35
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

LA FUNCIÓN ROGERS-CASTRO EN LA DESCRIPCIÓN DE FENÓMENOS DEMOGRÁFICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
A C T U A R I O

P R E S E N T A:
NORMA ANGÉLICA GARCÍA MORALES

DIRECTOR: ALEJANDRO MINA VALDÉS

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL AVPNºMA DE MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

La Función Rogers-Castro en la Descripción de Fenómenos Demográficos

realizado por Norma Angélica García Morales

con número de cuenta 9352942-2 **, pasante de la carrera de**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en D. Alejandro Mina Valdés	
Propietario	Act. Hiram Beltrán Sánchez	
Propietario	Act. José Alberto Nava Aguirre	
Suplente	M. en C. Virginia Abrín Batule	Virginia Abrín Batule
Suplente	Act. María Aurora Valdés Michel	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A. P. María del Pilar Alonso Reyes

A mis padres con todo mi amor

A mis hermanas

*Con profundo agradecimiento a Alejandro Mina
por todo su apoyo y su confianza.*

A Pablo Rosell.

Introducción.

El patrón modelo desarrollado por Rogers y Castro en el Instituto Internacional para el Análisis de Sistemas Aplicados, esta constituido por una función basada en la suma de exponenciales que muestran gráficas oscilatorias, que dependen de los parámetros que lo conforman. Funciones como éstas, pueden ser manipuladas logrando así comportamientos que se asemejan a aquellos encontrados en diversos fenómenos, entre ellos, fenómenos demográficos o relacionados con el cálculo actuarial y que pueden resultar de gran interés para el estudiante de Actuaría.

El propósito del presente trabajo es introducir al lector con dichas funciones y mostrar los diferentes comportamientos y formas que pueden presentar, al modificar los parámetros; agregar o eliminar componentes o cambiar de coeficientes. De este modo, se obtiene una herramienta que puede ser utilizada dentro de los distintas áreas de trabajo del Actuario.

Mediante el conocimiento de la medida en que el valor de cada parámetro afecta a la función, se pueden seleccionar parámetros, dependiendo de la forma que se desee obtener. Del mismo modo, el número de componentes que se agreguen dependerá del número de oscilaciones que se quiera.

A través de los capítulos que conforman este trabajo de tesis, se hablará de la función del patrón modelo Rogers-Castro y se mostrarán, a manera de ejemplo, algunas comparaciones de dichas funciones con otras ya existentes en el campo de la demografía, y que son ya bien conocidas por el estudiante.

Se seleccionaron las series que conforman la Tabla de Vida Económicamente Activa, las funciones Gompertz-Makeham para el cálculo de la serie de las l_x, y el comportamiento de los Saldos Netos Migratorios. Se trata de mostrar que existe una función de Rogers-Castro que se asemeja a cada una de las curvas que se eligieron con este fin.

En el primer capítulo, se busca introducir al lector con el patrón modelo de migración, haciéndo una exposición de lo desarrollado por Rogers y Castro en este sentido.

Posteriormente, nos detenemos a analizar el papel que desempeña cada parámetro dentro de la función, haciendo modificaciones a cada uno de ellos, cuando los demás se mantienen fijos, para después observar el cambio que se produce en el comportamiento de la función.

Ya con el conocimiento de la forma en que se puede manipular esta función, se procede a encontrar distintas funciones, para cada uno de los ejemplos antes mencionados, logrando obtener grandes semejanzas entre las funciones que se tienen y las funciones Rogers-Castro que se proponen.

Se pretende difundir el conocimiento de este tipo de funciones, y motivar al estudiante a realizar estudios futuros a este respecto.

Contenido

Antecedentes Demográficos.

Para la mejor comprensión del presente trabajo, resulta conveniente precisar algunos conceptos demográficos y estadísticos básicos y que se presentan a continuación:

Demografía.

Es la ciencia social que se encarga del estudio de las poblaciones humanas.

La dinámica poblacional se compone de tres elementos, denominados fenómenos demográficos, que son los siguientes:

1) Fecundidad (natalidad)

Es un mecanismo de entrada, ya que a través de éste se incrementa el volumen de la *población en estudio.*

2) *Mortalidad*

Se considera un mecanismo de salida pues disminuye el volumen de la población.

3) Migración

Es un mecanismo tanto de entrada (inmigración) como de salida (emigración).

Los eventos demográficos que caracterizan a los fenómenos demográficos son:

a) *Nacimientos.*

b) Defunciones.

c) Inmigrantes y emigrantes.

Cohorte.

Conjunto de habitantes que comparten el mismo evento origen.

Magnitudes demográficas.

Existen dos clases de magnitudes demográficas:

a) Efectivos o stocks, cuya referencia temporal es un instante.

b) Flujos, referidos a un periodo de tiempo.

Las magnitudes demográficas pueden clasificarse según las cohortes y las edades o duraciones dentro de las que se han producido los flujos o se han medido los stocks.

Fuentes de Datos.

La demografía nos proporciona una descripción estadística de las poblaciones en cuanto a su estado en una fecha determinada (cantidad de personas, distribución por sexo y edad, estado civil, etc.); y a los sucesos demográficos que ocurren en dicha población (nacimientos, defunciones y migraciones). En este sentido, existen dos tipos de fuentes estadísticas para una población:

1) Censos demográficos, que describen el estado demográfico de la población en un momento dado.

2) Estadísticas vitales y encuestas, que cuantifican los sucesos demográficos producidos en una población durante un período dado.

Censo demográfico.

Proporciona la imagen, en un instante dado, de una población en evolución constante bajo la influencia de los fenómenos demográficos que en ella se producen, dándonos la población por sexo, edad, estado civil, nacionalidad, grado de instrucción, ocupación profesional, religión, número de hijos nacidos vivos, etc.

Estadísticas vitales.

Contienen la información derivada del registro de nacimientos, defunciones y matrimonios, acontecidos en una población dada. Estos registros muestran las modificaciones causadas en el volumen y estructura de dicha población.

Encuestas demográficas.

Proporcionan un método para obtener información acerca de los fenómenos demográficos ocurridos a cierto número de individuos o muestra poblacional, ya que dicha información nos permite tener conocimiento respecto de una población más numerosa de la cual se extrajo la muestra.

Tasa.

Es toda relación por cociente entre un flujo y un efectivo o stock.

Generalmente una tasa se calcula, tomando como referencia un año civil. En el numerador se tienen los eventos ocurridos en el año de referencia y en el denominador la población media, y el resultado se multiplica por 1000.

Tasa bruta.

Se refiere al total de eventos ocurridos en un año, de un fenómeno demográfico determinado, es decir, que mide la frecuencia de aparición de un fenómeno demográfico en el conjunto total de la población.

Tasas específicas

Son aquellas que se calculan en subpoblaciones, generalmente distinguidas por pertenecer a un grupo de edad determinado.

Cociente.

En el denominador de toda tasa figura un stock o un flujo que puede ser el inicial, el medio o el final respecto al flujo del numerador. Cuando este stock o flujo es el inicial, se trataría de un cociente.

Dada una cohorte de N personas, expuestas a *un fenómeno demográfico no renovable, si* se denota a e_i como el número de eventos ocurridos a edad cumplida i (entre las edades i y $i+1$) y sean N_i las personas que año no han sufrido el evento en el momento exacto i, la probabilidad que tienen N_i de sufrir el evento no renovable en estudio, entre las edades i e $i+1$ viene dada por el cociente:

$$q_i = e_i/N_i$$

Así los cocientes tienen en general un sentido probabilístico.

Relación entre tasas y cocientes.

Para cualquier fenómeno demográfico, lo que en principio se calcula son *las tasas específicas* por edad. Muchas veces se desea pasar de dichas tasas a cocientes, es decir, de frecuencias de aparición de un fenómeno a probabilidades de ocurrencia del mismo.

La tasa específica entre la edad i e $i+1$, vendría dada por:

$$t_i = e_i/((N_i + N_i + 1)/2)$$

y el cociente por:

$$q_i = e_i/N_i$$

Si suponemos que los eventos del fenómeno no renovable se distribuyen uniformemente en el tiempo, entonces la población que a edad cumplida i no ha sufrido el fenómeno en estudio, está dado por:

$$N_{i+0.5} = N_i - (e_i/2)$$

Bajo la hipótesis de uniformidad se tendrá para la tasa que:

$$t_i = e_i/(N_i - (e_i/2))$$

De aquí se puede obtener las siguientes relaciones entre tasas y cocientes:

$$t_i = q_i/(1 - (q_i/2))$$

y

$$q_i = t_i/(1 + (t_i/2))$$

Tabla.

Cuadro estadístico que resume el impacto de algún fenómeno demográfico, que afecte a una población determinada en un año o período de años.

Las tablas estadísticas que describen fenómenos demográficos están constituídas por tres series básicas:

1) La serie de los cocientes o probabilidades ${}_nq_x$ de experimentar el evento no renovable entre las edades i e $i+n$ (en general $n=5$).

2) La serie de los "sobrevivientes" N_i

3)La serie de los eventos e_i, ocurridos a edad cumplida i, es decir, entre las edades i e $i+1$.

La tabla abreviada de mortalidad es el cuadro estadístico que resume el impacto de dicho fenómeno demográfico, tenido por una población determinada, en un año o período de años.

Se le llama abreviada debido a que la estructura por edad de la población se agrupa en quinquenios a partir del grupo de 5 a 9 años. Las excepciónes son: el primer grupo, donde se toma un grupo de 0 años y otro de 1 a 4 y el último grupo que está constituido por las edades 85 y más.

La información necesaria para construir una tabla abreviada de mortalidad se extrae de los Censos Nacionales de Población y Vivienda y de las Estadísticas Vitales.

Capítulo 1
Metodología

A diferencia de otros componentes demográficos como la mortalidad y la fecundidad, los cuales poseen características muy generales y limitaciones naturales que hacen posible su medición y parametrización, la migración es un fenómeno cuyo estudio resulta difícil, en razón de sus peculiaridades.

La migración se define como el fenómeno demográfico que se caracteriza por el desplazamiento de un individuo de un lugar a otro. Se considera migrante aquel individuo que al final de un intervalo de tiempo dado ya no habita la misma comunidad de residencia que al inicio del mismo.

En estudios recientes Andrei Rogers y Luis J. Castro [1] desarrollaron una función que refleja las regularidades de los perfiles de migración en todo el mundo, proporcionando un modelo de migración hipotético que puede utilizarse para realizar análisis de migración en países que no cuentan con suficiente información. Dicha función se conoce como Patrón Modelo de Migración.

La Tasa Bruta de Migración es una medida comúnmente utilizada y se define como el cociente del número de migrantes entre el total de la población.

La Tasa Bruta de Migraproducción se define como:

$$\mathbf{TBM} = \sum_{i=1}^{\omega} M_i$$

donde M_i es la tasa específica de migración para la edad i.

1.1 Patrón Modelo de Migración Rogers-Castro (R–C)

La curva que describe las tasas de migración según la edad muestra las siguientes características:

Es una curva decreciente en las primeras edades hasta llegar al mínimo (x_l) en la adolescencia, donde comienza un ascenso pronunciado y alcanza un máximo (x_h) aproximadamente a los 20 años y a partir del cual, comienza una disminución parecida a la de los primeros años, ya que los hijos reflejan tasas de migración similares a las de sus padres. Sigue su descenso hasta los 60 años donde en ocasiones vuelve a incrementarse ligeramente hasta alcanzar un máximo relativo conocido como máximo de retiro (x_r).

El patrón modelo **R–C** se define como la suma de cuatro componentes:

- Componente Prelaboral.

Dicha curva abarca las edades que anteceden a la actividad económica; es decir, abarca de los 0 hasta aproximadamente los 15 años de edad. Se trata de una exponencial negativa sencilla, cuya tasa de descenso es α_1.

[1] Revista Demografía y Economía XVI: 3, 1982

- Componente de la actividad económica.

  Consiste en una curva de las edades de actividad laboral, en forma de campana con media μ_2 y sesgada hacia la izquierda. Sus tasas de ascenso y descenso son respectivamente λ_2 y α_2.

- Componente Poslaboral.

  Consiste también en una curva en forma de campana pero menos pronunciada, colocada en μ_3 y para las edades que preceden a la actividad económica. En este caso, encontramos una tasa de ascenso de λ_3 y de descènso α_3.

- Componente Constante.

  Como su nombre lo indica, es una curva constante que muestra el aumento de la calidad de adecuación de la expresión matemática del programa. (Gráfica 1)

A continuación presentamos la función M(x) que describe al patrón **R–C** y la definición de los parámetros que la conforman.

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)-e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}} + c$$

con $x = 0, 1, 2, \ldots, z$

donde:

α_1 = tasa de descenso de la curva de las edades prelaborales;

λ_2 = tasa de ascenso de la curva de edades económicamente activas;

α_2 = tasa de descenso de la curva laboral;

λ_3 = tasa de ascenso de la curva poslaboral;

α_3 = tasa de descenso de las edades poslaborales;

c = constante;

x_l = mínimo de la curva;

x_m = máximo;

x_r = máximo de retiro;

X = curva de la actividad económica(x_h - x_l);

A = curva de parentesco*;

B = salto (M(x_h) - M(x_l)).

**Se define como la curva que se obtiene al relacionar la migración de los padres con la de los hijos, es decir, son todos los Ax que corresponden a la diferencia en años para cada x desde 0 hasta x_l y aquellos puntos con tasa de migración equivalente en la parte decreciente del componente de la actividad económica.*

Se considera como "modelo reducido" aquel que no cuenta con componente poslaboral; o sea, aquel en el cual no existe máximo de retiro.

Ahora bien, siete de los once parámetros que componen el patrón nos definen el *perfil* (α_1, μ_2, α_2, λ_2, μ_3, α_3 y λ_3), y cuatro de ellos definen el *nivel* (a_1, a_2, a_3 y c). Todo cambio que ocurra en la **TBM** alterará el nivel, mas no el perfil.

Las medidas del patrón **R–C** pueden clasificarse de la siguiente manera:

$$\text{Medidas}\begin{cases} \text{Básicas} & \begin{cases} \text{alturas} & a_1, a_2, a_3, c \\ \text{ubicación} & \mu_2, \mu_3 \\ \text{curvas} & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda_2, \lambda_3 \\ \text{cocientes} & \delta_{1\,c} = \dfrac{a_1}{c}, \delta_{1\,2} = \dfrac{a_1}{a_2}, \delta_{3\,2} = \dfrac{a_3}{a_2}, \\ & \beta_{1\,2} = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}, \sigma_2 = \dfrac{\lambda_2}{\alpha_2}, \sigma_3 = \dfrac{\lambda_3}{\alpha_3} \end{cases} \\ \text{Derivadas} & \begin{cases} \text{áreas} & \mathbf{TBM}, \%(1-14), \%(15-64), \%(65+) \\ \text{ubicación} & \bar{n}\ \text{(edad media)}, x_l, x_h, x_r \\ \text{distancias} & X, A, B \end{cases} \end{cases}$$

Asimismo, de los cocientes puede extraerse información relevante acerca del comportamiento del patrón.

Por ejemplo, $\delta_{1\,2} = a_1/a_2$, conocido como "índice de dependencia infantil", muestra la importancia relativa de la migración de los niños y el nivel en el cual éstos migran junto con sus padres. Generalmente, este indicador se aproxima al valor de 1/3; cuando $\delta_{1\,2} \leq 1/5$, se dice que se tiene una curva con *dominación de las edades activas*; cuando $\delta_{1\,2} > 2/5$, se considera que existe *dependencia infantil.*

Por otro lado, $\beta_{1\,2} = \alpha_1/\alpha_2$ tomará valores cercanos a la unidad, indicando así, el grado en que las tasas de migración de los hijos reflejan las de sus padres (dependiendo de qué tanto se aproxima $\beta_{1\,2}$ a 1).

$\sigma_2 = \lambda_2/\alpha_2$ indica la *asimetría laboral*, es decir, el grado de asimetría del componente laboral. Sus valores se encuentran alrededor del 4. A los patrones en los que σ_2 es menor que dos, se les conoce como *patrones de simetría de las edades activas*. En dichos patrones la curva laboral mostrará una forma relativamente simétrica. Los patrones cuyo índice de asimetría sea mayor o igual que cinco, se llaman *patrones de asimetría*.

Al dividir los patrones modelo de migración **R–C** respecto de los valores de cada uno de los diferentes parámetros, surgen diversas *familias de patrones*.

Podemos, por ejemplo, dividir los patrones en dos grupos: aquellos con máximo de retiro y aquellos que carecen del componente poslaboral. O bien, podemos basarnos en el nivel, i.e. el valor de los parámetros a_1, a_2, a_3 y c; o en términos de cualquier otra de las medidas básicas como lo son el punto máximo (x_h) y el mínimo (x_l), u otras de las medidas que generarían otra variante de dichas *familias de patrones*.

Un *análisis de sensibilidad* es útil para mostrar la forma en que se manifiestan cambios en los parámetros del patrón modelo. Tomando la curva del componente de la actividad, se tiene:

$$f(x) = a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}}$$

Para el caso general, donde $\alpha_2 \neq \lambda_2$, se obtiene [2]:

$$x_h = \mu_2 - (1/\lambda_2)ln(\alpha_2/\lambda_2)$$

y

$$y_h = a_2(\alpha_2/\lambda_2)^(\alpha_2/\lambda_2)e^{-(\alpha_2/\lambda_2)}$$

Si $\lambda_2 > \alpha_2$ entonces tendremos que $x_h > \mu_2$. Si $\lambda_2 = \alpha_2$ entonces, $x_h = \mu_2$ y la función alcanzará su máximo en:

$$y_h = a_2/e$$

Tenemos que x_h es una función que depende de los parámetros α_2 y λ_2 (ya que μ_2 sólo afecta como una sustitución). Fijando el valor de λ_2; dado un incremento en α_2, se tiene una disminución en el valor de x_h. De igual modo se puede fijar el valor de α_2, obteniendo que *incrementos en* λ_2 *llevan a incrementos en* x_h.

Para el caso de y_h, vista como función de α_2 y λ_2 , se obtiene una curva de y_h con forma de U. Si se fija λ_2, tenemos que al aumentar el valor de α_2 se observa un incremento en la curva que alcanza su mínimo en $\alpha_2 = \lambda_2$. Para incrementos de λ_2, la U se amplía.

Tomando únicamente el componente de la actividad económica, se puede valorar la influencia de α_2 y λ_2 a través de la tasa de cambio proporcional de la función $f(x)$:

$$f'(x)/f(x) = \alpha_2 + \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}$$

En este caso, se tomaron valores para los parámetros α_2, λ_2 y μ_2, con el fin de observar la forma en que se relacionan las tasas reales de ascenso y descenso a λ_2 y α_2.

[2] Diferenciando $f(x)$ e igualando a cero se derivan ecuaciones analíticas para ambas variables

Impacto de λ_2 y α_2 en las tasas reales de ascenso y descenso del componente de la actividad económica: $\lambda_2 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.1$ y $\mu_2 = 20$[3]

Edad x	Tasas reales de ascenso y descenso $\lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}$	$-\alpha_2 + \lambda_2 e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}$
0	1192	1192
5	161	161
10	22	22
15	3	3
16	1.98	1.88
17	1.33	1.23
18	0.89	0.79
19	0.60	0.50
20	0.40	0.30
21	0.27	0.17
22	0.18	0.08
23	0.12	0.02
24	0.08	−0.02
25	0.05	−0.05
30	0.007	−0.093
35	0.001	−0.100

Se observa que en los primeros grupos de edad, hasta los 15 años, el impacto de α_2 puede ignorarse, igual que el de λ_2 en los últimos grupos (30 y 35).

Al introducir el componente prelaboral se tiene que y_h aumenta ligeramente y x_h se mueve a una edad menor. El término constante afecta exclusivamente y_h. La tasa de migración a la edad x_h se aproximará a:

$$M(x_h) = a_1 e^{-\alpha_1 x_h} + Y_h + c$$

Para la variable de parentesco A, que es aquella que relaciona las tasas de migración de las edades prelaborales con las que corresponden a las edades activas, se supuso $\alpha_1 = \alpha_2$, obteniendo para las edades prelaborales y para las activas respectivamente una aproximación mediante las funciones:

$$X_1 = a_1 e^{-\alpha_2(x_1)}$$

y

$$X_2 = a_2 e^{-\alpha_2(x_2-\mu_2)}$$

[3] Fuente: Rogers/Castro: Patrones Modelo De Migración. Demografía y Economía XVI:3,1982

El cambio de parentesco sería entonces igual a la diferencia entre estas dos funciones:

$$A = X_2 - X_1 = \mu_2 + (1/\alpha_2)ln(1/\delta_{12})$$

Al aumentar los valores de μ_2, el cambio de parentesco crece, y disminuye al aumentar los valores de α_2 y δ_{12}.

Finalmente, puede obtenerse una aproximación de los patrones modelo, para aquellas poblaciones que no cuenten con información estadística suficiente, a través de patrones hipotéticos conocidos como *patrones modelo de migración estimados.*

A este respecto, Rogers y Castro señalan:

"Un patrón modelo estimado es la colección de tasas específicas por edad que se deriva de patrones observados en varias poblaciones, diferentes a la de estudio y algunos datos incompletos de ésta."[4]

Esto se justifica ya que los perfiles por edad de mortalidad, fecundidad y migración, varían dentro de límites predeterminados para la mayoría de las poblaciones humanas.

Tomaron los tres enfoques más populares de estimación; es decir: el enfoque de regresión de las tablas de mortalidad de Coale-Demeny [5]; el sistema logito de Brass [6] y la graduación doble exponencial de Coale McNeil y Trussell[7] y los mezclaron para luego definir dos perspectivas alternas para calcular el patrón modelo de migración cuando los datos con que se cuenta son defectuosos o inadecuados. Ambas perspectivas requieren información limitada.

Perspectiva Correlacional: sistema de migración de regresión

Asocia la información con los parámetros del patrón modelo por medio de ecuaciones de regresión. Supongamos, por ejemplo, que contamos con dos tasas de migracion, M(0-4) y M(20-24); entonces se pueden utilizar ecuaciones de la forma:

$$Q_i = b_0[M(0-4)]^{b_1}[M(20-24)]^{b_2}$$

para calcular los parámetros Q_i que definen al patrón.

Las covariaciones de los parámetros muestran ciertas regularidades con base en las cuales puede construirse un patrón modelo. Teniendo por ejemplo, valores para δ_{12}, x_l y x_h, se pueden derivar μ_2, λ_2, σ_2 y β_{12}. Como $\sigma_2 = \lambda_2/\alpha_2$, podemos estimar α_2 y con ello calcular a_2. A partir de δ_{12}, con valor de a_2 puede encontarse el de a_1 y del mismo modo con la ecuación $\beta_{12} = \alpha_1/\alpha_2$ se obtiene α_1. Calculando δ_{1c} por la regresión a δ_{12} y a_1 y a_2 se obtiene un valor para c de $c = a_1/\delta_{1c}$ y se gradúa de modo que **TBM**= 1.

La construcción del patrón comienza con el componente de la actividad y después se le agrega la proporción de la curva prelaboral. δ_{12} refleja los pesos relativos de estos dos

4 op. cit. Revista Demografía XVI, pag. 309.

5 Coale y Demeny, 1966

6 Brass, 1971

7 Coale, 1977; Coale y McNeil, 1972; y Coale y Trussell,1974.

componentes. El comportamiento de la curva de edades poslaborales se trata de manera exógena.

Perspectiva Relacional: sistema de migración de logito

El "sistema logito" de William Brass es utilizado para calcular mortalidad partiendo de información inadecuada.[8] Se basa en el supuesto de que distintos patrones pueden relacionarse entre sí por medio de una transformación lineal de los logaritmos de sus $l(x)$. Es decir que para edades x = 1,2,...,w, las $l(x)$ observadas se asocian con las $l_s(x)$ (estándares).

Donde:

$$Y(x) = (1/2)ln[(1 - l(x))/l(x)]$$

siendo, $0 < Y(x) < 1$ o

$$Y(x) = \gamma + \rho Y_s(x)$$

Y la función inversa:

$$l(x) = 1/(1 + e^2 Y(x))$$

De este modo, la función no lineal $l(x)$ se tranforma en una función lineal más cercana en x, con un rango de menos infinito a infinito en lugar de entre 0 y 1. Así, tomando los logitos estándares de Brass y un patrón estándar, puede elaborarse una tabla de vida, seleccionando valores adecuados para γ y ρ. Dichas variables reflejan el nivel de mortalidad, y la relación entre mortalidad infantil y de adultos respectivamente. En la medida en que γ se acerca a 0 y ρ a 1, más se parecerá nuestra tabla de mortalidad a la estándar.

Esta perspectiva puede aplicarse a los patrones de migración, donde la ${}_uM(x)$ representa la tasa de migración para cada edad x, de un patrón con **TBM** = 1 y ${}_uM(x)_s$, serán las tasas del patrón estándar.

Si se toman los logitos para ambas conjuntos de tasas se obtiene:

$${}_uY(x) = \rho + \gamma({}_uY_s(x))$$

y

$${}_uM(x) = 1/(1 + e^2({}_uY(x)))$$

$${}_uY_s(x) = (1/2)ln[{}_uM_s(x)/(1 -_u M_s(x))]$$

donde,

$$0 <_u M_s(x) < 1$$

El patrón estándar se selecciona con base en la creencia de que éste será representativo del patrón en consideración.

[8] Brass(1971), Brass y Coale(1968), Corrier y Hobcraft(1971), Hill y Trussell(1977) y Zaba(1979)

Capítulo 2
Análisis de los Parámetros

A continuación se analizará el comportamiento del patrón modelo de migración de Rogers y Castro a través de los parámetros que lo conforman. Para tal efecto, ocuparemos la curva que describe al *patrón estándar de migración básico y simplificado* (Gráfica 2). Dicho patrón consta únicamente de 7 parámetros; pues carece de componente poslaboral, y fue graduado de modo que la **TBM** sea igual a la unidad. De donde:

$$M(x) = 0.02e^{-0.10x} + 0.06e^{-0.10(x-20)-e^{-0.40(x-20)}} + 0.003$$

Con $x_l = 15$ y $M(x_l) = 0.00752$, $x_h = 23$ y $M(x_h) = 0.03789$.

Comenzaremos con los parámetros que conforman el componente prelaboral:

Si se aumenta el valor original de a_1 (0.02) obtenemos que para la nueva curva el incremento en las tasas de migración de las primeras edades fue notablemente mayor respecto de las demás; es decir, que la parte de la curva que corresponde al componente prelaboral crece y el resto de la curva permanece casi constante (aunque los valores aumentan pero de manera insignificante). Esto ocasiona que el cociente $\delta_{2,1} = a_2/a_1$ (*índice de dominación laboral*) disminuya y a_1/a_2 (*índice de dependencia infantil*) crezca. Si se tratara del fenómeno de migración en particular, este comportamiento sería absurdo, ya que indicaría que los niños migran solos, independientemente de la situación migratoria de los padres. (Gráfica 3)

En cambio, si se disminuye el valor de a_1, ocurre lo contrario. Se obtiene una curva en la cual el componente prelaboral decrece con respecto del resto de la curva. Encontramos, por lo tanto, un alto grado de *dominación laboral* y un nivel bajo de *dependencia infantil*. (Gráfica 4)

Continuaremos con el parámetro α_1. Se observa que al incrementar dicho valor, aumenta la velocidad de cambio con la cual desciende la curva de los primeros años, por lo que los valores de este componente se pegan más rápidamente al valor del mínimo x_l. El cociente $\beta_{1,2} = \alpha_1/\alpha_2$, también se ve afectado con un aumento. Se espera que dicho cociente tenga un valor cercano a la unidad, siendo que los niños reflejan las tasas migratorias de sus padres. (Gráfica 5)

Para el caso en que α_1 disminuye, como es de esperarse, la inclinación negativa de la pendiente del componente prelaboral es menor, lo que ocasiona que los valores en dicho componente no varíen demasiado. De nuevo, $\beta_{1,2}$ se ve afectado, pues presenta un valor menor que la unidad. (Gráfica 6)

Seguiremos con los parámetros que conforman el componente de la actividad económica. Para a_2 tenemos que al incrementarlo, la curva con forma de campana que constituye el componente de las edades activas crece, en relación con los demás componentes. El *índice de dependencia infantil*, en este caso, disminuye pero el cociente inverso aumenta, dándonos un patrón con alto grado de dominación laboral. (Gráfica 7)

Si a_2 disminuye, la curva de la actividad económica se aplasta, el *índice de dependencia infantil* aumenta y el grado de dominación laboral es bajo. Si $a_2 < a_1$, volveríamos a encontrarnos con un patrón que muestra tasas de migración de los niños mayores que las de los padres. (Gráfica 8)

Continuando con α_2, para valores mayores, tenemos que la parte decreciente del componente de la actividad, tiene una inclinación más marcada y los valores a partir del máximo descienden aceleradamente, acercándose rápidamente al valor de c. El *índice de la asimetría laboral* $\sigma_2 = \lambda_2/\alpha_2$ es en este caso el que sufre cambios. Si este indicador es menor que 2, tenemos un patrón de simetría de las edades activas. También $\beta_{1,2}$ disminuye y ya no vemos reflejada la curva prelaboral en esta parte de la curva laboral, pues la inclinación es diferente. (Gráfica 9) En cambio, al darle un valor menor a α_2, la asimetría del componente aumenta, los valores a partir del máximo tardan en descender y de nuevo $\beta_{1,2}$ varía, aumentando y alejándose así de la unidad. (Gráfica 10)

Pasemos ahora al parámetro λ_2. Una vez más, incrementámos, teniendo así que la parte creciente del componente laboral presenta una pendiente muy pronunciada. Los valores a partir del mínimo x_l aceleran su crecimiento hasta llegar al máximo x_h. σ_2 aumenta, por lo cual, la asimetría es más marcada. (Gráfica 11) En el caso en el que λ_2 disminuye, la parte del componente que se encuentra entre x_l y x_h, muestra un crecimiento lento. Si λ_2 se aproxima a α_2, tenemos un patrón simétrico, pero si λ_2 es menor que α_2, la curva se muestra sesgada a la derecha, en lugar de a la izquierda como ocurre generalmente. (Gráfica 12)

Cuando el valor de μ_2 es modificado, ocurre que la curva laboral se desplaza, hacia la izquierda si el valor es menor, o hacia la derecha si el valor es mayor. (Gráfica 13 y 14)

Es evidente lo que ocurre si modificamos el componente constante c, pues al aumentarlo la curva que conforma el patrón modelo se desplazará hacia arriba y si disminuye se desplazará hacia abajo. Todos los valores se incrementarán o disminuirán igualmente a lo largo del patrón dependiendo de la magnitud del incremento de c. El cociente afectado en este caso será $\delta_{1,c} = a_1/c$. Puede ocurrir que ciertas disminuciones de c provoquen que la curva tome valores negativos en algunos intervalos. (Gráfica 15)

Capítulo 3
Aplicaciones

En este capítulo se mostrarán ejemplos de fenómenos, distintos de la migración, cuyos comportamientos oscilatorios a través del tiempo pueden ser descritos por una función semejante a la de Rogers-Castro.

Una forma más general de escribir dichas funciones mediante la suma de componentes como las siguientes:

$$a_n e^{-\alpha_n(x-\mu_n)-e^{-\lambda_n(x-\mu_n)}}$$

$$a_n e^{-\alpha_n(x)}$$

y

$$c$$

La actividad económica con relación a la edad, es un claro ejemplo.

Introduciremos dos indicadores relacionados con la actividad económica, el primero es la Tasa Central de Actividad y con base en esta tasa se obtiene la Tasa Instantánea de Actividad, cuyo comportamiento será descrito mediante una variante de la función Rogers-Castro.

a) Tasa Central de Actividad (${}_n a_x$).- representa el porcentaje de población económicamente activa entre las edades x y $x+n$, con respecto al total de la población de dicho grupo de edad.

$${}_n a_x = {}_n N_x^a / {}_n N_x$$

donde:

${}_n N_x^a$: es el total de personas económicamente activas de edad comprendida entre x y $x+n$.

y

${}_n N_x$: es el total de la población de edad comprendida entre x y $x+n$.

b) Tasa Instantánea de Actividad (α_x).- se refiere a la proporción de personas económicamente activas a la edad exacta x, sin tomar en cuenta intervalos de edad. Se obtiene mediante una fórmula de interpolación, promediando las tasas centrales de actividad de dos grupos de edad consecutivos.

Más adelante se presentan gráficas de la Tasa Instantánea de Actividad, respecto a los distintos grupos quinquenales de edad. Por otro lado se muestran gráficas de la función Rogers-Castro que consta de una sola componente y cuatro parámetros, es decir:

$$M(x) = ae^{\alpha x-\mu-e^{\lambda x-\mu}}$$

Si contamos con la Tasa Instantánea de Actividad por grupos quinquenales de edad para cierta población, podemos proceder a construir una Tabla de Vida Económicamente Activa, conformada por una serie de funciones que nos proporcionan otros indicadores para el estudio de la Población Económicamente Activa. (Gráficas 16 y 17)

Tomaremos entonces el siguiente elemento de las Tablas:

Esperanza de Vida Activa de un activo a la edad exacta x: $(ea)_x^a$. La gráfica 18 muestra el comportamiento de la $(ea)_x^a$ para mujeres durante el año 1970. Podemos observar que su comportamiento es similar al de la función siguiente:

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1(x)} + a_2 e^{\alpha_2 x - \mu_2 - e^{\lambda_2 x - \mu_2}}$$

Equivalente a una función Rogers-Castro sin componentes poslaboral y constante. (Gráfica 19)

Definamos ahora a $M(x)$ como el número de personas que han contraído el Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida para cada uno de los grupos quinquenales de edad. Tenemos que el comportamiento de la incidencia de dicha enfermedad en los distintos grupos de edad muestra un comportamiento que puede ser descrito por una función de Rogers-Castro. (Gráfica 20 y 21)

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1(x)} + a_2 e^{\alpha_2 x - \mu_2 - e^{\lambda_2 x - \mu_2}}$$

En los capítulos siguientes se tomarán de más detalladamente otros ejemplos de funciones Rogers-Castro aplicados a fenómenos demográficos específicos.

Capítulo 4
Tabla de Vida Económicamente Activa

Como una manera de mostrar la aplicación de la función Rogers-Castro, se partirá de la construcción de la Tabla de Vida Económicamente Activa que se define a continuación, y se desarrollará una construcción paralela mediante funciones de Rogers-Castro, que asemejen el comportamiento de las series que conforman dicha tabla. Lo anterior con la finalidad de mostrar la flexibilidad de estas funciones, pues mediante la manipulación de sus parámetros, podemos obtener curvas diversas que simulan los comportamientos de distintos fenómenos demográficos o de cualquier otra índole.

Tabla de Vida Económicamente Activa.

Ha quedado establecido que la Población Económicamente Activa a través del tiempo experimenta un proceso de renovación y crecimiento. Cada año nuevas personas ingresan a la PEA, mientras que otras salen de ella por defunción, retiro, etc. Conocer estos movimientos es útil para establecer planes de desarrollo económico y social, porque a través de las entradas a la PEA es posible estimar el monto de las nuevas fuentes de trabajo que se deben generar, en tanto que las salidas indican los planes de jubilación que se deben establecer para que el sistema de seguridad social cubra a toda la PEA.

Un modelo teórico que permite analizar este dinámico comportamiento es el de las tablas de vida económicamente activa. Dicho modelo resulta de combinar las condiciones actuales de la actividad económica con las de mortalidad general de la población. Estas tablas reproducen los cambios a que estaría sujeta una generación en el caso de que, tanto el nivel de mortalidad de la población como el de la participación en la actividad económica, no cambiaran en el futuro.[9]

Se considera como *Población Económicamente Activa*, a toda persona de 12 años o más que en la semana anterior al censo se encontraba en alguna de las siguientes situaciones:

a) Estaba ocupada, es decir:

Realizó algún trabajo a cambio de un ingreso, cuando menos durante una hora a la semana, ya sea como obreros, jornaleros, empleados, patrones, empresarios, empleadores o por cuenta propia.

Tenía un empleo, trabajo o negocio al que no asistió en la semana de referencia por enfermedad, vacaciones, accidente u otra clase de permiso, ausencia sin permiso o interrupción del trabajo a causa del mal tiempo, paro, descompostura de maquinaria, etc.

Trabajó por lo menos 15 horas en la semana, sin recibir pago a cambio, en un rancho, taller, negocio u otro tipo de actividad económica dirigida o propia de algún miembro de su familia.

b) Estaba desocupada, es decir:

No se encontraba en ninguna de las situaciones anteriores, pero declaró buscar trabajo y por lo tanto realizó, durante la semana anterior al censo, alguna actividad para encon-

[9] Tablas de Vida Económicamente Activa para la República Mexicana, Miguel Cervera y Virgilio Partida, Ed. Ceniet, 1977

trarlo; como consultar amigos, hacer solicitudes de empleo, inscribirse en alguna agencia de colocación, recurrir a sindicatos, etc.

Hipótesis:

Debido a la poca información con que se cuenta, es necesario adoptar hipótesis sobre el comportamiento de la población. Dichas hipótesis son:

1) La actividad es una función continua de la edad.

2) La entrada de las personas a la actividad ocurre desde la edad b (12 años) hasta antes de la edad c (edad donde la tasa instantánea alcanza su máximo). En este período supondremos que no hay salidas de la actividad por retiro, entendiéndose que "salidas por retiro" incluyen las salidas de la actividad por causas distintas al fallecimiento.

3) Las salidas de la actividad económica por retiro ocurren de la edad c a la edad d (80 años y más) , suponiéndose que en este período no hay entradas a la actividad.

4) La PEA está sujeta a la misma ley de mortalidad de la población total.

Funciones de la Tabla de Mortalidad.

La construcción de la *Tabla de Vida Económicamente Activa* requiere de información referente al comportamiento de la mortalidad de la población en estudio. Las funciones de la Tabla de Mortalidad que se utilizan son:

1) l_x : Número de sobrevivientes a la edad exacta x, proveniente de una cohorte teórica de 100,000 nacimientos.

2) ${}_np_x$: Probabilidad de que una persona de edad exacta x llegue con vida a la edad exacta $x+n$.

$${}_np_x = l_{x+n}/l_x$$

3) ${}_nL_x$: Número de personas de una población estacionaria entre las edades x y $x+n$, o tiempo vivido por la cohorte l_x entre las edades x y $x+n$.

$${}_nL_x = (n/2)(l_x + l_{x+n})$$

4) T_x : Número de años que en conjunto se espera que vivan los sobrevivientes que alcanzan la edad x.

$$Tx = \sum_{t=x}^{\omega} nLt$$

La obtención de las funciones de la tabla de vida activa se basa en la tasa central de actividad y en la tasa instantánea de actividad.

Las series que conforman la tabla son:

1. l_x^a. Número de sobrevivientes activos a la edad exacta x.

$$l_x^a = l_x * \alpha_x$$

2. l_x^i. Número de sobrevivientes inactivos a la edad exacta x.

$$l_x^i = l_x - l_x^a$$

3. $l_{x,x+n}^{ai}$ Número de sobrevivientes activos a edad exacta x, y potencialmente inactivos a la edad $x+n$.

$$l_{x,x+n}^{ai} = (l_x^i *_n p_x - l_x + n^i)/_n p_x$$

4. $l_{x,x+n}^{ia}$ Número de sobrevivientes inactivos a edad exacta x, y potencialmente activos a la edad $x+n$.

$$l_{x,x+n}^{ia} = (l_x^a *_n p_x - l_x + n^a)/_n p_x$$

5. $l_{x,x+n}^{aa}$ Número de sobrevivientes activos a edad exacta x, y potencialmente activos a la edad $x+n$.

$$l_{x,x+n}^{aa} = l_x^a$$

$$l_{x,x+n}^{aa} = l_x^a - l_{x,x+n}^{ai}$$

6. $l_{x,x+n}^{ii}$ Número de sobrevivientes inactivos a edad exacta x, y potencialmente inactivos a la edad $x+n$.

$$l_{x,x+n}^{ii} = l_x^i - l_{x,x+n}^{ia}$$

$$l_{x,x+n}^{ii} = l_x^i$$

7. ${}_nh_x^{ia}$ Número de personas que entran a la actividad entre las edades x y $x+n$ en un año.

$${}_nh_x^{ia} = (1/2)(l_{x,x+n}^{ia} + (l_{x,x+n}^{ia})({}_np_x))$$

8. ${}_nh_x^{ai}$ Número de personas que salen de la actividad entre las edades x y $x+n$ en un año.

$${}_nh_x^{ai} = (1/2)(l_{x,x+n}^{ai} + (l_{x,x+n}^{ai})({}_np_x))$$

9. L_x^a Tiempo vivido en la actividad entre las edades x y $x+n$ por los componentes de la cohorte l_x.

$$L_x^a = (n/2)(l_x^a + l_{x+n}^a)$$

10. L_x^i Tiempo vivido en la inactividad entre las edades x y $x+n$ por los componentes de la cohorte l_x.

$$L_x^i = (n/2)(l_x^i + l_{x+n}^i)$$

11. T_x^a Número de años que vive en la actividad la cohorte l_x desde la edad x hasta la edad ω (fin de la tabla).

$$T_x^a = \sum_{t=x}^{\omega} L_t^a$$

12. $(ea)_x^a$ Esperanza de vida de un activo a la edad exacta x.

$$(ea)_x^a = ((T_x - T_c)/l_x) + (l_c/l_x)(T_c^a/l_c^a)$$

$$(ea)_x^a = T_x^a/l_x^a$$

13. ${}_nm_x^{ia}$ Tasa central anual de entrada a la actividad.

$${}_nm_x^{ia} =_n h_x^{ia}/{}_nL_x$$

14. ${}_nm_x^{ai}$ Tasa central anual de salida de la actividad.

$${}_nm_x^{ai} =_n h_x^{ai}/{}_nL_x$$

15. ${}_nd_x^{aa}$ Muertes ocurridas en la actividad entre las edades x y $x+n$ en el grupo de los activos a edad exacta x, y potencialmente activos a edad $x+n$.

$${}_nd_x^{aa} = l_{x,x+n}^{aa} - (l_{x,x+n}^{aa})({}_np_x)$$

16. ${}_nd_x^{ia}$ Muertes ocurridas en la actividad entre las edades x y $x+n$ en el grupo de los inactivos a edad exacta x, y potencialmente activos a edad $x+n$.

$$ {}_nd_x^{ia} = {}_nh_x^{ia} - l_{x,x+n}^{ia} $$

17. ${}_nd_x^{ai}$ Muertes ocurridas en la actividad entre las edades x y $x+n$ en el grupo de los activos a edad exacta x, y potencialmente inactivos a edad $x+n$.

$$ {}_nd_x^{ai} = l_{x,x+n}^{ai} - {}_nh_x^{ai} $$

18. ${}_nd_x^{a}$ Muertes ocurridas en la actividad entre las edades x y $x+n$.

$$ {}_nd_x^{a} = {}_nd_x^{aa} + {}_nd_x^{ia} $$

19. ${}_nm_x^{ad}$ Tasa anual de salidas de la actividad por muerte.

$$ {}_nm_x^{ad} = {}_nd_x^{a}/{}_nL_x^{a} $$

Para la construcción de la Tabla de Vida Económicamente Activa es necesario contar con la siguiente información:

1) Población económicamente activa por sexo y grupos de edad.

2) Población total por sexo y grupos de edad.

3) Tablas de mortalidad para la población que se estudia.

Más adelante (Anexos) se presenta una tabla de vida económicamente activa construida para la población mexicana de 1970, mediante el método descrito anteriormente.

De las diecinueve series que conforman la tabla, se seleccionaron las once series cuyo recorrido incluye a todos los grupos de edad (l_x^a, l_x^i, $l_{x,x+n}^{aa}$, $l_{x,x+n}^{ii}$, ${}_nL_x^a$, ${}_nL_x^i$, T_x^a, ${}_nd_x^{aa}$, ${}_nd_x^a$, ${}_nm_x^{ad}$, $(ea)_x^a$).

Para la serie l_x^a tenemos una curva con forma de campana ligeramente sesgada a la derecha, con un máximo alrededor de los 30 años. Se trata de una curva con una sola componente (sin tomar en cuenta la constante). Tomando una función como la siguiente y eligiendo los parámetros correctamente se logra un comportamiento similar.

$$ ae^{-\alpha(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}} + c $$

El valor de a depende de la altura de la curva y se ajusta de acuerdo con la población con la que se cuente. El parámetro λ es mayor que α si nuestra curva presenta una pendiente positiva marcada en los primeros años, comparada con la inclinación negativa de los últimos años. El parámetro c será menor o igual a cero ya que tanto para el primer grupo de edad como para el último este indicador es igual a cero. (Gráfica 22)

La segunda serie, l_x^i, cuenta con dos componentes presenta una curva descendente en los primeros grupos de edad, hasta llegar a un mínimo aproximadamente a los 45 años de edad y a partir de éste, crece ligeramente hasta alcanzar un máximo relativo aproximadamente a los 70 años, donde empieza un decremento que continúa hasta los últimos años de edad. Para este caso, tomaremos una función Rogers-Castro con dos componentes.

$$a_1 e^{-\alpha_1(x-\mu_1)-e^{-\lambda_1(x-\mu_1)}} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}}$$

En este caso a_1 es mayor que a_2 ya que la curva en las primeras edades presenta una altura mucho mayor que la de los últimos años. Aquí, el parámetro α es mayor que λ. Debe ser lo suficientemente mayor como para que la primera componente sea simpre decreciente. (Gráfica 23)

Para las series $l_{x,x+n}^{aa}$ y $l_{x,x+n}^{ii}$ encontramos comportamientos semejantes a los de las series l_x^a y l_x^i respectivamente. Lo mismo sucede para ${}_nL_x^a$ y ${}_nL_x^i$.

Continuaremos pues con T_x^a. La función que la describe será de la forma:

$$ae^{-\alpha(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

Con α mayor que λ, μ aproximado a 30 y a lo suficientemente grande, de acuerdo a la magnitud de población en los distintos grupos de edad. Se obtiene una curva estrictamente decreciente, que a partir del primer grupo de edad (máximo) desciende ligeramente, pero en los últimos grupos aumenta su velocidad de decremento. (Gráfica 24)

Para las muertes ocurridas en la actividad entre las edades x y $x+n$, ${}_nd_x^{aa}$, se trata de una curva que consta de una única componente en forma de campana sesgada hacia la derecha. Su función será como sigue:

$$ae^{-\alpha(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

En a este caso, debe hacerse notar es que los parámetros α y λ son negativos, es decir, que en la expresión aparecerán con signo positivo y $\alpha < \lambda$. Con α y λ negativos, la curva se sesgará a la derecha en lugar de a la izquierda, con μ cercano a 80. Para ${}_nd_x^a$ ocurre algo similar. (Gráfica 25)

La curva para la tasa ${}_nm_x^{ad}$ también se asemeja a las dos anteriores, pero en este caso la parte creciente de la curva muestra una marcada concavidad, la función será la siguiente:

$$ae^{-\alpha(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

Con $a < 1$, α y λ negativos, pero para este caso $\alpha > \lambda$ y μ con un valor aproximado a 90. (Gráfica 26)

Finalmente tenemos la esperanza de vida activa $(ea)_x^a$, representada por una curva estrictamente decreciente, cuya función se escribirá de la siguiente forma: (Gráfica 27)

$$ae^{-\alpha(x)} + c$$

Capítulo 5
Saldos Netos Migratorios

En razón de que los datos sobre migración son generalmente incompletos, es común utilizar métodos indirectos para obtener el saldo neto migratorio, que es el número de inmigrantes menos el de emigrantes durante un cierto período para una determinada población. Un método muy utilizado es el que se basa en el empleo de la tabla de mortalidad[10].

Supongamos que se cuenta con la población por grupos quinquenales de edad, corregida y proyectada al 30 de junio de dos censos sucesivos y que se tienen construidas las tablas de mortalidad para dichos años censales. Sean $P^{30.06.t}_{x,x+4}$ la población del año t y $P^{30.06.t+10}_{x,x+4}$ la del año $t+10$. Tomamos las tablas de mortalidad las respectivas series de los años- persona vividos por la población, es decir ${}_5L^t_x$.

La probabilidad de que las personas $P^{30.06.t}_{x,x+4}$ sobrevivan al año $t+10$ es ${}_5L^{t+10}_{x+10}/{}_5L^t_x$. Así, una estimación de la población para el año $t+10$, con edades entre $x+10$ y $x+14$ de no haber movimientos migratorios será:

$$\hat{P}^{30.06.t+10}_{x+10,x+14} = P^{30.06.t}_{x,x+4}({}_5L^{t+10}_{x+10}/{}_5L^t_x)$$

Pero esta población no sólo está expuesta a morir sino también a salir de su entidad (emigrar) o a que se incorporen personas nuevas a la misma (inmigrantes).

Sean $E^{t,t+10}_{x,x+14}$ los emigrantes entre las edades cumplidas x y $x+14$ en los diez años cumplidos y que modifican el efectivo $P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14}$; e $I^{t,t+10}_{x,x+14}$ los inmigrantes que se incorporaron entre *las edades cumplidas x y $x+14$ en los diez años cumplidos y que modifican el efectivo* $P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14}$.

Se tiene que:

$$P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14} = P^{30.06.t}_{x,x+4}({}_5L^{t+10}_{x+10}/{}_5L^t_x) - E^{t,t+10}_{x,x+14} + I^{t,t+10}_{x,x+14}$$

donde:

$$I^{t,t+10}_{x,x+14} - E^{t,t+10}_{x,x+14}$$

se conoce como *Saldo Neto Migratorio* para las personas con edad entre x y $x+14$ ($M(x,x+14)$).

Sustituyendo se tiene:

$$P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14} = \hat{P}^{30.06.t+10}_{x+10,x+14} + M(x,x+14)$$

Por lo tanto:

$$M(x,x+14) = P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14} - \hat{P}^{30.06.t+10}_{x+10,x+14}$$

[10] Elaboración y Utilidad de la Tabla Abreviada de Mortalidad, A. Mina, Vínculos Matemáticos # 138, 1992

Se obtienen así los *Saldos Netos Migratorios* de la población comprendida entre las edades x y $x+14$ entre el 30 de junio del año t y el 30 de junio del año $t+10$. Este método se conoce como *Saldo Neto Prospectivo.*

Ahora bien, si estimáramos a la población $P^{30.06.t}_{x,x+14}$ a partir de la población $P^{30.06.t+10}_{x+10,x+14}$ se tendría lo siguiente:

$$P^{30.06.t}_{x,x+14} = P^{30.06.t+10}_{x+10,x+4}({}_5L^{t}_{x}/{}_5L^{t+10}_{x+10}) - I^{t,t+10}_{x,x+14} + E^{t,t+10}_{x,x+14}$$

Denotaremos ahora el *Saldo Neto Migratorio* con $M(x,x+14)$, conocido como *Saldo Neto Retrospectivo.* Entonces:

$$P^{30.06.t}_{x,x+4} = \hat{P}^{30.06.t}_{x,x+4} - M(x,x+14)$$

donde:

$$\hat{P}^{30.06.t}_{x,x+4} = P^{30.06.t}_{x+10,x+14}({}_5L^{t}_{x}/{}_5L^{t+10}_{x+10})$$

y

$$M(x,x+14) = I^{t,t+10}_{x,x+14} - E^{t,t+10}_{x,x+14}$$

Por lo tanto, el *Saldo Neto Migratorio Retrospectivo* sería:

$$M(x,x+14) = \hat{P}^{30.06.t}_{x,x+4} - P^{30.06.t}_{x,x+4}$$

El método anterior fue desarrollado para la población del estado de Nuevo León. La información se extrajo del censo de 1990 y del conteo 1995. La población fue evaluada y corregida y posteriormente se obtuvieron los Saldos Netos Migratorios, tanto para la población femenina como para la masculina, utilizando primero el método prospectivo y después el retrospectivo.

El comportamiento de los *Saldos Netos Migratorios* a través de la edad presenta diversas oscilaciones. En el caso de Nuevo León el comportamiento fue muy semejante para la población masculina y la femenina. En el primer grupo de edad encontramos el saldo máximo, posteriormente, muestra un descenso en los primeros años, luego vuelve a crecer y a descender varias veces, siendo creciente en los últimos grupos de edad.

Para este caso, tomaremos una función Rogers-Castro como la siguiente:

$$a_1e^{-\alpha_1 x}+a_2e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}}+a_3e^{-\alpha_3(x-\mu_3)-e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}}+a_4e^{-\alpha_4(x-\mu_4)-e^{-\lambda_4(x-\mu_4)}}+a_5e^{-\alpha_5(x-\mu}$$

Donde el valor de los coeficientes a_i (con i desde 1 hasta 6) depende de la altura de cada una de las componentes. Las α_is y las λ_is dependen, como se ha venido observando en los ejemplos previos, de la inclinación de las curvas. α_6 es negativa para que el término al cual está elevada la última exponencial, sea positivo. (Gráfica 28)

Capítulo 6
La Función de Gompertz-Makeham

Tomaremos ahora dos funciones que han logrado describir satisfactoriamente fenómenos demográficos, en particular, el de la mortalidad. Se trata de las funciones desarrolladas por Gompertz y Makeham.

La Ley de Gompertz describe la mortalidad experimentada por una población dada. Gompertz supone que la resistencia del hombre a la muerte decrece a una tasa proporcional a sí misma y agrupa las causas de muerte de la manera siguiente:

a) aquellas independientes de la edad, b) aquellas originadas por la perdida de resistencia del organismo con el paso del tiempo.

Gompertz se basa únicamente en las segundas, definiendo a $M(x)$ como la tasa instantánea de mortalidad a la que está sujeta la población. Dicha tasa representa la susceptibilidad del hombre a la muerte.

La Ley de Gompertz se define mediante la siguiente expresión [11]:

$$d/dx(1/M(x)) = -h(1/M(x))$$

donde: h = Tasa de decremento de la resistencia del hombre a la muerte.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad anterior entre el recíproco de la tasa instantánea de mortalidad e integrando respecto de x se obtiene lo siguiente:

$$\int d(1/M(x))/(1/M(x)) = -h \int dx$$

$$ln(1/M(x)) + lnB = -hx$$

$$ln(B/M(x)) = -hx$$

Aplicando antilogaritmo:

$$B/M(x) = e^{-hx}$$

De donde:

$$M(x) = Be^{hx}$$

Denotando e^h como c tenemos:

$$M(x) = BC^x$$

[11] Alejandro Mina, 1982

Partiendo de la definición de Tasa Instantánea de Mortalidad, considerada como el cambio que se observa en los sobrevivientes de una población $l(x)$ dada, se tiene el siguiente límite:

$$M(x) = \lim_{h \to 0} (l(x) - l(x+h))/hl(x)$$

De donde:

$$M(x) = -1/l(x)(dl(x)/dx)$$

$$M(x) = -(d(lnlx)/dx)$$

Si se integra en el intervalo $(0, x)$:

$$\int_0^x M(y)dy = -\int_0^x d(lnl(y))dy/dy = -lnl(y)\Big|_0^x = -(lnl(x) - ln0) = -ln(l(x)/l(0))$$

Obteniendo que:

$$l(x)/l(0) = e^{-\int_0^x (M(y)dy)}$$

Finalmente al despejar $l(x)$ se tiene:

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x M(y)dy}$$

La expresión anterior define la Ley de Gompertz.

Posteriormente Makeham propone integrar en el modelo de Gompertz, la primera de las dos causas de muerte supuestas por Gompertz; es decir las causas independientes de la edad.

Makeham establece la siguiente ley:

$$M(x) = A + BC^x$$

Donde A es el parámetro asociado al efecto de las causas de muerte independientes de la edad.

Al integrar ambos miembros en la expresión anterior en el intervalo $(0, x)$ se tiene:

$$\int_0^x M(y)dy = \int_0^x (A + BC^y)dy$$

$$\int_0^x M(y)dy = (Ax + Bc^x)/(lnC - (B/lnC))$$

Multiplicando por -1:

$$-\int_0^x M(y)dy = -Ax - B/(lnC(C^x - 1))$$

Denotando a $-A$ como lnS y a $-B/lnC$ como lnG la expresión queda:

$$-\int_0^x M(y)dy = xlnS + (C^x - 1)lnG$$

$$-\int_0^x M(y)dy = lnS^x + ln(G^(C^x - 1))$$

$$-\int_0^x M(y)dy = lnS^x G^(C^x - 1)$$

Retomando la expresión de Gompertz para $l(x)$, es decir:

$$l(x) = l(0)e^{-\int_0^x M(y)dy}$$

Al sustituir aquí el valor de la integral de $M(y)$ tenemos:

$$l(x) = l(0)e^{ln(S^x G^(C^x - 1))}$$

$$l(x) = l(0)(S^x G^(C^x - 1))$$

$$l(x) = l(0)(S^x G^{C^x} G^(- 1))$$

$$l(x) = (l(0)/G)(S^x G^{C^x})$$

Si denotamos $(l(0)/G)$ como K, tenemos:

$$l(x) = K(S^x G^{C^x})$$

La expresión anterior se conoce como la Ley de Makeham, siendo la función de Makeham la siguiente:

$$Y(x) = K(a^x b^{d^x})$$

Utilizando el método anterior, se obtuvieron las $l(x)$ para el caso de México.

Podemos observar el comportamiento de la función Gompertz-Makeham para las $l(x)$ de los grupos quinquenales de edad mediante la gráfica 29. Se trata de una curva decreciente, siendo para las primeras edades un descenso más marcado debido a la elevada mortalidad infantil. Posteriormente, continúa con un descenso muy lento y al llegar a los últimos grupos de edad, decrece de manera rápida, ya que los últimos grupos de edad son los más afectados por dicho fenómeno.

Tomando la siguiente función Rogers-Castro, logramos el mismo comportamiento:

$$a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2) - e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)}$$

Con μ_2 cercana a 40 y μ_3 aproximada a 80. Lo que vale la pena señalar de esta función es que a diferencia de las demás, en este caso el tercer coeficiente, es decir, a_3 tiene un valor negativo, con lo que se logra el descenso de las últimas edades.

Conclusiones

El patrón modelo de migración que desarrollaron Andrei Rogers y Luis J. Castro resume las regularidades de los perfiles de edades que muestran los patrones empíricos de tasas de migración y expresa dichas regularidades de manera matemática.

El flujo migratorio mostró las siguientes regularidades: los adultos jóvenes (alrededor de los 20 años) mostraron las tasas más elevadas; los adolescentes (alrededor de los 15 años) las más bajas. Los niños reflejan las tasas de migración de sus padres, es decir, que éstas son semejantes a las de los adultos jóvenes. A partir del máximo, descienden, aunque alrededor de los 60 años encontramos que las tasas se elevan ligeramente debido al retiro de las personas a lugares con climas más cálidos o a sitios más tranquilos, por lo que se muestra un máximo de retiro. Rogers y Castro sugirieron una expresión matemática compuesta de cuatro curvas:

$$M(x) = a_1 e^{-\alpha_1 x} + a_2 e^{-\alpha_2(x-\mu_2)-e^{-\lambda_2(x-\mu_2)}} + a_3 e^{-\alpha_3(x-\mu_3)-e^{-\lambda_3(x-\mu_3)}} + c.$$

Con base en una generalización de este modelo, a lo largo de este trabajo de tesis, se han tomado funciones compuestas por curvas como las que constituyen el patrón modelo de migración de Rogers y Castro y que hemos llamado funciones Rogers-Castro. Las curvas que componen nuestra función tienen la siguiente forma:

$$ae^{-\alpha(x-\mu)-e^{-\lambda(x-\mu)}}$$

ó

$$ae^{-\alpha(x-\mu)}$$

Mediante las funciones Rogers-Castro se obtienen curvas con comportamientos oscilatorios muy variados, dependiendo del valor de los parámetros que conformen la función.

En los capítulos anteriores se simularon a través de estas funciones, los comportamientos de diversos fenómenos demográficos.

Uno de ellos fue la actividad económica. Utilizando las series más representativas de la Tabla de Vida Económicamente Activa, se generó una función Rogers-Castro que tuviera el mismo comportamiento. Se hicieron las modificaciones necesarias a los parámetros y se logró obtener para cada una de las series utilizadas una curva muy semejante a la de dicha serie.

Posteriormente se utilizaron los Saldos Netos Migratorios. Éstos se obtuvieron mediante los métodos retrospectivo y prospectivo para hombres y mujeres, tomando la información de los Censos de Población de 1990 y 1995. Se obtuvo una función Rogers-Castro para los

Saldos Netos Masculinos derivados del método prospectivo. Debido a que los Saldos Netos Migratorios presentan varias oscilaciones a lo largo de los grupos de edad, nuestra función constó de varias componentes, cada una con sus respectivos parámetros de acuerdo a la altura y las inclinaciones de las curvas que se pretendía simular.

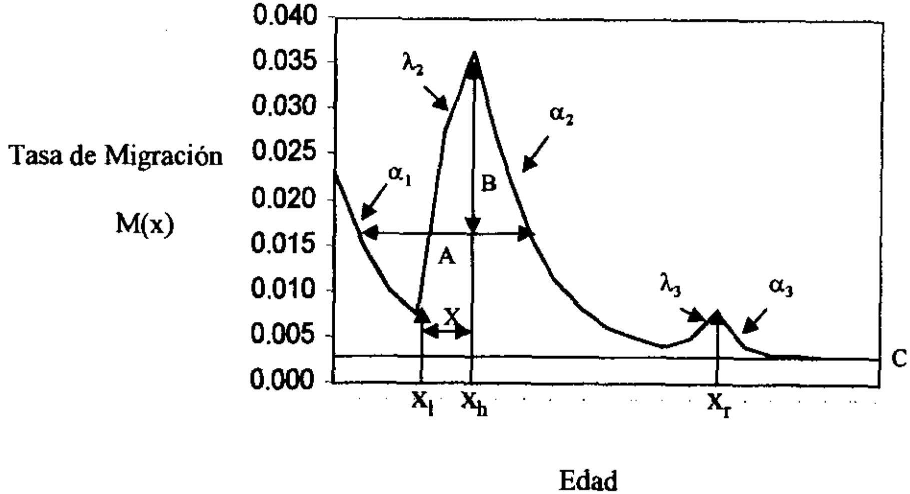
Por último, se obtuvieron las funciones de Gompertz-Makeham que describen la mortalidad, mediante una función para las l_x de una población determinada. Como en los casos anteriores se encontró la función de Rogers-Castro que logra asemejarse a la función Gompertz-Makeham.

Pudimos notar que las funciones de Rogers-Castro pueden manipularse satisfactoriamente para lograr diversos comportamientos, debido a que cuentan con un gran número de parámetros que pueden ser modificados según sea la forma de la curva que se desee encontrar.

Para lograr el objetivo del presente trabajo resultó de gran importancia el conocimiento de la influencia que tiene cada parámetro dentro de la función para determinar en qué medida debía ser modificado, logrando así que la curva obtenida se asemejara a alguna otra curva de las que fueron seleccionadas en cada caso.

Anexos.

Patrón Modelo de Migración

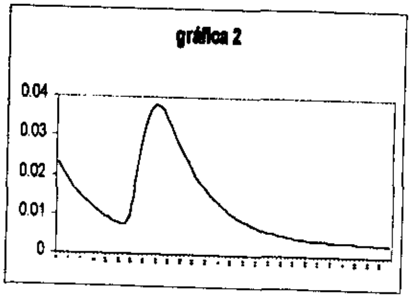


Gráfica 1

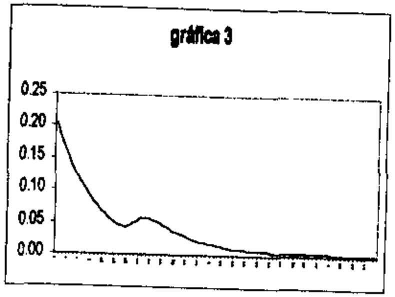
Componente Prelaboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

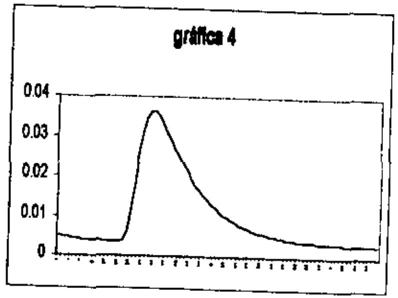
$a_1 = 0.02$



$a_1 = 0.2$



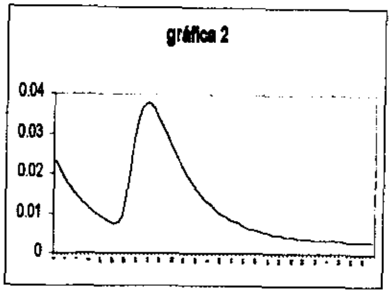
$a_1 = 0.002$



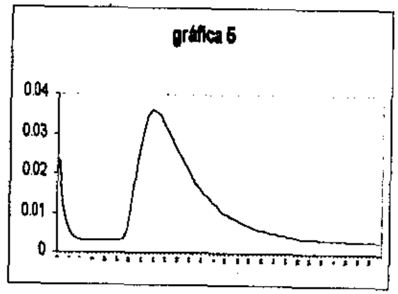
Componente Prelaboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

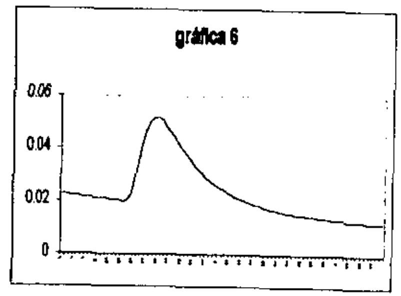
$\alpha_1 = 0.1$



$\alpha_1 = 0.8$



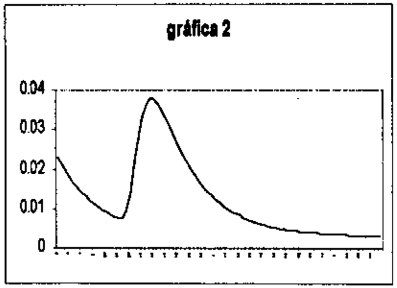
$\alpha_1 = 0.01$



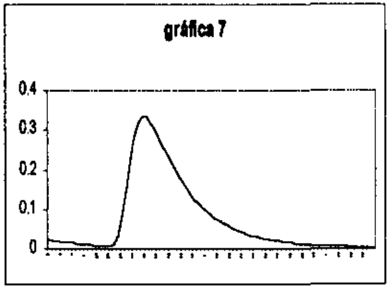
Componente Laboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

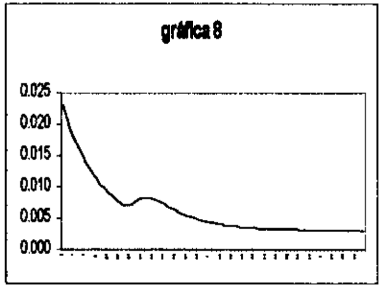
$a_2 = 0.06$



$a_2 = 0.6$



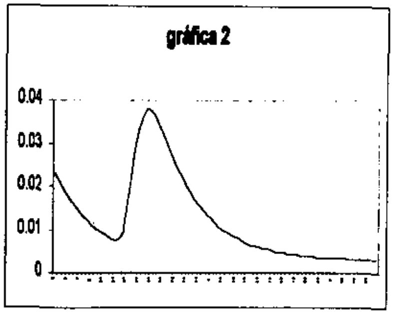
$a_2 = 0.006$



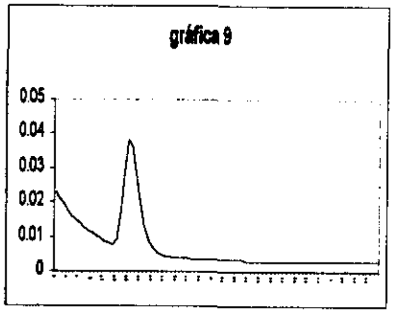
Componente Laboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

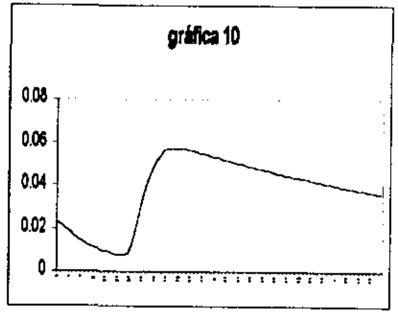
$\alpha_2 = 0.1$



$\alpha_2 = 0.8$



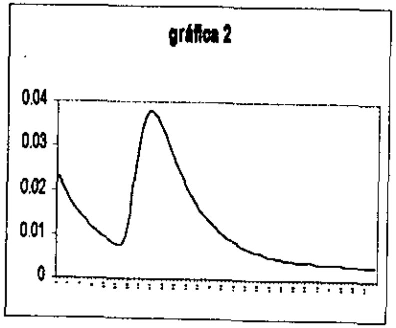
$\alpha_2 = 0.01$



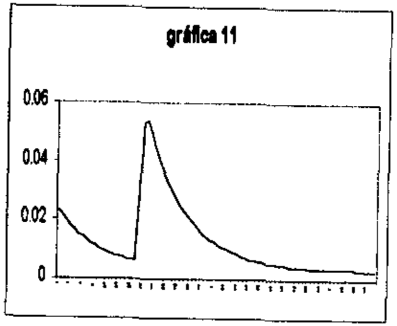
Componente Laboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

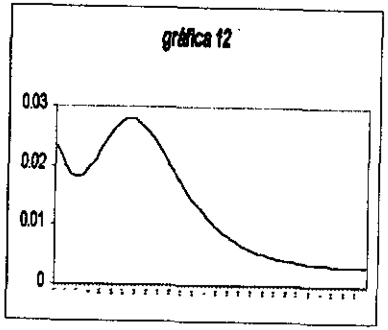
$\lambda_2 = 0.4$



$\lambda_2 = 2$



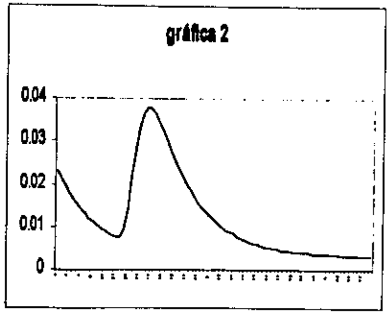
$\lambda_2 = 0.1$



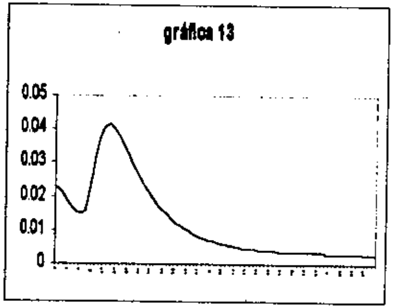
Componente Laboral.

Patrón Estándar Básico y Simplificado.

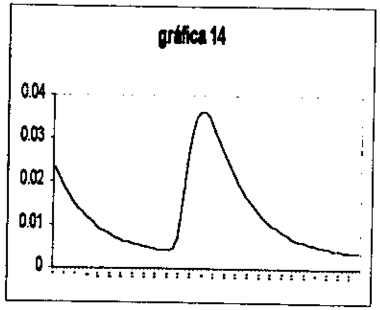
$\mu_2 = 20$



$\mu_2 = 10$



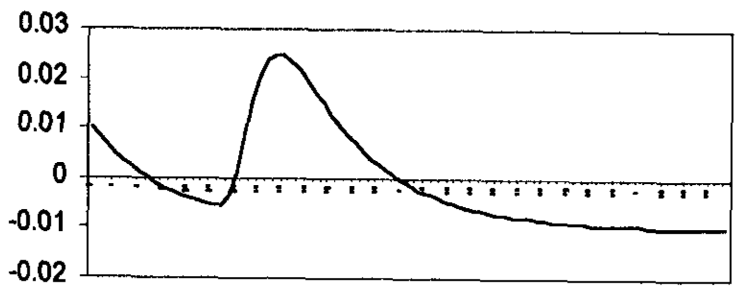
$\mu_2 = 35$



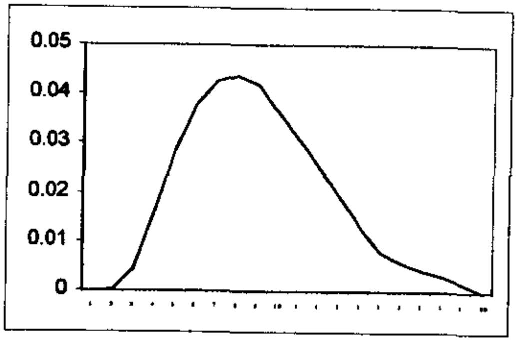
Componente Constante.

$C = -0.01$

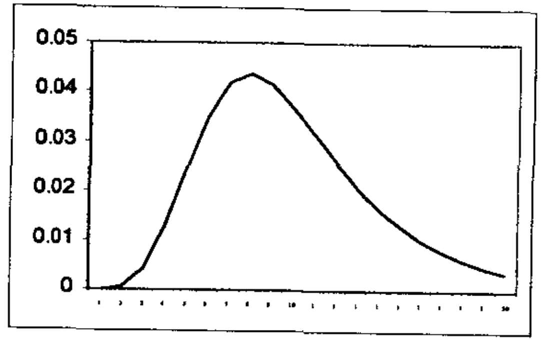
gráfica 15



Tasa Instantánea de Actividad, México, Hombres, 1970. Rogers-Castro



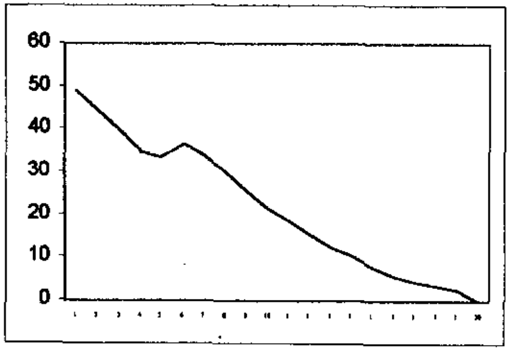
Gráfica 16



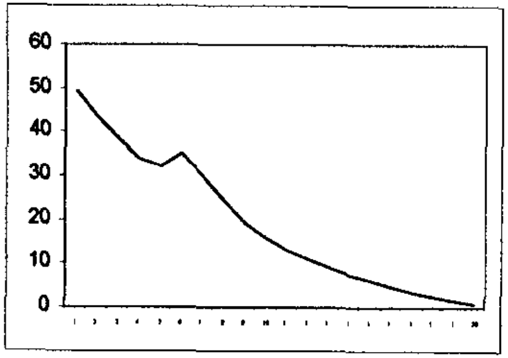
Gráfica 17

Esperanza de Vida, Mujeres, México, 1970.

Rogers-Castro



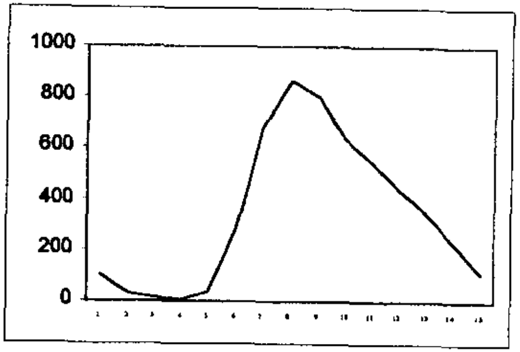
Gráfica 18



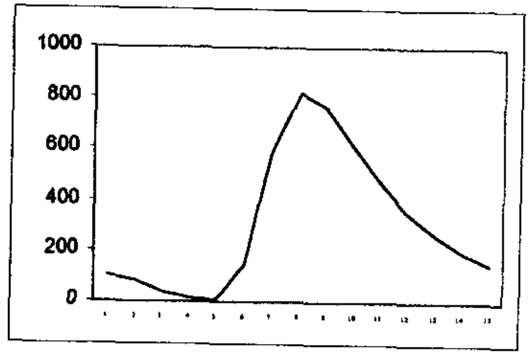
Gráfica 19

Casos registrados de SIDA, México, 1990.

Rogers-Castro

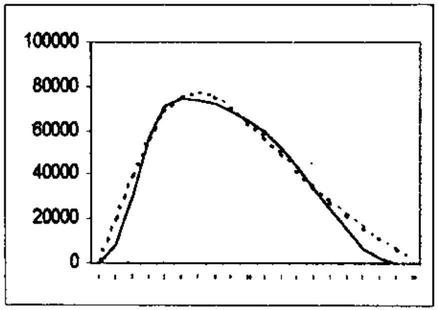


Gráfica 20

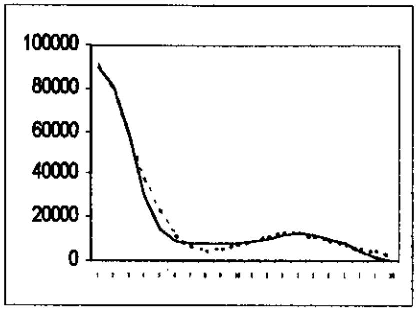


Gráfica 21

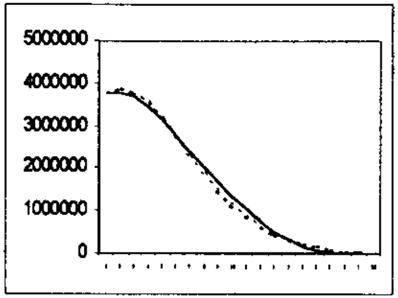
Funciones de la Tabla de Vida Económicamente Activa



$l_x a$



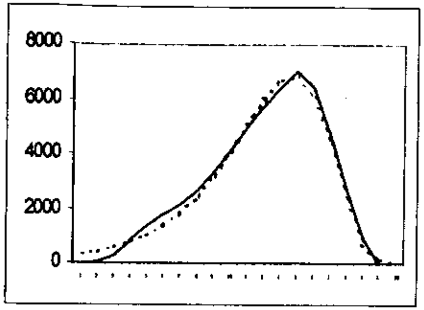
$l_x i$



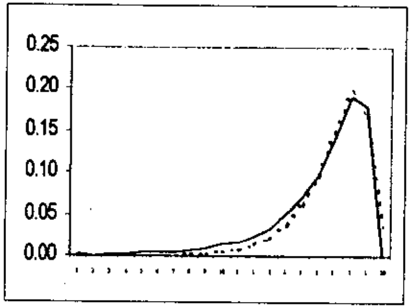
$T_x a$

Gráficas 22 a 24

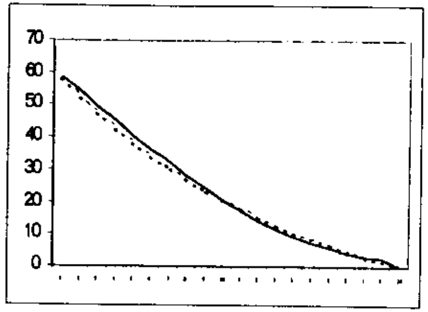
Funciones de la Tabla de Vida Económicamente Activa



$d_x a$



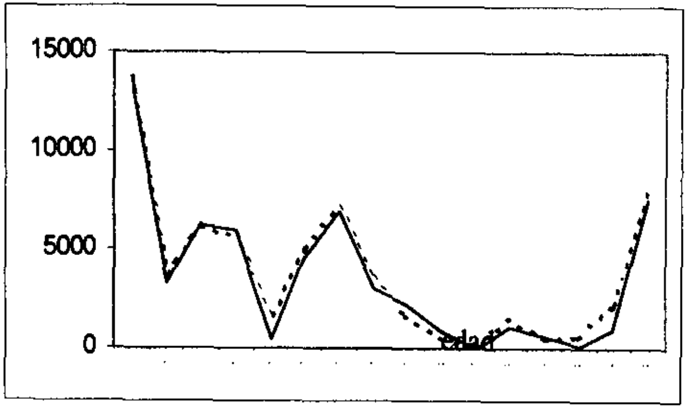
$m_x ad$



$(ea)_x a$

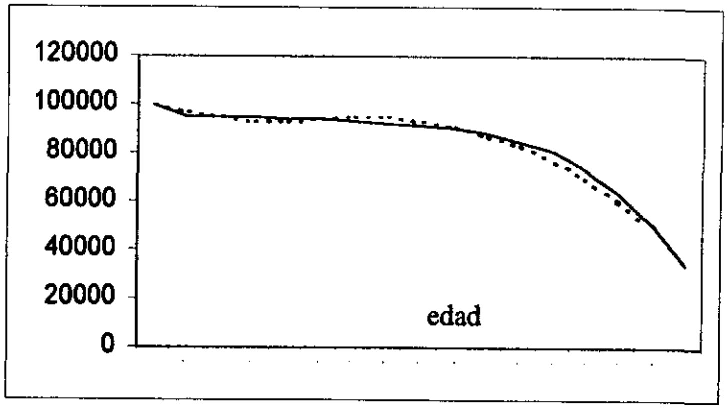
Gráficas 25 a 27

Saldos Netos Migratorios vs. Función Rogers-Castro



Gráfica 28

Función Gompertz-Makeham vs. Función Rogers-Castro



Gráfica 29

Tabla 1

Modificaciones al Patrón Modelo de Migración Estándar Básico y Simplificado.

edad	P.E.B.S.*	$a_1=0.2$	$a_1=0.002$	$\alpha_1=0.8$	$\alpha_1=0.01$	$a_2=0.6$	$a_2=0.006$	$\alpha_2=0.8$	$\alpha_2=0.01$	$\lambda_2=2$	$\lambda_2=0.1$	$\mu_2=10$	$\mu_2=35$	$c=-0.01$
0	0.02300	0.20300	0.00500	0.02300	0.02300	0.02300	0.02300	0.02300	0.02300	0.02300	0.02327	0.02300	0.02300	0.01000
1	0.02110	0.18397	0.00481	0.01199	0.02280	0.02110	0.02110	0.02110	0.02110	0.02110	0.02160	0.02110	0.02110	0.00810
2	0.01937	0.16675	0.00464	0.00704	0.02260	0.01937	0.01937	0.01937	0.01937	0.01937	0.02023	0.01937	0.01937	0.00637
3	0.01782	0.15116	0.00448	0.00481	0.02241	0.01782	0.01782	0.01782	0.01782	0.01782	0.01919	0.01782	0.01782	0.00482
4	0.01641	0.13706	0.00434	0.00382	0.02222	0.01641	0.01641	0.01641	0.01641	0.01641	0.01851	0.01641	0.01641	0.00341
5	0.01513	0.12431	0.00421	0.00337	0.02202	0.01513	0.01513	0.01513	0.01513	0.01513	**0.01817**	0.01519	0.01513	0.00213
6	0.01398	0.11276	0.00410	0.00316	0.02184	0.01398	0.01398	0.01398	0.01398	0.01398	0.01819	0.01461	0.01398	0.00098
7	0.01293	0.10232	0.00399	0.00307	0.02165	0.01293	0.01293	0.01293	0.01293	0.01293	0.01854	0.01586	0.01293	-0.0001
8	0.01199	0.09287	0.00390	0.00303	0.02146	0.01199	0.01199	0.01199	0.01199	0.01199	0.01919	0.01990	0.01199	-0.0010
9	0.01113	0.08431	0.00381	0.00301	0.02128	0.01113	0.01113	0.01113	0.01113	0.01113	0.02007	0.02605	0.01113	-0.0019
10	0.01036	0.07658	0.00374	0.00301	0.02110	0.01036	0.01036	0.01036	0.01036	0.01036	0.02112	0.03243	0.01036	-0.0026
11	0.00966	0.06957	0.00367	0.00300	0.02092	0.00966	0.00966	0.00966	0.00966	0.00966	0.02227	0.03743	0.00966	-0.0033
12	0.00902	0.06324	0.00360	0.00300	0.02074	0.00902	0.00902	0.00902	0.00902	0.00902	0.02345	0.04037	0.00902	-0.0040
13	0.00845	0.05751	0.00355	**0.00300**	0.02056	0.00845	0.00845	0.00845	0.00845	0.00845	0.02458	0.04134	0.00845	-0.0045
14	0.00793	0.05232	**0.00349**	0.00300	0.02039	**0.00796**	0.00793	**0.00806**	0.00793	0.00793	0.02561	0.04080	0.00793	-0.0051
15	**0.00752**	0.04769	0.00351	0.00306	**0.02028**	0.00807	0.00747	0.00949	0.00750	0.00746	0.02649	0.03925	0.00746	-0.0055
16	0.00767	0.04401	0.00404	0.00363	0.02067	0.01336	0.00710	0.01743	**0.00748**	0.00704	0.02717	0.03711	0.00704	-0.0053
17	0.00958	**0.04248**	0.00629	0.00593	0.02280	0.03593	**0.00695**	0.03056	0.00889	0.00665	0.02765	0.03469	0.00665	-0.0034
18	0.01422	0.04398	0.01125	0.01092	0.02762	0.08546	0.00710	**0.03840**	0.01292	0.00631	0.02791	0.03219	0.00631	0.00122
19	0.02091	0.04783	0.01822	0.01792	0.03446	0.15516	0.00748	0.03603	0.01962	0.00603	**0.02795**	0.02973	0.00599	0.00791
20	0.02778	0.05214	0.02534	0.02507	0.04145	0.22643	0.00791	0.02778	0.02778	0.02778	0.02778	0.02738	0.00571	0.01478
21	0.03322	0.05526	0.03102	0.03077	0.04698	0.28317	0.00823	0.01924	0.03584	0.05287	0.02742	0.02518	0.00545	0.02022
22	0.03656	**0.05650**	0.03457	0.03434	0.05039	0.31865	**0.00836**	0.01295	0.04274	0.05345	0.02688	0.02314	0.00522	0.02356
23	**0.03789**	0.05594	**0.03609**	**0.03589**	**0.05178**	**0.33390**	0.00829	0.00903	0.04809	0.04934	0.02620	0.02127	0.00501	0.02489
24	0.03768	0.05401	0.03605	0.03587	0.05160	0.33348	0.00810	0.00681	0.05192	0.04502	0.02539	0.01956	0.00481	0.02468
25	0.03643	0.05120	0.03495	0.03479	0.05036	0.32250	0.00782	0.00560	0.05449	0.04103	0.02448	0.01800	0.00464	0.02343
26	0.03456	0.04793	0.03322	0.03307	0.04849	0.30522	0.00749	0.00494	0.05609	0.03741	0.02351	0.01658	0.00449	0.02156
27	0.03238	0.04448	0.03117	0.03104	0.04630	0.28472	0.00715	0.00455	0.05699	0.03414	0.02248	0.01529	0.00434	0.01938
28	0.03010	0.04104	0.02900	0.02888	0.04400	0.26305	0.00680	0.00431	0.05739	0.03118	0.02142	0.01413	0.00422	0.01710
29	0.02784	0.03774	0.02685	0.02674	0.04170	0.24147	0.00647	0.00414	**0.05746**	0.02849	0.02035	0.01307	0.00410	0.01484
30	0.02567	0.03463	0.02477	0.02467	0.03949	0.22072	0.00616	0.00402	0.05730	0.02607	0.01927	0.01211	0.00406	0.01267
31	0.02363	0.03174	0.02282	0.02273	0.03740	0.20119	0.00587	0.00391	0.05700	0.02387	0.01822	0.01125	0.00453	0.01063
32	0.02174	0.02908	0.02101	0.02092	0.03545	0.18305	0.00561	0.00382	0.05659	0.02189	0.01719	0.01046	0.00674	0.00874
33	0.02000	0.02664	0.01934	0.01926	0.03364	0.16636	0.00536	0.00374	0.05613	0.02009	0.01619	0.00975	0.01165	0.00700
34	0.01841	0.02442	0.01781	0.01774	0.03198	0.15108	0.00514	0.00367	0.05564	0.01846	0.01523	0.00911	0.01858	0.00541
35	0.01696	0.02239	0.01642	0.01635	0.03045	0.13715	0.00494	0.00360	0.05512	0.01699	0.01431	0.00853	0.02568	0.00396
36	0.01564	0.02056	0.01515	0.01509	0.02905	0.12448	0.00476	0.00355	0.05459	0.01566	0.01345	0.00800	0.03132	0.00264
37	0.01444	0.01889	0.01400	0.01395	0.02776	0.11298	0.00459	0.00349	0.05406	0.01446	0.01263	0.00753	0.03484	0.00144
38	0.01336	0.01738	0.01296	0.01291	0.02659	0.10255	0.00444	0.00345	0.05353	0.01337	0.01185	0.00710	0.03634	0.00036

* Patrón Estándar Básico y Simplificado.

Modificaciones al Patrón Modelo de Migración Estándar Básico y Simplificado. (Continuación.)

edad	P.E.B.S.*	$a_1=0.2$	$a_1=0.002$	$\alpha_1=0.8$	$\alpha_1=0.01$	$a_2=0.6$	$a_2=0.006$	$\alpha_2=0.8$	$\alpha_2=0.01$	$\lambda_2=2$	$\lambda_2=0.1$	$\mu_2=10$	$\mu_2=35$	$c=-0.01$
40	0.01148	0.01478	0.01115	0.01112	0.02452	0.08454	0.00418	0.00337	0.05247	0.01149	0.01046	0.00635	0.03515	-0.0015
41	0.01068	0.01366	0.01038	0.01035	0.02362	0.07679	0.00407	0.00333	0.05196	0.01068	0.00983	0.00603	0.03340	-0.0023
42	0.00995	0.01265	0.00968	0.00965	0.02279	0.06977	0.00396	0.00330	0.05144	0.00995	0.00925	0.00575	0.03134	-0.0031
43	0.00929	0.01173	0.00904	0.00901	0.02203	0.06342	0.00387	0.00327	0.05094	0.00929	0.00871	0.00548	0.02915	-0.0037
44	0.00869	0.01090	0.00847	0.00844	0.02132	0.05767	0.00379	0.00325	0.05044	0.00869	0.00822	0.00525	0.02698	-0.0043
45	0.00815	0.01015	0.00795	0.00792	0.02068	0.05247	0.00371	0.00322	0.04995	0.00815	0.00776	0.00503	0.02489	-0.0049
46	0.00766	0.00947	0.00748	0.00746	0.02008	0.04776	0.00365	0.00320	0.04946	0.00766	0.00734	0.00484	0.02293	-0.0053
47	0.00721	0.00885	0.00705	0.00703	0.01953	0.04350	0.00359	0.00318	0.04898	0.00721	0.00695	0.00467	0.02111	-0.0058
48	0.00681	0.00829	0.00667	0.00665	0.01902	0.03965	0.00353	0.00316	0.04851	0.00681	0.00660	0.00451	0.01943	-0.0062
49	0.00645	0.00779	0.00632	0.00630	0.01855	0.03616	0.00348	0.00315	0.04804	0.00645	0.00627	0.00436	0.01789	-0.0065
50	0.00612	0.00733	0.00600	0.00599	0.01812	0.03301	0.00343	0.00313	0.04758	0.00612	0.00598	0.00423	0.01649	-0.0069
51	0.00582	0.00692	0.00572	0.00570	0.01771	0.03015	0.00339	0.00312	0.04713	0.00582	0.00571	0.00412	0.01522	-0.0072
52	0.00556	0.00655	0.00546	0.00545	0.01734	0.02757	0.00335	0.00311	0.04668	0.00556	0.00546	0.00401	0.01406	-0.0074
53	0.00531	0.00621	0.00522	0.00521	0.01699	0.02523	0.00332	0.00310	0.04624	0.00531	0.00523	0.00391	0.01301	-0.0077
54	0.00509	0.00591	0.00501	0.00500	0.01666	0.02311	0.00329	0.00309	0.04580	0.00509	0.00503	0.00383	0.01206	-0.0079
55	0.00489	0.00563	0.00482	0.00481	0.01635	0.02120	0.00326	0.00308	0.04536	0.00489	0.00484	0.00375	0.01120	-0.0081
56	0.00471	0.00538	0.00465	0.00464	0.01606	0.01947	0.00324	0.00307	0.04493	0.00471	0.00467	0.00368	0.01042	-0.0083
57	0.00455	0.00515	0.00449	0.00448	0.01579	0.01790	0.00322	0.00307	0.04451	0.00455	0.00451	0.00361	0.00971	-0.0084
58	0.00440	0.00495	0.00435	0.00434	0.01554	0.01648	0.00319	0.00306	0.04409	0.00440	0.00437	0.00355	0.00908	-0.0086
59	0.00427	0.00476	0.00422	0.00421	0.01530	0.01520	0.00318	0.00305	0.04368	0.00427	0.00424	0.00350	0.00850	-0.0087
60	0.00415	0.00459	0.00410	0.00410	0.01508	0.01404	0.00316	0.00305	0.04327	0.00415	0.00413	0.00345	0.00797	-0.0089
61	0.00404	0.00444	0.00400	0.00399	0.01486	0.01299	0.00314	0.00304	0.04286	0.00404	0.00402	0.00341	0.00750	-0.0090
62	0.00394	0.00431	0.00390	0.00390	0.01466	0.01204	0.00313	0.00304	0.04246	0.00394	0.00393	0.00337	0.00707	-0.0091
63	0.00385	0.00418	0.00382	0.00381	0.01447	0.01118	0.00312	0.00304	0.04207	0.00385	0.00384	0.00334	0.00669	-0.0091
64	0.00377	0.00407	0.00374	0.00374	0.01428	0.01040	0.00311	0.00303	0.04168	0.00377	0.00376	0.00330	0.00633	-0.0092
65	0.00370	0.00397	0.00367	0.00367	0.01411	0.00970	0.00310	0.00303	0.04129	0.00370	0.00369	0.00328	0.00602	-0.0093
66	0.00363	0.00388	0.00361	0.00360	0.01394	0.00906	0.00309	0.00303	0.04090	0.00363	0.00362	0.00325	0.00573	-0.0094
67	0.00357	0.00379	0.00355	0.00355	0.01378	0.00848	0.00308	0.00302	0.04052	0.00357	0.00357	0.00323	0.00547	-0.0094
68	0.00352	0.00372	0.00350	0.00349	0.01363	0.00796	0.00307	0.00302	0.04015	0.00352	0.00351	0.00320	0.00524	-0.0095
69	0.00347	0.00365	0.00345	0.00345	0.01348	0.00749	0.00306	0.00302	0.03978	0.00347	0.00346	0.00318	0.00502	-0.0095
70	0.00342	0.00359	0.00341	0.00340	0.01334	0.00706	0.00306	0.00302	0.03941	0.00342	0.00342	0.00317	0.00483	-0.0096
71	0.00338	0.00353	0.00337	0.00337	0.01320	0.00667	0.00305	0.00302	0.03905	0.00338	0.00338	0.00315	0.00466	-0.0096
72	0.00335	0.00348	0.00333	0.00333	0.01307	0.00632	0.00305	0.00301	0.03869	0.00335	0.00334	0.00314	0.00450	-0.0097
73	0.00331	0.00343	0.00330	0.00330	0.01294	0.00601	0.00304	0.00301	0.03833	0.00331	0.00331	0.00312	0.00436	-0.0097
74	0.00328	0.00339	0.00327	0.00327	0.01281	0.00572	0.00304	0.00301	0.03798	0.00328	0.00328	0.00311	0.00423	-0.0097
75	0.00326	0.00336	0.00325	0.00325	0.01269	0.00546	0.00304	0.00301	0.03763	0.00326	0.00326	0.00310	0.00411	-0.0097
76	0.00323	0.00332	0.00322	0.00322	0.01258	0.00523	0.00303	0.00301	0.03728	0.00323	0.00323	0.00309	0.00400	-0.0098
77	0.00321	0.00329	0.00320	0.00320	0.01246	0.00502	0.00303	0.00301	0.03694	0.00321	0.00321	0.00308	0.00391	-0.0098
78	0.00319	0.00326	0.00318	0.00318	0.01235	0.00482	0.00303	0.00301	0.03660	0.00319	0.00319	0.00308	0.00382	-0.0098
79	0.00317	0.00324	0.00317	0.00316	0.01224	0.00465	0.00302	0.00301	0.03627	0.00317	0.00317	0.00307	0.00374	-0.0098
80	0.00316	0.00322	0.00315	0.00315	0.01214	0.00449	0.00302	0.00301	0.03594	0.00316	0.00316	0.00306	0.00367	-0.0098

* Patrón Estándar Básico y Simplificado.

Tabla 2

Tasa Instantánea de Actividad para la República Mexicana, Hombres, 1970 y función de Rogers-Castro.

$$M(x) = 0.114\, e^{(-0.053(x-35) - e^{(-0.073\,(x-35))})}$$

edad	T.I.A.	R-C
5	0.00000	0.00007
10	0.00047	0.00087
15	0.00445	0.00444
20	0.01566	0.01271
25	0.02862	0.02432
30	0.03790	0.03519
35	0.04278	0.04194
40	0.04377	0.04368
45	0.04201	0.04144
50	0.03651	0.03684
55	0.03082	0.03131
60	0.02532	0.02579
65	0.01932	0.02079
70	0.01322	0.01650
75	0.00804	0.01297
80	0.00590	0.01011
85	0.00459	0.00785
90	0.00328	0.00607
95	0.00197	0.00468
100	0.00000	0.00361

Tabla 3

Esperanza de Vida Femenina para la República Mexicana, 1970 y función de Rogers-Castro.

$$M(x) = 62\, e^{(-0.022x)} + 20\, e^{(-0.12\,(x-28)\, -\, e^{(-0.3\,(x-28))})} - 6$$

edad	$(ea)_x$	R-C
5	49.03	49.54172
10	44.46	43.75617
15	39.66	38.57327
20	34.93	33.93111
25	33.68	32.22099
30	36.43	35.13247
35	33.89	30.34588
40	29.78	24.32737
45	25.61	19.62252
50	21.62	16.06329
55	18.46	13.27127
60	15.23	10.99223
65	12.47	9.07307
70	10.40	7.42110
75	7.97	5.97815
80	5.95	4.70578
85	4.63	3.57707
90	3.47	2.57204
95	2.50	1.67505
100	0.00	0.87333

Tabla 4

Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida para la República Mexicana, 1990 y función Rogers-Castro.

$$M(x) = 100\, e^{(-0.2\,(x)} + 1600\, e^{(-0.06\,(x-25) - e^{(-0.2\,(x-25)))}}$$

edad	SIDA	R-C
0	102	100.0000
1	27	81.8731
5	14	36.7879
10	11	13.5335
15	39	6.7804
20	289	144.3508
25	687	589.2809
30	869	820.7196
35	805	767.0427
40	641	618.9510
45	545	473.1769
50	444	354.6154
55	343	263.8251
60	237	195.7523
65	110	145.1003

Tabla 5

Tabla de Vida Económicamente Activa para la República Mexicana, Hombres, 1970.

x	$l_x a$	$l_x i$	$l_x a_{,\,x+n} a$	$l_x a_{,\,x+n} i$	$l_x i_{,\,x+n} a$	$l_x i_{,\,x+n} i$	${}_nh_x ia$	${}_nh_x ai$	$L_x a$	$L_x i$
5	0	89675	0		8326	81349	8285		20609	425919
10	8244	80550	8244		21794	58756	21727		65241	347408
15	29853	58393	29853		27717	30676	27577		217101	221875
20	56998	30366	56998		15467	14899	15351		320903	112896
25	71373	14677	71373		4866	9811	4818		365281	61060
30	74739	9618	74739		1111	8507	1098		371902	45072
35	74022	8302	74022		86	8215	85		364845	41092
40	71917	7972	71677	239		7972		235	352276	40192
45	68994	7904	68315	679		7904		662	334850	40794
50	64947	8160	63683	1264		8160		1222	311189	43252
55	59529	8809	57286	2243		8809		2145	279521	48198
60	52279	10086	49314	2965		10086		2791	239543	55085
65	43538	11522	39802	3736		11522		3434	192247	61889
70	33361	12789	31122	2239		12789		1986	143657	62017
75	24102	11638	21539	2563		11638		2178	97932	54459
80	15071	9936	11722	3349		9936		2675	55197	44517
85	7008	7943	5006	2002		7943		1462	23285	30300
90	2306	4581	1383	922		4581		598	6790	14064
95	410	1632	0	410		1632		228	1026	3426
100	0	225	0	0		225		0	0	401

Tabla de Vida Económicamente Activa para la República Mexicana, Hombres, 1970. (Continuación.)

x	$T_x a$	$_nm_x ia$	$_nm_x ai$	$_nd_x aa$	$_nd_x ia$	$_nd_x ai$	$_nd_x a$	$_nm_x ad$	$(ea)_x$
5	3793330	0.0156		0	41		41	0.0020	58.82
10	3772720	0.0491		51	67		118	0.0012	54.37
15	3677480	0.0628		302	140		442	0.0020	49.69
20	3460360	0.0354		851	115		966	0.0030	45.18
25	3139480	0.0113		1404	48		1452	0.0040	40.82
30	2774210	0.0026		1802	13		1816	0.0049	36.59
35	2402310	0.0002		2189	1		2190	0.0060	32.42
40	2037470		0.0006	2684		4	2688	0.0076	28.33
45	1685200		0.0018	3368		17	3385	0.0101	24.43
50	1350360		0.0035	4154		41	4195	0.0135	20.79
55	1039180		0.0066	5007		98	5105	0.0183	17.46
60	759973		0.0095	5776		174	5950	0.0248	14.53
65	520130		0.0136	6441		302	6743	0.0351	11.95
70	327883		0.0097	7020		253	7273	0.0506	9.83
75	184227		0.0147	6468		385	6853	0.0700	7.64
80	86297		0.0268	4714		673	5387	0.0976	5.73
85	31100		0.0268	2700		540	3240	0.1391	4.44
90	7816		0.0268	973		324	1298	0.1911	3.39
95	1026		0.0402	0		183	183	0.1780	2.50
100	0		0	0		0	0	0.0000	0.00

Tabla 6

Saldos Netos Migratorios, Hombres, Nuevo León, 1990-1995.

$$M(x) = 50000\, e^{(-0.26x)} + 20000\, e^{(-0.29(x-16) - e^{(-0.5(x-16))})}$$

$$+ 21000e^{(-0.25(x-32) - e^{(-0.35(x-32))})} + 3000e^{(-0.29\,(x-42) - e^{(-0.3(x-42))})}$$

$$+ 4000e^{(-0.5(x-60) - e^{(-0.4(x-60))})} + 8000e^{(0.26(x-80))}$$

edad	S.N.M.	R-C
5	13723.0443	13626.5897
10	3298.8125	3713.6792
15	6262.3924	6151.8797
20	5963.5110	5751.9505
25	490.6724	1530.7410
30	4454.7899	4986.9037
35	6970.4104	7083.7832
40	3078.3211	3561.4281
45	2192.1176	1648.4379
50	846.2960	506.5488
55	48.1631	177.0049
60	1143.0844	1551.0135
65	581.4672	458.0185
70	147.2206	623.1193
75	925.7162	2183.1218
80	7555.4183	8000.3599

Tabla 7

Función de Gompertz-Makeham para las l_x, República Mexicana 1990.

$$l_x = k a^x b^{d^x}$$

$$M(x) = 50000\, e^{(-0.015x)} + 50000\, e^{(-0.045(x-45) - e^{(-0.045(x-45))})} - 40000 e^{(0.08(x-80))} + 50000$$

edad	G-M	R-C
0	100000.0000	100127.6948
5	95560.5674	97001.4874
10	95194.4835	94815.0952
15	94808.0294	93779.0349
20	94387.4093	93788.4102
25	93910.0381	94384.3448
30	93339.0205	94925.6373
35	92614.2984	94826.3673
40	91638.6904	93708.2962
45	90256.5052	91419.3906
50	88222.4753	87956.0713
55	85161.2042	83349.0830
60	80526.6576	77552.8327
65	73596.9012	70349.2102
70	63594.3034	61256.3200
75	50097.7445	49421.7982
80	33885.7861	33474.7074

Bibliografía.

1 CERVERA, MIGUEL Y PARTIDA, VIRGILIO, *Tablas De Vida Económicamente Activa para la República Mexicana*, Ed. Ceniet, Secretaria del Trabajo y Previsión Social, 1977.

2 LEGUINA, JOAQUÍN, *Fundamentos de Demografía*, Ed Siglo XXI, Madrid 1972.

3 MINA VALDÉS, ALEJANDRO, *Curso Básico de Demografía*, Vínculos Matemáticos # 118, 1996, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias.

4 MINA VALDÉS, ALEJANDRO, *Elaboración y Utilidad de la Tabla Abreviada de Mortalidad*, Vínculos Matemáticos # 138, 1992, Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias.

5 ROGERS, ANDREI Y CASTRO, LUIS J., *Patrones Modelo de Migración*, Revista Demografía y Economía tomo XVI: 3, 1982.