

2 ejemplares

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

"UN ESTUDIO DE LA INTERACCION DE SOLITONES EN CADENAS ACOPLADAS DE OSCILADORES NO LINEALES."

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE: F I S I C O P R E S E N T A JOSE HECTOR / MORALES BARCENAS



DIRECTOR DE ESTUDIOS PROFESIONALES DIRECTOR DE TESIS DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO.

MEXICO, D.F. FACULTAD DE CIENCIAS TESIS CON FALLA DE ORIGEN

1998

26 8812



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Un estudio de la interacción de solitones en cadenas acopladas de osciladores no lineales".

realizado por JOSE HECTOR MORALES BARCENAS

con número de cuenta 8601654-2 , pasante de la carrera de FISICA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO

Propietario

DR. MARCOS ROSENBAUM PITLUCK

Propietario

DR. JOSE JULIO EMILIO HERRERA VELAZQUEZ

Suplente

DR. GUSTAVO CRUZ PACHECO

Suplente

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

P. A.



Consejo Departamental de Física  
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

FACULTAD U. CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FISICA

# **Un estudio de la interacción de solitones en cadenas de osciladores no lineales**

José Héctor Morales Bárcenas

30 de noviembre de 1998

# Contenido

<b>1</b>	<b>La cadena de Toda</b>	<b>5</b>
1.1	El potencial exponencial . . . . .	5
1.2	Ecuaciones de movimiento . . . . .	7
1.2.1	La transformación dual . . . . .	9
1.3	Solución a las ecuaciones de movimiento . . . . .	10
1.3.1	Propiedades físicas del solitón . . . . .	13
1.4	Solución con dos solitones . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Ecuación general de evolución</b>	<b>25</b>
2.1	El par de Lax . . . . .	26
2.1.1	Rotación de cuerpo rígido . . . . .	31
2.2	Ecuación matricial de evolución . . . . .	33
2.2.1	Equivalencia unitaria . . . . .	36
2.2.2	Cantidades conservadas . . . . .	39

2.3	Cadena infinita . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Método de Dispersión Inversa</b>	<b>43</b>
3.1	La ecuación KdV y la cadena de Toda . . . . .	43
3.2	Ecuaciones asociadas con la cadena . . . . .	47
3.3	El problema de dispersión . . . . .	50
3.3.1	El espectro discreto y continuo . . . . .	50
3.3.2	El problema de valores propios (problema directo) . . . . .	52
3.3.3	El coeficiente de transmisión y el espectro discreto . . . . .	55
3.4	Ecuación integral discreta de GLM . . . . .	61
3.5	El problema de valores iniciales . . . . .	64
3.6	Solución con un solitón . . . . .	68
3.6.1	Los estados ligados . . . . .	70
3.6.2	Movimiento sin reflexión . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Perturbación del Método de Dispersión Inversa</b>	<b>77</b>
4.1	Método perturbativo . . . . .	78
4.2	Ecuación de evolución en presencia de la perturbación . . . . .	80
4.2.1	Variación de parámetros . . . . .	82
4.2.2	Límite asintótico de $\Phi$ en $-\infty$ . . . . .	85
4.2.3	Límite asintótico de $\Phi$ en $+\infty$ . . . . .	86
4.3	Dependencia temporal de los datos de dispersión perturbados . . . . .	87
4.4	Evolución temporal del espectro discreto . . . . .	89
4.5	Modificación del solitón a su paso por la impureza . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>101</b>

# Prefacio

Quiero hablarte de eso;  
que sepas todo lo que  
yo sé -y más que se nos  
revela en ondulaciones.

**Jo Shapcott**, poeta británica  
*La física de Pavlova (extracto)*

Las ondas son uno de los fenómenos físicos más fundamentales: las ondas sobre la superficie del agua y los terremotos, las ondulaciones en resortes, las ondas de luz, las ondas de radio, las ondas sonoras, las ondas cerebrales, etcétera.

En el caso de las ondas sonoras y de la luz se acostumbra analizar a una onda como la suma de ondas sinusoidales simples. Este es el principio de superposición lineal. Sin embargo, cuando uno observa cuidadosamente las ondas en la superficie del agua, uno ve que el principio de superposición no se puede aplicar en general, excepto cuando ocurren pequeñas amplitudes. El estudio de las ondas de amplitud finita en el agua fue uno de los tópicos principales en la física del siglo pasado. En años relativamente recientes, el estudio de muchos fenómenos no lineales ha cobrado especial importancia; por ejemplo, los haces de láseres en la óptica no lineal y las ondas de gases en plasmas exhiben fenómenos no lineales.

La importancia creciente de tales fenómenos ha llevado a un intenso estudio por medio de ordenadores de alta velocidad y ha revelado que los pulsos estables son entidades fundamentales en los fenómenos ondulatorios no lineales. Los pulsos estables en un medio de respuesta no lineal son llamados *solitones*. El descubrimiento de los solitones ha hecho posible resolver exactamente una amplia variedad de ecuaciones de evolución en los últimos 40 años, lo que ha conducido a nuevos desarrollos tanto en la física como en las matemáticas.

En esta tesis presentamos un estudio de la propagación de ondas no lineales en sistemas discretos. Las ondas no lineales o solitones migran como pulsos en cadenas unidimensionales de partículas. Analizamos el movimiento ondulatorio en la cadena con una interacción exponencial. El sistema se conoce como la *Cadena de Toda*. Mostramos que el sistema es integrable por medio del *método de dispersión inversa*. Estudiamos analíticamente, mediante teoría de perturbaciones, la aproximación a un problema cuasi integrable, en donde la cadena tiene una inhomogeneidad presente como impureza. Hallamos que cuando el solitón pasa por la impureza, se deforma y prosigue su viaje con una velocidad constante diferente de la inicial. Estimamos el tamaño de estas diferencias.

Finalmente quiero aprovechar este breve espacio para agradecer infinitamente al Dr. Antonmaría Minzoni por su paciencia no lineal para dirigir este trabajo. Su imaginación y entusiasmo me han animado a continuar aprendiendo más. También agradezco muy especialmente al Dr. Gustavo Cruz por su ayuda y porque fue, en algunas ocasiones, un auténtico director de tesis, a los otros miembros de mi jurado por sus observaciones y críticas para elaborar este trabajo, a los Drs. Marcos Rosenbaum, Pablo Padilla y Julio Herrera y a todos los investigadores del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS por su apoyo desinteresado, así como a las secretarías. Al Dr. Arturo Vargas por encontrarse en el lugar preciso en el momento preciso, NJIT. ¡Ah!, y a M. Toda, donde quiera que esté, por permitirme entrar al mundo de las ondas no lineales y por prestarme involuntariamente las palabras con que inicie este resumen y otros párrafos en el trabajo.

Cd. Universitaria, México, D.F.

Héctor Morales

# Introducción

En 1914, Debye se hacía la siguiente pregunta: ¿Por qué los sólidos tienen conductividad térmica finita? Él mismo afirmaba que si el sólido se *modelaba* con una cadena unidimensional no lineal, entonces los modos normales interactuarían debido a la no linealidad (figura 0.1). El resultado neto sería una ecuación de difusión con un coeficiente de transporte finito, en tanto que la suposición de fuerzas interatómicas lineales resultaría en una conductividad térmica infinita.

Este problema también motivó a E. Fermi, J. Pasta y S. Ulam (FPU), a principios de los 50, a llevar a cabo experimentos numéricos con cadenas unidimensionales de 34 y 64 osciladores con potenciales de interacción de orden cúbico y cuártico. Pensaban que si la energía se colocaba en el modo más bajo (modo de longitud de onda más largo), eventualmente tomaría lugar la equipartición de la energía. El tiempo de relajación para que esto ocurriera les proporcionaría una medida del coeficiente de difusión. Sin embargo, para su sorpresa, la energía no se “termalizó”. Ocurrieron una pequeña partición de energía entre algunos de los modos más bajos y un fenómeno de recurrencia del estado inicial de la energía a tiempos largos. En otras palabras, el sistema exhibió un comportamiento similar al movimiento de osciladores armónicos acoplados, en los que la energía permanece en un modo un cierto tiempo y después se pasa a otro. El tiempo de recurrencia para un número suficientemente grande de osciladores acoplados excede cualquier tiempo de observación

física relevante y resulta también en una conductividad térmica finita.

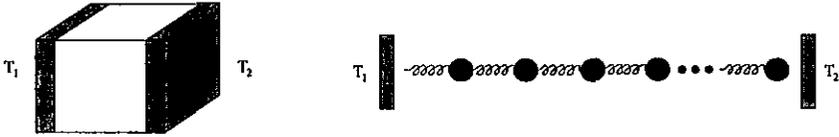


Figura 0.1. La conducción térmica en un sólido real es modelada por el movimiento ondulatorio en una cadena unidimensional de partículas

La explicación a este descubrimiento permaneció en un misterio hasta que N. Zabusky y M. Kruskal comenzaron a estudiar nuevamente este sistema a principios de los 60. El hecho de que sólo se “activaran” los modos de orden más bajo (longitud de onda larga), les condujo a proponer una aproximación continua del sistema y estudiar la ecuación diferencial

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 .$$

Esta ecuación, la ecuación KdV, había sido obtenida en 1885 por D.J. Korteweg y G. de Vries en la descripción de la propagación de ondas de longitud de onda larga en aguas poco profundas. Pero hasta entonces sus propiedades no habían sido bien comprendidas.

A partir de un estudio numérico detallado, Zabusky y Kruskal hallaron que en un sistema descrito por la ecuación KdV podían existir ondas solitarias estables, en el sentido de que pueden colisionar una con otra y preservar sus perfiles y velocidades después de la colisión. Esta naturaleza de cuasipartícula condujo a Zabusky y Kruskal a llamar a tales ondas *solitones*. El primer éxito de este concepto fue explicar el fenómeno de recurrencia del sistema FPU. A partir de la solución numérica de la ecuación KdV, con condiciones periódicas de frontera (se trata de un anillo de osciladores), Zabusky y Kruskal hicieron las siguientes observaciones. Un perfil inicial, que representa una excitación de longitud de onda larga, se “separaría” en un cierto número de solitones que se propagarían en el cadena con diferentes velocidades. Los solitones colisionan pero preservan su forma y rapidez individuales. En algún momento todos los solitones pueden colisionar en el mismo punto y entonces el fenómeno de recurrencia del perfil inicial de energía se presenta.

Los trabajos pioneros de Fermi y sus colegas, así como los trabajos numéricos de Zabusky y Kruskal, estimularon un progreso importante en el tratamiento analítico de las

ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen la propagación de ondas. Un importante descubrimiento en este sentido fue hecho por M. Toda en 1965. Halló un potencial exponencial de interacción en un medio discreto que permitía obtener soluciones exactas de tipo solitón para las ecuaciones de movimiento.

Este trabajo está dedicado a estudiar un problema particular de la cadena de Toda y consta de cuatro capítulos. En el primero se describe el potencial exponencial de interacción que inventó M. Toda, se resuelven las ecuaciones de movimiento y se muestran las características importantes del movimiento no lineal en la cadena infinita. En el segundo se trata con la generalización de las ecuaciones de movimiento y para ello se emplea el formalismo de Lax discreto, que permite encontrar de manera sistemática soluciones al problema con valores iniciales. En el capítulo tres, resolvemos el problema de valores iniciales de la cadena de Toda infinita, siguiendo el método de dispersión inversa desarrollado para este caso por H. Flaschka en 1974.

En el cuarto capítulo se estudian las perturbaciones del sistema y su efecto sobre los solitones. Se presenta una versión alternativa de la teoría de perturbaciones para estos sistemas. Esta alternativa trata con métodos elementales el problema de variación de los solitones frente a perturbaciones del sistema.

Se resuelve el problema de la interacción del solitón con una impureza usando este esquema de perturbaciones. Se encuentra que el solitón no se dispersa por la impureza. Esto muestra como la no linealidad del problema hace posible una transferencia de energía vibracional a pesar de las impurezas. En el caso lineal los paquetes son fuertemente dispersados por las impurezas. Este primer paso es un ingrediente en la comprensión de los efectos colectivos como la conductividad térmica finita.

4

1. The first part of the text discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the text focuses on the role of the management team in setting clear goals and objectives. It highlights that effective communication and collaboration are essential for the successful implementation of these goals.

3. The third part of the text addresses the need for regular monitoring and evaluation of progress. It suggests that this process should be ongoing and involve all relevant stakeholders to ensure that the organization remains on track and adapts to changing circumstances.

4. The final part of the text concludes by reiterating the importance of a strong foundation of trust and integrity. It states that these values are the cornerstone of any successful organization and should be consistently upheld by all members of the team.

# 1

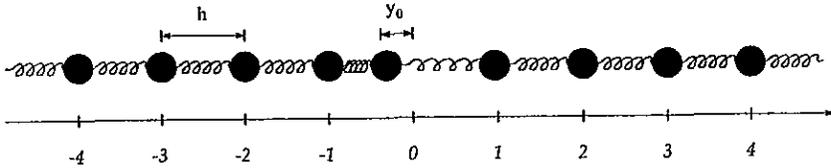
## La cadena de Toda

Hay una gran cantidad de sistemas físicos que se modelan como partículas que interactúan con un potencial. En el caso de las interacciones lineales, los modos normales y su superposición dan la descripción completa del comportamiento del mismo. Sin embargo, hay muchos problemas donde las fuerzas de restitución distan mucho de ser lineales. En estos casos el tratamiento perturbativo es incapaz de captar efectos cualitativos como el transporte de grandes cantidades de energía a gran distancia. Es pues de gran importancia tener modelos discretos no lineales que tengan soluciones exactas para así poderlos usar como punto de partida en el estudio del movimiento de estas cadenas. Uno de estos sistemas es la cadena de Toda, que a continuación describimos en detalle.

### 1.1 El potencial exponencial

Una anarmonicidad fuerte se puede observar en algunos sistemas moleculares unidimensionales. En tales sistemas, la no linealidad y los efectos dispersivos conducen a la aparición de “excitaciones” de tipo solitón. Estas excitaciones migran a lo largo de la cadena y se ven como desplazamientos locales de las posiciones de equilibrio de las moléculas. A estas ondas se les llama solitones acústicos. El problema que consideramos en este trabajo es el

estudio, desde el punto de vista de la mecánica clásica, de este tipo de ondas que viajan en cadenas unidimensionales de partículas bajo una interacción no lineal de corto alcance. Por el momento nos restringiremos a un sistema uniforme, es decir, sin impurezas (ver figura (1.1)), el problema de la propagación de ondas en la cadena con una impureza lo abordamos hasta el Capítulo 4. Precisamente una de las primeras soluciones de solitón en



Figural.1. Esquema de la cadena infinita de osciladores no lineales

cadenas unidimensionales y con decaimiento exponencial al infinito, fue investigada por M. Toda en 1967 [Toda, 1967]. Él estudió una cadena de partículas separadas por una distancia  $h$  que interactúan con las vecinas mediante fuerzas de tipo exponencial (ver figura 1.2). Denotamos por  $y_n$  el desplazamiento de la  $n$ -ésima partícula y por  $r_n = y_{n+1} - y_n$  la diferencia de las separaciones entre partículas vecinas, entonces, si tomamos la energía de esta interacción como

$$U = \sum_n \phi(r_n),$$

donde la función  $\phi(r_n)$  representa el potencial de interacción entre partículas vecinas

$$\phi(r_n) = \frac{a}{b} e^{-br_n} + ar_n + \text{cte},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes dadas, tendremos un sistema que interacciona de manera no lineal (ver figura 1.2).

Si escogemos  $a, b > 0$  entonces el potencial  $\phi(r_n)$  posee una fuerte repulsión para  $r_n < r_0$  y una atracción débil para  $r_n > r_0$  como se muestra en la figura (1.2.a),  $r_0$  es la posición donde el potencial tiene el mínimo. Estas son las principales características físicas de las fuerzas atómicas.

Supongamos ahora que  $|br_n| \ll 1$  y que el mínimo del potencial está en  $r_n = 0$ , entonces podemos representar a la función  $\phi(r_n)$  por el desarrollo en serie de potencias

$$\phi(r_n) \approx \text{cte} + \frac{\kappa}{2} r_n^2 - b \frac{\kappa}{6} r_n^3 + \dots,$$

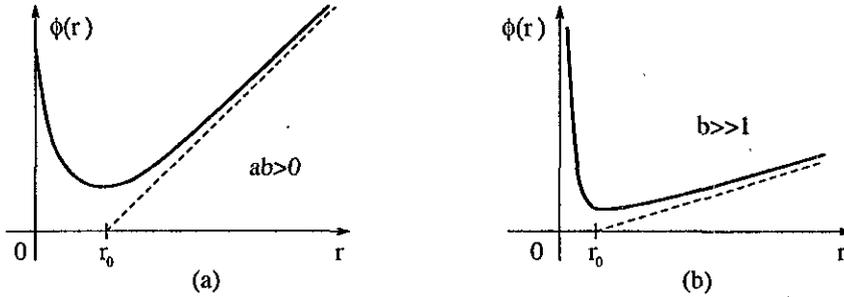


Figura 1.2. Potencial exponencial

Si mantenemos finito al parámetro  $\kappa \equiv ab$  y tomamos el límite cuando  $b \rightarrow 0$ , cerca del mínimo obtenemos a primer orden un potencial armónico o de Hooke;  $\kappa$  posee dimensiones de  $\frac{\text{erg}}{\text{cm}^2}$  y caracteriza por tanto al coeficiente de elasticidad longitudinal de la cadena. Si definimos  $r_n = h - d$  y tomamos el límite cuando  $b \rightarrow \infty$  obtenemos un arreglo de esferas duras de diámetro  $d$ , donde  $h$  es la distancia entre los centros de las esferas. El parámetro  $b$  caracteriza a la anarmonicidad del movimiento en la cadena, ver la figura (1.2.b). Por lo tanto, el potencial exponencial posee ambos límites, tanto el armónico como el de esferas duras.

## 1.2 Ecuaciones de movimiento

Ahora obtendremos las ecuaciones de movimiento del sistema de la figura 1.1. Consideremos una cadena infinita. Entonces  $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ . En adelante emplearemos nuestras ecuaciones en forma adimensional, por lo que hacemos los siguientes cambios de variables  $by_n \rightarrow Q_n$ ,  $br_n \rightarrow r_n$ ,  $t \rightarrow \sqrt{mt}$  y  $U \rightarrow \frac{a}{b}U$ .

Las ecuaciones de movimiento de la cadena se obtienen a partir del hamiltoniano del sistema  $\mathcal{H} = K + U$ , donde

$$K = \sum_n \frac{1}{2} P_n^2,$$

$$U = \sum_n \left[ e^{(Q_{n+1} - Q_n)} + (Q_{n+1} - Q_n) - 1 \right].$$

Definimos a  $K$  como la energía cinética total de la cadena y al momento de la  $n$ -ésima partícula como  $P_n = dQ_n/dt \equiv \dot{Q}_n$  (en adelante usaremos un punto sobre cualquier variable y denotará derivación temporal).

Por tanto, el hamiltoniano es la siguiente función

$$\mathcal{H}(Q_n, P_n) = \sum_n \frac{1}{2} P_n^2 + \sum_n \left[ e^{(Q_{n+1} - Q_n)} + (Q_{n+1} - Q_n) - 1 \right].$$

Las ecuaciones canónicas de movimiento son

$$\dot{P}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_n},$$

$$\dot{Q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_n}.$$

Que son equivalentes a la siguiente ecuación, se trata del movimiento de la  $n$ -ésima partícula de la cadena,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_n} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_n} = 0.$$

O bien, llevando a cabo las derivadas parciales,

$$\frac{d^2 Q_n}{dt^2} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}, \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots).$$

Hasta el momento no hemos considerado condiciones de frontera explícitamente. Estamos considerando una cadena suficientemente grande en la que los extremos no juegan ningún papel.

Transformemos la ecuación anterior de las coordenadas  $Q_n$  a las coordenadas relativas  $r_n$ . Puesto que  $\ddot{r}_n = \ddot{Q}_{n+1} - \ddot{Q}_n$ , solamente se requiere realizar la resta entre las dos ecuaciones correspondientes para  $Q$ , obtenemos

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2e^{r_n} - e^{r_{n-1}} - e^{r_{n+1}}. \quad (1.1)$$

Notemos la semejanza con la cadena lineal cuando  $r_n \rightarrow 0$ . Esta analogía se puede llevar al caso no lineal, tomando las exponenciales como nuevas variables, usando

$$f_n = e^{-r_n} - 1,$$

la sustituimos en la ecuación de movimiento y obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln(1 + f_n) = f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1} ,$$

y usamos a  $r_n$ , en el lado izquierdo de la ecuación, como

$$r_n = -\ln(1 + f_n) .$$

Integramos la ecuación respecto de  $t$  una vez y escogemos  $f_n(0) = 0$ , que es la fuerza inicial sobre la  $n$ -ésima partícula, obtenemos entonces

$$\frac{d}{dt} \ln(1 + f_n) = s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1} ,$$

donde

$$s_n \equiv \int_0^t f_n(t') dt' .$$

Ya que  $\dot{s}_n = f_n$  y llevando a cabo la derivación del primer término, la última ecuación nos conduce a

$$\frac{\ddot{s}_n}{1 + \dot{s}_n} = s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1} . \quad (1.2)$$

Observemos que si  $\dot{s}_n \ll 1$  tenemos la cadena lineal en las variables  $s_n$ , y además podemos construir soluciones usando este hecho.  $s_n$  pequeñas significa  $f_n$  pequeñas. Por otra parte, hasta aquí, lo que hemos estado haciendo es transformar la ecuación (1.1) en la ecuación (1.2). Son expresiones equivalentes del mismo sistema. A esta serie de transformaciones es lo que M. Toda llamó la *transformación dual*, [Toda. 1967].

### 1.2.1 La transformación dual

La estrategia de solución que usó M. Toda es análoga a la que se utiliza en la ecuación de Burguers. Es decir, tratar de encontrar una transformación de las variables dependientes que linealizan la ecuación.

Si damos un potencial  $\phi(r_n)$  arbitrario que sólo dependa de la variable  $r_n$ , entonces la fuerza entre las partículas en la cadena es

$$f(r_n) = -\frac{d\phi(r_n)}{dr_n} \equiv -\phi'(r_n) ,$$

y la ecuación de movimiento en la variable  $y_n$  para la  $n$ -ésima partícula es

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} = -\phi'(y_n - y_{n-1}) + \phi'(y_{n+1} - y_n) .$$

La ecuación de movimiento para  $r_n$  es, como antes,

$$\frac{d^2 r_n}{dt^2} = \phi'(r_{n-1}) - 2\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1}) . \quad (1.3)$$

La variable  $r_n$  juega el papel de la coordenada generalizada. Introducimos como variable canónica conjugada al momento generalizado  $s_n$ , con la siguiente ecuación de movimiento

$$\frac{ds_n}{dt} = -\frac{d\phi(r_n)}{dr_n} \equiv f_n ,$$

Cuando despejamos la variable  $r_n$  de la ecuación de la fuerza, tenemos

$$r_n = \chi(f_n) ;$$

es decir, se trata de la función inversa de  $f_n$  (en principio monovaluada) y escribimos la ecuación de movimiento como

$$\ddot{\chi}(f_n) = f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1} .$$

La transformación de variables que nos permite pasar de la ecuación (1.3) a la (1.4) es lo que definimos como transformación dual. Estas ecuaciones son llamadas por lo mismo duales. Pero el problema es hallar la interacción  $\phi(r_n)$  ó  $\chi(f_n)$  junto con la onda periódica  $r_n(t)$  ó  $f_n(t)$ , que satisfagan las ecuaciones de movimiento (1.3) y (1.4). M. Toda estuvo ensayando varios potenciales que tuvieran propiedades físicas aplicables a diversas situaciones, con los cuales las ecuaciones de movimiento admitieran soluciones periódicas exactas. Como estudiaremos en la siguiente sección, la transformación dual fue clave para resolver el problema. En particular, cuando uno introduce el potencial exponencial, la ecuación (1.3) se reduce a la (1.1) y la (1.4) a la (1.2), para  $f_n = \dot{s}_n$ .

### 1.3 Solución a las ecuaciones de movimiento

En el espíritu del párrafo anterior trataremos de linealizar la ecuación (1.2). Si esperamos obtener una solución localizada en  $f_n$ , entonces es de esperar que  $s_n$  tienda a límites finitos

en  $+\infty$  y  $-\infty$ . La función más simple que tiene esa propiedad es la tangente hiperbólica. Buscamos una onda viajera de la forma

$$\begin{aligned} s_n &= \beta \tanh(z) \\ z &= \kappa n + ut, \end{aligned}$$

donde  $\beta$ ,  $\kappa$  y  $u$  deben determinarse. Sustituimos en la ecuación de movimiento (1.2), obtenemos

$$\frac{\ddot{s}_n}{1 + \dot{s}_n} = -2 \frac{u^2 \operatorname{sech}^2(z) \tanh(z)}{1 + \beta u \operatorname{sech}^2(z)}.$$

Por otra parte, el lado derecho de la ecuación se escribe como

$$\beta [\tanh(\kappa n + ut - \kappa) + \tanh(\kappa n + ut + \kappa) - 2 \tanh(\kappa n)]. \quad (1.4)$$

Usando las fórmulas de adición para  $\tanh$  la fórmula puede reescribirse como

$$-2\beta \frac{\operatorname{sech}^2(z) \tanh(z) \operatorname{senh}^2(\kappa)}{1 + \operatorname{senh}^2(\kappa) \operatorname{sech}^2(z)}.$$

Comparando estas dos fórmulas encontramos la *relación de dispersión*,

$$\frac{u^2}{1 + \beta u \operatorname{sech}^2(z)} = \frac{\operatorname{senh}^2(\kappa)}{1 + \operatorname{senh}^2(\kappa) \operatorname{sech}^2(z)},$$

que nos dice que

$$u = \beta,$$

o bien,

$$\beta^2 = \operatorname{senh}^2(\kappa).$$

Por lo que una solución general para (1.2) es

$$s_n = \beta \tanh(\kappa n + \beta t) + \text{cte}, \quad (1.5)$$

donde  $\beta = \pm \operatorname{senh}(\kappa)$ .

Retornemos a las variables  $r_n$ , derivemos la expresión (1.5) con respecto a  $t$  una vez,

$$\frac{ds_n}{dt} \equiv f_n = \beta^2 \operatorname{sech}^2(\kappa n + \beta t),$$

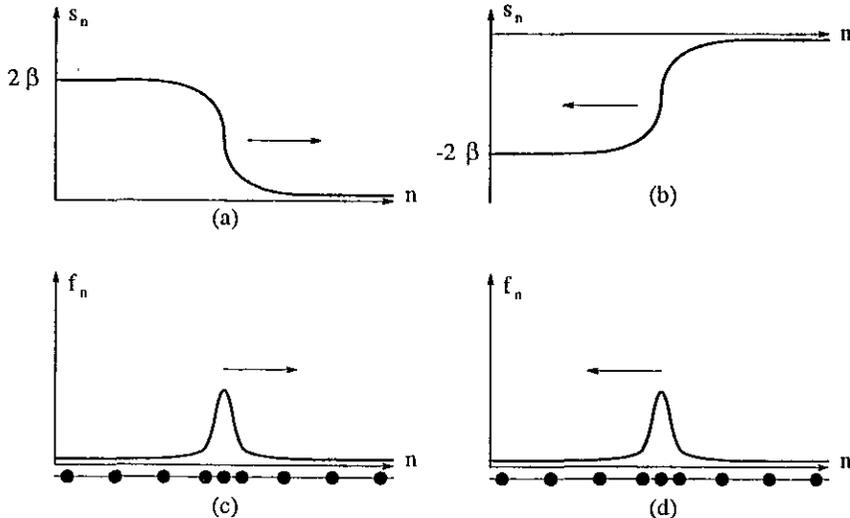
pero  $f_n = e^{-r_n} - 1$ , por lo que la solución se puede escribir como

$$e^{-r_n} - 1 = \sinh^2(\kappa) \operatorname{sech}^2(\kappa n + \beta t). \quad (1.6)$$

Tanto  $s_n$  como  $f_n$ , muestran perfiles de ondas viajeras constantes, ver figura (1.3). En el primer caso se trata del perfil de una onda de choque y en el segundo, para  $f_n$  (que representa la fuerza entre partículas) se trata de un pulso compresivo; ambas soluciones de onda viajan en la cadena infinita hacia la izquierda, con una velocidad  $c = h|\beta|/\kappa$ , que depende de  $\kappa$

$$c(\kappa) = h \frac{\sinh(\kappa)}{\kappa},$$

donde  $h$  es la distancia promedio entre las partículas.



Figural 3. Perfil de una onda solitaria en la cadena de Toda

La velocidad  $c(\kappa)$  depende de la amplitud de la onda  $1/\kappa$ , por lo que es de esperar que entre más alta y más angosta una onda viaje más rápido que otra de menor altura y más ancha. Por otro lado, a segundo orden en el desarrollo en serie de potencias, con  $\kappa \ll 1$ ,

$$c(\kappa) \approx 1 + \frac{\kappa^2}{6},$$

lo que significa que la onda-pulso siempre se propaga más rápido que las ondas de longitud de onda larga. En este caso, y dadas las transformaciones de variables que hicimos en la segunda sección, la velocidad de las ondas acústicas en la cadena lineal es del orden de 1. De la expresión (1.6) podemos ver que

$$e^{-r_n} - 1 > 0 ,$$

por lo que resulta que

$$r_n < 0 ,$$

y, por lo tanto, la cadena se comprime localmente alrededor de la onda.

La solución particular de la cadena de Toda infinita, que acabamos de obtener, es interesante no sólo por ser exacta, sino porque la onda viaja sin cambiar de forma. Esto no es el comportamiento usual de las ondas que viajan en los sólidos, líquidos o gases; generalmente éstas se dispersan conforme se mueven. Por otra parte, históricamente las soluciones de Toda siguieron al descubrimiento de los solitones en medios continuos, pero el resultado que hemos mostrado estableció una importante conexión entre el fenómeno de la propagación de ondas no lineales y la dinámica de los medios discretos. Es importante notar que cuando  $\kappa \rightarrow 0$ , la relación de dispersión se reduce a la de la ecuación KdV, que por otro lado, es el límite de la cadena de Toda para ondas largas.

### 1.3.1 Propiedades físicas del solitón

Definamos una nueva variable  $S_n$  como

$$\frac{dS_n}{dt} \equiv s_n .$$

De las ecuaciones  $f_n = \exp(-r_n) - 1$  y de  $f_n = ds_n/dt$ , obtenemos que

$$e^{-r_n} - 1 = \frac{d^2 S_n}{dt^2} ,$$

expresa nuevamente a la ecuación de evolución. Por lo que la ecuación (1.2) también se puede ver como

$$\ln(1 + \ddot{S}_n) = S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1} ,$$

y entonces, junto con la igualdad  $r_n = -\ln(1 + \ddot{S}_n)$ , podemos establecer que

$$\begin{aligned} r_n &= 2S_n - S_{n-1} - S_{n+1} \\ &= (S_n - S_{n+1}) - (S_{n-1} - S_n), \end{aligned}$$

pero sabemos también que  $r_n = Q_{n+1} - Q_n$  por lo que comparando con la última ecuación, obtenemos

$$Q_n = S_{n-1} - S_n.$$

Sabemos además que

$$s_n = m\beta \tanh(\kappa n + \beta t) + \text{cte},$$

entonces podemos afirmar que el desplazamiento  $Q_n$  de la  $n$ -ésima partícula está dado por

$$Q_n = \ln \left[ \frac{\cosh(\kappa(n-1) + \beta t)}{\cosh(\kappa n + \beta t)} \right] + \text{cte},$$

o bien, en términos de funciones exponenciales, es equivalente a

$$Q_n = \ln \left[ \frac{1 + e^{2(\kappa n - \kappa + \beta t)}}{1 + e^{2(\kappa n + \beta t)}} \right] + \text{cte}.$$

El solitón es una onda-pulso localizada, a su paso comprime la cadena acercando las partículas una cierta distancia. Esta distancia es igual a la diferencia

$$Q_{-\infty} - Q_{+\infty} = 2\kappa,$$

que se obtiene directamente de la última ecuación. Se puede considerar entonces que tiene una masa igual a

$$M = \frac{m}{h} (Q_{-\infty} - Q_{+\infty}) = 2m \frac{\kappa}{h},$$

y consiste de las masas de las partículas, que se acercan con el paso del pulso, una distancia menor que la promedio  $h$ .

Cuando existe un solitón el momento total de la cadena es

$$P_n \equiv \sum_n m \dot{Q}_n = m(s_{-\infty} - s_{+\infty}),$$

por lo que, tomando en cuenta que  $s_{-\infty} \rightarrow 2\beta$  y  $s_{+\infty} \rightarrow 0$ , (caso (a) de la figura (1.3)),

$$P = 2m\beta = Mc,$$

es el momento del solitón, que es la masa veces la velocidad del mismo ( $c = h\beta/\kappa$ ).

Definimos la energía (dimensionalmente) de la cadena como

$$E \equiv \sum_n \frac{m}{2} \dot{y}_n^2 + \sum_n \frac{a}{b} [(e^{-(y_{n+1}-y_n)} - 1) + (y_{n+1} - y_n)].$$

Para calcularla conocemos las siguientes igualdades

$$e^{-b(y_{n+1}-y_n)} - 1 = \beta^2 \operatorname{sech}^2(\kappa n + \beta t)$$

$$\dot{Q}_n^2 = (s_{n-1} - s_n)^2 = \beta^2 [\tanh(\kappa(n-1) + \beta t) - \tanh(\kappa n + \beta t)]^2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} E &= \frac{a}{b} \sum_n [\beta^2 \operatorname{sech}^2(\kappa n + \beta t) + (y_{n+1} - y_n)] \\ &\quad + \beta^2 \frac{a}{2b} \sum_n [\tanh(\kappa(n-1) + \beta t) - \tanh(\kappa n + \beta t)]^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, también sabemos que

$$\sum_n \operatorname{sech}^2(\kappa n + \beta t) = \sum_n [1 - \tanh(\kappa n + \beta t)] \quad y$$

$$\sum_n (y_{n+1} - y_n) = y_{+\infty} - y_{-\infty} = -2\kappa.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E &= -\frac{2a\kappa}{b} + \frac{a}{2b} \beta^2 \sum_n [\tanh^2(\kappa(n-1) + \beta t) - \tanh^2(\kappa n + \beta t)] \\ &\quad + \beta^2 \frac{a}{2b} \sum_n \left[ \frac{\tanh(\kappa(n-1) + \beta t) - \tanh(\kappa n + \beta t)}{\tanh(\kappa)} \right]. \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad

$$1 - \tanh(x) \tanh(y) = \frac{\tanh(x) - \tanh(y)}{\tanh(x - y)}.$$

Además, empleemos el hecho de que  $\tanh(\kappa n + \beta t) \rightarrow \pm 1$  para  $n \rightarrow \pm\infty$  obtenemos

$$E = 2\frac{a}{b} \left( \frac{\beta^2}{\tanh(\kappa)} - \kappa \right),$$

donde  $\beta^2 = \sinh^2(\kappa)$ , finalmente

$$E = \frac{2a}{b} [\sinh(\kappa) \cosh(\kappa) - \kappa].$$

## 1.4 Solución con dos solitones

En la introducción de la primera parte mencionamos los trabajos numéricos de Zabusky y Kruskal sobre la ecuación KdV. La solución a esta ecuación resultó en ondas solitarias no lineales, llamadas posteriormente por ellos mismos solitones. Mencionamos que la cualidad más importante de estas ondas es que después de colisionar preservaban sus perfiles originales. Toda menciona que estudios numéricos de la cadena muestran que las soluciones de tipo solitón resultan ser ondas que viajan en la cadena y, aún cuando interactúan entre ellas, preservan su forma y velocidad [Toda, 1989]. En esta sección vamos a estudiar la evolución de una solución a las ecuaciones de movimiento con dos solitones. Mostraremos que cuando colisionan los solitones, preservan sus perfiles iniciales y que se desfasan.

En la ecuación

$$\frac{d}{dt} \ln(1 + f_n) = s_{n-1} - 2s_n + s_{n+1},$$

definamos a la variable

$$S_n \equiv \int_0^t s_n(t') dt',$$

por lo tanto,

$$f_n = \tilde{S}_n.$$

Por lo que la ecuación se transforma en

$$\ln(1 + \tilde{S}_n) = S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1} , \quad (1.7)$$

donde hemos tomado  $\tilde{S}_n(0) = f_n(0)$  igual a cero.

Motivados por el análisis de las ecuaciones continuas, buscamos una solución de la forma

$$S_n = \ln[\cosh(\kappa_1 n - \beta_1 t) + B \cosh(\kappa_2 n - \beta_2 t + \delta)] , \quad (1.8)$$

donde  $\kappa_i, \beta_i, \delta$  y  $B > 0$  son constantes desconocidas. Notemos que cuando  $B = 0$  corresponde al caso de un solitón. Podemos tomar  $\kappa_1, \kappa_2 > 0$  sin pérdida de generalidad. Substituyendo (1.8) en (1.7), obtenemos, después de una buena cantidad de álgebra, que los argumentos de ambas funciones logarítmicas de los dos lados de (1.7) se pueden expresar de la forma  $A_1 \cosh^2(u) + A_2 \cosh^2(v) + A_3$ , donde

$$u \equiv \kappa_1 n - \beta_1 t , \quad (1.9)$$

$$v \equiv \kappa_2 n - \beta_2 t + \delta .$$

Igualando los argumentos y considerando a  $u$  y  $v$  como variables independientes, obtenemos tres condiciones que las constantes deben satisfacer,

$$\begin{aligned} \beta_1^2 - \sinh^2(\kappa_1) + \beta_2^2 B^2 - B^2 \sinh^2(\kappa_2) &= 0 \\ 2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 - \cosh(\kappa_1) \cosh(\kappa_2) &= 0 \\ \beta_1 \beta_2 - \sinh(\kappa_1) \sinh(\kappa_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Si expresamos a  $\beta_1^2, \beta_2^2$  y  $B$  en términos de  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , hallamos que hay dos posibilidades:

Caso (a)

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 \sinh(\kappa_1/2) \cosh(\kappa_2/2) , \\ \beta_2 &= 2 \cosh(\kappa_1/2) \sinh(\kappa_2/2) , \\ B &= \frac{\sinh(\kappa_1/2)}{\sinh(\kappa_2/2)} . \end{aligned}$$

Caso (b)

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 2 \cosh(\kappa_1/2) \sinh(\kappa_2/2) , \\ \beta_2 &= 2 \sinh(\kappa_1/2) \cosh(\kappa_2/2) , \\ B &= \frac{\cosh(\kappa_1/2)}{\cosh(\kappa_2/2)} .\end{aligned}$$

Se puede reemplazar a  $\beta_1$  y  $\beta_2$  por  $-\beta_1$  y  $-\beta_2$  en las expresiones, es la inversión del signo de la velocidad de propagación de las ondas.

Una vez más retornemos a las variables  $r_n$ , empleemos la ecuación (1.8) y (1.9) y otra buena cantidad de álgebra para obtener

$$e^{-r_n} - 1 = \frac{\xi_1}{\xi_2} , \quad (1.10)$$

donde,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sinh^2(\kappa_1) + B^2 \sinh^2(\kappa_2) + 2B \cosh(u+v) \sinh^2\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}\right) \\ &\quad + 2B \cosh(u-v) \sinh^2\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) , \\ \xi_2 &= [\cosh(u) + B \cosh(v)]^2 .\end{aligned}$$

Notemos que la dependencia temporal está en las variables  $u$  y  $v$  definidas en la expresión (1.9). También notemos que la expresión de la derecha de la igualdad (1.10) siempre es  $> 0$  y por lo tanto  $r_n = Q_{n+1} - Q_n < 0$ .

Si consideramos valores de  $n(t)$  tales que el cociente  $|u|/|v|$  va a cero o infinito en el límite  $t \rightarrow \infty$ , entonces el lado derecho de (1.10) se anula y  $r_n(t) \rightarrow 0$ . En otras palabras, la excitación desaparece. Para que  $r_n(t)$  no se anule, debemos cambiar  $n$  (es decir, movernos a lo largo de la cadena) de tal forma que, cuando  $|t| \rightarrow \infty$ , pase una de las siguientes dos situaciones

$$u + v = c \quad u - v = c .$$

donde  $c$  es una constante. Esto es, hay dos posibles formas de movernos en la cadena para tiempos largos y continuar observando excitaciones, se trata de una excitación compuesta por dos.

Por ejemplo, variemos a  $n$  con tal que  $u - v = c$ . Entonces, conforme  $t \rightarrow \pm\infty$ , ( $|v| \rightarrow \infty$ ), la expresión (1.10) se reduce a

$$e^{-rn} - 1 \approx 2B \frac{\sinh^2\left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}\right) \cosh(2v + c)}{[\cosh(v + c) + B \cosh(v)]^2}. \quad (1.11)$$

El comportamiento asintótico del lado derecho de esta ecuación depende de si  $v > 0$  ó  $v < 0$ , que de acuerdo con (1.9) está relacionado con los límites  $t \rightarrow +\infty$  ó  $t \rightarrow -\infty$ .

Para determinar el signo de  $v$  (usaremos simbólicamente  $\text{sgn}(v)$  para ello) conforme  $t \rightarrow \pm\infty$ , consideremos el primer caso  $u - v = c$ , así que  $(\kappa_1 - \kappa_2)n - (\beta_1 - \beta_2)t = c'$ , ó

$$n(t) = \left( \frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) t + c'', \quad (1.12)$$

donde  $c'$  y  $c''$  son constantes. Entonces

$$\begin{aligned} v &= \left( \kappa_1 \frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} - \beta_1 \right) t + \text{cte} \\ &= \left( \frac{\kappa_2 \beta_1 - \kappa_1 \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) t + \text{cte}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

De las expresiones en el caso (a), se tiene

$$\kappa_2 \beta_1 - \kappa_1 \beta_2 = \left[ \kappa_2 \sinh\left(\frac{\kappa_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\kappa_2}{2}\right) - \kappa_1 \cosh\left(\frac{\kappa_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{\kappa_2}{2}\right) \right],$$

de donde concluimos que

$$\text{sgn}\left(\frac{\kappa_2 \beta_1 - \kappa_1 \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right) < 0; \quad y$$

$$\text{sgn}(v) = -\text{sgn}(t).$$

La misma conclusión se obtiene para el caso (b).

Por otro lado, si  $u + v = c$ , obtenemos, a partir de la expresión (1.12) que

$$\begin{aligned} n(t) &= \left( \frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) t + c'', \quad y \\ v &= \left( \frac{\kappa_2 \beta_1 - \kappa_1 \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right) t + \text{cte}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

a partir de lo cual también se puede demostrar, de forma similar, que  $\text{sgn}(v) = \text{sgn}(\kappa_1 - \kappa_2)\text{sgn}(t)$ .

Por lo tanto, de la expresión (1.10) se obtienen dos pulsos compresivos separados espacialmente ( $u \pm v = c$ ) en  $|t| \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-r_n} - 1) = \left\{ \begin{array}{l} \sinh^2 \left( \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \right) \text{sech}^2 \frac{1}{2} [(u - v) + \text{sgn}(t) \ln(B)] , \\ \sinh^2 \left( \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \text{sech}^2 \frac{1}{2} [(u + v) + \text{sgn}(t) \text{sgn}(\kappa_2 - \kappa_1) \ln(B)] . \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

que es válida tanto para el caso (a) como el (b). La estructura de cada excitación por separado es similar a una sola excitación (1.6), pero no parecería obvio en un principio. Lo que no es "obvio" es que las excitaciones puedan interactuar y mantener la misma forma en el límite  $t \rightarrow +\infty$  que tendrían en  $t \rightarrow -\infty$ ; como en la expresión (1.15).

Notemos que la solución (1.15) es invariante ante el intercambio de  $\kappa_1$  por  $\kappa_2$  y que, en cualquier caso, (a) o (b), en la expresión para  $B$  podemos escoger  $\kappa_1 > \kappa_2$  sin pérdida de generalidad. Por lo que el signo  $(\kappa_1 - \kappa_2) > 0$  y  $\ln(B) > 0$ , en (1.15). Podemos escribir entonces a estos pulsos asintóticos más concisamente como

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} (e^{-r_n} - 1) = \sinh^2 \left( \frac{\kappa_1 \pm \kappa_2}{2} \right) \text{sech}^2 \frac{1}{2} [(u \pm v) \mp \text{sgn}(t) \ln(B)] . \quad (1.16)$$

Esto finaliza el álgebra. Ahora pasemos a la interpretación física de la solución. Puesto que

$$u \pm v = (\kappa_1 \pm \kappa_2)n - (\beta_1 \pm \beta_2)t \pm \delta , \quad (1.17)$$

las dos excitaciones (1.16) tiene dimensiones de velocidad

$$\frac{\beta_1 \pm \beta_2}{\kappa_1 \pm \kappa_2} = 2 \frac{\sinh^2 \left( \frac{\kappa_1 \pm \kappa_2}{2} \right)}{\kappa_1 \pm \kappa_2} \times \left( \begin{array}{l} +1 \text{ caso (a)} \\ \pm 1 \text{ caso (b)} \end{array} \right) \quad (1.18)$$

En el caso (a) tenemos dos excitaciones, ambas con velocidades positivas, una más veloz

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\kappa_1 + \kappa_2} ,$$

que la otra

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\kappa_1 - \kappa_2} .$$

En el caso (b) la excitación más rápida tiene velocidad positiva, mientras que la lenta tiene velocidad negativa, pero recordemos que los signos los podemos intercambiar. Notemos de la ecuación (1.16), que el pulso más rápido tiene la amplitud más grande. Estos dos casos se pueden ver como en la figura (1.4).

Si el tiempo corre de  $-\infty$  a  $+\infty$ , los argumentos de las funciones secantes hiperbólicas en (1.16) se desfasan por  $\mp \ln(B)$ . De la expresión (1.17) concluimos que los centros de estas compresiones localizadas son desfasados por una cantidad  $\Delta n$  igual a

$$\Delta n = \pm 2 \frac{\ln(B)}{\kappa_1 \pm \kappa_2} .$$

Por lo tanto, el pulso más rápido se desfasa, en valor absoluto, menos que los pulsos más lentos. Esto se ilustra en el diagrama  $n$ -temporal de la figura 1.4, donde las rectas

$$(u \pm v) \mp \operatorname{sgn}(t) \ln(B) = 0$$

están dibujadas. Por supuesto, estas rectas sólo tienen significado para  $|t|$  grande. Si asociamos masas a los pulsos rápido y lento, el “centro de masas” no experimenta corrimientos o desfasajes.  $\delta$  simplemente señala el “origen” de la interacción de estos dos pulsos.

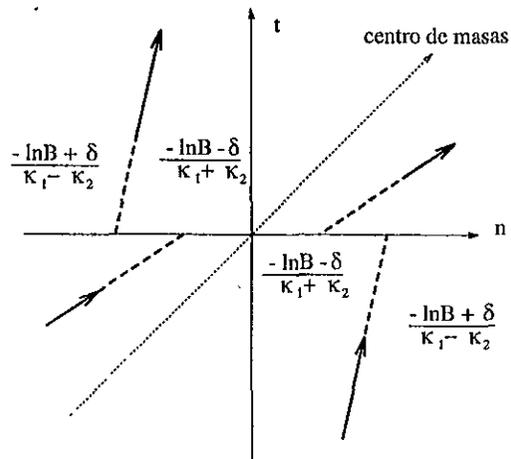
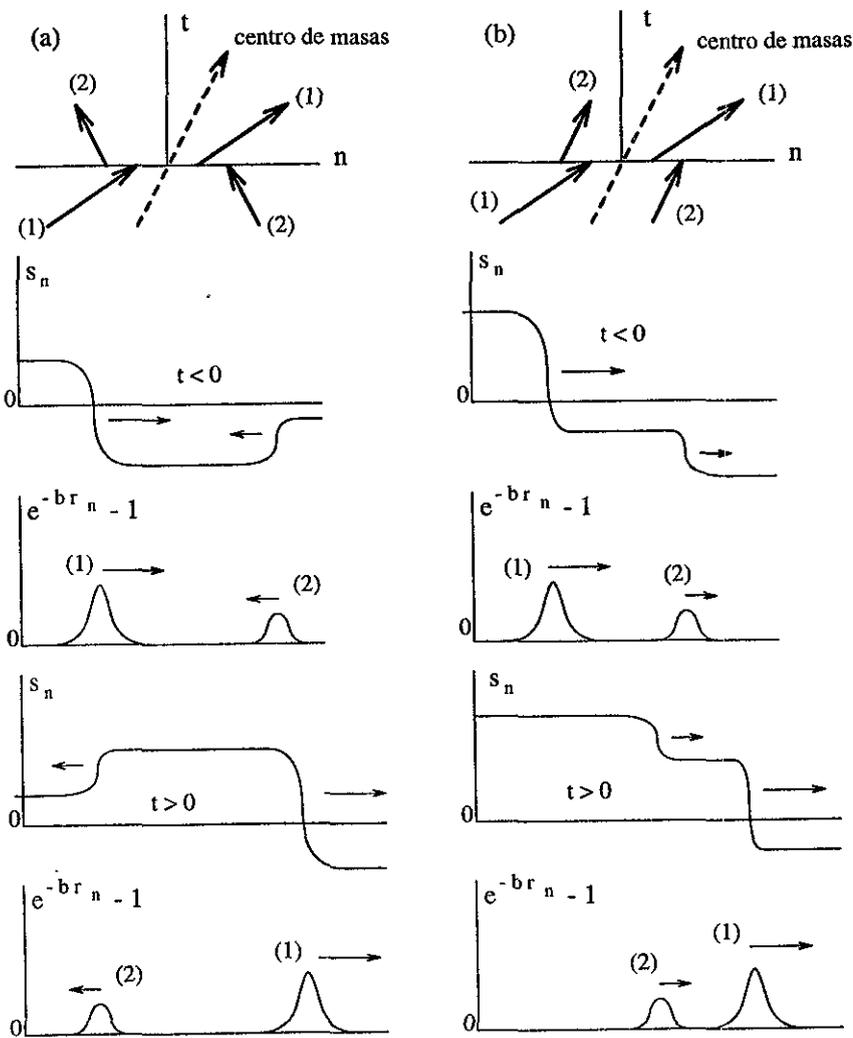


Figura 1.4. Colisión entre dos solitones que se encuentran de frente



Figural 5. Colisión entre dos solitones, (a) se encuentran de frente y (b) se revasan.



## 2

# Ecuación general de evolución

En este capítulo estudiamos la generalización de las soluciones a las ecuaciones de movimiento de la cadena de Toda infinita mediante el formalismo de Lax. Este formalismo nos permitirá hallar, junto con la energía y momento totales, una infinidad de cantidades conservadas del sistema. La solución de las ecuaciones generales de evolución la pospondremos hasta el próximo capítulo.

Vimos en el primer capítulo que la cadena de Toda admite soluciones de ondas-pulsos localizadas, conocidas como solitones, y que cuando colisionan dos de estas ondas preservan sus perfiles iniciales. Podemos pensar que la estabilidad de los solitones es debida a la existencia de las cantidades conservadas. La mayor parte del capítulo estará dedicado a mostrar que hay tantas cantidades conservadas como partículas en una cadena. Sin embargo, ahora sabemos que tanto el sistema con un número finito de partículas como la cadena infinita son integrables [Toda, 1989].

M. Hénon en Francia y H. Flaschka en los Estados Unidos, comenzaron a estudiar analíticamente la cadena de Toda estimulados por los trabajos numéricos de J. Ford, quien había mostrado la integrabilidad del sistema periódico de tres partículas. En 1974, Hénon probó que las cadenas de Toda cíclicas poseían tantas cantidades conservadas como número de partículas. En ese mismo año, Flaschka probó independientemente el mismo

resultado y presentó el método para resolver la cadena de Toda infinita. El método se basó en la discretización del Método de Dispersión Inversa, empleado anteriormente para resolver la ecuación KdV.

## 2.1 El par de Lax

En esta primera sección estudiaremos las integrales de movimiento de una cadena de Toda periódica compuesta por tres partículas de masas iguales, ver figura 2.1. Posteriormente extenderemos los resultados a un número infinito de partículas. No expondremos la solución a este sistema cíclico, que por cierto no admite soluciones de tipo solitón. Las soluciones están dadas en términos de las funciones elípticas o *cnoidales* [Toda, 1989]. Por lo pronto, estamos interesados sólo en las cantidades conservadas del sistema.

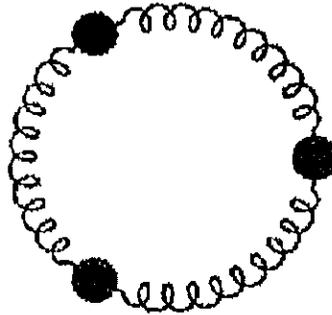


Figura2.1. Molécula triatómica

A principios del verano de 1975, M. Toda recibió una carta de J. Ford, quien trabajaba en el *Georgia Institute of Technology*. La carta incluía una copia de los cálculos de la solución a la cadena de Toda cíclica de tres partículas hechos por M. Kac y P. van Moerbeke.

En el cálculo, Kac empleó el siguiente hamiltoniano

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + e^{-(q_2 - q_1)} + e^{-(q_3 - q_2)} + e^{-(q_1 - q_3)}, \quad (2.1)$$

donde  $q_n$  y  $p_n$ , ( $n = 1, 2, 3$ ), los desplazamientos y momentos de cada partícula, son variables canónicas conjugadas. Las ecuaciones de movimiento son el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1, & \dot{p}_1 &= e^{-(q_1 - q_3)} - e^{-(q_2 - q_1)}, \\ \dot{q}_2 &= p_2, & \dot{p}_2 &= e^{-(q_2 - q_1)} - e^{-(q_3 - q_2)}, \\ \dot{q}_3 &= p_3, & \dot{p}_3 &= e^{-(q_3 - q_2)} - e^{-(q_1 - q_3)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Simplificamos la expresión del hamiltoniano empleando el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2}p_1, & b_2 &= \frac{1}{2}p_2, & b_3 &= \frac{1}{2}p_3, \\ a_1 &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(q_2 - q_1)}, & a_2 &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(q_3 - q_2)}, & a_3 &= \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(q_1 - q_3)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

de donde obtenemos la siguiente igualdad

$$a_1 a_2 a_3 = \frac{1}{2^3}, \quad (2.4)$$

y al hamiltoniano

$$\mathcal{H} = 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es una expresión cuadrática de  $a_n$  y  $b_n$ , pero no significa que podamos hallar las variables canónicas conjugadas adecuadas para la integración. Las ecuaciones de movimiento ahora son, en términos de las nuevas variables,

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(b_1 - b_2), & \dot{a}_2 &= a_2(b_2 - b_3), & \dot{a}_3 &= a_3(b_3 - b_1), \\ \dot{b}_1 &= 2(a_3^2 - a_1^2), & \dot{b}_2 &= 2(a_1^2 - a_2^2), & \dot{b}_3 &= 2(a_2^2 - a_3^2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

con condiciones de frontera periódicas:  $a_1 = a_3$  y  $b_1 = b_3$ . Este sistema de tres partículas posee tres grados de libertad, uno por cada partícula, que sólo pueden moverse longitudinalmente en torno a su posición de equilibrio. La descripción del sistema la hacemos desde un sistema de referencia ligado a la molécula.

En vez de intentar integrar las ecuaciones directamente, estudiaremos un problema asociado. En realidad adoptaremos un nuevo punto de vista, ya que en vez de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (2.6), trabajaremos con un problema espectral lineal o de valores propios.

Observemos que el momento total  $\mathcal{P}$ , dado por  $2\sum b_n$ , y la energía total  $\mathcal{H}$ , dada por  $2\sum(b_n^2 + 2a_n^2)$ , son funciones simétricas de las variables  $a_n$  y  $b_n$ . Estas funciones simétricas están ligadas al polinomio característico de la matriz simétrica real  $L$

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

La idea principal consiste en mostrar que los valores propios de la matriz  $L$  son independientes del tiempo  $t$  y que no son otra cosa que las cantidades conservadas del sistema. Dos de estas cantidades conservadas son el momento y la energía totales. Lo sorprendente es que el tercer valor propio también es una cantidad conservada, como mostramos a continuación.

Si definimos un vector  $\varphi$  como

$$\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T,$$

entonces, la ecuación de valores propios de la matriz es

$$(L - \lambda I)\varphi = 0. \quad (2.8)$$

El valor propio  $\lambda(t)$  se conoce como el espectro de la matriz y  $\varphi(t)$  como la función propia,  $I$  es la matriz identidad de tamaño  $3 \times 3$ . Cuando ocurra que  $d\lambda/dt = 0$  hablaremos de un *movimiento isospectral* en el sistema. La ecuación (2.8) es satisfecha por un vector nulo  $\varphi$  siempre y cuando la matriz  $(L - \lambda I)$  sea singular, es decir,

$$\det(L - \lambda I) = 0. \quad (2.9)$$

o bien,

$$\begin{vmatrix} b_1 - \lambda & a_1 & a_3 \\ a_1 & b_2 - \lambda & a_2 \\ a_3 & a_2 & b_3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3), \quad (2.10)$$

donde  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  son las raíces del polinomio característico. Al desarrollar al determinante y al producto de la derecha, la relación entre las raíces y los coeficientes del polinomio es

$$\lambda^2 \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b_1 + b_2 + b_3 \quad (2.11)$$

$$\lambda^1 \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \quad (2.12)$$

$$\lambda^0 \rightarrow \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = b_1 b_2 b_3 - (b_1 a_2^2 + b_2 a_3^2 + b_3 a_1^2) + 2a_1 a_2 a_3 \quad (2.13)$$

Derivemos la primera ecuación (2.11), empleamos el conjunto de ecuaciones (2.6) y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) &= \frac{d}{dt}(b_1 + b_2 + b_3) \\ &= 2(a_3^2 - a_1^2 + a_1^2 - a_2^2 + a_2^2 - a_3^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

que es la conservación del momento total  $\mathcal{P} = \sum P_n = 2 \sum b_n$ .

De la ecuación (2.11) observemos que

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3),$$

y de la ecuación (2.12) despejamos los términos cruzados de las  $b$ 's y lo sustituimos en la última igualdad

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

pero también se cumple que

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3),$$

por lo que comparando estas dos ecuaciones obtenemos que

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

que es un medio veces el hamiltoniano (2.5)

$$\mathcal{H} = 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2). \quad (2.15)$$

Si derivamos esta cantidad obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) &= \frac{d}{dt} [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)] \\
 &= 2[b_1\dot{b}_1 + b_2\dot{b}_2 + b_3\dot{b}_3 + 2(a_1\dot{a}_1 + a_2\dot{a}_2 + a_3\dot{a}_3)] \\
 &= 4[b_1(a_3^2 - a_1^2) + b_2(a_1^2 - a_2^2) + b_3(a_2^2 - a_3^2) \\
 &\quad + (a_1^2(b_1 - b_2) + a_2^2(b_2 - b_3) + a_3^2(b_3 - b_1))] = 0, \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

que expresa la conservación de la energía total  $\mathcal{H}$ .

Finalmente, obtenemos la derivada de la ecuación (2.13), tomando en cuenta (2.4),

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) &= \frac{d}{dt} [b_1b_2b_3 - (b_1a_2^2 + b_2a_3^2 + b_3a_1^2)] \\
 &= \frac{db_1}{dt}b_2b_3 + \frac{db_2}{dt}b_1b_3 + \frac{db_3}{dt}b_1b_2 \\
 &\quad - \frac{db_1}{dt}a_2^2 - \frac{db_2}{dt}a_3^2 - \frac{db_3}{dt}a_1^2 \\
 &\quad - b_1\frac{d(a_2^2)}{dt} - b_2\frac{d(a_3^2)}{dt} - b_3\frac{d(a_1^2)}{dt}. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Y empleando el conjunto de ecuaciones (2.6), vemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) &= 2(a_1^2 - a_3^2)b_2b_3 + 2(a_2^2 - a_1^2)b_1b_3 + 2(a_3^2 - a_2^2)b_1b_2 \\
 &\quad - 2(a_1^2 - a_3^2)a_2^2 - 2(a_2^2 - a_1^2)a_3^2 - 2(a_3^2 - a_2^2)a_1^2 \\
 &\quad - 2b_1a_2^2(b_2 - b_3) - 2b_2a_3^2(b_3 - b_1) - 2b_3a_1^2(b_1 - b_2) = 0. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Así, del conjunto de ecuaciones (2.14,16 y 18), concluimos que cada una de las  $\lambda$ 's son independientes del tiempo

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \text{cte.}$$

Y como ya mencionamos, estas son las tres integrales de movimiento de la cadena cíclica; a saber, el momento y la energía totales y el producto  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , que de ordinario no posee cualquier sistema mecánico.

Si  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  son los valores propios de  $L$  y  $U$  es la matriz que diagonaliza a  $L$ , entonces

$$U^{-1}LU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Por lo tanto,

$$\text{tr}(U^{-1}LU) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad (2.20)$$

$$\text{tr}[(U^{-1}LU)^2] = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (2.21)$$

$$\det(U^{-1}LU) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (2.22)$$

son las cantidades conservadas. Notemos además

$$\text{tr}(U^{-1}LU) = \text{tr}(L) = \frac{1}{2}\mathcal{P}, \quad (2.23)$$

$$\text{tr}[(U^{-1}LU)^2] = \text{tr}(L^2) = \frac{1}{2}\mathcal{H}, \quad (2.24)$$

$$\det(U^{-1}LU) = \det(L). \quad (2.25)$$

Es decir, que si las entradas de la matriz  $L$  evolucionan de acuerdo con las ecuaciones de Toda (2.6), entonces la matriz posee equivalencia unitaria. De hecho, se pueden construir variables de ángulo y acción explícitamente, en donde las cantidades conservadas están ligadas a las tres acciones. Usando estas variables el sistema se puede integrar completamente usando funciones elípticas, (ver [Toda, 1989]). Pensemos que aunque tenemos seis variables dependientes del tiempo  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  y  $b_3$ , con la condición  $a_1a_2a_3 = 1/2^3$ , el número de variables independientes se reduce a cinco. Por otra parte, tenemos tres cantidades conservadas  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$ , las acciones. Por lo tanto, si obtenemos dos cantidades más como funciones del tiempo, el movimiento estará completamente determinado. Toda presenta una versión de estos cálculos mediante un procedimiento nada elemental (ver capítulo 25 de [Toda, 1989]). En lo que sigue, la equivalencia unitaria será nuestro punto de partida para hallar leyes de conservación para cadenas de  $N$  partículas.

### 2.1.1 Rotación de cuerpo rígido

Comencemos por estudiar en forma explícita la derivada temporal de la matriz  $L$ , que tiene la siguiente forma

$$\frac{dL}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{b}_1 & \dot{a}_1 & \dot{a}_3 \\ \dot{a}_1 & \dot{b}_2 & \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 & \dot{a}_2 & \dot{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(a_3^2 - a_1^2) & a_1(b_1 - b_2) & a_3(b_3 - b_1) \\ a_1(b_1 - b_2) & 2(a_1^2 - a_2^2) & a_2(b_2 - b_3) \\ a_3(b_3 - b_1) & a_2(b_2 - b_3) & 2(a_2^2 - a_3^2) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Para reinterpretar  $\dot{\mathbf{A}}$  recordemos la fórmula para derivar un vector  $\mathbf{A}$  de magnitud constante. La derivada se puede expresar como el producto vectorial de la velocidad angular  $\omega$  por el mismo vector  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \times \mathbf{A} .$$

En coordenadas cartesianas sus componentes son

$$\begin{aligned} \dot{A}_x &= \omega_y A_z - \omega_z A_y , \\ \dot{A}_y &= \omega_z A_x - \omega_x A_z , \\ \dot{A}_z &= \omega_x A_y - \omega_y A_x . \end{aligned}$$

La misma ecuación, formulada mediante matrices, se expresa como una generalización del producto vectorial como sigue. La representación matricial del vector  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_x & -A_y \\ -A_x & 0 & A_z \\ A_y & -A_z & 0 \end{bmatrix} .$$

y el de  $\omega$ ,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & -\omega_y \\ -\omega_x & 0 & \omega_z \\ \omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} .$$

Mediante cálculo directo podemos verificar el siguiente resultado

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \Omega \mathbf{A} + \mathbf{A} \Omega^T , \quad (2.27)$$

pero, por la definición de  $\Omega$ , vemos que  $\Omega^T = -\Omega$ ; es decir, podemos representar a la derivada de nuestro operador o matriz como un conmutador de matrices

$$[\Omega, \mathbf{A}] \equiv \Omega \mathbf{A} - \mathbf{A} \Omega , \quad (2.28)$$

en donde  $\Omega$  es una matriz antisimétrica. Se trata de la representación matricial de una rotación rígida, en donde los valores propios del vector  $\mathbf{A}$  son constantes, como en la cadena de Toda de tres partículas.

En este caso es posible verificar que para la matriz  $L$  (2.26), se puede escribir

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB, \quad (2.29)$$

con

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & a_3 \\ a_1 & 0 & -a_2 \\ -a_3 & a_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

La ecuación de Lax (2.29) aparece naturalmente en diversos problemas de mecánica y física [Cruz-Pacheco, 1997]. Las ecuaciones de Euler

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega},$$

por ejemplo, se pueden escribir en la forma de Lax escogiendo a las matrices

$$L = \begin{bmatrix} 0 & M_1 & -M_2 \\ -M_1 & 0 & M_3 \\ M_2 & -M_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$  es el vector momento angular y  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  el vector velocidad angular. Los valores propios de  $L$  son  $\pm i(\mathbf{M}, \mathbf{M})$  y 0; son constantes sobre las trayectorias de la ecuación de Euler [Arnold, 1988].

A esta representación matricial es lo que llamamos el *formalismo de Lax* [Lax, 1968] para la cadena de Toda y es la base del estudio de las cadenas de  $N$  partículas.

## 2.2 Ecuación matricial de evolución

La ecuación general de evolución de la cadena de Toda la podemos expresar como un sistema de ecuaciones

$$\frac{dQ_n}{dt} = P_n, \quad (2.31)$$

$$\frac{dP_n}{dt} = e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - e^{-(Q_{n+1} - Q_n)}. \quad (2.32)$$

Como en el caso de tres partículas, introducimos el siguiente cambio de variables

$$a_n = \frac{1}{2}c^{-(Q_{n+1}-Q_n)/2}, \quad (2.33)$$

$$b_n = \frac{1}{2}P_n, \quad (2.34)$$

entonces, la integral de energía o hamiltoniano es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_n \frac{1}{2}P_n^2 + \sum_n e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} \\ &= 2 \sum_n (b_n^2 + 2a_n^2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Y el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas, en las variables  $a_n$  y  $b_n$ , resulta en las ecuaciones generales de evolución para un sistema periódico de Toda

$$\dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \quad (2.36)$$

$$\dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2). \quad (2.37)$$

En un anillo de  $N$  partículas, con condiciones de frontera  $a_1 = a_N$  y  $b_1 = b_N$ , podemos escribir las ecuaciones de evolución con el siguiente par de Lax

$$L = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & 0 & \dots & \dots & a_{N-1} & b_N \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & \dots & \dots & 0 & a_N \\ a_1 & 0 & -a_2 & & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 0 & -a_{N-1} \\ -a_N & 0 & \dots & \dots & a_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

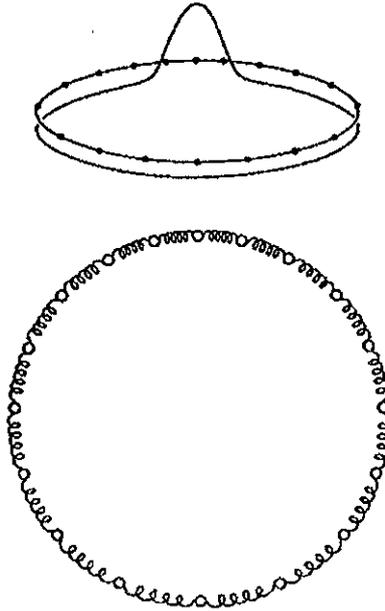


Figura 2.2. Cadena de Toda cíclica con 18 partículas. Se puede notar que en la parte superior de la cadena las partículas están más cercanas, se trata de un pulso compresivo que viaja alrededor de la cadena.

que cumplen con la relación de conmutación (2.29), (ver figura 2.2).

Flaschka fue el primero que escribió las ecuaciones de evolución de la cadena de esta forma [Flaschka, 1973]. Empleando este formalismo, como ya mencionamos, Flaschka obtuvo las cantidades conservadas de la cadena periódica y también la solución al problema de valores iniciales de la cadena infinita ( $N \rightarrow \infty$ ).

Si omitimos todos los elementos 0 de la matriz  $L$  del sistema de muchas partículas, obtendremos la matriz  $L$  del sistema de tres partículas. Por lo que parece adecuado suponer que un sistema de tres partículas es el sistema mínimo que posee las propiedades de un sistema de muchas partículas.

Los componentes matriciales  $a_n$  y  $b_n$  son funciones del desplazamiento y del momento, que a su vez son funciones del tiempo. Por lo tanto, las matrices  $L$  y  $B$  son funciones del

tiempo  $t$ . En adelante escribiremos  $L(t)$  y  $B(t)$  para denotar la dependencia del parámetro temporal, y así  $L(0)$  y  $B(0)$  denotarán valores iniciales. También escribiremos un valor propio  $\lambda$  de  $L$  como  $\lambda(t)$  para expresar la dependencia en  $t$ . Como en el caso de tres partículas, introducimos la función propia como  $\varphi(t)$ , una matriz de tamaño  $N \times 1$ ,

$$L(t)\varphi(t) = \lambda(t)\varphi(t) . \quad (2.40)$$

Mostraremos que el valor propio  $\lambda$  es independiente del tiempo. Esto es

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 ,$$

como antes  $\lambda$  se llama el espectro de la cadena. Siendo la función propia diferente del vector cero, se debe cumplir que

$$\det(L(t) - \lambda(t)I) = 0 , \quad (2.41)$$

que nos da el espectro  $\lambda$ .  $I$  es una matriz unitaria de tamaño  $N \times N$ . Demostraremos que el espectro de la cadena es independiente del tiempo  $t$  a partir de la observación que el propio Lax hizo [Lax, 1968]. La observación se basa en el hecho de que dos operadores o matrices que poseen el mismo espectro son *unitariamente equivalentes* [Eckhaus, 1981].

### 2.2.1 Equivalencia unitaria

Si intercambiamos una columna por un renglón en la matriz  $B$ , su signo cambia; esto es,  $B$  es una matriz antisimétrica. Aunque  $B$  es real, expresaremos este hecho como

$$B^* = -B . \quad (2.42)$$

Consideremos una matriz  $U$ , que sólo depende del parámetro  $t$ , y que se define por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{dU(t)}{dt} = BU(t) \quad (2.43)$$

y el valor inicial

$$U(0) = I , \quad (2.44)$$

donde  $I$  es una matriz unidad de tamaño  $N \times N$ . Los conjugados hermitianos de la ecuación diferencial y su valor inicial son

$$\begin{aligned}\frac{dU^*(t)}{dt} &= (BU(t))^* \\ &= U^*(t)B^* \\ &= -U^*(t)B\end{aligned}\tag{2.45}$$

y

$$U^*(0) = I .\tag{2.46}$$

Formando el producto  $U^*(t)U(t)$  y derivando respecto al tiempo  $t$  obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{dU^*U}{dt} &= \frac{dU^*}{dt}U + U^*\frac{dU}{dt} \\ &= -U^*BU + U^*BU ,\end{aligned}\tag{2.47}$$

y entonces

$$\frac{dU^*U}{dt} = 0 .\tag{2.48}$$

Por lo tanto, dada la condición inicial, llegamos a que

$$U^*U = I ,\tag{2.49}$$

para todo tiempo  $t$ . Además  $U^*$  es la matriz inversa  $U^{-1}$  de  $U$ . Se dice entonces que  $U(t)$  es una *matriz unitaria*. Este resultado nos permite escribir lo siguiente

$$\frac{dU(t)}{dt} = BU(t) , \quad U(0) = I ,\tag{2.50}$$

$$\frac{dU^{-1}(t)}{dt} = -U^{-1}(t)B , \quad U^{-1}(0) = I .\tag{2.51}$$

Ahora consideremos la transformación  $U^{-1}(t)L(t)U(t)$ . Derivemos respecto al parámetro  $t$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(U^{-1}LU)(t) &= -(U^{-1}BLU)(t) + \left(U^{-1}\frac{dL}{dt}U\right)(t) + (U^{-1}LBU)(t) \\ &= -U^{-1}(t) \left[BL - \frac{dL}{dt} - LB\right](t)U(t) .\end{aligned}$$

Pero sabemos que las matrices  $L$  y  $B$  forman el par de Lax en el sentido de que satisfacen al conmutador  $\dot{L} = BL - LB$ . Por lo que

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU)(t) = 0, \quad (2.52)$$

y entonces la transformación  $U^{-1}(t)L(t)U(t)$  es independiente del tiempo  $t$  y debe ser igual a su valor inicial prescrito  $L(0)$ . Esto es,

$$U^{-1}(t)L(t)U(t) = L(0) = \text{cte}. \quad (2.53)$$

Multiplicamos la última ecuación por  $U$  a la izquierda y por  $U^{-1}$  a la derecha, obtenemos

$$L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t). \quad (2.54)$$

Decimos que  $L(t)$  y  $L(0)$  son *unitariamente equivalentes*. Nuevamente si derivamos esta última expresión recobramos la forma de Lax.

En general, si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, tenemos

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$

Esto es, el determinante de un producto de matrices es igual al producto de sus determinantes. En particular,

$$\det(UU^{-1}) = 1. \quad (2.55)$$

Si  $\lambda(t)$  denota el valor propio al tiempo  $t$ , vemos, a partir de (2.54), que

$$\begin{aligned} \det(L(t) - \lambda(t)I) &= \det[U(t)L(0)U^{-1}(t) - \lambda(t)U(t)U^{-1}(t)] \\ &= \det[U(t)(L(0) - \lambda(t)I)U^{-1}(t)] \\ &= \det(L(0) - \lambda(t)I) = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Pero sabemos que si dos matrices tienen el mismo determinante, también tienen el mismo polinomio característico y los mismos valores propios. Si comparamos esta última ecuación con (2.41) en un tiempo  $t = 0$ , esto es,  $\det(L(0) - \lambda(0)I) = \det(L(0) - \lambda(t)I)$ , obtendremos

$$\lambda(t) = \lambda(0) = \text{cte}. \quad (2.57)$$

Por lo anterior, el valor propio  $\lambda$  es independiente del tiempo. Es notable que este hecho se deriva del carácter antisimétrico de la matriz  $B$ . Esto es el movimiento isoespectral.

Observemos otro hecho particularmente importante. Si diferenciamos la ecuación  $L\varphi = \lambda\varphi$  respecto del tiempo  $t$ , obtenemos

$$\frac{dL}{dt}\varphi + L\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\frac{d\varphi}{dt}, \quad (\dot{\lambda} = 0).$$

Insertando esta ecuación en la ecuación matricial de movimiento  $\dot{L} = BL - LB$ , obtenemos

$$(BL - LB)\varphi + L\frac{d\varphi}{dt} = \lambda\frac{d\varphi}{dt},$$

por lo que reorganizando la expresión llegamos que

$$L\left(\frac{d\varphi}{dt} - B\varphi\right) = \lambda\left(\frac{d\varphi}{dt} - B\varphi\right), \quad (2.58)$$

que no necesariamente significa que  $d\varphi/dt = B\varphi$ . Recordemos que  $B$  tiene cierta arbitrariedad para ser definida (esto es claro a partir del hecho de que si sumamos una matriz que conmute con  $L$  a la matriz  $B$ , la ecuación matricial de movimiento no se altera). Podemos establecer, para la cadena infinita ( $N = \infty$ ), que la evolución temporal de las funciones de onda  $\varphi$  es

$$\frac{d\varphi}{dt} = B\varphi. \quad (2.59)$$

Este hecho nos permite escribir la ecuación de Lax  $\dot{L} = [B, L]$  equivalentemente como la ecuación espectral  $L\varphi = \lambda\varphi$  y una ecuación de evolución temporal de las funciones de onda  $\dot{\varphi} = B\varphi$ , ver apéndice al final del capítulo.

### 2.2.2 Cantidades conservadas

$L$  tiene  $N$  valores propios debido a que es una matriz de tamaño  $N \times N$ . Si denotamos por  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) al  $j$ -ésimo valor propio, entonces el desarrollo del determinante (2.41) se puede escribir como un conjunto de  $N$  ecuaciones simultáneas

$$\lambda_j^N + c_1\lambda_j^{N-1} + c_2\lambda_j^{N-2} + \dots + c_{N-1}\lambda_j + c_N = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.60)$$

donde los  $c_j$ 's son funciones simétricas de las variables  $a_n$  y  $b_n$ . Si resolvemos estas ecuaciones simultáneas para  $c_k$ , tendremos que

$$c_k \equiv c_k([a_n], [b_n]), \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

es decir,  $c_k$  es una función de  $a_n$  y  $b_n$  pero no del índice  $j$ ; nuevamente escribimos

$$c_k = c_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N). \quad (2.61)$$

Ya que las  $\lambda_j$ 's son cantidades conservadas, también lo son las  $c_k$ 's. En otras palabras, la cadena posee  $N$  cantidades conservadas. Sin embargo, dado que cualquier función de las  $c_k$ 's también es una cantidad conservada, la forma de escoger estas cantidades no es única.

### 2.3 Cadena infinita

Consideremos una cadena infinita en ambas direcciones. Las ecuaciones anteriores seguirán siendo válidas, por lo que extenderemos los límites de la variable discreta  $n$  que va de  $1 \rightarrow N$  a  $-\frac{N}{2} \rightarrow \frac{N}{2}$  y tomaremos el límite  $N \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, las matrices son ahora

$$L = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & 0 \\ \ddots & b_{n-1} & a_{n-1} & & \\ & a_{n-1} & b_n & a_n & \\ & & a_n & b_{n+1} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$B = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & 0 \\ \ddots & 0 & -a_{n-1} & & \\ & a_{n-1} & 0 & -a_n & \\ & & a_n & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Por lo que las ecuaciones asociadas con la cadena son, en términos de componentes,

$$\sum_m L_{nm} \varphi_m = \lambda \varphi(n) , \quad (2.64)$$

donde  $\varphi_n$  es el  $n$ -ésimo componente del vector  $\varphi(t)$ . Explícitamente tenemos

$$(L\varphi)_n = a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1) = \lambda\varphi(n) . \quad (n = \dots, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.65)$$

Además, la ecuación que gobierna la dependencia temporal del vector  $\varphi$ , está dada por

$$\frac{d\varphi(n)}{dt} = a_{n-1}\varphi(n-1) - a_n\varphi(n+1) . \quad (2.66)$$

## Apéndice

A partir de las ecuaciones (2.65,66), la ecuación espectral y de evolución de las funciones de onda, deducimos las ecuaciones de evolución (2.6), que corresponden con la ecuación de Lax en el formalismo matricial. Diferenciamos (2.65) y usemos (2.66) para obtener

$$\begin{aligned} & \dot{a}_{n-1}\varphi(n-1) + a_{n-1}(a_{n-2}\varphi(n-2) - a_{n-1}\varphi(n)) + \dot{b}_n\varphi(n) \\ & + b_n(a_{n-1}\varphi(n-1) - a_n\varphi(n+1)) + \dot{a}_n\varphi(n+1) + a_n(a_n\varphi(n) - a_{n+1}\varphi(n+2)) \\ & = \lambda(a_{n-1}\varphi(n-1) - a_n\varphi(n+1)) . \end{aligned}$$

De la ecuación espectral sustituimos las expresiones  $\lambda\varphi(n-1)$  y  $\lambda\varphi(n+1)$ , las sustituimos en la ecuación de arriba y obtenemos

$$\begin{aligned} & = a_{n-1}(a_{n-2}\varphi(n-2) + b_{n-1}\varphi(n-1) + a_{n-1}\varphi(n)) - a_n(a_n\varphi(n) \\ & + b_{n+1}\varphi(n+1) + a_{n+1}\varphi(n+1)) . \end{aligned}$$

Factorizando en términos de las  $\varphi$ 's obtenemos

$$\begin{aligned} & (\dot{a}_{n-1} + a_{n-1}[b_n - b_{n-1}])\varphi(n-1) + (\dot{b}_n + 2[a_n^2 - a_{n-1}^2])\varphi(n) \\ & + (\dot{a}_n a_n [b_{n+1} - b_n])\varphi(n+1) + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-1}a_{n-2})\varphi(n-2) \\ & + (a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1})\varphi(n+2) = 0 . \end{aligned}$$

Y hallamos, a partir de la independencia lineal de las  $\varphi$ 's, las ecuaciones de evolución

$$\begin{aligned} \dot{a}_n & = a_n(b_n - b_{n+1}) \\ \dot{b}_n & = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, es equivalente resolver el problema inverso del sistema de ecuaciones (2.65, 66) (siguiente capítulo) de la representación matricial del sistema o el conjunto de ecuaciones (2.6) directamente; este último, por cierto, más complicado.

## 3

# Método de Dispersión Inversa

En este capítulo estudiamos la solución de las ecuaciones de movimiento de la cadena de Toda infinita mediante el método de dispersión inversa. En la primera sección expondremos el origen del método y los antecedentes que llevaron a resolver la cadena de Toda. En la segunda deduciremos las ecuaciones espectrales asociadas a la cadena infinita, para posteriormente emplearlas al tratar con el problema de dispersión inversa en la tercera sección. El problema de dispersión inversa transforma nuestro problema en otro donde debemos resolver una ecuación integral discreta, secciones cinco y seis, cuya solución requiere conocer la evolución temporal de los datos de dispersión. Finalmente mostramos la solución con un sólo solitón en la sección seis, en donde empleamos el conocimiento de los valores iniciales de los datos de dispersión dentro de la ecuación integral.

### 3.1 La ecuación KdV y la cadena de Toda

El descubrimiento del solitón en 1965 estimuló los esfuerzos para integrar a la ecuación KdV y aclarar sus propiedades más importantes. Fue en 1967 cuando Gardner, Greene, Kruskal y Miura (GGKM), de la Universidad de Princeton, presentaron por primera vez el método para resolver la ecuación KdV, que ahora se conoce como el Método de Dispersión

Inversa (MDI). Como mostramos a continuación, el método se inventó heurísticamente intentando “linealizar” la ecuación KdV. No se consiguió integrar por transformaciones a la ecuación, en cambio, la solución al problema se planteó de una forma muy inesperada. R. Miura halló una curiosa relación entre la ecuación KdV

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

y la ecuación

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (3.2)$$

Es la ecuación KdV modificada y se llama MKdV. Aunque entre estas ecuaciones hay similitudes también existen diferencias, pero no nos ocuparemos de este problema. La ecuación KdV es el modelo de una onda solitaria de perfil permanente que viaja en aguas poco profundas. La variable  $u$  describe la elevación de la superficie del agua y la ecuación admite soluciones de tipo  $\text{sech}^2$ . Es, además, el límite de onda larga de la cadena de Toda.

La relación entre estas ecuaciones la establece la siguiente transformación

$$u = v^2 + v_x, \quad (3.3)$$

lo que nos permite obtener

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = u_t - 6uu_x + u_{xxx}.$$

Esto significa que si una función  $v$  satisface la ecuación MKdV, entonces la función  $u$  de la transformación satisface la ecuación KdV. Tal transformación se conoce como transformación de Miura. Observemos por otra parte que la ecuación de transformación es una ecuación tipo Riccati en la variable  $v$ , donde  $u(x)$  es una función de  $x$  dada. Esta ecuación se puede linealizar mediante la transformación

$$v = \frac{\Psi_x}{\Psi}, \quad (3.4)$$

a la ecuación

$$\Psi_{xx} - u(x)\Psi = 0, \quad (3.5)$$

o bien,

$$u = \frac{\Psi_{xx}}{\Psi} . \quad (3.6)$$

Esta última ecuación es semejante a otra transformación conocida como Cole-Hopf, que linealiza a otra ecuación de la mecánica de fluidos: la ecuación de Burguers. Sin embargo, la simple sustitución de la transformación anterior en la ecuación KdV no da una ecuación integrable. Por otra parte, si transformamos

$$u \rightarrow u - \lambda , \quad (3.7)$$

con  $\lambda = \text{cte}$ , la ecuación KdV cambia a

$$u_t - 6\lambda u_x - 6uu_x + u_{xxx} = 0 ,$$

y regresa a la original si transformamos a la variable  $x$  como

$$x \rightarrow x + 6\lambda t . \quad (3.8)$$

Estas dos transformaciones en  $u$  y  $x$  dejan invariante a la ecuación KdV. De la transformación en  $x$  vemos que ahora el sistema de coordenadas se mueve a una velocidad constante  $-6\lambda$ . Esta es una transformación de Galileo. Por lo tanto, tomando en cuenta (3.7), podemos generalizar a (3.5) como la siguiente ecuación

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u(x))\Psi = 0 . \quad (3.9)$$

Esta es la ecuación estacionaria de Schrödinger, que apareció en la física a principios de siglo con la mecánica cuántica. Pero estamos en una situación enteramente diferente en la que no conocemos a las funciones  $\Psi$ , ni a las constantes  $\lambda$  y menos la solución del problema original, la función  $u(x)$ . Sin embargo, GGKM pudieron mostrar que la función  $u(x)$  se puede determinar sin necesidad de conocer completamente a las funciones  $\Psi$  para todo tiempo  $t$ , sino a partir de conocer únicamente su comportamiento asintótico en  $x \rightarrow \pm\infty$ , en donde ahora la función  $u(x, t)$  se considera como un "potencial" localizado y con decaimiento rápido. Al observar este problema espectral asociado a KdV, Greene se preguntó de inmediato que pasaba con el espectro de (3.9) si  $u$  evolucionaba de acuerdo con KdV. La respuesta fue sorprendente: ¡El espectro no cambia! De aquí surgió la idea

de estudiar la evolución de los datos espectrales de (3.9) y en base a ello responder a la pregunta: ¿es posible reconstruir el potencial a partir de los datos de dispersión y, si así es, cómo se lleva a cabo la reconstrucción? Este problema inverso fue resuelto por Gel'fand y Levitan en 1951 y posteriormente, en una forma más manejable, por Marčenko en 1955.

La idea principal del método consiste en estudiar el problema inverso de la ecuación de Schrödinger, donde la reconstrucción del potencial  $u(x, t)$  proporciona la solución a la ecuación KdV. Si hacemos incidir una onda  $\Psi$  sobre el potencial  $u(x, t)$ , por ejemplo una onda plana  $e^{-i\omega t}$ , el potencial dispersará la onda. En principio podemos conocer, en los límites  $x \rightarrow \pm\infty$ , la forma asintótica tanto de la onda transmitida como la reflejada, estos son los datos de dispersión. El problema ahora es poder invertir esta información para determinar al potencial  $u(x, t)$ .

Como ya mencionamos antes, otro de los principales descubrimientos de GGKM fue el hecho de que las soluciones a la ecuación KdV son potenciales isoespectrales de la ecuación de Schrödinger; es decir, los valores propios son constantes en la ecuación de Schrödinger e integrales de movimiento de la ecuación KdV. Este descubrimiento condujo al menos a tres cuestiones básicas:

- I. ¿Existen otras ecuaciones, además de la KdV, cuyas soluciones sean potenciales isoespectrales de la ecuación de Schrödinger?
- II. ¿Existen otros problemas espectrales o de valores propios, además de la ecuación de Schrödinger, para los cuales se puedan hallar potenciales isoespectrales como soluciones de alguna ecuación de evolución de interés relevante?
- III. Dada una ecuación de evolución para funciones  $u(x, t)$ , ¿se puede hallar un problema de valores propios para el cual  $u(x, t)$  represente potenciales isoespectrales?

En 1968, P. Lax respondió afirmativamente a la pregunta I y desarrolló un formalismo que permitió responder a la pregunta II (ver capítulo 2). La pregunta III aún está sin respuesta de forma sistemática [Eckhaus, 1981].

El MDI, se ha empleado para resolver otras ecuaciones además de la KdV y todas han sido ecuaciones en derivadas parciales [Flaschka, 1974]. Por otra parte, mencionamos en la introducción la relación entre la ecuación KdV y algunos sistemas discretos. Por ejemplo,

la cadena de Toda se puede estudiar como un límite continuo de la ecuación KdV en longitudes de onda larga. Sin embargo, su relación resultó ser más importante: el método de solución de las ecuaciones de evolución de la cadena de Toda es una versión discreta del MDI, como veremos más adelante.

### 3.2 Ecuaciones asociadas con la cadena

Hemos mostrado, en el capítulo anterior, que mediante el formalismo de Lax el movimiento en la cadena se puede escribir como la ecuación matricial

$$\frac{dL}{dt} = BL - LB. \quad (3.10)$$

Si introducimos un vector columna

$$\varphi = (\dots, \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n), \dots)^T, \quad (3.11)$$

también podemos escribir la ecuación de movimiento (3.10) como

$$L\varphi = \lambda\varphi \quad (\lambda = \text{cte}) \quad (3.12)$$

$$B\varphi = \frac{d\varphi(n)}{dt}. \quad (3.13)$$

De hecho, si diferenciamos la primera ecuación (3.12) respecto de  $t$  y empleamos la segunda (3.13), obtenemos (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt}\varphi &= -LB\varphi + \lambda B\varphi \\ &= (BL - LB)\varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Anteriormente también mencionamos que la matriz antisimétrica  $B$  tiene cierta libertad para ser definida, le podemos sumar otra matriz tal que conmute con  $L$  y nos permita considerar a la matriz  $B$  como la misma en ambas ecuaciones (3.10) y (3.13).

Por conveniencia en los cálculos escogemos

$$\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1}). \quad (3.15)$$

Las  $n$ -ésimas líneas de las ecuaciones (3.12,13), recordemos que estas ecuaciones son vectoriales, se pueden escribir como

$$a_{n-1}\varphi(n-1) + b_n\varphi(n) + a_n\varphi(n+1) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})\varphi(n), \quad (3.16)$$

$$a_{n-1}\varphi(n-1) - a_n\varphi(n+1) = d\varphi(n)/dt. \quad (3.17)$$

La ecuación (3.16) es una ecuación en diferencias lineal y de segundo orden de la función  $\varphi$  en la variable  $n$ . Dado que las soluciones de la ecuación en diferencias son polinomios en la variable  $z$ , con coeficientes que dependen del tiempo, podemos escribir  $\varphi(n, z, t)$  como

$$\varphi(n, z, t) = \sum_{m=n}^{\infty} K(n, m, t)z^m, \quad (3.18)$$

donde  $K(n, m)$  es función del tiempo pero independiente de  $z$  y que cumple con las siguientes condiciones de frontera

$$K(n, m) \rightarrow \begin{cases} 0 & (m > n \rightarrow \infty) \\ 1 & (n = m \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (3.19)$$

Para  $m < n$ , suponemos que  $K(n, m) \equiv 0$ .  $K(n, n)$  no tiende a 1 en  $n \rightarrow -\infty$ . Sustituyendo la función (3.18) en la ecuación (3.16) y después de comparar los coeficientes de las potencias de  $z^n$  y  $z^{n-1}$ , obtenemos las siguientes relaciones entre el núcleo  $K$  y las variables  $a_n$  y  $b_n$

$$a_{n-1}K(n-1, n-1) = K(n, n)/2, \quad (3.20)$$

$$a_{n-1}K(n-1, n) + b_nK(n, n) = K(n, n+1)/2, \quad (3.21)$$

resolviendo para  $a_{n-1}$  y  $b_n$  obtenemos

$$a_{n-1} = \frac{K(n, n)}{2K(n-1, n-1)}, \quad (3.22)$$

$$b_n = \frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - a_{n-1} \frac{K(n-1, n)}{K(n, n)},$$

o bien,

$$b_n = \frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{2K(n-1, n-1)}. \quad (3.23)$$

Las ecuaciones que se obtiene a partir de igualar los coeficientes de las potencias de  $z^{n+1}$ ,  $z^{n+2}$ , ..., no las necesitaremos en el trabajo y por lo tanto las omitiremos. Esto no es más que reexpresar a los polinomios de una manera conveniente.

Ahora podemos retornar a las variables  $Q_n$  de las ecuaciones de movimiento empleando la ecuación del capítulo anterior (2.33)

$$e^{-(Q_{n+1}-Q_n)} \equiv (2a_n)^2 = \left[ \frac{K(n+1, n+1)}{K(n, n)} \right]^2. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, si conocemos al elemento diagonal  $K(n, n)$  podemos obtener, como en el primer capítulo, una solución de onda viajera (ecuación (1.8)). Además, si escogemos

$$s_n = -\frac{K(n, n+1)}{K(n, n)}, \quad (3.25)$$

y de las ecuaciones de movimiento (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned} p_n &\equiv 2b_n = \frac{K(n, n+1)}{K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{K(n-1, n-1)} \\ &= s_{n-1} - s_n. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nuevamente hemos definido a  $s_n$  como la variable canónica conjugada de  $r_n = Q_{n+1} - Q_n$ , dentro de la discusión de la transformación dual del primer capítulo. De las ecuaciones del primer capítulo (1.7) y (1.8) sabemos que

$$e^{-r_n} - 1 = \frac{ds_n}{dt}, \quad (3.27)$$

que representa una solución a las ecuaciones de evolución. Vemos que conocer al núcleo  $K$  nos permite calcular la solución del problema.

Pero observemos un hecho particularmente importante sobre las ecuaciones asociadas (3.16,17). La siguiente es una de las posibles versiones discretas de la ecuación de Schrödinger (3.9), hemos tomado operadores en diferencias centrales,

$$\frac{1}{2}[\Psi(\lambda, n+1) + \Psi(\lambda, n-1)] = \chi g(n)\Psi(\lambda, n), \quad (3.28)$$

donde  $\chi = 1 - \lambda\Delta^2$  y  $g(n) = \exp[u(n)\Delta^2]$ . Si tomamos el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta \rightarrow 0, \quad \text{con } n\Delta = x \text{ (fijo)}, \quad (3.29)$$

regresamos a la ecuación de Schrödinger. Pero si sustituimos

$$\phi(\lambda, n) = \sqrt{g(n)}\Psi(\lambda, n), \quad (3.30)$$

obtenemos

$$a_{n+1}\phi(\lambda, n+1) + a_n\phi(\lambda, n-1) = \lambda\phi(\lambda, n), \quad (3.31)$$

donde  $a_n = 1/2\sqrt{g(n)g(n-1)}$ ; por lo que ahora el problema es hallar a las  $a_n$ 's, ya que la información sobre el potencial está en las variables  $a_n$ 's, en completa analogía con las ecuaciones de la cadena de Toda (3.16) y (3.17). Este problema fue la base de la discretización MDI llevado a cabo por K.M. Case y M. Kac en 1973 [Case y Kac; Case, 1973]. En relación con la cadena de Toda, si queremos tener conocimiento detallado del momento  $P_n$  y de la posición  $Q_n$  o bien, de  $a_n$  y  $b_n$ , de un objeto en movimiento (un solitón) y lo iluminamos con alguna clase de luz caracterizada por  $\lambda$ , obtendremos una imagen de radar que corresponderá a la forma asintótica de la onda  $\Psi$ . La técnica de predicción del movimiento del objeto corresponde al MDI y la función de onda  $\Psi$  no es sino una herramienta matemática que podemos considerar como una onda real (rayos-X, por ejemplo) dispersada por los solitones en un medio no lineal (la cadena de Toda). Esta es la idea principal del MDI desarrollada por Flaschka [Flaschka, 1974; Toda, 1989].

### 3.3 El problema de dispersión

En relación con el párrafo anterior supondremos que la función  $\varphi$ , de la ecuación (3.16), es dispersada por un potencial que es función de las variables  $a_n$  y  $b_n$ . Obtendremos entonces los datos de dispersión que necesitamos para el MDI. En lo que sigue, la función  $\varphi$  jugará un papel similar a las funciones de onda de la mecánica cuántica y por lo tanto la llamaremos *función de onda*.

#### 3.3.1 El espectro discreto y continuo

Supongamos que en el límite  $n \rightarrow \pm\infty$  no hay movimiento en la cadena, entonces de las ecuaciones (2.33) y (2.34) del capítulo anterior obtenemos

$$a_n \equiv \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad b_n \equiv 0. \quad (3.32)$$

Observemos que en este límite las ecuaciones (3.16) y (3.17) tienden asintóticamente a las siguientes ecuaciones

$$\varphi(n-1) + \varphi(n+1) = (z + z^{-1})\varphi(n) \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2}[\varphi(n-1) + \varphi(n+1)] = \frac{d\varphi(n)}{dt}. \quad (3.34)$$

Estas ecuaciones admiten soluciones de la forma

$$\varphi(n, z, t) \rightarrow e^{\mp i\omega t} z^{\pm n}. \quad (3.35)$$

con  $z = e^{ik}$ . Si sustituimos las soluciones asintóticas en la ecuación (3.34), obtenemos

$$\omega = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \quad (3.36)$$

Observamos entonces en el límite  $n \rightarrow +\infty$  asintóticamente la función  $\varphi$  tiende a  $e^{-i\omega t} z^n$ , lo que nos permite escribir

$$\varphi(n) = \phi(n, z)e^{-i\omega t}, \quad (3.37)$$

$$\phi(n, z) \rightarrow z^n. \quad (3.38)$$

La función de onda  $\phi(n, z)$  corresponde a la serie de potencias de  $z$  de la ecuación (3.18)

$$\phi(n, z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n')z^{n'}. \quad (3.39)$$

Por lo tanto, en el límite  $n \rightarrow \pm\infty$ , la función de onda  $\varphi(n)$  tiende asintóticamente hacia una función periódica, con  $k \in \mathbb{R}$ . En tal caso  $|z| = 1$ , por lo que  $\omega = \sin(k)$  y  $\lambda = \cos(k)$ . Se trata de un *valor propio continuo*. Además, mientras  $n \in \mathbf{Z}$ , podemos limitar el intervalo de  $k$  a  $0 \leq k \leq \pi$  y restringir los valores espectrales al intervalo  $|\lambda| \leq 1$ .

Para los *valores propios discretos* consideremos los valores del espectro  $|\lambda| > 1$  y  $z = z_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ). En este caso, en el límite  $n \rightarrow +\infty$ , la forma asintótica de la función de onda es de forma parecida

$$\begin{aligned} \varphi(n, z_j, t) &= \phi(n, z_j)e^{\beta t}, \\ \phi(n, z_j) &\rightarrow z_j^n, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde

$$|z_j| < 1, \quad (3.41)$$

$$\lambda = (z_j + z_j^{-1})/2, \quad (3.42)$$

$$\beta = (z_j^{-1} - z_j)/2. \quad (3.43)$$

Descartamos los valores complejos de  $|z_j| > 1$  debido a que no nos proporcionan soluciones acotadas al problema de los estados ligados; es decir, nos restringiremos al círculo unitario y su frontera en el plano complejo  $|z_j| \leq 1$ . Así, la onda  $\varphi(n) \rightarrow e^{\beta t} z_j^n$  es la forma asintótica de un estado ligado con  $|z_j| < 1$ , tal que  $\varphi \rightarrow 0$  en el límite  $n \rightarrow +\infty$  para todo tiempo  $t$ . Es decir, la función de onda está acotada en la variable  $n$ . Cuando el estado ligado se mueve hacia la derecha tenemos que  $\beta > 0$  ( $z_j > 0$ ) y cuando se mueve hacia la izquierda tenemos que  $\beta < 0$  ( $z_j < 0$ ). Como veremos en la última sección del capítulo, los solitones están especificados por los estados ligados. Por otro lado, debido a que las matrices  $B$  y  $L$  poseen entradas reales, debemos tomar a  $z_j$  y  $\beta$  como reales también.

### 3.3.2 El problema de valores propios (problema directo)

Consideremos una función  $\varphi$  que satisface el conjunto de ecuaciones (3.16) y (3.17) por componentes tendremos la siguiente ecuación

$$(L - \lambda I)\varphi(n) = 0, \quad (3.44)$$

donde  $\lambda = (z + z^{-1})/2$  e  $I$  es una matriz identidad. Hemos mostrado que en los límites  $n \rightarrow \pm\infty$  la ecuación (3.16) posee dos soluciones periódicas (3.35) y, como se trata de una ecuación en diferencias de segundo orden, podemos entonces expresar cualquier solución  $\varphi$  por medio de un conjunto fundamental, definido como las funciones de onda  $\varphi_1(n, z)$  y  $\varphi_2(n, z)$ , con sus respectivos límites asintóticos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [z^{-n} \varphi_1(n, z)] = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} [z^n \varphi_2(n, z)] = 1. \quad (3.45)$$

Los límites asintóticos de las funciones de onda están representadas en la figura (3.1).

Como cualquier otra solución se puede escribir como combinación lineal del conjunto fundamental, podemos escribir a las mismas funciones de onda  $\varphi_1(n, z)$  y  $\varphi_2(n, z)$  como

$$\varphi_2(n, z) = c_{11}(z)\varphi_1(n, z) + c_{12}(z)\varphi_1(n, z^{-1}), \quad (3.46)$$

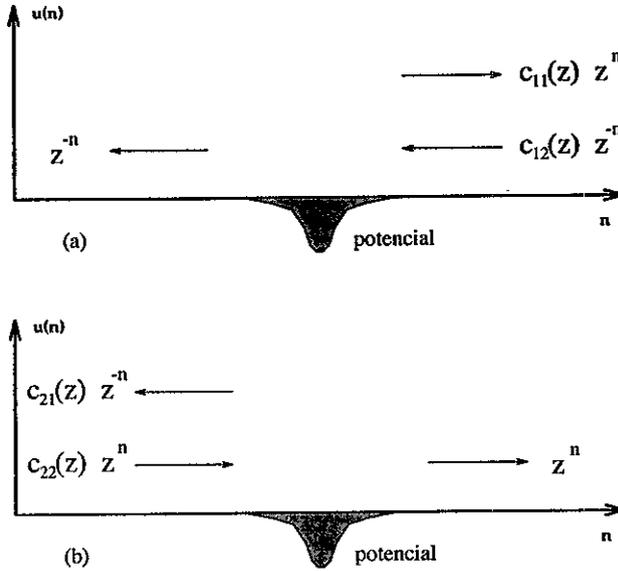


Figura3.1. Diagrama de dispersión de ondas

$$\varphi_1(n, z) = c_{21}(z)\varphi_2(n, z^{-1}) + c_{22}(z)\varphi_2(n, z) . \quad (3.47)$$

Dado que  $a_n$  y  $b_n$  en (3.16) son dependientes del tiempo, también lo son los coeficientes  $c_{11}(z, t)$  y  $c_{12}(z, t)$ . En el caso de la ecuación (3.46) una onda de amplitud  $c_{12}(z)$  incide desde  $n \rightarrow +\infty$  sobre el potencial de dispersión en la cadena. La onda se refleja con una amplitud  $c_{11}(z)$  y se transmite hacia  $n \rightarrow -\infty$  con una amplitud unitaria, como se muestra en la figura (3.1.a). Para la ecuación (3.47) la situación es similar. La onda incidente tiene una amplitud  $c_{22}(z)$ , la reflejada  $c_{21}(z)$  y la transmitida en  $n \rightarrow +\infty$  es unitaria, figura (3.1.b).

Entre los coeficientes se establecen relaciones de compatibilidad o de conservación de energía, a saber son

$$\begin{aligned} c_{12}(z)c_{12}^*(z^{-1}) + c_{11}(z)c_{11}^*(z) &= 1 , \\ c_{12}(z)c_{11}^*(z^{-1}) + c_{11}(z)c_{12}^*(z) &= 0 , \\ c_{12}(z^{-1})c_{12}^*(z) + c_{11}(z^{-1})c_{11}^*(z^{-1}) &= 1 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{12}(z^{-1})c_{11}^*(z) + c_{11}(z^{-1})c_{12}^*(z^{-1}) &= 0, \\
c_{12}^*(z)c_{12}(z^{-1}) + c_{11}^*(z)c_{11}(z) &= 1, \\
c_{12}^*(z)c_{11}(z^{-1}) + c_{11}^*(z)c_{12}(z) &= 0, \\
c_{12}^*(z^{-1})c_{12}(z) + c_{11}^*(z^{-1})c_{11}(z^{-1}) &= 1, \\
c_{12}^*(z^{-1})c_{11}(z) + c_{11}^*(z^{-1})c_{12}(z^{-1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Estas relaciones son satisfechas cuando

$$\begin{aligned}
c_{12}^*(z) &= c_{12}(z), \quad c_{11}^*(z) = -c_{11}(z^{-1}), \\
c_{12}(z)c_{12}(z^{-1}) &= 1 + c_{11}(z)c_{11}(z^{-1}).
\end{aligned}$$

También se cumple que  $c_{11}^*(z^{-1}) = -c_{11}(z)$ , etc. Para  $|z| = 1$ , se satisface la igualdad

$$|c_{12}(z)|^2 = 1 + |c_{11}(z)|^2.$$

Si definimos al cociente  $c_{11}(z)/c_{12}(z)$  como el coeficiente de reflexión  $R(z)$  y a  $1/c_{12}(z)$  como el coeficiente de transmisión obtenemos la conservación de las ondas

$$\frac{1}{|c_{12}(z)|^2} = 1 - |R(z)|^2. \quad (3.48)$$

Y podemos entonces definir a la *función de dispersión* como

$$S(n, z) \equiv \frac{\varphi_2(n, z)}{c_{12}(z)} = \varphi_1(n, z^{-1}) + R(z)\varphi_1(n, z). \quad (3.49)$$

$S(n, z)$  también es solución de la ecuación espectral (3.16), con los siguientes límites asintóticos

$$S(n, z) \rightarrow \begin{cases} z^{-n} + R(z)z^n & (n \rightarrow +\infty) \\ z^{-n}/c_{12}(z) & (n \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (3.50)$$

En este caso una onda de amplitud unitaria,  $z^{-n} = \exp(-ikn)$ , que incide desde la izquierda es dispersada por el potencial. Se refleja una onda  $R(z)z^n$  hacia la derecha y se transmite una onda  $z^{-n}/c_{12}(z)$  hacia la izquierda.

## 3.3.3 El coeficiente de transmisión y el espectro discreto

Pensemos en la situación donde parte de la onda transmitida es “absorbida” por el potencial. Tenemos ahora una onda de estado ligado que decae rápidamente, como también suponemos lo hace el potencial para  $|n| \rightarrow \infty$ . En este proceso de transmisión, la función de onda del estado ligado y los valores propios discretos  $z_j$  nos proporcionan información suficiente para resolver el problema de la reconstrucción de la forma del potencial, como veremos más adelante. Por lo anterior, es necesario estudiar el comportamiento del coeficiente de transmisión  $[c_{12}(z)]^{-1}$  cuando  $z = z_j$ .

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones, en donde debemos resolver para  $c_{12}(z)$  y hallar una ecuación entre este coeficiente y las funciones de onda de los estados ligados,

$$\begin{aligned}\varphi_2(n, z) &= c_{11}(z)\varphi_1(n, z) + c_{12}(z)\varphi_1(n, z^{-1}), \\ \varphi_2(n+1, z) &= c_{11}(z)\varphi_1(n+1, z) + c_{12}(z)\varphi_1(n+1, z^{-1}),\end{aligned}$$

despejamos  $c_{11}(z)$ , igualamos ambas expresiones y obtenemos

$$\frac{\varphi_2(n, z) - c_{12}(z)\varphi_1(n, z^{-1})}{\varphi_1(n, z)} = \frac{\varphi_2(n+1, z) - c_{12}(z)\varphi_1(n+1, z^{-1})}{\varphi_1(n+1, z)},$$

por lo que

$$c_{12}(z) = \frac{\varphi_2(n, z)\varphi_1(n+1, z) - \varphi_2(n+1, z)\varphi_1(n, z)}{W(n)}. \quad (3.51)$$

Definimos

$$W(n) = \varphi_1(n, z^{-1})\varphi_1(n+1, z) - \varphi_1(n+1, z^{-1})\varphi_1(n, z), \quad (3.52)$$

reescribiendo la expresión observamos

$$\begin{aligned}W(n) &= \varphi_1(n, z^{-1})[\varphi_1(n+1, z) - \varphi_1(n, z)] \\ &\quad - [\varphi_1(n+1, z^{-1}) - \varphi_1(n, z^{-1})]\varphi_1(n, z),\end{aligned}$$

que se trata de una versión discreta del wronskiano de las funciones  $\varphi_1(n, z^{-1})$  y  $\varphi_1(n, z)$ . De las propiedades generales de los wronskianos podemos anticipar que también  $W(n)$  debe ser independiente o que tendrá una dependencia simple de  $n$ . Para verificar esta suposición buscamos una relación de recurrencia de  $W(n)$ .

Del siguiente sistema de ecuaciones eliminamos a  $b_n$

$$a_{n-1}\varphi_1(n-1, z^{-1}) + b_n\varphi_1(n, z^{-1}) + a_n\varphi_1(n+1, z^{-1}) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})\varphi_1(n, z^{-1}),$$

$$a_{n-1}\varphi_1(n-1, z) + b_n\varphi_1(n, z) + a_n\varphi_1(n+1, z) = \frac{1}{2}(z+z^{-1})\varphi_1(n, z).$$

Multiplicamos la primera ecuación por  $\varphi_1(n, z)$  y a la segunda por  $\varphi_1(n, z^{-1})$  y los restamos

$$\begin{aligned} & a_{n-1}[\varphi_1(n-1, z^{-1})\varphi_1(n, z) - \varphi_1(n-1, z)\varphi_1(n, z^{-1})] \\ & + a_n[\varphi_1(n+1, z^{-1})\varphi_1(n, z) - \varphi_1(n+1, z)\varphi_1(n, z^{-1})] = 0, \end{aligned}$$

y observamos que

$$W(n-1)a_{n-1} = W(n)a_n, \quad (3.53)$$

de donde obtenemos una fórmula de recurrencia para  $W(n)$ ,

$$W(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n}W(n+1) = \frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}}W(n+2) = \dots = \frac{a_N}{a_n}W(N). \quad (3.54)$$

Pero sabemos que  $a_N = 1/2$  en  $N \rightarrow \infty$ , por lo que, a partir de la propia definición del wronskiano, obtenemos su forma asintótica en el límite  $n \rightarrow +\infty$ :

$$W(N) = \varphi_1(N, z^{-1})\varphi_1(N+1, z) - \varphi_1(N+1, z^{-1})\varphi_1(N, z)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} W(N) = z^{-N}z^{N+1} - z^{-N-1}z^N = z - z^{-1}.$$

Por lo tanto

$$W(n) = \frac{z - z^{-1}}{2a_n}, \quad (3.55)$$

así que la cantidad  $2a_n W(n)$  es independiente de la variable discreta  $n$ . Ahora sustituimos esta última expresión (3.55) en (3.51) y obtenemos finalmente que

$$c_{12}(z) = \frac{2a_n}{z - z^{-1}}[\varphi_2(n, z)\varphi_1(n+1, z) - \varphi_2(n+1, z)\varphi_1(n, z)]. \quad (3.56)$$

Es de esperar que el lado derecho de esta ecuación deba ser independiente de la variable  $n$ , dado el carácter independiente del coeficiente  $c_{12}(z)$ . Este resultado (3.56) es importante puesto que nos permitirá calcular los residuos del coeficiente de transmisión en lo que resta de la sección. Pero antes estudiemos los coeficientes de normalización de las funciones de onda de los estados ligados.

*Coefficiente de normalización*

Extendamos los valores de  $z$  al plano complejo. Como antes, denotemos los ceros de  $c_{12}(z_j) = 0$  por  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) restringiéndonos a los valores  $|z_j| < 1$ . Es decir,

$$c_{12}(z) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (3.57)$$

$$|z_j| < 1. \quad (3.58)$$

Cuando el coeficiente  $c_{12}(z)$  se anula, las funciones de onda  $\varphi_1(n, z_j)$  y  $\varphi_2(n, z_j)$  son *linealmente dependientes*; es decir,

$$\varphi_2(n, z_j) = c_{11}(z_j)\varphi_1(n, z_j). \quad (3.59)$$

La componente  $n$ -ésima de la solución general de la ecuación (3.16),  $\varphi(n)$ , debe tener la forma  $\varphi(n, z_j) = \varphi_2(n, z_j)e^{\beta t}$ . Por lo que en el límite  $n \rightarrow -\infty$ ,  $\varphi(n, z_j) \rightarrow z_j^{-n}$  y  $\varphi_1(n, z_j) \rightarrow z_j^n$ . Entonces, para  $|z_j| < 1$ , tenemos que ambas funciones de onda se anulan

$$\varphi_2(n, z_j) \sim \varphi_1(n, z_j) \rightarrow 0, \quad (3.60)$$

en los límites  $n \rightarrow \pm\infty$ . Podemos definir, empleando una constante de normalización  $\mu$ , a

$$\zeta_j(n, z_j) = \mu\varphi_2(n, z_j) = \mu c_{11}(z_j)\varphi_1(n, z_j), \quad (3.61)$$

como la función de onda de un *estado ligado*. La condición de normalización de la función de onda es

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\zeta_j(n, z_j)]^2 = 1. \quad (3.62)$$

Supongamos que en el límite  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\zeta_j$  tiene la siguiente forma asintótica

$$\zeta_j(n, z_j) \rightarrow c_j(t)z_j^n. \quad (3.63)$$

Por lo que el coeficiente de normalización  $c_j$  es

$$c_j(t) = \mu c_{11}(z_j). \quad (3.64)$$

*Cálculo de los residuos*

Ahora vamos a calcular los residuos

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{c_{12}(z)}; z_j \right]. \quad (3.65)$$

Tenemos que

$$2\pi i \text{Res} \left[ \frac{1}{c_{12}(z)}; z_j \right] = \oint \frac{dz}{c_{12}(z)}, \quad (3.66)$$

y supongamos que los valores  $z_j$ 's son polos simples, lo que nos permite expresar  $c_{12}(z)$  como

$$c_{12}(z) = (z - z_j)f(z),$$

donde  $f(z)$  no tiene como raíz a  $z_j$ . Empleando el teorema de Cauchy sobre algún circuito cerrado que contenga a los  $z_j$ 's,

$$\oint \frac{dz}{f(z)(z - z_j)} = \frac{2\pi i}{f(z_j)}.$$

Derivando la expresión del coeficiente respecto de  $z$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dc_{12}(z)}{dz} &= (z - z_j) \frac{df(z)}{dz} + f(z) \\ \left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j} &= f(z_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{c_{12}(z)}; z_j \right] = \left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j}^{-1}. \quad (3.67)$$

Ahora debemos calcular la expresión

$$\left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j}, \quad (3.68)$$

y lo podemos hacer a partir de la ecuación (3.56), pero antes necesitamos calcular la derivada respecto de  $z$  de la función  $\varphi_2(n, z)$

$$\varphi_2'(n, z) \equiv \frac{d\varphi_2(n, z)}{dz} .$$

Derivamos la siguiente expresión respecto de la variable  $z$

$$a_{n-1}\varphi_2(n-1, z) + a_n\varphi_2(n+1, z) + b_n\varphi_2(n, z) = \lambda\varphi_2(n, z) , \quad (3.69)$$

obtenemos

$$a_{n-1}\varphi_2'(n-1, z) + a_n\varphi_2'(n+1, z) + b_n\varphi_2'(n, z) = \lambda\varphi_2'(n, z) + \frac{d\lambda}{dz}\varphi_2(n, z) . \quad (3.70)$$

Ahora empleamos la ecuación espectral para la función  $\varphi_1(n, z)$

$$a_{n-1}\varphi_1(n-1, z) + a_n\varphi_1(n+1, z) + b_n\varphi_1(n, z) = \lambda\varphi_1(n, z) , \quad (3.71)$$

obtenemos al multiplicar (3.70) por  $\varphi_1(n, z)$  y (3.71) por  $\varphi_2'(n, z)$  y restarlas, que

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dz}\varphi_2(n, z)\varphi_1(n, z) &= a_{n-1}[\varphi_2'(n-1, z)\varphi_1(n, z) - \varphi_2'(n, z)\varphi_1(n-1, z)] \\ &\quad - a_n[\varphi_2'(n, z)\varphi_1(n+1, z) - \varphi_2'(n+1, z)\varphi_1(n, z)] . \end{aligned} \quad (3.72)$$

Sumemos los términos hasta  $n$  y sustituimos  $z = z_j$ . Entonces, puesto que  $|z_j| < 1$  y  $\varphi_2(n, z) \rightarrow z^{-n}$  en el límite  $n \rightarrow -\infty$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dz} \sum_{n'=-\infty}^n \varphi_2(n', z_j)\varphi_1(n', z_j) &= \\ \sum_{n'=-\infty}^n a_{n'-1}[\varphi_2'(n'-1, z_j)\varphi_1(n', z_j) - \varphi_2'(n', z_j)\varphi_1(n'-1, z_j)] & \\ - \sum_{n'=-\infty}^n a_n'[\varphi_2'(n', z_j)\varphi_1(n'+1, z_j) - \varphi_2'(n'+1, z_j)\varphi_1(n', z_j)] & \\ = -a_n[\varphi_2'(n, z_j)\varphi_1(n+1, z_j) - \varphi_2'(n+1, z_j)\varphi_1(n, z_j)] . & \end{aligned} \quad (3.73)$$

Debemos notar que aunque  $\varphi'(n, z_j)$  se anula en  $n \rightarrow -\infty$ , puede ser que no se anule en  $n \rightarrow +\infty$ .

Del mismo modo podemos emplear a  $\varphi'_1(n, z)$  para obtener

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dz} \sum_{n'=n+1}^{\infty} \varphi_2(n', z_j) \varphi_1(n', z_j) = \\ a_n [\varphi'_1(n, z_j) \varphi_2(n+1, z_j) - \varphi'_1(n+1, z_j) \varphi_2(n, z_j)]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Sumando (3.73) y (3.74) y empleando (3.56) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(n, z_j) \varphi_1(n, z_j) = \\ - a_n \left[ \frac{d}{dz} (\varphi_2(n, z) \varphi_1(n+1, z) - \varphi_2(n+1, z) \varphi_1(n, z)) \right]_{z=z_j} \\ = - \left[ \frac{d}{dz} \left( \frac{z - z^{-1}}{2} c_{12}(z) \right) \right] \\ = - \frac{z_j - z_j^{-1}}{2} \left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde, dado que  $\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ ,

$$\frac{d\lambda(z_j)}{dz} = \frac{z_j - z_j^{-1}}{2z_j}. \quad (3.76)$$

Así, por la ecuación (3.61), tenemos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j} &= - \frac{1}{z_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(n, z_j) \varphi_1(n, z_j) \\ &= - \frac{1}{z_j \mu^2 c_{11}(z_j)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\zeta(n, z_j)]^2. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por lo tanto, tenemos, a partir de (3.62) y de (3.64), que

$$\left[ \frac{dc_{12}(z)}{dz} \right]_{z=z_j} = - \frac{c_{11}(z_j)}{z_j c_j^2(t)}, \quad (3.78)$$

no se anula. Por lo tanto  $z = z_j$  es una raíz simple con el residuo

$$\text{Res} \left[ \frac{1}{c_{12}(z)}; z = z_j \right] = - \frac{z_j c_j^2(t)}{c_{11}(z_j)}. \quad (3.79)$$

En resumen, los datos de dispersión que requerimos para reconstruir el potencial consisten de

1. Los valores propios de los estados ligados:  $z_j (j = 1, 2, \dots)$ .
2. Las constantes de normalización de las funciones propias de los estados ligados:  $c_j$ .
3. El coeficiente de reflexión:  $R(z)$ .

Tenemos ahora una descripción del espectro del problema. Es decir, dados los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  podemos determinar las propiedades espectrales. Hemos visto que si conocemos la función  $K$  podemos recuperar  $a_n$  y  $b_n$ . Ahora se trata de ligar a  $K$  con las propiedades asintóticas del problema, para poder determinar a  $a_n$  y  $b_n$  en términos de los coeficientes de transmisión. En la sección 3.5 obtendremos la evolución temporal de los datos de dispersión y en la última probaremos que cuando  $z \rightarrow z_j$ , se tiene que  $c_{12}(z) \rightarrow 0$  y  $R(z) \rightarrow 0$ .

### 3.4 Ecuación integral discreta de GLM

Para encontrar la relación de consistencia que debe satisfacer el núcleo  $K$ , intercambiemos el lado derecho por el izquierdo en la ecuación de dispersión (3.48). Multipliquemos por  $z^{m-1}$  ( $m \leq n$ ) e integremos a lo largo de un círculo alrededor del origen en el plano complejo  $z$ . Obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_2(n, z)}{c_{12}(z)} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint [\varphi_1(n, z^{-1}) + R(z)\varphi_1(n, z)] z^{m-1} dz. \quad (3.80)$$

Reescribiremos ambos lados de la expresión con el fin de hallar una ecuación que sea satisfecha por el núcleo  $K(n, n')$  de (3.39).

Primero, para el lado derecho (ld), recordemos que, para  $|z| \leq 1$ ,

$$\varphi_1(n, z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'}. \quad (3.81)$$

Por lo tanto, por el teorema del residuo de Cauchy, llegamos a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \varphi_1(n, z^{-1}) z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') \oint z^{-n'+m-1} dz \quad (3.82)$$

$$K(n, m) \quad (m \leq n) .$$

Notemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint R(z) \varphi_1(n, z) z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') \oint R(z) z^{n'+m-1} dz , \quad (3.83)$$

de donde se obtiene que

$$(ld) = K(n, m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F_c(n' + m) \quad (3.84)$$

donde  $F_c$  es la contribución del espectro continuo de  $z$ , y está definido como

$$F_c(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} dz . \quad (3.85)$$

Por otra parte, para el lado izquierdo ( $li$ ), la integral a lo largo del círculo unitario alrededor del origen, se puede escribir como

$$\begin{aligned} (li) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_2(n, z)}{c_{12}(z)} z^{m-1} \\ &= I_\alpha + I_0 , \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde  $I_\alpha$  es la contribución de los polos  $z_j$  ( $z_j \geq 0$ ) e  $I_0$  es la contribución del polo en  $z = 0$ . Puesto que el residuo está dado por (3.79), tenemos, dado (3.81),

$$\begin{aligned} I_\alpha &= - \sum_j \varphi_2(n, z_j) z_j^{m-1} \frac{z_j c_j^2(t)}{c_{11}(z_j)} \\ &= - \sum_j \varphi_1(n, z_j) z_j^m c_j^2(t) \\ &= - \sum_j c_j^2(t) \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z_j^{n'+m} . \end{aligned} \quad (3.87)$$

Considerando el polo de  $\varphi_2(n, z)z^{m-1}$ , recordamos que

$$S(n, z) = \frac{\varphi_2(n, z)}{c_{12}(z)} = \varphi_1(n, z^{-1}) + R(z)\varphi_1(n, z). \quad (3.88)$$

Debido al primer término del lado derecho,  $S(n, z)z^{m-1}$  puede tener un polo en  $z = 0$ . Para verificar esta suposición, estimamos  $S(n, z)$  para  $z \simeq 0$  empleando la ecuación

$$a_{n-1}S(n-1, z) + a_nS(n+1, z) + b_nS(n, z) = \frac{z+z^{-1}}{2}S(n, z). \quad (3.89)$$

En el lado derecho de la ecuación tenemos el factor  $z^{-1}$ . Por lo que cerca de  $z \simeq 0$ , tenemos

$$a_nS(n+1, z) \simeq \frac{1}{2z}S(n, z) \quad (z \simeq 0). \quad (3.90)$$

Así, para  $z \simeq 0$  tenemos

$$S(n, z) \simeq 2za_nS(n+1, z) \simeq \dots \simeq (2z)^N a_n a_{n+1} \dots a_{n+N-1} S(n+N, z). \quad (3.91)$$

Por (3.20) y recordando (3.49) tenemos para  $N \gg 1$

$$S(N, z) \simeq z^{-N} \quad (z \simeq 0, N \leq 1). \quad (3.92)$$

Además, por la forma asintótica de  $\varphi_1(n, z)$ , tenemos

$$K(\infty, \infty) = 1. \quad (3.93)$$

Usando este resultado, obtenemos

$$S(n, z) \simeq \frac{1}{K(n, n)} z^{-n} \quad (z \simeq 0). \quad (3.94)$$

Por lo tanto, cuando  $-n+m-1 = -1$ , esto es, cuando  $n = m$ , el polo  $z = 0$  contribuye en  $I_0$  de (3.86). Dado que  $m \geq n$ , los términos inferiores  $z^{-\nu}$  ( $\nu < n$ ) en  $S(n, z)$  no contribuyen. Así

$$I_0 = \frac{1}{K(n, n)} \delta(n, m) \quad (m \geq n), \quad (3.95)$$

y por el lado izquierdo (li) de (3.80), obtenemos

$$(li) = \frac{1}{K(n, n)} \delta(n, m) - \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') F_b(n' + m) \quad (m \geq n), \quad (3.96)$$

donde  $F_b$  define la contribución de los estados ligados,

$$F_b(m) = \sum_j c_j^2(t) z_j^m. \quad (3.97)$$

Por lo que finalmente (3.80) llega a ser

$$\frac{1}{K(n,n)} \delta(n,m) = K(n,m) + \sum_{n'=n}^{\infty} K(n,n') F(n'+m) \quad (m \geq n) \quad (3.98)$$

con

$$F(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} dz + \sum_j c_j^2(t) z_j^m. \quad (3.99)$$

Esta es una versión discreta de la ecuación de Gel'fand-Levitan-Marčenko (GLM). En principio, si resolvemos la ecuación (3.98) dado un núcleo  $F(m)$ , para obtener  $K(n,m)$ . el movimiento en la cadena es conocido por (3.39) o (3.22,23). Aunque la ecuación (3.98) parece no lineal con respecto a  $K(n,m)$  por el lado izquierdo, se puede linealizar inmediatamente en la siguiente forma.

Para los elementos no diagonales de  $K(n,m)$  escribimos

$$\kappa(n,m) = \frac{K(n,m)}{K(n,n)} \quad (m \leq n). \quad (3.100)$$

Entonces, para los elementos no diagonales, la ecuación GLM (3.98) se transforma en

$$\kappa(n,m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n,n') F(n'+m) = 0 \quad (3.101)$$

que es lineal con respecto a  $\kappa(n,m)$ . Cuando obtenemos  $\kappa(n,m)$  obtenemos al elemento diagonal  $K(n,n)$  de la ecuación (3.98) para  $n = m$  como

$$\frac{1}{[K(n,n)]^2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n,n') F(n'+m). \quad (3.102)$$

### 3.5 El problema de valores iniciales

Hemos estudiado cómo la cadena de Toda tiene un problema espectral asociado. También hemos encontrado explícitamente el potencial del problema espectral, que expresa las

soluciones del problema en términos de los coeficientes de reflexión y los valores propios. Ahora determinaremos la evolución de estos parámetros espectrales en términos de la evolución de la solución para la cadena de Toda. Es sorprendente a primera vista que los parámetros espectrales evolucionen de manera lineal. Sin embargo, dado que la evolución depende del comportamiento asintótico cuando  $|n| \rightarrow \infty$ , el potencial es cero en ese límite y esta evolución puede determinarse.

La ecuación (3.16) se transforma "linealmente" en la forma (3.101) y (3.102). Si podemos determinar a partir de la ecuación (3.17) la dependencia temporal del núcleo  $F(m)$  de la ecuación integral discreta (3.101), entonces podemos resolver el problema de valores iniciales. En la segunda sección del capítulo hemos escrito la forma asintótica de la función de dispersión como

$$S(n, z) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z^{-n} + R(z)z^n & (n \rightarrow +\infty) \\ z^{-n}/c_{12}(z) & (n \rightarrow -\infty) \end{array} \right\}, \quad (3.103)$$

sin tomar en cuenta el factor temporal dado por la ecuación (3.18), cuando estudiamos el espectro continuo. Ahora reestablecemos el factor temporal  $e^{i\omega t}$  notando que la onda incidente, el primer término  $z^{-n}$  de (3.49) o (3.103), es

$$S(n, z, t) \rightarrow [z^{-n} + R(z, t)z^n]e^{i\omega t}, \quad (n \rightarrow +\infty) \quad (3.104)$$

donde, por (3.17),

$$i\omega = \frac{z - z^{-1}}{2}. \quad (3.105)$$

Dado que  $S(n, z, t)$  es una función de onda, su dependencia temporal está dada también por la ecuación (3.17) como

$$\frac{d}{dt}S(n, z, t) = a_{n-1}S(n-1, z, t) - a_nS(n+1, z, t). \quad (3.106)$$

Por lo tanto, su forma asintótica en el límite  $n \rightarrow +\infty$  es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}S(n, z, t) &\rightarrow \frac{1}{2}[(z^{-n+1} - z^{-n-1}) + R(z, t)(z^{n-1} - z^{n+1})]e^{i\omega t} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2}[z^{-n} - R(z, t)z^n]e^{i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Esta expresión *asintótica* debe coincidir directamente con el cálculo de la derivada

$$\frac{d}{dt}S(n, z, t) = \frac{dR(z, t)}{dt}z^n e^{i\omega t} + i\omega[z^{-n} + R(z, t)z^n]e^{i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty). \quad (3.108)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{dR(z, t)}{dt} &= \left( \frac{z^{-1} - z}{2} - i\omega \right) R(z, t) \\ &= (z^{-1} - z)R(z, t). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Entonces, la dependencia temporal del coeficiente de reflexión es

$$R(z, t) \equiv \frac{c_{11}(z, t)}{c_{12}(z, t)} = R(z, 0)e^{(z^{-1}-z)t}. \quad (3.110)$$

Un cálculo similar para la función  $\varphi_2(n, z)$  nos da que

$$\begin{aligned} \varphi_2(n, z) &= c_{12}(z, t)S(n, z, t) \\ &\rightarrow [c_{12}(z, t)z^{-n} + c_{11}(z, t)z^n]e^{i\omega t} \quad (n \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (3.111)$$

igualando esta expresión *asintótica* al cálculo directo de la derivada, obtenemos

$$c_{12}(z, t) = c_{12}(z, 0) \quad (3.112)$$

$$c_{11}(z, t) = c_{11}(z, 0)e^{(z^{-1}-z)t} \quad (3.113)$$

En el caso del espectro discreto contamos con la forma *asintótica* de los estados ligados (cuyos valores propios son constantes) y, por lo mismo, sólo podemos atribuir dependencia temporal en este caso a los coeficientes de normalización  $c_j$ . Podemos escribir

$$\zeta_j(n, z_j, t) \rightarrow c_j(t)z_j^n. \quad (3.114)$$

Entonces, a partir de la ecuación

$$\frac{d}{dt}\zeta_j(n, z_j, t) = a_{n-1}\zeta_j(n-1, z_j, t) - a_n\zeta_j(n+1, z_j, t), \quad (3.115)$$

obtenemos el comportamiento *asintótico* del coeficiente de normalización

$$\frac{d}{dt}c_j(t) = \frac{z_j^{-1} - z_j}{2}c_j(t), \quad (3.116)$$

por lo que obtenemos

$$c_j(t) = c_j(0)e^{(z_j^{-1}-z_j)t/2} . \quad (3.117)$$

En resumen, los datos de dispersión al tiempo  $t$  se obtienen a partir de los datos iniciales como

1.  $z_j(t) = z_j(0) ,$
2.  $c_j(t) = c_j(0)e^{(z_j^{-1}-z_j)t/2} ,$
3.  $R(z, t) = R(z, 0)e^{(z_j^{-1}-z_j)t} ,$
4.  $c_{12}(z, t) = c_{12}(z, 0) .$

A partir de estos datos obtenemos la dependencia temporal del núcleo de la ecuación integral discreta de GLM,

$$F(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z, 0)e^{(z_j^{-1}-z_j)t} z^{m-1} dz + \sum_j c_j^2(0)e^{(z_j^{-1}-z_j)t/2} z_j^m . \quad (3.118)$$

Cuando conocemos los valores iniciales  $a_n(0)$  y  $b_n(0)$  entonces podemos resolver el problema de dispersión de la función de onda  $S$ , en la ecuación lineal en diferencias (3.16), bajo las condiciones de frontera (3.49). A partir de estos datos iniciales de dispersión construimos el núcleo (3.118) y resolvemos entonces la ecuación integral discreta de GLM (3.101) para  $\kappa(n, m)$ ; entonces tenemos  $K(n, m)$  y las ecuaciones (3.24,25,26) dan la solución al problema de valores iniciales. Por así decirlo, hemos visto que el problema de la propagación de ondas en la cadena de Toda ha sido linealizado. Por otra parte, vemos que la "mitad" de las variables espectrales son constantes y la otra mitad evoluciona periódicamente con frecuencias que dependen de las constantes. Esto sugiere que la transformación espectral inversa es un cambio de variables de acción y ángulo. La solubilidad corresponde así a la integrabilidad completa. Desde luego, la solución no es explícita ya que debe resolverse una ecuación integral, pero usaremos este hecho como punto de partida para construir en forma explícita soluciones exactas y basar en ello una teoría de perturbaciones en el próximo capítulo.

### 3.6 Solución con un solitón

Si el coeficiente de reflexión se anula inicialmente ( $R(z, 0) = 0$ ), permanecerá igual a cero para todo tiempo  $t$ . En esta sección consideraremos esta situación y hallaremos soluciones tipo solitón, como en el primer capítulo. Los solitones están caracterizados por los ceros  $z_j$  del coeficiente  $c_{12}(z)$  y por los coeficientes de normalización  $c_j(0)$ .

Estudiamos el caso donde tenemos un sólo valor propio discreto. Escribimos entonces

$$z_1 = \pm e^{-\kappa} \quad (\in \mathbb{R}). \quad (3.119)$$

Si imponemos que  $|z_1| < 1$ , entonces  $\kappa > 0$ . Pero tenemos dos posibilidades  $z_1 > 0$  y  $z_1 < 0$ . El coeficiente de normalización que pertenece a  $z_1$  se puede escribir como

$$c_1(t) = c_1(0)e^{\beta t}, \quad (3.120)$$

con

$$\beta \equiv \frac{z_1^{-1} - z_1}{2} = \pm \sinh(\kappa). \quad (3.121)$$

El núcleo de la ecuación GLM es, en este caso,

$$F(m) = c_1^2 z_1^m, \quad (3.122)$$

y la ecuación de GLM se reduce a

$$\kappa(n, m) + c_1^2 z_1^{n+m} + c_1^2 z_1^m \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') z_1^{n'} = 0. \quad (3.123)$$

Proponemos como solución a

$$\kappa(n, m) = c_1 \mathbf{A}^{(n)} z_1^m, \quad (3.124)$$

y la sustituimos en (3.123) para obtener

$$c_1 \mathbf{A}^{(n)} z_1^m + c_1^2 z_1^{n+m} + c_1^2 z_1^m \sum_{n'=n+1}^{\infty} c_1 \mathbf{A}^{(n)} z_1^{2n'} = 0,$$

de donde despejamos a  $\mathbf{A}^{(n)}$

$$\mathbf{A}^{(n)} = -\frac{c_1 z_1^n}{1 + c_1^2 \sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{2n'}}, \quad (3.125)$$

pero

$$\sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{2n'} = \frac{z_1^{2(n+1)}}{1 - z_1^2}, \quad (|z_1| < 1)$$

es una progresión geométrica. Por lo tanto, sustituyendo obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(n)} &= -\frac{c_1 z_1^n}{1 + \frac{c_1^2 z_1^{2(n+1)}}{1 - z_1^2}} \\ &= -\frac{c_1 z_1^n}{1 + e^{2\delta} z_1^{2(n+1)}}, \end{aligned} \quad (3.126)$$

con

$$e^\delta = \frac{c_1(t)}{\sqrt{1 - z_1^2}} = e^{\delta_0 + \beta t} \quad (3.127)$$

y

$$e^{\delta_0} = \frac{c_1(0)}{\sqrt{1 - z_1^2}}. \quad (3.128)$$

Entonces, por la ecuación (3.102), tenemos

$$\begin{aligned} [K(n, n)]^{-2} &= 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') F(n' + m) \\ &= 1 + c_1^2 z_1^{2n} + c_1^3 \mathbf{A}^{(n)} z_1^n \sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{2n'} \\ &= \frac{1 + e^{2(\delta - n\kappa)}}{1 + e^{2(\delta - (n+1)\kappa)}}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Notemos que

$$[K(n, n)]^{-2} = \frac{z_1^n + e^{2\delta} z_1^{-n}}{z_1^n + e^{2(\delta - \kappa)} z_1^{-n}} \quad (z_1 = e^{-\kappa}), \quad (3.130)$$

de donde se observa que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [K(n, n)]^{-2} \rightarrow 1 \quad (3.131)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} [K(n, n)]^{-2} \rightarrow z_1^{-2} . \quad (z_1 = e^{-\kappa}) \quad (3.132)$$

Las ecuaciones (3.24), (3.120) a (3.128) dan,

$$\begin{aligned} e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 &= \left[ \frac{K(n, n)}{K(n-1, n-1)} \right]^2 - 1 \\ &= \left[ \frac{1 + e^{2(\delta - (n+1)\kappa)}}{1 + e^{2(\delta - n\kappa)}} \right] \left[ \frac{1 + e^{2(\delta - (n-1)\kappa)}}{1 + e^{2(\delta - n\kappa)}} \right] - 1 \\ &= \frac{\cosh^2(\kappa) - 1}{\cosh^2(\delta - n\kappa)} \\ &= \sinh^2(\kappa) \operatorname{sech}^2(\delta - n\kappa) \\ &= \beta^2 \operatorname{sech}^2(n\kappa - \delta) , \end{aligned}$$

pero  $\delta = \delta_0 + \beta t$ , por lo que obtenemos finalmente

$$e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 = \beta^2 \operatorname{sech}^2(n\kappa - \beta t - \delta_0) , \quad (3.133)$$

que es un solitón y corresponde a la ecuación (1.6) del primer capítulo. La onda se mueve hacia la derecha cuando  $\beta > 0$  ( $z_1 > 0$ ) y a la izquierda cuando  $\beta < 0$  ( $z_1 < 0$ ). Es claro que tomando  $N$  estados ligados obtenemos una solución exacta con  $N$  solitones, [Toda, 1989].

### 3.6.1 Los estados ligados

En esta sección calculamos explícitamente las funciones propias para el problema espectral, ya que son la base de la teoría de perturbaciones que describiremos en el próximo capítulo. La función de onda del espectro discreto se calcula a partir de la expresión

$$\varphi_1(n, z_1) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z_1^{n'}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n) \kappa(n, n') z_1^{n'} \\
&= K(n, n) \left[ z_1^n + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') z_1^{n'} \right], \tag{3.134}
\end{aligned}$$

donde sabemos que

$$\kappa(n, n') = - \frac{c_1^2 z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} z_1^{n'}, \tag{3.135}$$

con

$$\alpha_1 \equiv \frac{c_1^2}{1 - z_1^2}. \tag{3.136}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{n'=n+1}^{\infty} \kappa(n, n') z_1^{n'} &= - \sum_{n'=n+1}^{\infty} \frac{c_1^2 z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} z_1^{2n'} \\
&= - \frac{c_1^2 z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{2n'} \\
&= - \frac{c_1^2 z_1^n z_1^{2(n+1)}}{(1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)})(1 - z_1^2)}. \tag{3.137}
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(n, z_1) &= K(n, n) \left[ z_1^n - \frac{c_1^2 z_1^n z_1^{2(n+1)}}{(1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)})(1 - z_1^2)} \right] \\
&= K(n, n) \frac{z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}}. \tag{3.138}
\end{aligned}$$

en donde, de la ecuación (3.130), sabemos que

$$K(n, n) = \left[ \frac{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}}{1 + \alpha_1 z_1^{2n}} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.139}$$

La función de onda (3.138) satisface las ecuaciones (3.16,17). Si multiplicamos la constante de normalización por la ecuación (3.138), entonces la función de onda del estado ligado llega a ser

$$\zeta(n, z_1) = c_1(0)e^{\beta t}\varphi_1(n, z_1) \quad (3.140)$$

$$\beta = \frac{z_1^{-1} - z_1}{2}. \quad (3.141)$$

Podemos escribir la ecuación (3.140), empleando las definiciones de  $\alpha_1$  y  $e^{\delta_0}$ , como

$$\begin{aligned} \zeta(n, z_1) &= c_1(0)e^{\beta t}K(n, n)\frac{z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \\ &= c_1(0)K(n, n)\frac{z_1^n e^{\beta t}(1 - z_1^2)}{1 - z_1^2 + \alpha_1^2 z_1^{2(n+1)}} \\ &= c_1(0)K(n, n)\frac{z_1^n e^{\beta t}}{1 + e^{2(\delta_0 + \beta t)} z_1^{2(n+1)}} \\ &= c_1(0)K(n, n)\frac{1}{2}e^{-\delta_0} z_1^{-1} \frac{2e^{(\delta_0 + \beta t)} z_1^{n+1}}{1 + e^{2(\delta_0 + \beta t)} z_1^{2(n+1)}} \\ &= c_1(0)K(n, n)\frac{1}{2}e^{-\delta_0} z_1^{-1} \frac{2}{e^{(\delta_0 + \beta t - \kappa(n+1))} + e^{-(\delta_0 + \beta t - \kappa(n+1))}}. \end{aligned}$$

Por lo que finalmente

$$\zeta(n, z_1) = c_1(0)e^{-\delta_0}K(n, n)\frac{e^\kappa}{2}\operatorname{sech}(\kappa(n+1) - \beta t - \delta_0), \quad (3.142)$$

donde hemos empleado  $z_1 = e^{-\kappa}$ . La forma asintótica de  $K(n, n)$  es, nuevamente,

$$K(n, n) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (n \rightarrow +\infty) \\ z_1 & (n \rightarrow -\infty) \end{array} \right\} \quad (3.143)$$

Por lo tanto, asintóticamente la función de onda del estado ligado toma la forma  $\zeta(n, z_1) \sim e^{-\kappa|n|} = z_1^{|n|}$  o más precisamente

$$\zeta(n, z_1) \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} c_1(0)z_1^n e^{\beta t} & (n \rightarrow +\infty) \\ c_1(0)e^{-2\delta_0} z_1^{-n-1} e^{-\beta t} & (n \rightarrow -\infty) \end{array} \right\} \quad (3.144)$$

## 3.6.2 Movimiento sin reflexión

Para  $|z| \leq 1$ , un cálculo similar para  $\varphi_1(n, z)$  conduce a lo siguiente,

$$\varphi_1(n, z) = \sum_{n'=n}^{\infty} K(n, n') z^{n'} \quad (3.145)$$

$$(3.146)$$

$$= K(n, n) \left[ z^n + \sum_{n'=n+1}^{\infty} c_1 \mathbf{A}^n z_1^{n'} z^{n'} \right], \quad (3.147)$$

donde hemos usado el hecho de que

$$K(n, n') = K(n, n) \kappa(n, n') = K(n, n) c_1 \mathbf{A}^n z_1^{n'}. \quad (3.148)$$

Luego entonces,

$$\varphi_1(n, z) = K(n, n) \left[ z^n + \sum_{n'=n+1}^{\infty} z_1^{n'} z^{n'} \right] \quad (3.149)$$

y

$$\sum_{n'=n+1}^{\infty} (z_1 z)^{n'} = \frac{(z_1 z)^{n+1}}{1 - z_1 z} \quad (|z| < 1). \quad (3.150)$$

Por lo tanto,

$$\varphi_1(n, z) = K(n, n) \left[ z^n + \frac{c_1 \mathbf{A}^n z_1^{n+1} z^{n+1}}{1 - z_1 z} \right]. \quad (3.151)$$

Hagamos uso de las expresiones

$$\mathbf{A}^n = -\frac{c_1 z_1^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}}, \quad c_1^2 = \alpha_1 (1 - z_1^2) \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{c_1^2}{1 - z_1 z}.$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_1(n, z) &= K(n, n) \frac{z^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \left[ \frac{(1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)})(1 - z_1 z) - c_1^2 z_1^{2n+1} z}{1 - z_1 z} \right] \\ &= K(n, n) \frac{z^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \left[ \frac{(1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)})(1 - z_1 z) - \alpha_1 (1 - z_1^2) z_1^{2n+1} z}{1 - z_1 z} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K(n, n) \frac{z^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \left[ 1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)} \frac{1 - z_1 z - (1 - z_1^2) z_1^{-1} z}{1 - z_1 z} \right] \\
&= K(n, n) \frac{z^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \left[ 1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)} \frac{1 - z z_1^{-1}}{1 - z_1 z} \right].
\end{aligned}$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$\varphi_1(n, z) = K(n, n) \frac{z^n}{1 + \alpha_1 z_1^{2(n+1)}} \left[ 1 + \frac{z^{-1} - z_1^{-1}}{z^{-1} - z_1} \alpha_1 z_1^{2(n+1)} \right], \quad (3.152)$$

con la consiguiente forma asintótica

$$\varphi_1(n, z) \rightarrow \begin{cases} z^n & (n \rightarrow +\infty) \\ z^n z_1 \frac{z^{-1} - z_1^{-1}}{z^{-1} - z_1} & (n \rightarrow -\infty) \end{cases}. \quad (3.153)$$

Si la onda incidente desde la derecha es  $\varphi_1 \rightarrow e^{ikn}$ , y reemplazamos  $z$  por  $z^{-1}$  obtenemos

$$\varphi_1(n, e^{-ik}) \rightarrow \begin{cases} e^{-ikn} & (n \rightarrow +\infty) \\ e^{-ikn} e^{-i\eta} & (n \rightarrow -\infty) \end{cases}. \quad (3.154)$$

donde,

$$e^{-i\eta} = \frac{1 - z_1 z}{z_1 - z}. \quad (3.155)$$

Para un solitón  $z_1 \in \mathbb{R}$  y su valor absoluto es menor que la unidad. Por otro lado, a partir de la definición del coeficiente de transición, donde imponemos que

$$R(z, t) = c_{11}(z, t) = 0, \quad (3.156)$$

tenemos

$$S(n, z, t) = \frac{\varphi_2(n, z, t)}{c_{12}(z)} = \varphi_1(n, z^{-1}) e^{i\omega t}. \quad (3.157)$$

Dado que

$$\varphi_2(n, z, t) \rightarrow z^{-n} e^{i\omega t} \quad \text{en} \quad n \rightarrow -\infty, \quad (3.158)$$

obtenemos que

$$\frac{1}{c_{12}(z)} = e^{-i\eta}, \quad (3.159)$$

lo que significa que la función de onda incide desde la derecha y se transmite sin reflexión. Sólo hay un corrimiento de fase dado por la cantidad  $\eta$ . Por otro lado,

$$c_{12}(z) = \frac{e^{ik} - z_1}{z_1 e^{ik} - 1}, \quad (z = e^{ik}) \quad (3.160)$$

donde se ve que  $c_{12}(z) = 0$  para  $k = i\kappa$  y  $e^{ik} = z_1$ . Así,  $c_{12}(z_1) = 0$  representa un estado ligado.



## 4

## Perturbación del Método de Dispersión Inversa

En el segundo capítulo mostramos que a la ecuación de movimiento de Toda le podemos asociar, mediante el formalismo de Lax, una ecuación matricial de evolución, a saber

$$\dot{L}\varphi = [B, L]\varphi .$$

La ecuación opera sobre vectores  $\varphi$  y es equivalente a una ecuación espectral y a una ecuación de evolución temporal de dichos vectores; es decir, se trata del sistema

$$\begin{aligned} L\varphi &= \lambda\varphi \\ \dot{\varphi} &= B\varphi , \end{aligned}$$

que corresponden a las ecuaciones (2.65,66) del capítulo 2. Este formalismo nos permitió obtener las cantidades conservadas de la cadena, la invariancia del espectro y resolver el problema de valores iniciales de la cadena infinita empleando el MDI en el capítulo 3.

El propósito de este capítulo es construir soluciones al problema no exactamente integrable, que se aparta un poco de la cadena de Toda. Consideraremos una teoría de perturbaciones que se basa en el MDI, a fin de obtener la evolución temporal del espectro y de los datos de dispersión en presencia de una perturbación. El conocimiento de estas cantidades es el fundamento del método, que en última instancia nos proporciona la descripción de los solitones cuando se someten a perturbación.

Este capítulo está dividido en cinco secciones. En la primera proponemos un método perturbativo; en la segunda mostramos la ecuación matricial de movimiento modificada por la perturbación; en la tercera obtendremos, a partir de la ecuación anterior, una ecuación inhomogénea para la diferencia  $\dot{\varphi} - B\varphi$ , la que resolveremos mediante variación de parámetros y cuyos coeficientes de dicha solución los podremos comparar con los coeficientes de los límites asintóticos de la propia diferencia, esto nos permitirá, en la cuarta sección, obtener la evolución en el tiempo del espectro y de los datos de dispersión perturbados. En la última sección mostramos un estudio cualitativo sobre el movimiento de un solitón a su paso por la impureza.

## 4.1 Método perturbativo

Consideremos que cada partícula que conforma la cadena tiene masa unitaria y supongamos que sólo una de ellas, la de la posición  $n = 0$ , tiene masa diferente (ver Figura 4.1), es decir,

$$m_n = (1 + \epsilon\delta_{n,0})^{-1}, \quad (4.1)$$

donde  $\delta_{n,0}$  es el símbolo de Kronecker. La partícula de masa diferente o impureza juega el papel de la perturbación que modifica los parámetros de los solitones a su paso. También supondremos que la interacción entre la impureza y las partículas vecinas es la misma que hay entre el resto de las partículas. Lo que debemos modificar en la ecuación matricial

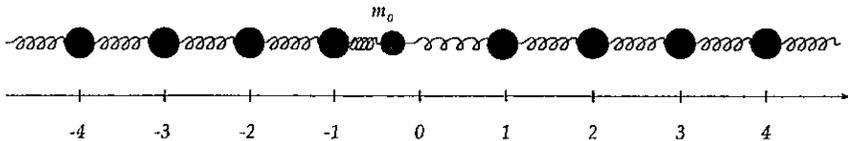


Figura 4.1. Esquema de la cadena con impureza en la posición 0

de evolución es el término de la derivada temporal de la matriz  $L$ , ya que ella contiene la perturbación debido a la impureza; es decir, mostraremos que debemos pasar de

$$\dot{L}\varphi(n) \quad \text{a} \quad \dot{L}\varphi(n) + cM(\delta)\varphi(n),$$

en donde  $\varphi(n)$  es, como antes, la  $n$ -ésima componente del vector  $\varphi$ , [ver (3.11), capítulo 3]. Para mostrar que esta es la modificación, consideremos la siguiente igualdad

$$\frac{dL}{dt}\varphi(n) = \frac{da_{n-1}}{dt}\varphi(n-1) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + \frac{da_n}{dt}\varphi(n+1), \quad (4.2)$$

en donde la evolución en el tiempo de las variables  $a_n$  y  $b_n$ , está dado por las ecuaciones de evolución de la cadena de Toda [ver (2.36,37) capítulo 2]:

$$\frac{da_n}{dt} = a_n \left( \frac{b_n}{m_n} - \frac{b_{n+1}}{m_{n+1}} \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2), \quad (4.4)$$

Por lo que al sustituir la derivada de la variable  $a_n$  en la expresión  $\dot{L}\varphi(n)$  (la derivada de  $b_n$  no tiene términos perturbativos), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{L}\varphi(n) &= a_{n-1} \left( \frac{b_{n-1}}{m_{n-1}} - \frac{b_n}{m_n} \right) \varphi(n-1) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + a_n \left( \frac{b_n}{m_n} - \frac{b_{n+1}}{m_{n+1}} \right) \varphi(n+1) \\ &= a_{n-1} [(1 + \epsilon\delta_{n-1,0})b_{n-1} - (1 + \epsilon\delta_{n,0})b_n] \varphi(n) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + \\ &\quad a_n [(1 + \epsilon\delta_{n,0})b_n - (1 + \epsilon\delta_{n+1,0})b_{n+1}] \varphi(n+1) \\ &= a_{n-1}(b_{n-1} - b_n)\varphi(n-1) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + a_n(b_n - b_{n+1})\varphi(n+1) + \\ &\quad \epsilon \{ a_{n-1}(\delta_{n-1,0}b_{n-1} - \delta_{n,0}b_n)\varphi(n-1) + a_n(\delta_{n,0}b_n - \delta_{n+1,0}b_{n+1})\varphi(n+1) \}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dL}{dt}\varphi(n) = [B, L]\varphi(n) + \epsilon M(\delta)\varphi(n), \quad (4.5)$$

Y, en consecuencia,

$$M(\delta) = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & \Xi_1 & 0 & \Xi_2 & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \end{bmatrix} ,$$

donde,

$$\Xi_1 = a_{n-1}(\delta_{n-1,0}b_{n-1} - \delta_{n,0}b_n)$$

$$\Xi_2 = a_n(\delta_{n,0}b_n - \delta_{n+1,0}b_{n+1})$$

o bien,

$$M(\delta)\varphi(n) = a_{n-1}(\delta_{n-1,0}b_{n-1} - \delta_{n,0}b_n)\varphi(n-1) + a_n(\delta_{n,0}b_n - \delta_{n+1,0}b_{n+1})\varphi(n+1) \quad (4.6)$$

y

$$[B, L]\varphi(n) = a_{n-1}(b_{n-1} - b_n)\varphi(n-1) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + a_n(b_n - b_{n+1})\varphi(n+1) ; \quad (4.7)$$

o,

$$[B, L]\varphi(n) = \frac{da_{n-1}}{dt}\varphi(n-1) + \frac{db_n}{dt}\varphi(n) + \frac{da_n}{dt}\varphi(n+1) \quad (4.8)$$

## 4.2 Ecuación de evolución en presencia de la perturbación

La formulación habitual del método de perturbaciones consiste en el desarrollo en potencias de  $\epsilon$ , empleando expresiones no perturbadas de las funciones de onda  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en la ecuación de valores propios [Lamb, 1980]. Sin embargo, es más ventajoso formular el problema de evolución de los datos de dispersión directamente como lo presentamos en esta sección.

En el caso perturbado

$$(\dot{L} - [B, L])\varphi(n) = \epsilon M(\delta)\varphi(n) , \quad (4.9)$$

las funciones de onda  $\varphi$  no satisfacen la ecuación de evolución  $\dot{\varphi} = B\varphi$  exactamente; es decir, el sistema de ecuaciones

$$L\varphi = \lambda\varphi \quad (4.10)$$

$$\dot{\varphi} = B\varphi \quad (4.11)$$

ya no corresponde con la ecuación (4.9), tenemos que modificar la ecuación de evolución (4.11). De hecho, la estructura de la ecuación de evolución la consideramos en principio desconocida. Para ello estudiamos asintóticamente la evolución de la diferencia

$$\Phi = \dot{\varphi} - B\varphi . \quad (4.12)$$

Esta función jugará un papel fundamental en el análisis perturbativo subsecuente. La idea principal es obtener una ecuación que relacione a la función  $\Phi$  con los términos perturbativos y la dependencia temporal del espectro  $\lambda$ , de manera que cuando la perturbación se anule ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), la solución  $\varphi$  corresponda al problema sin perturbar; es decir, satisfaga la ecuación de evolución (4.11). Lo anterior impone una condición de frontera que debemos determinar tal que  $\Phi \rightarrow 0$ . Consideremos el problema de dispersión de la función de onda  $\varphi$ . Supongamos que la función  $\varphi$  está relacionada con la función propia  $\varphi_2(n, z)$  mediante la ecuación

$$\varphi = h(t)\varphi_2(n, z) . \quad (4.13)$$

Probaremos más adelante que en el límite  $n \rightarrow -\infty$ , se cumple que  $\Phi \rightarrow 0$ , imponiendo condiciones sobre la función de normalización  $h(t)$ .

Consideremos la  $n$ -ésima componente de una función  $\varphi(n)$  que satisface el problema de valores propios

$$(L - \lambda I)\varphi(n) = 0 . \quad (4.14)$$

Derivamos la ecuación (4.14) respecto al parámetro  $t$  y obtenemos, como antes,

$$(\dot{L} - \dot{\lambda}I)\varphi(n) + (L - \lambda I)\dot{\varphi}(n) = 0 ,$$

o bien,

$$\dot{L}\varphi(n) - \dot{\lambda}\varphi(n) + (L - \lambda I)\dot{\varphi}(n) = 0 .$$

Aquí sustituimos la nueva expresión para (4.2):

$$[B, L]\varphi(n) + cM(\delta)\varphi(n) - \dot{\lambda}\varphi(n) + (L - \lambda I)\dot{\varphi}(n) = 0 ,$$

ordenando llegamos a que

$$L(\dot{\varphi}(n) - B\varphi(n)) + BL\varphi(n) - \lambda\dot{\varphi}(n) = \dot{\lambda}\varphi(n) - \epsilon M(\delta)\varphi(n) ,$$

sumando y restando  $B\lambda\varphi(n)$  obtenemos

$$L(\dot{\varphi}(n) - B\varphi(n)) + B(L - \lambda I)\varphi(n) - \lambda(\dot{\varphi}(n) - B\varphi(n)) = \dot{\lambda}\varphi(n) - \epsilon M(\delta)\varphi(n)$$

$$(L - \lambda I)(\dot{\varphi}(n) - B\varphi(n)) = \dot{\lambda}\varphi(n) - \epsilon M(\delta)\varphi(n) ,$$

por lo que,

$$(L - \lambda I)\Phi(n) = \mathcal{G}(\delta) , \quad (4.15)$$

donde  $\Phi(n) = \dot{\varphi}(n) - B\varphi(n)$  y  $\mathcal{G}(\delta) = \dot{\lambda}\varphi(n) - \epsilon M(\delta)\varphi(n)$ . La expresión  $\mathcal{G}(\delta)$  representa:

$$\mathcal{G}(\delta) = \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\lambda}\varphi(n) - \epsilon M(\delta)\varphi(n) & \text{estados ligados} \\ -\epsilon M(\delta)\varphi(n) & \text{soluciones de dispersión} \end{array} \right\} .$$

#### 4.2.1 Variación de parámetros

La ecuación (4.15) es una ecuación en diferencias inhomogénea para  $\Phi$ . Una solución se puede construir a partir del conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea, mediante el método de variación de parámetros. Luego se ajustarán las soluciones del problema homogéneo usando las condiciones de frontera apropiadas. En este proceso determinaremos la evolución de los datos de dispersión.

Escribamos a  $\Phi(n)$  como combinación lineal de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$

$$\Phi(n) = c(n, z, t)\varphi_1(n, z) + \tau(n, z, t)\varphi_2(n, z) . \quad (4.16)$$

Queremos determinar a las variables  $c$  y  $\tau$  mediante variación de parámetros. Omitiremos por brevedad la dependencia en  $z$  y  $t$ . Entonces tenemos que

$$\Phi(n) = c(n)\varphi_1(n) + \tau(n)\varphi_2(n) , \quad (4.17)$$

expresión que sustituimos en la ecuación (4.15) explícita

$$a_{n-1}\Phi(n-1) + b_n\Phi(n) + a_n\Phi(n+1) - \lambda\Phi(n) = \mathcal{G}(\delta), \quad (4.18)$$

la que proporciona la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & a_{n-1}\{c(n)\varphi_1(n-1) + \tau(n)\varphi_2(n-1)\} + \\ & a_n\{c(n)\varphi_1(n+1) + \tau(n)\varphi_2(n+1)\} + \\ & b_n\{c(n)\varphi_1(n) + \tau(n)\varphi_2(n)\} - \lambda\{c(n)\varphi_1(n) + \tau(n)\varphi_2(n)\} + \\ & a_{n-1}(\{c(n-1) - c(n)\}\varphi_1(n-1) + \{\tau(n-1) - \tau(n)\}\varphi_2(n-1)) + \\ & a_n(\{c(n+1) - c(n)\}\varphi_1(n) + \{\tau(n+1) - \tau(n)\}\varphi_2(n)) = \mathcal{G}(\delta). \end{aligned}$$

Los tres primeros renglones suman cero, es la ecuación

$$c(n)(L - \lambda I)\varphi_1(n) + \tau(n)(L - \lambda I)\varphi_2(n) = 0,$$

puesto que tanto  $\varphi_1(n)$  como  $\varphi_2(n)$  son funciones propias de  $L$ . Tenemos libertad de escoger el cuarto renglón igual a cero y recorrer el índice en uno, por lo que obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales para las  $c$ 's y  $\tau$ 's:

$$\begin{aligned} \{c(n+1) - c(n)\}\varphi_1(n) + \{\tau(n+1) - \tau(n)\}\varphi_2(n) &= 0 \\ \{c(n+1) - c(n)\}\varphi_1(n+1) + \{\tau(n+1) - \tau(n)\}\varphi_2(n+1) &= \frac{1}{a_n}\mathcal{G}(\delta). \end{aligned}$$

En forma matricial el sistema se ve como

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(n) & \varphi_2(n) \\ \varphi_1(n+1) & \varphi_2(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(n+1) - c(n) \\ \tau(n+1) - \tau(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_n}\mathcal{G}(\delta) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

De esta ecuación definimos el determinante

$$W(n) = \varphi_1(n)\varphi_2(n+1) - \varphi_2(n)\varphi_1(n+1) \quad (4.20)$$

como el wronskiano de las funciones  $\varphi_1(n)$  y  $\varphi_2(n)$ .

Entonces, la solución es

$$\begin{pmatrix} c(n+1) - c(n) \\ \tau(n+1) - \tau(n) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(n)} \begin{pmatrix} \varphi_2(n+1) & -\varphi_2(n) \\ -\varphi_1(n+1) & \varphi_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_n}\mathcal{G}(\delta) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Por componentes obtenemos que

$$c(n+1) - c(n) = -\frac{\mathcal{G}(\delta)}{a_n W(n)} \varphi_2(n), \quad (4.22)$$

$$\tau(n+1) - \tau(n) = \frac{\mathcal{G}(\delta)}{a_n W(n)} \varphi_1(n). \quad (4.23)$$

Se trata de ecuaciones en diferencias de primer orden en  $c$  y  $\tau$ . Por otra parte, del capítulo 3, ecuación (3.56), sabemos que

$$a_n W(n) = -\frac{1}{2}(z - z^{-1})c_{12}(z), \quad (4.24)$$

es independiente de  $n$ . Por lo tanto, las soluciones generales están dadas por

$$c(n) = \frac{2}{c_{12}(z)(z - z^{-1})} \sum_{m=-\infty}^n \mathcal{G}(\delta) \varphi_2(m, z), \quad (4.25)$$

$$\tau(n) = -\frac{2}{c_{12}(z)(z - z^{-1})} \sum_{m=-\infty}^n \mathcal{G}(\delta) \varphi_1(m, z). \quad (4.26)$$

De donde observamos que las soluciones de dispersión, es decir,  $\mathcal{G}(\delta) = -\epsilon M(\delta) \varphi(n)$ , se anula conforme  $n \rightarrow -\infty$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nótese que las expresiones convergen. Como veremos más adelante, en el caso discreto las funciones de onda decaen exponencialmente y son, por tanto, de cuadrado sumable, de hecho, pertenecen a  $\ell_2$ . En cambio, en el continuo, sabemos que las funciones propias convergen a funciones periódicas y por tanto están acotadas. En ambos casos, los términos perturbativos sólo representan un número finito.

Calculemos el comportamiento asintótico de  $\Phi(n)$  conforme  $n \rightarrow +\infty$ . Partimos del hecho de que

$$\Phi(n) = c(n) \varphi_1(n, z) + \tau(n) \varphi_2(n, z), \quad (4.27)$$

pero en este límite  $n \rightarrow +\infty$  [ecuación (3.46), capítulo 3],

$$\varphi_2(n, z) = c_{11}(z) \varphi_1(n, z) + c_{12}(z) \varphi_1(n, z^{-1}), \quad (4.28)$$

luego entonces, sustituyendo esta expresión en (4.27) obtenemos

$$\Phi(n) = [c(n) + c_{11}(z) \tau(n)] \varphi_1(n, z) + c_{12}(z) \tau(n) \varphi_1(n, z^{-1}). \quad (4.29)$$

Tomemos el límite  $n \rightarrow +\infty$ , obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi = [c(+\infty) + c_{11}(z)\tau(+\infty)]z^n + c_{12}(z)\tau(+\infty)z^{-n}, \quad (4.30)$$

donde

$$c(+\infty) = \frac{2}{c_{12}(z)(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_2(n, z), \quad (4.31)$$

$$\tau(+\infty) = -\frac{2}{c_{12}(z)(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z). \quad (4.32)$$

Por lo que

$$c(+\infty) + c_{11}(z)\tau(+\infty) = \frac{2}{c_{12}(z)(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\varphi_2(n, z) - c_{11}(z)\varphi_1(n, z)\}\mathcal{G}(\delta), \quad (4.33)$$

pero por la ecuación (4.28), se obtiene

$$c(+\infty) + c_{11}(z)\tau(+\infty) = \frac{2}{(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z^{-1}). \quad (4.34)$$

El otro coeficiente es, por lo mismo,

$$c_{12}(z)\tau(+\infty) = -\frac{2}{(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z). \quad (4.35)$$

Finalmente la expresión (4.30) se convierte en

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi = \frac{2}{(z - z^{-1})} \left[ z^n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z^{-1}) - z^{-n} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z) \right] \quad (4.36)$$

#### 4.2.2 Límite asintótico de $\Phi$ en $-\infty$

En el límite  $n \rightarrow -\infty$  debemos hallar una condición sobre la función de normalización  $h(t)$ , de tal forma que se cumpla la condición de frontera  $\Phi \rightarrow 0$ . Para ello derivamos a la función (4.13) respecto a  $t$  y obtenemos

$$\dot{\varphi}(n) = \frac{dh(t)}{dt}\varphi_2(n, z), \quad (4.37)$$

de ahí que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \dot{\varphi}(n) = \frac{dh(t)}{dt} z^{-n} . \quad (4.38)$$

Por otra parte, la ecuación de evolución en el tiempo de (4.13) está dada por

$$\begin{aligned} B\varphi(n) &= a_{n-1}\varphi(n-1) - a_n\varphi(n+1) \\ &= [a_{n-1}\varphi_2(n-1) - a_n\varphi_2(n+1)]h(t) , \end{aligned} \quad (4.39)$$

y tomando el límite obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} B\varphi(n) &= \frac{1}{2}(z^{-n+1} - z^{-n-1})h(t) \\ &= \frac{1}{2}(z - z^{-1})h(t)z^{-n} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por lo que finalmente, comparando (4.39) y (4.41), llegamos a que

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \Phi = \left( \frac{dh(t)}{dt} - \frac{1}{2}(z - z^{-1})h(t) \right) z^{-n} .$$

Por lo que de la condición de frontera,  $\Phi \rightarrow 0$ , se debe cumplir que

$$h(t) = h(0)e^{(z-z^{-1})t/2} . \quad (4.41)$$

Esta condición nos asegura, como mencionamos arriba, la igualdad (4.11)

$$\dot{\varphi}(n) = B\varphi(n) .$$

#### 4.2.3 Límite asintótico de $\Phi$ en $+\infty$

Para obtener el límite  $n \rightarrow +\infty$  de la función  $\Phi$ , procedemos nuevamente empleando las expresiones (4.12,13) y (4.28). Queremos comparar este límite con el de la expresión que se obtuvo mediante variación de parámetros (4.36).

$$\Phi = \frac{d}{dt}[h(t)\varphi_2(n, z)] - B[h(t)\varphi_2(n, z)] ,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi &= \frac{dh(t)}{dt} (c_{11}(z)z^n + c_{12}(z)z^{-n}) + h(t)(\dot{c}_{11}(z)z^n + \dot{c}_{12}(z)z^{-n}) - \\
&\quad \frac{1}{2}h(t)[\dot{c}_{11}(z)(z^{n-1} - z^{n+1}) + c_{12}(z)(z^{-n+1} - z^{-n-1})] \\
&= \frac{dh(t)}{dt} (c_{11}(z)z^n + c_{12}(z)z^{-n}) + h(t) (\dot{c}_{11}(z)z^n + \dot{c}_{12}(z)z^{-n}) + \\
&\quad \frac{1}{2}h(t)(z - z^{-1})(c_{11}(z)z^n - c_{12}z^{-n}),
\end{aligned}$$

pero sabemos, del límite anterior, que (4.41) se cumple, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi &= h(t)(z - z^{-1})c_{11}(z)z^n + h(t) (\dot{c}_{11}(z)z^n + \dot{c}_{12}(z)z^{-n}) \\
&= h(t)[z^n(\dot{c}_{11}(z) + (z - z^{-1})c_{11}(z)) + z^{-n}\dot{c}_{12}(z)]. \quad (4.42)
\end{aligned}$$

### 4.3 Dependencia temporal de los datos de dispersión perturbados

La determinación asintótica de  $\Phi$ , en los límites  $n \rightarrow \pm\infty$ , nos conducirá a las expresiones de la dependencia temporal del espectro  $\lambda$ , también como de los coeficientes de reflexión y transmisión en presencia de la perturbación  $-\epsilon M(\delta)\varphi(n)$ .

Las ecuaciones que gobiernan la dependencia temporal de  $c_{11}(z)$  y  $c_{12}(z)$  se pueden obtener igualando los coeficientes  $z^{\pm n}$  de las ecuaciones (4.36) y (4.42). El resultado es el siguiente

$$\dot{c}_{12}(z) = -\frac{2}{h(t)(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z), \quad (4.43)$$

y del otro exponente,

$$\dot{c}_{11}(z) + (z - z^{-1})c_{11}(z) = \frac{2}{h(t)(z - z^{-1})} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(\delta)\varphi_1(n, z^{-1}). \quad (4.44)$$

Cabe hacer notar que estas ecuaciones (4.43,44), en ausencia de la perturbación, corresponden exactamente con las ecuaciones (3.112,113) del capítulo anterior. Obsérvese que son ecuaciones implícitas, ya que las funciones  $\varphi$  dependen de las variables  $a_n$  y  $b_n$ . De hecho, son ecuaciones que, dados los parámetros de dispersión, necesitan de la determinación de  $\varphi$ , para luego dar el siguiente paso. Son exactas y no hacen más que escribir el problema perturbado en otro sistema de coordenadas en el espacio de funciones.

Sustituimos explícitamente a  $\mathcal{G}(\delta)$  en las expresiones. Para ello usaremos una notación abreviada de las expresiones

$$\dot{c}_{12}(z) = -\frac{2}{h(t)(z - z^{-1})}[\dot{\lambda}\mathcal{S}_1 - ch(t)\mathcal{M}_1], \quad (4.45)$$

donde,

$$\mathcal{S}_1 = h(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_2(n, z)\varphi_1(n, z) \quad (4.46)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= b_0[a_0(\varphi_2(1, z)\varphi_1(0, z) + \varphi_2(0, z)\varphi_1(1, z)) \\ &\quad - a_{-1}(\varphi_2(0, z)\varphi_1(-1, z) + \varphi_2(-1, z)\varphi_1(0, z))] . \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por lo que,

$$\dot{c}_{12}(z) = -\frac{2}{z - z^{-1}} \left( \dot{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_2(n, z)\varphi_1(n, z) - \epsilon\mathcal{M}_1 \right) . \quad (4.48)$$

De igual forma para el otro dato de dispersión

$$\dot{c}_{11}(z) + (z - z^{-1})c_{11}(z) = \frac{2}{h(t)(z - z^{-1})}[\dot{\lambda}\mathcal{S}_2 - h(t)\mathcal{M}_2], \quad (4.49)$$

donde,

$$\mathcal{S}_2 = h(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_2(n, z)\varphi_1(n, z^{-1}) \quad (4.50)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= b_0[a_0(\varphi_2(1, z)\varphi_1(0, z^{-1}) + \varphi_2(0, z)\varphi_1(1, z^{-1})) \\ &\quad - a_{-1}(\varphi_2(0, z)\varphi_1(-1, z^{-1}) + \varphi_2(-1, z)\varphi_1(0, z^{-1}))] . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Por lo que finalmente,

$$\dot{c}_{11}(z) + (z - z^{-1})c_{11}(z) = \frac{2}{z - z^{-1}} \left( \dot{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_2(n, z) \varphi_1(n, z^{-1}) - \epsilon \mathcal{M}_2 \right). \quad (4.52)$$

#### *Espectro continuo perturbado*

En el continuo tenemos que considerar que  $d\lambda/dt = 0$ . Es decir, que el espectro no cambia, por lo que las expresiones se reducen a las siguientes:

$$\dot{c}_{12}(z) = \frac{2}{z - z^{-1}} \epsilon \mathcal{M}_1. \quad (4.53)$$

$$\dot{c}_{11}(z) + (z - z^{-1})c_{11}(z) = -\frac{2}{z - z^{-1}} \epsilon \mathcal{M}_2. \quad (4.54)$$

$$\frac{dR(z)}{dt} + (z - z^{-1})R(z) = -\frac{4}{(z - z^{-1})c_{12}^2(z)} \epsilon \mathcal{M}_3. \quad (4.55)$$

con

$$\mathcal{M}_3 = b_0 \varphi_2(0, z) [a_0 \varphi_2(1, z) - a_{-1} \varphi_2(-1, z)].$$

## 4.4 Evolución temporal del espectro discreto

En el caso no perturbado sabemos que el espectro es independiente del tiempo. En tal situación  $\dot{\lambda} = 0$ . Además, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  en la expresión (4.48) recuperamos la evolución temporal del dato de dispersión

$$c_{12}(z, t) = c_{12}(z, 0),$$

que corresponde a la ecuación (3.112) del capítulo 3. Por otra parte, cuando consideramos al espectro discreto, es decir, a los valores de  $z = z_j$ , también consideramos que

$$c_{12}(z_j, t) = 0.$$

Y, por lo tanto, que entre las funciones propias del problema de dispersión hay una proporcionalidad, expresada por las ecuaciones (3.59) a (3.64).

$$\varphi_2(n, z_j) = c_{11}(z_j) \varphi_1(n, z_j).$$

Incorporaremos en lo que sigue, a la evolución temporal del espectro discreto, la perturbación. En esta situación ya *no* se cumple que  $\dot{\lambda} = 0$ , pero sí que  $c_{12}(z_j, t) = 0$ . Lo que necesariamente se debe expresar ahora por

$$c_{12}(z_j(t), t) = 0. \quad (4.56)$$

La derivada total respecto de  $t$  de (4.56) debe ser cero

$$\frac{dc_{12}(z_j, t)}{dt} = 0.$$

Pero precisamente esta es la expresión que calculamos en (4.48). Lo que implica, de la ecuación (4.48), que

$$\frac{d\lambda(z_j)}{dt} = \epsilon \frac{\mathcal{M}_1(z_j)}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(n, z_j) \varphi_1(n, z_j)}. \quad (4.57)$$

Donde  $\mathcal{M}_1$  resulta ser igual a

$$\mathcal{M}_1(z_j) = 2c_{11}(z_j) b_0 \varphi_1(0, z_j) [a_0 \varphi_1(1, z_j) - a_{-1} \varphi_1(-1, z_j)].$$

De (3.64) y (3.77,78), obtenemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_2(n, z_j) \varphi_1(n, z_j) = \frac{c_{11}(z_j)}{c_j^2}.$$

Por otra parte,

$$\lambda(z_j) = \frac{1}{2}(z_j + z_j^{-1}),$$

de donde se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_j)}{dt} &= \frac{1}{2} \left( \dot{z}_j - \frac{\dot{z}_j}{z_j^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (z_j - z_j^{-1}) \frac{\dot{z}_j}{z_j}. \end{aligned}$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$\dot{z}_j(t) = \epsilon \frac{4z_j}{z_j - z_j^{-1}} c_j^2(t) b_0 \varphi_1(0, z_j) [a_0 \varphi_1(1, z_j) - a_{-1} \varphi_1(-1, z_j)]. \quad (4.58)$$

## 4.5 Modificación del solitón a su paso por la impureza

En la sección anterior determinamos la evolución temporal del espectro discreto en presencia de una perturbación. El resultado de la ecuación (4.57) nos dice que la derivada temporal del espectro  $\lambda$  es distinta de cero, como era de esperarse. Con el método perturbativo que empleamos pudimos mostrar que esta derivada es de orden  $\epsilon$  exactamente. El parámetro  $\epsilon$  nos da una medida del defecto de la masa de la impureza ya que

$$m_0 = \frac{1}{1 + \epsilon} . \quad (4.59)$$

Si  $\epsilon > 0$ ,  $m_0 < 1$  y si  $\epsilon < 0$ ,  $m_0 > 1$ . La masa de las partículas de la cadena es igual a 1.

Para  $\epsilon = 0$ , la ecuación (4.58) nos da un valor propio discreto constante que corresponde a un solitón, cuya expresión analítica es

$$e^{-(Q_n - Q_{n-1})} - 1 = \beta^2 \operatorname{sech}^2[\kappa n - \beta t - \delta_0] , \quad (4.60)$$

donde  $\beta^2$  es la amplitud de la onda. El parámetro  $\beta$  está definido como

$$\beta = \frac{1}{2}(z_1^{-1} - z_1) . \quad (4.61)$$

La posición inicial  $n_0$  del solitón está definida a partir de la ecuación

$$\delta_0 = \ln(1/z_1)n_0 = \ln \left[ \frac{c_1(0)}{\sqrt{1 - z_1^2}} \right] , \quad (4.62)$$

donde  $c_1(0)$  es el coeficiente de normalización de las funciones de onda de los estados ligados, ecuación (3.128).

Inicialmente colocaremos al solitón en la posición  $n_0$  a la izquierda de la impureza. La impureza está colocada en la posición 0. Mientras que  $\beta > 0$ , el solitón se desplazará hacia la derecha conforme el tiempo transcurra. La velocidad del solitón también está definida por medio del parámetro  $\beta$ ,

$$v(\kappa) = h \frac{\beta}{\kappa} , \quad (4.63)$$

y  $\kappa > 0$  se define por

$$e^{-\kappa} = z_1 . \quad (4.64)$$

La distancia promedio  $h$  entre las partículas la tomamos igual a 1. Por otra parte, en el primer capítulo, sección 1.3, mostramos que para  $\kappa \ll 1$ , la velocidad del solitón es aproximadamente

$$v(\kappa) \approx 1 + \frac{\kappa^2}{6}, \quad (4.65)$$

es decir, mayor que la velocidad con que se propagan las ondas en la correspondiente cadena lineal. Por lo que con estas estimaciones tomamos en los cálculos siguientes velocidades mayores que 1.

La ecuación (4.58) nos sugiere que cuando  $\epsilon \neq 0$ ; es decir, que  $z_1$  ya no es constante, entonces se verá modificado el parámetro  $\beta$  y, por lo tanto, la amplitud y velocidad del solitón cuando éste se encuentre con la impureza. Por esta razón cuando el solitón colisiona con la impureza debemos poder estimar los cambios en sus parámetros a partir de esta ecuación, pero notemos que la solución al problema de evolución del solitón en la cadena con impureza requiere mostrar a  $a_n(t)$  y  $b_n(t)$  explícitamente.

Para obtener la solución  $a_n(t)$  y  $b_n(t)$  debemos resolver la ecuación integral discreta que nos plantea el MDI, pero necesitamos conocer la evolución en el tiempo de los datos de dispersión, lo cual es relativamente sencillo sólo si no hay perturbación. En general, la perturbación no se anula y los datos de dispersión evolucionan de manera complicada, dependiendo de las funciones propias del problema espectral, ecuación (4.58). Pero estas funciones están dadas como funciones de  $a_n(t)$  y  $b_n(t)$ , que son las que se deben determinar. Así, el procedimiento de solución en el caso perturbado cae en un círculo. Aquí empleamos la aproximación de que las funciones propias que aparecen en las ecuaciones de evolución perturbadas de los datos de dispersión son reemplazadas por aquellas en las que no hay perturbación.

Por lo anterior, escribimos la ecuación (4.58) en términos de las funciones de onda  $\zeta(n, z_1)$  de los estados ligados, ecuación (3.142), como

$$\dot{z}_j(t) = 2 \epsilon \frac{z_1}{z_1 - z_1^{-1}} b_0(t) \zeta(0, z_1, t) [a_0(t)\zeta(1, z_1, t) - a_{-1}(t)\zeta(-1, z_1, t)], \quad (4.66)$$

donde, por las ecuaciones (3.22), (3.23), (3.100), (3.104) y (3.139), tenemos que

$$\zeta(0, z_1, t) = c_1(0)e^{-\delta_0} K(0, 0) \frac{z_1^{-1}}{2} \operatorname{sech}(\kappa - \beta t + \delta_0),$$

$$\begin{aligned}\zeta(1, z_1, t) &= c_1(0)e^{-\delta_0}K(1, 1)\frac{z_1^{-1}}{2}\operatorname{sech}(2\kappa - \beta t + \delta_0), \\ \zeta(-1, z_1, t) &= c_1(0)e^{-\delta_0}K(-1, -1)\frac{z_1^{-1}}{2}\operatorname{sech}(-\beta t + \delta_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{-1}(t) &= \frac{\sqrt{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_1 z_1^{-4})}}{2(1 + \alpha_1 z_1^{-2})}, \\ a_0(t) &= \frac{\sqrt{(1 + \alpha_1 z_1^2)(1 + \alpha_1 z_1^{-2})}}{2(1 + \alpha_1)}, \\ b_0(t) &= \frac{c_1^2(t)}{2} \left[ \frac{z_1^{-1}}{1 + \alpha_1} - \frac{z_1}{1 + \alpha_1 z_1^2} \right],\end{aligned}$$

$$K(0, 0) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 z_1^2}{1 + \alpha_1}},$$

$$K(1, 1) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 z_1^4}{1 + \alpha_1 z_1^2}},$$

$$K(-1, -1) = \sqrt{\frac{1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1 z_1^{-2}}}$$

y

$$\alpha_1 = \frac{c_1^2(0)e^{2\beta t}}{1 - z_1^2}.$$

Observemos que

$$\dot{z}_1(t) = \epsilon f(z_1(t), t), \quad (4.67)$$

donde

$$f(z_1(t), t) = 2 \frac{z_1}{z_1 - z_1^{-1}} b_0(t) \zeta(0, z_1, t) [a_0(t)\zeta(1, z_1, t) - a_{-1}(t)\zeta(-1, z_1, t)]. \quad (4.68)$$

es una ecuación diferencial de primer orden no lineal y es un sistema no autónomo. En vez de intentarla resolver directamente vamos a llevar a cabo un análisis perturbativo, en donde supondremos que  $z_1$  varía muy lentamente en el tiempo comparada con la exponencial  $e^{\beta t}$ . Aproximamos a  $z_1$  por una serie de potencias en  $\epsilon$

$$z_1 = z_1^{(0)} + \epsilon z_1^{(1)} + \epsilon^2 z_1^{(2)} + \dots \quad (4.69)$$

Si sustituimos la serie de potencias en la ecuación (4.67) obtenemos que a orden cero

$$\dot{z}_1^{(0)} = 0 \quad \text{o bien} \quad z_1^{(0)} = \text{cte} , \quad (4.70)$$

a primer orden en  $\epsilon$

$$\dot{z}_1^{(1)} = f(z_1^{(0)}, t) \quad (4.71)$$

o

$$z_1^{(1)}(t) = \int_0^t f(z_1^{(0)}, \tau) d\tau . \quad (4.72)$$

Los ordenes más altos los vamos a considerar despreciables. Definimos el cociente

$$\Lambda = \frac{\epsilon}{\beta^2} , \quad (4.73)$$

como un parámetro efectivo de la perturbación. Con este parámetro estamos comparando el tamaño del defecto de masa,  $\epsilon$ , con la amplitud del solitón,  $\beta^2$ . Vamos a considerar una perturbación efectiva pequeña,  $\Lambda \ll 1$ . Supondremos entonces que el tamaño del defecto de masa es siempre mucho menor que de la amplitud de la onda.

En las figuras (4.2) a (4.8) se muestra la gráfica de la ecuación (4.71) para diferentes valores de  $z_1^{(0)}$ . Dada la definición del parámetro  $\beta$ , ecuación (4.61), podemos ver que

$$\dot{\beta} = -\dot{z}_1^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{z_1^{(0)2}} \right) . \quad (4.74)$$

Si sustituimos las derivadas por incrementos finitos, obtenemos que

$$\Delta\beta = -\Delta z_1^{(0)} \left( 1 + \frac{1}{z_1^{(0)2}} \right) , \quad (4.75)$$

lo que nos indica que los incrementos en  $z_1^{(1)}$ ,  $\Delta z_1^{(1)}$ , implican decrementos en  $\beta$  y viceversa. En las gráficas los incrementos en  $z_1^{(1)}$  están dados directamente por el área bajo las curvas, que, como podemos apreciar, pueden ser tanto positivas como negativas.

En la figura (4.2) se puede ver, *grosso modo*, que cuando la perturbación  $\epsilon < 0$ , entonces  $\Delta z_1^{(1)} > 0$ . Esto significa que el efecto neto que tiene el solitón cuando atraviesa una impureza de masa mayor (pesada) que la del resto de la cadena es que disminuye su velocidad. En cambio, cuando  $\epsilon > 0$  (parte inferior de la figura) el solitón aumenta su rapidez y por lo tanto su amplitud. Los cambios en el parámetro  $\beta$  son del orden de las escalas que estamos considerando, así, en ambos casos  $\Delta z_1^{(1)} \approx 5 \times 10^{-3}$ , lo que implica que  $\Delta\beta \approx \pm 0.1$ , o bien de  $\pm 10\%$ .

Es importante notar que después de que el solitón interacciona con la impureza, nuevamente  $z_1$  tiende a ser constante, lo que implica necesariamente que el solitón recupera su forma, aunque modificado en sus parámetros, pero no se destruye. El resto de las figuras nos permiten contrastar los cambios que modifican los parámetros del solitón cuando este es más lento o más rápido, también cuando la impureza es ligera o pesada. El efecto es básicamente el mismo. El solitón se frena cuando a su paso se encuentra una impureza pesada, y se acelera cuando la impureza es ligera.

Supongamos que estamos en presencia de una impureza ligera, como en la figura (4.2) inferior. De algún modo, cuando llega a la impureza el solitón se deforma alargándose un poco, baja la velocidad y su altura; pasa la impureza y se encuentra una masa mayor que deberá mover, el solitón se comprime y eleva su altura en mayor proporción de lo que la disminuyó cuando se encontró con la impureza, por lo que sale con un poco más de velocidad que la inicial. Lo contrario debe ocurrir cuando tenemos una impureza pesada. El solitón llega y se comprime y eleva un poco, pasa la impureza y se alarga y disminuye su amplitud en mayor proporción que su compresión y elevación iniciales, deja la impureza con menor velocidad y menor amplitud. En ambos casos la onda no se destruye y prosigue su camino, como podíamos esperar de los solitones cuando colisionan con otros.

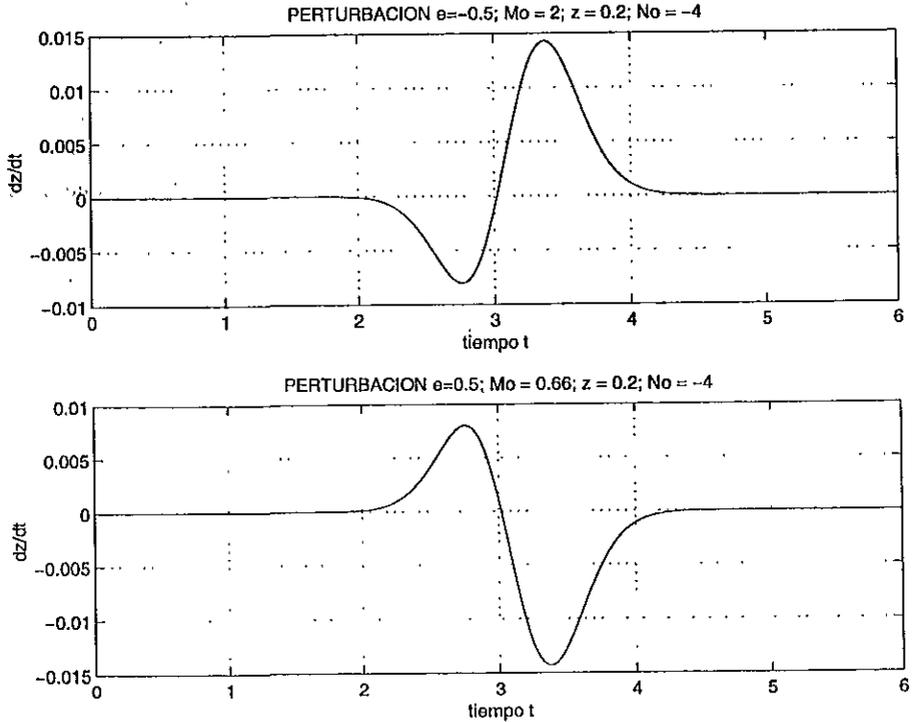


Figura 4.2.  $\Lambda \sim 1/10$ . El área bajo la curva es el incremento neto  $\Delta z_1^{(1)}$ , que significa un cambio en el parámetro  $\beta^2$  y, por tanto, en la amplitud y velocidad del solitón. El parámetro  $\epsilon > 0$  significa que la masa de la impureza es menor que la unidad, y viceversa,  $\epsilon < 0$  significa que la masa es mayor. La cadena está compuesta por partículas de masa igual a 1 y están espaciadas por una distancia  $h$  que también hemos tomado igual a 1. En la figura se presenta dos casos, el de arriba muestra un  $\Delta z_1^{(1)} > 0$ , lo que implica una disminución de la velocidad del solitón, el de abajo da un  $\Delta z_1^{(1)} < 0$  y por lo tanto un aumento en la velocidad del solitón. El solitón tiene una amplitud original de  $\beta^2 \approx 2.40$ , según sea el signo de  $\epsilon$ , aumenta o disminuye la amplitud en un 10%

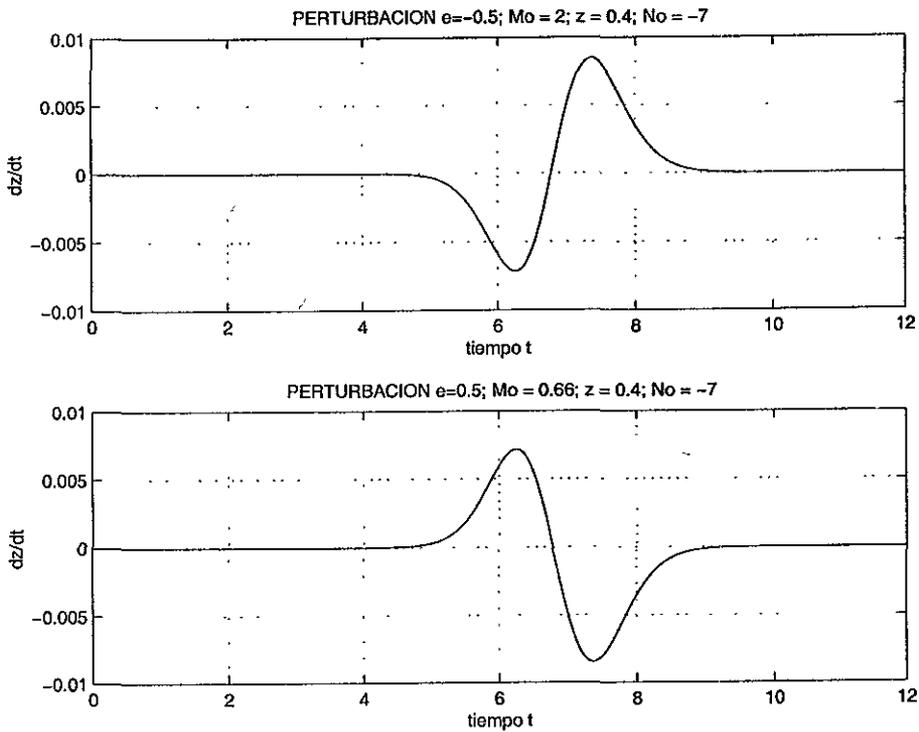


Figura 4.3. En esta figura como en la anterior, la masa de la impureza  $m_0$  contrasta con las demás de la cadena, pero se puede apreciar a primera vista que el área bajo las curvas casi es cero y por tanto  $\Delta z_1^{(1)} \approx 0$ , lo que implica que el solitón, que es relativamente lento ( $\beta^2 \approx 1.1$ ), no siente la presencia de la impureza a grandes distancias.  $\Lambda \approx 0.4$

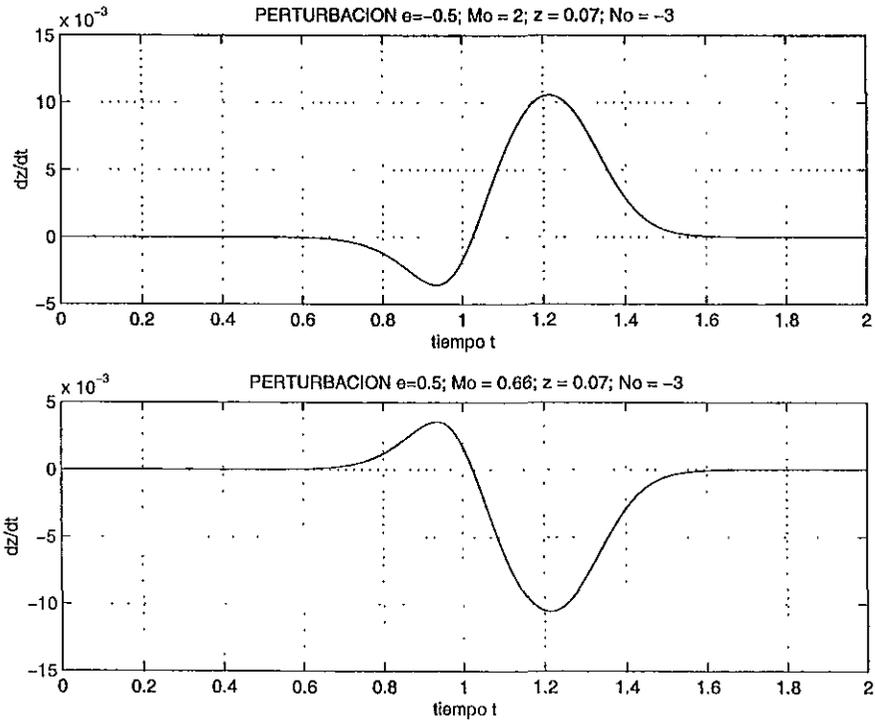


Figura 4.4. Para las mismas masas  $m_0$  de la impureza de la figura anterior hacemos interactuar a un solitón más rápido. El contraste es inmediato. Se pueden apreciar cambios más significativos en  $\Delta z_1^{(1)}$ . Inicialmente el solitón tenía  $\beta^2 \approx 50.5$ , estimando las áreas de las curvas podemos decir que  $|\Delta\beta| \approx 0.30$ , o bien, del 30%.  $\Delta \approx 0.01$

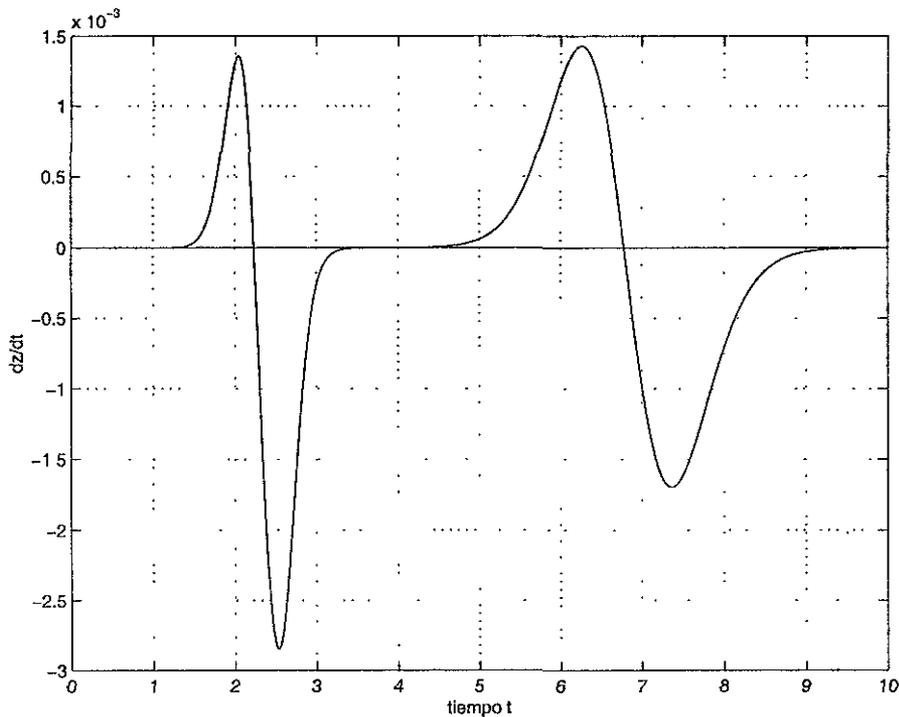


Figura 4.5. En esta figura podemos ver sobrepuestas las gráficas de  $z_1^{(0)}$  de dos solitones que viajan, no al mismo tiempo, en una cadena donde la impureza tiene una masa  $m_0 = 0.9$ . En la gráfica la primera curva representa a un solitón con  $z_1^{(0)} = 0.15$ , es un solitón rápido y alto,  $\beta^2 \approx 10.6$ ,  $\Delta \approx 0.01$ . La segunda muestra el efecto sobre un segundo solitón  $z_1^{(0)} = 0.4$  más lento y más aplanado,  $\beta^2 \approx 1.1$ ,  $\Delta \approx 0.1$ . Contrasta el efecto que mayor siente el solitón más rápido que el que siente el solitón más lento al pasar por la misma impureza



## 5

# Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado las ecuaciones de movimiento de la cadena Toda infinita. Mostramos que el sistema posee soluciones de ondas-pulso no lineales de perfil permanente (solitones) viajando en la cadena y que es un sistema integrable cuando no tenemos impurezas en la cadena.

Una adecuada transformación de coordenadas permitió obtener la solución de las ecuaciones de movimiento no lineales por medio de un problema espectral lineal  $L\varphi = \lambda\varphi$  asociado al sistema, donde  $L = L\{a_n(t), b_n(t)\}$ . En las nuevas coordenadas  $a_n(t)$  y  $b_n(t)$ , mostramos que el sistema posee una infinidad de cantidades conservadas y que el espectro  $\lambda$  es invariante en el tiempo. El problema espectral es el punto de partida del Método de Dispersión Inversa (MDI). Con el MDI resolvemos el problema de valores iniciales en las nuevas coordenadas mediante una ecuación integral discreta, dada la evolución en el tiempo de los datos del problema de dispersión de las ondas  $\varphi$  de la ecuación espectral.

Cuando introducimos una perturbación como impureza en la cadena, las ecuaciones de evolución de los datos de dispersión ya no son simples y por lo mismo no es fácil resolver la ecuación integral discreta. En este caso el espectro  $\lambda$  ya no es constante y es lo que nos permite estimar los cambios en los parámetros de los solitones cuando viajan en presencia de impurezas. Hemos presentado un estudio aproximado mediante teoría de

perturbaciones que nos da la solución exacta al problema no lineal a primer orden. Esta solución nos permitió obtener estimaciones sobre la variación de los parámetros del solitón cuando éste colisiona con la impureza en su viaje en la cadena.

La presencia de una impureza ligera en la cadena provoca un incremento neto de la velocidad del solitón y la impureza pesada una disminución en la misma. En ambos casos el cambio en la velocidad es relativamente pequeño comparado con la velocidad inicial que lleva el solitón. Por otra parte, el decaimiento en el tiempo de la derivada temporal del espectro discreto  $z_1$  nos dice que  $z_1$  tiende nuevamente a ser constante y por lo tanto el solitón no se destruye, vuelve a recobrar su forma, aumentando o disminuyendo su amplitud según el tamaño de la impureza.

La propagación de ondas en cadenas de osciladores no lineales con impurezas fue estudiada antes que el concepto de solitón fuera establecido. Estos estudios, en el contexto de la conducción del calor en sólido dieléctricos (no metálicos), apuntaron hacia la hipótesis que establece que la no linealidad de la vibración en una red de átomos o moléculas tiende a incrementar el flujo de energía de un lugar a otro. Posteriormente estos resultados se interpretaron en términos de solitones. Las ondas no lineales pierden muy poca energía aún cuando atraviesan por las impurezas. En una cadena armónica desordenada, en donde las impurezas están presentes, casi todas las funciones propias están localizadas por la presencia de estas impurezas y por consiguiente la corriente de calor es limitada.

Por otra parte, debemos recordar que junto con los solitones se pueden propagar pequeñas ondas o rizados (*ripple-like*) a través de medios no lineales en modelos más realistas [Toda, 1979]. Estos rizados generalmente transportan sólo una pequeña parte de la energía en las cadenas, comportándose casi como ondas lineales de amplitud pequeña y están asociadas a grandes números de onda, mientras que los solitones son considerados como ondas cuyos números de onda se anulan.

Otros experimentos [Watanabe, S.] y resultados numéricos han señalado la existencia de vibraciones localizadas, inducidas por la presencia de impurezas ligeras en cadenas uniformes de osciladores no lineales. Cuando la impureza es más ligera que las huéspedes, una pequeña parte de la energía es compartida por el posible modo localizado, un solitón es transmitido y la onda reflejada está compuesta por rizados. Yajima, [Yajima, 1979], mostró que si el defecto de masa es pequeño ( $c = |(m - m_0)/m| \ll 1$ ), al orden  $c$  el solitón

no pierde energía cuando pasa a través de la impureza. La dispersión será al menos de orden  $\epsilon^2$ . Pero estos resultados, dice Toda, dependen de la energía del soliton incidente. Si esta energía revaza un cierto umbral, entonces la oscilación localizada será rápidamente amortiguada.

En nuestro modelo no hemos incluido un análisis que permita estimar directamente los cambios en la energía del sistema: solitón y cadena. Cuando la impureza es ligera, el solitón adquiere más rapidez y amplitud, de algún modo este incremento energético se debe explicar por cambios energéticos en la cadena. Si la impureza es pesada, el solitón debe ceder parte de su energía a la impureza o a la cadena. Pero el mecanismo que explique este fenómeno de cambios en la energía no lo contiene nuestro modelo, nosotros hemos hecho estimaciones en cuanto a la fase del solitón cuando atraviesa la impureza. El solitón se desfasa y aumenta o disminuye su velocidad. Esencialmente hemos considerado pequeña la cantidad  $\Lambda$ , que es un cociente entre el defecto de masa  $\epsilon$  y la amplitud del solitón  $\beta^2$  que es proporcional a su energía que transporta. Esta energía comparada con el defecto de masa es grande pero el cociente  $\Lambda$  no, que es el parámetro perturbativo que hemos considerado importante.



# Bibliografía

1. Alonso, M. y Fin, E.J. **Física Vol. 3, Fundamentos cuánticos y estadísticos**, Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1986.
2. Arnold, V.I. (Ed.) **Dynamical Systems III**, Chapter 4. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 3. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.
3. Bhatnagar, P.L. **Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems**, s. Oxford mathematical monographs, Oxford University Press, Oxford, 1979.
4. Davydov, A.S. **Solitons in molecular systems**, Trans, E.S. Kryachko, 2nd. edit., Mathematics and its applications (Soviet series), 61, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
5. Drazin, P.G. y Johnson, J.S. **Solitons: an Introduction**, Cambridge University Press, 1990.
6. Goldberg. **Difference Equations**. Dover.
7. Eckhaus, W. y Harten, A.V. **The inverse scattering transformation and the theory of solitons - And introduction**, Caps. 2, 3, 4 y 6, s. Mathematical studies, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1981.

8. Jackson, E.A. **Perspectives of nonlinear dynamics - Vol. 2**, Caps. 8 y 9, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
9. Khinchin, A.I. **Mathematical foundations of statistical mechanics**, Dover Publications, New York, 1949.
10. Lamb, G.L. Jr. **Elements of soliton theory**, s. Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1980.
11. Landau, L.D. y Lifschitz, E.M. **Curso de Física Teórica Vol. 1 - Mecánica**, 2a. Ed., Editorial Reverté, Barcelona, 1991.
12. Toda, M. **Theory of Nonlinear Lattices**. 2nd. Edition. Springer Series in Solid-State Sciences 20. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Germany, 1989.
13. Toda, M. **Nonlinear waves and solitons**, s. Mathematics and its applications (Japanese series), KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1989.
14. Matvéev, A.N. **Física molecular**, Editorial Mir Moscú, 1981.
15. Zemansky, M.W. y Dittman, R.H. **Calor y termodinámica**, 6a. ed., McGraw-Hill, Madrid, 1981.
16. K.M. Case, *On the discrete inverse scattering problems. II*, J. Math. Phys., **14**, No. 7 (July 1973), p. 916.
17. K.M. Case, *Theory and applications of special functions*, Academic Press, New York, 1975.
18. K.M. Case y M. Kac, *A discrete version of the inverse scattering problem*, J. Math. Phys, Vol. 14, No. 5, May 1973, p. 594.
19. G. Cruz, *Sistemas integrables y transformaciones isoénergéticas*, Curso de otoño Fenomec, 1997, inédito.
20. J.A. Espínola. Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.
21. H. Flaschka, *On the Toda Lattice. II*, Progress of Theoretical Physics, Vol. 51, No. 3, March 1974, p. 703.

22. A.S. Fokas, *Some remarks on integrability*, Nonlinear Science Today, Vol. 1, No. 3, 1991, p. 6.
23. I.M. Gel'fand y B.M. Levitan, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **15**, 309 (1951). [*On the determination of a differential equation from its spectral function*, Am. Math. Soc. Transl., **1**, 253 (1956).]
24. V.I. Karpman, *Soliton evolution in the presence of perturbation*, Physica Scripta, Vol. 20, pp. 462-478.
25. P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXI, pp. 467-490 (1968).
26. P.S. Lomdahl, *What is a soliton?*, Los Alamos Science, Spring 1984, p. 27.
27. A.A. Minzoni, *Review of some recent results in perturbation theory for solitary waves*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), Vol. 3, 1997.
28. M. Toda, *Vibration of chain with nonlinear interaction*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 22, No. 2, February, 1967, p. 431.
29. M. Toda, *Wave propagation in anharmonic lattices*, Journal of the Physical Society of Japan, Vol. 23, September, 1967, p. 501.
30. M. Toda, *Waves in nonlinear lattice*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, No. 45, 1970, p. 174.
31. M. Toda, *Solitons and heat conduction*, Physica Scripta, Vol. 20, pp. 424-430, 1979.
32. N. Yajima, *Scattering of lattice solitons from a mass impurity*, Physica Scripta, Vol. 20, pp. 431-434, 1979.
33. S. Watanabe, *Experiment on lattice soliton by means of nonlinear electric circuit*.

21

1914

1914

1914

1914

1914