3
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

C-DETERMINACION EN ABANICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

Matemática

P R E S E N T A :

Margareta Boege von Mentz

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Alejandro Illanes Mejía

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

C-DETERMINACIÓN EN ABANICOS

realizado por Margareta Boege von Mentz

con número de cuenta 9455965-1, pasante de la carrera de matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Álvarez	
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	
Suplente	M. en C. Gerardo Acosta García.	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. César Guevara

Para mis papás,
y para mis hermanos.

Para Memo,

Para mis amigos, en especial para Beatriz y Dafne.

Quisiera agradecerle a Alejandro Illanes por su apoyo, paciencia y comprensión a lo largo de mi carrera; primero los cálculos, luego las topologias y finalmente la elaboración de esta tesis (la agradable discusión de ideas y la tortuosa escritura).

Quisiera agradecerle a Javier Páez por su paciencia, desde los primeros no entiendo nada, tareas y dudas, hasta la ayuda en los últimos momentos de elaboración de esta tesis, y en mi batalla contra las computadoras.

Finalmente quisiera agradecer a Sergio Macias, Raúl Escobedo y Gerardo Acosta por el trabajo de leer esta tesis.

Índice General

Introducción 3

Preliminares 5

1 Los abanicos suaves se pueden encajar en el abanico de Cantor 13

2 Los conjuntos de la forma $C(E, X)$ son retractos absolutos 27

3 Los abanicos suaves están C-determinados. 47

4 Los abanicos no están C-determinados 63

Introducción

Se trata de una familia de continuos. Los continuos son espacios métricos, compactos y conexos. Los más simples que se puede uno imaginar son un intervalo cerrado y una circunferencia. Bueno, claro, y un punto, pero ese no tiene mucha gracia. Después de éstos, en mi opinión siguen los abanicos. Los abanicos constan de arcos unidos por un sólo punto. Más que abanicos, parecen arañas.

Hay dos tipos de abanicos: los que tienen las patas estiradas y los que no. Los primeros se llaman suaves, los segundos no suaves. En principio se definen en abstracto, a través de propiedades como por ejemplo no contener círculos. En esta etapa no podemos saber siquiera si viven en un plano. Pero en el primero de los capítulos de esta tesis llegamos a la conclusión de que podemos saber cómo se ven todos los abanicos suaves: como subconjuntos del abanico de Cantor. El abanico de Cantor se construye en $\mathbb{R}^2$ uniendo cada punto del conjunto de Cantor (que está contenido en el intervalo $[0, 1]$) con el punto $(\frac{1}{2}, 1)$.

A cada continuo le podemos asociar un hiperespacio. El hiperespacio $C(X)$ de un continuo X es el conjunto de todos sus subcontinuos. Es decir, cada subcontinuo se vuelve un punto en $C(X)$.

¿Cómo se ve el hiperespacio $C(X)$ de un abanico? en el tercer capítulo de esta tesis (con ayuda del segundo capítulo) daremos una descripción exacta del hiperespacio de los abanicos suaves (otra vez, los abanicos suaves son fáciles de describir, en cambio los que no son suaves...). Resulta que si el abanico tiene n patas, su hiperespacio es un cubo en $\mathbb{R}^n$ con n aletitas pegadas. Y si X tiene un número infinito de patas, entonces su hiperespacio es un cubo de dimensión infinita con un número infinito de aletitas pegadas en una de sus caras.

Si viviéramos en el mundo de los hiperespacios y nos encontráramos con dos iguales, ¿podríamos decir que provienen de dos espacios iguales? en general no. Las familias de continuos para las cuáles se puede contestar esta pregunta de manera afirmativa se dice que están C-determinadas.

Aprovechando que ya sabemos cómo son los hiperespacios de abanicos suaves, es fácil concluir que si me encuentro con dos hiperespacios iguales, y sé que provienen de abanicos suaves, entonces los abanicos correspondientes son iguales. Es decir, los abanicos suaves si están C-determinados.

En el capítulo cuatro se describen dos abanicos (no suaves) que son distintos y sin embargo tienen hiperespacios iguales. Es decir, si no se tiene la condición de suavidad los abanicos no están C-determinados.

Preliminares

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. No vamos a considerar al conjunto vacío como continuo.

0.1 Lema. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, se tiene que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y implica que $y = f(x)$.

Demostración. Si f es continua claramente se cumple la afirmación. Por tanto sólo tenemos que mostrar el regreso. Sea $\epsilon > 0$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converja a un elemento x de X. Supongamos que para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $d(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon$. Como Y es compacto, y el conjunto $\{f(x_n) : d(f(x_n), f(x) > \epsilon\}$ tiene una cantidad infinita de elementos, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$tiene una subsucesión convergente $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ tal que para toda k, se tiene que $d(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \epsilon$. Supongamos que *lím* $x_{n_k} = y$. Entonces, como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a x, tenemos que $y = f(x)$. Pero $d(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \epsilon$ implica que $d(y, f(x)) \geq \epsilon$. Esta contradicción nos muestra que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ y, por tanto, f es continua.■

0.2 Lema. Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua si y sólo si toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X que converja a alguna $x \in X$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converja a $f(x)$.

Demostración. Claramente la condición se cumple si f es continua. Por tanto, supongamos que toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X con que converge a alguna $x \in X$ tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converje a $f(x)$. Sea $\epsilon > 0$. Supongamos que para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$, $d(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon$. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $d(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \epsilon$ y $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ converge a y, con $y \in Y$. Como $d(f(x_{n_k}), f(x)) \geq \epsilon$,

$y \neq f(x)$. Pero $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a x y por hipótesis debería tener una subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$ que converja a $f(x)$. Pero sabemos que $f(x_{n_{k_l}})$ converge a y y $y \neq f(x)$. Esta contradicción nos muestra que $f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ y, por tanto, f es continua.■

Si X es un continuo entonces llamamos *subcontinuo* a un continuo contenido en X. El *hiperespacio* $C(X)$ asociado a X es el conjunto de todos los subcontinuos de X, es decir, $C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un continuo}\}$.

Si X es un continuo, entonces el *hiperespacio* 2^X es el conjunto de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Observemos que $C(X) \subset 2^X$.

Podemos darle una métrica a 2^X (y, en consecuencia, a $C(X)$) de la siguiente manera: dados $\epsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos $N(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ con } d(a,x) < \epsilon\}$, donde d es la métrica de X. A $N(\epsilon, A)$ se le llama la nube de radio ϵ con centro en A. La métrica de Hausdorff para 2^X se define como

$$H(A, B) = inf\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

Intuitivamente dos conjuntos estan cerca con la métrica de Hausdorff si son parecidos en tamaño y forma y están casi encimados. La demostración de que, efectivamente, es una métrica se puede encontrar en [5, Proposición 1.1].

Es conocido que $C(X)$ es compacto y conexo. No lo vamos a probar aquí pero se puede encontrar una demostración en [5, capítulos 3 y 5]. Por tanto $C(X)$ es un continuo y podemos pensar en $C(C(X))$. Y le damos la métrica de Hausdorff correspondiente.

Si X es un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X, entonces definimos el *límite inferior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como $\lim \inf A_n = \{x \in X : \text{existe una sucesión } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de elementos de } X \text{ tal que } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ convrge a } x \text{ y } x_n \in A_n \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}$. Y definimos el *límite superior de* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ como $\lim \sup A_n = \{x \in X : \text{existe una sucesión de números naturales } n_1 < n_2 < \ldots \text{ y existen puntos } x_{n_k} \in A_{n_k} \text{ (para toda } k) \text{ tales que } \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ converge a } x\}$.

La definición usual de $lím \sup A_n$ y $lím \inf A_n$ no es la del párrafo anterior. Sin embargo, se puede ver en [5, Proposición 2.2] que las dos definiciones (ésta y la que se da usualmente) son equivalentes.

Se puede probar que:

(1) $lím \inf A_n \subset lím \sup A_n$ [5, Proposición 2.1].

(2) Una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$en $C(X)$ converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in C(X)$ si y sólo si $lím \inf A_n = A = lím \sup A_n$ [5, Teorema 2.1].

Por lo tanto si tenemos una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(X)$ y queremos probar que converge a un conjunto A, basta con ver que $lím \sup A_n \subset A \subset lím \inf A_n$.

0.3 Lema. Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua. Entonces la función inducida $\hat{f} : C(X) \to C(Y)$ dada por $\hat{f}(A) = \{f(a) : a \in A\}$ es también una función continua.

Demostración. Primero observemos que, como X es compacto, si $A \subset X$ es cerrado entonces A es compacto. Como f es una función continua, $f(A)$ también es un compacto. Si además A es conexo, $f(A)$ también es conexo, y así $\hat{f}$ está bien definida.

Ahora sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ que converge a algun A en $C(X)$. Mostraremos que $\{\hat{f}(A_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\hat{f}(A)$.

Sea $y \in lím \sup \hat{f}(A_n)$. Entonces existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y existen puntos $y_{n_k} \in \hat{f}(A_{n_k})$ (para toda k) tales que $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a y. Como, para toda k, $y_{n_k} \in \hat{f}(A_{n_k})$ tenemos que $y_{n_k} = f(a_{n_k})$ con $a_{n_k} \in A_{n_k}$. Como X es compacto, $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{a_{n_{k_l}}\}_{l=1}^{\infty}$convergente a una $a \in X$. Entonces $a \in lím \sup A_n = A$. Como f es una función continua, $\{f(a_{n_{k_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ converge a $f(a)$. Pero ya sabíamos que $f(a_{n_{k_l}})$ converge a y. Entonces $y = f(a) \in \hat{f}(A)$.

Ahora sea $x \in f(A)$. Entonces $x = f(a)$ para alguna $a \in A$. Como $A = lím\ A_n$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a con $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde $f(a_n) \in \hat{f}(A_n)$ y, como f es continua, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(a)$. De aquí que $x = f(a) \in lím \inf f(A_n)$. Hemos probado entonces que $lím \sup f(A_n) \subset f(A) \subset lím \inf f(A_n)$.

Por tanto $lím\ \hat{f}(A_n) = \hat{f}(A)$ y $\hat{f}$ es continua.■

0.4 Lema. Sea X un continuo.

(i) Sea $B \in C(X)$. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en 2^X tal que A_n converge a A, entonces $\{A_n \cup B\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $A \cup B$.

(ii) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en 2^X, $A = lím\ A_n$, $B = lím\ B_n$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \subset B_n$ entonces $A \subset B$.

Demostración. (i) Sea $x \in lím\sup A_n \cup B$. Entonces existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k} \cup B$ (para toda k) tales que $\{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x. Si una infinidad de $x_{n_k} \in B$ entonces y $x = lím\ x_n$, como B es cerrado, $x \in B \subset A \cup B$. Por lo tanto podemos suponer que sólo un número finito de x_{n_k} está en B.

Entonces podemos suponer, sin perder generalidad, que $x_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Pero, como $A = lím\ A_{n_k}$ y $x_{n_k} \to x$, $x \in A \subset A \cup B$.

Ahora sea $x \in A \cup B$. Si $x \in B$, la sucesión constante x converge a x y pertenece a $A_n \cup B$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así que $x \in lím\inf A_n$. Y si $x \in A$, como $A = lím\ A_n$ tenemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to x$, con $x_n \in A_n \subset A_n \cup B$. En cualquier caso $x \in lím\inf A_n \cup B$.

Por tanto $lím\sup A_n \cup B \subset A \cup B \subset lím\inf A_n \cup B$. Por tanto $lím\ A_n \cup B = A \cup B$.

(ii) Sea $a \in A$. Como $A = lím\ A_n$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a. Pero como $A_n \subset B_n$, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a a tal que $a_n \in B_n$. Es decir, $a \in lím\inf B_n = B$.■

Para dar una idea más clara sobre cómo pueden ser los hiperespacios $C(X)$ de continuos vamos a considerar dos casos especiales, que además nos van a ser útiles más tarde.

(1) Si $X = [0,1]$ vamos a construir un modelo en $\mathbb{R}^2$ de $C(X)$. En este caso todos los elementos de $C(X)$ son intervalos (o puntos). A cada intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ le vamos a asociar el punto en $\mathbb{R}^2$ que tiene como primera coordenada el punto medio de $[a,b]$ y como segunda coordenada la longitud de $[a,b]$. Es decir, definimos $g : C(X) \to \mathbb{R}^2$ como $g([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Entonces g es una función continua e inyectiva. Como $C(X)$ es compacto, g es un homeomorfismo en su imagen. Es fácil ver que la imagen de g es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ que tiene como vértices a los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

Además,

(a) $X = [0,1]$ está representado por el punto $(\frac{1}{2}, 1)$.

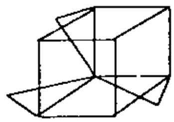
(b) Los conjuntos de un sólo punto están representados por los puntos en la base del triángulo, pues son aquellos que cumplen que $b - a = a - a = 0$.

(c) Los intervalos de la forma $[0, b]$ y $[a, 1]$ quedan representados por los puntos en los lados del triángulo que unen a $(0,0)$ con $(\frac{1}{2}, 1)$ y a $(1,0)$ con $(\frac{1}{2}, 1)$ respectivamente.

(2) Ahora consideremos el espacio X que consta de tres segmentos I_1, I_2, I_3 de longitud uno, pegados por uno de sus extremos, p.

Notemos que hay dos tipos de elementos en $C(X)$: los que tienen a p y los que no tienen a p. Estos últimos tienen que estar contenidos en alguno de los segmentos. Si $A \in C(X)$ tiene a p entonces A es la unión de $A \cap I_1$, $A \cap I_2$ y $A \cap I_3$. Cada uno de estos conjuntos es un segmento (posiblemente degenerado) y uno de sus extremos es p, de manera que cada uno de ellos está completamente determinado por su longitud. De manera que el conjunto A queda determinado exactamente por tres longitudes, a saber, la longitud, a, de $A \cap I_1$, la longitud, b, de $A \cap I_2$ y la longitud, c, de $A \cap I_3$. Por tanto a A le podemos asociar la terceta (a, b, c). No es difícil convencerse de que la asociación $A \to (a, b, c)$ es un homeomorfismo del conjunto $T = \{A \in C(X) : p \in A\}$ en el cubo sólido $I^3 = I \times I \times I \subset \mathbb{R}^3$.

A este cubo nos falta añadirle los elementos de $C(X)$ que están contenidos en I_1, I_2 e I_3. Ya sabemos por el ejemplo anterior que $C(I_n)$, $n = 1, 2, 3$, es un triángulo. Para saber cómo tenemos que pegar estos tres triángulos, tenemos que ver, por ejemplo, qué hay de común en T y $C(I_1)$. Un $A \in T \cap C(I_1)$ tiene que ser un subintervalo de I_1 que contenga a p. Por lo que A está representado en el cubo I^3 por un punto de la forma $(a, 0, 0)$ y en $C(I_1)$ por un punto en una de las orillas del triángulo. De manera que una de las orillas del triángulo $C(I_1)$ debe pegarse a la arista de I^3 que corresponde al eje x. De manera similar se pegan $C(I_2)$ y $C(I_3)$. Así, $C(X)$ queda representado de la siguiente manera:



Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado (no vacío) de 2^X. Una *función de Whitney para* $\mathcal{H}$ es una función continua $u : \mathcal{H} \to [0, R]$, $R \in \mathbb{R}$, tal que

(a) $u(A) = 0$ si y sólo si A es un conjunto de un solo punto.

(b) $u(A) = R$ si y sólo si $A = X$.

(c) Si $A, B \in \mathcal{H}$ y $A \subsetneq B$ entonces $u(A) < u(B)$.

En particular $\mathcal{H}$ puede ser 2^X o $C(X)$. Intuitivamente una función de Whitney mide el "tamaño" de los elementos de $\mathcal{H}$.

En [5, Proposición 4.1] se pueden encontrar ejemplos de funciones de Whitney, de manera que éstas efectivamente existen.

Un *nivel de Whitney* para $C(X)$ es un conjunto de la forma $\mu^{-1}(t) = \{A \in C(X) : \mu(A) = t\}$, donde $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ es una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$.

Un *encaje* es una función que es un homeomorfismo en su imagen. En [6, Teorema 1.2] se puede encontrar el siguiente resultado: sea $W(\mathcal{H})$ el espacio de funciones de Whitney para $\mathcal{H}$. Entonces existe un encaje $\phi : W(\mathcal{H}) \to W(2^X)$ tal que $\phi(w)$ es una extensión de w para toda $w \in W(\mathcal{H})$.

En particular este teorema nos dice que si tenemos una función de Whitney definida en un subconjunto cerrado de $C(X)$ existe una función de Whitney para todo $C(X)$ que en nuestro cerrado coincide con la que ya tenemos. Este resultado fue originalmente probado por L. E. Ward, Jr. en [13].

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Un *arco ordenado en* 2^X de A a B es una función continua $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $s < t$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

En [5, Teorema 5.2] se demuestra que dados $A, B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$ siempre hay un arco ordenado de A a B.

Un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Un continuo es ***hereditariamente unicoherente*** si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

Ejemplos:

(3) El intervalo $[0, 1]$ es hereditariamente unicoherente.

(4) Un círculo no es unicoherente. Por tanto si un continuo contiene una curva cerrada simple, no es hereditariamente unicoherente.

Un *punto de ramificación* en un continuo X es un punto $p \in X$ para el cual existen tres arcos α, β y γ en X tales que $\alpha \cap \beta = \{p\}$, $\beta \cap \gamma = \{p\}$ y $\gamma \cap \alpha = \{p\}$.

Un *abanico* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente que tiene un sólo punto de ramificación.

El espacio $X = I_1 \cup I_2 \cup I_3$ del Ejemplo (2) es un abanico.

0.5 Lema. Si X es un abanico y $a, b \in X$ con $a \neq b$ entonces existe un único arco en X que los une. Vamos a denotar a este arco por ab.

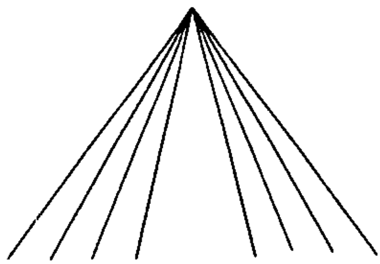
Demostración. Supongamos que existen dos arcos diferentes de a a b que llamaremos A_1 y A_2. Entonces $\{a, b\} \subset A_1$ y $\{a, b\} \subset A_2$. Por tanto $\{a, b\} \subset A_1 \cap A_2$. Como X es hereditariamente unicoherente, $A_1 \cap A_2 \in C(X)$. Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, es un subarco de A_1 que contiene a los puntos $\{a, b\}$, de modo que $A_1 \cap A_2 = A_1$. De manera análoga podemos probar que $A_1 \cap A_2 = A_2$. Por tanto, $A_1 = A_2$.■

Si X es un abanico, un *punto extremo* de X es un punto p tal que p es un punto extremo de cualquier arco de X que lo contenga. Denotaremos por $E(X)$ al conjunto de los puntos extremos de X.

Un abanico X con punto de ramificación v es un *abanico suave* si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $x_n \to x$ se cumple que $vx_n \to vx$.

Ejemplos:

(5) El abanico de Cantor $\{(1-t)(\frac{1}{2},1)+tp \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1] \text{ y } p \in C\}$, donde C es el conjunto de Cantor clásico, es un abanico suave.



(6) El siguiente es un abanico que no es suave.

Se dice que una familia Λ de continuos está C-determinada si $X, Y \in \Lambda$ y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$ entonces X es homeomorfo a Y.

Capítulo 1

Los abanicos suaves se pueden encajar en el abanico de Cantor

En este capítulo demostraremos que todo abanico suave se puede ver como un subconjunto del abanico de Cantor, que es el ejemplo (6) del capítulo anterior.

Para ello, primero veremos la manera de meter al conjunto de puntos extremos de un abanico suave en el conjunto de Cantor.

Es conocido que el conjunto de Cantor tiene las siguientes propiedades:

Es cerrado porque se puede construir como la intersección de conjuntos cerrados [10, Proposición 1.2]. Es un compacto por ser un cerrado en un compacto.

- Para todo conjunto A métrico , compacto y totalmente disconexo existe un encaje $g : A \to C$. [10, Teorema 3.21]

-El conjunto de Cantor C es homeomorfo a $C^{\infty} = C \times C \times ....$[10, Proposición 3.2]

Hay muchas maneras de construir al conjunto de Cantor. La que vamos a utilizar es la siguiente: $C = \prod_{n=1}^{\infty}\{0,4\}_n$, donde para cada número natural n, $\{0,4\}_n$ representa una copia del espacio discreto $\{0,4\}$. En [10, Teorema 2.9] se puede ver una demostración de que esta manera de ver al conjunto de Cantor y la manera clásica son equivalentes.

Al conjunto C lo consideramos con la siguiente distancia: dados $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...) \in C$, $d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i}$.

1.1 Proposición. d es una distancia en C.

Demostración.

(i) $d(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{4^i} = 0$. Si $d(x,y) = 0$ entonces, como para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{|x_i - y_i|}{4^i} \geq 0$, su suma es 0 sólo si cada $|x_i - y_i|$ es cero. Pero esto quiere decir que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i = y_i$. Es decir, $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ porque $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$.

(iii)

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{4^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i| + |y_i - z_i|}{4^i} = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{4^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|y_i - z_i|}{4^i} = d(x,y) + d(y,z). \blacksquare
\end{aligned}
$$

En [10, Proposición 2.2] se puede ver una prueba de que la topología inducida por d es la misma que la que tiene C como espacio producto.

1.2 Observación. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$.

Demostración. Sabemos que para $r > 1$, $1 + r + r^2 + ... = \frac{1}{1-r}$. Sea $r = \frac{1}{4}$. Entonces $1 + \frac{1}{4} + ... = \frac{4}{3}$ y por lo tanto $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.$\blacksquare$

Notación: Sea $D = \{d(x,y) : x, y \in C\}$. Observemos que los elementos de D son de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{4^i}$ con $a_i \in \{0, 4\}$.

Estamos interesados en probar que D es totalmente disconexo. La siguiente proposición nos será útil para tal fin.

1.3 Proposición. Sean $r, s \in D$. Supongamos que $r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{4^i}$ y $s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{4^i}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que para $i < n$ se cumple que $r_i = s_i$ pero $r_n \neq s_n$. Entonces $r < s$ si y sólo si $r_n < s_n$, es decir, si $r_n = 0$ y $s_n = 4$.

Demostración. Sea $S = \frac{s_1}{4} + ... + \frac{s_{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{r_1}{4} + ... + \frac{r_{n-1}}{4^{n-1}}$. Supongamos primero que $r_n = 0$ y $s_n = 4$ entonces

$$
\begin{aligned}
r &\leq S + \frac{0}{4^n} + \frac{4}{4^{n+1}} + \frac{4}{4^{n+2}} + ... \\
&= S + \frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S + \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} \\
&< S + \frac{1}{4^{n-1}} = S + \frac{4}{4^n} + \frac{0}{4^{n+1}} + \frac{0}{4^{n+2}} + \dots \\
&\leq s.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $r < s$. Supongamos ahora que $r < s$. Como $r_n \neq s_n$ hay dos posibilidades: $r_n = 0$ y $s_n = 4$ o $r_n = 4$ y $s_n = 0$. La primera es la que queremos. Si suponemos que la segunda es la que se da, un argumento semejante al de el párrafo anterior nos dice que $s < r$ lo cual es una contradicción. ■

Denotemos por 0 al elemento $(0, 0, 0, \dots) \in C$. Dados dos elementos x y y en C vamos a decir que $x \leq y$ si la distancia $d(x, 0) \leq d(y, 0)$. Considerando esto, la proposición anterior no sólo nos dá una manera rápida de decidir si un elemento de D es mayor que otro, sino también nos dice que un elemento de C es mayor que otro si la primera coordenada en que difieren lo es.

Sean $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots)$; $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots) \in C$. Entonces la relación $\leq$ definida arriba cumple:

(1) $\hat{x} \leq \hat{y}$ y $\hat{y} \leq \hat{x}$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{y}$.

Por definición $\hat{x} \leq \hat{y}$ y $\hat{y} \leq \hat{x}$ quiere decir que $d(\hat{x}, 0) \leq d(\hat{y}, 0)$ y $d(\hat{y}, 0) \leq d(\hat{x}, 0)$. Y entonces $d(\hat{x}, 0) = d(\hat{y}, 0)$. Como $d(\hat{x}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - 0|}{4^n}$ y $d(\hat{y}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n - 0}{4^n}$, por la proposición anterior $d(\hat{x}, 0) = d(\hat{y}, 0)$ es equivalente a que $x_n = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $\hat{x} = \hat{y}$.

(2) $\hat{x} \leq \hat{y}$ o $\hat{y} \leq \hat{x}$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n \leq y_n$ o $y_n \leq x_n$. Si para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_n$ entonces $x = y$. Si no es así, sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para toda $i \in \{1, \dots, k-1\}$ y $x_k \neq y_k$. Supongamos que $x_k < y_k$. Entonces, como $x_k \neq y_k$ tenemos que $x_k = 0$ y $y_k = 4$. Como $d(\hat{x}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{4^n}$ y $d(\hat{y}, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|}{4^n}$, por la proposición anterior tenemos que $d(\hat{x}, 0) \leq d(\hat{y}, 0)$ y entonces $\hat{x} \leq \hat{y}$.

- Si $\{\hat{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\hat{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en C tales que $\hat{x}_n \to x$, $\hat{y}_n \to y$ y, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\hat{x}_n \leq \hat{y}_n$ entonces $x \leq y$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\hat{x}_n \leq \hat{y}_n$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $d(\hat{y}_n, 0) - d(\hat{x}_n, 0) \geq 0$. Pero entonces $d(y, 0) - d(x, 0) = lim$ $(d(\hat{y}_n, 0) - d(\hat{x}_n, 0)) \geq 0$, y $x \leq y$.

1.4 Lema. El conjunto $D \subset I = [0, 1]$ es totalmente disconexo.

Demostración. Probaremos que para cualesquiera dos elementos r, $s \in D$, con $r < s$, existe $t \notin D$ con $r < t < s$. Con ésto basta para que D sea totalmente disconexo.

Sean r, $s \in D$ con $r < s$. Sabemos que los elementos de D son de la forma $r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i}{4^i}$ y $s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{4^i}$ con r_i, $s_i \in \{0,4\}$. Como en la proposición anterior, sea n tal que $r_i = s_i$ para $i < n$ y $r_n \neq s_n$. Como $r < s$, por la proposición anterior, $r_n = 0$ y $s_n = 4$. Sea $S = \frac{s_1}{4} + ... + \frac{s_{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{r_1}{4} + ... + \frac{r_{n-1}}{4^{n-1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} r &= S + \frac{0}{4^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{r_i}{4^i} \\ s &= S + \frac{4}{4^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i}{4^i}. \end{aligned}$$

Sea $t = S + \frac{2}{4^n}$. Vamos a demostrar que:

(i) $r < t < s$. (Estas dos desigualdades no son consecuencia de la proposición anterior porque ésta era sólo para elementos de D. Sin embargo, la demostración es casi igual).

$$\begin{aligned} r &\leq S + \frac{0}{4^n} + \frac{4}{4^{n+1}} + \frac{4}{4^{n+2}} + ... \\ &= S + \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3} \\ &< S + \frac{2}{4^n} = t. \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $r < t$.

Además,

$$s \geq S + \frac{4}{4^n} > S + \frac{2}{4^n} = t.$$

Y con esto terminamos la demostración de (i).

(ii) $t \notin D$. Supongamos que $t \in D$. Es decir, $t = S + \frac{2}{4^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{4^i}$ con $t_i \in \{0,4\}$.

Primero veremos que para $i < n$, $t_i = s_i = r_i$. Supongamos que para alguna $i < n$ $t_i \neq s_i$. Sólo hay dos casos posibles: $t_i = 0$ y $t_i = 4$.

Si $t_i = 0$, entonces como $t_i \neq s_i$, sabemos que $r_i = s_i = 4$. De donde, como $i < n$, y $t_i < r_i$, podemos concluir que $t < r$. Pero ya habíamos demostrado que $r < t$.

Si $t_i = 4$, entonces $s_i = r_i = 0$. De donde $t > s$. Estas dos contradicciones muestran que $t_i = s_i = r_i$ para $i < n$. Es decir $t = S + \frac{2}{4^n} = S + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{t_i}{4^i}$.

La igualdad $\frac{2}{4^n} = \frac{t_n}{4^n} + \frac{t_{n+1}}{4^{n+1}} + ...$ implica que $t_n = 0$ (porque si t_n fuera 4, el lado derecho de la igualdad sería mayor que el lado izquierdo). Pero

$$\frac{2}{4^n} = \frac{t_{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{t_{n+2}}{4^{n+2}} + ... \leq \frac{4}{4^{n+1}} + \frac{4}{4^{n+2}} + ... = \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{3} < \frac{2}{4^n}.$$

Esta contradicción muestra que no es posible que t sea de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{4^i}$ con $t_i \in \{0, 4\}$, y entonces $t \notin D$. ■

1.5 Proposición. Sea A un subconjunto cerrado y no vacío de C. Sea φ la función de C en A que le asocia a cada elemento x de C el elemento a en A tal que la distancia de x a a es mínima. Entonces φ está bién definida y es continua.

Demostración.

Veamos que φ está bien definida. Para esto sea $x \in C$. Por la compacidad de A existe un punto a en A tal que $d(x, a)$ es mínima. Pero para que φ esté bién definida, quisiéramos que para cada x en C sólo hubiera un punto a en A con tal propiedad. Si hubiera dos puntos a y a' en A tales que su distancia a x es mínima, tendríamos que $d(x, a) = d(x, a')$. A continuación veremos que esto no es posible si a y a' son distintos.

Lo que vamos a demostrar es que si x, y, $z \in C$ y $d(x, y) = d(z, y)$ entonces $x = z$. Si $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$ y $z = (z_1, z_2, ...)$, basta con probar que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_i = z_i$.

Supongamos que no es así. Sea $n \in \mathbb{N}$ la primera coordenada en que difieren, es decir, $x_i = z_i$ para $i < n$ y $x_n \neq z_n$. Hay dos posibilidades: $x_n = 0$ o $x_n = 4$.

Si $x_n = 0$ entonces $z_n = 4$. Sea $R = \frac{|x_1 - y_1|}{4} + ... + \frac{|x_{n-1} - y_{n-1}|}{4^{n-1}} = \frac{|z_1 - y_1|}{4} + ... + \frac{|z_{n-1} - y_{n-1}|}{4^{n-1}}$. Tenemos que

$$d(x, y) = R + \frac{y_n}{4^n} + \frac{|x_{n+1} - y_{n+1}|}{4^{n+1}} + ...$$

y esto es igual a

$$d(z, y) = R + \frac{4 - y_n}{4^n} + \frac{|z_{n+1} - y_{n+1}|}{4^{n+1}} + ...$$

Lo cual contradice a la Proposición 1.3 ya que $y_n \neq 4 - y_n$. Si $x_n = 4$ obtenemos de manera similar la misma contradicción. Por tanto, φ está bien definida.

Ahora demostraremos que φ es continua. Sea $\{\widehat{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de C que converge a x. Supongamos que $\{\varphi(\widehat{x}_n)\}_{n\in N}$ converge a $y \in C$. Probaremos que $y = \varphi(x)$. (ver Lema 0.1)

Como cada $\varphi(\widehat{x}_n)$ está en A, $\varphi(\widehat{x}_n) \to y$ y A es cerrado, tenemos que $y \in A$. Entonces por (i) basta con probar que $d(x,y) = d(x,\varphi(x))$. Por la definición de φ, $d(x,\varphi(x)) = mín$ $\{d(x,a) : a \in A\}$. Como y está en A, $d(x,y) \geq d(x,\varphi(x))$.

Usando otra vez la definición, ahora de $\varphi(x_n)$, obtenemos que $d(x_n,\varphi(x_n)) \leq d(x_n,\varphi(x))$. Pero entonces

$$d(x,y) = lím\ d(x_n,\varphi(x_n)) \leq lím\ d(x_n,\varphi(x)) = d(x,\varphi(x)).$$

Por tanto, $d(x,y) = d(x,\varphi(x))$. Y entonces $x = \varphi(x)$, con lo cual terminamos la demostración de la continuidad de φ.■

1.6 Lema. Sea A un subconjunto cerrado de C y sea $g : A \to C$ un encaje. Entonces existe un encaje $F : C \to g(A) \times C \times C$ tal que $F(a) = (g(a), 0, 0)$ para toda $a \in A$.

Demostración. Sea $x \in C$. Consideremos las siguientes funciones:

(i) La función φ de C en A que le asocia a cada elemento x de C el elemento a en A tal que la distancia de x a a es mínima. La proposición anterior nos dice que ésta es una función continua.

(ii) Sea $x = (x_1, x_2, \ldots) \in C$. Sabemos que $\varphi(x) \in A \subset C$. Supongamos que $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \varphi_n(x)| \in \{0, 4\}$. Definimos $f : C \to C$ como $f(x) = (|x_1 - \varphi_1(x)|, |x_2 - \varphi_2(x)|, \ldots)$.

Probaremos que la función f, así definida, es continua. Para cada coordenada, la identidad es continua, φ es continua, su diferencia es continua, el valor absoluto es una función continua y eso es todo.

Ahora veremos que para toda x, $y \in C$, f cumple que si $\varphi(x) = \varphi(y)$ y $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$. Probaremos que $x_n = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Como $\varphi(x) = \varphi(y)$, $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$. Como $f(x) = f(y)$, $|x_n - \varphi_n(x)| = |y_n - \varphi_n(y)| = |y_n - \varphi_n(x)|$. Tenemos dos posibilidades: $\varphi_n(x) = 0$ o $\varphi_n(x) = 4$. Si $\varphi_n(x) = 0$, tenemos que $x_n = y_n$. Si $\varphi_n(x) = 4$, entonces $4 - x_n = |x_n - 4| = |y_n - 4| = 4 - y_n$. En cualquier caso $x_n = y_n$ y, podemos concluir que, $x = y$.

(iii) Recordemos que tenemos un encaje $g : A \to C$.

Ahora consideremos los siguientes subconjuntos de C: $A_1 = \{x \in C : x \leq \varphi(x)\}$ y $A_2 = \{x \in C : x \geq \varphi(x)\}$. Claramente $A = A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cap A_2 = A$. Además, A_1 y A_2 son cerrados por la siguiente razón: sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A_1 que converge a $x \in C$. Como cada $x_n \in A_1$, $x_n \leq \varphi(x_n)$. Entonces $x = lím\ x_n \leq lím\ \varphi(x_n) = \varphi(x)$. Es decir, $x \in A_1$. Similarmente, A_2 también es cerrado.

Vamos a juntar estas funciones para definir $F : C \to g(A) \times C \times C$ como:

$$F(x) = \begin{cases} (g(\varphi(x)), f(x), \widehat{0}) & \text{si } x \in A_1 \\ (g(\varphi(x)), \widehat{0}, f(x)) & \text{si } x \in A_2 \end{cases}$$

donde $\widehat{0} = (0, 0, ...) \in C$.

Observemos que $x = \varphi(x)$ si y sólo si $x \in A$. Por tanto $f(x) = (0, 0, ...) = \widehat{0}$ si y sólo si $x \in A$.

Para $a \in A$ las definiciones coinciden porque en ese caso $f(a) = \widehat{0}$, y entonces $F(a) = (g(a), \widehat{0}, \widehat{0})$.

Además, F es una función contínua tanto en A_1 como en A_2, y por tanto F es contínua.

Falta ver que F es inyectiva. Sean $x, y \in C$ con $x \neq y$. Si $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, como g es inyectiva, $g(\varphi(x)) \neq g(\varphi(y))$. En este caso las primeras coordenadas de $F(x)$ y $F(y)$ son distintas y $F(x) \neq F(y)$.

Ahora supongamos que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Tenemos tres posibilidades: $x, y \in A_1$; $x, y \in A_2$; y $x \in A_1$ y $y \in A_2$.

En el caso $x, y \in A_1$, $F(x) = (g(\varphi(x)), f(x), \widehat{0})$ y $F(y) = (g(\varphi(y)), f(y), \widehat{0})$. Como $\varphi(x) = \varphi(y)$, $g(\varphi(x)) = g(\varphi(y))$. Como queremos que F sea inyectiva, tenemos que probar que $f(x) \neq f(y)$. Supongamos que $f(x) = f(y)$. Entonces por (ii), podemos concluir que $x = y$, lo cual es una contradicción, pues habíamos tomado $x \neq y$. El caso $x, y \in A_2$ se trata de la misma manera.

Por último sean $x \in A_1$ y $y \in A_2$. Entonces $F(x) = (g(\varphi(x)), f(x), \widehat{0})$ y $F(y) = (g(\varphi(y)), \widehat{0}, f(y))$. Supongamos que $F(x) = F(y)$. Como $f(x) = \widehat{0}$, $x \in A$. Como $f(y) = \widehat{0}$, $y \in A$. Es decir, tenemos $x \neq y$ con $x, y \in A$ y $g(\varphi(x)) = g(\varphi(y))$. Esto contradice la inyectividad de g.

Con ésto, F es inyectiva.■

1.7 Corolario. Sean A, B, E espacios métricos, compactos y totalmente disconexos. Supongamos que $A \subset B$ y que existe un encaje $g : A \to E$. Entonces existe un encaje $F : B \to E \times C \times C$ tal que $F(a) = (g(a), 0, 0)$ para toda $a \in A$, donde $0 = (0, 0, 0, ..) \in C$.

Demostración. Como B es métrico, compacto y totalmente disconexo, existe un encaje $h : B \to C$. Por la misma razón existe un encaje $k : E \to C$.

Sea $g_1 : h(A) \to C$ el encaje $g_1 = k \circ g \circ h^{-1}$. Sabemos que $h(A) \subset C$. Por el lema anterior existe un encaje $F_1 : C \to g_1(h(A)) \times C \times C$ tal que

$$F_1(h(a)) = (g_1(h(a)), 0, 0) = (k \circ g \circ h^{-1} \circ h(a), 0, 0) = (k \circ g(a), 0, 0)$$

para toda $h(a) \in h(A)$.

Sea $G : k(E) \times C \times C \to E \times C \times C$ el homeomorfismo $G(x, y, z) = (k^{-1}(x), y, z)$.

Entonces $F = G \circ F_1 \circ h : B \to E \times C \times C$ es un encaje (por ser la composición de tres encajes). Sea $a \in A$. Entonces

$$F(a) = G(F_1(h(a))) = G(k(g(a)), 0, 0) = (g(a), 0, 0).$$

Por tanto, F cumple las condiciones que pedíamos.■

Recordemos las siguientes definiciones y resultados:

Sea X un espacio topológico. Una familia $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de X es *locálmente finita* si para cada $x \in X$ existe una vecindad $U(x)$ tal que $U \cap A_\alpha \neq \emptyset$ sólo para un número finito de índices $\alpha \in \mathcal{A}$.

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta cerrada y localmente finita de un espacio topológico X. Supongamos que existen funciones contimuas $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ tal que $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$. Entonces existe una función continua $f : X \to C$ tal que $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$. [3, Cap. III, Teorema 9.4]

1.8 Teorema. Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos compactos, no vacíos y totalmente disconexos de un espacio métrico X.

Supongamos que para toda $n < m$, existe una función continua e inyectiva $g_{n,m} : A_n \to A_m$ tal que para toda $k > m$, $g_{m,k} g_{n,m} = g_{n,k}$.

Supongamos también que la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita y que $A_n \cap A_m = \varnothing$ para toda $m \neq n$.

Entonces existe una función continua $F : \bigcup A_n \to C$ tal que $F(x) = F(y)$ si y sólo si $x = y$ o $x = g_{n,m}(y)$ o $y = g_{n,m}(x)$ para algunas m, n con $n < m$.

Demostración. Construiremos inductivamente una sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que para toda $m \in \mathbb{N}$:

(a) $h_m : A_m \to C^{2m} \times \{0\} \times \{0\} \times ... \subset C^{\infty}$, donde 0 es el elemento $(0, 0, ...)$ del conjunto de Cantor, h_m es continua e inyectiva.

(b) si $n < m$ entonces $h_m \circ g_{n,m} = h_n$.

Para $n = 1$ tomamos un encaje $h_1 : A_1 \to C^2 \times \{0\} \times \{0\} \times ...$.

Supongamos que ya tenemos construidas $h_1, h_2, ..., h_m$ y que satisfacen las condiciones (a) y (b). Sea $\pi_{2m} : C^{\infty} \to C^{2m}$ la proyección. Aplicaremos el Corolario 1.7 a los espacios $g_{m,m+1}(A_m) \subset A_{m+1}$y a $C^{2m} \times \{0\} \times \{0\} \times ...$, considerando el encaje $\pi_{2m} \circ h_m \circ (g_{m,m+1})^{-1} : g_{m,m+1}(A_m) \to C^{2m}$ (Como por hipótesis h_m y $g_{m,m+1}$ son continuas e inyectivas, y las proyecciones también, su composición es continua e inyectiva). Dicho corolario nos dice que existe un encaje $h_{m+1} : A_{m+1} \to h(A_m) \times C \times C \times \{0\} \times \{0\} \times ...$ tal que $h_{m+1}(y) = (\pi_{2m} \circ h_m \circ (g_{m,m+1})^{-1}(y), 0, 0, ...)$ para toda $y \in g_{m,m+1}(A_m)$.

Verificaremos que h_1, h_2,...,h_m, h_{m+1} satisfacen las condiciones (a) y (b). La propiedad (a) es inmediata. Para comprobar que se cumple la condición (b) , primero analizaremos la composición $h_{m+1} \circ g_{m,m+1}$. Dada $u \in A_m$, $g_{m,m+1}(u) \in g_{m,m+1}(A_m)$, así que

$$\begin{aligned} h_{m+1}(g_{m,m+1}(u)) &= (\pi_{2m} \circ h_m \circ (g_{m,m+1})^{-1}(g_{m,m+1}(u)), 0, 0, ...) \\ &= (\pi_{2m}(h_m(u)), 0, 0, ...) \\ &= h_m(u). \end{aligned}$$

Por tanto, $h_{m+1}(g_{m,m+1}(u)) = h_m(u)$.

Ahora sí, sea $n < m$. Entonces

$$h_{m+1} \circ g_{n,m+1} = h_{m+1} \circ g_{m,m+1} \circ g_{n,m} = h_n.$$

La última igualdad es por la hipótesis de inducción. Por tanto, para toda $n < m+1$, $h_{m+1} \circ g_{n,m+1} = h_n$. Esto completa la construcción inductiva de las funciones h_n.

Ahora sea $F : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to C^{\infty}$ definida por $F(x) = h_m(x)$ con $x \in A_m$. Como C^{∞} es homeomorfo a C (ver [10], Proposición 3.2), podemos intercambiarlos. Como los conjuntos A_n son ajenos entre sí, tenemos que F está bien definida. Además F es continua porque la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita y cada h_m es continua.

Supongamos que $F(x) = F(y)$ con $x \neq y$. Supongamos que $x \in A_m$, $y \in A_n$. Si $m = n$ entonces $h_n(x) = F(x) = F(y) = h_n(y)$ lo cual contradice la inyectividad de h_n. Por eso podemos suponer que $n < m$.

Entonces $h_n(y) = F(y) = F(x) = h_m(x) = h_m(g_{n,m}(y))$. Como h_m es inyectiva $x = g_{n,m}(y)$. Con esto terminamos la prueba del teorema.■

Recordemos que $E(X) = \{e \in X : e$ es un punto extremo de $X\}$. Sea v el punto de ramificación de X.

1.9 Teorema. Sea X un abanico suave. Entonces existe una función continua e inyectiva $h : E(X) \to C$ con la siguiente propiedad:

($\#$) si $\{x_n\}$ es una sucesión en X que converge a un punto $x \neq v$, y $e_n, e \in E(X)$ son tales que $x_n \in ve_n$ y $x \in ve$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $h(e_n)$ converge a $h(e)$.

Demostración. Sea μ una función de Whitney para $C(X)$. Multiplicando por el escalar adecuado, podemos suponer que $\mu(ve) \leq 1$ para toda $e \in E(X)$ y existe $e \in E(X)$ tal que $\mu(ve) \geq \frac{1}{2}$.

Sea $f : X \to [0,1]$ dada por $f(t) = \mu([v,t])$. Observemos que f es continua por la suavidad de X en v.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = f^{-1}(\frac{1}{2^n})$. La continuidad de f implica que A_n es cerrado.

Dada $x \in A_n$, $\mu(vx) = \frac{1}{2^n}$. Como μ es una función de Whitney la función $y \to \mu(vy)$ de vx en $[0, \frac{1}{2^n}]$ es inyectiva. De modo que para toda $m \geq n$ existe un único punto $g_{n,m}(x)$ tal que $\mu(vg_{n,m}(x)) = \frac{1}{2^m}$. Así definimos $g_{n,m} : A_n \to A_m$.

Probaremos que la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ junto con $\{g_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$ cumplen las hipótesis del teorema anterior.

Ya dijimos que A_n es cerrado en X, por lo que es compacto. Observemos que $v \notin A_n$, así que $A_n \subset X - \{v\}$. Usaremos como espacio ambiente a $X - \{v\}$.

Supongamos que A_n no es totalmente disconexo. Entonces existe una componente D de A_n que tiene a dos puntos distintos x y y. Dada $z \in vx - \{v\}$, vz es un subarco propio de vx, de manera que $\mu(vz) < \mu(vx) = \frac{1}{2^n}$. Entonces $vx \cap A_n = \{x\}$. Similarmente $vy \cap A_n = \{y\}$. De este modo $A_n \cup vx \cup vy$ es un subcontinuo de X que se puede poner como la unión de dos subcontinuos (A_n y $vx \cup vy$) tales que se intersectan en $\{x, y\}$. Esto contradice la unicoherencia hereditaria de X y prueba que A_n es totalmente disconexo.

Lo que sigue es probar que cada $g_{n,m}$ es continua. Sean n, $m \in \mathbb{N}$ con $n < m$. Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en A_n tal que $x_k \to x$ con x en A_n. Como A_m y A_n son compactos, basta con suponer que $\{g_{n,m}(x_k)\} \to y$ con $y \in A_m$ y probar que $y = g_{n,m}(x)$. Como X es suave y $\{x_k\} \to x$, $\lim vx_k = vx$. Esto quiere decir que y tiene que estar en vx. Y como μ es continua, $\mu(vg_{n,m}(x_k)) \to \mu(vy)$. Pero como $\mu(vg_{n,m}(x_k)) = \frac{1}{2^m}$ para toda x_k, podemos concluir que $\mu(vy) = \frac{1}{2^m}$. Es decir, y es el punto en vx tal que $\mu(vy) = \frac{1}{2^m}$. De acuerdo con la definición de $g_{n,m}(x)$ tenemos que $y = g_{n,m}(x)$. Por tanto, $g_{n,m}$ es continua.

Ahora veremos que si $n < m$, $g_{n,m}$ es inyectiva. Supongamos que no lo es. Entonces existen $x, y \in A_n$ tales que $x \neq y$ pero $g_{n,m}(x) = g_{n,m}(y)$. Sea $z = g_{n,m}(x)$. Por definición $z \in vx \cap vy$ y $\mu(vz) = \frac{1}{2^m}$. Como X es hereditariamente unicoherente (por ser abanico), $vx \cap vy$ es un subcontinuo de vx que contiene a v y a $z \neq v$. Entonces $vx \cap vy$ es un subarco de vx de la forma $vx \cap vy = vw$ con $v \neq w$. Si $x \in vy$, entonces vx es un subarco propio de vy. Esto es absurdo pues $\mu(vx) = \frac{1}{2^n} = \mu(vy)$, de manera que $x \notin vy$. Por la misma razón, $y \notin vx$. Entonces vx, vy y vw son tres arcos (no degenerados) que se intersectan por pares en $\{w\}$. Esto implica que w es un punto de ramificación de X. Esto contradice la unicidad de v como punto de ramificación de X. Por tanto, $g_{n,m}$ es inyectiva.

Ahora tomemos $n < m < k$ y $x \in A_n$. Por definición $g_{n,m}(x)$ es el único punto $y \in vx$ tal que $\mu(vy) = \frac{1}{2^m}$ y $g_{m,k}(y)$ es el único punto $w \in vy$ tal que $\mu(vw) = \frac{1}{2^k}$. Como $y \in vx$, tenemos que y, $v \in vx$, de modo que $w \in vx$ y $\mu(vw) = \frac{1}{2^k}$. Por definición, $w = g_{n,k}(x)$. Hemos probado que $g_{n,k}(x) = g_{m,k}(g_{n,m}(x))$. Por tanto, $g_{n,k} = g_{m,k} \circ g_{n,m}$.

Claramente $A_m \cap A_n = \varnothing$. Para ver que la familia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita en el espacio $X - \{v\}$, tomamos $x \in X - \{v\}$. Entonces $\mu(vx) > 0$. Notemos que $\{k \in \mathbb{N} : \frac{\mu(vx)}{2} < \frac{1}{2^k}\}$ es finito y que $U = f^{-1}((\frac{\mu(vx)}{2}, \infty))$ es un conjunto abierto de $X - \{v\}$ que tiene a x y que intersecta únicamente a un número finito de A_k. Por tanto, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es localmente finita.

Por el teorema anterior existe una función continua e inyectiva $F : \bigcup A_n \to C$ tal que $F(x) = F(y)$ si y sólo si $x = y$ ó $x = g_{n,m}(y)$ ó $y = g_{n,m}(x)$ para algunas n y m con $n < m$.

Dada $e \in E(X)$, e es distinta de v por lo que $\mu(ve) > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \mu(ve)$. Como vimos anteriormente existe un único punto $x \in ve \cap A_n$. Definimos $h(e) = F(x)$. Tenemos que mostrar que h no depende de la n que tomamos. Supongamos que $m > n$ es tal que $\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n} > \mu(ve)$. Sea y el único punto en $ve \cap A_m$. Por definición $g_{n,m}(x)$ es el único punto en vx tal que $\mu(vg_{n,m}(x)) = \frac{1}{2^m}$. Como $x \in ve$, el arco vx está contenido en ve. Así, $g_{n,m}(x) \in ve \cap A_m$. Esto muestra que $y = g_{n,m}(x)$. Por la propiedad que distingue a F, $F(y) = F(x)$. Y así, $h(e)$ no depende de n.

Ahora veremos que h es inyectiva. Sean e, $c \in E(X)$ con $e \neq c$. Supongamos que $h(e) = F(x)$ con $x \in ve \cap A_n$ y $h(c) = F(y)$ con $y \in vc \cap A_m$. Supongamos también que $n \leq m$. Si ocurriera que $h(e) = h(c)$, por definición $F(x) = F(y)$. Pero esto implica que $x = y$ ó $y = g_{n,m}(x)$. Entonces $y \in vx$. De modo que $y \in ve \cap vc$. Por lo cual $ve \cap vc \neq \{v\}$ con $e \notin vc$ y $c \notin ve$ (porque e y c son puntos extremos diferentes). Igual que en la prueba de la inyectividad de $g_{n,m}$, esto significa que ve contiene un punto de ramificación de X distinto de v. Esta contradicción demuestra que h es inyectiva.

Ahora mostraremos que h tiene la propiedad (#). Observemos que esta propiedad implica que h es continua. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a un punto $x \neq v$ y sean e_n, $e \in E(X)$ tales que $x \in ve$ y $x_n \in ve_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que probar que $h(e_n) \to h(e)$.

Como $v \neq x$, $\mu(vx) > 0$. Sea m tal que $\mu(vx) > \frac{1}{2^m}$. Entonces, a partir de cierta n, $\mu(vx_n) > \frac{1}{2^m}$. Sea $a_n = [v, x_n] \cap A_m$ y $a = [v, x] \cap A_m$. Como *lím* $vx_n = vx$, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto en vx. Y por la continuidad de μ ese punto también está en A_m. Así que, $a_n \to a$. Pero entonces *lím* $h(e_n) =$ *lím* $F(a_n) = F(a) = h(e)$. Con esto terminamos la demostración de la propiedad (#). ■

1.10 Proposición. Sean, X un abanico con punto de ramificación v, y $x \in X - \{v\}$. Entonces existe un único $e(x) \in E(X)$ tal que $x \in ve(x)$.

Demostración. Para demostrar esta proposición vamos a usar que todo arco en un abanico está contenido en un arco maximal, es decir, un arco que no está contenido propiamente en otro arco. Una demostración de este teorema se puede encontrar en [9, Teorema 4.19].

Dada $x \in X - \{v\}$, sea ce un arco maximal en X que contiene al arco vx. Supongamos por ejemplo que $x \in vc$. Ya que ce es maximal, es fácil ver que c y e son puntos extremos de X. Hemos mostrado entonces que para cada punto $x \in X - \{v\}$, existe $c \in E(X)$ tal que $x \in vc$. Notemos que c es único pues si existiera $d \in E(X) - \{c\}$ tal que $x \in vd$ entonces X tiene un punto de ramificación en $vc - \{v\}$(esto es porque c y d son puntos extremos de X). Esto contradice la unicidad de v y concluimos que c es único.■

1.11 Teorema. Sea X un abanico suave. Entonces existe un encaje de X en el abanico de Cantor.

Demostración. El abanico de Cantor es el conjunto $AC = \{(1-t)(\frac{1}{2},1)+tp \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]$ y $p \in C\}$. Aquí estamos pensando a C como el conjunto de Cantor clásico que está contenido en el intervalo $[0,1]$.

Sea $h : E(X) \to C$ una función continua e inyectiva con la propiedad (#) mencionada en el Teorema 1.9.

Sea $x \in X - \{v\}$. Sea $c(x) \in E(X)$ el punto extremo tal que $x \in vc(x)$ que existe por la Proposición 1.10.

Sea μ una función de Whitney tal que $\mu(X) = 1$.

Definimos $f : X \to AC$ como

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2},1) & \text{si } x = v \\ (1-\mu(vx))(\frac{1}{2},1) + \mu(vx)h(c(x)) & \text{si } x \neq v. \end{cases}$$

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a v entonces, como X es suave, $lím\ vx_n = \{v\}$ y por tanto $lím\ \mu(vx_n) = 0$. Entonces tenemos que

$$lím\ f(x_n) = lím\ (1-\mu(vx_n))(\frac{1}{2},1) + \mu(vx)h(c(x)) = (\frac{1}{2},1)$$

y por tanto f esta bién definida.

Ahora veremos que f es inyectiva. Sean $x, y \in X$ con $f(x) = f(y)$. Observemos que $f(y)$ y

$f(x)$ son puntos en $\mathbb{R}^2$. Como $h(c(x)), h(c(y)) \subset I \times \{0\}$, podemos suponer que $h(c(y)) = (y', 0)$ y $h(c(x)) = (x', 0)$. Y entonces si $y \neq v$ la segunda coordenada de $f(y)$ es $1 - \mu(vy)$ y la primera coordenada de $f(y)$ es $(1 - \mu(vy))\frac{1}{2} + \mu(vy)y'$.

Si $x = v$ entonces $1 - \mu(vy) = 1$, lo cual implica que $\mu(vy) = 0$ de donde $y = v = x$. Por tanto, podemos suponer que x y y son distintos de v.

Como $f(x) = f(y)$, $1 - \mu(vx) = 1 - \mu(vy)$. Entonces $\mu(vx) = \mu(vy)$. Esta igualdad junto con $(1 - \mu(vy))\frac{1}{2} + \mu(vy)y' = (1 - \mu(vx))\frac{1}{2} + \mu(vx)x'$ implican que $x' = y'$. Es decir, $h(c(x)) = (x', 0) = (y', 0) = h(c(y))$. Por la inyectividad de h, $c(x) = c(y)$. Es decir, x y y pertenecen al mismo arco $vc(x)$. Como además $\mu(vx) = \mu(vy)$, concluimos que $x = y$. Por tanto, f es inyectiva.

Ahora veremos que f es continua. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a $x \in X$. Si $x = v$ ya vimos que $f(x_n) \to f(x)$. Entonces podemos suponer que $x \neq v$ y, en consecuencia, que $x_n \neq v$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por la propiedad $(\#)$ de h tenemos que $\{h(c(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $h(c(x))$, por la suavidad de X tenemos que $vx_n \to vx$ y por la continuidad de μ tenemos que $\mu(vx_n)$ converge a $\mu(vx)$. Por tanto, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$. Por tanto, f es una función continua.

Como X es un compacto, f es un homeomorfismo en su imagen. Es decir, f es un encaje de X en el abanico de Cantor.■

Capítulo 2

Los conjuntos de la forma $C(E, X)$ son retractos absolutos

2.1 Definición. Sea $A \subseteq X$. Se dice que A es un *retracto* de X si existe una función continua $r : X \to A$ con $r(a) = a$ para toda a en A. La función r se llama retracción.

2.2 Definición. Un continuo X es un *retracto absoluto* si siempre que existe un encaje h de X en un continuo Z, $h(X)$ es un retracto de Z.

Lo que dice esta definición es que los retractos absolutos son aquellos espacios que son retractos de cualquier espacio que los contenga.

Notación. Sean X un continuo y $E \in C(X)$. Denotaremos por $C(E, X)$ al conjunto de todos los elementos de $C(X)$ que contienen a E, es decir $C(E, X) = \{Y \in C(X) : E \subset Y\}$.

Además de aquí en adelante μ denotará una función de Whitney tal que $\mu(X) = 1$.

En este capítulo demostraremos que $C(E, X)$ es un retracto absoluto para todo $E \in C(X)$. Este resultado es importante para la descripción de los hiperespacios de abanicos que haremos después. En [8] Lynch demostró que el conjunto de todos los elementos de $C(X)$ que contienen a E y que están en un mismo nivel de Whitney son retractos absolutos. En [2] W. J. Charatonik simplificó la estructura convexa dada por Lynch. El resultado principal de este capítulo es una modificación de la demostración de Lynch.

Para ver que los conjuntos de la forma $C(E, X)$ son un retracto absoluto, utilizaremos que ser un retracto absoluto es equivalente a otro concepto que definiremos a continuación.

2.3 Definición. Un continuo K es un *extensor absoluto* si dados un espacio métrico M y un subconjunto cerrado B de M, toda función continua $f : B \to K$ se puede extender a una función continua $F : M \to K$.

2.4 Teorema. Y es un retracto absoluto si y sólo si es un extensor absoluto. [11, Teorema??]

Queremos utilizar este teorema. Esto involucra hablar de funciones cuyas imágenes están en $C(X)$ y, por lo tanto, necesitamos resultados acerca de distancias entre puntos de $C(X)$.

El primer lema que veremos dice que si tenemos dos subcontinuos del continuo X, uno está contenido en el otro y son casi del mismo tamaño, entonces cuando los vemos como puntos de $C(X)$ están uno cerca del otro.

2.5 Lema. Sean X un continuo y μ una función de Whitney para $C(X)$. Entonces dada $\epsilon > 0$ existe η_ϵ con la siguiente propiedad:
si A, $B \in C(X)$ son tales que $A \subset B$ y $\mid \mu(A) - \mu(B) \mid < \eta_\epsilon$ entonces $H(A, B) < \epsilon$.

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existen A_n, $B_n \in C(X)$ tales que $A_n \subset B_n$, $\mid \mu(B_n) - \mu(A_n) \mid < \frac{1}{n}$ pero $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$. Como $C(X)$ es compacto [5, cap. 3], las sucesiones $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ tienen subsucesiones convergentes $\{A_{n_k}\}$ y $\{B_{n_k}\}$, respectivamente. Sean $A = lím\ \{A_{n_k}\}$ y $B = lím\ \{B_{n_k}\}$. Entonces A, $B \in C(X)$, $A \subset B$ (ver 0.4) y $\mu(A) = \mu(B)$. Por lo tanto $A = B$. Pero por otro lado, como para toda n se cumple que $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$, también tenemos que $H(A, B) \geq \epsilon$, lo cual es una contradicción.■

En general no basta con que uno de los conjuntos esté contenido en la nube de otro para que la distancia entre ellos sea pequeña. La siguiente proposición dice que si son del mismo tamaño (es decir si miden lo mismo con una función de Whitney) entonces sí ocurre esto. Así tenemos una manera fácil de decir que dos conjuntos del mismo tamaño están cerca.

2.6 Proposición. Sea $\mathcal{A}$ un nivel de Whitney de $C(X)$. Entonces para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todas A, $B \in \mathcal{A}$, si $B \subset N(\delta, A)$ entonces $H(A, B) < \epsilon$.

Demostración. Supongamos que esta proposición no es cierta para alguna $\epsilon > 0$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existen A_n, $B_n \in \mathcal{A}$ tales que $B_n \subset N(\frac{1}{n}, A_n)$ y $H(A_n, B_n) \geq \epsilon$. Por la compacidad de $C(X)$ existen dos subsucesiones convergentes $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{B_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, respectivamente. Sean $A = lím\ A_{n_k}$ y $B = lím\ B_{n_k}$.

Dada $\lambda > 0$ sea $K \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $k \geq K$, $B \subset N(\frac{\lambda}{3}, B_{n_k}) \subset N(\frac{2\lambda}{3}, A_{n_k}) \subset N(\lambda, A)$. Por tanto, $B \subset N(\lambda, A)$ para toda $\lambda > 0$. Esto implica que $B \subset A$. Y como $\mu(A) = \mu(B)$, concluimos que $A = B$.

Por otra parte $H(A_{n_k}, B_{n_k}) \geq \epsilon$ implica que $H(A, B) \geq \epsilon$. Esta contradicción completa la prueba de la proposición.■

En lo que sigue supondremos que E es un elemento fijo de $C(X)$.

Notación. Denotaremos por Λ al conjunto de todos los arcos ordenados que van de E a X. Si $\mathcal{A} \in \Lambda$ y $t > \mu(E)$ entonces definimos $\{\mathcal{A}(t)\} = \mathcal{A} \cap \mu^{-1}(t)$. En otras palabras, $\mathcal{A}(t)$ es el único elemento de tamaño t del arco ordenado $\mathcal{A}$. No puede haber dos conjuntos del mismo tamaño en un mismo arco ordenado, por eso $\mathcal{A}(t)$ es un único punto en $C(X)$.

2.7 Proposición. Sean A, $B \in C(X)$ y $\mathcal{B}$ un arco ordenado de A a B. Entonces la función $f : [\mu(A), \mu(B)] \to \mathcal{B}$ dada por $f(t) = \mathcal{B}(t)$ es continua.

Demostración. Sea $s \in [\mu(A), \mu(B)]$. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 2.5 existe η tal que si C, $D \in C(X)$, $C \subset D$ y $|\mu(D) - \mu(C)| < \eta$ entonces $H(C, D) < \epsilon$.

Entonces para $t \in [\mu(A), \mu(B)]$, con $|s - t| < \eta$, $\mathcal{B}(s)$ y $\mathcal{B}(t)$ se pueden comparar, es decir, uno de ellos está contenido en el otro. Además $\mu(\mathcal{B}(s)) = s$ y $\mu(\mathcal{B}(t)) = t$. Por la elección de η concluimos que $H(\mathcal{B}(s), \mathcal{B}(t)) < \epsilon$. Por tanto f es continua.■

Observación. Si $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ es un arco ordenado de A a B entonces $\mathcal{A} = \alpha([0, 1])$ es un conjunto compacto y conexo en $C(X)$ (porque es la imagen continua de un compacto y conexo) con la propiedad de que para toda H, $K \in \mathcal{A}$, $H \subset K$ o $K \subset H$. Esto es porque $H = \alpha(s)$ y $K = \alpha(t)$ con s, $t \in [0, 1]$ y $s < t$ o $t < s$. Además, como $A = \alpha(0)$ y $B = \alpha(1)$, $A \subset K \subset B$ para toda $K \in \mathcal{A}$. La demostración de la Proposición 2.7 nos dice que si tenemos un subconjunto $\mathcal{A}$ en $C(X)$ con las características mencionadas, entonces $\mathcal{A}$ es un arco ordenado.

Como 2^X es un continuo [5, cap. 3 y 5], le podemos asociar su hiperespacio 2^{2^X}, y considerar éste con la métrica H_{H_d}, la métrica de Hausdorff que se obtiene a partir de la métrica de 2^X.

2.8 Lema. Para cada $\epsilon > 0$ existe $\rho > 0$ con la siguiente propiedad. si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \Lambda$ con $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \rho$, entonces $\sup\{H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t) : t \in [s, 1]\} \leq \epsilon$, donde $s = \mu(E)$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 2.5 existe $\eta > 0$ tal que si A, $B \in C(X)$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$ entonces $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$.

Como μ es una función uniformemente contínua, existe $\rho > 0$ tal que $\rho < \frac{\epsilon}{2}$ y si $A, B \in C(X)$ y $H(A, B) < \rho$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \eta$.

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Lambda$ con $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \rho$. Sea $t \in [s, 1]$. Entonces, como $H_{H_d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \rho$, existe $\mathcal{B}(r) \in \mathcal{B}$ con $r \in [s, 1]$ tal que $H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(r)) < \rho$. Entonces $|t - r| = |\mu(\mathcal{A}(t)) - \mu(\mathcal{B}(r))| < \eta$. Como $\mathcal{B}$ es un arco ordenado, tenemos que $\mathcal{B}(r) \subset \mathcal{B}(t)$ o $\mathcal{B}(t) \subset \mathcal{B}(r)$. Además,

$$|\mu(\mathcal{B}(r)) - \mu(\mathcal{B}(t))| = |r - t| < \eta.$$

Por la elección de η tenemos que $H(\mathcal{B}(r), \mathcal{B}(t)) < \frac{\epsilon}{2}$. Pero entonces

$$H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)) \leq H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(r)) + H(\mathcal{B}(r), \mathcal{B}(t)) < \epsilon.$$

Como cada elemento de $\{H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t)) : t \in [s, 1]\}$ es menor que ϵ, también $\sup\{H(\mathcal{A}(t), \mathcal{B}(t) : t \in [s, 1]\} \leq \epsilon$.■

Más notación: Sea

$$\Delta_n = \{(t_1, ..., t_n) \in I^n : t_1 + ... + t_n = 1\}.$$

Si $T \in \Delta_n$, sean

$$M(T) = máx\ \{t_1, ..., t_n\}.$$

y

$$\mathcal{M} = \bigcup\{\Lambda^n \times \Delta_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir un elemento de $\mathcal{M}$ es un conjunto de n arcos ordenados de E a X y n números en $[0, 1]$ cuya suma es igual a 1, donde n puede ser cualquier número natural.

El siguiente resultado será útil más adelante:

2.9 Proposición. Sea $T = (t_1, ..., t_n) \in I^n$ con $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Para toda $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $V = (v_1, ..., v_n) \in I^n$ con $\frac{|t_1 - v_1|}{2} + ... + \frac{|t_n - v_n|}{2^n} < \delta$, se cumple lo siguiente:

(A) $\frac{1}{M(T)} |t_i - v_i| < \xi$ para toda $i = 1, ..., n$.

(B) $\frac{M(T)}{2} < M(V) < 2M(T)$ y $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(V)}\right| < \xi$.

(C) $\frac{1}{M(T)} |1 - (v_1 + ... + v_n)| < \xi$.

Demostración.

(A) Sea $\delta_1 = \frac{\xi M(T)}{2^n}$. Para toda $k = 1, ..., n$, tenemos que $\frac{|t_k - v_k|}{2^k} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - v_i|}{2^i} < \delta_1 = \frac{\xi M(T)}{2^n}$. Entonces $|t_k - v_k| < \frac{\xi M(T)}{2^{n-k}} \leq \xi M(T)$.

(B) La función $V \mapsto M(V)$ es una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. En particular es continua en T. Es decir, dada $\frac{M(T)}{2} > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que si $\|T - V\| < \delta'$ entonces $|M(V) - M(T)| < \frac{M(T)}{2}$.

Sea $\delta_2 = \frac{\delta'}{2^n}$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - v_i|}{2^i} < \delta_2$ implica que

$$\frac{1}{2^n} \|T - V\| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} |t_i - v_i| < \sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - v_i|}{2^i} < \delta_2$$

y, por tanto, $\|T - V\| < 2^n \delta_2 = \delta'$. Por la elección de δ', esto implica que $|M(V) - M(T)| < \frac{M(T)}{2}$. Es decir, $\frac{-M(T)}{2} < M(V) - M(T) < \frac{M(T)}{2}$. Entonces $\frac{M(T)}{2} < M(V) < \frac{3}{2}M(T) < 2M(T)$.

Para la segunda parte observemos que $M(T) > 0$ y por tanto la función $V \mapsto \frac{1}{M(V)}$ es continua en T. Por eso, existe $\delta'' > 0$ tal que $\|T - V\| < \delta''$ implica que $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(V)}\right| < \xi$. Sea $\delta_3 = \frac{\delta''}{2^n}$. Igual que antes, si $\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - v_i|}{2^i} < \delta_3$ entonces $\|T - V\| < \delta''$. Por la elección de δ'' tenemos que $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(V)}\right| < \xi$.

(C) Por (1) sabemos que dada $\frac{\xi}{n} > 0$, existe $\delta_4 > 0$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - v_i|}{2^i} < \delta_4$ implica que $|t_i - v_i| < \frac{\xi}{n}$ para toda $i = 1, ..., n$.

Sabemos que $t_1 + ... + t_n = 1$, por tanto

$$\begin{aligned} & |1 - (v_1 + ... + v_n)| \\ = \; & |(t_1 + ... + t_n) - (v_1 + ... + v_n)| \\ \leq \; & |t_1 - v_1| + ... + |t_n - v_n| \\ < \; & \frac{n\xi}{n} = \xi. \end{aligned}$$

Sea $\delta = mín \; \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$. Entonces δ es la que buscábamos.■

Quisieramos darle una métrica a $\mathcal{M}$. Pero no tenemos manera de comparar elementos de distinto tamaño, por ejemplo, ¿cómo comparamos $((A_1, A_2), (t_1, t_2))$ y $((B_1, B_2, B_3, B_4), (u_1, u_2, u_3, u_4))$?

Para lograr esto le asociamos a todo elemento $((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$ el elemento

$$((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n, E, E, ...), (t_1, ..., t_n, 0, 0, ...))$$

de $(C(C(X)))^{\infty} \times I^{\infty}$. Consideremos este producto con la siguiente métrica:

$$D^*(((B_1, B_2, ...), (r_1, r_2, ...)), (C_1, C_2, ...), (u_1, u_2, ...))) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{H_d}(B_i, C_i) + |r_i - u_i|}{2^i}$$

Esto nos da una métrica para $\mathcal{M}$.

Ahora definiremos una función que, si $n \in \mathbb{N}$, dados n arcos ordenados de E a X, y n números en $[0, 1]$ cuya suma da 1, les asocie otro arco ordenado de E a X. Sea $s = \mu(E)$. Entonces sea $C : \mathcal{M} \to \Lambda$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ...t_n)) &= \\ \{\mathcal{A}_1((1 - rt_1)s + rt_1) \cup ... \cup \mathcal{A}_n((1 - rt_n)s + rt_n) \quad &: \quad r \in [0, \frac{1}{M(T)}]\}. \end{aligned}$$

Analicemos con calma lo que hace C. Para cada $r \in [0, \frac{1}{M(T)}]$ y cada $i \in \{1, ..., n\}$, estamos considerando el número $(1 - rt_i)s + rt_i = s + rt_i(1 - s)$. Notemos que $s \leq s + rt_i(1 - s) \leq s + \frac{t_i}{M(T)}(1 - s) \leq s + \frac{M(T)}{M(T)}(1 - s) = 1$. De manera que $s \leq s + rt_i(1 - s) \leq 1$ y entonces tiene sentido evaluar $\mathcal{A}_i$ en ese número. Por otra parte, cuando t_i es el máximo posible, es decir, cuando $t_i = M(T)$ y $r = \frac{1}{M(T)}$, la expresión $(1 - rt_i)s + rt_i$ es igual a 1.

Como cada uno de los conjuntos $\mathcal{A}_i((1 - rt_i)s + rt_i)$ contiene al elemento de tamaño s, que en todos es E, todos contienen a E. Entonces su unión es la unión de n conjuntos conexos tales que su intersección es no vacía y, por eso, la unión es un subconjunto conexo de X. Además es la unión de n cerrados en X y, por eso, es cerrado en X.

Así, para cada r, tenemos un elemento de $C(X)$. Pero quisiéramos que la unión de los elementos en $C(X)$ que obtuvimos para cada $r \in [0, \frac{1}{M(T)}]$, sea un arco ordenado. Tenemos que ver que para cualesquiera dos elementos de $\{\mathcal{A}_1((1 - rt_1)s + rt_1) \cup ... \cup \mathcal{A}_n((1 - rt_n)s + rt_n) : r \in [0, \frac{1}{M(T)}]\}$ uno está contenido en el otro y que dicho conjunto es cerrado y conexo en $C(X)$.

Dados dos elementos distintos $r_1, r_2 \in [0, \frac{1}{M(T)}]$, tenemos que $r_1 < r_2$ o $r_2 < r_1$. Podemos suponer que $r_1 < r_2$. Entonces $s + r_1t_i(1 - s) \leq s + r_2t_i(1 - s)$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. De modo que $\mathcal{A}_i(s+r_1t_i(1-s)) \subset \mathcal{A}_i(s+r_2t_i(1-s))$. Esto implica que la unión de los respectivos conjuntos definidos por r_1 está contenida en la de r_2.

Consideremos la función de $[0, \frac{1}{M(T)}]$ en $C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$ dada por $r \mapsto \mathcal{A}_1((1-rt_1)s+rt_1) \cup ... \cup \mathcal{A}_n((1-rt_n)s+rt_n)$. Por el Lema 0.4 y la Proposición 2.7, ésta es una función continua. Su imagen es precisamente $C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$. Por tanto, este conjunto es un continuo y, en consecuencia, es un arco ordenado.

Como, para $r = 0$, tenemos que $\mathcal{A}_i((1-0t_i)s + 0t_i) = \mathcal{A}_i(s) = E$, resulta que $E \in C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$. Como todos los elementos de este conjunto contienen a E, tenemos que este arco ordenado empieza en E.

Ya habíamos mencionado que para $r = \frac{1}{M(T)}$ y para $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $t_i = M(T)$, tenemos que $\mathcal{A}_i((1-rt_i)s + rt_i) = X$. Por tanto, $C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$ tiene a X. Por tanto es un arco ordenado de E a X.

Con todo esto podemos afirmar que la función C está bien definida.

2.10 Teorema. C tiene las siguientes propiedades:

(a) $C((\mathcal{A}, ..., \mathcal{A}), (t_1, ..., t_n)) = \mathcal{A}$.

(b) $C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n)) = C((\mathcal{A}_{\sigma(1)}, ..., \mathcal{A}_{\sigma(n)}), (t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)}))$ para toda permutación $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

(c) $C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, ..., t_n)) =$

$C((\mathcal{A}_1, ...\mathcal{A}_{i-1}, \mathcal{A}_{i+1}, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_{i-1}, t_{i+1}, ..., t_n))$

(d) C es continua.

Demostración.

(a) Para toda $t \in [s, 1]$, se cumple que $\mathcal{A}(t) \in \mathcal{A}$. Sea $((\mathcal{A}, ..., \mathcal{A}), (t_1, ..., t_n)) \in \mathcal{M}$. Ya vimos que, para toda $r \in [0, \frac{1}{M(T)}]$, se cumple que $(1-rt_i)s + rt_i \in [s, 1]$. Entonces tenemos que $C((\mathcal{A}, ..., \mathcal{A}), (t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}((1-rt_i)s + rt_i) \subset \mathcal{A}$.

Pero $C((\mathcal{A}, ..., \mathcal{A}), (t_1, ..., t_n))$ y $\mathcal{A}$ son arcos ordenados que van de E a X. De modo que $C((\mathcal{A}, ..., \mathcal{A}), (t_1, ..., t_n))$ es un subarco de $\mathcal{A}$ que tiene a los extremos de $\mathcal{A}$. Por tanto son iguales.

(b) Observemos que $M(T) = máx\ \{t_1, ..., t_n\} = máx\ \{t_{\sigma(1)}, ..., t_{\sigma(n)}\}$. Entonces

$$C((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\mathcal{A}_1((1-rt_1)s+rt_1)\cup\ldots\cup\mathcal{A}_n((1-rt_n)s+rt_n) : r\in[0,\frac{1}{M(T)}]\} \\
&= \{\mathcal{A}_{\sigma(1)}((1-rt_{\sigma(1)})s+rt_{\sigma(1)})\cup\ldots\cup\mathcal{A}_{\sigma(n)}((1-rt_{\sigma(n)})s+rt_{\sigma(n)}) : r\in[0,\frac{1}{M(T)}]\} \\
&= C((\mathcal{A}_{\sigma(1)},\ldots,\mathcal{A}_{\sigma(n)}),(t_{\sigma(1)},\ldots,t_{\sigma(n)})).
\end{aligned}
$$

(c) Observemos que, como cada $t_i \geq 0$,

$$M(T) = máx\ \{t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1},\ldots,t_n\} = máx\ \{t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_i,\ldots,t_n\}$$

Para toda $r\in[0,\frac{1}{M(T)}]$, el elemento de $C((\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n),(t_1,\ldots,t_{i-1},0,t_{i+1},\ldots,t_n))$ correspondiente a r es

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{A}_1((1-rt_1)s+rt_1)\cup\ldots\cup\mathcal{A}_{i-1}((1-rt_{i-1})s+rt_{i-1}) \\
& \cup\mathcal{A}_i(s)\cup\mathcal{A}_{i+1}((1-rt_{i+1})s+rt_{i+1})\cup\ldots\cup\mathcal{A}_n((1-rt_n)s+rt_n) \\
= \;& \mathcal{A}_1((1-rt_1)s+rt_1)\cup\ldots\cup\mathcal{A}_{i-1}((1-rt_{i-1})s+rt_{i-1}) \\
& \cup E\cup\mathcal{A}_{i+1}((1-rt_{i+1})s+rt_{i+1})\cup\ldots\cup\mathcal{A}_n((1-rt_n)s+rt_n) \\
= \;& \mathcal{A}_1((1-rt_1)s+rt_1)\cup\ldots\cup\mathcal{A}_{i-1}((1-rt_{i-1})s+rt_{i-1}) \\
& \cup\mathcal{A}_{i+1}((1-rt_{i+1})s+rt_{i+1})\cup\ldots\cup\mathcal{A}_n((1-rt_n)s+rt_n).
\end{aligned}
$$

(Esta última igualdad es porque E está contenido en todos los demás conjuntos). Pero resulta que la última expresión es el elemento correspondiente a esa r de $C((\mathcal{A}_1,\ldots\mathcal{A}_{i-1},\mathcal{A}_{i+1},\ldots,\mathcal{A}_n),(t_1,\ldots,t_{i-1},t_{i+1}$

(d) La demostración de que C es continua requiere un poco de paciencia. Dados dos elementos de $\mathcal{M}$ que estén cerca uno del otro, vamos a ver que sus imágenes están cerca.

Sean $(\mathcal{A},T)\in\mathcal{M}$ y $\epsilon>0$. Supongamos que $\mathcal{A}=(\mathcal{A}_1,\ldots,\mathcal{A}_n)$, $T=(t_1,\ldots,t_n)$. Tenemos que encontrar δ tal que para toda $(\mathcal{B},U)\in\mathcal{M}$ con $D^*((\mathcal{A},T),(\mathcal{B},U))<\delta$ se cumpla que $H_{H_d}(C(\mathcal{A},T),C(\mathcal{B},U))<\epsilon$.

Lo haremos en 4 pasos:

(1) El primer paso es proponer δ.

(2) Sea $(\mathcal{B},U)\in\mathcal{M}$ cuya distancia a $(\mathcal{A},T)$ es menor que δ. Por la Proposición 2.9 tenemos que si $V\in I^n$, entonces T y V cumplen ciertas desigualdades. Veremos que podemos usar estas

desigualdades para T y U, aunque U no necesariamente esté en I^n.

(3) Este es el paso principal. Veremos que $C(\mathcal{A},T) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(\mathcal{B},U))$. Es decir, dado $G \in C(\mathcal{A},T)$ encontraremos $F \in C(\mathcal{B},U)$ con

(i) $G \subset N(\epsilon, F)$

(ii) $F \subset N(\epsilon, G)$.

(4) Argumentaremos por qué $C(\mathcal{A},T) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(\mathcal{B},U))$ sale de manera similar.

(1) Recordemos que:

Por el Lema 2.5, existe $\eta > 0$ tal que $\eta < \frac{1}{2}$ y si $A, B \in C(X)$ con $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \eta$ entonces $H(A,B) < \epsilon$.

Por el Lema 2.8, existe $\rho > 0$ tal que si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \Lambda$ y $H_{H_d}(\mathcal{A},\mathcal{B}) < \rho$ entonces $\sup\{H(\mathcal{A}(t),\mathcal{B}(t)) : t \in [s,1]\} \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Por la Proposición 2.9 existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\rho}{2^n}$ (n quedó fija cuando elegimos $(\mathcal{A},T)$) y si $V = (v_1, ..., v_n) \in I^n$ y $\left|\frac{t_1 - v_1}{2}\right| + ... + \left|\frac{t_n - v_n}{2^n}\right| < \delta$ entonces

(A) $\frac{1}{M(T)}|t_i - v_i| < \frac{\eta}{4}$ para toda $i = 1, ..., n$.

(B) $\frac{M(T)}{2} < M(V) < 2M(T)$ y $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(V)}\right| < \frac{\eta}{4}$.

(C) $|1 - (v_1 + .. + v_n)| < \frac{M(T)\eta}{4}$.

(2) Sea $(\mathcal{B},U) \in \mathcal{M}$ con $D^*((\mathcal{A},T),(\mathcal{B},U)) < \delta$. Supongamos que $\mathcal{B} = ((B_1, ..., B_m),(u_1, ..., u_m))$. Vamos a demostrar que $H_{H_d}(C(\mathcal{A},T), C(\mathcal{B},U)) < \epsilon$. Para ello necesitamos que $C(\mathcal{A},T) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(\mathcal{B},U))$ y que $C(\mathcal{B},U) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(\mathcal{A},T))$.

Queremos usar la Proposición 2.9, pero dicha proposición sólo habla de elementos en I^n, es decir, que tienen el mismo número de coordenadas. Para eso definimos $V = (v_1, ..., v_n)$ de la siguiente manera: $v_i = u_i$ si $i \leq m$ y $v_i = 0$ si $i > m$. El segundo caso sólo se podría dar cuando $n > m$. Observemos que

$$\delta > D^*((\mathcal{A},T),(\mathcal{B},U)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{H_d}(A_i,B_i) + |t_i - u_i|}{2^i} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|t_i - u_i|}{2^i}.$$

Recordemos que, aunque sólo tenemos $t_1, ..., t_n$ y $u_1, ..., u_m$, para tomar la distancia D^* se completan las sucesiones con ceros (y los arcos ordenados con el elemento E repetido).

Notemos que si $n < m$, $u_i = v_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y que si $n \geq m$ y $m < i \leq n$, $v_i = 0 = u_i$. De manera que $\frac{|t_1 - v_1|}{2} + ... + \frac{|t_n - v_n|}{2^n} < \delta$ y entonces las desigualdades (A), (B) y

(C) se cumplen para V.

Si tuviéramos que $M(U) = M(V)$ podríamos usar tranquilamente las desigualdades (A),(B) y (C) para U completada con ceros. Para demostrar que $M(U) = M(V)$ vamos a considerar dos casos: si $m > n$ y si $m \leq n$.

Primer caso, $m \leq n$. En este caso $M(U) = u_j = v_j \leq M(V)$ para alguna $j \in \{1, ..., n\}$. Pero los v_i desde $m+1$ hasta n son ceros y, por lo tanto, $M(V) \leq M(U)$, de donde podemos concluir que $M(U) = M(V)$.

Segundo caso, $m > n$. Como para cada $i \leq n$ se cumple que $u_i = v_i$, tenemos que *máx* $\{u_1, ..., u_n\} =$ *máx* $\{v_1, ..., v_n\} = M(V)$.

Como

$$\begin{aligned} u_{n+1} + ... + u_m &= 1 - (u_1 + ... + u_n) \\ &= 1 - (v_1 + ... + v_n) < \frac{M(T)\eta}{4} < \frac{M(T)}{2} < M(V). \end{aligned}$$

tenemos que $u_i < M(V)$ para toda $i \in \{n+1, ..., m\}$, de modo que $M(U) = máx\{u_1, ..., u_m\} = máx\{u_1, ... u_n\} = M(V)$.

En cualquier caso tenemos que $M(U) = M(V)$.

(3) Para ver que $C(\mathcal{A}, T) \subset N_{C(X)}(\epsilon, C(\mathcal{B}, U))$, necesitamos que, dado un elemento cualquiera G de $C(\mathcal{A}, T)$, haya un elemento F de $C(\mathcal{B}, U)$ tal que $H(G, F) < \epsilon$.

Sea $G \in C(\mathcal{A}, T)$. Primero vamos a encontrar F. Sabemos que G es de la forma $G = \mathcal{A}_1((1 - rt_1)s + rt_1) \cup ... \cup \mathcal{A}_n((1 - rt_n)s + rt_n)$ donde r pertenece a $[0, \frac{1}{M(T)}]$. Como (C) se cumple para V y $M(V) = M(U)$, tenemos que $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(U)}\right| < \frac{\eta}{4}$. Pero entonces existe $R \in [0, \frac{1}{M(U)}]$ con $|r - R| < \frac{\eta}{4}$. Sea F el elemento de $C(\mathcal{B}, U)$ dado por $F = \mathcal{B}_1((1 - Ru_1)s + Ru_1) \cup ... \cup \mathcal{B}_m((1 - Ru_m)s + Ru_m)$. Vamos a demostrar que F cumple que $H(G, F) < \epsilon$.

(i) Primero veremos que $G \subset N(\epsilon, F)$. Sea $p \in G$. Entonces $p \in \mathcal{A}_i((1 - rt_i)s + rt_i)$ para alguna $i \in \{1, ..., n\}$. Recordemos que la manera de encajar $\mathcal{M}$ en $(C(X))^\infty \times I^\infty$ era asociándole a cada $((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n), (t_1, ..., t_n))$ el elemento $((\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_n, \mathcal{A}_1(s), \mathcal{A}_1(s), ...), (t_1, ..., t_n, 0, 0, ...))$. La distancia D^* que tenemos nos dice que las i-ésimas coordenadas de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están cerca una de la otra. Vamos a considerar por separado estos dos casos.

Si $i \leq m$. Como
$$\frac{H_{H_d}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)}{2^i} \leq D^*((\mathcal{A}, T), (\mathcal{B}, U)) < \delta < \frac{\rho}{2^n},$$
tenemos que $H_{H_d}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i) < \rho$. Por la elección de ρ, lo anterior quiere decir que $\sup\{H(\mathcal{A}_i(t), \mathcal{B}_i(t) : t \in [s, 1]\} < \frac{\epsilon}{2}$. En particular para $t = (1-rt_i)s+rt_i$ tenemos que $H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-rt_i)s+rt_i)) < \frac{\epsilon}{2}$. Además
$$\begin{aligned}
& |(1-rt_i)s+rt_i-(1-Ru_i)s+Ru_i)| \\
\leq\ & |rt_i - Ru_i| \\
\leq\ & r\,|t_i - u_i| + u_i\,|r-R| \\
\leq\ & \frac{1}{M(T)}\,|t_i-u_i| + |r-R| \\
=\ & \frac{1}{M(T)}\,|t_i-v_i| + |r-R| \\
<\ & \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Pero, por la elección de η, esto implica que $H(\mathcal{B}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-Ru_i)s+Ru_i)) < \frac{\epsilon}{2}$ (pues $\mathcal{B}_i$ es un arco ordenado, así que los dos elementos se pueden comparar y sus medidas distan menos que η). Y entonces
$$\begin{aligned}
& H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-Ru_i)s+Ru_i)) \\
\leq\ & H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-rt_i)s+rt_i)) \\
& + H(\mathcal{B}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-Ru_i)s+Ru_i)) \\
& H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-rt_i)s+rt_i)) \\
<\ & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{B}_i((1-Ru_i)s+Ru_i)) < \epsilon$. Como $p \in \mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i)$, existe $q \in \mathcal{B}_i((1-Ru_i)s+Ru_i) \subset F$ con $d(p,q) < \epsilon$. Y entonces $p \in N(\epsilon, F)$.

Si $i > m$. En este caso $v_i = 0$. Por (A), $|t_i| < \frac{\eta}{4}M(T)$. Por lo que $|(1-rt_i)s+rt_i-s| \leq |rt_i| \leq \frac{t_i}{M(T)} < \frac{\eta}{4}$. Por la elección de η, tenemos que $H(\mathcal{A}_i((1-rt_i)s+rt_i), \mathcal{A}_i(s)) < \frac{\epsilon}{2}$. Pero como $\mathcal{A}_i(s) = \mathcal{B}_1(s) = E$,

$$H(\mathcal{A}_i((1 - rt_i)s + rt_i), \mathcal{B}_1(s)) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Como $\mathcal{B}_1(s) \subset E$ lo anterior implica que $p \in N(\epsilon, F)$.

(ii) Ahora ya sólo falta mostrar que $F \subset N(\epsilon, G)$. Sea $q \in F$. Entonces $q \in \mathcal{B}_i((1 - Ru_i)s + Ru_i)$ para alguna $i \in \{1, ..., m\}$. Si $i \leq n$, por un argumento igualito a cuando queríamos ver que $G \subset N(\epsilon, F)$ tenemos que $q \in N(\epsilon, G)$.

Por lo tanto podemos suponer que $i > n$. Por (B) junto con la igualdad $M(U) = M(V)$ tenemos que $\frac{M(T)}{2} \leq M(U) \leq 2M(T)$. Por lo tanto $\frac{1}{M(U)} < \frac{2}{M(T)}$. Por (C) tenemos que $1 - (u_1 + ... + u_n) < \frac{M(T)\eta}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{M(U)}(1 - (u_1 + ... + u_n)) &\leq \frac{2}{M(T)}(1 - (u_1 + ... + u_n)) \\ &\leq \frac{2}{M(T)} \cdot \frac{M(T)\eta}{4} = \frac{\eta}{2}. \end{aligned}$$

Y entonces

$$|(1 - Ru_i)s + Ru_i - s| \leq Ru_i < R(u_{n+1} + ... + u_m) \leq \frac{1}{M(U)}(1 - (u_1 + ... + u_n)) < \frac{\eta}{2}.$$

Por la elección de η, $H(\mathcal{B}_i((1 - Ru_i)s + Ru_i), \mathcal{B}_i(s)) < \frac{\epsilon}{2}$.

Además, como $\mathcal{A}_i(s) = \mathcal{B}_i(s) = E$, obtenemos que $H(\mathcal{B}_i((1 - Ru_i)s + Ru_i), \mathcal{A}_i(s)) < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Como $\mathcal{A}_i(s) \subset F$, concluimos que $q \in N(\epsilon, F)$. Con esto terminamos la demostración de que $H(G, F) < \epsilon$ y, así, $\mathcal{C}(\mathcal{A}, T) \subset N_{\mathcal{C}(X)}(\epsilon, \mathcal{C}(\mathcal{B}, U))$.

(4) Veremos que la demostración de que $\mathcal{C}(\mathcal{B}, U) \subset N_{\mathcal{C}(X)}(\epsilon, \mathcal{C}(\mathcal{A}, T))$ es igual a la mostrada en (3). Dado $G \in \mathcal{C}(\mathcal{B}, U)$ tenemos que $G = \mathcal{B}_1((1 - Ru_1)s + Ru_1) \cup ... \cup \mathcal{B}_m((1 - Ru_m)s + Ru_m)$. Como $\left|\frac{1}{M(T)} - \frac{1}{M(U)}\right| < \frac{\eta}{4}$ existe $r \in [0, \frac{1}{M(T)}]$ tal que $|R - r| < \frac{\eta}{4}$. El elemento de $\mathcal{C}(\mathcal{A}, T)$ que buscamos es $\mathcal{A}_1((1 - rt_1)s + rt_1) \cup ... \cup \mathcal{A}_n((1 - rt_n)s + rt_n)$ y podemos copiar la demostración de (3).

Con esto hemos terminado la demostración de que $H_{H_d}(\mathcal{C}(\mathcal{A}, T), \mathcal{C}(\mathcal{B}, U)) < \epsilon$ y, con ello, la demostración de la continuidad de $\mathcal{C}$.■

Recordemos las siguientes definiciones y resultados:

(1) Un espacio topológico es *paracompacto* si toda cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito;

(2) Sea Y un espacio topológico de Hausdorff. Si $f : Y \to [0,1]$ es una función continua, entonces el *soporte* de f se define como $f^{-1}((0,1])$.

Una familia $\{\kappa_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ de funciones contínuas $\kappa_\alpha : Y \to I$ se llama una *partición de la unidad* si los soportes de las funciones κ_α forman una cubierta localmente finita de Y y $\sum \kappa_\alpha(y) = 1$ para toda $y \in Y$. Además si $\{U_\beta : \beta \in B\}$ es una cubierta abierta de Y decimos que una partición de la unidad $\{\kappa_\alpha : \beta \in B\}$ *está subordinada a* $\{U_\beta\}$ si el soporte de cada κ_β está contenido en el U_β correspondiente;

(3) Si Y es un espacio paracompacto entonces toda cubierta abierta tiene una partición de la unidad subordinada a ella [3, VIII, Teorema 4.2];

(4) Todo espacio métrico es paracompacto [3, IX, Teorema 5.3].

2.11 Teorema. $C(E, X)$ es un retracto absoluto.

Demostración. Utilizaremos el Teorema 2.4. Es decir, necesitamos probar que $C(E,X)$ es un extensor absoluto. Sean (Z,ρ) un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de Z y $g : A \to C(E,X)$ una función continua. Queremos demostrar que g se puede extender a una función continua $G : Z \to C(E,X)$.

Para cada $p \in Z - A$, nos fijamos en el siguiente abierto: $B_p = \{z \in Z : \rho(p,z) < \frac{\rho(p,A)}{2}\}$, es decir en la bola abierta con centro en p y de tamaño la mitad de la distancia de p a A. La familia $\{B_p : p \in Z - A\}$ es una cubierta abierta de $Z - A$. Como $Z - A$ es paracompacto (por ser métrico) $\{B_p : p \in Z - A\}$ tiene un refinamiento localmente finito $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ y, en consecuencia, existe una partición de la unidad $\mathcal{P} = \{\phi_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ subordinada a $\mathcal{U}$.

Dado cualquier índice $\alpha \in \mathcal{J}$, le podemos asociar:

- El abierto U_α que le corresponde y un punto cualquiera, pero fijo, $p_\alpha \in U_\alpha$.

- Un punto $a_\alpha \in A$ tal que $\rho(p_\alpha, a_\alpha) < 2\rho(p_\alpha, A)$. Hay un punto así porque cualquier bola de radio mayor que la distancia de p_α a A con centro en p_α (en particular la bola de radio dos veces esa distancia) intersecta a A. Sea a_α en esta intersección. Entonces $a_\alpha \in A$ y cumple que $\rho(p_\alpha, a_\alpha) < 2\rho(p_\alpha, A)$.

- Un arco ordenado B_α de E a X que pasa por $g(a_\alpha)$. Éste existe porque $E \subset g(a_\alpha)$ y, entonces existe un arco ordenado γ_1 de E a $g(a_\alpha)$. Además, existe un arco ordenado γ_2 de $g(a_\alpha)$ a X. La unión de γ_1 y γ_2 nos da B_α.

Dada $p \in Z - A$, sean $\phi_{\alpha_1}, ..., \phi_{\alpha_n}$ los elementos de $\mathcal{P}$ que cumplen que $\phi_{\alpha_i}(p) > 0$. Entonces, por lo anterior, cada una de las $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tiene asociados un punto $p_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$, un punto $a_{\alpha_i} \in A$ y un arco ordenado B_{α_i} que va de E a X y pasa por $g(a_{\alpha_i})$. Así, tenemos n arcos ordenados y cada uno pasa por la imagen bajo g de un punto en A cercano a p.

Si nos fijamos en $\phi_{\alpha_1}(p), ..., \phi_{\alpha_n}(p)$ entonces tenemos n números en $[0, 1]$ que suman uno. Recordemos que con n arcos ordenados y n números en $[0, 1]$ que suman uno podemos usar la función C definida anteriormente. Sea

$$B_p = C((B_{\alpha_1}, ..., B_{\alpha_n}), (\phi_{\alpha_1}(p), ..., \phi_{\alpha_n}(p))).$$

De esta manera ya le asociamos un arco ordenado al punto p. Para definir $G(p)$ elegiremos un elemento de este arco ordenado mediante una altura apropiada que describiremos a continuación. Sea

$$m = \phi_{\alpha_1}(p)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\mu(g(a_{\alpha_n})).$$

Definimos $G : Z \to C(E, X)$ como:

$$G(p) = \begin{cases} g(p) & \text{si } p \in A \\ B_p(m) & \text{si } p \in Z - A \end{cases}$$

Para ver que $G(p)$ tiene sentido en los puntos de $Z - A$ tenemos que mostrar que $\mu(E) < m$. Notemos que si $\mu(g(a_{\alpha_j})) = mín\{\mu(g(a_{\alpha_i})) : i = 1, ..., n\}$ entonces

$$m = \sum_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(p)\mu(g(a_{\alpha_i})) \geq \sum_{i=1}^{n} \phi_{\alpha_i}(p)\mu(g(a_{\alpha_j})) = \mu(g(a_{\alpha_j})),$$

es decir, m es mayor o igual que el mínimo de las $\mu(g(a_{\alpha_i}))$, que, a su vez, son todas mayores que $\mu(E)$. Por tanto $G(p)$ está bien definida.

Notemos que la imagen de G está contenida en $C(E, X)$, como queríamos. Además, $G(A) = g(a)$ si $a \in A$. Es decir, G es una extensión de g.

Ahora veremos que G es continua. En el interior de A es continua porque coincide con g en una vecindad. Falta ver que es continua (1) en $Z - A$ y (2) en la frontera de A.

(1) La función G es continua en $Z - A$.

Sean $\epsilon > 0$ y $p \in Z - A$. Como $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{J}\}$ es una familia localmente finita, existe una vecindad U de p en Z tal que sólo existen un número finito de elementos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{J}$ con $U \cap U_{\alpha_i} \neq \varnothing$. Como $p \in Z - A$ y A es cerrado, podemos suponer que $U \cap A = \varnothing$.

Como las funciones $\phi_{\alpha_1}, ..., \phi_{\alpha_n}$ son continuas, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\rho(p, q) < \delta_1$ entonces $|\phi_{\alpha_i}(p) - \phi_{\alpha_i}(q)| < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Además podemos suponer que $B_{\delta_1}(p) \subset U$. Por el Lema 2.5 existe $\lambda > 0$ tal que si $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \lambda$ entonces $H(A, B) < \frac{\epsilon}{2}$.

Como la función $q \mapsto \phi_{\alpha_1}(q)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(q)\mu(g(a_{\alpha_n}))$ de $Z - A$ en $\mathbb{R}$ es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\rho(p, q) < \delta_2$ entonces

$$|\phi_{\alpha_1}(p)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\mu(g(a_{\alpha_n})) - \phi_{\alpha_1}(q)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(q)\mu(g(a_{\alpha_n}))| < \lambda.$$

Hacemos $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$. Sea $q \in B_\delta(p)$. Veremos que $H(G(p), G(q)) < \epsilon$. Dada $\alpha \in \mathcal{J}$, si $q \in U_\alpha$ entonces $U_\alpha \cap U \neq \varnothing$ y, como el soporte de ϕ_α está contenido en U_α, el conjunto $\{\alpha \in \mathcal{J} : \phi_\alpha(q) \neq 0\}$ está contenido en $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Sean $m = \phi_{\alpha_1}(p)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\mu(g(a_{\alpha_n}))$ y $m_1 = \phi_{\alpha_1}(q)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(q)\mu(g(a_{\alpha_n}))$. Entonces $|m - m_1| < \lambda$. Recordemos que $\mathcal{B}_q = \mathcal{C}((\mathcal{B}_{\alpha_{k_1}}, ..., \mathcal{B}_{\alpha_{k_m}}), (\phi_{\alpha_{k_1}}(q), ..., \phi_{\alpha_{k_m}}(q)))$ con $\alpha_{k_i} \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ para toda $i \in \{1, ..., m\}$. Por el teorema 2.10 podemos permutar a los $\phi_{\alpha_{k_i}}$ y a los $\mathcal{B}_{\alpha_{k_i}}$ y, así, podemos suponer que $k_i = i \in \{1, ..., n\}$. Como, además no importa si aumentamos ceros y los $\mathcal{B}_i$ correspondientes, obtenemos que $\mathcal{B}_q = \mathcal{C}((\mathcal{B}_{\alpha_1}, ..., \mathcal{B}_{\alpha_n}), (\phi_{\alpha_1}(q), ..., \phi_{\alpha_n}(q)))$.

Entonces $D^*(\mathcal{B}_p, \mathcal{B}_q) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{H_{H_d}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i) + |\phi_{\alpha_i}(p) - \phi_{\alpha_i}(q)|}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\phi_{\alpha_i}(p) - \phi_{\alpha_i}(q)|}{2^i} < \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} < \frac{\epsilon}{2}$.

Como $|m_1 - m| < \lambda$, por la elección de λ tenemos que $H(\mathcal{B}_q(m), \mathcal{B}_q(m_1)) < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto, $H(G(p), G(q)) = H(\mathcal{B}_p(m), \mathcal{B}_q(m_1)) \leq H(\mathcal{B}_p(m), \mathcal{B}_q(m)) + H(\mathcal{B}_q(m), \mathcal{B}_q(m_1)) < \epsilon$.

Por tanto G es continua en $Z - A$.

(2) G es continua en $Fr(A)$.

Sean $a \in Fr(A)$ y $\epsilon > 0$.

(i) Sea $\mathcal{A} = \mu^{-1}(g(a))$. Por la Proposición 2.6 existe $\delta_1 > 0$ tal que si $B \in \mathcal{A}$ y $B \subset$

$N(\delta_1, g(a))$ entonces $H(g(a), B) < \frac{\epsilon}{2}$.

(ii) Sea $\sigma = mín\{\epsilon, \delta_1\}$. Por el Lema 2.5 existe η tal que si A, $B \in C(X)$, $A \subset B$ y $|\mu(A) - \mu(B)| < \eta$ entonces $H(A, B) < \frac{\sigma}{6}$.

(iii) Por la continuidad de μ, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{6}$ y que si A, $B \in C(X)$ y $H(A, B) < \delta$ entonces $|\mu(A) - \mu(B)| < \frac{\eta}{3}$.

(iv) Finalmente, como g es continua en A, existe ξ tal que si $\rho(a, a_\alpha) < \xi$ entonces $H(g(a), g(a_\alpha)) < \delta$.

Ahora sí, sea $\omega = \frac{\xi}{9}$. Vamos a demostrar que para toda $p \in Z$ con $\rho(p, a) < \omega$ se cumple que $H(G(a), G(p)) < \epsilon$.

Si $p \in A$, como $\rho(p, a) < \omega = \frac{\xi}{9} < \xi$ por (iv) tenemos que $H(g(a), g(p)) < \delta < \epsilon$ y ya terminamos.

Por lo tanto es suficiente verificar el caso en que $p \in Z - A$. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n$ las que cumplen que $\phi_{\alpha_i}(p) > 0$. Primero mostraremos que

(A)

$$\rho(a, a_{\alpha_i}) < \xi \text{ para cada } i \in \{1, ..., n\}.$$

Como $\{B_q : q \in Z - A\}$ es cubierta de $Z - A$ tenemos que $p \in B_q$ para alguna $q \in Z - A$. Por la manera en que definimos B_q esto quiere decir que $\rho(p, q) < \frac{1}{2}\rho(q, A) \leq \frac{1}{2}\rho(q, a)$. Pero

$$\begin{aligned}
\rho(p, q) &\leq \frac{1}{2}\rho(q, a) \leq \frac{1}{2}\rho(q, p) + \frac{1}{2}\rho(p, a) \\
\frac{1}{2}\rho(p, q) &< \frac{1}{2}\rho(p, a) < \frac{\omega}{2} \\
\text{y, así, } \rho(p, q) &< \omega.
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho(q, A) &\leq \frac{1}{2}\rho(p, q) + \frac{1}{2}\rho(p, a) < \omega \\
\text{y así } \rho(q, A) &< 2\omega.
\end{aligned}$$

Finalmente para toda $y,\ z \in B_q$ tenemos que

$$\begin{aligned} \rho(y,z) &\leq \rho(y,q)+\rho(q,z) < \frac{1}{2}\rho(q,A)+\frac{1}{2}\rho(q,A) < 2\omega \\ \text{y que } \rho(y,A) &\leq \rho(y,q)+\rho(q,A) < 3\omega \end{aligned}$$

Utilizando todas estas desigualdades obtenemos que $\rho(a,a_{\alpha_i}) \leq \rho(a,p)+\rho(p,p_{\alpha_i})+\rho(p_{\alpha_i},a_{\alpha_i}) < 3\omega + 2\rho(p_{\alpha_i},A) < 9\omega = \xi$.

Como $\rho(a,a_{\alpha_i}) < \xi$ tenemos que $H(g(a),g(a_{\alpha_i})) < \delta$ y, esto a su vez, implica que

$$|\mu(g(a)) - \mu(g(a_{\alpha_i}))| < \frac{\eta}{3}.$$

Llamamos $r = \mu(g(a))$, $l = mín\{\mu(g(a_{\alpha_i})) : i = 1,...,n\}$ y $m = \phi_{\alpha_1}(p)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\mu(g(a_{\alpha_n}))$.

Entonces

$$\begin{aligned} &|m - \mu(g(a_{\alpha_i}))| \\ = \ & \left|\phi_{\alpha_1}(p)\mu(g(a_{\alpha_1})) + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\mu(g(a_{\alpha_n})) - (\phi_{\alpha_1}(p) + ... + \phi_{\alpha_n}(p))\mu(g(a_{\alpha_i}))\right| \\ \leq \ & \phi_{\alpha_1}(p)\,|\mu(g(a_{\alpha_1}) - \mu(g(a_{\alpha_i}))| + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\,|\mu(g(a_{\alpha_n}) - \mu(g(a_{\alpha_i})| \\ \leq \ & \phi_{\alpha_1}(p)\,|\mu(g(a_{\alpha_1}) - r| + \phi_{\alpha_1}(p)\,|r - \mu(g(a_{\alpha_i}))| + ... \\ & +\phi_{\alpha_n}(p)\,|\mu(g(a_{\alpha_n}) - r| + \phi_{\alpha_n}(p)\,|r - \mu(g(a_{\alpha_i})| \\ \leq \ & \phi_{\alpha_1}(p)\frac{2\eta}{3} + ... + \phi_{\alpha_n}(p)\frac{2\eta}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto

(B)

$$|m - \mu(g(a_{\alpha_i}))| \leq \frac{2\eta}{3}$$

y (C)

$$|r - m| \leq |r - \mu(g(a_{\alpha_i}))| + |\mu(g(a_{\alpha_i})) - m| < \eta.$$

Como B_p es un arco ordenado, $B_p(r) \subset B_p(m) = G(p)$ o $G(p) = B_p(m) \subset B_p(r)$ y, además, $|r - m| < \eta$. Por la elección de η, tenemos que entonces

(D)

$$H(G(p), B_p(r)) < \frac{\sigma}{6} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sabemos que

(E)

$$H(G(p), g(a)) \leq H(G(p), B_p(r)) + H(B_p(r), g(a))$$

Por (D) sólo falta probar que $H(B_p(r), g(a)) < \frac{\epsilon}{2}$. Como $\mu(B_p(r)) = r = \mu(g(a))$, por la elección de δ_1, basta probar que $B_p(r) \subset N(\delta_1, g(a))$.

Observemos que se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $B_p(r) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, G(p))$ porque $H(B_p(r), G(p)) < \frac{\sigma}{2} < \frac{\delta_1}{2}$.

(b) $G(p) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, g(a))$. Esto es porque para cada $i \in \{1, ..., n\}$ tenemos que

$$H(g(a), g(a_{\alpha_i})) < \delta < \frac{\sigma}{6} < \frac{\delta_1}{6}$$

Además, como $|m - r| < \eta$, también tenemos que

$$H(B_{\alpha_i}(m), B_{\alpha_i}(r)) < \frac{\delta_1}{6}$$

y también, como $|\mu(g(a_{\alpha_i})) - r| < \eta$,

$$H(g(a_{\alpha_i}), B_{\alpha_i}(r)) < \frac{\delta_1}{6}$$

(Recordemos que B_{α_i} se escogió de tal forma que $g(a_{\alpha_i}) \in B_{\alpha_i}$). De estas tres desigualdades podemos concluir que $H(B_{\alpha_i}(m), g(a)) < \frac{\delta_1}{2}$.

Por definición, $G(p) = C((B_{\alpha_1}, ..., B_{\alpha_n}), (\phi_{\alpha_1}(p), ..., \phi_{\alpha_n}(p))$, así que $G(p)$ es de la forma $G(p) = B_{\alpha_1}(r_1) \cup ... \cup B_{\alpha_n}(r_n)$. Como $\mu(G(p)) = m$, $\mu(B_{\alpha_i}(r_i)) = r_i$ y $B_{\alpha_i}(r_i) \subset G(p)$, tenemos que $r_i \leq m$.

Entonces $B_{\alpha_i}(r_i) \subset B_{\alpha_i}(m) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, g(a))$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por tanto $G(p) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, g(a))$.

Ahora sí, sea $x \in B_p(r)$. Como $B_p(r) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, G(p))$ existe $y \in G(p)$ tal que $\rho(x, y) < \frac{\delta_1}{2}$. Como $G(p) \subset N(\frac{\delta_1}{2}, g(a))$, existe $z \in g(a)$ con $\rho(y, z) < \frac{\delta_1}{2}$. Así, existe $z \in g(a)$ con $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) < \delta_1$, es decir, $B_p(r) \subset N(\delta_1, g(a))$. Y entonces $H(G(p), g(a)) < \epsilon$ y G es continua en $Fr(A)$.

Como cualquier función continua de A en $C(E, X)$ se puede extender a una función continua de Z en $C(E, X)$, podemos concluir que $C(E, X)$ es un extensor absoluto y, por el Teorema 2.4, que es un retracto absoluto.■

Capítulo 3

Los abanicos suaves están C-determinados.

Este capítulo está basado en el artículo [4] de C. Eberhart y S. B. Nadler, Jr.. Se trata de demostrar que la clase de abanicos suaves está C-determinada, (es decir, si X y Y son abanicos suaves y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$ entonces X es homeomorfo a Y) y se logra dando una descripción completa del hiperespacio $C(X)$ cuando X es un abanico suave.

Para dar esta descripción se necesitan dos teoremas sobre el cubo de Hilbert y, para entender estos teoremas, se necesitan las siguientes definiciones:

3.1 Definición. Sea X un continuo. Una familia de funciones $\{f_n\}$, $f_n : X \to X$ *aproxima a la función identidad en* X si para toda $\epsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, y para toda $x \in X$, $d(x, f_n(x)) < \epsilon$ (donde d es la distancia en X).

3.2 Definición. Sea A un subconjunto cerrado y no vacío de un continuo X. A es un *Z-conjunto* en X si existe una familia de funciones continuas, $\{f_n\}$, $f_n : X \to X$, tal que:

(i) la familia $\{f_n\}$ aproxima a la identidad en X,

(ii) para toda n, $f_n(X) \cap A = \varnothing$.

3.3 Observación. Si A es un Z-conjunto y $a \in A$, entonces $\{a\}$ también es un Z-conjunto, ya que la misma familia de funciones que evaden a A también evaden a $\{a\}$.

Ejemplos:

(1) Los únicos Z-conjuntos de $X = [0, 1]$ son $\{0\}$, $\{1\}$ y $\{0, 1\}$.

Demostración. Primero vamos a demostrar que $\{0\}$ es un Z-conjunto. Para hacerlo definiremos una familia de funciones $\{f_n\}$ que cumpla:

(i) la familia $\{f_n\}$ aproxima a la identidad en X.

(ii) para toda n, $f_n(X) \cap \{0\} = \varnothing$.

Consideremos la siguiente familia de funciones:

$$f_1(x) = 1$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ x & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

La familia $\{f_n\}$, así definida, aproxima a la identidad porque dada $\epsilon > 0$, escogemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Entonces para toda $n > N$ se cumple que $d(x, f_n(x)) \leq \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \epsilon$. Similarmente $\{1\}$ y $\{0, 1\}$ son Z-conjuntos.

Ahora falta ver que son los únicos. Supongamos que $[0, 1]$ tiene otro Z-conjunto A. Por la observación 3.3 podemos suponer que $A = \{p\}$ $(p \neq 0, 1)$. Sea $\{f_n\}$ la familia de funciones que aproxima a la identidad de manera que la imagen de cada f_n no intersecta a $\{p\}$. Sea $\epsilon = min$ $\{\frac{p}{2}, \frac{1-p}{2}\}$. Para cada n, $f_n([0, 1])$ tiene que ser conexo. Como además $f_n([0, 1])$ no contiene a p, tenemos que $f_n([0, 1]) \subset [0, p)$ o $f_n([0, 1]) \subset (p, 1]$. Supongamos que $f_n([0, 1]) \subset (p, 1]$. Es decir $f_n(x) > p$ para toda $x \in [0, 1]$. En particular para $x = \frac{p}{2}$ tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $d(\frac{p}{2}, f_n(\frac{p}{2})) > d(\frac{p}{2}, p) = \frac{p}{2} \geq \epsilon$ lo cual es una contradicción. Esto termina la demostración de que no hay más Z-conjuntos en $[0, 1]$.

(2) S^1 no tiene Z-conjuntos. Para demostrarlo vamos a suponer que sí los tiene y vamos a obtener una contradicción. Por la observación 3.3, basta demostrarlo para los conjuntos de la forma $\{p\}$. Supongamos que $\{p\}$ es un Z-conjunto. Entonces existe una familia de funciones que aproxima a la identidad en S^1 y tal que las imágenes de sus elementos no intersectan a

$\{p\}$. Sean $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{4}$ y f cualquier elemento de esta familia tal que para toda $x \in X$, $d(x, f(x)) < \epsilon$.

Como $f(S^1) \cap \{p\} = \varnothing$, y $p \in S^1$, tenemos que $f(p) \neq p$. Por otro lado, $\{x : d(p, x) \leq \frac{1}{4}\}$ es un arco $[a, b]$ en S^1 y, además, $f(p) \in [a, b]$. Como $f(p) \neq p$, $f(p) \in [a, p)$ o $f(p) \in (p, b]$. Supongamos que $f(p) \in [a, p)$. Entonces nos fijamos en $f(b)$. Notemos que $d(b, f(b)) < \frac{1}{4}$. Entonces, si q es el punto en S^1 diametralmente opuesto a p, $f(b)$ está en el arco con extremos p y q que contiene a b. Como $f(b)$, $f(p) \in f([a, b])$ y $f([a, b])$ es un conexo, tenemos que $p \in f([a, b])$ ó $q \in f([a, b])$. La primera opción es imposible por la elección de f. Entonces existe $x \in [a, b]$ tal que $q = f(x)$. Pero la distancia de q al arco $[a, b]$ es mayor que $\frac{1}{4}$. Entonces $d(x, f(x)) > \frac{1}{4}$. Esta contradicción prueba que $\{p\}$ no es un Z-conjunto.

(3) Si X es un continuo, A un Z-conjunto en X y $k \in \mathbb{N}$, entonces $A \times X^{k-1}$ es un Z-conjunto en X^k. Sea $\{g_n\}$ la familia de funciones de X en X que aproxima a la identidad y que cumple que para toda n, $g_n(X) \cap A = \varnothing$. Entonces la familia de funciones de X^k en X^k dada por $f_n(x_1, ..., x_k) = (g_n(x_1), x_2, ..., x_k)$ tiene las características que se requieren.

Primero veremos que aproximan a la identidad en X^k. Dadas $\epsilon > 0$ y $x = (x_1, ..., x_k) \in X^k$, como $\{g_n\}$ aproxima a la identidad en X, existe N tal que para toda $n > N$ y para toda $x \in X$, $d(x, g_n(x)) < \epsilon$. Entonces para toda $n > N$ también se cumple que $d(x, f_n(x)) = d(x_1, g_n(x_1)) + 0 + 0 + ... + 0 < \epsilon$. Además $f_n(X^k)$ no intersecta a $A \times X^{k-1}$ porque la primera coordenada de cada punto en $f_n(X^k)$ nunca está en A.

(4) Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $A^k = I^k \times \{0\} \times \{0\} \times ...$. Entonces A^k es un Z-conjunto en el cubo de Hilbert Q. (El cubo de Hilbert es el producto numerable $[0, 1] \times [0, 1] \times ...$)

La familia de funciones $\{f_n\}$ que cumple las dos condiciones de la definición de Z-conjunto se puede dar de la siguiente manera:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $f_n(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ...) = (x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+n}, 1, 1, ...)$. Claramente f_n es continua.

Falta ver que la familia $\{f_n\}$ así definida aproxima a la identidad en Q. Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k+N}} < \epsilon$. La distancia en Q que consideramos es la distancia usual, que está dada por $d(x, y) = \sum \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$ donde $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$. Sea $x \in Q$. Entonces, si $n \geq N$, $d(x, f(x)) = 0 + 0 + ... + \frac{1 - x_{k+n+1}}{2^{k+n+1}} + \frac{1 - x_{k+n+2}}{2^{k+n+2}} + ... \leq \frac{1}{2^{k+n+1}} + \frac{1}{2^{k+n+2}} + ... = \frac{1}{2^{k+n}} < \epsilon$. Por lo tanto la familia $\{f_n\}$ aproxima a la identidad en Q. Como, además, para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda

$x \in Q$, a partir de cierto momento, todas las coordenadas de $f_n(x)$ son 1 y, a partir de cierto momento, todas las cordenadas de un punto en A^k son 0, tenemos que $f_n(Q) \cap A^k = \varnothing$ y, así, tambien se cumple la segunda condición de la definición de Z-conjunto. Por lo que concluimos que A^k es un Z-conjunto en Q.

(5) Sea X el abanico armónico, que es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se construye de la siguiente manera: para cada $n \in \mathbb{N}$, sea A_n el segmento de recta que va del punto $(0,0)$ al punto $(1, \frac{1}{n})$, y sea A_0 el segmento que va de $(0,0)$ a $(1,0)$; entonces $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Afirmamos que cualquier subconjunto cerrado A de A_0 que no contenga al punto $(0,0)$ es un Z-conjunto. Tenemos que dar una familia se funciones continuas $\{f_n\}$ que cumpla que

(i) La familia $\{f_n\}$ aproxime a la identidad en X,

(ii) Para toda n, $f_n(X) \cap A = \varnothing$.

Antes de definir la familia $\{f_n\}$, observemos que la proyección $p_{k,n} : A_k \to A_n$, $n \neq 0$, dada por $p_{k,n}((x, \frac{1}{k}x)) = (x, \frac{1}{n}x)$ si $k \neq 0$ y por $p_{0,n}((x,0)) = (x, \frac{1}{n}x)$ si $k = 0$, de A_k en A_n es un homeomorfismo para toda n y para toda k.

Ahora sí, definimos $f_n : X \to X$ como:

$$f_n(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \\ p_{k,n}(z) & \text{si } z \in A_k \text{ para alguna } k \in \{0\} \cup \{n+1, n+2, ...\} \end{cases}$$

La familia de funciones así definida, cumple con la condición (ii) porque $f_n(X) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y, como los conjuntos A_i son ajenos, salvo por el punto $(0,0)$, el único elemento de A_0 que podría estar en $f_n(X)$ es $(0,0)$ que no está en A. Tenemos que ver que también cumple con la condición (i). Sean $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{N} < \epsilon$. Así, si $n \geq N$, entonces

$$d(z, f_n(z)) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k \\ d(z, p_{k,n}(Z)) < \frac{1}{n} & \text{si } z \in A_k \text{ para alguna } k \in \{0\} \cup \{n+1, n+2, ...\} \end{cases}$$

En cualquier caso, $d(z, f_n(z)) < \epsilon$ para toda $z \in X$.

Notación: de aquí en adelante denotaremos al cubo de Hilbert por Q.

3.4 Teorema (Caracterización de Toruńczyk). [12] Si X es un retracto absoluto, compacto y métrico, tal que la función identidad en X puede ser aproximada por funciones cuyas imágenes son Z-conjuntos en X entonces X es homeomorfo a Q.

3.5 Teorema (Teorema de homogeneidad de Anderson). [1] Si $h : A \to B$ es un homeomorfismo entre dos Z-conjuntos en Q entonces h se puede extender a un homeomorfismo de Q en Q.

La tarea de describir los hiperespacios de continuos avanzó enormemente cuando Toruńczyk obtuvo el teorema 3.4, ya que proporciona una manera fácil de reconocer cubos de Hilbert. Por ejemplo, para el caso de X localmente conexo, el problema quedó practicamente resuelto. También nosotros lo usaremos para describir el hiperespacio $C(X)$ de un abanico suave X. Pero, aunque es un teorema fácil de usar, es extremadamente difícil de demostrar ya que Toruńczyk utiliza resultados muy complicados de topología de dimensión infinita.

Notación: Sea X un abanico suave. Denotamos por v a su punto de ramificación y por $E(X)$ al conjunto de sus puntos extremos. Además recordemos que $C(A, X) = \{Y \in C(X) : A \subset Y\}$.

3.6 Teorema. Sea X un abanico suave. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe una retracción $r_n : X \to X$ tal que

(a) Para toda $x \in X$, $d(x, r_n(x)) < \frac{1}{3^n}$,

(b) $r_n(X)$ sólo tiene un número finito de puntos extremos,

(c) $r_n(v) = v$.

Demostración. Recordemos que todo abanico suave se puede encajar en el abanico de Cantor (capítulo 1). El abanico de Cantor se define como $AC = \{vp : p \in C\}$, donde C es el subconjunto de Cantor en $[0, 1]$, $v = (\frac{1}{2}, 1)$ y vp denota al segmento que une a v con p. También recordemos que el conjunto de Cantor se puede construir como una intersección anidada $\bigcap F_n$ donde cada F_n consta de 2^n intervalos de tamaño $\frac{1}{3^n}$ cada uno.

Ahora sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos F_{n+1} (el paso $n+1$ de la construcción del conjunto de Cantor). Sea $\{I_1, ..., I_{2^{n+1}}\}$ el conjunto de intervalos cerrados ajenos que lo componen. Si C denota al conjunto de Cantor, $\{I_1 \cap C, ..., I_{2^n} \cap C\}$ nos da una partición del conjunto de Cantor y, a su vez $\{X_j = ((I_j \cap C) \times I)/I \times \{1\} : j = 1, ..., 2^{n+1}\}$ nos da una descomposición del abanico de Cantor en 2^{n+1} subconjuntos cerrados y que se intersectan dos a dos sólo en el vértice. Como estamos pensando a X contenido en el abanico de Cantor, tenemos una partición de X en 2^{n+1}

subconjuntos cerrados que se intersectan dos a dos sólo en el vértice. En cada uno de estos subconjuntos cerrados hay un arco más largo pues la función $d(x, v)$ de X en $\mathbb{R}$ es una función continua. Llamamos A_j al arco más largo en X_j. Para todos los elementos de X_j sea r_n la proyección en A_j. La proyección es continua y ningún punto de X está a una distancia mayor que $\frac{1}{3^n}$ de su imagen.■

3.7 Teorema. Si X es un abanico suave con un número infinito de puntos extremos, entonces $C(\{v\}, X)$ es homeomorfo a Q.

Demostración. Para usar el Teorema 3.4 se requiere que $C(\{v\}, X)$ sea un retracto absoluto, métrico y compacto, y que la función identidad en $C(\{v\}, X)$ se pueda aproximar por funciones cuyas imágenes sean Z-conjuntos en $C(\{v\}, X)$.

Ya sabemos que $C(\{v\}, X)$ es un retracto absoluto (ver capítulo II) y métrico (es un subconjunto de $C(X)$).

Veremos que si $A \in C(X)$, $C(A, X)$ es cerrado en $C(X)$. Sea $B \notin C(A, X)$. Entonces A no está contenido en B. Elegimos un punto $b \in A - B$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \cap B = \emptyset$. Si tomamos $C \in C(X)$ con $H(B, C) < \epsilon$ entonces $C \subset N(\epsilon, B)$, lo que implica que $a \notin C$. Esto prueba que $C \notin C(A, X)$. Por tanto $C(A, X)$ es cerrado. Como $C(\{v\}, X)$ es cerrado en $C(X)$, es compacto.

Falta dar la familia de funciones $\{\hat{r}_n\}$ que aproxime a la identidad en $C(\{v\}, X)$ y cuyas imágenes sean Z-conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea r_n la retracción que existe por el Teorema 3.6. La restricción a $C(\{v\}, X)$ de la función inducida $\hat{r}_n : C(X) \to C(X)$, que se define como $\hat{r}_n(A) = \{r_n(a) : a \in A\}$, es la que sirve.

Lo primero es ver que, efectivamente, si $A \in C(\{v\}, X)$ entonces $\hat{r}_n(A)$ también pertenece a $C(\{v\}, X)$. Como r_n es continua, la imágen de un conjunto compacto y conexo es compacto y conexo. Como $r_n(v) = v$, si $v \in A$, entonces $v \in \hat{r}_n(A)$. Por lo tanto $\hat{r}_n(C(\{v\}, X)) \subset C(\{v\}, X)$. Además, como ya vimos en 0.3, si r_n es una función continua, entonces la función inducida $\hat{r}_n$ también lo es. Y la restricción de una función continua a un subconjunto también es una función continua. Por tanto, $\hat{r}_n$ es continua.

Sea $\epsilon > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ entonces $d(x, r_n(x)) < \frac{1}{3^n} < \epsilon$. Esto significa que, también para $A \in C(\{v\}, X)$, se cumple que $d(A, \hat{r}_n(A)) < \epsilon$ y esto quiere decir que la familia $\{\hat{r}_n\}$ aproxima a la identidad en $C(\{v\}, X)$.

Además, para cada n, tenemos que comprobar que $\tilde{r}_n(C(\{v\},X))$ es un Z-conjunto en $C(\{v\},X)$. Tenemos que demostrar que, para cada n, la identidad en $C(\{v\},X)$ se puede aproximar por una familia de funciones $\{f_s\}$, tales que cada $f_s(C(\{v\},X))\cap\tilde{r}_n(C(\{v\},X)) = \emptyset$.

Como, para cada n, $r_n(X)$ sólo tiene un número finito de puntos extremos, existe un punto extremo e tal que el arco $[v,e]$ intersecta a $r_n(X)$ sólo en v. Sea $\{p_s\}$ una sucesión en $[v,e]$ tal que $d(p_s,v) < \frac{1}{s}$ y $p_s \neq v$. Definimos $f_s(A) = A \cup [v,p_s]$. Entonces f_s es continua por 0.4 y cada punto está a una distancia de a lo más $\frac{1}{s}$ de su imagen. Además, para toda A, $f_s(A) \notin \tilde{r}_n(C(\{v\},X))$ porque contiene a $[v,p_s]$ que no está en $r_n(C(\{v\},X))$.■

Quisiéramos saber cómo es $C(\{v\},X)$ para cualquier abanico suave. El Teorema 3.7 nos dice cómo es $C(\{v\},X)$ si X tiene un número infinito de puntos extremos. Nos falta saber cómo es $C(\{v\},X)$ para un abanico suave con un número finito de puntos extremos.

Notación: I^n denota al producto de n intervalos $[0,1]\times[0,1]\times...\times[0,1]$. Y θ es el orígen de $\mathbb{R}^n$. Dados dos puntos x y y en $\mathbb{R}^n$, xy denota al segmento de recta que va de x a y.

3.8 Teorema. Si X es un abanico suave con exáctamente n puntos extremos, entonces $C(\{v\},X)$ es homeomorfo a I^n.

Demostración. Como X es un abanico suave con exáctamente n puntos extremos, X es la unión de n arcos que se intersectan por pares en un punto v. Recordemos que si x y y son puntos en $\mathbb{R}^n$ entonces xy denota al segmento de recta entre x y y. Entonces podemos suponer que $X = \theta e_1 \cup ... \cup \theta e_n$, donde $e_i = (0,0,...,1,0,...,0)$ es el i-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definimos $f : I^n \to C(\{v\},X)$ por

$$f(t_1,...,t_n) = \theta(t_1e_1)\cup...\cup\theta(t_ne_n).$$

Si s_i, $t_i \in [0,1]$ entonces $H(\theta(s_ie_i),\theta(t_ie_i)) \leq |t_i - s_i|$. De aquí que f es continua.

Si $s_i < t_i$ entonces $t_ie_i \in f(t_1,...,t_n) - f(s_1,...,s_n)$. De modo que f es inyectiva.

Si $A \in C(\{v\},X)$ entonces $A\cap\theta e_i$ es un subarco de θe_i que tiene a θ, de modo que es de la forma $A\cap\theta e_i = \theta(t_ie_i)$ para alguna $t_i \in [0,1]$. De manera que $A = \theta(t_1e_1)\cup...\cup\theta(t_ne_n) = f(t_1,...,t_n)$. Esto muestra que f es suprayectiva.

Ya que I^n es compacto, podemos concluir que f es un homeomorfismo. ■

En el teorema anterior observemos que el homeomorfismo f tiene la siguiente propiedad: si $A \in C(\{v\}, X)$ es tal que $A \subset \theta c_i$, para alguna i, entonces $A = f(0, ..., 0, t_i, 0, ..., 0)$ para alguna $t_i \in [0, 1]$. Por tanto, $\{A \in C(\{v\}, X) : A$ es un segmento que tiene por uno de sus extremos a $v\} \subset f($ unión de los vértices de I^n que tienen a $\theta)$. Es fácil ver que la otra contención también es válida y por tanto ambos conjuntos coinciden.

Para X un abanico vamos a fijarnos en los siguientes subconjuntos de $C(X)$:

$$
\begin{aligned}
N(X) &= \{vx : x \in X\} \\
T(X) &= \bigcup\{C(vc) : c \in E(X)\}
\end{aligned}
$$

Es decir, $N(X)$ es el conjunto de arcos tales que uno de sus puntos extremos es v, y $T(X)$ es el conjunto de arcos que están contenidos en un arco vc para alguna $c \in E(X)$.

3.9 Proposición. Sea X un abanico suave. Entonces:

Si $A \notin T(X)$ entonces existen $a_1, a_2 \in A$ con $v \in a_1a_2 - (\{a_1\} \cup \{a_2\})$.

Demostración.

Como $\{v\} \in T(X)$, existe un punto $a_1 \in A - \{v\}$. Por la Proposición 1.10 podemos suponer que $a_1 \in vc_1$ para una única $c_1 \in E(X)$.

Como $A \notin T(X)$, $A \not\subset vc_1$ existe $a_2 \in X - vc_1$. Procediendo como antes, existe $c_2 \in E(X)$ tal que $a_2 \in vc_2$. Como $c_2 \neq c_1$, $e_1 \notin vc_2$ y $c_2 \notin vc_1$, así que $vc_1 \cap vc_2$ es al mismo tiempo un subarco (posiblemente degenerado) de vc_1 y de vc_2. Si $vc_1 \cap vc_2$ tuviera más de un punto, sería de la forma vw con $w \in vc_1$ y $w \in vc_2$. Entonces $vw \cup wc_1 \cup wc_2$ sería un triodo simple, y w sería un punto de ramificación de X diferente de v. Esto contradice el hecho de que X es un abanico y muestra que $vc_1 \cap vc_2 = \{v\}$.

De manera que $v \in c_1c_2$. Como $a_1, a_2 \in A$ tenemos que $a_1a_2 \subset A$. Pero $a_1 \in vc_1$ y $a_2 \in vc_2$. Entonces $v \in a_1a_2$.■

3.10 Proposición. Sea X un abanico. Entonces:

(a) $N(X) \subset T(X)$ y la contención es propia.

(b) Si X es suave entonces la función $f : X \to N(X)$ dada por $f(x) = vx$ es un homeomorfismo.

(c) Si X es suave entonces $T(X)$ y $N(X)$ son subespacios cerrados de $C(X)$.

Demostración.

(a) Sea vx con $x \neq v$ un elemento de $N(X)$. Quisiéramos que $vx \in T(X)$. Por la Proposición 1.10 existe $e \in E(X)$ tal que $x \in ve$. Pero entonces $vx \in C(ve)$. De donde $N(X) \subset T(X)$.

Elegimos $x_0 \in X - \{v\}$. Tomamos un punto $a \in vx_0 - \{v\}$. Entonces $ax_0 \in T(X)$ y $ax_0 \notin N(X)$ y, por esta razón, $N(X)$ está contenido propiamente en $T(X)$.

(b) Como X es un continuo, para que f sea un homeomorfismo basta con que sea biyectiva y continua.

Es inyectiva porque $vx = vy$ sólo si $x = y$. Es suprayectiva porque dado $vz \in N(X)$, proviene del elemento $z \in X$. Y es continua por la suavidad de X.

(c) Primero veremos que $T(X)$ es cerrado. Sea A_n una sucesión en $T(X)$ que converja a $A \in C(X)$. Veremos que $A \in T(X)$. Supongamos que no es así. Por la Proposición 3.9 existen $a_1, a_2 \in A$ con $v \in a_1a_2 - (\{a_1\} \cup \{a_2\})$. Como $a_1, a_2 \in A$, existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $x_n \in A_n$, $y_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $a_1 = lím\ x_n$, $a_2 = lím\ y_n$.

Como $a_1 \neq a_2$, las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son distintas.

Para cada n, sabemos que $A_n \in T(X)$, es decir, $A_n \subset ve_n$ para alguna $e_n \in E(X)$. Como $x_n, y_n \in A_n$, $x_n \in vy_n$ o $y_n \in vx_n$. Para una infinidad de números n, se cumple alguna de las dos condiciones. Entonces podemos suponer que existe $x_{n_k} \in vy_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a a_2 y X es suave, $\{vy_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convrge a va_2. Como $x_{n_k} \in vy_{n_k}$, $a_1 = lím\ x_n \in lím\ vy_n = va_2$. Es decir, $va_1 \subset va_2$. Pero $va_1 \cap va_2 = \{v\}$. Esta contradicción prueba que $A \in T(X)$.

Falta probar que $N(X)$ es cerrado. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $N(X)$ que converja a una $A \in C(X)$. Queremos ver que A es de la forma vx con $x \in X$. Pero sabemos que $A_n = vx_n$ para alguna $x_n \in X$. Supongamos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a una $x \in X$. Entonces $A = lím\ A_{n_k} = lím\ vx_{n_k} = vx$. Por tanto $A = vx$. Así, $A \in N(X)$ y $N(X)$ es cerrado. ■

3.11 Teorema. Sea X un abanico. Entonces:

(a) $C(X) = C(\{v\}, X) \cup T(X)$.

(b) $C(\{v\}, X) \cap T(X) = N(X)$

(c) Si X es suave, $N(X)$ es un Z-conjunto en $C(\{v\}, X)$.

Demostración.

(a) Sea $A \in C(X)$. Supongamos que $A \notin T(X)$. Entonces por la proposición 3.9, existen a_1, $a_2 \in A$ con $v \in a_1a_2$. Por tanto, $v \in A$. Es decir, $A \in C(\{v\}, X)$.

(b) Veremos primero que $N(X) \subset C(\{v\}, X) \cap T(X)$. Por definición, cualquier elemento de $N(X)$ contiene a $\{v\}$ y, por lo tanto, está en $C(\{v\}, X)$. Ya habíamos visto (Proposición 3.10) que $N(X) \subset T(X)$.

Ahora veremos que $C(\{v\}, X) \cap T(X) \subset N(X)$. Sea $A \in C(\{v\}, X) \cap T(X)$. Como A está en $C(\{v\}, X)$, $v \in A$. Sabemos que $A \in T(X) = \bigcup\{C(ve) : e \in E(X)\}$. Entonces A está en $C(ve)$ para alguna $e \in E(X)$. Esto quiere decir que $A \subset ve$. Por tanto, A es de la forma vx con $x \in X$, y por lo tanto pertenece a $N(X)$.

(c) Queremos ver que $N(X)$ es un Z-conjunto cuando X es suave. Tenemos que dar una familia de funciones $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ que aproxime a la identidad en $C(\{v\}, X)$ sin que la imágen de cada f_n intersecte a $N(X)$.

Pensemos a X como subcontinuo del abanico de Cantor $AC = \{(1-t)(\frac{1}{2}, 1) + tp \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 1]$ y $p \in C\}$ (donde C es el conjunto de Cantor contenido en $[0, 1]$). Sea $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $[0, 1]$ tal que $t_n \to 0$. Sea $C_n = \{(1-t_n)(\frac{1}{2}, 1) + t_np : p \in C\}$.

Definimos $f_n : C(\{v\}, X) \to C(\{v\}, X)$ como

$$f_n(A) = A \cup (C_n \cap X).$$

Observemos primero que $C_n \cap X$ es cerrado, conexo y que contiene a v, por lo tanto $A \cup (C_n \cap X)$ es cerrado, conexo y contiene a v.

Como para toda $A \in C(\{v\}, X)$ la distancia $H(A, f_n(A)) \leq t_n$, la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ aproxima a la identidad en $C(\{v\}, X)$.

Sea $B \in f_n(C(\{v\}, X))$. Entonces $B = A \cup (C_n \cap X)$ para alguna $A \in C(\{v\}, X)$. Entonces B intersecta a ve para todo $e \in E(X)$. Lo cual nos dice que v no puede ser un punto extremo de B. Entonces $B \notin N(X)$. ■

3.12 Un modelo para $C(X)$ si X es un abanico suave con un número infinito de puntos extremos.

Por el teorema 3.11 sabemos que $C(X)$ consta de dos conjuntos cerrados, que son $T(X)$ y $C(\{v\}, X)$, pegados por una copia homeomorfa a X, que es $N(X)$. Para dar un homeomorfismo de $C(X)$ en cualquier otro continuo basta con darlo para los dos conjuntos cerrados y verificar que coincida en la intersección.

Primero daremos un homeomorfismo de $T(X)$ en un subconjunto de $[0,1] \times [0,1] \times [-2,0]$. Para empezar, por 1.11 podemos pensar a X como subconjunto del abanico de Cantor. Si rotamos, trasladamos y achicamos este abanico, podemos suponer que X está contenido en $I \times I$ y que $v = (0,0)$. de esta manera los arcos de la forma vx coincidirán con segmentos en $I \times I$ que van del orígen a x.

Los elementos de $T(X)$ son arcos de la forma uw. En esta sección convendremos que cuando escribimos uw el órden en que ponemos a u y w es importante. Estaremos pensando que el primero (u en este caso) es el más cercano a v. Es decir, $u \in vw$.

Sea $f : T(X) \to [0,1] \times [0,1] \times [-2,0]$ la función dada por $f(uw) = (w, -d(v,u))$.

Veremos que f es una función continua. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(X)$ que converja a A, donde $A_n = x_n y_n$. Como $T(X)$ es cerrado, $A \in T(X)$.

Como X es compacto existen subsucesiones $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $x = lím\ x_{n_k}$ y $y = lím\ y_{n_k}$ para algunas $x, y \in X$. Pero $\{A_{n_k} = x_{n_k} y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a xy. De manera que $A = xy$. Entonces

$$lím\ f(A_n) = lím\ (y_n, -d(v, x_n)) = (y, -d(v,x)) = f(A).$$

Por tanto, por el Lema 0.1, f es una función continua.

Ahora probaremos que f es inyectiva. Sean uw y $xy \in T(X)$ tales que $(w, -d(v,u)) = (y, -d(v,x))$. Como $w = y$, tenemos que $u, x \in vy$. Pero en un segmento de $I \times I$ la función distancia a uno de sus extremos es inyectiva, y entonces $d(v,x) = d(v,u)$ implica que $x = u$. Por tanto, $uw = xy$ y f es inyectiva. Y entonces f es un homeomorfismo en su imagen.

Observemos que, dado $uw \in T(X)$, $f(uw) \in [0,1] \times [0,1] \times \{0\}$ si y sólo si $d(u,v) = 0$, lo que es equivalente a que $uw = vw \in N(X)$. Además, $f(\{v\}) = (0,0,0)$.

Ahora queremos entender cómo se ve $f(T(X)) \subset \mathbb{R}^3$. Observemos que $f(T(X)) = f(\bigcup\{C(vc) : c \in E(X)\}) = \bigcup\{f(C(vc)) : c \in E(X)\}$. Tomemos una $c \in E(X)$. Dada $y \in vc$, $f(vy) = (y, 0)$. Para esta y veremos cómo es el conjunto $\{f(xy) : x \in vy\}$. Dada $x \in vy$, $f(xy)) = (y, -d(v, x))$. Moviendo x, podemos ir desde $f(vy) = (y, 0)$ hasta $f(\{y\}) = (y, -d(v, y))$. Esto muestra que $\{f(xy) : x \in vy\}$ es el segmento $\{y\} \times [-d(v, y), 0]$. Ahora si movemos y, empezaremos con el conjunto $\{v\} \times \{(0, 0)\}$ y terminaremos con el segmento $\{c\} \times [-d(v, c), 0]$. Esto muestra que $f(C(vc))$ es el triángulo en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son $(v, 0)$, $(c, 0)$ y $(c, -d(v, c))$.

Los elementos del segmento $(v, 0)(c, 0)$ son precísamente las imagenes de los elementos en $C(vc)$ de la forma vy, es decir, las imagenes de los elementos de $N(X) \cap C(vc)$.

Así $f(T(X))$ es la unión de una infinidad de triangulitos, cada uno de los cuales está contenido en $[0, 1] \times [0, 1] \times [-2, 0]$ y comparten al punto $(0, 0, 0) = f(\{v\})$.

Sabemos (Teorema 3.7) que $C(\{v\}, X)$ es homeomorfo a Q. Hemos supuesto que $X \subset I \times I$ con $v = (0, 0)$ y los arcos de la forma vx, ($x \in X$) iguales a los respectivos segmentos de $[0, 1] \times [0, 1]$.

Ya vimos (Proposición 3.10) que la función $h_1 : N(X) \to X$ dada por $h_1(vx) = x$ es un homeomorfismo. Consideremos la función $h_2 : N(X) \to Q$ dada por $h_2(A) = (h_1(A), 0, 0, ...) \subset I \times I \times \{0\} \times \{0\} \times ....$

Como $I \times I \times \{0\} \times \{0\} \times ...$ es un Z-conjunto de Q, $h_2(N(X))$ es un Z-conjunto de Q.

Como $h_2 : N(X) \to h_2(N(X))$ es un homeomorfismo entre Z-conjuntos del cubo de Hilbert (ver teorema3.11), por el Teorema 3.5 existe un homeomorfismo $h : C(\{v\}, X) \to Q$ tal que h extiende a h_2.

Sea $F : C(X) \to [0, 1] \times [0, 1] \times [-2, 0] \times [0, 1] \times [0, 1] \times ...$ dada por

$$F(A) = \begin{cases} (f(A), 0, 0, ...) & \text{Si } A \in T(X) \\ h(A) & \text{Si } A \in C(\{v\}, X) \end{cases}$$

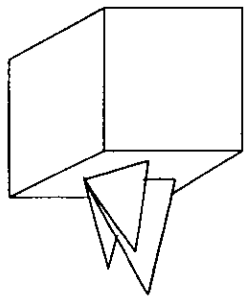
Dada $A \in C(\{v\}, X) \cap T(X)$, $A \in N(X)$. De modo que A es de la forma vx. Como $f(A) = (x, -d(v, v)) = (x, 0)$ y $h(A) = h_1(A) = h_1(vx) = x$, F está bien definida y es continua.

Para ver que F es inyectiva, sean A, $B \in C(X)$ tales que $F(A) = F(B)$. Si A, $B \in C(\{v\}, X)$, la inyectividad de h implica que $A = B$.

Ahora supongamos que $A \in C(\{v\}, X)$ y que $B = uw \in T(X)$. Como $(f(B), 0, 0, ...) =$

$F(B) = F(A) = h(A) \in Q$ tenemos que la tercera coordenada de $f(B)$ es mayor o igual que cero. Pero, por definición, dicha coordenada es igual a $-d(v,u)$. De manera que $u = v$ y $B \in N(X) \subset C(\{v\}, X)$. Por tanto A, $B \in C(\{v\}, X)$. Concluimos entonces que $A = B$. Por tanto F es inyectiva.

Esto nos proporciona un modelo para $C(X)$, puesto que F es un homeomorfismo en su imagen y su imagen es un cubo de Hilbert con una infinidad de triangulitos pegados como aletitas.



3.13 Un modelo para $C(X)$ si X tiene exactamente n puntos extremos.

Sabemos que $C(X) = C(\{v\}, X) \cup T(X)$ y que $N(X) = C(\{v\}, X) \cap T(X)$. Además recordemos que $X = \theta e_1 \cup ... \cup \theta e_n$, donde θ es el origen en $\mathbb{R}^n$ y e_i es el i-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y que la función $f : I^n \to C(\{v\}, X)$ dada por $f(t_1, ..., t_n) = \theta(t_1 e_1) \cup ... \cup \theta(t_n e_n)$ es un homeomorfismo. Además, ya habíamos visto que si $A \in N(X)$, entonces $A = f(0, 0, ..., 0, t_i, 0, .., 0)$ para alguna $t_i \in [0, 1]$. Es decir, podemos pensar que las aristas de I^n que contienen al origen representan a los elementos de $N(X)$.

Ahora daremos un modelo para $T(X)$. Sea $uw \in T(X)$ (igual que antes, estamos pensando que el primer punto que escribimos, en este caso u, es el más cercano a θ). Entonces para alguna $k \in \{1, ..., n\}$, $u = u' e_k$ y $w = w' e_k$ donde u', $w' \in [0, 1]$. Sea $F : T(X) \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(uw) = (0, ..., 0, w', -u', 0, ..., 0)$$

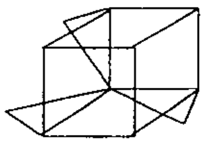
donde el lugar que ocupa w' es el $k-$ésimo y el que ocupa $-u'$ el $k + 1-$ésimo (y si $k = n$, el lugar que ocupa $-u'$ es el primero). Entonces F claramente es continua.

Sean uw y u_1w_1 dos elementos distintos en $T(X)$. Supongamos que uw y u_1w_1 están dados por $u = u'c_k$, $w = w'c_k$, $u_1 = u_1'c_j$ y $w_1 = w_1'c_j$. Si $k = j$ entonces $u_1' \neq u'$ o $w_1' \neq w'$. En el primer caso, $F(uw)$ y $F(u_1w_1)$ difieren en su k-ésima coordenada y en el segundo en la $k+1-$ésima coordenada (y en el caso $k = n$ en la primera).

Supongamos entonces que $k \neq j$ y que $F(uw) = F(u_1w_1)$. Si $u \neq \mathit{0} = (0, ..., 0)$ entonces $-u' < 0$. Como la única coordenada de $F(u_1w_1)$ que puede ser negativa es $-u_1'$, concluimos que $k = j$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $u = \mathit{0} = (0, ..., 0)$. Similarmente se muestra que $w = \mathit{0} = u_1 = w_1$. Así que $uw = \{\mathit{0}\} = u_1w_1$. Esta contradicción muestra que $F(uw) \neq F(u_1w_1)$

Por tanto F es inyectiva. Y, además, los elementos de $N(X)$ bajo F van a dar a las aristas de I^n que contienen al origen.

Por lo tanto, podemos concluir que $C(X)$ es homeomorfo al cubo I^n con un triángulo pegado en cada una de las aristas que contienen al origen.



3.14 Corolario. Los abanicos suaves están C-determinados.

Demostración. Sean X_1, X_2 dos abanicos suaves, v_1 y v_2 sus respectivos puntos de ramificación y sea $h : C(X_1) \to C(X_2)$ un homeomorfismo.

Observemos que si X_1 tiene un número infinito de puntos extremos, entonces $C(X_1)$ contiene un cubo de Hilbert, que es un conjunto de dimensión infinita. Como la dimensión es un invariante bajo homeomorfismos, $C(X_2)$ también tiene que contener un conjunto de dimensión infinita. Pero si X_2 tuviera un número finito de puntos extremos, $C(X_2)$ estaría contenido en $\mathbf{R}^n$. Por tanto si X_1 tiene un número infinito de puntos extremos, X_2 también tiene un número infinito de puntos extremos.

Más aún, si X_1 tiene exáctamente n puntos extremos, por lo que vimos unos párrafos atrás obtenemos que X_2 también tiene exactamente n puntos extremos.

Veremos que si X_1 tiene n puntos extremos, entonces $\dim(T(X_1) - N(X_1)) \leq 2$. Sea $A \in T(X_1) - N(X_1)$. Recordemos (sección anterior) que entonces A se puede representar por un punto $x \in \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k < 0$ para alguna $k = 1, ..., n\}$. Este conjunto es abierto en $\mathbb{R}^n$, y su intersección con $T(X_1) - N(X_1)$ está contenida en $\{0\} \times \{0\} \times ... \times \{0\} \times [0, 1] \times (0, 1] \times \{0\} \times ... \times \{0\}$, donde $[0, 1]$ es el k-ésimo factor y $(0, 1]$ el $k + 1-$ésimo si $k \neq n$ y donde $(0, 1]$ está en el primer factor si $k = n$. Por tanto la dimensión de $T(X_1) - N(X_1) \leq 2$. Análogamente $\dim T(X_2) - N(X_2) \leq 2$.

Si X es un abanico suave con un número infinito de puntos extremos entonces en la representación que hicimos en la sección 3.11 obtuvimos que $T(X) - N(X) \subset [0, 1] \times [0, 1] \times [-2, 0) \times \{0\} \times \{0\} \times ...$. Por eso $\dim T(X) - N(X) \leq 3$. Por tanto la dimensión de $T(X_1) - N(X_1)$ y de $T(X_2) - N(X_2)$ es menor o igual que tres.

Si X_1 tiene un número infinito de punto extremos entonces X_2 también tiene una infinidad de puntos extremos. Así que $C(\{v_1\}, X_1)$ y $C(\{v_2\}, X_2)$ son homeomorfos al cubo de Hilbert y por lo tanto tienen dimensión infinita en todos sus elementos. Por otra parte, $C(X_1) - C(\{v_1\}, X_1) = T(X_1) - N(X_1)$ y $C(X_2) - C(\{v_2\}, X_2) = T(X_2) - N(X_2)$. (Recordemos que si X es un espacio topológico y $A \subset X$ entonces $\overline{A}^{X}$ denota la cerradura de A en X). Entonces $h(T(X_1)) = h(\overline{(T(X_1) - N(X_1))}^{C(X_1)}) = \overline{(T(X_2) - N(X_2))}^{C(X_2)} = T(X_2)$. De manera que $h(N(X_1) = h(T(X_1) \cap C(\{v_1\}, X_1)) = T(X_2) \cap C(\{v_2\}, X_2) = N(X_2)$. Esto muestra que $N(X_1)$ es homeomorfo a $N(X_2)$. Por 3.10 esto implica que X_1 es homeomorfo a X_2.

Para el caso en que X_1 tiene un número finito de puntos extremos, por las consideraciones que ya hemos hecho, aunadas a un argumento análogo al del párrafo anterior, podemos concluir que X_1 es homeomorfo a X_2.

Por tanto los abanicos suaves son $C-$ determinados.■

Capítulo 4

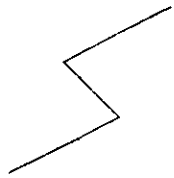
Los abanicos no están C-determinados

Al leer el resultado principal del capítulo anterior (los abanicos suaves están C-determinados) surge la siguiente pregunta: ¿será cierto que la familia de todos los abanicos está C-determinada? es decir, ¿es realmente necesario que los abanicos sean suaves? (Esta es una pregunta planteada en el artículo [4]). En este capítulo describiremos un contraejemplo que dio Alejandro Illanes en [7] de dos abanicos (no suaves, por supuesto) cuyos hiperespacios $C(X)$ son homeomorfos pero los dos abanicos no lo son, es decir, se prueba con un contraejemplo que los abanicos no están C-determinados.

Notación: Como antes, dados p, $q \in \mathbb{R}^2$, pq es el segmento de recta que los une. Para n puntos, $p_1, ..., p_n \in \mathbb{R}^2$, definimos $\langle p_1, ..., p_n \rangle = p_1p_2 \cup p_2p_3 \cup ... \cup p_{n-1}p_n$. Además, dado $A \subset \mathbb{R}^2$, hacemos $p + A = \{p + a : a \in A\}$.

Ahora vamos a construir los ejemplos. Como van a ser abanicos que no son suaves, construir las "patitas" no va a ser tán fácil, (porque tienen dobleces) así que lo vamos a hacer en diferentes etapas.

Sean $v = (0, 0)$, $B_0 = v(2, 0)$ y $C_0 = v(3, 0)$. Primero vamos a construir el "doblez básico": sea $Z = \langle v, (2, 1), (1, 2), (3, 3) \rangle$. El conjunto Z está contenido en $[0, 3] \times [0, 3]$.



Además vamos a ver que $Z \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x\}$. Como el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que cumplen estas desigualdades es convexo, es suficiente verificar que los puntos que definen a Z, es decir los puntos v, $(2,1)$, $(1,2)$, y $(3,3)$, la cumplen. Pero es trivial verificar la desigualdad para esos cuatro puntos.

Otra propiedad inmediata que satisface Z es que la proyección de $\mathbb{R}^2$ al eje y, restringida a Z es inyectiva.

Ahora vamos a pegar copias de Z, cada una más pequeña que la anterior. Estas copias convergen a un punto. Su unión constituye una especie de rayo.

Sea

$$\begin{aligned} P_1 &= \{\frac{1}{6}p : p \in Z\} \\ P_2 &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \{\frac{1}{12}p : p \in Z\} \end{aligned}$$

Observemos que $P_1 = \langle v, (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}), (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rangle$ es una copia de Z pero 6 veces más pequeña; y que P_2 es una copia de Z doce veces más pequeña y que empieza en donde termina P_1, es decir en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En general, para toda $n \in \mathbb{N}$, sea

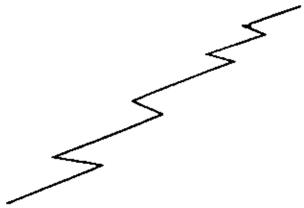
$$P_n = (1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}}) + \{\frac{1}{3 \cdot 2^n}p : p \in Z\}$$

Entonces P_n es una copia $3 \cdot 2^n$ veces más pequeña de Z que empieza en $(1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}})$. Quisiéramos que P_{n-1} terminara exáctamente en ese punto, para que se pegaran bien. Pero P_{n-1} empieza en $(1 - \frac{1}{2^{n-2}}, 1 - \frac{1}{2^{n-2}})$. Para localizar el punto final de P_{n-1} tenemos que sumar $\frac{1}{2^{n-1}}$ a ambas coordenadas. Haciendo esto obtenemos

$$(1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}})$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{n-1}},\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^{n-1}})\\
&= (\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i},\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i})=(1-\frac{1}{2^{n-1}},1-\frac{1}{2^{n-1}}).
\end{aligned}
$$

Ya sólo falta unir todos los pedacitos que definimos por separado y eso es lo que haremos. Sea $P=\bigcup\{P_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{(1,1)\}$. El conjunto P se ve así:



Veremos que cada P_n sigue estando contenido en el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que cumplen que $0\le y\le 2x$. Sea $(x,y)\in P_n$. Entonces $(x,y)=(1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{a}{2^n\cdot 3},1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{b}{2^n\cdot 3})$ para algunas $(a,b)\in Z$ y $n\in\mathbb{N}$. Como $(a,b)\in Z$, se cumple que $0\le b\le 2a$. Y tenemos que

$$0\le 1-\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{b}{2^n\cdot 3}\le 2(1-\frac{1}{2^{n-1}})+\frac{2a}{2^n\cdot 3}.$$

Por tanto, $P_n\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2x\}$.

Observemos que como P es la unión de los P_n, P también está contenido en ese conjunto. Además es fácil ver que $P\subset[0,1]\times[0,1]$.

Pero ahora necesitamos una cantidad numerable de estos rayitos que converja a un segmento. Para cada $m\in\mathbb{N}$, sean

$$B_m=v(1,\frac{1}{2^{m-1}})\cup\{(1+x,\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{y}{2^{m+1}}) : (x,y)\in P\}$$

y

$$C_m=B_m\cup(2,\frac{1}{2^{m-1}+2^{m+1}})(3,\frac{1}{2^{m-1}+2^{m+1}})$$

Veremos que cada B_m está contenido en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 2x,\ y\le\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m+1}}\}$. Sea $(1+x,\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{y}{2^{m+1}})\in B_m$. Como $(x,y)\in P$ tenemos que $0\le y\le 2x$. Como $\frac{1}{2^{m+1}}\le 2$, se cumple que $0\le\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{y}{2^{m+1}}\le\frac{1}{2^{m-1}}+y\le 2+y\le 2(1+x)$.

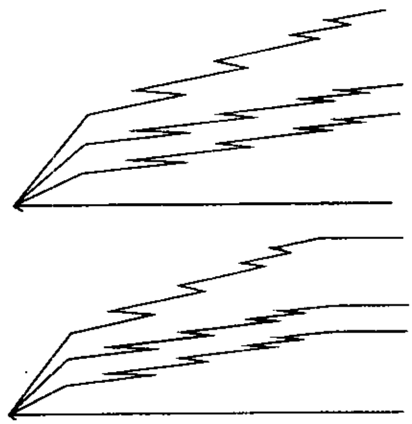
Y finalmente los espacios que buscábamos son:

$$X = \bigcup\{B_m : m = 0, 1, 2, ...\}$$

y

$$Y = \bigcup\{C_m : m = 0, 1, 2, ...\}$$

De aquí en adelante lo que haremos es probar que estos dos espacios no son homeomorfos, pero sus hiperespacios sí lo son.



4.1 Lema. Sean A, B abanicos y $h : A \to B$ un homeomorfismo. Entonces:

(1) para todo arco $ab \subset A$, $h(ab) = h(a)h(b)$.

(2) $h(E(A)) = E(B)$.

Demostración:

(1) Sabemos que $h(ab)$ es un arco. Como $h(a)$, $h(b) \in h(ab)$ y los dendroides son únicamente arcoconexos, $h(a)h(b) \subset h(ab)$. Pero también $h^{-1}(h(a)h(b))$ es un arco, $h^{-1}(h(a)) = a$, $h^{-1}(h(b)) = b \in h^{-1}(h(a)h(b))$ y por tanto $ab \subset h^{-1}(h(a)h(b))$. Entonces $h(ab) \subset h(a)h(b)$ y tenemos que $h(ab) = h(a)h(b)$.

(2) Recordemos que un punto extremo de un dendroide es un punto extremo de todo arco que lo contiene.

Sea $x \in E(A)$. Supongamos que $h(x) \notin E(B)$. Entonces existe un arco ab en B con $h(x) \in ab$ tal que $h(x) \neq a$ y $h(x) \neq b$. Como $h(x) \in ab$, $h^{-1}(h(x)) = x \in h^{-1}(ab) = h^{-1}(a)h^{-1}(b)$ y, además, $x \neq h^{-1}(a)$ y $x \notin h^{-1}(b)$ porque h^{-1} es inyectiva. Pero entonces x no es un punto extremo de A. Esta contradicción muestra que $h(E(A)) \subset E(B)$. Como $h^{-1} : B \to A$ es un homeomorfismo, $h^{-1}(E(B)) \subset E(A)$. De donde $E(B) \subset h(E(A))$. Por tanto, $E(B) = h(E(A))$.

■

Notación: Para cada $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ llamaremos c_m al punto extremo (distinto de v) de B_m , y c'_m a el de C_m.

4.2 Teorema. Los espacios X y Y no son homeomorfos.

Demostración. Supongamos que existe un homeomorfismo $h : X \to Y$.

Primero mostraremos que $h(c_0) = c'_0$. Por el Lema anterior, $h(c_0) \in E(Y)$. Supongamos que $h(c_0) = c$ con $c \neq c'_0$. Entonces $c \in B_k$ para alguna $k \neq 0$. Por la manera en que se fue construido X, tenemos que la sucesión $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} = \{(2, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}})\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $(2, 0) = c_0$. Por la continuidad de h, $\{h(c_m)\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $h(c_0) = c$. Pero la bola abierta $B_{\frac{1}{2^{k+2}}}(c) \cap E(Y) = \{c\}$. Entonces tenemos que para casi toda m, $h(c_m) = c$. Pero h es inyectiva. Esta contradicción prueba que $h(c_0) = c'_0$.

Ahora ya sabemos que $h(c_0) = c'_0$. Por la continuidad de h, existe δ tal que $h(B_\delta(c_0)) \subset B_{\frac{1}{4}}(c'_0)$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \delta$.

Recordemos que

$$\begin{aligned}
Z &= \langle v, (2,1), (1,2), (3,3) \rangle \\
P_n &= (1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}}) + \{\frac{1}{3 \cdot 2^n} p : p \in Z\} \\
P &= \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \cup \{(1,1)\} \\
B_m &= v(1, \frac{1}{2^{m-1}}) \cup \{(1 + x, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{y}{2^{m+1}}) : (x, y) \in P\}.
\end{aligned}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$A_m = \{(1 + x, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{y}{2^{m+1}}) : (x, y) \in P_N\}$$

es un subconjunto de B_m. Observemos que A_m es el arco en X que va desde $(2 - \frac{1}{2^{N-1}}, \frac{1}{2^{m-1}} +$

$\frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^{N-1}2^{m+1}})$ hasta $(2 - \frac{1}{2^N}, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{2^N 2^{m+1}})$ y, por lo tanto, la sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $(2 - \frac{1}{2^{N-1}}, 0)(2 - \frac{1}{2^N}, 0) \subset B_0$. Como $(2 - \frac{1}{2^{N-1}}, 0)(2 - \frac{1}{2^N}, 0) \subset B_\delta(e_0)$, a partir de cierta m todos los conjuntos $A_m \subset B_\delta(e_0)$. Entonces $h(A_m) \subset B_{\frac{1}{4}}(e_0')$. Observemos que $B_{\frac{1}{4}}(e_0') \cap C_k$ si no es vacía, es un arco horizontal para toda k.

Ahora definiremos unas sucesiones en X. Para ello recordemos que los puntos $(2,1)$, $(1,2)$ y $(1, \frac{1}{2})$ pertenecen a Z. Entonces los puntos $(1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N-1}}, 1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N})$, $(1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N}, 1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N+1}})(1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N-1}}, 1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N})$ y $(1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N}, 1 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N+1}})$ pertenecen a P_N.

Así, para toda $m \in \mathbb{N}$, los puntos

$$
\begin{aligned}
y_m &= (2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N-1}}, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{5}{3 \cdot 2^{N+m+1}}) \\
z_m &= (2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N}, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{N+m-1}}) \\
x_m &= (2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N}, \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{11}{3 \cdot 2^{N+m+2}})
\end{aligned}
$$

están en $A_m \subset B_m$.

Las sucesiones $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ ambas convergen a $x = (2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^N}, 0)$. La sucesión $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a $y = (2 - \frac{1}{2^{N-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{N-1}}, 0)$. Evidentemente $x \neq y$.

Para cada m, $h(x_m z_m) = h(x_m)h(z_m) \subset h(A_m) \subset C_m \cap B_{\frac{1}{4}}(e_0)$. Entonces $h(x_m)h(z_m)$ está contenido en un arco horizontal. Además, $h(y_m) \in h(x_m)h(z_m)$. Entonces $d(h(y_m), h(z_m)) \leq d(h(x_m), h(z_m))$. Por la continuidad de la distancia, $lím\ d(h(y_m), h(z_m)) \leq lím\ d(h(x_m), h(z_m)) = 0$. Es decir, $lím\ h(y_m) = lím h(z_m)$. Pero, por la continuidad de h, $h(y) = lím\ h(y_m)$ y $lím\ h(z_m) = h(x)$. Entonces tenemos que

$$h(y) = lím\ h(y_m) = lím\ h(z_m) = h(x)$$

lo cual contradice la inyectividad de h. Esta contradicción nos muestra que los espacios X y Y no son homeomorfos. ■

La demostración de que los hiperespacios de X y de Y sí son homeomorfos es mucho más larga. Vamos a describir estos hiperespacios. Necesitamos algunos resultados acerca de ellos. Vamos a respetar la notación del capítulo anterior con respecto a los conjuntos $N(X)$, $T(X)$ y

$C(A, X)$.

4.3 Lema. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(X)$ (una sucesión en $T(Y)$) que converja a alguna A. Entonces se cumple una de las siguientes condiciones:

(i) Existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para alguna $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ se tiene que, para toda $k \in \mathbb{N}$, $D_k \subset B_m$ (respectivamente C_m) y tal que $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A.

(ii) Existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \subset B_{m_k}$ (tal que $D_k \subset C_{m_k}$) con $m_1 < m_2 < ....$ y $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ y tal que converge a A.

Demostración. Supongamos que para alguna $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ hay una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(B_m)$. Entonces, como $C(B_m)$ es compacto, podemos extraer una subsucesión convergente y, entonces, se cumple (i). Por tanto podemos suponer que sólo hay un número finito de A_n en $C(B_m)$.

Si en cada $C(B_m)$ sólo hay una número finito de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea D_1 un elemento de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que no esté en $C(B_0)$. Entonces $D_1 \in C(B_{m_1})$ para alguna $m_1 \in \mathbb{N}$. Como en $C(B_0) \cup ... \cup C(B_{m_1})$ sólo hay un número finito de A_n podemos tomar un D_2 en la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ con índice mayor que el de D_1 y tal que $D_2 \notin C(B_0) \cup ... \cup C(B_{m_1})$. Entonces $D_2 \in C(B_{m_2})$ para alguna $m_2 < m_1$. Procediendo de esta manera podemos construir una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(B_{m_k})$ y donde $m_1 < m_2 < ....$ Y así tenemos (ii). Igual para $C(Y)$.■

4.4 Lema. $N(X)$ y $T(X)$ son cerrados.

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(X)$ tal que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a alguna $A \in C(X)$. Por el lema 4.3 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión cuyos elementos están contenidos en $C(B_m)$ para alguna $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ o $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ con $D_k \subset B_{m_k}$ y $m_1 < m_2 < ....$ En el primer caso tenemos $A \in C(B_m)$ porque $C(B_m)$ es cerrado, y en el segundo que $A \subset C(B_0)$. En cualquier caso $A \in T(X)$.

Sea $\{va_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $N(X)$ tal que $\{va_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A en $C(X)$. Como, por 3.11, $N(X) \subset T(X)$ y, por el párrafo anterior, $T(X)$ es cerrado, tenemos que $A \in T(X)$. Como $v \in va_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $v \in A$. Por tanto $A \in N(X)$.■

Análogamente $T(Y)$ y $N(Y)$ son cerrados.

4.5 Lema. $C(\{v\}, X)$ y $C(\{v\}, Y)$ son cubos de Hilbert.

Demostración. Para demostrar este lema utilizaremos el Teorema 3.4.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $r_n : X \to X$ como

$$r_n(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in B_m \text{ con } 1 \leq m < n \\ (x,0) & \text{si } (x,y) \in B_m \text{ con } m \geq n \text{ ó } m = 0 \end{cases}$$

Observemos que r_n es continua y ningún punto dista de su imagen más de $\frac{1}{2^{n-1}+2^{n+1}}$. La imagen de X es el conjunto $B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$.

Ya sabemos que $C(\{v\}, X)$ es un retracto absoluto (ver Capítulo II) y métrico (es un subconjunto de $C(X)$). También notemos que $C(\{v\}, X)$ es compacto porque (por el Lema 0.4) es cerrado en $C(X)$.

Vamos a dar una familia de funciones $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ que aproxime a la identidad en $C(\{v\}, X)$ y cuyas imágenes sean Z-conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la restricción a $C(\{v\}, X)$ de la función inducida $\hat{r}_n : C(X) \to C(X)$, que se define como $\hat{r}_n(A) = \{r_n(a) : a \in A\}$.

Lo primero es ver que, efectivamente, si $A \in C(\{v\}, X)$ entonces $\hat{r}_n(A)$ también pertenece a $C(\{v\}, X)$. Como r_n es continua, la imágen de un conjunto compacto y conexo es también un conjunto compacto y conexo. Como $r_n(v) = v$, si $v \in A$ entonces $v \in \hat{r}_n(A)$. Por lo tanto $\hat{r}_n(C(\{v\}, X)) \subset C(\{v\}, X)$. Además por 0.3, $\hat{r}_n$ es continua.

Sea $\epsilon > 0$. Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{3^n} < \epsilon$ entonces $d(x, r_n(x)) < \frac{1}{3^n} < \epsilon$. Esto significa que también para $A \in C(\{v\}, X)$ se cumple que $d(A, \hat{r}_n(A)) < \epsilon$. Con esto concluimos que la familia $\{\hat{r}_n : n \in \mathbb{N}\}$ aproxima a la identidad en $C(\{v\}, X)$.

Además veremos que para cada n, $\hat{r}_n(C(\{v\}, X))$ es un Z-conjunto en $C(\{v\}, X)$. Tenemos que demostrar que la identidad en $C(\{v\}, X)$ se puede aproximar por una familia de funciones $\{f_s : s \in \mathbb{N}\}$, tal que para cada s, $f_s(C(\{v\}, X) \cap \hat{r}_n(C(\{v\}, X)) = \emptyset$.

Para cada n, $r_n(X) = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Sea $\{p_s\}_{s=1}^{\infty}$ una sucesión en B_{n+1} tal que $d(p_s, v) < \frac{1}{s}$ y $p_s \neq v$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Definimos $f_s(A) = A \cup vp_s$. Entonces cada $A \in C(\{v\}, x)$ está a una distancia de a lo más $\frac{1}{s}$ de su imagen. También tenemos que dada $A \in C(\{v\}, X)$, $p_s \in f_s(A)$. De manera que $f_s(A) \not\subseteq B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Como $\hat{r}_n(B) \subset B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$ para toda $B \in C(\{v\}, X)$, concluimos que $f_s(A) \notin \hat{r}_n(C(\{v\}, X)$.

Y así, $C(\{v\}, X)$ es un cubo de Hilbert (ver Teorema 3.4). Análogamente $C(\{v\}, Y)$ también es un cubo de Hilbert.■

4.6 Lema. $N(X)$ (respectivamente $N(Y)$) es un Z-conjunto de $C(\{v\}, X)$ (respectivamente $C(\{v\}, Y)$).

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Para $n > 1$, sea $D_n = \{p \in X : \|p\| \leq \frac{1}{n}\}$. Como de v hasta 1 X es un abanico armónico, los conjuntos D_n son abanicos armónicos con las patitas de tamaño $\frac{1}{n}$. Sea $g_n : C(\{v\}, X) \to C(\{v\}, X)$ la función dada por

$$g_n(A) = A \cup D_n.$$

La imagen $g_n(A)$ de un elemento A de $C(\{v\}, X)$ también está en $C(\{v\}, X)$ porque tanto A como D_n contienen a v (y entonces su unión también), son cerrados (y entonces su unión también) y son dos conexos cuya intersección es no vacía y por lo tanto su unión es un conexo.

Para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $A \in C(\{v\}, X)$, tenemos que $H(A, g_n(A)) < \frac{2}{n}$. Cada g_n es continua porque la función unión es continua (ver 0.4). Finalmente, la imagen de ningún A puede ser un arco, lo cual implica que $g_n(C(\{v\}, X) \cap N(X) = \varnothing$. Con esto terminamos la demostración de que $N(X)$ es un Z-conjunto. La demostración para Y es igualita.■

Como X y Y son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ tiene sentido hablar de sus proyecciones en los ejes coordenados. Sean π_1 y π_2 las proyecciones definidas en $\mathbb{R}^2$, a la primera y segunda coordenada respectivamente. Como ya habíamos dicho para cada B_m ($m \neq 0$) $\pi_2|_{B_m}$ es inyectiva.

Como ya vimos en el capítulo anterior, $C(X) = T(X) \cup C(\{v\}, X)$ y ya sabemos que $C(\{v\}, X)$ es un cubo de Hilbert. Quisiéramos saber cómo es $T(X)$. Para ello vamos a definir otro subconjunto de $T(X)$.

Sea $B = \{A \in C(X) : \pi_1(A) \subset [1, 2]\}$. Como $B = \hat{\pi}_1^{-1}(C[1, 2])$, por 0.3 B es un subconjunto cerrado de $C(X)$.

Como $N(X)$ también es cerrado, $N(X) \cup B$ es cerrado en $C(X)$ y, por lo tanto, compacto. Vamos a definir una función de Whitney para $N(X) \cup B$. Luego utilizaremos el resultado principal de [13] que nos dice que dada una función de Whitney para un subconjunto compacto de $C(X)$ se puede extender a una función de Whitney para todo $C(X)$.

Antes de definir la función ω observemos que todos los conjuntos que están en $N(X)$ contienen a v. Esto implica que su proyección π_1 contiene al 0, por lo que no puede estar contenida en $[1, 2]$ y, así, $N(X) \cap B = \varnothing$. También podemos ver que $T(X)$ no es la unión de $N(X)$ y B, pues, por ejemplo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^m-2})(1, \frac{1}{2^m-1}) \in T(X) - (N(X) \cup B)$.

Para $i = 1, 2$, sea $M_i(A) = \textit{máx } \pi_i(A)$ y $m_i(A) = \textit{mín } \pi_i(A)$. Como las proyecciones son funciones continuas y tomar el máximo y el mínimo en $\mathbb{R}$ también lo es, por 0.3 cada M_i y cada m_i es una función continua de $C(X)$ en $\mathbb{R}$. Ahora sí, sea $\omega : B \cup N(X) \to \mathbb{R}$

$$\omega(A) = \begin{cases} \frac{M_1(A)+M_2(A)}{2(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1})} & \text{si } A \in C(B_m) \cap N(X) \text{ con } m \in \mathbb{N} \\ \frac{M_1(A)}{4} & \text{si } A \in C(B_0) \cap N(X) \\ \frac{M_1(A)-m_1(A)+M_2(A)-m_2(A)}{4} & \text{si } A \in B \end{cases}$$

4.7 Proposición. La función ω tiene las siguientes propiedades:

(a) es continua.

(b) si $A \subsetneq B$ entonces $\omega(A) < \omega(B)$.

(c) $\omega(\{p\}) = 0$ y $\omega(B_m) = \frac{1}{2}$ para toda $m = 0, 1, 2, ...$

Demostración.

(a) Vamos a probar que ω es continua. Por 0.2 basta probar que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $N(X) \cup B$ tal que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A entonces existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\omega(D_k) \to \omega(A)$.

Para esto analicemos tres casos:

(i) Una infinidad de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a B. En este caso podemos extaer una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in B$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como la definición de ω en B es claramente la de una función continua, tenemos que $\{\omega(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $\omega(A)$. Después de este caso podemos suponer que sólo hay un número finito de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en B. De hecho entonces podemos suponer que no hay ninguno.

(ii) Una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a un mismo $C(B_m)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$. Como por definición $\omega|_{C(B_m)\cap N(X)}$ es claramente continua, podemos razonar como en el caso (i) y concluir que existe $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$.

(iii) En cada $C(B_m)$ sólo hay una número finito de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces, por 4.3, existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(B_{m_k})$ y donde

$m_1 < m_2 < \ldots$. Como $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A, $A \in B_0$. De manera que

$$lím\ \omega(D_k) = lím\ \frac{M_1(D_k) + M_2(D_k)}{2(2 + \frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})} = \frac{M_1(A) + M_2(A)}{4} = \frac{M_1(A)}{4} = \omega(A).$$

Por tanto, ω es continua.

(b) Sea $A \subsetneq B$. Tenemos tres casos: si ambos están en $N(X)$, si ambos están en $\mathcal{B}$ ó si B está en $N(X)$ y A en $\mathcal{B}$. No consideramos el caso $A \in N(X)$ y $B \in \mathcal{B}$ porque en este caso $v \in A$, y como $A \subset B$, $v \in B$, lo cual es imposible pues $0 \notin \pi_1(B)$.

Supongamos primero que ambos están en $N(X)$. Como los dos son arcos con un punto extremo en común (v) y π_2 es inyectiva en B_m cuando $m \neq 0$, $M_2(A) < M_2(B)$. Además, $M_1(A) \leq M_1(B)$. Por lo que $\omega(A) < \omega(B)$. Si ambos están contenidos en B_0, como son distintos, $M_1(A) < M_1(B)$ y ω está definida sólo en términos de M_1. Por tanto, si A y B están en $N(X)$ entonces $\omega(A) < \omega(B)$.

Si A, $B \in \mathcal{B}$, entonces existe una $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que $B \subset B_m$. Si $m > 0$, $\pi_2|_{B_m}$ es inyectiva, así que $M_2(A) - m_2(A) < M_2(B) - m_2(B)$. Como $M_1(A) - m_1(A) < M_1(B) - m_1(B)$ obtenemos que $\omega(A) < \omega(B)$. Si $m = 0$ entonces claramente $M_1(A) - m_1(A) < M_1(B) - m_1(B)$ y $M_2(A) = m_2(A) = M_2(B) = m_2(B) = 0$, de modo que $\omega(A) < \omega(B)$.

Si $B \in N(X)$ y $A \in \mathcal{B}$ entonces $m_1(A) \geq 1$, $m_1(B) = 0$ y $M_1(A) \leq M_1(B)$ por lo que $M_1(A) - m_1(A) \leq M_1(B) - 1$.Y como sabemos que $M_1(B) \leq 2$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& (M_1(B) - 1)(4 + 2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})) \\
= \ & 4M_1(B) + (-4 + 2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})M_1(B) - 2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})) \\
\leq \ & 4M_1(B) - (4 + 2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})) \\
\leq \ & 4M_1(B).
\end{aligned}$$

Por lo que $\frac{M_1(A)-m_1(A)}{4} \leq \frac{M_1(B)-1}{4} < \frac{M_1(B)}{2(2+\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}})}$. Además, como $M_2(B) \leq \frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& M_2(B)2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}}) \\
\leq \ & 2(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})(\frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 4\left(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}\right)\frac{1}{2^{m_k-1}}\\
&\leq \frac{4+2\left(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}\right)}{2^{m_k-1}}
\end{aligned}
$$

Por lo que $M_2(B)2(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}})-\frac{4+2(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}})}{2^{m_k-1}}\leq 0$. Pero

$$
\begin{aligned}
&\left(M_2(B)-\frac{1}{2^{m_k-1}}\right)\left(4+2\left(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}\right)\right)\\
&= 4M_2(B)+M_2(B)2\left(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}\right)-\frac{4+2\left(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}\right)}{2^{m_k-1}})\\
&\leq 4M_2(B)
\end{aligned}
$$

Entonces, $\frac{M_2(A)-m_2(A)}{4}\leq\frac{M_2(B)-\frac{1}{2^{m_k-1}}}{4}\leq\frac{M_2(B)}{2(2+(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}))}$. Por tanto,

$$
\omega(A)=\frac{M_1(A)-m_1(A)+M_2(A)-m_2(A)}{4}<\frac{M_1(B)+M_2(B)}{2(2+(\frac{1}{2^{m_k-1}}+\frac{1}{2^{m_k+1}}))}=\omega(B).
$$

Sea $p\in N(X)\cup B$. Si $\{p\}\in N(X)$ tiene que ser v, y entonces $M_1(\{p\})=0$ y $\omega(\{p\})=0$. Si $\{p\}\in B$ entonces para $i=1,2$ tenemos que $M_i(\{p\})=m_i(\{p\})$ y entonces $\omega(\{p\})=0$.

Finalmente $\omega(B_m)=\frac{M_1(B_m)+M_2(B_m)}{2(2+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m+1}})}=\frac{2+(\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m+1}})}{2(2+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m+1}})}=\frac{1}{2}$ si $m\neq 0$ y $\omega(B_0)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.■

Ahora definiremos un homeomorfismo de $T(X)$ en un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Por el resultado principal de [13] existe una función de Whitney μ para $C(X)$ tal que μ es una extensión para ω.

Sea $g:T(X)\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$
g(A)=\begin{cases}\left(\frac{M_1(A)+M_2(A)}{2(2+\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m+1}})},M_2(A),\mu(A)\right) & \text{si } A\subset B_m \text{ para alguna } m\in\mathbb{N}\\ \left(\frac{M_1(A)}{4},0,\mu(A)\right) & \text{si } A\subset B_0\end{cases}
$$

4.8 Lema. $g:T(X)\to\mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo en su imagen.

Demostración. La función g está definida de manera continua en cada B_m y cada par de ellos se intersecta solamente en $\{v\}$. Para ver la continuidad de g, por 0.2 basta con probar que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $T(X)$ tal que $A_n\to A$ entonces existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$

de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $g(D_k) \to g(A)$.

Si una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a un mismo $C(B_m)$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ podemos extraer una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(B_m)$ para una misma $m \in \mathbb{N}$. Como la definición de g en $C(B_m)$ es claramente la de una función continua, tenemos que $g(D_k) \to g(A)$. Después de este caso podemos suponer que sólo hay un número finito de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $C(B_m)$.

Si en cada $C(B_m)$ sólo hay una número finito de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ por 4.3 podemos construir una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(B_{m_k})$ y donde $m_1 < m_2 < \ldots$. Como $D_k \to A$, $A \in B_0$. De manera que

$$lím\ (D_k) = lím\ \left(\frac{M_1(D_k) + M_2(D_k)}{2(2 + \frac{1}{2^{m_k-1}} + \frac{1}{2^{m_k+1}})}, M_2(D_k), \mu(D_k) \right) = \left(\frac{M_1(A)}{4}, 0, \mu(A) \right) = g(A).$$

Por tanto, g es continua.

La función g es inyectiva. Sean A, $B \in T(X)$ con $g(A) = g(B)$. Si $A \subset B_0$ entonces $M_2(A) = 0$ y como las segundas coordenadas de las imágenes tienen que ser iguales, $M_2(B) = 0$ y también $B \subset B_0$. Pero entonces las primeras coordenadas de las imágenes son de la forma $\frac{M_1(A)}{4} = \frac{M_1(B)}{4}$ y entonces $M_1(A) = M_1(B)$ de modo que A y B son dos subintervalos de B_0 que empiezan en el mismo punto. Como $\mu(A) = \mu(B)$, tienen que ser iguales. Por eso podemos suponer que ninguno de los dos está contenido en B_0.

Si A y B están en una misma B_m, como $\pi_2|_{B_m}$ es inyectiva y $M_2(A) = M_2(B)$ los puntos extremos superiores de A y B son iguales, y entonces $A \subset B$ ó $B \subset A$. Pero como miden lo mismo, tienen que ser iguales.

Falta el caso en que $A \subset B_n$ y $B \subset B_m$ con n, $m \in \mathbb{N}$ y $n < m$. Recordemos que $B_m \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \frac{x}{2^{m-1}},\ y \leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}}\}$. Como las segundas coordenadas de las imágenes bajo g tienen que ser iguales, $M_2(A) = M_2(B)$. Además si $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $(x_0, M_2(B)) \in B$, entonces

$$M_2(B) \leq \frac{x_0}{2^{m-1}} \leq \frac{M_1(B)}{2^{m-1}}.$$

De donde

$$M_2(A) = M_2(B) \leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{2}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-2}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Por la forma en que se construyó X, si un conjunto está contenido en B_n y su segunda coordenada es menor o igual que $\frac{1}{2^n-1}$ entonces tiene que estar contenido en $v(1, \frac{1}{2^n-1})$. Esto quiere decir que $A \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{2^n-1}\}$ y entonces $M_1(A) = 2^{n-1}M_2(A)$.

También las primeras coordenadas de las imágenes bajo g tienen que ser iguales, es decir $\frac{M_1(A)+M_2(A)}{2(2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1})} = \frac{M_1(B)+M_2(B)}{2(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1})}$. Como $n < m$,

$$\frac{M_2(A)}{2(2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1})} < \frac{M_2(B)}{2(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1})}$$

y entonces

$$M_1(A)(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1}) > M_1(B)(2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1}).$$

Pero como $M_1(A) = 2^{n-1}M_2(A)$ y $M_2(B) \leq \frac{M_1(B)}{2^m-1}$ tenemos que

$$M_2(A)2^{n-1}(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1}) > M_2(B)2^{m-1}(2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1})$$

y entonces

$$2^{n-1}(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1}) > 2^{m-1}(2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1})$$

Lo cual es una contradicción porque como $n < m$, $2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1} < 2+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n+1}$ y $2^{n-1} < 2^{m-1}$. Esta contradicción implica que g también es inyectiva si A y B están en diferentes B_m, que era el caso que faltaba para completar la demostración de la inyectividad de g.

Como $T(X)$ es cerrado en $C(X)$ (Lema 4.4) y por lo tanto compacto, con eso basta para que g sea un homeomorfismo en su imagen.■

Para dar un homeomorfismo de $T(X)$ en $T(Y)$ vamos a describir con más precisión algunos subconjuntos de $T(X)$. Como X y Y difieren en que Y tiene un segmento pegado a lo que es cada punto extremo de X, en particular nos interesa saber cómo son los subconjuntos en $T(X)$ que contienen a alguno de los puntos extremos.

Sabemos que $C(B_m)$ es homeomorfo a un triángulo para cada B_m porque B_m es un arco. Pero es un triángulo "arrugado" porque en uno de sus lados contiene una copia de B_m. Si algo está muy arrugado su proyección $\pi(x,y,z) = (x,z)$ no va a ser inyectiva, por eso nos van a interesar esas proyecciones. Finalmente, lo que buscamos es que la orilla que contiene a los subconjuntos de B_m que contienen a e_m sea algo parecido a un disco, porque sabemos que para C_m así es y quisieramos que fueran homeomorfos.

Sea

$$S = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, z \geq 2 - 4x, 0 \leq z \leq x\}.$$

El conjunto S es el triangulo relleno cuyos vértices son los puntos $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

Recordemos que dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ denota el segmento de recta que los une.

Sean

$$\begin{aligned} R &= (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ T &= (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})(\frac{1}{2}, 0). \end{aligned}$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la proyección definida como $\pi(x, y, z) = (x, z)$.

Para $m = 0, 1, \ldots$ sean

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_m &= (\pi \circ g)^{-1}(S) \cap C(B_m) \\ \mathcal{C}_m &= N(X) \cap C(B_m) \\ \mathcal{D}_m &= \{A \in C(B_m) : e_m \in A\} \end{aligned}$$

Claramente los tres son subconjuntos cerrados de $C(X)$.

4.9 Teorema.

(1) $\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m} : \mathcal{A}_m \to S$, $\pi \circ g|_{\mathcal{C}_m} : \mathcal{C}_m \to (0,0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $\pi \circ g|_{\mathcal{D}_m} : \mathcal{D}_m \to (\frac{1}{2}, 0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ son homeomorfismos.

(2) $\pi(g(\mathcal{A}_m \cap \mathcal{C}_m)) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = R$.

(3) $Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) = (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})) = (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}(T)$ y $Fr_{T(X)}(\bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}) = (\pi \circ g)^{-1}(T)$.

Demostración.

(1) Claramente $\pi \circ g$ es continua. Primero veremos que es inyectiva en $\mathcal{C}_m$ y $\mathcal{D}_m$.

Como B_m es un arco con puntos extremos v y e_m existe un homeomorfismo de B_m en un triángulo tal que los lados del triángulo son $\{\{p\} : p \in B_m\}$, $\{A \in C(B_m) : c_m \in A\}$ y $\{A \in C(B_m) : v \in B_m\}$. Es decir, los conjuntos de un solo punto, $\mathcal{C}_m$ y $\mathcal{D}_m$. De modo que $\mathcal{C}_m$ y $\mathcal{D}_m$ son arcos y los puntos extremos de $\mathcal{C}_m$ son $\{v\}$ y B_m y los de $\mathcal{D}_m$ son $\{c_m\}$ y B_m. Dados dos conjuntos A, B en $\mathcal{C}_m$, necesariamente uno está contenido en el otro (son arcos con un mismo punto extremo, v) y si $\mu(A) = \mu(B)$ entonces $A = B$. Es decir μ restringida a $\mathcal{C}_m$ es inyectiva. Como para los elementos de $N(X)$ tenemos que $\pi \circ g(A) = (\omega(A), \mu(A))$, si los conjuntos son distintos sus imágenes son distintas. Ese mismito razonamiento sirve para $\mathcal{D}_m$ porque está basado en que la segunda coordenada de la imágen es μ. Entonces $\pi \circ g$ es inyectiva en $\mathcal{C}_m$ y en $\mathcal{D}_m$.

Dada $A \in \mathcal{C}_m$, $A \in N(X)$, así que $\pi \circ g(A) = (\omega(A), \mu(A)) = (\mu(A), \mu(A))$. De modo que $\pi \circ g(A)$ está en la diagonal de $\mathbb{R}^2$. Como $\pi \circ g(\{v\}) = (0, 0)$ y $\pi \circ g(B_m) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\pi \circ g(\mathcal{C}_m)$ es un subarco de la diagonal en $\mathbb{R}^2$ con puntos extremos $(0, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Por tanto, $\pi \circ g(\mathcal{C}_m) = (0, 0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Antes de demostrar la inyectividad de $\pi \circ g$ restringida a $\mathcal{A}_m$ probaremos que si $D_1 = \bigcup\{\alpha : \alpha$ es un segmento contenido en B_1 y la pendiente de la recta en $\mathbb{R}^2$ que contiene a α es negativa$\}$ y $D_0 = \pi_1(D_1)$ entonces los subcontinuos de B_m contenidos en $\pi_1^{-1}(D_0)$ no están en $\mathcal{A}_m$. Es una forma de decir que los conjuntos totalmente contenidos en una de las copias chiquitas de Z no están en $\mathcal{A}_m$ (ó conjuntos en B_0 que no miden mucho).

Sea $A \in C(B_m)$ tal que $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Sea $g(A) = (x', y', z')$. Probaremos que $z' < 2 - 4x'$. Como $\pi_1(A) \subset [1, 2]$ tenemos que $A \in \mathcal{B}$ y como μ es una extensión de ω, entonces $\mu(A) = \frac{M_1(A) - m_1(A) + M_2(A) - m_2(A)}{4}$.

Si $A \subset B_0$ entonces $A \subset (2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 0)(2 - \frac{1}{2^n}, 0)$ para alguna n. Y entonces

$$z' = \mu(A) = \frac{M_1(A) - m_1(A)}{4} \leq \frac{1}{2^n \cdot 4} = \frac{1}{2^{n+2}} < \frac{1}{2^n}$$

y

$$2 - 4x' = 2 - 4(\frac{M_1(A)}{4}) = 2 - M_1(A) > \frac{1}{2^n}$$

nos dan el resultado que queríamos.

Ahora supongamos que $A \subset B_m$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Como $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$, A está contenido en una "copia" Z_1 de Z, de las que componen a B_m. Además A tiene que estar contenida en la parte central de Z_1. Es decir, si dividimos $\pi_1(Z_1)$ en tres partes iguales, entonces $\pi_1(A)$ está contenido en el tercio medio. Esto implica que $M_1(A) - m_1(A) \leq M_1(Z_1) - M_1(A)$.

Por otra parte, por la forma en que se construyó P, $\pi_1(Z_1)$ mide exáctamente lo mismo que lo que queda a su derecha en el intervalo $\pi_1(B_m) = [0, 2]$. De manera que

$$2 - M_1(Z_1) = M_1(Z_1) - m_1(Z_1) \geq 3(M_1(A) - m_1(A)).$$

Entonces

$$4(M_1(A) - m_1(A)) \leq M_1(Z_1) - M_1(A) + 2 - M_1(Z_1) = 2 - M_1(A).$$

Por tanto $M_1(A) - m_1(A) \leq \frac{2-M_1(A)}{4}$.

Ahora acotemos a $M_2(A) - m_2(A)$. Esta cantidad es menor que la longitud de $\pi_2(Z_1)$. Recordemos que Z_1 se construye a partir de Z trasladando y comprimiendo. Pero también notemos que la coordenada y se comprime más que la coordenada x, de hecho se comprime al menos cuatro veces más. De manera que $M_2(A) - m_2(A) \leq$ longitud de $\pi_2(Z_1) \leq \frac{1}{4}$(longitud de $\pi_1(Z_1)) = \frac{1}{4}(M_1(Z_1) - m_1(Z_1)) = \frac{1}{4}(2 - M_1(Z_1)) = \frac{1}{4}(2 - M_1(A))$. Por tanto, $M_2(A) - m_2(A) \leq \frac{1}{4}(2 - M_1(A))$.

De las desigualdades anteriores obtenemos que $\mu(A) = \frac{M_1(A) - m_1(A) + M_2(A) - m_2(A)}{4} < \frac{2 - M_1(A)}{8}$. Y además, como $M_2(A) < \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}}$ entonces $x' = \frac{M_1(A) + M_2(A)}{2(2 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}})} < \frac{M_1(A) + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}}}{2(2 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}})}$. Y entonces

$$1 - 2x' > \frac{2 - M_1(A)}{2 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}}} \geq \frac{2 - M_1(A)}{4} \geq \frac{\mu(A)}{2}.$$

Y así, $z' = \mu(A) < 2 - 4x'$ y $A \notin \mathcal{A}_m$.

Ahora sí, probaremos la inyectividad de $\pi \circ g$ restringida a $\mathcal{A}_m$. Sean $A, B \in \mathcal{A}_m$ tales que $\pi(g(A)) = \pi(g(B))$. Si A, $B \subset B_0$ entonces, $M_1(A) = M_1(B)$ y $\mu(A) = \mu(B)$, de manera que A y B son subarcos de B_0 que comparten un extremo y miden lo mismo, por tanto $A = B$. Supongamos entonces que $m \geq 1$. $A \neq B$ entonces $\mu(A) \neq \mu(B)$. Así que basta considerar el caso $m \geq 1$.

Como $\pi_2|_{B_m}$ es inyectiva, si ocurriera que $M_2(A) = M_2(B)$, A y B serían subarcos (posiblemente degenerados) de B_m que comparten uno de sus extremos. Además $\pi(g(A)) = \pi(g(B))$

implica que $\mu(A) = \mu(B)$. Y entonces $A = B$. Entonces podemos suponer que $M_2(A) < M_2(B)$.

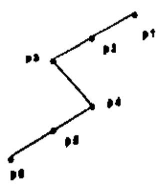
Como $\pi(g(A)) = \pi(g(B))$, tenemos que

$$\frac{M_1(A) + M_2(A)}{2(2 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}})} = \frac{M_1(B) + M_2(B)}{2(2 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}})}.$$

Esto implica que $M_1(A) > M_1(B)$.

Sea p el punto más alto de A, es decir , sea p de la forma $p = (x, M_2(A))$. Como A, $B \subset B_m$ y $M_2(A) < M_2(B)$ tenemos que p está en alguna de las copias de Z que componen a B_m o $p \in (0,0)(1, \frac{1}{2^{m-1}})$.

En el primer caso supongamos que $p \in Z_1$ donde Z_1 es una de las copias de Z que constituyen a B_m. Vamos a fijarnos en los puntos de Z_1 que corresponden a los siguientes puntos en Z: $(3,3)$, $(2, \frac{5}{2})$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(1, \frac{1}{2})$ y $(0,0)$, y los llamaremos p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 y p_6 respectivamente. De esta manera, $Z_1 = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$. En otras palabras, Z_1 es la poligonal que une a estos puntos.



Dividimos de esta manera porque queremos observar que si $p \in p_1p_2$ o $p \in p_5p_6$ entonces todos los puntos de A quedan a la izquierda de p. Y además cualquier punto en B_m con segunda coordenada mayor que $M_2(A)$ (como es el punto en B cuya segunda coordenada es $M_2(B)$) está estríctamente a la derecha de p lo cual implica que $M_1(B) > M_1(A)$. Esto es absurdo, por tanto $p \in p_2p_3 \cup p_3p_4 \cup p_4p_5$.

En el caso en que $p \in p_4p_5$, todos los puntos de A quedan a la izquierda de p, de modo que $m_1(A) = x > M_1(B)$. Pero entonces B completo tiene que estar en el arco en B_m que une a $(0,0)$ con p. Entonces tenemos dos posibilidades: $M_2(B) \leq M_2(A)$ o B queda atrapado en $p_2p_3 \cup p_3p_4 \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Cualquiera de estas dos posibilidades es absurda, la primera porque ya habíamos dicho que $M_2(B) > M_2(A)$ y la segunda porque los continuos contenidos en $\pi_1^{-1}(D_0)$ no están en $\mathcal{A}_m$.

Como $Z_1 = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$ ya sólo nos falta considerar el caso $p \in p_2p_3 \cup p_3p_4$. Tenemos que $A \not\subset p_2p_3 \cup p_3p_4$, porque $A \not\subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Esto implica que $p_4 \in A$ y además que $M_1(A) = m_1(\{p_4\})$. Como $M_1(B) < m_1(\{p_4\})$, B está contenido en el arco en B_m que une a $(0,0)$ con p_4 y entonces $M_2(B) \leq M_2(A)$ o B queda atrapado en $p_2p_3 \cup p_3p_4 \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Cualquiera de las dos posibilidades es absurda.

Finalmente, si $p \in (0,0)(1, \frac{1}{2^{m-1}})$, $A \subset (0,0)p$ y $x = M_1(A) > M_1(B)$. Y entonces $B \subset (0,0)p$ y $M_2(B) \leq M_2(A)$, lo cual es absurdo.

Después de esta serie de absurdos no nos queda más que admitir que no es posible que $M_2(A) < M_2(B)$. De manera que, forzosamente, $M_2(A) = M_2(B)$ y, como vimos antes, esto implica que $A = B$. Por tanto $\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m}$ es inyectiva.

Ahora mostraremos que $\pi \circ g(\mathcal{A}_m) = S$. Por definición $\pi \circ g(\mathcal{A}_m) \subset S$. Sea $(x, z) \in S$. Entonces z cumple con que $0 \leq z \leq x \leq \frac{1}{2}$, así que $(z, z) \in (0,0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y también $(\frac{1}{2}, z) \in (\frac{1}{2}, 0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Como $\pi \circ g(\mathcal{C}_m) = (0,0)$ y $\pi \circ g(\mathcal{D}_m) = (\frac{1}{2}, 0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, existen C y D en $\mathcal{C}_m$ y $\mathcal{D}_m$, respectivamente, con $(z, z) = \pi(g(C)) = (\mu(C), \mu(C))$ y $(\frac{1}{2}, z) = \pi(g(D)) = (\frac{1}{2}, \mu(D))$.

Por [5, Proposición 4.2], como B_m es homeomorfo a un arco, $\mu^{-1}(z) \cap C(B_m) = \mu|_{C(B_m)}^{-1}(z)$ es un arco o un punto. Dado un elemento $E \in \mu^{-1}(z) \cap C(B_m)$, la segunda coordenada de $\pi \circ g(E)$ es igual a $\mu(E) = z$. Por tanto $\pi \circ g(\mu^{-1}(z) \cap C(B_m))$ está contenido en la recta en $\mathbb{R}^2$ que consta de los puntos cuya segunda coordenada es igual a z. Además $\pi \circ g(\mu^{-1}(z) \cap C(B_m))$ es conexo y contiene tanto a $(\frac{1}{2}, z)$ como a (z, z). Por tanto, este conjunto también tiene a todos los puntos intermedios. En particular, existe $A \in \mu^{-1}(z) \cap C(B_m)$ tal que $\pi \circ g(A) = (x, z)$. Por definición $A \in (\pi \circ g)^{-1}(S) \cap C(B_m) = \mathcal{A}_m$. Por tanto, $\pi \circ g(\mathcal{A}_m) = S$.

Como $\mathcal{A}_m$ es compacto, $(\pi \circ g)|_{\mathcal{A}_m} : \mathcal{A}_m \to S$ es un homeomorfismo.

(2) Ahora verificaremos la igualdad $\pi(g(\mathcal{A}_m \cap \mathcal{C}_m)) = R$. Dada $A \in \mathcal{A}_m \cap \mathcal{C}_m$, por (1), $\pi(g(A)) \in S \cap (0,0)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = R$. Así, $\pi(g(\mathcal{A}_m \cap \mathcal{C}_m)) \subset R$. Sea $(x, x) \in R$. Por (1), existe $C \in \mathcal{C}_m$ tal que $\pi(g(C)) = (x, x)$. Como $\mathcal{C}_m \subset C(B_m)$ y $R \subset S$, tenemos que $C \in (\pi \circ g)^{-1}(S) \cap C(B_m) = \mathcal{A}_m$. De donde $C \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{A}_m$. Por lo que $R \subset \pi(g(\mathcal{A}_m \cap \mathcal{C}_m))$. Esto prueba (2).

(3) Tenemos que comprobar que $Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) = (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$. Sea $A \in C(B_m)$ y sea $\pi(g(A)) = (x', z')$. Analizaremos dos posibilidades para A: $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$ y $A \not\subset \pi_1^{-1}(D_0)$.

Si $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$ se tiene que cumplir la desigualdad $z' < 2-4x'$, como lo vimos en la prueba de la inyectividad de $\pi \circ g|_{A_m}$. Entonces $\pi(g(A)) \notin S$. En particular, $\pi(g(A)) \notin (\frac{1}{2},0)(\frac{2}{5},\frac{2}{5})$.

Ahora veamos que ocurre cuando $A \not\subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Sean $p, q \in A$ tales que $M_1(A) = \pi_1(p)$ y $M_2(A) = \pi_1(q)$. En el caso en que $m = 0$, A está contenido en el eje x, de modo que podemos tomar $p = q$. En este caso, $M_1(A) = \pi_1(q)$. Sea J (respectivamente K y L) el subarco (posiblemente degenerado) de B_m que une a v y q (respectivamente a p y q y a v y p). Como A es continuo y $p, q \in A$ se tiene que $K \subset A$. En el caso en que K conste de más de un punto, es decir si $p \neq q$, tenemos que el punto más alto de A no coincide con su punto más a la derecha. Esto sólo puede ocurrir si p y q están en la misma componente de $\pi_1^{-1}(D_0)$. Por tanto podemos concluir que $K = \{p\}$ o $K \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Observemos que $M_1(K) = M_1(A)$ y $M_2(K) = M_2(A)$, de manera que $\pi(g(K)) = (x', \mu(K))$. Si $K = \{p\}$, $\mu(K) = 0$ y si $K \subset \pi_1^{-1}(D_0)$ se sigue que $\mu(K) < 2 - 4x'$, como lo vimos en la prueba de la inyectividad de $\pi \circ g|_{A_m}$.

Como $\pi_2|_{B_m}$ es inyectiva, $M_2(A) = M_2(J)$. Como $A \subset J$, $M_1(A) \leq M_1(J)$. Supongamos que $M_1(A) < M_1(J)$. Entonces tenemos que para viajar de $(0,0)$ al punto más alto de A (o sea q) se tiene que visitar un punto que está más a la derecha que todos los de A. Esto sólo es posible si $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. Como estamos precisamente en el caso contrario, concluimos que $M_1(A) = M_1(J)$.

Sea $\alpha : [0,1] \to J$ una función continua tal que $\alpha(0) = q$ y $\alpha(1) = (0,0)$. Definimos $\beta : [0,1] \to C(B_m)$ como $\beta(t) = K \cup \alpha([0,t])$. Como $\alpha(0) = q \in K$, β está bien definida. Por 0.3 y 0.4, β es continua. También es claro que si $s \leq t$ entonces $\beta(s) \subset \beta(t)$. De manera que β toma como valores a subcontinuos de J que contienen a K. De modo que $\beta(t)$ es un subarco de J que tiene a q para toda $t \in [0,1]$. Como β es continua, tiene que recorrer a todos los subarcos de J que tienen a q. Como A es de esta forma, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\beta(t_0) = A$.

Como $K \subset A$, $M_1(K) \leq M_1(A)$ y $M_2(K) \leq M_2(A)$. Pero, como p y q están en K, $M_1(K) = M_1(A)$ y $M_2(K) = M_2(A)$. Para toda $t \in [0,1]$, tenemos que $K \subset \beta(t) \subset J$ y entonces para $i = 1,2$, $M_i(A) = M_i(K) \leq M_i(\beta(t)) \leq M_i(J) = M_i(A)$. Es decir, $M_1(A) = M_1(\beta(t))$ y $M_2(A) = M_2(\beta(t))$. La primera coordenada de $g(\beta(t))$ está definida en términos de M_1 y M_2 y entonces $\pi(g(\beta(t)) = (x', \mu(\beta(t)))$. Si $s \leq t$, entonces como $\beta(s) \subset \beta(t)$, tenemos que $\mu(\beta(s)) \leq \mu(\beta(t))$.

Sabemos que $\beta(1) = J = (0,0)q \in N(X) \cap C(B_m) = C_m$. Por la manera en que se definió

g sabemos que para $J \in N(X)$, $\pi(g(J)) = (\mu(J), \mu(J))$. Pero, por lo que habíamos dicho anteriormente, $\pi(g(J)) = (x', \mu(\beta(1))) = (x', \mu(J))$. Por tanto, $x' = \mu(J)$. Y entonces $x' = \mu(J) = \mu(\beta(1)) \leq \mu(\beta(t_0)) = \mu(A) = z'$. Es decir, $x' \leq z'$. Además $x' = \mu(J) \leq \mu(B_m) = \frac{1}{2}$, concluimos que $\pi(g(A))$ está en el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Uniendo los casos $A \subset \pi_1^{-1}(D_0)$ y $A \not\subset \pi_1^{-1}(D_0)$ podemos decir que si $A \in C(B_m)$ con $\pi(g(A)) = (x', z')$, entonces $z' < 2 - 4x'$ o (x', z') pertenece al triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Sabemos que si $z' < 2 - 4x'$ entonces $A \notin \mathcal{A}_m$. Por tanto si $A \in \mathcal{A}_m$ entonces (x', z') está en el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices en $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Y entonces $(x', z') \in S$ si y sólo si $z' \geq 2 - 4x'$. Por tanto hemos probado que $\mathcal{A}_m = (\pi \circ g)^{-1}(S) \cap C(B_m) = (\pi \circ g)^{-1}(\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z \text{ y } 0 \leq z\}) \cap C(B_m)$.

Sea $A \in Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m)$. Entonces $A \in \mathcal{A}_m$ y se puede aproximar por una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de $C(B_m) - \mathcal{A}_m$. Como $\pi \circ g|_{C(B_m)} : C(B_m) \to \mathbb{R}^2$ es una función continua, $(\pi \circ g)(A_n) \to \pi \circ g(A)$. Pero $\pi(g(A)) \in S$ (por definición de $\mathcal{A}_m$) y, como $\mathcal{A}_m = (\pi \circ g)^{-1}(\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z \text{ y } 0 \leq z\}) \cap C(B_m)$, $\pi(g(A_n)) \notin \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z$ y $0 \leq z\}$. La frontera de este conjunto en $\mathbb{R}^2$ consta de la parte del eje x que está a la derecha del punto $(\frac{1}{2}, 0)$ uniéndole la parte de la recta $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x = z\}$ que está en el semiplano positivo $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \geq 0\}$. Y como la intersección de esta frontera con S es el segmento $(\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, concluimos que $\pi(g(A)) \in (\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Por tanto $Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) \subset (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$.

Ahora sea $A \in (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) - \{(\frac{1}{2}, 0)\})$. Entonces $A \in S$, de modo que $A \not\subset \pi_1^{-1}(D_0)$, como lo vimos en la prueba de la inyectividad de $\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m}$. Tomemos p, q, K, β y t_0 como antes.

La segunda coordenada de $\pi(g(A)) = \mu(A)$ y estamos excluyendo al punto $(\frac{1}{2}, 0)$, por tanto $\mu(A) > 0$. Recordemos que cuando construimos K, mostramos que K es un conjunto de un solo punto o que $K \subset \pi_1^{-1}(D_0)$. En cualquiera de los dos casos K es un subconjunto propio de A. Como β es un arco ordenado de $C(B_m)$ que va de K a J y $A \subset J$, β se puede escoger de manera que sea una función inyectiva.

Como $\beta(t_0) = A$ y $\beta(0) = K$, tenemos que $0 < t_0$. Dada $t < t_0$, $\beta(t) \subsetneq \beta(t_0) = A$, de manera que $\mu(\beta(t)) < \mu(A)$ para toda $t \in [0, t_0)$.

Dado que el segmento $(\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ es parte de la frontera de S en $\mathbb{R}^2$, tiene pendiente negativa, que los puntos de la forma $\pi(g(\beta(t)))$ tienen la misma primera coordenada que $\pi(g(A))$, y que su segunda coordenada es menor que la de $\pi(g(A))$, concluimos que $\pi(g(\beta(t))) \notin S$. Por tanto $\beta(t) \in C(B_m) - \mathcal{A}_m$ para toda $t < t_0$.

Por tanto A se puede aproximar por elementos en $C(B_m) - \mathcal{A}_m$.

Por otra parte, como $(\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) \subset S$, tenemos que $A \in \mathcal{A}_m$. Por tanto, $A \in Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m)$. Con esto hemos probado que $(\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) - \{(\frac{1}{2}, 0)\}) \subset Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) \subset (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$.

Pero $\pi(g(Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m)))$ es compacto, entonces tiene que ser diferente de $(\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) - \{(\frac{1}{2}, 0)\}$. Por tanto $Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) = (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$.

Ahora mostraremos que $Fr_{T(X)}(\bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, 2, ...\}) = (\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$. Dada $A \in (\pi \circ g)^{-1}(S)$, tenemos que $A \in T(X)$ y $\pi(g(A)) \in S$. De modo que $A \subset B_m$ para alguna $m = 0, 1, 2, ...$ y $\pi(g(A)) \in S$. Por tanto $A \in \mathcal{A}_m$.

Hemos mostrado que $(\pi \circ g)^{-1}(S) \subset \bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, ...\}$. Por definición $\bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, ...\} \subset (\pi \circ g)^{-1}(S)$. Por tanto $(\pi \circ g)^{-1}(S) = \bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, ...\}$.

Dada $A \in (\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$, como $A \in T(X)$ existe $m = 0, 1, 2, ...$ tal que $A \subset B_m$. De manera que $A \in (\pi \circ g|_{C(B_m)})^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})) = Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m)$. Esto implica que existe una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $C(B_m) - \mathcal{A}_m$ tal que $A_k \to A$.

Como $\pi(g(\{(0, 0)\})) = (0, 0) \notin (\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, tenemos que $A \neq \{(0, 0)\}$. De modo que podemos suponer que $A_k \neq \{(0, 0)\}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces $A_k \subset B_m$ y A_k no puede estar contenida en ningún otro B_m. En particular, $A_k \notin \bigcup\{\mathcal{A}_n : n = 0, 1, 2, ...\}$. Por tanto A se puede aproximar por elementos de $T(X)$ que no pertenecen a $(\pi \circ g)^{-1}(S)$. Por tanto $A \in Fr_{T(X)}((\pi \circ g)^{-1}(S))$.

Hemos probado que $(\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})) \subset Fr_{T(X)}((\pi \circ g)^{-1}(S))$.

Ahora sea $A \in Fr_{T(X)}((\pi \circ g)^{-1}(S)) \subset (\pi \circ g)^{-1}(S)$. Entonces existe $m \in \{0, 1, 2, ...\}$ tal que $A \in \mathcal{A}_m$. Entonces $A \in \mathcal{A}_m$ y se puede aproximar por elementos en $T(X) - (\pi \circ g)^{-1}(S)$ y en consecuencia se puede aproximar por elementos en $T(X) - (\pi \circ g)^{-1}\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z$ y $0 \leq z\}$. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $T(X) - \mathcal{A}_m$ tal que converja a A. Como en la demostración de que $Fr_{C(B_m)}(\mathcal{A}_m) \subset (\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$, se tiene que $\pi(g(A_n)) \notin \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z$ y $0 \leq z\}$. Pero $\pi(g(A)) \in S$, pues $A \in \mathcal{A}_m$. Como $\pi \circ g : T(X) \to \mathbb{R}^2$ es continua, $\pi(g(A_n)) \to \pi(g(A))$. Es decir, $\pi(g(A)) \in S$ y se puede aproximar por puntos que no están en el conjunto $\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 2 - 4x \leq z$ y $0 \leq z\}$. Igual que antes, esto quiere decir que $\pi(g(A)) \in (\frac{1}{2}, 0)(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Por tanto $Fr_{T(X)}((\pi \circ g)^{-1}(S)) \subset (\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2},0)(\frac{2}{5},\frac{2}{5}))$. Así concluimos que $Fr_{T(X)}((\pi \circ g)^{-1}(S)) = (\pi \circ g)^{-1}((\frac{1}{2},0)(\frac{2}{5},\frac{2}{5}))$.■

Ahora vamos a construir un modelo en $\mathbb{R}^3$ para $T(Y)$ a partir del modelo para $T(X)$ que ya tenemos.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sean

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m+1}}, \\ t_0 &= 0, \\ E_m &= (2, t_m)(3, t_m), \\ E_0 &= (2,0)(3,0). \end{aligned}$$

Como Y es casi X, pero uniéndole al final E_m a cada B_m, los conjuntos que están en $T(Y)$ son los que estaban en $T(X)$ más los que tienen una parte en B_m y otra en E_m (los conjuntos de esta forma siempre van a contener a c_m) y, finalmente, los que están totalmente contenidos en E_m.

Definimos $G : T(Y) \to \mathbb{R}^3$ como

$$G(A) = \begin{cases} g(A) & \text{si } A \in T(X) \\ (\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, t_m, \mu(A \cap B_m)) & \text{si } c_m \in A \subset C(B_m \cup E_m) \\ (\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, t_m, 2 - m_1(A)) & \text{si } A \subset E_m \end{cases}$$

Las intersecciones entre estos tres conjuntos no son vacías: los conjuntos que están en $\mathcal{D}_m = \{A \in C(B_m) : c_m \in A\}$ están en $T(X)$ pero también tienen una parte en E_m que consiste en el punto c_m. Los conjuntos que están totalmente contenidos en E_m y que contienen a c_m también están en $C(B_m \cup E_m)$.

La función G está bien definida porque si $A \subset B_m$ y $c_m \in A$ entonces $\mu(A \cap B_m) = \mu(A)$, $M_1(A) = 2$ y $M_2(A) = t_m$. De donde $(\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, t_m, \mu(A \cap B_m)) = (\frac{1}{2}, t_m, \mu(A)) = g(A)$. Si $c_m \in A \subset E_m$ entonces $m_1(A) = 2$ y $\mu(A \cap B_m) = \mu(\{c_m\}) = 0 = 2 - m_1(A)$.

4.10 Lema. $G : T(Y) \to \mathbb{R}^3$ es un homeomorfismo en su imagen.

Demostración.

Vamos a probar que G es continua. Por 0.2, basta probar que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $T(Y)$ que converja a algún A entonces existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{G(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $G(A)$.

Para esto analicemos tres casos:

(i) Una infinidad de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $T(X)$. En este caso podemos extraer una subsucesión, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in T(X)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como en $T(X)$ por definición G coincide con g que es una función continua, tenemos que $\{G(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $G(A)$. Después de este caso podemos suponer que sólo hay un número finito de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $T(X)$. De hecho entonces podemos suponer que no hay ninguno.

(ii) Una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a un mismo $C(C_m)$ $(m = 0, 1, 2, ...)$. Como $C(C_m) = (T(X) \cap C(C_m)) \cup \{A \in C(B_m) : e_m \in A\} \cup C(E_m)$, cada uno de los tres conjuntos es cerrado, G está definida de manera continua en cada uno y coincide en las intersecciones, así que G es continua en $C(C_m)$. Y entonces podemos razonar como en el caso (i) y concluir que existe la subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{G(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $G(A)$.

(iii) Si en cada $C(C_m)$ sólo hay una número finito de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, por 4.3, existe una subsucesión $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(C_{m_k})$ y donde $m_1 < m_2 < ....$ Como $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A, $A \in C_0$.

De acuerdo con (i), estamos suponiendo que ningún D_k pertenece a $T(X)$.

Si una infinidad de elementos de $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ cumple con que $e_k \in D_k$, entonces existe una subsucesión $\{D_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ tal que $e_{k_l} \in D_{k_l}$. Como $D_{k_l} \to A$, en este caso $e_0 \in A$.

De manera que

$$
\begin{aligned}
lím\ G(D_{k_l}) &= lím\ \left(\frac{1}{2} + M_1(D_{k_l}) - 2, t_{k_l}, \mu(D_{k_l} \cap B_{k_l})\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, t_0, \mu(A \cap B_0)\right) \\
&= G(A).
\end{aligned}
$$

Y en este caso ya terminamos. Por tanto podemos suponer que sólo una cantidad finita de D_k cumplen que $e_k \in E_k$. De hecho entonces podemos suponer que ninguna D_k cumple que $e_k \in D_k$.

Entonces podemos suponer que $D_k \in C(E_k)$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Y entonces

$$\begin{aligned} & lím\ G(D_k) \\ = & \ lím\ \left(\frac{1}{2} + M_1(D_k) - 2, t_k, 2 - m_1(D_k)\right) \\ = & \ \left(\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, t_0, 2 - m_1(A)\right) \\ = & \ G(A). \end{aligned}$$

Por tanto, G es continua.

Ahora probaremos que G es inyectiva. Sean $A, B \in T(Y)$ tales que $G(A) = G(B)$, con $G(A) = (x, y, z)$ y $G(B) = (x', y', z')$. Si alguno de los dos conjuntos está en $T(X)$, por ejemplo A, entonces $A \in C(B_m)$ para alguna $m = 0, 1, 2, \ldots$ Si $m \neq 0$, por definición, $x = \frac{M_1(A)+M_2(A)}{2(2+\frac{1}{2^m-1}+\frac{1}{2^m+1})}$. Como $M_1(A) \leq 2$ y $M_2(A) \leq \frac{1}{2^m-1} + \frac{1}{2^m+1}$. Esto implica que $x \leq \frac{1}{2}$. Si $m = 0$ entonces por definición $x = \frac{M_1(A)}{4}$ y como $M_1(A) \leq 2$, $x \leq \frac{1}{2}$. En cualquier caso tenemos que $x \leq \frac{1}{2}$. En consecuencia $x' = x \leq \frac{1}{2}$. Si $B \notin T(X)$ entonces $M_1(B) > 2$. Para los conjuntos que no están en $T(X)$ la primera coordednada de G se define como $x' = \frac{1}{2} + M_1(B) - 2 > \frac{1}{2}$. Pero como ya habíamos visto, $x' \leq \frac{1}{2}$. Con esto concluimos que $B \in T(X)$. Por tanto A y B están en $T(X)$. Como en $T(X)$, por definición, G coincide con g, y g es inyectiva, obtenemos que $A = B$. Por eso podemos suponer que ninguno de los dos conjuntos está en $T(X)$.

Supongamos que $y = t_n$ y que $y' = t_m$ con $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Como $y = y'$ tenemos que $m = n$ y entonces los dos están en una misma C_m para alguna $m = 0, 1, 2, \ldots$. Los conjuntos A y B constan de dos partes: una en B_m (que puede ser vacía) y una en E_m. Si $A \cap B_m \neq \varnothing$ entonces $z' = z = \mu(A \cap B_m) \geq 0$ y entonces B también tiene que intersectar a B_m porque si $B \cap B_m = \varnothing$, $m_1(A) > 2$ de donde $z' = 2 - m_1(A) < 0$. Por tanto $A \cap B_m \neq \varnothing$ si y sólo si $B \cap B_m \neq \varnothing$.

Si tanto A como B intersectan a B_m, como no pertenecen a $T(X)$ tienen que intersectar tanto a B_m como a E_m y entonces $e_m \in A$ y $e_m \in B$. Por tanto, $A \cap B_m$ y $B \cap B_m$ son arcos en B_m con uno de sus extremos igual a e_m. Además como $\mu(A \cap B_m) = z = z' = \mu(B \cap B_m)$, son dos arcos que coinciden en uno de sus extremos y miden lo mismo, por tanto son iguales. Pero además $A \cap E_m = B \cap E_m$ porque son arcos que empiezan en e_m y sus otros puntos extremos son $M_1(A)$ y $M_1(B)$ que son iguales porque $x = x'$. Como $A = (A \cap B_m) \cup (A \cap E_m)$

y $B = (B \cap B_m) \cup (B \cap E_m)$, concluimos que $A = B$.

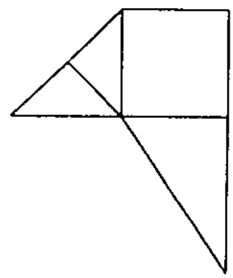
Si ninguno de los dos intersecta a B_m entonces $A = [m_1(A), M_1(A)] \times \{t_m\}$ y $B = [m_1(B), M_1(B)] \times \{t_m\}$. Como $x = x'$ tenemos que $M_1(A) = M_1(B)$. Sólo nos falta ver que $m_1(A) = m_1(B)$. Pero esta última igualdad es consecuencia de $2 - m_1(A) = z = z' = 2 - m_1(B)$.

En cualquier caso $A = B$ y, por tanto, G es inyectiva.

Por tanto $G : T(Y) \to G(T(Y))$ es un homeomorfismo.■

Notación: Llamamos S_1 al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = S \cup ([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]) \cup \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \text{ y } \frac{1}{2} - x \leq z \leq 0\}.$$



y, además, sean

$$R_1 = R \cup ([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times \{\frac{1}{2}\})$$

y R_2 el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

Para cada $m \in \{0, 1, 2, ...\}$, sea

$$\mathcal{F}_m = \mathcal{A}_m \cup \{A \in C(C_m) : c_m \in A\} \cup C(E_m).$$

Sea $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Consideremos ahora $\pi \circ G|_{\mathcal{F}_m} : T(Y) \to \mathbb{R}^2$. Sabemos que $\pi(G(\mathcal{A}_m)) = \pi(g(\mathcal{A}_m)) = S$.

Si $A \in C(B_m \cup E_m)$ y $c_m \in A$ entonces $\pi(G(A)) = (x, z)$, donde $x = \frac{1}{2} + M_1(A) - 2$ y $z = \mu(A \cap B_m)$. Notemos que x varía desde $\frac{1}{2}$ (si $M_1(A) = 2$) hasta $\frac{3}{2}$ (si $M_1(A) = 3$); y

$z = \mu(A \cap B_m)$ varía desde 0 (si $A \cap B_m = \{e_m\}$) hasta $\frac{1}{2}$ (si $A \cap B_m = B_m$). De aquí se sigue que $\pi(G(\{A \in C(Y) : A \subset B_m \cup E_m$ y $e_m \in A\})) = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

Ahora consideremos un $A \in C(E_m)$. Sea $\pi(G(A)) = (x, z)$. Entonces $x = \frac{1}{2} + M_1(A) - 2$ y $z = 2 - m_1(A)$. Notemos que x varía desde $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{3}{2}$. Dada x fija tenemos que $M_1(A)$ también está fija y $m_1(A)$ puede variar de 2 a $M_1(A)$. Por lo que z puede variar de 0 a $2 - M_1(A)$. Es decir z puede variar desde 0 hasta $\frac{1}{2} - x$. Esto muestra que $\pi(G(C(E_m))) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2} - x \leq z \leq 0\}$.

Por lo anterior podemos concluir que $\pi(G(\mathcal{F}_m)) = S \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \cup \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2} - x \leq z \leq 0\} = S_1$.

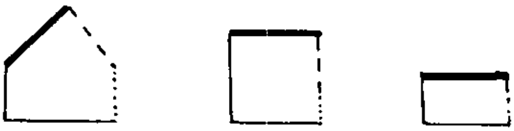
4.11 Proposición. Sea $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Entonces $\pi \circ G|_{\mathcal{F}_m} : \mathcal{F}_m \to S_1$ es un homeomorfismo.

Demostración.

Primero veremos que $\pi \circ G|_{\mathcal{F}_m}$ es inyectiva. Sean $A, B \in \mathcal{F}_m$, con $\pi(G(A)) = \pi(G(B))$. Supongamos que $\pi(G(A)) = (x, z)$ y $\pi(G(B)) = (x', z')$. Si $x = x' \leq \frac{1}{2}$ entonces $M_1(A) \leq 2$ y $M_1(B) \leq 2$, así que los dos conjuntos están en $\mathcal{A}_m$. Como sabemos que $\pi \circ G|_{\mathcal{A}_m} = \pi \circ g|_{\mathcal{A}_m}$ es un homeomorfismo, obtenemos que $A = B$. Si A y $B \notin \mathcal{A}_m$ entonces, como $A, B \in C(C_m)$, el mismo argumento que para ver que G es inyectiva, sirve porque, para lo único que servía la segunda coordenada, era para distinguir entre conjuntos $A \in B_m$ y $B \in B_n$ con $m \neq n$. De manera que, en los dos casos, $A = B$. Por tanto $\pi \circ G|_{\mathcal{F}_m}$ es inyectiva. Además, $\mathcal{F}_m$es cerrado en $C(C_m)$, pues $\mathcal{F}_m = \mathcal{A}_m \cup \{A \in C(B_m \cup E_m) : e_m \in A\} \cup C(E_m)$. Sabemos que tanto $\mathcal{A}_m = (\pi \circ g\ )^{-1}(S)$ como $C(E_m)$ son cerrados. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\{A \in C(B_m \cup E_m) : e_m \in A\}$ tal que $A_n \to A$. Entonces $e_m \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $e_m \in A$. Entonces $\{A \in C(B_m \cup E_m) : e_m \in A\}$ es cerrado. Entonces $\mathcal{F}_m$ es la unión de tres conjuntos cerrados. Por tanto $\mathcal{F}_m$ es cerrado y, en consecuencia, compacto.

Además $\pi \circ G$ es continua. Por tanto $\pi \circ G|_{\mathcal{F}_m} : \mathcal{F}_m \to S_1$ es un homeomorfismo.■

4.12 Observación. Existe un homeomorfismo $h : S_1 \cup R_2 \to S \cup R_2$ tal que $h(R_1) = R$ y $h(R_2)$ es la identidad en R_2. Nos podemos convencer de que existe un homeomorfismo de S_1 en S tal que la imagen de R_1 sea R observando que S_1 es homeomorfo a un pentágono, (1) del dibujo que está abajo, el cual a su vez es homeomorfo a (2) y (3). Observemos que no se movió la orilla que representa a R_1.



El homeomorfismo obtenido de esta manera no movió a los puntos que representan a T, y la imagen de R_1 es R.

Ahora, como $S_1 \cap R_2 = T = S \cap R_2$, la identidad en R_2 y el homeomorfismo que existe entre S y S_1 nos dan el homeomorfismo que queríamos.

4.13 Proposición. Sean Z, W dos espacios topológicos T_2 y sean A, $F \subset Z$ tales que:

(1) $A \subset W$, A, F y W son compactos.

(2) $Z = W \cup (F - A)$, $A \subset F$.

(3) $W \cap F = A$.

Entonces $Fr_W(A) = Fr_Z(F)$.

Demostración.

Sea $p \in Fr_W(A)$. Como A es cerrado, $p \in A$. Como $A \subset F$, $p \in F$. Como $p \in Fr_W(A)$, existe una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $W - A$ tal que $p_n \to p$. Como para cada n, $p_n \notin F$, y $W \subset Z$, $p_n \in Z - F$. Por tanto, $p \in Fr_Z(F)$.

Ahora sea $q \in Fr_Z(F)$. Entonces existe una sucesión $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Z - F$ tal que $q_n \to q$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, como $q_n \notin F$ y $q_n \in Z$, por (2), $q_n \in W$. Pero como $q_n \notin F$ y $A \subset F$, $q_n \notin A$. Por tanto $q_n \in W - A$. Como F es compacto, $q \in F$. Como W es compacto, $q \in W$. Y entonces $q \in A = W \cap F$. Por tanto $q \in Fr_W(A)$. Y entonces $Fr_W(A) = Fr_Z(F)$. ■

Sean $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{A}_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}$.

4.14 Corolario. $Fr_{T(Y)}(\mathcal{F}) = Fr_{T(X)}(\mathcal{A}) = (\pi \circ g)^{-1}(T)$.

Demostración. Vamos a ver que se cumplen las hipótesis de la proposición anterior para $Z = T(Y)$, $W = T(X)$, $A = \mathcal{A}$, y $F = \mathcal{F}$.

Ya vimos, en la demostración de 4.9 (3), que $\mathcal{A} = (\pi \circ g)^{-1}(S)$. Como S es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ y $\pi \circ g$ es una función continua, $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en $T(X)$.

También sabemos que $T(X)$ y $T(Y)$ son cerrados en $C(X)$ y $C(Y)$. Ahora veremos que $\mathcal{F}$ es cerrado. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ que converja a alguna A. Supongamos que, para alguna $m \in \{0, 1, 2, ...\}$, tenemos que una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ están en $C(C_m)$. Es decir, una infinidad de elementos de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$están en $\mathcal{F}_m$. Entonces existe una subsucesión convergente $\{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ la cual converge a A. Como $\mathcal{F}_m$ es cerrado, (ver 4.11), $A \in \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$.

Entonces, por 4.3, podemos suponer que existe una subsucesión, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a A y $D_k \in C(C_{n_k})$ con $n_1 < n_2 < ...$. En este caso $A \in C(C_0)$.

Si para una infinidad de $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $c_{m_k} \in D_k$, entonces $c_0 = lim\ c_{n_k} \in lim\ D_k = A$. Por tanto $A \in \{A \in C(C_0) : c_0 \in A\} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Por tanto podemos suponer que sólo para un número finito de $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $c_{m_k} \in D_k$. Y entonces podemos suponer que para ninguna.

Para toda $k \in \mathbb{N}$, como $D_k \in C(C_{n_k}) \cap \mathcal{F}$, resulta que $D_k \in \mathcal{F}_{n_k}$. Entonces, como estamos suponiendo que $c_{n_k} \notin D_k$, tenemos que $D_k \in \mathcal{A}_{n_k}$ o $D_k \in C(E_{n_k})$. Si una infinidad de elementos de $D_k \in \mathcal{A}_{n_k} \subset \mathcal{A}$, entonces existe una subsucesión $\{D_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ tal que $D_{n_l} \in \mathcal{A}_{n_{k_l}} \subset \mathcal{A}$ y converge a A. Como $\mathcal{A}$ es cerrado, $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{F}$.

Si $D_k \in C(E_{n_k})$ entonces, como $D_k \subset E_{n_k}$ y $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge a A y $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a E_0, por 0.4, tenemos que $A \in C(E_0) \subset \mathcal{F}$. En cualquier caso, $A \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es cerrado.

Ahora veremos que $T(X) \cap \mathcal{F} = \mathcal{A}$. Por definición $\mathcal{A} \subset T(X)$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Ahora sea $A \in T(X) \cap \mathcal{F}$. Como $A \in T(X)$, $A \in C(B_m)$ para alguna $m = \{0, 1, 2, ...\}$. Como además $A \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}_m$. Si $c_m \in A$ entonces $A \in \{A \in C(B_m) : c_m \in A\} = \mathcal{D}_m \subset \mathcal{A}$ (ver Teorema 4.9). Si $c_m \notin A$, como $A \in \mathcal{F}_m = \mathcal{A}_m \cup \{A \in C(C_m) : c_m \in A\} \cup C(E_m)$, y $A \notin C(E_m)$ (porque está en $T(X)$), tenemos que $A \in \mathcal{A}_m \subset \mathcal{A}$. Por tanto, $A \in \mathcal{A}$.

Finalmente, veremos que $T(Y) = T(X) \cup (\mathcal{F} - \mathcal{A})$. Sea $A \in T(Y)$. Entonces $A \in C(C_m)$ para alguna $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Es decir, $A \subset C_m = B_m \cup E_m$. Además $B_m \cap E_m = \{c_m\}$. Entonces, $A \in C(B_m)$, $c_m \in A$ o $A \in C(E_m)$. Si $A \in C(B_m)$ entonces $A \in T(X)$. Si no, $A \in \mathcal{F}$. Por tanto, $A \in T(X) \cup \mathcal{F}$. Como $T(X) \cap \mathcal{F} = \mathcal{A}$, tenemos que $A \in T(X) \cup (\mathcal{F} - \mathcal{A})$. Por tanto, $T(Y) = T(X) \cup (\mathcal{F} - \mathcal{A})$.

Hemos obtenido que se cumplen las hipótesis de la proposición anterior. Por tanto, $Fr_{T(Y)}(\mathcal{F}) = Fr_{T(X)}(\mathcal{A}) = (\pi \circ g)^{-1}(T)$.■

Recordemos que si E es un espacio topológico y $A \subset E$ entonces A^{X} denota la frontera de

A en X.

4.15 Lema. Existe un homeomorfismo de $T(Y)$ en $T(X)$ con $F(N(Y)) = N(X)$.

Demostración. Sea $F : T(Y) \to T(X)$ la siguiente función:

$$F(A) = \begin{cases} ((\pi \circ g)|_{\mathcal{A}_m})^{-1}(h(\pi(G(A)))) & \text{si } A \in \mathcal{F}_m,\ m = 0, 1, 2, \ldots \\ A & \text{si } A \in (T(Y) - \mathcal{F})^{\ T(Y)} \end{cases}$$

Sea $A \in T(Y)$. Si $A \in (T(Y) - \mathcal{F})^{\ T(Y)} \subset T(X)$ y entonces $F(A) = A \in T(X)$. Si $A \in \mathcal{F}_m$ con $m = 0, 1, \ldots$, entonces $h(\pi(G(A))) \in S$. Esto implica que $F(A) \in C(B_m) \cap (\pi \circ g)^{-1}(S) = \mathcal{A}_m \subset T(X)$. En cualquier caso $F(A) \in T(X)$.

Verificaremos que está bien definida. Sea $A \in \mathcal{F}_m$ para alguna $m \geq 0$ y tal que A está en la cerradura de $T(Y) - \mathcal{F}$. Como $Fr_{T(Y)}(\mathcal{F}) = Fr_{T(X)}(\mathcal{A}) = (\pi \circ g)^{-1}(T)$, $A \in (\pi \circ g)^{-1}(T)$. Entonces $\pi(g(A)) \in T$ y como h es la identidad en T, $h(\pi(g(A))) = \pi(g(A))$. Y así

$$(\pi \circ g)|_{\mathcal{A}_m})^{-1}(h(\pi(G(A)))) = (\pi \circ g)|_{\mathcal{A}_m})^{-1}(\pi(G(A))) = A.$$

Por tanto F está bien definida.

Para ver que F es continua, como está definida en dos cerrados y coincide en la intersección de ellos, basta probar que es continua en $\mathcal{F}$, pues en $(T(Y) - \mathcal{F})^{-T(Y)}$ es la identidad. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ que converge a A, con $A \in \mathcal{F}$.

Si existe $m = 0, 1, 2, \ldots$ tal que una infinidad de A_n están contenidos en C_m entonces, como $(\pi \circ G)|_{C_m}$, h y $(\pi \circ g|_{C_m})^{-1}$ son homeomorfismos, tenemos que F es continua.

Si en cada $C(C_m)$ sólo hay una número finito de elementos de la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ por 4.3 existe una subsucesión, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$, de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $D_k \in C(C_{m_k})$ y donde $m_1 < m_2 < \ldots$. Como $D_k \to A$, $A \in C_0$.

Veremos que $\{F(D_k)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $F(A)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $F_k = F(D_k) = (\pi \circ g|_{\mathcal{A}_{m_k}})^{-1}(h(\pi(G(D_k))))$. Por el Lema 0.1 podemos suponer que $F_k \to E$ para alguna $E \in C(X)$ y tenemos que probar que $E = F(A)$. Notemos que $\pi(g(F_k)) = h(\pi(G(D_k)))$. Tomando el límite de los dos lados de la igualdad obtenemos que $\pi(g(E)) = h(\pi(G(A)))$. como $F_k \subset B_{m_k}$ tenemos que $E \subset B_0$. Así que $E = (\pi \circ g|_{C(B_0)})^{-1}(h(\pi(G(A)))) = F(A)$. Por tanto F es continua.

Veremos que F es inyectiva. Sean A, $B \in T(Y)$ con $F(A) = F(B)$. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces

$F(A) \in \mathcal{A}_m$ para alguna $m \geq 0$. Y entonces $F(B) \in \mathcal{A}_m$ y $B \in \mathcal{F}$. Si A, $B \in \mathcal{F}$ entonces como $F(A) = F(B)$, A y B están contenidos en un mismo C_m con $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Pero en $C(C_m)$, F es la composición de homeomorfismos, por tanto, es un homeomorfismo y $A = B$. Si A, $B \in T(Y) - \mathcal{F}$ entonces como F es la identidad, $A = B$. Por tanto F es inyectiva.

Sea $B \in T(X)$. Entonces $B \in (T(X) - \mathcal{A})^{-T(X)}$ o $B \in \mathcal{A}_m$ para alguna $m \geq 0$. Si $B \in (T(X) - \mathcal{A})^{-T(X)} = (T(Y) - \mathcal{F})^{-T(Y)}$ entonces $B = F(B)$. Si $B \in \mathcal{A}_m$ para alguna $m \geq 0$ entonces, como $(\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m})^{-1}$, h, π, y G son funciones suprayectivas, existe $A \in T(Y)$ con $(\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m})^{-1}(h(\pi(G(A)))) = B$.

Como $T(Y)$ es compacto, F es un homeomorfismo.

Falta ver que $F(N(Y)) = N(X)$. Primero mostraremos que $F(N(Y)) \subset N(X)$. Sea $A \in N(Y)$ con $A \subset C_m$. Si $A \notin \mathcal{F}$ entonces $A \in N(X)$ y $F(A) = A \in N(X)$. Por lo tanto podemos suponer que $A \in \mathcal{F}_m$. Vamos a considerar dos casos: si $A \subset B_m$ y si $A \notin C(B_m)$.

Si $A \subset B_m$ entonces (Teorema 4.9) $A \in C_m \cap \mathcal{A}_m$ y $\pi(g(A)) \in R$. Y entonces como $h(R) \subset R$ también $h(\pi(g(A))) \in R$. Y como $(\pi \circ g)|_{\mathcal{A}_m})^{-1}$ manda a R en $C_m \cap \mathcal{A}_m$, $F(A) \in C_m \subset N(X)$.

Si $A \notin C(B_m)$ entonces $\mu(A \cap B_m) = \mu(B_m) = \frac{1}{2}$ y $2 \leq M_1(A) \leq 3$. Entonces $\pi(G(A)) \in R_1$ y $h(\pi(G(A))) \in R$. Pero entonces, igualito que en el párrafo anterior, $F(A) \in C_m \subset N(X)$. Y entonces $F(N(Y)) \subset N(X)$.

Ahora sea $B \in N(X)$ con $B \in C(B_m)$ para $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. Si $B \notin \mathcal{A}_m$ entonces, como F es homeomorfismo, $B = F(A)$ para alguna $A \in T(X)$. Pero $B = F(A) = A \in T(X)$.

Si $B \in \mathcal{A}_m$, como $B \in N(X)$, por definición, $C_m = N(X) \cap C(B_m)$ y por tanto $B \in C_m$ y entonces $\pi(g(B)) \in R$. Y entonces $h^{-1}(\pi(G(B))) \in R_1 = R \cup ([\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times \{\frac{1}{2}\})$.

Si $h^{-1}(\pi(G(B))) \in R$ entonces como $\pi \circ g|_{\mathcal{A}_m \cap C_m}$ es un homeomorfismo entre $\mathcal{A}_m \cap C_m$ y R, existe $A \in \mathcal{A}_m \cap C_m$ con $\pi(G(A)) = h^{-1}(\pi(g(B)))$. De donde $B = F(A)$ con $A \in N(X)$.

Si $h^{-1}(\pi(G(B))) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times \{\frac{1}{2}\}$ entonces $B = (\frac{1}{2} + t - 2, \frac{1}{2})$ para alguna $t \in [2, 3]$. Sea $A = B_m \cup ([2, t] \times \{t_m\})$. Entonces $\pi(G(A)) = (\frac{1}{2} + M_1(A) - 2, \mu(A \cap B_m)) = (\frac{1}{2} + t - 2, \frac{1}{2}) = B$ y $A \in N(Y)$.

Por tanto $F(N(Y)) = N(X)$. ■

4.12 Teorema. $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$.

Demostración. $N(X)$ es un Z-conjunto en el cubo de Hilbert $C(\{v\}, X)$. También $N(Y)$ es un Z-conjunto en el cubo de Hilbert $C(\{v\}, Y)$. Sabemos que F restringida a $N(Y)$ es un homeomorfismo entre $N(Y)$ y $N(X)$. Por el teorema 3.5 F se puede extender a un homeomorfismo F_1 de $C(\{v\}, Y)$ en $C(\{v\}, X)$. Consideremos $F_2 : C(Y) \to C(X)$ definida de la siguiente manera:

$$F_2(A) = \begin{cases} F(A) & \text{si } A \in T(Y) \\ F_1(A) & \text{si } A \in C(\{v\}, Y) \end{cases}$$

Sabemos que $C(Y) = T(Y) \cup C(\{v\}, Y)$, que $T(Y) \cap C(\{v\}, Y) = N(Y)$ y que F y F_1 coinciden en $N(Y)$ y que cada una es homeomorfismo. También sabemos que $F(T(Y)) = T(X)$ y que $F_1(C(\{v\}, Y) = C(\{v\}, X)$. De aquí concluimos que F_2 es un homeomorfismo.■

Con esto terminamos la demostración de que X y Y no son homeomorfos pero sus hiperespacios sí. Por tanto la clase de los abanicos no está C−determinada.

Bibliografía.

[1] R. D. Anderson, *Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals*, Trans. Amer. Math. Soc., 126 (1967), 220-216.

[2] W. J. Charatonik, *Convex structure on the space of order arcs*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., 39 (1991), 385-391.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[4] C. Eberhart y S. Nadler Jr., *Hiperspaces of cones and fans*, Proc. Amer. Math. Soc., 77 (1979)., 279-288.

[5] A. Illanes, *Notas de hiperespacios*, notas de clase, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1990,

[6] A. Illanes, *Spaces of Whitney maps*, Pacific J. Math., 139 (1989), 67-77.

[7] A. Illanes, *Fans are not C-determined*.preprint.

[8] M. Lynch, *Whitney levels in C_p* are ARs, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 748-750.

[9] V. Martínez de la Vega y Mansilla, *El hiperespacio de continuos con la topología producto*, tesis de licenciatura en matemáticas, Fac. de Ciencias, UNAM, 1998.

[10] J. Mateos Cortés, *Propiedades del conjunto de Cantor*, tesis de licenciatura, Fac. de Ciencias, UNAM, 1997.

[11] A. Mercado,*Propiedades topológicas de continuos*, tesis de licenciatura en matemáticas aplicadas, Universidad Autónoma de Coahuila, 1998.

[12] H. Toruńczyk, *On CE-images of the hilbert cube and characterizations of Q-manifolds*.

[13] L. E. Ward, *Extending Whitney maps*, Pacific J. Math., 93 (1981), 465-469.