $= \bar{t} = 2.1$	<i>Máximo</i> $= \underline{t} = 0.018$

Tabla 2.5

Entonces el nuevo intervalo de t es

$$0.018 \leq t \leq 2.1$$

- Base para $t = t_2 = 2.1$

$$X_B = \begin{bmatrix} y \\ z \\ 5x_4 \end{bmatrix}$$

y los costos de estas variables básicas se representan por,

$$C_B = [2 \ 5 \ 0]$$

$C_B B_1^{-1} = \left[0 \ \frac{5}{2} \ \frac{1}{2} \right]$ y $(z_j - c_j)$ para $j = 1, 5, 6$ están determinadas por

$$\{C_B B_1^{-1} P_j - c_j\} = \left[0 \ \frac{5}{2} \ \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [3 \ 0 \ 0] = \left[5 \ \frac{5}{2} \ \frac{1}{2} \right]$$

Sea $x_r = y$ y se calcula α_j' para $j = 1, 5, 6$

$$(\alpha_2^1 \ \alpha_2^5 \ \alpha_2^6) = (\text{renglón de } B_1^{-1} \text{ asociado con } y) (P_1 \ P_3 \ P_6)$$

$$(\alpha_2^1 \ \alpha_2^5 \ \alpha_2^6) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

como todas las $\alpha_i' \geq 0$, entonces no hay solución factible para $t > 2.1$.

La solución es,

t	x	y	z	z
$-0.44 \leq t \leq 0.018$	0	$100 + 225t$	$230 + 50t$	$1350 + 700t$
$0.018 \leq t \leq 2.1$	0	$105 - 50t$	$230 + 50t$	$1360 + 150t$
$t > 2.1$	No hay solución factible.			

Tabla 2.6

Comportamiento de la función objetivo

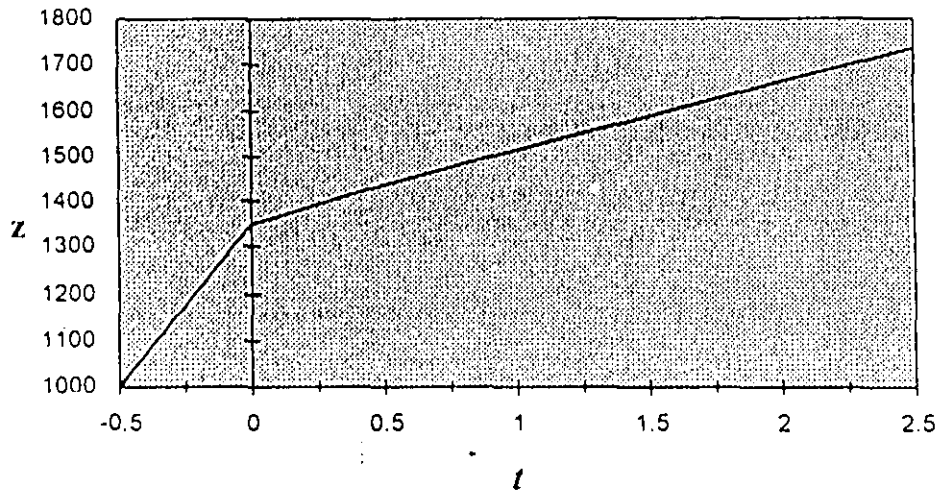


Figura 2.4

2.3.3 Aplicación a un problema de minimización cóncava

Considerando los resultados de la programación lineal paramétrica el valor óptimo de $[Q(u)]$ se encuentra representado por una función convexa $\varphi(u)$ que es afín en ciertas piezas. El dominio de $\varphi(u)$ es el politopo,

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^k : \varphi(u) < +\infty\},$$

contenido en :

$$\eta_i^- \leq u_i \leq \eta_i^+,$$

donde

$$\eta_i^- = \min \{p^i y \mid (y, x) \in D, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k\},$$

$$\eta_i^+ = \max \{p^i y \mid (y, x) \in D, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^k\}.$$

La pieza en la cual $\varphi(u)$ es afín es un politopo Π se conoce como *pieza lineal* de $\varphi(u)$. Existe una familia P de politopos Π de tal manera que $\Omega = \bigcup \{\Pi : \Pi \in P\}$, es decir, que el dominio se divide en subregiones lo cual es consecuencia de que la función objetivo sea monótona.

Otro politopo importante para la solución de $[Q(u)]$ es el generado por la restricción $y \in S$ definido como,

$$p(S) = \{u \in \mathbb{R}^k : u_i = p^i y, i=1, 2, \dots, k \text{ y } y \in S\};$$

entonces la solución total es la intersección de $p(S)$ con los politopos Π .

El siguiente teorema muestra que los problemas de minimización cóncava que cumplen con *la propiedad de rango r* pueden representarse a través de una proposición paramétrica.

Teorema 2.16

Sea V el conjunto de todos los vértices de los politopos $\Pi_u = \Pi \cap p(S)$, $\Pi \in \mathbb{R}$, y para cada $u \in V$, sea $z^u = (y^u, x^u)$ una solución básica óptima de $[Q(u)]$.

Si

$$u^* \in \arg \min \{f(z^u) : u \in V\}$$

entonces z^{u^*} resuelve $[P]$.

Demostración.

Si para cualquier $u \in \Omega$ se indica el conjunto de todos los puntos $z = (y, x)$ que son soluciones óptimas de $[Q(u)]$ por Z_u , entonces $f(z) = f(z')$ para todo $z, z' \in Z_u$. *La propiedad de rango r* implica lo siguiente :

$$p'(y' - y) = 0, \quad i=1, 2, \dots, k \text{ y } c(x' - x) \geq 0 \text{ implica } f(z') \geq f(z)$$

$$p'(y - y') = 0, \quad i=1, 2, \dots, k \text{ y } c(x - x') \geq 0 \text{ implica } f(z) \geq f(z'),$$

entonces $f(z) = f(z')$.

Se define la función $F(u)$ sobre Ω para cada $u \in \Omega$, $F(u) = f(z)$ donde z es cualquier punto en Z_u .

Sea Π cualquier pieza de $\varphi(u)$ y sea $u = \alpha u' + (1 - \alpha)u''$ para $u', u'' \in \Pi$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Si $z' = (y', x') \in Z_{u'}$ y $z'' = (y'', x'') \in Z_{u''}$ entonces, $z = (y, x)$ con $y = \alpha y' + (1 - \alpha)y''$ y $x = \alpha x' + (1 - \alpha)x''$ donde x satisface

$$cx = \alpha cx' + (1 - \alpha)cx'' = \alpha \varphi(u') + (1 - \alpha)\varphi(u'') = \varphi(u),$$

es decir $z \in Z_u$, y debido a que $f(z)$ es una función cuasicóncava,

$$F(u) = f(z) \geq \min \{f(z'), f(z'')\} = \min \{F(u'), F(u'')\}.$$

Por lo tanto, la función $F(u)$ es cóncava sobre cada pieza $\Pi \in \mathcal{R}$. Además como ya se explicó, una función cóncava logra su mínimo sobre cualquier politopo en un vértice de éste, en este caso se trata del politopo $\Pi \cap p(S)$. Como consecuencia el mejor valor de u se define como

$$u^* \in \arg \min \{f(z'') : u \in \Pi \cap p(S)\}.$$

Considerando cualquier solución factible de [P], es decir, cualquier $z \in D$ tal que $z = (y, x)$ con $y \in S$, $p' y = u_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, y la definición de $z'' = (y'', x'')$ como una solución óptima de [Q(u)] se tiene

$$p'(y - y'') = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{y} \quad c(x - x'') \geq 0.$$

Como $z'' \in D$, la condición de rango r implica

$$f(z) \geq f(z'') \geq f(z''^*),$$

comprobando así la optimidad global de z''^* . ■

2.4 EL PROBLEMA DE TRANSPORTE PARAMÉTRICO ASOCIADO A [PPT (k)]

El problema [PPT (k)] es un problema de minimización cóncava que cumple con la propiedad de rango r y por lo tanto se asocia a él un problema lineal paramétrico de transporte como se explica a continuación.

Como ya se definió el Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT (k)] es el siguiente :

$$[\text{PPT (k)}] \quad \text{Minimizar} \quad z = g(y_1, \dots, y_k) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{balance de las fábricas}),$$

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{demanda en almacenes}),$$

$$y_i \leq s_i \quad i = 1, \dots, k \quad (\text{capacidad en la fábrica } i),$$

$$x_{ij}, y_i \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{condición de no negatividad}),$$

donde

$$z = (y, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times m},$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k,$$

$$x = \{x_{ij}\} \in \mathbb{R}^{k \times m}.$$

La función objetivo

$$f(z) = g(y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij},$$

cumple con la propiedad de rango r para los vectores $p^i = e^i, i=1,2,\dots,k$ y $c = \{c_{ij}\} \in \mathbb{R}^{k \times m}$, donde e^i es el i -ésimo vector unitario de \mathbb{R}^k .

Entonces, para $z' = (y', x')$ se tiene

$$f(z') = g(y') + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x'_{ij} \geq g(y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} = f(z)$$

y,

$$e^i(y' - y) = y'_i - y_i = 0, \quad i=1,2,\dots,k \quad \text{y}$$

$$c(x' - x) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} (x'_{ij} - x_{ij}) \geq 0.$$

Así, [PPT (k)] es un problema de minimización cóncava que satisface la propiedad de rango r .

Un resultado interesante es que $p^i = e^i$, entonces $p^i y = y_i$, para toda $i=1,2,\dots,k$ lo cual indica que para $z = (y, x)$ y $z' = (y', x')$ $y=y'$, es decir, que la parte no lineal no varía y por lo tanto sólo se considera la parte lineal de la función objetivo dando como resultado el siguiente Problema de Transporte Paramétrico [PT (y)] asociado a [PPT (k)].

$$\begin{aligned}
 \text{[PT (y)]} \quad & \text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i \quad i = 1, \dots, k, \\
 & \sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m, \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.
 \end{aligned}$$

El valor óptimo en [PT (y)] se indica por $\varphi(y)$. Se cumple que, $\varphi(y) < +\infty$ si y sólo si y pertenece al simplex de dimensión $(k-1)$

$$\Omega = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_k) : \sum_{i=1}^k y_i = s, y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k \right\} \subset \mathbb{R}_+^k.$$

La familia P de piezas lineales Π de $\varphi(y)$ es tal que $\Omega = \cup \{ \Pi : \Pi \in P \}$. Además se observa que $S = \{ y \in \mathbb{R}_+^k : y_i \leq s_i, i = 1, 2, \dots, k \}$ y $(p^1 y, p^2 y, \dots, p^k y) = y$, siendo así el politopo de restricciones $p(S) = S$.

CAPÍTULO 3

REDES Y [$PT(y)$]

El problema paramétrico de [$PPT(k)$] es un problema de transporte, es decir, una red para la cual cada solución factible es un árbol de expansión. Lo anterior permite que el problema paramétrico obtenido se analice desde la perspectiva de redes. Esta estructura ofrece ciertas ventajas para la obtención de las piezas lineales de la función que representa el valor óptimo de [$PT(y)$], y de los vértices de éstas con el politopo formado por las restricciones de capacidad. Por ello, en este capítulo se presentan conceptos sobre redes, árbol de expansión y propiedades que son aplicables a [$PPT(3)$] para obtener su solución a través del cálculo de piezas lineales y vértices.

3.1 REDES Y ÁRBOL DE EXPANSIÓN

En el capítulo uno se mostró que la representación gráfica del problema de transporte corresponde a una red como lo muestra la figura 1.1. Entonces en general, una red es una gráfica formada por nodos (puntos) y arcos (flechas) a través de los cuales circula un flujo. A continuación se muestra la definición formal de una red.

Definición 3.1

Una red consiste de dos conjuntos A , N y una función. El conjunto A está formado por los arcos (líneas, ramas, flechas) y el conjunto N por los nodos (vértices o puntos). La función $F: A \rightarrow N \times N$ asigna a cada $j \in A$ una pareja $(i, i') \in N \times N$ tal que $i \neq i'$, se considera que $N \neq \emptyset$.

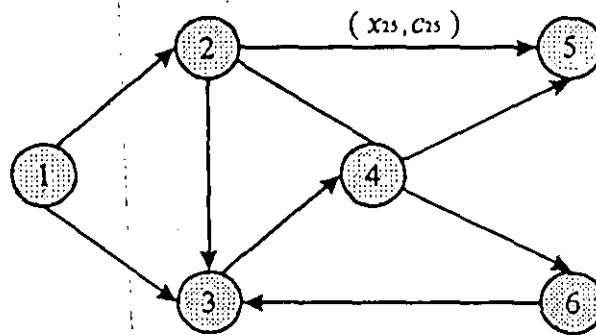


Figura 3.1 Una red.

Como se puede ver en la figura 3.1 una red es una gráfica en la cual los nodos (círculos) tienen un número para identificarlos, los arcos (flechas) indican la unión entre dos nodos y pueden ser dirigidos si son flechas que indican la dirección y no dirigidos si

son sólo líneas . Si una red tiene arcos dirigidos se conoce como gráfica dirigida en caso contrario es no dirigida. Los arcos es el medio por el cual se indica que un flujo pasa de un nodo a otro y éste se representa como x_{ij} para el flujo entre los nodos i y j . Otro dato que también se puede incluir en cada arco es el costo unitario del flujo que pasa por él y se denota como c_{ij} para los nodos i, j . En la figura 3.1 se muestran la notación del flujo y su costo entre los nodos 2 y 5. Cuando todos los nodos de una red están conectados la red es conectada o conexa.

Analizando un poco más los nodos se tiene que cuando de un nodo sólo salen arcos éste se llama nodo fuente y si solamente llegan los arcos se llama nodo sumidero. El número de arcos que salen de a un nodo i se denomina grado exterior del nodo y se representa como $g_e(i)$, el grado interior es el número de arcos que llegan al nodo i y se anota como $g_i(i)$, el grado del nodo i es la suma de su grados interior y exterior. Por ejemplo en la figura 3.1 el nodo 1 es nodo fuente y el nodo 5 es nodo sumidero ; los grados del nodo 3 son : $g_e(3)=1$, $g_i(3)=3$ y $g(3)=4$.

Otro aspecto que también se maneja en las redes es la cardinalidad de un conjunto, es decir, el número de elementos que tiene éste representado entre dos barras paralelas , por ejemplo en la red de la figura 3.1 la cardinalidad del conjunto de nodos N es $|N|=6$.

Un tipo especial de red que se maneja en este trabajo es la red bipartita que consiste en dividir el conjunto de nodos en dos subconjuntos, de tal manera que un nodo sólo pertenece a uno de ellos y los arcos conectan a dos nodos cada uno de diferente subconjunto, como lo muestran la siguiente definición y la figura 3.2 .

Definición 3.2

Una red G es bipartita si el conjunto de nodos N se divide en dos subconjuntos N_1 y N_2 con $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ de tal manera que cada arco $(i, j) \in A$ es tal que $i \in N_1, j \in N_2$ o $j \in N_1, i \in N_2$.

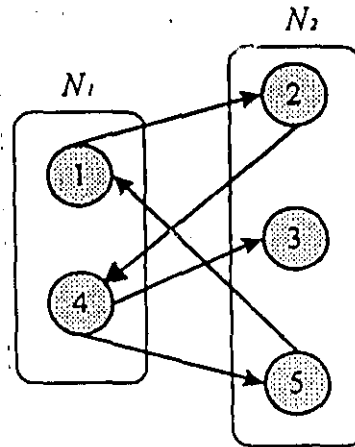
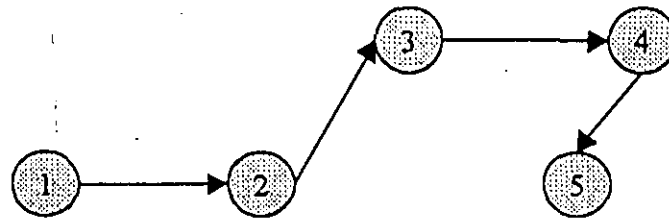
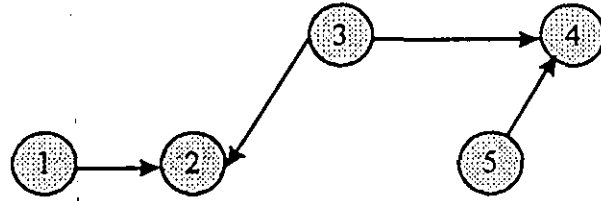


Figura 3.2 Red bipartita.

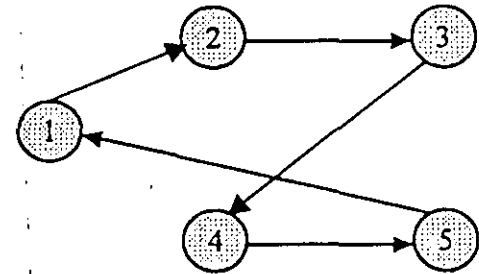
En las redes existen lo que se llaman trayectorias que consisten en indicar un camino a través de una sucesión de arcos sin que se repitan los nodos, por lo tanto, cada arco está dirigido "hacia" un nodo i y "fuera" de un nodo j . Si una trayectoria es cerrada se denomina circuito. En el caso de que una red presente una trayectoria en la que no todos los arcos están necesariamente dirigidos a un nodo específico recibe el nombre de cadena, y si ésta es cerrada se conoce como ciclo.



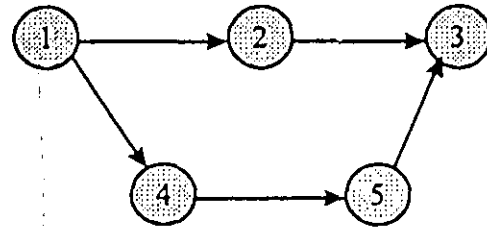
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.3 (a) Una trayectoria (b) Una cadena (c) Un circuito (d) Un ciclo .

Una función importante de los nodos es la denominada potencial, la cual se define a continuación.

Definición 3.3

Un potencial u en una red G es una función real definida sobre el conjunto de los nodos N ,

$$u : N \rightarrow \mathbb{R}.$$

El valor $u(i)$ es llamado el potencial en el nodo i . Con el arco $j \sim (i, i')$ (el arco que une los nodos i e i') se asocia la diferencia de potenciales

$$v(j) = u(i') - u(i) = \text{tensión a través de } j.$$

El signo de la diferencia depende de la orientación del arco. Así se define la función tensión v en A , y se denomina el diferencial del potencial u .

En la siguiente red, figura 3.4, los valores que se encuentran dentro de los nodos indican el potencial y el número que se encuentra sobre cada arco es la tensión que hay en ellos.

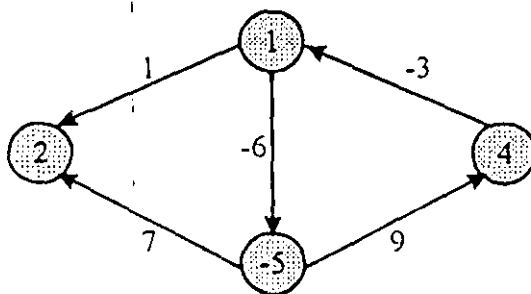


Figura 3.4 Ejemplo de la función de tensión.

En la solución del problema de transporte se presenta un tipo especial de red conocida como *árbol de expansión* ; para establecer su definición primero se tratarán conceptos sobre árbol y sus características.

Definición 3.4

Una red se dice árbol si es conectada y sin circuitos. Esta red tiene al menos un arco.

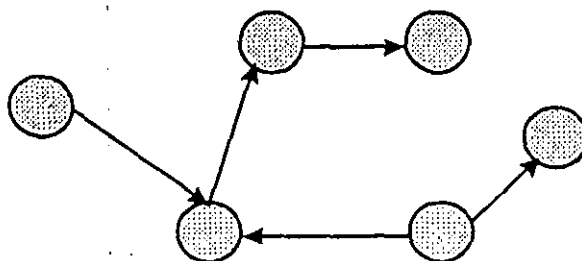


Figura 3.5 Un árbol.

Las características de un árbol se presentan en el teorema siguiente.

Teorema 3.5

Sea G una red (o gráfica) en la cual N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos, con $|N| = n > 2$. Las siguientes propiedades caracterizan a G como un árbol :

1. G es conectada y no tiene ciclos,
2. G tiene $n-1$ arcos y no tiene ciclos,
3. G es conectada y contiene exactamente $n-1$ arcos,
4. G no tiene ciclos , si se aumenta un arco a G entonces se crea un ciclo,
5. G es conectada y si uno de sus arcos se elimina la gráfica resultante es no conectada.

6: Existe una trayectoria única para cada par de nodos.

Demostración.

1 \Rightarrow 2 Si p denota el número de veces que aparece un arco conectando al mismo par de nodos, m denota el número de arcos y $v(G)$ es el número de ciclomático de G , que indica la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^m generado por los ciclos que en ella forman, entonces (1) implica:

que la gráfica sea conectada, entonces

$$p=1, \quad v(G)=m-n+p=0.$$

Así,

$$m=n-p=n-1.$$

2 \Rightarrow 3 Sea $v(G)=0$, $m=n-1$, por lo que

$$p=v(G)-m+n=1,$$

por lo tanto G está conectada.

3 \Rightarrow 4 Si $p=1$, $m=n-1$, entonces

$$v(G)=m-n+p=0.$$

De lo anterior se concluye que G no tiene ciclos. Es decir, si un arco se aumenta el número ciclomático es igual a 1, y hay exactamente un ciclo en la nueva red.

4 \Rightarrow 5 Si G no fuera conectada, entonces dos nodos a y b no estarían conectados, y un arco (a, b) se podría aumentar sin crear un ciclo, lo cual contradice (4).

Así $p=1$, $v(G)=0$, y por lo tanto $m=n-1$.

Si un arco se elimina, se obtiene una gráfica G' con

$$m' = n' - 2, \quad v(G') = 0.$$

Así

$$p' = v(G') - m' + n' = 2,$$

y G' no está conectada.

$5 \Rightarrow 6$ Para cualesquiera dos nodos a y b hay una trayectoria conectándolos, si G es conectada. Esta trayectoria es única.

$6 \Rightarrow 1$ Si G tiene un ciclo al menos un par de nodos estarían unidos por dos trayectorias distintas, lo cual contradice (6). ■

Otra característica de un árbol consiste en que cuenta con al menos dos nodos con grado igual a uno, estos nodos se llaman terminales.

Teorema 3.6

Sea G un árbol. Entonces G tiene al menos dos nodos terminales.

Demostración.

Suponiendo que G es un árbol con m nodos. G tiene $m-1$ arcos y la suma de los grados de los nodos que conforman esta red es $2(m-1)$. Si G no tiene al menos dos nodos terminales, es sencillo concluir que la suma de los grados de los nodos sería mayor que $2(m-1)$. ■

Ahora, corresponde definir a un árbol de expansión.

Definición 3.7

Un árbol de expansión de una red conectada G es un árbol que pasa por cada nodo de G .

En la figura siguiente los arcos más gruesos forman un árbol de expansión.

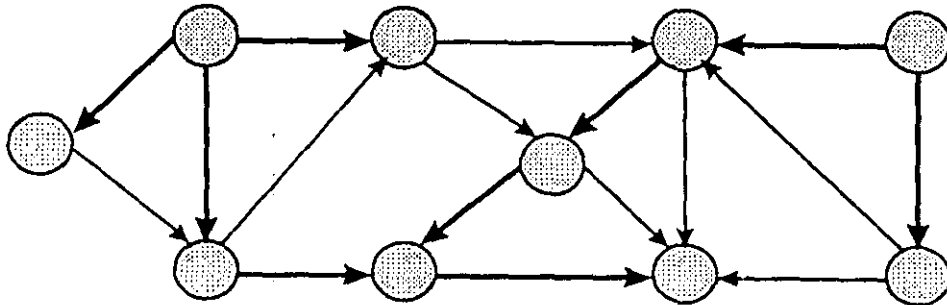


Figura 3.6 Un árbol de expansión.

3.2 EL MODELO DE TRANSPORTE Y EL ÁRBOL DE EXPANSIÓN

La relación que existe entre el modelo de transporte y el árbol de expansión consiste en que cada solución básica del modelo de transporte se encuentra representada por un árbol de expansión.

En las tablas que muestran una solución básica de un problema resuelto a través de la técnica de transporte se observa que las celdas básicas no forman ciclos.

La forma matricial del modelo de transporte es,

$$\text{Minimizar} \quad z = cx$$

sujeto a

$$Ax = d$$

$$x \geq 0$$

y, se tiene que

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}),$$

donde a_{ij} son las columnas de A las cuales se representan de la siguiente manera

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

e_i y e_{m+j} son vectores unitarios en \mathbf{R}^{m+n} con unos en la i -ésima y la $(m+j)$ -ésima posiciones respectivamente.

$$a_{ij} = e_i + e_{m+j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

← posición i

← posición $m+j$

Entonces, si se tiene la tabla siguiente

	r	s	t
p	a_{pr}		a_{pt}
n	a_{nr}	a_{ns}	
k		a_{ks}	a_{kt}

+

-

+

-

Tabla 3.1

en la cual las celdas (n,r) , (p,r) , (p,t) , (k,t) y (n,s) son básicas y si a éstas se les aumenta la celda (k,s) también básica se observa que se forma un ciclo y se obtiene,

$$a_{nr} - a_{pr} + a_{pl} - a_{kl} + a_{ks} - a_{ns} = (e_n + e_{m+r}) - (e_p + e_{m+r}) + (e_p + e_{m+l}) - (e_k + e_{m+l}) + (e_k + e_{m+s}) - (e_n + e_{m+s}) = 0.$$

El resultado anterior indica que los vectores a_{nr} , a_{pr} , a_{pl} , a_{kl} , a_{ks} , a_{ns} son linealmente dependientes, por lo tanto, no pueden estar en la base y se concluye que un conjunto de celdas básicas no puede formar un ciclo.

Teorema 3.8

En el problema de transporte a cada solución básica factible le corresponde un único árbol de expansión.

Demostración.

Un conjunto de celdas básicas no puede contener un ciclo, entonces, la solución debe ser un árbol o varios árboles de expansión (bosque). Suponiendo que la gráfica de la solución no contiene una celda en algún renglón i , en consecuencia, el renglón de la matriz asociada consiste únicamente de ceros, por lo cual no puede ser una base. Lo anterior indica que una base contiene al menos una celda en cada renglón y en cada columna.

Sean las celdas básicas (c,d) y (e,f) de la tabla siguiente.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

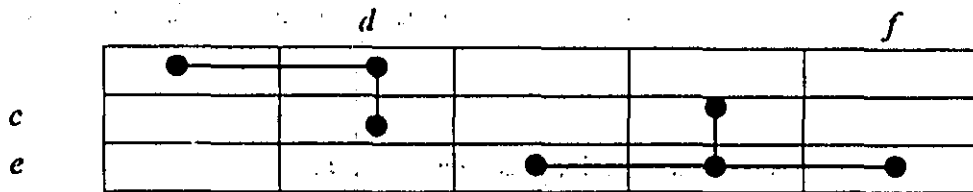


Tabla 3.2

Si la celda (e,d) es básica, entonces las celdas (c,d) y (e,f) están conectadas a través de la cadena básica $\{(c,d), (e,d), (e,f)\}$. Si la celda (e,d) no es básica el vector a_{ed} se puede representar como la combinación lineal de los vectores básicos siguientes:

$$a_{ed} = a_{rd} - a_{rs} + a_{ts} + \dots + a_{vu} - a_{vw} + a_{ew}.$$

Las celdas básicas (c,d) y (e,f) están conectadas por la cadena básica $\{(c,d), (r,d), (r,s), (t,s), \dots, (v,u), (e,w), (e,f)\}$. De lo anterior, se demuestra que cualesquiera dos celdas básicas están conectadas por una cadena en la gráfica de la base y, por lo tanto, la gráfica de la base es conexa.

La matriz de vectores asociados con un árbol de expansión tiene una submatriz triangular (superior) de orden $(m+n-1) \times (m+n-1)$ con unos sobre la diagonal. Como se sabe un árbol tiene al menos dos nodos terminales. Considerando un nodo terminal del árbol representado en la tabla 3.3 por la celda (p,q) , el vector $a_{pq} = e_p + e_{m+q}$ es el único vector del árbol con un elemento distinto de cero en el renglón p .

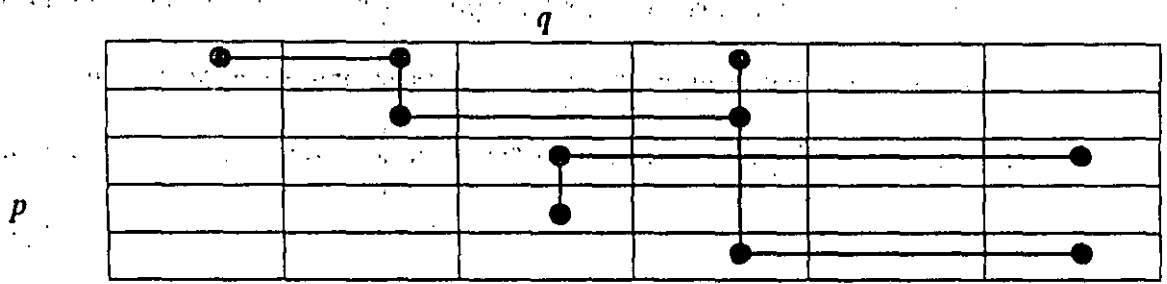


Tabla 3.3

Efectuando una permutación de renglones y columnas en la matriz T de $(m + n) \times (m + n - 1)$ de los vectores del árbol, de tal manera que este elemento distinto de cero esté en la última columna y el último renglón de la matriz. Entonces T es

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en donde T_1 es la matriz asociada con los vectores del árbol cuando se eliminan el renglón p y el vector a_{pq} . Entonces se obtiene un nuevo árbol conexo como se muestra a continuación,

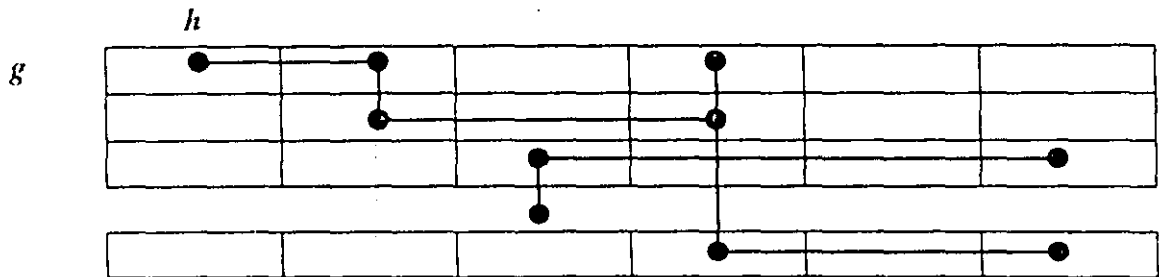


Tabla 3.4

Ahora, considérese el nodo terminal representado por la celda (g,h) . El único punto en la columna h es el terminal, entonces $a_{gh} = e_g + e_{m+h}$ es el único vector con un elemento distinto de cero en el renglón $m+1$. Efectuando permutaciones de renglones y columnas de tal manera que este elemento distinto de cero quede en el último renglón y la última columna de T_1 , se obtiene

$$T = \begin{bmatrix} T_2 & p & q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este proceso continúa. Eventualmente se obtiene una matriz triangular (superior) de orden $(m+n-1) \times (m+n-1)$ con unos sobre la diagonal y un renglón con $(m+n-1)$ componentes. Con lo anterior se demuestra que el rango de T es $(m+n-1)$ y en consecuencia, T junto con un vector artificial forman una base de A . ■

3.3 EL PROBLEMA [PT (y)]

A continuación se explica la estructura de red de [PT (y)] y como se aplica ésta en la obtención de las piezas lineales y sus vértices. El análisis que aquí se muestra corresponde al caso de tres fábricas ($k=3$).

3.3.1 Análisis del problema [PT (y)]

Al problema [PPT (k)] se le asoció un problema de transporte paramétrico denotado como [PT (y)], este problema se representa con una red bipartita denominada G la cual esta formada por dos conjuntos de nodos :

F_i : fábrica i -ésima $i= 1,2, \dots , k$

B_j : almacén j -ésimo $j= 1,2, \dots , m$

y un conjunto de arcos (i, j) conectando cada fábrica F_i con cada almacén B_j .

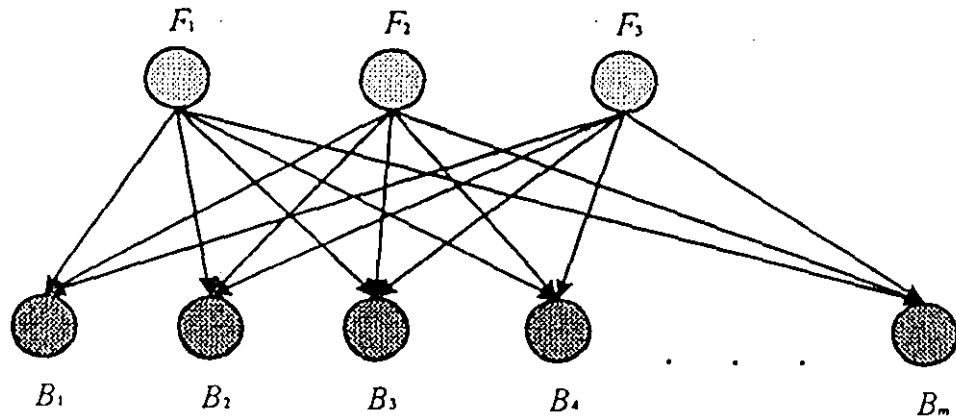


Figura 3.7 La gráfica bipartita asociada a [PT (y)] .

En G se identifica un conjunto de arcos E para el cual se tiene que :

G_E : es una subgráfica generada por un conjunto no vacío de arcos de G llamado E .

$g_E(B_j)$: es el grado de B_j en G_E (número de arcos incidentes a B_j).

$g_E(F_i)$: es el grado de F_i en G_E .

$$g_0(E) : \quad g_0(E) = \{i : g_E(F_i) = 1\}.$$

Este conjunto E tiene las características siguientes.

Definición 3.9

Un conjunto no vacío de arcos E de G se define como una etiqueta, si G_E es un árbol cubriendo todos los nodos F_i , $i=1, 2, \dots, k$ y existe un conjunto $N \in \{1, 2, \dots, m\}$ de tal manera que

$$g_E(B_j) \leq 2 \quad \forall j \in N \quad \text{y} \quad g_E(B_j) = 0 \quad \forall j \notin N, \quad (3.1)$$

entonces N se conoce como la base de la etiqueta E .

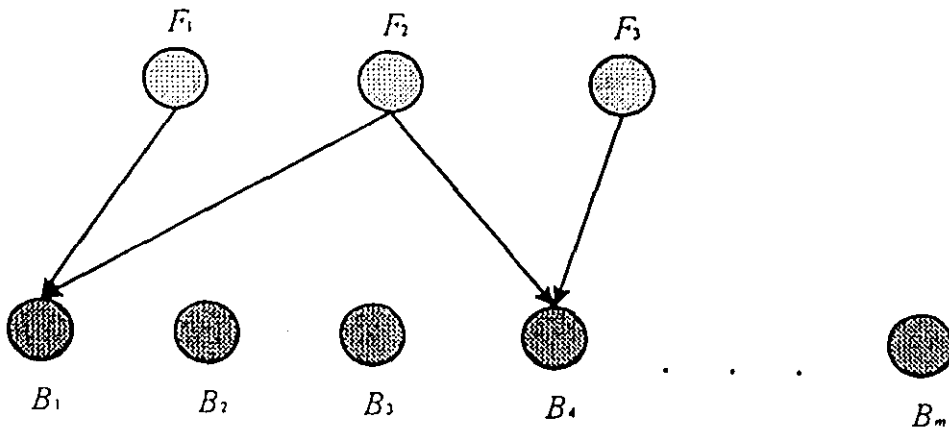


Figura 3.8 La etiqueta E de base $N = \{B_1, B_4\}$.

¿Cuántos nodos forman la base de la etiqueta E ?

Proposición 3.10

Si E es una etiqueta de base N y $g_j = g_E(B_j)$, $j = 1, 2, \dots, m$, entonces $1 \leq |N| \leq k-1$,

$$|g_0(E)| \geq 2 \text{ y } \sum_{j=1}^m g_j = k+b-1, \text{ con } b = |N|.$$

Demostración.

G_E es un árbol con $k+b$ nodos y con $k+m-1$ arcos, así $\sum_{j=1}^m g_j = k+b-1$. Además,

$k+b-1 \geq 2b$ y por lo tanto $1 \leq b \leq k-1$. Debido a que un árbol tiene al menos dos nodos terminales $|g_0(E)| \geq 2$. Por (3.1) B_j no puede ser un nodo terminal y por ello hay al menos dos nodos F_i tales que $g_E(F_i) = 1$. ■

Para el caso de tres fábricas las etiquetas que se tienen son las siguientes.

Definición 3.11

Un sistema E de la forma $E = \{h\}$ o $E = \{(h, \ell); (i_1, i_2, i_3)\}$, donde $h, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$, $h < \ell$ y (i_1, i_2, i_3) es una permutación de $\{1, 2, 3\}$, se le llama una etiqueta de [PT (y)].

Para cualquier etiqueta E , se define

$$Q(E) = \{(1, h), (2, h), (3, h)\},$$

$$N(E) = \{h\} \quad \text{si} \quad E = \{h\}$$

$$Q(E) = \{(i_1, h), (i_2, h), (i_2, \ell), (i_3, \ell)\},$$

$$N(E) = \{h, \ell\} \quad \text{si} \quad E = \{(h, \ell); (i_1, i_2, i_3)\}.$$

La etiqueta E al ser un árbol que cubre los nodos F_i necesariamente debe pertenecer a un árbol de expansión, de la red G como se establece a continuación.

Proposición 3.12

Sea T un árbol de expansión de G .

a) T contiene una única etiqueta E tal que

$$(1, 2, \dots, m) \setminus N = \bigcup_{i=1}^k J_i, \quad (3.2)$$

donde $N = \{j : g_T(B_j) = 2\}$ es la base de E y los conjuntos

$$J_i = \{j \in N : (i, j) \in T\}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.3)$$

no pertenecen a la etiqueta.

b) Para cualquier y que cumple con $\sum_{i=1}^k y_i = \sum_{j=1}^m b_j$ el sistema

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^k x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.5)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \notin T. \quad (3.6)$$

tiene una única solución $x = \{x_{ij}\}$ tal que para todo $(i, j) \in E$, $x_{ij} = \xi_{ij}(y)$ es una función afín de y y $x_{ij} = b_j$ para toda $j \in J_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Demóstración.

a) El conjunto de todos los $(i, j) \in T$ que cumplen con $g_T(B_j) \geq 2$ forman una etiqueta en T .

La etiqueta E no tiene algún $(i, j) \in T$ con $g_T(B_j) = 1$. E se forma por todos los $(i, j) \in T$ con $g_T(B_j) = 2$ porque de otra manera G_E sería desconectada.

Para el caso de $k=3$ se tiene :

$$\sum_{j=1}^m g_T(B_j) = \text{número de arcos en } T = (\text{número de nodos en } T) - 1 = (3+m) - 1 = m+2.$$

Como $1 \leq g_T(B_j) \leq 3, \forall j$, existen sólo dos posibilidades

1. $g_T(B_h) = 3$ para un nodo B_h , y $g_T(B_j) = 1, \forall j \neq h$,
2. $g_T(B_h) = g_T(B_l) = 2$ para dos nodos B_h y B_l , y $g_T(B_j) = 1, \forall j \neq h, l$.

En el primer caso, $E = \{h\}$ es la única etiqueta que satisface las condiciones establecidas. En el segundo caso, como T no contiene ciclos, hay una sola i , conocida como i_2 , tal que ambos $(i_2, h) \in T$ y $(i_2, l) \in T$. Entonces, considerando $h < l$ e indicando la i tal que $(i, h) \in T$ por i_1 y la otra i por i_3 , obteniéndose así la etiqueta única $E = \{(h, l); (i_1, i_2, i_3)\}$ que satisfacen las condiciones establecidas.

b) Esto se deriva de que los nodos B_j con $j \in \bigcup_{i=1}^k J_i$ son terminales de T y la matriz del sistema (3.4) y (3.5), donde se omiten todos los $(i, j) \notin T$, es triangular. ■

Como se sabe toda solución básica de $[PT(y)]$ se representa a través de un árbol de expansión, en el cual se encuentra una etiqueta. Esta solución es factible y óptima si se cumple con el sistema (3.4)-(3.6) y $x_{ij} \geq 0, i=1,2,\dots,k, j=1,2,\dots,m$.

Ahora, para los valores de y considérese el conjunto M formado por todos los números de la forma $\sum_{j \in J} b_j$ donde J es cualquier subconjunto de $\{1, 2, \dots, m\}$, M es finito.

Definición 3.13

Un vector $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega$ es regular si $y_i \in M, \forall i \in \{1, 2, 3\}$.

Lo anterior lleva a pensar que en una solución básica todos los arcos que forman una etiqueta llevan una cierta cantidad de productos, es decir, no pueden estar vacíos porque esto indicaría que algunos de los nodos involucrados no están conectados. Entonces, la demanda de un almacén de la etiqueta será proveída por dos o más fábricas pero no por una sola y por ello $y_i \in M$.

Proposición 3.14

Si $y \in \Omega$ es regular entonces para cualquier árbol de expansión T factible a [PT(y)] le corresponde la solución básica factible $x = \{x_{ij}\}$, que satisface la condición de $x_{ij} > 0 \forall (i,j) \in T$.

Demostración.

Si $(i,j) \in T \setminus E$ es el único arco de T conectando a B_j con algún F_i , se tiene que $x_{ij} = b_j$ para todos esos arcos (i,j) . Por lo tanto, si $x_{ij} = 0$ para algún $(i,j) \in E$ entonces se tiene que

$y_i \in M$ para al menos un $i \in \{1, 2, 3\}$, y por lo tanto y no es regular. ■

Para identificar los arcos que pertenecen a una etiqueta y los que no son parte de ella se utilizarán potenciales.

Sea una cadena K en G comenzando en uno de los nodos F_i , $i = 1, 2, \dots, k$, los arcos de K se pueden dividir en dos grupos K^+ (impar) y K^- (par), de tal manera que el primer arco (el incidente en el nodo inicial) pertenece a K^+ y cada dos arcos adyacentes pertenecen a diferentes grupos. Se define

$$\gamma(K) = \sum_{(i,j) \in K^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in K^-} c_{ij}.$$

Para $K = (i_1, j, i_2)$ $\gamma_j^{i_1 i_2} = \gamma(K)$,

$$\gamma_j^{i_1 i_2} = c_{i_1 j} - c_{i_2 j}.$$

Se interpreta $|\gamma_j^{i_1 i_2}|$ como la ganancia (si $\gamma_j^{i_1 i_2} < 0$) o la pérdida (si $\gamma_j^{i_1 i_2} > 0$) de preferir el arco (i_1, j) al arco (i_2, j) . Es útil notar que

$$\gamma_j^{i_1 i_2} = -\gamma_j^{i_2 i_1}, \quad \gamma_j^{i_1 i_2} = \gamma_j^{i_1 i_3} + \gamma_j^{i_3 i_2}.$$

Sea T un árbol de expansión de G y F_1 un nodo fijo, entonces para cada nodo F_i existe una única cadena K_i de F_1 a F_i . El número $\gamma(K_i)$, frecuentemente referido como el potencial del nodo dado en T , se definirá como v_i si el nodo es F_i , o w_j si el nodo es B_j .

Así, para cualquier árbol de expansión se define un conjunto de potenciales $\{v_i, i=1,2,3; w_j, j=1,2, \dots, m\}$ de tal manera que

$$v_i = 0$$

$$w_j - v_i = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T. \quad (3.7)$$

El resultado anterior lleva a la siguiente proposición.

Proposición 3.15

Si $y \in \Omega$ es regular entonces existe un árbol de expansión T tal que es el único óptimo para [PT (y)]. Este árbol de expansión se caracteriza por la existencia de un conjunto de potenciales $\{v_i, i=1, 2, 3; w_j, j=1, 2, \dots, m\}$ satisfaciendo

$$\begin{cases} w_j - v_i = c_{ij} & \forall (i, j) \in T \\ w_j - v_i < c_{ij} & \forall (i, j) \notin T. \end{cases}$$

Demostración.

Para cualquier árbol de expansión factible T y cualquier $(i, j) \notin T$, $\gamma(K_{ij}) = c_{ij} - w_j + v_i$, donde K_{ij} es el ciclo creado en T por unir (i, j) y puede suceder que nunca sea igual a cero. Considerando que y es regular. Para resolver [PT (y)] se obtiene un árbol de expansión T óptimo con un conjunto de potenciales satisfaciendo

$$w_j - v_i = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T, \quad (3.8)$$

$$w_j - v_i \leq c_{ij} \quad \forall (i, j) \notin T. \quad (3.9)$$

tomando en cuenta que $\gamma(K_{ij}) = c_{ij} - w_j + v_i \neq 0 \quad \forall (i, j) \notin T$, entonces la segunda desigualdad implica que

$$w_j - v_i < c_{ij} \quad \forall (i, j) \notin T. \quad (3.10)$$

De (3.8) se tiene $w_j - v_i = c_{ij}$ cuando $x_{ij} > 0$, así

$$cx = \sum_i \sum_j (w_j - v_i) x_{ij} = \sum_i v_i \sum_j x_{ij} - \sum_j w_j \sum_i x_{ij} = \sum_i v_i y_i - \sum_j w_j b_j$$

Por otra parte, por la proposición (3.14), para cualquier solución factible

$x' = \{x'_{ij}\}$ correspondiendo al árbol factible $T' \neq T$ se debe tener $x'_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in T'$, así $x'_{i_1 j_1} > 0$

para al menos un $(i_1, j_1) \notin T$. Lo anterior junto con (3.8) y (3.10) implica que

$$cx' = \sum_i \sum_j c_{ij} x'_{ij} > \sum_i \sum_j (w_j - v_i) x'_{ij} = \sum_i v_i \sum_j x'_{ij} - \sum_j w_j \sum_i x'_{ij} = \sum_i v_i y_i - \sum_j w_j b_j = cx.$$

Así $cx' > cx$, por lo que, x es estrictamente mejor que cualquier otra solución básica factible. ■

Entonces, si se tiene un árbol de expansión factible se tiene su etiqueta con la cual se describe una pieza lineal.

Teorema 3.16

a) Todo árbol de expansión factible, con potenciales $\{v_i, w_j\}$ y la etiqueta E , determina un politopo no vacío

$$\Pi = \{y \in \Omega : \xi_{ij}(y) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E\},$$

donde $\{\xi_{ij}(y), (i,j) \in E\}$ es la solución del sistema lineal (3.4) - (3.6).

b) Este politopo Π es una pieza lineal de $\varphi(y)$: la solución $x = \{x_{ij}\}$ del sistema (3.4) - (3.6) genera para toda $y \in \Pi$ una solución básica óptima de $[PT(y)]$; mientras el valor óptimo es una función afín

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^m w_j b_j - \sum_{i=1}^k v_i y_i, \quad y \in \Pi. \quad (3.11)$$

Demostración.

Sea T un árbol de expansión dual factible, $x = \{x_{ij}\}$ la solución básica asociada de [PT(y)], definida por (3.4) - (3.6) y la etiqueta \bar{E} de T . Las funciones $x_{ij} = \xi_{ij}(y)$ $\forall (i, j) \in T$ son afines, el sistema $\xi_{ij}(y) \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E$ define un politopo Π . Si para cada $j \in N$ se toma un arco arbitrario $(r(j), j) \in E$ y sea $x_{ij} = b_j$ para $i = r(j)$, $x_{ij} = 0, \forall i \neq r(j)$, entonces $x = \{x_{ij}\}$ satisface las ecuaciones (3.4) - (3.6), para $y_i = \sum_j \{b_j : r(j) = i\}$,

$i=1, 2, \dots, k$. En consecuencia Π es no vacío. Como la solución x es factible ($x \geq 0$),

entonces toda $y \in \Pi$ será también óptima para [PT(y)]. El valor óptimo de [PT(y)] es

$\varphi(y) = c^T x$ y como $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \notin T$, de (3.8) y (3.10) se tiene $c^T x = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (w_j - v_i) x_{ij}$, y

por (3.4) y (3.5) se da (3.11). ■

Hasta este momento se ha considerado que el problema es no degenerado. Aunque la degeneración ocurre en muchos problemas, se puede manejar un número pequeño positivo δ de tal manera que

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + j\delta^i.$$

Si $c = \{c_{ij}\}$ se reemplaza por $\bar{c} = \{\bar{c}_{ij}\}$ entonces $\gamma_j^{i'}$ se convierte en

$$\bar{\gamma}_j^{i'} = \gamma_j^{i'} + j(\delta^{i'} - \delta^{i_2}).$$

Por lo que cualquier $\bar{\gamma}(K)$ es un polinomio en δ no igual a cero y con un número finito de raíces. Se elige un δ_0 que corresponda a la menor de las raíces positivas y $\delta \in (0, \delta_0)$, así $\bar{\gamma}(K) \neq 0$ para cualquier cadena elemental.

3.3.2 Cálculo de las piezas lineales

Para obtener las piezas lineales es necesario calcular las etiquetas propias de los árboles de expansión que representan las soluciones básicas factibles de [PT (y)] .

Definición 3.17

Una etiqueta E de base N se define como *propia* si existe un conjunto de potenciales $\{v_i, w_j : i=1,2,3, j \in N\}$ que cumplen con

$$w_j - v_i = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E, \quad (3.12)$$

$$w_j - v_i < c_{ij}, \quad \forall (i,j) \notin E, j \in N. \quad (3.13)$$

Para el caso de $k=3$,

$$E = \{h\} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in N(E), (i, j) \in E, \text{ o}$$

$$E = \{(h, \ell); (i_1, i_2, i_3)\} \quad (h < \ell) \text{ con}$$

$$w_\ell - v_{i_1} < c_{i_1 \ell} \text{ y } w_h - v_{i_1} < c_{i_1 h}. \quad (3.14)$$

Por lo que cualquier $\bar{\gamma}(K)$ es un polinomio en δ no igual a cero y con un número finito de raíces. Se elige un δ_0 que corresponda a la menor de las raíces positivas y $\delta \in (0, \delta_0)$, así $\bar{\gamma}(K) \neq 0$ para cualquier cadena elemental.

3.3.2 Cálculo de las piezas lineales

Para obtener las piezas lineales es necesario calcular las etiquetas propias de los árboles de expansión que representan las soluciones básicas factibles de [PT (y)] .

Definición 3.17

Una etiqueta E de base N se define como *propia* si existe un conjunto de potenciales $\{v_i, w_j : i=1,2,3, j \in N\}$ que cumplen con

$$w_j - v_i = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E, \quad (3.12)$$

$$w_j - v_i < c_{ij}, \quad \forall (i,j) \notin E, j \in N. \quad (3.13)$$

Para el caso de $k=3$,

$$E = \{h\} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, j \in N(E), (i,j) \in E, \text{ o}$$

$$E = \{(h, \ell); (i_1, i_2, i_3)\} \quad (h < \ell) \text{ con}$$

$$w_\ell - v_{i_1} < c_{i_1, \ell} \quad \text{y} \quad w_h - v_{i_1} < c_{i_1, h}. \quad (3.14)$$

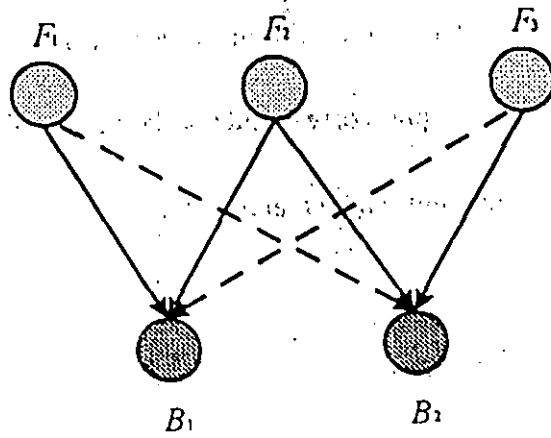


Figura 3.9 Una etiqueta propia.

Pero ¿cómo se determina una etiqueta propia ?

Proposición 3.18

Para todo par (h, ℓ) con $h < \ell$ hay una única permutación (i_1, i_2, i_3) que determina una etiqueta propia $E = \{(h, \ell) ; (i_1, i_2, i_3)\}$. Esta permutación es la única que satisface

$$\gamma_{ht}^{i_1} < \gamma_{ht}^{i_2} < \gamma_{ht}^{i_3} \tag{3.15}$$

donde

$$\gamma_{ht}^i = c_{ih} - c_{it}$$

Demostración.

Por (3.12),

$$w_j - v_{i_1} = c_{j_1 \ell} - c_{i_1 j} + c_{i_1 h} \qquad w_h - v_{i_1} = c_{i_1 h} - c_{i_2 \ell} + c_{i_3 \ell}$$

mientras (3.15) es equivalente a

$$c_{i_1,h} - c_{i_1,\ell} < c_{i_2,h} - c_{i_2,\ell} < c_{i_3,h} - c_{i_3,\ell},$$

es decir ;

$$c_{i_2,\ell} - c_{i_2,h} + c_{i_1,h} < c_{i_1,\ell} \quad , \quad c_{i_2,h} - c_{i_2,\ell} + c_{i_3,\ell} < c_{i_3,h}$$

La primer desigualdad en (3.15) significa

$$\gamma_{h\ell}^{i_1} < \gamma_{h\ell}^{i_2} \quad \text{o} \quad \gamma_{h\ell}^{i_1} = \gamma_{h\ell}^{i_2} \quad \text{y} \quad i_1 < i_2. \quad (3.16)$$

Así, (3.15) \Leftrightarrow (3.14). ■

La permutación (i_1, i_2, i_3) corresponde al orden del conjunto $\{\gamma_{h\ell}^i, i = 1, 2, 3\}$ considerando valores cada vez más grandes, tomando como base los valores de i .

Para toda etiqueta propia E con potenciales $\{v_i, i=1, 2, 3; w_j, j= 1, 2, \dots, m\}$ se definen los conjuntos $J_q(E)$, $q= 1, 2, 3$ tal que

$$J_q(E) = \{j \in (1, 2, \dots, m) \setminus N(E) : v_q + c_{qj} < v_i + c_{ij} \forall i \neq q\}. \quad (3.17)$$

A una etiqueta propia se pueden aumentar los arcos del conjunto J_q y así formar un árbol de expansión.

Proposición 3.19

Sea E una etiqueta propia y $T(E)$ el árbol de expansión obtenido por aumentar a E todos los arcos (q,j) tales que $j \in J_q$, $q= 1, 2, 3$.

Demostración.

Considerando que E es una etiqueta propia entonces existen potenciales v_i , $i=1, 2, 3$; w_j , $j \in N(E)$ cumpliendo con (3.7) y (3.14). Como ya se definió w_j satisface para todo $j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus N(E)$

$$w_j - v_i = c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in T(E), \quad (3.18)$$

$$w_j - v_i < c_{ij}, \quad \forall (i,j) \notin T(E). \quad (3.19)$$

Sea $j \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus N(E)$ el cual pertenece a algún $J_q(E)$, $q=1,2,3$,

es decir ,

$$J_p(E) \cap J_q(E) = \emptyset \quad (p \neq q), \quad \bigcup_{q=1}^3 J_q(E) = \{1, 2, \dots, m\} \setminus N(E).$$

Considerando lo anterior hay una única $q \in \{1, 2, 3\}$ tal que $j \in J_q(E)$. De acuerdo a (3.17),

$v_q + c_{qj} < v_i + c_{ij} \quad \forall i \neq q$ y estableciendo que

$$w_j = v_q + c_{qj}, \quad (3.20)$$

se tiene que $w_j < v_i + c_{ij} \quad \forall i \neq q$ esto demuestra a (3.19). ■

Para $E = \{ (h, \ell) ; (i_1 i_2 i_3) \}$, se tiene

$$(v_{i_1} + c_{i_1 j}) - (v_{i_2} + c_{i_2 j}) = (v_{i_1} - v_{i_2}) + (c_{i_1 j} - c_{i_2 j}) = -\gamma_h^{i_1 i_2} + \gamma_j^{i_1 i_2} ;$$

$$(v_{i_1} + c_{i_1 j}) - (v_{i_3} + c_{i_3 j}) = (v_{i_1} - v_{i_3}) + (c_{i_1 j} - c_{i_3 j}) = -\gamma_h^{i_1 i_3} - \gamma_{\ell}^{i_1 i_3} + \gamma_j^{i_1 i_3} ;$$

$$(v_{i_2} + c_{i_2 j}) - (v_{i_3} + c_{i_3 j}) = (v_{i_2} - v_{i_3}) + (c_{i_2 j} - c_{i_3 j}) = -\gamma_{\ell}^{i_2 i_3} + \gamma_j^{i_2 i_3}.$$

Por lo tanto, para $E = \{ (h, \ell) : (i_1 i_2 i_3) \}$ los conjuntos $J_q(E)$ para $q=1,2,3$ son,

$$J_{i_1}(E) = \{ j \neq h, \ell : \gamma_j^{i_1 i_2} < \gamma_h^{i_1 i_2}, \gamma_j^{i_1 i_3} + \gamma_i^{i_1 i_2} < \gamma_h^{i_1 i_2} \} \quad (3.21)$$

$$J_{i_2}(E) = \{ j \neq h, \ell : \gamma_j^{i_2 i_1} < \gamma_h^{i_2 i_1}, \gamma_j^{i_2 i_3} < \gamma_i^{i_2 i_1} \} \quad (3.22)$$

$$J_{i_3}(E) = \{ 1, 2, \dots, m \} \setminus (J_{i_1}(E) \cup J_{i_2}(E) \cup \{h, \ell\}). \quad (3.23)$$

Si $\ell=h$ y $\gamma_h^{i_1 i_2} + \gamma_h^{i_1 i_3} = \gamma_h^{i_1 i_3}$. Entonces, $E = \{h\}$ y

$$J_1(E) = \{ j \neq h : \gamma_j^{12} < \gamma_h^{12}, \gamma_j^{13} < \gamma_h^{13} \} \quad (3.24)$$

$$J_2(E) = \{ j \neq h : \gamma_j^{21} < \gamma_h^{21}, \gamma_j^{23} < \gamma_h^{23} \} \quad (3.25)$$

$$J_3(E) = \{ 1, 2, \dots, m \} \setminus (J_1(E) \cup J_2(E) \cup \{h\}). \quad (3.26)$$

Considerando lo anterior, las piezas lineales se calculan de la forma siguiente.

Teorema 3.20

Para el valor óptimo de la función $\varphi(y)$ de [PT(y)],

a) Toda etiqueta $E = \{h\}$ determina una pieza lineal $\Pi(E)$, tal que

$$\Pi(E) = \left\{ y \in \Omega : y_i - \sum_{j \in J_i(E)} b_j \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\}, \quad (3.27)$$

con $J_i(E)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ definida por (3.24), (3.25) y (3.26).

b) Toda etiqueta propia $E = \{ (h, \ell) : (i_1 i_2 i_3) \}$ determina una pieza lineal, $\Pi(E)$, tal que

$$\Pi(E) = \left\{ y \in \Omega : 0 \leq y_i - \sum_{j \in J_{1i}(E)} b_j \leq b_h, 0 \leq y_{i_1} - \sum_{j \in J_{1_1}(E)} b_j \leq b_{i_1} \right\} \quad (3.28)$$

con $J_q(E)$, $q \in \{1, 2, 3\}$ definido por (3.21), (3.22) y (3.23).

Demostración.

Para cualquier etiqueta propia E , $T(E)$ indica el árbol de expansión obtenido de aumentar a E todos los arcos (q, j) tal que $j \in J_q(E)$, $q = 1, 2, 3$.

a) Si $E = \{h\}$ entonces para cualquier $y \in \Pi(E)$ la solución básica, $x = \{x_{ij}\}$, de [PT(y)] correspondientes a $T(E)$ se da por

$$\begin{cases} x_{ij} = b_j, & \forall j \in J_i(E), \quad i = 1, 2, 3 \\ x_{ih} = y_i - \sum_{j \in J_i(E)} b_j, & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

De (3.27) se tiene que $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, así $x = \{x_{ij}\}$ es una solución factible de [PT(y)].

Toda x_{ij} es una función afín de y y $\varphi(y) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$ es una función lineal de x , de lo cual se obtiene que $\varphi(y)$ es una función afín de y para $y \in \Pi(E)$.

b) Si $E = \{(h, \ell); (i_1 i_2 i_3)\}$ entonces para cualquier $y \in \Pi(E)$ la solución básica correspondiente a $T(E)$ se da por

$$\begin{cases} x_{i,q} = b_j & \forall j \in J_q(E), \quad q=1,2,3 \\ x_{i,h} = y_i - \sum_{j \in J_h(E)} b_j \\ x_{i,h} = b_h - x_{i,h} \\ x_{i,\ell} = y_i - \sum_{j \in J_\ell(E)} b_j \\ x_{i,\ell} = b_\ell - x_{i,\ell} \end{cases}$$

De (3.28) se tiene $0 \leq x_{i,h} \leq b_h$ y $0 \leq x_{i,\ell} \leq b_\ell$, así $x_{i,h} \geq 0$ y $x_{i,\ell} \geq 0$. Y como resultado $x = \{x_{ij}\}$ es factible. Además como toda x_{ij} es una función afin de y , entonces $\varphi(y)$ es una función afin de y en $\Pi(E)$. ■

El número de piezas lineales a calcular esta determinado por el número de almacenes que se tengan, por lo que se trata de un número de combinaciones que depende del valor fijo m . Las piezas lineales referidas por $\Pi(E)$ definidas por (3.27) son triángulos y por (3.28) son rectángulos.

Teorema 3.21

- Se tienen m piezas lineales de primera clase y $\frac{m(m-1)}{2}$ piezas lineales de segunda clase.
- Cada pieza de primera clase es un triángulo homotético a Ω .
- Cada pieza de segunda clase es un paralelogramo cuyos lados son paralelos a dos lados de Ω .

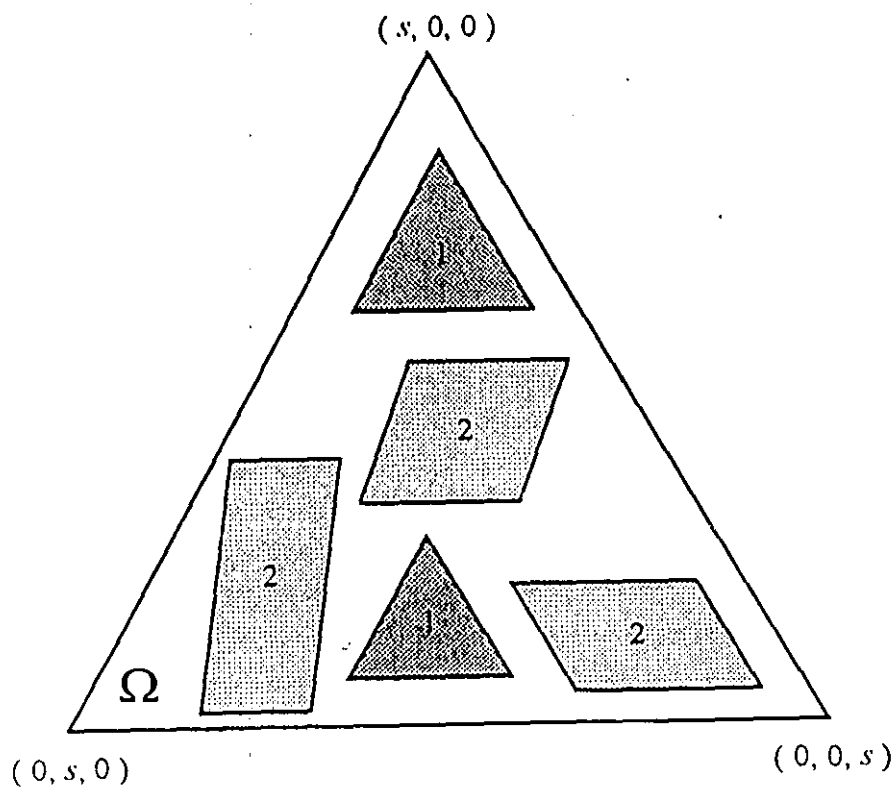


Figura 3.10 Las piezas lineales de primera clase (1) y segunda clase (2) de Ω .

Demostración.

a) Como cada pieza de primera clase corresponde a un índice $h \in \{1, 2, \dots, m\}$, por lo tanto, se tienen m piezas de esta clase.

Cada par (h, ℓ) con $h, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $h < \ell$ da como resultado una etiqueta propia

$E = \{ (h, \ell); (i_1 i_2 i_3) \}$ o una pieza de segunda clase. Como hay $\frac{m(m-1)}{2}$ maneras de

escoger una pareja (h, ℓ) tal que $h < \ell$ y $h, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$, el número de piezas de

segunda clase es igual a $\frac{m(m-1)}{2}$.

b) Definiendo $\beta_i = \sum_{j \in J_i(E)} b_j$ para $i = 1, 2, 3$. Entonces la pieza $\Pi(E)$ con $E = \{h\}$ se describe

como el sistema

$$\begin{cases} y_i \geq \beta_i, & i = 1, 2, 3; \\ y \in \Omega \end{cases} \quad (3.29)$$

A partir de que cada desigualdad $y_i \geq \beta_i$ determina un semiplano acotado por una línea recta paralela al lado $y_i = 0$ de Ω , entonces el polígono (3.29) es un triángulo homotético de Ω .

c) De (3.28) se tiene que una pieza $\Pi(E)$ con $E = \{(h, \ell); (i_1 i_2 i_3)\}$ es el conjunto de todos valores de y que cumplen con

$$\begin{cases} \beta_{i_1} \leq y_{i_1} \leq \beta_{i_1} + b_h \\ \beta_{i_2} \leq y_{i_2} \leq \beta_{i_2} + b_\ell \\ y \in \Omega \end{cases} \quad (3.30)$$

El conjunto $\{y \in \Omega : \beta_{i_1} \leq y_{i_1} \leq \beta_{i_1} + b_h\}$ es una banda acotada por dos líneas rectas paralelas a el lado $y_{i_1} = 0$ de Ω , mientras $\{y \in \Omega : \beta_{i_2} \leq y_{i_2} \leq \beta_{i_2} + b_\ell\}$ es una banda acotada por dos líneas rectas paralelas al lado $y_{i_2} = 0$, sus intersecciones determinan un paralelogramo cuyos lados son paralelos a los dos lados $y_{i_1} = 0$ y $y_{i_2} = 0$ de Ω . ■

Como ya se había mencionado la unión de todas las piezas lineales forman el simplex Ω .

Teorema 3.22

La familia P de todas las piezas de primera y segunda clase forma una cubierta de Ω .

Demostración.

Considerando un valor $y \in \Omega$ arbitrario, regular. Por la proposición 3.15 existe un único árbol de expansión T óptimo para $[PT(y)]$. Como la etiqueta E de T es propia, se define un árbol de expansión $T(E)$ (proposición 3.19). De la unicidad del árbol de expansión óptimo se tiene que $T(E)=T$, es decir, la solución básica óptima $x=\{x_{ij}\}$ de $[PT(y)]$ correspondiente a T debe satisfacer $x_{i_j} = b_j, \forall j \in J_{i_j}(E)$ así

para $E = \{h\}$

$$x_{ih} = y_i - \sum_{j \in J_i(E)} b_j, \quad i = 1, 2, 3 ;$$

para $E = \{ (h, \ell) ; (i_1 i_2 i_3) \}$

$$\begin{cases} x_{i_1 h} = y_{i_1} - \sum_{j \in J_{i_1}(E)} b_j \\ x_{i_3 \ell} = y_{i_3} - \sum_{j \in J_{i_3}(E)} b_j \end{cases}$$

En el primer caso $0 \leq x_{ih} \leq b_h, i = 1, 2, 3$ se nota que $y \in \Pi(E)$, con $\Pi(E)$ definida por (3.29).

En el segundo caso, como $0 \leq x_{i_1 h} \leq b_h$ y $0 \leq x_{i_3 \ell} \leq b_\ell$, se encuentra que $y \in \Pi(E)$ con $\Pi(E)$ definida por (3.30). Así cualquier $y \in \Omega$ regular pertenece a una determinada pieza de primera o segunda clase. ■

3.3.3 Cálculo de los vértices de las piezas lineales

Como ya se mencionó , un problema de minimización cóncava sobre un conjunto convexo encuentra su mínimo global en un punto extremo de este conjunto ,y por ello, se calcularán los vértices de las piezas lineales.

Las piezas lineales son vecinas unas de otras dentro de Ω por lo que un vértice de éstas pertenece a dos piezas diferentes. Las piezas de primera clase son triángulos semejantes a Ω , pero los vértices en los que no coinciden se encuentran entre otras piezas en las que al menos hay una de segunda clase, porque si fueran todas triángulos no serían en su totalidad semejantes a Ω y tendrían los mismos puntos interiores que las piezas de segunda clase. Por lo tanto, sólo es necesario calcular los vértices de las piezas de segunda clase y los de Ω .

Las fórmulas que proporcionan los vértices de las piezas de segunda clase se obtienen considerando una etiqueta propia E , su correspondiente pieza lineal Π y

$$U_j = \{(i, j) \in E : i = 1, 2, \dots, k\}, \quad j \in N; \quad (3.31)$$

$$V_i = \{(i, j) \in E : j \in N\}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (3.32)$$

$$\beta_i = \sum_{j \in J_i} b_j, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.33)$$

Proposición 3.23

Hay una correspondencia uno a uno entre los vértices y de Π y los mapas $r: N \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $(r(j), j) \in E, \forall j \in N$. Si y es un vértice de Π y r es el mapa correspondiente, entonces

$$a) \quad y_i = \beta_i + \sum_j \{b_j : r(j) = i\} \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.34)$$

b) La solución básica óptima $x^{(y)}$ de $[PT(y)]$ se define por

$$x_{ij}^{(y)} = b_j, \text{ si } j \in N \text{ e } i = r(j), \text{ o si } j \in J_i, \quad x_{ij}^{(y)} = 0 \text{ en otro caso.} \quad (3.35)$$

Demostración.

El sistema (3.4) - (3.6) implica que $x_{ij} = b_j$ para todo (i, j) tal que $j \in J_i$, entonces se tiene que

$$\sum_{(i,j) \in J_i} x_{ij} = y_i - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.36)$$

$$\sum_{(i,j) \in U_j} x_{ij} = b_j, \quad \forall j \in N \quad (3.37)$$

$$x_{ij} = b_j, \quad \forall j \in J_i \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.38)$$

Si $\{x_{ij} = \xi_{ij}(y), (i, j) \in E\}$ es la solución de este sistema y

$$\Pi = \{y \in \Omega : \xi_{ij}(y) \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E\}.$$

Si $x_{ij} = \xi_{ij}(y)$ y $\xi_{ij}(y) \geq 0 \quad \forall (i, j) \in E$ entonces necesariamente $y_i \geq \beta_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$.

Por lo tanto,

$$\Pi = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k y_i = s, \xi_{ij}(y) \geq 0, \forall (i, j) \in E \right\}. \quad (3.39)$$

De lo anterior, cualquier vértice y de Π debe satisfacer $k-1$ ecuaciones independientes del sistema

$$\xi_{ij}(y) = 0, \forall (i, j) \in E. \quad (3.40)$$

Pero, de (3.39) se tiene para toda $j \in N$

$$\sum_{(i, j) \in U_j} \xi_{ij}(y) = b_j, \quad (3.41)$$

así todo subsistema

$$\xi_{ij}(y) = 0, \forall (i, j) \in U_j, \quad (3.42)$$

donde $j \in N$ se fija y se tienen $|U_j| - 1 = g_E(B_j) - 1$ ecuaciones linealmente independientes.

Dos grupos diferentes U_j generarán dos ecuaciones linealmente independientes. Por lo tanto, un vértice y de Π corresponde a una selección de $|U_j| - 1$ miembros de U_j , para toda $j \in N$, a este subconjunto de E se le indicará como C . Así para toda $j \in N$,

$$|C \cap U_j| = |U_j| - 1 \text{ y}$$

$$\xi_{ij}(y) = 0, \forall (i, j) \in C. \quad (3.43)$$

En consecuencia se tiene que

$$\xi_{ij}(y) = b_j, \forall (i, j) \in E \setminus C, \quad (3.44)$$

y así, si $r: N \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ indica el mapa para toda $j \in N$, $(r(j), j)$ es el único miembro de

$U_j \setminus C$, por lo que, $(r(j), j) \in E \forall j$ y

$$y_i = \beta_i + \sum_j \{b_j : r(j) = i\}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

De esta manera a cualquier vértice le corresponde un mapa r .

Finalmente, la parte b) se deriva de (3.44), (3.45) y del teorema 3.16 . ■

En consecuencia, para una solución básica óptima de [PT(y)] se determina un arco $(i^*(j), j) \in E$ para cada $j \in N$ tal que

$$x_{ij} = \begin{cases} b_j, & \text{si } j \in J_i \text{ ó } j \in N \text{ e } i = i^*(j), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.45)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^m x_{ij} = \beta_i + \sum_j \{b_j : i = i^*(j)\}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.46)$$

Por lo tanto, hay dos posibles elecciones para el arco $i^*(j)$, y por-ello, cada pieza tiene 2^{k-1} vértices. Para el caso en el que $k = 3$ las piezas lineales tienen cuatro vértices (paralelogramos).

En el problema [PPT(3)] se obtienen la correspondiente etiqueta propia $E = \{(h, \ell) ; (i_1 i_2 i_3)\}$ y $J_{i_q}(E)$ y $\beta_{i_q} = \sum_{j \in J_{i_q}(E)} b_j$, $q \in \{1, 2, 3\}$, definiéndose así la pieza lineal $\Pi(E)$.

Los cuatro vértices de una pieza lineal de acuerdo a (3.46) son:

$$\left. \begin{array}{lll} y^1 : y_{i_1}^1 = \beta_{i_1}, & y_{i_2}^1 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_3}, & y_{i_3}^1 = \beta_{i_3} \\ y^2 : y_{i_1}^2 = \beta_{i_1} + b_h, & y_{i_2}^2 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_3} - b_h, & y_{i_3}^2 = \beta_{i_3} \\ y^3 : y_{i_1}^3 = \beta_{i_1}, & y_{i_2}^3 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_3} - b_t, & y_{i_3}^3 = \beta_{i_3} + b_t \\ y^4 : y_{i_1}^4 = \beta_{i_1} + b_h, & y_{i_2}^4 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_3} - b_h - b_t, & y_{i_3}^4 = \beta_{i_3} + b_t \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

Las soluciones básicas óptimas de [PT(y)] para los valores anteriores de y, considerando la expresión (3.45), son respectivamente:

$$\left. \begin{array}{lll} x^1 : x_{i_1}^1 = b_j, \quad \forall j \in J_q(E), & q \in \{i_1, i_2, i_3\}, & x_{i_2, h}^1 = b_h, \quad x_{i_3, t}^1 = b_t \\ x^2 : x_{i_1}^2 = b_j, \quad \forall j \in J_q(E), & q \in \{i_1, i_2, i_3\}, & x_{i_1, h}^2 = b_h, \quad x_{i_3, t}^2 = b_t \\ x^3 : x_{i_1}^3 = b_j, \quad \forall j \in J_q(E), & q \in \{i_1, i_2, i_3\}, & x_{i_2, h}^3 = b_h, \quad x_{i_3, t}^3 = b_t \\ x^4 : x_{i_1}^4 = b_j, \quad \forall j \in J_q(E), & q \in \{i_1, i_2, i_3\}, & x_{i_1, h}^4 = b_h, \quad x_{i_3, t}^4 = b_t \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

Los valores $f(z)$ de cada punto $z^r = (y^r, x^r)$, $r = 1, 2, 3, 4$ son:

$$\left. \begin{array}{l} f(z^1) = g(y^1) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_2, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \\ f(z^2) = g(y^2) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_1, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \\ f(z^3) = g(y^3) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_2, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \\ f(z^4) = g(y^4) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_1, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN A [PPT (3)]

En capítulos anteriores se estableció que el Problema de Producción – Transporte con Costos Cóncavos y $k=3$ [PPT(3)] se simplifica a un problema de transporte paramétrico [PT(y)] cuya solución es un conjunto de piezas lineales, de las cuales sólo es necesario calcular los vértices porque en uno de ellos se encuentra el óptimo de [PPT(3)].

En este capítulo se muestra el algoritmo que resuelve [PPT(3)], su complejidad computacional, ejemplos de su funcionamiento y aplicación.

4.1 EL ALGORITMO

PASO 0. INICIO

Calcular $\gamma_j^{i_1 i_2} = c_{i_1 j} - c_{i_2 j}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$, $i_1 \neq i_2$.

PASO 1. CÁLCULO DEL POLITOPO Ω

1.1. Calcular $y^i \in \Omega$ que es el i -ésimo vértice de Ω (el punto cuya i -ésima coordenada es s).

1.2. Calcular x^i que es la matriz de $3 \times m$ cuya i -ésimo renglón es (b_1, b_2, \dots, b_m) y todos los demás valores son ceros.

1.3. Calcular

$$i \in \arg \min_{i=1,2,3} \left\{ g(y^i) + \sum_{j=1}^m c_{ij} b_j \right\}$$

y el conjunto

$$y^* = y^i, \quad x^* = x^i, \quad z^* = (y^*, x^*), \quad f(z^*) = g(y^*) + cx^*.$$

PASO 2. CÁLCULO DE LAS PIEZAS LINEALES

Para todo par (h, ℓ) con $h = 1, 2, \dots, m-1$ y $\ell = h+1, \dots, m$ calcular lo siguiente:

2.1. Encontrar la permutación $(i_1 i_2 i_3)$ tal que

$$\gamma_{h\ell}^{i_1} < \gamma_{h\ell}^{i_2} < \gamma_{h\ell}^{i_3}.$$

2.2. Para toda $q \in \{1, 2, 3\}$ calcular $J_{i_q}(E)$ y β_{i_q} :

$$J_{i_1}(E) = \{j \neq h, \ell : \gamma_j^{i_1} < \gamma_h^{i_1}, \gamma_j^{i_1} + \gamma_\ell^{i_1} < \gamma_h^{i_1}\}, \quad \beta_{i_1} = \sum_{j \in J_{i_1}} b_j,$$

$$J_{i_2}(E) = \{j \neq h, \ell : \gamma_j^{i_2} < \gamma_h^{i_2}, \gamma_j^{i_2} < \gamma_\ell^{i_2}\}, \quad \beta_{i_2} = \sum_{j \in J_{i_2}} b_j,$$

$$J_{i_3}(E) = \{1, 2, \dots, m\} \setminus (J_{i_1}(E) \cup J_{i_2}(E) \cup \{h, \ell\}), \quad \beta_{i_3} = \sum_{j \in J_{i_3}} b_j.$$

2.3. Las piezas lineales se expresan como :

$$\Pi(E) = \left\{ y \in \Omega : 0 \leq y_{i_1} - \sum_{j \in J_{i_1}(E)} b_j \leq b_h, 0 \leq y_{i_2} - \sum_{j \in J_{i_2}(E)} b_j \leq b_\ell \right\}.$$

PASO 3. CÁLCULO DE LOS VÉRTICES DE LAS PIEZAS LINEALES

Para $r = 1, 2, 3, 4$ calcular lo siguiente :

3.1. Determinar cada vértice y^r de acuerdo a :

$$\left. \begin{array}{lll} y^1 : y_{i_1}^1 = \beta_{i_1}, & y_{i_2}^1 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_2}, & y_{i_3}^1 = \beta_{i_3} \\ y^2 : y_{i_1}^2 = \beta_{i_1} + b_h, & y_{i_2}^2 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - b_h, & y_{i_3}^2 = \beta_{i_3} \\ y^3 : y_{i_1}^3 = \beta_{i_1}, & y_{i_2}^3 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - b_\ell, & y_{i_3}^3 = \beta_{i_3} + b_\ell \\ y^4 : y_{i_1}^4 = \beta_{i_1} + b_h, & y_{i_2}^4 = s - \beta_{i_1} - \beta_{i_2} - b_h - b_\ell, & y_{i_3}^4 = \beta_{i_3} + b_\ell \end{array} \right\}$$

PASO 4. CÁLCULO DE UNA SOLUCIÓN BÁSICA ÓPTIMA

4.1. Para cada vértice y^r se calcula una solución básica óptima $x^r = \{x_{ij}^r\}$,

considerando lo siguiente :

$$\left. \begin{aligned} x^1 : x_{qj}^1 &= b_j, \quad \forall j \in J_q(E), \quad q \in \{i_1, i_2, i_3\}, \quad x_{i_2, h}^1 = b_h, \quad x_{i_2, t}^1 = b_t \\ x^2 : x_{qj}^2 &= b_j, \quad \forall j \in J_q(E), \quad q \in \{i_1, i_2, i_3\}, \quad x_{i_1, h}^2 = b_h, \quad x_{i_2, t}^2 = b_t \\ x^3 : x_{qj}^3 &= b_j, \quad \forall j \in J_q(E), \quad q \in \{i_1, i_2, i_3\}, \quad x_{i_1, h}^3 = b_h, \quad x_{i_3, t}^3 = b_t \\ x^4 : x_{qj}^4 &= b_j, \quad \forall j \in J_q(E), \quad q \in \{i_1, i_2, i_3\}, \quad x_{i_1, h}^4 = b_h, \quad x_{i_3, t}^4 = b_t \end{aligned} \right\}$$

4.2. Se calcula $f(z^r)$ como se indica a continuación :

$$\left. \begin{aligned} f(z^1) &= g(y^1) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_2, h} b_h + c_{i_2, t} b_t \\ f(z^2) &= g(y^2) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_1, h} b_h + c_{i_2, t} b_t \\ f(z^3) &= g(y^3) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_2, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \\ f(z^4) &= g(y^4) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j \in J_i(E)} c_{ij} b_j + c_{i_1, h} b_h + c_{i_3, t} b_t \end{aligned} \right\}$$

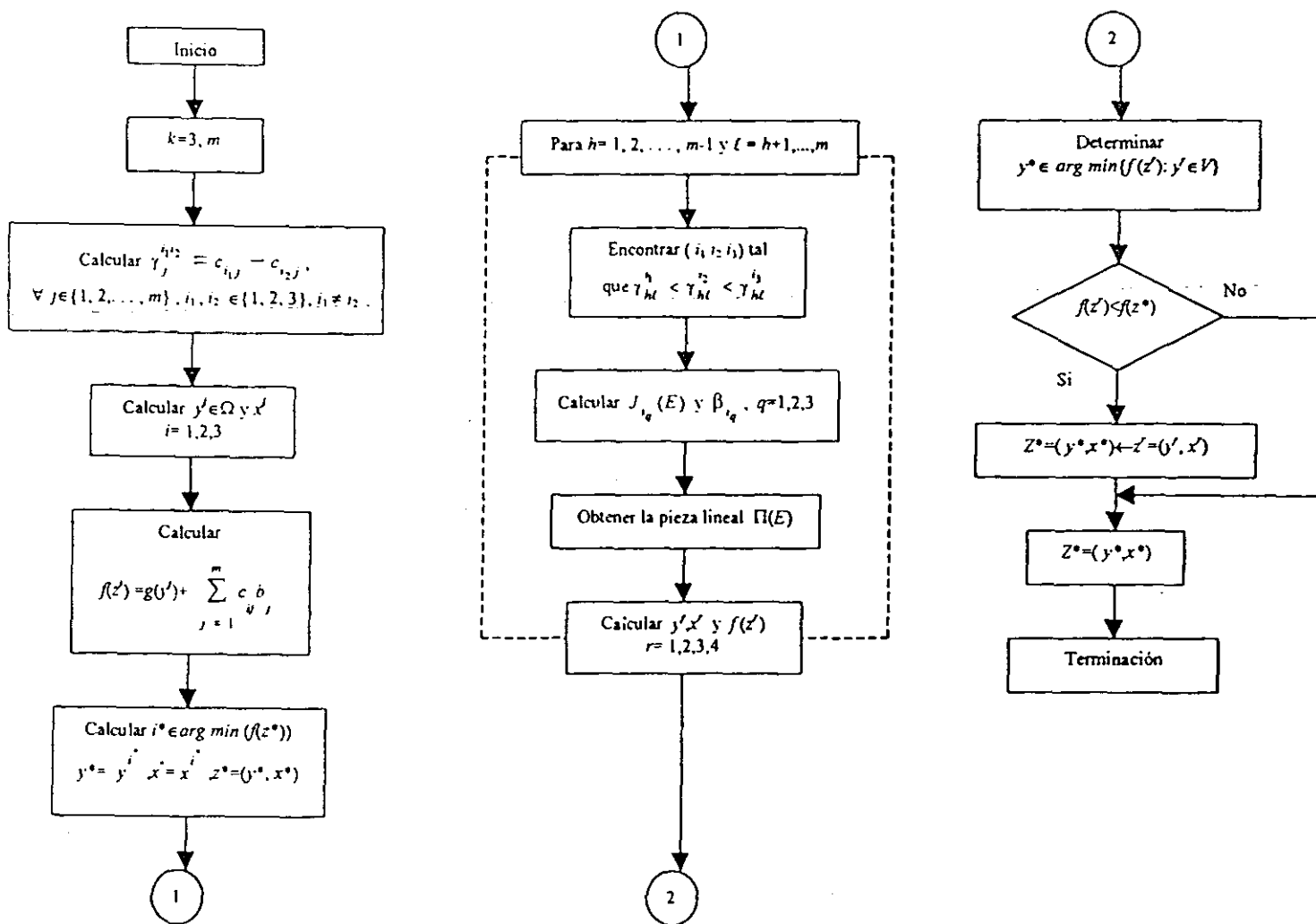
4.3. Determinar $y^* \in \arg \min \{ f(z^r) : y^r \in V \}$. Si $f(z^r) < f(z^s)$ entonces,

$$z^* = (y^*, x^*) \leftarrow z^r = (y^r, x^r).$$

PASO 5. TERMINACIÓN

$Z^* = (y^*, x^*)$ es la solución óptima global de [PPT (3)].

DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO



4.2 COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

Para analizar la eficiencia del algoritmo anterior a continuación se tratan conceptos sobre complejidad computacional.

4.2.1 Complejidad computacional de un algoritmo

Un algoritmo es una secuencia de instrucciones precisas que dan lugar a un resultado deseado. Para determinar que tan eficiente es un algoritmo se ha desarrollado la teoría de la *complejidad computacional*, la cual se conforma por un conjunto de herramientas de análisis que se utilizan para medir el trabajo desarrollado por un algoritmo, tomando como parámetro de medida el número de operaciones elementales (operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, asignación, operaciones lógicas) que éste realiza.

La eficiencia de un algoritmo se intenta establecer a través de la relación entre *el tiempo de ejecución y el tamaño* de dicho algoritmo, expresando el primero en términos del número de operaciones elementales y el segundo en términos del número de caracteres necesarios para codificar los datos del problema, y que se conoce como *complejidad computacional del algoritmo*.

Diferentes casos de comportamiento en los algoritmos.

Es posible analizar un algoritmo desde sus diferentes tipos de comportamiento.

1. El caso empírico estima el comportamiento de los algoritmos en la práctica, para lo cual se elabora un programa de computadora del algoritmo y se realizan pruebas.
2. El caso promedio estima el número esperado de los pasos que un algoritmo requiere, para esto se utilizan distribuciones de probabilidad y análisis estadístico.
3. El peor de los casos proporciona cotas superiores sobre el número de pasos que un algoritmo realiza, en este análisis se toma en cuenta el mayor número posible de pasos a calcular.

Notación.

La medida de complejidad se usa frecuentemente, por lo que, tiene su propia notación como a continuación se muestra :

Definición 4.1

Un algoritmo corre en un tiempo $O(f(n))$ si para algunos números c y n_0 el tiempo realizado por el algoritmo es al menos $c f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

Decir que un algoritmo corre en un tiempo $O(f(n))$ para alguna función $f(n)$ significa que si n es suficientemente grande, el tiempo requerido para ejecutar el algoritmo no excede a $c f(n)$ donde c es una constante no especificada (no es significativa para

valores grandes de n). Algunos conjuntos de $O(f(n))$ que aparecen con frecuencia al analizar algoritmos son :

$$O(1), O(\log n), O(n), O(n \log n), O(n^2), \dots, O(n^p), \dots, O(c^n), \dots, O(n!).$$

Si la función tiempo de un algoritmo es de orden 1 se dice que dicho algoritmo tiene complejidad constante, si es de orden $\log n$ es logarítmica, si es de orden n es lineal, si es de orden n^p donde p es un número natural es polinómica, si es de orden c^n con $c > 1$ es exponencial y si es de orden $n!$ es factorial.

Clasificación de los algoritmos.

Los algoritmos se clasifican de acuerdo a su comportamiento en polinomiales y exponenciales.

Definición 4.2

Un algoritmo es polinomial si el número de operaciones elementales necesarias para resolver un problema de tamaño n , está acotado por una función polinomial en n . Un algoritmo se considera eficiente sí y sólo sí es polinomial.

Algunos ejemplos de cotas de algoritmos polinomiales son $O(n^2)$, $O(nm)$, $O(m+n \log C)$, $O(nm \log(n^2/m))$, $O(nm + n^2 \log U)$.

Un algoritmo es fuertemente polinomial si su tiempo de ejecución está acotado por una función polinomial sólo en n y m , y no comprende $\log C$ o $\log U$, en otro caso se trata de un algoritmo polinomialmente débil. Algunos algoritmos fuertemente polinomiales se encuentran acotados por las funciones de tiempo $O(n^2m)$ y $O(n \log n)$.

Un algoritmo exponencial es aquel en el que su peor tiempo de ejecución crece como una función que no puede acotarse por una función polinomial. Ejemplos de cotas de tiempo exponencial son : $O(c^n)$, $O(2^n)$, $O(n!)$ y $O(n^{\log n})$.

Dentro de las ventajas de los algoritmos polinomiales con respecto a los algoritmos exponenciales se encuentran las siguientes :

- cualquier algoritmo polinomial es asintóticamente superior a cualquier algoritmo exponencial, aún en casos extremos. Por ejemplo n^{4000} es menor que $n^{0.11 \log n}$ si n es suficientemente grande ($n \geq 2^{100,000}$),
- las funciones de complejidad exponencial tienen un rango de crecimiento explosivo,
- los algoritmos polinomiales en la mayoría de los casos, tienen un mejor comportamiento en el tiempo de ejecución (tiempo menor) que los algoritmos exponenciales.
- un algoritmo polinomial puede llamar a otro algoritmo polinomial como una subrutina y el algoritmo resultante también es polinomial.

Clases de problemas.

De acuerdo a la dificultad de los problemas, éstos se clasifican como :

Problemas indecidibles.

Son aquellos problemas para los cuales no se puede escribir un algoritmo para encontrar su solución.

Problemas tratables.

Son problemas que admiten un algoritmo polinomial para la obtención de su solución.

Problemas intratables.

Son aquellos problemas para los cuales no se pueden desarrollar algoritmos polinomiales, es decir, sólo se pueden resolver con algoritmos exponenciales.

Problemas P.

La letra P en este caso significa polinomial. Esta clase de problemas agrupa a todos aquellos cuyo tiempo de ejecución es polinomial.

Por definición el conjunto de los problemas de la clase P son un subconjunto de los problemas de la clase NP , es decir, $P \subset NP$.

Problemas NP.

Las letras NP denotan "polinomial no determinista". " NP es la clase de problemas de decisión que se resuelven utilizando algoritmos no deterministas en tiempo polinomial."

Un algoritmo no determinista es aquel algoritmo que realiza una selección arbitraria entre varias opciones de una ramificación. Este tipo de problemas se resuelven por una exploración arborescente, tal que la profundidad de la arborescencia esté acotada por un polinomio. En general, esta clase incluye todos los problemas que tienen algoritmos exponenciales para su solución, pero que no se ha probado que no se puedan resolver con algoritmos de tiempo polinomial.

Problemas NP-completos.

Esta clase considera a un conjunto de problemas que cumplen con lo siguiente: un problema que pertenece a la clase NP es *NP-completo* si todo problema de la clase NP puede reducirse en forma polinomial a él.

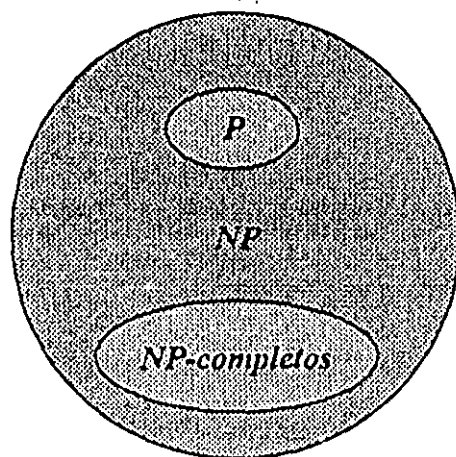


Figura 4.1 El conjunto de la clase NP .

Problemas NP- duros.

Este tipo de problemas considera que un problema, sea o no de la clase NP , es *NP-duro* si todos los demás problemas de la clase NP se reducen polinomialmente a él.

La clase *NP-duro* se considera más general que la clase *NP-completo*.

Complejidad computacional del método simplex.

Debido a la relación que existe entre el problema [PPT(k)] y el modelo de transporte, a continuación se explica brevemente la complejidad computacional del método simplex. Es importante señalar que el modelo de transporte es un problema de programación lineal y el algoritmo que le da solución, la técnica de transporte, se basa en el método simplex.

Considerando el siguiente problema de programación lineal en su forma estándar :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ con $m, n \geq 2$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$, y utilizando el método simplex se requieren cerca de $m(n-m)+n+1$ multiplicaciones y $m(n-m+1)$ sumas en cada iteración, es decir, que ambas operaciones son del orden $O(mn)$.

Para determinar el número de iteraciones que se requieren, se sabe que el método simplex consiste básicamente en trasladarse de un punto extremo a otro punto extremo vecino. El dominio factible del problema lineal anterior contiene $C(n,m)$ puntos extremos que el algoritmo tendría que visitar en el peor de los casos,

$$C(n,m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \geq \left(\frac{n}{m}\right)^m \geq 2^m \text{ si } n \geq 2m$$

por lo cual, se entiende que es necesario un número exponencial de iteraciones. Lo anterior muestra que el método simplex y sus variantes, tomando el peor de los casos, son algoritmos de complejidad exponencial.

En la práctica el método simplex resuelve los problemas en forma rápida, pues no es común resolver problemas tan complicados como los que pertenecen a la clasificación del peor de los casos. Los problemas de tamaño medio requieren de $4m$ a $6m$ iteraciones para terminar las dos fases del método simplex y el número esperado de iteraciones es αxm para n mayor que m , donde $\exp(\alpha) < \log_2(2+n/m)$ y $1.25 < \alpha < 2.5$, entonces se espera que el caso promedio de este método tenga una complejidad computacional de $O(m^2n)$.

Borgwardt [1982] mostró que el caso promedio del método simplex se comporta como un algoritmo polinomial, en un cierto modelo probabilístico y utilizando la regla de selección pivotal conocida como la Shatteneckenalgorithmus, es decir, $O(n^3 m^{1/(n-1)})$. Smale [1983] mostró que para todo valor fijo de m daba como cota superior del método $O((\log n)^{m^1 \cdot m})$. Hamovich [1983] combinó la regla de pivoteo de Borgwardt con una versión más general del modelo probabilístico de Smale, y mostró que el número promedio de pasos de pivoteo es lineal, lo cual concuerda con la experiencia práctica.

Lo anterior muestra que el caso promedio del método simplex se comporta como un algoritmo polinomial.

4.2.2 Complejidad computacional del algoritmo

A continuación se muestra que el algoritmo presentado para la solución de [PPT(3)] es un algoritmo polinomial , es decir , un algoritmo eficiente.

Teorema 4.3

El algoritmo antes expuesto , para la solución de [PPT(3)], requiere $O(m^3)$ operaciones elementales y $O(m^2)$ evaluaciones de la función $g(y)$.

Demostración.

Este algoritmo requiere para la etapa de inicio $6m$ operaciones elementales, el paso 1 implica $O(m)$ operaciones elementales y 3 evaluaciones de $g(y)$ y los pasos 2, 3 y 4 implican $O(m)$ operaciones elementales y 4 evaluaciones de $g(y)$ para cada par (h, ℓ) con

$h < \ell$ y $h, \ell \in \{1, 2, \dots, m\}$. Considerando que se tienen $\frac{m(m-1)}{2}$ pares diferentes (h, ℓ) en

total, el algoritmo requiere $O(m) \times \left(1 + \frac{m(m-1)}{2}\right) = O(m^3)$ operaciones elementales y

$3 + 2m(m-1) = O(m^2)$ evaluaciones de la función $g(y)$. ■

4.3 EL EJEMPLO

Para mostrar el funcionamiento del algoritmo se presenta el siguiente ejemplo numérico.

En este caso tres fábricas (F_1, F_2, F_3) producen un cierto producto, el cual se envía a tres almacenes (B_1, B_2, B_3). Se considera que las demandas de los almacenes son las siguientes:

$$b = \{b_j\} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix},$$

y que cada fábrica tiene una capacidad superior a la demanda total.

Los costos de transportación entre fábricas y almacenes son:

$$c = \{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 10 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Los costos de producir y_i unidades de productos en la fábrica F_i para $i=1, 2, 3$ se encuentran representados por la siguiente función cóncava no separable,

$$g(y) = 4y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{1/2}.$$

Con los datos anteriores se requiere determinar las cantidades de productos a producir en cada fábrica, y el plan de distribución de éstos hacia los almacenes a costo mínimo.

Antes de resolver el problema, primero se verificará que la función $g(y)$ sea una función cóncava.

El total de la demanda es $s = \sum_{j=1}^3 b_j = 15$ por lo que la cantidad máxima de productos que cada una de las fábricas puede producir es 15 unidades, lo cual genera los siguientes vectores para y_1, y_2, y_3 respectivamente:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Aplicando la definición 2.3 de una función cóncava, se obtienen los resultados siguientes:

Valor de λ	Vectores	Resultado
0	x_1 y x_2	$7.7=7.7$
0	x_2 y x_3	$16.25=16.25$
0	x_3 y x_1	$21.57=21.57$
0.1	x_1 y x_2	$12.64 > 9.087$
0.1	x_2 y x_3	$16.8 > 15.395$
0.1	x_3 y x_1	$24.3 > 21.038$
0.2	x_1 y x_2	$14.7 > 10.474$
0.2	x_2 y x_3	$16.6 > 14.54$
0.2	x_3 y x_1	$24.84 > 20.506$
0.3	x_1 y x_2	$16.28 > 11.861$
0.3	x_2 y x_3	$16.24 > 13.685$
0.3	x_3 y x_1	$24.98 > 19.965$
0.4	x_1 y x_2	$17.58 > 13.248$
0.4	x_2 y x_3	$15.76 > 12.83$
0.4	x_3 y x_1	$24.86 > 19.442$
0.5	x_1 y x_2	$18.7 > 14.635$

Valor de λ	Vectores	Resultado
0.5	x_2 y x_3	15.18 > 11.975
0.5	x_3 y x_1	24.55 > 18.91
0.6	x_1 y x_2	19.68 > 16.022
0.6	x_2 y x_3	14.5 > 11.12
0.6	x_3 y x_1	24.03 > 18.378
0.7	x_1 y x_2	20.53 > 19.965
0.7	x_2 y x_3	13.68 > 10.265
0.7	x_3 y x_1	23.29 > 17.846
0.8	x_1 y x_2	21.24 > 18.796
0.8	x_2 y x_3	12.656 > 9.41
0.8	x_3 y x_1	22.25 > 17.314
0.9	x_1 y x_2	21.78 > 20.183
0.9	x_2 y x_3	11.25 > 8.555
0.9	x_3 y x_1	20.7 > 16.777
1	x_1 y x_2	21.57 = 21.57
1	x_2 y x_3	7.7 = 7.7
1	x_3 y x_1	16.25 = 16.25

Tabla 4.1

De acuerdo a los resultados obtenidos se determina que $g(y)$ es una función cóncava.

Otra forma de determinar si una función es cóncava consiste en aplicar el teorema 2.6, para lo cual se obtiene la matriz Hessiana de $g(y)$,

$$H(y) = \begin{bmatrix} -y_1^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{9}A & -\frac{1}{9}A & -\frac{4}{27}A \\ -\frac{1}{9}A & -\frac{1}{4}y_2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{18}A & -\frac{2}{27}A \\ -\frac{4}{27}A & -\frac{2}{27}A & -\frac{1}{4}y_3^{-\frac{1}{2}} - \frac{8}{81}A \end{bmatrix}$$

$A = (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{-\frac{1}{2}}$. El valor de A es positivo y no nulo.

Sea el vector $z \in \mathbb{R}^3$, $z^T = [z_1 \ z_2 \ z_3]$. Como se sabe si $z^T H(y) z \leq 0$ la función $g(y)$ es cóncava, así

$$z^T H(y) z = -z_1^2 y_1^{-\frac{1}{2}} - z_1^2 \frac{2}{9}A - \frac{2z_1 z_2}{9}A - \frac{8z_3 z_1}{27}A - \frac{z_2^2}{4} y_2^{-\frac{1}{2}} - \frac{z_2^2}{18}A - \frac{4z_3 z_2}{27}A - \frac{3z_3^2 y_3^{-\frac{1}{2}}}{4} - \frac{8z_3^2}{81}A.$$

Para valores de $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, $z_3 \geq 0$ se cumple $z^T H(y) z \leq 0$ y por lo tanto $g(y)$ es una función cóncava.

SOLUCIÓN

Aplicando el algoritmo se obtiene:

PASO 0. INICIO

$$\text{Si } i_1 = 1 \quad i_2 = 2$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{12} = c_{11} - c_{12} = 5 - 3 = 2$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{12} = c_{12} - c_{22} = 3 - 8 = -5$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{12} = c_{13} - c_{23} = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Si } i_1 = 1 \quad i_2 = 3$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{13} = c_{11} - c_{31} = 5 - 5 = 0$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{13} = c_{12} - c_{32} = 3 - 3 = 0$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{13} = c_{13} - c_{33} = 4 - 7 = -3$$

$$\text{Si } i_1 = 2 \quad i_2 = 3$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{23} = c_{21} - c_{31} = 10 - 5 = 5$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{23} = c_{22} - c_{32} = 8 - 3 = 5$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{23} = c_{23} - c_{33} = 4 - 7 = -3$$

$$\text{Si } i_1 = 2 \quad i_2 = 1$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{21} = c_{21} - c_{11} = 10 - 5 = 5$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{21} = c_{22} - c_{12} = 8 - 3 = 5$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{21} = c_{23} - c_{13} = 4 - 4 = 0$$

$$\text{Si } i_1 = 3 \quad i_2 = 1$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{31} = c_{31} - c_{11} = 5 - 5 = 0$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{31} = c_{32} - c_{12} = 3 - 3 = 0$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{31} = c_{33} - c_{13} = 7 - 4 = 3$$

$$\text{Si } i_1 = 3 \quad i_2 = 2$$

$$j=1 \quad \gamma_1^{32} = c_{31} - c_{21} = 5 - 10 = -5$$

$$j=2 \quad \gamma_2^{32} = c_{32} - c_{22} = 3 - 8 = -5$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{32} = c_{33} - c_{23} = 7 - 4 = 3$$

PASO 1. CÁLCULO DEL POLITOPO Ω

1.1. El total de la demanda es $s = \sum_{j=1}^3 b_j = 15$,

$$\Omega = \{y = (y_1, y_2, y_3) : y_1 + y_2 + y_3 = s (=15), y_1, y_2, y_3 \geq 0\}$$

Ω es un triángulo.

1.2. Las matrices x^i para $i = 1, 2, 3$ son :

$$x^1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

1.3. Calculando $f(z^i) = g(y^i) + \sum_{j=1}^m c_{ij} b_j$, $i = 1, 2, 3$, para los vértices y^1, y^2, y^3 de Ω :

$$\text{Para } (y^1)^T = (15, 0, 0),$$

$$f(z^1) = 4(y^1)^{1/2} + (y^1)^{2/3} + c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{13}b_3,$$

$$f(z^1) = 4(15)^{1/2} + (15)^{2/3} + (5)(4) + (3)(3) + (4)(8) = 82.57$$

$$\text{Para } (y^2)^T = (0, 15, 0),$$

$$f(z^2) = (y^2)^{1/2} + (\frac{1}{2}y^2)^{2/3} + c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + c_{23}b_3,$$

$$f(z^2) = (15)^{1/2} + [\frac{1}{2}(15)]^{2/3} + (10)(4) + (8)(3) + (4)(8) = 103.7$$

$$\text{Para } (y^3)^T = (0, 0, 15),$$

$$f(z^3) = 3(y^3)^{1/2} + (\frac{2}{3}y^3)^{2/3} + c_{31}b_1 + c_{32}b_2 + c_{33}b_3,$$

$$f(z^3) = 3(15)^{1/2} + [\frac{2}{3}(15)]^{2/3} + (5)(4) + (3)(3) + (7)(8) = 101.26$$

El menor valor de $f(z^i)$ es $f(z^1)$, por lo tanto,

$$y^* = y^1, \quad x^* = x^1, \quad z^* = (y^*, x^*) \quad f(z^*) = g(y^*) + cx^*.$$

$$y^* = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^* = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(z^*) = 82.57$$

PASO 2. CÁLCULO DE LAS PIEZAS LINEALES

Calcular las piezas lineales $\Pi(1,2)$, $\Pi(1,3)$ y $\Pi(2,3)$, las cuales son paralelogramos.

2.1. Para $(h,\ell)=(1,2)$,

$$i=1 \quad \gamma_{12}^1 = c_{11} - c_{12} = 5 - 3 = 2$$

$$i=2 \quad \gamma_{12}^2 = c_{21} - c_{22} = 10 - 8 = 2$$

$$i=3 \quad \gamma_{12}^3 = c_{31} - c_{32} = 5 - 3 = 2$$

Por (3.15) y (3.16) $\gamma_{12}^1 \leq \gamma_{12}^2 \leq \gamma_{12}^3$, $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=3$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,2), (123)\}.$$

2.2. Para $q \in \{1,2,3\}$,

$$q=1 \quad J_1(1,2) = \{j \neq 1,2 \Rightarrow j=3 : \gamma_3^{12} < \gamma_1^{12}, \gamma_3^{13} + \gamma_2^{32} < \gamma_1^{12}\}$$

$$\gamma_3^{12} < \gamma_1^{12} \quad 0 < 5 \quad \text{no se cumple,}$$

$$\gamma_3^{13} + \gamma_2^{32} < \gamma_1^{12} \quad -8 < 5 \quad \text{se cumple,}$$

como no se cumplen ambas condiciones, entonces :

$$J_1((1,2), (123)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

$$q=2 \quad J_2(1,2) = \{j \neq 1,2 \Rightarrow j=3 : \gamma_3^{21} < \gamma_1^{21}, \gamma_3^{23} < \gamma_2^{23}\}$$

$$\gamma_3^{21} < \gamma_1^{21} \quad 0 < 5 \quad \text{se cumple,}$$

$$\gamma_3^{23} < \gamma_2^{23} \quad -3 < 5 \quad \text{se cumple,}$$

como se cumplen ambas condiciones el arco que se incluye es $j=3$ entonces :

$$J_2((1,2);(123))=\{3\} \Rightarrow \beta_2=b_3=8.$$

$$q=3 \quad J_3(1,2)=\{(1,2,3)\} \setminus (\emptyset \cup 3 \cup (1,2))=\emptyset \Rightarrow \beta_3=0.$$

2.3. La pieza lineal es el paralelogramo,

$$\Pi((1,2);(123)) = \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 4 \\ 0 \leq y_3 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

PASO 3. CÁLCULO DE LOS VÉRTICES DE LAS PIEZAS LINEALES

3.1. Determinando y^r para $r=1, 2, 3, 4$.

$$y^1: y_1^1=\beta_1=0 \quad y_2^1=s-\beta_1-\beta_3=15 \quad y_3^1=\beta_3=0 \quad \Rightarrow \quad y^1=(0,15,0)^T$$

$$y^2: y_1^2=\beta_1+b_1=4 \quad y_2^2=s-\beta_1-\beta_3-b_1=11 \quad y_3^2=\beta_3=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=(4,11,0)^T$$

$$y^3: y_1^3=\beta_1=0 \quad y_2^3=s-\beta_1-\beta_3-b_2=12 \quad y_3^3=\beta_3+b_2=3 \quad \Rightarrow \quad y^3=(0,12,3)^T$$

$$y^4: y_1^4=\beta_1+b_1=4 \quad y_2^4=s-\beta_1-\beta_3-b_1-b_2=8 \quad y_3^4=\beta_3+b_2=3 \quad \Rightarrow \quad y^4=(4,8,3)^T$$

PASO 4. CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN BÁSICA ÓPTIMA

4.1. Calculando $x^y = \{x_{ij}^y\}$ para cada y^r .

$$x^1: x_{23}^1=b_3=8 \quad x_{21}^1=b_1=4 \quad x_{32}^1=b_2=3$$

$$x^2: x_{23}^2=b_3=8 \quad x_{11}^2=b_1=4 \quad x_{22}^2=b_2=3$$

$$x^3: x_{23}^3=b_3=8 \quad x_{21}^3=b_1=4 \quad x_{32}^3=b_2=3$$

$$x^4: x_{23}^4=b_3=8 \quad x_{11}^4=b_1=4 \quad x_{32}^4=b_2=3.$$

4.2. Para $z^1 = (y^1, x^1)$

$$f(z^1) = y_2^{1/2} + (\frac{1}{2}y_2)^{1/2} + c_{23}b_3 + c_{21}b_1 + c_{22}b_2 = 103.7$$

Para $z^2 = (y^2, x^2)$:

$$f(z^2) = 4y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + (y_1 + \frac{1}{2}y_2)^{1/2} + c_{23}b_3 + c_{11}b_1 + c_{22}b_2 = 91.8$$

Para $z^3 = (y^3, x^3)$:

$$f(z^3) = y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2}(\frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{1/2} + c_{23}b_3 + c_{21}b_1 + c_{32}b_2 = 93.66$$

Para $z^4 = (y^4, x^4)$:

$$f(z^4) = 4y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{1/2} + c_{23}b_3 + c_{11}b_1 + c_{32}b_2 = 81.656$$

4.3. $f(z^1) = 103.7 > f(z^*)$

$$f(z^2) = 91.8 > f(z^*)$$

$$f(z^3) = 93.66 > f(z^*)$$

$$f(z^4) = 81.656 < f(z^*)$$

En este caso la solución óptima es $z^4 = (y^4, x^4) \rightarrow z^* = (y^*, x^*)$, entonces:

$$y^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x^* = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(z^*) = 81.656.$$

PASO 2. Calculando la pieza $\Pi(1, 3)$.

2.1. Para $(h, \ell) = (1, 3)$,

$$i=1 \quad \gamma_{13}^1 = c_{11} - c_{13} = 5 - 4 = 1$$

$$i=2 \quad \gamma_{13}^2 = c_{21} - c_{23} = 10 - 4 = 6$$

$$i=3 \quad \gamma_{13}^3 = c_{31} - c_{33} = 5 - 7 = -2$$

Entonces $\gamma_{13}^3 < \gamma_{13}^1 < \gamma_{13}^2$, $i_1=3, i_2=1, i_3=2$ y la etiqueta propia es $E = \{(1,3); (312)\}$.

2.2. Para $q \in \{1, 2, 3\}$,

$$i_1=3 \Rightarrow q=3 \quad J_3(1,3) = \{j \neq 1, 3 \Rightarrow j=2 : \gamma_2^{31} < \gamma_1^{31}, \gamma_2^{32} + \gamma_3^{21} < \gamma_1^{31}\}$$

$$\gamma_2^{31} < \gamma_1^{31} \quad 0=0 \quad \text{se cumple,}$$

$$\gamma_2^{32} + \gamma_3^{21} < \gamma_1^{31} \quad -5 < 0 \quad \text{se cumple,}$$

se cumplen ambas condiciones, entonces:

$$J_3((1,3); (312)) = 2 \Rightarrow \beta_3 = b_2 = 3.$$

$$i_2=1 \Rightarrow q=1 \quad J_1(1,3) = \{j \neq 1, 3 \Rightarrow j=2 : \gamma_2^{13} < \gamma_1^{13}, \gamma_2^{12} < \gamma_3^{12}\}$$

$$\gamma_2^{13} < \gamma_1^{13} \quad 0=0 \quad \text{se cumple,}$$

$$\gamma_2^{12} < \gamma_3^{12} \quad -5 < 0 \quad \text{se cumple,}$$

como el conjunto J_3 ya incluyó al arco $j=2$, entonces:

$$J_1((1,3); (312)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

$$i_3=2 \Rightarrow q=2 \quad J_2(1,3) = \{(1,2,3) \setminus ((2) \cup \emptyset \cup (1,3))\} = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0.$$

2.3. La pieza lineal es el paralelogramo,

$$\Pi((1,3); (312)) = \begin{cases} 0 \leq y_3 \leq 7 \\ 0 \leq y_2 \leq 8 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

PASO 3. Cálculo de los vértices de la pieza lineal.

3.1. Determinando y^r para $r=1, 2, 3, 4$.

$$y^1: y_3^1 = \beta_3 = 3 \quad y_1^1 = s - \beta_3 - \beta_2 = 12 \quad y_2^1 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (12, 0, 3)^T$$

$$y^2: y_3^2 = \beta_3 + b_1 = 7 \quad y_1^2 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_1 = 8 \quad y_2^2 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (8, 0, 7)^T$$

$$y^3: y_3^3 = \beta_3 = 3 \quad y_1^3 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_3 = 4 \quad y_2^3 = \beta_2 + b_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (4, 8, 3)^T$$

$$y^4: y_3^4 = \beta_3 + b_1 = 7 \quad y_1^4 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_1 - b_3 = 0 \quad y_2^4 = \beta_2 + b_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (0, 8, 7)^T$$

PASO 4. Cálculo de la solución básica óptima.

4.1. Calculando $x^y = \{x_j^y\}$ para cada y^r .

$$x^1: x_{32}^1 = b_2 = 3 \quad x_{11}^1 = b_1 = 4 \quad x_{13}^1 = b_3 = 8$$

$$x^2: x_{32}^2 = b_2 = 3 \quad x_{31}^2 = b_1 = 4 \quad x_{13}^2 = b_3 = 8$$

$$x^3: x_{32}^3 = b_2 = 3 \quad x_{11}^3 = b_1 = 4 \quad x_{23}^3 = b_3 = 8$$

$$x^4: x_{32}^4 = b_2 = 3 \quad x_{31}^4 = b_1 = 4 \quad x_{23}^4 = b_3 = 8$$

4.2. Para $z^1 = (y^1, x^1)$:

$$f(z^1) = 4y_1^1 + 3y_3^1 + (y_1 + \frac{2}{3}y_3)^{\frac{2}{3}} + c_{32}b_2 + c_{11}b_1 + c_{13}b_3 = 85.86$$

Para $z^2 = (y^2, x^2)$:

$$f(z^2) = 4y_1^2 + 3y_3^2 + (y_1 + \frac{2}{3}y_3)^{\frac{2}{3}} + c_{32}b_2 + c_{31}b_1 + c_{13}b_3 = 85.68$$

Para $z^3 = (y^3, x^3)$:

$$f(z^3) = 4y_1^3 + y_2^3 + 3y_3^3 + (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{\frac{2}{3}} + c_{32}b_2 + c_{11}b_1 + c_{23}b_3 = 81.664$$

Para $z^4 = (y^4, x^4)$:

$$f(z^4) = y_2^8 + 3y_3^8 \left(\frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3\right)^8 + c_{32}b_3 + c_{31}b_1 + c_{23}b_3 = 75.98$$

4.3. $f(z^1) = 85.86 > f(z^*)$

$$f(z^2) = 85.68 > f(z^*)$$

$$f(z^3) = 85.664 > f(z^*)$$

$$f(z^4) = 75.98 < f(z^*)$$

En este caso la solución óptima es $z^4 = (y^4, x^4) \rightarrow z^* = (y^*, x^*)$, entonces:

$$y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(z^*) = 75.98$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2, 3)$.

2.1. Para $(h, \ell) = (2, 3)$,

$$i=1 \quad \gamma_{23}^1 = c_{12} - c_{13} = 3 - 4 = -1$$

$$i=2 \quad \gamma_{23}^2 = c_{21} - c_{22} = 8 - 4 = 4$$

$$i=3 \quad \gamma_{23}^3 = c_{32} - c_{33} = 3 - 7 = -4$$

Entonces $\gamma_{23}^3 < \gamma_{23}^1 < \gamma_{23}^2$, $i_1=3$, $i_2=1$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es $E = \{(2,3); (312)\}$.

2.2. Para $q \in \{1, 2, 3\}$,

$$i_1=3 \Rightarrow q=3 \quad J_3(2,3) = \{j \neq 2,3 \Rightarrow j=1 : \gamma_1^{31} < \gamma_2^{31}, \gamma_1^{32} + \gamma_3^{21} < \gamma_2^{31}\}$$

$$\gamma_1^{31} < \gamma_2^{31} \quad 0=0 \quad \text{se cumple,}$$

$$\gamma_1^{32} + \gamma_3^{21} < \gamma_2^{31} \quad -5 < 0 \quad \text{se cumple,}$$

se cumplen ambas condiciones pero el conjunto J_3 incluyó a el arco $j=2$, por lo tanto,

$$J_3((1,3);(312))=\emptyset \Rightarrow \beta_3=0.$$

$$i_2=1 \Rightarrow q=1 \quad J_1(2,3)=\{j \neq 2,3 \Rightarrow j=1 : \gamma_1^{13} < \gamma_2^{13}, \gamma_1^{12} < \gamma_3^{12}\}$$

$$\gamma_1^{13} < \gamma_2^{13} \quad 0=0 \quad \text{se cumple,}$$

$$\gamma_1^{12} < \gamma_3^{12} \quad -5 < 0 \quad \text{se cumple,}$$

se cumplen ambas condiciones, entonces:

$$J_1((2,3);(312))=1 \Rightarrow \beta_1 = b_1 = 4.$$

$$i_3=2 \Rightarrow q=2 \quad J_2(2,3)=\{(1,2,3) \setminus (\emptyset \cup (1) \cup (2,3))\}=\emptyset \Rightarrow \beta_2=0.$$

2.3. La pieza lineal es el paralelogramo

$$\Pi((2,3);(312)) = \begin{cases} 0 \leq y_3 \leq 7 \\ 0 \leq y_2 \leq 12 \\ y \in \Omega. \end{cases}$$

PASO 3. Cálculo de los vértices de la pieza lineal.

3.1. Determinando y^r para $r=1, 2, 3, 4$.

$$y^1 : y_3^1 = \beta_3 = 0 \quad y_1^1 = s - \beta_3 - \beta_2 = 15 \quad y_2^1 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (15, 0, 0)^T$$

$$y^2 : y_3^2 = \beta_3 + b_2 = 3 \quad y_1^2 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_2 = 12 \quad y_2^2 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (12, 0, 3)^T$$

$$y^3 : y_3^3 = \beta_3 = 0 \quad y_1^3 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_3 = 7 \quad y_2^3 = \beta_2 + b_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (7, 8, 0)^T$$

$$y^4 : y_3^4 = \beta_3 + b_2 = 3 \quad y_1^4 = s - \beta_3 - \beta_2 - b_2 - b_3 = 4 \quad y_2^4 = \beta_2 + b_3 = 8 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (4, 8, 3)^T$$

PASO 4. Cálculo de la solución básica óptima .

4.1. Calculando $x^y = \{x_{ij}^y\}$ para cada y .

$$x^1 : x_{11}^1 = b_1=4 \quad x_{12}^1 = b_2=3 \quad x_{13}^1 = b_3=8$$

$$x^2 : x_{11}^2 = b_1=4 \quad x_{32}^2 = b_2=3 \quad x_{13}^2 = b_3=8$$

$$x^3 : x_{11}^3 = b_1=4 \quad x_{12}^3 = b_2=3 \quad x_{23}^3 = b_3=8$$

$$x^4 : x_{11}^4 = b_1=4 \quad x_{32}^4 = b_2=3 \quad x_{23}^4 = b_3=8$$

4.2. Para $z^1 = (y^1, x^1)$:

$$f(z^1) = 4y_1^{1/2} + (y_1)^{1/2} + c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{13}b_3 = 82.572$$

Para $z^2 = (y^2, x^2)$:

$$f(z^2) = 4y_1^{1/2} + 3y_3^{1/2} + (y_1 + \frac{2}{3}y_3)^{1/2} + c_{11}b_1 + c_{32}b_2 + c_{13}b_3 = 85.86$$

Para $z^3 = (y^3, x^3)$:

$$f(z^3) = 4y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + (y_1 + \frac{1}{2}y_2)^{1/2} + c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + c_{23}b_3 = 79.357$$

Para $z^4 = (y^4, x^4)$:

$$f(z^4) = 4y_1^{1/2} + y_2^{1/2} + 3y_3^{1/2} + (y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{2}{3}y_3)^{1/2} + c_{11}b_1 + c_{32}b_2 + c_{23}b_3 = 81.66$$

4.3. $f(z^1) = 82.572 > f(z^*)$

$$f(z^2) = 85.86 > f(z^*)$$

$$f(z^3) = 79.357 > f(z^*)$$

$$f(z^4) = 81.66 > f(z^*)$$

En este caso la solución óptima es la misma $z^* = (y^*, x^*)$.

PASO 5. TERMINACIÓN

La solución óptima global de [PPT (3)] es

$$y^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad f(z^*) = 75.98 .$$

El resultado anterior indica que la fábrica 1 no debe producir, las fábricas 2 y 3 deben tener un nivel de producción de 8 unidades y 7 unidades respectivamente, distribuyendo 8 unidades de la fábrica 2 al almacén 3, 4 unidades de la fábrica 3 al almacén 1 y 3 unidades de la fábrica 3 al almacén 2, lo cual da el costo mínimo de 75.98 unidades monetarias. En la figura 4.2 se representan las piezas lineales y la solución óptima del problema.

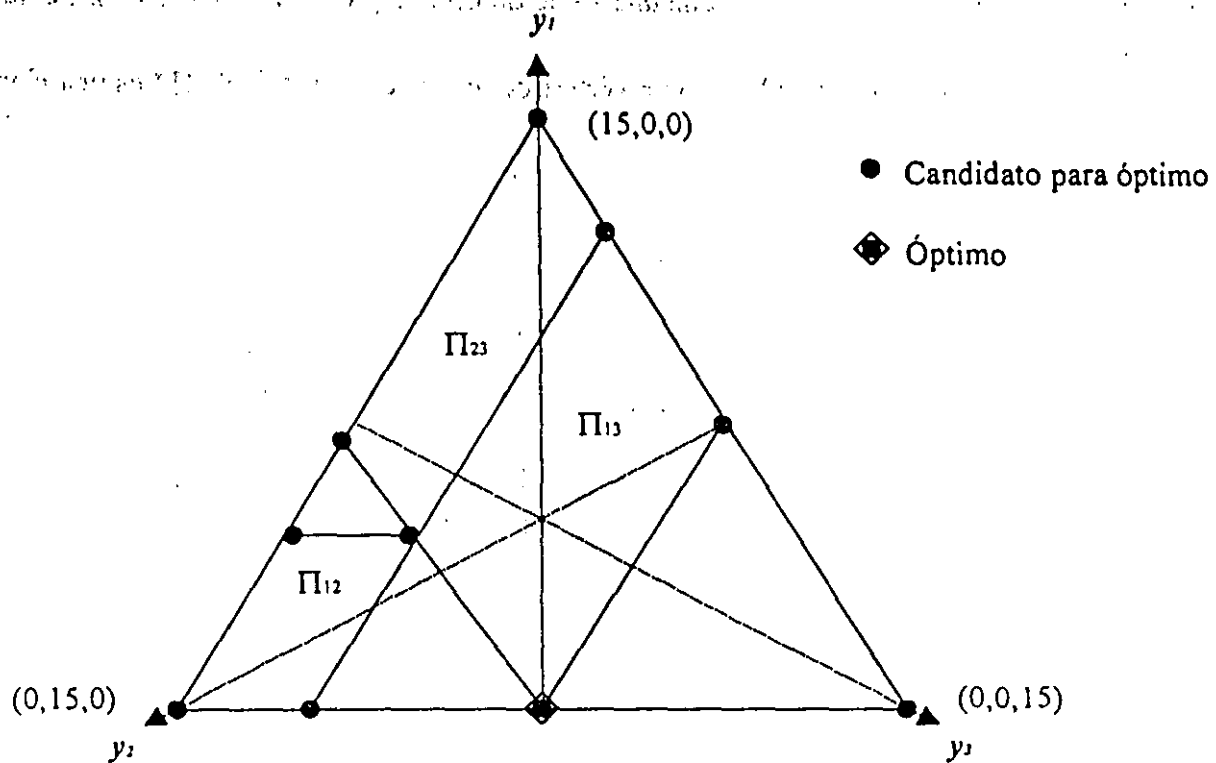


Figura 4.2 Las piezas lineales y la solución óptima.

4.4 [PPT(3)] CON RESTRICCIONES DE CAPACIDAD

Hasta este momento se ha considerado que las fábricas no tienen restricciones de capacidad, si lo anterior no se cumple se deben de tomar las intersecciones de las piezas lineales con las restricciones de capacidad, lo cual se establece en el teorema siguiente:

Teorema 4.4

El problema [PPT(3)] siempre tiene una solución óptima global $z^* = (y^*, x^*)$, tal que, $x^* = x^{y^*}$ y y^* es un vértice de $\Omega \cap S$ o un vértice de un polígono $\Pi^* \cap S$, Π^* es una pieza lineal de segunda clase de $\varphi(y)$.

Demostración.

Por el teorema 2.16, [PPT(3)] tiene una solución $z^{y^*} = (y^*, x^{y^*})$ donde

$$y^* \in \arg \min \{ f(x^{(y)}) : y \in V \}$$

y V es el conjunto de los vértices de todos los polígonos $\Omega \cap S$ y $\Omega \cap P$. Si un punto $y \in V$ no es un vértice del polígono $\Omega \cap S$ entonces éste debe permanecer sobre uno de los bordes de alguna pieza $\Pi \in P$ la cual no es un borde de Ω . Por otra parte, se sabe que cualquier vértice de una pieza de primera clase que no es un vértice de Ω debe ser vértice de alguna pieza vecina de segunda clase. Por lo tanto, si un punto $y \in V$ no es un vértice de $\Omega \cap S$ entonces éste debe permanecer sobre un borde de alguna pieza de segunda clase (teorema 3.22). ■

Para resolver [PPT(3)] con restricciones de capacidad es suficiente calcular los vértices de $\Omega \cap S$ y los de $\Pi \cap S$ para cada pieza de Π de segunda clase.

Cálculo de los vértices de $\Omega \cap S$.

Todo vértice de $\Omega \cap S$ es la intersección de al menos dos líneas : $y_i = s_i$, $i = 1, 2, 3$, o la intersección de una de éstas líneas con uno de los lados de Ω . Para cada valor i_0 fijo, la línea $y_{i_0} = s_{i_0}$ corta las líneas $y_i = s_i$, $i \neq i_0$, $y_i = 0$, $i \neq i_0$ en cuatro puntos. De esta manera los vértices del triángulo formado por las líneas $y_i = s_i$, $i = 1, 2, 3$ se cuentan dos veces, por lo tanto, hay en total $12-3=9$ puntos (no necesariamente todos distintos) a ser considerados :

$$\begin{aligned} & (s_1, s_2, s-s_1-s_2), (s_1, s-s_1, 0), (s-s_2, s_2, 0); \\ & (s_1, s-s_1-s_3, s_3), (s_1, 0, s-s_1), (s-s_3, 0, s_3); \\ & (s-s_2-s_3, s_2, s_3), (0, s_2, s-s_2), (0, s-s_3, s_3). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Todos los puntos anteriores que cumplen con $y_i \geq 0$, $\forall i = 1, 2, 3$, serán un vértice de $\Omega \cap S$. El problema es factible si $s_1+s_2+s_3 \geq s$. Estos cálculos se incluyen en el paso 1 del algoritmo.

Cálculo de los vértices de $\Pi \cap S$.

Este cálculo sólo se considera cuando la capacidad de producción de las fábricas al menos puede cubrir la demanda de los almacenes de la etiqueta correspondiente, es decir, cuando $s_i \geq \beta_i$, es un polígono en Ω definido por los grupos de desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \beta_i & \leq y_i \leq \min\{s_i, \beta_i + b_h\}; \\ \beta_i & \leq y_i \leq \min\{s_i, \beta_i + b_l\}; \\ y_i & \leq s_i. \end{aligned}$$

Los dos primeros grupos de desigualdades definen a un paralelogramo Π' con lados paralelos a los lados de Π y $\Pi \cap S = \Pi' \cap \{y_i : y_i \leq s_i\}$. El paralelogramo Π' tiene cuatro vértices, la línea $y_i = s_i$ corta las cuatro líneas que forman el paralelogramo Π' en otros cuatro puntos. Por lo tanto, los vértices de $\Pi \cap S$ se encuentran entre los ocho puntos que a continuación se indican. Si $i_1 = 1, i_2 = 2, i_3 = 3$ y

$$\alpha_1 = \min\{s_{i_1}, \beta_{i_1} + b_{i_1}\};$$

$$\alpha_3 = \min\{s_{i_3}, \beta_{i_3} + b_{i_3}\};$$

entonces,

$$\begin{aligned} & (\beta_1, s - \beta_1 - \beta_3, \beta_3), & (\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_3, \alpha_3); \\ & (\alpha_1, s - \alpha_1 - \beta_3, \beta_3), & (\alpha_1, s - \alpha_1 - \alpha_3, \alpha_3); \\ & (\beta_1, s_2, s - \beta_1 - s_2), & (\alpha_1, s_2, s - \alpha_1 - s_2); \\ & (s - s_2 - \beta_3, s_2, \beta_3), & (s - s_2 - \alpha_3, s_2, \alpha_3). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Todo punto y en esta lista satisface el grupo de desigualdades anteriores y $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ es un vértice de $\Pi \cap S$. Para cada punto sólo hay que revisar la factibilidad. Estos cálculos se incluyen en el paso 3 del algoritmo.

Las restricciones de capacidad $y_i \leq s_i, i = 1, 2, 3$ sólo generan un número pequeño más de operaciones elementales, por consiguiente, la complejidad computacional del algoritmo se mantiene.

4.5 OTROS EJEMPLOS

El problema de minimización cóncava con m fuentes y n arcos con costos no lineales (cóncavos) denotado como $[P(m, n)]$, se puede resolver utilizando el algoritmo antes expuesto si $m+n=3$. Los dos problemas que cumplen con la condición anterior son:

1. $[P(1,2)]$, este caso trata de una fuente y dos arcos con costos cóncavos.
2. $[P(2,1)]$, este caso trata de dos fuentes y un arco con costo cóncavo.

Para la solución de los problemas anteriores se realiza una transformación de los arcos con costos no lineales a una fuente nueva y dos arcos más, de tal manera que se genera una red que es similar al problema $[PPT(3)]$, y por ello se pueden resolver utilizando el algoritmo mostrado. En el apéndice se da una mayor explicación sobre estos problemas y para mayor información consultar la referencia [30].

4.5.1 El problema $[P(1,2)]$

EJEMPLO

Sea la red mostrada en la figura 4.3, en la cual

$$N_0 = F_0, I_1,$$

$$N_1 = B_1,$$

$$N_2 = F_1,$$

$$N_3 = I_2, B_2,$$

$$N_4 = B_3,$$

$N_3 = F_2, B_4$.

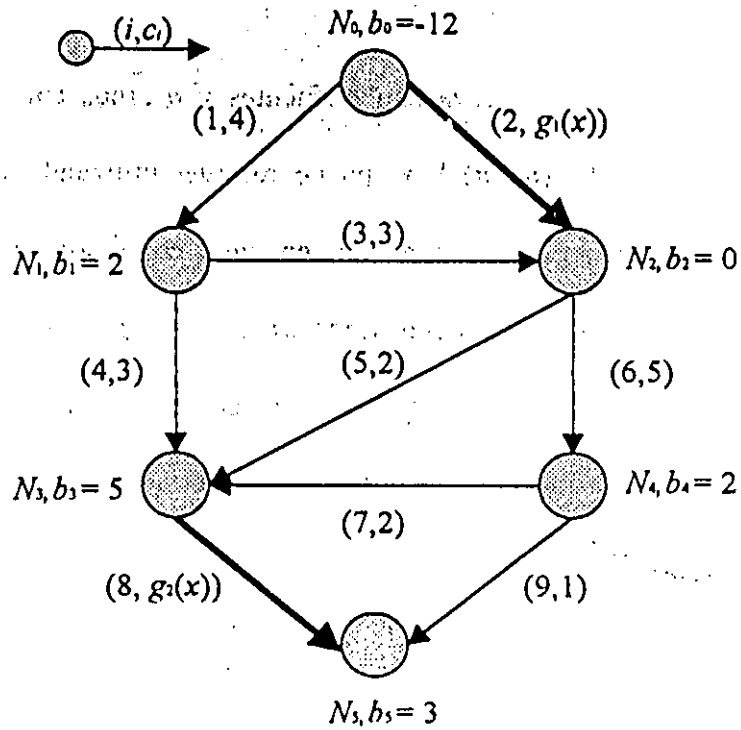


Figura 4.3

Los costos de los arcos negros (N_0, N_2) y (N_3, N_5) están dados por las funciones:

$$g_1(x) = \begin{cases} 5 + x^{1/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \begin{cases} 1 + x^{1/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

respectivamente.

SOLUCIÓN

Paso 1. Se obtienen los valores de las trayectorias más cortas :

$$c_{01}^* = 0, \quad c_{02}^* = 7, \quad c_{12}^* = 2, \quad c_{21}^* = \infty$$

y la matriz de costos lineales c_{ij} ,

$$\{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 12 & 13 \\ \infty & 2 & 5 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 2. Resolviendo el problema equivalente [PPT(3)].

La función $g(y)$ muestra el costo de producción,

$$g(y) = \min \{ g_1(y_1) + g_2(y_2) + 7y_2, \quad g_1(y_1 + y_2) + g_2(y_2) + 2y_2,$$

$$g_1(y_1) + g_2(y_1 + y_2) + \infty y_1 + 7(y_1 + y_2) \},$$

la matriz de costos de transportación y el vector de demandas son,

$$c = \{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 12 & 13 \\ \infty & 2 & 5 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \{b_j\} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

PASO 1. El total de la demanda es $s = \sum_{j=1}^4 b_j = 12$, entonces Ω es el triángulo

$$\Omega = y = \{ y = (y_0, y_1, y_2) : y_0 + y_1 + y_2 = s (=12), \quad y_0, y_1, y_2 \geq 0 \}.$$

Las matrices x_i , para $i=0, 1, 2$ son:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculando $f(z_i) = g(y_i) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$ para los vértices y_0, y_1, y_2 de Ω :

Para $(y_0)^T = (12, 0, 0)$,

$$f(z_0) = c_{01}x_{01} + c_{02}x_{02} + c_{03}x_{03} = (4)(2) + (7)(5) + (12)(2) + (13)(3) = 106.$$

Para $(y_1)^T = (0, 12, 0)$,

$$f(z_1) = 5 + y^{1/2} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} = 5 + (12)^{1/2} + (2)(\infty) + (2)(5) + (6)(3)$$

$$f(z_1) = \infty.$$

Para $(y_2)^T = (0, 0, 12)$,

$$f(z_2) = 1 + y^{2/3} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} = 1 + (12)^{2/3} + (2)(\infty) + (5)(\infty) + (3)(0)$$

$$f(z_2) = \infty.$$

El menor valor de $f(z_i)$ es $f(z_0)$, por lo tanto,

$$y^* = y_0, \quad x^* = x_0, \quad z^* = (y^*, x^*) \quad f(z^*) = g(y^*) + cx^*.$$

$$y^* = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^* = x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y } f(z^*) = 106.$$

PASO 2. Calculando las piezas lineales: $\Pi(1,2)$, $\Pi(1,3)$, $\Pi(1,4)$, $\Pi(2,3)$, $\Pi(2,4)$, $\Pi(3,4)$.

Calculando la pieza $\Pi(1,2)$.

$$i=0 \quad \gamma_{12}^0 = c_{01} - c_{02} = 4 - 7 = -3$$

$$i=1 \quad \gamma_{12}^1 = c_{11} - c_{12} = \infty - 2 = \infty$$

$$i=2 \quad \gamma_{12}^2 = c_{21} - c_{22} = \infty - \infty = 0$$

entonces $\gamma_{12}^0 < \gamma_{12}^2 < \gamma_{12}^1$, $i_1=0$, $i_2=2$, $i_3=1$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,2); (021)\}.$$

Para $q \in \{0,2,1\}$,

$$q=0 \quad J_0(1,2) = \{j \neq 1,2 \Rightarrow j=3 \text{ ó } j=4, h=1, \ell=2\};$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{02} < \gamma_1^{02}, c_{03} - c_{23} < c_{01} - c_{21}, 13 - \infty < 4 - \infty \therefore \text{no cumple.}$$

$$\gamma_3^{01} + \gamma_2^{12} < \gamma_1^{02}, (c_{03} - c_{13}) + (c_{12} - c_{22}) < c_{01} - c_{21}$$

$$(12 - 5) + (2 - \infty) < 4 - \infty \therefore \text{no cumple.}$$

$$j=4 \quad \gamma_4^{02} < \gamma_1^{02}, c_{04} - c_{24} < c_{01} - c_{21}, 13 - 0 < 4 - \infty \therefore \text{no cumple.}$$

$$\gamma_4^{01} + \gamma_2^{12} < \gamma_1^{02}, (c_{04} - c_{14}) + (c_{12} - c_{22}) < c_{01} - c_{21}$$

$$(13 - 6) + (2 - \infty) < 4 - \infty \therefore \text{no cumple.}$$

$$J_0((1,2);(021)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0.$$

$$q=2 \quad J_2(1,2) = \{j \neq 1,2 \Rightarrow j=3 \text{ ó } j=4, h=1, \ell=2\};$$

$$j=3 \quad \gamma_3^{20} < \gamma_1^{20}, c_{23} - c_{03} < c_{21} - c_{01}, \infty - 12 < \infty - 4$$

$$-12 < -4 \quad \therefore \text{se cumple.}$$

$$\gamma_3^{21} < \gamma_3^{21}, c_{23}-c_{13} < c_{22}-c_{12}, \infty - 5 < \infty - 2$$

$$-5 < -2 \quad \therefore \text{se cumple.}$$

$$j=4 \quad \gamma_4^{20} < \gamma_4^{20}, c_{24}-c_{04} < c_{21}-c_{01}, 0 - 4 < \infty - 4$$

$$0 < \infty \quad \therefore \text{se cumple.}$$

$$\gamma_4^{21} < \gamma_4^{21}, c_{24}-c_{14} < c_{22}-c_{12}, 0 - 6 < \infty - 2, \therefore \text{se}$$

cumple.

\therefore El nodo dos une a los nodos almacén 3 y 4.

$$J_2((1,2);(021)) = \{3,4\} \Rightarrow \beta_2 = b_3 + b_4 = 2+3=5.$$

$$q=1 \quad J_1(1,2) = \{1,2,3,4\} \setminus (\emptyset \cup (3,4) \cup (1,2)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,2);(021)) = \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 2 \\ 0 \leq y_1 \leq 5 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

PASO 3. Determinando y^r para $r = 1,2,3,4$.

$$y^1: y_0^1 = \beta_0 = 0 \quad y_2^1 = s - \beta_0 - \beta_1 = 12 \quad y_1^1 = \beta_1 = 0$$

$$y^2: y_0^2 = \beta_0 + b_1 = 2 \quad y_2^2 = s - \beta_0 - \beta_1 - b_1 = 10 \quad y_1^2 = \beta_1 = 0$$

$$y^3: y_0^3 = \beta_0 = 0 \quad y_2^3 = s - \beta_0 - \beta_1 - b_2 = 7 \quad y_1^3 = \beta_1 + b_2 = 5$$

$$y^4: y_0^4 = \beta_0 + b_1 = 2 \quad y_2^4 = s - \beta_0 - \beta_1 - b_1 - b_2 = 5 \quad y_1^4 = \beta_1 + b_2 = 5$$

por lo tanto,

$$y^1 = (0,0,12)^T$$

$$y^2 = (2, 0, 10)^T$$

$$y^3 = (0, 5, 7)^T$$

$$y^4 = (2, 5, 5)^T$$

PASO 4. Calculando $x^y = \{x_{ij}^y\}$ para cada y .

$$x^1: x_{23}^1 = b_3 = 2 \quad x_{24}^1 = b_4 = 3 \quad x_{21}^1 = b_1 = 2 \quad x_{22}^1 = b_2 = 5$$

$$x^2: x_{23}^2 = b_3 = 2 \quad x_{24}^2 = b_4 = 3 \quad x_{01}^2 = b_1 = 2 \quad x_{22}^2 = b_2 = 5$$

$$x^3: x_{23}^3 = b_3 = 2 \quad x_{24}^3 = b_4 = 3 \quad x_{21}^3 = b_1 = 2 \quad x_{12}^3 = b_2 = 5$$

$$x^4: x_{23}^4 = b_3 = 2 \quad x_{24}^4 = b_4 = 3 \quad x_{01}^4 = b_1 = 2 \quad x_{12}^4 = b_2 = 5$$

Para $z_1 = (y^1, x^1)$:

$$f(z_1) = g(y_1) + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}$$

$$g(y_1) = \min \begin{cases} 0 + (1 + (12)^{1/2}) + (7)(12) = 90.24 \\ (5 + (12)^{1/2}) + (1 + (12)^{1/2}) + (2)(12) = \underline{38.7} \\ \infty \end{cases}$$

$$f(z_1) = 38.7 + (\infty)(2) + (0)(3) + (\infty)(2) + (\infty)(5) = \infty$$

Para $z_2 = (y^2, x^2)$:

$$f(z_2) = g(y_2) + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24} + c_{01}x_{01} + c_{22}x_{22}$$

$$g(y_2) = \min \begin{cases} 0 + (1 + (10)^{1/2}) + (7)(10) = 75.64 \\ (5 + (10)^{1/2}) + (1 + (10)^{1/2}) + (2)(10) = \underline{33.8} \\ \infty \end{cases}$$

$$f(z_2) = 33.8 + (\infty)(2) + (0)(3) + (4)(2) + (\infty)(5) = \infty$$

Para $z_3=(y^3, x^3)$:

$$f(z_3)=g(y_3)+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{21}x_{21}+c_{12}x_{12}$$

$$g(y_3)=\min \begin{cases} (5+(5)^{\frac{1}{2}}) + (1+(7)^{\frac{1}{2}}) + (7)(7) = 60.88 \\ (5+(12)^{\frac{1}{2}}) + (1+(7)^{\frac{1}{2}}) + (2)(7) = 27.1 \\ \infty \end{cases}$$

$$f(z_3)=27.1 + (\infty)(2) + (0)(3) + (\infty)(2) + (2)(5) = \infty$$

Para $z_4=(y^4, x^4)$:

$$f(z_4)=g(y_4)+c_{23}x_{23}+c_{24}x_{24}+c_{01}x_{01}+c_{12}x_{12}$$

$$g(y_4)=\min \begin{cases} (5+(5)^{\frac{1}{2}}) + (1+(5)^{\frac{1}{2}}) + (7)(5) = 46.1 \\ (5+(10)^{\frac{1}{2}}) + (1+(5)^{\frac{1}{2}}) + (2)(5) = 22 \\ \infty \end{cases}$$

$$f(z_4)=22 + (\infty)(2) + (0)(3) + (4)(2) + (2)(5) = \infty$$

$$f(z_1) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_2) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_3) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_4) = \infty > f(z^*)$$

PASO 2. Calculando la pieza $\Pi(1,3)$.

$$i=0 \quad \gamma_{13}^0 = -7$$

$$i=1 \quad \gamma_{13}^1 = \infty$$

$$i=2 \quad \gamma_{13}^2 = 0$$

entonces $\gamma_{13}^0 < \gamma_{13}^2 < \gamma_{13}^1$, $i_1=0$, $i_2=2$, $i_3=1$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,3); (021)\}.$$

$$J_0((1,3);(021)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_2((1,3);(021)) = 4 \Rightarrow \beta_2 = b_4 = 3$$

$$J_1((1,3);(021)) = 2 \Rightarrow \beta_1 = b_2 = 5$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,3);(021)) = \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 2 \\ 5 \leq y_1 \leq 7 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1=0 \quad y_2^1=7 \quad y_1^1=5 \quad \Rightarrow \quad y^1=(0,5,7)^T$$

$$y^2: y_0^2=2 \quad y_2^2=5 \quad y_1^2=5 \quad \Rightarrow \quad y^2=(2,5,5)^T$$

$$y^3: y_0^3=0 \quad y_2^3=5 \quad y_1^3=7 \quad \Rightarrow \quad y^3=(0,7,5)^T$$

$$y^4: y_0^4=2 \quad y_2^4=3 \quad y_1^4=7 \quad \Rightarrow \quad y^4=(2,7,3)^T$$

$$\text{PASO 4. } x^1: x_{12}^1=b_2=5 \quad x_{24}^1=b_4=3 \quad x_{21}^1=b_1=2 \quad x_{23}^1=b_3=2$$

$$x^2: x_{12}^2=b_2=5 \quad x_{24}^2=b_4=3 \quad x_{01}^2=b_1=2 \quad x_{23}^2=b_3=2$$

$$x^3: x_{12}^3=b_2=5 \quad x_{24}^3=b_4=3 \quad x_{21}^3=b_1=2 \quad x_{13}^3=b_3=2$$

$$x^4: x_{12}^4=b_2=5 \quad x_{24}^4=b_4=3 \quad x_{01}^4=b_1=2 \quad x_{13}^4=b_3=2.$$

$$f(z_1) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_2) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_3) = \infty > f(z^*)$$

Para $z_4 = (y^4, x^4)$:

$$f(z_4) = g(y_4) + c_{12}x_{12} + c_{24}x_{24} + c_{01}x_{01} + c_{13}x_{13}$$

$$g(y_4) = \min \begin{cases} (5 + (7)^{1/2}) + (1 + (3)^{1/2}) + (7)(3) = 31.72 \\ (5 + (10)^{1/2}) + (1 + (3)^{1/2}) + (2)(3) = \underline{17.24} \\ \infty \end{cases}$$

$$f(z_4) = 17.24 + (2)(5) + (0)(3) + (4)(2) + (5)(2) = 45.24$$

$$f(z_4) = 45.24 < f(z^*)$$

En este caso la solución óptima es $z_4 = (y^4, x^4) \rightarrow z^* = (y^*, x^*)$,

$$y^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad g(y_4) = 17.24$$

$$f(z^*) = 45.24$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(1,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{14}^0 = -9$$

$$i=1 \quad \gamma_{14}^1 = \infty - 6$$

$$i=2 \quad \gamma_{14}^2 = \infty - 0$$

entonces $\gamma_{14}^0 < \gamma_{14}^1 < \gamma_{14}^2$, $i_1=0$, $i_2=1$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,4); (012)\}.$$

$$J_0((1,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_1((1,4);(012)) = 2, 3 \Rightarrow \beta_1 = b_2 + b_3 = 5+2=7$$

$$J_2((1,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,4);(012)) = \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 2 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega. \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1=0 \quad y_1^1=12 \quad y_2^1=0 \quad \Rightarrow \quad y^1=(0,12,0)^T$$

$$y^2: y_0^2=2 \quad y_1^2=10 \quad y_2^2=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=(2,10,0)^T$$

$$y^3: y_0^3=0 \quad y_1^3=9 \quad y_2^3=3 \quad \Rightarrow \quad y^3=(0,9,3)^T$$

$$y^4: y_0^4=2 \quad y_1^4=7 \quad y_2^4=3 \quad \Rightarrow \quad y^4=(2,7,3)^T$$

PASO 4. Para simplificar la notación se eliminará el superíndice de las variables

$$\{x_{ij}^y\}.$$

$$x^1: x_{12}=5x_{13}=2 \quad x_{11}=2 \quad x_{14}=3$$

$$x^2: x_{12}=5x_{13}=2 \quad x_{01}=2 \quad x_{14}=3$$

$$x^3: x_{12}=5x_{13}=2 \quad x_{11}=2 \quad x_{24}=3$$

$$x^4: x_{12}=5x_{13}=2 \quad x_{01}=2 \quad x_{24}=3$$

$$f(z_1) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_2) = 54.16 > f(z^*)$$

$$f(z_3) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_4) = 45.24 = f(z^*)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2,3)$.

$$i=0 \quad \gamma_{23}^0 = -5$$

$$i=1 \quad \gamma_{23}^1 = -3$$

$$i=2 \quad \gamma_{23}^2 = 0$$

entonces $\gamma_{23}^0 < \gamma_{23}^1 < \gamma_{23}^2$, $i_1 = 0$, $i_2 = 1$, $i_3 = 2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(2,3); (012)\}.$$

$$J_0((2,3);(012)) = 1 \Rightarrow \beta_0 = b_1 = 2$$

$$J_1((2,3);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

$$J_2((2,3);(012)) = 4 \Rightarrow \beta_2 = b_4 = 3$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((2,3);(012)) = \begin{cases} 2 \leq y_0 \leq 7 \\ 3 \leq y_2 \leq 5 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1 = 2 \quad y_1^1 = 7 \quad y_2^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (2,7,3)^T$$

$$y^2: y_0^2 = 7 \quad y_1^2 = 2 \quad y_2^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (7,2,3)^T$$

$$y^3: y_0^3 = 2 \quad y_1^3 = 5 \quad y_2^3 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (2,5,5)^T$$

$$y^4: y_0^4 = 7 \quad y_1^4 = 0 \quad y_2^4 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (7,0,5)^T$$

PASO 4. $x^1: x_{01}=2x_{24}=3 \quad x_{12}=5 \quad x_{13}=2$

$x^2: x_{01}=2x_{24}=3 \quad x_{02}=5 \quad x_{13}=2$

$x^3: x_{01}=2x_{24}=3 \quad x_{12}=5 \quad x_{23}=2$

$x^4: x_{01}=2x_{24}=3 \quad x_{02}=5 \quad x_{23}=2$

$$f(z_1) = 45.24 = f(z^*)$$

$$f(z_2) = 69.31 > f(z^*)$$

$$f(z_3) = \infty > f(z^*)$$

$$f(z_4) = \infty > f(z^*)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{24}^0 = -6$$

$$i=1 \quad \gamma_{24}^1 = -4$$

$$i=2 \quad \gamma_{24}^2 = \infty$$

entonces $\gamma_{23}^0 < \gamma_{23}^1 < \gamma_{23}^2$, $i_1=0$, $i_2=1$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(2,4); (012)\}.$$

$$J_0((2,4);(012)) = 1 \Rightarrow \beta_0 = b_1 = 2$$

$$J_1((2,4);(012)) = 3 \Rightarrow \beta_1 = b_3 = 2$$

$$J_2((2,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((2,4);(012)) = \begin{cases} 2 \leq y_0 \leq 7 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1=2 \quad y_1^1=10 \quad y_2^1=0 \quad \Rightarrow \quad y^1=(2,10,0)^T$$

$$y^2: y_0^2=7 \quad y_1^2=5 \quad y_2^2=0 \quad \Rightarrow \quad y^2=(7,5,0)^T$$

$$y^3: y_0^3=2 \quad y_1^3=7 \quad y_2^3=3 \quad \Rightarrow \quad y^3=(2,7,3)^T$$

$$y^4: y_0^4=7 \quad y_1^4=2 \quad y_2^4=3 \quad \Rightarrow \quad y^4=(7,2,3)^T$$

$$\text{PASO 4. } x^1: x_{01}=2x_{13}=2 \quad x_{12}=5 \quad x_{14}=3$$

$$x^2: x_{01}=2x_{13}=2 \quad x_{02}=5 \quad x_{14}=3$$

$$x^3: x_{01}=2x_{13}=2 \quad x_{12}=5 \quad x_{24}=3$$

$$x^4: x_{01}=2x_{13}=2 \quad x_{02}=5 \quad x_{24}=3$$

$$f(z_1) = 54.16 > f(z^*)$$

$$f(z_2) = 78.23 > f(z^*)$$

$$f(z_3) = 45.24 = f(z^*)$$

$$f(z_4) = 69.31 > f(z^*)$$

PASO 2. Calculando la pieza $\Pi(3,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{34}^0 = -1$$

$$i=1 \quad \gamma_{34}^1 = -1$$

$$i=2 \quad \gamma_{34}^2 = \infty$$

entonces $\gamma_{34}^0 < \gamma_{34}^1 < \gamma_{34}^2$, $i_1=0$, $i_2=1$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(3,4); (012)\}.$$

$$J_0((3,4);(012)) = 1,2 \Rightarrow \beta_0 = b_1 + b_2 = 2 + 5 = 7$$

$$J_1((3,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$J_2((3,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((3,4);(012)) = \begin{cases} 7 \leq y_0 \leq 9 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1 = 7 \quad y_1^1 = 5 \quad y_2^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (7, 5, 0)^T$$

$$y^2: y_0^2 = 9 \quad y_1^2 = 3 \quad y_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (9, 3, 0)^T$$

$$y^3: y_0^3 = 7 \quad y_1^3 = 2 \quad y_2^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (7, 2, 3)^T$$

$$y^4: y_0^4 = 9 \quad y_1^4 = 0 \quad y_2^4 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (9, 0, 3)^T$$

$$\text{PASO 4. } x^1: x_{01} = 2x_{02} = 5 \quad x_{13} = 2 \quad x_{14} = 3$$

$$x^2: x_{01} = 2x_{02} = 5 \quad x_{13} = 2 \quad x_{14} = 3$$

$$x^3: x_{01} = 2x_{02} = 5 \quad x_{13} = 2 \quad x_{14} = 3$$

$$x^4: x_{01} = 2x_{02} = 5 \quad x_{13} = 2 \quad x_{14} = 3$$

$$f(z_1) = 78.23 > f(z^*)$$

$$f(z_2) = 91.73 > f(z^*)$$

$$f(z_3) = 69.31 > f(z^*)$$

$$f(z_4) = 82.81 > f(z^*)$$

Paso 3. La solución óptima global de [P(1,2)] es

$$y^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x^* = [2 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 8 \quad 2 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^T$$

$$f(z^*) = 45.24$$

En las figuras siguientes se muestran las piezas lineales obtenidas, el vértice óptimo y la red óptima del ejemplo anterior de [P(1,2)].

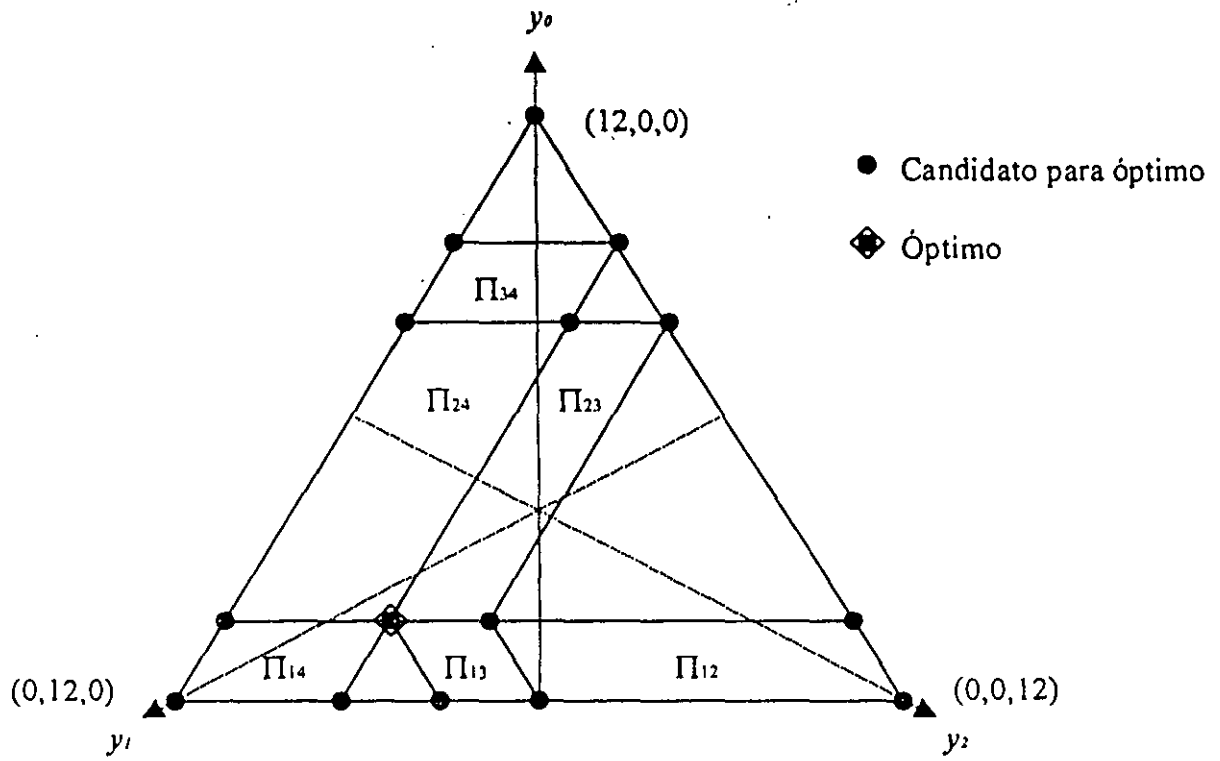


Figura 4.4 Las piezas lineales y el valor óptimo de $[P(1,2)]$.

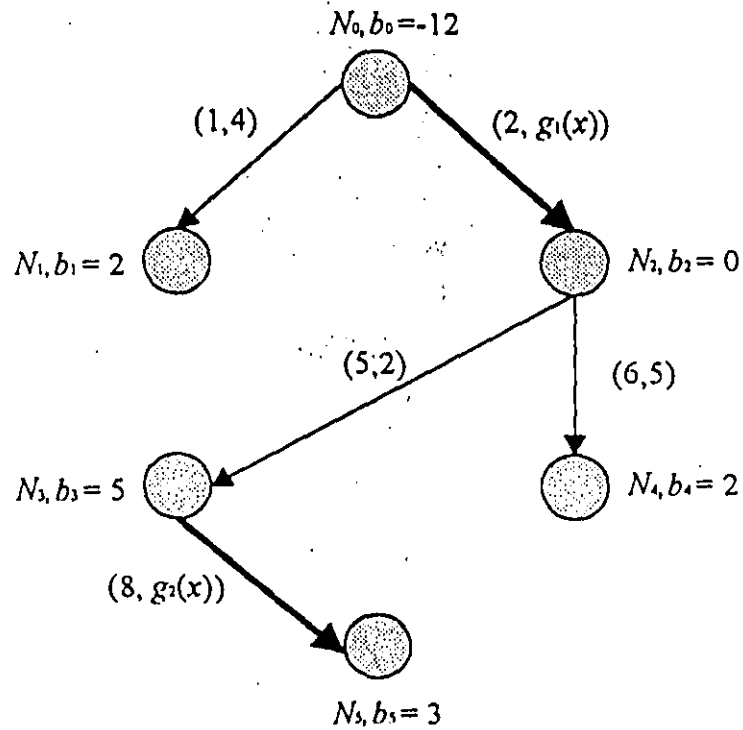


Figura 4.5 La red óptima de [P(1,2)].

4.5.2 El problema [P(2,1)]

EJEMPLO

Sea la red de la figura 4.6, en la cual

$$N_0 = I_0, F_1,$$

$$N_1 = B_1,$$

$$N_2 = F_0, F_2,$$

$$N_3 = B_2,$$

$$N_4 = B_3,$$

$$N_5 = B_4.$$

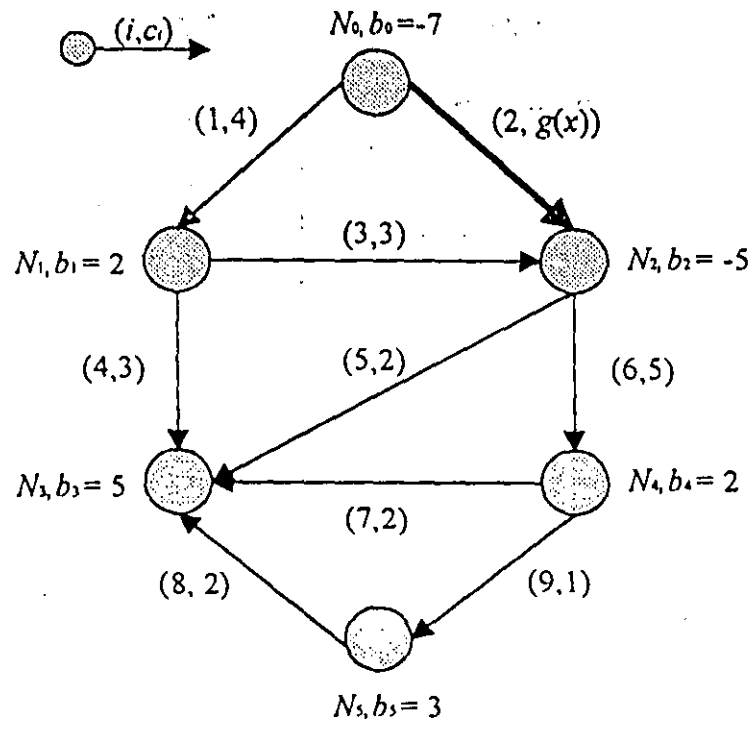


Figura 4.6

El costo del arco negro (N_0, N_2) esta dado por la función

$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^{\frac{1}{2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Paso 1. Se obtienen los valores de las trayectorias más cortas :

$$c_{10}^* = 0 \quad \text{y} \quad c_{20}^* = \infty$$

y la matriz de costos lineales, c_{ij} ,

$$\{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 12 & 13 \\ \infty & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Paso 2. Resolviendo el problema equivalente [PPT(3)].

La función $g(y)$ muestra el costo de producción

$$g(y) = g(12 - y_1 - y_2),$$

la matriz de costos de transportación y el vector de demandas son,

$$c = \{c_{ij}\} = \begin{bmatrix} \infty & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 12 & 13 \\ \infty & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \{b_j\} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

PASO 1. El total de la demanda es $s = \sum_{j=1}^4 b_j = 12$, entonces Ω es el triángulo

$$\Omega = \{ y = (y_0, y_1, y_2) : y_0 + y_1 + y_2 = s (=12), y_0, y_1, y_2 \geq 0 \},$$

$$S = \{ y \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y_0 \leq 7, 0 \leq y_1 \leq 7, 0 \leq y_2 \leq 5 \}.$$

Calculando el conjunto de vértices de los polígonos $S \cap \Omega$, se tiene que $y_i \geq 0$, $i = 0, 1, 2$ $s_0 = 7$, $s_1 = 7$, $s_2 = 5$ y utilizando las expresiones

(4.1),

$$(s_0, s_1, s - s_0 - s_1) = (7, 7, -2) \quad \text{No es factible.}$$

$$(s_0, s - s_0, 0) = (7, 5, 0)$$

$$(s - s_1, s_1, 0) = (7, 5, 0)$$

$$(s_0, s - s_0 - s_2, s_2) = (7, -2, 7) \quad \text{No factible.}$$

$$(s_0, 0, s - s_0) = (7, 0, 5)$$

$$(s - s_2, 0, s_2) = (7, 0, 5)$$

$$(s - s_1 - s_2, s_1, s_2) = (0, 7, 5)$$

$$(0, s_1, s - s_1) = (0, 7, 5)$$

$$(0, s - s_2, s_2) = (0, 7, 5)$$

El conjunto $S \cap \Omega = \{(7, 5, 0), (7, 0, 5), (0, 7, 5)\}$.

- Para el vértice $(7, 5, 0)$

$$x_{02} = 2 \quad x_{03} = 2 \quad x_{04} = 3 \quad x_{11} = 2 \quad x_{12} = 3$$

$$g(y) = \{g(12 - 5 - 0)\} = g(7) = 3 + (7)^{1/2} = 5.645$$

$$f(z) = g(y) + c_{02}x_{02} + c_{03}x_{03} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12}$$

$$f(z) = 5.645 + (2)(2) + (5)(2) + (6)(3) + (4)(2) + (7)(3) = 71.645$$

$$f(z^*) = 71.645$$

• Para el vértice (7,0,5)

$$x_{01}=2 \quad x_{02}=5 \quad x_{23}=2 \quad x_{24}=3$$

$$g(y) = \{g(12-0-5)\} = g(7) = 3+(7)^{1/2} = 5.645$$

$$f(z) = g(y) + c_{01}x_{01} + c_{02}x_{02} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24}$$

$$f(z) = 5.645 + (\infty)(2) + (2)(5) + (12)(2) + (6)(3) = \infty$$

$$f(z^*) < \infty$$

• Para el vértice (0,7,5)

$$x_{11}=2 \quad x_{12}=5 \quad x_{23}=2 \quad x_{24}=3$$

$$g(y) = \{g(12-7-5)\} = g(0) = 3+(0)^{1/2} = 3$$

$$f(z) = g(y) + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24}$$

$$f(z) = 3 + (4)(2) + (7)(5) + (5)(2) + (6)(3) = 72$$

$$f(z^*) < 72.$$

PASO 2. Calculando las piezas lineales $\Pi(1,2)$, $\Pi(1,3)$, $\Pi(1,4)$, $\Pi(2,3)$,

$\Pi(2,4)$, $\Pi(3,4)$.

Calculando la pieza lineal $\Pi(1,2)$.

$$i=0 \quad \gamma_{12}^0 = \infty - 2$$

$$i=1 \quad \gamma_{12}^1 = -7$$

$$i=2 \quad \gamma_{12}^2 = \infty - 2$$

entonces $\gamma_{12}^1 < \gamma_{12}^0 < \gamma_{12}^2$, $i_1=1$, $i_2=0$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,2); (102)\}.$$

$$J_1((1,2);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$J_0((1,2);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_2((1,2);(102)) = 3,4 \Rightarrow \beta_2 = b_3 + b_4 = 2+3=5$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,2);(102)) = \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 2 \\ 5 \leq y_2 \leq 10 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

PASO 3. $y^1: y_1^1 = 0 \quad y_0^1 = 7 \quad y_2^1 = 5 \Rightarrow y^1 = (7,0,5)^T$

$$y^2: y_1^2 = 2 \quad y_0^2 = 5 \quad y_2^2 = 5 \Rightarrow y^2 = (5,2,5)^T$$

$$y^3: y_1^3 = 0 \quad y_0^3 = 2 \quad y_2^3 = 10 \Rightarrow y^3 = (2,0,10)^T$$

$$y^4: y_1^4 = 2 \quad y_0^4 = 0 \quad y_2^4 = 10 \Rightarrow y^4 = (0,2,10)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{12}$.

$$\alpha_1 = \min \{s_1, \beta_1 + b_1\} = \min \{7, 0+2\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_2\} = \min \{5, 5+5\} = 5$$

$$(\beta_1, s_0, s - \beta_1 - s_0) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \beta_2, \beta_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\alpha_1, s_0, s-\alpha_1-s_0) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\beta_2, \beta_2) = (2, 5, 5) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (5, 2, 5)$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2) = (2, 5, 5) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (5, 2, 5)$$

$$(s-s_0-\beta_2, s_0, \beta_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (7, 0, 5)$$

$$(s-s_0-\alpha_2, s_0, \alpha_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (7, 0, 5)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(1,3)$.

$$i=0 \quad \gamma_{13}^0 = \infty - 5$$

$$i=1 \quad \gamma_{13}^1 = -7$$

$$i=2 \quad \gamma_{13}^2 = \infty - 5$$

entonces $\gamma_{13}^1 < \gamma_{13}^0 < \gamma_{13}^2$, $i_1=1$, $i_2=0$, $i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,3); (102)\}.$$

$$J_1((1,3);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$J_0((1,3);(102)) = 2 \Rightarrow \beta_0 = b_2 = 5$$

$$J_2((1,3);(102)) = 4 \Rightarrow \beta_2 = b_4 = 3$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,3);(102)) = \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 2 \\ 3 \leq y_2 \leq 5 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_1^1 = 0 \quad y_0^1 = 9 \quad y_2^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (9, 0, 3)^T$$

$$y^2: y_1^2 = 2 \quad y_0^2 = 7 \quad y_2^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (7, 2, 3)^T$$

$$y^3: y_1^3 = 0 \quad y_0^3 = 7 \quad y_2^3 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (7, 0, 5)^T$$

$$y^4: y_1^4 = 2 \quad y_0^4 = 5 \quad y_2^4 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (5, 2, 5)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{13}$.

$$\alpha_1 = \min \{s_1, \beta_1 + b_1\} = \min \{7, 0+2\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_3\} = \min \{5, 3+2\} = 5$$

$$(\beta_1, s_0, s - \beta_1 - s_0) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \beta_2, \beta_2) = (0, 9, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (9, 0, 3)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\alpha_1, s_0, s - \alpha_1 - s_0) = (2, 5, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (5, 2, 5)$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \beta_2, \beta_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (2, 5, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (5, 2, 5)$$

$$(s - s_0 - \beta_2, s_0, \beta_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(s - s_0 - \alpha_2, s_0, \alpha_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5).$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(1,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{14}^0 = \infty - 6$$

$$i=1 \quad \gamma_{14}^1 = -11$$

$$i=2 \quad \gamma_{14}^2 = \infty - 6$$

entonces $\gamma_{14}^1 < \gamma_{14}^0 < \gamma_{14}^2$, $i_1=1, i_2=0, i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(1,4); (102)\}.$$

$$J_1((1,4);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$J_0((1,4);(102)) = 2,3 \Rightarrow \beta_0 = b_2 + b_3 = 2 + 5 = 7$$

$$J_2((1,4);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((1,4);(102)) = \begin{cases} 0 \leq y_1 \leq 2 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

PASO 3. $y^1: y_1^1 = 0 \quad y_0^1 = 12 \quad y_2^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (12, 0, 0)^T$

$$y^2: y_1^2 = 2 \quad y_0^2 = 10 \quad y_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (10, 0, 2)^T$$

$$y^3: y_1^3 = 0 \quad y_0^3 = 9 \quad y_2^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (9, 0, 3)^T$$

$$y^4: y_1^4 = 2 \quad y_0^4 = 7 \quad y_2^4 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (7, 2, 3)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{14}$.

$$\alpha_1 = \min \{s_1, \beta_1 + b_1\} = \min \{7, 0 + 2\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_4\} = \min \{5, 5 + 5\} = 5$$

$$(\beta_1, s_0, s - \beta_1 - s_0) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \beta_2, \beta_2) = (0, 12, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (12, 0, 0)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (0, 9, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (9, 0, 3)$$

$$(\alpha_1, s_0, s - \alpha_1 - s_0) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\beta_2, \beta_2) = (2, 10, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (10, 2, 0)$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(s-s_0-\beta_2, s_0, \beta_2) = (5, 7, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 5, 0)$$

$$(s-s_0-\alpha_2, s_0, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2,3)$.

$$i=0 \quad \gamma_{23}^0 = -3$$

$$i=1 \quad \gamma_{23}^1 = -5$$

$$i=2 \quad \gamma_{23}^2 = -3$$

entonces $\gamma_{23}^1 < \gamma_{23}^0 < \gamma_{23}^2$, $i_1 = 1, i_2 = 0, i_3 = 2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(2,3); (102)\}.$$

$$J_1((2,3);(102)) = 1 \Rightarrow \beta_1 = b_1 = 2$$

$$J_0((2,3);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_2((2,3);(102)) = 4 \Rightarrow \beta_2 = b_4 = 3$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((2,3);(102)) = \begin{cases} 2 \leq y_1 \leq 7 \\ 3 \leq y_2 \leq 5 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_1^1 = 2 \quad y_0^1 = 7 \quad y_2^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (7, 2, 3)^T$$

$$y^2: y_1^2 = 7 \quad y_0^2 = 2 \quad y_2^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (2, 7, 3)^T$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\beta_2, \beta_2) = (2, 10, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (10, 2, 0)$$

$$(\alpha_1, s-\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(s-s_0-\beta_2, s_0, \beta_2) = (5, 7, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 5, 0)$$

$$(s-s_0-\alpha_2, s_0, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2,3)$.

$$i=0 \quad \gamma_{23}^0 = -3$$

$$i=1 \quad \gamma_{23}^1 = -5$$

$$i=2 \quad \gamma_{23}^2 = -3$$

entonces $\gamma_{23}^1 < \gamma_{23}^0 < \gamma_{23}^2$, $i_1=1, i_2=0, i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(2,3); (102)\}.$$

$$J_1((2,3);(102)) = 1 \Rightarrow \beta_1 = b_1 = 2$$

$$J_0((2,3);(102)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_2((2,3);(102)) = 4 \Rightarrow \beta_2 = b_4 = 3$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((2,3);(102)) = \begin{cases} 2 \leq y_1 \leq 7 \\ 3 \leq y_2 \leq 5 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_1^1 = 2 \quad y_0^1 = 7 \quad y_2^1 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (7, 2, 3)^T$$

$$y^2: y_1^2 = 7 \quad y_0^2 = 2 \quad y_2^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (2, 7, 3)^T$$

$$y^3: y_1^3 = 2 \quad y_0^3 = 5 \quad y_2^3 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (5, 2, 5)^T$$

$$y^4: y_1^4 = 7 \quad y_0^4 = 0 \quad y_2^4 = 5 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (0, 7, 5)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{23}$.

$$\alpha_1 = \min \{s_1, \beta_1 + b_2\} = \min \{7, 2+5\} = 7$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_3\} = \min \{5, 3+2\} = 5$$

$$(\beta_1, s_0, s - \beta_1 - s_0) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \beta_2, \beta_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (2, 5, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (5, 2, 5)$$

$$(\alpha_1, s_0, s - \alpha_1 - s_0) = (7, 7, -2) \Rightarrow \text{No es factible.}$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \beta_2, \beta_2) = (7, 2, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (2, 7, 3)$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (7, 0, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (0, 7, 5)$$

$$(s - s_0 - \beta_2, s_0, \beta_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(s - s_0 - \alpha_2, s_0, \alpha_2) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 0, 5)$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(2,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{24}^0 = -4$$

$$i=1 \quad \gamma_{24}^1 = -6$$

$$i=2 \quad \gamma_{24}^2 = -4$$

entonces $\gamma_{24}^1 < \gamma_{24}^0 < \gamma_{24}^2$, $i_1 = 1$, $i_2 = 0$, $i_3 = 2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(2,4); (102)\}.$$

$$J_1((2,4);(102))=1 \Rightarrow \beta_1 = b_1 = 2$$

$$J_0((2,4);(102))=3 \Rightarrow \beta_0 = b_3 = 2$$

$$J_2((2,4);(102))=\emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((2,4);(102)) = \begin{cases} 2 \leq y_1 \leq 7 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_1^1 = 2 \quad y_0^1 = 10 \quad y_2^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (10, 2, 0)^T$$

$$y^2: y_1^2 = 7 \quad y_0^2 = 5 \quad y_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (5, 7, 0)^T$$

$$y^3: y_1^3 = 2 \quad y_0^3 = 7 \quad y_2^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (7, 2, 3)^T$$

$$y^4: y_1^4 = 7 \quad y_0^4 = 2 \quad y_2^4 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (2, 7, 3)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{24}$.

$$\alpha_1 = \min \{s_1, \beta_1 + b_2\} = \min \{7, 2+5\} = 7$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_4\} = \min \{5, 3+3\} = 3$$

$$(\beta_1, s_0, s - \beta_1 - s_0) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \beta_2, \beta_2) = (2, 10, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (10, 2, 0)$$

$$(\beta_1, s - \beta_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (7, 2, 3)$$

$$(\alpha_1, s_0, s - \alpha_1 - s_0) = (7, 7, -2) \Rightarrow \text{No factible.}$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \beta_2, \beta_2) = (7, 5, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (5, 7, 0)$$

$$(\alpha_1, s - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2) = (7, 2, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (2, 7, 3)$$

$$(s-s_0-\beta_2, s_0, \beta_2) = (5, 7, 0) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (7, 5, 0)$$

$$(s-s_0-\alpha_2, s_0, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el v\u00e9rtice es : } (7, 2, 3).$$

PASO 2. Calculando la pieza lineal $\Pi(3,4)$.

$$i=0 \quad \gamma_{34}^0 = -1$$

$$i=1 \quad \gamma_{34}^1 = -1$$

$$i=2 \quad \gamma_{34}^2 = -1$$

entonces $\gamma_{34}^0 < \gamma_{34}^1 < \gamma_{34}^2$, $i_1=0, i_2=1, i_3=2$ y la etiqueta propia es

$$E = \{(3,4); (012)\}.$$

$$J_0((3,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$J_1((3,4);(012)) = 1,2 \Rightarrow \beta_1 = b_1+b_2=2+5=7$$

$$J_2((3,4);(012)) = \emptyset \Rightarrow \beta_2 = 0$$

La pieza lineal es,

$$\Pi((3,4);(012)) = \begin{cases} 0 \leq y_0 \leq 2 \\ 0 \leq y_2 \leq 3 \\ y \in \Omega \end{cases}$$

$$\text{PASO 3. } y^1: y_0^1 = 0 \quad y_1^1 = 12 \quad y_2^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^1 = (0, 12, 0)^T$$

$$y^2: y_0^2 = 2 \quad y_1^2 = 10 \quad y_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (2, 10, 0)^T$$

$$y^3: y_0^3 = 0 \quad y_1^3 = 9 \quad y_2^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^3 = (0, 9, 3)^T$$

$$y^4: y_0^4 = 2 \quad y_1^4 = 7 \quad y_2^4 = 3 \quad \Rightarrow \quad y^4 = (2, 7, 3)^T$$

Calculando los vértices de $S \cap \Pi_{34}$.

$$\alpha_0 = \min \{s_0, \beta_0 + b_3\} = \min \{7, 0+2\} = 2$$

$$\alpha_2 = \min \{s_2, \beta_2 + b_4\} = \min \{5, 0+3\} = 3$$

$$(\beta_0, s_1, s - \beta_0 - s_1) = (0, 7, 5) \Rightarrow \text{el vértice es : } (0, 7, 5)$$

$$(\beta_0, s - \beta_0 - \beta_2, \beta_2) = (0, 12, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (0, 12, 0)$$

$$(\beta_0, s - \beta_0 - \alpha_2, \alpha_2) = (0, 9, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (0, 9, 3)$$

$$(\alpha_0, s_1, s - \alpha_0 - s_1) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (2, 7, 3)$$

$$(\alpha_0, s - \alpha_0 - \beta_2, \beta_2) = (2, 10, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (2, 10, 0)$$

$$(\alpha_0, s - \alpha_0 - \alpha_2, \alpha_2) = (0, 9, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (0, 9, 3)$$

$$(s - s_1 - \beta_2, s_1, \beta_2) = (5, 7, 0) \Rightarrow \text{el vértice es : } (5, 7, 0)$$

$$(s - s_1 - \alpha_2, s_1, \alpha_2) = (2, 7, 3) \Rightarrow \text{el vértice es : } (2, 7, 3).$$

De lo anterior y de la figura 4.7 se obtiene el conjunto :

$$(S \cap \Omega) \cup (S \cap \Pi_{ht}) = \{(5, 2, 5), (7, 0, 5), (7, 2, 3), (7, 5, 0), (0, 7, 5), (2, 7, 3), (5, 7, 0)\}.$$

PASO 4. Para el vértice $(5, 2, 5)$ y utilizando la pieza lineal $\Pi((1, 3), (102))$,

$$x^4: x_{02} = 5 \quad x_{11} = 2 \quad x_{23} = 2 \quad x_{24} = 3$$

$$g(y) = \{g(12 - 2 - 5)\} = g(5) = 3 + (5)^{1/2} = 5.236$$

$$f(z) = g(y) + c_{02}x_{02} + c_{11}x_{11} + c_{23}x_{23} + c_{24}x_{24}$$

$$f(z) = 5.236 + (2)(5) + (4)(2) + (5)(2) + (6)(3) = 51.236$$

$$f(z^*) > 51.236 \Rightarrow f(z^*) = 51.236$$

Para el vértice (7,2,3) y utilizando la pieza lineal $\Pi((1,3),(102))$,

$$x^2: x_{02}=5 \quad x_{03}=2 \quad x_{11}=2 \quad x_{24}=3$$

$$g(y) = \{g(12-2-3)\} = g(7) = 3+(7)^{1/2} = 5.645$$

$$f(z) = g(y) + c_{02}x_{02} + c_{03}x_{03} + c_{11}x_{11} + c_{24}x_{24}$$

$$f(z) = 5.236 + (2)(5) + (5)(2) + (4)(2) + (6)(3) = 51.645$$

$$f(z^*) < 51.645$$

Para el vértice (2,7,3) y utilizando la pieza lineal $\Pi((2,3),(102))$,

$$x^2: x_{03}=2 \quad x_{11}=2 \quad x_{12}=5 \quad x_{24}=3$$

$$g(y) = \{g(12-7-3)\} = g(2) = 3+(2)^{1/2} = 4.4142$$

$$f(z) = g(y) + c_{03}x_{03} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{24}x_{24}$$

$$f(z) = 4.4142 + (5)(2) + (4)(2) + (7)(5) + (6)(3) = 75.4142$$

$$f(z^*) < 75.4142$$

Para el vértice (5,7,0) y utilizando la pieza lineal $\Pi((2,4),(102))$,

$$x^2: x_{03}=2 \quad x_{04}=3 \quad x_{11}=2 \quad x_{12}=5$$

$$g(y) = \{g(12-7-0)\} = g(5) = 3+(5)^{1/2} = 5.236$$

$$f(z) = g(y) + c_{03}x_{03} + c_{04}x_{04} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12}$$

$$f(z) = 5.236 + (5)(2) + (6)(3) + (4)(2) + (7)(5) = 76.236$$

$$f(z^*) < 76.236$$

Paso 3. La solución óptima global del problema [P(2,1)] es

$$y^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad f(z^*) = 51.236$$

$$x^* = [2 \ 5 \ 0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 0 \ 0 \ 3]^T.$$

En las figuras siguientes se muestran las piezas lineales obtenidas, el vértice óptimo y la red óptima del problema .

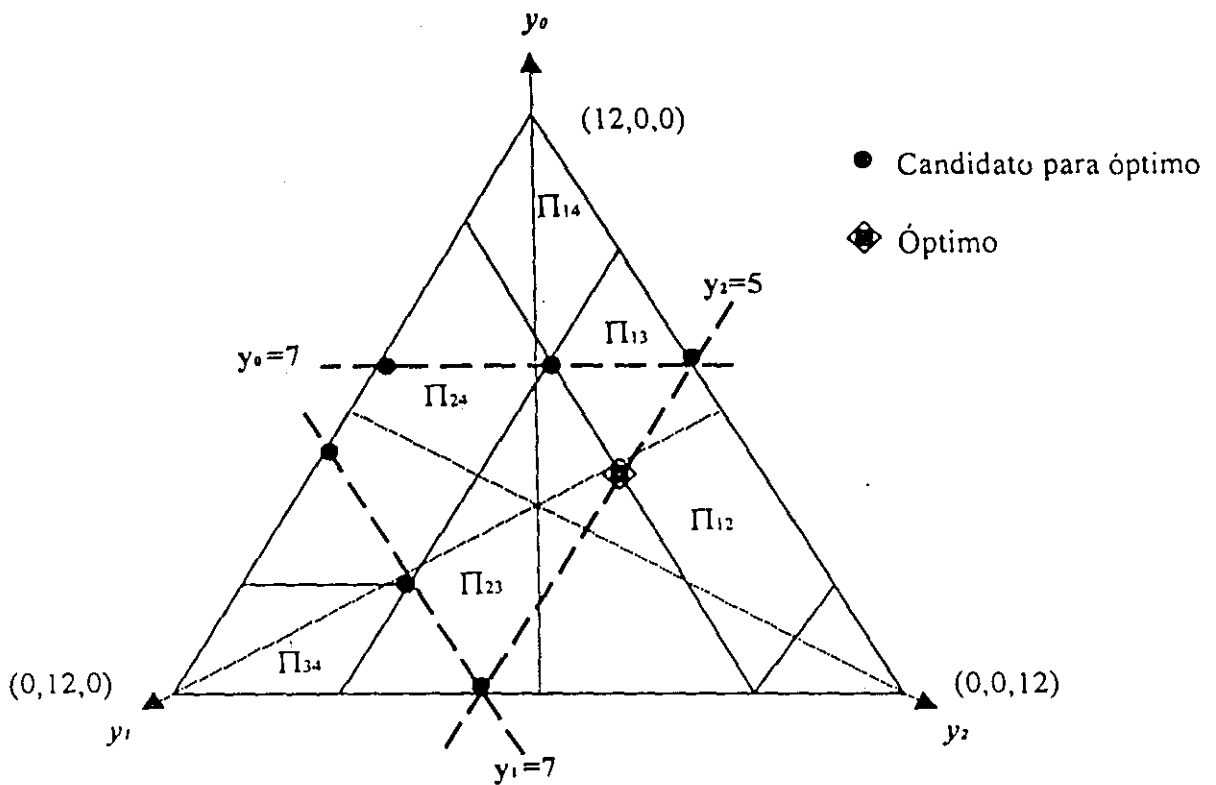


Figura 4.7 Las piezas lineales y el valor óptimo de [P(2,1)].

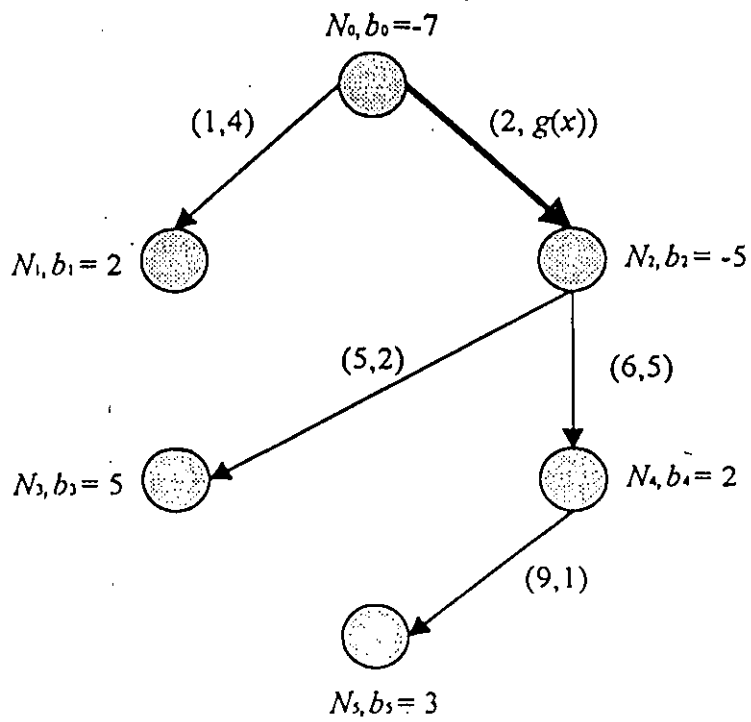


Figura 4.8 La red óptima de $[P(2,1)]$.

CONCLUSIONES

Considerando el trabajo desarrollado puedo concluir que tenemos problemas cotidianos que requieren resolverse de forma eficiente, por lo cual, debemos continuar investigando sobre métodos de solución y ser más creativos para descubrir otras aplicaciones de lo que ya conocemos de la Investigación de Operaciones.

Es interesante observar que un análisis previo de un problema a partir de su estructura puede ofrecer ventajas para obtener la solución. En este caso, la función objetivo al mostrar un comportamiento monótono no decreciente permitió trabajar en un espacio de menor dimensión, y la estructura de red que se presentó ayudó a obtener de una forma sencilla la solución de un problema difícil.

Este trabajo muestra otro enfoque en la aplicación de las técnicas y métodos de la Investigación de Operaciones que se han utilizado para la solución de un tipo específico de problemas, y en particular se puede concluir que las técnicas de Programación Lineal, en especial las que se utilizaron, y el análisis convexo son útiles y eficientes en la resolución de problemas que no pertenecen al área de la Optimización Lineal.

El problema de producir y transportar productos , que se analizó , es importante e interesante por su aplicación práctica y por tratarse de un problema difícil aún cuando se manejan pocas variables no lineales ; por lo anterior y por su estructura se le clasificó dentro de los problemas de minimización cóncava. Existen problemas de minimización cóncava más grandes y con una función separable que se han resuelto utilizando métodos heurísticos, de ramificación y acotamiento y programación dinámica, sin embargo, todos ellos tienen un tiempo de ejecución exponencial. Con respecto a lo anterior, un resultado valioso que se obtuvo consiste en que cualquier problema de minimización cóncava es difícil (*NP-duro*) aún cuando se maneje un número pequeño de variables no lineales, como lo es [PPT (3)] el cual se resolvió utilizando técnicas y métodos de Programación Lineal , que combinados dieron lugar a un algoritmo polinomial o eficiente .

Otro aspecto interesante reside en que se abordó un área de la Optimización que si no es nueva [1960] es poco conocida, la Optimización Global, a través de un problema de gran aplicación práctica , que involucra desde el punto de vista teórico la búsqueda del mínimo global de una función cóncava.

Esta investigación muestra que se puede y es necesario seguir trabajando en el desarrollo de programas computacionales y en la resolución de problemas más grandes , utilizando la combinación del algoritmo presentado con otros métodos de solución de la Investigación de Operaciones. La gran utilidad práctica y teórica que se expuso de la teoría de redes en el análisis del problema , en el algoritmo y en los problemas propuestos [P (1,2)] y [P (2,1)] , que son redes con arcos con costos cóncavos , indican que también se puede continuar la línea de investigación en esta área.

En general, el campo de la minimización cóncava es muy amplio porque se aplica en problemas de transporte, inventarios, redes de telecomunicaciones, economía, planeación de la producción, control de tráfico aéreo, la planeación de redes de agua, problemas de localización, entre otros, por ello, se debe continuar en la investigación de posibles aplicaciones de las técnicas y métodos de la Investigación de Operaciones, y de otras ramas del conocimiento que nos lleven a la obtención de métodos de solución más eficientes. Para lograr lo anterior es necesario contar en México con mayor bibliografía sobre este tema.

Considero que este tipo de algoritmos se deberían exponer en la DEPMI, UNAM para así difundir las diversas tendencias de investigación, de tal manera que fuesen aprovechadas académicamente y en la investigación para así poder aplicarlas al sistema productivo de nuestro país.

APÉNDICE

Definición 1

Una función real $f(x)$ definida en un conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexa si dos vectores x_1, x_2 , satisfacen la siguiente desigualdad :

$$x_1, x_2 \in C, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Definición 2

El vector de dimensión n de derivadas parciales de f con respecto a x_1, \dots, x_n en \bar{x} se denomina el gradiente de f y se denota por $\nabla f(\bar{x})$, esto es

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n} \right).$$

Definición 3

Sea K un subconjunto de \mathbb{R}^n y $x \in K$. Entonces x es un punto interior de K si hay un $\varepsilon > 0$ tal que $\|y - x\| \leq \varepsilon$ implica que $y \in K$.

Definición 4

El interior de un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$, denotado como $\text{Int}(K)$, es el conjunto de puntos interiores de K .

Definición 5

Si f es una función doblemente diferenciable en \bar{x} , entonces existe una matriz de $n \times n$ simétrica de $H(\bar{x})$, llamada la matriz Hessiana de f en \bar{x} .

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Definición 6

La norma de un vector de x en \mathbb{R}^n se define como

$$\|x\| = (x^T x)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$$

Definición 7

Dado un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un valor $\varepsilon > 0$, $V_\varepsilon = \{y : \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ se conoce como vecindad ε de x .

Definición 8

Sea K un subconjunto de \mathbb{R}^n . El cierre de K denotado como clK , es el conjunto de todos los puntos $x \in clK$ si para cada $\varepsilon > 0$, $K \cap V_\varepsilon \neq \emptyset$.

Definición 9

K es un conjunto cerrado si $K = clK$.

Definición 10

Un conjunto K en \mathbb{R}^n es limitado si existe un número real α tal que para cada $x \in K$, $\|x\| \leq \alpha$.

Definición 11

Un conjunto K en \mathbb{R}^n se dice compacto si éste es cerrado y limitado.

Teorema 12 (Teorema de Weierstrass)

Sea K un conjunto compacto, no vacío y sea $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre K . Entonces, el problema $\min \{f(x) : x \in K\}$ alcanza su mínimo, esto es, existe una solución mínima a este problema.

Teorema 13 (Teorema de Carathéodory)

Sea K sea un conjunto arbitrario en \mathbb{R}^n . Si $H(K)$ es el menor conjunto convexo de K y

$x \in H(K)$, entonces $x \in H(x_1, \dots, x_{n+1})$ donde $x_j \in K$ para $j = 1, \dots, n+1$.

Por lo tanto x se representa como,

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1,$$

$\lambda \geq 0$, para $j = 1, \dots, n+1$,

$x_j \in K$, para $j = 1, \dots, n+1$.

Definición 14

Hipógrafe es el conjunto de puntos que se encuentran debajo de una función f .

Definición 15

Una función f cóncava es cerrada si $cl f = f$, es decir $(cl f)(x) = \lim_{y \rightarrow x} \sup f(y)$.

Definición 16

Un conjunto en \mathbb{R}^n que es la intersección de un número finito de semiespacios se conoce como politopo. Si un politopo está limitado (esto es, para cada x en el politopo $\|x\| \leq \alpha$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}^n$ fijo), se llama poliedro.

Definición 17

Una combinación convexa de x_1, \dots, x_k es un punto x de la forma $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$, donde $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ y $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$. El conjunto de todas las combinaciones de x_1, \dots, x_k se conoce como cubierta convexa de $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Definición 18

Sea $\{x_1, \dots, x_k\}$ un conjunto de k vectores de \mathbb{R}^n , $j = 1, \dots, k$, que cumple con la propiedad de $\{x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1\}$, por lo tanto, se trata de un conjunto que es linealmente independiente. Entonces la cubierta convexa $\{y: y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k, \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ y $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0\}$ se conoce como simplex de dimensión $k-1$.

Definición 19

Una función afin sobre un subconjunto K de \mathbb{R}^n es una función la cual es finita, convexa y cóncava.

Definición 20

Sean X y Y dos conjuntos. Un mapa \mathfrak{G} de X en Y es una correspondencia la cual asocia a cada elemento x de X a un subconjunto de Y . Para cada $x \in X$, el conjunto $\mathfrak{G}(x)$ es la imagen de x . El dominio X^* de \mathfrak{G} es el subconjunto de puntos de x para los cuales la imagen $\mathfrak{G}(x)$ es no vacía, esto es,

$$X^* = \{x \mid x \in X, \mathfrak{G}(x) \neq \emptyset\}.$$

Teorema 21

Sea f una función cóncava propia. Si f es cerrada, f^* también lo es y para cualquier $x \in \text{dom } f$, f^* está dado por la fórmula

$$(f^*)(y) = \inf_{\lambda < 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Homotecia : Geometría. Caso de similitud de dos figuras en el cual, dado un centro de homotecia O y una constante k , a todo punto M de la primera figura corresponde un punto M' de la otra, tal que OM' sea igual al producto de OM por k .

Demostración del Teorema 2.4

Como C es abierto existe una esfera abierta $B_\delta(\bar{x})$ alrededor de \bar{x} , la cual se encuentra en C . Sea $x \in C$, y $x \neq \bar{x}$. Entonces para algún μ tal que $0 < \mu < 1$ y $\mu < \delta / \|x - \bar{x}\|$,

$$x = \bar{x} + \mu(x - \bar{x}) = (1 - \mu)\bar{x} + \mu x, \quad x \in B_\delta(\bar{x}) \subset C.$$

Como f es cóncava y de la convexidad de $B_\delta(\bar{x})$, se tiene que $x \in B_\delta(\bar{x})$ y $0 < \lambda \leq 1$

$$(1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(x) \leq f[(1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x]$$

ó

$$\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\leq \frac{f[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})] - f(\bar{x})}{\lambda} = \frac{\lambda \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \alpha[\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})] \lambda \|x - \bar{x}\|}{\lambda} \\ &= \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \alpha[\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})] \|x - \bar{x}\| \end{aligned}$$

y $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha[\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})] = 0$. Tomando el límite anterior

$$f(x) - f(\bar{x}) \leq \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

f es cóncava en \bar{x} , $x \in C$ y $x = (1 - \mu)\bar{x} + \mu x$ entonces

$$\mu [f(x) - f(\bar{x})] \leq f(x) - f(\bar{x}).$$

Pero $x - \bar{x} = \mu(x - \bar{x})$ y $\mu > 0$, y de las tres últimas relaciones

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}).$$

Demostración del Teorema 2.6

Sea f una función cóncava y sea $\bar{x} \in C$. Se necesita mostrar que $x^T H(\bar{x})x \leq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Como C es abierto, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} + \lambda x \in C$ para $|\lambda| \neq 0$ y suficientemente pequeña, considerando el teorema 2.4 y por la doble diferenciabilidad de f se obtienen las siguientes expresiones:

$$f(\bar{x} + \lambda x) \leq f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x \tag{1}$$

$$f(\bar{x} + \lambda x) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T x + \frac{1}{2} \lambda^2 (x)^T H(\bar{x})(x) + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\bar{x}; \lambda x) \tag{2}$$

Restando (1) de (2), se tiene

$$\frac{1}{2} \lambda^2 (x)^T H(\bar{x})(x) + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\bar{x}; \lambda x) \leq 0.$$

Dividiendo entre $\lambda^2 > 0$ y si $\lambda \rightarrow 0$, el resultado es $(x)^T H(\bar{x})(x) \leq 0$.

MÉTODO SIMPLEX DUAL POR MEDIO DE OPERACIONES MATRICIALES

Paso 1. Calcular $X_B = B^{-1}b$. Si $X_B \geq 0$, la solución es factible y por lo tanto se detiene el proceso. En otro caso seleccionar la variable saliente x_r como aquella que tenga el valor más negativo de los elementos de X_B .

Paso 2. a) Calcular $z_j - c_j = C_B B^{-1}P_j - c_j$ para todas las variables no básicas x_j .

b) Para las variables no básicas x_j , calcular los coeficientes de restricción α'_j asociados con el renglón de la variable saliente x_r por medio de la fórmula

$$\alpha'_j = (\text{renglón de } B^{-1} \text{ asociado con } x_r) \times P_j.$$

c) La variable entrante está asociada con

$$\theta = \min_j \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{\alpha'_j} \right|, \alpha'_j < 0 \right\},$$

si todas las variables $\alpha'_j \geq 0$ no existe una solución factible.

Paso 3. Determinar la nueva base por intercambio de los vectores entrante y saliente P_j y P_r ,

usando la fórmula $B_{sig}^{-1} = EB^{-1}$.

Hacer $B_{sig}^{-1} = B^{-1}$ y volver al paso 1.

MÉTODO DE SOLUCIÓN PARA LOS PROBLEMAS [P(1,2)] Y [P(2,1)]

Sea una red $G=(N,A)$, donde:

$N=\{N_0, N_1, \dots, N_r\}$ es el conjunto de nodos, y

$A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es el conjunto de arcos.

Cada arco a_i une los nodos $(I_i, B_i) \in N \times N$ con $I_i \neq B_i$, y su capacidad $u_i \in [0, +\infty]$ y la función de costos es una función cóncava $g_i(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.

En la red antes descrita cada nodo tiene una demanda b_j tal que $\sum_{j=0}^r b_j = 0$, si $b_j < 0$ entonces se trata de un nodo fuente y si $b_j > 0$ se trata de un nodo sumidero. El flujo $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $0 \leq x_i \leq u_i$. Tomando en cuenta que a cada nodo llega ($a_i \in A_j^+$) y sale ($a_i \in A_j^-$)

flujo, entonces $\beta_j(x) = \sum_{a_i \in A_j^+} x_i - \sum_{a_i \in A_j^-} x_i$.

Para un caso factible se espera que $\beta_j(x) = b_j \quad \forall j$, y el costo sería $g(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$.

Es decir, se busca la solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & g(x) \\ \text{sujeto a} & \beta_j(x) = b_j \quad j=0, 1, \dots, r \\ & 0 \leq x_i \leq u_i \quad i=1, 2, \dots, n. \end{array}$$

Siendo la capacidad del arco a_i , $0 < u_i < +\infty$, éste se puede reemplazar por un nodo más N_{r+1} y dos arcos más a_i y $a_{i'}$, que van del nuevo nodo a I_i (inicio del nodo a_i) y al nodo B_i (nodo terminal de a_i) respectivamente como se muestra.

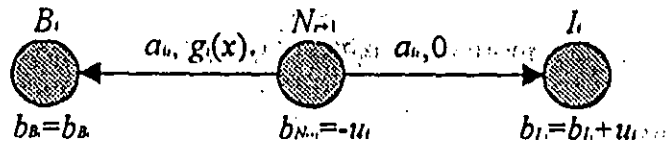


Figura 1 Transformación de una red con capacidad a una sin límite de capacidad.

u_i es la demanda de I_i y la nueva fuente tiene demanda $-u_i < 0$. Los arcos nuevos tienen capacidad ilimitada y el arco a_{i-1} tiene un costo de cero unidades y el arco a_i tiene un costo de $g_i(t)$. Cualquier flujo factible en la red G genera un flujo factible en la nueva red con valor de x_i sobre el arco a_{i-1} , $u_i - x_i$ sobre el arco a_i y el valor de x en cualquier otro arco, de tal manera que si se tiene un flujo factible en la red nueva éste también lo será para la red original y con el mismo costo.

EL PROBLEMA [P(1,2)]

Este caso trata de un problema de minimización cóncava de capacidad ilimitada con una fuente y sólo dos arcos con costos no lineales, los demás arcos tienen costos lineales, para lo cual se tiene

$b_0 < 0$, es decir, N_0 es el nodo fuente,

$b_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, r$,

$u_i = +\infty \quad \forall i$,

$g_1(*)$ y $g_2(*)$ son funciones cóncavas,

$g_i(t) = c_i t \quad c_i \geq 0, \quad \forall i \geq 3$.

Se denotará a los arcos con costos lineales como arcos blancos y los arcos con costos no lineales con arcos negros. Es importante establecer que:

- F_0 es el nodo fuente,
- F_1, F_2 son los nodos terminales de los arcos negros,
- I_1, I_2 son los nodos iniciales de los arcos negros,
- B_1, \dots, B_m son los nodos sumidero.

Existen tres formas en las que se puede enviar productos de la fuente a los nodos sumidero.

1. Enviarlos directamente de la fuente sin pasar por algún arco negro.
2. A través del arco negro a_1 y una trayectoria de arcos blancos de F_1 a los nodos sumidero.
3. A través del arco negro a_2 y una trayectoria de arcos blancos de F_2 a los nodos sumidero.

El problema consiste en determinar las cantidades y_0, y_1, y_2 que son los niveles de producción de F_0, F_1, F_2 y enviarlos por los tres caminos anteriores a costo mínimo. Los productos enviados de las fábricas F_0, F_1, F_2 a los almacenes B_1, \dots, B_m a través de arcos con costos lineales y la estructura de los niveles de producción y_0, y_1, y_2 muestran que se trata de un Problema de Producción-Transporte con Costos Cóncavos [PPT(3)].

Para obtener el problema equivalente se construye una red G' con tres nodos que representan las fábricas y $m+2$ nodos representando a $I_1, I_2, B_1, \dots, B_m$. El conjunto de arcos de G' consiste de dos arcos negros $a_1 = (I_1, F_1), a_2 = (I_2, F_2)$ con sus costos originales y los demás arcos con sus costos lineales.

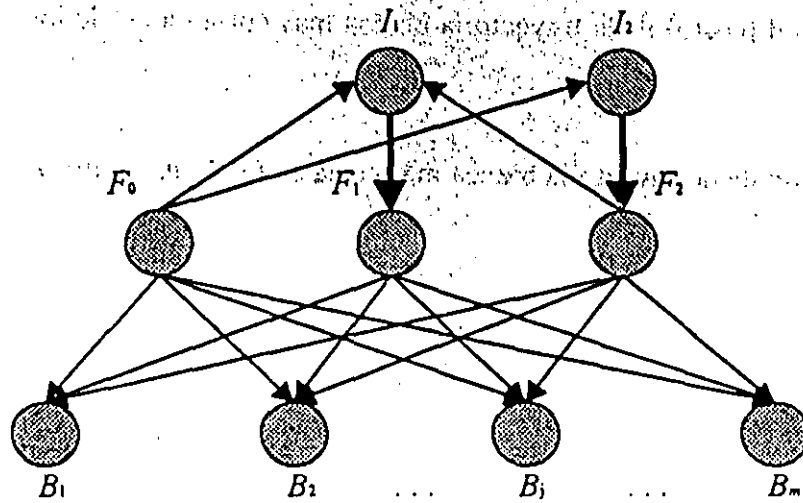


Figura 2 La gráfica G' .

La gráfica G' tiene $m+5$ nodos y a lo más $3(m+2)$ arcos, y cumple con la siguiente proposición.

Proposición 1

Para cada flujo factible x en G hay un flujo x' factible en G' con costo al menos igual al de x . A la inversa, para todo flujo factible de x' sobre G' corresponde a un flujo factible de G con costo igual.

Las proposiciones que se mencionan en este apartado no se demostrarán, por lo que, si el lector se encuentra interesado en profundizar un poco más en ellas se recomienda consultar la referencia [30].

Considérese lo siguiente,

c_{ij} es la longitud (costo) de la trayectoria blanca más corta en G' de los nodos F_i a los nodos B_j ,

c_{ij}^* es la longitud de la trayectoria blanca más corta en G' de los nodos F_i a los nodos I_j ,

$$y_i = \sum_{j=1}^m x_{ij} \quad i=0,1,2, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^m x_{ij} = \sum_{j=1}^m b_j = s, \quad (2)$$

$$y = (y_0, y_1, y_2) \in \Omega, \quad (3)$$

$$\Omega = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : y_i \geq 0, i=0,1,2, \sum_{i=0}^2 y_i = s \right\}. \quad (4)$$

La gráfica G' se divide en dos subgráficas,

- la gráfica S generada por $F_i, i=0,1,2$ e $I_j, j=1,2$,
- la gráfica M generada por $F_i, i=0,1,2$ y $B_j, j=1, \dots, m$.

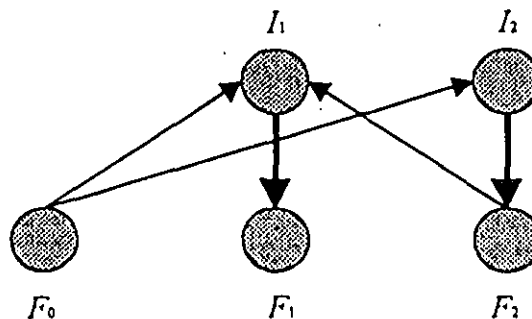


Figura 3 La subgráfica S .

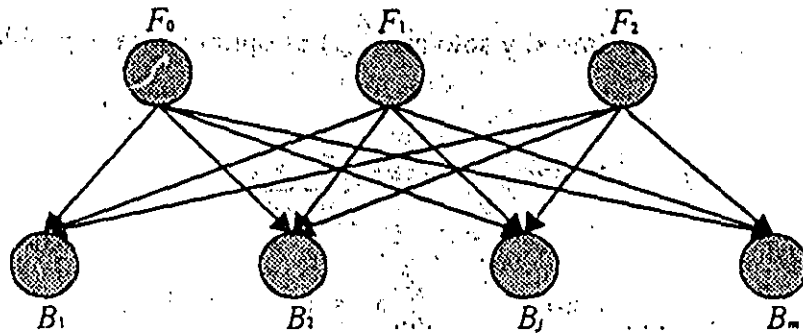


Figura 4 La subgráfica M .

La siguiente proposición se utiliza para obtener el valor óptimo de la subgráfica S .

Proposición 2

El valor óptimo $f(y)$ de la subgráfica S es una función cóncava de $y=(y_0, y_1, y_2) \in \Omega$ tal que

$$f(y) = \min\{f_1(y), f_2(y), f_3(y)\},$$

con

$$f_1(y) = g_1(y_1) + g_2(y_2) + c_{01} * y_1 + c_{02} * y_2$$

$$f_2(y) = g_1(y_1 + y_2) + g_2(y_2) + c_{01} * (y_1 + y_2) + c_{12} * y_2$$

$$f_3(y) = g_1(y_1) + g_2(y_1 + y_2) + c_{21} * y_1 + c_{02} * (y_1 + y_2).$$

Para obtener el valor óptimo de la gráfica G' se requiere del valor mínimo determinado en la subgráfica S y del comportamiento del flujo que circula en la subgráfica M , denotado como x^M , de tal manera que se cumpla lo siguiente,

Proposición 3

Un flujo factible x en G' es óptimo si y sólo si (x^M, y) es óptimo para el problema

$$\begin{aligned} \text{[P]} \quad & \text{Minimizar} \quad f(y) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = y_i \quad i=0,1,2, \\ & \quad \quad \quad \sum_{i=0}^2 x_{ij} = b_j \quad j=1,2,\dots,m, \\ & \quad \quad \quad y_i, x_{ij} \geq 0 \quad i=0,1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

La solución final x_i para cada arco a_i esta dada por seguir la trayectoria que marca el árbol de expansión mínimo T_j que representa la solución óptima,

$$x_i = \sum \{ b_j : \text{arco } a_i \text{ que pertenece a } T_j \}. \quad (5)$$

El algoritmo que resuelve [P(1,2)] se muestra a continuación:

Paso 1. Calcular las trayectorias más cortas de F_0 a I_1, I_2 , de F_1 a I_2 , de F_2 a I_1 y de cada nodo F_0, F_1, F_2 a los nodos B_1, \dots, B_m .

Obtener los valores c_{ij}^* , $i=0,1,2, j=1,2, i \neq j$ y c_{ij} , $i=0,1,2, j=1,2,\dots,m$.

Paso 2. Resolver el problema [P] utilizando el algoritmo propuesto para resolver el problema [PPT(3)]. El valor de $f(y)$ se obtiene a través de la proposición 2.

Paso 3. La solución óptima de [P(1,2)] se obtiene del resultado del paso anterior y la expresión (5).

EL PROBLEMA [P(2,1)]

El problema [P(2,1)] es un problema de minimización cóncava de capacidad ilimitada con dos fuentes y un arco con costo no lineal (cóncavo).

En este caso, el arco no lineal a_0 tiene un nodo inicial I_0 y un nodo terminal F_0 y dos nodos fuente F_1, F_2 (fábricas); los nodos sumidero B_1, \dots, B_m (almacenes); $g_0(\cdot)$ es la función cóncava que representa el costo de a_0 ; y se cumple que $\sum_{j=1}^m b_j = s = s_1 + s_2$.

Las tres formas en las que es posible enviar productos de las fábricas a los almacenes son:

1. Directamente de F_1 a los nodos sumidero utilizando sólo arcos blancos.
2. Directamente de F_2 a los nodos sumidero utilizando sólo arcos blancos.
3. A través del arco negro a_0 .

Este problema también se puede resolver como un problema tipo [PPT(3)], para lo cual, es necesario obtener un problema equivalente. La nueva red G' se forma por los nodos F_0, F_1, F_2, I_0 y B_j con $j = 1, 2, \dots, m$ como se muestra en la figura 5.

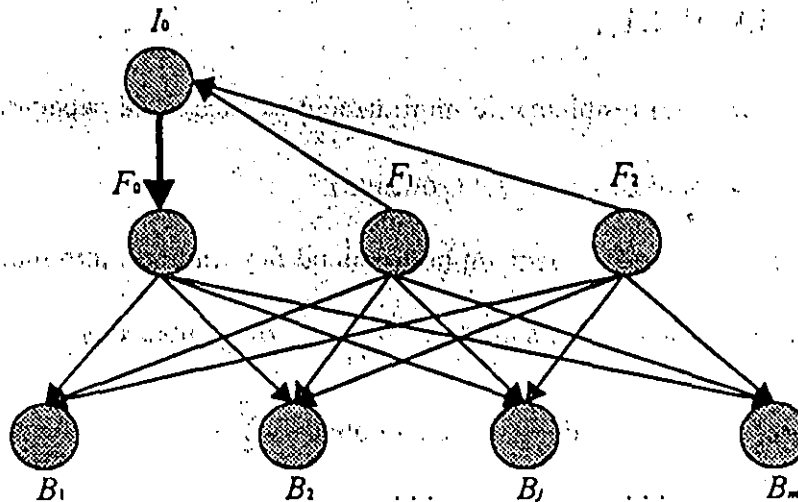


Figura 5 La gráfica G' para $[P(2,1)]$.

Se cumplen la proposición 1 y las expresiones (1), (3) y (4), también se considera que ,

x_0 es el valor del arco a_0 ,

x_{i0}^* es el valor de los arcos (F_i, I_0) , $i = 1, 2$,

x_{ij} es el valor de los arcos (F_i, B_j) , $i=0,1,2; j=1,2,\dots,m$,

$y_i \leq s_i$ $i=1,2$.

La gráfica G' se divide en dos subgráficas,

- la gráfica S generada por F_i , $i= 0, 1, 2$ e I_0 ,
- la gráfica M generada por F_i , $i= 0, 1, 2$ y B_j , $j= 1, \dots, m$.

El flujo que circula en S se denomina x^S y el que circula en M como x^M , además,

c_{ij} es la longitud de la trayectoria más corta en G' del nodo F_i al nodo B_j ,

c_{i0}^* es la longitud de la trayectoria más corta en G' del nodo F_i al nodo I_0 .

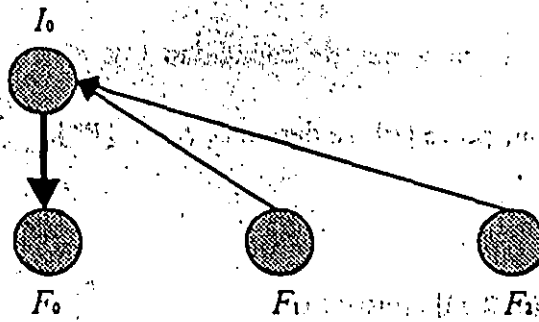


Figura 6 La subgráfica S.

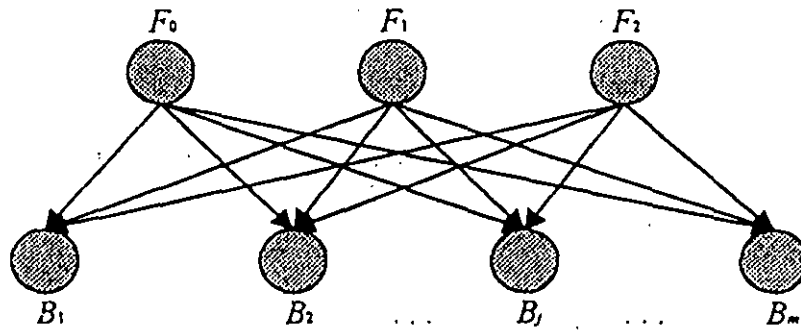


Figura 7 La subgráfica M.

Proposición 4

El costo $f(y)$ de x^S es la función cóncava

$$f(y) = g_0(y_0) + c_{10}*(s_1 - y_1) + c_{20}*(s_2 - y_2).$$

Los problemas $[P(1,2)]$ y $[P(2,1)]$ cumplen con la proposición 3, sólo que en el segundo caso se incluyen restricciones de capacidad ($y_i \leq s_i, i = 1, 2$) y por ello el problema de producción-transporte $[P]$ se denotará como $[P^*]$.

El algoritmo que resuelve $[P(2,1)]$ consiste en,

Paso 1. Calcular las trayectorias más cortas de F_1, F_2 a I_0 y de cada uno de los nodos F_0, F_1, F_2 a cada nodo B_1, \dots, B_m .

Obtener los valores c_{10}^*, c_{20}^* y $c_{ij}, i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, m$; si $c_{ij} = \infty$ entonces no existe trayectoria entre i y j .

Paso 2. Resolver $[P^*]$ utilizando el algoritmo que resuelve $[PPT(3)]$, $f(y)$ se calcula con la expresión de la proposición 4.

Paso 3. La solución óptima de $[P(2,1)]$ se deduce de la solución óptima de $[P^*]$ y la expresión (5).

BIBLIOGRAFÍA

1. AHUJA, Ravindra K. , Magnanti, Thomas L. , Orlin, James B. , " *Network Flows : theory, algorithms, and applications* " , Prentice Hall, United States of America, (1993).
2. BAZARAA, Mokhtar, Jarvis, John J. , " *Programación lineal y flujo en redes* " , 1ª ed. , Editorial Limusa , México , (1993) .
3. BAZARAA, Mokhtar, Shetty, C. M. , " *Nonlinear Programming* " , John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1979) .
4. BERGE, Claude, " *Graphs and Hypergraphs* " , North - Holland Publishing Company, 1ª ed. , Netherlands, (1979).
5. BRONSON , Richard, " *Investigación de operaciones* " , 1ª ed. , McGraw - Hill , México , (1993) .

6. ECKER, Joseph G., Kupferschmid Michael , " *Introduction to operations research* " , John Wiley & Sons Inc. , the Republic of Singapore , (1988).
7. FANG, Shu – Cherng , Puthenpura, Sarat, " *Linear optimization and extensions : theory and algorithms* " , Prentice – Hall Inc. , United States of America , (1993).
8. FLEMING , Wendell H. , " *Funciones de varias variables* " , 1ª ed. , Addison – Wesley Publishing Company Inc. , México , (1969) .
9. FLORES , De la Mota , Idalia, " *Apuntes de Programación Entera* " , Facultad de Ingeniería , U.N.A.M, México, (1993) .
10. HAREL, David, Rosner, Roni , " *The Spirit of Computing* " , 2ª ed. , Addison – Wesley Publishing Company Inc. , United States of America , (1992) .
11. HORST, Reiner, Tuy, Hoang, " *Global Optimization: deterministic approaches* " , 3ª ed. , Springer – Verlag Berlin, Germany , (1996) .
12. JENSEN , Paul A. , Barnes , J. Wesley , " *Network flow programming* " , John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1980) .

13. MANGASARIAN, Olvi L., "*Nonlinear Programming*", McGraw-Hill, Inc. , United States of America, (1969).
14. MURTY, Katta, "*Linear Programming*", John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1983).
15. NEMHAUSER, George L., "*Integer and combinatorial optimization* ", John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1988) .
16. PARDALOS, P.M. , Rosen J. B. , "*Methods for Global Concave Minimization : A Bibliographic Survey* " , Siam Review 3 (1986) , 367-379 .
17. PRAWDA, Witenberg, Juan, "*Métodos y modelos de investigación de operaciones* " , 1ª ed. , Editorial Limusa, México, (1987) .
18. RAMÍREZ, Rodríguez, Javier, López, Bracho, Rafael, Gutiérrez, Andrade, Miguel Angel, "*Complejidad Computacional de Algoritmos* " , Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco , 1ª ed. , México , (1993) .
19. ROCKAFELLAR, R. Tyrrell, "*Convex Analysis* " , Priceton University Press , United States of America, (1970) .

20. ROCKAFELLAR, R. Tyrrell, "*Network flows and monotropic optimization*", John Wiley & Sons Inc. , United States of America, (1984) .
21. SHAPIRO, Jeremy F. , "*Mathematical Programming : structures and algorithms*" , John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1979).
22. SCHRIJVER , Alexander , "*Theory of linear and integer programming*" , Anchor Brendan Ltd. Tiptree Essex, Great Britain , (1987) . .
23. TAHA , Hamdy A. , "*Investigación de Operaciones*" , 5^a ed. , Alfaomega grupo editor , Colombia , (1995).
24. THULASIRAMAN , K., Swamy, M.N.S. , "*Graphs: theory and algorithms*" , John Wiley & Sons Inc. , United States of America , (1992).
25. TUY , Hoang, "*The Complementary Convex Structure in Global Optimization*" , Journal of Global Optimization 2 (1992) , 21-40 .
26. TUY, Hoang , "*Polyhedral Annexation , Dualization and Dimension Reduction Technique in Global Optimization*" , Journal of Global Optimization 1 (1991), 229-244 .

27. TUY, H., Tam, B.T., "An Efficient Solution Method for Rank Two Quasiconcave Minimization Problems", *Optimization* 24 (1992), 43-56.
28. TUY, H., Ghannadan, S., Migdalas, A., y Värbrand, P., "Strongly Polynomial Algorithm for a Production - Transportation Problem with Concave Production Cost", *Optimization* 27 (1993), 205-227.
29. TUY, Hoang, Dinh, Dan, Nguyen, Ghannadan, Saied, "Strongly Polinomyal Time Algorithms for Certain Concave Minimization Problems on Networks", *Operations Research Letters* 14 (1993), 99-109.
30. TUY, H., Ghannadan, S., Migdalas, A., y Värbrand, P., "Strongly Polynomial Algorithm for Two Special Minimum Concave Cost Network Flow Problems", *Optimization* 32 (1995), 23-43.
31. TUY, H., Ghannadan, S., Migdalas, A., y Värbrand, P., "A Strongly Polynomial Algorithm for a Concave Production - Transportation Problem with a Fixed Number of Nonlinear Variables", *Mathematical Programming* 72 (1996), 229-258.
32. WALSH, G.R., "Methods of Optimization", John Wiley & Sons Ltd., England, (1975).

33 ZANGWILL, Willard I. "Minimum Concave Cost Flows in Certain Networks"

Management Science 7 (1968) 429-450