

36  
2 ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**

**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES**

**CAMPUS ARAGÓN**

**“DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO  
CONFORME A LAS N.T.C.D.C.E.C. DEL D.D.F.  
1996.”**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**INGENIERO CIVIL**  
**P R E S E N T A :**

**EDUARDO DE PAZ HERNANDEZ**

ASESOR DE TESIS :  
ING. GUSTAVO A. JIMENEZ VILLEGAS

**MÉXICO**

**1998**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

267062.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

## ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES

ARAGÓN  
DIRECCIÓN  
DUPLICADO

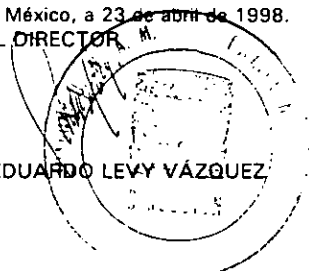
EDUARDO DE PAZ HERNÁNDEZ  
PRESENTE.

En contestación a su solicitud de fecha 27 de febrero de 1997, relativa a la autorización que se le debe conceder para que el señor profesor, Ing. GUSTAVO A. JIMÉNEZ VILLEGAS pueda dirigirle el trabajo de Tesis denominado "DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO CONFORME A LAS N.T.C.D.C.E.C. DEL D.D.F. 1996, con fundamento en el punto 6 y siguientes del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobada su solicitud.

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

ATENTAMENTE  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
San Juan de Aragón, México, a 23 de abril de 1998.  
EL DIRECTOR,

LIC. CARLOS EDUARDO LEVY VÁZQUEZ



Nota: La aceptación del tema de tesis y asesor de la misma fue registrado en la Unidad Académica de esta Escuela con fecha 5 de marzo de 1997.

c c p Unidad Académica.  
c c p Jefatura del Área de Ingeniería Civil.  
c c p Asesor de Tesis.

CELV/AIR/MCA/vr

**Dedico el presente trabajo:**

**A mis Padres:**

**Paz Hernández Martínez**

**Fernando De Paz Miguel**

Por la vida, Por su amor y sobre  
todo por el gran apoyo que me han brindado.

**A mis Hermanas:**

**Leticia y Norma**

Por contar siempre con su apoyo.

### **A mis Tios y primos**

Por sus consejos que me han servido  
de aliento para seguirme superando cada día.

### **A mis amigos**

Por los momentos y experiencias que hemos vivido.

**En especial:** Al Ing. Gustavo A. Jiménez Villegas

Por su valiosa colaboración en la revisión  
y asesoría del trabajo.

## PREFACIO

El concreto reforzado es un material muy utilizado en sistemas constructivos a nivel mundial. Por ello, es muy importante que los ingenieros civiles, arquitectos y constructores tengan un conocimiento básico de los fundamentos del concreto reforzado.

Para la realización del presente trabajo se realizó una recopilación bibliográfica extensa con el fin de presentar al lector una visión lo más completa posible, incluyendo aspectos históricos, características de los materiales constitutivos así como el comportamiento de los elementos estructurales de concreto ante diversas acciones a las que están sometidos y por supuesto su diseño estructural.

El del diseño de las estructuras de concreto se apegó a las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto Reforzado del D.D.F. publicadas el 25 de marzo de 1996 en la gaceta oficial del Distrito Federal. Cabe mencionar que dichas normas han tenido algunas modificaciones como son en los factores de reducción de resistencias y disposiciones importantes referentes a efectos de esbeltez en columnas y en losas planas. Estas modificaciones obedecen a investigaciones realizadas con el fin de prevenir fallas como las observadas después de los fuertes sismos de 1985 en la ciudad de México.

Estoy seguro que el contenido de este trabajo servirá como una valiosa guía práctica en el diseño de estructuras de concreto.



## **OBJETIVO**

Presentar los aspectos fundamentales para el diseño de estructuras de concreto reforzado según las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal.

# INDICE

PAGINA

PREFACIO

OBJETIVO

## I. INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES HISTÓRICOS	1
HIPÓTESIS BÁSICAS DEL CONCRETO REFORZADO	3
ANÁLISIS Y DISEÑO DE SECCIONES	4

## II. EL CONCRETO

FABRICACIÓN	5
MATERIALES QUE PRODUCEN EL CONCRETO	6
CONCRETO FRESCO	10
CONCRETO ENDURECIDO	14
ACERO DE REFUERZO	21
CONCRETO REFORZADO	26
SISTEMAS ESTRUCTURALES DE CONCRETO	33

## III. COLUMNAS

INTRODUCCIÓN	36
TIPOS DE COLUMNAS	37
RESISTENCIA DE COLUMNAS CORTAS CARGADAS AXIALMENTE	40
ELEMENTOS SUJETOS A TENSIÓN AXIAL	46
EJEMPLOS PARA CALCULAR LAS RESISTENCIAS	47
RESISTENCIA DE COLUMNAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL Y FLEXIÓN	51
RESISTENCIA DE COLUMNAS SOMETIDAS A CARGA AXIAL Y FLEXIÓN BIAXIAL	64
EFFECTOS DE ESBELTEZ	69
CONSIDERACIONES PARA EL DIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS	91
AYUDAS PARA EL DIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS	98

## INDICE

EJEMPLOS DE DIMENSIONAMIENTO	99
------------------------------	----

### IV. VIGAS

INTRODUCCIÓN	120
COMPORTAMIENTO Y MODOS DE FALLA DE ELEMENTOS SOMETIDOS A FLEXIÓN SIMPLE	120
RESISTENCIA DE ELEMENTOS SUJETOS A FLEXIÓN	128
DETERMINACIÓN DE LA RELACIÓN BALANCEADA	150
FLEXIÓN ASIMÉTRICA	155
CORTANTE EN VIGAS	158
TORSIÓN	185
DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS	224
CONDICIONES DE SERVICIO EN VIGAS	250
ADHERENCIA Y ANCLAJE	270
MÉNSULAS	298
VIGAS DE GRAN PERALTE	312

### V. MUROS

INTRODUCCIÓN	326
MUROS DE CONCRETO CON FALLA POR CORTANTE	326
COMPORTAMIENTO DE MUROS QUE FALLAN POR CORTANTE	327
MUROS SUJETOS A CARGAS VERTICALES	338
MUROS SUJETOS A FUERZAS HORIZONTALES EN SU PLANO	341
CONSIDERACIONES PARA DIMENSIONAMIENTO	344

### VI. LOSAS

INTRODUCCIÓN	349
LOSAS EN UNA DIRECCIÓN	349
CARGAS CONCENTRADAS	361
LOSAS PERIMETRALMENTE APOYADAS	372
ANÁLISIS DE LOSAS	375
EJEMPLO DE DISEÑO DE UNA LOSA PERIMETRALMENTE APOYADA	390
LOSAS PLANAS	395
DISEÑO DE UNA LOSA PLANA ALIGERADA	408

## INDICE

### VII. ZAPATAS

INTRODUCCIÓN	438
TIPOS DE CIMENTACIONES	439
COMPORTAMIENTO A FLEXIÓN Y CORTANTE DE ZAPATAS	441
MECANISMO DE FALLA POR CORTANTE	446
ZAPATA AISLADA	449
ZAPATA CORRIDA	457
ZAPATAS COMBINADAS	459
ESPESOR MÍNIMO DE ZAPATAS DE CONCRETO REFORZADO	460
EJEMPLOS DE DISEÑO	461

### VIII. RECOMENDACIONES Y CONCLUSIONES

INTRODUCCIÓN	480
CONTROL, MANEJO Y ALMACENAMIENTO DE MATERIALES	480
MEZCLADO Y TRANSPORTE	483
COLOCACIÓN DEL CONCRETO	484
CURADO DEL CONCRETO	487
CIMBRAS, PREPARACIÓN DE JUNTAS Y ACABADOS	487
CONCLUSIONES	489

AYUDAS DE DISEÑO	492
------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA	524
--------------	-----

# CAPITULO I

## INTRODUCCIÓN.

### **Antecedentes históricos.**

Los romanos emplearon por primera vez el concreto, utilizando arena y gravilla, con la ayuda de aglutinantes naturales; como cemento natural emplearon tierras volcánicas llamadas también puzolanas por el yacimiento conocido como Pozzuolli, con este material fabricaron tuberías e instalaciones portuarias de las cuales aún se puede encontrar vestigios.

En el año 1824, el maestro constructor inglés Apsdin logró, artificialmente, fabricar un aglutinante hidráulico quemando arcilla y cal. Por su semejanza con las piedras Portland, apreciadas para la construcción, lo denominó cemento Portland.

El concreto armado nació en el año 1848 con los trabajos de un jardinero francés llamado Joseph Monier, que trabajaba dentro del más puro estilo empírico, se dedicaba a la fabricación de macetas de concreto armado con alambre, e hizo patentar la idea en 1867. Aplicando el sistema Monier en Alemania se tuvieron experiencias que mostraban las ventajas de la nueva combinación de materiales y al mismo tiempo fijaron los principios a seguir en su aplicación. Esa fue una base decisiva en la historia del concreto reforzado y desde entonces el sistema de Joseph Monier se fue extendiendo por toda Europa.

En las construcciones que se realizaron en Inglaterra, el hierro y el concreto estaban juntos pero en ninguna construcción se tuvo la verdadera intuición de los principios del concreto armado tal como en esa época se tenía en Francia.

En América se usó por primera vez el cemento en Estados Unidos y en Canadá, éste cemento era importado de Inglaterra. La primera fábrica de cemento Portland en E.U. la construyó en 1871 David Saylor, era una pequeña planta de cemento natural, es decir, hechos de ingredientes tal y como existen en la tierra. Un tipo de cemento natural fue usado

en la construcción de un acueducto en San Diego California, en los primeros tiempos de la conquista Española.

No puede fijarse fecha para el nacimiento del concreto reforzado en E.U., El sistema de éste tipo de concreto empezó a usarse sobre todo por sus cualidades incombustibles.

En Estados Unidos el atrevimiento de los constructores los llevó muy pronto a interesantes combinaciones. Hacia el año 1875 W.E. Ward construyó una casa de concreto cuyos pisos estaban contruidos con vigas según un sistema que se aproximaba al de los franceses de la época. La importancia de Ward reside en las observaciones sobre la adherencia perfecta del concreto y el acero cuando vio con que dificultad los obreros despegaban el cemento que se había adherido a sus instrumentos de trabajo. En 1906 Thomas A. Edison construyó una serie de casas en New Jersey empleando un sistema inventado por él.

En México durante el Porfiriismo se introduce el empleo de acero y concreto armado en las estructuras de los edificios. En 1881 se hacen trabajos con rieles y bóvedas de ladrillo. En 1884 se inician las importaciones desde Inglaterra y Bélgica de acero y lámina galvanizada. Entre los primeros edificios que se construyeron con acero se pueden mencionar los siguientes. La Penitenciaría, El Palacio de Hierro, El Centro Mercantil, La Casa Boker y el edificio de Correos.

En unos edificios el acero queda aparente por que se usa sin perseguir un fin estético. En algunos la razón de su desnudez era al igual que los almacenes de París, y en otros, como la Casa Boker o el teatro Nacional la estructura de acero se consideró como un sistema útil que debería no solo recubrirse sino engrosar considerablemente la sección por razones estéticas.

En 1901, hace su aparición en México el sistema Henebique. En ese año se estableció en la Ciudad de México la primera empresa de construcción de concreto reforzado formada por el Contralmirante Angel Ortiz Monasterio, representante del sistema Henebique, el Ingeniero Miguel Rebolledo y el Coronel Fernando González. Gracias principalmente al ingeniero

Miguel Rebolledo y sus conocimientos del concreto reforzado encontró rápidamente aceptación en nuestro país.

La primera aplicación tuvo lugar en 1901 al construirse el sótano de una pequeña casa comercial, situada hasta hace poco tiempo en la esquina de las calles Artes y París.

La primera obra de importancia se llevó a cabo en 1903 en Mérida, Yucatán y fue el edificio que ocupó la Ferretería Candado.

La aceptación del concreto armado fue inmediata. A mediados de 1906 ya se habían construido cerca de 60 obras, en todas estas se tenía signo del sistema Henebique, extendiéndose en todo el país con el mismo éxito con que se venía empleando en todo el mundo.

### **Hipótesis básicas del concreto reforzado.**

El concreto simple esta formado por una mezcla fraguada de cemento, agua, agregado fino y agregado grueso, aire y con frecuencia otros aditivos. La mezcla plástica se coloca y se compacta en la cimbra, luego se cura para facilitar la aceleración de la reacción química de la hidratación de la mezcla agua – cemento, produciendo un concreto de aspecto duro. El producto terminado tiene una alta resistencia a la compresión y una baja resistencia a la tensión, de tal forma que su resistencia a la tensión es aproximadamente un décimo de su resistencia a la compresión.

Los dos componentes de la sección de concreto reforzado heterogéneo deberán ser distribuidos y proporcionados de tal manera que se utilicen en forma óptima los materiales involucrados. Esto es posible por que puede darse al concreto cualquier forma colocando y compactando la mezcla húmeda dentro de los moldes apropiados en donde la masa plástica se endurece. Si todos los ingredientes son proporcionados en forma adecuada, el producto

terminado resultará fuerte, durable y, en combinación con las varillas de refuerzo, adaptable para usarse como parte de los miembros principales de cualquier sistema estructural.

### **Análisis y diseño de secciones.**

Esta claro que un gran número de parámetros intervienen en el dimensionamiento de un elemento de concreto reforzado, tales como el ancho, el peralte, el área de refuerzo, la deformación del acero, la deformación del concreto, el esfuerzo del acero, etc. Por lo tanto, es necesario un procedimiento por tanteos en la selección de secciones de concreto, con suposiciones basadas en las condiciones del sitio, disponibilidad de los materiales constituyentes, demandas particulares de los propietarios, requisitos arquitectónicos y de alturas libres, las normas aplicables y las condiciones del medio ambiente. Tales parámetros deberán considerarse debido a que el concreto reforzado es con frecuencia construido en campo, en contraste a las secciones estándar de vigas y columnas laminadas en las estructuras de acero.

Deberá escogerse una etapa de prueba para cada zona crítica en un sistema estructural. La etapa de prueba se analizará para determinar si su resistencia nominal es adecuada para soportar la carga aplicada. Debido a que a menudo es necesario llevar a cabo más de una prueba para obtener la sección requerida, el primer paso de diseño ocasiona una serie de tanteos durante el procedimiento de análisis.



## CAPITULO II

### EL CONCRETO.

#### **Fabricación.**

El concreto es un material artificial compuesto de arena, grava, agua y cemento. Para la obtención de un buen concreto, los agregados finos y gruesos deben tener una graduación y contenido de humedad uniformes mediante especificaciones adecuadas y efectivas inspecciones en la selección y medición de sus componentes. Los materiales activos (agua y cemento) al mezclarse se produce una reacción química que va endureciéndolo y en unión con los agregados inertes (arena y grava) se forma entre ambos una masa que al fraguar adquiere gran solidez.

Los diversos componentes de la mezcla se dosifican de tal forma que el concreto resultante tenga una resistencia adecuada, una manejabilidad que haga posible su colocación y el menor costo posible.

La relación agua - cemento, es el principal factor que controla la resistencia del concreto. Para una relación agua - cemento dada, se selecciona la mínima cantidad de cemento, en kg\* m<sup>3</sup> de concreto, que proporcione la manejabilidad deseada.

Ocasionalmente se incorporan a la mezcla algunos productos llamados aditivos para acelerar o retardar su fraguado o bien para proporcionar mayor fluidez. También para suministrarle propiedades específicas tales como impermeabilidad, color, resistencia superficial al desgaste etc.

Para elaborar un buen concreto es necesario tomar en cuenta los siguientes parámetros:

- Calidad del cemento.

- Proporción del cemento en relación al agua en la mezcla.
- Resistencia y limpieza del agregado.
- Interacción o adhesión entre la pasta de cemento y el agregado.
- Mezclado adecuado de los ingredientes.
- Apropiaada colocación, terminación y compactación del concreto fresco.
- Curado a una temperatura no menor de 10 grados centígrados mientras el concreto colocado alcanza su resistencia.

Un estudio en estos requisitos muestra que la mayoría de las acciones de control deberán tomarse antes de colocar el concreto fresco. Ya que tal control se rige por las proporciones y la facilidad o dificultad mecánica en el manejo y colocación, deberá estudiarse el desarrollo del criterio basado en la teoría de proporcionamiento para cada mezcla.

## **Materiales que producen el concreto.**

El concreto se produce por la interacción mecánica y química de un gran número de materiales constituyentes. De aquí que sea vital describir cada uno de estos componentes antes de estudiar el concreto como producto terminado. De esta manera, el diseñador y el ingeniero de materiales pueden desarrollar habilidades para la selección de los ingredientes adecuados y así proporcionarlos para obtener un concreto eficiente y deseable que satisfaga los requisitos de resistencia y condiciones de servicio.

### **Cemento.**

Es el elemento principal en la elaboración del concreto. El Portland es el más usado en la fabricación de todo concreto y se puede definir como: El producto obtenido de la pulverización fina por calcinación de materiales arcillosos y calizos que tengan óxidos de calcio, aluminio, silicio y fierro, en cantidades adecuadamente calculadas, sin más adición posterior a la calcinación que yeso natural.

Al variar la calidad y dosificación de las materias crudas empleadas en la fabricación del cemento, se pueden obtener cementos especiales; cada uno con características diversas:

TIPO I Común o Normal. De todos es el más usado y se destina a estructuras y obras de tipo general. Se caracteriza por tener altas resistencias mecánicas y produce alta generación de su calor en su hidratación.

TIPO II Modificado. Se caracteriza por su bajo contenido de aluminio tricálcico y alto contenido de ferroaluminio tetracálcico; hace que la cantidad de calor que se genera sea moderada; su empleo se recomienda en la construcción de obras hidráulica.

TIPO III Resistencia rápida a corta edad. Recomendado cuando el concreto esta destinado a cargar al poco tiempo de ser colocado en la cimbra o bien cuando la cimbra debe ser retirada en un mínimo de tiempo para utilizarse nuevamente. La generación de calor al hidratarse es muy alta en este cemento.

TIPO IV De bajo calor. Se recomienda para estructuras donde se requieren grandes volúmenes de concreto. Este cemento se distingue por tener bajos porcentajes de silicato tricálcico y aluminio tricálcico en contraste con altos porcentajes de silicato dicálcico y ferroaluminato tetracálcico. Se caracteriza, principalmente, por una menor generación de calor en su hidratación, mayor resistencia al agrietamiento y desarrollo más lento para su resistencia final.

TIPO V Resistente a los sulfatos. Es recomendable su uso cuando la infraestructura expuesta a la acción de líquidos corrosivos o aguas sulfatadas. Al hidratarse la generación de calor es también baja.

Los factores que gobiernan en la selección del tipo de cemento a utilizar son: el tipo de estructura, el clima y otras condiciones que existirán durante la construcción.

## **Agua**

El agua que se requiere en la producción del concreto a fin de precipitar la reacción química con el cemento para humedecer el agregado y lubricar la mezcla para una fácil manejabilidad. El agua que tiene ingredientes nocivos, contaminación, sedimentos, aceites, azúcar o químicos es dañina para la resistencia y propiedades de fraguado del cemento.

El reglamento indica que debe evitarse el empleo de agua con un contenido de sal común de 5% o mayor y nunca utilizar agua de mar en la fabricación de un concreto.

## **Agregados.**

Los agregados son las partes del concreto que constituyen lo grueso del producto terminado. Abarcan del 60 al 80% del volumen del concreto y tienen que estar graduados de tal forma que la masa total de concreto actúe como una combinación relativamente sólida, homogénea y densa, con los tamaños más pequeños actuando como un relleno inerte de los vacíos que existen entre las partículas más grande.

Existen dos tipos de Agregados:

1. AGREGADO GRUESO (grava o roca triturada)
2. AGREGADO FINO (arena natural)

Debido a que el agregado constituye la parte mayor de la mezcla, entre más agregado se tenga en la mezcla esto resultará en un concreto más económico, a condición de que la mezcla sea de una razonable manejabilidad para el trabajo específico en el que se utilice.

## **Aditivos.**

Los aditivos son materiales que además del agua, agregado y cemento se utilizan como ingredientes del concreto y se adicionan a la revoltura inmediatamente antes o durante el mezclado. Su función es la de modificar las propiedades del concreto para hacerlo más apropiado para el manejo, por la economía o para otros propósitos tal como el ahorro de energía.

Los principales tipos de aditivos se resumen como a continuación se presentan:

Aditivos acelerantes.- Se adicionan para reducir el tiempo de fraguado y acelerar el desarrollo de la resistencia a temprana edad.

Aditivos inclusores de aire.- Estos aditivos forman diminutas burbujas de aire de 1mm. de diámetro o menores en el concreto, se utilizan para incrementar la manejabilidad de la mezcla.

Aditivos reductores de agua y controladores de fraguado.- Estos aditivos incrementan la resistencia del concreto, permiten también una reducción en el contenido del cemento en proporción a la reducción en el contenido de agua.

Aditivos finamente divididos.- Son aditivos minerales que se utilizan para corregir deficiencias en la mezcla de concreto suministrando finos faltantes del agregado fino.

Aditivos para concreto sin revenimiento.- La selección del aditivo depende de las propiedades que se desee del producto terminado, tales como su efecto sobre la plasticidad, tiempo de fraguado, resistencia, deshielo y costo.

## **Concreto Fresco.**

Las propiedades del concreto fresco son parte importante de la calidad en general del concreto y las proporciones de la mezcla deben elegirse no sólo para obtener la resistencia , sino para producir concreto fresco que pueda transportarse, colocarse, consolidarse y terminarse con facilidad. Las propiedades del concreto fresco también son importantes por que afectarán la calidad y la apariencia de la estructura terminada, así como su costo.

Luego que se añade el agua a los otros ingredientes del concreto, éste recién mezclado sufre varios cambios y se hace rígido en unas cuantas horas.

### **Manejabilidad y consistencia.**

La manejabilidad es la propiedad del concreto recién mezclado que determina la facilidad y homogeneidad con la que puede mezclarse, transportarse, colocarse, compactarse y terminarse . Es una propiedad que depende de las condiciones de colado.

Algunos de los factores importantes que afectan la manejabilidad del concreto son:

Cantidades relativas de pastas y agregados .

La plasticidad de la misma pasta.

Tamaño máximo y granulometría de los agregados.

La forma y las características de la superficie de las del agregado.

La consistencia o fluidez del concreto es un aspecto importante de la manejabilidad y se refiere en cierto modo a la cantidad de agua en el concreto.

La consistencia en el concreto generalmente se mide con la prueba de revenimiento. Esta prueba se realiza midiendo el asentamiento en centímetros en el concreto después de quitar el molde en forma de cono truncado en el que se vacía el concreto fresco. La

consistencia o grado de humedad correspondiente a un revenimiento de cero a 2.5 cm. puede clasificarse como seca, de 2.5 a 5.0 cm. se clasifica como dura, 5.0 a 13.0 media y 13.0 a 18.0 como húmeda. Para concreto estructural es suficiente un revenimiento de 7.5 a 10.0 para colarlo en moldes.

Utilizando la vibración adecuada en vez de una mezcla más aguada se asegura no sólo una mejor compactación, sino que también la calidad del concreto será superior al no aumentar la proporción de agua para obtener un mayor revenimiento.

### **Segregación y exudado.**

Como el concreto no es un material homogéneo, sino una mezcla de ingredientes que difieren en tamaño de las partículas y en el peso específico, es susceptible a segregarse. Esta propiedad perjudicial es una separación o diferencia de asentamiento que se produce en el agregado grueso y da como resultado una masa de concreto que no es uniforme. La segregación puede aparecer durante los manejos, colados, vibrados y posiblemente por acabados incorrectos de una mezcla de concreto.

El exudado, que en algunas veces se llama ganancia de agua, está muy relacionado a la segregación. Durante la sedimentación de los materiales sólidos dentro de la masa de concreto el agua tiende a subir a la superficie, parte de esta agua queda atrapada debajo de las varillas horizontales de refuerzo y de los pedazos grandes del agregado.

El exudado puede reducirse al mínimo disminuyendo la proporción de agua, aumentando la del cemento, usando arenas con la proporción adecuada de finos o añadiendo algunos aditivos finamente molidos como las puzolanas.

### **Inclusión de aire.**

El concreto con aire incluido contiene aire que se le ha introducido intencionalmente en forma de burbujas diminutas dispersas en toda la mezcla, las dos razones principales para usar el aire incluido son: mejorar la resistencia del concreto endurecido a la exposición de ciclos de congelamiento y fusión así como la de mejorar la manejabilidad del concreto fresco.

La presencia de las burbujas de aire aumenta mucho la plasticidad y cohesión en la mezcla. Debido a la mejora en manejabilidad pueden reducirse mucho las proporciones de agua y arena en las mezclas con aire incluido. Además la inclusión de aire reduce la segregación y el exudado en el concreto recién mezclado.

Las proporciones de aire se expresan en tanto por ciento de volumen del concreto, aunque el aire se incluye únicamente en la fabricación de mortero de concreto.

### **Tiempo de fraguado.**

Las características de endurecimiento del concreto recién mezclado también debe ser consideradas en los procedimientos de construcción. Después de completar el mezclado el concreto endurece gradualmente hasta que se hace completar su resistencia. Es indispensable que permanezca plástico durante un periodo de tiempo suficiente que permita transportarlo, colocarlo, consolidarlo y terminarlo.

Es necesario señalar que el tiempo de fraguado del cemento Portland no define en forma adecuada el tiempo de fraguado del concreto, en el que influyen mucho las proporciones de la mezcla. La duración del fraguado en los concretos varía mucho con los diferentes cementos.



Es importante tomar en cuenta que cuando el concreto se cuele en varias capas en un muro o columna, la edad de la capa anterior debe ser menor que el tiempo de fraguado inicial, para tener la seguridad de que se va a obtener una masa monolítica de concreto. A menudo se emplean retardantes cuando se cuelean grandes masas de concreto en capas para evitar la formación de juntas de colado. Las llamadas juntas de colado en las construcciones de concreto se forman cuando la superficie de éste se endurece demasiado antes de que la otra mezcla de concreto se cuele sobre ella

### **Colocación y curado del concreto.**

Las técnicas necesarias para la colocación del concreto dependen del tipo de miembro que será colocado: esto es, si es una columna, una viga, un muro, una losa, una cimentación, una presa de concreto o una extensión de un concreto previamente colado y endurecido. Para vigas, columnas y muros los moldes deberán estar bien lubricados después de haberlos limpiado, y el refuerzo deberá estar libre de óxido y otros materiales dañinos. En cimentaciones, la tierra deberá compactarse y humedecerse alrededor de 15cm. de profundidad para evitar la absorción de la humedad presente en el concreto húmedo. Siempre deberá colocarse el concreto en capas horizontales las cuales se compactarán por medio de vibraciones de alta frecuencia ya sea de tipo sumergido o externo, como el caso lo requiera, a menos de que sea colocado por bombeo.

A fin de que la reacción química de hidratación tome lugar, es necesario que la hidratación del cemento se lleve a cabo con la presencia de humedad a temperaturas arriba de 10 grados centígrados. Si el secado es demasiado rápido, se desarrollan superficies de agrietamiento. Esto vendrá a disminuir la resistencia del concreto debido al agrietamiento así como la falla para lograr una completa hidratación química.

Para facilitar unas buenas condiciones de curado puede utilizarse cualquiera de los métodos siguientes:

- Riego continuo con agua.
- Inundación con agua.
- Cubrir el concreto con un yute húmedo, película plástica o papel de curado.
- Uso de compuestos químicos para curación con membrana para retener la humedad.
- Curado a vapor en los casos donde el elemento sea prefabricado.

## **Concreto Endurecido.**

Las propiedades del concreto endurecido pueden clasificarse como:

Propiedades instantáneas o de corta duración.

Propiedades de larga duración.

En las primeras se encuentran :

Resistencia a la compresión, tensión y cortante.

Rígidez medida por el módulo de elasticidad.

En las segundas se tiene :

Flujo plástico y contracción.

### **Resistencia a la compresión.**

Las resistencias de compresión en el concreto pueden llegar a obtenerse hasta de 900 kg/cm<sup>2</sup> o más, dependiendo del tipo de mezcla, las propiedades del agregado y el tiempo y calidad del curado. La producción comercial de concreto con agregado ordinario está en el

rango de 125 a 650 kg/cm<sup>2</sup>, siendo las resistencias del concreto más comunes en el rango de 250 a 400 kg/cm<sup>2</sup>.

La resistencia a la compresión,  $f_c$  se basa en el estudio de cilindros estándar de 15 cm. de diámetro por 30 cm. de altura curados bajo condiciones normales de laboratorio y probados a los 28 días de edad a un tipo de carga especificado. Cabe mencionar que en la estructura real la resistencia del concreto puede no ser la misma del cilindro debido a la diferencia en las condiciones de compactación de compactación y curado. Por ello, la resistencia del concreto especificado debe calcularse por encima de la resistencia supuesta en los cálculos, por lo menos en:

30 kg/cm<sup>2</sup> cuando se tiene una desviación estándar menor de 20 kg/cm<sup>2</sup>.

40 kg/cm<sup>2</sup> cuando se tiene una desviación estándar comprendida entre 20 y 30 kg/cm<sup>2</sup>.

50 kg/cm<sup>2</sup> cuando se tiene una desviación estándar comprendida entre 30 y 35 kg/cm<sup>2</sup>.

60 kg/cm<sup>2</sup> cuando se tiene una desviación estándar comprendida entre 35 y 40 kg/cm<sup>2</sup>.

· Cuando la desviación estándar es superior a 40 kg/cm<sup>2</sup>, el proporcionamiento en la mezcla de concreto debe calcularse para una resistencia promedio igual o mayor de 85 kg/cm<sup>2</sup> que la resistencia  $f_c$  especificada. Para diseñar se usará  $f^*c = 0.8f_c$ .

### **Resistencia a la tensión.**

La resistencia del concreto a la tensión es baja, aproximadamente del orden de un 10% a un 20% de su resistencia a la compresión.

La prueba de tensión rara vez se utiliza debido a que se obtienen resultados inciertos ocasionados por los dispositivos de sujeción, los cuales producen fallas prematuras por concentraciones de esfuerzos. Existen varios métodos para la prueba de tensión, el más utilizado es la prueba de rotura o brasileña.

Para el diseño de miembros sujetos a flexión, se utiliza el valor del módulo de ruptura  $f_r$  en lugar de la resistencia de rotura. El módulo de ruptura se mide llevando a la falla vigas de concreto simple de 15 X 15 cm. de sección transversal, con un claro de 45 cm. y cargadas en sus tercios del claro. El módulo de ruptura tiene un valor mayor que la resistencia de rotura. Para el diseño se usa un valor nominal  $f_t^* = 0.75f_r$ , siendo  $f_r$  la resistencia a la tensión, se puede estimar en: concreto normal  $1.5\sqrt{f_c}$ .

### **Resistencia al Cortante.**

La resistencia al cortante es más difícil de determinar experimentalmente comparada con las pruebas discutidas con anterioridad debido a la dificultad de separar el cortante de otros esfuerzos. Esta es una de las razones de las grandes diferencias en los valores de la resistencia al cortante, variando desde un 20% de la resistencia a la compresión bajo carga normal hasta un porcentaje bastante mayor del 85% de la resistencia a la compresión en los casos donde exista cortante directo en combinación con la presión.

El control de un diseño estructural por resistencia al cortante es importante solamente en casos particulares, ya que los esfuerzos cortantes se limitan siempre a valores bajos a fin de proteger al concreto de una falla por tensión diagonal.

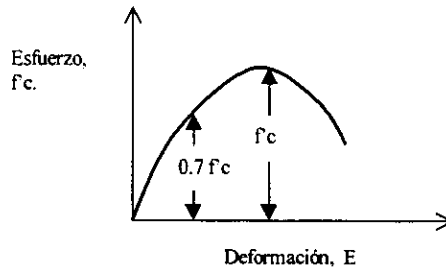
### **Curva esfuerzo – deformación.**

El conocimiento de la relación esfuerzo - deformación del concreto es esencial para el desarrollo de todos los términos y procedimientos de análisis y diseño en las estructuras de concreto. En la **figura 2.1a** se muestra una curva típica de esfuerzo - deformación obtenida de pruebas utilizando especímenes cilíndricos de concreto cargados en compresión axial por varios minutos. La primera parte de la curva, hasta cerca del 40% de la resistencia última  $f_c$  puede en esencia considerarse lineal para todos los casos prácticos. Después de

Después de aproximadamente el 70% del esfuerzo de falla, el material pierde una importante parte de rigidez, con esto aumenta la curvatura de diagrama. Bajo la carga última, se pueden observar con mucha facilidad grietas paralelas a la dirección de la carga, y la mayoría de los cilindros (excepto en aquellos con resistencias muy bajas) fallan en forma repentina inmediatamente después de esto.

La **figura 2.1b** muestra las curvas esfuerzo - deformación para concretos de varias resistencias. Puede observarse que:

- 1.- Cuanto más baja sea la resistencia del concreto, mayor será la deformación de la falla.
- 2.- La longitud de la parte relativamente lineal se incrementa con el aumento en la resistencia a la compresión del concreto.
- 3.- Existe una reducción aparente en la ductilidad con la resistencia incrementada.



**Figura 2.1 a** Curva típica de esfuerzo deformación del concreto.

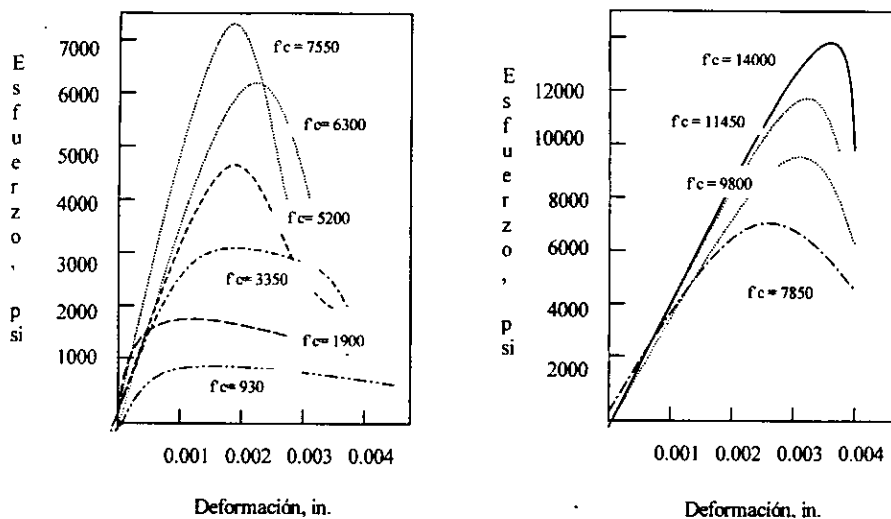


Figura 2.1 b Curvas esfuerzo – deformación para varias resistencias de concreto

### Módulo de elasticidad.

El módulo de elasticidad de Young se aplica únicamente a la tangente de la curva esfuerzo-deformación en el origen. La pendiente inicial de la tangente a la curva se define como el módulo tangente inicial y es también posible construir un módulo tangente en cualquier punto de la curva.

El módulo secante de elasticidad del concreto se determina con la pendiente de la línea recta que se une al origen con un esfuerzo dado (alrededor de  $.4f_c$ ). Este valor, llamado en el cálculo del diseño módulo de elasticidad, cumple la suposición práctica de que las deformaciones que ocurren durante la carga pueden considerarse básicamente elásticas y que cualquier deformación posterior debida a la carga se considera como flujo plástico.

Según las N.T.C.D.C.E.C. del D.D.F. para concretos clase 1 el módulo de elasticidad se supondrá igual a  $14000 \sqrt{f_c}$  y para concretos clase 2 se supondrá igual a  $8000 \sqrt{f_c}$ .

Pueden usarse otros valores de  $E_c$  que estén suficientemente respaldados por resultados de laboratorio. En problemas de revisión estructural de construcciones existentes, puede aplicarse el módulo de elasticidad determinado en corazones de concreto extraídos de la estructura, que formen una muestra representativa de ella. En la figura 2.2 se muestra el módulo tangente y secante del concreto.

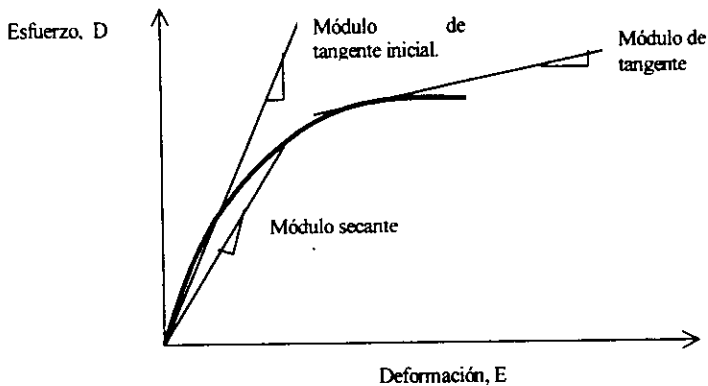


Figura 2.2 Módulo tangente y secante del concreto.

### Contracción.

Existen dos tipos básicos de contracción: contracción plástica y contracción por desecado. La contracción plástica ocurre durante las primeras horas después de haber colocado el concreto fresco en los moldes. Esto se presenta cuando la humedad de la superficie de concreto se evapora más rápidamente antes de ser reemplazada por el agua exudada de las capas más bajas de los elementos de concreto.

La contracción por desecación es la disminución en el volumen de un elemento de concreto cuando éste pierde humedad por evaporación.

La **figura 2.3** relaciona el aumento de la deformación por contracción respecto al tiempo. La relación disminuye con el tiempo ya que los concretos más viejos son más resistentes a esfuerzos y en consecuencia experimentan menos contracción.

La contracción por secado se supondrá igual a:

Concretos clase 1 : 0.001.

Concretos clase 2 : 0.002.

Son varios los factores que afectan la magnitud de la contracción por desecación:

Agregado

Relación agua – cemento

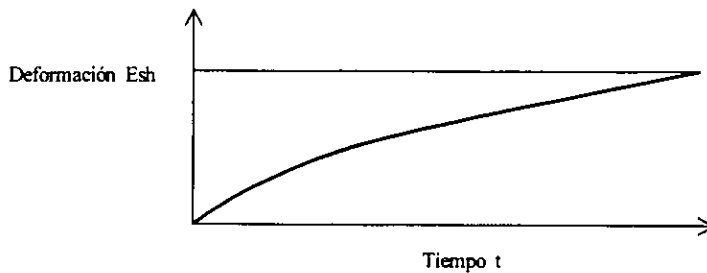
Tamaño del elemento de concreto

Tipo de cemento

Condiciones del medio ambiente

Cantidad de refuerzo

Aditivos



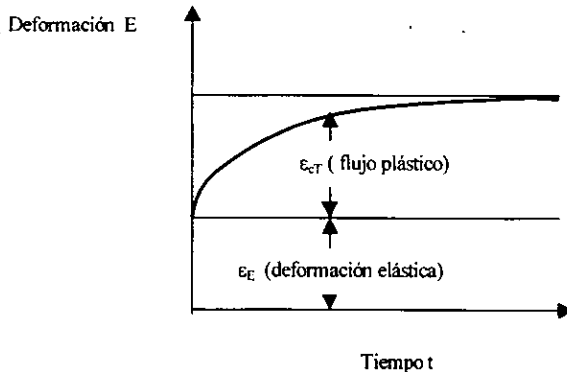
**Figura 2.3** Contracción - Tiempo



## Flujo Plástico.

El flujo plástico es el incremento en deformación respecto al tiempo debido a una carga sostenida. La deformación inicial debida a la carga es la deformación elástica, mientras que la adicional debida a la misma carga sostenida es la deformación por flujo plástico.

La **figura 2.4** muestra el incremento en la deformación por flujo plástico respecto al tiempo, y como en el caso de la contracción, puede verse que el flujo plástico disminuye con el tiempo. El flujo plástico no puede observarse en forma directa y sólo puede determinarse restando la deformación elástica y la deformación por contracción a la deformación total.



**Figura 2.4** Curva deformación - tiempo

## Acero de refuerzo.

El acero de refuerzo para el concreto consiste de varillas que se fabrican tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. Los diámetros usuales de las barras producidas en México varían de  $\frac{1}{4}$ " a  $1\frac{1}{2}$ ". Todas las varillas, con excepción del alambrión de  $\frac{1}{4}$ " que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie para mejorar su adherencia al concreto. La **tabla 2.1** proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como datos sobre las características.

Barra Número	Diámetro Pulg.	Diámetro mm.	Peso Kg/m.	Area Cm <sup>2</sup>	Perímetro cm.
2	¼	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	½	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	¾	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1- 1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1- ¼	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

**Tabla 2.1** Diámetros, pesos, áreas y perímetros de barras.

### Propiedades mecánicas del acero de refuerzo.

Las propiedades mecánicas dependen, principalmente de la composición química, los procesos de laminado y el tratamiento térmico de las varillas; otros factores que pueden afectar estas propiedades son las técnicas empleadas en las pruebas, tales como la rapidez de la carga de la muestra, las condiciones y geometría de la muestra. Estos factores pueden producir una apreciable variedad de resultados para un mismo tipo de acero.

El espécimen de prueba usual es una muestra sometida a tensión, y se supone que para todos los fines prácticos el comportamiento a compresión es similar al comportamiento a tensión.

Un diagrama típico esfuerzo - deformación de un acero al carbono (figura 2.5) se caracteriza por la existencia de una zona inicial en la que los esfuerzos y deformaciones

están relacionados entre sí linealmente seguida por la llamada región plástica, donde tienen lugar deformaciones considerables sin incremento apreciable de esfuerzos y termina en una región de endurecimiento por deformación, en la cual un incremento de deformación es nuevamente acompañado por un incremento de esfuerzo.

PUNTO DE FLUENCIA. Se define punto de fluencia como el esfuerzo del material para el cual la deformación presenta un gran incremento sin que haya un aumento correspondiente en el esfuerzo. Esto queda indicado por la porción plana del diagrama esfuerzo - deformación, denominada rango plástico.

RESISTENCIA DE FLUENCIA. Los diagramas esfuerzo - deformación de los aceros de alta resistencia tratados térmicamente indican que estos aceros no tienen la amplia parte plana correspondiente al flujo plástico, sino que en vez de ella muestran una curva ascendente continua hasta llegar al punto de resistencia máxima a la tensión.

RESISTENCIA A LA TENSIÓN. La resistencia a la tensión se define como el cociente de la carga axial máxima aplicada sobre la muestra, dividida entre el área de la sección transversal original. En algunos casos, éste es un valor arbitrario útil para propósitos de referencia, por que la resistencia real a la tensión debe basarse en la curva real de esfuerzo - deformación.

LÍMITE DE PROPORCIONALIDAD. El límite de proporcionalidad es el esfuerzo máximo para el cual los esfuerzos son directamente proporcionales a las deformaciones.

MÓDULO DE ELASTICIDAD. Es la relación del esfuerzo a la deformación en la región elástica de la curva esfuerzo - deformación. Se determina este valor por medio de la pendiente de dicha porción elástica del diagrama. El reglamento de construcciones del D.D.F. supone  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$

MÓDULO DE ELASTICIDAD TANGENTE. La pendiente de la tangente a la curva esfuerzo - deformación trazada en cualquier punto situado arriba del límite de proporcionalidad, se define como módulo de elasticidad tangente.

RELACIÓN DE POISSON. Se denomina relación de Poisson a la relación entre la deformación unitaria transversal y la deformación unitaria longitudinal, bajo una carga axial dada. Este valor varía para el acero de 0.25 a 0.33 dentro del rango plástico.

MÓDULO DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN. Se define por la pendiente de la curva esfuerzo - deformación en el rango por endurecimiento por deformación.

MÓDULO DE ELASTICIDAD AL ESFUERZO CORTANTE. La relación del esfuerzo - deformación cortante a la deformación unitaria por cortante dentro del rango elástico, se denomina módulo de elasticidad al esfuerzo cortante G y puede determinarse mediante la expresión:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

RESISTENCIA A LA FATIGA. Se llama resistencia a la fatiga al esfuerzo al cual el acero falla bajo aplicaciones repetidas de carga, se denomina también límite de aguante.

RESISTENCIA AL IMPACTO. Es una medida de la capacidad del material para absorber energía bajo aplicaciones rápidas de carga. La tenacidad es la medida comparativa de las resistencias al impacto de varios aceros.

Otras propiedades de interés para el diseñador son las características de soldabilidad, manejabilidad, formabilidad y resistencia a la corrosión.

En México se cuenta con una extensa variedad de aceros de refuerzo, las barras laminadas en caliente se pueden obtener límites de fluencia desde 2300 a 4200 kg/cm<sup>2</sup>. El acero trabajado en frío alcanza límites desde 4000 a 6000 kg/cm<sup>2</sup>. En la figura 2.6 se

muestra la gráfica esfuerzo - deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México.

Actualmente se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo, éstas son formadas por alambres lisos unidos por puntos de soldadura en las intersecciones. El acero en estas mallas es del tipo trabajado en frío con esfuerzos de fluencia del orden de 5000 kg/cm<sup>2</sup>. El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm. y los diámetros de 2 a 7 mm. aproximadamente.

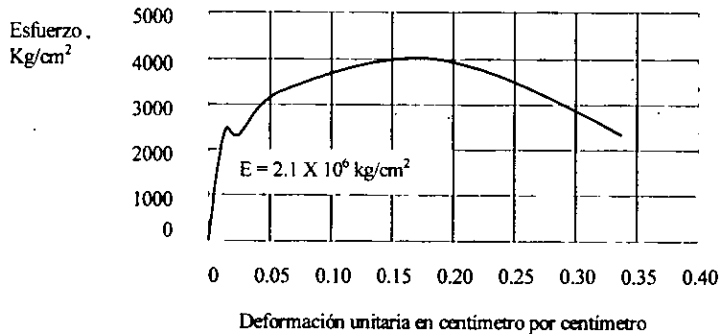


Figura 2.5 Curva esfuerzo - deformación de un acero al carbono.

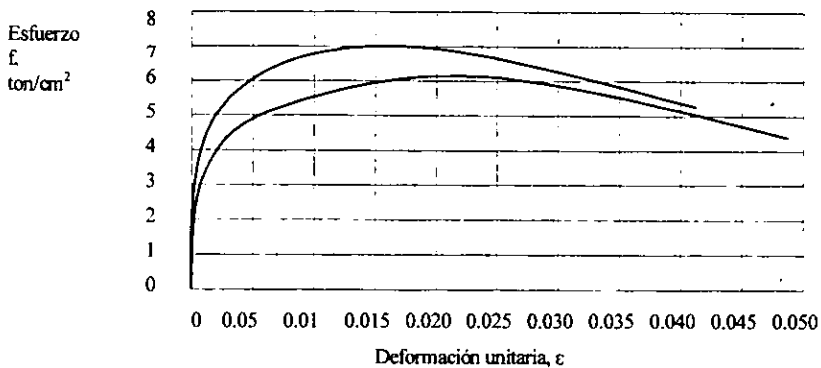


Figura 2.6 Curva esfuerzo deformación para aceros trabajados en frío.

## **Concreto reforzado.**

El concreto es resistente en compresión pero débil en tensión. Por lo que, se necesita de un refuerzo para resistir los esfuerzos de tensión que resulten de las cargas aplicadas. Algunas veces se utiliza refuerzo adicional para reforzar la zona de compresión de las secciones de las vigas de concreto. Tal acero es necesario para cargas pesadas a fin de reducir las deformaciones a largo tiempo.

Las estructuras de concreto reforzado tienen ciertas características que se derivan de su procedimiento constructivo, que las distinguen de las estructuras de otros materiales.

Una de estas características es que al concreto se le puede dar varias formas, gracias a esto, es posible construir estructuras como los cascarones, que en otros materiales sería muy difícil de obtener.

Otra característica importante es la facilidad con que puede lograrse la continuidad en la estructura. Mientras que en estructuras metálicas el logro de continuidad en las conexiones entre los elementos implica serios problemas en el diseño y en la ejecución, en las de concreto reforzado el monolitismo es consecuencia natural de las características de construcción.

Para la construcción de estructuras de concreto reforzado existen dos procedimientos principales. Cuando los elementos estructurales se forman en su posición definitiva, se dice que la estructura ha sido colada en el lugar. Si se fabrican en un lugar distinto al de la posición definitiva de la estructura, el procedimiento recibe el nombre de prefabricación.

Para la construcción de estructuras coladas *in situ*, es necesario seguir una secuencia determinada, ya que para iniciar cada etapa es indispensable que se haya concluido la anterior. Además, es necesario la construcción de obras falsas muy elaboradas y transportar el concreto fresco del lugar de fabricación a su posición definitiva, operaciones que influyen en el costo.

Con el procedimiento de prefabricación se economiza tanto en la obra falsa como en el transporte del concreto fresco y se pueden realizar en forma simultánea varias etapas de construcción. Sin embargo, esta procedimiento presenta el inconveniente del costo adicional de montaje y transporte de los elementos prefabricados y, además el problema de desarrollar conexiones efectivas entre los elementos.

El ingeniero proyectista deberá escoger entre estas dos alternativas de construcción considerando las ventajas económicas, constructivas y técnicas que se adapten a su proyecto.

#### **Características Acción – Respuesta de elementos de concreto.**

El objetivo de una estructura de concreto consiste en determinar dimensiones y características de los elementos de una estructura para que ésta cumpla con un grado de seguridad razonable, también para que la estructura se comporte satisfactoriamente en condiciones de servicio. Debido a estos requisitos es necesario conocer las relaciones que existen entre las características de los elementos de una estructura, como son: dimensiones, refuerzo, etc., las solicitaciones que deben soportar y los efectos que dichas solicitaciones producen en la estructura.

Si son conocidas las posibles combinaciones entre las acciones, los elementos de ciertas características y sus respuestas, se contará con una base racional para establecer su método de diseño, el cual tendrá como objeto determinar las características que debe tener la estructura para que, al estar sometida a ciertas acciones, su comportamiento o respuesta sea aceptable desde los puntos de vista de seguridad frente a la falla y utilidad en condiciones de servicio.

El problema de la determinación de las relaciones acción - respuesta para estructuras con ciertas características, sometidas a toda una variedad de acciones y combinaciones de estas acciones, es complejo, ya que puede presentarse un número infinito de combinaciones.

Debido a esta situación, es necesario contar con un método de análisis que permita determinar en cada uno de los elementos de una estructura las acciones resultantes de la aplicación de las sollicitaciones exteriores a la estructura total. Para establecer una base racional de diseño será necesario obtener las características acción - respuesta correspondientes a las acciones más frecuentes sobre los distintos elementos estructurales. Con esta información se puede determinar el rango de las sollicitaciones bajo las cuales el elemento se comportará satisfactoriamente una vez en condiciones de servicio. Esto quiere decir, que es necesario establecer las relaciones siguientes:

<b>Acciones interiores</b>	<b>Características del elemento</b>	<b>Respuesta</b>
Carga axial	Tipo de concreto	Deformación
Flexión	Tipo de refuerzo	Agrietamiento
Torsión	Tamaño	Durabilidad
Cortante	Forma	Vibración

Al valorar la respuesta correspondiente a una acción específica, es necesario tomar en cuenta el modo de aplicación de la misma, ya que este factor influye de manera muy importante en dicha respuesta. Es decir, la respuesta de una estructura a una acción determinada dependerá de si ésta es instantánea, de corta duración, sostenida, etc.

#### **Sollicitaciones aplicadas a estructuras de concreto.**

Las principales sollicitaciones o acciones exteriores a que puede estar sujeta una estructura son: cargas estáticas, debidas a peso propio, cargas vivas y a cargas permanentes, así como a cargas dinámicas impuestas por un sismo, o por la presión del viento o por la aplicación repetida de cargas vivas.



También se consideran como solicitaciones las deformaciones de la estructura inducidas por asentamiento, contracción, flujo plástico y cambios de temperatura.

Al realizar las consideraciones de éstas acciones, es necesario proveer las condiciones más desfavorables en que la estructura puede llegar a encontrarse así y el tiempo que sufrirá estas condiciones desfavorables.

La estimación de las cargas debidas al peso propio puede hacerse con relativa precisión, los errores no serán mayores del 20%, si se han evaluado con cuidado los volúmenes de los materiales y los pesos volumétricos.

En lo que respecta a la carga viva, los errores en la estimación puede ser del 100% o aún mayores. La carga viva esta especificada comúnmente en los reglamentos de construcción como carga uniformemente repartida, con distintas intensidades de acuerdo al uso considerado, o bien si se trata de puentes, como carga móvil idealizada. Estos valores equivalentes especificados se basan en estudios limitados. Los efectos de las cargas equivalentes en la estructura pueden ser muy diferentes de los efectos de las cargas reales.

Según nuestra experiencia es como se puede especificar un tipo de carga tal que, unido a procedimientos adecuados de diseño y construcción proporcione una estructura que se comporte satisfactoriamente.

### **Análisis de estructuras de concreto.**

Para poder analizar una estructura es necesario idealizarla, una idealización común en el análisis de estructuras de edificios es considerar la estructura formada por series de marcos planos en dos direcciones. Se considera, además, que las propiedades mecánicas de los elementos en cada marco están concentradas a lo largo de sus ejes. Una vez idealizada la estructura se le aplican las acciones para conocer su respuesta (fuerzas internas).

El propósito de análisis es valorar las acciones interiores en las distintas partes de la estructura. Para ello es necesario, salvo en estructuras o elementos isostáticos, conocer o suponer la relación entre fuerza y deformación o, en términos más generales, entre acción y respuesta.

El análisis elástico de estructuras parte de la hipótesis más simple que puede hacerse para relacionar carga y deflexión es suponer una dependencia lineal. Otra hipótesis relativamente simple que se hace para el análisis de estructuras, es la de suponer que las acciones interiores, al llegar a un valor crítico de la acción, son independientes de las deformaciones; en esta hipótesis se basa el análisis límite. En él se trata de obtener los valores de las acciones para los cuales la estructura se vuelve un mecanismo inestable.

Existen otros tipos de análisis más refinados, con hipótesis menos simples que las anteriores, que se aproximan más a la realidad. Debido a su mayor refinamiento son más laboriosos, aunque con el empleo de computadoras se usarán cada vez más.

### **Dimensionamiento de estructuras de concreto reforzado.**

El dimensionamiento es la determinación de las propiedades geométricas de los elementos estructurales y de la cantidad del acero de refuerzo.

El procedimiento tradicional de dimensionamiento, basado en esfuerzos de trabajo, consiste en determinar los esfuerzos correspondientes a acciones interiores obtenidas de un análisis elástico de la estructura, bajo condiciones de servicio. Estos esfuerzos se comparan con esfuerzos permisibles, especificados como una fracción de las resistencias del concreto y el acero. Se supone que así se logra simultáneamente, un comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio y un margen de seguridad razonable.

El procedimiento más comúnmente utilizado en la actualidad es el denominado método plástico, de resistencia o de resistencia última, según el cual los elementos o secciones se dimensionan para que tengan una resistencia determinada.

El procedimiento consiste en definir las acciones interiores, correspondientes a las condiciones de servicio, mediante un análisis elástico y multiplicarlas por un factor de carga, para así obtener las resistencias de dimensionamiento.

A continuación se presentan las hipótesis de diseño:

1.- La sección plana antes de la deformación, permanece plana después de la deformación (las deformaciones son proporcionales al eje neutro y siguen una ley de variación lineal.)

2.- Al llegar a su capacidad límite los esfuerzos y las deformaciones no son proporcionales y la distribución de los esfuerzos no es lineal. Se puede considerar que el diagrama de esfuerzos puede tener cualquier forma, siempre y cuando los valores resultantes de las fórmulas obtenidas con los diagramas supuestos estén de acuerdo con los valores reales o experimentales.

3.-La adherencia entre el acero y el concreto es perfecta y sus deformaciones son iguales a igual distancia del eje neutro.

4.-Las tensiones son tomadas íntegramente por el acero (despreciando la capacidad de tensión del concreto) y se consideran aplicadas en el centro de gravedad de éste.

5.- El conjunto de fuerzas interiores y exteriores constituye un sistema en equilibrio.

## **Diseño por estados límite.**

El reglamento de construcciones para el Distrito Federal establece disposiciones para el diseño de estructuras basadas en el concepto de estados límite. Se consideran dos categorías de estados límite: los de falla y los de servicio.

Los estados límite de falla corresponden al agotamiento definitivo de la capacidad de carga de la estructura o de cualquiera de sus miembros. El hecho de que la estructura, sin agotar su capacidad de carga, sufra daños irreversibles que afecten su resistencia ante nuevas aplicaciones de carga.

Los estados límite de servicio tienen lugar cuando la estructura llega a deformaciones, agrietamientos, vibraciones o daños que afecten su correcto funcionamiento, pero no su capacidad para soportar cargas.

Para revisar los estados límite de falla, o sea, la seguridad de una estructura, se debe verificar que la resistencia de cada elemento estructural, y de la estructura en su conjunto sea mayor que las acciones que actúan sobre los elementos o sobre la estructura.

El diseño por estado límite de falla se efectúa como se muestra a continuación:

- Determinar acciones que se aplican a la estructura, (carga viva, carga muerta y cargas accidentales.)
- Calcular, mediante un análisis estructural, los efectos de las acciones sobre la estructura, (fuerzas axiales, cortantes, momentos flexionantes y torsionantes), a estas fuerzas se les llama fuerzas internas.
- Las fuerzas internas se multiplican por factores de carga  $F_c$ , para obtener las fuerzas internas, de diseño.
- Se calculan las resistencias nominales,  $R$  de cada elemento de la estructura, y se multiplican por factores reductivos,  $FR$ , para obtener resistencias de diseño.

- Se verifica que las resistencias de diseño, FR R, sean iguales o mayores que las fuerzas internas de diseño, FR S.

Por lo que respecta a los estados límite de servicio, el RCDDF especifica calcular la magnitud de las respuestas, tales como deflexiones y vibraciones bajo la acción de cargas nominales, sin incrementarlas o disminuirlas por los factores de carga, y comparar estas magnitudes con los valores especificados por el reglamento. Las deflexiones y los agrietamientos son las más importantes respuestas para elementos de concreto reforzado.

### **Sistemas estructurales de concreto.**

Toda estructura se dimensiona considerando dos aspectos que deben estar de acuerdo, el aspecto arquitectónico y el ingenieril ambos se unen para servir una función particular. La forma y función van mano a mano y el mejor sistema estructural es aquel que llena la mayor parte de las necesidades del usuario siendo a la vez útil, atractivo y de un costo económico prometedor.

Aunque la mayoría de las estructuras se diseñan para una vida útil de 50 años, el registro de durabilidad indica que las estructuras de concreto reforzado dimensionadas de manera adecuada han tenido por lo general mayores vidas útiles.

Los sistemas de concreto se componen de varios elementos estructurales que, cuando son conjuntados, producen un sistema total. Los componentes pueden clasificarse en forma general en: Losas de piso, Vigas, Columnas, Muros y Cimentaciones.

#### **1.- Losas de piso.**

Las losas de piso son los principales elementos horizontales que transmiten las cargas vivas, así como las cargas muertas a los apoyos verticales de los marcos de una estructura. Pueden

ser losas sobre vigas, como se muestra en la **figura 2.7**, o losas encasetonadas, losas sin vigas apoyándose directamente sobre columnas o losas apoyadas sobre viguetas.

## 2.- Vigas.

Las vigas son los elementos estructurales que transmiten las cargas tributarias de las losas de piso a las columnas verticales. Normalmente se vuelan monolíticamente con las losas y están reforzadas estructuralmente en una cara, la parte más baja de tensión, o ambas caras superior e inferior. Como son coladas monolíticamente con la losa, forman una viga T para las vigas interiores o una viga L en el exterior de la losa, como se muestra en la **figura 2.7**.

## 3.- Columnas.

Son los elementos verticales que soportan el sistema de piso estructural. Son miembros sometidos a fuerzas de compresión en la mayoría de los casos a carga axial y flexión y son de mayor importancia en las consideraciones de seguridad de cualquier estructura.

Si un sistema estructural está compuesto de miembros horizontales en compresión tales miembros se consideran como vigas - columnas.

## 4.- Muros.

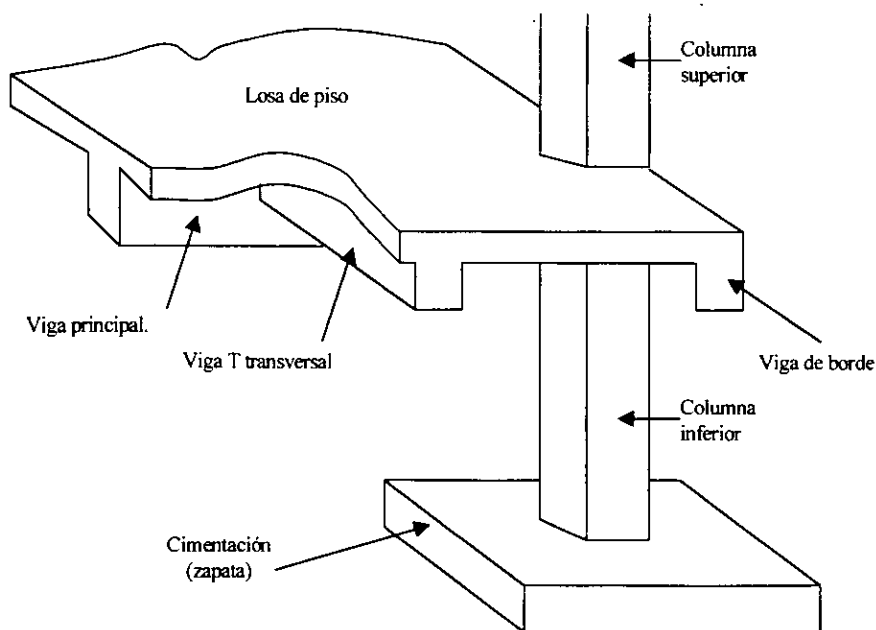
Los muros son los cerramientos verticales para los marcos. No son en general o necesariamente, hechos de concreto sino de cualquier material que cumpla estéticamente la forma y necesidades funcionales del sistema estructural.

Los muros estructurales de concreto son a menudo necesarios como muros de contención, muros de escalera y muros de cortante que resisten cargas horizontales de viento y sismo.

## 5.- Cimentaciones.

Las cimentaciones son los elementos estructurales de concreto que transmiten el peso de las estructuras superiores al suelo. Pueden ser de muchas formas, el más simple es una zapata aislada que se muestra en la **figura 2.7**, otras formas son los pilotes, losas y zapatas corridas.

Los resultados del proceso de análisis y diseño de una estructura tienen que presentarse en forma concisa y estándar de tal manera que el constructor pueda utilizarlos para construir el sistema completo.



**Figura 2.7** Elementos de concreto reforzado.

## CAPITULO III

### COLUMNAS.

#### **Introducción.**

Las columnas son los miembros verticales a compresión y/o tensión de los marcos estructurales que sirven para apoyos a las vigas cargadas. Transmiten las cargas de los pisos superiores hasta la planta baja y después al suelo a través de la cimentación. Puesto que las columnas son elementos sujetos a cargas de compresión axial, la falla de una columna en un lugar crítico puede causar el colapso progresivo de los pisos concurrentes y el colapso total de la estructura completa.

El diseño de una columna debe tener cuidado extremo, teniendo en cuenta que la falla estructural de una columna es un evento de principal importancia. Las columnas deben tener una reserva de resistencia más alta que las vigas o que cualquier otro elemento de proyección horizontal, especialmente por que las fallas de compresión proporcionan muy poca advertencia.

La resistencia de las columnas se calcula con los principios básicos siguientes:

- Existe una distribución lineal de las deformaciones en la sección transversal de la columna.
- No hay deslizamiento entre el acero y el concreto.
- Para propósito de los cálculos de la resistencia, la deformación unitaria máxima permisible en la falla es 0.003.
- La resistencia en tensión del concreto es despreciable y no se considera en los cálculos.



## **Tipos de columnas.**

Las columnas se pueden clasificar con base a su forma, a la disposición de la carga en la sección transversal y por la longitud de la columna.

La forma y arreglo del refuerzo, identifican 3 tipos de columnas que se ilustran en la **figura 3.1**

- Columnas rectangulares o cuadradas con refuerzo longitudinal de varillas y refuerzo transversal de estribos.
- Columnas circulares con refuerzo longitudinal y refuerzo transversal en espiral.
- Columnas compuestas en las que se confinan perfiles estructurales en el concreto.

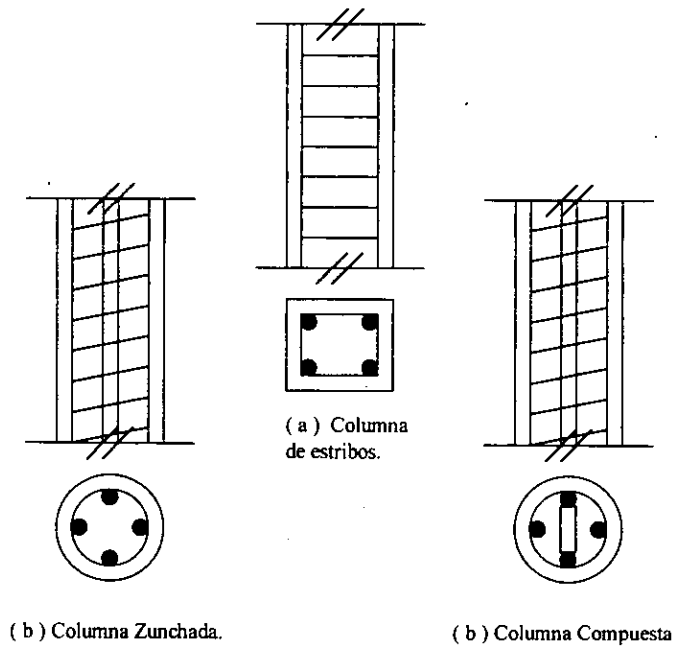
En base a la disposición de la carga en la sección transversal, se puede clasificar a las columnas como cargadas axialmente o excéntricamente, según se muestra en la **figura 3.2**

Las columnas cargadas axialmente, teóricamente no soportan momento. Sin embargo, en la práctica, los reglamentos de construcción consideran siempre la existencia de momentos flexionantes, aún cuando el análisis indique que no hay dichos momentos.

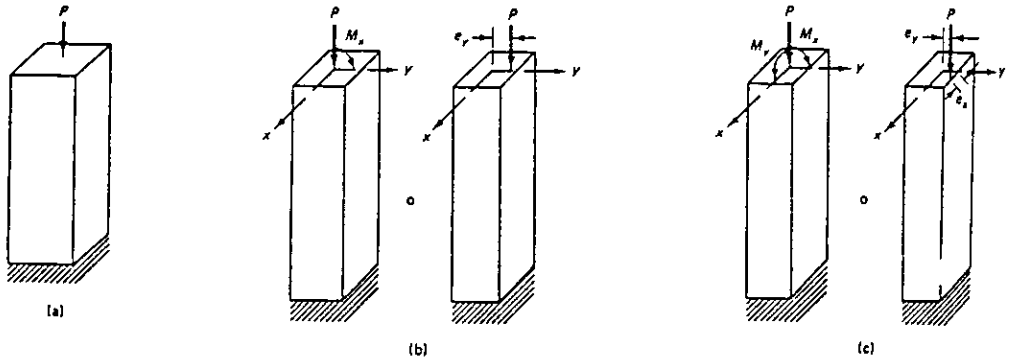
Las columnas con carga excéntrica están sujetas a momento además de la fuerza axial. El momento se puede convertir en una carga  $P$  y una excentricidad  $e$ , como se muestra en la **fig. 3.2b y c**. El momento puede ser uniaxial, como es el caso en una columna exterior del marco de un edificio de varios niveles, y o cuando dos tableros

adyacentes no están cargados de modo similar, como en las columnas A y B de la **fig. 3.3**

La falla en las columnas se puede presentar como resultado de una falla en el material por la fluencia inicial del acero en la cara de tensión o por el aplastamiento inicial del concreto en la cara de compresión, o por la pérdida de la elasticidad lateral estructural (esto es, por pandeo).

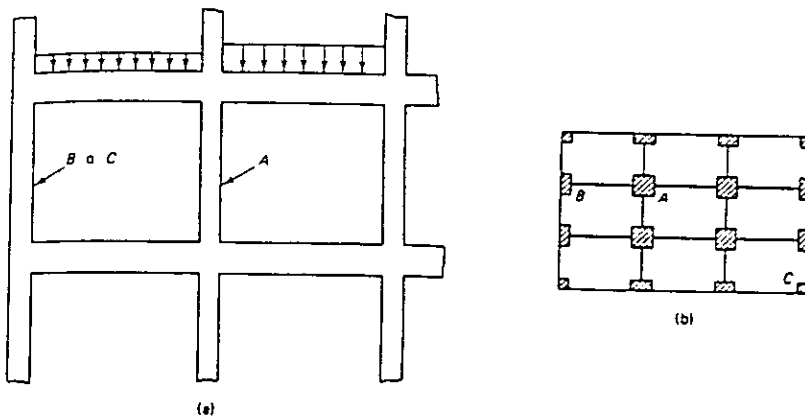


**Figura 3.1** Clasificación de columnas, de acuerdo con la forma y tipo de refuerzo.



- a) Columna con carga axial
- b) Columna con carga axial y momento uniaxial
- c) Columna con carga axial y momento biaxial

**Figura 3.2** Clasificación de las columnas, según la posición de la carga en la sección transversal.



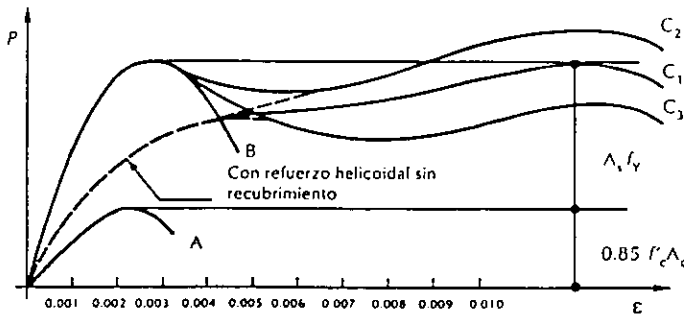
**Figura 3.3** Flexión de las columnas.

- a) elevación del marco
  - b) planta del sistema de marcos.
- A: columna sujeta a flexión uniaxial
  - B: columna exterior con flexión uniaxial
  - C: columna exterior con fuerza biaxial.

Si la falla se debe a la falla inicial del material, se clasifica como columna corta, a medida que se incrementa la longitud de la columna, también se incrementa la probabilidad de que el pandeo produzca la falla. Por lo tanto, la transición de columna corta (falla del material) o columna larga ( falla por pandeo ) se define como la relación de la longitud efectiva  $Kl$  con el radio de giro. La altura  $l$  es la longitud no apoyada de la columna y  $K$  es un factor que depende de las condiciones en los extremos de las columnas y en si está contraventeada o no lo está.

### Resistencia de columnas cortas cargadas axialmente.

La figura 3.4 muestra las curvas carga - deformación unitaria para tres tipos de elementos de concreto sujetos a compresión axial. Estas curvas son típicas de ensayos de columnas relativamente cortas.



**Figura 3.4** Curvas esfuerzo-deformación unitaria de columnas cortas bajo compresión axial

La curva A, corresponde a un elemento de concreto simple, la carga máxima se alcanza cuando se llega a una deformación unitaria del orden de 0.002. La resistencia

de un cilindro disminuye al aumentar su relación de esbeltez, hasta llegar a un valor mínimo aproximadamente igual al 85% de la resistencia de un cilindro con relación de esbeltez igual a dos. Por consiguiente, la resistencia de un elemento de concreto simple sujeto a compresión puede estimarse como el producto del 85% del esfuerzo medido en un cilindro de control ( $f_c$ ). Este valor o factor de reducción 0.85 es solo un promedio de resultados de ensayos en miembros colados verticalmente.

Si se adiciona refuerzo longitudinal a un espécimen de concreto simple y se utiliza el refuerzo transversal necesario para mantener las varillas longitudinales en su posición durante el colado, la carga máxima se obtiene bajo las mismas condiciones que en un cilindro de concreto simple, es decir, a una deformación unitaria de 0.002 la falla, como en el caso anterior, se produce a una deformación unitaria de 0.003 o 0.004, si el ensaye es de corta duración.

La característica carga - respuesta de un espécimen con refuerzo longitudinal es una curva como la B en la **figura 3.4** La resistencia adicional sobre la de un cilindro o la de un prisma de concreto simple es debida a la contribución del refuerzo longitudinal en compresión. Se puede estimar esta contribución como el producto del área de acero ( $A_s$ ) por el esfuerzo de fluencia ( $F_y$ ). Por lo tanto, la resistencia o carga máxima que un prisma de concreto con refuerzo longitudinal y estribos transversales es capaz de alcanzar, esta dada por la siguiente expresión:

$$P_o = 0.85 f_c A_g + A_s F_y$$

Donde:

$A_g$  = Area total de concreto, descontando el área ocupada por las barras de acero.

$A_s$  = Area ocupada por las barras de acero.

$F_y$  = Esfuerzo de fluencia del acero.

$f_c$  = Resistencia de los cilindros de control. (dms. 15X30)

Se debe notar que la carga axial produce una compresión uniforme en toda la sección transversal; por consecuencia, el esfuerzo y la deformación en la falla serán uniformes en toda la sección transversal, como se muestra en la **figura 3.5**

Si el elemento, además de refuerzo longitudinal, tiene refuerzo helicoidal continuo a todo lo largo, su comportamiento bajo carga queda representado por las curvas C de la **figura 3.1** Inicialmente su comportamiento es similar al de un prisma con estribos, hasta llegar al primer máximo (suma de las resistencias del área total de la sección de concreto y del refuerzo longitudinal), a una deformación unitaria del orden de 0.002. Aproximadamente a esta deformación, el recubrimiento de la hélice o zuncho empieza a desprenderse y, por tanto, la capacidad de carga disminuye.

Al deformarse lateralmente el concreto en forma apreciable por efecto de Poisson, la hélice o zuncho se alarga, produciendo como reacción una presión confinante en el núcleo del concreto limitado por el zuncho. De acuerdo con la hélice, la recuperación en capacidad de carga del espécimen será mayor o menor. Si el confinamiento proporcionado por el zuncho es suficiente, puede alcanzarse una segunda carga máxima superior a la alcanzada inicialmente, pero a deformaciones considerablemente mayores, como se muestra en la curva C2. Por el contrario si el confinamiento no se suficiente, nunca se alcanzará una carga como la del primer máximo (C3).

La resistencia en compresión axial de un elemento de concreto reforzado se obtiene de la contribución de cuatro factores que son:

- El concreto del núcleo.
- El acero longitudinal.

- El concreto del recubrimiento.
- El refuerzo helicoidal.

Es posible evaluar la contribución de la hélice o espiral en función de las propiedades mecánicas del acero y del porcentaje volumétrico de refuerzo helicoidal.

El porcentaje se define como:

$$P_s = \frac{\text{Volumen del concreto en un paso de hélice}}{\text{Volumen del núcleo de concreto en un paso de hélice}}$$

$$P_s = \frac{p d A_e}{\left(\frac{p d^2}{4}\right)(s)} = \frac{4 A E}{S d}$$

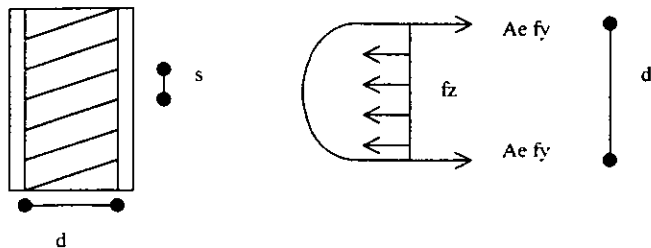
Donde:

$d$  = diámetro del núcleo, centro a centro de la hélice.

$A_e$  = área del alambre helicoidal.

$s$  = paso.

La presión confinante se puede expresar en función de la tensión del refuerzo helicoidal, partiendo de las condiciones de equilibrio siguiente:



**Figura 3.5** Diagrama de cuerpo libre de una sección con hélice

Por sencillez, se supone que la hélice está contenida en un plano normal al eje neutro del elemento. También se supone que el esfuerzo en la hélice ha alcanzado el límite de fluencia.

Del equilibrio de las fuerzas mostradas se tiene:

$$2 A_e f_y = f_c s d$$

donde  $f_y$  representa el esfuerzo de la hélice y  $f_c$  la presión confinante que actúa en el plano medio del elemento. Usando la definición de  $P_s$  tenemos:

$$f_c = \frac{P_s f_y}{2}$$

De acuerdo con la ecuación siguiente:

$$f_l = f_c + 4.1 f_c$$

donde:

$f_l$  = esfuerzo axial.

$f_c$  = resistencia a la compresión axial.

$f_c$  = presión lateral.

El esfuerzo máximo que un espécimen de concreto simple es capaz de soportar es igual al esfuerzo máximo sin presión confinante más 4.1 veces el esfuerzo confinante  $f_c$ , por consiguiente, la contribución de la hélice será aproximadamente  $4.1 f_c A_c$ , es decir  $2.05 P_s f_y A_c$ , donde  $A_c$  es el área del núcleo.



## Resistencia de columnas cortas según N.T.C.D.C.E.C. 1996.

La ecuación para calcular la resistencia es:

$$P_{ro} = f'c Ag + A_s f_y$$

Donde :

$f'c$  = esfuerzo uniforme en toda la sección transversal de la columna.

$$f''c = 0.85f^*c, \text{ si } f^*c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1250}\right) f^*c, \text{ si } f^*c > 250 \text{ kg/cm}^2$$

El término  $f^*c$  es una medida de la resistencia del concreto en la estructura, la cual por lo general es menor que la de los cilindros de control, y se calcula con la siguiente expresión:

$$f^*c = 0.8 f_c$$

La relación de refuerzo helicoidal,  $p_s$ , no debe ser menor que:

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y}, \text{ ni que } 0.12 \frac{f_c}{f_y}$$

Con lo que se logra que el segundo máximo de la gráfica carga – deformación sea ligeramente mayor que el primero. (Figura 3.4) También se especifica que el claro libre de la hélice no sea mayor de 7 cm.

La resistencia calculada con la ecuación anterior es la resistencia nominal. La resistencia de diseño, PRO, o sea, la que debe usarse para el diseño final de los elementos estructurales; se obtiene multiplicando la resistencia nominal por el factor reductivo, FR que para el caso de columnas con carga axial tiene un valor de 0.70 para columnas con estribos y de 0.80 para columnas con refuerzo helicoidal o con estribos que cumplan requisitos especiales en cuanto a su separación y diámetro.

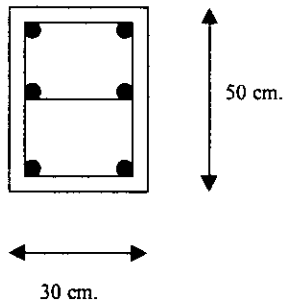
### **Elementos sujetos a tensión axial.**

Teniendo en cuenta que el concreto es un material sumamente débil a esfuerzos de tensión, es muy raro que se utilicen elementos de concreto reforzado sujetos a tensión. Sin embargo, en algunos casos sucede que elementos sujetos a compresión, tienen que resistir ocasionalmente fuerzas de tensión, como por ejemplo, las diagonales de contraventeo de marcos sometidos a acciones sísmicas o de viento.

La resistencia a tensión axial en un elemento de concreto reforzado es únicamente la resistencia del acero de refuerzo o sea  $A_s F_y$ , ya que el concreto se agrieta y no contribuye a la resistencia.

## Ejemplos para calcular las resistencias de columnas cortas sometidas a carga axial.

Ejemplo no.1 Cálculo de la resistencia de una columna de estribos bajo carga axial.



Datos:

$$f'c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$Fy = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$As = 6 \text{ vs. No.8} = 30.42 \text{ cm}^2$$

$$p = \frac{As}{bh} = \frac{30.42}{30 \times 50} = 0.020$$

Recubrimiento = 6 cm.

### CALCULO DE LA RESISTENCIA

Según las NTC-96  $PRO = f'c Ag + Ag fy$

Constantes de cálculo

$$f'c = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'c = 0.8 f'c = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'c = 0.85 f'c = 0.85 \times 240 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

$$Ag = 30 \times 50 = 1500 \text{ cm}^2$$

$$As = 30.4 \text{ cm}^2$$

1. Sin descontar el área de las varillas.

$$\text{PRO} = (204 \times 1500) + (30.4 \times 4200)$$

$$\text{PRO} = 306000 + 127680 = 433680 \text{ kg.}$$

$$\underline{\text{PRO} = 433.6 \text{ ton}}$$

2. Descontando el área de las varillas.

$$\text{Area neta (An)} = A_g - A_s = 1500 - 30.4 = 1469.6 \text{ cm}^2$$

$$\text{PRO} = (204 \times 1469.6) + (30.4 \times 4200)$$

$$\text{PRO} = 299798.4 + 127680 = 427478 \text{ kg.}$$

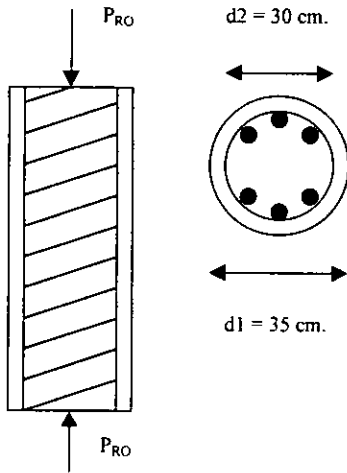
$$\underline{\text{PRO} = 427.4 \text{ ton}}$$

### Comentarios.

En este ejemplo no se hace referencia a la separación de estribos, ya que el detalle de la separación de dichos estribos se estudiará en el diseño. La cuantía de refuerzo longitudinal,  $p$ , tiene un valor similar a los que se usan comúnmente en la práctica.

En el ejemplo se ha calculado primero la resistencia, usando el área total de la sección de concreto,  $A_g$ , o sea sin descontar el área ocupada por las barras de acero y, después, usando el área neta, que es el área total menos el área total menos el área de las barras de refuerzo. Como se puede ver, los resultados son semejantes.

Ejemplo no. 2 Cálculo de la resistencia de una columna con refuerzo helicoidal.



Datos :

$$f'c = 250 \text{ kg./cm}^2$$

$$fy = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$As = 6 \text{ vars. No. 8} = 30.4 \text{ cm}^2$$

Recubrimiento libre 2.5 cm.

Paso libre de la hélice 5cm.

$$Ae = 0.71 c$$

Constantes de cálculo:

$$f^*c = 0.8 f'c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'c = 0.85 f^*c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

$$Ag = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \times 35^2}{4} = 962.1 \text{ cm}^2$$

$$Ac = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi \times 30^2}{4} = 706.8 \text{ cm}^2$$

$$ps = \frac{4 Ae}{sd_2} = \frac{4 \times 71}{5 \times 30} = 0.0189$$

## CALCULO DE LA RESISTENCIA.

- a) Primer máximo. (suma de resistencias del área total de la sección de concreto y del acero de refuerzo longitudinal).

$$PRO = f'c Ag + As fy$$

$$PRO = (170 \times 962.1) + (30.4 \times 4200) = 289557 \text{ kg.}$$

$$\underline{PRO = 289.5 \text{ ton}}$$

- b) Revisión del refuerzo helicoidal.

$$0.45 \left( \frac{Ag}{Ac} - 1 \right) \frac{f'c}{fy} = 0.45 \left( \frac{962.1}{706.8} - 1 \right) \frac{250}{4200} = 0.0097$$

$$\text{además } 0.12 \frac{f'c}{fy} = 0.12 \frac{250}{4200} = 0.0071$$

$$0.0071 < 0.0097$$

$$ps > .0097 \therefore \text{es correcto; } s = 5 < 7 \text{ cm.}$$

## CALCULO DE LA RESISTENCIA DE DISEÑO.

$$PRO = FR PRO$$

$$\underline{PRO = 0.8 \times 289.5 = 231.6 \text{ ton.}}$$

## Comentarios.

En las NTC – 96 no se presentan métodos para calcular el 2do. máximo, por lo que nada más se calculó la resistencia correspondiente al primer máximo pero se verificó que la relación de refuerzo helicoidal cumpla con las normas, con lo cual se garantiza que la resistencia del segundo máximo sea mayor que la del primero.

La resistencia de diseño se obtuvo multiplicando la resistencia PRO, por el factor reductor FR, (0.8 cuando el núcleo esté confinado en un zuncho.) en este caso se tomó el valor de 0.8 por que se cumplió con la revisión de refuerzo helicoidal y el paso entre hélices es menor de 7 cm.

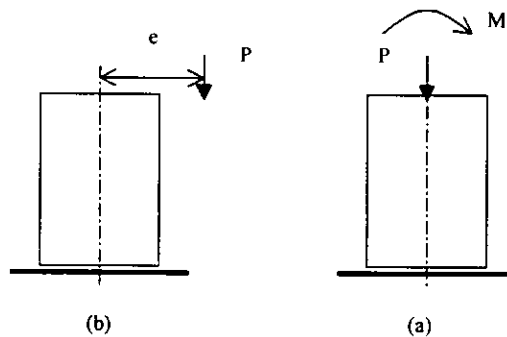
## **Resistencia de columnas sometidas a carga axial y flexión.**

De manera general se puede suponer que una columna trabaja a flexocompresión cuando es cargada excéntricamente o cuando es sometida a una carga axial y a un momento flexionante, los cuales pueden variar independientemente. En la **figura 3.5** se muestra una representación esquemática de un elemento bajo la acción de carga P y momento M, en la **figura 3.5b** se muestra un sistema equivalente en el que  $M = Pe$ , donde e es la excentricidad.

Es importante señalar que en algunas estructuras P y M varían con la misma proporción en una sección transversal dada al variar las condiciones de carga externa. Esto es igual a que la excentricidad, e, permanece constante. Sin embargo, en otros casos la carga y el momento pueden variar en forma distinta y entonces e, no es constante.

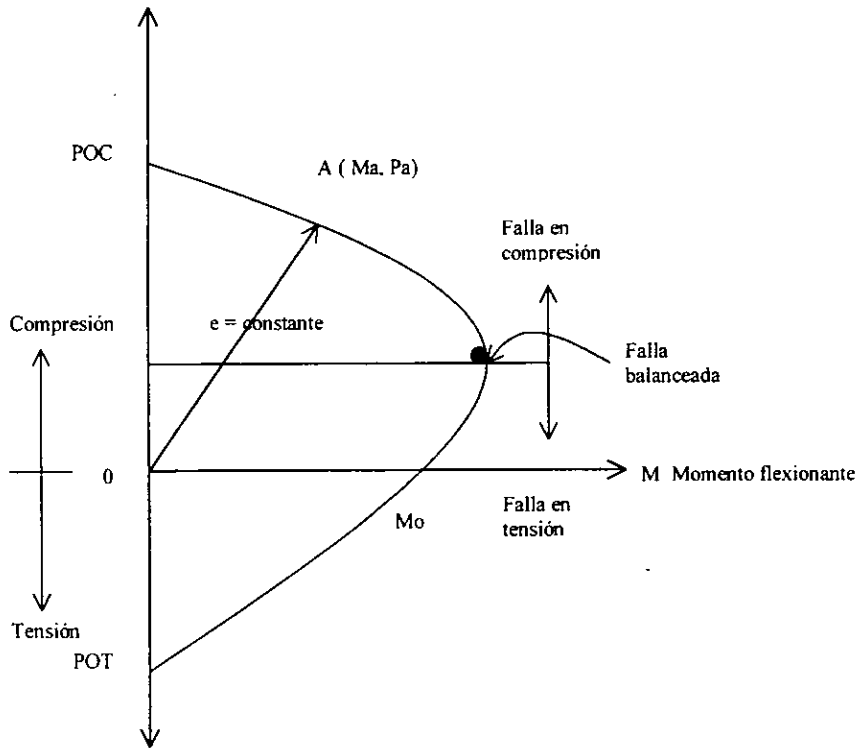
Un elemento sometido a estas acciones puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima,  $P_0$ , de tensión y compresión, y un momento nulo, hasta un momento máximo  $M_0$ , aunado a una carga nula.

La zona posible de combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar su resistencia, se representa gráficamente por medio de un diagrama de interacción. En la **figura 3.6** se muestra un diagrama de interacción típico para una sección rectangular con refuerzo simétrico. Cualquier punto en la curva de trazo continuo representa una combinación de momento y carga axial que hace que el elemento alcance su resistencia.



**Figura 3.5** Carga excéntrica equivale a una carga axial con un momento





**Figura 3.6** Diagrama de interacción típico para una sección rectangular.

Puede observarse que si únicamente se aplicara carga axial de compresión, el valor máximo, o resistencia, correspondería al punto POC. De igual forma, la carga axial máxima de tensión sería la correspondiente a Pot. Si la sección se sometiera sólo a momento flexionante, el máximo que podría aplicarse sería el marcado con Mo. Es importante notar que el máximo momento flexionante que la sección es capaz de resistir no es el que corresponde a una carga axial igual a cero.

Si al aumentar la carga externa, el momento y la carga axial crecen en la misma proporción, la historia de carga queda representada por una recta desde el origen con

una pendiente igual al cociente  $P/M = 1/e$  (recta OA). Para las combinaciones de carga de esta recta, se puede ver en la **figura 3.6**, que la resistencia correspondería a la combinación  $M_a, P_a$ .

En el diagrama de interacción mostrado se observa el punto D que separa la zona de fallas en compresión de las fallas de tensión; este punto recibe el nombre de falla balanceada.

Un diagrama de interacción es el resultado de investigaciones experimentales sobre el comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetas a flexión y carga axial. Estos estudios abarcan desde ensayos en vigas simplemente apoyadas hasta ensayos de elementos sujetos a compresión axial o a compresión excéntrica. También se han llevado a cabo algunos estudios mucho más reducidos de elementos sujetos a flexotensión.

Con base a la información obtenida ha sido posible elaborar teorías apoyadas en hipótesis razonables, por medio de las cuales se puede predecir la resistencia de un elemento con un grado de precisión tolerable.

### **Cálculo de la resistencia.**

Como ya se dijo un diagrama de interacción es la representación gráfica del lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que hacen que un elemento alcance su resistencia. Esto quiere decir que si se cuenta con un diagrama de interacción de un elemento dado, se conocen todas las combinaciones de carga axial y momento flexionante que puede soportar.

El diagrama de interacción de un elemento puede obtenerse a partir de las siguientes hipótesis:

- La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal de un elemento es plana.
- Se conoce la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del elemento.
- No existen corrimientos relativos de consideración entre el acero y el concreto que lo rodea.
- El concreto no resiste esfuerzos de tensión longitudinales.
- El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto,  $\epsilon_{cu}$ . Los reglamentos recomiendan valores de  $\epsilon_{cu}$  que varían de 0.003 a 0.004.

Para determinar el diagrama de interacción pueden usarse las hipótesis simplificadoras sobre la forma del diagrama de esfuerzos de compresión en el concreto y sobre la deformación unitaria máxima útil del concreto, o bien, puede aplicarse el procedimiento general.

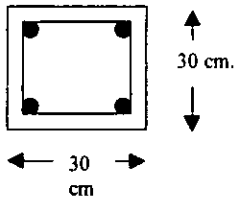
El diagrama de interacción se obtiene determinando varios puntos que lo definan. El procedimiento para encontrar un punto cualquiera es, esencialmente, el mismo usado en flexión para calcular las fuerzas de compresión y de tensión, una vez supuesta la profundidad del eje neutro. Sin embargo, no es necesario hacer varios tanteos hasta igualar ambas fuerzas, ya que su diferencia representa la fuerza normal  $P$  y el momento respecto al eje geométrico representa el momento flexionante  $M$ , que corresponden al estado de deformaciones determinado por la profundidad supuesta del eje neutro. Por lo tanto, para cada estado de deformaciones se obtiene un valor de  $P$  y uno de  $M$ , que definen un punto del diagrama de interacción.

Para definir una forma aproximada de un diagrama de interacción es necesario estimar los siguientes puntos, o puntos cercanos a ellos:

- El punto  $P_{oc}$ , que corresponde a carga axial de compresión pura, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias de compresión uniforme (en secciones simétricas).
- El punto de falla balanceada, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias definido por  $\epsilon_{cu}$ , en la fibra extrema en compresión y por  $\epsilon_y$  en el acero de tensión. Este estado de deformaciones es el que se tiene cuando, simultáneamente, el concreto alcanza su deformación máxima útil y el acero su límite de fluencia.
- El punto  $M_o$ , que corresponde a momento sin carga axial, para el cual se supone un estado de deformaciones que varían en función de la suposición del eje neutro.
- El punto  $P_{ot}$ , que corresponde a carga de tensión pura.

En la mayoría de los casos, estos puntos son suficientes para definir con precisión adecuada un diagrama de interacción.

**Ejemplo de la determinación del diagrama de interacción para una columna.**



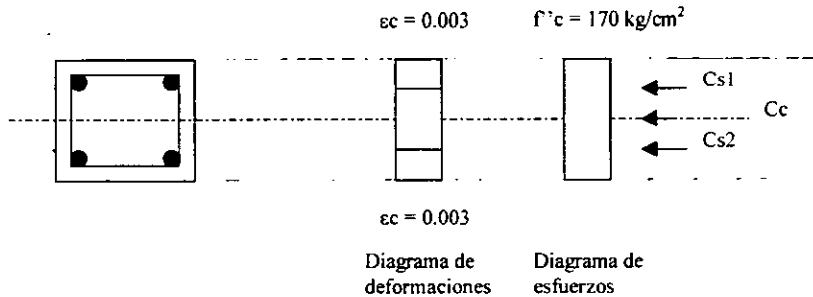
Datos:

4vs. No. 8 = 20.28 cm<sup>2</sup>  
 $f'_c = 250 \text{ kg/cm}^2$   
 $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$   
 rec. 5 cm.

Constantes de diseño:

$$f'_c = 0.8 f_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f^*_c = 0.85 f'_c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$



$$Cs1 = 2 \times 5.07 \times 4200 = 42.5 \text{ ton.}$$

$$Cc = 30 \times 30 \times 170 = 153 \text{ ton.}$$

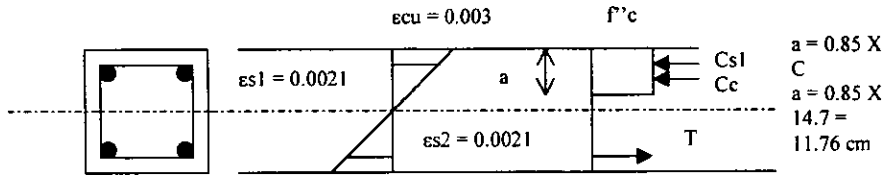
$$Cs2 = 2 \times 5.07 \times 4200 = 42.5 \text{ ton}$$

Obtención de Poc ( Punto 1 )

$$Poc = f^*_c Ag + As f_y = Cs_1 + Cs_2 + Cc \quad Poc = 170 (30^2) + 20.28 (4200) = 238.0 \text{ ton.}$$

$$\underline{Poc = 238.0 \text{ ton.}}$$

## Obtención del punto de falla balanceada ( Punto 2 )



Por triángulos semejantes:

$$C = \frac{\epsilon_{cu} \times d}{\epsilon_{cu} + \epsilon_{s2}} = \frac{0.003 \times 25}{0.0051} = 14.7 \text{ cm.}$$

$$\epsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 9.7}{14.7} = 0.0019 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_1 = 0.0019 \times 2 \times 10^6 = 3800 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_2 = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = 2 \times 5.07 \times 3800 = 38.5 \text{ ton.}$$

$$F_2 = 2 \times 5.07 \times 4200 = 42.5 \text{ ton.}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 11.76 \times 30 \times 170 = 60 \text{ ton.}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F_1 - F_2 = 60 + 38.5 - 42.5$$

$$P = 56 \text{ ton.}$$

Cálculo de Momento:

Fuerza (ton.)	Brazo (cm.)	Momento (ton.cm)
---------------	-------------	------------------

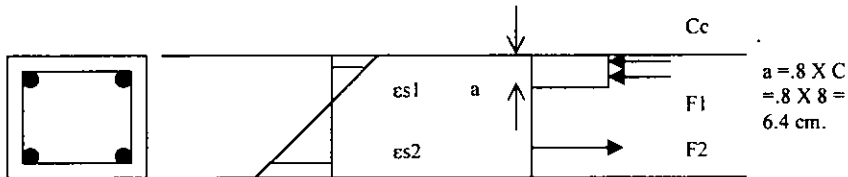
Cc = 60	8.8	528
F1 = 38.5	10	385
F2 = 42.5	10	425
		1338

Para el punto 2

$$P = 56 \text{ ton}$$

$$M = 13.3 \text{ ton.m}$$

Determinación de un punto cercano a Mo. en la zona de tensión. ( punto 3 )



Se supone  $c = 8 \text{ cm.}$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s1} = \frac{.0021 \times 3}{8} = .00075 < \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s2} = \frac{0.0021 \times 17}{8} = 0.0044 > \epsilon_y$$

Esfuerzos en el acero.

$$f_{s1} = E_s \times \epsilon_{s1} = 2 \times 10^6 \times 0.00075 = 1500 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = 10.14 \times 1500 = 15.2 \text{ ton.}$$

$$F_2 = 10.14 \times 4200 = 42.5 \text{ ton.}$$

Fuerzas en el concreto:

$$C_c = 170 \times 6.4 \times 30 = 32.6 \text{ ton.}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F_1 - F_2$$

$$P = 32.6 + 15.2 - 42.5 = 5.3 \text{ ton.}$$

Cálculo del momento:

Fuerza (ton.)	Brazo (cm.)	Momento (ton.cm.)
$C_c = 32.6$	8.6	280.36
$F_1 = 15.2$	10	152
$F_2 = 42.5$	10	425
		884.36

Para el punto 3

$$P = 2.6 \text{ ton.}$$
$$M = 8.84 \text{ Ton.m.}$$

Determinación del punto de carga axial de tensión pura. (punto 4)

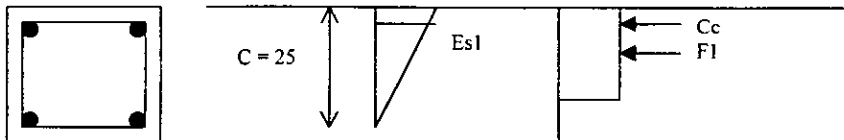
La resistencia máxima Pot es la que puede desarrollar el acero,  $Pot = A_s f_y$

$$Pot = 20.28 \times 4200 = 85 \text{ ton.}$$

Para el punto 4

$$P = - 85 \text{ ton.}$$

Determinación de un punto entre Poc y el punto de falla balanceada. (punto 5)





Se supone  $c = 25$  cm.

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_{s_1} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \epsilon_y$$

$$\epsilon_{s_2} = 0$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s_1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s_2} = 0$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_s \times 4200 = 10.14 \times 4200 = 42.5 \text{ ton.}$$

$$F_2 = 0$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 170 \times 20 \times 30 = 102 \text{ ton.}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F_1$$

$$P = 102 + 42.5 = 144.5 \text{ ton.}$$

Cálculo del momento.

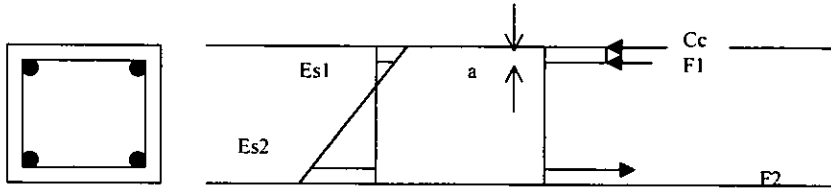
Fuerza (ton.)	Brazo (cm.)	Momento (ton.m.)
$C_c = 102$	5	510
$F_1 = 42.5$	10	425
		935

Para el punto 5

$$P = 144.5 \text{ ton.}$$

$$M = 9.35 \text{ ton.}$$

Obtención de un punto entre Pot y falla balanceada (Punto 6)



Se supone  $c = 7$  cm.

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 2}{7} = 0.0008 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 18}{7} = 0.0077 > \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = 0.0008 \times 2 \times 10^6 = 1600 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F1 = 10.14 \times 1600 = 16.2 \text{ ton.}$$

$$F2 = 10.14 \times 4200 = 42.5 \text{ ton.}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 170 \times 5.6 \times 30 = 28.5 \text{ ton.}$$

Cálculo de P:

$$P = C_c + F1 - F2$$

$$P = 28.5 + 16.2 - 42.5 = 2.2 \text{ ton.}$$

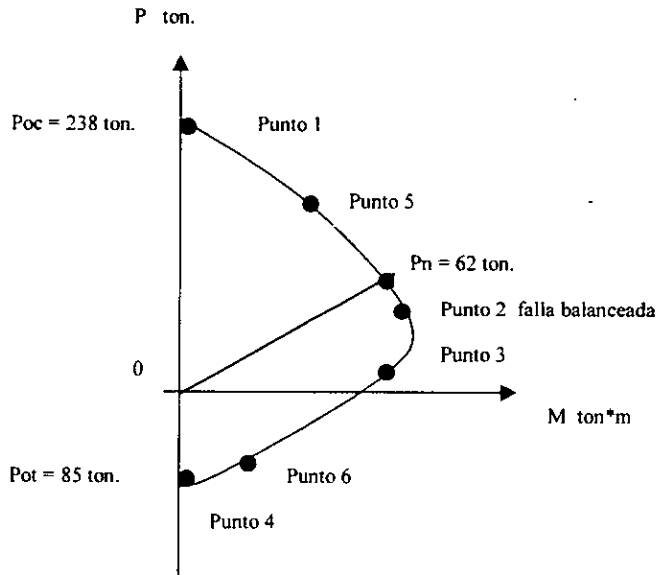
Cálculo del momento:

Fuerza (ton.)	Brazo (cm.)	Momento (ton.cm.)
28.5	12.2	347.7
16.2	10	162
42.5	10	42.5
		934.7

Para el punto 6

$$P = 2.2 \text{ ton.}$$
$$M = 9.35 \text{ ton m}$$

### DIAGRAMA DE INTERACCIÓN



determinar el valor de Pn si se tiene una escentricidad de 20 cm.

$$e = \frac{M}{P}$$

se supone  $P = 50 \text{ ton.}$

$$M = e \times P ; M = 0.2 \times 50 = 10 \text{ ton * m}$$

## Resistencia de columnas sometidas a carga axial y flexión biaxial.

Las columnas en las esquinas de los edificios son miembros a compresión que están sujetos a flexión biaxial con respecto a los dos ejes  $x$  y  $y$ , como se muestra en la figura 3.7

La flexión biaxial también se presenta por el desbalanceo de las cargas en los claros adyacentes y casi siempre en las pilas de los puentes. Estas columnas están sujetas a momentos  $M_{xx}$  con relación al eje  $x$ , que producen una excentricidad  $e_y$ , de la carga y un momento  $M_{yy}$  con respecto al eje  $y$ , que ocasionan una excentricidad  $e_x$  de la carga. Por esto, el eje neutro se inclina un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal.

El ángulo  $\theta$  depende de la interacción de los momentos flexionantes con respecto a ambos ejes y de la magnitud de la carga  $P_u$ . El área en compresión de la sección puede tener cualquiera de las formas que se muestran en la figura 3.7a

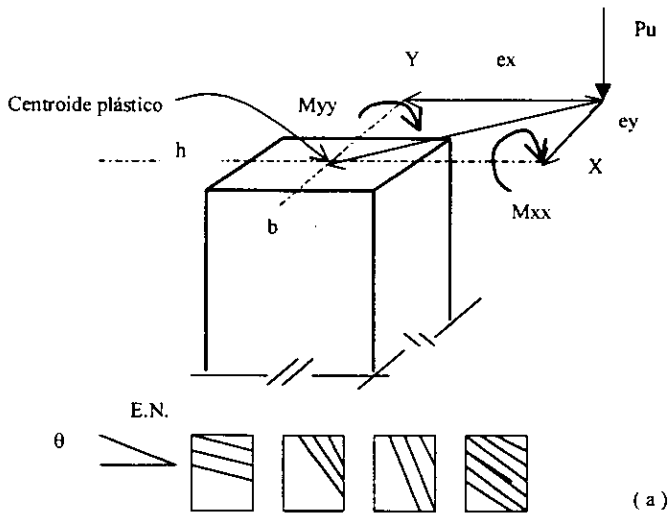


Figura 3.7 Sección transversal de una columna con esfuerzos biaxiales.

### Solución por tanteos.

El problema consiste en encontrar el valor máximo de la carga axial  $P$  que actúa fuera de los planos de simetría, a distancias  $e_x$  y  $e_y$  de ellos.

Para un elemento de geometría y excentricidades dadas, aplicando el procedimiento básico a partir de características esfuerzo – deformación, por tanteos sucesivos se puede obtener el valor de la carga máxima que actúa a las excentricidades dadas.

Con el objeto de ejemplificar el procedimiento de tanteos en la **figura 3.8** se presenta un cálculo típico para una posición supuesta del eje neutro que, junto con el valor de  $\epsilon_{cu} = 0.003$ , fija la distribución de deformaciones unitarias, las que tienen valores constantes en secciones paralelas al eje neutro supuesto.

En este ejemplo la zona sujeta a compresión tiene forma trapecial, se calculan las fuerzas, los brazos y los momentos referidos a los ejes  $x$  y  $y$ . Se obtienen entonces valores de  $P$ ,  $M_x$  y  $M_y$  para la posición supuesta del eje neutro. Si los valores de:

$$e_x = \frac{M_x}{P} \quad \text{y} \quad e_y = \frac{M_y}{P}$$

coinciden con los valores dados, el problema está resuelto; si no, debe cambiarse la posición del eje neutro y repetirse el proceso hasta que se obtengan excentricidades que coincidan con las dadas.

El cambio en la posición del eje neutro consistirá en general en una traslación y una rotación.

El proceso descrito predice satisfactoriamente la resistencia, pero es muy laborioso, la convergencia es lenta debido a que los valores de las excentricidades son muy sensibles a pequeñas variaciones en la posición del eje neutro.

### **Fórmula de Bressler.**

Bressler a desarrollado una expresión sumamente simple para calcular los valores máximos de la carga de compresión que actúa a excentricidades  $e_x$  y  $e_y$  en secciones rectangulares con refuerzo simétrico.

La expresión que propone es:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o}$$

Donde:

$P_n$  = carga normal máxima que actúa a excentricidades  $e_x$  y  $e_y$ .

$P_x$  = carga normal máxima a una excentricidad  $e_x$  contenida en un plano de simetría ( $e_y = 0$ ).

$P_y$  = carga normal máxima a una excentricidad  $e_y$  contenida en un plano de simetría ( $e_x = 0$ ).

$P_o$  = carga axial máxima que puede resistir el elemento ( $e_x = e_y = 0$ )

La ecuación de Bressler reduce el problema a una combinación de soluciones más simples: dos de flexocompresión en un plano de simetría y una de compresión axial.

Para elementos simétricos, con una carga normal que actúe en un punto cualquiera del plano de la sección del elemento, el lugar geométrico de los valores máximos de carga axial que el elemento es capaz de resistir es una superficie de

interacción cuyas trazas con los planos  $x$  y  $y$  serán los diagramas de interacción para flexión en una dirección. En la figura 3.9 se muestra una superficie de interacción.

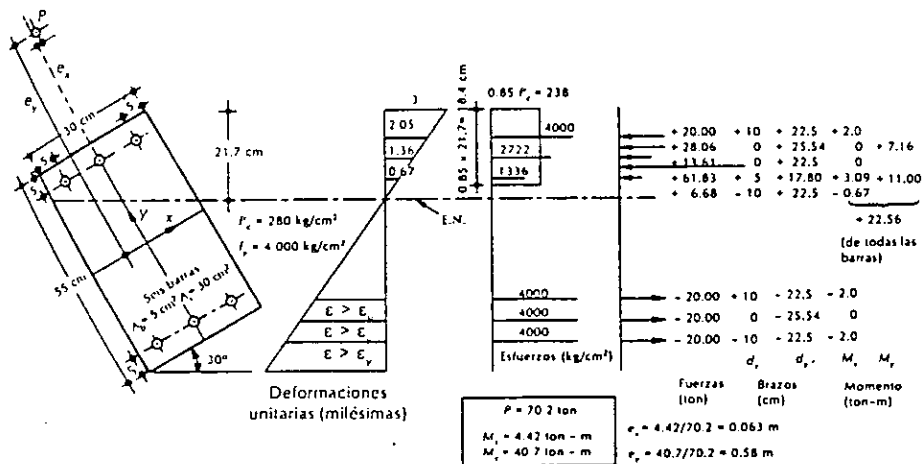


Figura 3.8 Cálculo típico para una posición cualquiera del eje neutro; flexión biaxial.

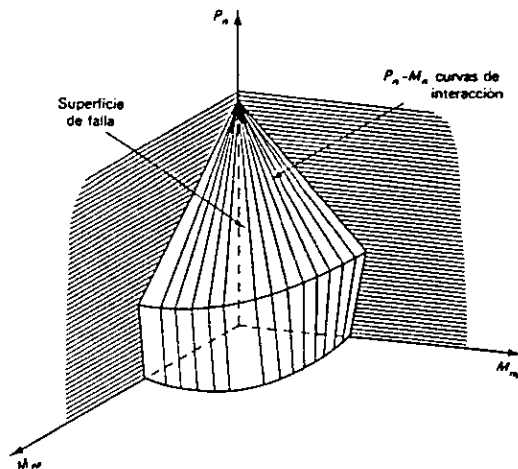


Figura 3.9 Superficie de interacción en columnas sometidas a flexión biaxial.

La expresión propuesta por Bressler representa una familia de planos que aproximan los puntos de la superficie de interacción. Esta expresión es válida para los valores de  $P_n$  mayores de  $0.1 P_o$ , aproximadamente.

La ecuación de Bressler verifica los resultados de los ensayos disponibles dentro de un 20% de aproximación.

En el ejemplo que se muestra en la **figura 3.8** para la posición del eje neutro escogido, la carga axial máxima se encuentra a  $e_x = 6.3$  cm,  $e_y = 58$  cm y vale 70.2 ton. y los momentos  $M_x = 40.7$  ton.m. A continuación se presenta la aproximación con la fórmula de Bressler.

Datos :

$$f'c = 238 \text{ kg / cm}^2$$

$$f_y = 4000 \text{ kg / cm}^2$$

$$P_u = 70.2 \text{ ton}$$

$$M_x = 4.4 \text{ ton.m}$$

$$M_y = 40.7 \text{ ton.m}$$

$$e_x = \frac{4.4}{70.2} = 0.063 \text{ m.}$$

$$e_y = \frac{40.7}{70.2} = 0.58 \text{ m}$$

**Sección transversal 55 X 33**

**recubrimiento 5 cm.**

$$A_s = 6 \text{ vs. } \# 8 = 30.4 \text{ cm}^2$$

$$K_x = .75 \quad P_x = .75 \times 238 \times 55 \times 30 = 294.5 \text{ ton.}$$

$$K_y = .20 \quad P_y = .20 \times 238 \times 55 \times 30 = 78.5 \text{ ton.}$$

$$P_o = 238[(30 \times 55)] + [30.4 \times 4000] = 514.3 \text{ ton.}$$

$$\frac{1}{294.5} + \frac{1}{78.5} - \frac{1}{514.3} = \frac{1}{P_n}$$

$$P_n = 70.5 \text{ ton.}$$

Se puede observar que el valor de  $P_n$  coincide con el valor calculado con el procedimiento general.



## Efectos de esbeltez.

Se entiende por efecto de esbeltez la reducción de la resistencia de un elemento sujeto a compresión axial o a flexocompresión, debida a la longitud del elemento que es más grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal.

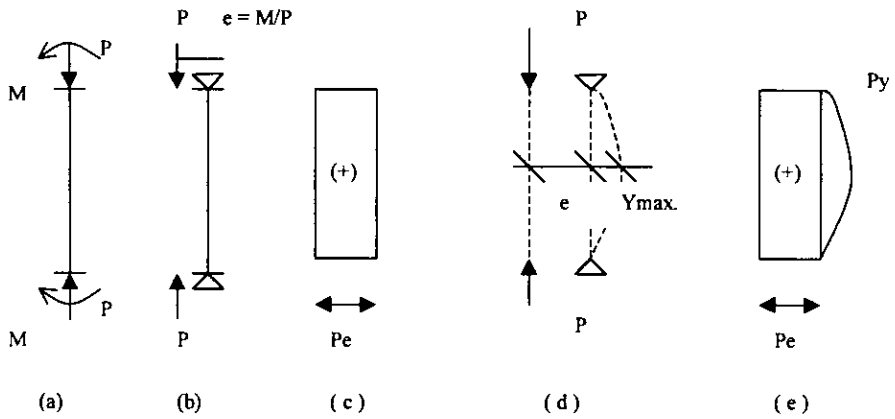
Considérese una columna articulada en sus extremos, sujeta a carga axial y momento flexionante (**figura 3.10 a**). Esta columna es equivalente al sistema mostrado en la **figura 3.10b** y tiene un diagrama de momentos flexionantes que se ilustra en la **figura 3.10c**. Al aplicar la carga  $P$  al sistema de la **figura 3.10b**, éste se deforma como se muestra en la **figura 3.10d** y, como consecuencia de esta deformación, aumenta la distancia de la línea de acción de las cargas  $P$  al eje de la columna, lo cual equivale a que aumente la excentricidad de la carga en una cantidad “ $Y$ ”. Por lo tanto el momento flexionante real en una sección cualquiera de la columna es:

$$M = Pe + Py$$

El momento es máximo, para este ejemplo, a la mitad de la altura, donde alcanza el valor:

$$M = P(e + y_{\max.})$$

Como consecuencia de los momentos adicionales  $Py$ , la resistencia del elemento se reduce respecto a la resistencia que tendría si solo se le aplicara el momento  $Pe$ . Esta reducción de resistencia se conoce como efecto de esbeltez. Este se presenta sin importar la longitud del elemento, pero es importante únicamente en elementos cuya relación longitud–peralte es grande, o sea en elementos esbeltos.

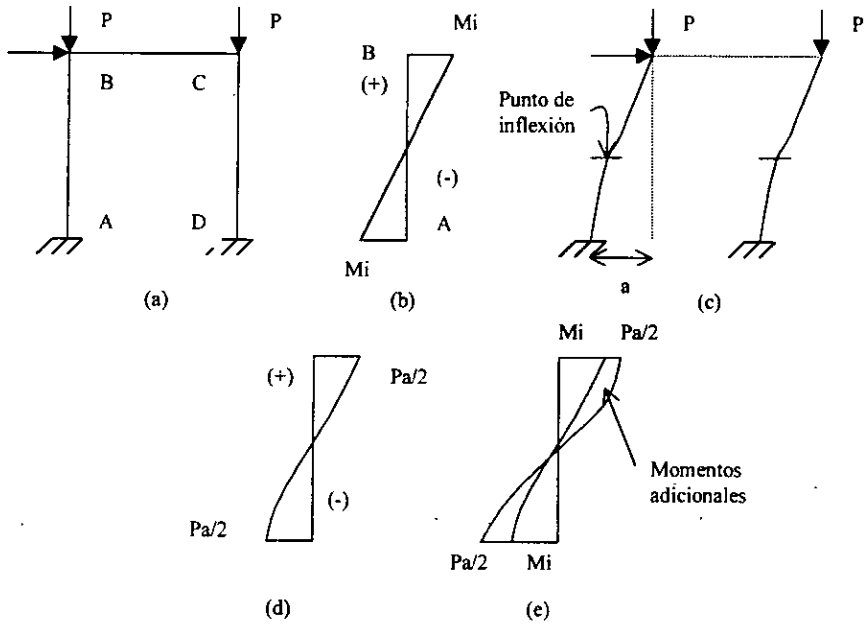


**Figura 3.10** Momentos adicionales en una columna por efecto de esbeltez.

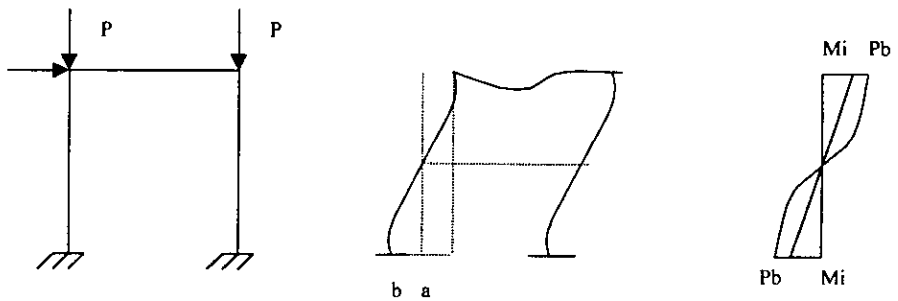
Sólo en estos elementos la magnitud de los elementos adicionales  $P_y$ , es significativa en relación con los momentos  $P_e$ .

La reducción de la resistencia por esbeltez puede deberse también a desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, como se presenta en los marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en carga o en geometría.

En la **figura 3.11 a** se muestra un marco de este tipo. La columna A-B de este marco tiene el diagrama mostrado en la **figura 3.11b** para momentos de primer orden (se entiende por momentos de primer orden los que no consideran las deformaciones de la columna). Por efecto del desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna **figura 3.12c** se presentan en la columna A-B los momentos de segundo orden mostrados en la **figura 3.11d** (entiéndase por momentos de segundo orden, a los momentos adicionales debidos a las deformaciones de la columna). El diagrama de momentos totales es el mostrado en la **figura 3.11e**.



**Figura 3.11** momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo. ( viga de rigidez infinita ).

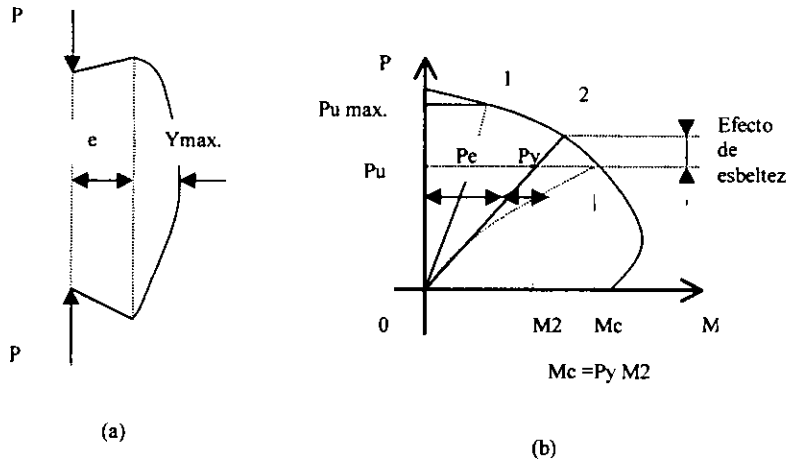


**Figura 3.12** Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo.

El ejemplo mostrado en la **figura 3.11** corresponde a un ejemplo hipotético en el que la rigidez de la viga superior es infinita, o sea que la columna está empotrada en sus dos extremos. Cuando la rigidez de la viga es finita, los momentos adicionales son diferentes en los dos extremos de la columna, como se muestra en la **figura 3.12**. Los momentos adicionales se pueden calcular aplicando la carga  $P$  en el punto de inflexión de la columna y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos respecto al punto de inflexión. La reducción de la resistencia por esbeltez es mayor cuando los extremos de la columna pueden sufrir desplazamiento lateral relativo, que cuando están restringidos contra el mencionado desplazamiento.

Con el objeto de ejemplificar la pérdida de la resistencia en elementos esbeltos se ha trazado en la **figura 3.13** con la línea continua el diagrama de interacción de una columna corta en la que los efectos de esbeltez son despreciables. Si en esta columna corta se aumenta la carga en forma progresiva, manteniendo constante la excentricidad, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por una recta que parte de 0 hasta el punto 1, la intersección de la recta 0 – 1 con el diagrama de interacción representa la resistencia de columna corta.

Si en una columna larga o esbelta, como la mostrada en la **figura 13 a**, la carga aumenta progresivamente en la misma forma, las combinaciones de  $P$  y  $M$  quedan representadas por la curva 0 – 2. La diferencia en las abscisas de los puntos de las dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe precisamente a los momentos adicionales  $P_y$ . La resistencia de la columna esbelta esta representada por la intersección de la línea 0 – 2 con el diagrama de interacción. Como puede verse en la figura, es menor que la resistencia de la columna corta.



**Figura 3.13** Comparación del comportamiento de una columna corta y de una columna esbelta.

### Cálculo de los efectos de esbeltez.

El método de las N.T.C. – 96 del reglamento del Distrito Federal distingue entre estructuras que pueden y que no pueden desplazarse lateralmente. Las estructuras restringidas lateralmente son aquellas que tienen contravientos, muros, u otros elementos que den restricción lateral al entrepiso y que tengan una rigidez lateral no menor que el 85% de la rigidez total del entrepiso.

Se establece en este reglamento una restricción adicional respecto a la losa considerada como diafragma horizontal; su rigidez no debe ser menor que diez veces la rigidez de entrepiso del marco al que pertenece la columna en estudio. La rigidez de un diafragma horizontal con respecto a un eje de columna se define como la fuerza que debe amplificarse al diagrama en el eje en cuestión para producir una deflexión unitaria sobre dicho eje, estando el diafragma libremente apoyado en los elementos que dan restricción lateral (muros, contravientos etc.)

Si no se cumplen las dos condiciones anteriores, debe considerarse que la estructura puede sufrir desplazamientos laterales, es decir, que los extremos de las columnas no están restringidos lateralmente.

En miembros con extremos restringidos lateralmente, o en miembros con extremos verticales pero que forman parte de estructuras sujetas sólo a cargas verticales que no causen desplazamientos laterales apreciables los efectos de esbeltez pueden despreciarse si la relación entre la longitud efectiva de pandeo y el radio de giro,  $Kl/r$  es menor que  $34-12 M_1/M_2$  ( $M_1$  es el menor y  $M_2$  es el mayor de los momentos en los extremos del miembro); el cociente  $M_1/M_2$  es positivo cuando el miembro se flexiona en curvatura sencilla y negativo cuando lo hace en curvatura doble; si  $M_1 = M_2 = 0$ , el cociente se tomará igual a 1.

En miembros con extremos no restringidos lateralmente en estructuras sujetas sólo a cargas verticales, cuando éstas causan desplazamientos laterales apreciables, los efectos de esbeltez pueden despreciarse si  $Kl/r$  es menor que 22. En este caso el valor de  $K$  se determina con el nomograma de la **figura 3.14b**

En miembros con extremos no restringidos lateralmente que forman parte de una estructura sujeta a cargas verticales y laterales, los efectos de esbeltez debidos a las deformaciones causadas por cargas laterales pueden despreciarse cuando el desplazamiento de entrepiso dividido entre la diferencia de elevaciones correspondiente, no es mayor que 0.08 veces la relación entre la fuerza cortante de entrepiso y la suma de las cargas muertas y vivas especificadas multiplicadas por el factor de carga que corresponda, acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado.

Los miembros sujetos a flexocompresión en los que no se puede despreciar los efectos de esbeltez, se dimensionarán para la carga axial de diseño,  $P_u$ , obtenida de un análisis convencional y un momento amplificado  $M_c$ , obtenido aproximadamente con el procedimiento siguiente:

$$M_c = F_{ab} M_{2b} + F_{as} M_{2s}$$

$$F_{ab} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{P_e}} \geq 1.0$$

Donde:

$C_m$  = factor que relaciona al diagrama de momentos reales con un diagrama equivalente de momentos uniformes, solamente para miembros arriostrados sujetos a cargas en sus extremos.

$M_{2b}$  = es el mayor de los momentos de diseño en los extremos del miembro, en valor absoluto, causado por aquellas cargas que no dan lugar a desplazamientos laterales apreciables, se obtienen de un análisis convencional y esta multiplicado por el factor de carga correspondiente.

$M_{2s}$  = es el mayor de los momentos de diseño en los extremos del miembro, en valor absoluto, causado por aquellas cargas que dan lugar a desplazamientos laterales apreciables, se obtiene de un análisis convencional y esta multiplicado por el factor de carga correspondiente.

En una estructura restringida lateralmente los momentos  $M_{2s}$  son nulos.

$$F_{as} = 1 + \frac{\frac{W_u}{h}}{\frac{R}{Q} - 1.2 \left( \frac{W_u}{h} \right)}$$

$W_u$  = suma de las cargas de diseño, muertas y vivas multiplicadas por su factor de carga. Estas cargas son las acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado.

$R$  = rigidez de entrepiso, definida como la fuerza cortante en ese entrepiso dividida entre el desplazamiento relativo de los niveles que lo limitan (suma de rigideces de entrepiso de todos los marcos de la estructura en la dirección analizada).

Q = cantidad adimensional definida por las normas técnicas complementarias para diseño por sismo. Cuando los desplazamientos laterales sean debidos a acciones distintas del sismo, se tomará Q = 1.0

h = altura del entrepiso, entre ejes.

Para elementos sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo y sin cargas transversales entre sus apoyos  $C_m$  vale:

$$C_m = 0.6 + 0.4(M_1/M_2)$$

Pero menor que 0.4

Para elementos con posibilidad de desplazamiento lateral relativo o cargas transversales entre sus apoyos

$$C_m = 1$$

Los momentos  $M_1$  y  $M_2$  son los momentos flexionantes en los extremos del elemento, siendo  $M_2$  el momento numéricamente mayor. El término  $0.4 M_1/M_2$  es positivo si el elemento se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en curvatura doble. Obsérvese que cuando  $M_1 = M_2$ , y el elemento se flexiona en curvatura simple, el valor de  $C_m$  es igual a 1.

Valuación de  $P_c$ . La siguiente ecuación da la carga crítica de pandeo o carga crítica de Euler de elementos de comportamiento lineal.

$$P_c = \frac{F_r \pi^2 EI}{(KI)^2}$$



Donde

$I$  = es el momento de inercia de la sección transversal.

$E$  = es el módulo de elasticidad del material y se calcula con la ecuación:

$$EI = 0.4 \frac{E_c I_g}{1 + \mu}$$

$Kl$  = es la longitud efectiva de pandeo.

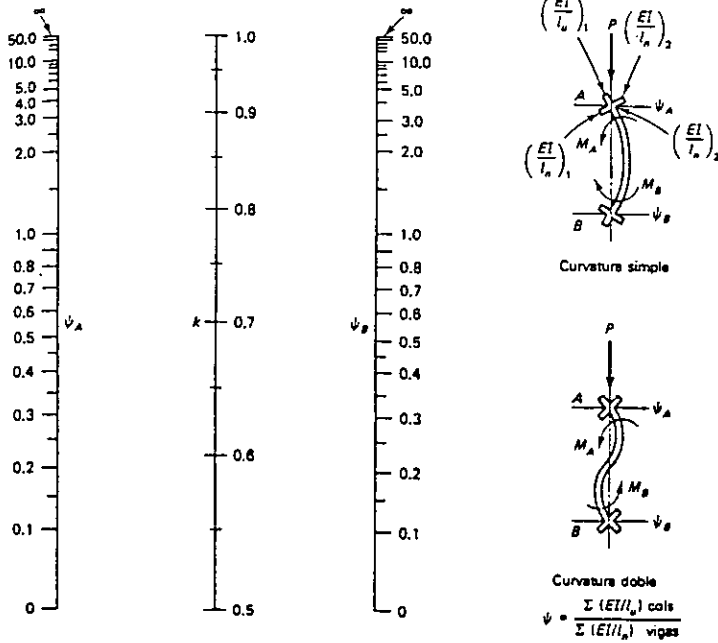
$E_c$  = es el módulo de elasticidad del concreto.

$I_g$  = es el momento de inercia de la sección gruesa.

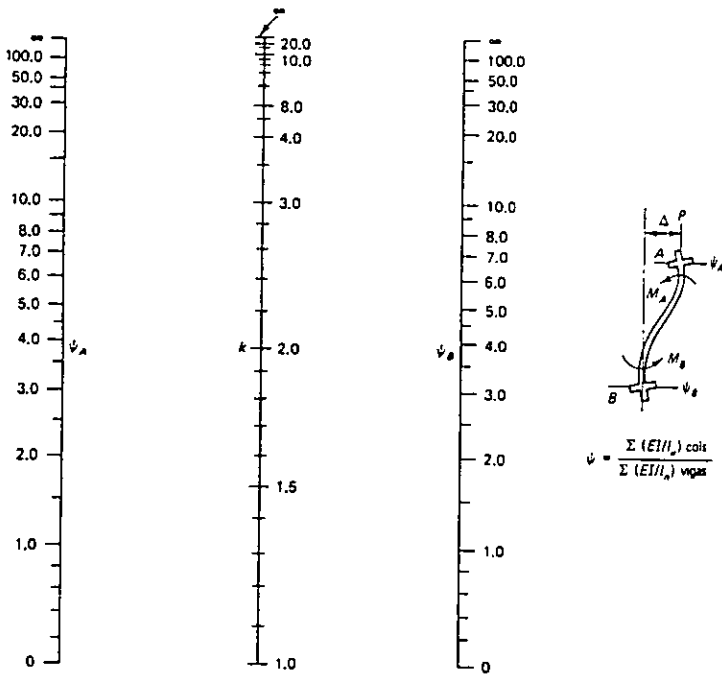
$\mu$  = es la relación entre el máximo momento de diseño por carga muerta y el máximo momento de diseño total, o bien la relación entre la carga lateral permanente y la carga lateral total.

La longitud efectiva de pandeo,  $Kl$ , depende del grado de restricción de la columna en sus extremos y de la posibilidad de que exista desplazamiento lateral relativo.

En la **figura 3.15** se muestran las longitudes efectivas de pandeo de columnas con condiciones ideales de restricción (perfectamente articuladas o perfectamente empotradas).



Marcos contraventeados.



Marcos no contraventeados.

Figura 3.14 Factor de longitud efectiva

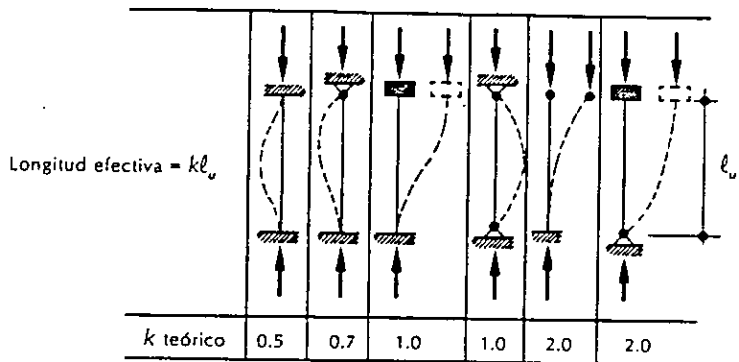


Figura 3.15 Longitud efectiva de pandeo para diferentes condiciones de apoyo.

En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos. El grado de restricción depende de la relación entre las rigideces de las columnas y el sistema de piso, la cual puede definirse de la siguiente forma:

$$\psi = \frac{\sum K \text{ columna}}{\sum K \text{ piso}}$$

En esta ecuación,  $K$  es la rigidez  $EI/l$ ;  $\sum K$  col. Se refiere a las columnas que concurren en un punto o nudo de la estructura;  $\sum K$  piso se refiere a los elementos que forman el sistema de piso y que están contenidos en el plano del marco estructural que se analiza, o sea, que no se incluyen en la suma las rigideces de las vigas perpendiculares al marco.

El cálculo de la longitud efectiva de pandeo en función del grado de restricción,  $\psi$ , puede hacerse utilizando los nomogramas de la **figura 3.14**, en los que  $\psi_A$  y  $\psi_B$  son los valores de  $\psi$  en los extremos A y B de la columna.

Para valores dados de  $\psi_A$  y  $\psi_B$ , las longitudes efectivas son mayores para columnas de marcos con posibilidad de desplazamiento lateral. Esto refleja el hecho de que los momentos de segundo orden son mayores en este tipo de marcos.

La longitud efectiva de las columnas de estos marcos tiende a infinito cuando la rigidez del sistema de piso tiende a cero, es decir, cuando las columnas están articuladas. En cambio, en columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral, la longitud efectiva,  $Kl$ , nunca es mayor que la longitud real  $l$ , los nomogramas de la **figura 3.14** se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal, pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

Métodos de dimensionamiento.

El dimensionamiento de columnas esbeltas en estructuras comunes suele hacerse con métodos simplificados, en los que es necesario desarrollar análisis de segundo orden. Dichos métodos simplificados pueden reunirse en los tres grupos siguientes:

1. Métodos de amplificación de momentos.

Estos métodos consisten en obtener el valor de la carga axial  $P$ , y el momento flexionante,  $M$ , en las columnas de una estructura por medio de un análisis de primer orden y dimensionar la columna para el mismo valor de  $P$  y para un momento amplificado,  $\delta M$ , donde  $\delta$  es un factor siempre mayor que la unidad. En la figura 3.16 se ilustra este concepto. Si se desprecia el efecto de esbeltez, la columna se dimensionaría para los valores de  $P$  y  $M$ , y su resistencia sería la correspondiente al punto 1 del diagrama de interacción mostrado con la línea punteada. Los incrementos de carga con un valor constante de la excentricidad estarían representados por puntos sobre la línea recta  $0 - 1$ . Para tomar en cuenta el efecto de esbeltez, la columna se diseña para los valores de  $P$  y  $\delta M$ , y su resistencia es la que corresponde al punto 2 del diagrama de interacción mostrado con línea llena. Los incrementos de carga están representados por puntos sobre la línea  $0 - 2$ , en la cual la excentricidad aumenta con el nivel de carga, puesto que el valor depende, en estos métodos del valor de la carga  $P$ .

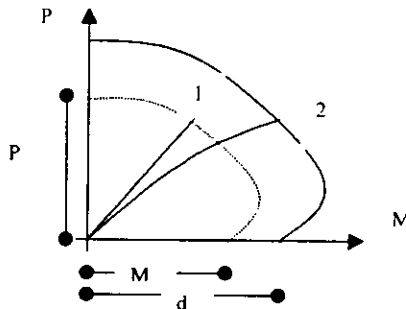
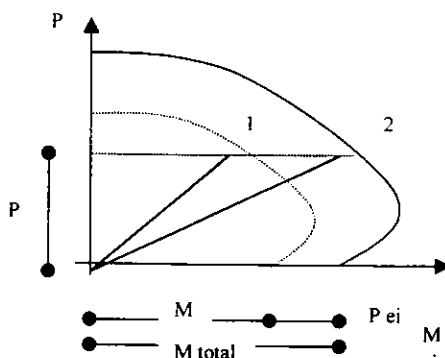


Figura 3.16 Valores de dimensionamiento en los métodos de amplificación de momentos.

## 2. Métodos del momento amplificado.

En estos métodos, se calculan los valores de  $P$  y  $M$  mediante un análisis de primer orden y a partir de estos valores se calcula la excentricidad  $e = M/P$  que tendría la columna si no hubiera efectos de esbeltez. A esta excentricidad,  $e$ , se agrega una excentricidad adicional,  $e_1$ , que es función de las principales variables que intervienen en la reducción de resistencia por esbeltez. Al aumentar la excentricidad, el dimensionamiento de la columna se hace para un momento total que es igual al momento complementario que resulta de multiplicar la carga  $P$  por la excentricidad adicional,  $e_1$ . El valor de la carga  $P$  no se modifica.

En la **figura 3.17** se muestra el concepto de dimensionamiento. El punto 1 del diagrama de interacción trazado con línea punteada corresponde a valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna sin considerar el efecto de esbeltez. El punto 2 del diagrama de interacción trazado con línea llena corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna esbelta. Puesto que el valor de la excentricidad adicional es independiente del valor de  $P$ , la línea 0 - 2, que representa incrementos de carga de la columna, es una línea recta, a diferencia de la línea 0 - 2 de los métodos de amplificación de momentos, que es una curva. Sin embargo, los valores de dimensionamiento en ambos métodos, o sea los puntos 2, son similares.

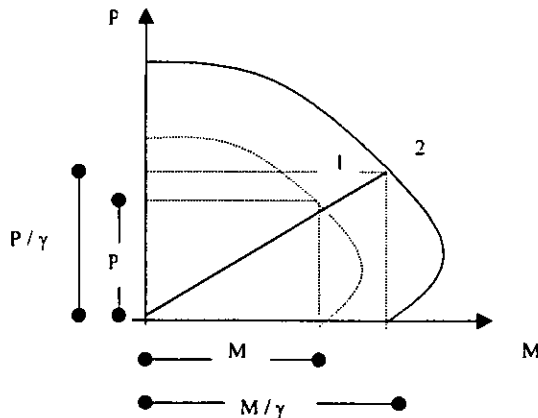


**Figura 3.17** Valores de dimensionamiento en los métodos del momento complementario.

### 3. Métodos del factor de reducción.

En estos métodos se supone que la carga axial y el momento que puede resistir una columna esbelta son iguales a los que puede resistir una columna corta, multiplicados por un factor de reducción  $\gamma$ , que siempre es menor que la unidad. Por lo tanto, para fines de dimensionamiento, los valores de  $P$  y  $M$  obtenidos de un análisis de primer orden se dividen entre el factor  $\gamma$ , con lo cual se obtienen valores amplificados, para los que se dimensiona la columna.

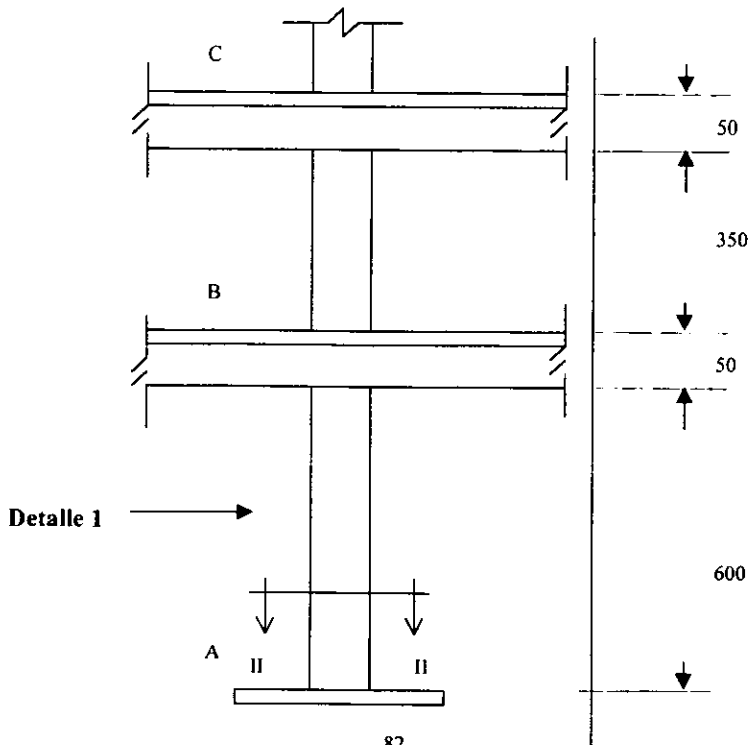
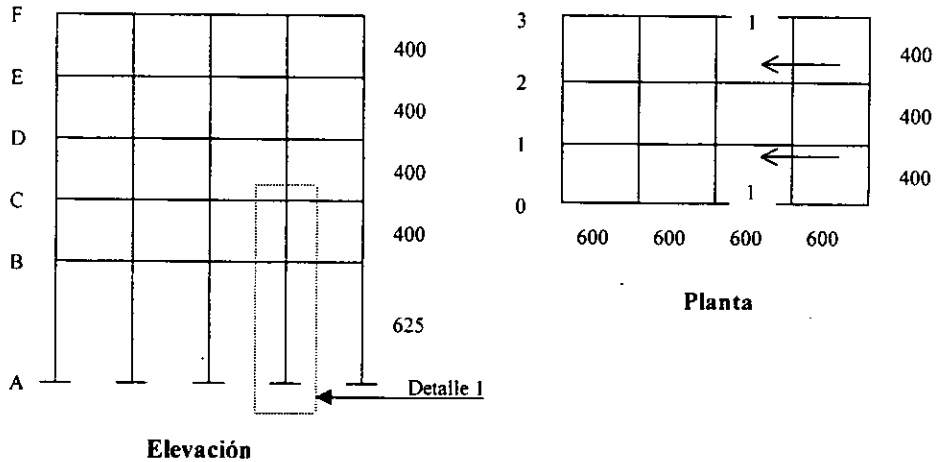
El concepto de este método se ilustra en la **figura 3.18**. El punto 1 corresponde a los valores de  $P$  y  $M$  con los que hay que diseñar la columna corta y el punto 2 a los de la columna larga.



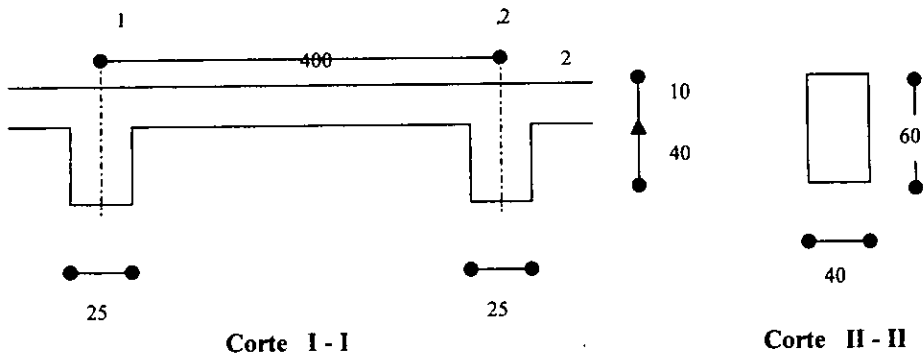
**Figura 3.18** Valores de dimensionamiento en los métodos del factor de reducción.

**Ejemplo de la revisión del efecto de esbeltez en la columna que se indica.**

Datos:







La estructura puede tener desplazamientos laterales y se analiza en la dirección (0 - X)

Materiales:

Concreto  $f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$   
 Acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

### ACCIONES INTERNAS.

Se considera que la estructura está sujeta a carga por gravedad y sismo simultáneamente y los resultados del análisis estructural indican que la columna en estudio tiene una carga axial de 150 ton. y momentos flexionantes de 50 ton.\* m y 70 ton.\* m en sus extremos superior e inferior, respectivamente.

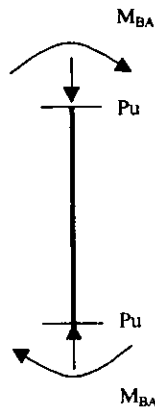
$$P_u = 150 \text{ ton}$$

$$M_{BA-1} = 10 \text{ ton.m}$$

$$M_{AB-1} = 5 \text{ ton.m}$$

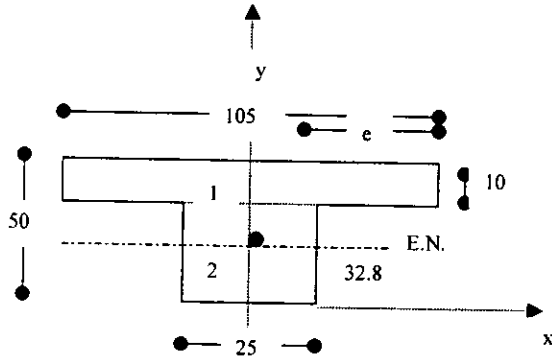
$$M_{BA-2} = 40 \text{ ton.m}$$

$$M_{AB-2} = 65 \text{ ton.m}$$



Momentos de inercia.

a) sistema de piso.



$$e = 4t \text{ o } 40 \text{ cm.}$$

$$e = 4(10) = 40 \text{ cm.}$$

Cálculo del Centroide:

Sección	Area	Yi (cm.)	A * Yi	d (cm.)	d <sup>2</sup>	Ad <sup>2</sup>
1	1050	45	47250	12.2	148.84	156282
2	1000	20	20000	12.8	163.84	163840
	$\Sigma = 2050$		$\Sigma = 67250$			

$$\bar{y} = \frac{67250}{2050} = 32.80 \text{ cm}^2$$

$$I_p = I_c + Ad^2$$

$$1.- \frac{105 \times 10^3}{12} + 156282 = 165032 \text{ cm}^4$$

$$2.- \frac{25 \times 40^3}{12} + 163840 = 297173.3 \text{ cm}^4$$

$$I_p = 462205 \text{ cm}^4$$

b) Columna.

$$I_{AB} = I_{BA} = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720000 \text{ cm}^4$$

CÁLCULO DE RIGIDECES

a) Para todas las columnas de los ejes b,c y d

Nudo A:  $\psi_A = 0$ , (empotramiento)

Nudo B: Rigidez del sistema de piso

$$K_{\text{TRABE}} = \frac{I_1}{\ell_1} = \frac{462205}{600} = 770.34 \text{ cm}^3$$

Rigidez de las columnas

$$K_{BC} = \frac{I_{BC}}{\ell_{BC}} = \frac{720000}{400} = 1800 \text{ cm}^3$$

$$K_{BA} = \frac{I_{BA}}{\ell_{BA}} = \frac{720000}{625} = 1152 \text{ cm}^3$$

$$\varphi_B = \frac{\sum K_{\text{COLUMNAS}}}{\sum K_{\text{TRABES}}} = \frac{1800 + 1152}{770.34 + 770.34} = 1.91$$

b) Para todas las columnas de los ejes a y e.

Nudo A:  $\psi_A = 0$ , (empotramiento)

$$\text{Nudo B} \quad \varphi_B = \frac{\sum K_{\text{COLUMNAS}}}{\sum K_{\text{TRABES}}} = \frac{1800 + 1152}{770} = 3.8$$

## LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO

- a) Columnas de los ejes b, c y d. sin desplazamiento lateral.

$$\begin{aligned} \text{Con } \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 1.91 \end{aligned}$$

Del nomograma (a)  $K = 0.64$

$$\therefore K\ell u = 0.64 \times 600 = 384 \text{ cm.}$$

- b) Columnas de los ejes b,c y d con desplazamiento lateral.

$$\begin{aligned} \text{Con } \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 1.91 \end{aligned}$$

Del nomograma (b)  $K = 1.20$

$$\therefore K\ell u = 1.20 \times 600 = 720 \text{ cm.}$$

- c) Columnas de los ejes a y e sin desplazamiento lateral.

$$\begin{aligned} \text{Con } \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 3.8 \end{aligned}$$

Del nomograma (a)  $K = 0.66$

$$\therefore K\ell u = 0.66 \times 600 = 396 \text{ cm.}$$

- d) Columnas de los ejes a y e con desplazamiento lateral.

$$\begin{aligned} \text{Con } \varphi_A &= 0 \\ \varphi_B &= 3.8 \end{aligned}$$

Del nomograma (b)  $K = 1.39$

$$\therefore K\ell u = 1.39 \times 600 = 834 \text{ cm.}$$

## VERIFICACION DE ESBELTEZ

Radio de giro  $r = 0.30 \times 60 = 18 \text{ cm.}$

Considerando extremos restringidos:

$$\frac{K\ell}{r} < 34 - 12 \frac{M1}{M2}$$

$$\frac{0.64 \times 600}{18} = 21.3; \quad 34 - 12 \left( -\frac{5}{10} \right) = 40$$

$21.3 < 40 \therefore$  Se desprecian los efectos de esbeltez para este caso.

Considerando extremos no restringidos:

$$\frac{K\ell}{r} < 22$$

$$\frac{1.20 \times 600}{18} = 40$$

$40 > 22 \therefore$  Si es necesario considerar los efectos de esbeltez para este caso.

Centroide

Sección	Area	Yi (cm.)	A*Yi	d (cm.)	d <sup>2</sup>	Ad <sup>2</sup>
1	650	45	29250	15.2	231.04	150176
2	1000	20	20000	9.8	96.04	96040
	$\Sigma = 1650$		$\Sigma = 49250$			$\Sigma =$ 246216

$$y = \frac{49250}{1650} = 29.85 \text{ cm.}$$

$$I_p = I_c + Ad^2$$

$$\text{secc. 1} \quad \frac{65 \times 10^3}{12} + 155593$$

$$\text{secc. 2} \quad \frac{25 \times 40^3}{12} + 96040 = 229373.3$$

$$I_p = 384966 \text{ cm}^4$$

$$Kt_1 = \frac{I_t}{l_t} = \frac{384966}{600} = 642 \text{ cm}^3$$

Rigideces de los marcos 1 y 2.

$$R1-2 = \frac{48 \times 113137}{625 \left[ \frac{4 \times 625}{5 \times 1152} + \frac{625 + 400}{4 \times 770 + \frac{5 \times 1152}{12}} \right]}$$

$$R1-2 = 12034.5 \text{ kg/cm}^2$$

Rigidez de los marcos 0 y 3.

$$R0-3 = \frac{48 \times 113137}{625 \left[ \frac{4 \times 625}{5 \times 1152} + \frac{625 + 400}{4 \times 642 + \frac{5 \times 1152}{12}} \right]}$$

$$R0-3 = 11280 \text{ kg/cm}^2$$

## CÁLCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

$$\hat{c}_s = 1 + \frac{\frac{W_u}{l_u}}{\frac{R}{Q} - 1.2 W_u l_u}$$

Donde:

$W_u$  = suma de cargas de diseño acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado.

$l_u$  = altura del entrepiso.

$R$  = rigidez de entrepiso.

$Q$  = factor de comportamiento sísmico.

$$W_u = (150 \times 6) + (80 \times 10 \times 45 \times 4) = 1880 \text{ ton.}$$

$$l_u = 625 \text{ cm.}$$

Cálculo de rigideces de entrepiso con las fórmulas de Wilbur.

$$R1 = \frac{48 E}{h_i \left[ \frac{4 h_i}{\sum K_{ci}} + \frac{h_1 + h_2}{\sum K_{ti} + \frac{\sum K_{ci}}{12}} \right]}$$

$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2, E = 8000 \sqrt{200} = 113137.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$h_1 = 625; h_2 = 400$$

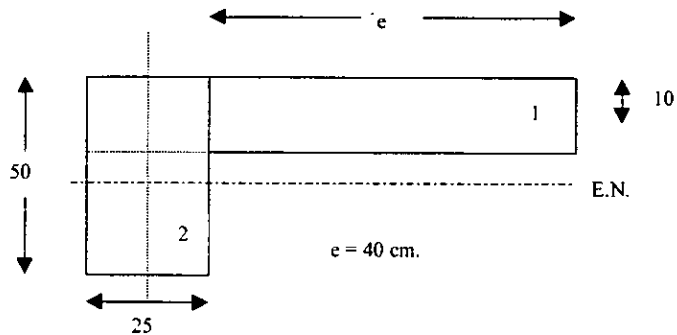
Rigideces de columnas.

$$K_{CI} = K_{BA} = \frac{I_{ba}}{l_{BA}} = \frac{720000}{625} = 1152 \text{ cm}^3$$

Rigideces de traves en marcos 1 y 2

$$K_u = \frac{I_1}{l_1} = \frac{462205}{600} = 770 \text{ cm}^3$$

Rigideces de traves en marcos 0 y 3



Rigidez de entrepiso.

$$R = 2 \times 12034.5 + 2 + 11280 = 46629 \text{ kg/cm}^2$$



Factor de amplificación.

$$\alpha_s = 1 + \frac{1880000 / 625}{\frac{46629}{2} - \frac{1.2 \times 1880000}{625}}$$

$$\alpha_s = 1 + .153 = 1.153$$

Cálculo del momento amplificado:

$$M_c = \alpha_b M_{2b} + \alpha_s M_{2s}$$

$$M_c = 1 \times 10 + 1.53 \times 65 = 85 \text{ ton.m}$$

$$\underline{M_c = 85 \text{ ton.m.}}$$

### **Consideraciones para el dimensionamiento de columnas.**

Con el objeto de llegar a un buen diseño, se deberán seguir los lineamientos para el dimensionamiento y el arreglo de refuerzo que se indican a continuación:

#### **GEOMETRÍA**

La relación entre la dimensión transversal mayor de una columna y la menor no excederá de 4. La dimensión transversal menor será por lo menos igual a 20 cm. En miembros sometidos a flexocompresión los requisitos son en que la dimensión transversal mínimo no será menor que 30 cm.

El área  $A_g$ , no será menor que  $P_u / 0.5f_c$  para toda combinación de carga. La relación entre la menor dimensión transversal y la dimensión transversal perpendicular no debe ser menor que 0.4

La relación entre la altura libre y la menor dimensión transversal no excederá de 1.5.

#### REFUERZOS MÍNIMO Y MÁXIMO

La relación entre el área de refuerzo vertical y el área total de la sección no será menor que  $20 / f_y$  ( $f_y$  en  $\text{kg/cm}^2$ ), ni mayor que 0.06

El número mínimo de barras será seis en columnas circulares y cuatro en columnas rectangulares.

#### SEPARACION ENTRE BARRAS

Suele especificarse que la separación libre entre las barras longitudinales no sea menor que 1.5 veces el diámetro de la barra, 1.5 veces el tamaño máximo del agregado, ni que 4 cm.

#### DETALLES DEL REFUERZO EN INTERSECCIONES CON VIGAS O LOSAS

El refuerzo transversal de una columna en su intersección con una viga o losa debe ser el necesario para resistir las fuerzas internas que ahí se produzcan, pero su espaciamiento no será mayor y su diámetro que los usados en la columna en las secciones próximas a dicha intersección.

Si la intersección es excéntrica, en el dimensionamiento y detallado de la conexión deben tomarse en cuenta las fuerzas cortantes, los momentos y torsiones causados por la excentricidad.

Cuando un cambio de sección de una columna obliga a doblar sus barras longitudinales en una junta, la pendiente de la porción inclinada de cada barra respecto al eje de la columna no excederá de 1:6. Las porciones de las barras por arriba y por debajo de la junta serán paralelas al eje de la columna. Además deberá proporcionarse refuerzo transversal adicional al necesario por otros conceptos, en cantidad suficiente para resistir una y media veces el componente horizontal de la fuerza axial que pueda desarrollarse en cada barra, considerando en ella el esfuerzo de fluencia.

En la **figura 3.19** se muestra un detalle del refuerzo en una intersección con losa o trabe y en la **figura 3.20** se ilustra el detalle de empalmes en columnas.

## COLUMNAS ZUNCHADAS

El refuerzo transversal de una columna zunchada debe ser una hélice continua de paso constante.

El porcentaje helicoidal,  $P_s$ , no será menor que:

$$0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y}, \text{ ni que } 0.12 \frac{f_c}{f_y}$$

Donde:

$A_c$  = área transversal del núcleo, hasta la circunferencia exterior de la hélice.

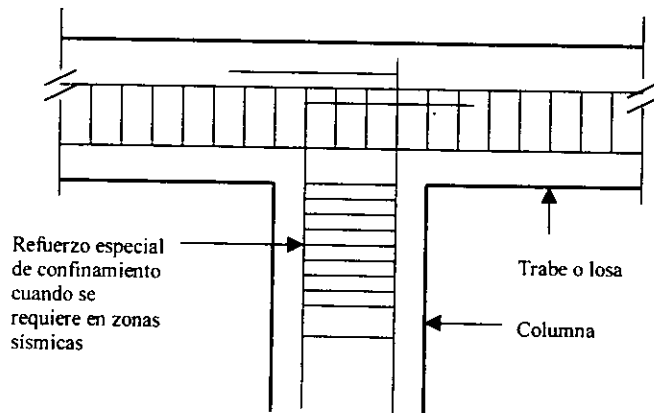
$A_g$  = área transversal de la columna.

$f_y$  = esfuerzo de fluencia del acero de la hélice.

- El acero de la hélice no debe ser de grado mayor que el 42.

- El claro libre entre dos vueltas consecutivas no será menor que una vez y media el tamaño máximo del agregado, ni mayor que 7 cm.
- Los traslapes tendrán una vuelta y media.
- Las hélices se anclarán en los extremos de la columna mediante dos vueltas y media.

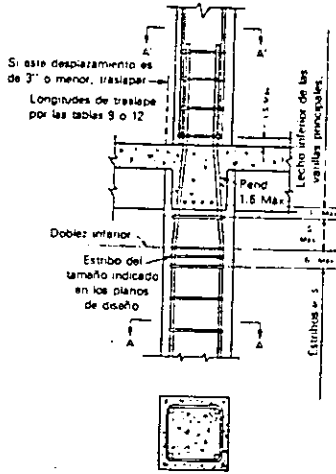
En la **figura 3.21** se muestran algunos arreglos típicos de estribos para columna rectangulares.



**Figura 3.19** Detalle de refuerzo de columnas con intersección de vigas y losas.

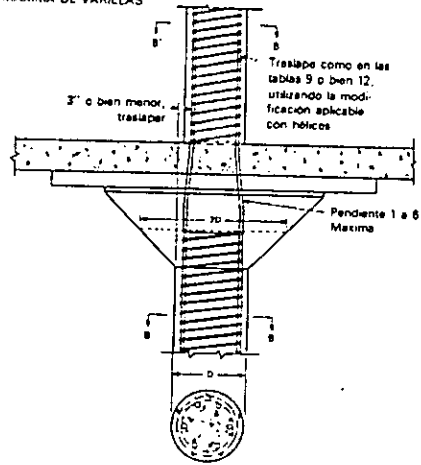
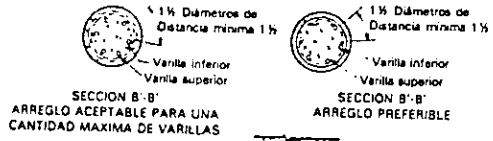


SECCION A-A'



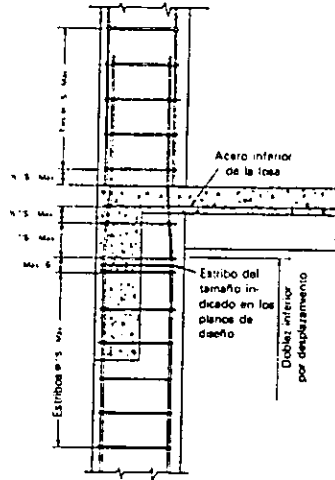
SECCION A-A

Ⓒ DETALLE DE UNA COLUMNA INTERIOR TÍPICA CON ESTRIBOS



SECCION B-B

Ⓓ DETALLE DE COLUMNA TÍPICA CON HÉLICE.



Ⓔ DETALLE TÍPICO DE COLUMNA EXTERIOR CON TRABE PERALTADA DE BORDE

Figura 3.20 Detalle de empalmes de columnas.

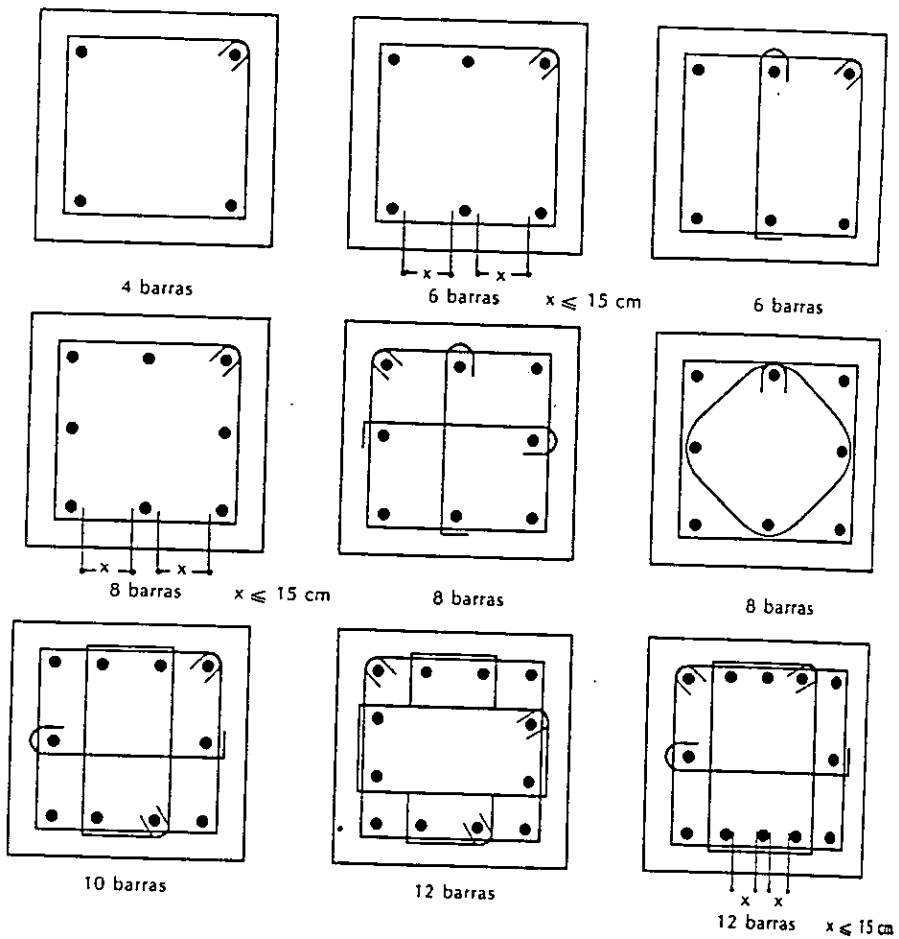


Figura 3.21 Arreglos típicos para columnas rectangulares.

## EXCENTRICIDAD MÍNIMA

Se especifica que debe considerarse siempre una excentricidad mínima igual a  $0.05h \geq 0.2$  cm., siendo h la dimensión de la columna en la dirección de flexión.

## REQUISITOS PARA REFUERZO TRANSVERSAL.

El refuerzo transversal de toda columna no será menor que el necesario por resistencia a fuerza cortante y torsión, en su caso, y debe cumplir con los siguientes requisitos.

Todas las barras o paquetes de barras longitudinales deben restringirse contra el pandeo con estribos o zunchos con separación no mayor de  $850 / \sqrt{f_y}$  veces el diámetro de la barra o de la barra más delgada del paquete, ( $f_y$  en  $\text{kg}/\text{cm}^2$ ), 48 diámetros de la barra del estribo, ni que la mitad de la menor dimensión de la columna.

La separación máxima de estribos se reducirá a la mitad de la antes indicada en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de la columna, un sexto de su altura libre, ni que 60 cm. arriba y debajo de cada unión de columna con trabes o losas, medida a partir del respectivo plano de intersección.

Los estribos se dispondrán de manera que cada barra longitudinal de esquina y una de cada dos consecutivas de la periferia tengan un soporte lateral suministrado por el doblez de un estribo con ángulo interno no mayor que  $135^\circ$ . Además, ninguna barra que no tenga soporte lateral debe distar más de 15 cm (libres) de una barra soportada lateralmente.

Cuando seis o más varillas estén repartidas uniformemente sobre una circunferencia se pueden usar anillos circulares; también pueden usarse zunchos.

## **Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas.**

Una de las ayudas más útiles para el dimensionamiento de columnas es el diagrama de interacción. La forma de construir los diagramas se describió anteriormente, donde también se explicó cómo se utilizan para determinar la resistencia a combinaciones de carga y momento de secciones de características conocidas. El problema inverso, consistente en determinar las dimensiones y el refuerzo requeridos para resistir una fuerza axial y un momento dados, puede también resolverse con la ayuda de los diagramas de interacción mediante un proceso de tanteos.

Los diagramas de interacción para columnas de concreto reforzado que se muestran en las ayudas de diseño fueron tomadas de los comentarios, ayudas de diseño y ejemplos de las NTC para diseño y construcción de estructuras de concreto, DDF, dichos diagramas fueron elaborados por Loera Santiago, Rodriguez Mario y Meli Roberto investigadores del instituto de ingeniería de la UNAM. Estos diagramas están basados en las hipótesis de las NTC – 1987. Los diagramas abarcan una gran variedad de secciones, tipos de refuerzo y combinaciones de carga, incluyendo algunos casos de flexión biaxial. Se consideran dos categorías de acero de refuerzo: acero con esfuerzos de fluencia iguales o menores que  $4200 \text{ kg/cm}^2$  y aceros con esfuerzos de fluencia comprendidos entre  $4200$  y  $6000 \text{ kg/cm}^2$ .

Se proporcionan gráficas para distintos valores de  $d/h$ , en el caso de secciones rectangulares, y  $d/D$ , en el caso de secciones circulares (el significado de estas relaciones se puede apreciar en las gráficas donde se muestran los diagramas de interacción).

Como las gráficas son adimensionales pueden utilizarse para diseños con otros reglamentos siempre y cuando se calculen los parámetros adimensionales con base en las hipótesis del reglamento correspondiente.

Los diagramas pueden utilizarse de distintas maneras. Una forma de proceder puede consistir en suponer una sección y calcular los parámetros  $K$  y  $R$ . Estos parámetros definen un punto en el diagrama al que correspondería un valor de  $q$ , del cual puede deducirse el



valor  $p$  necesario. Si este valor se encuentra dentro de los límites aceptables, el problema esta resuelto. De lo contrario es necesario ensayar otra sección. El valor del factor de resistencia  $FR$  se supone igual a 0.70 si el núcleo no esta confinado y la falla es de compresión, e igual a 0.80 si el núcleo cuenta con un confinamiento adecuado u cuando la falla sea de tensión.

Otra forma de proceder consiste en suponer una sección y definir un punto en el diagrama a partir del parámetro  $K$  o  $R$  y la relación  $e/h$ . Si se limita la cuantía  $p$  a un valor dado, puede calcularse el valor  $q$  correspondiente. Se puede entonces, definir un punto en el diagrama a partir de éste valor y de la relación  $e/h$ . Se harán los ajustes necesarios en la sección supuesta hasta encontrar una que dé el valor de  $P_u$  semejante al requerido.

Son útiles también las tablas usadas como ayudas de diseño que dan en forma directa la carga axial y el momento flexionante que puede resistir una sección de dimensiones dadas, con una cierta cantidad de acero y con materiales de resistencias conocidas. Dados los valores de  $P_u$  y  $M_u$  requeridos pueden encontrarse en las tablas distintas alternativas de secciones, con el refuerzo correspondiente que proporcionen una resistencia adecuada.

## **Ejemplos de dimensionamiento.**

1. Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía de acero dada.

Datos:

Cargas:  $M_u = 20 \text{ ton.m}$

$P_u = 120 \text{ ton.}$

Materiales :  $f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Cuántía de acero =  $p = 0.025$

Recubrimiento = 5 cm.

CONSTANTES DE CÁLCULO:

$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'_c = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''_c = 136 \text{ kg/cm}^2$$

Cálculo del refuerzo principal o longitudinal.

1er. Tanteo: suponiendo una sección de 45 X 45.

$$\text{Excentricidad} = M/P = 20/120 = 0.16 \text{ m.}$$

Elección del diagrama:

$$\frac{d}{h} = \frac{45 - 5}{45} = 0.88$$

$$q = p \frac{f_y}{f'_c} = 0.025 \frac{4200}{136} = 0.77$$

$$\frac{e}{h} = \frac{16}{45}$$

utilizando el diagrama correspondiente a  $d/h = 0.90$ , el valor de  $K = 0.87$

Con estos valores se tiene una carga  $P_u$  de:

$$P_u = K F_R b h f'_c$$

$$P_u = .87 \times 0.70 \times 45^2 \times 136$$

$$P_u = 167.7 \text{ ton.} > 120 \text{ ton.}$$

Ajuste del acero:

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'_c} = \frac{120000}{0.7 \times 45 \times 45 \times 136} = 0.62$$

$$\frac{e}{h} = \frac{18}{45} = 0.4$$

$$q = 0.4$$

$$p = q \frac{f'_c}{f_y} = 0.4 \frac{136}{4200} = 0.013$$

$$A_s = p b d$$

$$A_s = 0.013 \times 45^2 = 26.32 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Usar: } 4 \text{ vs. No.8} = 20.28 \text{ cm}^2$$

$$2 \text{ vs. No.7} = 7.76 \text{ cm}^2$$

$$28.04 > 26.32 \text{ cm}^2$$

Refuerzo transversal (considerar estribos no. 3)

$$b/2 = 45/2 = 22.5 \text{ cm.}$$

$$(850/\sqrt{4200})(2.2) = 28.8 \text{ cm.}$$

$$48 (1) 48 \text{ cm.}$$

Se tomará la separación a cada 20 cm.

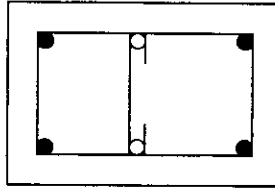
Sección Adoptada:

Sección = 45 X 45

4 vs. # 8

2 vs. # 7

estribos # 3 @ 20 cm.



2. Dimensionamiento de una columna de sección circular zunchada  
(determinar la sección y el refuerzo)

Datos:

Cargas (nivel de servicio):

- a) condición de carga muerta más carga viva:  $P = 150 \text{ ton.}$

$$M_x = 15 \text{ ton.m}$$

$$M_y = 5 \text{ ton.m}$$

- b) condición de carga muerta, más carga viva más sismo:  $P = 130 \text{ ton.}$

$$M_x = 35 \text{ ton.m}$$

$$M_y = 15 \text{ ton.m}$$

Materiales :  $f_c = 300 \text{ kg/cm}^2$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T.M.A. = 2.5 \text{ cm.}$$

CONSTANTES DE CÁLCULO

$$f_c^* = 0.8 f_c = 0.8 \times 300 = 240 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y^* = 0.85 f_y = 0.85 \times 4200 = 204 \text{ kg/cm}^2$$

## ESTIMACIÓN DEL RECUBRIMIENTO

$$r = 3 + 1 + 1.3 = 5.3 \text{ cm.} \cong 5.5 \text{ cm.}$$

## RESISTENCIAS REQUERIDAS

Momentos debidos a las condiciones de carga.

a) Condición carga muerta más carga viva.

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

$$M = \sqrt{15^2 + 5^2} = 15.81 \text{ ton.}$$

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo.

$$M = \sqrt{35^2 + 15^2} = 38 \text{ ton.}$$

Resistencias:

a) condición carga muerta más carga viva.

$$P_u = F_c \times P = 1.4 \times 150 = 210 \text{ ton.}$$

$$M_u = F_c \times M = 1.4 \times 15.81 = 22.1 \text{ ton.m}$$

$$e = M/P = 22.1/210 = 0.11 \text{ m.}$$

b) condición carga muerta más carga viva más sismo.

$$P_u = F_c \times P = 1.1 \times 130 = 143 \text{ ton.}$$

$$M_u = F_c \times M = 1.1 \times 38 = 42 \text{ ton.}$$

$$e = M/P = 42/143 = 0.29 \text{ m.}$$

### DIMENSIONAMIENTO DE LA SECCIÓN Y REFUERZO PRINCIPAL.

Diámetro supuesto  $D$  : 60 cm.

$$d = D - 2r = 60 - (2 \times 5.5) = 49 \text{ cm.}$$

$$d/D = 49/60 = 0.8$$

a) Carga muerta más carga viva.

$$e/d = 0.11/60 = 0.18$$

usando el nomograma  $d/D = 0.8$

$$K = P_u / F_R D^2 f'c$$

$$K = 210^3 / 0.80 \times 60^2 \times 204$$

$$K = 0.36, \quad q = 0.2$$

b) Carga muerta más carga viva más sismo.

$$e/d = 29/60 = 0.48$$

$$K = 143^3 / 0.8 \times 60^2 \times 204$$

$$K = 0.24, q = 0.4 \quad (\text{rige})$$

$$p = q f'c / f_y = 0.4 \times (204/4200) = 0.019$$

$$A_s = p (\pi D^2 / 4) = 0.019 (3.14 \times 60^2) / 4 = 53.72 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 7 vs. } \# 10 = 55.44 < 53.72 \text{ cm}^2$$

#### DIMENSIONAMIENTO DEL ZUNCHO.

Relación helicoidal.

$$p_s = 0.45 \left( \frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f_c}{f_y}$$

$$\frac{A_g}{A_c} = \frac{D^2}{(D - 2 \times 3)^2} = \frac{60^2}{(60 - 6)^2} = \frac{60^2}{56^2} = 1.23$$

$$0.45(1.23 - 1) \frac{300}{4200} = 0.0075$$

$$0.12 \frac{300}{4200} = 0.0086$$

$$p_s = 0.0086$$

### Contribución de la hélice

$$ps = 4ae/s d_s$$

donde:

ds = diámetro del núcleo centro a centro de la hélice.

Ae = área del zuncho.

Despejando s (considerando zuncho del no. 3)

$$s = \frac{4Ae}{Ps ds} = \frac{4(0.71)}{0.0086(60-4)} = 6 \text{ cm.}$$

Separación libre máx. = 7 cm. > (6-1) = 5 cm.

Separación libre mín. = 1.5 X 2.5 = 4 cm < 5 cm.

SECCIÓN ADOPTADA:

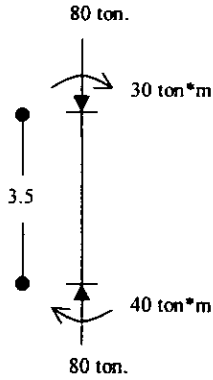
7 vs. No 10

zuncho no. 3 con un paso de 6 cm.



3. Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante.

Datos:



Acciones internas

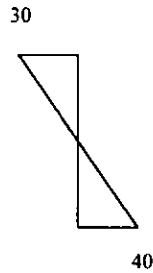


Diagrama de momentos.



Diagrama de fuerzas cortantes

Materiales:

Concreto =  $f_c$ : 250 kg/cm<sup>2</sup>

Refuerzo =  $f_y$  = 4200 kg/cm<sup>2</sup>

Refuerzo en dos caras

Recubrimiento 5 cm.

CONSTANTES DE CÁLCULO

$$f_c = 250$$

$$f'_c = 0.8 f_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''_c = 0.85 f'_c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$$

## DIMENSIONAMIENTO POR FLEXOCOMPRESIÓN

Se supone:  $b = 30 \text{ cm.}$

$h = 40 \text{ cm.}$

$d = 35 \text{ cm.}$

relación peralte efectivo entre altura:

$$d/h = 35/40 = 0.88$$

$$K = \frac{P_u}{F_R b h f'c} = \frac{80000}{0.7 \times 30 \times 40 \times 170} = 0.56$$

$$R = \frac{M_u}{F_R b h^2 f'c} = \frac{40 \times 10^5}{.70 \times 30 \times 40^2 \times 170} = 0.70$$

del diagrama de interacción con la relación  $d/h = 0.9$  se tiene:

$$q = 0.75$$

$$p = q f'c/f_y = 0.75 (170/4200) = 0.030$$

$$A_s = pbd = 0.030 \times 30 \times 35 = 31.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Usar 4vs. \# 10} = 31.68 \text{ cm}^2$$

## REFUERZO TRANSVERSAL.

Considerar estribos # 3

Separación :  $48 (1) = 48 \text{ cm.}$

$$b/2 = 30/2 = 15 \text{ cm. ( rige )}$$

$$850 (\text{db}) / \sqrt{4200} = 850 (3.2) / \sqrt{4200} = 42 \text{ cm.}$$

### REVISIÓN POR CORTANTE.

El efecto de una carga axial de compresión se toma en cuenta multiplicando la resistencia calculada con las ecuaciones:

$$V_c = \left[ (0.06 + 9.4p) \sqrt{f'_c} \right] bd \quad (\text{unidades en sistema internacional})$$

$$V_c = 0.16 \sqrt{f'_c} bd \quad (\text{sistema inglés})$$

$$\text{por el término } \left[ 1 + 0.007 \left( \frac{P_u}{A_g} \right) \right], \left[ 1 + 0.07 \left( \frac{P_u}{A_g} \right) \right] \text{ en sistema SI}$$

Donde:

$P_u$  = carga axial multiplicada por el factor de carga.

$A_g$  = área gruesa de la sección.

La ecuación anterior es válida siempre y cuando  $P_u$  no exceda de  $(0.7 f'_c A_g + 2000 A_s)$ ,  $(0.7 f'_c A_g + 16 A_s)$  en SI. Cuando la carga axial es mayor que éste valor, lo cual sucede con cargas muy elevadas, la resistencia a cortante se va disminuyendo linealmente desde el valor correspondiente al límite anterior hasta un valor nulo para la resistencia a compresión axial, o sea, para  $P_u = A_g f'_c + A_s f_y$ .

Cuando  $V_u$  es mayor que  $V_{CR}$ , pero menor o igual a  $1.5 F_R \sqrt{f'_c} bd$ . ( $.5 F_R \sqrt{f'_c} bd$  en SI), el espaciamiento no debe exceder  $F_R A_v f_y / 3.5 b$ , ( $F_R A_v F_y / .34 b$  en SI) ni de 0.5 d. Si  $V_u$  es mayor que  $1.5 F_R \sqrt{f'_c} bd$ , el espaciamiento no debe ser mayor que 0.25 d.

CÁLCULOS.

$$0.7 f'c Ag + 2000 As = 0.7 (200)(30 \times 40) + 2000 (31.68) = 231360 \text{ kg.}$$

$$231360 > 80000$$

$$\therefore V_{CR} = 0.5 F_R b d \sqrt{f'c} \left( 1 + 0.007 \frac{Pu}{Ag} \right)$$

$$V_{CR} = 0.5 \times 0.8 \times 30 \times 40 \sqrt{200} \left( 1 + 0.007 \frac{80000}{30 \times 40} \right) = 9960 \text{ kg.}$$

considerando estribos en dos ramas se tiene:

$$\text{sep.} = \frac{F_R A_v f_y d}{(V_u - V_{CR})} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 40}{(1900 - 9960)} = 21.1 \text{ cm.}$$

$$\text{sep.} = \frac{F_R A_v f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45.4 \text{ cm.}$$

$$\text{sep} = \frac{d}{2} = \frac{35}{2} = 17.5 \text{ cm.}$$

La separación máxima será de 15 cm.

Longitud a la que deben colocarse los estribos a la mitad de la separación máxima:

$$h = 40 \text{ cm.}$$

$$60 \text{ cm. ( rige)}$$

$$L / 6 = 350 / 6 = 58.5 \text{ cm.}$$

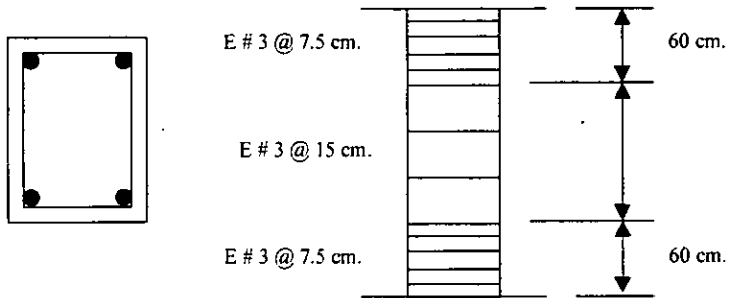
## SECCIÓN PROPUESTA.

Sección 30 X 40 cm.

4 vs. # 10

e # 3 @ 15 cm.

e # 3 @ 7.5 en una longitud igual o mayor de 60 cm. en los extremos.



### 4. Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial.

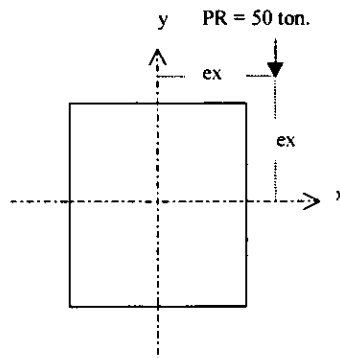
Datos:

$e_x = 15$  cm.

$e_y = 30$  cm.

Materiales: Concreto  $f_c = 250$  kg/cm<sup>2</sup>

Acero  $f_y = 4200$  kg/cm<sup>2</sup>



Refuerzo en cuatro caras

Recubrimiento = 5 cm.

$\rho = 0.025$

### CONSTANTES DE CÁLCULO

$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

$f'_c = 0.8 f_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f''_c = 0.85 f'_c = 0.85 \times 200 = 170 \text{ kg/cm}^2$

### APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE BRESSLER.

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{P_{RX}} + \frac{1}{P_{RY}} + \frac{1}{P_{R0}}}$$

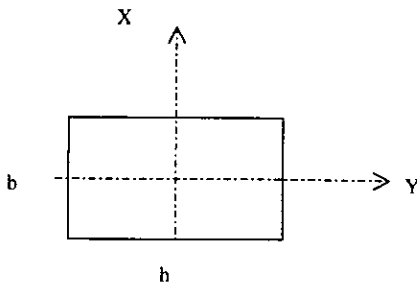
$P_R$  = carga nominal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades  $e_x$  y  $e_y$

$P_{R0}$  = carga axial resistente de diseño suponiendo  $e_x = e_y = 0$

$P_{RX}$  = carga normal de diseño aplicada con una excentricidad  $e_x$

$P_{RY}$  = carga normal de diseño aplicada con una excentricidad  $e_y$

### SECCIÓN PROPUESTA



$b = 30 \text{ cm.}$

$h = 50 \text{ cm.}$

$\rho = 0.025$

$$A_s = pbd = 0.025 \times 30 \times 50 = 37.5 \text{ cm}^2$$

$$\text{Sean } 8 \text{ vs } \# 8 = 40.56 \text{ cm}^2$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{40.56}{30 \times 50} = 0.027$$

$$q = p \frac{f_y}{f'_c} = 0.027 \frac{4200}{170} = 0.67$$

#### DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA PR.

$$\text{Cálculo de PRO} \quad P_{R0} = F_R ( f'_c A_g + A_s F_y )$$

$$P_{R0} = 0.7 ( 170 \times 1462.5 ) + ( 37.5 \times 4200 ) = 284 \text{ 287.5 kg.}$$

#### Cálculo de PRX

$$d / b = 30 - 5 / 30 = 0.83 ; \quad e_x / b = 15 / 30 = 0.2 ; \quad q = 0.67$$

del diagrama de interacción con la relación  $d / h = 0.85 ; \quad K_x = 1.1$

$$P_{RX} = K_x F_R b h f'_c = 1.1 \times 0.7 \times 30 \times 50 \times 170 = 196 \text{ 350 kg.}$$

#### Cálculo de PRY

$$d / h = 50 - 5 / 50 = 0.9 ; \quad e_y / h = 30 / 50 = 0.6 ; \quad q = 0.67$$

del diagrama de interacción con la relación  $d / h = 0.9 ; \quad K_y = 0.6$

$$P_{RY} = K_y F_R b h f'_c = 0.6 \times .7 \times 30 \times 50 \times 170 = 107\ 100 \text{ kg.}$$

Cálculo de PR

$$PR = \frac{1}{\frac{1}{196350} + \frac{1}{107100} + \frac{1}{284287.5}} = 91.6 \text{ ton.}$$

$$91.6 > 50 \text{ ton.}$$

Como se puede observar la resistencia de la sección propuesta es casi el doble de la carga actuante por lo que se propone una base de 40 cm. y una cuantía de 0.025.

$$p = 0.025 ; \quad A_s = .025 \times 30 \times 40 = 30 \text{ cm}^2 \quad \text{sean 8 vs. \# 7} = 31.04 \text{ cm}^2$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{30}{30 \times 40} = 0.025$$

$$q = p \frac{f_y}{f'_c} = 0.0258 \frac{4200}{170} = 0.64$$

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA PR.

Cálculo de PRO  $P_{R0} = F_R ( f'_c A_g + A_s F_y )$

$$P_{R0} = 0.7 ( 170 \times 1169 ) + ( 31.04 \times 4200 ) = 230\ 369 \text{ kg.}$$



Cálculo de PRX

$$d / b = 30 - 5 / 30 = 0.83 ; \quad e_x / b = 15 / 30 = 0.2 ; \quad q = 0.64$$

del diagrama de interacción con la relación  $d / h = 0.85$  ;  $K_x = 1.05$

$$P_{RX} = K_x F_R b h f'c = 1.05 \times .7 \times 30 \times 40 \times 170 = 149\,940 \text{ kg.}$$

Cálculo de PRY

$$d / h = 50 - 5 / 50 = 0.9 ; \quad e_y / h = 30 / 40 = 0.75 ; \quad q = 0.64$$

del diagrama de interacción con la relación  $d / h = 0.9$  ;  $K_y = 0.5$

$$P_{RY} = K_y F_R b h f'c = 0.5 \times .7 \times 30 \times 40 \times 170 = 71\,400 \text{ kg.}$$

Cálculo de PR

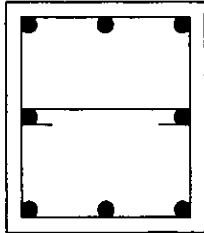
$$PR = \frac{1}{\frac{1}{149940} + \frac{1}{71400} + \frac{1}{230369}} = 61.2 \text{ ton.}$$

$61.2 > 50 \text{ ton.}$  por lo que la segunda sección propuesta se acepta.

REFUERZO TRANSVERSAL.

Separación de estribos.  $48 \times 1 = 48 \text{ cm}$   
 $b / 2 = 30 / 2 = 15 \text{ cm.}$   
 $850 \text{ db} / \sqrt{4200} = 29 \text{ cm.}$

## SECCIÓN ADOPTADA.



Sección = 30 X 40 cm.  
8 vs. # 7  
e # 3 @ 15 cm.

## COMENTARIOS:

### Ejemplo 1

- En ocasiones se puede imponer el valor de  $p$  (cuantía de refuerzo), para este ejemplo se estableció el valor de  $p = 0.025$
- Para resolver el problema se procedió por tanteos, suponiendo una sección y haciendo ajustes hasta encontrar una que tuviera la resistencia necesaria con una cuantía semejante a la especificada.
- El tanteo que se realizó fue para una sección de 45 X 45 cm., la relación  $d / h$  es la que define que diagrama de interacción usar en las ayudas de diseño; en este caso se empleo el que corresponde a un valor  $d / h = 0.90$  por ser el calculado  $d / h = .88$ . En caso de desearse mayor precisión podría hacerse una interpolación entre los datos correspondientes a los diagramas cuyas relaciones  $d / h$  sean 0.9 y 0.85.
- Utilizando el valor de  $q$  que corresponde a  $p = 0.025$  y el de la relación  $e / h$  se definió un punto en el diagrama cuya ordenada  $K$  fue de .87. Al calcular la resistencia sustituyendo los valores se puede observar que la resistencia es mucho mayor que la requerida. Se procedió entonces a realizar un ajuste en el acero definiendo un nuevo

punto en el diagrama a partir del valor de  $K$  necesario y de la relación  $e/h$ . Obsérvese que la cuantía correspondiente a este nuevo tanteo fue menor que la propuesta.

- En cuanto a la selección de estribos, se escogieron del número 3 los que cumplen ampliamente el requisito de que su fuerza de fluencia sea por lo menos igual al 6 % de la fluencia de la mayor barra restringida. Conservadoramente, se utilizó una grapa para las dos barras del # 7, ya que la separación libre entre barras es ligeramente mayor de 15 cm.
- La separación de 20 cm. debe reducirse a la mitad en las porciones extremas de la columna de acuerdo a:  
  
Longitud no menor de:    la dimensión transversal máxima de la columna  
  1 / 6 de la altura  
  60 cm.

## Ejemplo 2

- La columna de este ejemplo forma parte de una estructura de marcos ortogonales, en la que el análisis indicó que la columna está sujeta a momentos en dos direcciones perpendiculares entre sí. Dado que el elemento es de sección circular, el problema de flexión biaxial puede reducirse a uno de flexión uniaxial, obteniendo un valor para  $M$  de  $M_x$  y  $M_y$  vectorialmente.
- Los valores de las acciones dadas corresponden al nivel de servicio para las dos combinaciones de carga básica.
- En este ejemplo se presenta únicamente el tanteo final, que proporcionó una solución adecuada. Se debe de tomar en cuenta que el dimensionamiento de columnas puede

llevarse a cabo por un proceso de tanteos auxiliado por los diagramas de interacción. El procedimiento implica proponer una sección e investigar, con la ayuda de los diagramas, si la sección propuesta puede resistir las cargas con una cuantía de refuerzo que este comprendida entre los límites admisibles.

- Para elegir el diagrama apropiado es necesario definir la relación  $d / D$ , donde  $d$  es el diámetro de un círculo que pasa por los centros de las barras y  $D$  es el diámetro de la sección de la columna. Cuando el valor de  $d / D$  no coincide con los valores para los cuales existen diagramas, se puede recurrir a la interpolación.
- Se determinó un valor para  $q$ , considerando la condición más desfavorable  $FR = 0.8$  por tratarse de una columna zunchada.
- El área de acero requerida se proporcionó con 7 vs. # 10, las que se pueden distribuir en la columna con suficiente holgura entre ellas.
- El área del núcleo utilizado para calcular la cuantía  $p_s$  es la definida por un círculo que coincide con el paño anterior del zuncho, y con el diámetro, por lo tanto, será igual al diámetro de la columna menos 2 veces el recubrimiento libre del zuncho.
- El diámetro utilizado para calcular la contribución de la hélice es el medido de centro a centro. Generalmente los valores calculados del paso  $s$  se redondean a .5 cm.

### Ejemplo 3

- En este ejemplo se considera que actúa en los extremos de la columna una fuerza cortante cuyo efecto debe considerarse proporcionando un refuerzo transversal adecuado.

- Se propuso una sección de 30 X 40 cm., cuya resistencia a flexocompresión se comprobó ser suficiente utilizando 4 vs. # 10 distribuidas en dos caras.
- Para el refuerzo transversal se emplearon estribos del número 3 que de acuerdo a las especificaciones de las NTC – 96 ( Revisión por estado límite de falla, fuerza cortante ) deben colocarse a 15 cm y en los extremos a cada 7.5 cm.

#### Ejemplo 4

- El problema de la flexión biaxial en secciones rectangulares se presenta con frecuencia en el diseño de estructuras de concreto.
- El dimensionamiento se llevo a cabo con la ayuda de la fórmula de Bressler. También se podría recurrir a los diagramas de interacción para flexión biaxial. Sin embargo el uso de estos diagramas suele resultar tedioso debido a las interpolaciones que es necesario efectuar.
- En este ejemplo se muestran dos tanteos, en el primero de carga resistente es mucho mayor que la aplicada, por lo que se decide suponer una base de 40 cm. y una cuantía de acero de 0.025.
- En el calculo de PRO, PRX y PRY se utilizó como valor del factor de resistencia  $FR = 0.7$ , el que corresponde a falla en compresión.
- El estribo del número 3 propuesto cumple ampliamente los requisitos de capacidad de fluencia mencionados en la sección correspondiente.

## CAPITULO IV

### VIGAS.

#### **Introducción.**

Las cargas que actúan en una estructura, ya sean cargas vivas o de otros tipos, tales como cargas horizontales de viento o las debidas a contracción y temperatura, generan flexión y deformación de los elementos estructurales que la constituyen. La flexión en vigas es el resultado de la deformación causada por los esfuerzos de flexión debida a la carga externa.

Conforme se aumenta la carga, la viga soporta deformación adicional, propiciando el desarrollo de grietas por flexión a lo larga del claro de la viga. Incrementos continuos en el nivel de carga conducen a la falla del elemento estructural cuando la carga externa alcanza la capacidad del elemento. Por lo que el diseñador tiene que dimensional la sección transversal del elemento o de la viga de tal manera que no se desarrollen grietas excesivas a niveles de carga de servicio y tenga seguridad adecuada y resistencia de reserva para resistir las cargas o esfuerzos aplicados sin que se presente la falla.

#### **Comportamiento y modos de falla de elementos sometidos a flexión simple.**

Considérese una viga simplemente apoyada, sometida a dos cargas concentradas y colocadas de modo simétrico, en las que existe una zona sujeta solo a momento flexionante **figura 4.1** El comportamiento de la viga que se describirá se basa en que el elemento de concreto tiene refuerzo de tensión.

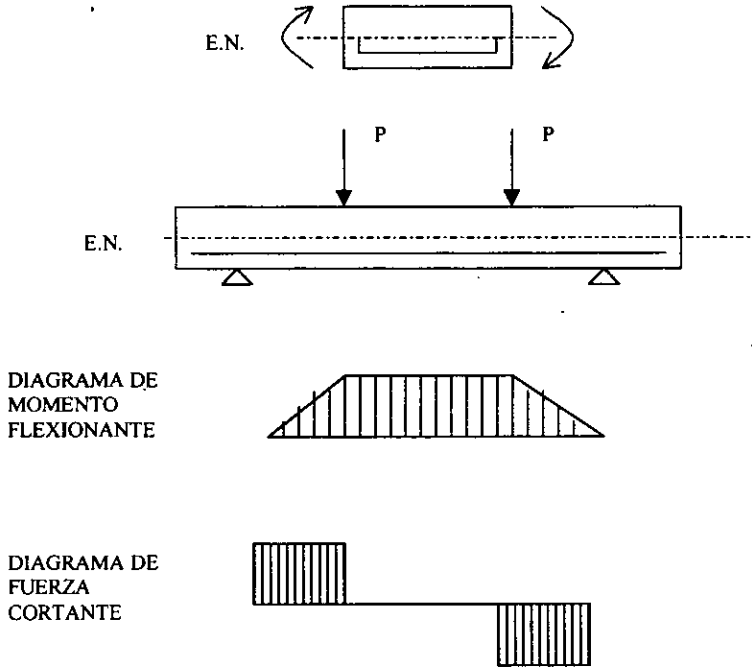
En la **figura 4.2** se muestra la gráfica carga-deflexión de un elemento con un porcentaje de acero usual en la práctica. Al empezar a cargar, el comportamiento de la pieza es propiamente elástico y toda la sección contribuye a resistir el momento exterior. Cuando la tensión en la fibra más esforzada de alguna sección excede la resistencia del concreto a la tensión, empiezan a aparecer grietas. Conforme se aumenta la carga se incrementan en número, en longitud y en abertura.

A partir de la aparición de las primeras grietas, el comportamiento del espécimen ya no es elástico y las deflexiones no son proporcionales a las cargas. En la zona donde se presentan las grietas, el acero toma prácticamente toda la tensión. En esta etapa, el esfuerzo en el acero aumenta hasta alcanzar su valor de fluencia. Desde el momento en que el acero empieza a fluir, la deformación crece en forma considerable. Esto es, la resistencia del elemento es solo ligeramente mayor que la resistencia que produce la fluencia del acero.

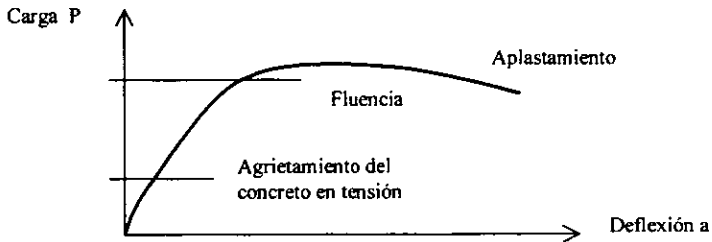
Los primeros indicios de la fluencia del acero son un incremento notable en la abertura y longitud de las grietas y un quiebre marcado en la curva carga-deflexión. A medida que aumenta la longitud de las grietas, la zona de compresión se va reduciendo, hasta que el concreto en ésta zona es incapaz de tomar la compresión y se aplasta. El aplastamiento se puede observar cuando se presenta el desprendimiento de escamas en la zona de compresión. Cuando esto ocurre, la carga disminuye con mayor o menor rapidez, dependiendo de la rigidez del sistema de aplicación de la carga, hasta que se produce el colapso final.

Según la cantidad del acero longitudinal con que está reforzada la viga, ésta puede fluir o no antes de que alcance la carga máxima. Cuando el acero fluye, el comportamiento del elemento es dúctil; es decir, se producen deflexiones considerables antes del colapso final como se muestra en la **figura 4.2** en este caso se dice que el elemento es subreforzado. Por otra parte, si la cantidad de acero longitudinal de tensión es grande, éste no fluye antes del aplastamiento y se dice entonces que el elemento es

sobrerreforzado. Puede suceder que el elemento alcance su resistencia precisamente cuando el acero empieza a fluir. En este caso, se dice que el elemento es balanceado.

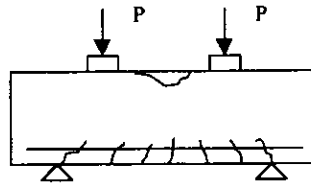


**Figura 4.1** Elemento típico para estudio de flexión simple.

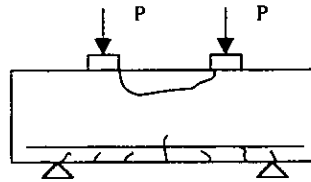


**Figura 4.2** Gráfica carga-deflexión de un elemento con un porcentaje usual de acero de tensión.





a) subreforzada



a) sobreforzada

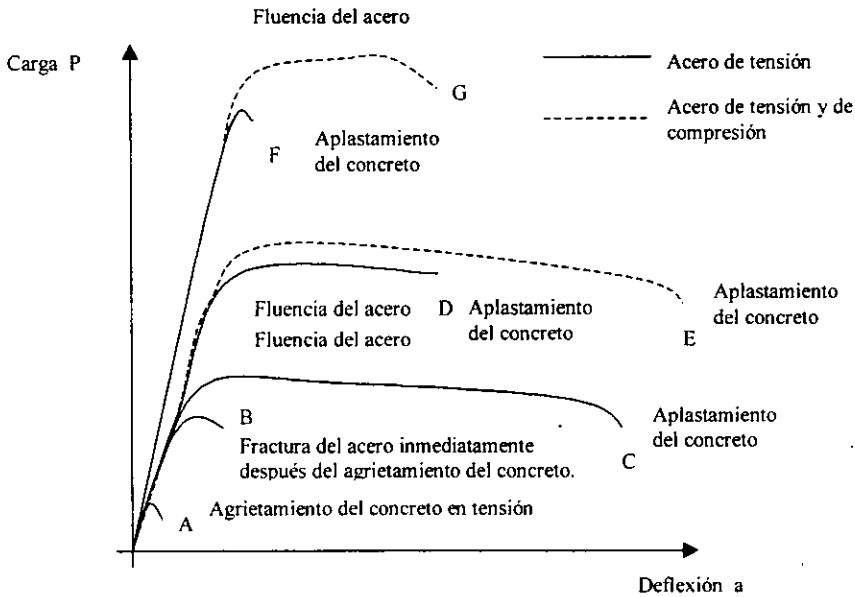
**Figura 4.3** Agrietamiento en la falla de vigas sujetas a flexión

Los términos subreforzado y sobreforzado, aplicados al caso de elementos con acero sin límite de fluencia bien marcado, no tienen más sentido que el indicar el grado de ductilidad. En este caso la condición balanceada no está claramente definida.

En la **figura 4.3** se presentan los esquemas de agrietamiento correspondientes a vigas con diferentes porcentajes de acero. En el caso de un elemento sobreforzado, la zona de aplastamiento del concreto es mayor que en caso de otro subreforzado y a la falla, las grietas del primero son de longitud y abertura menores.

En la **figura 4.4** se puede observar cuál es la variación en el comportamiento de elementos que tienen distintos porcentajes de acero. Cada curva con línea continua representa la gráfica carga-deflexión de un elemento reforzado con una cantidad diferente de acero de tensión, desde una viga de concreto simple hasta otra con

porcentaje muy alto de acero, del orden del 7 %. En las gráficas se puede observar el efecto de la cantidad y distribución del acero longitudinal.



**Figura 4.4** Gráficas carga-deflexión de elementos con porcentajes variables de acero sujetos a flexión simple.

Un elemento de concreto simple (curva A) alcanza su resistencia y falla al agrietarse el concreto en la fibra más tensada, con una deflexión, muy pequeña. A la falla de este tipo se le llama de tipo frágil.

Al adicionar refuerzo longitudinal en cantidades muy pequeñas, la capacidad del elemento aumenta al mismo tiempo que su deflexión en la falla (curva B). En las primeras etapas de carga, el comportamiento es muy parecido al de un elemento de concreto simple. Una vez agrietado el concreto, la tensión en el acero se incrementa rápidamente al aumentar la carga, hasta que el refuerzo se fractura. Este tipo de falla

ocurre en elementos con porcentajes muy pequeños de acero, del orden de 0.1 % o menos. La falla es frágil y se produce a una deflexión pequeña.

Las curvas C y D corresponden a elementos con porcentajes usuales de acero de tensión del orden de 0.5 a 2 % . Se puede observar que la resistencia y la deflexión son mayores que las curvas A y B.

Si se aumenta apreciablemente el porcentaje de acero, el elemento se clasifica como sobrerreforzado, como se muestra en la curva F. En este caso la resistencia aumenta, pero la deflexión a la falla disminuye.

Si además de acero de tensión existe acero longitudinal en la zona de compresión, su efecto en las gráficas carga-deflexión del elemento se muestra en la **figura 4.4** con líneas de trazo interrumpido para dos casos. El efecto principal del acero de compresión es aumentar notablemente la ductilidad; la adición de acero de compresión en cantidad suficiente a un elemento sobrerreforzado puede hacer que éste se convierta en subreforzado, aumentando su ductilidad y resistencia, al lograr que el acero de tensión desarrolle su esfuerzo de fluencia. Este efecto se muestra cualitativamente en las curvas F y G.

La adición de refuerzo de compresión a un elemento subreforzado aumenta su ductilidad, pero su resistencia permanece prácticamente constante, ya que está regida por la tensión en el acero (curva D y E).

Es importante recalcar que la ductilidad que se puede lograr con la adición de acero de compresión, no se obtiene si éste no está adecuadamente restringido por medio de refuerzo transversal, ya que de otro modo, para compresiones muy altas y cuando hay poco recubrimiento, el acero de compresión puede pandearse, lo que causaría un colapso súbito.

En la **figura 4.4** se ha presentado de un modo cualitativo la variación de las características carga-deflexión de elementos sujetos a flexión pura en función del porcentaje de acero, suponiendo que los índices de resistencia de los materiales ( $f_c$  y  $f_y$ ), permanecen constantes.

Las características carga-deflexión son también función de las propiedades mecánicas de los materiales, expresadas por sus índices de resistencia. Un incremento en el valor del esfuerzo de fluencia, o en el valor del porcentaje de acero de tensión, tiende a aumentar la capacidad en tensión del elemento. Por otra parte, un incremento en el valor de  $f_c$  aumenta la capacidad de resistir la compresión. El comportamiento de un elemento depende de la relación entre su capacidad en tensión y su capacidad en compresión. Esta relación puede medirse por medio del parámetro:

$$q = \frac{p f_y}{f_c}$$

El cual suele llamarse índice de refuerzo.

Se pueden definir entonces, elementos subreforzados y sobreforzados para valores bajos y altos del porcentaje de acero.

Para elementos con refuerzo longitudinal de tensión y compresión, el índice de refuerzo es:

$$q = \frac{(p - p') f_y}{f_c}$$

Donde  $p'$  representa el porcentaje de acero longitudinal en compresión.

En resumen de lo expuesto anteriormente, se presenta la **tabla 4.1**, la cual complementa la **figura 4.4**

Otro aspecto importante del comportamiento de elementos sujetos a flexión simple, es la distribución de deformaciones en el peralte. Las mediciones hechas en el

laboratorio indican que, en una sección normal al eje de la pieza, la distribución de deformaciones longitudinales es aproximadamente lineal para casi todos los niveles de carga. Normalmente se miden deformaciones en el concreto, en la zona de compresión, y en el acero. La presencia de grietas dificulta la medición de deformaciones en el concreto en zonas de tensión. A pesar de esto, cuando se han empleado procedimientos minuciosos, se ha comprobado que las deformaciones del concreto en tensión y del acero colocado al mismo nivel coinciden sensiblemente si se usan barras con una corrugación adecuada que garantice la adherencia entre concreto y acero.

Curva típica	Porcentaje de acero De tensión	Porcentaje de acero De compresión	Índice de refuerzo	Tipo de elemento	Modo de falla	Grado de ductilidad
A	Nulo	Nulo	Nulo	Concreto simple	Concreto en tensión	Frágil
B	Muy pequeño	Nulo	Muy pequeño	Muy subreforzado	Fractura del acero frágil	Poco dúctil
C	Normal bajo	Nulo	Normal bajo	subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Muy dúctil
D	Normal alto	Nulo	Normal alto	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	dúctil
E	Normal alto	Del orden del de tensión	Normal bajo	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Muy dúctil
F	Muy alto	Nulo	Muy alto	Sobreforzado	Aplastamiento sin fluencia del acero	frágil
G	Muy alto	Del orden del de tensión	Normal bajo	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	dúctil

**Tabla 4.1** Características de elementos con distintos índices de refuerzo.

## **Resistencia de elementos sujetos a flexión.**

La resistencia de elementos sujetos a flexión simple puede determinarse a partir de una serie de hipótesis simplificadoras ligadas al comportamiento básico y el mecanismo de solicitaciones – respuestas.

Las hipótesis que se hacen comúnmente son las siguientes:

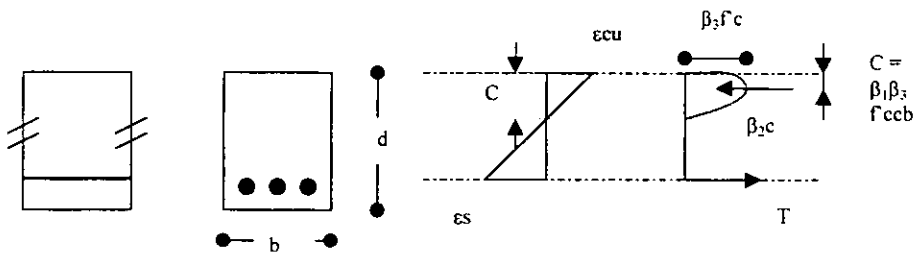
- La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal de un elemento es plana. Esta hipótesis ha sido verificada mediante mediciones y es correcta, excepto para longitudes de medición muy pequeñas y en la rama descendente de la gráfica carga-deflexión.
- Se conoce la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del elemento.
- No existen corrimientos relativos de consideración entre el acero y el concreto que lo rodea. Para concreto reforzado con barras corrugadas, la hipótesis es bastante realista. Es decir, se puede suponer que la deformación unitaria es la misma en el acero y en el concreto que se encuentra al mismo nivel.
- El concreto no resiste esfuerzos de tensión longitudinales.
- El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto,  $\epsilon_{cu}$ . Los reglamentos recomiendan valores de  $\epsilon_{cu}$  que varían de .003 a .004.

### **Hipótesis de algunos reglamentos de construcción.**

En la **figura 4.5** se muestran los estados de deformaciones y esfuerzos en la sección transversal de una viga sujeta a flexión. Se puede apreciar que la forma del diagrama de

esfuerzos de compresión es similar a la curva esfuerzo - deformación de un espécimen ensayado a compresión. El área del diagrama de esfuerzos de compresión y la posición de la resultante de compresión pueden determinarse a partir de tres parámetros adimensionales,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\beta_3$ . El parámetro  $\beta_3$  relaciona el esfuerzo máximo en flexión con la resistencia de los cilindros de control. El parámetro  $\beta_1$  indica la relación entre el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo en la zona de compresión y el parámetro  $\beta_2$  indica la posición de la resultante de compresión. El área del diagrama de compresiones y la posición de la resultante pueden definirse también estableciendo expresiones matemáticas que permiten idealizar el diagrama de esfuerzos de compresión.

Con el objeto de desarrollar métodos sencillos de cálculo, los reglamentos de construcción recurren a hipótesis simplificadoras en las cuales se fija un valor de la deformación unitaria máxima útil del concreto,  $\epsilon_{cu}$ , y donde se definen diagramas idealizados de los esfuerzos de compresión, de tal manera que el área del diagrama de esfuerzos y la posición de la resultante de compresión sean semejantes a las que corresponderían a una distribución real.



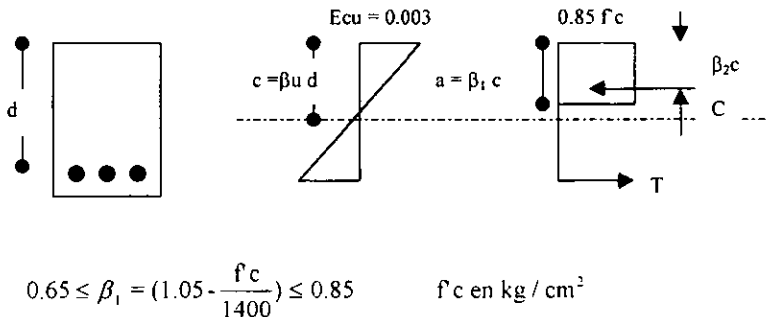
**Figura 4.5** Distribuciones de deformaciones y esfuerzos en una sección sujeta a flexión.

#### HIPOTESIS ACI.

El reglamento de instituto americano del concreto (ACI - 31889) utiliza las hipótesis simplificadoras que se resumen en la **figura 4.6** en lugar de la distribución real de

esfuerzos, se propone una distribución rectangular, con una profundidad igual a  $\beta_1$  veces la del eje neutro. Se acepta que el elemento alcanza su resistencia a una deformación unitaria máxima útil del concreto en compresión igual a 0.003, con una distribución lineal de deformaciones unitarias.

El parámetro  $\beta_1$  se hace depender de la resistencia nominal  $f_c$ , de acuerdo con la ecuación mostrada en la **figura 4.6**. El valor de  $\beta_1$  es constante e igual a 0.85 para  $f_c \leq 280 \text{ kg./cm}^2$ . Esta variación tiene por objeto tomar en cuenta el cambio en la forma de la curva esfuerzo - deformación del concreto al incrementar su resistencia, ya que el área del rectángulo equivalente debe ser aproximadamente igual al área bajo la curva esfuerzo - deformación. La hipótesis del bloque equivalente de esfuerzos es aplicable a secciones de cualquier forma.



**Figura 4.6** Hipótesis ACI sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión.

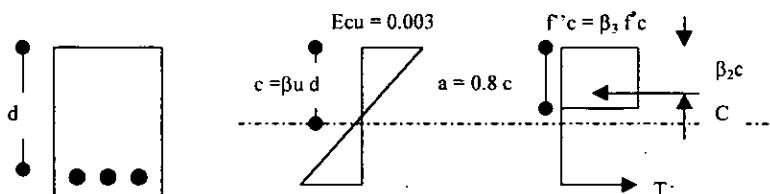
#### HIPÓTESIS DE LAS NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS (NTC - 96) DEL RCDDF.

Las NTC - 96 recomiendan una distribución rectangular de esfuerzos ligeramente diferente de la del ACI. (**figura 4.7**). La reducción en el volumen del bloque de esfuerzos correspondientes a concretos de alta resistencia, se hace disminuyendo el



valor del esfuerzo máximo,  $\beta_3 f'c$  y no reduciendo la profundidad del bloque como lo hace el ACI. Esto tiene ventajas en la preparación de gráficas y diagramas de dimensionamiento.

Para el bloque propuesto  $\beta_1=0.80$ ,  $\beta_2 = 0.40$  para secciones rectangulares y  $\beta_3 = (1.05 - f'c / 1250) \leq 0.85$ , ( $f'c$  en  $kg / cm^2$ ).



**Figura 4.7** Hipótesis del reglamento del DDF sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión.

#### HIPOTESIS DEL COMITÉ EUROPEO DEL CONCRETO (CEB)

El CEB recomienda dos alternativas para la distribución de esfuerzos: una rectangular, y la otra que consiste en una variación parabólica desde el eje neutro hasta una deformación unitaria de 0.002 y una distribución uniforme en el resto de la sección. El valor recomendado para la deformación máxima útil es 0.0035. Las demás hipótesis son similares a las descritas anteriormente. Se usan también resistencias reducidas de los materiales.

## Procedimiento para determinar la resistencia a flexión.

Los diversos procedimientos consisten en establecer un estado de deformaciones tal que la sección se encuentre en equilibrio, o sea, que la suma de las fuerzas de compresión que actúan en una sección transversal sea igual a la suma de fuerzas de tensión. Una vez establecido dicho estado de equilibrio, se calcula el momento de todas las fuerzas internas respecto a un eje cualquiera. Este momento es la resistencia a flexión de la sección. El estado de equilibrio interno puede determinarse por medio de tanteos o algebraicamente. En la **figura 4.8** se representa la forma de calcular el momento resistente nominal con refuerzo de tensión únicamente, de acuerdo al reglamento del DDF.

### SECCIONES RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS.

Determinación de la resistencia a flexión de una sección rectangular.

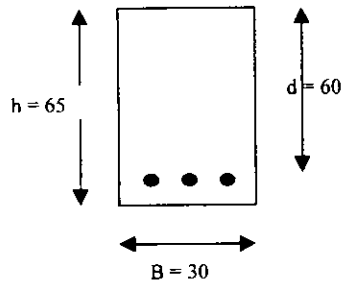
Datos:

$$f_c = 200 \text{ kg / cm}^2$$

$$f'_c = 0.8 \times f_c = 160 \text{ kg / cm}^2$$

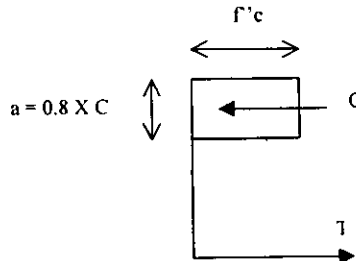
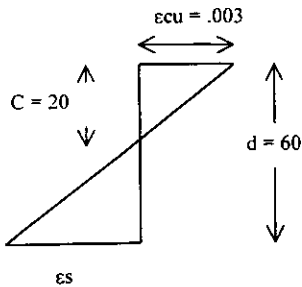
$$f_y = 4200 \text{ kg / cm}^2$$

$$A_s = 3 \text{ vs. } \# 8 = 15.21 \text{ cm}^2$$



### Determinación de la resistencia por medio de tanteos.

1er. Tanteo. ( sea  $C = 20 \text{ cm.}$  )



Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_s = \frac{0.003 \times 40}{20} = 0.006$$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021 \quad \therefore \epsilon_s > \epsilon_y$$

$$f_s = f_y = 4200 \text{ kg / cm}^2$$

$$T = A_s f_y = 15.21 \times 4200 = 63.8 \text{ ton.}$$

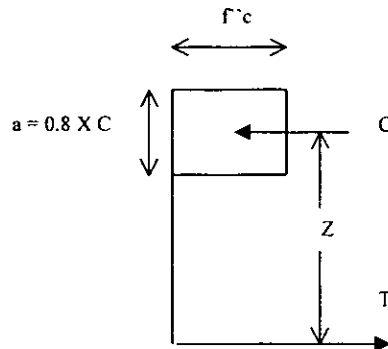
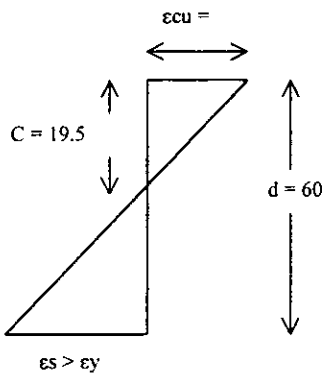
$$C = f'_c \times a \times b$$

$$C = 136 \times 16 \times 30 = 62.2 \text{ ton}$$

$T > C$  por lo que se debe reducir el valor de C.

Ajustando el valor de C tenemos:

$$C = \frac{63800}{0.8 \times f'_c \times 30} = 19.5 \text{ cm.}$$



$$C = 136 \times 0.8 \times 19.5 \times 30 = 63.6 \text{ ton.}$$

$$T = 15.21 \times 4200 = 63.8 \text{ ton.}$$

$$C \cong T.$$

$$\text{Momento nominal} = T * Z$$

$$Z = d - a / 2 = 60 - 11.7 / 2 = 54.15 \text{ cm.}$$

$$M_n = 63.8 * 5415 = 34.5 \text{ ton.m}$$

$$\underline{MR = M_n * FR = 34.5 \times 0.9 = 31.1 \text{ ton.m}}$$

#### Determinación de la resistencia mediante la ecuación.

$$\text{Momento nominal} = bd^2 f'c q (1 - .5q)$$

$$q = \frac{p f_y}{f'c}$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{15.21}{30 \times 60} = 0.0084$$

$$q = \frac{0.0084 \times 4200}{136} = 0.2609$$

$$M_n = 30 \times 60^2 \times 136 \times 0.2609 (1 - .5(0.2609)) = 33.3 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$

$$\underline{M_n = 33.3 \text{ ton.m}}$$

Determinación de la resistencia mediante gráfica.

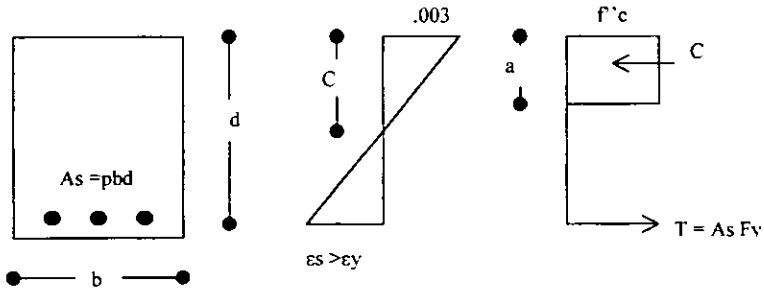
Para  $q = 0.2609$  se tiene el valor de:

$$\frac{M_n}{bd^2 f'c} = 0.215$$

Por lo tanto el valor de  $M_n$  es igual a:

$$M_n = 0.215 \times 30 \times 60^2 \times 136 = 31.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$M_n = 31.5 \text{ ton.m}$



Por equilibrio

$$C = T$$

$$f'c a b = p b d f_y$$

$$a = \frac{p d f_y}{f'c} \quad (i)$$

Tomando momentos respecto al acero de tensión:

$$M_n = C (d - a/2) = f'c a b d (1 - a / 2d)$$

Sustituyendo en la ecuación (i) y tomando en cuenta que  $q = p f_y / f'c$

$$M_n = bd^2 f'c q(1 - 0.5q)$$

**Figura 4.8** momento resistente nominal de elementos rectangulares con refuerzo de tensión únicamente, de acuerdo con el reglamento del DDF.

## Comentarios.

En el ejemplo anterior se ilustra el cálculo de la resistencia de una sección rectangular simplemente armada según las NTC -96 del reglamento de construcciones del Distrito Federal., la resistencia se calculó por tres procedimientos. En este caso como  $f'c$  es menor que 250, el valor de  $\beta_3$  es 0.85.

Al calcular resistencias de acuerdo con las NTC -96 debe hacerse una reducción de 2 cm. en ciertas dimensiones de los elementos estructurales a no ser que se tomen precauciones para garantizar que las dimensiones de cálculo se conserven durante el procedimiento constructivo. Esta reducción deberá hacerse cuando la dimensión en cuestión es menor de 20 cm. En vigas y losas las dimensiones sujetas a reducción son el ancho y el palte efectivo del refuerzo del lecho superior.

Según las NTC -96, el valor del factor de reducción, FR, que debe utilizarse para el cálculo de la resistencia de diseño de elementos sujetos a flexión de 0.9.

Para el tercer procedimiento se utilizó la gráfica para diseño por flexión que se encuentra en las ayudas de diseño, esta gráfica permite calcular los momentos resistentes nominales de vigas rectangulares con base en las hipótesis simplificadoras de las NTC. La pequeña discrepancia respecto al valor calculado según el primer procedimiento, se debe a la precisión con que se puede leer la gráfica.

El momento resistente  $M_R = M_u = M_n FR$ , puede obtenerse directamente con la ayuda de las tablas de porcentajes de acero para secciones rectangulares mostradas en las ayudas de diseño.

Las NTC -96, distinguen entre  $M_u$ , el momento actuante de diseño y  $M_R$ , el momento resistente de diseño.

## SECCIONES RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS.

En este caso, el procedimiento más sencillo es el de tanteos, o sea proponer una profundidad del eje neutro y verificar si las fuerzas de tensión y compresión se equilibran. Los pasos a seguir son, en forma esencial, los mismos que se utilizan para secciones simplemente armadas, con diferencia de que la fuerza total de compresión es la suma de la fuerza de compresión en el concreto,  $C_1$  y de la fuerza de compresión en el acero,  $C_2$ .

Para determinar el valor de  $C_2$  es necesario calcular la deformación al nivel del acero de compresión  $\epsilon_s'$  y obtener a partir de dicha deformación, el esfuerzo en el acero,  $f_s$ . Este esfuerzo puede ser menor o igual al de fluencia.

En secciones doblemente armadas, la fuerza total de compresión no es directamente proporcional a la profundidad del eje neutro, por lo que ésta profundidad para la configuración de deformaciones unitarias correspondiente al equilibrio de la sección, no puede obtenerse estableciendo una relación de proporcionalidad después del primer tanteo, como en el caso de secciones simplemente armada con la configuración final de deformaciones unitarias, el acero de compresión no fluye ya que  $\epsilon_s'$  es menor que  $\epsilon_y$ , mientras que el tensión si fluye.

En algunas secciones en las que el recubrimiento del acero de compresión es grande, puede suceder que la deformación  $\epsilon_s'$  resulte de tensión. En estos casos, el acero de compresión ya no actúa como tal sino que como refuerzo de tensión y su contribución a la resistencia suele ser muy pequeña. Una vez obtenida la configuración de deformaciones para la cual la sección esta en equilibrio, se calcula el momento flexionante, tomando momentos de primer orden respecto al eje geométrico de la sección. En realidad para la flexión pura se pueden tomar momentos de primer orden respecto a cualquier eje y se obtiene el mismo momento flexionante.

El momento resistente de diseño se obtendrá multiplicando el momento resistente,  $M_n$ , por el factor de reducción, en este caso  $FR = 0.9$

También pueden derivarse ecuaciones para calcular el momento resistente nominal de secciones rectangulares doblemente armadas. Esto se ha hecho en la **figura 4.8** usando las hipótesis de las NTC-96. Resulta necesario distinguir dos casos, según fluya o no fluya el acero de compresión. En cualquiera de los dos casos, las ecuaciones resultantes son válidas siempre que fluya el acero de tensión, o sea, que el porcentaje de acero de refuerzo sea menor o igual al porcentaje balanceado. El cálculo de porcentaje balanceado para secciones doblemente armadas se muestra en la **figura 4.11** Se puede ver que es función de los porcentajes de refuerzo de tensión y de compresión.

Puesto que no se sabe de antemano si el acero de compresión fluye o no, conviene iniciar el cálculo suponiendo que si fluye, o esa, aplicando las ecuaciones del caso 1.

Primero se calcula el valor de  $a$  con la ecuación:

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{\beta_1 f'_c b}$$

Conocido este valor se calcula  $\epsilon'_s$ , que por triángulos semejantes tiene el valor de:

$$\epsilon'_s = 0.003 \left( 1 - \frac{\beta_1 d'}{a} \right)$$

Si  $\epsilon'_s$  es mayor o igual que  $\epsilon_y$ , la hipótesis de estar en el caso 1 es correcta y se calcula el momento nominal con la ecuación:

$$M_n = A'_s f_y (d - d') + (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Si  $\epsilon'_s$  es menor que  $\epsilon_y$ , la hipótesis no es correcta y entonces se calcula un nuevo valor de  $a$  con la ecuación:



$$(\beta_3 f'c b) a^2 + (0.003 E_s A's - A_s f_y) a - (0.0024 E_s d' A's) = 0$$

Y el momento nominal con la ecuación:

$$M_n = Cc(d - .5a) + C_s(d - d')$$

Las ecuaciones para calcular el momento nominal resistente de una sección doblemente armada son más complicadas que las de una sección con refuerzo de tensión únicamente, en especial en el caso de que no fluya el acero de compresión. Por esto, generalmente resulta más sencillo el procedimiento de tanteos. Sin embargo, las ecuaciones son más convenientes para elaborar programas de computadora.

Determinación de la resistencia a flexión de una sección doblemente armada.

Datos:

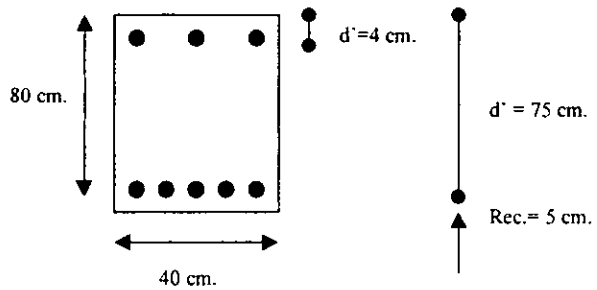
$$f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f'c = 0.8 \times f'c$$

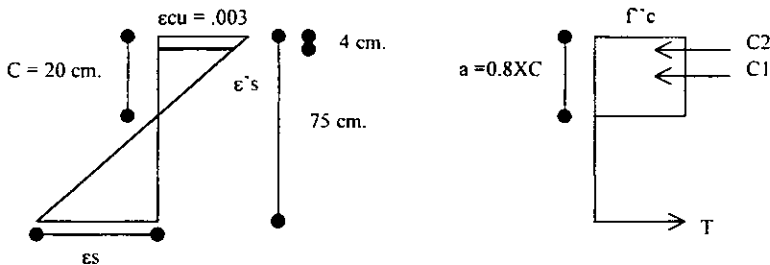
$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 5 \text{ vs. } \# 8 = 25.35 \text{ cm}^2$$

$$A's = 3 \text{ vs. } \# 8 = 15.21 \text{ cm}^2$$



Determinación de la resistencia por el procedimiento de tanteos.



Por triángulos semejantes:

$$\frac{\varepsilon's}{\varepsilon_{cu}} = \frac{c - d'}{c}$$

$$\varepsilon's = \frac{.003 \times 16}{20} = .0024$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = .0021$$

$$\varepsilon's > \varepsilon_y$$

$$C1 = 0.8 \times 20 \times 170 \times 40 = 108\ 800 \text{ kg.}$$

$$f's = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$C2 = A's f_y = 15.21 \times 4200 = 63\ 882 \text{ kg.}$$

$$C = C1 + C2 = 108\ 800 + 63\ 882 = 172\ 682 \text{ kg.}$$

Por triángulos semejantes:

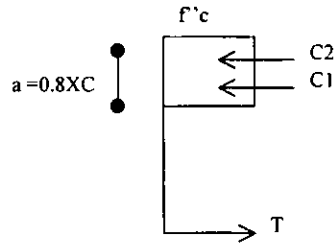
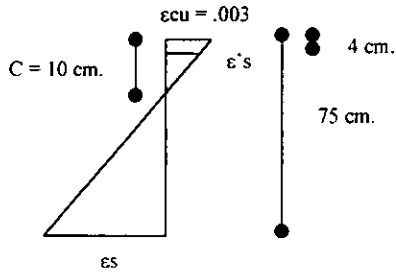
$$\frac{\varepsilon's}{\varepsilon_{cu}} = \frac{c - d'}{c}$$

$$\varepsilon_s = \frac{.003 \times 55}{20} = .00825 > \varepsilon_y$$

$$f_s = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$T = A_s \times f_y = 25.35 \times 4200 = 106\ 470 \text{ kg.}$$

Por lo tanto  $C > T$  ; entonces se procederá a realizar otro tanteo con  $C = 10 \text{ cm}$ .



$$C1 = 0.8 \times 10 \times 170 \times 40 = 54\,400 \text{ kg.}$$

$$\epsilon's = \frac{0.003 \times 6}{10} = 0.0018$$

$$\epsilon's < \epsilon_y$$

$$f_s = \epsilon's E_s = .0018 \times 2 \times 10^6 = 3600 \text{ kg/cm}^2$$

$$C2 = A's \times f_s = 15.21 \times 3600 = 54\,756 \text{ kg.}$$

$$C = 54\,400 + 54\,756 = 109\,156 \text{ kg.}$$

Por triángulos semejantes:

$$\epsilon_s = \frac{.003 \times 65}{10} = 0.0195 > \epsilon_y$$

$$f_s = f_y$$

$$T = A_s f_y = 25.35 \times 4200 = 106\,470 \text{ kg.}$$

$$C \approx T$$

### Cálculo del momento.

Tomando momentos respecto al eje geométrico de la sección.

Fuerza ( ton.)	Brazo (cm.)	Momento (ton.m)
C1 = 54.4	40 - 4 = 36	1958
C2 = 54.7	40 - 4 = 36	1969
T = 106.4	40 - 5 = 35	3724
		$\Sigma = 7651$

$$M_n = 76.51 \text{ ton.m}$$

$$M_R = 0.9 \times M_n$$

$$\underline{M_R = 0.9 \times 76.51 = 68.85 \text{ ton.m}}$$

Determinación de la resistencia mediante ecuaciones.

$$a = \left( \frac{A_s - A'_s}{\beta_3 f'_c b} \right) f_y = \frac{(25.35 - 15.21)(4200)}{0.85 \times 200 \times 40} = 6.26 \text{ cm.}$$

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = .0021$$

$$\epsilon'_s = .003 \left( 1 - \frac{0.8 d'}{a} \right) = .003 \left( 1 - \frac{8 \times 4}{6.26} \right) = .00146$$

Como  $\epsilon'_s > \epsilon_y$  se encuentra en el caso 2 por lo que:

$$(\beta_3 f'_c b) a^2 + (.003 E_s A'_s - A_s f_y) a - (.0024 E_s d' A'_s) = 0$$

$$6800 a^2 - 15000 a - 288000 = 0$$

$$a = 7.7 \text{ cm.}$$

$$C_s = .003 E_s \left( 1 - \frac{.8 d'}{a} \right) A's = 53\,300 \text{ kg.}$$

$$C_c = \beta_3 f'c a b = .85 \times 200 \times 7.7 \times 40 = 52360 \text{ kg.}$$

$$M_n = C_c(d - .5a) + C_s(d - d')$$

$$M_n = 75.09 \text{ ton.m}$$

$$\underline{MR = 0.9 \times 75.09 = 67.6 \text{ ton.m}}$$

## SECCIONES T SIMPLEMENTE ARMADAS.

Para calcular la resistencia en secciones T simplemente reforzadas, también se puede usar el procedimiento de tanteos, en el cual se propone la profundidad del eje neutro y posteriormente se verifica si las fuerzas de tensión y compresión están en equilibrio.

La diferencia respecto al caso de una sección rectangular estriba en el cálculo de la fuerza de compresión.

También la resistencia se puede determinar mediante ecuaciones. Es necesario distinguir dos casos, según que el bloque de esfuerzos de compresión caiga totalmente dentro del patín o que una parte caiga dentro del alma. En la **figura 4.9** se muestra el procedimiento a seguir y se deducen las ecuaciones correspondientes.

Se supone primero que el bloque de esfuerzos de compresión cae totalmente dentro del patín y se calcula la profundidad a partir de la condición de equilibrio de fuerza. Esto equivale a suponer que la sección funciona como una sección rectangular cuyo ancho es el patín. Si la profundidad del bloque de esfuerzos, (a) resulta menor que el grosor del patín (t), la hipótesis del paso anterior es correcta y se procede a calcular el momento resistente con la ecuación:

$$M_n = b d^2 f'c q (1 - 0.5q)$$

Si por el contrario la profundidad del bloque de esfuerzos, resulta mayor que el grosor del patín, la hipótesis no es correcta y es necesario deducir otras ecuaciones.

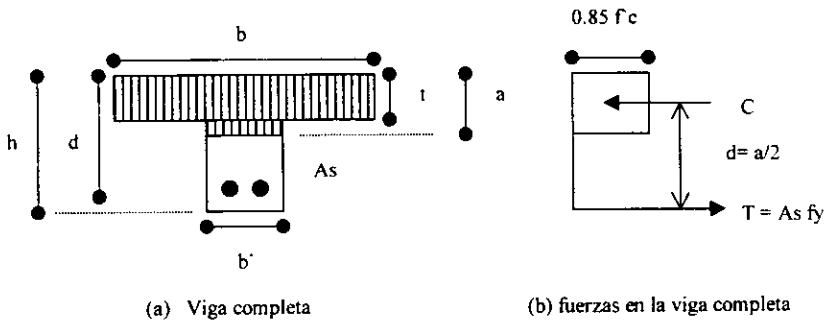
El procedimiento consiste en dividir la sección T completa, mostrada en las **figuras 4.9 (a y b)**, en dos secciones: la primera de la **figura 4.9 (c y d)** que está formada por las alas del patín y un área de acero  $A_{sp}$  necesaria para equilibrar la fuerza de compresión correspondiente, y la **figura 4.9 (e y f)** formada por el complemento de la zona de compresión y un área de acero  $A_{sa}$  con las ecuaciones:

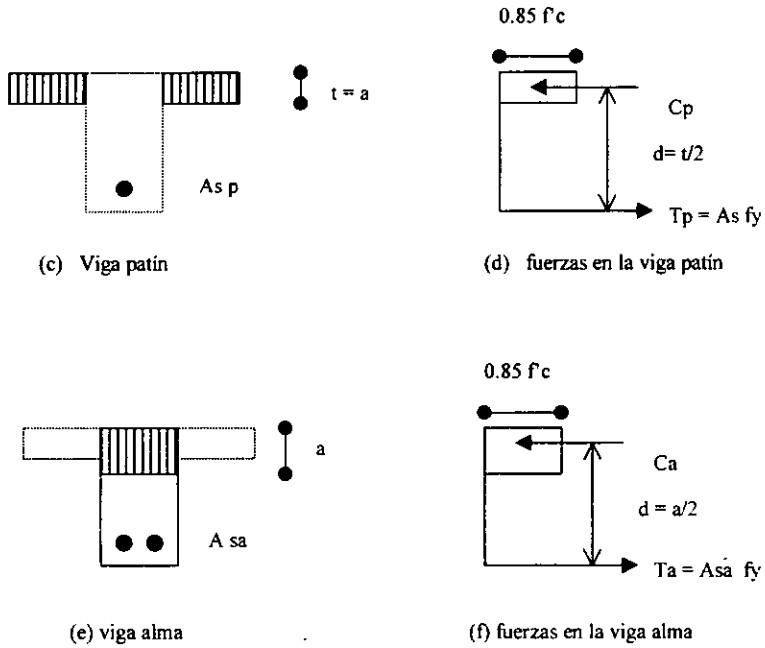
$$A_{sp} = \frac{f'' c t (b - b')}{f_y} \quad \text{y} \quad a = \frac{(A_s - A_{sp}) f_y}{f'' c b'}$$

Se pueden calcular el área de acero  $A_{sp}$ , que corresponde a la llamada "viga patín", y la profundidad del bloque de esfuerzos  $a$ , de la sección completa conocidos estos valores, el momento resistente nominal se puede calcular con la ecuación:

$$M_n = A_{sp} f_y (d - t/2) + (A_s - A_{sp}) f_y (d - a/2)$$

Obsérvese que en la deducción mostrada en la figura se supone que el acero de tensión está fluyendo, ya que tanto en el valor de  $T_p$  de la **figura 4.9 (d)** como en el de  $T_a$  de la **figura 9 (f)**, el esfuerzo en el acero es  $f_y$ . Por lo tanto la relación de acero  $p$  debe ser menor que la relación balanceada  $p_b$ .





**Figura 4.9** momento resistente nominal de secciones T, de acuerdo al reglamento ACI.

1. Cálculo de  $a$  suponiendo que todo el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del patín.

$$C = T$$

$$0.85 f_c b a = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f_c b}$$

Si  $a \leq t$ , se continúa con el paso 2

Si  $a > t$ , se continúa con el paso 3

2. Se calcula el momento resistente nominal como si se tratase de una sección con

refuerzo de tensión únicamente y con un ancho igual al del patín.

$$M_n = b d^2 f_c \omega (1 - 0.5\omega)$$

$$\text{donde: } \omega = \frac{\rho f_y}{f_c}$$

3. A continuación se deducen las ecuaciones correspondientes a este caso.

De las figuras (c) y (d):

$$C_p = T_p ; \quad C_p = 0.85 f_c t (b - b') \quad \text{y} \quad T_p = A_s \rho f_y$$

De donde: ( ecuación 1 )

$$A_{sp} = \frac{0.85 f_c t (b - b')}{f_y}$$

De las figuras (e) y (f):

$$C_a = T_a ; \quad C_a = 0.85 f_c b' a \quad \text{y} \quad T_a = A_s a f_y$$

De donde: ( ecuación 2 )

$$a = \frac{A_s a f_y}{0.85 f_c b'}$$

$$A_s a = A_s - A_{sp}$$

luego: ( ecuación 3 )

$$a = \frac{(A_s - A_{sp}) f_y}{0.85 f_c b'}$$



De las figuras (d) y (f):

$$M_n = T_p \left( d - \frac{t}{2} \right) + T_a \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_n = A_{sp} f_y \left( d - \frac{t}{2} \right) + (A_s - A_{sp}) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \quad (\text{ecuación 4})$$

Calculando  $A_{sp}$  con la ecuación 1 y  $a$  con la ecuación 3, puede calcularse el momento nominal con la ecuación 4.

Determinación de la resistencia a flexión de una sección T.

Datos:

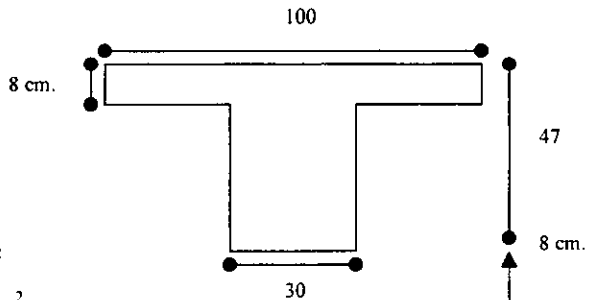
$$f'_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$A_s = 6 \text{ vs. } \# 8 = 30.40 \text{ cm}^2$$

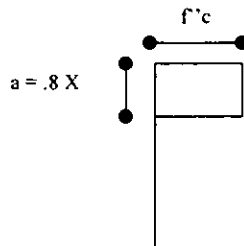
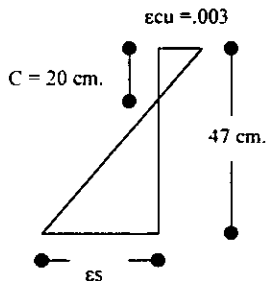
$$f'_c = .8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f^*_c = .85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2$$



Determinación de la resistencia por el procedimiento de tanteos:

1er. Tanteo ( $C = 20 \text{ cm.}$ )



$$C1 = .8 \times 100 \times 136 = 108\,800 \text{ kg.}$$

$$C2 = .8 \times 30 \times 136 = 32\,640 \text{ kg.}$$

$$C = C1 + C2 = 141\,440 \text{ kg.}$$

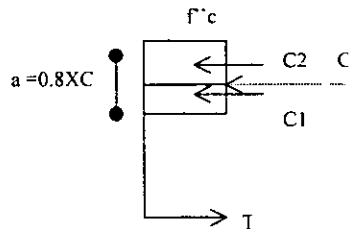
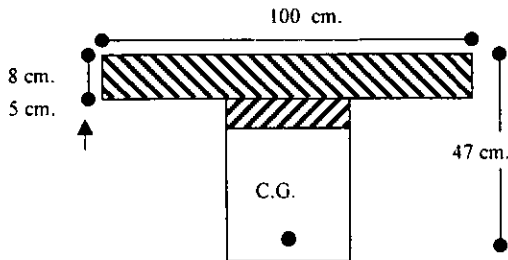
$$\epsilon_s = \frac{.003 \times 27}{20} = .0040$$

$$\epsilon_s > \epsilon_y \quad \therefore f_s = f_y$$

$$T = A_s f_y = 30.4 \times 4200 = 127\,680 \text{ kg.}$$

$C > T$   $\therefore$  se debe reducir el valor de C.

2do. tanteo:



$$T = 127\,680 \text{ kg.}, \quad C = 108\,800 \text{ kg.}$$

$$C = T; \quad C = C1 + C2$$

$$C2 = T - C1 = 127\,680 - 108\,800 = 18\,880 \text{ kg.}$$

$$C2 = b' \times s \times f'c; \quad b' = \text{ancho de la nervadura de la viga.}$$

Despejando s tenemos:

$$s = \frac{C2}{b' \times f'c} = \frac{18880}{30 \times 136} = 4.63 \text{ cm.}$$

$$C1 = .8 \times 100 \times 136 = 108\ 800 \text{ kg.}$$

$$C2 = 4.63 \times 30 \times 136 = 18\ 890.4 \text{ kg.}$$

$$C = C1 + C2 = 127\ 690.4 \text{ kg.}$$

$$C \approx T$$

Cálculo del momento. (tomando momentos con respecto a la fuerza de tensión.)

Fuerza ( ton.)	Brazo ( cm.)	Momento ( ton.m.)
C1 = 108.8	.43	46.78
C2 = 18.8	.33	6.20
		Mn = 52.98

Momento resistencia de diseño.

$$MR = Mn \times FR = .9 \times 52.98 \text{ ton.m.}$$

$$\underline{MR = 47.68 \text{ ton.m}}$$

Determinación de la resistencia por el procedimiento de ecuaciones.

$$a = \frac{As f_y}{f'c b} = \frac{30.4 \times 4200}{136 \times 100} = 9.4 \text{ cm.}$$

Como  $a > t$ , se aplican las siguientes ecuaciones:

$$A_{sp} = \frac{f'c t (b - b')}{f_y} = \frac{136 \cdot 8 \times 70}{4200} = 18.1 \text{ cm}^2.$$

$$a = \frac{(A_s - A_{sp}) f_y}{f'c b'} = \frac{(30.4 - 18.1) 4200}{136 \times 30} = 12.66 \text{ cm.}$$

$$M_n = A_{sp} f_y (d - t/2) + (A_s - A_{sp}) f_y (d - a/2)$$

$$M_n = 18.1 \times 4200 \times (47 - 8/2) + (30.4 - 18.1) \times 4200 \times (47 - 12.66/2)$$

$$M_n = 53.69 \times 10^5 \text{ kg. cm.}$$

Momento resistente de diseño = MR = Mn FR

$$\underline{MR = 53.69 \cdot .9 = 48.32 \text{ ton.m}}$$

### **Determinación de la relación balanceada.**

#### **SECCIONES RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS.**

Se mencionó anteriormente que la resistencia a flexión de secciones rectangulares simplemente armadas puede determinarse fácilmente por medio de la ecuación:

$$M_n = b d^2 f'c q (1 - 5q)$$

$$q = \frac{\rho f_y}{f'c}$$

O por medio de la gráfica para diseño por flexión, siempre que la sección sea subreforzada.

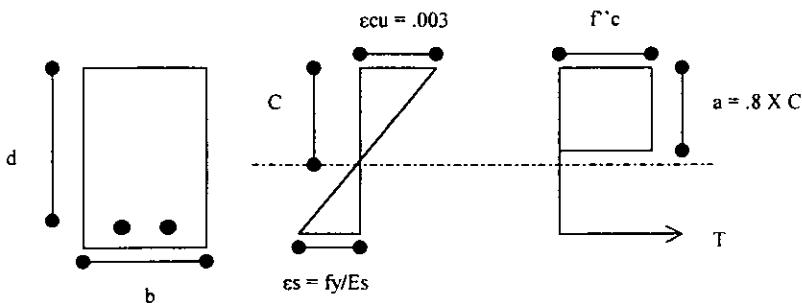
Conviene, entonces, disponer de un medio sencillo para determinar si la sección es subreforzada, o sea, si su relación de refuerzo,  $p$ , es menor que la relación balanceada,  $p_b$ . También es necesario calcular la relación balanceada para fines de diseño, ya que, para asegurar una ductilidad adecuada y reducir así el riesgo de fallas frágiles, los reglamentos de construcción especifican usar siempre relaciones de refuerzo menores que la balanceada.

Las NTC - 96 establecen relaciones  $p_b$  para construcciones normales y  $0.75p_b$  para construcciones en zonas sísmicas.

Para secciones rectangulares simplemente armadas, la relación balanceada puede calcularse con la ecuación:

$$p_b = \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{4800}{4800 + 6000}$$

Esta ecuación se deduce en la **figura 4.10**. Como puede verse en dicha figura, se obtiene de un estado de deformaciones unitarias en el cual se alcanzan simultáneamente la deformación de aplastamiento del concreto, que se supone igual a  $.003$ , y la deformación de fluencia del acero de refuerzo.



**Figura 4.10** Diagrama de esfuerzos y deformaciones para determinar la relación balanceada de secciones rectangulares simplemente armadas sometidas a flexión simple.

## SECCIONES RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS.

Se mencionó anteriormente al deducir las ecuaciones para calcular la resistencia de secciones doblemente armadas de sección rectangular, que dichas ecuaciones eran válidas siempre que fluyera el acero de tensión, o sea, que la relación de refuerzo de tensión,  $p$ , fuese menor que la relación balanceada  $p_b$ . Igualmente para fines de diseño es conveniente disponer de una expresión sencilla para el cálculo de  $p_b$ .

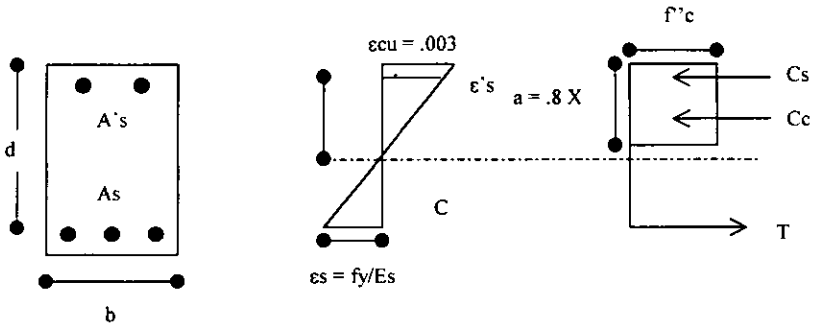
La deducción de las ecuaciones correspondientes se presenta en la **figura 4.11**. la ecuación 2 de esta figura permite calcular la relación balanceada de acero de tensión para el caso en que no fluye el acero de compresión. La utilización de esta ecuación resulta complicada en la práctica, por que es necesario determinar previamente el valor de la fuerza de compresión en el acero,  $C_s$ , y para calcular este valor se requiere obtener la profundidad del bloque de compresión  $a$ . Resulta entonces más conveniente, si ya se conoce el valor de  $a$ , determinar el valor de  $e_s$  por triángulos semejantes y compararlo con  $e_y$  para saber si fluye el acero de tensión.

Para el caso en que fluya el acero de compresión, la ecuación es:

$$p_b - p' = \frac{f'_c \times 8}{f_y} \times \left( \frac{6000}{6000 + f_y} \right)$$

Esta ecuación si se usa frecuentemente en la práctica para seleccionar relaciones de acero que aseguren la fluencia del acero de tensión.

El procedimiento consiste en seleccionar una determinada relación de acero de refuerzo de compresión  $p'$  y calcular la relación balanceada de acero de tensión  $p_b$  con la ecuación anterior. Obsérvese que si se usa una relación de acero de tensión  $p$ , menor que  $p_b$ , fluirá el acero de tensión pero no necesariamente el de compresión.



**Figura 4.11** Diagrama de esfuerzos para determinar la relación balanceada de secciones rectangulares doblemente armadas.

#### SECCIONES T.

Si el bloque de esfuerzos de compresión queda totalmente dentro del patín, la viga funciona como si fuera rectangular con un ancho igual al patín. Por lo tanto, la relación balanceada  $p_b$  se determina con la ecuación :

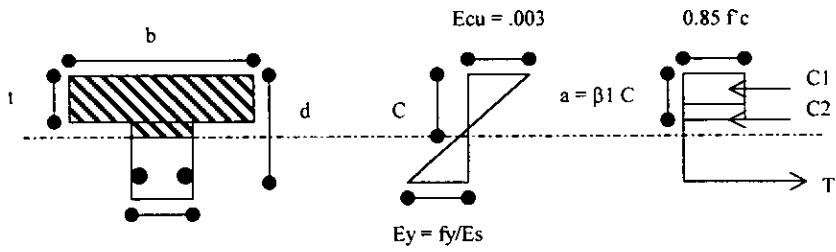
$$p_b = \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000}$$

Tomando como ancho  $b$  el del patín.

Si el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del alma, la relación balanceada puede calcularse con la siguiente ecuación deducida en la **figura 4.12**

$$p_b = \frac{f'_c}{f_y} \left( \frac{t(b'-b)}{b'd} + \frac{.8(6000)}{6000 + f_y} \right)$$

Obsérvese que en esta ecuación la relación  $p_b$  esta definida como  $A_s / b'd$ , o sea, esta calculada a partir del ancho del alma.



**Figura 4.12** diagrama de esfuerzos en una sección T para determinar la relación Balanceada.

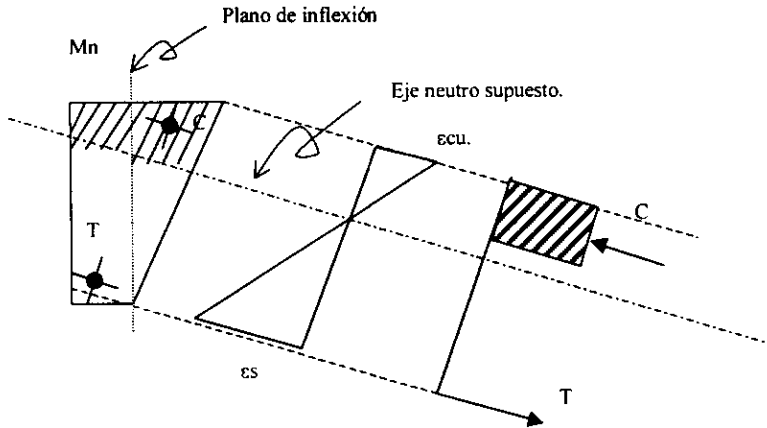


## **Flexión asimétrica.**

Cuando las secciones transversales no son simétricas respecto a un eje vertical y el momento flexionante no actúa en un plano vertical que pasa por dicho eje, se presenta la flexión asimétrica. Pueden considerarse dos casos de flexión asimétrica. El primero de ellos se presenta en secciones que no tienen ningún eje de simetría. El otro, más frecuente, es el de secciones que tienen dos ejes de simetría, pero en las que el momento flexionante actúa en un eje distinto a dichos ejes.

El primer caso se ilustra en la **figura 4.13** Para encontrar la resistencia de una sección de este tipo puede usarse el procedimiento de tanteos. Debido a la asimetría de la sección es necesario verificar en cada tanteo que la resultante de fuerzas de compresión sea igual a la resultante de las fuerzas de tensión y, además, que ambas resultantes queden en el plano de flexión o estén contenidas en un plano paralelo a él. Cuando las fuerzas de compresión y tensión están en el plano de flexión, la sección no tiene torsión; en cambio, si están en un plano paralelo al de flexión, la sección sí tiene torsión.

En la **figura 4.13** se muestra esquemáticamente un tanteo típico, las resultantes de compresión y de tensión no están en un plano paralelo al de flexión. Por lo tanto, generan un momento interno alrededor del eje determinado por la intersección del plano de flexión con la sección transversal, que no está equilibrado con un momento externo de la misma magnitud. Para lograr la condición de equilibrio, es necesario hacer tanteos en los que se varíe tanto la profundidad como la inclinación del eje neutro. Esto hace que el procedimiento sea más laborioso que en el caso de flexión simétrica.



**Figura 4.13** Primer caso de flexión asimétrica.

El segundo caso se ilustra en la **figura 4.14**. Se trata de obtener el momento nominal resistente,  $M_n$ , de una sección con dos ejes de simetría, cuando el plano de flexión está inclinado con respecto a dichos ejes. ( La línea N-N en la figura señala la intersección del plano de flexión con la sección transversal de la viga. ) Para esto se proyecta el momento  $M_n$  normal a la línea N - N sobre los ejes X y Y de simetría. Después se supone una posición del eje neutro, se calculan los valores de las resultantes de compresión y tensión, también se calculan los momentos de dichas resultantes alrededor de los ejes X y Y. Para que se satisfaga el equilibrio de la sección, las resultantes de compresión y tensión deben ser iguales entre sí y, además, la relación entre los momentos de las resultantes alrededor de los ejes X y Y debe ser igual a la relación entre las proyecciones del momento  $M_n$  alrededor de los ejes correspondientes. Para lograr estas condiciones de equilibrio es necesario comúnmente hacer gran número de tanteos variando la profundidad y la inclinación del eje neutro.

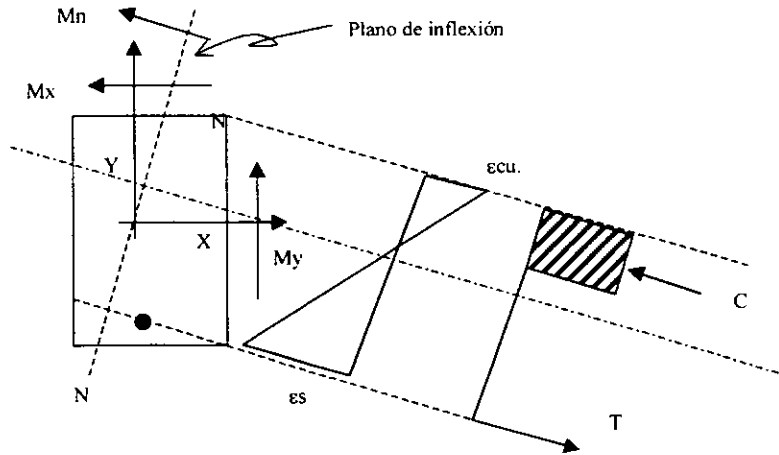
Un procedimiento aproximado más sencillo, consiste en calcular la resistencia de la sección alrededor de los ejes de simetría X y Y, como si se tratara de flexión simétrica.

Estos momentos se denominan  $M_{nx}$  y  $M_{ny}$ , respectivamente. Después se obtiene una relación entre los momentos internos  $M_x$  y  $M_y$  con la siguiente ecuación:

$$\frac{M_x}{M_{nx}} + \frac{M_y}{M_{ny}} = 1$$

A partir de la relación entre  $M_x$  y  $M_y$  y de la relación entre estos momentos que se establece al proyectar el momento  $M_n$  sobre los ejes  $X$  y  $Y$ . (figura 4.14), se pueden calcular los valores de  $M_x$  y  $M_y$  y el valor de  $M_n$ , que es la resistencia a flexión asimétrica.

Este caso se conoce con el nombre de flexión biaxial, ya que es equivalente al caso de una sección sujeta a flexión en dos planos perpendiculares simultáneamente.



**Figura 4.14** segundo caso de flexión asimétrica.

## **Cortante en vigas.**

El diseño por cortante es de principal importancia en las estructuras de concreto debido a que la resistencia a tensión del concreto es considerablemente menor que la de compresión.

El comportamiento de las vigas de concreto reforzado en el instante de la falla por cortante es muy diferente a su comportamiento por flexión. La falla es repentina sin suficiente aviso previo y las grietas diagonales que se desarrollan son más amplias que las de flexión. Debido a la naturaleza de dichas fallas, el diseñador deberá dimensionar secciones que sean suficientemente fuertes para resistir las cargas transversales externas sin que se alcance su capacidad de resistencia al cortante. El cortante es, en cambio, un parámetro muy significativo en el comportamiento de ménsulas y vigas de gran peralte.

Para visualizar el efecto de la fuerza cortante es útil recordar algunos conceptos elementales de la mecánica de los materiales, ya que, a niveles de carga bajos y antes de la aparición de grietas, el comportamiento del concreto reforzado se asemeja al de un material homogéneo y elástico.

El estudio se limitará al caso de elementos en que el estado de esfuerzos puede suponerse como un estado de esfuerzos plano.

En un plano cualquiera de un elemento sujeto a este tipo de esfuerzos, los esfuerzos normales y tangenciales correspondientes a los distintos planos que pueden pasarse por el punto varían en magnitud, al cambiar la orientación del plano de referencia. El estado de esfuerzos en un punto queda definido cuando se conocen los esfuerzos normales y tangenciales según dos planos perpendiculares cualesquiera. Aquellos planos en que sólo existen esfuerzos normales se llaman planos principales y son perpendiculares entre sí y tienen la propiedad de ser los esfuerzos máximo o mínimo que pueden existir en el punto.

Considerese una viga rectangular la cual esta hecha de un material linealmente elástico, homogéneo e isótropo. La viga esta sujeta a un sistema de cargas concentradas, tal como se muestra en la **figura 4.15**. En las regiones próximas a un apoyo o a una carga concentrada, la viga se encuentra sometida a esfuerzos tangenciales  $v$  y a esfuerzos normales  $f_x$  y  $f_y$ , definidos en dos direcciones paralelas y perpendiculares, respectivamente al eje del elemento. Los esfuerzos  $f_y$  se deben a efectos locales de las reacciones o de las cargas, y se desprecian en regiones alejadas de éstas. Los esfuerzos normales longitudinales,  $f_x$ , pueden evaluarse dentro del rango elástico del elemento mediante la fórmula:  $f_x = My/I$ , donde  $M$  es el momento flexionante que actúa en la sección considerada, y  $e$  es la distancia desde el eje neutro a un nivel considerado, e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal del elemento.

En la **figura 4.15** se muestra una distribución lineal típica de esfuerzos normales longitudinales.

$$v = \frac{VQ}{Ib}$$

La distribución elástica de esfuerzos tangenciales,  $v$ , se calcula con la expresión: donde  $V$  es la fuerza cortante en la sección,  $Q$  es el momento estático respecto al eje neutro del área de la sección situada arriba del nivel considerado,  $I$  es el momento de inercia y  $b$  es el ancho de la sección a nivel considerado. Si la sección es rectangular, esta expresión conduce a una distribución parabólica, con un valor máximo a la altura del eje neutro igual a  $3v/2bh$ . Esta distribución se muestra también en la misma figura.

Cuando los esfuerzos  $f_y$  no existen, o se desprecian, los esfuerzos principales,  $f_t$ , se pueden calcular a partir de los esfuerzos tangenciales y normales mediante la expresión:

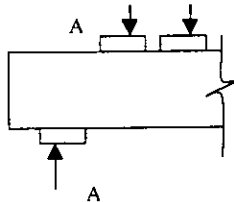
$$f_t = \frac{f_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v^2}$$

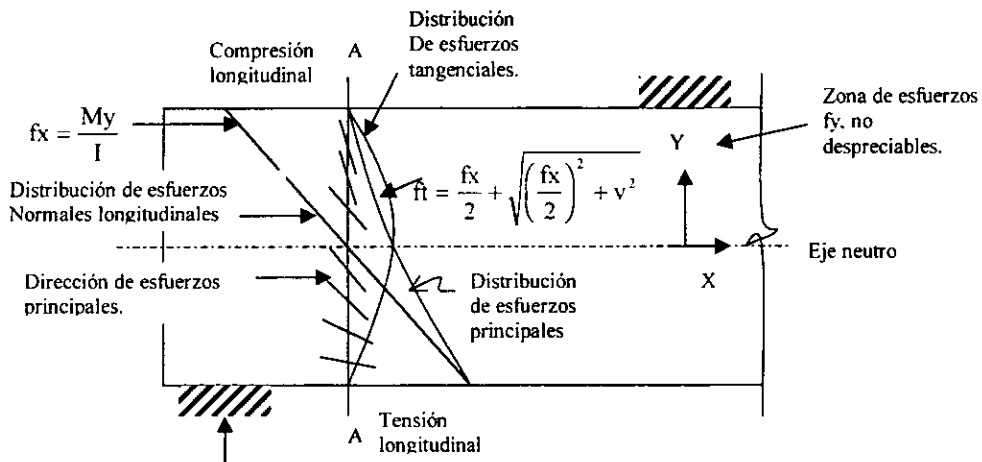
En esta expresión, los esfuerzos  $f_x$  y  $f_t$  son positivos cuando son de tensión. El signo positivo corresponde al esfuerzo principal máximo, que es el que interesa principalmente en el caso de elementos de concreto, en tanto que el negativo corresponde al esfuerzo principal mínimo. En lo sucesivo se trabajará exclusivamente con el esfuerzo principal máximo. La inclinación del plano correspondiente al esfuerzo principal máximo se obtiene mediante la ecuación:

$$\tan 2\theta = 2v / f_x$$

Donde  $\theta$  es el ángulo formado por el esfuerzo principal máximo con el eje de la pieza. Es fácil comprobar que en los puntos en que existe únicamente esfuerzo cortante, el esfuerzo principal máximo es igual a  $v$ , y tiene una inclinación de  $45^\circ$  respecto al eje horizontal. Igualmente es claro que el esfuerzo principal de tensión es nulo en la fibra superior, e igual al esfuerzo normal en la fibra inferior. En general, en la zona de compresión el esfuerzo normal  $f_x$ , reduce el valor del esfuerzo principal máximo respecto al valor correspondiente en el eje neutro, en tanto que en la zona de tensión lo aumenta, como se indica en la **figura 4.15**. En esta figura se muestra, además una distribución de las intensidades e inclinaciones de las tensiones principales en una sección típica de una viga.

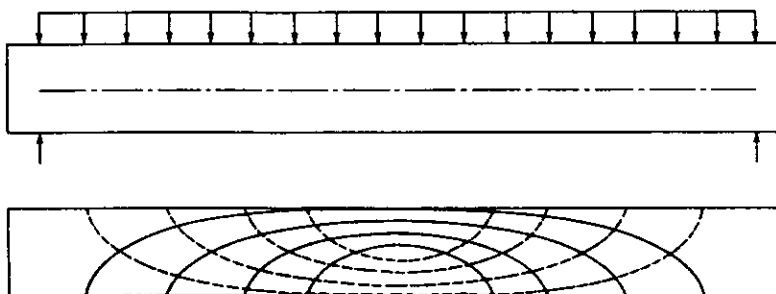
La presencia de una carga axial solamente modificaría la posición del eje neutro y, por lo tanto, la posición de la línea de esfuerzo normal nulo o de máximo esfuerzo tangencial.





**Figura 4.15** Distribución de esfuerzos en una sección de viga.

Una forma conveniente de representar la orientación de los esfuerzos en los distintos puntos de un elemento, consiste en trazar las redes de trayectorias de esfuerzos principales. Estos diagramas muestran gráficamente la dirección de los esfuerzos principales en cualquier punto del elemento. En la **figura 4.16** se ilustra una red típica de esfuerzos principales, para el caso de una viga libremente apoyada sujeta a una carga uniforme.



**Figura 4.16** trayectorias de los esfuerzos principales en una sección homogénea isotrópica. (líneas sólidas, trayectorias de tensión; líneas punteadas, trayectorias de compresión.)

Como la resistencia del concreto a esfuerzos de tensión es baja, comparada con su resistencia a esfuerzos de compresión, o a esfuerzo cortante propiamente dicho, un elemento de concreto tenderá a fallar según superficies perpendiculares a las direcciones de las tensiones principales.

En vigas de concreto esto hace necesario proporcionar refuerzo de tensión del concreto en cualquier zona del elemento.

El efecto primordial de la fuerza cortante en un elemento de concreto, es el desarrollo de esfuerzos de tensión inclinados con respecto al eje longitudinal del miembro. Son estos esfuerzos los que pueden originar la falla del elemento a una carga inferior a aquella que produciría una falla en flexión.

En rigor, no debe hablarse de fallas de esfuerzo cortante, ya que las grietas que inclinadas que pueden presentarse en zonas de fuerza cortante considerable son en realidad grietas de tensión en planos inclinados. Una falla de esfuerzo cortante podría presentarse, por ejemplo en la cara de contacto de los dos elementos de una viga compuesta, formada por un elemento inferior precolado y un elemento superior colado en el lugar, donde el esfuerzo cortante en dicha cara puede exceder la resistencia al deslizamiento relativo de los dos elementos.

De lo anterior se puede concluir que una forma razonable de reforzar vigas de concreto consistiría en colocar barras de acero siguiendo las trayectorias de los esfuerzos principales de tensión. Esto, sin embargo, es poco práctico ya que las dificultades constructivas son obvias.

El comportamiento de un elemento de concreto reforzado, es bastante mas completo de lo que se ha descrito, pues la distribución de esfuerzos cambia apreciablemente en el momento en que se exceden las tensiones que puede soportar el concreto y aparecen grietas. La posición en que se forman estas grietas no puede predecirse con exactitud, ya existen siempre variaciones locales en la resistencia del



concreto, que no es un material realmente homogéneo. La presencia de grietas impide idealizar de una manera sencilla el funcionamiento de un elemento de concreto reforzado. A esta dificultad se añade que el concreto no es un material elástico y que, por lo tanto, las distribuciones de esfuerzos cambian con el nivel de carga.

Debido entonces a la complejidad del problema, los métodos utilizados en la actualidad para dimensionar elementos de concreto sujetos a fuerza cortante se basan en el conocimiento experimental de su comportamiento. Los estudios experimentales se han concentrado principalmente en la determinación de la resistencia del concreto al agrietamiento inclinado y de la contribución del refuerzo transversal a la resistencia.

Los primeros ensayos encaminados a la determinación de los efectos de la fuerza cortante se realizaron hace más de 75 años. Desde entonces, y en especial de 1946 a la fecha, se han llevado a cabo muchas investigaciones tendientes a evaluar la influencia de distintos factores, de manera que se dispone en la actualidad de una cantidad importante de datos experimentales. Sin embargo, como se verá, son tantas las variables que influyen en la resistencia de elementos sujetos a fuerza cortante, y sus efectos dependen tanto de la interacción de las distintas variables, que ha sido difícil racionalizar los resultados en las investigaciones y experiencias disponibles. No se ha llegado a establecer todavía un procedimiento para determinar la resistencia, para efectos prácticos de diseño, que sea realmente satisfactorio desde un punto de vista teórico. Sin embargo, el conocimiento actual es suficiente para poder dimensionar elementos de concreto que resistan los efectos de la fuerza cortante con seguridad razonable.

### **Comportamiento y modos de falla.**

En esta sección se describen el comportamiento bajo carga y los modos de falla de vigas o columnas de concreto en los cuales la fuerza cortante es importante. Para facilitar la explicación se agrupan los elementos en los dos tipos que se muestran en la **figura 4.17**

- a. Vigas o columnas sin refuerzo transversal en el alma, sujetas a combinaciones de fuerza cortante, momento flexionante y carga axial.
- b. Vigas o columnas con refuerzo transversal en el alma sujetas a combinaciones de fuerza cortante, momento flexionante y carga axial.

Elementos sin refuerzo en el alma.

Secciones rectangulares.

Considérese un elemento sometido a carga axial en la forma mostrada en la **figura 4.18a**. En los primeros incrementos de carga no existe diferencia entre el comportamiento de un elemento que falle por efecto de fuerza cortante y el de otro que falle por flexión, el comportamiento del elemento es esencialmente elástico. Al aumentar las cargas, la fuerza cortante puede originar esfuerzos principales que excedan la resistencia a tensión del concreto, produciendo grietas inclinadas a una altura aproximada a medio peralte. Estas grietas pueden aparecer súbitamente en puntos donde no exista una grieta de flexión o, muy frecuentemente, pueden presentarse como continuación de una grieta de flexión que gradualmente cambia la inclinación.

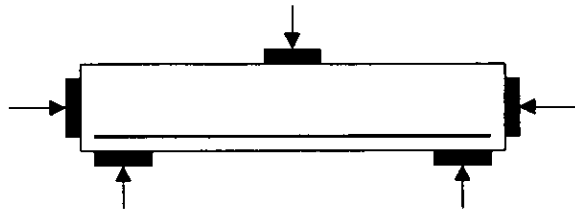
En miembros sujetos a compresión o tensión axial, las grietas inclinadas se forman a cargas mayores o menores, respectivamente, que la carga que produce el agrietamiento del mismo miembro sin carga axial. A partir de este momento, el comportamiento del elemento difiere en forma importante del correspondiente a un miembro que falle por flexión. La grieta inclinada puede aparecer de manera repentina, sin señal previa, y extenderse inmediatamente hasta causar el colapso de la pieza, como se muestra en la **figura 4.18a**. En este caso la falla se denomina de tensión diagonal. Por otra parte, puede suceder que el agrietamiento inclinado se desarrolle gradualmente y que el colapso de la pieza se produzca finalmente por el aplastamiento de la zona de compresión en el extremo de la grieta inclinada, al reducirse considerablemente la zona

disponible para soportar los esfuerzos de compresión originados por flexión. En este caso, la falla se denomina de compresión por cortante (**figura 4.18b**.) La diferencia esencial entre ambos tipos de falla consiste en que, una falla por tensión diagonal, el agrietamiento inclinado es súbito y causa de inmediato el colapso de la pieza, mientras que una falla de compresión por cortante la pieza puede soportar cargas mayores que las que produce el agrietamiento inclinado.

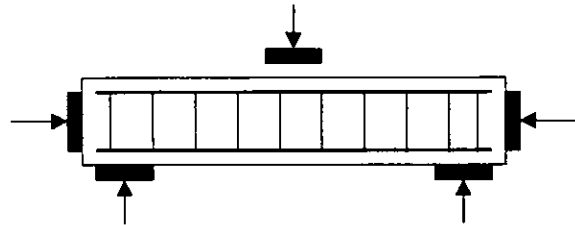
Algunos autores establecen otro tipo de falla, denominada generalmente por adherencia por cortante. Este tipo se caracteriza por que la resistencia se alcanza cuando se presentan extensos agrietamientos longitudinales al nivel del acero de tensión, simultáneos con un aplastamiento ligero en la zona de compresión en el extremo de la grieta inclinada, como se muestra en la **figura 4.18c**

Desde el punto de vista del comportamiento de una estructura, es muy desventajoso que un elemento alcance su resistencia debido a uno de estos tipos de falla antes de que se presente la fluencia del acero longitudinal, ya que estas fallas se producen rápidamente a deformaciones pequeñas. En consecuencia, la estructura resulta poco dúctil.

La carga que produce las primeras grietas inclinadas completas se suele denominar carga de agrietamiento inclinado. En general, una grieta inclinada importante es aquella que se extiende a través de casi todo el peralte del elemento y se empieza a prolongar a lo largo del acero de tensión. Varios investigadores la han definido de acuerdo con criterios basados en la observación visual del elemento, y, por lo tanto, la carga correspondiente está sujeta a variaciones de orden subjetivo. Sin embargo, esta carga marca en general un cambio importante en el comportamiento del miembro. Cuando la grieta inclinada se produce súbitamente y causa el colapso de la pieza, la carga de agrietamiento es también la resistencia del elemento.

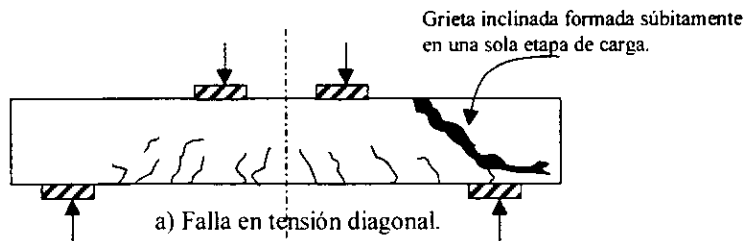


a) elemento sujeto a M; P y V, sin refuerzo transversal.



b) elemento sujeto a M, P y V, con refuerzo transversal.

Figura 4.17 Tipos elementos sujetos a fuerza cortante.



Grieta inclinada formada gradualmente en varias etapas de

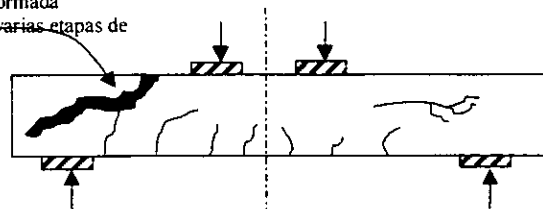


Figura 4.18 Representación esquemática de los diferentes tipos de falla en elementos en los que predomina la fuerza cortante

## Secciones no rectangulares.

La información disponible actualmente sobre el comportamiento y la resistencia de elementos de sección no rectangular es mucho menor que la existente sobre elementos de sección rectangular. Se han realizado ensayos de laboratorio sobre elementos de sección circular con acero longitudinal distribuido en el perímetro de la sección. El comportamiento general de estos elementos fue similar al descrito anteriormente, excepto que las grietas inclinadas tendían a formarse en una forma más gradual, debido a la presencia de acero longitudinal en todo el peralte de la pieza.

En ensayos de elementos de sección I se puede presentar un tipo adicional de falla: aplastamiento del alma por esfuerzos de compresión aproximadamente paralelos a la dirección de las grietas inclinadas. Este tipo de falla sólo se presenta cuando el alma es relativamente delgada en comparación con el ancho de la zona de compresión. Por lo demás, el comportamiento se semejante al de secciones rectangulares.

## Elementos con refuerzo en el alma.

El refuerzo transversal, o refuerzo en el alma, que se utiliza en elementos de concreto para aumentar su resistencia a los efectos de la fuerza cortante puede ser de distintos tipos. En algunos casos se aprovecha parte del acero principal de flexión, doblándolo en zonas donde ya no es requerido para tomar esfuerzos longitudinales, de manera que atraviese las regiones donde pueden aparecer grietas inclinadas. Estas barras, para que sean efectivas, deben anclarse en la zona de compresión ( **figura 4.19 a** ). El tipo de refuerzo transversal de uso más extendido es el estribo ( **figura 4.19 b** ).

En la **figura 4.19 d** se ilustran las formas más usuales de este tipo de refuerzo. Comúnmente los estribos son de dos ramas, en U o cerrados, siendo los cerrados los más frecuentes. Sin embargo, en algunos casos se utilizan también de cuatro ramas. El tipo de estribo más usual es aquel que tiene sus extremos doblados a 135°.

Generalmente los estribos se colocan en posición vertical, pero en ocasiones se colocan inclinados con respecto al eje longitudinal del elemento con un ángulo que varía entre 30° y 60°, siendo 45° la inclinación más común ( **figura 4. 19 c** )

El comportamiento bajo carga de elementos con refuerzo en el alma, es similar al descrito para elementos sin refuerzo hasta la aparición de las primeras grietas inclinadas. A partir de este momento, la presencia del refuerzo transversal restringe el crecimiento de las grietas inclinadas. Si se tiene refuerzo transversal en cantidades suficientes, las grietas inclinadas serán pequeñas y de poca consideración y la falla se producirá en flexión, antes o después de la fluencia del acero longitudinal.

Se ha observado que cualquiera que sea el tipo de refuerzo transversal que se utilice, éste no contribuye en forma apreciable a resistir los esfuerzos inclinados de tensión hasta que se forman las primeras grietas inclinadas en el alma de la pieza. es decir, el refuerzo en el alma influye muy poco en la magnitud de la carga que produce estas grietas. Pero después de la aparición de las grietas, el refuerzo transversal se deforma gradualmente al incrementar la carga, hasta que alcanza su límite de fluencia. Esta condición limita la contribución de este refuerzo a la resistencia del elemento. Si el elemento tiene poco refuerzo en el alma, la falla puede producirse por fractura de una o varias de las barras de refuerzo transversal. Con el objeto de evitar que el ancho de las grietas inclinadas sea excesivo, las NTC -96 del reglamento del DDF, indican que el acero transversal tenga un esfuerzo de fluencia máximo de 4200 kg./cm<sup>2</sup>.

En los ensayos de laboratorio se ha observado que la resistencia a los efectos de la fuerza cortante de un elemento con refuerzo transversal, es igual a su resistencia al agrietamiento inclinado más la contribución del refuerzo transversal. Normalmente, en un diseño se busca que esta suma sea mayor que la resistencia del elemento en flexión o flexocompresión, para garantizar que no se presente colapso por efectos de fuerza cortante.

Es importante tener en cuenta que, para que el refuerzo transversal sea realmente efectivo, debe colocarse a espaciamientos tales, a lo largo del eje de la pieza, que cualquier grieta inclinada potencial que pudiera formarse en el elemento sea cruzada cuando menos por una barra de refuerzo en el alma.

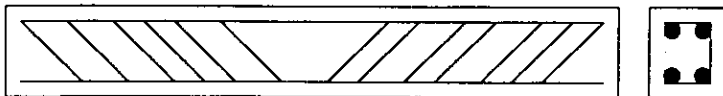
Otro aspecto importante del refuerzo en el alma es el de incrementar la ductilidad del elemento, al proporcionar confinamiento lateral al concreto sujeto a compresión. Este efecto es de la misma naturaleza que el efecto del zuncho en columnas con carga axial, aun cuando no es tan grande como éste, tanto por que la cuantía del refuerzo de estribos es menor que la de los zunchos, como por que el efecto de confinamiento es menor en una pieza sujeta a flexocompresión que en una viga sujeta a compresión axial. Este efecto es de gran importancia en estructuras que pueden estar sujetas a fuerzas sísmicas. en las que al desarrollar una adecuada ductilidad es tan importante como el garantizar la resistencia necesaria.



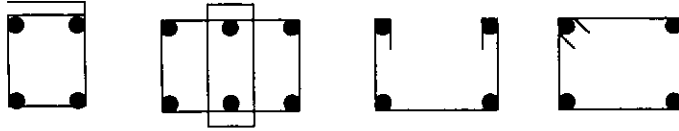
a) Barras dobladas



b) Estribos verticales



c) Estribos inclinados.



d) Tipos de estribos.

**Figura 4.19** Tipos de refuerzo.

### Mecanismo de falla por fuerza cortante.

Miembros sin refuerzo transversal.

Se ha dicho que en algunas ocasiones el colapso de algún elemento se produce súbitamente al presentarse el agrietamiento inclinado, mientras que en otras el miembro es capaz de soportar cargas apreciablemente mayores que la que produjo dicho agrietamiento. Esto puede explicarse de una manera cualitativa observando que la presencia de una grieta inclinada origina un cambio importante en el comportamiento del miembro.

Como ejemplo considérese una viga sin refuerzo transversal, provista de refuerzo longitudinal adecuado y sujeta a una carga concentrada aplicada a una distancia  $x$  del apoyo. En la **figura 4.20** se muestra un diagrama de cuerpo libre del elemento después de haberse desarrollado una grieta inclinada. Si se supone que la fuerza cortante en la longitud  $x$  es constante e igual a la reacción, despreciando por lo tanto, el efecto del peso propio, los momentos flexionantes varían como se presenta en dicha figura.

Antes de que aparezca la grieta inclinada el comportamiento del miembro es prácticamente lineal y, por lo tanto, la tensión en el acero es sensiblemente proporcional al momento flexionante. Pero vez que se desarrolla una grieta inclinada, el comportamiento del elemento en la zona agrietada se asemeja al de un arco rebajado.



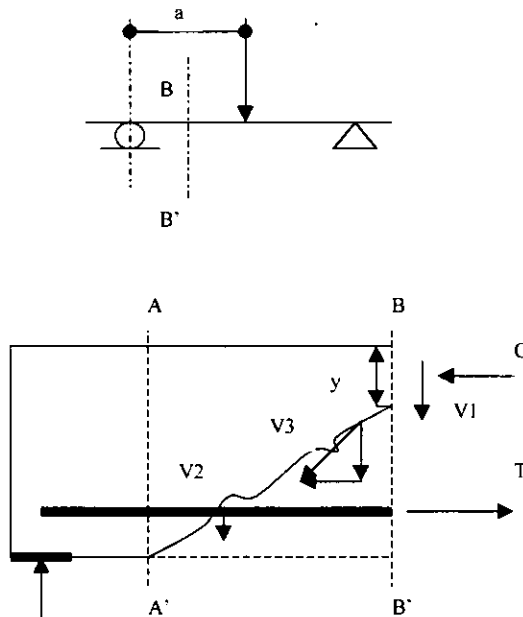
Por equilibrio, la tensión en el acero entre las secciones que limitan la grieta inclinada (A-A' y B-B') debe ser constante e igual al valor correspondiente a la sección de momento flexionante mayor (B-B').

La presencia de la grieta inclinada produce tres efectos importantes:

- reduce la zona disponible para tomar esfuerzos de compresión; la compresión total debe ser tomada íntegramente en la profundidad  $y$ . ( **figura 4.20** )
- produce un aumento súbito en la tensión del refuerzo en la sección A-A', hasta que ésta alcanza el valor correspondiente a la sección B-B'.
- reduce el área disponible para tomar la fuerza cortante en la sección. Antes de la aparición de la grieta, la fuerza cortante se distribuye de alguna manera a través de todo el peralte del elemento, mientras que después del agrietamiento, la mayor parte de la fuerza cortante tiene que ser resistida por la zona de compresión del concreto ( fuerza V1) y sólo una parte pequeña es resistida por la barra de tensión (fuerza V2) y por el efecto de trabazón entre las rugosidades de las superficies de las dos caras de la grieta ( componente vertical de la fuerza V3).

Si al desarrollarse la grieta inclinada, la zona de compresión reducida es capaz de resistir aún la compresión resultante, y si el acero de refuerzo puede tomar el incremento súbito de tensión, entonces la grieta inclinada se estabiliza y el miembro es capaz de resistir cargas mayores trabajando como arco rebajado. Si por el contrario, la zona de compresión reducida por la grieta inclinada es ya incapaz de tomar la fuerza de compresión, se produce una falla por aplastamiento del concreto en la parte superior de la grieta inclinada, simultáneamente con la formación de ésta. También es posible que al formarse la grieta inclinada, la longitud del acero de refuerzo entre la sección A-A' y el extremo de la pieza sea insuficiente para desarrollar por adherencia la tensión necesaria y, en consecuencia, la falla se producirá también rápidamente.

En resumen, si al desarrollarse la grieta inclinada la zona disponible para tomar esfuerzos de compresión es insuficiente, o si el acero es incapaz de desarrollar la adherencia requerida para tomar el incremento de tensión, se produce el colapso del elemento inmediatamente después de formarse la grieta inclinada, y la falla es por tensión diagonal. Si la grieta se estabiliza y el elemento es capaz de tomar carga adicional, la falla será de adherencia por cortante cuando se agote la capacidad de transmitir tensiones por adherencia entre el acero y el concreto, o bien, de compresión por cortante cuando se aplaste el concreto en la zona de compresión. Cuando el elemento carece de refuerzo transversal es frecuente que estos dos tipos de falla se presenten casi simultáneamente.



**Figura 4.20** Diagrama de cuerpo libre al aparecer una grieta inclinada.

## Miembros con refuerzo transversal.

La presencia de refuerzo transversal influye muy poco en el valor de la carga de agrietamiento y en el comportamiento general del elemento antes de que se desarrolle la grieta inclinada. Pero una vez que se presenta dicha grieta, el refuerzo en el alma contribuye eficazmente a incrementar la capacidad de carga del elemento, y si este refuerzo se proporciona por efecto de los esfuerzos longitudinales de flexión y no por efecto de la fuerza cortante.

El refuerzo en el alma desempeña un papel triple después de la aparición de la grieta inclinada. Por una parte, restringe el crecimiento y desarrollo del agrietamiento inclinado, conservando en esta forma una profundidad mayor para la zona de compresión. Esto incrementa la capacidad de esta zona para resistir fuerzas normales y tangenciales. Por otra parte, cuando se usa refuerzo transversal en forma de estribos, éstos mejoran la capacidad por adherencia del miembro, pues tienden a evitar fallas por desgarramiento al nivel del acero de refuerzo. Finalmente, el refuerzo en el alma toma una porción importante de la fuerza cortante externa, y cuando el refuerzo forma anillos cerrados incrementa ligeramente la resistencia de la zona de compresión debido al efecto de confinamiento.

El mecanismo de falla de un elemento con refuerzo transversal ha sido difícil de establecer con precisión hasta ahora. Sin embargo algunas de las funciones del refuerzo transversal pueden explicarse cualitativamente haciendo mención a la idealización propuesta por Ritter en 1899. Esta idealización, conocida como la analogía de la armadura, se presenta a continuación.

Ritter propuso que una viga con refuerzo transversal, en la cual existen grietas causadas por tensiones inclinadas, puede idealizarse como una armadura en la que el refuerzo longitudinal funciona como la cuerda de tensión, el refuerzo transversal como las diagonales de tensión, el concreto de la zona comprimida como la cuerda de

compresión y las porciones de concreto entre las grietas inclinadas como diagonales de compresión. Esta idealización se muestra en la **figura 4.21a**

En el análisis se supone que las grietas inclinadas forman un ángulo  $\theta$  y el refuerzo transversal un ángulo  $\alpha$  con el eje de la pieza. Las hipótesis en que se basa el análisis de la armadura son las siguientes:

- La zona comprimida del elemento toma sólo esfuerzos normales de compresión.
- El refuerzo longitudinal de tensión toma únicamente esfuerzos normales de tensión.
- Todas las tensiones inclinadas son resistidas por el refuerzo transversal.
- Las grietas inclinadas se extienden desde el refuerzo longitudinal de tensión hasta el centroide de la zona de compresión.
- Se desprecia el efecto del peso propio o de cargas distribuidas entre grietas inclinadas consecutivas, es decir, el incremento de momento entre dos secciones distantes  $s$  entre sí es igual a  $Vs$ , donde  $V$  es la fuerza cortante en la zona entre las dos secciones consideradas.

En la **figura 4.21b** se muestran las fuerzas que actúan en una junta de la cuerda de tensión de la armadura idealizada. El espaciamiento horizontal entre grietas inclinadas y entre barras o estribos de refuerzo transversal se designa por  $s$ . La fuerza de compresión en la diagonal de concreto se denota por  $f_c$ , y la de tensión en la diagonal de acero por  $A_v f_s$ , en donde  $A_v$  es el área del refuerzo transversal y  $f_s$  es el esfuerzo a que esta sujeto.

Debido al incremento de momento,  $\Delta M$ , existe un incremento en la tensión longitudinal igual a  $\Delta T$ .

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$A_v F_s \operatorname{sen} \alpha = F_c \operatorname{sen} \theta \quad \dots\dots(1)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\Delta T = A_v f_s \operatorname{cos} \alpha + F_c \operatorname{cos} \theta \quad \dots\dots(2)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (e)

$$\Delta T = \Delta M/z = V_s/z \quad (z \text{ brazo del par resistente}) \quad \dots(3)$$

Sustituyendo  $F_c$  de la ecuación 1 y  $\Delta T$  de la ecuación 3, en la ecuación 2 se tiene:

$$\frac{V_s}{z} = A_v f_s \left[ \operatorname{cos} \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \theta} \right] \quad \dots\dots(4)$$

Por lo que la fuerza cortante máxima que puede tomarse con un área  $A_v$  de refuerzo transversal es:

$$V = \frac{A_v f_s z}{s} \left[ \operatorname{cos} \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha} \right] \quad \dots(5)$$

Si se admite que las grietas se forman comúnmente con un ángulo  $\theta = 45^\circ$

$$V = \frac{A_v f_s z}{s} (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha) \quad \dots(6)$$

De esta expresión puede deducirse que, si la capacidad de carga del elemento depende directamente de su resistencia a esfuerzos de tensión inclinados, la carga máxima se obtiene cuando fluye el acero de refuerzo transversal; esto es, cuando  $f_s = f_y$ . Esto presupone que tanto el concreto de la zona de compresión y de tensión de la armadura idealizada, deben ser capaces de soportar los incrementos de las fuerzas correspondientes, originados por el desarrollo de las grietas inclinadas.

La analogía de la armadura se ha usado durante muchos años, en la forma simple que desarrollo Ritter, para estimar la resistencia a fuerza cortante de miembros con refuerzo transversal. Para lograr una correlación aceptable entre los resultados de ensayos y las resistencias calculadas con la analogía de la armadura, lo que se ha hecho es sumar a la resistencia calculada, la que corresponde a un elemento sin refuerzo transversal. Aunque de esta manera se han obtenido expresiones que permiten calcular la resistencia con aproximación suficiente para fines prácticos, el procedimiento adolece de limitaciones teóricas, por lo que se ha continuado en la búsqueda de métodos más racionales para explicar el comportamiento general bajo la acción de fuerza cortante y para derivar de ellos procedimientos de diseño.

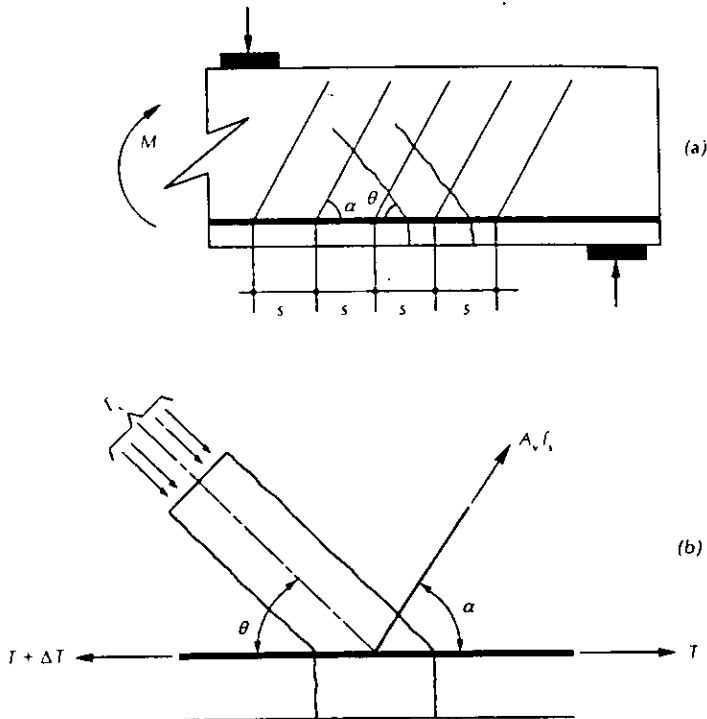


Figura 4.21 Analogía de la armadura

## Expresiones para evaluar la resistencia a fuerza cortante.

Como se ha dicho, no se cuenta con una teoría general que explique satisfactoriamente los efectos de la fuerza cortante en elementos de concreto. Por consiguiente, las expresiones propuestas reflejan los efectos de las variables principales, dentro de los límites de la información experimental.

Miembros sin refuerzo transversal.

La resistencia nominal de estos miembros se calcula con las siguientes ecuaciones, según la relación de refuerzo.

Si  $p < 0.01$

$$V_c = [(.20 + .30p)\sqrt{f'_c}] bd \quad \dots(A)$$

Si  $p > 0.01$

$$V_c = 0.5 \sqrt{f'_c} bd \quad \dots(B)$$

Las ecuaciones anteriores son aplicables a miembros cuya relación claro peralte no sea menor que cinco. También que si el peralte total es mayor que 70 cm., la resistencia calculada se deduzca en 30% y que si la relación entre el peralte total y el ancho de la viga excede de seis, se reduzca en otro 30%. Las NTC-96 permiten tomar en cuenta la contribución a la resistencia del patín a compresión en secciones T, I o L. Esto se logra sumando la cantidad  $t^2$  al área  $bd$  de las ecuaciones anteriores, en el caso de vigas T e I y  $t^2/2$  en el caso de vigas L. En estos casos  $b$ , representa el ancho del alma y  $t$ , el espesor del patín.

El efecto de una carga axial de compresión se toma en cuenta multiplicando la resistencia calculada con las ecuaciones A y B por el término  $[1+0.07 (Pu/Ag)]$ ,  $[1+0.07 (Pu/Ag)]$  en sistema internacional, donde  $Pu$  es la carga axial multiplicada por el factor de carga y  $Ag$  es el área gruesa de la sección, siempre que  $Pu$  no exceda de  $[0.7 f'c Ag + 2000 As]$ ,  $[0.7 f'c Ag + 16 As]$  en sistema internacional. Cuando la carga axial es mayor que este valor, lo cual sucede con cargas axiales muy elevadas, la resistencia a corte se va disminuyendo linealmente desde el valor correspondiente al límite anterior hasta un valor nulo para la resistencia a compresión axial, o sea para  $Pu = Ag f'c + As Fy$ .

En el caso de cargas axiales de tensión, la resistencia obtenida por las ecuaciones A y B se multiplica por el factor  $[1+0.03 ( Pu/Ag )]$ ,  $[1+0.3 ( Pu/Ag)]$  en sistema internacional, donde  $Pu$  tiene signo negativo por ser de tensión.

Cuando existan cargas axiales, el valor de la relación de refuerzo,  $p$ , que se utilice para determinar si se usa la ecuación A o B, se calcula usando el área de las barras de la capa de refuerzo más próxima a la cara de tensión, o a la cara de compresión mínima, en secciones rectangulares, o tomando un área de acero igual a  $0.33 As$ , en secciones circulares. En éstas últimas  $bd$  se sustituirá por  $Ag$ .

Miembros con refuerzo transversal.

La resistencia a fuerza cortante de miembros con refuerzo en el alma se considera igual a la suma de la resistencia del concreto calculada como se indicó en la sección anterior, y de la contribución de la resistencia del refuerzo en el alma. La contribución del acero en el alma se calcula con base en la analogía de la armadura, suponiendo que el refuerzo en el alma fluye en la falla. La contribución del refuerzo en el alma se calcula como:

$$V_s = \frac{A_v f_y ( \text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha ) d}{s}$$



Donde:

$A_v$  = área total del refuerzo en el alma en una distancia  $s$ , medida en dirección paralela al refuerzo longitudinal.

$\alpha$  = ángulo entre las barras o estribos de refuerzo en el alma y el eje longitudinal del miembro.

$s$  = separación de estribos o barras dobladas, medida en dirección paralela a la del refuerzo longitudinal.

En el caso de estribos perpendiculares al refuerzo longitudinal ( $\alpha = 90^\circ$ ), la ecuación se reduce a:

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s}$$

Se permite usar estas mismas ecuaciones para secciones circulares, sustituyendo  $d$  por el diámetro de la sección.

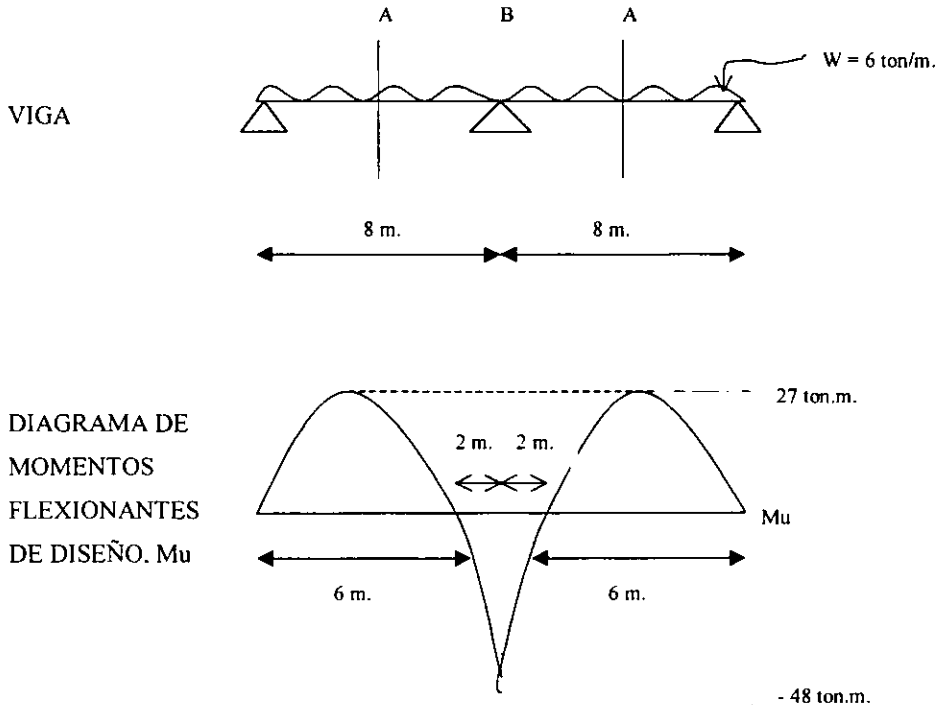
La resistencia de diseño se obtiene multiplicando la resistencia nominal por un factor  $FR = 0.8$ , o sea igual al de miembros sin refuerzo transversal. No se permite que la resistencia de diseño total de estos miembros exceda de  $2FR \sqrt{f'_c}$  bd. ( $0.64 FR \sqrt{f'_c}$  en SI), ni usar estribos con esfuerzo de fluencia mayor de  $4200 \text{ kg./cm}^2$ .

En vigas en las que la carga de diseño,  $V_u$ , sea menor que la resistencia del concreto,  $VCR$ , y en las que por lo tanto no requerirá teóricamente refuerzo por cortante, se especifica colocar estribos verticales por lo menos del número 2, espaciados a cada medio peralte efectivo, a partir de toda unión de viga con columnas o muros hasta un cuarto del claro correspondiente.

Cuando  $V_u$  es mayor que  $V_{CR}$ , pero menor o igual a  $1.5 FR \sqrt{f'_c} b d$ , ( $.47 FR \sqrt{f'_c}$  en SI), el espaciamiento de estribos no debe exceder de  $FR A_v f_y / 3.5b$ , ( $FR A_v f_y / 0.34b$  en SI) ni de  $0.5d$ . Si  $V_u$  es mayor que  $1.5 FR \sqrt{f'_c} b d$ , el espaciamiento no debe ser mayor que  $0.25d$ .

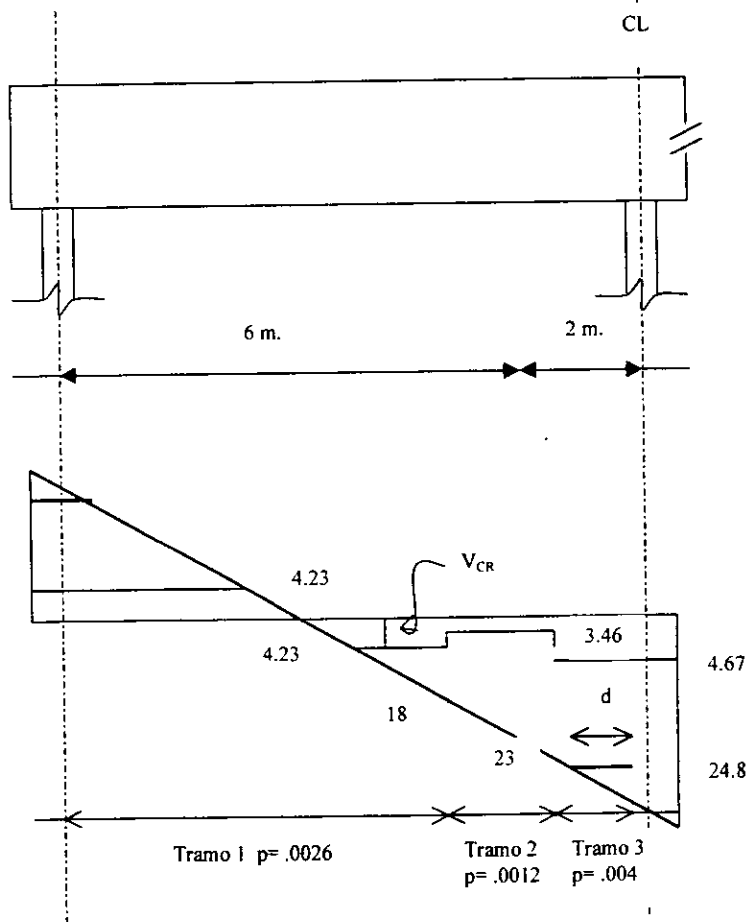
También se presentan en las NTC - 96 limitaciones sobre interrupciones y traslapes del refuerzo longitudinal, se especifica al respecto que en tramos comprendidos a un peralte efectivo de las secciones donde, en zonas de tensión, se interrumpa más que 33 por ciento, o traslape más que 50 por ciento del refuerzo longitudinal, la fuerza cortante máxima que puede tomar el concreto se considere de  $0.7V_{CR}$ .

### Dimensionamiento por fuerza cortante de una viga continua.



Concreto :  $f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero :  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$



Dimensionamiento.

Fuerza cortante que toma el concreto

Tramo 1 por sencillez se considerará la  $V_{CR}$  que corresponda las dos barras no. 6 que se corren en todo el claro,  $A_s = 5.70 \text{ cm}^2$ .

$$p = 5.70 / 30 \times 71 = .00268 < .01$$

$$VCR = 0.7 FR bd ( 0.2 + 0.3p ) \sqrt{f'c}$$

$$VCR = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 71 \times ( .2 + .3 \times .00268 ) \times 12.65 = 4231 \text{ kg.}$$

Tramo 2 se considerará el área de dos barras no. 4,  $A_s = 2.54 \text{ cm}^2$

$$p = 2.54 / 30 \times 68.7 = .00123 < .01$$

$$VCR = 0.7 FR bd ( 0.2 + 0.3p ) \sqrt{f'c}$$

$$VCR = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 \times ( .2 + .3 \times .00123 ) \times 12.65 = 3459 \text{ kg.}$$

Tramo 3 se tomará el área de 2 barras del no. 4 más 2 barras del no. 6,  $A_s = 8.24 \text{ cm}^2$ .

$$p = 8.24 / 30 \times 68.7 = .004 < .01$$

$$VCR = 0.7 FR bd ( 0.2 + 0.3p ) \sqrt{f'c}$$

$$VCR = 0.7 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 \times ( .2 + .3 \times .004 ) \times 12.65 = 4672 \text{ kg.}$$

Revisión de la necesidad de disminuir VCR por interrupción de más del 33% del refuerzo longitudinal.

Refuerzo positivo:

Corte de una barra # 6 =

$$\frac{A_s \text{ int.}}{A_s} = \frac{2.85}{11.09} < 0.33$$

Corte de dos barras # 4 =

$$\frac{A_s \text{ int.}}{A_s} = \frac{2.85}{11.09 - 2.85} = 0.308 < 0.33$$

Refuerzo negativo:

Corte de dos barras # 6 =

$$\frac{A_s \text{ int.}}{A_s} = \frac{5.7}{22.49} < 0.33$$

Corte de una barra # 6 =

$$\frac{A_s \text{ int.}}{A_s} = \frac{2.85}{22.49 - 5.70} < 0.33$$

Corte de dos barras # 6 =

$$\frac{A_s \text{ int.}}{A_s} = \frac{5.70}{16.79 - 2.85} = 0.41 > 0.33$$

Como este corte ya está en la zona de compresión, no es necesario reducir, VCR.

Revisión para verificar si se admite la sección de 30 X 75 cm.

Se debe cumplir  $V_u = 2 FR bd \sqrt{f'_c}$

Del diagrama  $V_u \text{ máx.} = 24.8 \text{ ton.}$

$2 \times .8 \times 30 \times 68.7 \times 12.65 = 41719 > V_u \text{ máx.}$ , por lo que admite la sección de 30 X 70 cm.

Separación de estribos verticales # 3,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Tramo 3  $V_u \text{ máx.} = 24800 \text{ kg.}$ ;  $VCR = 4672 \text{ kg.}$

$$s = \frac{FR Av d}{V_u - VCR} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 68.7}{24800 - 4672} = 16.3 \text{ cm.}$$

$$\text{sep. máx.} \leq \frac{FR Av f_y}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200}{3.5 \times 30} = 45.4 \text{ cm.}$$

$$1.5 FR bd \sqrt{f'_c} = 1.5 \times 0.8 \times 30 \times 68.7 \times 12.65 = 31290 \text{ kg.} > V_u \text{ máx.}$$

Luego:  $s \leq .5d = .5 \times 68.7 = 34.4 \text{ cm.}$

Usar estribos # 3 @ 16 cm. en el tramo 3.

Tramo 2  $V_u \text{ máx.} = 23000 \text{ kg.}$ ;  $VCR = 3459 \text{ kg.}$ ;  $V_u - VCR = 19540 \text{ kg.}$

$$s = \frac{327800}{19540} = 16.8 \text{ cm.}$$

Usar estribos # 3 @ 16 cm. en el tramo 2.

Tramo 1  $V_u \text{ máx.} = 18000 \text{ kg.}$  ;  $V_{CR} = 4231 \text{ kg.}$

Usar estribos # 3 @ 23 cm. en el tramo 1.

### Comentarios.

- Las fuerzas cortantes  $V_u$  ya están afectadas por el factor de carga.
- La viga se dividió en tres tramos para calcular en cada uno de ellos una separación de estribos. En cada tramo la separación de estribos se calculó usando la fuerza cortante de diseño máxima que en él actúa y una contribución del concreto,  $V_{CR}$ , obtenida con un valor conservador de la cuantía de refuerzo longitudinal.
- El número de tramos por considerar y el grado de precisión en la cuantía que se use para valuar  $V_{CR}$ , es a juicio del proyectista quién, de acuerdo con las condiciones del caso, debe conciliar la sencillez de cálculo y de construcción con el consumo de acero de estribos.

### **Torsión.**

La torsión ocurre en construcciones monolíticas de concreto, principalmente donde la carga actúa a una distancia del eje longitudinal del miembro estructural. Algunos ejemplos de elementos estructurales sujetos a momentos torsionantes son: una viga de extremo en un tablero de piso, una viga de borde cargada en un extremo, vigas perimetrales que circundan una abertura de piso o una escalera helicoidal. Algunas veces estos momentos causan esfuerzos cortantes excesivos que originan el desarrollo de importantes grietas más allá de los límites permisibles de servicio

El problema de la torsión en estructuras de concreto tiene dos aspectos: el primero consiste en la determinación de los momentos torsionantes que actúan sobre los elementos de una estructura, y el segundo, en la determinación de la resistencia de los elementos.

La determinación de los momentos torsionantes es un problema de análisis estructural que no ha recibido la misma atención que el cálculo de momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Esto se debe en parte, a la importancia relativamente menor que se ha concebido a los efectos de torsión y, en parte, a que no se disponía, hasta hace poco tiempo, de medios para evaluar en forma razonablemente precisa la rigidez torsionante de elementos de concreto reforzado, dato necesario para el análisis de estructuras continuas.

La determinación de la resistencia a torsión de elementos de concreto ha sido posible a numerosas investigaciones recientes. Como resultado, es posible calcular, con suficiente precisión para fines prácticos, la resistencia a torsión y a combinaciones de torsión, fuerza cortante y momento flexionante de elementos, así como su rigidez en torsión.

### **Torsión simple.**

El caso de torsión simple es poco frecuente en la práctica, por que la torsión se presenta casi siempre acompañada de flexión y fuerza cortante. Sin embargo, para calcular la resistencia de un elemento sujeto a torsión combinada con flexión y cortante, es conveniente conocer previamente el comportamiento y la resistencia de un elemento sujeto a torsión simple.

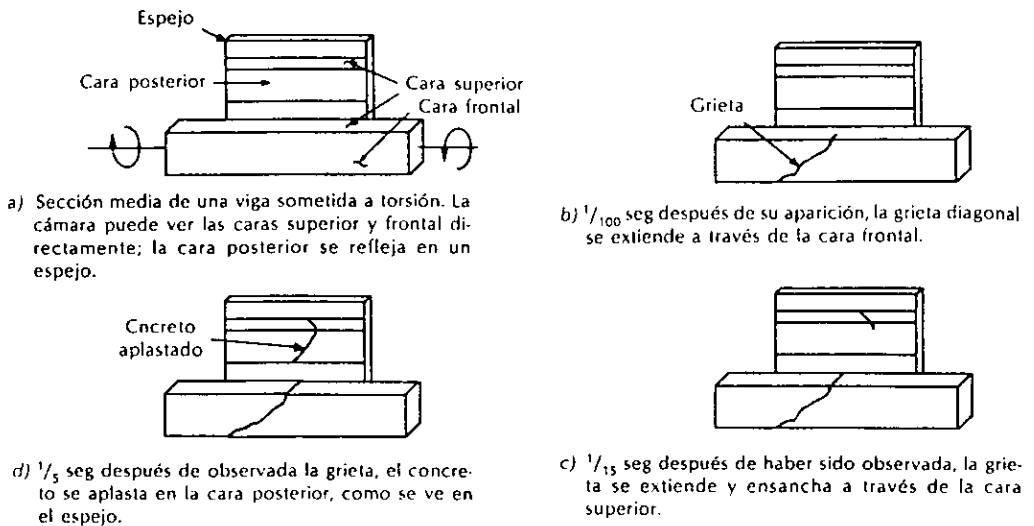


## Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto simple.

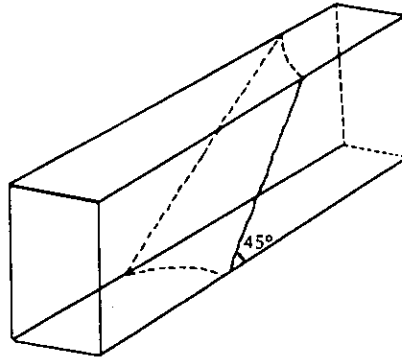
En una viga de concreto simple, la falla ocurre súbitamente para valores pequeños del ángulo de giro; es una falla de tipo frágil, similar a la de una viga ensayada a flexión. A continuación se describe el proceso de falla en una viga. (figura 4.22) En tal proceso, la falla se inicia al formarse una grieta inclinada de tensión en una de las caras mayores de la viga. Esta grieta se abre rápidamente y se extiende a las caras menores de la viga. La falla ocurre finalmente por el aplastamiento del concreto en la cara mayor opuesta.

El proceso de falla descrito se similar al de una viga de concreto simple ensayada a la flexión, en la que la grieta de tensión se inicia en la cara inferior, se extiende después a las caras laterales, y se aplasta el concreto de la cara superior. Por consiguiente, puede afirmarse que la falla por tensión ocurre por flexión en un plano inclinado a  $45^\circ$  con respecto al eje longitudinal. (figura 4.23)

En la figura 4.23 se muestra la superficie de falla. Puede verse que la inclinación de las grietas en las dos caras mayores es aproximadamente la misma.



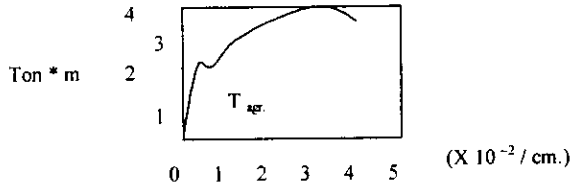
**Figura 4.22** Proceso de falla por torsión de una viga de concreto simple



**Figura 4.23** Superficie de falla de una viga de concreto simple

Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto reforzado.

El comportamiento, modo de falla y resistencia de vigas con refuerzo longitudinal únicamente, es similar al de vigas de concreto simple, por lo tanto, el refuerzo longitudinal, si no está combinado con refuerzo transversal, no constituye un refuerzo eficiente desde el punto de vista de la torsión. En vigas con refuerzo longitudinal y transversal, el comportamiento puede dividirse en dos etapas: una anterior al agrietamiento y otra posterior a él. El comportamiento anterior al agrietamiento es semejante al de una viga de concreto simple. La gráfica momento torsionante – giro es prácticamente lineal en esta etapa como se ve en la **figura 4.24**, y los esfuerzos en el acero longitudinal y transversal son muy pequeños. Las primeras grietas de torsión se forman en una de las caras mayores. Cuando esto ocurre, el momento torsionante,  $T_{agr.}$ , es igual o ligeramente mayor que el momento resistente de un elemento de concreto simple  $T_r$ .



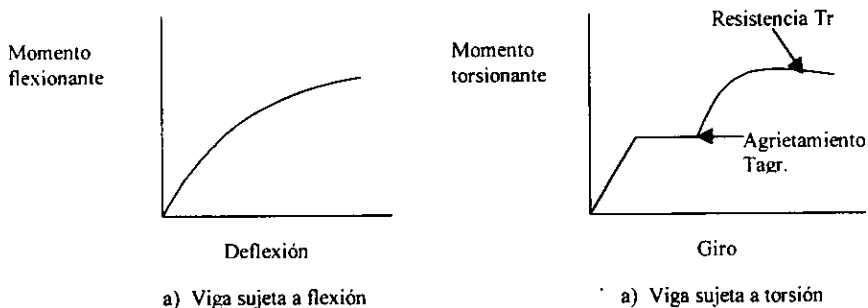
**Figura 4.24** Gráfica momento torsionante – giro de un elemento con refuerzo transversal sujeto a torsión pura.

Cuando se agrieta el elemento, el giro  $\theta$ , aumenta rápidamente bajo un momento constante,  $T_{agr.}$ , como se indica en la rama horizontal de la **figura 4.24**. Los esfuerzos en el refuerzo longitudinal y transversal también aumenta rápidamente. La influencia del agrietamiento es diferente en vigas sujetas a flexión y en vigas sujetas a torsión. En las primeras, los esfuerzos en el refuerzo aumentan gradualmente antes y después del agrietamiento y la pendiente de la gráfica carga-deflexión se modifica ligeramente, como se ve en la **figura 4.25 a**

Por el contrario, en vigas sujetas a torsión, el estado interno de equilibrio cambia totalmente al formarse la primera grieta. La pendiente de la gráfica momento torsionante - giro cambia bruscamente (**figura 4.25 b**) y el momento externo que era resistido sólo por el concreto, es resistido ahora por concreto y acero conjuntamente.

Durante este cambio en el estado interno de equilibrio ocurre una transferencia de carga del concreto al acero. Como el momento externo permanece constante mientras ocurre transferencia, la fracción del momento total, que es resistida por el concreto después del agrietamiento,  $T_c$ , es menor que el momento de agrietamiento,  $T_{agr.}$ , y, por lo tanto, menor que el momento resistente de un elemento de concreto simple de igual sección.  $T_{rs}$ .

Al finalizar la etapa de transferencia de carga del concreto al acero, el momento torsionante vuelve a aumentar, pero la rigidez del elemento es menor que antes del agrietamiento, como se ve en la **figura 4.24**



**Figura 4.25** Comparación del efecto de agrietamiento en elementos sujetos a flexión y a torsión.

Tanto la rigidez como el momento resistente,  $T_r$ , dependen de los porcentajes de refuerzo longitudinal y transversal, después de alcanzar el momento máximo,  $T_r$ , la gráfica momento – giro tiene una rama descendente que en los ensayos se desarrolla en segundos.

Cuando se alcanza la resistencia,  $T_r$ , el concreto de la cara mayor del elemento, opuesta a la cara con grietas de tensión, se aplasta, y el acero de refuerzo puede estar fluyendo o no, según su porcentaje. De acuerdo con esto, se distinguen tres tipos de elementos: 1) Subreforzados, en los que fluyen el acero longitudinal y transversal, 2) Sobreforzados, en los que el concreto se aplasta antes de que fluya el acero de refuerzo y 3) Parcialmente sobreforzados, en los que sólo fluye el refuerzo longitudinal o el transversal.

## Evaluación de la resistencia en elementos de concreto simple sujetos a torsión.

Se han desarrollado varias teorías para calcular la resistencia en torsión de elementos de concreto simple. A continuación se exponen tres de ellas, a saber: La teoría Elástica, La teoría Plástica y la teoría de Hsu.

### A) Teoría Elástica.

Esta teoría desarrollada por Saint Venant en 1855, permite calcular la resistencia de barras prismáticas de material elástico con cualquier sección transversal sujetas a momentos torsionantes en sus extremos. Se supone que al aplicar los momentos torsionantes, las secciones transversales experimentan una rotación y un alabeo. En teoría de la elasticidad se demuestra que, por condiciones de equilibrio, los esfuerzos normales  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_z$  y los esfuerzos cortantes  $V_{xy}$  son nulos, y que los esfuerzos cortantes  $V_{xz}$  y  $V_{yz}$  pueden calcularse.

$$V_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad V_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

Donde  $\Phi$  es una función de  $x$  y  $y$  que se denomina función de esfuerzos. Esta función debe satisfacer la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

Donde  $G$  es el módulo de elasticidad en cortante.

$\theta$  es el ángulo que gira la barra por unidad de longitud.

Además por condiciones de frontera, la función de esfuerzos,  $\Phi$ , debe ser constante a lo largo del borde de la sección transversal de la barra. En teoría de la elasticidad se han

encontrado funciones que satisfacen estas condiciones para diferentes formas de sección transversal.

Una vez determinada la función de esfuerzos  $\Phi$ , el momento resistente de la barra puede calcularse, según se demuestra también en teoría de la elasticidad, por medio de la expresión

$$T = 2 \iint \Phi \hat{c}_x \hat{c}_y$$

Prandt señaló en 1903 la semejanza que existe entre la función de esfuerzos,  $\Phi$ , y las deflexiones,  $z$ , que sufre una membrana colocada en el extremo de un tubo hueco en el cual se aplica una presión. El contorno del tubo hueco es el mismo que el de la sección transversal de la barra (**figura 4.26**) Si  $q$  es la presión por unidad de área de la membrana, y  $s$  la tensión por unidad de longitud del borde, por condiciones de equilibrio se obtiene la ecuación:

$$\frac{\hat{c}^2 z}{\hat{c}x^2} + \frac{\hat{c}^2 z}{\hat{c}y^2} = -\frac{q}{s}$$

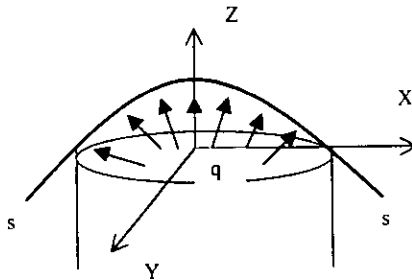
Esta ecuación resulta igual a la ecuación:

$$\frac{\hat{c}^2 \Phi}{\hat{c}x^2} + \frac{\hat{c}^2 \Phi}{\hat{c}y^2} = -2G\theta$$

El momento torsionante resistente puede obtenerse reemplazando  $\Phi$  por  $z$

$$T = 2 \iint z \hat{c}_x \hat{c}_y$$

Esta ecuación indica que el momento resistente es el doble del volumen comprendido entre la membrana y el plano  $x - y$ .



**Figura 4.26** Analogía de la membrana.

También puede demostrarse que el esfuerzo cortante,  $V_{m\acute{a}x.}$  resultante de los esfuerzos  $V_{xz}$  y  $V_{yz}$  en cualquier punto de la sección transversal, es igual a la pendiente máxima de la membrana en ese punto, siempre que se haga la sustitución del término  $q/s$  por  $2G\theta$ .

Las similitudes anteriores se conocen con el nombre de analogía de la membrana y han sido de gran utilidad en el estudio de problemas de torsión elástica. Para el caso de secciones rectangulares, la analogía ésta analogía indica que el momento resistente puede calcularse con la expresión:

$$T = K_e b^2 h V_{m\acute{a}x.}$$

Donde:

$K_e$  es el coeficiente que depende de la forma de la sección transversal y cuyos valores se presentan en la tabla 1.

$b$  es el lado menor del rectángulo.

$h$  es el lado mayor del rectángulo.

Para el caso de secciones circulares, el momento resistente calculado con la teoría elástica es:

$$T = \frac{\pi r^3}{2} \times V_{\text{máx.}}$$

Donde:  $r$  es el radio de la sección.

La resistencia de secciones I, T o L es la suma de las resistencias de las resistencias de los rectángulos componentes, ya que el volumen comprendido entre la membrana y la sección transversal es aproximadamente la suma de los volúmenes comprendidos entre la membrana y cada rectángulo.

La falla debe ocurrir cuando el esfuerzo  $V_{\text{máx.}}$ , es igual a la resistencia en tensión del concreto,  $f_{tu}$ , y las resistencias de elementos de sección rectangular y circular serán respectivamente:

$$T = K_e b^2 h f_{tu}$$

$$T = \frac{\pi r^3}{2} \cdot f_{tu}$$

$h/b$	$K_e$	$K_p$
2	0.23	0.41
4	0.27	0.44
6	0.29	0.45
8	0.30	0.46
10	0.31	0.47

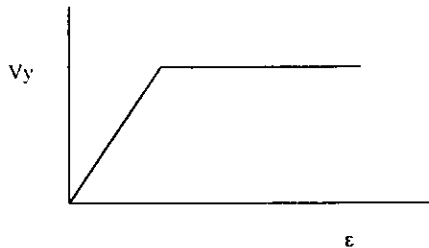
**Tabla 4.1** Valores de las constantes  $K_e$  y  $K_p$



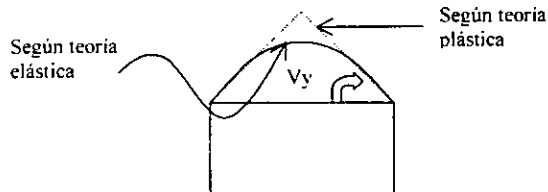
## B) Teoría Plástica.

Esta teoría se aplica a materiales elastoplásticos o plásticos. La resistencia en torsión puede calcularse con la analogía del montón de arena, que es una extensión de la analogía de la membrana. La analogía del montón de arena se expone a continuación para un material elastoplástico cuya gráfica esfuerzo deformación se muestra en la **figura 4.27**

Si el momento torsionante aplicado al elemento se incrementa hasta que el material alcanza su límite de fluencia, el esfuerzo en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la membrana en ese punto, dicha pendiente debe ser constante en toda la zona en que fluye el material. Esto equivale a que la membrana se vaya inflando hasta alcanzar la posición límite indicada en la **figura 4.28**



**Figura 4.27** Gráfica esfuerzo deformación de un material elastoplástico.



**Figura 4.28** Analogía de la armadura.

Cuando el material fluye en toda la sección transversal del elemento, la membrana toma una forma semejante a un montón de arena con pendiente uniforme; de aquí el nombre de la analogía.

El momento torsionante resistente es el doble del volumen del montón de arena, si se sustituye  $2G\theta$  por  $q/s$ , como en el caso de la teoría elástica.

La aplicación de la teoría plástica a elementos de concreto reforzado, suponiendo  $V_{m\acute{a}x.} = ftu$ , permite obtener los siguientes resultados.

$$T = K_p b^3 h ftu.$$

Para secciones circulares,

$$T = \frac{2\pi r^3}{2} \times ftu.$$

El coeficiente  $K_p$  depende de la relación entre el lado mayor y el lado menor del rectángulo. En la tabla 1 se presentan valores de este coeficiente. Al igual que en la teoría elástica, la resistencia de secciones T, I o L es la suma de las resistencias de los rectángulos componentes. Las resistencias experimentales de elementos de concreto simple concuerdan mejor con las calculadas con la teoría elástica, a pesar de que la hipótesis básica de un comportamiento plástico del material es de dudosa aplicabilidad al concreto simple sujeto a esfuerzos cortantes o esfuerzos de tensión.

### C) Teoría de Hsu.

La teoría desarrollada por Hsu esta basada en el mecanismo de falla de vigas de concreto simple, según la falla ocurre por flexión en la superficie mostrada en la **figura 4.23**. En la teoría, la superficie de falla se idealiza por un plano inclinado a  $45^\circ$  respecto al eje longitudinal del elemento (**figura 4.29 a**) y se supone que la falla se produce por una componente del elemento torsionante, T2, en la **figura 4.29 b**, que produce flexión

en la sección de falla. Por lo tanto, la resistencia a torsión del elemento puede calcularse a partir de la resistencia a flexión de la sección indicada en la **figura 4.29**, a la que a su vez puede calcularse con la fórmula de flexión.

$$M = fr S \quad (a)$$

El momento M es la componente T2 que produce flexión en el plano inclinado; por lo tanto.

$$M = T_a = Trs \cos 45^\circ = \frac{Trs}{\sqrt{2}} \quad (b)$$

s = módulo de sección del plano inclinado de falla.

La base de este plano es  $h\sqrt{2}$ , y la altura es el lado menor, b (**figura 4.29 a**) por lo tanto:

$$s = \frac{h\sqrt{2}b^2}{6} \quad (c)$$

En la ecuación a, fr es el módulo de rotura, o sea, la resistencia a tensión del concreto simple, medida en un ensaye de flexión. Sustituyendo las ecuaciones b y c en la ecuación a se obtiene:

$$Trs = \frac{b^2 h}{3} fr$$

En el plano en que se indica el agrietamiento existen, además de esfuerzos normales de tensión, esfuerzos normales de compresión perpendiculares a los de tensión y de igual magnitud. Experimentalmente se ha observado que para éste estado de esfuerzos biaxiales la resistencia a tensión del concreto se reduce en 15 % aproximadamente.

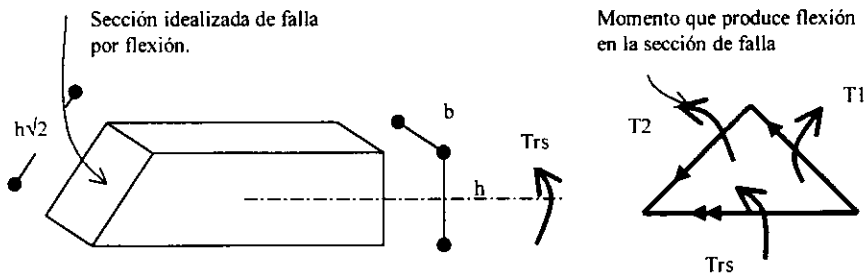


Figura 4.29 Teoría de Hsu de falla por flexión.

Con base en esto y por comparación con resultados experimentales la ecuación:

$$Trs = \frac{b^2 h}{3} fr$$

Se modifica a:

$$Trs = \frac{b^2 h}{3} (0.85 fr)$$

Es conveniente expresar la ecuación anterior en términos de la resistencia a compresión del concreto  $f_c$ , que es el índice de resistencia usado normalmente. Para esto, se

necesita conocer la relación entre  $fr$  y  $f_c$ . en forma aproximada se puede establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} fr &= 2 \sqrt{f_c} \\ fr &= 0.64 \sqrt{f_c} \quad (SI) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación  $Trs = b^2 h / 3 (0.85 fr)$  se obtiene:

$$Trs = 0.6 b^2 h \sqrt{f_c}$$

$$T_{rs} = 0.18 b^2 h \sqrt{f_c} \quad (\text{SI})$$

En la **figura 4.30** se comparan los momentos torsionantes calculados con la ecuación anterior con los medidos en varias series de ensayos. Una gran mayoría de los resultados experimentales cae en una franja de  $\pm 20\%$  del valor calculado, por lo que puede considerarse que la correlación es satisfactoria.

La teoría de Hsu también puede aplicarse al cálculo de resistencia de secciones circulares. Por un procedimiento análogo al descrito anteriormente se llega a la expresión:

$$T_{rs} = 0.1 \pi d^3 \sqrt{f_c}$$

$$T_{rs} = 0.03 \pi d^3 \sqrt{f_c} \quad (\text{SI})$$

Donde :  $d$  = diámetro de la sección

Al igual que en las teorías plástica y elástica, la resistencia de secciones T, I o L es la suma de las resistencias de los rectángulos componentes.

Concluyendo, las expresiones para calcular la resistencia a torsión de elementos de sección rectangular obtenidas por las tres teorías expuestas tienen la misma forma general:

$$T = K b^2 h f_{tu}$$

Donde:  $K$  = coeficiente que depende de la relación  $b/h$  en las teorías plástica y elástica y es constante en la teoría Hsu.

En la **figura 4.31** se comparan las tres teorías en términos del parámetro  $T / f_{tu} b^2 h$ , o sea. en términos del factor  $K$ .

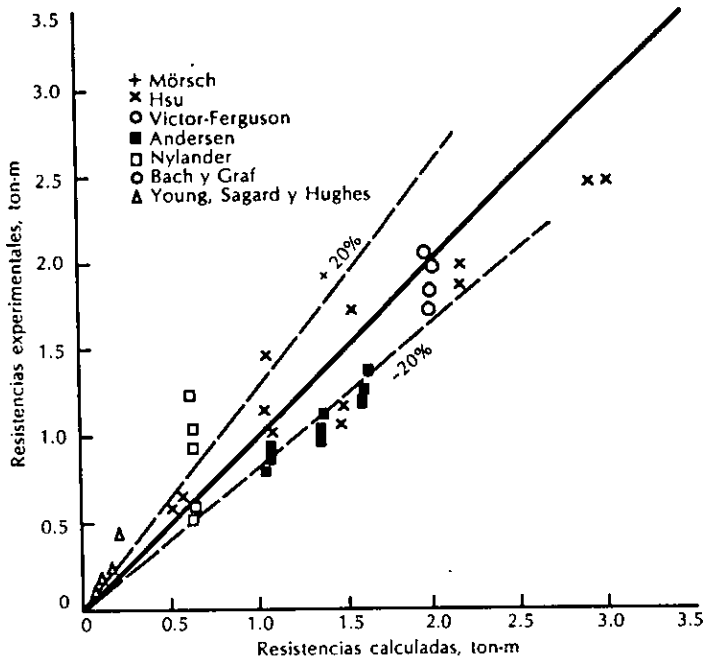


Figura 4.30 Comparación de resistencias experimentales a torsión simple.

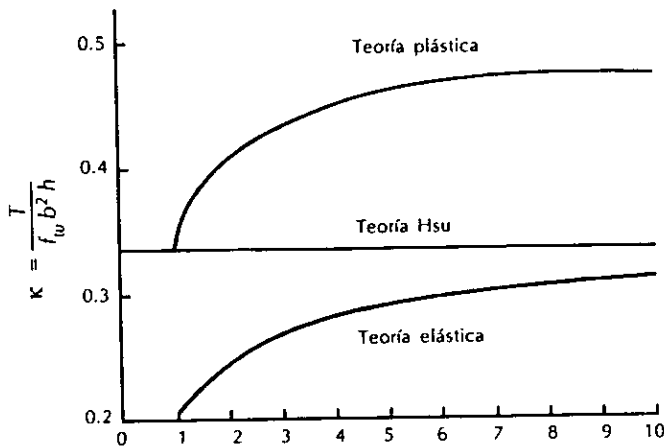


Figura 4.31 Valores de K para las teorías elásticas, plásticas y de Hsu.

## Evaluación de la resistencia de elementos de concreto reforzado.

La resistencia a torsión de un elemento de concreto reforzado puede expresarse como la suma de las resistencias del concreto y del acero:

$$T_r = T_c + T_s$$

Existen varias teorías para evaluar  $T_c$  y  $T_s$ . Por lo que respecta a  $T_c$ , el reglamento australiano considera que la resistencia de un elemento semejante de concreto simple ( $T_c = T_{rs}$ ), mientras que el reglamento alemán considera que la contribución del concreto es nula después del agrietamiento ( $T_c = 0$ ). Existen otras teorías que suponen valores intermedios. En todas las teorías presentadas, la contribución del acero se calcula con la siguiente expresión:

$$T_s = \alpha t \frac{A f_s}{S} b_l h_l$$

Donde:

$\alpha t$  = parámetro que se determina experimentalmente.

A = área de una rama del estribo.

$f_s$  = esfuerzo en el estribo.

$b_l$  = lado menor de un estribo medido centro a centro.

$h_l$  = lado mayor de un estribo medido centro a centro.

S = separación de los estribos.

Para determinar valores de  $T_c$  y  $\alpha$ , Hsu ensayó 53 vigas y al presentar sus resultados experimentales en gráficas como las figuras II encontró los siguientes valores:

$$T_c = \frac{b^2 h}{\sqrt{b}} \times \sqrt{f'_c}$$

$$\alpha t = 0.66 + 0.33 \frac{h_l}{b_l} \leq 1.5$$

La contribución del concreto,  $T_c$ , obtenida de esta manera es menor que la resistencia de un elemento de concreto simple; para elementos de dimensiones usuales del orden de 40%.

La resistencia total de un elemento con refuerzo transversal es:

$$T_r = \frac{b^2 h}{\sqrt{b}} \times \sqrt{f'c} + \left[ .66 + .33 \frac{h_l}{b_l} \right] \frac{A \times f_s}{S} \times b_l \times h_l$$

Para aplicar esta ecuación es necesario conocer el esfuerzo con los estribos  $f_s$ . Este esfuerzo es igual al de fluencia  $f_y$ , en vigas subreforzadas, o sea, cuando fluye el acero de los estribos antes de que el elemento alcance su resistencia. Para asegurar que esto suceda, debe limitarse tanto la relación volumétrica total de acero (longitudinal más transversal),  $\rho_l t$ , como la relación entre acero longitudinal y acero transversal  $\phi$ . Hsu supone los siguientes límites:

$$\rho_l t \leq 6.40 \sqrt{f'c} / f_y$$

$$0.7 < \phi < 1.5$$

Las relaciones  $\phi$  y  $\rho_l t$  pueden calcularse con las expresiones:

$$\phi = \frac{A_l s}{2 A_t (b_l + h_l)} \quad ; \quad \rho_l t = \frac{A_l}{b h} \left( 1 + \frac{1}{\phi} \right)$$

Donde:

$A_l$  = área total del acero longitudinal. Esta área debe distribuirse en el perímetro de la sección transversal.

Si se cumplen las condiciones de  $\rho_l t$  y  $\phi$ , la resistencia a torsión de un elemento de concreto reforzado puede calcularse haciendo  $f_s = f_y$  :



$$T_r = \frac{b^2 h}{\sqrt{b}} \times \sqrt{f'c} + \left[ .66 + .33 \frac{h1}{b1} \right] \times \frac{A \times f_y}{S} \times b1 \times h1$$

$$T_r = .99 \times \frac{b^2 h}{\sqrt{b}} \times \sqrt{f'c} + \left[ .66 + .33 \frac{h1}{b1} \right] \times \frac{A \times f_y}{S} \times b1 \times h1$$

### Torsión y flexión.

Cuando la flexión actúa simultáneamente con la torsión, la capacidad a la flexión de la sección se reduce en forma considerable. Debido a ello, se produce el agrietamiento por efecto de los cortantes de torsión a bajos niveles de carga.

La **figura 4.32** muestra el vector resultante  $R_u$ , para momentos flexionantes y torsionantes combinados.

Recientemente se han desarrollado varias teorías para predecir la resistencia de elementos sujetos a flexión y torsión combinados. Se han efectuado también ensayos para sustentar estas teorías y para obtener experimentalmente diagramas de interacción torsión - flexión. Estos diagramas son el lugar geométrico de las combinaciones de momento torsionante y momento flexionante que producen la falla del elemento.

### Elementos sin refuerzo transversal.

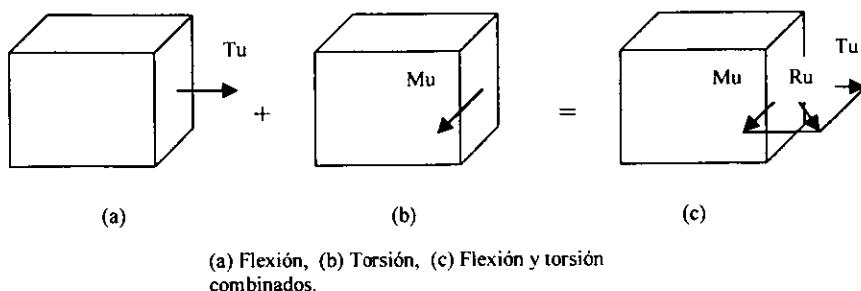
En la **figura 4.33** se presenta un diagrama de interacción adimensional de vigas de sección T, ensayadas bajo distintas combinaciones de flexión y torsión. En la escala de las ordenadas se ha señalado la relación entre el momento torsionante bajo carga combinada,  $T_c$ , y el momento torsionante en torsión pura,  $T_{rs}$ ; en la escala de las abscisas, la relación entre momento flexionante bajo carga combinada,  $M_c$ , y el momento

flexionante en flexión pura,  $M_r$ . En esta serie de ensayos de interacción entre torsión y flexión no disminuyó la resistencia de los elementos, sino que por el contrario, aumentó la resistencia a torsión para valores del momento flexionante cercanos a  $M_r$ .

En la **figura 4.34** se presentan en un diagrama adimensional los resultados de un gran número de ensayos de elementos sin refuerzo transversal. Los valores de  $T_{rs}$  y  $M_r$  se calcularon con las ecuaciones  $T_{rs} = .6b^2h \sqrt{f_c}$  y con la ecuación para flexión pura.

En este diagrama se observa que para algunas secciones, la resistencia a torsión sí disminuye cuando actúa un momento flexionante simultáneamente con momento torsionante. La mayor disminución se presenta en secciones cuadradas con un porcentaje de refuerzo muy reducido. Lim y Mirza señalan que esta disminución no existe cuando el porcentaje total de refuerzo longitudinal es mayor que uno por ciento. Esta conclusión la obtuvieron del ensayo de vigas pequeñas a escala de un cuarto.

Del examen de las figuras **4.33** y **4.34**, se concluye tentativamente que para fines prácticos no existe interacción entre flexión y torsión, excepto para elementos con porcentajes de refuerzo reducidos y quizá para elementos de sección cuadrada. Esta conclusión debe ser tentativa hasta que se establezca en forma definitiva para qué tipos de elementos existe interacción y cómo puede cuantificarse.



**Figura 4.32** Representación esquemática del vector de torsión y flexión combinados

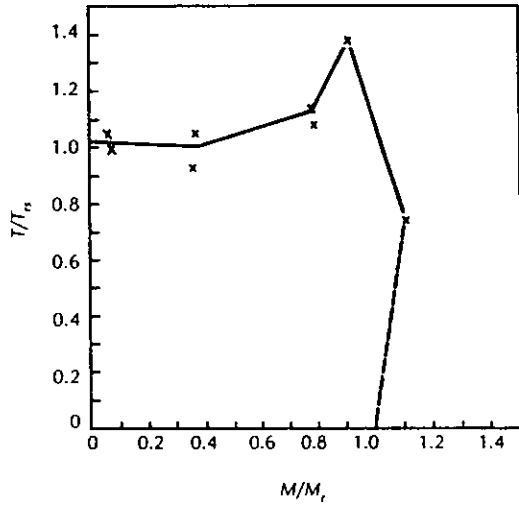


Figura 4.33 Diagrama de interacción torsión – flexión.

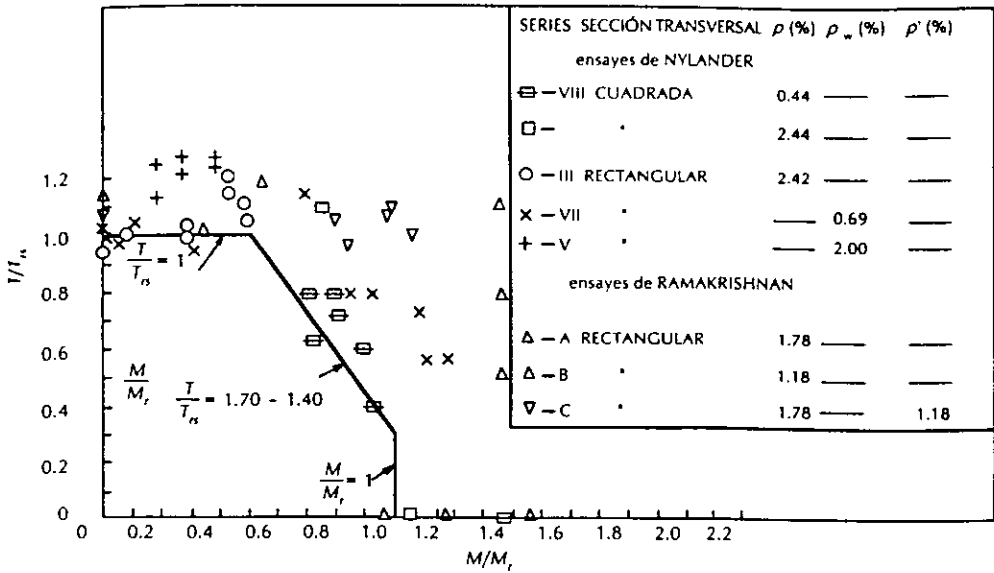
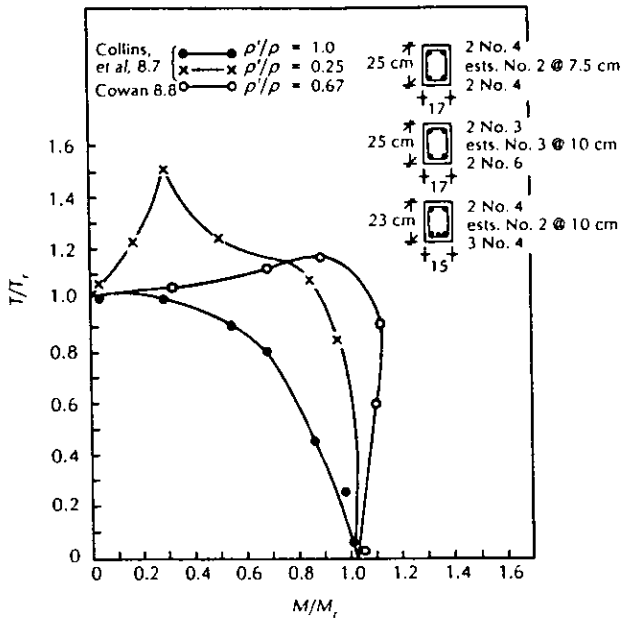


Figura 4.34 Diagrama de interacción adimensional torsión – flexión

Elementos con refuerzo transversal.

La forma de los diagramas de interacción torsión – flexión, en este tipo de elementos, depende de manera importante de la relación entre los porcentajes de refuerzo de compresión y de tensión,  $p'/p$ , como puede verse en la **figura 4.35**. Cuando la cuantía de acero de tensión es mayor que la de compresión ( $p'/p < 1$ ), la resistencia a torsión bajo cargas combinadas es mayor que la resistencia a torsión pura, como en los ensayos de Collins, con  $p'/p = 0.25$  y de Cowan, con  $p'/p = 0.67$ . En cambio, cuando la cuantía de acero de tensión es igual a la de compresión ( $p'/p = 1$ ), la presencia de momento flexionante reduce la resistencia a torsión y viceversa, como en los ensayos de Collins, con  $p'/p = 1$



**Figura 4.35** Efecto de  $p'/p$  en la interacción torsión – flexión.

El efecto de la distribución y la cantidad del refuerzo longitudinal sobre la forma de los diagramas de interacción ha sido explicado físicamente de la siguiente manera. Si la distribución y cuantía del refuerzo longitudinal es tal que éste acero fluye en torsión pura, cualquier momento flexionante adicional disminuye el momento torsionante resistente, ya que el acero de la cara de tensión, que se usaba para resistir la torsión, se emplea ahora para resistir flexión. En cambio, si el acero longitudinal no fluye en torsión pura (vigas parcialmente sobrerreforzadas), el momento torsionante resistente aumenta al actuar el momento flexionante externo. El incremento se explica por que los esfuerzos de compresión en el concreto, generados por el momento flexionante aumentan su resistencia a torsión.

Concluyendo tentativamente, en un elemento con refuerzo transversal, la resistencia a torsión no disminuye apreciablemente por la acción simultánea de flexión, siempre que tenga una cantidad suficiente de acero longitudinal distribuido en tal forma que la mayor parte de localice en la zona de tensión del elemento.

## Torsión y cortante

La fuerza cortante no puede existir en un elemento a menos que exista también momento flexionante. Por consiguiente, la interacción torsión – cortante se estudia siempre con la acción simultánea de momento flexionante. Por simplicidad se utiliza el término interacción torsión – cortante, pero debe entenderse que se trata en realidad de una interacción torsión – flexión – cortante.

Tanto la fuerza cortante como el momento torsionante producen esfuerzos cortantes en el elemento; en una cara se suman estos esfuerzos y en la otra se restan. En elementos de concreto resulta sumamente difícil calcular la distribución real de esfuerzos bajo la acción combinada de torsión y cortante, puesto que no se conoce esta distribución ni siquiera para el caso en que actúan aisladamente dichas acciones. Por consiguiente, el problema se ha atacado principalmente en forma experimental, determinando diagramas de interacción momento torsionante – fuerza cortante.

### Elementos sin refuerzo transversal.

Se han efectuado varios ensayos para determinar diagramas de interacción de esta tipo de elementos. En la **figura 4.36** se presentan los resultados obtenidos en tres series de ensayos de vigas de sección L invertida con distintos porcentajes de refuerzo y diferente longitud del patín de compresión. El valor de la fuerza cortante cuando la torsión es nula,  $V_r$ , se obtuvo ensayando vigas sin momento torsionante que fallaron por tensión diagonal; la fuerza cortante de falla resultó mayor que la calculada con el reglamento ACI. El valor de  $Tr_s$ , se obtuvo extrapolando los momentos torsionantes medidos, ya que no se ensayaron vigas en torsión pura. Los valores experimentales definen con bastante precisión un diagrama de interacción circular.

A pesar de que los resultados experimentales anteriores definen bien un diagrama de interacción circular, al generalizar este diagrama a vigas en las que el valor de  $V_r$  no

se determina experimentalmente, surge el problema de que el valor calculado con la fórmula usual no corresponde a la carga de falla, sino a la carga de agrietamiento visual, que en muchos casos es menor que la de falla. Resulta entonces que se comparan cargas calculadas de agrietamiento con cargas medidas de falla y la dispersión de los resultados experimentales aumenta mucho.

Desafortunadamente, no se dispone aún de un método confiable para calcular la fuerza cortante de falla de elementos de concreto reforzado.

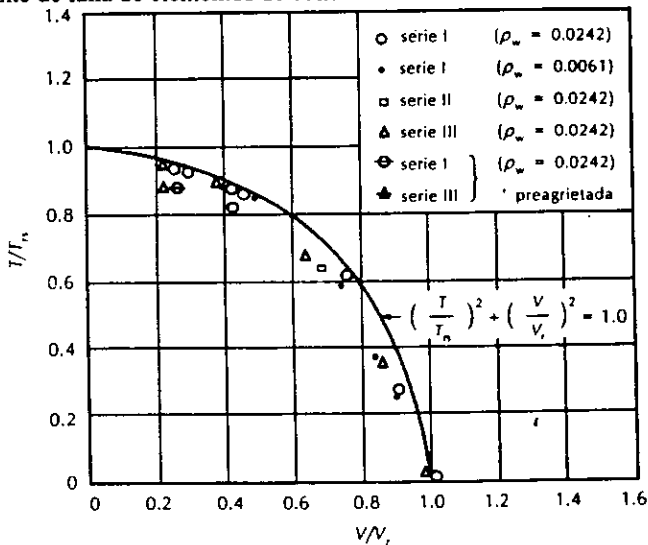
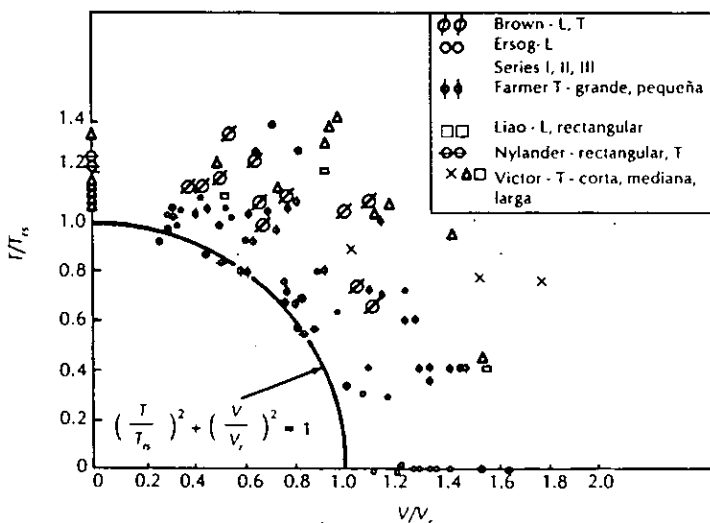


Figura 4.36 Diagrama de interacción entre torsión y cortante.

En la figura 4.37 se presentan los resultados experimentales de seis series independientes de ensayos, incluyendo la figura 4.36, en un diagrama de interacción adimensional en el que  $V_r$  se calculó con la ecuación propuesta por el reglamento ACI y  $T_{rs}$  con la analogía del montón de arena y un esfuerzo de  $1.3 \sqrt{f'_c}$ . La gran dispersión que se observa se debe en parte a que la resistencia a fuerza cortante sin torsión es mayor que la calculada en todos los casos.

Se puede concluir, por lo que respecta a la interacción torsión – cortante en elementos sin acero en el alma, que el diagrama de interacción circular propuesto por algunos autores es un límite inferior a los resultados experimentales disponibles. La resistencia es, en la mayoría de los casos, mucho mayor que la indicada por el diagrama circular. Otra conclusión que se deriva del examen de la **figura 4.37** es que, para valores del momento torsionante menores del 40% de  $T_{rs}$ , no disminuye la resistencia a fuerza cortante.



**Figura 4.37** Diagrama de interacción torsión – cortante para varias series de ensayos.

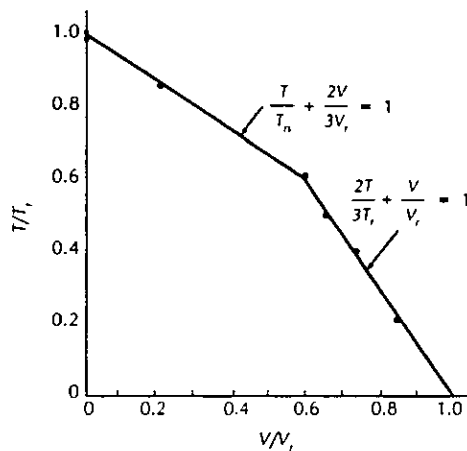
### Elementos con refuerzo transversal.

Como ya se ha mencionado la resistencia a torsión pura de un elemento con refuerzo transversal es la suma de la contribución del concreto y la contribución del acero, y que la contribución del concreto es menor que la resistencia del elemento sin refuerzo transversal. En cambio, la resistencia a cortante sin torsión es la suma de la resistencia de un elemento sin refuerzo transversal y de la contribución de éste refuerzo. Por lo tanto, la contribución del concreto varía desde la resistencia de un elemento sin refuerzo

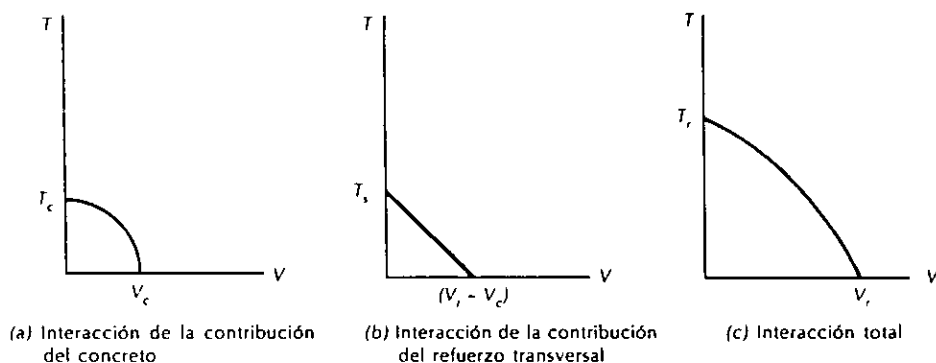


transversal, para el caso de cortante sin torsión, hasta una fracción de la resistencia de un elemento sin refuerzo transversal, para el caso de torsión sin cortante.

En la **figura 4.38** se presenta un diagrama de interacción obtenido experimentalmente por Klus. Los valores  $T_r$  y  $V_r$  se obtuvieron ensayando especímenes en torsión pura y en cortante sin torsión, respectivamente. Se puede ver que la interacción es mayor que en el caso de elementos sin refuerzo transversal, o sea, que la presencia de fuerza cortante reduce más rápidamente la resistencia a torsión. Esto se puede explicar como se indica. La interacción para un elemento con refuerzo transversal es la combinación de las interacciones de la contribución del acero (**figura 4.39**). La interacción de la contribución del concreto no se conoce, pero puede suponerse que es semejante a la interacción de elementos sin refuerzo transversal (**figura 4.39 a**). La interacción para la contribución del acero tiene la forma mostrada en la **figura 4.39 b** ésta interacción significa que una parte del refuerzo transversal trabaja exclusivamente para resistir torsión y otra parte exclusivamente para resistir fuerza cortante. La distribución depende de la relación  $T/V$ , si se suman las dos interacciones se obtiene un diagrama como el de la **figura 4.39 c** por lo tanto, mientras mayor sea el porcentaje de refuerzo transversal, mayor será la contribución de la interacción del refuerzo y mayor la interacción total.



**Figura 4.38** Interacción torsión – cortante en elementos con refuerzo transversal.

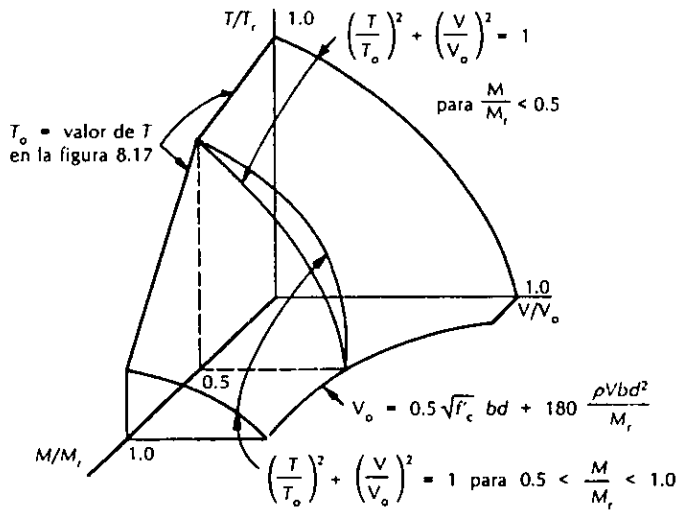


**Figura 4.39** Interacciones torsión – cortante en elementos con refuerzo transversal.

#### Superficies de interacción torsión - flexión - cortante.

Si combinamos el diagrama de interacción torsión – flexión con diagramas de interacción torsión – cortante para diferentes niveles del momento flexionante, se obtiene una superficie de interacción como la mostrada en la **figura 4.40** un punto de esta superficie representa la combinación de momento torsionante, momento flexionante y fuerza cortante que produce la falla del elemento.

Debido a las incertidumbres que se tienen en la determinación de los diagramas de interacción flexión – cortante y torsión – cortante, no ha sido posible determinar superficies de interacción que sean aceptables para todos los investigadores. La superficie que se muestra en la figura es con fines ilustrativos solamente, ha sido propuesta por Hsu, pero otros investigadores han sugerido superficies diferentes.



**Figura 4.40** Superficie de interacción torsión – flexión – cortante.

### Torsión y carga axial.

Esta combinación de acciones se presenta en dos tipos de elementos estructurales: columnas y miembros presforzados.

#### Elementos sin refuerzo transversal.

Se presenta en la **figura 4.42** los resultados de varias series de ensayos en un diagrama de interacción adimensional. En la escala de las ordenadas se han marcado valores de la relación entre el momento torsionante medido bajo carga axial y torsión combinadas y el momento torsionante medido en torsión pura. En la escala de las abscisas se han marcado valores de la relación entre el esfuerzo promedio en la sección,  $f$ , y la resistencia del concreto  $f'_c$ . el esfuerzo promedio,  $f$ , es el cociente de la carga axial  $P$ , entre el área gruesa de la sección transversal. La relación  $f/f'_c$  es equivalente a la relación  $P/P_u$  para elementos sin refuerzo longitudinal. Se puede ver en la figura que el efecto de la carga axial es aumentar el momento torsionante resistente del elemento,

para valores de  $f/f_c$  hasta de 0.7 aproximadamente. Para valores mayores, el momento torsionante tiende a disminuir, pero el número de ensayos es escaso en esta área.

Hsu y Bishara han propuesto, respectivamente las siguientes ecuaciones para calcular la resistencia de elementos sujetos a torsión y carga axial:

$$T = Trs \sqrt{1 + 10 \times \frac{f}{f_c}}$$

$$T = Trs \sqrt{1 + 12 \times \frac{f}{f_c}}$$

La primera ecuación se ha propuesto para valores  $f/f_c$  hasta de 0.7 y la segunda, para valores de hasta 0.65. para valores mayores la resistencia puede estimarse uniendo con una recta el valor de  $T/Trs$  correspondiente a  $f/f_c = 0.65$  con el punto correspondiente a carga axial pura.

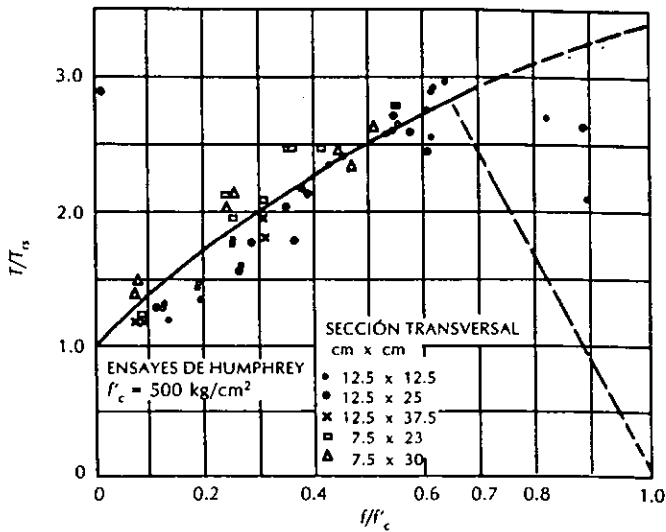


Figura 4.41 Interacción torsión – carga axial en elementos sin refuerzo transversal.

## Elementos con refuerzo transversal.

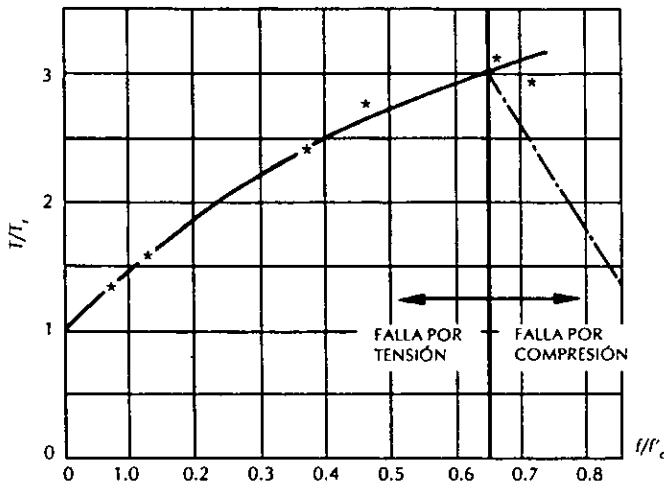
El número de ensayos de elementos de este tipo es muy reducido. En la **figura 4.42** se presentan los resultados de una serie de ensayos efectuados por Bishara y Pier. La interacción entre torsión y carga axial es semejante a la obtenida en elementos sin refuerzo en el alma, y la resistencia puede calcularse con ecuaciones similares a las ecuaciones obtenidas anteriormente, sustituyendo  $Tr_s$  por la resistencia a torsión pura de un elemento con refuerzo transversal,  $Tr$ , por lo tanto:

$$T = Tr \sqrt{1 + 12 \times \frac{f}{f'c}}$$

El valor de  $Tr$  se puede calcular con la ecuación

$$Tr = \frac{b^2 \times h}{\sqrt{b}} \sqrt{f'c} + \left[ .66 + .33 \frac{hl}{bl} \right] \frac{As fy}{s} bl hl$$

La ecuación para el cálculo de  $T$  es válida únicamente para valores de  $f/f'c$  hasta 0.65. para valores mayores de esta relación, puede usarse el procedimiento descrito para secciones sin refuerzo en el alma.



**Figura 4.42** Interacción torsión – carga axial para elementos con refuerzo transversal.

## Expresiones para valuar la resistencia de elementos sujetos a torsión

En la mayoría de los reglamentos de construcción se presentan expresiones basadas en datos experimentales, del tipo de las que se han mostrado en las secciones anteriores.

Las NTC distinguen dos casos, para el primer caso, o sea, cuando la resistencia a torsión es necesaria para el equilibrio, se considera que la contribución del concreto es nula; sí que el momento torsionante debe ser resistido por acero para torsión exclusivamente. La resistencia nominal del elemento queda determinada por la ecuación:

$$T_r = \frac{A_t \times \alpha_t \times X_1 \times Y_1 \times f_y}{S}$$

En el segundo caso, o sea, cuando la resistencia a torsión no es indispensable para el equilibrio, se procede de la siguiente manera. Se calcula el momento torsionante de diseño,  $T_u$ , suponiendo en el análisis que la rigidez a torsión del elemento es la mitad de la rigidez torsional elástica de la sección completa calculada con un módulo de rigidez a cortante,  $G$ , igual a 0.4 veces el módulo de elasticidad del concreto. El efecto de la torsión puede despreciarse si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- a) Que el momento torsionante de diseño,  $T_u$ , sea menor que la resistencia de diseño calculada con la ecuación:

$$TCR = 0.15 FR \Sigma x^2 y \sqrt{f'_c}$$

en la que el factor de reducción  $FR = 0.8$

- b) Que se cumpla la desigualdad siguiente:

$$\frac{T_u^2}{TOR^2} + \frac{V_u^2}{VCR^2} \leq 1.0$$

donde  $V_u$  y  $V_{CR}$  han sido definidos en el capítulo de cortante y  $T_{OR}$  tiene el valor calculado con la ecuación:

$$T_{OR} = 0.6 FR \Sigma x^2 y \sqrt{f'_c}$$

Si no se cumple alguna de las dos condiciones, los elementos deben llevar refuerzo por torsión y su resistencia de diseño se calcula sumando las contribuciones del concreto y del acero.

Contribución del concreto  $T_{CR} = 0.15 FR \Sigma x^2 y \sqrt{f'_c}$

Contribución del acero  $T_{SR} = \frac{FR \times A_t \times \alpha_1 \times X_1 \times Y_1 \times f_y}{S}$

En secciones rectangulares y secciones T,I o L  $T_{OR}$  y  $T_{CR}$  se valúan con las expresiones siguientes:

$$T_{OR} = 0.6 FR \Sigma x^2 y \sqrt{f'_c}$$

$$T_{CR} = 0.25 T_{OR}$$

Donde  $x$ ,  $y$  y en centímetros son las dimensiones menor y mayor de los rectángulos en que queda descompuesta la sección al considerar cada ala y el alma con el peralte completo de la sección, pero sin que se tome "y" mayor que  $3X$ . La suma se refiere a los rectángulos componentes de la sección. Las ecuaciones para el cálculo de  $T_{OR}$  y  $T_{CR}$  se pueden usar para secciones circulares tomando  $X = Y = 0.8$  diámetros.

En miembros que también estén sujetos a tensión axial, el valor de  $T_{OR}$  se multiplicará por  $(1 - .33 P_u/Ag)$ , donde  $P_u$  es la tensión de diseño en kg. y  $Ag$  el área bruta de la sección reducida en  $cm^2$ .

### Refuerzo por torsión.

Este refuerzo estará formado por estribos cerrados perpendiculares al eje del miembro y por barras longitudinales. En miembros circulares, los estribos deberán ser circulares. El refuerzo necesario para torsión se combinará con el requerido para otras fuerzas interiores, a condición de que el área suministrada no sea menor que la suma de las áreas individuales necesarias y que se cumplan los requisitos más restrictivos en cuanto a espaciamiento y distribución del refuerzo.

El refuerzo por torsión se suministrará cuando menos una distancia (  $h + b$  ) más allá del punto teórico en que ya no se requiere. (  $h$  y  $b$  son el peralte total y el ancho del miembro.)

- Refuerzo transversal.

$$A_{sv} = \frac{S ( T_u - T_{CR} )}{FR \Omega X_i Y_i f_{yv}}$$

Donde:

$A_{sv}$  = área transversal de una sola rama de estribo.

$X_i, Y_i$  = lados menor y mayor de un estribo medidos centro a centro.

$S$  = separación de estribos.

$f_{yv}$  = esfuerzo de fluencia de los estribos, el grado de éste acero no será mayor de 42.

$\Omega = 0.67 + 0.33 Y_i/X_i \leq 1.5$

En miembros circulares,  $X_i$  y  $Y_i$ , se tomarán igual a ocho décimos del diámetro del estribo circular medido centro a centro. La separación  $S$ , no será mayor que el ancho de los estribos, ni que la mitad de su altura, ni mayor de 30 cm.



- Refuerzo longitudinal.

El área de barras longitudinales,  $A_{st}$ , para torsión se calculará con la expresión:

$$A_{st} = \frac{2 A_{sv}}{S} (X_i + Y_i) \frac{f_{yv}}{f_y}$$

Donde:

$f_y$  = esfuerzo de fluencia del acero longitudinal.

El área de refuerzo longitudinal no será menor que la obtenida con la ecuación anterior, la separación de barras longitudinales no excederá de 50 cm. y su diámetro no será menor que el de los estribos.

Debe distribuirse el refuerzo longitudinal en el perímetro de la sección transversal y colocarse por lo menos una barra en cada esquina.

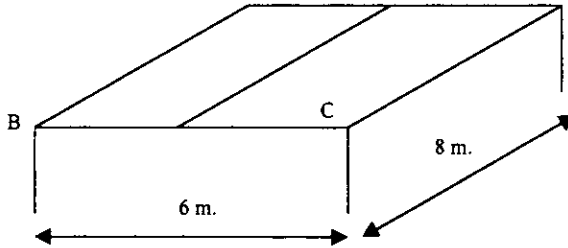
- Refuerzo helicoidal.

La combinación de refuerzo transversal y longitudinal debe sustituirse por refuerzo continuo helicoidal constituido por tramos a 45 grados con las aristas del miembro. Su espaciamiento medido sobre el eje de la pieza, se obtiene dividiendo entre  $\sqrt{2}$  el obtenido de  $S (T_u - T_{CR}) / FR \Omega X_i Y_i f_{yv}$ . Dicho espaciamiento no debe exceder de  $Y_i$ .

Limitación para  $T_u$ . No admitirá que el momento torsionante de diseño,  $T_u$ , sea mayor en ninguna sección que:

$$1.25 T_{CR} \sqrt{16 - \left( \frac{V_u}{0.5 FR bd \sqrt{f'_c}} \right)}$$

**Ejemplo de dimensionamiento de una viga sometida a torsión.**



La viga B – C esta sujeta a los momentos torsionantes siguientes de servicio.

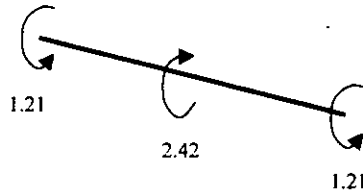
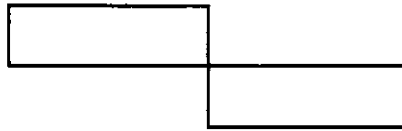


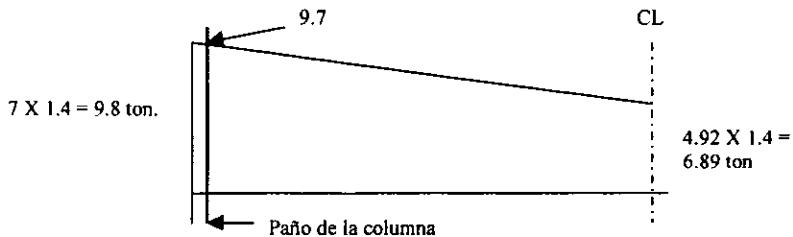
Diagrama de momentos torsionantes de diseño,  $T_u$  :

$$1.21 \times 1.4 = 1.69 \text{ ton.m.}$$



$$1.21 \times 1.4 = 1.69 \text{ ton.m.}$$

Diagrama de fuerzas cortantes de diseño,  $V_u$  :



Revisión de la necesidad de tomar en cuenta la torsión.

( En este ejemplo se supondrá que las dimensiones resistentes menores de 20 cm. son iguales que las nominales ).

$$T_{OR} = 0.6 FR \Sigma x^2 y \sqrt{f^*c} = 0.6 \times 0.8 \times 12.65 ( 20^2 \times 60 + 10^2 \times 30 ) = 163900 \text{ kg.-cm.}$$

Supóngase que en cada lecho se corren dos barras # 5 a todo lo largo de la viga, de modo que, para valuar VCR, puede tomarse en forma conservadora.

$$p = \frac{2 \times 1.98}{20 \times 55} = .0036$$

$$VCR = FR bd (.2 + .30p) \sqrt{f^*c} = 8 \times 20 \times 55 (.2 + 30 \times .0036) \times 12.65 = 3.43 \text{ ton.}$$

$$T_u = 1.69 \text{ ton.m}$$

$$\frac{T_u^2}{TOR^2} + \frac{V_u^2}{VCR^2} = \left(\frac{1.69}{1.64}\right)^2 + \left(\frac{9.7}{3.43}\right)^2 = 1.062 + 7.998 = 9.06 > 9.0$$

$$TCR = .25 TOR = .25 \times 1.64 = 0.41 \text{ ton.m}$$

Por lo tanto se requiere refuerzo por torsión.

Revisión de la sección de 20 X 60 cm.

$$\text{Se debe cumplir } T_u \leq 1.25 TCR \sqrt{16 - \left( \frac{V_u}{.5 FR bd \sqrt{f^*c}} \right)^2}$$

$$1.25 \times 0.41 \sqrt{16 - \left( \frac{9700}{.5 \times 8 \times 20 \times 55 \times 12.65} \right)^2} = 1.84 \text{ ton.}$$

Por lo tanto se acepta la sección de 20 X 60 cm.

Cálculo del refuerzo

Refuerzo transversal

a) Por fuerza cortante: ( $A_v = \text{área de las dos ramas de un estribo.}$ )

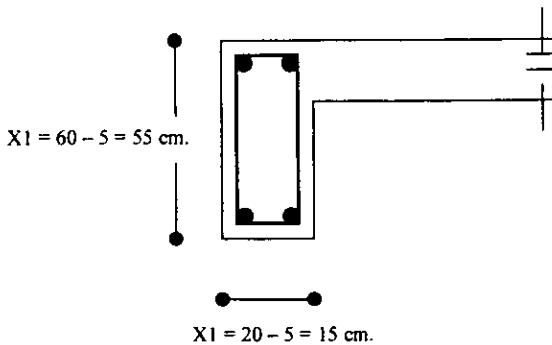
$$\frac{A_v}{S} = \frac{V_u - V_{CR}}{FR d f_y} = \frac{9700 - 3430}{(.8 \times 55 \times 4200)} = 0.0339 \quad \text{rige.}$$

$$\frac{A_v}{S} = \frac{3.5 b}{FR f_y} = \frac{3.5 \times 20}{.8 \times 4200} = .0208$$

b) Por torsión.

$$\Omega = .67 + .33 (55/15) = 1.5$$

$$\frac{A_{sv}}{S} = \frac{T_u - T_{CR}}{FR \Omega X_i Y_i f_{yv}} = \frac{16900 - 4100}{.8 \times 1.5 \times 15 \times 55 \times 4200} = \frac{128000}{4158000} = .0308 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm.}}$$



c) Refuerzo total.

$$\frac{A_s \text{ total}}{S} = \frac{A_v}{S} \times .5 + \frac{A_{sv}}{S} = 0.0169 + .0308 = .0477 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

d) Refuerzo mínimo.

$$\frac{A_{sv} \text{ mín.}}{S} = \frac{4 T_u - T_{CR}}{FR \Omega X_i Y_i f_{yv}} = \frac{3 \times 41000}{4158000} = 0.0296 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$$

Separación de estribos.

Con estribos # 2.5:

$$S = .49 / .0477 = 10.3 \text{ cm.}$$

Separación máxima:  $X_i = 15 \text{ cm.}$

$$0.5 Y_i = .5 \times 55 = 27.5 \text{ cm.}$$

$$30 \text{ cm.}$$

usar estribos # 2.5 @ 10 cm. en toda la viga.

Refuerzo longitudinal por torsión.

$$A_{st} = 2 \frac{A_{sv}}{S} (X_i + Y_i) \frac{f_{yv}}{f_y} = 2 \times .0308 \times (15 + 55) \times 1 = 4.31 \text{ cm}^2$$

$$4 \text{ vs. \#4} = 5.08 \text{ cm}^2$$

usar 4 barras # 4, una en cada esquina, en toda la viga, adicionales por flexión.

## **Dimensionamiento de vigas.**

Dada la cantidad de las variaciones que intervienen, no es posible establecer un conjunto de reglas rígidas para dimensionar. Sin embargo, existen unos cuantos principios generales que conviene respetar.

Fundamentalmente debe buscar la sencillez constructiva y la uniformidad, y deben evitarse las discontinuidades tanto en las dosificaciones del concreto como en la distribución del refuerzo. Los cambios bruscos de sección no suelen ser convenientes. El refuerzo debe detallarse considerando la posibilidad de condiciones de carga no previstas específicamente en el cálculo y los efectos de las redistribuciones de momentos.

Dentro de las limitaciones que imponen los requisitos de resistencia y de condiciones de servicio, el proyectista busca obtener soluciones económicas en cuanto a consumo de materiales. Pero no debe olvidarse que en costo total de la estructura influyen otros factores, tales como las cimbras y obras falsas, la mano de obra, la duración de la construcción y el procedimiento constructivo adoptado, además de la interacción con los otros subsistemas de la obra (instalaciones eléctricas, sanitarias, etc.)

Para lograr sencillez y rapidez constructiva, es conveniente estandarizar secciones en el mayor grado posible, no solamente en las estructuras prefabricadas, donde esto es obvio, sino también en las estructuras coladas en el lugar. La estandarización de secciones trae consigo la simplificación de la mano de obra y la posibilidad de lograr una planeación eficiente del uso de cimbras. Como es natural, conviene también que los elementos estructurales tengan formas geométricas sencillas.

También es aconsejable la estandarización de los detalles de refuerzo, de manera que pueda reducirse a un mínimo el número de barras de características distintas. La estandarización del refuerzo facilita las labores de habilitado y de colocación, al mismo tiempo que la supervisión y el control de costos.

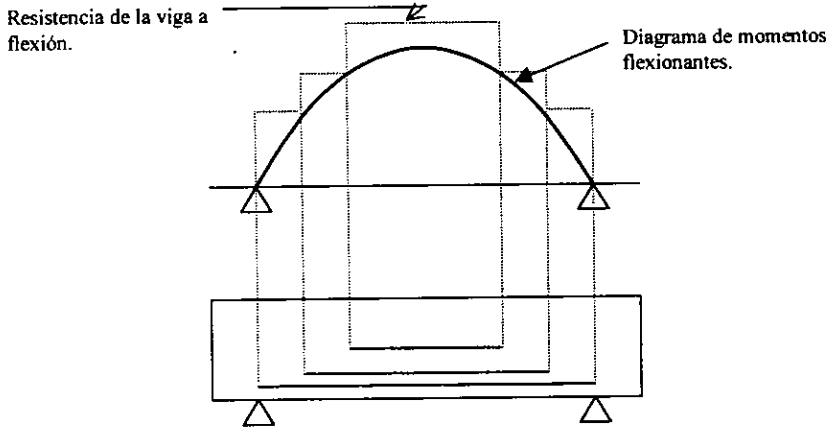
Una de las decisiones más importantes con que se debe enfrentar el proyectista es la elección de la combinación de calidades de acero y concreto más conveniente. La tendencia actual es usar aceros y concretos de resistencias cada vez mayores, lo que permite diseñar elementos ligeros y esbeltos. Sin embargo puede resultar más económico trabajar con calidades inferiores cuando la esbeltez y la ligereza no son factores importantes, como sucede muchas veces.

Una observación semejante puede hacerse también en lo que se refiere al porcentaje de acero conveniente. Se tiende a porcentajes altos cuando es importante disminuir pesos y lograr elementos esbeltos, y a porcentajes bajos en caso contrario. En las condiciones de costo que rigen en nuestro medio actualmente suelen resultar más económicos los porcentajes bajos.

Al detallar el refuerzo debe buscarse siempre que los elementos resulten de comportamiento dúctil.

### **Detallado del refuerzo.**

Una de las ventajas del concreto reforzado como material estructural radica en la facilidad con que puede variarse la resistencia de los elementos a lo largo de sus ejes longitudinales, con el fin de ajustar dicha resistencia a la magnitud de las acciones internas. Por ejemplo, una viga libremente apoyada sujeta a carga uniformemente distribuida, el momento máximo flexionante se produce en el centro del claro y muy pequeño cerca de los apoyos. Por lo tanto se requiere mayor resistencia a flexión en el centro del claro que en otras secciones de la viga. Esto puede lograrse disminuyendo el número de barras de refuerzo de flexión cerca de los apoyos, como se muestra en la **figura 4.43** Al cortar las barras longitudinales, se disminuye el peso total del acero de refuerzo, lo cual redunda en economía de materiales.



**Figura 4.43** Variación de la resistencia a flexión de una viga mediante el corte de barras del refuerzo de flexión.

El corte de barras y, en general, toda las recomendaciones relativas a colocación de barras, formación de ganchos en los extremos, formación y colocación de estribos y hélices y otros aspectos similares, pueden denominarse detallado del refuerzo. El detallado del refuerzo tiene importancia no únicamente para lograr economía en la cantidad del acero, sino también para conseguir estructuras de comportamiento adecuado.

A continuación se muestran algunos criterios para establecer normas generales sobre el detallado del refuerzo.

1. Armados deben ser sencillos.

El uso de una pequeña cantidad de acero lograda de detalles complicados puede resultar contraproducente por el incremento del costo, mano de obra y supervisión.



2. No debe haber congestionamientos del refuerzo.

Si la cantidad de acero es excesiva y no se dejan separaciones suficientes entre las barras, se dificulta el colado del concreto. La estructura puede debilitarse debido a la formación de huecos o zonas en las que el concreto se haya segregado.

3. El refuerzo debe tener recubrimientos adecuados.

El recubrimiento protege al acero de dos agentes: la corrosión y el fuego. La magnitud del recubrimiento debe fijarse, por lo tanto, según la importancia de éstos agentes agresivos. Debe verse siempre un recubrimiento suficientemente grande, a pesar de que el ancho de grietas es mayor mientras mayor sea el recubrimiento.

4. Las barras deben estar ancladas.

Las barras deben desarrollar su esfuerzo de fluencia entre las secciones de momento máximo y sus extremos. Por lo tanto, se debe vigilar que siempre existan longitudes de anclaje suficientes para desarrollar el esfuerzo de fluencia.

5. Las estructuras deben tener un comportamiento dúctil.

Esto se logra limitando los porcentajes de refuerzo de flexión y cuidando los detalles de anclaje de las barras longitudinales y del refuerzo transversal por cortante. El detallado del refuerzo con longitudes de anclaje y traslapes amplios, sin cortes o dobleces excesivos en las barras y con estribos a separaciones adecuadas, permite obtener estructuras dúctiles, con un aumento pequeño en la cantidad de acero de refuerzo.

## Recomendaciones generales para el dimensionamiento de vigas.

- Acero de flexión mínimo.

El porcentaje mínimo del refuerzo de tensión debe ser tal que la resistencia de la viga calculada con las hipótesis usuales sea aproximadamente 1.5 veces mayor que el momento que provoca el agrietamiento, calculado con el módulo de rotura del concreto y suponiendo la sección de la viga sin agrietar. Los reglamentos de construcción suelen especificar porcentajes mínimos aproximados para casos particulares, obtenidos con base en consideraciones semejantes. Para secciones rectangulares, las NTC especifican que el acero mínimo sea dado por la siguiente expresión:

$$A_s \text{ mín} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} \times bd$$

Pueden construirse vigas sin refuerzo de compresión, pero es frecuente por lo menos dos barras en las esquinas para poder armar los estribos que se utilizan en el refuerzo por cortante.

- Acero de flexión máximo.

Con el fin de asegurar un comportamiento dúctil, los reglamentos limitan la cuantía de refuerzo a valores que varían del correspondiente a la condición balanceada,  $p_b$ , al 50% de este valor.

- Corte de barras.

El corte de barras debe hacerse de tal manera que la resistencia de la viga sea siempre ligeramente mayor que el momento flexionante producido por las acciones externas (figura 4.43). Por otra parte, como el diagrama de momentos puede modificarse respecto al teórico por variaciones en la distribución o en la magnitud de las cargas, y debido a que las barras deben anclarse en sus extremos, se recomienda que éstas se

prolonguen cierta distancia, generalmente igual o mayor que el peralte de la viga, más allá de la sección en donde pueden cortarse teóricamente.

Además, debido a que el corte de barras produce tendencia al agrietamiento en la viga y disminuye la resistencia a tensión diagonal, no se permite efectuar cortes a menos que se satisfaga ciertos requisitos mínimos respecto a las condiciones de anclaje y la resistencia a tensión diagonal de la viga. Por ejemplo, un requisito común es que la resistencia a tensión diagonal en la sección de corte sea sustancialmente mayor que la fuerza cortante en dicha sección. De la misma manera, en vigas continuas debe prolongarse una parte de las barras de refuerzo negativo más allá del punto de inflexión, de preferencia, conviene prolongar algunas barras a todo lo largo de la viga. Con esto, la viga queda reforzada contra posibles inversiones de esfuerzos producidas por viento, sismo, asentamiento de los apoyos de la estructura o alguna otra causa imprevista.

- Doblado de barras.

Algunas veces, las barras se doblan hasta la cara opuesta del elemento, en vez de cortarlas. Esta práctica tiene la ventaja de que la barra queda anclada en una zona de compresión y que se disminuyen las concentraciones de esfuerzos que se originan en las secciones de corte en zonas de tensión. Por otra parte, el procedimiento constructivo es un poco más complicado. Las recomendaciones generales sobre doblado de barras son semejantes a las de corte de barras.

- Separación entre barras.

Las barras deben estar separadas en dirección transversal una distancia suficiente para permitir que pasen libremente las partículas mayores del agregado grueso del concreto. Suele recomendarse que el espacio entre barras sea superior a 2.5 cm., al diámetro de las barras y 1.5 veces el tamaño máximo del agregado.

Cuando la cuantía de acero requerido obliga a usar separaciones pequeñas, pueden formarse paquetes o haces de barras. El número de barras en un haz suele limitarse a cuatro. El uso de paquetes se restringe a barras no mayores del no. 11. Las barras que integran los paquetes deben ligarse firmemente entre sí con alambre. Los cortes de las barras individuales deben hacerse en secciones diferentes, de manera que la distancia entre cortes sea por lo menos igual a 40 diámetros. Generalmente las separaciones mínimas entre paquetes se determinan tratándolos como barras simples con un área equivalente. Los haces reducen el congestionamiento pero obligan a suponer especial cuidado en los detalles de empalmes y dobleces.

- Recubrimiento.

Según las NTC el recubrimiento libre mínimo de barras no debe ser menor que su diámetro ni que 2cm. en columnas y vigas, 1.5 cm. en losas y 1 cm. en cascarones.

- Traslapes y empalmes.

En muy pocas ocasiones se puede lograr que todas las barras de refuerzo sean de una sola pieza. Es frecuente que sea necesario traslapar o empalmar las barras. Conviene evitar que los empalmes o traslapes se hagan en zonas en las que las barras trabajen a esfuerzos máximos o que queden varios de ellos en la misma zona de la viga.

- Ganchos.

Para poder cumplir con los requisitos de anclaje en situaciones en que el espacio disponible está restringido, es necesario recurrir al empleo de ganchos.

- Indicaciones generales sobre el detallado del refuerzo principal.

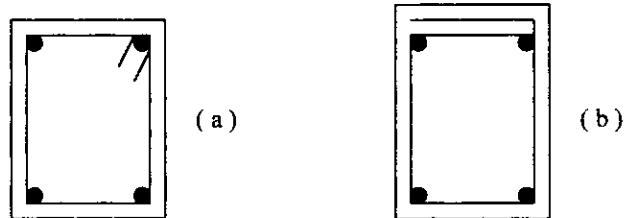
Es conveniente procurar que el refuerzo en todas las secciones de las vigas sea simétrico, usar un máximo de dos diámetros de barra diferentes en una sección dada y

evitar combinar barras cuyo diámetro difiera más de 6 mm. Siempre que sea posible debe tenderse a colocar las barras en un solo lecho. Cuando se emplean barras de diámetro diferente en varios lechos, las de mayor diámetro deben colocarse en un lecho más alejado del eje neutro de la viga.

- Estribos.

La acción confinante que proporcionan los estribos cerrados es superior a la de los estribos abiertos, lo que es conveniente en las porciones de vigas de marcos expuestos a sismos donde existe la posibilidad de fluencia del acero. En la **figura 4.44** se muestran dos tipos de estribos cerrados. En el tipo de la **figura 4.44 a** el anclaje se logra mediante ganchos doblados a  $135^\circ$  mientras que en el tipo de la **figura 4.44 b**, se consigue trasladando los extremos de la barra. El primero parece proporcionar mejor confinamiento, pero el segundo es más fácil de fabricar.

En el capítulo donde se consideró la fuerza cortante se indicó la separación y el diámetro de los estribos.



**Figura 4.44** Tipos comunes de estribos cerrados.

- Acero en las caras laterales.

En vigas de peralte grande, aproximadamente más de 75 cm., es necesario colocar algunas barras de refuerzo distribuidas en las caras laterales, para evitar que se formen

grietas de contracción en dichas caras. El porcentaje de éste refuerzo adicional debe ser de 0.2 a 0.4%.

### **Dimensionamiento de secciones sujetas a flexión.**

El problema del dimensionamiento por flexión puede plantearse en distintas formas. Cuando no existe alguna limitación particular, el proyectista tiene la libertad completa para fijar las características de la sección, tanto en lo que se refiere a las dimensiones del concreto como a la cantidad de acero. También puede seleccionar libremente las características del concreto y del acero. Evidentemente, en cada caso existen un número infinito de soluciones técnicamente correctas. La elección de una solución depende de consideraciones económicas y constructivas que pueden ser muy distintas según las circunstancias de cada caso.

En ocasiones, es común que el problema se plantee con alguna restricción. Por ejemplo, hay casos en que el proyecto arquitectónico establece alguna limitación en el peralte de ciertas vigas, de manera que el proyectista estructural sólo puede fijar el ancho y el porcentaje de acero. Otras veces lo que está fijo es el ancho, y el proyectista calcula el acero y el peralte.

Es muy frecuente que el problema se reduzca a la determinación del acero de una sección de características geométricas dadas. En las vigas continuas, por ejemplo, es común conservar una sección constante, en toda la longitud de la viga. Las características de la sección constante se eligen de manera que satisfagan los requisitos de la sección crítica de la viga.

Por medio de tablas se puede calcular el porcentaje de refuerzo para secciones rectangulares,  $p$ , a partir de los valores de  $M_u / bd^2$ . abarcan varias combinaciones de valores de  $f'_c$  y  $f_y$ . Los resultados obtenidos en ellas influyen el factor de reducción  $FR$ .

Otras ayudas semejantes pueden encontrarse en los manuales. El porcentaje obtenido por alguno de los procedimientos anteriores debe estar comprendido entre ciertos límites, según se ha señalado anteriormente. En el ejemplo que se verá a continuación se tomó como límite superior el 75% del porcentaje balanceado, el cual a su vez, se calcula con la fórmula  $.75 pb$ . Cuando el porcentaje resulta menor que el mínimo, debe colocarse acero adicional para alcanzar dicho valor, aunque no se precise dicho acero por requisitos de resistencia. Cuando resulte mayor que el máximo, debe aumentarse la sección y, si esto no es posible, debe colocarse refuerzo de compresión, el cual aumenta la ductilidad.

Una vez determinada el área teórica de acero, se escoge una combinación de barras con las cuales se obtenga un área que se aproxime lo más posible al área calculada. Al elegir las barras deben tenerse en cuenta dos factores de tendencia opuesta. Cuando mayor sea el diámetro de las mismas, más económica será la mano de obra. Sin embargo, el usar barras de diámetro grande dificulta adaptar la resistencia de las diversas secciones de la viga al diagrama de momentos flexionantes, aumenta las longitudes de traslapes y anclajes y hace más críticos los problemas de agrietamiento.

Ejemplo no. 1 Determinación del refuerzo de una sección rectangular simplemente armada, dadas las dimensiones de la sección.

Datos:  $M_u = 30 \text{ ton.m}$ .

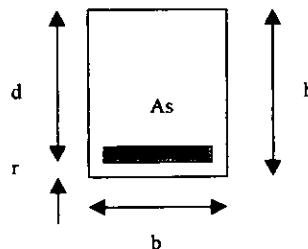
$b = 30 \text{ cm}$ .

$h = 60 \text{ cm}$ .

$A_s = ?$

Materiales: Concreto  $f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$



Cálculo del área de acero.

- Primer procedimiento

Determinación del refuerzo mediante fórmula:  $M_u = bd^2 f'_c q (1-.5q)$

$$\frac{M_u}{bd^2 f'_c} = q(1-.5q)$$

Suponiendo recubrimiento  $r = 6 \text{ cm.}$ ,  $d = 54 \text{ cm.}$

$$\frac{M_u}{bd^2 f'_c} = \frac{30 \times 10^5}{30 \times 54^2 \times 160} = 0.2143$$

$$.2143 = q(1-.5q)$$

$$.2143 = 1q - .5q^2$$

dividiendo entre .5 todos los términos tenemos:

$$.4286 = 2q - q^2; \quad q^2 - 2q + .4286 = 0; \quad q = .2441$$

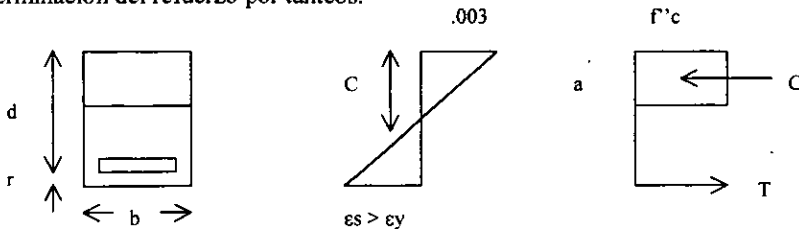
$$p = q ( f' / f_y ); \quad .2441 ( 169 / 4200 ) = .0093$$

$$A_s = pbd; \quad A_s = .0093 \times 30 \times 54 = 15.1 \text{ cm}^2$$

$A_s = 15.1 \text{ cm}^2$

- Segundo procedimiento.

Determinación del refuerzo por tanteos.





$$C = f'c ab; \quad T = A_s f_y$$

$$\text{De } C = T$$

$$a = A_s f_y / f'c b \quad \dots A$$

$$\text{De } M_u = A_s f_y (d - a/2)$$

$$A_s = M_u / f_y (d - a/2) \quad \dots B$$

Primer tanteo  $a = 9 \text{ cm}$ .

Sustituyendo en la ecuación B

$$A_s = \frac{30 \times 10^5}{4200 \times (54 - 4.5)} = 14.45 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo el valor de  $A_s$  en la ecuación A se tiene:

$$a = \frac{14.45 \times 4200}{160 \times 30} = 12.64 \text{ cm.} > 9 \text{ cm.}$$

Segundo tanteo  $a = 11 \text{ cm}$ .

$$A_s = \frac{30 \times 10^5}{4200 \times (54 - 5.5)} = 14.72 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{14.72 \times 4200}{160 \times 30} = 12.8 \text{ cm.} > 11 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{30 \times 10^5}{4200 \times (54 - 6.5)} = 15.03 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{15.03 \times 4200}{160 \times 30} = 13.1 \text{ cm.} \approx 13 \text{ cm.}$$

Tercer tanteo  $a = 13$  cm.

Por lo tanto  $A_s = 15.03 \text{ cm}^2$

- Tercer procedimiento

Cálculo del refuerzo mediante gráficas.

$$\frac{M_u}{bd^2 f'c} = \frac{30 \times 10^5}{30 \times 54^2 \times 160} = 0.2143$$

De la gráfica para diseño por flexión  $q = .24$

$$p = .24 (160/4200) = 0.0091$$

$$A_s = .0091 \times 30 \times 54 = 14.74 \text{ cm}^2$$

Limitaciones del refuerzo.

$$p_{\min} = \frac{0.7\sqrt{f'c}}{f_y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} = 0.0026$$

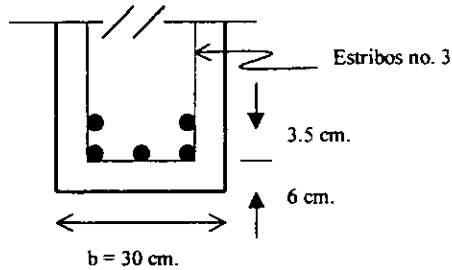
$$p_b = \frac{f'c}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{160}{4200} \times \frac{4800}{4800 + 6000} = 0.0179$$

$$p_{\max.} = .75 \times p_b = .75(.0179) = 0.0134$$

$$\therefore p_{\min} < 0.0091 < p_{\max.}$$

Elección del refuerzo.

Armado propuesto.



Revisión:

$$y = \frac{(11.64 \times 6) + (3.96 \times 9.5)}{15.6} = 6.8 \text{ cm.}$$

$$d = h - r = 60 - 6.8 = 53.11 \text{ cm.}$$

$$p = \frac{A_s}{bd} = \frac{15.6}{30 \times 53.11} = .0098$$

$p_{\min} < p < p_{\max}$ .

$$q = p \frac{f_y}{f'_c} = .0098 \frac{4200}{160} = 0.257$$

De la gráfica para diseño por flexión

$$Mu / bd^2 f'_c = 0.223$$

$$Mu = (.223 \times 160 \times 30 \times 53.11^2) = 30.2 \text{ E}^5 \text{ kg.} \cdot \text{cm}$$

$$\underline{Mu = 30.2 \approx 30.0 \text{ tom} \cdot \text{m.}}$$

Ejemplo no. 2 Determinación de dimensiones y refuerzo de una sección simplemente armada.

Este ejemplo ilustra el caso más general en el cual se conocen el momento flexionante y las resistencias de los materiales, y se trata de determinar las dimensiones de la sección y el área de acero necesaria. El análisis de la ecuación de flexión, según las Normas Técnicas Complementarias.  $M_u = FR ( 1 - .5q ) f'c b d^2$  muestra que hay tres variables independientes que intervienen en este problema que son b, d y q. Según la forma en que se plantee el problema, y de acuerdo con algún criterio conveniente se suele fijar los valores de dos de éstas variables y se calcula la tercera de ellas. Una forma de proceder consiste en suponer un valor de p, a partir del cual se determina el valor de q y el valor de la relación b/d. en casos prácticos puede resultar preferible partir de la relación b/h.

En este ejemplo se ha fijado el valor de p y una relación b/d = 1/2. El valor de p que se suponga, influye considerablemente en el costo de la estructura, mientras más peraltada sea la sección, menor es el consumo de los materiales. Sin embargo, el uso de peraltes excesivamente grandes puede llevar a problemas de inestabilidad lateral y a un aumento en el costo de los acabados del edificio, debido al incremento en el espesor de los sistemas de piso. También el costo de la cimbra aumenta con el peralte de la viga. Cuando no existen limitaciones en el peralte, los valores de b/d suelen estar entre 1/4 y 1/2 aproximadamente.

Datos :  $M_u = 31 \text{ ton.m.}$

Concreto :  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$

Acero :  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Considerar estribos no. 3

Relación b/d = 1/2 aproximadamente.

Constantes de cálculo :  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$

$f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f'c = 170 \text{ kg/cm}^2$

Cálculo de b, d y As.

$$pb = \frac{f'c}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{170}{4200} \times \frac{4800}{10200} = 0.019$$

Suponiendo  $p = .5 pb$ .

$$p = .5 \times .019 = .0095$$

utilizando las tablas para calcular porcentajes de refuerzo para  $p = .0095$

$$Mu / bd^2 = 31.7$$

Despejando  $bd^2$

$$bd^2 = Mu / 31.7 = 31 \times 10^5 / 31.7 = 97792$$

$$\text{si } b = d/2, \text{ entonces } d^3/2 = 97792$$

$$d = 58 \text{ cm.}, \quad b = 29 \text{ cm.}$$

considerando recubrimiento de 6 cm.

$$h = 58 + 6 = 64 \text{ cm.}$$

Se supone una sección con las siguientes características:

$$b = 30 \text{ cm.}$$

$$h = 65 \text{ cm.}$$

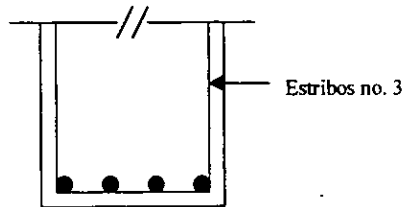
$$d = 59 \text{ cm.}$$

Ajuste del área de acero:

$M_u / bd^2 = (31 \times 10^5) / (30 \times 59.2) = 29.7$ ; de las tablas se obtiene un valor de  $p = .0088$ , por lo tanto el área de acero es de:

$$A_s = .0088 \times 30 \times 59 = 15.58 \text{ cm}^2$$

Armado propuesto



Secciones rectangulares doblemente armadas

Puede suceder que en una sección rectangular cuyas dimensiones han sido fijadas por alguna restricción funcional no pueda soportar, como sección simplemente armada, el momento a que esta expuesta sin violar los requisitos de ductilidad mencionadas. En tal caso, la capacidad de la sección puede aumentarse adicionando acero de compresión e incrementando el acero de tensión. El acero de compresión también es útil para reducir las deflexiones.

A veces una sección tiene refuerzo de compresión por motivos ajenos a la resistencia o al control de deformaciones. Por ejemplo en una viga continua, los reglamentos exigen que parte del acero positivo requerido en las zonas centrales de los claros se prolongue a los apoyos. En los apoyos interiores el momento es negativo, de manera que la parte inferior de la sección, por donde pasan las barras prolongadas, está en compresión, estas barras pueden aprovecharse para aumentar resistencia cuando es

necesario utilizar una sección cuya resistencia como simplemente armada es insuficiente. Sin embargo, cuando existe libertad para escoger dimensiones, este tipo de consumo de acero y conducir a un congestionamiento del refuerzo que dificulta el colado.

Ejemplo no. 3 Determinar el acero de refuerzo en una sección rectangular doblemente armada de dimensiones dadas. (se determinará el área de acero en compresión y de tensión)

Siguiendo las indicaciones de las NTC – 96 establece ecuaciones para determinar las cuantías de acero:

$$pb = \frac{f''c}{fy} \times \frac{4800}{fy + 6000}$$

$$p_{\text{máx.}} = .75 pb.$$

Como primer paso se calculó el momento resistente de la sección si solo tuviera acero de tensión, éste resultó menor que el momento que debe resistir la sección ( 45.6 ton. ), por lo tanto es necesario aumentar su resistencia colocando mayor cantidad de refuerzo de tensión y adicionar refuerzo de compresión.

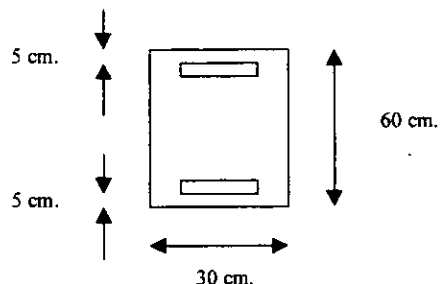
Para conocer el valor del momento que actuará en la zona de compresión se restó el momento actuante al momento que resiste la zona en tensión suponiendo que el acero en compresión fluye se procedió a calcular  $A_s$  y  $A_s'$ , posteriormente se demostró que sí fluye el acero en compresión. Finalmente se presenta el armado propuesto.

Datos :  $M_u = 45.6 \text{ ton.-m. (negativo)}$

$b = 30 \text{ cm.}$

$h = 60 \text{ cm.}$

$d = 55 \text{ cm. (supuesto)}$



$$\text{concreto} = f'c \ 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{acero} = fy \ 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Constantes de cálculo.

$$f''c = .8 f'c = .8 \times 200 = 160 \text{ kg/cm}^2$$

$$f^*c = .85 f''c = .85 \times 160 = 136 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{por ser } f''c < 250 \text{ kg/cm}^2)$$

$$pb = \frac{f''c}{fy} \times \frac{4800}{fy + 6000} = \frac{136}{4200} \times \frac{4800}{10200} = 0.01524$$

$$pb = .75pb = .75 \times 0.0154 = .01143$$

$$q_{\text{máx.}} = p_{\text{máx.}} \frac{fy}{f''c} = 0.1143 \times \frac{4200}{136} = 0.3530$$

Cálculo del momento resistente máximo de la viga si solo tuviera refuerzo en tensión,  
(MR1)

$$MR1 = FR \ bd^2 \ f^*c \ q_{\text{máx.}} \ (1 - .5q_{\text{máx.}})$$

$$MR1 = .9 \times 30 \times 55^2 \times 136 \times .3530 \ (1 - (.5 \times .3530)) = 32.29 \text{ ton.}$$

$$\underline{MR1 = 32.29 < 45.6 \text{ ton}}$$

Por lo tanto se necesita acero en compresión.

Cálculo de  $A_s$  y  $A_s'$  ( suponiendo que  $A_s'$  fluye )

$$MR2 = Mu - MR1 = 46.5 - 32.29 = 13.31 \text{ ton.}$$



$$A_s - A_{s\text{m}\acute{a}\text{x}} = \frac{MR_2}{FR f_y (d - d')} = \frac{13.31 \times 10^5}{.9 \times 4200 \times (55 - 5)} = 7.04 \text{ cm}^2$$

$$A_{s\text{m}\acute{a}\text{x}} = \rho_{\text{m}\acute{a}\text{x}} \cdot b d = .01143 \times 30 \times 55 = 18.86 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 7.04 + 18.86 = 25.90 \text{ cm}^2$$

Se propone usar 5 vs. # 5 (25.35 cm<sup>2</sup>)

Y el acero a compresi3n:

$$A_s' = 7.04 / .75 = 9.39 \text{ cm}^2$$

Se propone usar 2 vs. # 8 (10.14 cm<sup>2</sup>)

La cuantía de acero a tensi3n ser3:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{25.35}{30 \times 55} = 0.0154$$

La cuantía de acero a compresi3n es:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{10.14}{30 \times 55} = 0.0067$$

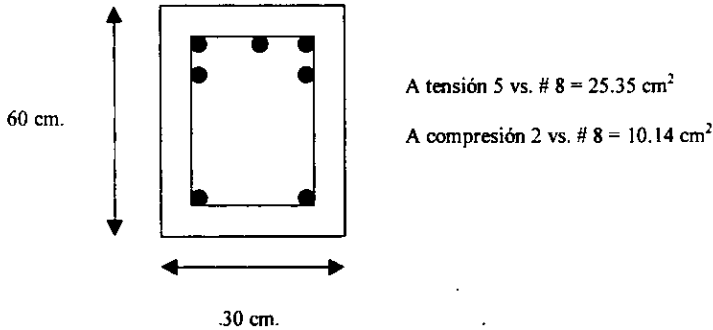
Comprobaci3n de que fluye el acero a compresi3n.

Este acero fluye si:

$$\rho - \rho' \geq \frac{f''c}{f_y} \times \frac{d'}{d} \times \frac{4800}{6000 - f_y} = \frac{136}{4200} \times \frac{5}{55} \times \frac{4800}{2200} = 0.0078$$

$p - p' = 0.0154 - .061 = .0093 > .0078 \therefore$  si fluye el acero a compresión.

Armado propuesto:



### Secciones T.

Uno de los sistemas de piso más comúnmente utilizados en estructuras de concreto, consiste en vigas que soportan losas de concreto coladas monolíticamente con ellas. Se forman así las llamadas vigas T. Si se trata de vigas libremente apoyadas, las reglas empíricas, que fijan relaciones peralte / claro, pueden servir para una estimación preliminar de dimensiones. Con frecuencia se da el caso de las vigas continuas, en las que las dimensiones de las nervaduras quedan generalmente determinadas por los requisitos de momento negativo y de fuerza cortante en los apoyos, donde la viga debe dimensionarse como una viga rectangular. El espesor del patín depende del diseño de la losa. En las porciones centrales, sujetas a momento positivo, donde la viga actúa como sección T, el problema se reduce, entonces, a determinar el refuerzo necesario en una sección de dimensiones conocidas.

Para ilustrar con un ejemplo (4), se desea determinar el refuerzo de una sección T dadas sus dimensiones, el momento flexionante y las resistencias de los materiales. La

viga del ejemplo es parte de un sistema de piso formado por varias vigas de sección T con una losa en la parte superior. Esta losa es la que actúa como patín de la viga.

El primer paso en la resolución del problema es la determinación del ancho efectivo del patín, o sea, el tramo de losa que forma parte del área de concreto sujeta a compresión. La determinación precisa de este ancho es un problema complejo. En teoría de la elasticidad se han obtenido soluciones para vigas de materiales lineales. En el caso de vigas de concreto reforzado se suele determinar el ancho efectivo mediante recomendaciones del reglamento. Así, en las NTC, se especifica que el ancho efectivo es el menor de los tres valores mostrados en el ejemplo, que en particular, es la separación centro a centro de las vigas. Esta manera de determinar el ancho efectivo es aproximada.

Para determinar el área de acero se siguió un procedimiento de tanteos. Dicho procedimiento consiste en suponer un valor tentativo del brazo del par interno,  $z$ . Como primera aproximación puede utilizarse un valor de  $0.9d$  o de  $(d - t/2)$ . A partir del valor tentativo de  $z$ , se calcula el área de refuerzo necesaria, suponiendo que éste acero fluye, o sea, que la sección es subreforzada. De esta manera se obtuvo un área de  $32.5 \text{ cm}^2$ . La fuerza de tensión que puede desarrollarse con esta área de refuerzo es de 136.5 ton. Por equilibrio de la sección transversal, la fuerza de compresión debe tener este mismo valor.

El siguiente paso consistió en determinar si la fuerza de compresión necesaria para el equilibrio alcanza a desarrollarse dentro del patín, o es necesaria la contribución del alma de la viga. En caso que suceda lo primero, la sección se calcula como una sección rectangular.

Cuando la fuerza de compresión no alcanza a desarrollarse dentro del patín, el eje neutro cae dentro del alma y la viga es realmente una viga T. en el ejemplo se presenta esta situación, ya que la fuerza total de compresión requerida es de 136.5 ton., mientras que la fuerza que puede desarrollarse en el patín es únicamente 108.8 ton.

Las fuerzas de compresión en el patín y en el alma se calcularon usando el bloque rectangular de esfuerzos equivalentes aceptado en las NTC. Una vez determinadas las fuerzas de compresión en el patín y en el alma, se calculó la posición del punto de aplicación de la resultante de estas fuerzas, o sea, de la fuerza total de compresión. Dicho punto de aplicación quedó a 5.5 cm. de la cara superior del patín.

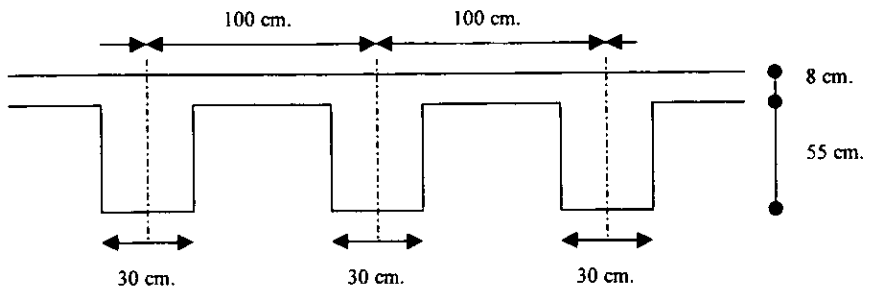
Las NTC no hacen ninguna indicación específica sobre el refuerzo mínimo de secciones T. Por lo tanto, si se procede con rigor, debe aplicarse la recomendación general de las NTC según el cual el armado mínimo de una viga debe ser el requerido para el momento resistente de la sección trasformada no agrietada, considerando un módulo de rotura de  $f_f = 2\sqrt{f_c}$ . La aplicación literal de las NTC conduce a un procedimiento demasiado laborioso para fijar un límite inferior. En consecuencia, en el ejemplo se ilustra la aplicación del criterio recomendado por González Cuevas y Robles.

Ejemplo no. 4 Determinación del refuerzo de una sección T de dimensiones dadas.

Datos: Concreto :  $f_c : 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero :  $f_y : 4200 \text{ kg/cm}^2$

Geometría



Claro de la viga : 9 m.

Momento último requerido : 52 ton.m

Ancho efectivo b, el menor de :  $16 t + b' = 16 (8) + 30 = 158 \text{ cm.}$

$$L / 4 = 900 / 4 = 225 \text{ cm.}$$

Centro a centro = 100 cm.

Peralte efectivo : recubrimiento supuesto

$$d = h - r = 55 - 8 = 47 \text{ cm.}$$

### Tanteo inicial

Se supone un brazo del par interno,  $z = 0.87 d$

$$Z = 0.87 \times 47 = 41 \text{ cm.}$$

$$A_s = \frac{M_u}{F_r \times f_y \times z} = \frac{52 \times 10^5}{.9 \times 4200 \times 41} = 33.6 \text{ cm}^2$$

$$T = A_s f_y = 33.6 \times 4200 = 141\,120 \text{ kg.}$$

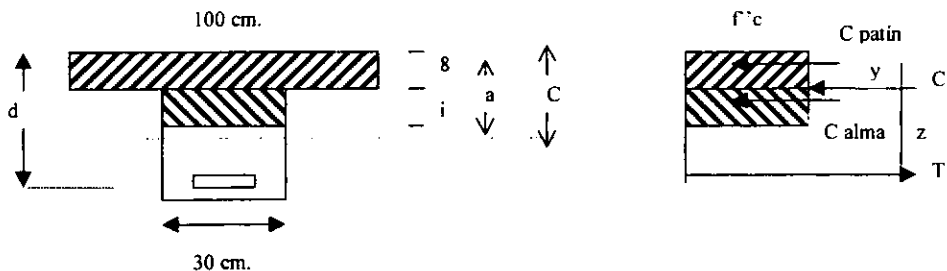
Por equilibrio de las fuerzas horizontales

$$C = T = 141\,120 \text{ kg.}$$

$$\text{Compresión en el patín : } b t f'c = 100 \times 8 \times 136 = 108\,800 \text{ kg.} < C$$

$\therefore$  es una viga T

$$\text{Compresión en el alma : } C - C_{\text{patín}} = 141\,120 - 108\,800 = 32\,320 \text{ kg.}$$

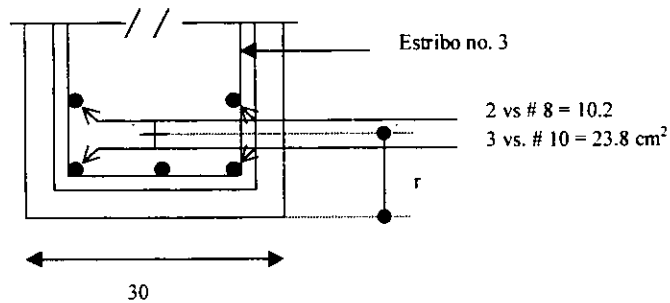


$$i = 32\,320 / 30 \times 136 = 7.9 \text{ cm.}$$

$$y = \frac{108800 \times 4 + 32320 \left(8 + \frac{2.9}{2}\right)}{108800 + 32320} = 5.8 \text{ cm.}$$

Brazo calculado  $z = 47 - 5.8 = 41.2 \approx 41 \text{ cm.}$

$$MR = 0.9 \times 33.6 \times 4200 \times 41.2 = 52.3 \times 10^5 \approx 52 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$



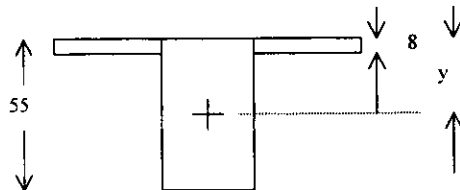
$$r = \frac{10.2 \times 12.5 + 23.8 \times 6.1}{10.2 + 23.8} = 8.02 \approx 8 \text{ cm. (supuesto)}$$

Revisión de las limitaciones de acero.

Acero mínimo

Momento de agrietamiento:

$$Mag = ff \cdot It / y \quad (A)$$



$$n = E_s / E_c = 2 \times 10^6 / 10000 \sqrt{f_c}$$

$$n = 14.1 = 14$$

Localización del centroide

$$y = \frac{70 \times 8 \times 4 + 30 \times 55 \times 55 / 2}{70 \times 8 + 30 \times 55} = 21.55 \text{ cm.}$$

Momento de inercia de la sección sin agrietar

$$I_t = \frac{1}{2} \times 70 \times 8^3 \times 70 \times 8 \times 17.55^2 + \frac{1}{12} \times 30 \times 55^3 + 30 \times 55 \times 5.92^2$$

$$I_t = 649.8 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Módulo de rotura

$$f_r = 2 \sqrt{f_c} = 2 \sqrt{200} = 28.3 \text{ kg/cm}^2$$

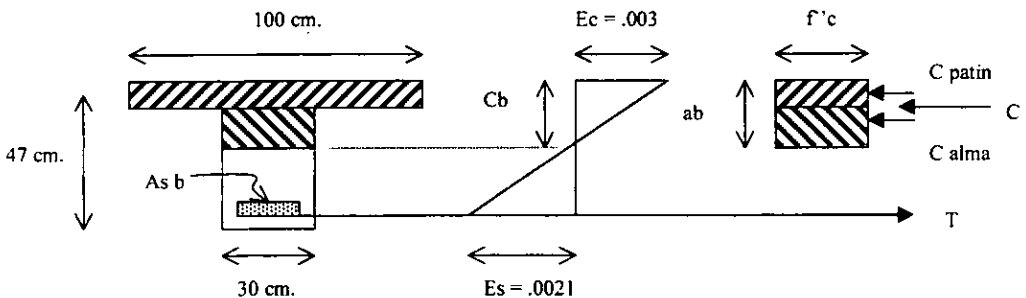
sustituyendo en A tenemos:

$$M_{ag} = 28.3 ( 649.8 \times 10^3 / 55 - 21.55 ) = 550 \times 10^3 \text{ kg.cm}$$

$$1.5 M_{ag} = 1.5 \times 5.5 = 8.25 \text{ ton.m}$$

$$8.25 < MR$$

Acero máximo



$$\frac{C_b}{d} = \frac{e_c}{e_c + e_y} = \frac{.003}{.003 + .0021} \times 47 = 27.6 \text{ cm.}$$

$$ab = .8 C_b = .8 \times 27.6 = 22.1 \text{ cm.}$$

### Fuerza de compresión correspondiente a la condición balanceada

$$\begin{aligned} C_b &= C_{\text{patin}} + C_{\text{alma}} \\ &= 108800 + (ab - t) f'_c b' \\ &= 10800 + (22.1 - 8) 30 \times 136 \\ &= 166\,330 \text{ kg.} \end{aligned}$$

$$T_b = C_b$$

$$A_{sb} = \frac{T_b}{f_y} = \frac{166330}{4200} = 39.6 \text{ cm}^2 > 34 \text{ cm}^2$$

### **Condiciones de servicio en vigas.**

Las condiciones de servicio de una estructura quedan determinadas por sus deformaciones, agrietamientos, corrosión de su refuerzo y los deterioros en su superficie de concreto. Los deterioros de la superficie se pueden minimizar con un control apropiado de la mezcla, el colado y el curado del concreto. Si la superficie está expuesta a sustancias químicas que la puedan dañar, como las que puede haber en una planta química o en una planta de tratamiento de aguas residuales, se debe usar en la mezcla un tipo especial de cemento con los aditivos apropiados. El uso de un recubrimiento adecuado, un control adecuado de los materiales y la aplicación en el diseño de los



métodos para controlar el agrietamiento y las deformaciones, pueden disminuir y en la mayoría de los casos eliminar estos problemas.

### **Deflexiones.**

En la actualidad se utilizan en el diseño por resistencia concretos de alta resistencia; esto y el aumento del conocimiento de las propiedades de los materiales han dado por resultado la aplicación de factores de carga menores y una reserva de resistencia más reducida. Por lo anterior, se diseñan miembros más esbeltos y eficientes en los que las deflexiones constituyen un criterio de control más importante.

El cálculo de deflexiones tiene dos aspectos. Por un lado, es necesario calcular las deflexiones de miembros estructurales bajo cargas y condiciones conocidas; por otro, deben establecerse criterios sobre límites aceptables de deflexiones.

El problema de calcular las deflexiones de miembros estructurales reales es aún más difícil que el de estimar las deflexiones de vigas ensayadas en laboratorio debido a que el comportamiento del concreto es función del tiempo y, por consiguiente, en cualquier enfoque riguroso debe tenerse en cuenta la historia de carga del miembro investigado. En la práctica, esto no es posible generalmente, ya que las condiciones de carga son muy variables, tanto en magnitud como en el tiempo de aplicación. También son difíciles de predecir las variaciones de humedad y temperatura con el tiempo, las cuales tienen influencia sobre las deflexiones a largo plazo.

La limitación de grietas, es importante desde dos puntos de vista. En primer lugar, las deflexiones excesivas de un miembro pueden producir daños en otros miembros estructurales o, más frecuentemente, en los elementos no estructurales, como muros divisorios, o acarrear problemas, como la acumulación de aguas en azoteas. Los valores de las deflexiones permisibles dependen, desde el punto de vista, de varios factores, tales como el tipo de elementos no estructurales, tipo de conexión entre el miembro estructural y otros elementos, estructurales o no, y del método de construcción utilizado.

En segundo lugar, a veces es significativa la respuesta humana ante las deflexiones de los miembros. Las deflexiones excesivas no son toleradas por los usuarios de la estructura, ya que producen una sensación de inseguridad, ya por razones de tipo estético.

Deflexiones bajo cargas de servicio de corta duración.

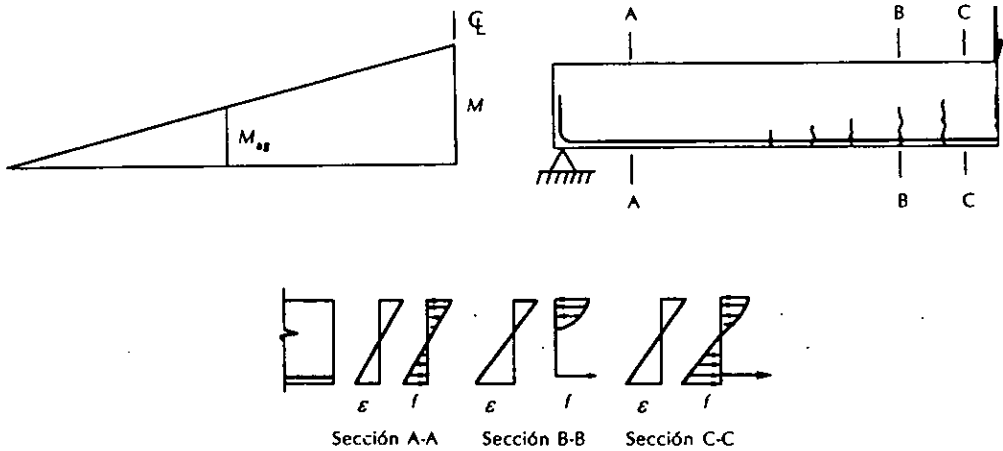
En la **figura 4.45** se muestran esquemáticamente los estados de agrietamiento, esfuerzos y deformaciones unitarias en varias secciones transversales de una viga sujeta a flexión. Estos estados corresponden a cargas de servicio.

En la región en que el momento externo es menor que el que produce el agrietamiento del concreto en la zona de tensión, Mag., el elemento no tiene grietas, el concreto trabaja a tensión y contribuye a resistir el momento externo, y las deformaciones unitarias son pequeñas : sección A – A.

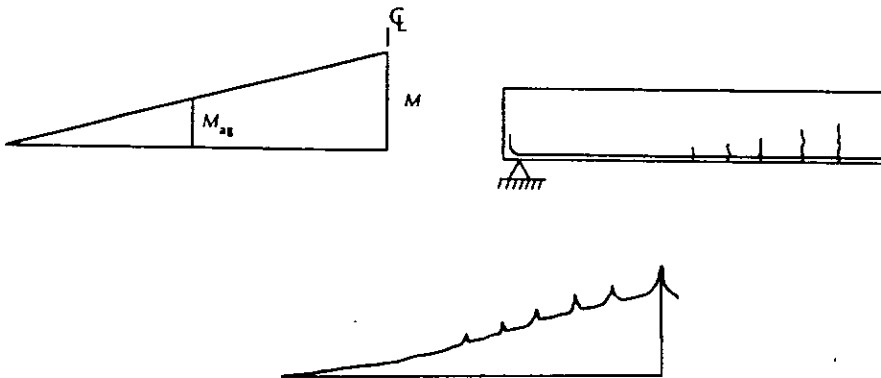
En la región en que el momento externo es mayor que el de agrietamiento, se distinguen dos casos: El primero, sección B – B, es el de las secciones transversales en que se han formado grietas de tensión. En estas secciones, el concreto de la zona de tensión no contribuye apreciablemente a resistir el momento externo. El segundo caso, sección C – C, corresponde a secciones que no coinciden con grietas de tensión. En estas secciones, el concreto de la zona de tensión contribuye parcialmente a resistir el momento externo, y los esfuerzos y deformaciones son menores que los de una sección que coincide con una grieta.

Si se conoce el estado de deformaciones unitarias en una sección transversal, es posible calcular la curvatura en esa sección dividiendo la deformación unitaria en la fibra de concreto más alejada, ec, entre la profundidad del eje neutro, C, siempre que se acepte una distribución lineal de deformaciones unitarias a lo largo del peralte. En la **figura 4.46** se presenta la distribución aproximada de curvaturas a lo largo de la viga, correspondiente a los estados de deformaciones de la **figura 4.45** Esta distribución es

irregular, pues se presentan curvaturas mayores en las secciones que coinciden con grietas. Una vez conocida la magnitud y distribución de curvaturas a lo largo de la viga, es posible calcular las deflexiones por medio de los métodos clásicos, como los teoremas de área momento o de la viga conjugada.



**Figura 4.45** Distribuciones de agrietamiento, deformaciones unitarias y esfuerzos de una viga bajo carga de servicio.



**Figura 4.46** Distribución de curvaturas en la viga de la figura 4.45

El cálculo de deflexiones a partir de los diagramas de curvaturas no es práctico para elementos de concreto reforzado, por lo laborioso de calcular las curvaturas de diferentes secciones y por que no se conoce con precisión la distribución de curvaturas en las zonas vecinas a las grietas de flexión. Tampoco pueden predecirse con precisión los lugares en que se forman las grietas de flexión. Por lo tanto las NTC se basan en métodos simplificados, donde se toman en cuenta las variables principales que influyen en las deflexiones. Las variables principales, según se deduce de la descripción del comportamiento son las siguientes:

- Resistencia a la tensión del concreto.

A mayor resistencia, menores deflexiones, por que es mayor la zona que no tiene grietas y es mayor la contribución al momento resistente del concreto a tensión.

- Módulo de elasticidad del concreto.

A mayor módulo, menores deflexiones, por que las deflexiones unitarias y por consiguiente, las curvaturas son menores.

- Porcentaje de refuerzo por tensión.

A menor porcentaje, mayores deflexiones, por que los esfuerzos y deformaciones unitarias en el concreto y en el acero son mayores.

En los métodos simplificados, las deflexiones se calculan como si se tratase de un elemento de un material homogéneo y elástico.

Las diferencias entre los distintos métodos consisten básicamente en los valores del módulo de elasticidad,  $E$ , y el momento de inercia,  $I$ . ambas cantidades resultan difíciles de determinar para un elemento de concreto reforzado.

Según las NTC, las deflexiones inmediatas se pueden estimar con los métodos tradicionales de la mecánica de sólidos, tomando como momento de inercia el de la sección transformada agrietada. En vigas continuas se indica que se utilice un valor promedio del momento de inercia calculado con la expresión:

$$I_e = \frac{I_{e1} + I_{e2} + 2I_c}{4}$$

Donde:  $I_{e1}$  e  $I_{e2}$  son los momentos de inercia de la sección transformada agrietada de los extremos del claro de estudio.

$I_c$  es el momento de inercia de la sección central.

Si la viga es continua únicamente en uno de los extremos, el momento de inercia correspondiente al tramo discontinuo se supone igual a cero y como denominador de la expresión anterior se utiliza 3.

Deflexiones bajo cargas de larga duración.

Este efecto se ilustra en la **figura 4.47** para una viga libremente apoyada con refuerzo de tensión únicamente. Las fibras superiores se acortan libremente, mientras que las fibras al nivel del acero de refuerzo se acortan menos por la restricción del refuerzo. Las curvaturas, y por lo tanto las deflexiones, debidas a la contracción de esos tipo de elementos son del mismo signo que las producidas por cargas transversales.

En elementos con refuerzo de tensión y de compresión, las fibras superiores ya no se acortan libremente, y las curvaturas y deflexiones son menores que en el caso de refuerzo de tensión únicamente. Si la sección es simétrica y con iguales porcentajes de refuerzo de tensión y compresión, el acortamiento es el mismo en las caras superior e inferior del elemento y, por lo tanto, no existen curvaturas ni deflexiones debidas a contracción, excepto las ocasionadas por las variaciones naturales en el concreto y en la colocación de las varillas.

Las principales variables que influyen en las deflexiones por contracción, además de la relación entre porcentajes de refuerzo de tensión y de compresión, son las mismas que influyen en la contracción del concreto simple, ya que a mayor deformación unitaria. Esh (figura 4.47), son mayores las deflexiones del elemento. Las deflexiones por contracción ocurren aún cuando el elemento se encuentre descargado.

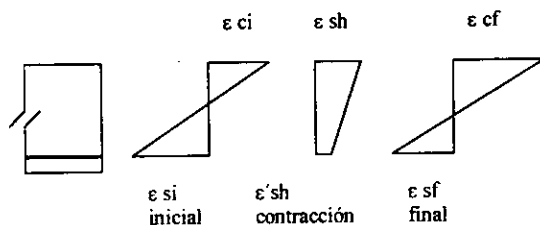


Figura 4.47 Efecto de la contracción en una viga con refuerzo de tensión.

#### Efecto del flujo plástico.

El efecto del flujo plástico en el cambio de curvaturas se ilustra en la figura 4.48 La línea A representa los estados de deformaciones y de esfuerzos instantáneos, y la línea B las deformaciones y esfuerzos después de transcurrido cierto tiempo. Las deformaciones del concreto aumentan con el tiempo, mientras que los esfuerzos disminuyen, por que el eje neutro de la sección se mueve hacia abajo. Las deformaciones al nivel del acero de refuerzo permanecen prácticamente constantes, según se ha podido comprobar experimentalmente.

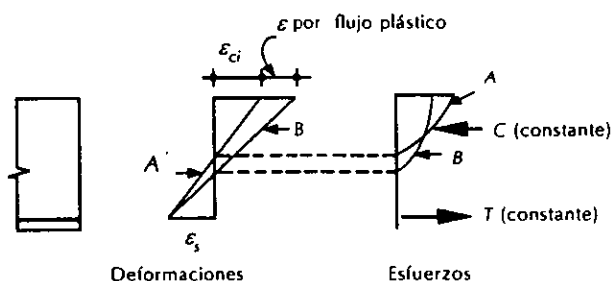
El incremento de las deformaciones del concreto simple por flujo plástico se debe a las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, a las proporciones de la mezcla y a la humedad ambiente. En un elemento de concreto reforzado, el incremento de deformaciones ocurre bajo un estado de esfuerzos variable debido al cambio de

posición del eje neutro, el cual, como se señaló anteriormente, hace que disminuyan los esfuerzos de compresión.

En un elemento con refuerzo de compresión, además de la disminución de esfuerzos en el concreto por el cambio de posición del eje neutro, hay otra disminución por la transferencia de esfuerzos de compresión del concreto al acero. Por consiguiente, la disminución de esfuerzos en el concreto es mayor que en el caso de elementos con refuerzo de tensión únicamente. Ahora bien, el incremento de deformaciones por flujo plástico es mayor mientras mayores sean los esfuerzos aplicados. Entonces, en un elemento con refuerzo de compresión, las deformaciones por flujo plástico son menores, por que los esfuerzos disminuyen más rápidamente que en un elemento con refuerzo de tensión únicamente.

Las principales variables que influyen en las deformaciones por flujo plástico son el porcentaje de acero de refuerzo de compresión, la magnitud de los esfuerzos aplicados y todas las variables que influyen en las deformaciones por flujo plástico del concreto simple.

A diferencia del incremento de deformaciones por contracción, es necesario que un elemento se encuentre cargado para que ocurran deformaciones por flujo plástico.



**Figura 4.48** Efecto del flujo plástico en una viga con refuerzo de tensión.

Las variables que influyen en las deformaciones por contracción y flujo plástico son demasiado numerosas para poder involucrarlas todas en un método sencillo y riguroso. Por consiguiente, los métodos que se proponen consideran únicamente algunas de esas variables y esto de manera simplista.

Las NTC estipulan un método fundamentalmente igual al del reglamento ACI, pero distinguen entre concretos clase 1 y 2, ya que como se ha visto, los efectos del tiempo son menores mientras menor sea el módulo de elasticidad. Así, para concretos clase 1, las deflexiones adicionales se obtienen multiplicando las inmediatas por el factor:

$$\frac{2}{1 + 50p'}$$

$p'$  = es la cuantía de acero de compresión al centro para claros libremente apoyados o continuos, y en empotramientos para voladizo.

Para concretos clase 2, el numerador de la ecuación anterior debe tomarse igual a 4. Para tramos continuos, se indica que se utilice un valor promedio de  $p'$  determinado en forma semejante a la aplicada según las NTC para determinar un valor promedio de inercia efectivo  $I_e$ .

#### Deflexiones permisibles.

Se ha mencionado anteriormente que las deflexiones de elementos estructurales deben limitarse por dos razones: por la posibilidad de que provoquen daños en otros elementos de la estructura, y por motivos de orden estético.

El reglamento del D.F. establece limitaciones de deformación iguales para todos los materiales de construcción. La deflexión máxima de vigas y losas, incluyendo los efectos a largo plazo, se fija en 0.5 cm. más el claro entre 240. Si la deformación de la viga o losa puede perjudicar a elementos no estructurales, la deflexión que pueda



presentarse después de la colocación de dichos elementos se limita a 0.3 cm. más el claro entre 480.

### **Agrietamiento.**

El concreto se agrieta en una etapa temprana de su historia de cargas, debido a que es débil en tensión; en consecuencia, es necesario estudiar su comportamiento de agrietamiento y controlar el ancho de grietas de flexión. El agrietamiento contribuye a la corrosión del refuerzo, al deterioro de la superficie y sus efectos perjudiciales a largo plazo.

Son diversas las causas que conducen al agrietamiento del concreto, siendo las fundamentales las deformaciones debidas a cambios volumétricos y los esfuerzos ocasionados por fuerza de tensión, por momentos flexionantes, o por fuerzas cortantes.

Son dos las razones por las que se requiere controlar al agrietamiento: la apariencia y el riesgo de corrosión del refuerzo. El tratamiento del problema en el diseño de estructuras de concreto tiene un doble aspecto. Por una parte, debe contarse con métodos para predecir la separación y, en particular, el ancho de las grietas.

### **Formación y desarrollo de grietas.**

Se han desarrollado técnicas de laboratorio para investigar la formación y desarrollo de grietas en el interior de una masa de concreto.

Elementos sujetos a tensión.

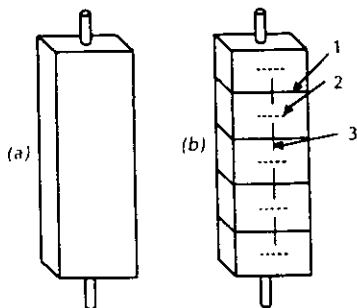
El tipo de espécimen usado consiste en un prisma de concreto con una barra longitudinal en cuyos extremos se aplican fuerzas de tensión (figura 4.49 a). El fenómeno de agrietamiento se desarrolla de la siguiente manera:

Cuando los esfuerzos en el refuerzo alcanzan un valor del orden de  $500 \text{ kg/cm}^2$  empiezan a desarrollarse grietas perpendiculares al refuerzo que atraviesan toda la sección transversal. Estas grietas reciben el nombre de grietas primarias y se señalan con el número 1 en la **figura 4.49 b** Las grietas se forman en las secciones en que el concreto es más débil a tensión.

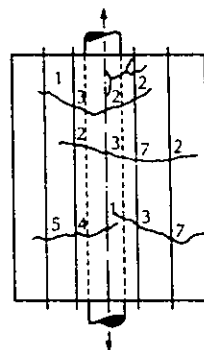
Si los esfuerzos en el refuerzo se aumentan a una magnitud del orden de  $1500 \text{ kg/cm}^2$ , se observan nuevas grietas que se desarrollan entre las grietas primarias existentes, pero no alcanzan la superficie exterior del espécimen. Estas grietas se han denominado grietas secundarias y se señalan con el número 2 en la **figura 4.49 b**

Para esfuerzos mayores se forman grietas longitudinales que se desarrollan desde las grietas primarias y secundarias existentes; estas grietas se señalan con el número 3 en la **figura 4.49 b** En esta etapa no se forman nuevas grietas, pero las ya existentes aumentan su ancho.

En la **figura 4.50** se muestra el estado de agrietamiento de un cilindro de concreto de  $15 \times 30 \text{ cm}$ . con una varilla del no. 8 colocada longitudinalmente. En ensayos de este tipo se ha visto que las grietas que se extienden hasta la superficie del espécimen alcanzan su ancho máximo en la superficie, mientras que las grietas que se desarrollan únicamente dentro de la masa de concreto alcanzan su ancho máximo en la cara de refuerzo. Los números de la **figura 4.50** indican el orden de la aparición de las grietas.



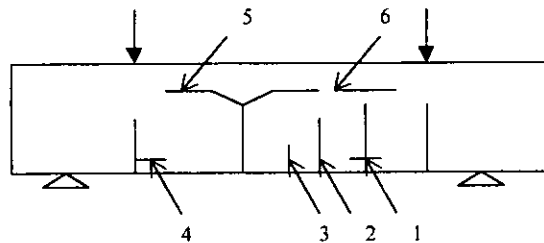
**Figura 4.49** Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a tensión.



**Figura 4.50** Agrietamiento de un espécimen de concreto sujeto a tensión.

## Elementos sujetos a flexión.

La formación y desarrollo de grietas en la zona de tensión de un elemento sujeto a flexión (figura 4.51) son semejantes a los de un espécimen sujeto a tensión. Las grietas primarias ( 1 en la figura 4.51 ) se forman a cargas relativamente bajas y se prolongan hasta el eje neutro. Las grietas secundarias ( 2 en la figura 4.51 ) son visibles en la cara lateral y se prolongan hasta una altura menor que la del eje neutro. En algunos casos se observan grietas secundarias muy pequeñas hasta la altura del refuerzo ( 3 en la figura 4.51 ). Las grietas longitudinales ( 4 en la figura 4.51 ) se forman a caras cercanas a la resistencia del elemento, a la altura del refuerzo de tensión. En algunos ensayos se ha observado que las grietas primarias se dividen en dos ramas horizontales ( 5 en la figura 4.51 ), o que se forman grietas horizontales la altura del eje neutro ( 6 en la figura 4.51 ) ) Esto sucede cuando está a punto de alcanzarse la resistencia del elemento.



**Figura 4.51** Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a flexión.

### Anchos permisibles de grietas.

Se mencionó anteriormente que existen dos razones principales para limitar el agrietamiento de elementos de concreto reforzado: apariencia de la estructura y corrosión del refuerzo. Respecto a la apariencia, se han hecho pocos estudios para relacionar el estado de agrietamiento con la apreciación subjetiva de la estructura o con una calificación cuantitativa de la misma. Respecto a la corrosión del refuerzo, se han

hecho algunos estudios sobre la influencia del agrietamiento en relación con las condiciones ambientales, pero no se ha llegado a establecer en forma definitiva al ancho de grieta a partir del cual pueda existir riesgo de corrosión.

Algunos investigadores y algunos reglamentos de construcción establecen límites en los anchos de grietas que son del orden de 0.1 a 0.2 mm. Para ambientes agresivos, y de 0.2 a 0.4 mm. Para ambientes normales.

En la **tabla 4.2** se presenta un resumen de los anchos permisibles de grietas. El ancho de grietas no puede reducirse disminuyendo los recubrimientos, ya que éstos suelen fijarse en los reglamentos de construcción según las condiciones ambientales para tener una protección adecuada.

**Tabla 2** Anchos permisibles de grietas

Investigador o reglamento.	Condiciones de exposición.	Anchos máximos permisibles, en mm.
Brice	Severa	0.10
	Agresiva	0.20
	Normal	0.30
Rusch	Agresiva ( agua salada )	0.20
	Normal	0.12 – 0.30
Efsen	Severa o agresiva	0.05 – 0.15
	Normal ( exterior )	0.15 – 0.25
	Normal ( interior )	0.25 – 0.35

Reglamento ACI 318-89	Exterior	0.33
	Interior	0.40
CEB (Comité Eurointernacional del concreto )	Interior (ambiente normal)	0.30
	Interior ( ambiente medianamente agresivo )	0.20
	Exterior	
	Muy agresivo o cuando se requiere impermeabilidad.	0.20
CFE ( Manual de diseño de obras civiles, Comisión Federal de Electricidad.	Interior	0.30
	Agresivo	0.20
	Agresivo cuando se requiere Impermeabilidad	0.10
	Cargas accidentales.	0.40
NTC - 87	Normal	0.50

Expresiones para la predicción de agrietamiento.

A través de estudios experimentales se han determinado los factores que mayor influencia tienen en el ancho de las grietas y se ha encontrado que dicho ancho:

- Es mayor cuando se utilizan barras lisas que con barras corrugadas.
- Depende de manera importante del espesor del recubrimiento.
- Aumenta con el esfuerzo en el acero, siendo esta variables la más importante.

- Depende del área de concreto que rodea a las barras en la zona de tensión, disminuyendo cuanto mejor distribuido se encuentre el refuerzo en dicha zona.

Estas variables se reflejan en las numerosas fórmulas propuestas para predecir el ancho de grietas. Se consideran a continuación tres de ellas: la del Portland Cement Association PCA, la de la Cement And Concrete Association C.A.C.A. y la de Gergely & Lutz.

- PCA

La ecuación propuesta por la asociación del cemento Portland para calcular el ancho máximo de grietas a nivel del acero de refuerzo es la siguiente:

$$W_{\text{máx.}} = 2.6 \sqrt[4]{A} \times (f_s \times 10^{-6}) \quad (\text{cm.})$$

Donde :  $f_s$  : esfuerzo en el acero

A : área efectiva de concreto que rodea a cada barra, el valor de A se puede obtener dividiendo el área efectiva,  $A_e$  entre el número de varillas.

El esfuerzo en el acero,  $f_s$ , puede calcularse con la ecuación  $f_s = M / A_s z$  en la que se puede suponer un valor de  $z = 7d / 8$ .

La ecuación para el cálculo del ancho de grieta máxima es aplicables siempre que  $f_s < f_y$ , que el valor de A esté comprendido entre 20 y 30  $\text{cm}^2$ , y que las barras de refuerzo sean corrugadas.

$$W_{\text{máx.}} = \eta r \frac{f_s}{E_s} \times \frac{h - c}{d - c} \quad (\text{cm.})$$

- C.A.C.A.

En una investigación realizada en la C.A.C.A. se encontró que el ancho máximo de las grietas ocurre al nivel de las fibras en tensión más alejadas del eje neutro y que este ancho se puede calcular con la ecuación:

Donde :  $n$  = una constante que vale 3.3 para varillas corrugadas y 4 para barras lisas.

$r$  = una distancia desde la arista longitudinal de la viga hasta la superficie de la barra más cercana.

$h$  = peralte total.

$d$  = peralte efectivo.

$C$  = profundidad del eje neutro, este valor se determina usando el concepto de sección transformada.

- Gergely & Lutz.

Estos autores proponen ecuaciones para calcular el ancho máximo de grietas en la fibra extrema en tensión y al nivel del acero de refuerzo. Las ecuaciones son, respectivamente:

$$W_{\text{máx.}} = \sqrt[3]{t_b A \phi f_s} \times 10^{-6}$$

$$W_{\text{máx.}} = \frac{\sqrt[3]{t_s \times A}}{1 + \frac{2}{3} \times \frac{t_s}{h_1}}$$

Donde:  $A$  = área de concreto que rodea a cada barra, definida  $A = A_e / N$

$t_b$  = recubrimiento interior medido desde el centro de la barra más baja.

$\phi = h_2/h_1$  ;  $h_1$  : distancia del centro de gravedad del acero de refuerzo de la zona en tensión al eje neutro;  $h_2$  : distancia del eje neutro al paño inferior de la viga.

Debido a la naturaleza del agrietamiento que es aleatoria, los cálculos de ancho de grietas deben usarse meramente como una guía para lograr una disposición apropiada de las barras de refuerzo y no como valores a comparar con anchos de grietas medidos en las estructuras.

### Sección transformada.

El concepto de sección transformada suele usarse en la actualidad para calcular algunas propiedades geométricas de una sección, como la profundidad de eje neutro y el momento de inercia de secciones de vigas sujetas a cargas de servicio. Estas propiedades geométricas se requieren para el cálculo de esfuerzos, agrietamiento y deflexiones.

El artificio de la sección transformada, se utilizó en el pasado para el análisis de esfuerzos en vigas bajo cargas de trabajo, considerando un comportamiento elástico de los materiales (concreto y acero) al de una sección homogénea (generalmente de concreto).

Para obtener la sección transformada de una viga, se sustituye el área de acero por un área equivalente de concreto, que se determina multiplicando el área de acero por la relación entre el módulo de elasticidad del acero y el de concreto. Esta relación modular se representa usualmente con la letra  $n$ .

Para ilustrar el empleo de la sección transformada, supóngase la viga mostrada en la **figura 4.52 a**. En la **figura 4.52 b** se muestran las distribuciones de deformaciones unitarias y las fuerzas internas resultantes en la sección. Bajo cargas de servicio, el esfuerzo en el acero es menor que el límite de fluencia, por lo que puede calcularse con la ecuación  $f_s = E_s \epsilon_s$ . La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto puede suponerse lineal, ya que dichos esfuerzos son relativamente pequeños (del orden de  $0.5 f'_c$ ). en la **figura 4.52 c** se muestra la viga equivalente, en la que se ha sustituido el área



de acero  $A_s$  por un área de concreto igual de  $nA_s$ . La sección transformada resultante recibe el nombre de sección transformada. La fuerza de tensión en la sección transformada puede obtenerse multiplicando el área  $nA_s$  por el esfuerzo  $f_t$ ; éste a su vez, puede calcularse multiplicando la deformación unitaria al nivel correspondiente,  $\epsilon_s$ , por el módulo de elasticidad del concreto. Puede verse que la fuerza de tensión en la viga de la **figura 4.52 b** es igual a la fuerza de tensión en la sección transformada de la **figura 4c** por lo tanto, los esfuerzos y la profundidad del eje neutro son iguales en la sección real y en la sección transformada de la viga.

El artificio de la sección transformada puede emplearse para calcular la profundidad del eje neutro,  $C$ , dato necesario para aplicar las ecuaciones de agrietamiento. Para ello se calcula la posición del centroide de la sección transformada, igualando el momento de primer orden del área de concreto a compresión con el momento de primer orden del área de acero en la sección transformada. Por ejemplo, en la sección transformada de la **figura 4.52 c**, se obtiene

$$bc \left( \frac{C}{2} \right) = n A_s (d - C)$$

Despejando  $C$ , se obtiene la profundidad del eje neutro.

En vigas con refuerzo de compresión, se sustituyen tanto el refuerzo de tensión, como el de compresión por las áreas transformadas  $n A_s$  y  $n A'_s$ , respectivamente, como se muestra en la **figura 4.53**. Para tener en cuenta al área de concreto desplazado por las barras de compresión, puede emplearse el término  $(n-1) A'_s$  en vez de  $n A'_s$  y así evitar duplicar las áreas en la zona de compresión.

En el cálculo de la profundidad del eje neutro es suficientemente preciso considerar únicamente el acero de tensión al establecer la sección transformada, con lo cual se simplifican los cálculos numéricos.

La validez del artificio de la sección transformada depende que el concreto y acero tengan exactamente las mismas deformaciones unitarias, lo cual sólo puede lograrse si existe adherencia perfecta entre los dos materiales.

El artificio de la sección transformada se puede usar también para la revisión de esfuerzos bajo cargas de trabajo en elementos sujetos a compresión o a tensión axial. Sin embargo, se tiene el problema de que el módulo de elasticidad del concreto, y por lo tanto el valor de la relación modular  $n$ , varían con el tiempo y otros factores. Algunos reglamentos toman esto en cuenta modificando el valor de  $n$  que debe usarse para transformar el acero en compresión.

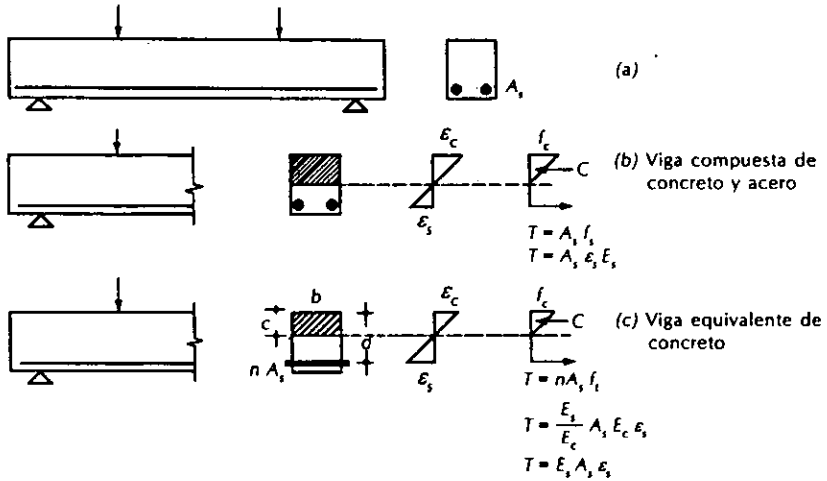


Figura 4.52 Artificio de la sección transformada

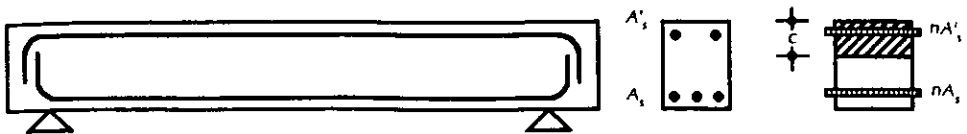


Figura 4.53 Sección transformada de un elemento con refuerzo de tensión y compresión

## Recomendaciones sobre agrietamiento NTC – 96

El criterio de las NTC – 96 para la revisión del agrietamiento es el siguiente: se aplica a elementos no expuesto un ambiente muy agresivo, y que no deban ser impermeables. En caso contrario, deben tomarse precauciones especiales.

Cuando en el diseño se use un esfuerzo de fluencia mayor de 3000 kg/cm<sup>2</sup> para refuerzo de tensión, las secciones de máximo momento positivo y negativo de dimensionarán de modo que la cantidad

$$f_s \sqrt{d_c A}$$

no exceda a 40 000 kg./cm.

En la expresión anterior:

$f_s$  = esfuerzo en el acero en condiciones de servicio en kg/cm<sup>2</sup>

$d_c$  = recubrimiento de concreto medido desde la fibra extrema en tensión al centro de la barra más próxima a ella, en cm.

$A$  = área de concreto a tensión, en cm<sup>2</sup>, que rodea al refuerzo principal de tensión y cuyo centroide coincide con el de dicho refuerzo, dividida entre el número de barras.

El esfuerzo  $f_s$  puede estimarse con la expresión  $M/0.9 d A_s$ , o bien, si no se recurrió a la redistribución de los momentos elásticos, suponerse igual a  $0.6f_y$ . en la ecuación anterior  $M$  es el momento flexionante en las condiciones de servicio.

## **Adherencia y anclaje.**

La capacidad del refuerzo en el concreto para desarrollar la resistencia en tensión de una sección, depende de la compatibilidad de ambos materiales para actuar “unidos” al resistir las cargas externas. El elemento de refuerzo, por ejemplo una varilla, se debe deformar en la misma medida que el concreto que la rodea, con el objeto de evitar la separación de los dos materiales cuando están sujetos a la acción de las cargas. El módulo de elasticidad, la ductilidad y la resistencia de fluencia o la de ruptura del refuerzo, también deben ser considerablemente ser más altos que las del concreto para que sea posibles obtener un incremento significativo en la resistencia de la sección de concreto reforzado. Por consiguiente, los materiales como el latón, el aluminio, el hule o el bambú, no son adecuados para desarrollar la adhesión requerida entre el refuerzo y el concreto. El acero y las fibras de vidrio si poseen las cualidades necesarias : resistencia a la fluencia, ductilidad y capacidad de adhesión.

La resistencia de adherencia es el resultado de la combinación de varios parámetros, tales como la adhesión entre el concreto y la superficie de contacto del acero y la presión que ejerce el concreto endurecido al secarse. Además de esto, la trabazón y fricción que ocasionan los micro movimientos de la varilla en tensión, entre las corrugaciones de su superficie y el concreto, resulta en un incremento de la resistencia al desplazamiento. El efecto total que producen estos factores se conoce como adherencia. En resumen, la resistencia de adherencia es controlada por los siguientes factores principales:

- Adhesión entre el concreto y los elementos de refuerzo.
- El efecto de sujeción que resulta al secarse y contraerse el concreto que rodea a la varilla y las dovelas de cortante que se forman entre las corrugaciones de la barras el concreto en que está ahogada.
- La fricción que resiste al deslizamiento y la trabazón que se produce cuando el elemento de refuerzo es sujeto a esfuerzos de tensión.
- La calidad y resistencia del concreto a la tensión y a la compresión.

- El efecto de anclaje mecánico que se obtiene en los extremos de la varilla por medio de la longitud de desarrollo, los empalmes, los ganchos y las barras cruzadas.
- El diámetro, la forma y la separación del refuerzo, debido a que afectan el desarrollo de grietas.

### **Desarrollo de los esfuerzos de adherencia.**

El esfuerzo de adherencia se presenta principalmente como consecuencia de la fuerza cortante, entre el elemento de refuerzo y el concreto que lo envuelve, y se puede describir como esfuerzo local de cortante por unidad de área de la superficie de la varilla. Este esfuerzo directo se transfiere del concreto a la superficie en contacto de la barra, de modo que modifica el esfuerzo de tensión a lo largo de la barra de refuerzo.

Se puede determinar la capacidad de adherencia del elemento de refuerzo por medio de tres pruebas. La prueba de extracción, **figura 4.54 a**, proporciona una buena comparación de la eficiencia de adherencia de las diferentes superficies de varillas u de las longitudes de anclaje correspondiente. Sin embargo, no es verdaderamente representativa del desarrollo de los esfuerzos de adherencia en una viga estructural, debido a que en esta prueba, el concreto está sujeto a compresión y la varilla de refuerzo actúa en tensión en tanto que en una viga, las varillas de refuerzo y el concreto que las rodea, están sujetos al mismo esfuerzo.

En la prueba de la varilla ahogada, **figura 4.54 b**, la cantidad de grietas, sus anchos y su separación en los diferentes niveles de carga, son una medida del desarrollo de esfuerzos de adherencia y de la resistencia de adherencia. El proceso se asemeja más estrechamente al comportamiento en vigas a medida que el incremento progresivo en el ancho de las grietas conduce, finalmente, al desprendimiento de las barras y la falla de la viga.

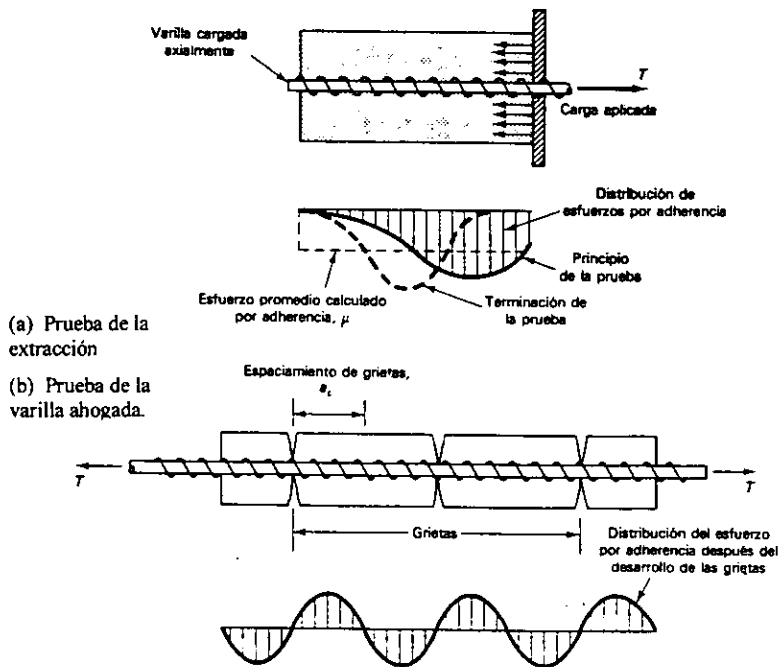


Figura 4.54 Desarrollo del esfuerzo por adherencia.

El desprendimiento progresivo de las varillas de refuerzo en una viga y la redistribución de esfuerzos se presenta esquemáticamente en la **figura 4.55** Cuando la resistencia al deslizamiento en la longitud  $l$  es mayor que la resistencia del concreto a la tensión, se forma una grieta nueva en esa zona y alrededor de la grieta se desarrolla una distribución nueva de esfuerzos. El esfuerzo máximo de adherencia en la **figura 4.54 a** se desplaza hacia la derecha, desde el punto B, pasando la línea central entre dos grietas potenciales hasta que se forma una segunda grieta a una distancia  $ac$  de la grieta 1.

Por consiguiente, es importante escoger una longitud apropiada de las varillas de armado, para disminuir el agrietamiento y el deslizamiento. Como resultado, el refuerzo puede alcanzar toda su resistencia de tensión, que se presente una falla de adherencia.

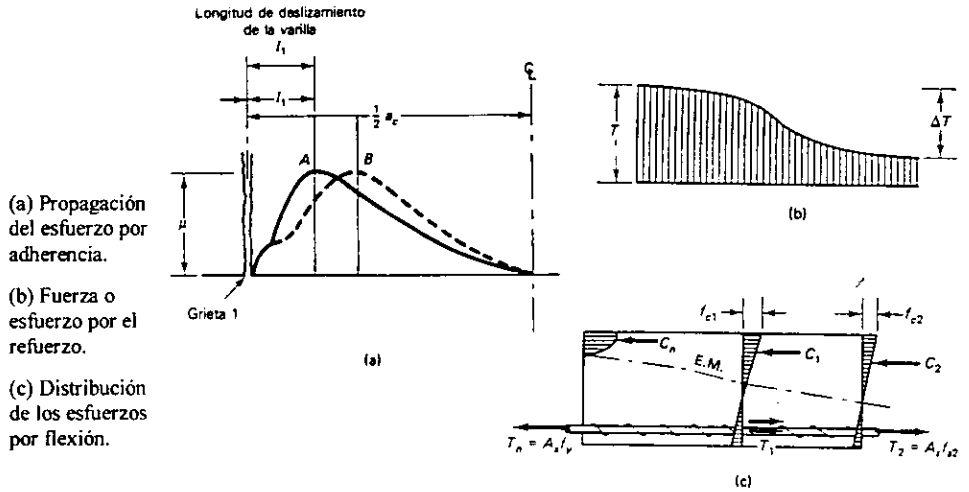


Figura 4.55 Redistribución de esfuerzos por el deslizamiento del refuerzo.

### Adherencia y anclaje.

En la figura 4.56 a, supóngase que  $l_d$  es la longitud de la varilla ahogada en el concreto y sujeta a una fuerza de extracción  $dT$ . Si  $db$  es el diámetro de la varilla,  $\mu$  es el esfuerzo promedio de adherencia y  $f_s$  es el esfuerzo que ocasiona en la varilla la fuerza directa de tensión o al esfuerzo de flexión en una viga, la fuerza de anclaje será:

$$\mu \pi db \ell d$$

e igual a la fuerza de tensión  $dT$  en la sección transversal de la varilla, esto es,

$$dT = \frac{\pi \times db^2}{4} \times f_s$$

De donde

$$\mu \pi db \ell d = \pi \frac{d^2 b}{4} \times fs$$

de la cual resulta el esfuerzo promedio de adherencia

$$\mu = \frac{fs db}{4 \ell d}$$

y la longitud de desarrollo

$$\ell d = \frac{fs}{4 \mu} \times db \quad (1)$$

### Adherencia por flexión.

En la **figura 4.56 b** se muestra esquemáticamente el cambio de esfuerzos que se produce en la longitud de una varilla por la variación del momento en el claro. Si  $jd$  es el brazo de palanca de las fuerzas  $T$  que produce el momento  $m$ , entonces  $T = M/jd$ . En términos de la diferencia de momentos entre las secciones agrietadas 1 y 2:

$$dT = \frac{dM}{jd}$$

y también:

$$dT = \mu d \times \sum o$$

donde  $\sum o$  es el perímetro total de todo el refuerzo sujeto al esfuerzo de adherencia por tensión, de donde resulta  $dM/dx = \mu \sum o jd$ ; y puesto que  $dM/dx = V$ , se obtiene:

$$\mu = \frac{V}{\sum o jd} \quad (2)$$



la ecuación 2 sólo tiene importancia académica, pues se le toma en cuenta indirectamente en el enfoque de la longitud de desarrollo aplicado en la ecuación 1.

La ecuación 2 nos indica que si la variación del momento es alta (es decir, cuando la fuerza cortante es grande), los esfuerzos de adherencia también serán altos.

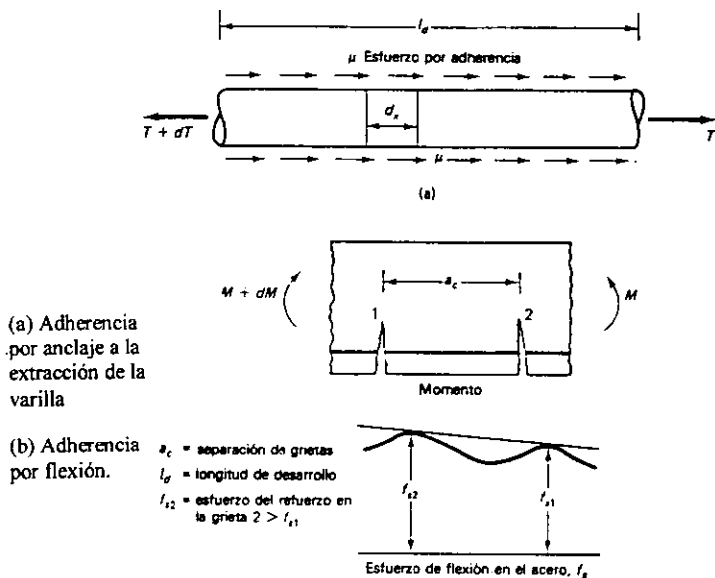


Figura 4.56 Esfuerzo por adherencia.

### Normas para longitudes de desarrollo.

Las especificaciones de las NTC - 96 sobre longitudes de desarrollo propone la siguiente expresión para calcular la longitud básica de desarrollo de barras de tensión:

$$L_{db} = 0.06 \frac{A_b f_y}{\sqrt{f_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

Donde :  $A_b$  = área de las barras de refuerzo.

$f_y$  = resistencia del acero.

$f_c$  = resistencia del concreto.

$d_b$  = diámetro de las barras.

Se limita la aplicabilidad de la expresión anterior a barras no mayores del no. 12. La longitud básica de desarrollo calculada debe multiplicarse por los factores de la **tabla 3** según la condición del refuerzo; pero la longitud de desarrollo final no debe ser menor de 30 cm.

Para barras en compresión se establece que la longitud de desarrollo de una barra debe ser al menos igual al 60 % a la correspondiente en tensión. La longitud mínima se fija en 20 cm.

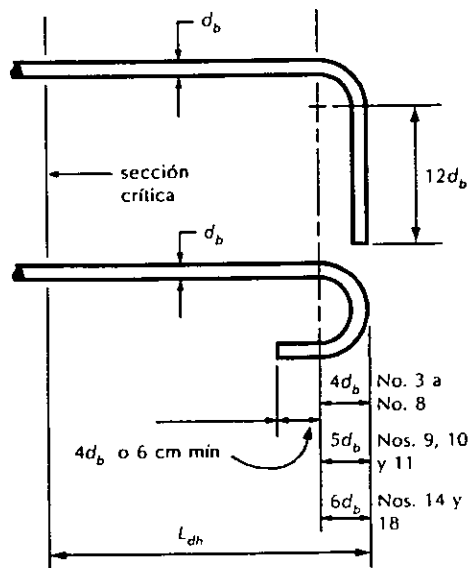
**Tabla 4.3**

Condición del refuerzo.	Factor
Barras horizontales o inclinadas colocadas de manera que bajo ellas se cuelen más de 30 cm. de concreto.	1.4
En concreto ligero.	1.33
Barras con $f_y$ mayor de 4200 kg./cm <sup>2</sup>	$2 - (4200 / f_y)$
Barras torcidas en frío de diámetro igual o mayor que 19.1 mm (no. 6)	1.2
Todos los otros casos.	1.0

## Ganchos estándar.

En ocasiones no se dispone de suficiente espacio para alojar la longitud de desarrollo requerida. Se suele en estos casos hacer dobleces en el extremo de la barra, de manera que se forman ganchos o escuadras que requieran menos espacio para desarrollar un esfuerzo dado en el acero que una longitud recta. Si estos ganchos o escuadras cumplen determinadas características geométricas se denominan ganchos estándar.

Las NTC - 96 proporcionan las siguientes recomendaciones para ganchos estándar: la longitud  $L_{dh}$ , definida en la **figura 4.57**, no debe ser menor que  $0.076 d_b f_y / \sqrt{f'_c}$ , ni que 15 cm. o que  $8 d_b$  y el radio interno del doblez dará por lo menos igual a  $f_y d_b / 60 \sqrt{f'_c}$  o lo que marquen las normas NOM para el acero que se esté empleando.



**Figura 4.57** Detalles de ganchos estándar.

## Desarrollo del acero.

- Desarrollo del acero positivo en los apoyos libres de vigas.

En las NTC del reglamento del Distrito Federal el problema del anclaje de barras para momento positivo en los extremos de vigas libremente apoyadas, se prevé especificado que cada barra se prolongue más allá del centro del apoyo de una longitud, incluyendo porciones dobladas, no menor que:

$$L_{aa} = (L_d - 0.25L) \geq 0.5h$$

L = claro

h = peralte total.

- Desarrollo del acero negativo en vigas empotradas y en vigas continuas.

Ya que los esfuerzos máximos en el acero se presentan en la cara de las columnas a las que se unen las vigas, la longitud de desarrollo debe medirse a partir de dichas cara. En la **figura 4.58 a** se muestra el caso de una viga que llega a una columna de borde y cuyo acero negativo termina en un gancho estándar ahogado en la columna. En la **figura 4.58 b**, el de una viga que atraviesa una columna. Se puede ver que para este segundo caso, la longitud de desarrollo puede extenderse hasta la viga del otro lado de la columna y que el acero negativo debe prolongarse más allá del punto de inflexión, hasta donde es necesario teóricamente, una distancia igual al peralte, a 12 veces el diámetro de la barra o un 1/16 del claro, la que sea mayor.

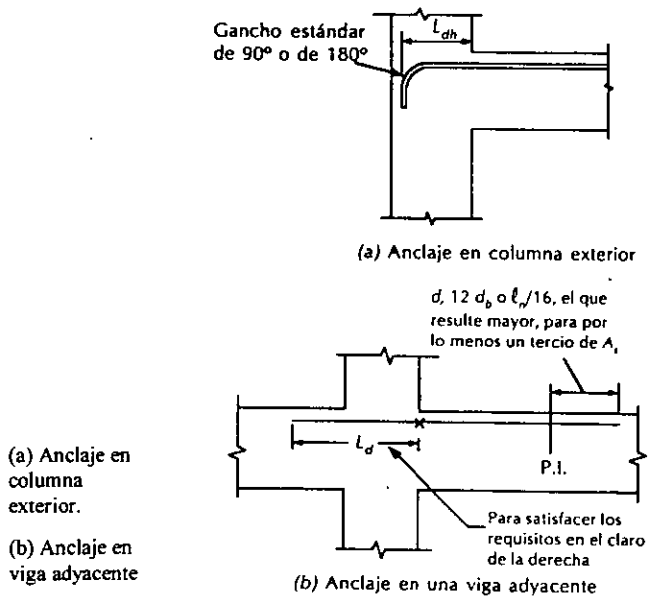


Figura 4.58 Desarrollo de acero negativo.

### Empalme de barras.

Comúnmente las barras de refuerzo se fabrican en longitudes que varían de unos 12 a 18 cm. Estas medidas no suelen ajustarse a las dimensiones de las estructuras, por lo que resulta necesario recurrir al empleo de empalmes. Por otra parte, por facilidad constructiva, las barras suelen cortarse con el fin de poder trabajar con piezas de menor longitud, lo que facilita su manejo.

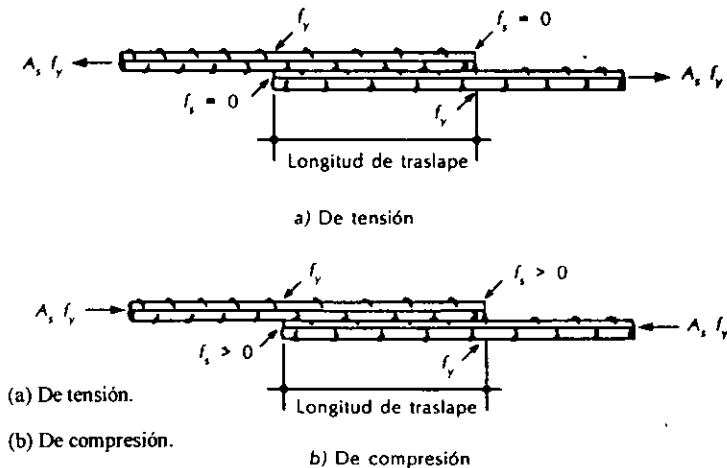
Hay diversas formas de efectuar el empalme de barras, la más común consiste en traslaparlas. Generalmente el traslape se efectúa con las barras traslapadas en contacto y amarrarlas con alambre, aunque también suele permitirse que quede cierto espacio entre ellas, siempre que ésta separación sea inferior que la especificada por las normas.

Para barras de tensión las NTC del reglamento del D.F. especifica que la longitud de traslape no debe ser menor que 1.33 veces la longitud de desarrollo calculada, ni menor que  $(0.01 f_y - 6)db$ , en donde  $f_y$  se expresa en  $kg/cm^2$ . Cuando se traslapa más de la mitad del refuerzo en una sección, se recomienda que se tomen precauciones especiales, tales como aumentar la longitud de traslape y utilizar refuerzo transversal con separaciones pequeñas.

Para barras en compresión se recomienda que la longitud traslapada no sea menor que la longitud de desarrollo para estas barras, ni menor que  $(0.01 f_y - 10) db$ .

Para empalmar barras de diámetros grandes, es aconsejable evitar los empalmes por traslape y recurrir a empalmes a base de soldadura o por medio de dispositivos mecánicos apropiados. Los reglamentos suelen exigir que los empalmes de esta clase sean capaces de desarrollar el 125 % del esfuerzo de fluencia cuando se utilizan en regiones donde el refuerzo esta sujeto al esfuerzo máximo.

Al utilizar empalmes a base de soldadura o por medio de dispositivos mecánicos se deberán aplicar recomendaciones especiales. En la **figura 4.59** se muestran dos tipo de empalmes, de tensión y de compresión.



**Figura 4.59** Empalmes por traslape.

### Corte y doblado de barras.

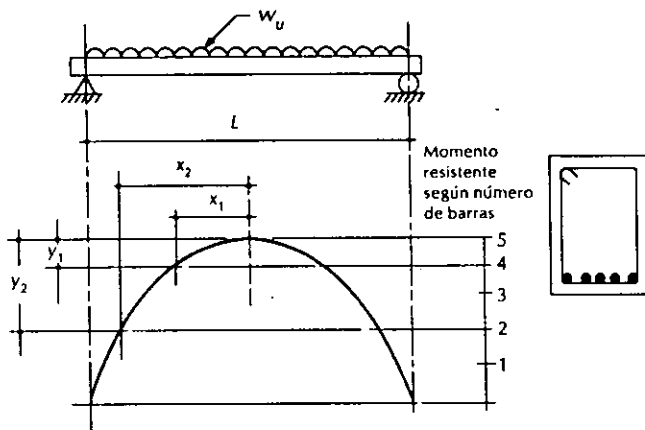
El refuerzo longitudinal de vigas de concreto reforzado puede variarse a lo largo de su longitud de acuerdo con la variación del momento. Esto puede efectuarse cortando barras o doblándolas a 45° y haciéndolas continuas con el refuerzo del lado opuesto.

La capacidad para resistir momento de una sección, puede expresarse por medio de la ecuación:

$$M_n = A_s f_y z$$

Donde  $z$  es el brazo del par interno, formado por la fuerza de tensión desarrollada por el acero y la fuerza de compresión correspondiente al concreto. El brazo del par interno,  $z$ , varía poco y nunca es menor que el correspondiente a la sección de momento máximo. Por lo tanto, puede suponerse que el acero requerido en las diversas secciones es directamente proporcional al momento correspondiente; o de otra manera, que el diagrama del acero necesario en las distintas secciones tiene la misma forma que el diagrama de momentos. Esto permite determinar fácilmente los puntos teóricos donde pueden cortarse o doblarse barras.

Considérese, por ejemplo, la viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida de la **figura 4.60**. Supóngase que desea cortar primero la barra central, luego otras dos barras y prolongar las dos barras restantes hasta los apoyos. Puesto que el diagrama de momentos es parabólico, es sencillo determinar analíticamente las distancias  $x_1$  y  $x_2$  correspondientes, respectivamente, a los puntos teóricos de corte de la primera barra cortada y al par de barras siguientes. También es posible determinar estos puntos gráficamente trazando líneas horizontales en la forma indicada en la figura; las intersecciones de estas horizontales con el diagrama definen los puntos deseados.



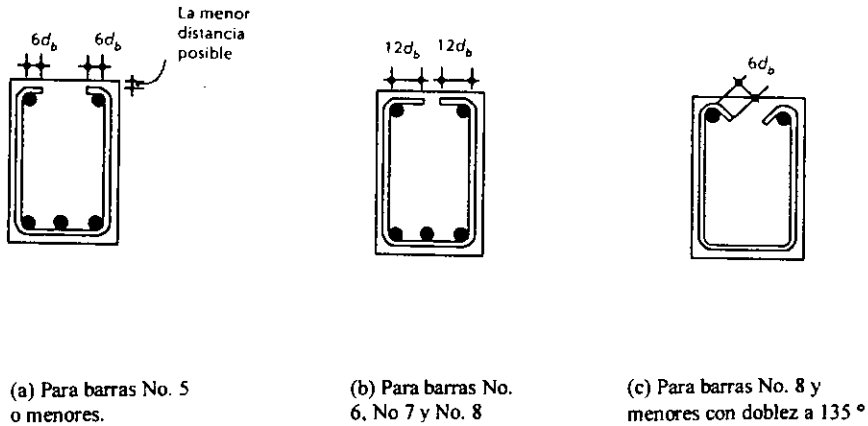
**Figura 4.60** Corte de barras en una viga simplemente apoyada con carga uniforme.

Las barras de refuerzo no deben cortarse en las secciones donde dejen de ser necesarias de acuerdo con los diagramas teóricos de momento flexionante. Se debe esto a las incertidumbres que se tienen sobre la magnitud y distribución de las cargas actuantes, a las aproximaciones usuales en el análisis estructural, a los efectos de asentamientos diferenciales de los apoyos y a otros efectos similares. Por otra parte, como ya se mencionó, las grietas inclinadas debidas a tensión diagonal producen un desplazamiento del esfuerzo en el acero. Por estas razones los códigos recomiendan que las barras de prolonguen una cierta distancia más allá de los puntos teóricos de corte. Las NTC establecen ésta distancia igual a  $L_d + d$ .



### Anclaje y refuerzo transversal.

El refuerzo transversal requerido por fuerza cortante o torsión debe estar anclado de manera que se disponga de su capacidad máxima a medio peralte de la viga. Para un comportamiento adecuado, este refuerzo debe llegar tan cerca de las caras de compresión y tensión como lo permitan los requisitos de recubrimiento y la proximidad de otro refuerzo, y terminarse en ganchos estándar para estribos de acuerdo a lo mostrado en la **figura 4.61**. Las barras longitudinales que se doblan para utilizarlas cerca de la cara opuesta si esta zona está en tensión. Si se trata de una zona en compresión, la barra deberá prolongarse una longitud de desarrollo más allá del medio peralte de la viga.

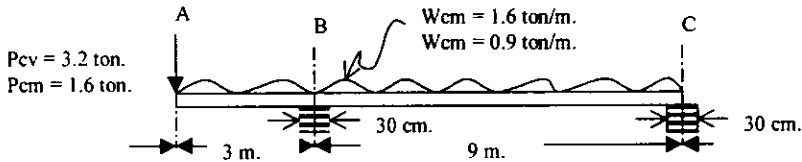


**Figura 4.61** Anclaje del refuerzo transversal.

### Ejemplo de dimensionamiento completo de una viga.

En esta sección se pretende mostrar los principales aspectos del dimensionamiento completo de vigas.

#### Ejemplo 1. Dimensionamiento de una viga isostática de sección rectangular.



Materiales: Concreto  $f_c = 200 \text{ kg./cm}^2$

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg./cm}^2$

Requisitos de armado longitudinal:  $p \approx 0.4 \text{ pb}$

Recubrimiento libre : 3.5 cm.

#### Constantes de cálculo:

$$f'_c = 0.8 \times f_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg./cm}^2$$

$$f''_c = 0.85 \times f'_c = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg./cm}^2$$

$$p_{\min} = \frac{0.7 \times \sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \times \sqrt{200}}{4200} = 0.0024$$

$$p_b = \frac{f'_c}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.0152$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{113000} = 18; \quad E_c = 8000\sqrt{f'_c}$$

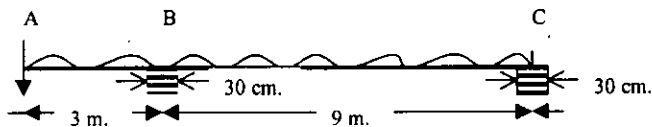
Cargas últimas.

Factor de carga = 1.4

$$P_u = F_c (P_{cv} + P_{cm}) = 1.4 (3.2 + 1.6) = 6.72 \text{ ton.}$$

$$W_u = F_c (W_{cv} + W_{cm}) = 1.4 (1.6 + 0.9) = 3.5 \text{ ton / m.}$$

Momentos y fuerzas cortantes de diseño.



Momento neg.	35.9	35.9			ton.m.
$P_u$	6.7				ton.
$W_u \times 3$	10.5	15.8		15.8	ton.
Reacción libre	17.2	15.8		15.8	ton.
Corrección por					
$M = \Delta V$		4		-4	ton.
Cortante	17.2	19.8		11.8	ton.
X	3.37	←			m.
Momento positivo					
Máximo.		19.9			ton.m
Localización del					
Punto de inflexión	6.74	←			m.

Elección de dimensiones de la sección.

$$p = 0.4 pb = 0.4 \times 0.0152 = 0.0061$$

$$\text{de las tablas del apéndice B} = Mu / bd^2 = 20.88 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = \sqrt{\frac{Mu}{20.88 \times b}} = \sqrt{\frac{35.9 \times 10^5}{20.88 \times b}} = \sqrt{\frac{171935}{b}} \quad (A)$$

$$VCR = FR bd (0.2 + 30p) \sqrt{f^*c}$$

$$VCR = 0.8 bd (0.2 + 30 \times 0.0061) \sqrt{160} = 3.88 bd$$

$$2.5 VCR = 9.7 bd$$

De la ecuación A se determinan valores de d correspondientes a distintos valores prácticos de b.

b (cm.)	d (cm.)	bd (cm <sup>2</sup> )	2.5 VCR (kg.)
25	83	2075	20128
30	76	2280	22116
35	70	2450	23765

Considerar b = 30 cm.

$$\text{Si } r = 6 \text{ cm.} = h = 76 + 6 = 74 \text{ cm.}$$

Adoptar la siguiente sección : b = 30 cm.

$$h = 80 \text{ cm.}$$

Cálculo de refuerzo longitudinal.

Suponer  $d = h - 6 = 74 \text{ cm}$ .

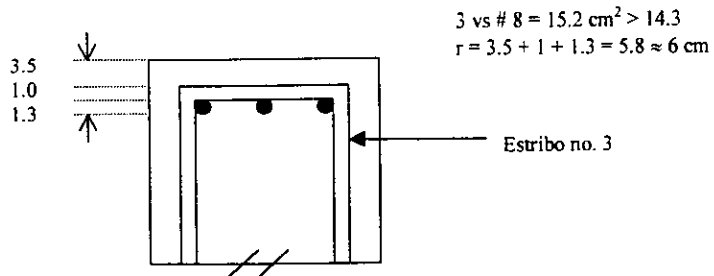
Cálculo de áreas de acero requeridas en secciones críticas.

	A	B	C
Mu (kg.-cm.)		$35.9 \times 10^5$	
Mu / bd <sup>2</sup> (kg./cm <sup>2</sup> )		21.85	$19.9 \times 10^5$
p		0.00642	
As (cm <sup>2</sup> )		14.3	0.00337
		7.5	

Valores obtenidos de las tablas del apéndice B.

Armados propuestos.

Refuerzo negativo en el apoyo B



Momento resistente

$d = 80 - 5.8 = 74.2 \text{ cm}$ .

$$p = \frac{15.2}{30 \times 74.2} = 0.0068$$

de las tablas del apéndice B :  $MR / bd^2 = 23 \text{ kg/cm}$

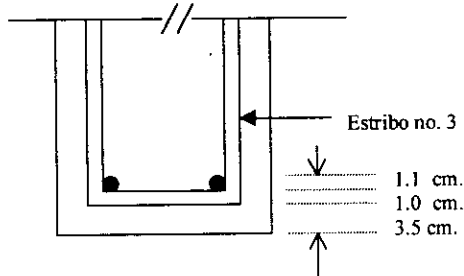
por lo tanto  $MR = 23 \times 30 \times 74.2^2 = 38 \times 10^5 \text{ kg.* cm.} > 35.9 \text{ kg.* cm}$

Momento resistente de 2 vs. Del # 8

$$m_r = \frac{a_s}{A_s} = \frac{10.1}{15.2} \times 38 = 25.2 \text{ ton. m}$$

Refuerzo positivo en la sección central del tramo BC.

$$2 \text{ vs. \# 7} = 7.7 \text{ cm}^2 > 7.5 \text{ cm}^2$$
$$r = 3.5 + 1 + 1.1 = 5.6 \approx 6 \text{ cm.}$$



Momento resistente

$$d = 80 - 5.6 = 74.4 \text{ cm.}$$

$$p = \frac{7.7}{30 \times 74.4} = 0.0034$$

de las tablas del apéndice B :  $MR / bd^2 = 12.2 \text{ kg/cm}^2$

por lo tanto  $MR = 12.2 \times 30 \times 74.4^2 = 20.26 \times 10^5 \text{ kg.* cm.} > 19.9 \text{ kg.* cm}$

Anclaje.

Longitud de desarrollo para barras del no. 8

$$L_{db} = \frac{0.06 A_b f_y}{\sqrt{f_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

$$\frac{0.06 A_b f_y}{\sqrt{f_c}} = \frac{0.06 \times 5.1 \times 4200}{\sqrt{200}} = 91 \text{ cm.}$$

$$0.006 \times 2.54 \times 4200 = 64 \text{ cm.}$$

$$L_d = 0.1 \times 1.4 \times \frac{14.3}{15.2} = 120 \text{ cm.} \leftarrow$$

Longitud de desarrollo para barras del no. 7

$$L_{db} = \frac{0.06 A_b f_y}{\sqrt{f_c}} \geq 0.006 d_b f_y$$

$$\frac{0.06 A_b f_y}{\sqrt{f_c}} = \frac{0.06 \times 3.9 \times 4200}{\sqrt{200}} = 69 \text{ cm.} \leftarrow$$

$$0.006 \times 2.22 \times 4200 = 56 \text{ cm.}$$

$$L_d = 69 \times \frac{7.5}{7.7} = 67 \text{ cm.}$$

Longitud que debe prolongarse el refuerzo que no se corta más allá de la sección donde teóricamente deja de ser necesario el refuerzo interrumpido.

$$\text{Barras \# 8} = L_d + d = 120 + 74 = 194 \text{ cm.}$$

$$\text{Barras \# 7} = L_d + d = 67 + 74 = 141 \text{ cm.}$$

### Revisión del anclaje en el apoyo libre

$$L_{aa} = (L_d - .25 L) \geq 0.5 h$$

$$L_d - 0.25L = 67 - .25 \times 900 = -158$$

$$L_{aa} = 0.5 \times 80 = 40 \text{ cm.}$$

Distancia a la que debe prolongarse el acero negativo más allá del punto de inflexión.

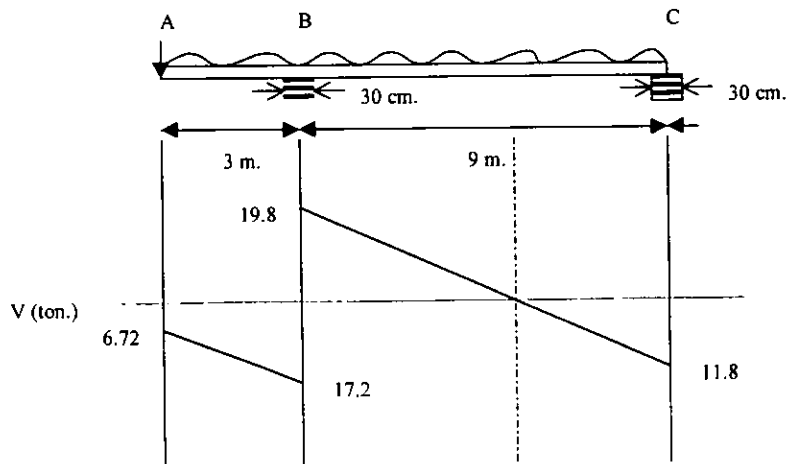
$$d = 74.2 \text{ cm.}$$

$$12 d_b = 12 \times 2.54 = 30 \text{ cm.}$$

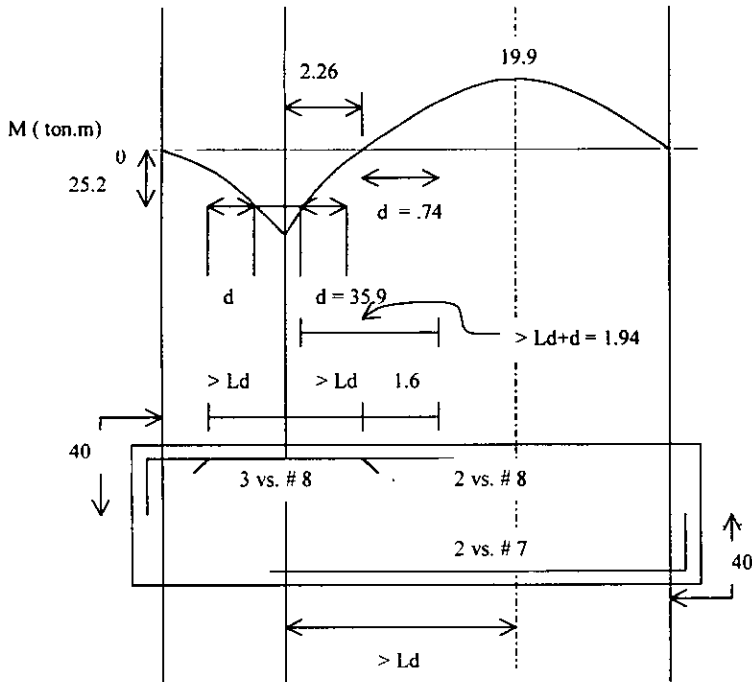
$$\text{claro} / 16 = 900 / 16 = 56 \text{ cm.}$$

$$\text{rige } 74.2 \text{ cm.}$$

### Diagrama de momentos y fuerza cortante, corte de barras.

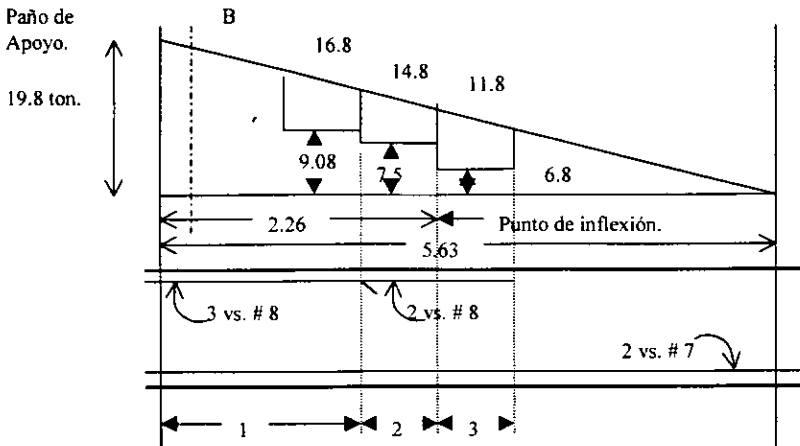






Cálculo de refuerzo transversal.

( Parte izquierda del claro BC, más desfavorable.)



Tramo 1

$A_s = 3$  vs. no. 8

$p = .0068 < 0.01$

$$VCR = FR bd (.2 + .3p)\sqrt{f'c}$$

$$VCR = .8 \times 30 \times 74 (.2 + (.3 \times .0068)) \sqrt{160} = 9080 \text{ kg.}$$

Tramo 2

$A_s = 2$  vs. no. 8

$p = .0045 < 0.01$

$$VCR = FR bd (.2 + .3p)\sqrt{f'c}$$

$$VCR = .8 \times 30 \times 74 (.2 + (.3 \times .0045)) \sqrt{160} = 7530 \text{ kg.}$$

Tramo 3

$A_s = 2$  vs. no. 7

$p = .0034 < 0.01$

$$VCR = FR bd (.2 + .3p)\sqrt{f'c}$$

$$VCR = .8 \times 30 \times 74 (.2 + (.3 \times .0034)) \sqrt{160} = 6780 \text{ kg.}$$

Separación de estribos.

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_u - VCR}$$

Para estribos del no. 2.5

$$s = \frac{0.98 \times 4200 \times 74}{V_u - V_{CR}} = \frac{304600}{V_u - V_{CR}}$$

Separación máxima:

a)  $d/2 = 74 / 2 = 37 \text{ cm.}$

b) refuerzo mínimo

c)  $s \text{ máx. } 0.98 \times 4200 / 3.5 \times 30 = 39 \text{ cm.}$  rige 37 cm.

separación requerida en la sección crítica, a un peralte del paño de apoyo (a) :

$$V_u - V_{CR} = 16.67 - 9.08 = 7.59 \text{ ton.}$$

$$S (a) = 304600 / 7590 = 40 \text{ cm.} > 35 \text{ cm.}$$

Separación en la sección (b)

$$V_u - V_{CR} = 14.88 - 7.53 = 7.35 < 7.59 \text{ ton.}$$

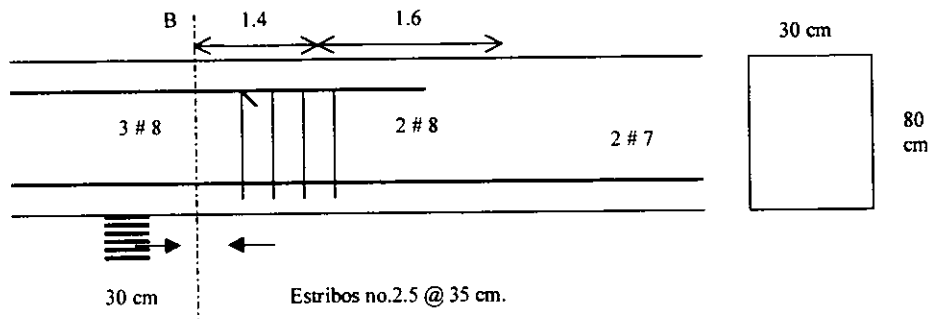
Por lo tanto la separación es igual a 35 cm.

Separación en la sección (c)

$$V_u - V_{CR} = 11.85 - 6.78 = 5.07 < 7.59 \text{ ton.}$$

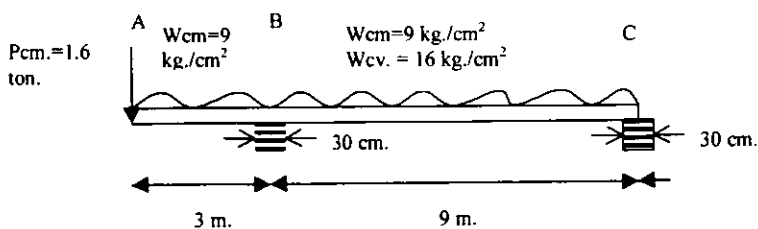
Por lo tanto la separación es igual a 35 cm.

Croquis de refuerzo transversal.



Cálculo de deformaciones.

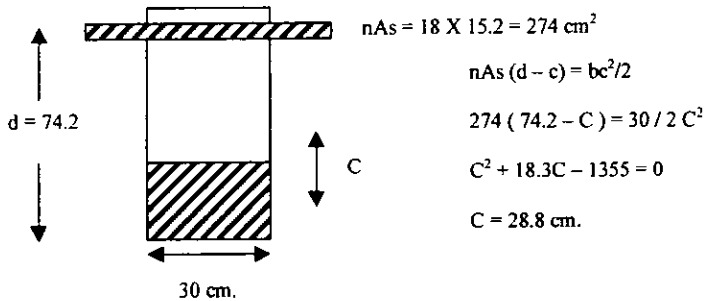
Considerar que el 40% de la carga viva actúa en forma continua y que la deformación no afectará a elementos no estructurales. En este ejemplo sólo se calculará la deformación del tramo BC por ser la más crítica. Para obtener el efecto más desfavorable se supondrá que la carga viva está únicamente en el tramo BC.



Momento de inercia promedio.

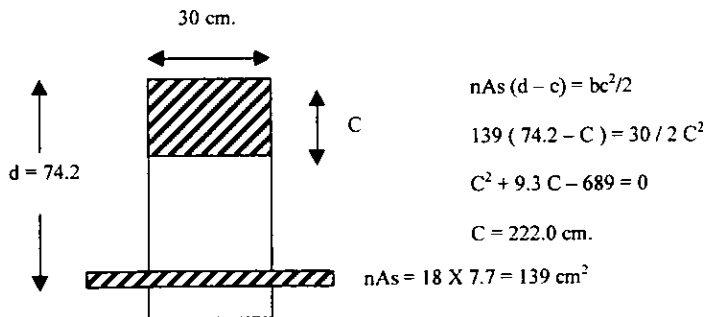
$$I_e = \frac{I_e + 2I_c}{3}$$

Momento de inercia de la sección agrietada transformada en el apoyo B (  $I_{e1}$  )



$$I_e = \frac{1}{3} \times 30 \times 28.8^3 + 274 / 74.2 - 28.8)^2 = 803\,636 \text{ cm}^4$$

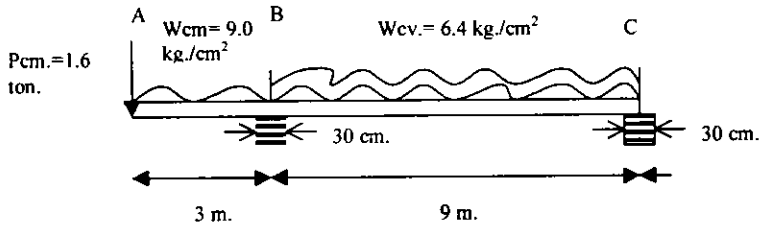
Momento de inercia de la sección agrietada transformada en el centro del claro BC (  $I_c$  )



$$I_c = \frac{1}{3} \times 30 \times 22^3 + 129(74.4 - 22)^2 = 488140 \text{ cm}^4$$

$$I_R = \frac{803636 + (2 \times 488140)}{3} = 593305 \text{ cm}^4$$

Deflexión inmediata debida a la carga sostenida ( cm. + 40% en el claro BC, deflexión a la mitad del claro)

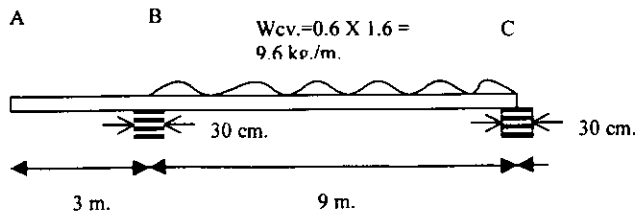


al (1) = aw cm. + aw cv. + ap cm.

$$= \frac{1}{E_c I_e} \left[ \frac{W_{cm}}{48} \left( \frac{5}{8} \times l^4 - \frac{3l_2^2}{2} \right) + \frac{5}{384} W_{cv} l^4 - \frac{P_{cm} l_2 l_1^2}{16} \right]$$

$$= \frac{1}{113000 \times 543305} \left[ \frac{9}{48} \left( \frac{5}{8} \times 900^4 - \frac{3 \times 300^2 \times 900^2}{22} \right) + \frac{5}{384} 6.4 \times \left[ 900^4 - \frac{1600 \times 300 \times 900^2}{16} \right] \right] = 1.3 \text{ cm.}$$

Deflexión inmediata debida al 60% de la carga viva ( en el centro del claro BC ).



$$(al)_2 = \frac{5}{384} \times \frac{W_{cv} \cdot l^4}{E_c I_e} = \frac{5 \times 9.6 \times 900^4}{384 \times 113000 \times 593305} = 1.2 \text{ cm.}$$

Deflexión diferida a la carga sostenida.

Factor de la sección en el apoyo B

$$\frac{4}{1+50p'} = \frac{4}{1+50(0)} = 4$$

Factor para la porción central.

$$\frac{4}{1+50p'} = \frac{4}{1+50(0)} = 4$$

Factor promedio = 4.

$$ad = 2 (a1)_1 = 4 \times 1.3 = 5.2 \text{ cm.}$$

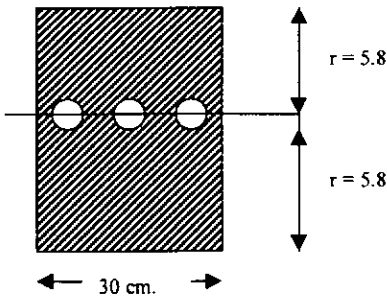
Deflexión total

$$a = (a1)_1 + (a1)_2 + ad = 1.3 + 1.2 + 5.2 = 7.7 \text{ cm.}$$

Deflexión admisible.

$$adm. = 0.5 \text{ cm.} + L/240 = 0.5 \text{ cm} + 900/240 = 4.3 \text{ cm.}$$

Revisión del agrietamiento.



Sección en el apoyo B

$$z = fs \sqrt[3]{rA}$$

$$A = \frac{30 \times 2 \times 5.8}{3} = 116 \text{ cm}^2$$

$$fs = 0.6 fy = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg./cm}^2$$

$$z = 2520 \times \sqrt[3]{5.8 \times 116} = 22080 \text{ kg. cm}$$

$$22080 < 40000 \text{ kg./cm}$$

∴ el refuerzo propuesto es adecuado.

## **Ménsulas.**

Las ménsulas son elementos estructurales cuya relación entre el claro de cortante y el peralte es pequeña; en muchos reglamentos, se definen como aquellos elementos en los que ésta relación no es mayor que uno. Estos elementos usan para soportar carriles de grúas viajeras, vigas prefabricadas de concreto, armaduras de acero y otras estructuras similares. En la **figura 4.62** se ilustran aplicaciones.

El dimensionamiento correcto de ménsulas es de gran importancia, ya que en ellas se apoyan generalmente miembros estructurales de grandes dimensiones o equipo pesado.

### **Comportamiento.**

El comportamiento de las ménsulas ha sido estudiado por medio de ensayos de especímenes como el mostrado esquemáticamente en la **figura 4.63**. A continuación se describen los principales modos de falla observados en estos ensayos.

- Falla por flexión.

Este tipo de falla es similar al de vigas largas. Consiste en el aplastamiento por compresión del concreto, que ocurre antes o después de que fluya el acero de tensión.

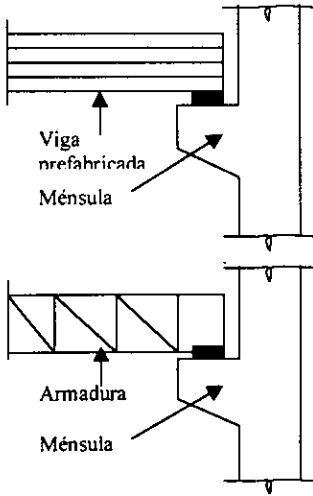
- Falla por tensión diagonal.

En este caso, se forma inicialmente una grieta de flexión, a partir de la cual se desarrolla una grieta que se extiende desde el borde de la placa de carga, en la cara superior de la ménsula, hasta la intersección de la cara inclinada de la ménsula con la columna. La falla ocurre en la zona de concreto sujeta a esfuerzos de compresión y es similar a la falla en compresión por cortante de vigas largas.

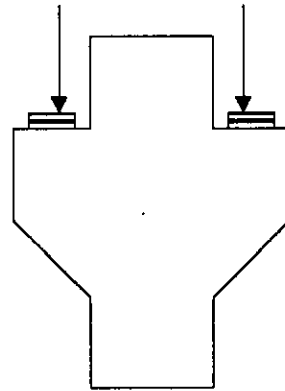


- Falla por cortante directo.

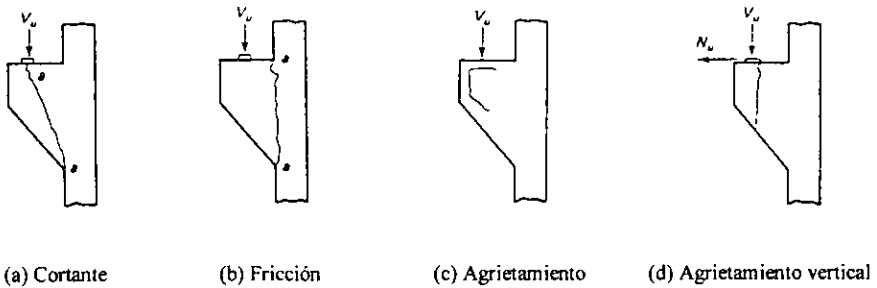
Este tipo de falla se caracteriza por el desarrollo de pequeñas grietas inclinadas en el plano de intersección de la columna y la ménsula. Dichas grietas debilitan este plano y propician una falla por cortante directo. En la **figura 4.64** se muestran los diferentes tipos de falla en ménsulas.



**Figura 4.62** Aplicaciones de ménsulas.



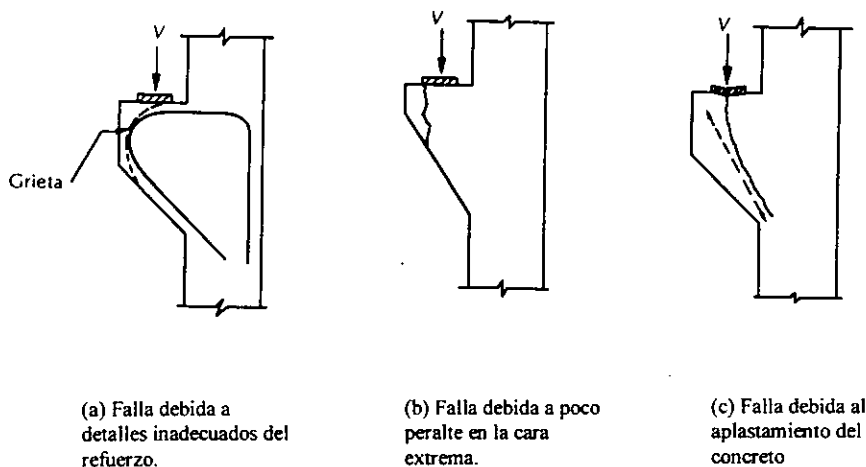
**Figura 4.63** Especimen de ensayo para el estudio de ménsulas.



**Figura 4.64** Diferentes tipos de falla en ménsulas.

Además de los modos de falla descritos anteriormente, se han observado otros que se presentan por detalles inadecuados en la geometría de la ménsula o en la colocación del refuerzo. Estos tipos de falla se ilustran en la **figura 4.64**. En la **figura 4.65 a** se muestra una falla que se presenta cuando las barras de tensión, por el dobles, quedan demasiado lejos del borde de la ménsula; en este caso se forma una grieta que sigue el contorno de la barra. En la **figura 4.65 b** se muestra el tipo de falla que se produce cuando el peralte en el extremo de la ménsula es mucho menor que el peralte en el paño de la columna; la grieta inclinada no alcanza a desarrollarse hasta la cara de la columna, sino que llega a la cara inclinada de la ménsula.

Por último en la **figura 4.65 c** se muestra el tipo de falla que ocurre cuando la placa de apoyo es demasiado pequeña y, por consiguiente, se desarrollan en el concreto esfuerzos de aplastamiento muy altos. La resistencia de las ménsulas cuando se desarrolla alguno de estos tipos de falla es menor que la correspondiente a los tipos de falla mencionados anteriormente. Por lo tanto, conviene evitarlos mediante detalles adecuados en la geometría y en la colocación del refuerzo.



**Figura 4.65** Modos secundarios de falla en ménsulas.

Se ha estudiado experimentalmente el efecto de cargas horizontales que actúan de manera simultánea con las cargas verticales aplicadas en la ménsula. Estas cargas horizontales pueden ser de tensión o de compresión. Las primeras suelen ser producidas en la práctica por la contracción y el flujo plástico del concreto de las vigas que se apoyan sobre la ménsula o por las acciones de viento o sismo. Es importante considerar su efecto, por que la resistencia de las ménsulas disminuye en relación al caso en que sólo actúan verticales. Por el contrario, las fuerzas horizontales de compresión aumentan la resistencia de las ménsulas y propician un comportamiento menos frágil. Estas fuerzas de compresión pueden lograrse mediante acero que atraviese la ménsula por un ducto y al que se le aplique una fuerza de tensión, la cual, como reacción, produce una fuerza de compresión en la ménsula.

La colocación de estribos para aumentar la resistencia a tensión diagonal y a cortante directo de ménsulas también ha sido objeto de estudios experimentales. Se ha visto que los estribos verticales, como los usados en las vigas largas no aumentan prácticamente la resistencia, ya que las grietas forman un ángulo cercano a  $90^\circ$  con la horizontal y por lo tanto pueden desarrollarse sin que sean cortadas por los estribos. Los estribos horizontales si son eficientes, pero cuando actúa carga horizontal simultáneamente con carga vertical, son menos eficientes. También se ha logrado aumentar la resistencia y la ductilidad de las ménsulas añadiendo fibras de acero al concreto. Se ha encontrado que las fibras de acero permitan obtener fallas del tipo de flexión en vez de fallas frágiles de corte o tensión.

### **Resistencia y dimensionamiento de ménsulas.**

Las expresiones utilizadas para calcular la resistencia de ménsulas son de naturaleza empírica. Se han obtenido a partir del análisis estadístico de los resultados de análisis. En estos ensayos se ha visto que la resistencia de ménsulas es función del ancho,  $b$ ; el peralte,  $d$ ; la relación de esfuerzo,  $p_v$ ; de la resistencia del concreto,  $f_c$  y de la relación entre el claro de cortante  $a$ , y el peralte,  $d$ .

### Cortante por fricción.

Los esfuerzos que producen las llamadas fallas por cortante en vigas de concreto, no son realmente esfuerzos cortantes, si no esfuerzos principales de tensión debidos a la combinación de esfuerzos normales de flexión y esfuerzos cortantes. Sin embargo, en el caso de ménsulas cortas con relación claro/peralte menor que uno, y en otros casos, los esfuerzos cortantes puros pueden ser el factor crítico de diseño, aunque la resistencia del concreto a esfuerzos cortantes es muy elevada, pueden existir algunas secciones a través de las cuales sea necesario transferir fuerza cortante y cuya capacidad para hacerlo sea pequeña o nula, debido a la presencia de grietas previas o por que la unión no sea monolítica. En tales casos, la única manera de desarrollar la fuerza cortante es a través de la fricción que se presenta cuando uno de los elementos tiende a deslizarse respecto al otro.

La manera en que puede desarrollarse fuerza cortante a través de fricción entre dos elementos se ilustra en la figura 4.66, en la que se muestra el espécimen de ensaye usado generalmente para investigar la resistencia al deslizamiento entre dos elementos de concreto.

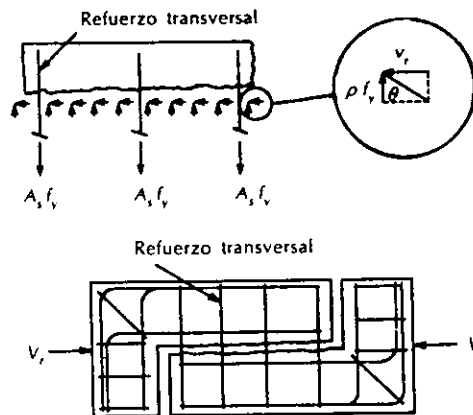


Figura 4.66 Cortante por fricción.

Como se indica en esta figura, la superficie de contacto entre los dos elementos es irregular. Al ilustrar un elemento respecto al otro, ocurre un desplazamiento relativo entre ambos, en dirección perpendicular a la superficie de contacto. Este desplazamiento produce fuerzas de tensión en el refuerzo transversal, lo cual origina, como reacción, fuerzas de compresión sobre la superficie de contacto, como se muestra en la **figura 4.66**. Debido a la acción de estas fuerzas de compresión, se generan fuerzas de fricción que pueden estimarse por medio de la ecuación:

$$V_f = \mu N$$

Donde:

$V_f$  = fuerza de fricción

$\mu$  = coeficiente de fricción

$N$  = fuerza normal

Si se considera que el esfuerzo transversal fluye,  $N = A\sigma_t$ . Por consiguiente, sustituyendo este valor de  $N$  y dividiendo ambos miembros de la ecuación  $V_f = \mu N$  entre el área de la superficie de contacto, se obtiene la siguiente ecuación:

$$V_f = \mu p f y$$

El valor del coeficiente de fricción,  $\mu$ , ha sido experimentalmente determinado por varios investigadores, con base en estos estudios, se han propuesto valores del coeficiente  $\mu$ , como los mostrados en la **tabla 4**.

Descripción	$\mu$
Concreto colado monolíticamente	1.4
Concreto colado contra concreto endurecido cuya superficie se haya hecho rugosa en forma intencional	1.0
Concreto colado contra concreto endurecido cuya superficie no se haya hecho rugosa en forma intencional	0.6
Concreto anclado a acero estructural por medio de pernos con cabeza o barras de refuerzo	0.7

**Tabla 4.4** Coeficientes de fricción

Como ejemplo de aplicación del concepto de cortante por fricción al diseño de ménsulas, considérese el caso mostrado en la **figura 4.67** El refuerzo perpendicular a la columna es equivalente al refuerzo transversal en la fig. 5. Por consiguiente, la relación requerida de este esfuerzo puede obtenerse de la siguiente manera:

$$p = \frac{V_r}{\mu f_y}$$

Donde:

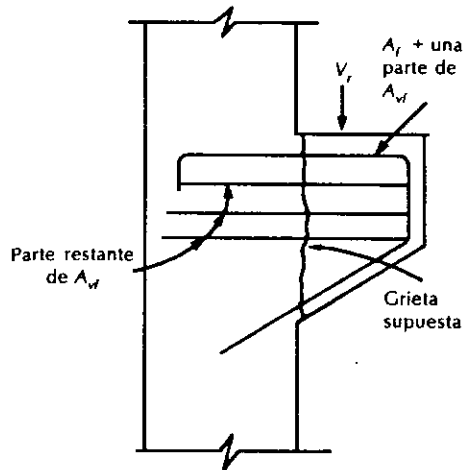
$V_r$  = Esfuerzo cortante promedio en la superficie de contacto o bien, la fuerza aplicada.  $V_r$ , dividido entre el área de la superficie de contacto, la cual es igual al peralte total de la ménsula multiplicado por su ancho.

$$p = \frac{V_r}{\mu f_y}$$

Una vez que se ha calculado la relación  $p$ , el área requerida de acero transversal,  $A_{vf}$  se obtiene multiplicando la relación por la superficie de contacto.

$$A_{vf} = pbh$$

El acero de refuerzo obtenido de la manera descrita anteriormente, debe adicionarse al acero requerido por otras acciones, como flexión o tensión directa, y distribuirse a lo largo de la grieta supuesta.



**Figura 4.67** Cortante por fricción aplicada a una ménsula.

#### **Dimensionamiento de ménsulas según las NTC - 96.**

Para estas normas las ménsulas son aquellos elementos cuya relación entre el claro de cortante y el peralte en el paño de la columna es menor o igual a uno.

También se especifica usar el concepto de cortante por fricción para calcular el área de acero que se requiere para resistir la fuerza cortante, que con la notación de este reglamento se denomina VR. De esta manera, el área de acero Avf se obtiene despejando su valor de las siguientes ecuaciones que dan la resistencia del elemento a corte por fricción.

$$VR = FR \mu (Avf f_y + Nu)$$

$$VR = FR [14A + 0.8 (Avf f_y + Nu)]$$

$$VR = 0.25 FR f^*cA$$

En estas ecuaciones, Nu es la fuerza normal de compresión al plano crítico en kg., que debe tomarse igual a cero, A es el área de la sección definida por el plano crítico en cm<sup>2</sup>,  $\mu$  es el coeficiente por fricción, Avf es el área de acero transversal en cm<sup>2</sup> y FR = 0.8. La resistencia será igual al menor de los tres valores obtenidos.

El área de acero por flexión, Af, necesaria para resistir el momento, se puede calcular con la ecuación:

$$Af = \frac{MR}{FR \times f_y \times z}$$

Usando los siguientes valores del brazo del par, z, siempre que la carga actúe en la cara superior de la ménsula y que la relación de refuerzo, Af / bd, no exceda de 0.008.

$$z = (0.4 + 0.4 \frac{a}{h}) \times h, \quad \text{si } 0.5 < \frac{a}{h} \leq 1.0$$

$$z = 1.2a, \quad \text{si } \frac{a}{h} \leq 0.5$$

Finalmente, si existe una fuerza de tensión, Un, debe proporcionarse un área de acero, An, que la resista, la cual se calcula con la ecuación:

$$An = \frac{Nu}{FR \times f_y}$$



Una vez calculadas  $A_v$ ,  $A_f$ ,  $A_n$  se calculan el área principal  $A_s$  y el área restante  $A_h$ .  
El área principal  $A_s$  debe tener un valor mínimo de:

$$A_s(\text{min.}) = \frac{0.04 \times f'c}{f_y} \times bd$$

El procedimiento de diseño de las NTC se ilustra con el siguiente ejemplo. Se suponen conocidas las fuerzas vertical y horizontal que debe resistir la ménsula, las cuales ya están multiplicadas por sus factores de carga.

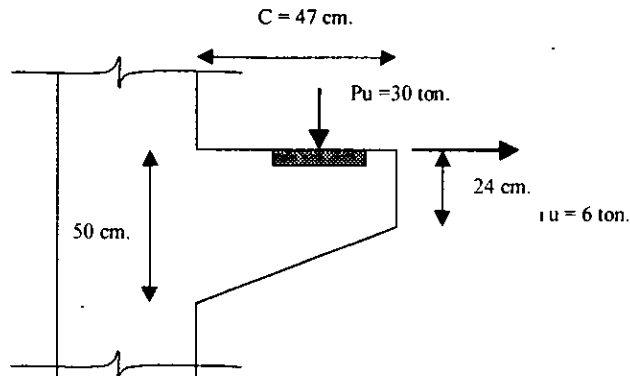
#### Cálculo del acero de refuerzo de una ménsula, dada su geometría.

Datos: Concreto  $f'c = 200 \text{ kg./cm}^2$

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg./cm}^2$

Ancho de ménsula = 30 cm.

La ménsula se colará monolíticamente con la columna.



### Constantes de cálculo.

$$f'c = 0.8 \times f_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg./cm}^2$$

$$f''c = 0.85 \times f'c = 0.85 \times 160 = 136 \text{ kg./cm}^2$$

$$\text{Por flexión, } p_{\min.} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} = \frac{0.7 \sqrt{200}}{4200} = 0.002357$$

$$p_b = \frac{f'c}{f_y} \times \frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{136}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.1524$$

$$FR = 0.8$$

$$\text{Coeficiente de fricción } m = 1.4$$

### Dimensionamiento.

Cálculo del área de acero de refuerzo para flexión,  $A_f$

Si el área  $A_f$  no excede del área balanceada, el refuerzo  $A_f$  puede calcularse con la expresión siguiente:

$$MR = FR A_f f_y z$$

Suponiendo que el brazo  $z$  es igual a  $0.9d$

$$M_u = P_u c + T_u (h - d)$$

$$d = h (r + db/2) = 50 - 2.95 = 47.05 \text{ cm.}$$

$$h - d = 50 - 47.05 = 2.95 \text{ cm.}$$

$$M_u = 30 \times .47 + 6 (.0295) = 14.28 \text{ cm.}$$

$$Z = 0.9 d = 0.9 \times 47.05 = 42.34 \text{ cm.}$$

$$A_f = \frac{M_u}{FR \times f_y \times z} = \frac{1428000}{0.8 \times 4200 \times 42.34} = 10.04 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{A_f}{bd} = \frac{10.04}{30 \times 47.05} = 0.007113$$

$\rho_{\min} < \rho < \rho_b$  es correcto  $A_s = A_f$

Cálculo del área de acero por tensión directa.

$$A_t = \frac{T_u}{FR \times f_y} = \frac{6000}{0.8 \times 4200} = 1.78 \text{ cm}^2$$

Cálculo del área de acero para cortante por fricción

$$V_R = FR \mu (A_{vf} f_y + N_u)$$

$$A_{vf} = \frac{V_R}{FR \mu f_y}; \quad N_u = 0 \text{ en este caso.}$$

$$A_{vf} = \frac{30000}{0.8 \times 1.4 \times 4200} = 6.38 \text{ cm}^2$$

Revisión de limitaciones indicadas.

$$V_R = [14 A + 0.8 (A_{vf} f_y + N_u)] FR$$

$$V_R = [14 \times 30 \times 50 + 0.8 (6.38 \times 4200 + 0)] = 33940 > 30000 \text{ kg.}$$

$$V_R = 0.25 FR f'_c A$$

$$V_R = 0.25 \times 0.8 \times 160 \times 30 \times 50 = 48000 \text{ kg} > 30000 \text{ kg.}$$

Por lo tanto  $A_{vf} = 6.38 \text{ cm}^2$  es correcta.

Cálculo de acero de refuerzo para barras principales,  $A_s$

El área de acero  $A_s$  se tomará como la mayor de las dos siguientes:

$$A_f + A_t \text{ ó } 2/3 A_{vf} + A_t$$

$$A_f + A_t = 10.04 + 1.78 = 11.83 \text{ cm}^2$$

$$2/3 A_{vf} + A_v = 2/3 \times 6.38 + 1.79 = 6.04 \text{ cm}^2$$

$$\text{por lo tanto } A_s = 11.83 \text{ cm}^2$$

Cálculo de acero de refuerzo para estribos complementarios horizontales,  $A_h$  se tomará igual a  $0.5 (A_s - A_t)$ , ó mayor .

$$0.5 (11.83 - 1.79) = 5.02 \text{ cm}^2$$

Barras propuestas

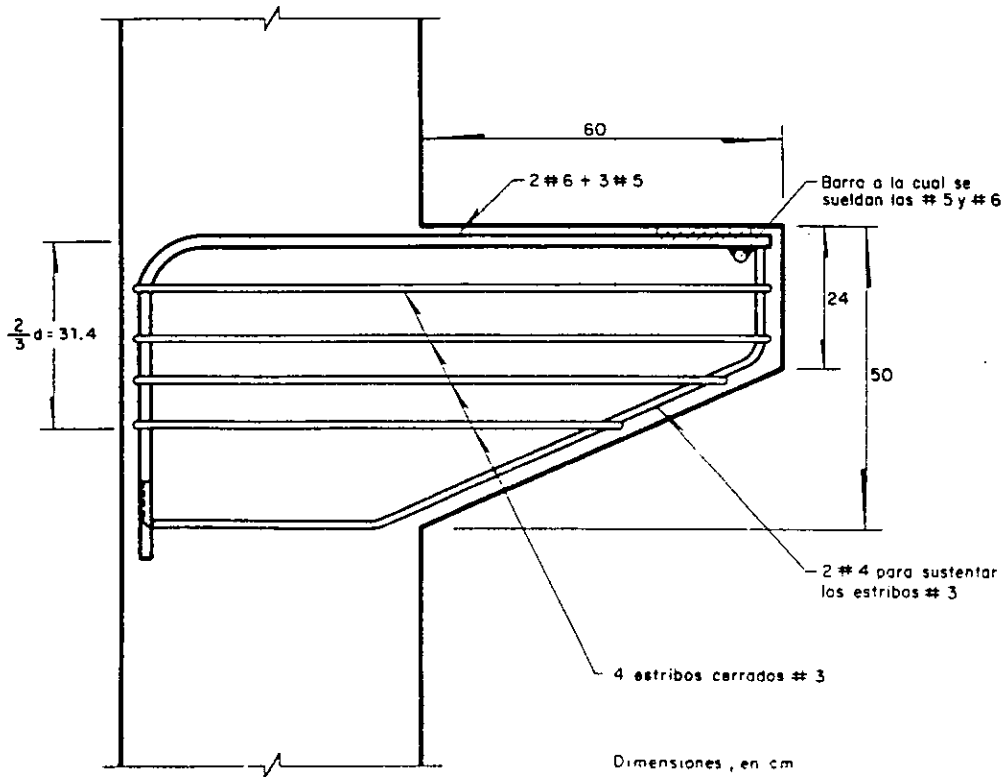
$$\text{Para } A_s = 2 \# 6 \text{ y } 3 \# 5 = 11.64 \text{ cm}^2$$

$$\text{Para } A_h = 8 \# 3 = 5.68 \text{ cm}^2$$

Revisión de la cuantía mínima de refuerzo primario.

$$\frac{0.04 f_c}{f_y} = \frac{0.4 \times 200}{4200} = 0.0019$$

$$\frac{A_s}{bd} = \frac{11.64}{30 \times 47.05} = 0.0082 > 0.0019$$



## Vigas de gran peralte.

Las vigas de gran peralte son elementos estructurales cargados como las vigas ordinarias pero que tienen una relación claro – peralte total ( $l/h$ ) del orden de 3 o menor, donde el claro es la longitud para cargas distribuidas. Ejemplos de este tipo de elemento estructural son las losas de piso sujetas a cargas horizontales, muros bajo cargas verticales, vigas de claro corto que soportan cargas pesadas y algunos otros muros de cortante.

Debido a la geometría de ñas vigas de gran peralte, éstas se comportan como miembros bidimensionales más que unidimensionales y están sujetas a un estado bidimensional de esfuerzo. Como resultado, las secciones planas antes e la flexión no necesariamente permanecen planas después de la flexión. La distribución de la deformación resultante se considera no lineal y las deformaciones por cortante, que en las vigas normales no se consideran, vienen a ser significativas comparadas con las de flexión pura. Por lo tanto, el bloque de esfuerzo llega a ser no lineal aún en la etapa elástica. En el estado límite de carga última, la distribución de esfuerzo de compresión en el concreto no tiene la misma forma parabólica o intensidad que para una viga normal.

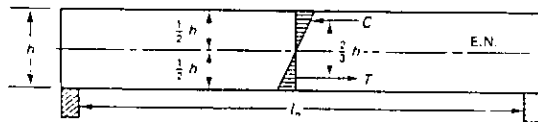
En la **figura 4.68** se señala la linealidad de la distribución del esfuerzo en el centro del claro de una viga normal antes del agrietamiento donde la relación claro efectivo/peralte excede el valor de 3.5 a 4. En contraste, la **figura 4.69 a** muestra la no linealidad del esfuerzo en el centro del claro que corresponde a la deformación no lineal. En la **figura 4.70** se pueden observar algunas distribuciones de esfuerzos obtenidas por la teoría de la elasticidad para vigas con varias relaciones  $l/h$ . En estas distribuciones puede verse que la magnitud del esfuerzo máximo de tensión en la fibra inferior excede en mucho a la del esfuerzo máximo de compresión. Las trayectorias de esfuerzo que se muestran en la **figura 4.69b y c**. confirman esta observación. Nótese la inclinación y concentración de las trayectorias del esfuerzo principal de tensión en el centro del claro

y la concentración de las del esfuerzo de compresión en el apoyo, tanto para cuando la viga se carga en la parte superior como en la inferior.

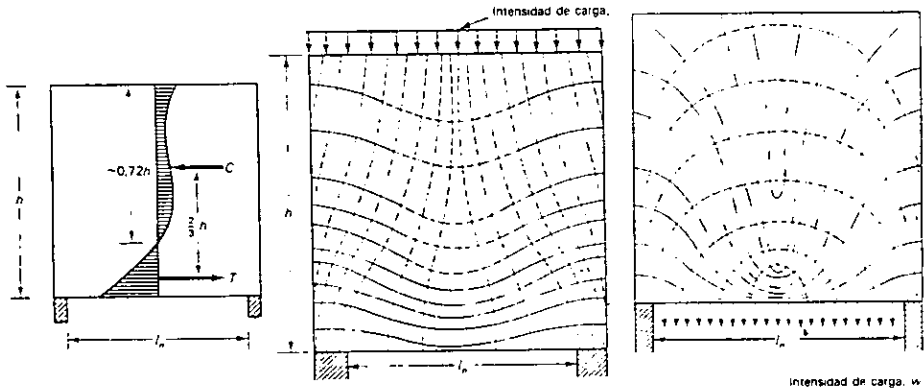
El concreto se agrieta en una dirección perpendicular a las trayectorias del esfuerzo principal de tensión. Conforme la carga se aumenta, el ancho de las grietas crece y se propagan y aparecen más grietas. De aquí que quede menos y menos concreto para resistir el estado indeterminado de esfuerzo. Debido a que el claro de cortante es pequeño, los esfuerzos de compresión en el apoyo afectan la magnitud y dirección de los esfuerzos principales de tensión de tal manera que se vuelven menos inclinados y más bajos en valor.

En muchos casos las grietas son casi verticales o siguen la dirección de las trayectorias de compresión, con la viga casi cortándose en el apoyo en una falla total de cortante. Por lo que, en el caso de las vigas de gran peralte, se requiere de refuerzo horizontal en toda la altura de las vigas, además del refuerzo vertical por cortante a lo largo del claro.

En resumen, el diseño de vigas de gran peralte la magnitud y separación tanto del refuerzo por cortante vertical como del horizontal varía en forma considerable de los utilizados en las vigas normales, así como las expresiones que se utilizan para sus diseños.



**Figura 4.68** Distribución elástica de esfuerzos en vigas normales ( $l/h \geq 3.5$  a 5)



(a) Vigas de gran peralte ( $l/h < 1$ )

(b) Trayectoria de los esfuerzos principales en vigas de gran peralte cargadas verticalmente en la parte superior.

(c) Trayectoria de los esfuerzos principales en vigas de gran peralte cargadas en sus fibras inferiores.

Figura 4.69 Distribución elástica de esfuerzos en vigas de gran peralte.

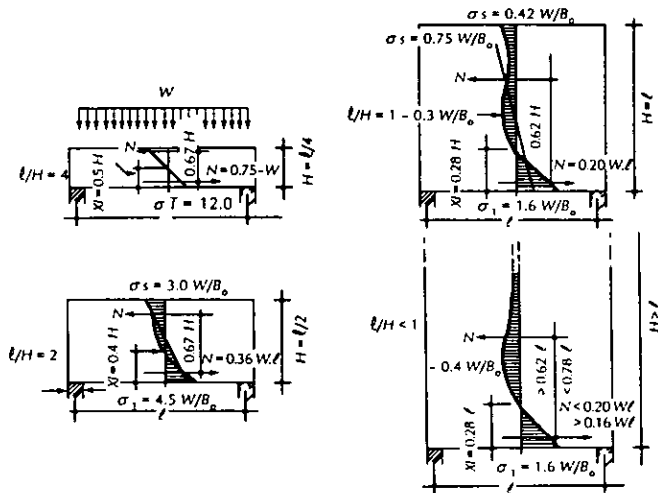


Figura 4.70 Distribuciones elásticas de esfuerzos en vigas con diferentes relaciones claro peralte.

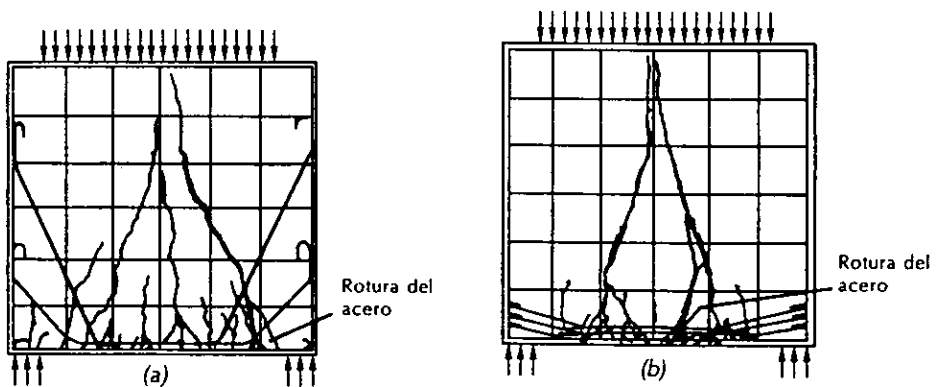


## Comportamiento y modos de falla.

La siguiente descripción de los principales modos de falla esta basada fundamentalmente en ensayos realizados para conocer el comportamiento de este tipo de vigas.

### a) Rotura de acero longitudinal.

Debido al gran peralte de estas vigas, en el diseño se obtienen muchas veces relativamente pequeñas de refuerzo por flexión. En las **figuras 4.71 a y 4.71b** se muestran dos vigas que fallaron por rotura del acero de tensión. El porcentaje de refuerzo de ambas era de 0.12 por ciento. Las vigas diferían entre si por la colocación de las barras longitudinales; la viga mostrada en la **figura 4.71 a** tenía las barras dobladas y la de la **figura 4.71 b**, rectas. En la primera viga, el acero se rompió en la sección en que se doblaron las barras, mientras que en la segunda se rompió aproximadamente en el centro del claro. La carga que resistió la segunda viga fue 23% mayor que la resistió la primera. Esto indica que no es conveniente doblar las barras, ya que se debilita la viga en la sección del doblez. Además, la configuración de agrietamiento indica que la viga trabaja aproximadamente como un arco atirantado, por lo que la fuerza de tensión en el acero es constante en todo el claro y no disminuye de acuerdo con el diagrama de momentos flexionantes, como en las vigas largas.



**Figura 4.71** Falla por rotura del acero de flexión en vigas de gran peralte.

## b) Aplastamiento de los apoyos

En las figuras 4.72 a y 4.72 b se muestran dos vigas que fallaron por aplastamiento de los apoyos. En la primera, el esfuerzo de aplastamiento, obtenido dividiendo la reacción de apoyo entre el área de apoyo, resultó  $405 \text{ kg/cm}^2$ , valor 45% mayor que la resistencia del concreto,  $f'_c$ , determinado en cilindros. La viga de la figura 4.72 b tenía una ampliación de los apoyos para disminuir los esfuerzos de aplastamiento. En esta viga, la falla ocurrió al formarse súbitamente una grieta casi vertical en la intersección del alma de la viga con la ampliación del apoyo derecho, y se inició por arriba del refuerzo longitudinal. Esta falla indica la controversia de colocar refuerzo horizontal adicional en esta zona.

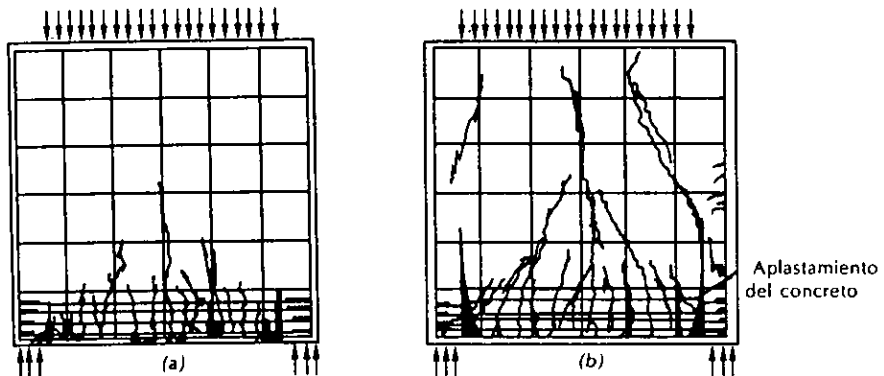


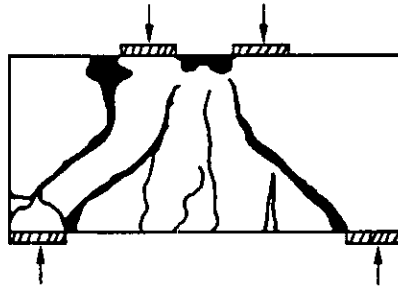
Figura 4.72 Fallas por aplastamiento de los apoyos en vigas de gran peralte.

## c) Falla por cortante

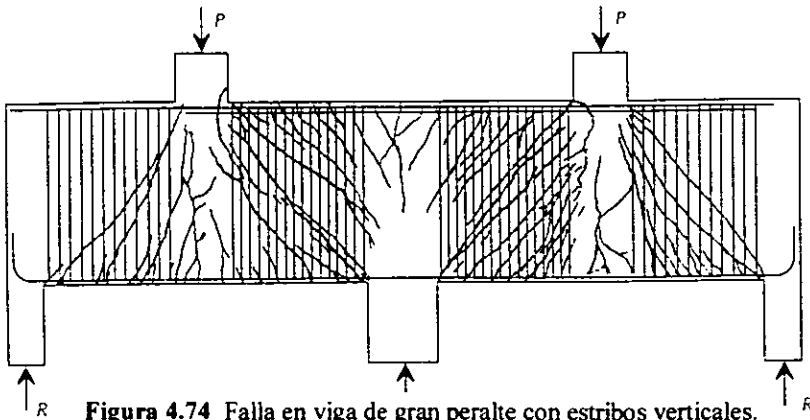
En las fallas de este tipo, se forman grietas inclinadas, antes de la falla, las cuales, como se indicó en el inciso a, hacen que la viga trabaje como un arco atirantado ( figura 4.73). Posteriormente se forman otras grietas inclinadas que definen una zona de concreto que trabaja a compresión y que une los apoyos de la viga con los puntos de aplicación de carga. Esta zona de concreto falla a compresión simultánea con el

deslizamiento por cortante de la zona descargada de la viga y con la rotura de la adherencia de las barras longitudinales en las zonas de apoyos. En algunos casos, la falla ocurre tan pronto como se forma la segunda grieta inclinada, mientras que en otros casos las vigas soportan cierta carga adicional.

En la **figura 4.74** se muestra la configuración de agrietamiento de una viga continua de dos claros con una fuerte cantidad de estribos verticales. A pesar de los estribos, la grieta inclinada se forma súbitamente produciendo un ruido sorda. Se puede observar la formación de grietas en forma de abanico sobre el apoyo interior y debajo de las cargas, así como la presencia de diagonales de concreto que trabajan a compresión entre los apoyos y las cargas. A pesar de la aparición súbita de la grieta inclinada estas vigas presentan cierta ductilidad. En cambio, con cantidades pequeñas de estribos, el comportamiento y la falla son iguales a las de vigas sin estribos.



**Figura 4.73** Falla por cortante en vigas de gran peralte.



**Figura 4.74** Falla en viga de gran peralte con estribos verticales.

d) Aplastamiento del concreto a compresión.

Es raro que se presente éste tipo de falla en vigas de gran peralte. Cuando ocurre, se desarrolla en forma semejante a la falla en compresión por cortante de vigas largas, pero después de que se producen deflexiones inelásticas considerables.

### **Recomendaciones para diseño.**

Se han propuesto dos tipos de enfoque para el diseño de vigas de gran peralte. En el primero, se considera que la viga puede representarse por una armadura, con elementos sujetos a fuerzas axiales de tensión o compresión. En la **figura 4.75** se muestra un modelo de armadura propuesto por Rogowsky, Mc. Gregor y Orig. Las partes sombreadas representan zonas en las que el concreto trabaja a compresión; la parte inclinada sería una diagonal principal a compresión. Las líneas inclinadas son diagonales secundarias a compresión y la línea horizontal es el acero de refuerzo longitudinal que trabaja a tensión. En este tipo de enfoque, el diseño se realiza simultáneamente por flexión, cortante y esfuerzos de apoyo.

En el segundo tipo de enfoques, se hacen por separado los diseños por flexión, fuerza cortante y esfuerzos de apoyo usando ecuaciones empíricas. Este es el enfoque que se utiliza en los reglamentos de construcción del American Concrete Institute y del Distrito Federal. Por esta razón es el que presenta en este capítulo, aunque algunos investigadores han señalado que no representa adecuadamente el comportamiento de las vigas de gran peralte.

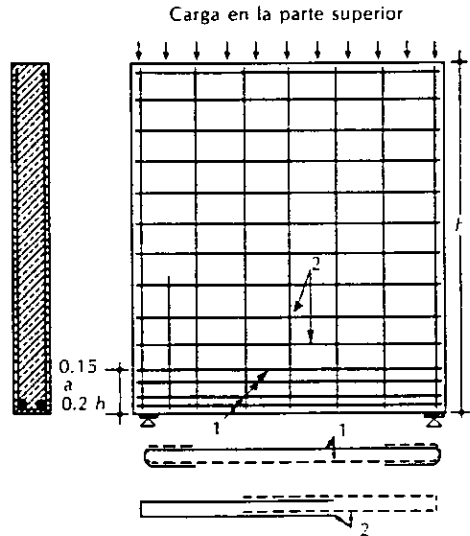
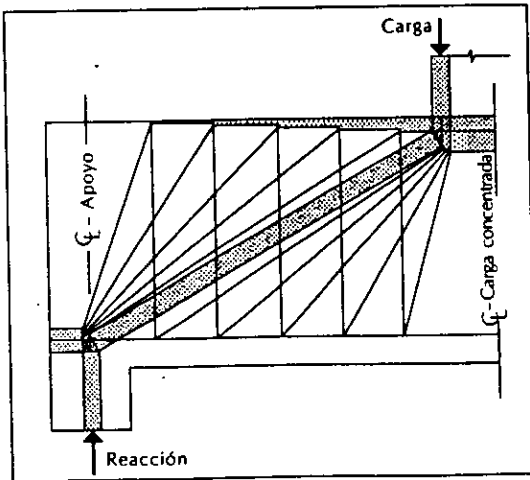
- Flexión.

Debido a que las relaciones de refuerzo de flexión en vigas de gran peralte generalmente son pequeñas, y a que los resultados de la Teoría de la Elasticidad son muy conservadores para estas vigas, se recomienda usar un procedimiento simple de diseño, que consiste en fijar el brazo del par interno de la manera siguiente. Si la relación entre el claro y el peralte total  $l/h$  es igual o mayor que 1, el brazo del par interno,  $z$ , es igual a

0.6h. Si la relación  $l/h$  es menor que 1, el brazo del par interno,  $z$ , es igual a 0.6l. Una vez determinado el valor de  $z$ , el área de acero requerida se calcula con la siguiente ecuación.

$$A_s = \frac{M_r}{f_y z}$$

El área de acero determinada de esta manera debe proporcionarse usando barras de diámetro pequeño y no una o dos barras de gran diámetro únicamente, ya que esto aumentará los problemas de anclaje. Además, las barras deben distribuirse sobre una altura de 0.15 a 0.20h a partir de la cara inferior de la viga, y deben anclarse en los extremos con ganchos horizontales, como se muestra en la **figura 4.76**. No es conveniente doblar las barras.



**Figura 4.75** Analogía de la armadura. **Figura 4.76** Detalles de refuerzo recomendado

- Esfuerzos de apoyo.

Para evitar fallas por aplastamiento de los apoyos, se recomienda limitar los esfuerzos de apoyo a un valor de  $0.5 f_c$ , en los casos en que la viga no tenga ampliación de la sección en las zonas de apoyo. Cuando existen ampliaciones en los apoyos, la carga aplicada a la viga no debe exceder del siguiente valor:

$$W_{\text{máx.}} = 0.08 b f_c \left( \frac{h}{\ell h} \right)$$

Donde :  $b$  = ancho del alma de la viga.

$\ell h$  = claro libre entre las caras interiores de los apoyos.

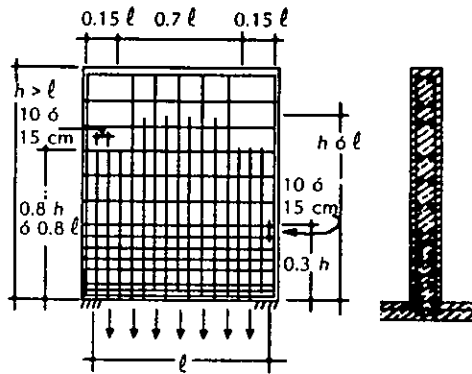
Esta recomendación tiene por objeto evitar que se desarrollen esfuerzos inclinados de compresión demasiado elevados.

- Fuerza cortante.

Se ha comprobado que la resistencia a fuerza cortante de vigas de gran peralte es mayor, relativamente, que la resistencia de vigas largas, o sea, que el esfuerzo cortante nominal,  $V_h = V_n/bd$ , que puede resistir las vigas de gran peralte, es mayor que el que pueden resistir las vigas largas.

- Cargas aplicadas en la parte inferior.

Cuando la carga esta aplicada en la parte inferior de la viga, como se muestra en la **figura 4.77**, es necesario colocar barras verticales para transmitir a carga de la parte inferior a la parte superior de los arcos que se forman al agrietarse la viga. El área necesaria de este acero se calcula dividiendo la carga aplicada entre el esfuerzo de fluencia del acero. Para evitar que ocurra agrietamiento excesivo bajo cargas de servicio, se recomienda usar, en el cálculo, un valor de fluencia de  $2000 \text{ kg/cm}^2$ , aún cuando el límite de fluencia real sea mayor. La colocación de las barras verticales debe hacerse siguiendo las recomendaciones indicadas en la **figura 4.77**



**Figura 4.77** Detalles recomendados de colocación del refuerzo cuando la carga esta aplicada en la parte inferior.

### Diseño de vigas de gran peralte de acuerdo a las NTC.

Se define como vigas diafragma a aquellas cuya relación entre el claro libre,  $L$  y el peralte total,  $h$ , es menor que 2.5, si son vigas continuas, o menor que 2.0 si constan de un solo claro libremente apoyado.

Cuando la relación de refuerzo,  $p$ , es menor de 0.008 su resistencia a flexión se puede calcular con la ecuación:

$$MR = FR As fy z$$

Donde el brazo del par,  $z$ , se valúa con las siguientes ecuaciones:

$$z = \left(0.3 + 0.2 \frac{L}{h}\right) h, \quad \text{si } 1.0 < L/h \leq 2.0$$

$$z = 0.5 L, \quad \text{si } L/h \leq 1.0$$

Para fuerza cortante, la sección crítica se considera a una distancia del paño del apoyo igual a  $0.15L$  en vigas con carga uniformemente repartida, e igual a la mitad de la distancia a la carga más cercana en vigas con cargas concentradas, pero no se supondrá a más de un peralte efectivo del paño del apoyo si las cargas o reacciones comprimen directamente dos caras opuestas de la viga, ni a más de medio peralte en caso contrario.

La resistencia total a corte se calcula también como la suma de la resistencia del concreto y del acero de refuerzo. La primera se calcula con la ecuación:

$$\begin{aligned} VCR &= (3.5 - 2.5 \frac{M}{Vd}) 0.5 FR bd \sqrt{f'c} \\ &\leq 1.5 FR bd \sqrt{f'c} \end{aligned}$$

Los valores de  $M$  y  $V$  son los de la sección crítica y el término  $3.5 - 2.5 M/Vd$  no será menor que uno. Si las cargas y reacciones no comprimen directamente las caras superior e inferior de la viga, éste último término se tomará igual a uno.

Si la fuerza cortante de diseño,  $V_u$ , es mayor que  $VCR$ , la diferencia se toma con refuerzo que constará de estribos cerrados verticales y barras horizontales, cuyas contribuciones se determinarán como se indica a continuación, en vigas donde las caras y reacciones comprimen directamente cargas opuestas.

La contribución de refuerzo vertical se supondrá igual a:

$$0.0083 FR f_{yv} d A_v (1 + \frac{L}{d}) \times S$$

Donde :  $A_v$  = es el área de acero transversal comprendida en cada distancia,  $s$  y  $f_{yv}$ , es el esfuerzo de fluencia en dicho acero.

La contribución del acero horizontal se supondrá igual a:

$$0.0083 FR f_{yv} d A_v (11 - \frac{L}{d}) / S_h$$



El refuerzo que se determine en la sección crítica se usará en todo el claro. Tanto el refuerzo vertical como el horizontal deben cumplir con los requisitos para refuerzo por cambios volumétricos que marcan las NTC.

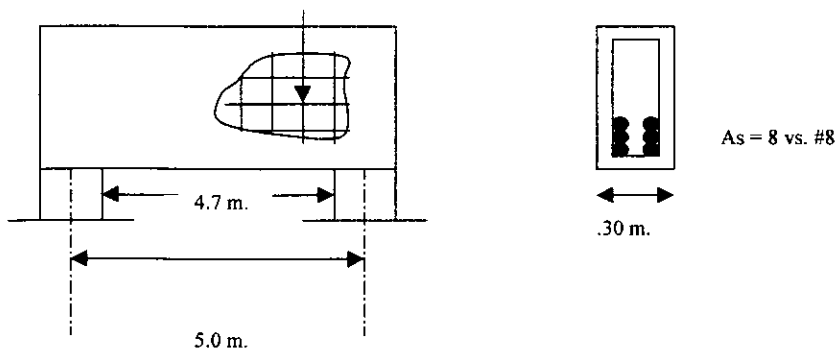
La fuerza cortante  $V_u$  en vigas diafragma no debe exceder, en ningún caso, de:

$$2 FR bd \sqrt{f'c}$$

Las NTC también influyen disposiciones para el diseño de los apoyos, que, como se ha mencionado, constituyen un aspecto crítico del diseño. Se recomienda aumentar en 10% el valor de las reacciones calculadas como si la viga no fuese de gran peralte, y colocar en las zonas próximas a los apoyos, barras complementarias verticales y horizontales del mismo diámetro que las del refuerzo usado para fuerza cortante y de modo que su separación en esas zonas sea la mitad que en resto de la viga.

### Ejemplo. Cálculo de la resistencia de una viga de gran peralte.

Estribos no.3 @ 20 cm. dos ramas en las dos direcciones



Materiales:

Concreto  $f'c = 250 \text{ kg./cm}^2$

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Constantes de diseño.

$$f'_c = 0.8 \times f_c = 0.8 \times 250 = 200 \text{ kg./cm}^2$$

$$f'_c = 0.85 \times f'_c = 0.85 \times 200 = 136 \text{ kg./cm}^2$$

Resistencia a flexión.

$$MR = FR A_s f_y z$$

$$\frac{L}{h} = \frac{4.7}{2.5} = 1.88 > 1$$

$$z = (0.3 + 0.2 \frac{L}{h}) \times h$$

$$z = 1.69 \text{ m.}$$

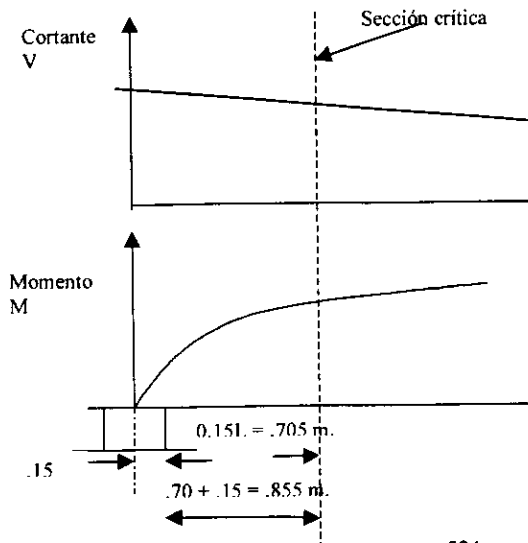
$$r = \frac{A_s}{bd} = \frac{40.56}{30 \times 230} = 0.0058$$

$$MR = 0.9 \times 40.56 \times 169 \times 4000$$

$$MR = 24.67 \times 10^6 \text{ kg.-cm.}$$

Resistencia a cortante.

Fuerza cortante y momento flexionaste en la sección crítica.



$$V \text{ apoyo} = w l / 2 = 2.5 \text{ cm.}$$

$$V \text{ secc. Crítica} = 2.5w - .855 = 1.645 w$$

$$M \text{ secc. Crítica} = V \text{ apoyo} \times .855 - (w \times .855^2 / 2)$$

$$M \text{ secc. Crítica} = 1.77w$$

$$\frac{M}{V \text{ secc. crítica}} = \frac{1.77w}{1.645w \times 2.3} = 0.468$$

Contribución del concreto.

$$VCR = (3.5 - 2.5 \frac{M}{Vd}) 0.5 FR bd \sqrt{f^*c} \leq 1.5 FR bd \sqrt{f^*c}$$

$$VCR = (3.5 - 2.5 \times .468) \times .5 \times .8 \times 30 \times 230 \times \sqrt{200} = 90.9 \text{ ton.}$$

$$1.5 \times FR bd \sqrt{f^*c} = 1.5 \times .8 \times 30 \times 230 \times \sqrt{200} = 117.1 \text{ ton.}$$

VCR = 90.9 ton

Contribución del acero vertical.

$$V_{sv} = 0.083 FR f_{yv} d A_v (1 + \frac{L}{d}) / S$$

$$V_{sv} = 0.083 \times 0.8 \times 4000 \times 230 \times 142 \times (1 + \frac{470}{230}) / 20$$

V<sub>sv</sub> = 13.2 ton.

Contribución del acero horizontal.

$$V_{sh} = 0.0083 FR f_{yv} d A_v (11 + \frac{L}{d}) / S_h$$

$$V_{sh} = 0.0083 \times 0.8 \times 4000 \times 230 \times 142 \times (11 - \frac{470}{230}) / 20$$

V<sub>sh</sub> = 38.8 ton.

$$V_u = VCR + V_{sv} + V_{sh} = 90.9 + 13.2 + 38.8 = 142.9 \text{ ton.}$$

$$V_u \text{ máx.} = 2 FR bd \sqrt{f^*c} = 2 \times .8 \times 30 \times 230 \times \sqrt{200} = 156.13 \text{ ton}$$

$$V_u \text{ máx} > V_u.$$

## CAPITULO V

### MUROS.

#### **Introducción.**

Los muros son los cerramientos verticales para los marcos. No son en general o necesariamente hechos de concreto, si no de cualquier material que cumpla estéticamente la forma y necesidades funcionales del sistema estructural.

Los muros estructurales de concreto son a menudo necesarios como muros de cimentación, muros de escalera y muros de cortante que resisten cargas horizontales de viento y sismo, en este último caso se ha comprobado el buen funcionamiento de edificaciones rigidizadas con muros de concreto, los cuales resisten cargas verticales y horizontales evitando deformaciones excesivas de la estructura al presentarse un sismo intenso.

Para muros esbeltos con poco refuerzo longitudinal se ha comprobado experimentalmente que su comportamiento es similar al de los elementos con flexión, aún cuando no se ha estudiado lo suficiente el efecto de la carga axial cuando existen alteraciones de carga lateral principalmente en cuanto a pérdida de resistencia, rigidez y deterioro del muro. En muros cortos, los efectos de la fuerza cortante empiezan a predominar sobre los de flexión, y es en ese caso cuando se tiene poco conocimiento de las propiedades de éste tipo de muros.

#### **Muros de concreto con falla por cortante.**

La protección contra el daño a los elementos no estructurales que puedan proporcionar los muros de cortante de concreto reforzado en edificios, es muy reconocida. En varios temblores resientes se ha demostrado el buen comportamiento de los muros de cortante bien diseñados. Algunos reglamentos requieren que las estructuras de muros de cortante se diseñen con mayor resistencia ante cargas laterales, que los marcos dúctiles

de concreto reforzado que poseen características dinámicas similares. Esta precaución proviene de la creencia de que los muros de cortante son inherentemente menos dúctiles y que, probablemente, sea el cortante el modo dominante de falla de manera apropiada el muro con falla por cortante debería denominarse “ Muro estructural “. Además de las cargas laterales, los muros de cortante también tienen que soportar alguna carga gravitacional.

### **Comportamiento de muros que fallan por cortante.**

En términos generales, los muros de concreto reforzado presentan dos tipos de comportamiento ante cargas laterales, dúctil, cuando predomina la flexión sobre el muro; y frágil, cuando es determinante la influencia de la fuerza cortante.

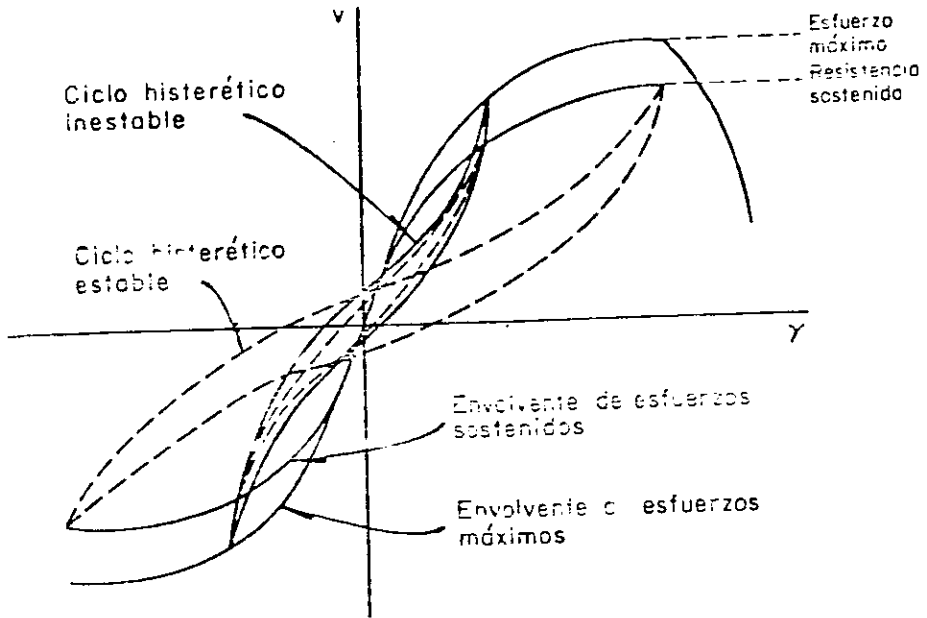
En el primer caso, el comportamiento de los muros es similar al de vigas, inclusive se puede calcular con muy buena aproximación su capacidad a flexión con los mismos criterios que para vigas. No es igual el caso para fuerza cortante, ya que difiere el comportamiento de muros y vigas para esta sollicitación.

El comportamiento observado en muros de concreto reforzado ante fuerza cortante puede idealizarse como se muestra en la **figura 6.1** Para cargas muy bajas, el comportamiento es prácticamente elástico lineal, después el muro se va deteriorando, siendo entonces diferente la curva de carga que la descarga, y el ciclo de carga histerético muestra la forma usual de elementos donde rige la falla por cortante.

Con base en resultados obtenidos de ensayos en modelos se ha podido llegar a formulaciones que permiten predecir:

- La capacidad máxima de muros de concreto reforzado ante fuerza cortante.
- La capacidad sostenida

- El lugar geométrico de los puntos de capacidad máxima, o sostenida, para diversos valores de la distorsión
- Los ciclos histeréticos de comportamiento



**Figura 6.1** Comportamiento ante alteraciones de carga de un muro de concreto con falla por cortante.

### Predicción de la resistencia.

Las expresiones básicas, obtenidas principalmente de ensayos en modelos de muros reforzados con cantidades similares de refuerzo horizontal y vertical, se desarrollaron tomando como base el criterio usual de sumar la contribución del concreto y la del acero de refuerzo.

### Contribución del concreto.

De diversos estudios experimentales se ha observado que la principal variable que determina la resistencia de muros de concreto con falla por cortante es su relación de aspecto (relación que existe entre el momento flexionante y la fuerza cortante por la longitud del muro en la sección considerada  $M / Vt$ ) En la **figura 6.2** se muestra la variación de la contribución del concreto a la resistencia para distintas relaciones de aspecto. En esa figura se representa sobre el eje horizontal la relación de aspecto y sobre la vertical la diferencia de la capacidad máxima observada y la contribución del acero dividida entre la raíz cuadrada de la resistencia del concreto; esto es:

$$\frac{V_u - V_s}{\sqrt{f'c}}$$

Ajustando por mínimos cuadrados una expresión para  $M / Vt < 2$ , se llega a que la resistencia básica del concreto cuando no actúa carga axial sobre el muro, es de:

$$V_o = (1.6 - 0.3 (M / Vt)^2) \sqrt{f'c} \geq 0.5\sqrt{f'c}$$

Donde:

$V_o$  = es la resistencia del concreto a cortante para cierta relación de aspecto  $M/Vt$ , en  $kg/cm^2$

$M$  = es el momento flexionante en la sección crítica considerada, en  $kg/cm^2$

$V$  = fuerza cortante en la sección crítica, en kg.

$t$  = longitud del muro, en cm.

$f'c$  = resistencia a compresión del concreto, en  $kg/cm^2$

El límite inferior para  $V_o$ ,  $0.5 \sqrt{f'c}$ , es para ser congruentes con la resistencia a cortante de vigas de concreto.

La carga axial hace que se incremente la capacidad a cortante del concreto; en el acero es de suponerse que para bajos niveles de carga axial mejora su adherencia con el concreto.

La contribución de la carga vertical e puede estimar en igual forma que para muros de mampostería. La ecuación se obtiene de igualar el esfuerzo de ruptura en tensión diagonal para condiciones con y sin carga axial, resultando:

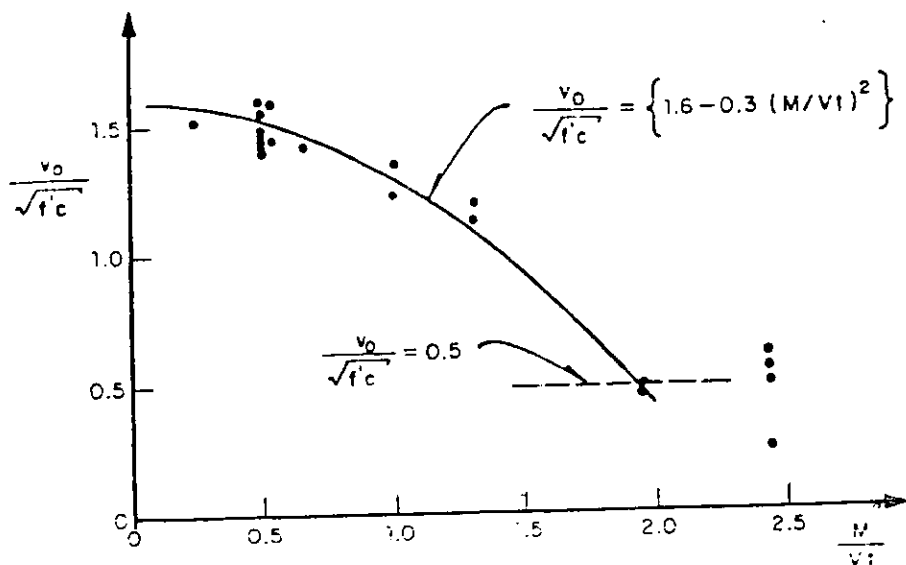
$$V_c = V_o \sqrt{1 + \frac{\alpha}{V_o}} \quad ; \quad \frac{\alpha}{V_o} \leq 5$$

Donde:

$V_c$  = esfuerzo cortante resistente del concreto bajo carga axial, en  $\text{kg/cm}^2$

$\alpha$  = esfuerzo axial actuante, en  $\text{kg/cm}^2$

$V_o$  = resistencia básica a cortante del concreto, en  $\text{kg/cm}^2$



**Figura 6.2** Variación de la respuesta de muros de concreto con relación de aspecto del muro.



### Contribución del acero de refuerzo.

Generalmente se expresa como:

$$V_s = p f_y$$

Donde:

$p = A_s / sb$ , es la cuantía de refuerzo horizontal o vertical en el alma del muro.

$f_y$  = esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo, en  $\text{kg/cm}^2$

$A_s$  = área del refuerzo del muro, en  $\text{cm}^2$

$S$  = separación vertical u horizontal del refuerzo, en cm.

$b$  = espesor del muro, en cm.

Para el cálculo de la contribución del acero debe considerarse que porción del refuerzo vertical y horizontal se tomará en cuenta. Con base en los resultados obtenidos de ensayos, se han propuesto dos formas de calcular dicha contribución que conducen a resultados muy similares si las cuantías de refuerzo en las dos direcciones ortogonales no son muy diferentes.

- Tomar el refuerzo horizontal y aplicar la expresión  $V_s = p f_y$  cuando  $M / V_t$  es mayor o igual que la unidad. Cuando la relación de aspecto es menor que uno, se deberá emplear la cuantía de refuerzo vertical.
- En éste método, la contribución del acero se calculará con las expresiones siguientes:

$$V_s = p_v f_{yv} \quad \text{si } M / V_t < 0.25$$

$$V_s = p_h f_{yh} \left( \frac{M}{V_t} - \frac{1}{4} \right) + p_v f_{yv} \left( \frac{5}{4} - \frac{M}{V_t} \right)$$

$$\text{si } 0.25 \leq \frac{M}{V_t} \leq 1.25$$

$$V_s = p_h f_{yh} \quad \text{si } M / V_t > 1.25$$

Donde los subíndices v y h se refieren al refuerzo horizontal y vertical, respectivamente.

Este último método es más racional que el primero, pero como ya se mencionó, ambos conducen a resultados muy similares cuando la cuantía de refuerzo en una dirección no es mayor del doble de la otra.

Debe quedar claro que es necesaria la presencia de refuerzo en ambas direcciones en el alma del muro para que puedan aplicarse las expresiones anteriores. También se considera conveniente la presencia de una cuantía mínima de refuerzo para evitar problemas de agrietamiento por contracción; el porcentaje mínimo de refuerzo recomendado por las NTC es de  $p_{\text{mín.}} = 0.0025$

#### Método de diseño propuesto.

Empleando el criterio usual de sumar las contribuciones del acero y del concreto para determinar la capacidad máxima, y considerando que son variables aleatorias, se ajustó por mínimos cuadrados una expresión del tipo:

$$V = A + B V_c + C v_s$$

Donde:

V = es la resistencia total a cortante, en  $\text{kg/cm}^2$

$V_c$  = es la contribución del concreto a la resistencia, en  $\text{kg/cm}^2$

$v_s$  = es la contribución del acero a la resistencia, en  $\text{kg/cm}^2$

A, B, C = son parámetros a determinar del ajuste.

Considerando los diversos muros que indica la literatura especializada y de ensayos realizados, se determina que los mejores estimadores A, B y C, considerando  $V_c$  y  $v_s$  como variables aleatorias son:

$$A = 1.522$$

$$B = 0.937$$

$$C = 0.948$$

El coeficiente de correlación múltiple resultó 0.98 para los parámetros mencionados, la relación de valores calculados a valores medidos experimentalmente fue 1.0033, y el coeficiente de variación 0.05, por lo que la expresión que predice con mejor aproximación la resistencia a cortante de muros de concreto reforzado es:

$$V = 1.5 + 0.94 V_c + 0.95 V_s$$

Con dicha expresión,  $V_o$  se modificó ligeramente para que se obtuviera la mejor estimación de los parámetros A, B y C. La contribución básica del concreto para este caso es:

$$V_o = \left( 1.75 - 0.33 \left( \frac{M}{V_t} \right)^2 \sqrt{f'_c} \geq 0.5 \sqrt{f'_c} \right)$$

El primer término de la ecuación:

$$V = 1.5 + 0.94 V_c + 0.95 V_s$$

podría considerarse como un término no totalmente explicado; esto es, dársele diversas interpretaciones:

- Reflejar los errores humanos en la apreciación de los datos experimentales.
- Tomar en cuenta que los diversos experimentos se realizaron con distintos sistemas de carga.
- Representar un término correctivo que toma en cuenta la historia de carga del muro.
- La fricción desarrollada entre las grietas.

Que el acero de refuerzo no contribuyera en toda su capacidad,  $p_f y$ , podría explicarse en función del desarrollo del agrietamiento en el alma del muro, ya que el

refuerzo que cruza las grietas sufre flexiones inducidas por el corrimiento relativo de las superficies de concreto. Este fenómeno tiende a disminuir la capacidad a carga axial del refuerzo, reducir la adherencia con el concreto, aumentar el deterioro del muro, e incrementar la posibilidad de pandeo del refuerzo en compresión.

A pesar de que con las fórmulas anteriores se puede calcular con gran precisión la capacidad a cortante, se considera conveniente presentar una expresión más sencilla que calculará la capacidad con aproximación suficiente, por lo que se optó por la ecuación alternativa:

$$V = V_c + V_s$$

que es simplemente la suma de las contribuciones del acero y del concreto.

#### **Contribución de los elementos de confinamiento del muro.**

Al aplicar las fórmulas anteriores a muros confinados por columnas o muros transversales se observó que el esfuerzo calculado resultaba inferior al obtenido en un ensaye, si este se calculaba considerando únicamente el área del muro. Para determinar el ancho efectivo con el cual contribuyen los elementos de confinamiento, se procedió de la siguiente manera: para algunos muros se calculó la contribución del acero y del concreto con las fórmulas siguientes.

$$V_o = \left( 1.6 - 0.3 \left( \frac{M}{V_t} \right)^2 \right) \sqrt{f^*c} \geq 0.5 \sqrt{f^*c}$$

$$V_c = V_o \times \sqrt{1 + \frac{a}{V_o}} ; \quad \frac{a}{V_o} \leq 5$$

$$V_s = p f_y$$

$$V = V_c + V_s$$

y se sustrajeron estas contribuciones del esfuerzo último del muro; la diferencia de ambas cantidades era la contribución de los elementos de confinamiento. De esta manera, y de forma consistente, se determinó que el área de los elementos de confinamiento, columnas o muros transversales, que contribuye a resistir la fuerza cortante es la limitada por un ancho total igual a  $2b$ , siendo  $b$  el espesor del muro.

Cabe señalar que los esfuerzos calculados con las fórmulas anteriores se compararon con esfuerzos promedios calculados al dividir la fuerza cortante entre el área efectiva de los muros, es decir se consideró que los esfuerzos cortantes se distribuyen aproximadamente de manera uniforme en el muro. Lo anterior es justificable si se acepta que el concreto no es un material de comportamiento lineal y que la distribución de las deformaciones unitarias sobre la sección transversal de elementos peraltados ante niveles altos de fuerza cortante no es lineal. La primera suposición está fuera de toda discusión, y en lo referente a la distribución no lineal de las deformaciones unitarias se ha demostrado experimentalmente que para el caso de muros de concreto se cumple este aspecto, y que aumenta la no linealidad con el nivel de fuerza cortante.

#### **Validación del método de diseño propuesto.**

En términos generales son aceptables los valores calculados con las fórmulas propuestas con los métodos en los ensayos realizados; sin embargo, queda claro que muchos se ejecutaron con condiciones de carga muy diferentes de aquellas para las que fueron deducidas las fórmulas, sin embargo, la aproximación que se obtuvo para predecir la resistencia a cortante de muros de concreto cuando la relación de aspecto  $M/Vt$  o  $H/t$  en el caso de fuerza cortante esté concentrada a una altura  $H$  entre 2.5 y 0.25.

## Recomendaciones de diseño.

### Valor nominal de diseño de la resistencia a cortante.

Con el método propuesto para calcular la resistencia de muros de concreto con falla por cortante se tiene buena aproximación respecto a la resistencia medida experimentalmente; sin embargo, el método predice un valor medio de la resistencia, por lo que es necesario hacer ciertas modificaciones para tomar en cuenta la variabilidad de los parámetros que intervienen en las expresiones para el cálculo ( M, V, t, f'c, p, fy, etc.), y hacer que la confiabilidad sea similar a la que presentan otros elementos de concreto con falla por cortante.

En los diversos códigos nacionales ( estatales y del Distrito Federal ) se pide se cumpla la siguiente condición:

$$F_c \sum S_d \leq FR R_d$$

Donde:

Fc = factor de carga

$\sum S_d$  = efecto de las cargas con su valor nominal

FR = factor de reducción de resistencia

Rd = resistencia nominal de diseño.

En dichos reglamentos se especifican los diversos valores nominales de las cargas muertas, vivas, accidentales ( viento y sismo) que deben tomarse en cuenta para el diseño, y que tengan una probabilidad de 2% en ser excedidas. Los factores de carga consideran la importancia de la estructura y varían de acuerdo con la combinación de diversas acciones. Para diseño bajo cargas verticales se ha establecido un valor de Fc = 1.4, y para cargas verticales más accidentales Fc = 1.1. en algunas ocasiones estos factores se incrementan por diversas razones.

En el caso de la resistencia nominal, los reglamentos especifican en sus secciones respectivas los procedimientos a seguir para obtenerla y se indica que para casos no cubiertos, como el de muros de concreto con falla por cortante, la resistencia de diseño ( su valor nominal multiplicado por el factor de reducción FR ), se determine por métodos analíticos o experimentales.

Se propone calcular la resistencia a cortante como:

- Resistencia básica del concreto a cortante.

$$V_o = \left( 1.6 - 0.3 \left( \frac{M}{V_t} \right)^2 \right) \sqrt{f'_c} \geq 0.5 \sqrt{f'_c}$$

- Contribución del concreto tomando en cuenta el esfuerzo axial.

$$V_c = V_o \times \sqrt{1 + \frac{\alpha}{V_o}} ; \quad \frac{\alpha}{V_o} \leq 5$$

- Contribución del acero de refuerzo.

$$V_s = p f_y$$

- Resistencia a cortante.

$$V_u = 0.85 ( V_c + V_s )$$

- Resistencia de diseño a cortante.

$$V_u = FR V'_u ; \quad FR = 0.80$$

Donde:

M = momento flexionante, en kg. - cm.

$V$  = fuerza cortante, en kg.

$t$  = longitud total del muro, en cm.

$$f'c = 0.8 f_c$$

$f_c$  = resistencia del concreto a compresión, en  $\text{kg/cm}^2$

$p$  = porcentaje de refuerzo en el alma del muro.

$f_y$  = esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo en el alma del muro.

$FR$  = factor de reducción de resistencia.

### **Recomendaciones constructivas.**

Se considera como una recomendación adicional a las que se emplean en la práctica usual la referente a la unión entre muros transversales.

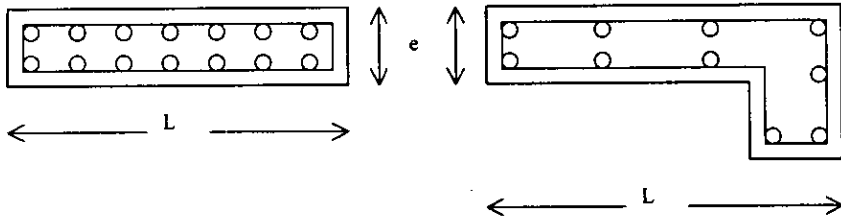
Anteriormente se mencionó que ocurriría la separación entre ellos si no se colocaba refuerzo suficiente que lo evitara, se observó en los ensayos que si se aplicaba refuerzo adicional en forma de bastones tal que la separación de éste en la unión no fuera mayor que el ancho del muro más delgado de los que se cruzan, la separación no ocurriría y los muros trabajarían en conjunto. También es conveniente recordar que el refuerzo vertical y horizontal en el alma del muro no deben ser muy diferentes; se aconseja que la cuantía de refuerzo en una dirección no sea mayor que el doble de la otra.

### **Muros sujetos a cargas verticales.**

Este tipo de muros están sometidos a compresión en virtud de la acción de las cargas, principalmente verticales, que actúan en el plano del muro. En esencia estos elementos estructurales no son más que columnas de sección rectangular, o incluso en L como es el caso de las secciones representadas en la **figura 6.3** Su amplio desarrollo en una de sus dos dimensiones horizontales, permite absorber con comodidad los esfuerzos



horizontales contenidos en su plano, esfuerzos que en general, son secundarios frente a la carga gravitatoria de las cargas soportadas.



**Figura 6.3** Secciones de muros cargados verticalmente.

**Condiciones para dimensionamiento.**

Considerando aisladamente, el muro de carga funciona y se deforma como una columna, por lo tanto se deben dimensionar por flexocompresión teniendo en cuenta las siguientes disposiciones.

En tableros cuyos bordes verticales posean suficiente restricción, la longitud efectiva de pandeo,  $H'$  se calculará como sigue:

$H' = H$	si $H/L \leq 0.35$
$H' = (1.3 - 0.85 H/L) H$	si $0.35 < H/L < 0.8$
$H' = L/2$	si $H/L \geq 0.8$

Donde:

H = es la altura del muro

L = es la longitud horizontal del tablero.

Se entiende por tablero una porción de muro limitada por elementos estructurales verticales capaces de dar restricción lateral, o todo el muro si solo hay dichos elementos

en los bordes del muro. Se considera suficiente restricción lateral la presencia de elementos estructurales ligados al tablero en sus bordes verticales, siempre que su dimensión perpendicular al plano del muro no sea menor que dos y media veces el espesor del mismo.

En muros de uno o varios tableros cuyos bordes no tienen suficiente restricción,  $H'$  se tomará igual a  $H$  si  $H/L$  es menor que o igual que 0.35, e igual a:

$$0.215 \left( \frac{H}{L} + 4.3 \right) H \leq 2H \quad L = \text{es la longitud horizontal del muro.}$$

si  $H/L$  es mayor que 0.35

Si las cargas son concentradas, se tomará como ancho efectivo una longitud igual a la de contacto más cuatro veces el espesor del muro, pero no mayor que la distancia centro a centro entre cargas.

### Refuerzo mínimo.

En toda dirección en que la dimensión de un elemento estructural sea mayor que 1.50 m., el refuerzo que se suministre no será menor que:

$$as = \frac{660 \times X1}{fy(X1 + 100)}$$

Donde:

$as$  = área transversal de refuerzo colocado en la dirección que se considera, por unidad de ancho de la pieza ( $\text{cm}^2/\text{cm}$ ). El ancho mencionado se mide perpendicularmente a dicha dirección y a  $X1$ .

$X1$  = dimensión mínima del miembro medida perpendicularmente al refuerzo (cm.)

Si  $X1$  no excede de 15 cm., el refuerzo puede colocarse en una sola capa. Si  $X1$  es mayor de 15 cm., el refuerzo se colocará en dos capas próximas a la cara del elemento.

Si la resultante de la carga vertical de diseño queda dentro del tercio medio del espesor del muro y, además, su magnitud no excede de  $0.25 f'c A_g$ , el refuerzo mínimo vertical del muro será el indicado en el refuerzo mínimo, sin que sea necesario restringirlo contra pandeo; si no se cumple alguna de las condiciones anteriores, el refuerzo vertical mínimo será:

- La relación entre el área de refuerzo vertical y el área total de la sección no será menor que  $20 / f_y$  ( $f_y$  en  $\text{kg/cm}^2$ ) ni mayor que 0.06 y habrá que restringirlo contra pandeo mediante grapas.
- El refuerzo mínimo horizontal será el que se pide como refuerzo mínimo anteriormente mencionado.

### **Muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano.**

El propósito de estos elementos es resistir el empuje de un volumen de tierra u otro material. El muro en voladizo es el que se construye de concreto reforzado, utiliza el peso de la tierra para resistir la tendencia a volteo que se presenta en el borde exterior y la losa vertical, apoyada en su base horizontal funciona como una viga en voladizo que resiste el empuje de tierras.

La estabilidad de un muro de contención debe revisarse con respecto a las tendencias a:

- Deslizarse en su base.
- Girar sobre su borde exterior.
- Romperse o asentarse de manera desigual en el borde exterior.

El procedimiento de diseño consiste en suponer las dimensiones y materiales del muro, revisando después su estabilidad respecto a las posibles fallas mencionadas anteriormente. Una vez que se han establecido las dimensiones aceptables, se revisan

los elementos estructurales, o sea la base y la losa vertical, con respecto a los esfuerzos unitarios en el concreto y el refuerzo, haciendo las modificaciones necesarias.

Por consideraciones prácticas, se requiere que en la parte inferior del muro quede situada por debajo de la línea de congelación del terreno; también es necesario suministrar agujeros de drenaje a intervalos regulares, para permitir la salida del agua.

### Presión de tierras.

Las fuerzas principales a considerar en el diseño de un muro de contención son, primero, el peso del muro y segundo, el empuje que ejerce la presión de la tierra confinada. El peso del muro puede calcularse con exactitud si se conocen sus dimensiones, sin embargo, el empuje de tierras depende de varios factores. Cuando la tierra suelta se deposita sobre un plano horizontal, forma un montículo, el ángulo entre la horizontal y el lado del montículo se conoce como ángulo de reposo del material y los diferentes materiales pueden tener distintos ángulos de reposo; para relleno de tierra común éste ángulo se considera cercano a los 33.5° lo cual corresponde a una pendiente de 1.5 a 1.

Cuando la superficie del terreno confinado es horizontal, como se muestra en la **figura 6.4 a**, la presión de tierras puede determinarse por medio de la fórmula:

$$P = 0.286 \left( \frac{wh^2}{2} \right)$$

Donde:

P = magnitud de la presión, en kg. por metro lineal de muro

w = peso del material confinado, en kg/m<sup>3</sup>

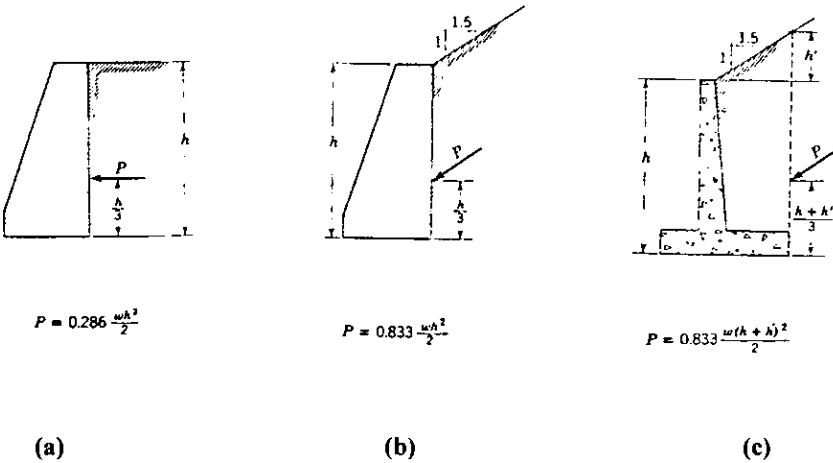
h = altura de la columna de material, en m.

Cuando el muro debe soportar una sobrecarga, o sea una pendiente de material por encima de la parte superior del muro, la presión se calculará con la siguiente ecuación:

$$P = 0.833 \left( \frac{wh^2}{2} \right)$$

Esto se muestra en la **figura 6.4 b**

Para identificar una fuerza es necesario conocer tres de sus elementos: magnitud, dirección y línea de acción; la magnitud de los empujes puede establecerse mediante las dos fórmulas anteriores, su dirección es hacia el muro, según se indica con las flechas y, para los dos casos ilustrados en las figuras anteriores, la línea de acción del empuje cruza el muro en un punto situado a  $h/3$ , medido desde la parte inferior del volumen de tierra confinada. Para muros en voladizo o con contrafuertes que soportan una sobrecarga, la línea de acción cruza por un punto situado a una tercera parte de la altura del plano que pasa por el borde interior de la base ( ver **figura 6.4 c** ). En cualquiera de los tres casos anteriores, se supone que la línea de acción del empuje es paralela a la superficie superior del material confinado.



**Figura 6.4**

## Consideraciones para dimensionamiento.

Las disposiciones se aplican a muros cuya principal función sea resistir fuerzas horizontales en su plano, sin cargas verticales de consideración, con relación  $L/t$  no mayor de 70 ( $L$  = longitud horizontal del muro,  $t$  = espesor del muro.) Si actúan cargas verticales importantes, la relación  $L/t$  debe limitarse a 40 y se aplicará lo dispuesto para muros sometidos a cargas verticales. El espesor de estos muros no será menor que 13 cm.; tampoco será menor que 0.06 veces la altura no restringida lateralmente, a menos que se realice un análisis de pandeo lateral de los bordes del muro; o se les suministre restricción lateral. En construcciones de no más de dos niveles, con altura de entrepiso no mayor que 3.0 m., el espesor de los muros puede ser de 10 cm.

La resistencia de muros a flexión en su plano puede calcularse con la ecuación siguiente:

$$MR = FR A_s f_y z$$

Donde:

$z$  = brazo del par interno.

Si la carga vertical de diseño,  $P_u$  no es mayor que  $0.2 FR t L f'_c$  y la cuantía de acero a tensión  $A_s/t d$ , no excede de 0.008 ( $d$  es el peralte efectivo del muro en la dirección de la flexión) El brazo  $z$  se obtendrá con el siguiente criterio:

$Z = 0.8 L$	si	$H/L \geq 1.0$
$Z = 0.4 (1 + H/L) L$	si	$0.5 < H/L < 0.8$
$H' = 1.2 H$	si	$H/L \leq 0.5$

Donde:

$H$  = altura del muro

$L$  = longitud del muro

El área de acero a tensión no será menor que:

$$A_s \text{ m\u00edn.} = \frac{0.7 \sqrt{f_c}}{f_y} \times bd$$

Donde:

b = ancho del muro.

d = peralte efectivo

En muros con relaci\u00f3n H/L no mayor que 1.2, el refuerzo para flexi\u00f3n o flexocompresi\u00f3n que se calcule en la secci\u00f3n de momento m\u00e1ximo se prolongar\u00e1 recto y sin reducci\u00f3n en toda la altura del muro, distribuido en los extremos de \u00e9ste en anchos iguales a  $(0.25 - 0.1 H/L) L$ , medidos desde el borde correspondiente, pero no mayor cada uno que  $0.4H$ .

Si la relaci\u00f3n H/L es mayor que 1.2, el refuerzo para flexi\u00f3n o flexocompresi\u00f3n se colocar\u00e1 en los extremos del muro en anchos iguales a  $0.15L$  medidos desde el borde correspondiente. Arriba del nivel  $1.2L$  este refuerzo puede variar de acuerdo con los diagramas de momentos y compresiones respetando las disposiciones de anclaje.

Deben suministrarse elementos de refuerzo en las orillas de los muros y diafragmas estructurales donde el esfuerzo de compresi\u00f3n en la fibra m\u00e1s esforzada exceda de  $0.2f_c$  bajo cargas de dise\u00f1o incluyendo el sismo; tambi\u00e9n se contar\u00e1 con \u00e9ste refuerzo en los bordes de aberturas en muros donde se exceda el l\u00edmite anterior para el esfuerzo de compresi\u00f3n. Los elementos de refuerzo pueden interrumpirse en las zonas donde el m\u00e1ximo esfuerzo de compresi\u00f3n calculado sea menor que  $0.15 f_c$ . Los esfuerzos se calcular\u00e1n con las cargas de dise\u00f1o, usando un modelo el\u00e1stico lineal y las propiedades de secciones brutas.

Los elementos extremos a que se est\u00e1 refiriendo contar\u00e1n a todo lo largo, con el refuerzo transversal que se especifica para columnas en elementos sujetos a flexocompresi\u00f3n.

Un elemento extremo de un muro estructural se dimensionará como columna corta para que resista, como carga axial, la fuerza de compresión que le corresponda, calculada en la base del muro cuando sobre éste actúe el máximo momento de volteo causado por las fuerzas laterales y las cargas debidas a la gravedad, incluyendo el peso propio y las que le transmita el resto de la estructura. Se deberán incluir los factores de carga y de resistencia que correspondan.

El refuerzo transversal de muros que tengan elementos extremos debe anclarse en los núcleos confinados de estos elementos, de manera que pueda alcanzar su esfuerzo de fluencia.

La fuerza cortante VCR, que toma el concreto en muros sujetos a fuerzas horizontales en su plano se determinará con el criterio siguiente:

Si la relación de altura a lo largo horizontal H/L, del muro no excede de 1.5, se aplicará la expresión:

$$VCR = 0.85 FR \sqrt{f^*c} t L$$

Si H/L es igual a 2 o mayor, se aplicarán las siguientes expresiones

$$VCR = FR t d (0.2 + 30p) \sqrt{f^*c} \quad \text{si } p < 0.01$$

$$VCR = 0.5 FR t d \sqrt{f^*c} \quad \text{si } p \geq 0.01$$

Para valuar VCR, el peralte efectivo del muro se tomará igual a 0.8L, cuando H/L este comprendido entre 1.5 y 2.0 puede interpolarse linealmente.

El refuerzo necesario por fuerza cortante se determinará con el criterio siguiente:

La cuantía de acero para refuerzo horizontal, ph, se calculará con la expresión:



$$\frac{V_u - V_{CR}}{FR f_y d t}$$

y la de refuerzo vertical,  $p_v$ , con:

$$0.0025 + 0.5 ( 2.5 - H/L ) ( p_h - 0.0025 )$$

$$p_h = \frac{A_{vh}}{S_{ht}} , \quad p_v = \frac{A_{vv}}{S_{vt}}$$

Donde:

$S_h$  y  $S_v$  = separaciones de los refuerzos horizontal y vertical, respectivamente

$A_{vh}$  = área de refuerzo horizontal comprendida en una distancia  $S_h$

$A_{vv}$  = área de refuerzo vertical comprendida en una distancia  $S_v$

$H$  = altura del muro.

$L$  = longitud total del muro.

No es necesario que la cuantía de refuerzo vertical por fuerza cortante sea mayor que la de refuerzo horizontal. Si la relación  $H/L$  no excede de 2.0, la cuantía de refuerzo vertical no debe ser menor que la de refuerzo horizontal.

Las barras verticales deben estar ancladas de modo que en la sección de la base del muro sean capaces de alcanzar su esfuerzo de fluencia.

Para refuerzo mínimo las cuantías de refuerzo horizontal y vertical en cada dirección no serán menores de 0.0025. El refuerzo se colocará uniformemente distribuido con separación no mayor de 35 cm. Se pondrá en dos capas, cada una próxima a una cara del muro, cuando el espesor de éste exceda de 15 cm., o el esfuerzo cortante medio debido a las cargas horizontales de diseño sea mayor que  $0.6 \sqrt{f'_c}$ ; en caso contrario, se podrá colocar en una capa a medio espesor.

Limitación para  $V_u$ , en ningún caso se admitirá que la fuerza cortante de diseño,  $V_u$  sea mayor que

$$2 FR L t \sqrt{f'_c}$$

## CAPITULO VI

### LOSAS.

#### Introducción

Las losas son elementos estructurales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su peralte. Las acciones principales sobre las losas son cargas normales a su plano, ya que se usan para disponer de superficies útiles horizontales como los pisos de edificios o las cubiertas de los puentes.

#### Losas en una dirección.

Las losas en una dirección son tableros de piso estructurales de concreto que están apoyadas sobre vigas o muros paralelos en dos de sus lados quedando libres los otros dos, como se muestra en la figura 5.1

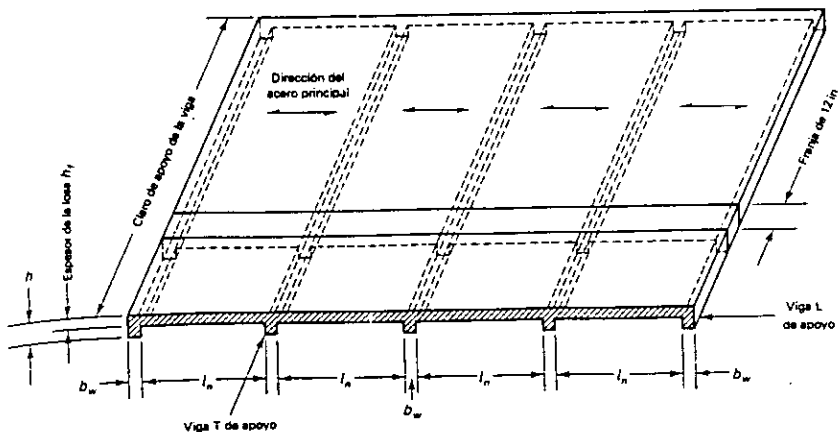
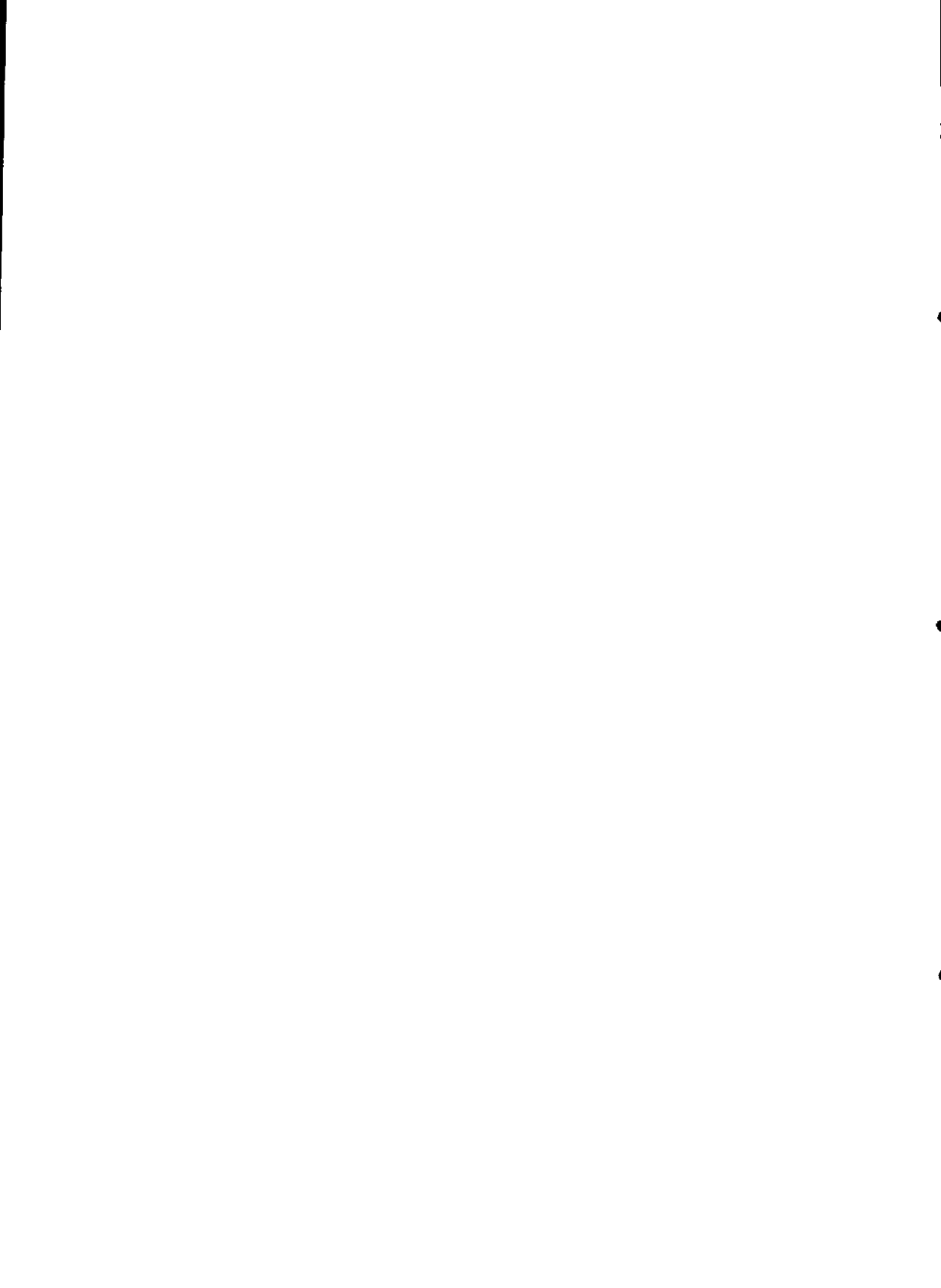
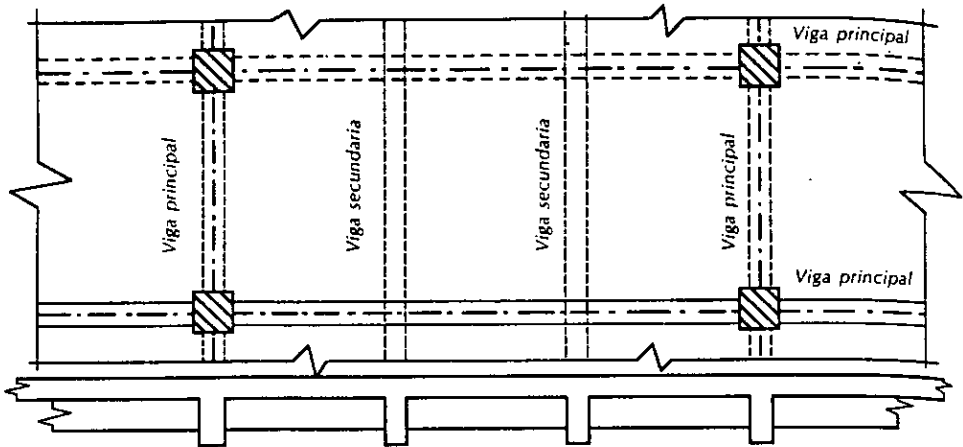


Figura 5.1 Vista isométrica de un sistema de losa en una dirección de cuatro claros continuos.



En la **figura 5.2** se muestra un sistema de piso usado frecuentemente cuando los marcos de un edificio forman tableros de losa de dimensiones relativamente grandes. Se suele en estos casos colocar vigas secundarias en la dirección corta del tablero, de tal manera que se forman varios tableros de losa más pequeños.

Cuando la relación entre el lado largo y el lado corto de estos tableros es mayor que dos, las losas se pueden diseñar como losas en una dirección, aunque estén apoyadas en realidad en sus otros lados, ya que, trabajan en forma similar a las losas, mostradas en la **figura 5.1**



**Figura 5.2** Sistema de piso con vigas secundarias.

#### Comportamiento y dimensionamiento.

Las losas en una dirección se comportan esencialmente como vigas. Puede considerarse que la losa es una viga cuyo ancho es la longitud del apoyo (**figura 5.3**), o bien, como se hace más frecuente, puede suponerse que la losa está formada por una serie de vigas

paralelas e independientes de un metro de ancho, como se muestra en la misma figura, que se flexionan uniformemente.

- Momentos flexionantes.

El diseño de estas losas es, por consiguiente, similar al de vigas, con algunas características que son las siguientes. Se recomienda iniciar el diseño fijando un valor del peralte que garantice que no ocurran deflexiones excesivas, ya que esto es el factor que sucede regir en el diseño. Es válido considerar los espesores de losa con los que no se exceden las deflexiones permisibles que recomienda el reglamento ACI, o bien puede fijarse un espesor tentativo y calcular las deflexiones.

Una vez determinado el espesor total de la losa, se calcula el peralte efectivo restando el recubrimiento del espesor. Las NTC recomiendan un recubrimiento libre de 1.5 cm. o el diámetro de la barra, el valor que sea mayor.

El cálculo de los momentos flexionantes y de las fuerzas cortantes puede realizarse después, considerando que la losa es una viga continua de un metro de ancho con carga uniforme. Puede usarse cualquier método de análisis elástico o bien los coeficientes que se presentan en los manuales de diseño. Si se hace un análisis formal, el claro  $L$ , es igual que las vigas, se cuenta a partir del centro de los apoyos, excepto el ancho de éstos es mayor que el peralte efectivo, en este caso, el claro se cuenta a partir de la sección que se halla a medio peralte efectivo del paño interior de los apoyos.

Debe notarse que el método de calcular los momentos flexionantes y fuerzas cortantes considerando franjas de losa de un metro de ancho es conservador, ya que no puede por lo general deformarse libremente en dirección perpendicular a las franjas, se desarrollan esfuerzos de compresión normales a las franjas que aumentan ligeramente la resistencia en la dirección considerada.

- Acero de refuerzo.

Una vez determinado el peralte efectivo,  $d$  y los momentos flexionantes, se calcula el refuerzo necesario con las ecuaciones de flexión en vigas. Generalmente, las losas son elementos sub reforzados, por lo que se pueden aplicar las ecuaciones correspondientes a este tipo de elementos previa comprobación de que las relaciones de refuerzo,  $p$ , resulten menores que la relación balanceada,  $p_b$ . El refuerzo obtenido se coloca en dirección paralela a las franjas, o sea, en la dirección del claro considerado. En dirección perpendicular es necesario colocar también refuerzo para resistir los esfuerzos producidos por contracción del concreto y por cambios de temperatura, y por la falta de uniformidad de la carga.

Ya que la losa no puede acortarse libremente en dirección perpendicular al claro, se agrietaría si no se colocase este último refuerzo. Tanto el refuerzo por flexión como el de contracción y cambios de temperatura, deben satisfacer ciertos requisitos de cuantía y separación que se mencionan a continuación.

Las NTC especifican que el refuerzo por flexión sea el mínimo recomendado para vigas, o sea :

$$A_s \text{ mín.} = \frac{0.7 \sqrt{f_c}}{f_y} b d$$

El ancho  $b$  se considera 100 cm. y el área obtenida de esta manera es la necesaria para una franja de un metro de ancho.

La separación del refuerzo no debe ser superior a la especificada para el refuerzo por contracción y temperatura. Para este refuerzo las NTC - 96 recomiendan la misma área mínima que para otros elementos estructurales que tengan una dimensión mínima de 1.50 m. La ecuación correspondiente para una franja de un metro de ancho es la siguiente:

$$A_s \text{ contr.} = \frac{66000 h}{f_y (h + 100)}$$

Donde

h es el espesor de losa.

El área que se obtiene con esta ecuación es también la necesaria para una franja de un metro de ancho y es aplicable a losas no expuestas directamente a la intemperie. Si no se cumple con esta condición, el valor calculado con la ecuación anterior debe multiplicarse por 1.5. La separación entre barras no debe exceder de 50 cm. ni de 3.5h.

Las NTC permiten calcular el refuerzo por contracción y temperatura en forma simplificada usando una relación de refuerzo,  $p$ , de 0.002 para losas no expuestas a la intemperie y de 0.003 para el caso en que sí lo estén.

En el dimensionamiento de losas es frecuente calcular el área de acero por metro de losa, después elegir el diámetro de la barra, y por último, calcular la separación entre barras. Este último valor calculado puede hacerse en forma rápida con la siguiente ecuación:

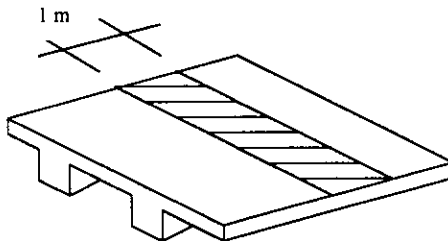
$$S = \frac{100 \times A_b}{A_s}$$

Donde S es la separación entre barras,  $A_b$ , el área de cada barra y  $A_s$  el área por metro de ancho de losa.

El refuerzo por flexión debe detallarse de tal manera que se satisfagan los requerimientos de acero en las secciones de momento negativo y positivo y, además, que se cumplan los requisitos de longitud de desarrollo. Es difícil ajustarse a las necesidades teóricas de refuerzo en todas las secciones de una losa. En la práctica se ha de buscar que las separaciones sean lo más cercanas a los valores teóricos, pero al mismo tiempo conviene modularlas para obtener distribuciones regulares y armados sencillo que simplifiquen la construcción y la supervisión. También puede aprovecharse



la posibilidad de redistribución de momentos que permitan los reglamentos y que consiste en reducir los momentos negativos y aumentar los positivos en cantidades limitadas y siempre que se conserve el momento estático total.



**Figura 5.3** Franja de losa que trabaja como viga de un metro de ancho.

En la **figura 5.4** se muestran algunas recomendaciones típicas para la colocación del refuerzo por flexión. Estas recomendaciones son válidas cuando los claros y las condiciones de carga en cada claro son semejantes. En caso contrario, los dobleces y cortes de barras deben hacerse con la ayuda de un diagrama de momentos. El acero por contracción y temperatura, no mostrada en la figura, se coloca en forma de barras rectas en el lecho inferior de la losa por encima del refuerzo por flexión.



estos tableros es mayor que dos, se puede considerar que la losa trabaja en una sola dirección que es del lado corto.

Como datos se tiene que la carga viva de servicio, o sea, sin factor de carga, es de  $500 \text{ kg/m}^2$  y que la carga muerta es de  $150 \text{ kg/m}^2$ . Para calcular el espesor,  $h$ , el cual se requiere para estimar el peso propio y posteriormente para calcular el área de acero por flexión se usó la tabla del reglamento ACI para peraltes totales mínimos de vigas y losas que trabajan en una dirección cuando no se calculan las deflexiones y cuando las deformaciones de dichos elementos no perjudican a elementos no estructurales. Para este fin, considerando los claros como más desfavorables, ya que tienen un apoyo continuo y otro no. El valor que corresponde a este caso es de  $L/24$ . De acuerdo a las NTC como el ancho de las vigas de apoyo es mayor que el peralte efectivo, fue necesario hacer tanteos respecto al peralte para determinar el claro efectivo.

El factor de carga usado fue de 1.4, que es el que señala el reglamento del Distrito Federal. A continuación se calcularon las cargas de diseño multiplicando las cargas de servicio por el factor de carga.

Para calcular el área de acero por flexión se ordenaron los cálculos en forma de tabla. En el primer renglón, se anotaron los coeficientes del factor  $W_u L_n^2$  tomados de la tabla de momentos flexionantes y fuerzas cortantes del reglamento ACI. El factor  $1/24$  corresponde al momento negativo en los apoyos cuando es claro es menor de  $3.05\text{m}$ ;  $1/14$ , a momento positivo en el extremo, considerando que la losa está restringida por la viga de borde del eje A, y  $1/16$ , a momento positivo en claros interiores.

A partir de los coeficientes, se calcularon los momentos flexionantes multiplicando los coeficientes por  $W_u L_n^2$ .

En el renglón 3 se calcularon los valores de  $M_u / \Phi b d^2 f_c$  considerando para  $\Phi$  un valor de 0.9



Materiales :

Concreto  $f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$

Acero  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Carga de diseño:

$W_u = 1.4 ( 500 + 264 + 150 ) = 1280 \text{ kg/m}^2$

$W_u L_n^2 = 1.28 \times 2.7^2 = 9.33 \text{ ton}\cdot\text{m}$ .

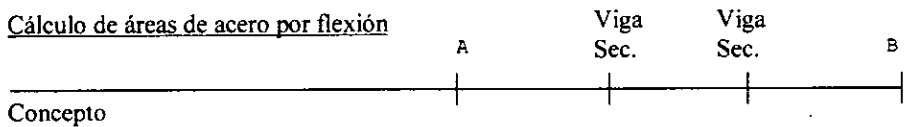
Cálculo del espesor:

$h = L / 24$

$L_n = 300 - 30 = 270$

$h = 270 / 24 = 11.0 \text{ cm}$

Cálculo de áreas de acero por flexión



1. Coeficiente de momento

Negativo	1/24	1/12	1/12	1/12
Positivo		1/14	1/16	1/16

2. Momentos ( ton.m)

Negativos	0.388	0.777	0.777	0.777
Positivos		0.666	0.583	0.583

3.  $M_u / \phi b d^2 f_c$

Negativos	0.044	0.088	0.088	0.088
Positivos		0.075	0.066	0.066

4. W ( gráfica de diseño por flexión.)				
Negativos	0.06	0.10	0.10	0.10
Positivos		0.09	0.092	0.092
5. $p = w f'c / f_y$	.0019	.0032	.0032	.0032
Negativos		.0029		
Positivos			.0029	.0029
6. $A_s = p b d$ (cm <sup>2</sup> /m)				
Negativos	1.62	2.72	2.72	2.72
Positivos		2.47	2.47	2.47
7. $S = 100 A_b / A_s$				
Negativos	30.25	18.01	18.01	18.01
Positivos		19.83	19.83	19.83

Acero por temperatura y contracción.

$$p = 0.0020, \quad A_s = p b d = .0020 \times 100 \times 8.5 = 1.7 \text{ cm}^2/\text{m}.$$

$$S = 100 A_b / A_s = 100 \times .49 / 1.7 = 28.8 \text{ cm}.$$

Revisión por cortante.

$$V_u = 1.15 W_u L_n / 2$$

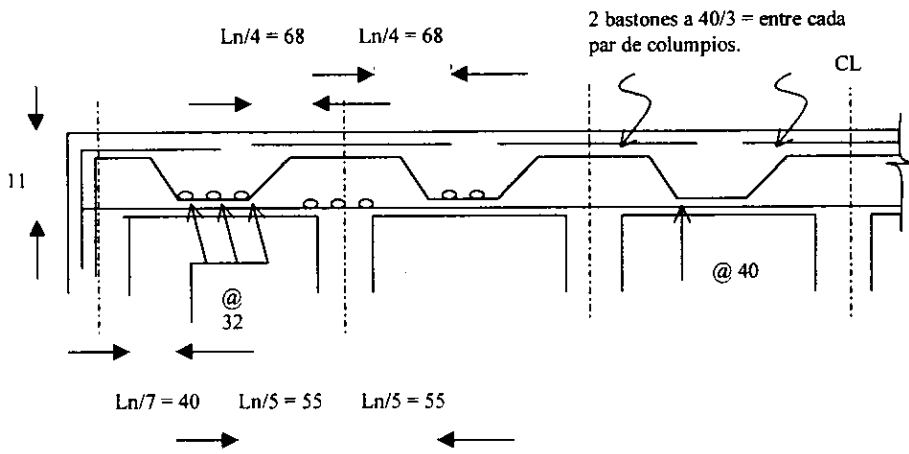
$$V_u = 1.15 \times 1280 \times 2.70 / 2 = 1987 \text{ kg}.$$

$$V_c = 0.5 \sqrt{f'c} b d = 0.5 \sqrt{160} \times 100 \times 8.5 = 5376 \text{ kg}.$$

$$FR V_c = 0.8 \times 5376 = 4300 \text{ kg}$$

$$V_u < V_c$$

Croquis de armado.



Barras No. 2.5

Recubrimiento libre = 2 cm.

## **Cargas concentradas.**

En ocasiones, además de la carga distribuida debida al peso propio y a la carga viva, actúan cargas concentradas sobre la losa. Esto es común en el caso de puentes o de pisos que soportan maquinaria, tanques o cargas similares.

Para diseñar losas en una dirección con cargas concentradas se presentan dos métodos. El primero es el que se conoce como método del ancho efectivo. Se basa en la hipótesis de suponer que la carga es resistida por una franja de losa de ancho efectivo,  $b_e$ , simétrica respecto a la carga, como se muestra en la **figura 5.5**. El ancho efectivo depende de las dimensiones de la placa de carga o área que ocupa la carga concentrada, de su posición dentro de la losa y de las condiciones de apoyo de la losa. Una vez determinado  $b_e$ , como se indica a continuación, se diseña la franja de la losa como si fuera una viga de ancho  $b_e$  y peralte  $d$ . El refuerzo necesario se adiciona al que se requiera por carga distribuida, verificando que con el acero total la losa será siendo subreforzada.

**Figura 5.5** Método del ancho efectivo para losas con cargas concentradas.



En la determinación del ancho efectivo,  $b_e$ , se distinguen tres casos:

- Si la carga actúa en el centro geométrico de la losa

$$b_e = \frac{b_o + \beta \ell_y}{\ell_x + \beta \ell_y} \ell_x \quad \text{para } \ell_x \leq 3\beta \ell_y$$

$$b_e = \frac{3}{4}(b_o + \beta \ell_y) \quad \text{para } \ell_x > 3\beta \ell_y$$

- Si la carga actúa a igual distancia de los apoyos, pero descentrada con respecto a los bordes libres, el ancho efectivo tendrá el menor de los siguientes valores.

El corresponde al caso a)

El dado por las expresiones:

$$b_e = \frac{b_o + \frac{1}{3}\beta \ell_y}{\ell_x + \frac{1}{3}\beta \ell_y} \ell_x + e \quad \text{para } \ell_x \leq \beta \ell_y$$

$$b_e = \frac{3}{4}\left(b_o + \frac{1}{3}\beta \ell_y\right) + e \quad \text{para } \ell_x > \beta \ell_y$$

- Si la carga actúa descentrada respecto a los bordes libres y a diferente distancia de los apoyos, el ancho efectivo tendrá el valor

$$b_e = (b_e' - b_o) \left(1 - 2 \frac{Y_o}{\ell_y}\right)^2$$

Siendo  $b_e'$  el ancho efectivo correspondiente al caso anterior y  $Y_o$  la distancia del centro teórico de aplicación de la carga al apoyo más próximo.

El factor  $\beta$  que aparece en las ecuaciones anteriores depende de las condiciones de apoyo de la losa. Si están libremente apoyadas, se toma igual a 1, si están empotradas vale  $\frac{1}{2}$ ; y en casos intermedios vale  $\frac{2}{3}$ .

El segundo método para diseñar losas con cargas concentradas está basado en la teoría de las líneas de influencia. Este método que se presenta en las NTC - 87 del reglamento del Distrito Federal, consiste en incrementar la suma de los momentos resistentes de la losa, por unidad de ancho, positivos y negativos, en las dos direcciones y en todo punto del tablero, en la cantidad

$$\frac{P}{2\pi} \left( 1 - \frac{2}{3} \times \frac{r}{R} \right)$$

Donde P es la carga concentrada; r es el radio del círculo de igual área a la aplicación de la carga; y R, la distancia del centro de la carga al borde más próximo a ella. El método no especifica en qué cantidad se incrementan los momentos negativos y en qué cantidad los positivos, sino que basta con que la suma de ambos se incremente en la cantidad indicada por la ecuación anterior. Sin embargo, es conveniente distribuir el incremento total en proporción aproximada a los momentos negativos y positivos obtenidos por carga distribuida. Obsérvese que en dirección paralela a los apoyos también debe colocarse refuerzo para incrementar los momentos, el cual será adicional al de contracción y temperatura.

Es importante notar que en este método el incremento en la suma de los momentos positivo y negativo debe hacerse en todos los puntos de la losa a los que llega la influencia de la carga concentrada. Esto se debe a que se trata de evitar la formación de un mecanismo de colapso en forma de cono alrededor de la carga concentrada con líneas de influencia radiales en la parte inferior de la losa ( momento positivo ) y una línea de influencia circular en la parte superior ( momento negativo ).

Este segundo método se aplica a las losas que trabajan en una dirección, con relación ancho a claro no menor que  $\pi/2$ , cuando la distancia de la carga a un borde libre no es menor que la mitad del claro.

No es necesario incrementar los momentos resistentes en un ancho de losa mayor que  $1.5l$  centrado con respecto a la carga, siendo  $l$ , el claro de la losa.

Los dos métodos presentados se refieren al diseño por flexión de las losas. También debe revisarse que no ocurra una falla en cortante por penetración de la carga concentrada, en forma similar a la que ocurre en el caso de losas apoyadas directamente sobre columnas.

#### **Ejemplo de diseño de una losa con carga distribuida y carga concentrada.**

La losa tiene una carga viva distribuida uniformemente de  $300 \text{ kg/cm}^2$  y una carga concentrada de  $8000 \text{ kg.}$ , ambas a nivel de servicio. La losa forma parte de una serie continua de tramos iguales y sólo se diseñará el tramo con carga concentrada usando el método de las NTC del RCDDF.

Para calcular el espesor,  $h$ , se utilizó la tabla de peraltes totales mínimos de vigas y losas que trabajan en una dirección cuando no se calculan las deflexiones y cuando las deformaciones de dichos elementos no perjudican a elementos no estructurales. Como el ancho de las vigas de apoyo es menor que el peralte efectivo, fue necesario hacer dos tanteos respecto al peralte para determinar el claro efectivo, ya que éste es igual al claro libre más medio peralte efectivo de cada lado.

El cálculo de los momentos producidos por la carga distribuida se efectuó con los coeficientes de momentos flexionantes del reglamento ACI. La suma de los momentos negativo y positivo causados por la carga concentrada, en cada dirección, por unidad de ancho, se calculó con la ecuación anteriormente mostrada. El valor de  $r$  se obtuvo

igualando el área de un círculo, con el área que ocupa la carga concentrada, que en este ejemplo es de  $1 \text{ m}^2$ .

La suma de momentos negativo y positivo debido a la carga concentrada se distribuyó en momento negativo y positivo proporcionalmente al valor de estos momentos bajo condición de carga distribuida, aunque pudo usarse cualquier otra distribución razonable. Sumando los momentos por carga distribuida y por carga concentrada se obtuvieron los momentos totales de 2892 y 1988 kg. – m.

Se procedió a dividir la losa en las cuatro franjas mostradas en el croquis del ejemplo para fines de proporcionar las áreas de acero correspondientes. Es importante mencionar que las NTC señalan que el peralte efectivo debe reducirse a 2 cm. para el cálculo del refuerzo de lecho superior en losas de espesor mínimo o igual a 20 cm., a menos que se tomen precauciones especiales para garantizar que las dimensiones de cálculo no variarán durante la construcción. En este ejemplo se supuso que se tomarán estas precauciones.

Al final del ejemplo se muestran los croquis de colocación del refuerzo para los tres tipos de franjas.

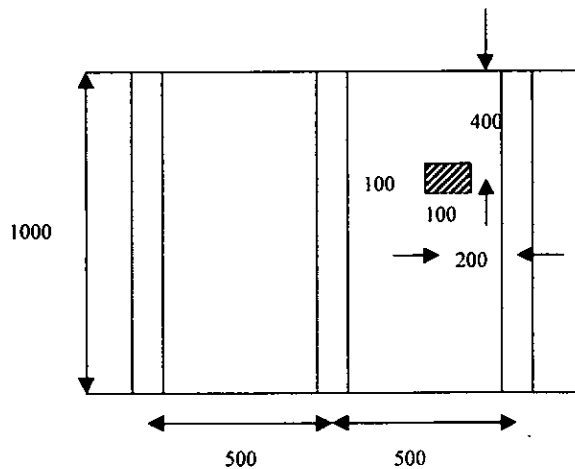
Datos:

$$W (\text{carga viva}) = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$P = 8 \text{ ton.}$$

$$F_t = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$



### Cálculo de espesor.

Primer tanteo  $d = 12$  cm.

$h = L/28$  ; recubrimiento  $r = 2$  cm.

$$L = 500 - 40 + 12 = 472 \text{ cm}$$

$$h = 472/28 = 17$$

Segundo tanteo  $d = 15$  cm.

$$L = 500 - 40 + 15 = 475 \text{ cm}$$

$$H = 475/28 = 17 - 2 = 15 \text{ cm.}$$

### Cargas :

$$W \text{ (carga viva)} = 300 \text{ kg/cm}^2$$

$$P \text{ (carga viva)} = 8000 \text{ kg.}$$

$$W \text{ (carga muerta)} = 0.17 \times 1 \times 2400 = 408 \text{ kg/m}^2$$

$$W_u \text{ total} = 1.4 ( 300 + 408 ) = 991 \text{ kg/m}^2$$

$$P_u = 1.4 \times 8000 = 11200 \text{ kg.}$$

### Momentos:

a) Por carga distribuida.

$$M(-) = \frac{W_u \times \ell^2}{11} = \frac{991 \times 4.75^2}{11} = 2033 \text{ kg} \cdot \text{m.}$$

$$M(+) = \frac{W_u \times \ell^2}{16} = \frac{991 \times 4.75^2}{16} = 1397 \text{ kg} \cdot \text{m.}$$

b) Por carga concentrada

$$M(-) + M(+) = \frac{P}{2\pi} \left( 1 - \frac{2}{3} \times \frac{r}{R} \right)$$

$$r = \sqrt{\frac{1 \times 1}{\pi}} = 0.56 \text{ m}$$

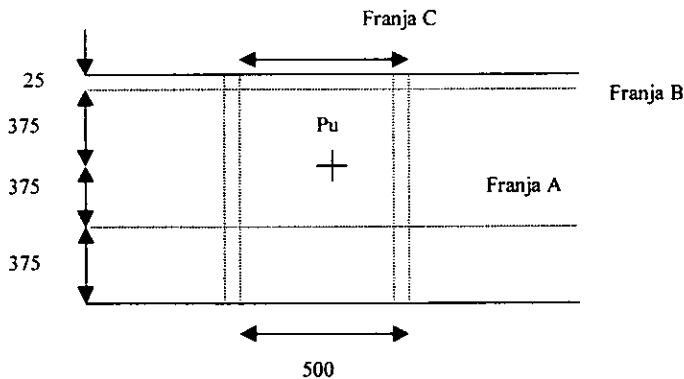
$$M(-) + M(+) = \frac{11200}{2\pi} \left( 1 - \frac{2 \times 0.56}{3 \times 2} \right) = 1450 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

c) Momentos totales

$$M(-) = 2033 + \frac{1450 \times 2033}{2033 + 1393} = 2033 + 859 = 2892 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

$$M(+) = 1397 + \frac{1450 \times 1397}{2033 + 1397} = 1397 + 591 = 1988 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Cálculo de áreas de acero.



A) Para la franja A

- Acero negativo :

$$\frac{M_u}{FR b d^2 f'c} = \frac{289200}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.105$$

de la gráfica para diseño por flexión  $w = 0.11$

$$p = \frac{w f'c}{f_y} = \frac{0.11 \times 136}{4200} = 0.0036$$

$$p_{\min} = \frac{0.7 \sqrt{f'c}}{f_y} = \frac{0.7 \times \sqrt{200}}{4200} = 0.0023$$

$p > p_{\min}$ .

$$A_s = 0.0036 \times 100 \times 15 = 5.4 \text{ cm}^2 / \text{m}.$$

$$S = \frac{100 A_b}{A_s} = \frac{71}{5.4} = 13 \text{ cm. (barras \# 3) } < S_{\max}.$$

$$A_s \text{ concentr.} = \frac{859}{2892} \times 5.4 = 1.6 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$A_s \text{ min.} = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.45 \text{ cm}^2 / \text{m}.$$

$$S \text{ concentr.} = \frac{71}{3.45} \doteq 20 \text{ cm.}$$

- Acero positivo :

$$\frac{M_u}{FR b d^2 f'c} = \frac{198800}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.072$$

de la gráfica para diseño por flexión  $w = 0.07$

$$p = \frac{w f'c}{f_y} = \frac{0.07 \times 136}{4200} = 0.0023 = p_{\min}.$$

$$A_s = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.45 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$S = 71 / 3.45 = 20 \text{ cm. (barras \# 3) } < S_{\max}.$$

$A_s \text{ concentr.} < A_s \text{ min.}$

$$S \text{ concentr.} = \text{barras no. 3 @ 20 cm.}$$

B) Para la franja B

- Acero negativo :

$$\frac{Mu}{FR b d^2 f'c} = \frac{203300}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.074$$

de la gráfica para diseño por flexión  $w = 0.075$

$$\rho = \frac{w f'c}{f_y} = \frac{0.075 \times 136}{4200} = 0.0024 > \rho \text{ min.}$$

$$A_s = 0.0024 \times 100 \times 15 = 3.6 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$S = 71 / 3.6 = 20 \text{ cm. ( barras \# 3 )} < S \text{ máx.}$$

- Acero Positivo

$$\frac{Mu}{FR b d^2 f'c} = \frac{139700}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.05$$

de la gráfica para diseño por flexión  $w = 0.05$

$$\rho = \frac{w f'c}{f_y} = \frac{0.05 \times 136}{4200} = 0.0017 > \rho \text{ min.}$$

$$A_s = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.4 \text{ cm}^2 / \text{m}$$

$$S = 71 / 3.4 = 20 \text{ cm. ( barras \# 3 )} < S \text{ máx.}$$



C) Para la franja C

- Acero positivo

As carga concentrada =  $66000 \times 17 / 4200 (17 + 100) = 2.3 \text{ cm}^2 / \text{m}$ .

$$\frac{Mu}{FR b d^2 f'c} = \frac{0.5 \times 145000}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.026$$

de la gráfica para diseño por flexión  $w = 0.03$

$$p = \frac{w f'c}{fy} = \frac{0.03 \times 136}{4200} = 0.0097$$

As carga concentrada =  $0.0097 \times 100 \times 15 = 1.45 \text{ cm}^2 / \text{m}$

As total =  $1.45 + 2.3 = 3.75 \text{ cm}^2 / \text{m}$ .

S =  $71 / 3.5 = 19 \text{ cm}$ . (barras # 3 @ 20 cm.)

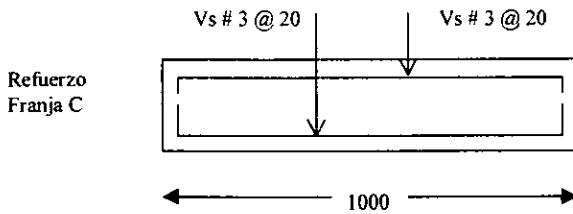
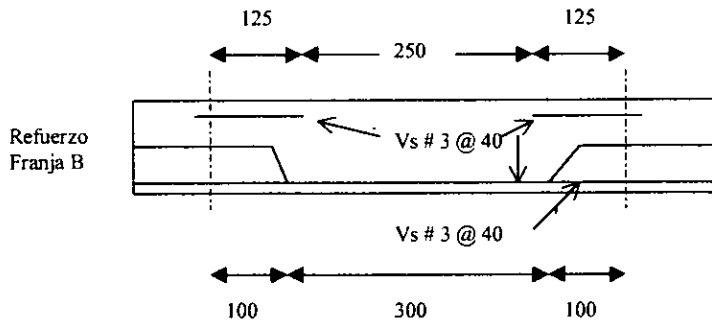
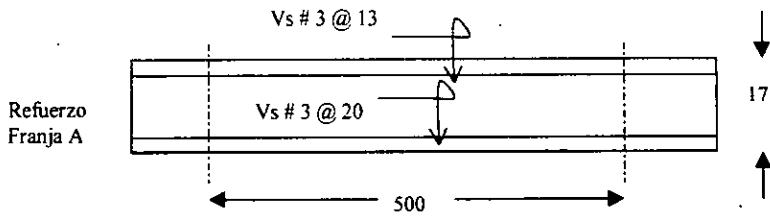
- Acero negativo

$$\frac{Mu}{FR b d^2 f'c} = \frac{0.5 \times 145000}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.026$$

As = usar As min.  $3.45 \text{ cm}^2 / \text{m}$ .

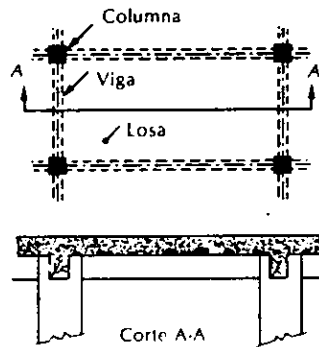
S =  $71 / 3.45 = 20 \text{ cm}$ . (barras # 3)

Croquis de colocación del refuerzo:



## Losas perimetralmente apoyadas.

Las losas apoyadas perimetralmente son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros en sus cuatro lados, como se muestra en la **figura 5.6** y que por lo tanto trabajan en dos direcciones.



**Figura 5.6** Losa apoyada perimetralmente.

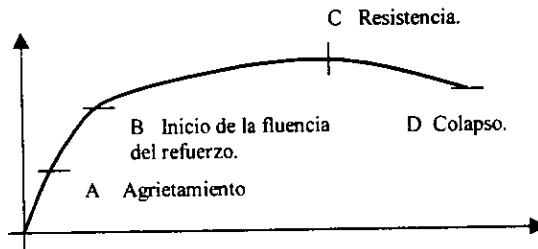
La diferencia entre losas que trabajan en una dirección y losas apoyadas perimetralmente puede verse también en la forma que adquieren las losas cuando se deflexionan bajo la acción de cargas normales a su plano, las primeras se deforman en curvatura simple mientras que las segundas lo hacen en curvatura doble. Una característica estructural importante de los apoyos de éstas losas es que su rigidez a la flexión es mucho mayor que la rigidez a flexión de la propia losa.

### Comportamiento y modos de falla.

Las losas apoyadas perimetralmente forman parte, comúnmente, de sistemas estructurales integrados por columnas, vigas y losas. El comportamiento de éstas no puede estudiarse rigurosamente en forma aislada sino que debe analizarse todo el sistema, ya que las características de cada elemento influyen en el comportamiento de los otros. Sin embargo, se considerarán las losas en forma aislada. Esto permitirá el planteamiento de métodos de diseño suficientemente precisos para fines prácticos, siempre que se cumpla la hipótesis de que los apoyos tengan una rigidez a flexión mucho mayor que la de las losas.

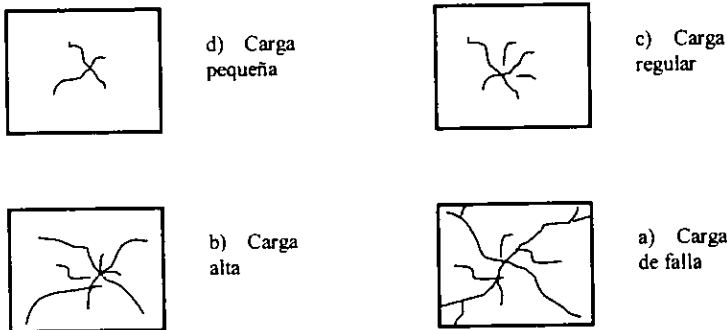
La gráfica carga – deflexión en el centro del claro de una losa apoyada perimetralmente, ensayada hasta la falla, tiene la forma mostrada en la **figura 5.7** en la que se distinguen las siguientes etapas:

- Una etapa lineal O – A , en la que el agrietamiento del concreto en la zona de esfuerzos de tensión es despreciable. El agrietamiento del concreto por tensión, representado por el punto A, ocurre bajo cargas relativamente altas. Las cargas de servicio de losas se encuentran cerca de la carga correspondiente al punto A.
- La etapa A – B, en la que existe el agrietamiento del concreto en la zona de tensión y los esfuerzos en el acero de refuerzo son menores que el límite de fluencia. La transición de la etapa O – A a la etapa A – B es gradual, puesto que el agrietamiento del concreto se desarrolla paulatinamente desde las zonas de momentos flexionantes máximos hacia las zonas de momentos flexionantes menores.
- La etapa B – C, en la que los esfuerzos en el acero de refuerzo sobrepasan el límite de fluencia. Al igual que el agrietamiento del concreto, la fluencia empieza en las zonas de momentos flexionantes máximos y se propaga paulatinamente hacia las zonas de momentos menores.
- Por último, la rama descendente C – D, cuya amplitud dependen como en el caso de las vigas, de la rigidez del sistema de aplicación de cargas.



**Figura 5.7** Gráfica carga – deflexión de una losa.

Para ilustrar el avance del agrietamiento y de la fluencia del refuerzo en distintas etapas de cargas, se presentan en la **figura 5.8** Las configuraciones de agrietamiento en la cara inferior de una losa cuadrada simplemente apoyada sujeta a carga uniformemente repartida en su cara superior, para distintos valores de la carga aplicada. Puede verse en esta figura que el agrietamiento empieza en el centro de la losa, que es la zona de momentos flexionantes máximos y, avanza hacia las esquinas a lo largo de las diagonales. Las deformaciones por flexión de la losa se concentran en las diagonales que reciben el nombre de líneas de influencia, mientras que las deformaciones en las zonas comprendidas entre líneas de influencia son, en comparación, muy pequeñas.



**Figura 5.8** Configuraciones de agrietamiento para distintos valores de la carga aplicada.

## Análisis de losas.

Se entiende por análisis de losas la determinación de las acciones internas en una losa dada cuando se conoce la carga aplicada. Esta determinación es más difícil, debido a que las losas son elementos altamente hiperestáticos. El análisis de losas puede efectuarse aplicando los métodos de la teoría de la elasticidad. Los resultados así obtenidos sólo son válidos en la etapa de comportamiento lineal, o sea, para cargas cuya magnitud es del orden de la correspondiente al punto A de la gráfica carga – deflexión, debido a que el concreto reforzado no cumple con las características de los materiales lineales, homogéneos y elásticos.

Si se plantean las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones del elemento diferencial de la losa mostrado en la figura 5.9 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 z}{\partial x^2 \times \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{W}{N}$$

donde

$z$  = deflexiones de la losa en dirección perpendicular a su plano.

$x, y$  = coordenadas en el plano de la losa

$W$  = carga aplicada

$N$  = rigidez de la losa, expresada por la ecuación

$$N = \frac{Eh^3}{12(1 - 2\mu)}$$

$h$  = peralte total de la losa

$E$  = módulo de elasticidad

$\mu$  = coeficiente de Poisson

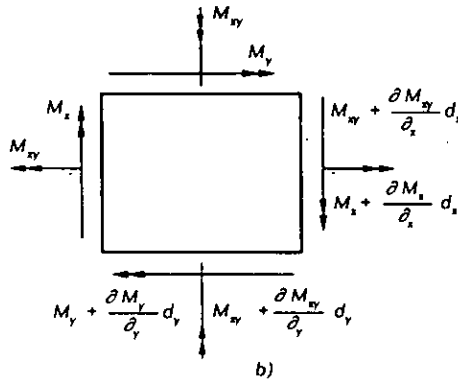
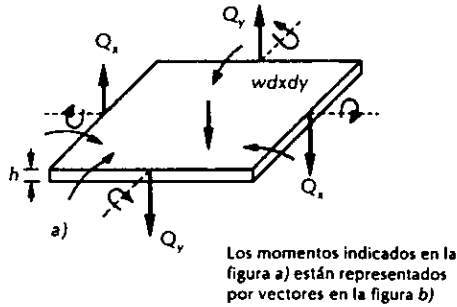
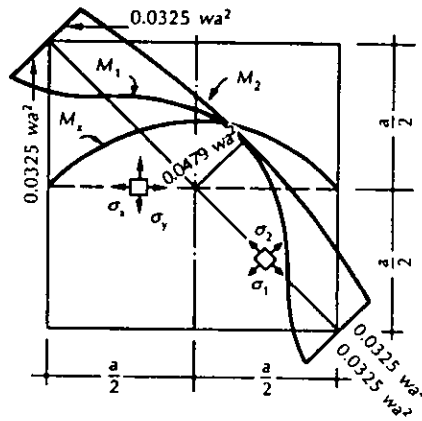


Figura 5.9 Elemento diferencial de losa.

Además de las condiciones de equilibrio y continuidad expresadas por la primera ecuación, deben cumplirse las condiciones de frontera de la losa. Por ejemplo, si un borde, es empotrado, la deflexión y la rotación deben ser nulas en dicho borde. Estas condiciones de frontera se satisfacen ajustando las constantes de integración que aparecen al resolver la ecuación diferencial. Una vez resuelta la ecuación, las acciones internas pueden determinarse con las ecuaciones que se deducen.

La determinación de las acciones internas por el procedimiento descrito es demasiado laboriosa para fines prácticos, además de que tiene algunas limitaciones. Sin embargo, en casos comunes se han obtenido soluciones, las cuales, con algunas

modificaciones, se han utilizado para obtener coeficientes de diseño. Por ejemplo, en la **figura 5.10** se muestra la distribución de momentos flexionantes en una losa cuadrada libremente apoyada sujeta a carga uniformemente repartida. En esta losa los momentos máximos se presentan a lo largo de las diagonales, lo cual explica la forma de su mecanismo de colapso, ya que el acero de refuerzo fluye siguiendo los ejes de momentos máximos.



**Figura 5.10** Distribución de momentos en una losa cuadrada.

La primera ecuación diferencial se integra generalmente mediante series, lo cual tiene la limitación de ser aplicable únicamente a ciertas formas sencillas de placas y de condiciones de apoyo. Existen dos métodos que salvan esta limitación, si bien conducen a sistemas de ecuaciones lineales de número muy elevado. Estos métodos son el de diferencias finitas y el de elemento finito. El primero es un método de integración numérica y el segundo de discretización de la estructura por medio de su sustitución por otra formada por elementos de forma cuadrada o triangular. Estos métodos, permiten el análisis de losas de forma irregular, con cualquier tipo de carga y con discontinuidades de carga o geometría.



Existen también métodos aproximados para el análisis de losas. Uno de ellos es el de Marcus o método de las rigideces relativas que permite visualizar el comportamiento de losas perimetralmente apoyadas y que se usó para fines de diseño durante algún tiempo.

A continuación se describe el método. Supóngase una losa rectangular libremente apoyada en todo su perímetro en la que se han señalado las dos franjas centrales  $C_i$  y  $L_i$  que corresponden al claro corto y al claro largo respectivamente( figura 5.11 a) Supóngase también que la losa tiene una carga uniformemente repartida  $w$ . El punto central de la losa forma parte de las franjas  $C_i$  y  $L_i$  simultáneamente, por lo que se pueden igualar las deflexiones en el punto medio de cada franja, como si fuesen vigas simplemente apoyadas, de la siguiente manera:

$$\frac{5w_a \ell a^4}{384 EI} = \frac{5w_b \ell b^4}{384 EI}$$

Donde

$W_a$  y  $w_b$  son las fracciones de la carga  $W$  que corresponda a las franjas  $C_i$  y  $L_i$  respectivamente. Simplificando esta ecuación se obtiene:

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{\ell b^4}{\ell a^4}$$

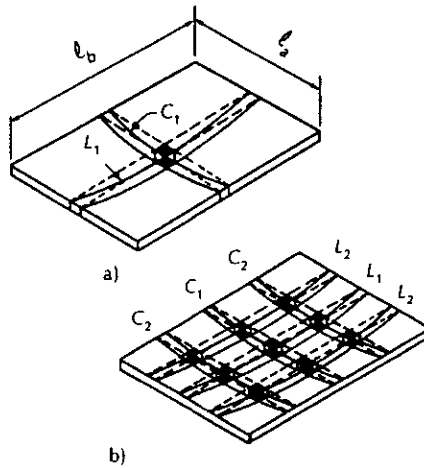
Por condiciones de equilibrio, la suma de las cargas  $w_a$  y  $w_b$  debe ser la carga total  $W$ .

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$w_a = \frac{\ell b^4}{\ell a^4 + \ell b^4} \times W$$

$$w_b = \frac{\ell a^4}{\ell a^4 + \ell b^4} \times W$$

Las ecuaciones anteriores permiten obtener las cargas con las que se diseñan las franjas C y L como si fuesen vigas aisladas. Este método permite obtener coeficientes para distintas relaciones entre la  $l$  y  $l_b$  y permite también, siguiendo el mismo razonamiento, analizar losas con distintas condiciones de apoyo. Las ecuaciones anteriores indican también que la carga se reparte en forma proporcional a la cuarta potencia de los claros, o esa, que la losa trabaja más en dirección del claro corto que en la del claro largo.



**Figura 5.11** Franjas en el método de Marcus.

El método es aproximado por que no toma en cuenta que las franjas de losa paralelas no pueden deformarse en forma independiente entre sí. En efecto, si se considera la intersección de las franjas C2 y L2 en la **figura 5.11 b** Se puede ver que sus cuatro vértices tienen deflexiones diferentes por estar localizadas a diferentes distancias de los apoyos de la losa. Por lo tanto, el elemento de la **figura 5.11 b** que tiene a la losa horizontal y a la losa deflexionada como caras superior e inferior, respectivamente, adquiere la forma de un cubo deformado, lo cual se debe a la existencia de esfuerzos y momentos torsionantes que se presentan en todos los elementos de intersección, excepto el central. Por lo tanto, la carga total en la losa es resistida no únicamente por momentos flexionantes, sino también por momentos torsionantes, como lo indica el análisis por teoría de la elasticidad. Esto hace que el

método resulte muy conservador. Por ejemplo, en una losa cuadrada simplemente apoyada, el momento máximo al centro del claro calculado con éste método sería:

$$\frac{(W/2) \times \ell^2}{8} = 0.0625 W\ell^2$$

Mientras que el análisis exacto por la teoría de la elasticidad ( **figura 5.10** ) indica un valor de  $0.0479 W\ell^2$

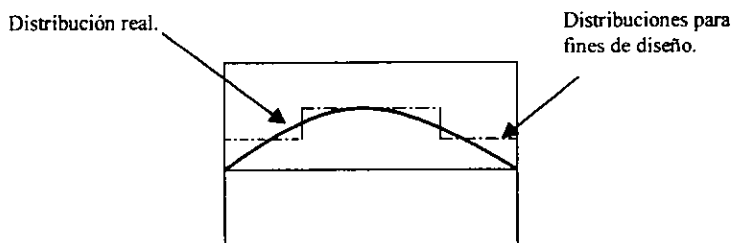
El método de análisis de losas más empleado en la práctica consiste en el uso de las tablas de coeficientes de momentos, obtenidas mediante alguno de los métodos más refinados mencionados anteriormente. La determinación de los momentos por medio de estos coeficientes resulta expedita pero desde luego sólo se pueden analizar losas de forma regular y con carga uniforme.

Al establecer las tablas de coeficientes de momentos, se modifican los resultados de los análisis elásticos para tomar en cuenta las diferencias más importantes entre las losas ideales y losas de concreto reforzado. Algunas de estas diferencias son las siguientes:

- Las distribuciones de momentos en las losas de concreto reforzado son diferentes de las distribuciones elásticas, debido a la influencia del agrietamiento.
- Las condiciones de apoyo de losas de estructuras reales no corresponden a las condiciones ideales de las losas analizadas elásticamente. Por ejemplo, las losas reales suelen apoyarse sobre vigas que tienen una rigidez a flexión infinita, o sea, que tienen cierta flexibilidad, mientras que las losas ideales están soportadas sobre apoyos infinitamente rígidos. También las vigas de estructuras reales trabajan como vigas T con un ancho de patín difícil de definir, lo que implica incertidumbres en su rigidez. Esto no se toma en cuenta en los análisis elásticos comunes.
- De acuerdo con las distribuciones teóricas de momentos, éstos varían a lo largo de los ejes de la losa, como se puede ver en la **figura 5.10** Debido a que no resulta práctico distribuir el acero de refuerzo siguiendo las distribuciones teóricas, es usual

considerar dos o tres zonas de momentos constantes. Por ejemplo, la distribución teórica a lo largo del eje central de la **figura 5.10** puede simplificarse como se muestra en la **figura 5.12**. De esta forma, se logran separaciones uniformes del acero de refuerzo en zonas amplias de la losa. Obsérvese que no es necesario que en la distribución idealizada de momentos, el momento de diseño sea igual al momento máximo, ya que aprovechando la redistribución de momentos que ocurre en el interior de la losa cuando el acero de refuerzo empieza a fluir en las secciones de momento máximo, se puede diseñar para un momento menor que el máximo.

Los reglamentos de construcción presentan por lo general tablas de coeficientes de momentos que se utilizan para fines de diseño. Más adelante se incluye la tabla que aparece en las NTC del reglamento de construcciones para el Distrito Federal.



**Figura 5.12** Distribución real de momentos y distribución idealizada para fines de diseño en una losa.

### **Dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente.**

Para dimensionar losas por el método de las NTC, se obtienen los momentos flexionantes utilizando los coeficientes que se presentan en la **tabla 5.1**. Los momentos así obtenidos son momentos por unidad de ancho, por ejemplo, kg-m/m. Después se

calculan el peralte y el porcentaje de refuerzo utilizando las fórmulas de flexión, como si se tratará de vigas de ancho unitario. Por ejemplo, si los momentos están en unidades kg-m/m, se considera que la losa está formada por vigas de 1 m. de ancho sujetas a los momentos flexionantes determinados a partir de los coeficientes de la **tabla 5.1**

El método de las NTC está basado en un desarrollo originalmente por Siess y Newmark. Obsérvese que se incluyen coeficientes para losa construidas monolíticamente con las vigas de apoyo y para losas apoyadas sobre vigas de acero. Esto se debe a que, en el primer caso, las vigas proporcionan cierta restricción a la losa contra el giro, mientras en el segundo caso la losa puede girar libremente.

Existe la posibilidad de que los momentos en un borde común a dos tableros adyacentes resulten distintos en cada tablero. En estos casos, las NTC especifican que se distribuyan las dos terceras partes del momento de desequilibrio entre los tableros adyacentes, si éstos son monolíticos con sus apoyos, o la totalidad si no lo son. Para la distribución debe suponerse que la rigidez del tablero es proporcional a  $d^3/a$ .

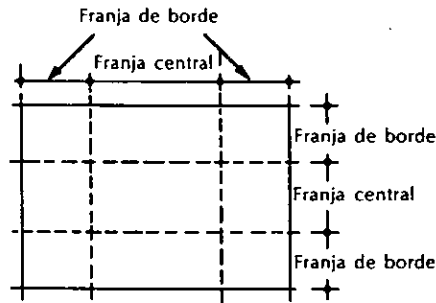
Las losas que se dimensionen con los coeficientes de la **tabla 5.1** deben considerarse divididas, en cada dirección, en dos franjas de borde y una central, como se muestra en la **figura 5.13**. La determinación de los anchos de las franjas se hace de la siguiente manera, para relaciones de claro corto a claro largo mayores de 0.5, las franjas centrales tienen un ancho igual a la mitad del claro perpendicular a ellas, y cada franja extrema tiene un ancho igual a la cuarta parte del mismo. Para relaciones menores de 0.5, la franja central perpendicular al lado largo tiene un ancho igual a  $a_2 - a_1$  y cada franja extrema, igual a  $a_1/2$ , donde  $a_1$  es el claro corto y  $a_2$  es el claro largo. Los momentos determinados con los coeficientes de la **tabla 5.1** corresponden a las franjas centrales. Los coeficientes de las franjas extremas son iguales a los de la tabla multiplicados por 0.60.

Para doblar barras y para aplicar los requisitos de adherencia y anclaje de acero de momento positivo, se supone que las líneas de inflexión está localizadas a una distancia

de un sexto del claro corto a partir de los bordes del tablero. Para los mismos requisitos del acero del momento negativo, se suponen localizadas las líneas de inflexión a un quinto del claro corto, a partir de los bordes del tablero.

El método descrito anteriormente puede aplicarse únicamente si se satisfacen las siguientes limitaciones.

- Los tableros son aproximadamente rectangulares.
- La distribución de las cargas que actúan sobre la losa es aproximadamente uniforme en cada tablero.
- Los momentos negativos en el apoyo común de dos tableros adyacentes no difieren entre sí en más del 50% del menor de ellos.
- La relación de carga viva a carga muerta no es mayor de 2.5 para losas monolíticas con sus apoyos, ni mayor que 1.5 en otros casos.



**Figura 5.13** División de una losa en franjas centrales y franjas de borde.

Cuando las losas no cumplen estas limitaciones, es necesario aplicar otros procedimientos como, por ejemplo, la utilización de soluciones elásticas. Si las losas son muy irregulares, están sujetas a cargas no uniformes, tienen agujeros o condiciones de apoyo poco usuales, es más conveniente, por lo general, recurrir a otro tipo de soluciones. En la **tabla 5.2** se presentan los coeficientes y recomendaciones para el método del ACI.

Tablero	Momento	Claro	Relación de lados corto a largo, $m = a_1/a_2$															
			0		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0			
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II		
Interior Todos los bordes continuos	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292		
		largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	361	320	330	288	292		
	positivo	corto	630	668	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130		
		largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	130		
De borde Un lado corto discontinuo	Neg. en bordes interiores	corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346		
		largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311		
	Neg. en bordes discontinuos	corto	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0		
		largo	630	668	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144		
De borde Un lado largo discontinuo	Neg. en bordes interiores	corto	1060	1143	583	624	514	548	453	481	397	420	346	364	297	311		
		largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	426	347	384	315	346		
	Neg. en bord.disc. positivo	corto	651	0	362	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0		
		largo	751	912	334	366	285	312	241	263	202	218	164	175	129	135		
De esquina Los lados adyacentes discontinuos	Neg. en bordes interiores	corto	1060	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364		
		largo	600	713	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364		
	Neg. en bordes discontinuos	corto	651	0	362	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0		
		largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0		
positivo	corto	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153			
	largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153			
Aislado Cuatro lados discontinuos	Neg. en bordes discontinuos	corto	570	0	550	0	530	0	470	0	430	0	380	0	330	0		
		largo	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0		
	positivo	corto	1100	1670	830	1380	800	1330	720	1190	640	1070	570	950	500	830		
		largo	200	250	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830		

Caso I. Losa colada monolíticamente con sus apoyos.

Caso II. Losa no colada monolíticamente con sus apoyos.

Los coeficientes multiplicados por  $10^{-4} wa^2$  dan momentos por unidad de ancho.

Para el caso I,  $a_1$  y  $a_2$  pueden tomarse como los claros libres entre paños de vigas; para el caso II se tomarán como los claros entre ejes, pero sin exceder el claro libre más dos veces el espesor de la losa.

**Tabla 5.1** Coeficientes de momentos  $\alpha_c$  para tableros rectangulares, franjas centrales.

Para franjas extremas los valores se multiplicarán por 0.60

MOMENTOS	CLARO CORTO						CLARO LARGO Todos los valores en metros.
	Valores de $m = S/L$						
	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5 a menos	
Caso I. Tableros interiores.							
Com. - En borde continuo	0.033	0.040	0.048	0.055	0.063	0.083	0.033
Com. + Al centro del claro	0.025	0.030	0.036	0.041	0.047	0.062	0.025
Caso II. Un borde discontinuo.							
Com. - En borde continuo	0.041	0.048	0.055	0.062	0.069	0.085	0.041
En borde discontinuo	0.021	0.024	0.027	0.031	0.035	0.042	0.025
Com. + Al centro del claro	0.031	0.036	0.041	0.047	0.052	0.064	0.031
Caso III. Dos bordes discontinuos.							
Com. - En bordes continuo	0.049	0.057	0.064	0.071	0.078	0.090	0.048
En borde discontinuo	0.025	0.028	0.032	0.036	0.039	0.045	0.029
Com. + Al centro del claro	0.037	0.043	0.048	0.054	0.059	0.068	0.037
Caso IV. Tres bordes discontinuos.							
Com. - En borde continuo	0.058	0.066	0.074	0.082	0.090	0.098	0.058
En borde discontinuo	0.029	0.033	0.037	0.041	0.045	0.049	0.029
Com. + Al centro del claro	0.044	0.050	0.056	0.062	0.068	0.074	0.044
Caso V. Cuatro bordes discontinuos.							
Com. - En borde discontinuo	0.033	0.038	0.043	0.047	0.053	0.055	0.033
Com. + Al centro del claro	0.050	0.057	0.064	0.072	0.080	0.083	0.050

**RECOMENDACIONES:**

El empleo de la tabla será sólo para losas que se colarán monolíticamente.

Una de cada dos varillas o dos de cada tres varillas corridas al centro del claro se doblarán sobre los apoyos a una distancia de éstos igual a  $S/5$

La longitud de los bastones será igual a la suma de los cuartos de los claros contiguos.

La separación entre varillas nunca será mayor de 30 cm. ni menor de 10 cm.

**Tabla 5.2** Coeficientes de momentos para el método del ACI.



Cuando se diseña por el método de las NTC, los coeficientes de momento positivo pueden incrementarse y los momentos negativos reducirse en igual cantidad, o viceversa, pero ningún coeficiente puede reducirse en más del 33% del valor consignado en la **tabla 5.1**

#### Peralte mínimo.

Cuando sea aplicable la **tabla 5.1** podrá omitirse al cálculo de deflexiones si el peralte efectivo no es menor que el perímetro del tablero entre 270 para concreto clase 1 y 180 para concreto clase 2. Para este cálculo, la longitud de lados discontinuos se incrementará en 50% si los apoyos de la losa no son monolíticos con ella, y 25% cuando lo sean. En losas alargadas no es necesario tomar un peralte mayor que el que corresponde a un tablero con  $a_2 = 2a_1$ .

La limitación que dispone el párrafo anterior es aplicable a losas en :

$$F_s < 2000 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{y} \quad w < 380 \text{ kg/cm}^2$$

Para otras combinaciones de  $f_s$  y  $w$ , el peralte efectivo mínimo se obtendrá multiplicando por:

$$0.034 \sqrt[4]{f_s \times w}$$

el valor obtenido según el párrafo anterior. En esta expresión  $f_s$  es el esfuerzo en el acero en condiciones de servicio, en  $\text{kg/cm}^2$  (puede suponerse igual a  $0.6f_y$ ) y  $w$  es la carga en condiciones de servicio en  $\text{kg/cm}^2$ .

### Acero mínimo.

Respecto al acero mínimo, se utiliza la misma ecuación que para lasas en una dirección, o sea:

$$A_s = \frac{66000 \times h}{f_y(h + 100)}$$

Donde  $A_s$  es el área mínima por metro de ancho de losa.

Esta área debe multiplicarse por 1.5 si la losa esta expuesta a la intemperie. Puede proporcionarse, por simplicidad, una relación mínima  $p_{\min}$  de 0.002 en lasas protegidas de la intemperie y de 0.003 en lasas expuestas a ella.

La separación entre barras no debe exceder de 50 cm. ni de  $3.5h$ , excepto en la proximidad de cargas concentradas superiores a una tonelada en donde la separación máxima será de  $2.5d$ , donde  $d$  es el peralte efectivo de la losa.

### Revisión de la resistencia a fuerza cortante.

En la gran mayoría de los casos, el dimensionamiento de lasas apoyadas perimetralmente queda regido por flexión. Sin embargo, es necesario revisar la seguridad contra fuerza cortante.

Se supondrá que la sección crítica se encuentra a un peralte efectivo del paño de apoyo. La fuerza cortante que actúa en un ancho unitario se calculará con la expresión:

$$V = \left( \frac{al}{2 - d} \right) \times w / \left[ 1 + \left( \frac{al}{a2} \right)^6 \right]$$

A menos que se haga más preciso. Cuando haya bordes continuos y bordes discontinuos, V se incrementará en 15 por ciento. La resistencia de la losa a fuerza cortante se supondrá igual a:

$$0.5 FR d b \sqrt{f'c}$$

es decir, igual a la de una viga sin refuerzo en el alma.

### Cargas lineales.

Es frecuente que las losas apoyadas perimetralmente soporten además de cargas distribuidas, cargas lineales y concentradas como las producidas por un muro que se apoye sobre la losa, por maquinaria o por vehículos en el caso de losas de puente.

Para tomar en cuenta el efecto de cargas lineales, las NTC – 96 especifican sustituir la carga lineal por una uniformemente distribuida cuyo valor se obtiene dividiendo el peso total de la carga lineal entre el área del tablero y multiplicando el resultado por los factores de la **tabla 5.2**. La carga equivalente así obtenida se sumará a la propiamente uniforme que actúa en ese tablero.

**Tabla 5.2**

Factores para transformar cargas lineales en cargas distribuidas equivalentes.

Relación de lados $m = a_1/a_2$	0.5	0.8	1.0
Muro paralelo al lado corto	1.3	1.5	1.6
Muro paralelo al lado largo	1.8	1.7	1.6

Estos factores pueden usarse en relaciones de carga lineal a carga total no mayores de 0.5. se interpolará linealmente entre los valores tabulados.

### Cargas concentradas.

Cuando un tablero de una losa perimetralmente apoyada deba soportar una carga concentrada, P, aplicada en la zona definida por la intersección de las franjas centrales, la suma de los momentos resistentes, por unidad de ancho, positivo y negativo se incrementará en cada dirección paralela a los bordes, en la cantidad :

$$\frac{P}{2\pi} \times \left( 1 - \frac{2r}{3R} \right)$$

en todo punto del tablero, siendo r el radio del círculo de igual área a la de aplicación de la carga y R la distancia del centro de la carga al borde más próximo a ella.

Este procedimiento puede aplicarse siempre que la carga concentrada está aplicada en la zona de intersección de las franjas centrales de la losa.

En el caso de cargas concentradas debe revisarse siempre la posible falla en cortante por penetración, alrededor de la carga.



$$1.3 \times 2362.5 = 3071 \text{ cm.}$$

$$d_{\text{min.}} = 3071/300 = 10.3 \approx 10 \text{ cm.}$$

$$h = d_{\text{min.}} + 2 = 12 \text{ cm.}$$

Cargas.

$$W_{\text{total}} = 620 + (0.12 \times 2400) = 908 \text{ kg/cm}^2$$

$$W_u = FC \times W = 1.4 \times 908 = 1271 \text{ kg/cm}^2$$

$$\underline{W_u = 1271 \text{ kg/cm}^2}$$

Cálculo de momentos en las franjas centrales.

$$a_1 = 450 - 25 = 425 \text{ cm.}$$

$$a_2 = 600 - 25 = 575 \text{ cm.}$$

$$a_1/a_2 = 425 / 575 \approx 0.75 \text{ (caso 1)}$$

$$10^{-4} W_u a_1^2 = 10^{-4} \times 1271 \times 4.25^2 = 2.290 \text{ kg-m}$$

Tablero	Momento	Claro	$\alpha_1$	Mi (kg.-m.)
De esquina (1)	Negativo en bordes interiores	Corto	445	1019
		Largo	411	941
	Negativo en bordes discontinuos	Corto	264	604
		Largo	229	524
De borde con un lado corto discontinuo	Positivo	Corto	237	543
		Largo	141	323
	Negativo en bordes interiores	Corto	427	992
		Largo	361	827
	Negativo en borde	Corto	229	524

discontinuo

Positivo	Corto	221	506
	Largo	132	302

Corrección del momento en el borde común.

Diferencia del momento en el borde común =  $1019 - 978 = 41$

$2/3 \times 41 = 27 \text{ kg.-m.}$

Momento de diseño =  $1019 - 27/2 = 1005 \text{ kg.-m}$

$978 + 27/2 = 992 \text{ kg.-m.}$

Determinación del refuerzo.

$P_{min} = 0.002$

$S_{máx.} = 50 \text{ cm. } \acute{o} (3.5 h = 3.5 \times 12 = 42 \text{ cm} < 50 \text{ cm})$

$FR \text{ b d}^2 f'c = 0.9 \times 100 \times 10^2 \times 136 = 122 \times 10^4 \text{ ( acero positivo )}$

$FR \text{ b d}^2 f'c = 0.9 \times 100 \times 8^2 \times 136 = 78.3 \times 10^4 \text{ ( acero negativo )}$

Momento Kg. - m.	$Q = M1/FR$ $bd^2 f'c$	$\omega$ Apéndice A	$p = \omega f'c / f_y$	$A_s \text{ (cm}^2 \text{)}$	S ( cm. ) Barras No.3
1005	0.128	0.140	.0045	3.6	19.7
941	0.120	0.130	.0042	3.4	20.1
604	0.077	0.080	.0026	2.1	33.8
524	0.070	0.070	.0021	1.7	41.8
543	0.044	0.045	.0015	2.0	35
323	0.026	0.026	.0008	2.0	35
992	0.127	0.140	.0045	3.6	19.7

827	0.106	0.110	.0036	2.9	24.4
524	0.070	0.070	.0021	1.7	41.8
506	0.041	0.041	.0013	2.0	35
302	0.025	0.024	.0008	2.0	35

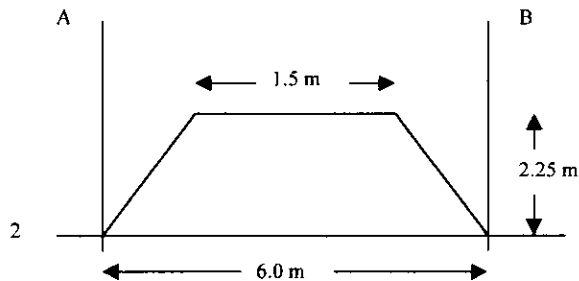
Revisión de fuerza cortante.

$$V = \frac{(2.13 - 0.10) \times 1271}{1 + \left(\frac{4.25}{5.75}\right)^6} = 2218 \text{ kg}$$

$$V_c = 0.5 \times 0.8 \times 100 \times 10 \sqrt{160} = 5060 \text{ kg} > V$$

Cargas sobre las vigas de apoyo.

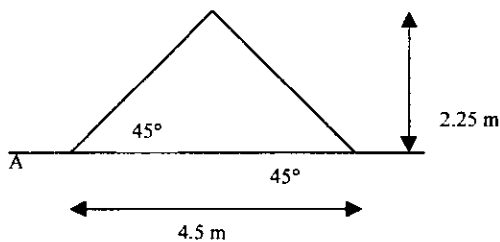
Viga eje 2



$$\text{Area tributaria a cada lado} = (6 \times 1.5) / 2 \times 2.25 = 8.44 \text{ m}^2$$

$$\text{Carga} = 8.44 \times 1271 \times 2/6 = 3576 \text{ kg./m}$$

Viga eje A



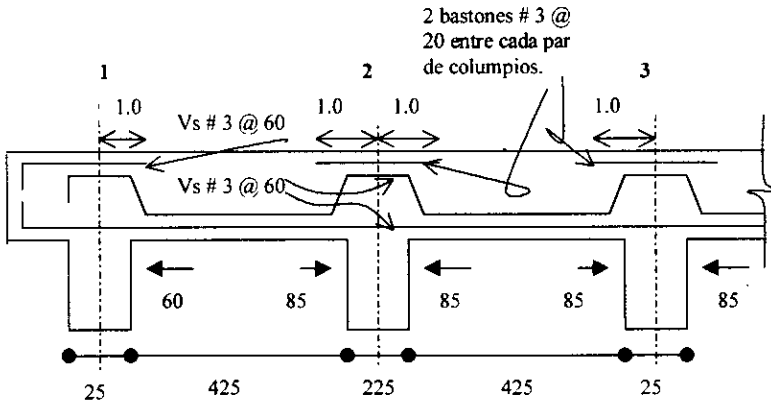


Area tributaria a cada lado =  $(4.5 \times 2.25) / 2 = 5.06 \text{ m}^2$

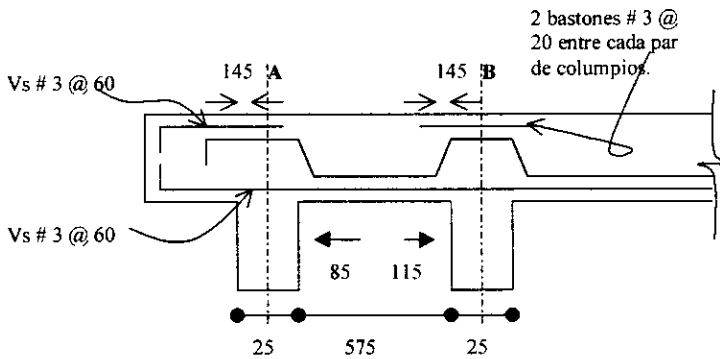
Carga =  $5.06 \times 1271 / 4.5 = 1429 \text{ kg./m}$

Las cargas obtenidas deben sumarse al peso propio de la viga.

Croquis de armado.



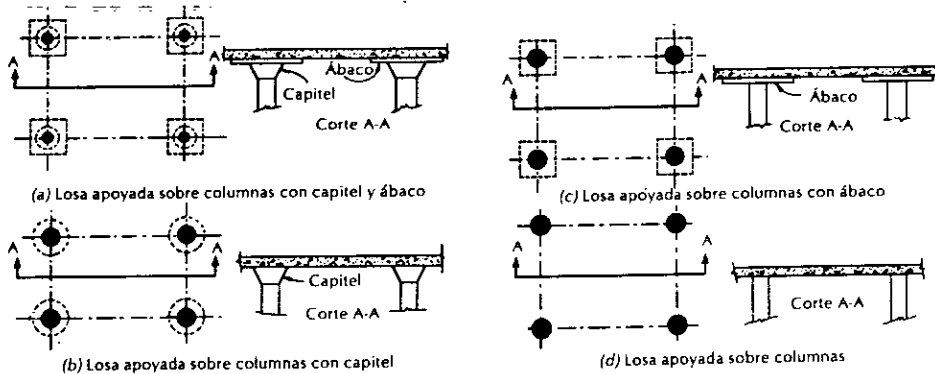
**Claro corto - Franja central**



**Claro largo - Franja central**

## Losas planas.

Las losas planas son aquellas que se apoyan directamente sobre las columnas, sin la intermediación de vigas, como se muestra en la **figura 5.14**. Pueden tener ampliaciones (**fig. 5.14.a y c**) o ser de peralte uniforme (**fig. 5.14 d**); en éste último caso se denominan placas planas. También pueden ser macizas o aligeradas. El aligeramiento se logra incorporando bloques huecos o tubos de cartón, o bien formando huecos con moldes recuperables de plástico u otros materiales. Las losas de tipo aligerada reciben a veces el nombre de losas encasetonadas o reticulares.



**Figura 5.14** Distintos tipos de losas planas.

Las ampliaciones de las columnas en su parte superior se denominan capiteles. Tienen por función principal aumentar el perímetro de la sección crítica en cortante por penetración, acción que rige en muchas ocasiones el dimensionamiento de este tipo de losas. Las caras del capitel no deben formar un ángulo mayor de 45 grados con el eje de las columnas. Si se excede este ángulo, la parte que queda fuera del mayor cono circular

recto que puede inscribirse en el capitel no se considera útil. El diámetro del capitel en su intersección con la losa se representa con la letra C.

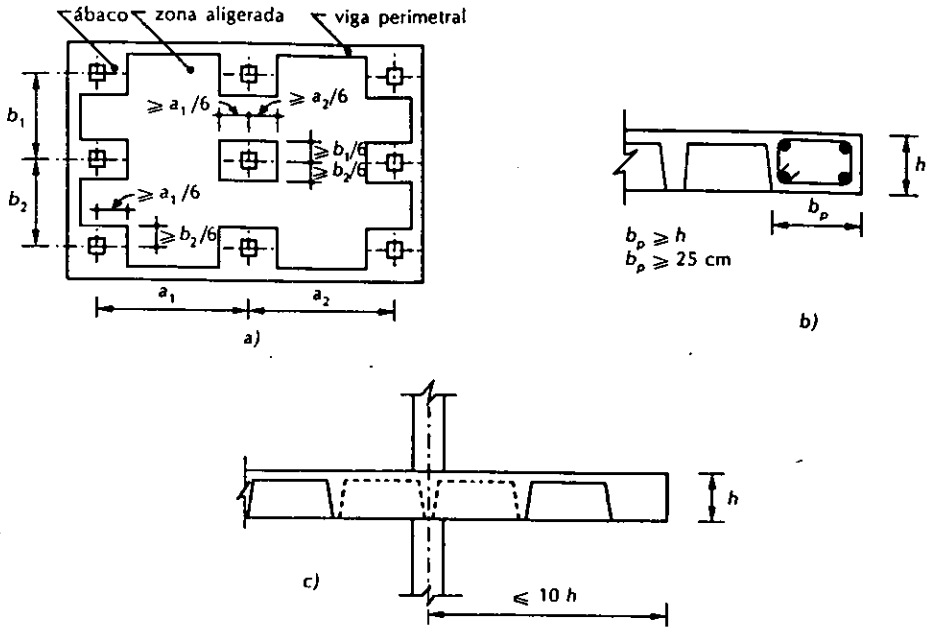
El ábaco es una zona de la losa alrededor de la columna, con mayor peralte. Generalmente es cuadrado o rectangular y se recomienda que sus dimensiones en planta no sean menores que un sexto del claro en la dirección considerada a cada lado del eje de columnas. La proyección del ábaco por debajo de la losa debe quedar comprendida dentro de ciertos límites. El mínimo es tal que el peralte efectivo del ábaco sea por lo menos 1.3 veces el peralte efectivo de la losa y el máximo 1.5 veces dicho peralte.

El ábaco tiene por función aumentar el peralte de la losa en la zona en que se presenta el mayor momento flexionante y en donde es crítico el cortante por penetración. Desde estos puntos de vista resulta muy conveniente, pero tiene la desventaja de complicar la cimbra.

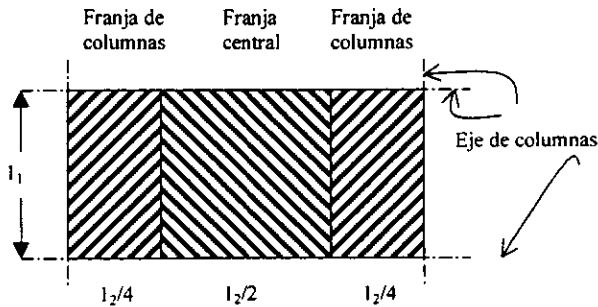
Las placas aligeradas deben llevar ábacos macizos alrededor de la columna, especialmente para poder resistir en forma adecuada el cortante por penetración. Se recomienda que estos ábacos tengan una dimensión mínima de un sexto del claro correspondiente, medida desde el eje de columnas, o de  $2.5h$ , medida desde el paño de la columna, con el objeto de que el cono potencial de falla no atraviese huecos o casetones ( **figura 5.15 a** ) También se recomienda que las losas aligeradas que lleven volados rematen en una viga maciza cuyo ancho sea por lo menos igual al espesor de losa o a 25 cm. ( **figura 5.15 b** ), y que la longitud del volado no exceda de diez veces dicho espesor ( **fig. 5.15 c** ). En la parte superior de la losa, sobre los casetones, debe existir una capa de concreto cuyo espesor se recomienda no sea menor de 3 cm., o de 5 cm., si existe la posibilidad de cargas concentradas elevadas.

Para fines de diseño, se acostumbra dividir las losas planas en franjas como las mostradas en la **figura 5.16** En cada tablero se distinguen tres franjas. Una franja central, cuyo ancho es igual a la mitad del claro del tablero en la dirección en que se mide el ancho, y dos franjas extremas, cuyo ancho es la cuarta parte de dicho claro.

La división de franjas se hace en las dos direcciones del tablero, así que en la **figura 5.16** se podrían representar otras tres franjas en dirección perpendicular a las mostradas cuyos anchos serían  $l/2$  para la central y  $l/4$  para cada una de las dos franjas extremas.



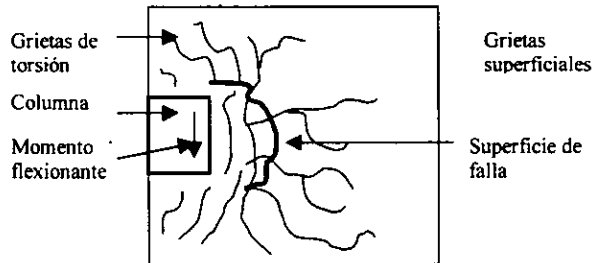
**Figura 5.15** Recomendaciones para ábacos, vigas perimetrales y volados en losas planas aligeradas.



**Figura 5.16** Definición de franjas.

### Comportamiento y dimensionamiento.

Las losas planas pueden fallar en cortante por penetración, o por flexión. El primer tipo de falla consiste en la penetración de la columna dentro de la losa formándose un cono o pirámide truncada. Cuando la estructura es asimétrica o resiste cargas laterales, se transmiten simultáneamente carga axial y momento flexionante entre la losa y columna, por lo que se tiene la situación representada en la **figura 5.17**. Es frecuente que el cortante por penetración sea el factor crítico en el diseño de losas planas, especialmente cuando no se usan capiteles y ábacos.



**Figura 5.17** Agrietamiento en una losa conectada a una columna de borde.

Las fallas por flexión ocurren generalmente después de que las losas experimentan grandes deformaciones y que el acero de refuerzo fluye en varias zonas, ya que son estructuras subreforzadas. Existen dos configuraciones básicas de agrietamiento. En una, las grietas se forman en la cara superior de la losa a lo largo de los ejes de columnas y en la cara inferior a lo largo de los ejes centrales. En la otra configuración se forman grietas radiales que parten de las columnas en la cara superior de la losa y grietas circunferenciales en la cara inferior.

Para el diseño de losas planas se han empleado dos métodos: el método directo y el método de la estructura equivalente, los cuales se presentan a continuación.

- Método directo.

Considérese un tablero de losa plana como el mostrado en la **figura 5.18** sujeto a una carga uniformemente distribuida de magnitud  $w$  por unidad de área. Si el tablero se aísla del reto de la losa a lo largo de los ejes A-C y B-D y se considera como una viga ancha de claro  $l_1$  y ancho  $l_2$ , esta viga quedaría sujeta a una carga uniformemente distribuida de magnitud  $wl_2$  por unidad de longitud como se muestra en la **figura 5.18 b**. En la **figura 5.18c** se indica el diagrama de momentos de esta viga ancha, señalando con  $M_{A-B}$ , el momento en el apoyo de la izquierda queda localizado sobre las columnas A y B; con  $M_{C-D}$  el momento en el apoyo de la derecha localizado sobre las columnas C y D; y con  $M_{E-F}$  el momento en el centro del claro.

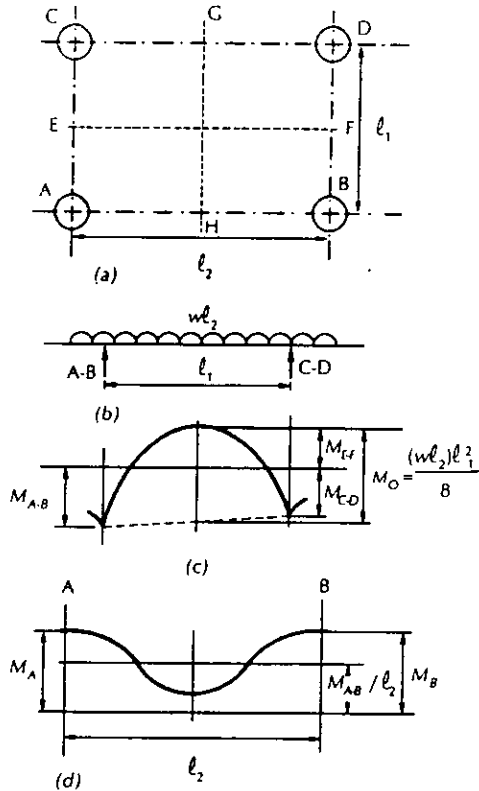
Es un principio de estática que el momento positivo en el centro del claro de una viga continua, más que el promedio de los momentos negativos en los apoyos, es igual al momento, que se conoce como momento estático total,  $M_0$ , **figura 5.18c** tiene por lo tanto el valor

$$M_0 = M_{E-F} + \frac{M_{A-B} + M_{C-D}}{2} = \frac{(wl_2) \times l_1^2}{8}$$

ya que  $wl_2$  es la carga por unidad de longitud y  $l_1$  es el claro de la viga.

La ecuación anterior permite calcular el momento estático total, pero no indica como se distribuye este momento en las diferentes zonas de la losa. No permite determinar, por ejemplo, el valor de los momentos negativos,  $M_{A-B}$  y  $M_{C-D}$ , ni del momento positivo  $M_{E-F}$ . Tampoco permite conocer la distribución de cada uno de estos tres momentos a lo ancho del tablero,  $l_2$ . Supóngase que de alguna manera se conociese el valor de  $M_{A-B}$ , si este se distribuye uniformemente a lo ancho del tablero, se tendría un momento  $M_{A-B} / 2$  por unidad de ancho, como se muestra en la **figura 5.18 d**. Pero no se distribuye así, sino que el momento alcanza su valor máximo en el eje de las

columnas y un valor mínimo en el centro del claro, en virtud de que la losa esta más restringida contra giro, o sea, que tiene mayor rigidez flexionaste, en el eje de columnas. Por lo tanto los momentos se distribuyen a lo ancho del tablero como se indica en forma aproximada con línea curva en la **figura 5.18 d**. Lo mismo que se ha dicho respecto al momento  $M_{A-B}$  sucede con los momentos  $M_{C-D}$  y  $M_{E-F}$



**Figura 5.18** Momento estático total en un tablero de losa.

El método directo de diseño de losas planas consiste básicamente en los siguientes pasos.

- Ajustar el cálculo del momento estático total para tomar en cuenta que los apoyos mostrados en la **figura 5.18 b** no son puntuales.
- Distribuir el momento estático total entre los momentos negativos  $M_{A-B}$  y  $M_{C-D}$  y el momento positivo  $M_{E-F}$
- Distribuir cada uno de los tres momentos anteriores a lo ancho del tablero.

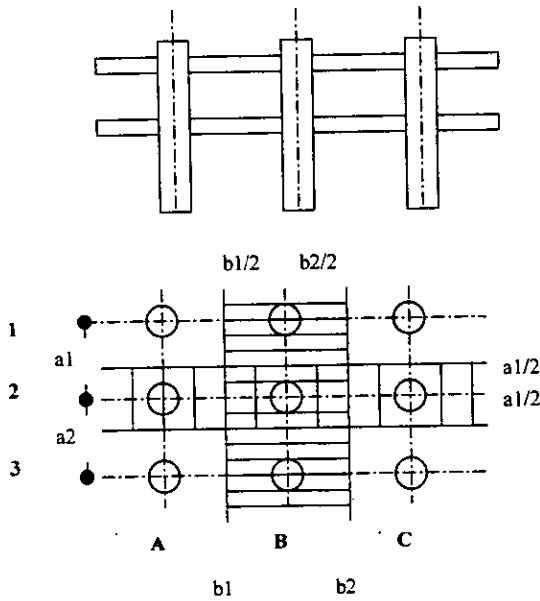
Para cada uno de estos tres pasos, el método directo utiliza coeficientes obtenidos principalmente en forma experimental.

En la **figura 5.18** se ha obtenido el momento estático total considerando que el tablero de la losa se sustitúa por una viga ancha de claro  $l_1$  y ancho  $l_2$ . El mismo razonamiento puede hacerse, considerando que el tablero de losa se sustituye por una viga de ancho  $l_1$  y claro  $l_2$ . En el método directo debe hacerse pues el análisis y la distribución del momento estático total en las dos direcciones, usando en cada una de ellas la carga total  $w$  por unidad de área.

- Método de la estructura equivalente.

Este método consiste en dividir a la estructura en un sistema de marcos cuyas columnas son las de la estructura y cuyas trabes son franjas de losa comprendidas entre líneas medias de tableros adyacentes. En la **figura 5.19** se ilustra este concepto. Así, en el eje 2 de la estructura mostrada, la trabe del marco será la franja de losa que tiene un ancho  $((a_1/2) + (a_2/2))$ . En el eje B, será la franja de ancho  $((b_1/2) + (b_2/2))$ . Obsérvese que los marcos deben considerarse en las dos direcciones y debe aplicarse la carga total de la franja en cada marco. Así, el marco del eje B tendrá una carga por unidad de longitud de  $w((b_1/2) + (b_2/2))$  siendo  $w$  la carga por unidad de área; y el marco del eje 2 tendrá una carga de  $w((a_1/2) + (a_2/2))$ . Además de la carga vertical, los marcos pueden estar sujetos a fuerzas horizontales.





**Figura 5.19** Estructura equivalente.

Uno de los problemas más complicados en el método de la estructura equivalente consiste en estimar la rigidez a flexión de las vigas del marco, que en realidad no son vigas, sino franjas de losa de un ancho mucho mayor que la sección transversal de las columnas. A diferencia de marcos constituidos por columnas y vigas, en sistemas de losa plana la rigidez de las vigas no está concentrada en el eje de las columnas; la rigidez de la losa es mayor en el eje de las columnas y va disminuyendo hacia los extremos de las franjas mostradas en la **figura 5.19**. Otra aplicación radica en que el comportamiento de los sistemas de losa plana es diferente bajo cargas verticales y bajo cargas laterales. Se ha visto que bajo las primeras, los momentos flexionantes se distribuyen en forma más uniforme a lo ancho de las franjas de losa que bajo la acción de las segundas. Por esta razón, resulta necesario hacer consideraciones diferentes para llevar a cabo el análisis estructural. Cuando la estructura está sujeta a cargas verticales que cuando lo está a cargas laterales.

- Análisis aproximado por carga vertical.

El análisis bajo cargas verticales uniformes de estructuras que cumplan con los requisitos que siguen, formadas por losas planas y columnas sin capiteles ni ábacos, puede efectuarse asignando a las columnas la mitad de sus rigideces angulares y usando el ancho completo de la losa para valuar su rigidez.

Las limitaciones que deben satisfacerse son:

- La estructura da lugar a marcos sensiblemente simétricos.
- Todos los entrepisos tienen el mismo número de crujeas.
- En una cierta dirección, ningún claro es mayor que 1.2 veces el menor de ellos.
- El espesor de la losa es aproximadamente igual al 5% del claro mayor del mayor tablero.
- La carga viva por metro cuadrado es aproximadamente la misma en los distintos tableros de un piso.

Cuando no se cumplen las limitaciones anteriores, debe recurrirse a métodos más precisos, como el del elemento finito, o al método generalizado del ACI.

- Transmisión de momento entre losa y columnas.

Cuando por excentricidad de la carga vertical o por la acción de fuerzas laterales haya transmisión de momento entre losa y columna, se supondrá que una fracción del momento dada por:

$$1 - \alpha = \frac{1}{1 + 0.67\sqrt{(C1 + d) / (C2 + d)}}$$

se transmite por flexión en un ancho igual a  $C2 + 3h$ , centrado con el eje de columnas; refuerzo de la losa necesario para este momento debe colocarse en el ancho mencionado

respetando siempre la cuantía máxima de refuerzo. El resto del momento, esto es, la fracción  $\alpha$ , se admitirá que se transmite por esfuerzos cortantes y torsiones.

- Dimensionamiento del refuerzo para flexión.

En estructuras sujetas a carga vertical y fuerzas laterales de sismo se admitirá proceder en la forma siguiente:

1. Determinése el refuerzo necesario por carga vertical y se deberá distribuir en las franjas de columna y centrales de acuerdo a la distribución de los momentos en las franjas, excepto el necesario para momento negativo exterior en claros extremos, el cual se colocará como si fuera refuerzo por sismo. Al menos la mitad del refuerzo negativo por carga vertical de las franjas de columna quedará en un ancho  $C2 + 3h$  centrado con respecto al eje de columnas ( $C2$  es la dimensión transversal de la columna normal a la dirección de análisis y  $h$  el espesor de losa.)
2. Determinése el refuerzo necesario por sismo y colóquese en el mencionado ancho  $C2 + 3h$ , de modo que al menos el 60% de él cruce el núcleo de la columna correspondiente.

El refuerzo necesario por sismo puede obtenerse a partir de la envolvente de momentos resistentes necesarios,  $M_u$ .

- Disposiciones complementarias sobre el refuerzo.

Además de los requisitos anteriores, el refuerzo cumplirá con lo siguiente:

- Al menos la cuarta parte del refuerzo negativo que se tenga sobre un apoyo en una franja de columna debe continuarse a todo lo largo de los claros adyacentes.

- Al menos la mitad del refuerzo positivo máximo debe extenderse en todo el claro correspondiente.
- En las franjas de columna debe existir refuerzo positivo continuo en todo el claro en cantidad no menor que la tercera parte del refuerzo negativo máximo que se tenga en la franja de columna en el claro considerado.
- El refuerzo del lecho inferior que atraviesa el núcleo de una columna no será menor que la mitad del que lo cruce en el lecho superior y debe anclarse de modo que pueda fluir en las caras de la columna.
- Toda nervadura de losas aligeradas llevará, como mínimo, a todo lo largo, una barra en el lecho inferior y una en el lecho superior.
- Todo el refuerzo cumplirá con los requisitos de anclaje.

- Secciones críticas para momento.

La sección crítica para flexión negativa en las franjas de columna y central se supondrá a una distancia  $C/2$  del eje de columnas correspondientes. Aquí,  $C$  es la dimensión transversal de la columna paralela a la flexión, o el diámetro de la intersección con la losa o el ábaco, del mayor cono circular recto, con vértice de  $90^\circ$ , que pueda inscribirse en el capitel.

En columnas se considerará como crítica la sección de intersección con la losa o el ábaco. Si hay capiteles, se tomará la intersección con el arranque del capitel.

- Distribución de los momentos en las franjas.

Los momentos flexionantes en secciones críticas a lo largo de las losas de cada marco se distribuirán entre las franjas de columna y las franjas centrales, de acuerdo con los porcentajes indicados en la tabla siguiente:

Momentos	Franja de columna	Franjas centrales
Momentos positivos *	60	40
Momentos negativos	75	25

\* si el momento es adyacente a una columna se distribuirá como si fuera negativo.

- Peralte mínimo.

Las especificaciones que presentan al respecto las NTC - 96 son las siguientes:

Puede omitirse el cálculo de las deflexiones en tableros interiores de losas planas macizas si su peralte efectivo mínimo no es menor que  $\cdot KL ( 1 - 2c / 3L )$  donde L es el claro mayor y K un coeficiente que se determina como sigue:

- a) Concreto clase 1

Losas con ábacos  $K = 0.0004 \sqrt[4]{f_s} w \geq 0.020$

Losas sin ábacos  $K = 0.00075 \sqrt[4]{f_s} w \geq 0.025$

- b) Concreto clase 2

El valor de K que resulta con los criterios a) se multiplicará por 1.5

En las expresiones anteriores  $f_s$  es el esfuerzo en el acero en condiciones de servicio en  $kg/cm^2$  ( puede suponerse igual a  $0.6f_y$  ),  $w$  es la carga en condiciones de servicio en  $kg/cm^2$ , y  $c$  es la dimensión de la columna o capitel paralela a L.

Los valores obtenidos con la ecuación  $KL ( 1 - 2c / 3L )$  deben aumentarse 20% en tableros exteriores y 20% en losas aligeradas. Cuando se use concreto clase 1, en ningún caso el espesor de losa,  $h$ , será menor de 10 cm., si existe ábaco, o menor de 13 cm. si no existe, cuando se use concreto clase 2 estos valores se multiplicarán por 1.5

- Dimensiones de los ábacos.

Las dimensiones de cada ábaco en planta no serán menores que un tercio del claro en la dirección considerada. El peralte efectivo del ábaco no será menor que 1.3 por el peralte efectivo del resto de la losa, pero no se supondrá, mayor que 1.5 por dicho peralte, para fines de dimensionamiento.

- Aberturas.

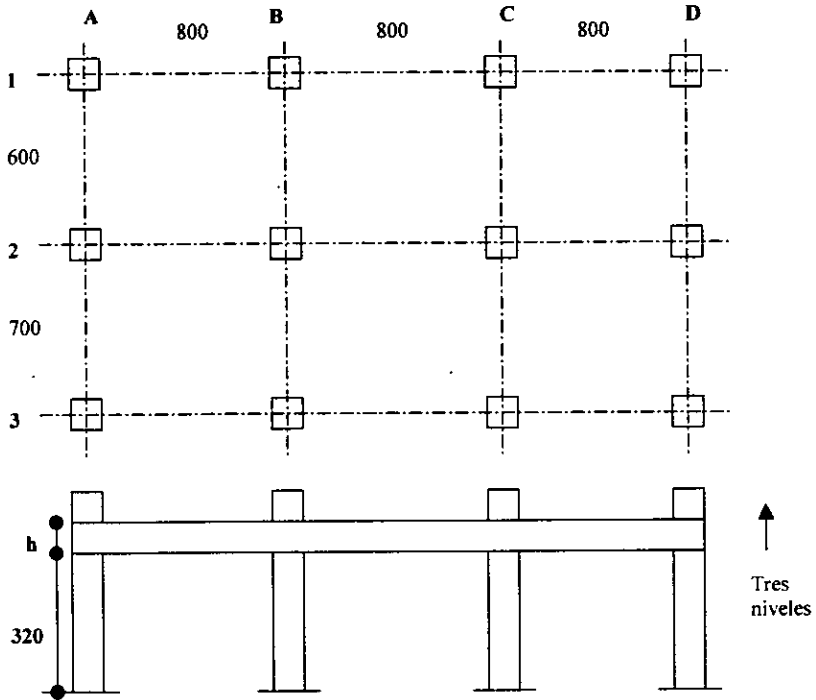
Se admiten aberturas de cualquier tamaño en la intersección de dos franjas centrales, a condición de que se mantenga, en cada dirección, el refuerzo total que se requeriría si no hubiera la abertura.

En la intersección de dos franjas de columna, las aberturas no deben interrumpir más de un octavo del ancho de cada una de dichas franjas. En los lados de las aberturas debe suministrarse el refuerzo que correspondería al ancho que se interrumpió en cada dirección.

En la intersección de una franja de columna y una franja central las aberturas no deben interrumpirse más de un cuarto del ancho de cada una de dichas franjas. En los lados de las aberturas debe suministrarse el refuerzo que correspondería al ancho que se interrumpió en cada dirección.

## Diseño de una losa plana aligerada por el método de la estructura equivalente.

Datos:



Columnas 60 X 70 cm.

Carga viva  $300 \text{ kg/m}^2$  (condiciones de servicio)

Recubrimientos  $130 \text{ kg/m}^2$

$f'c = 200 \text{ kg/cm}^2$

$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

### Determinación del peralte.

Se usarán casetones de 60 X 60 X 30 cm. y capa de concreto de 5 cm.  $h = 30 + 5 = 35$  cm.

Revisión de deflexiones.

$$d_{min.} = KL(1 - 2c/3\ell) \times 1.20$$

$$K = 0.00075 \sqrt[3]{f_s w}$$

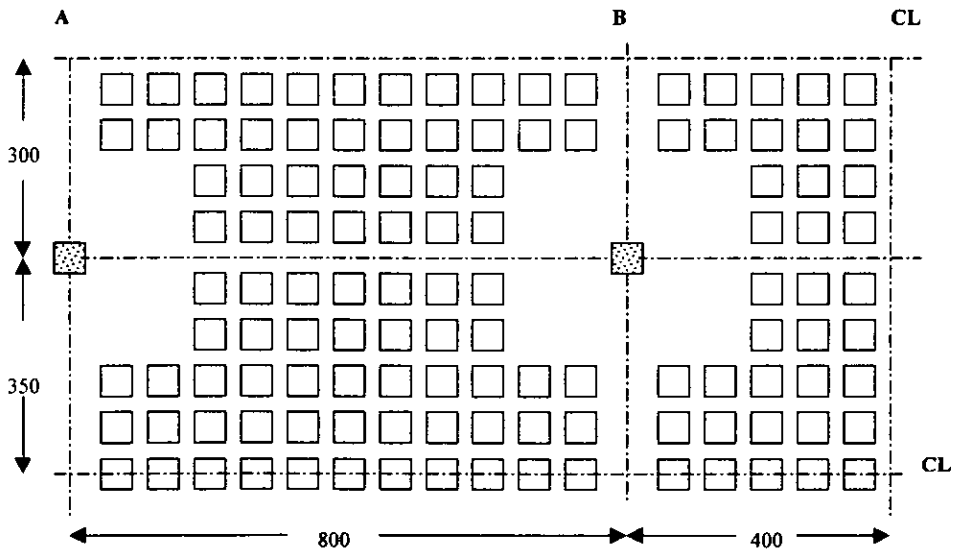
$$f_s = 0.6f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$w = 0.00075 \sqrt[3]{2520 \times 980} = 0.030 > 0.025$$

$$d_{min.} = (0.030 \times 800) \left(1 - \frac{2 \times 60}{3 \times 800}\right) \times 1.2 = 27.4 \text{ cm.}$$

$$h_{min.} = 27 + \text{recubrimiento} = 27 + 3 = 30 \text{ cm.}$$

Croquis de Casetones.



Revisión del peso propio de la losa.

En tablero de 8 X 6 m.



$$\text{Volumen} = 8 \times 6 \times 0.35 - 72 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.30 = 9.0 \text{ m}^3$$

$$W = 9 \times 2400 = 21\,600 \text{ kg.}$$

$$W = 21600 \text{ kg} / 48 \text{ m}^2 = 450 \text{ kg/m}^2$$

### Carga definitiva.

$$W = 300 + 130 + 450 = 880 \text{ kg/m}^2$$

$$W_u = 880 \times 1.4 = 1232 \text{ kg/m}^2$$

$$W_u = 880 \times 1.1 = 968 \text{ kg/m}^2$$

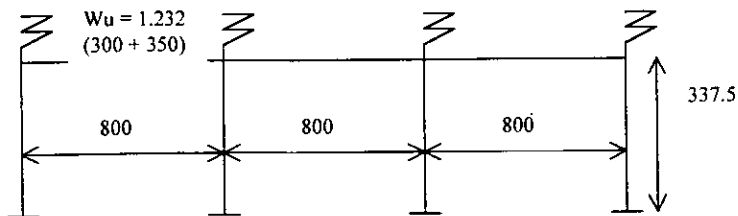
Factores de carga de las NTC - 96 de 1.4 para carga muerta y viva y 1.1 para la combinación de cargas muerta y viva con fuerzas sísmicas.

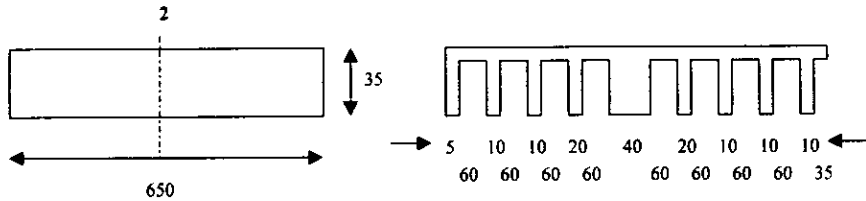
### Análisis estructural.

Para efectuar el análisis estructural, el primer paso consiste en determinar las rigideces de las vigas equivalentes y de las columnas de los marcos. Como en las NTC se especifican reglas distintas para calcular estas rigideces según se trate de cargas verticales o de fuerzas horizontales, es necesario plantear dos marcos diferentes, uno para cada condición de carga.

A ) carga vertical.

Se ilustra el eje 2





Sección en el ábaco.

Para la sección en el ábaco

$$I_a = \frac{650 \times 35^3}{12} = 232 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la sección en la zona aligerada.

$$\bar{x} = \frac{650 \times 5 \times 32.5 + 135 \times 30 \times 15}{650 \times 5 + 135 \times 30} = 22.8 \text{ cm.} \quad \text{Centroide}$$

Momento de inercia

$$I_1 = \frac{650 \times 5^3}{12} + 650 \times 5 \times (32.5 - 22.8)^2 + \frac{135 \times 30^3}{12} + 135 \times 30 \times (22.8 - 15)^2 = 86 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Cálculo de la rigidez a flexión y del factor de transporte

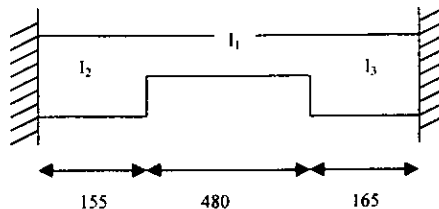
Ver ecuaciones para calcular los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte de vigas con tramos iguales y con momentos de inercia distintos al tramo central.

$$l = 8 \text{ m.}$$

$$\lambda_1 = \frac{155}{800} = 0.19$$

$$\lambda_2 = \frac{165}{800} = 0.21$$

$$\lambda_{\text{promedio}} = \frac{160}{800} = 0.20$$



## Rigidez a flexión

$$K = \frac{\theta_{AA}}{\theta^2_{AA} - \theta^2_{AB}}$$

## Factor de transporte

$$FT = \frac{\theta_{AB}}{\theta_{AA}}$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3} \lambda^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( \lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3} \lambda^3 \right)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{6} - \lambda^2 - \frac{2}{3} \lambda^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( \lambda^2 - \frac{2}{3} \lambda^3 \right)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{3} - 0.2 + 0.2^2 - \frac{2}{3} \times 0.2^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( 0.2 - 0.2^2 + \frac{2}{3} \times 0.2^3 \right)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1} (0.168) + \frac{\ell}{EI_2} (0.165)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{10^4 E} \left( \frac{0.168}{86} + \frac{0.165}{232} \right) = \frac{0.00266 \times \ell}{10^4 E}$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{6} - 0.2^2 + \frac{2}{3} \times 0.2^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( 0.2^2 - \frac{2}{3} \times 0.2^3 \right)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1} (0.132) + \frac{\ell}{EI_2} (0.0347)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{10^4 E} \left( \frac{0.132}{86} + \frac{0.0347}{232} \right) = \frac{0.00168 \times \ell}{10^4 E}$$

$$K = \frac{10^4 E}{\ell} \left( \frac{0.00266}{0.00266^2 - 0.00168^2} \right) = \frac{625 \times 10^4 E}{\ell}$$

$$K = \frac{625 \times 10^4 E}{800} = 0.781 \times 10^4 E$$

$$FT = \frac{0.00168}{0.00266} = 0.63$$

Momento de empotramiento perfecto

$$\bar{M} = \frac{\theta_A}{\theta_{AA} + \theta_{AB}}$$

$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI_1} (1 - 6\lambda^2 + 4\lambda^3) + \frac{w\ell^3}{24EI_2} (6\lambda^2 - 4\lambda^3)$$

$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI_1} (1 - 6 \times 0.2^2 + 4 \times 0.2^3) + \frac{w\ell^3}{24EI_2} (6 \times 0.2^2 - 4 \times 0.2^3)$$

$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI_1} \left( \frac{0.792}{86} + \frac{0.208}{232} \right) = \frac{0.010 W\ell^3}{24EX10^4}$$

$$\bar{M} = \frac{w\ell^2}{24} \left( \frac{0.010}{0.00266 + 0.00168} \right) = \frac{wu\ell^2 \times 2.30}{24}$$

$$\bar{M} = \frac{wu\ell^2}{10.4}$$

$$Wu = 1120 (3 + 3.5) = 7280 \text{ kg/m}$$

$$\bar{M} = \frac{7280 \times 8^2}{10.4} = 44\,492 \text{ kg/m}$$

Para la columna del nivel 0 – 1

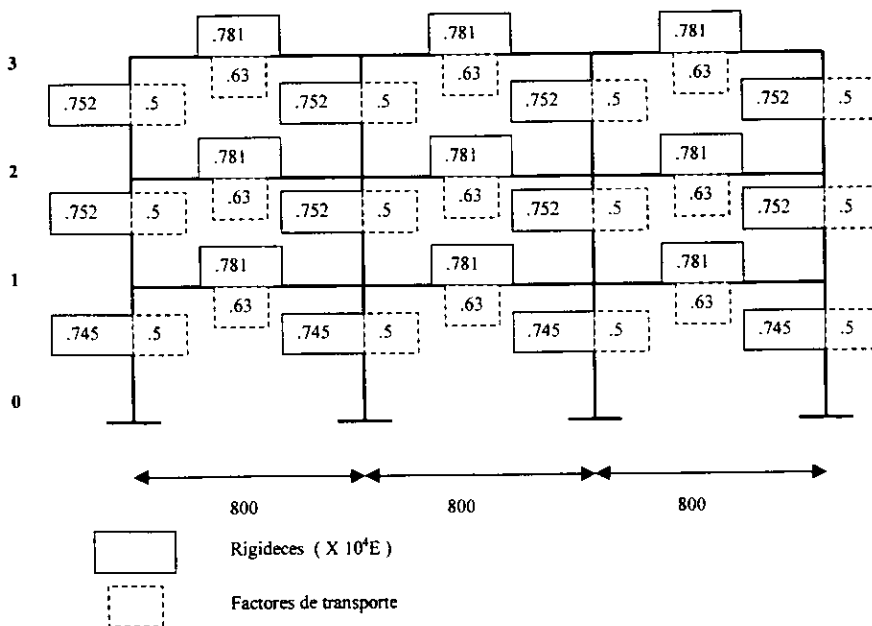
$$I = bh^3 / 12 = 70 \times 60^3 / 12 = 126 \times 10^4 E$$

$$K = 4EI / L = 4 \times 126 \times 10^4 E / 337.5 = 1.49 \times 10^4 E$$

$$K_{\text{efectiva}} = \frac{1}{2} K = 0.745 \times 10^4 E$$

De manera análoga, para la columna del nivel 1 – 2, se obtiene  $K_{\text{efectiva}} = 0.752 \times 10^4 E$ .

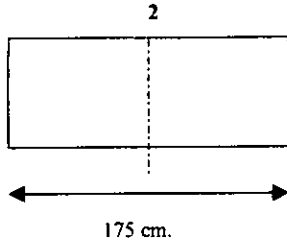
A continuación se presentan las rigideces y factores de transporte del marco a analizar.



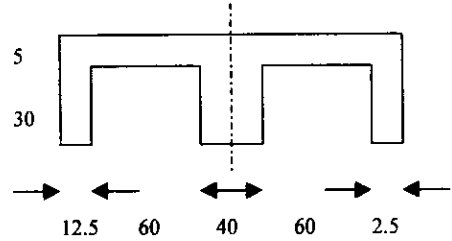
B) Cargas laterales.

Ancho equivalente de la viga.

$$b = C_2 + 3h = 70 + (3 \times 35) = 175 \text{ cm.}$$



Sección en el ábaco.



Sección en la zona aligerada.

Para la sección en el ábaco

$$I_2 = \frac{175 \times 35^3}{12} = 62.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la sección en la zona aligerada

$$\bar{x} = \frac{175 \times 5 \times 32.5 + 55 \times 30 \times 15}{175 \times 5 + 55 \times 30} = 21.1 \text{ cm.} \quad \text{Centroide}$$

$$I_1 = \frac{175 \times 5^3}{12} + 175 \times 5(32.5 - 21.1)^2 + \frac{55 \times 30^3}{12} + 55 \times 30(21.1 - 15)^2$$

$$I_1 = 30.1 \times 10^4 \text{ cm}^4 \quad \text{Momento de Inercia}$$

Cálculo de la rigidez a flexión y del factor de transporte.

El valor de  $\lambda_{\text{promedio}}$  es el mismo  $\lambda_{\text{promedio}} = 0.2$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1}(0.168) + \frac{\ell}{EI_2}(0.165)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{10^4 E} \left( \frac{0.168}{30.1} \right) + \left( \frac{0.165}{62.5} \right) = \frac{0.00822\ell}{10^4 E}$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1}(0.132) + \frac{\ell}{EI_2}(0.0347)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{10^4 E} \left( \frac{0.132}{30.1} \right) + \left( \frac{0.0347}{62.5} \right) = \frac{0.00494\ell}{10^4 E}$$

$$K = \frac{10^4 E}{\ell} \left( \frac{0.00822}{0.00822^2 - 0.00494^2} \right) = \frac{190.4 \times 10^4 E}{\ell}$$

$$K = \frac{190.4 \times 10^4 E}{800} = 0.238 \times 10^4 E$$

$$FT = \frac{0.00494}{0.00822} = 0.60$$

Para la columna nivel 0.1

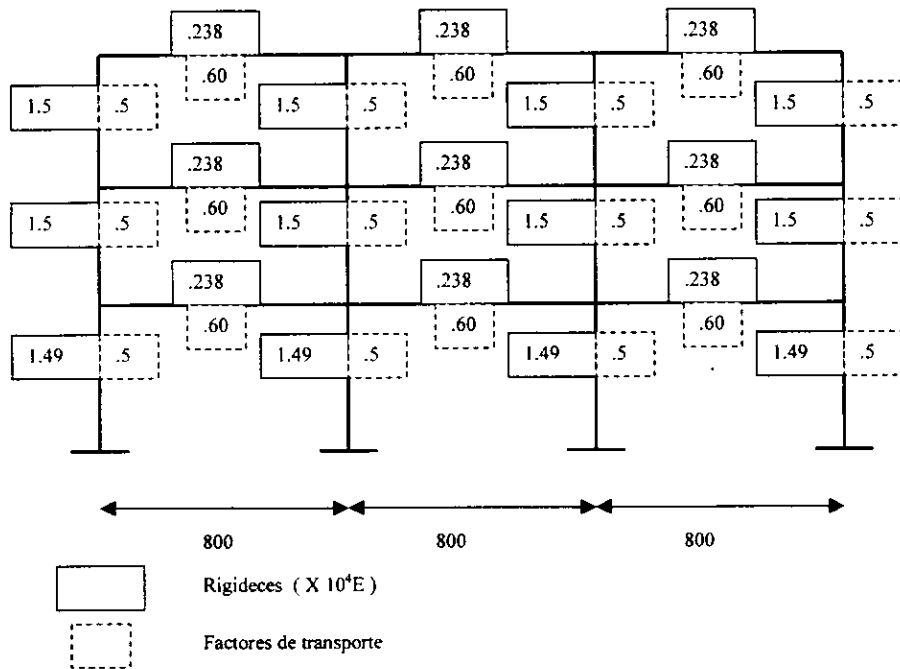
$$I = bh^3 / 12 = (70 \times 60^3) / 12 = 126 \times 10^4$$

$$K = \frac{4EI}{\ell} = \frac{4 \times 126 \times 10^4 E}{337.5} = 1.49 \times 10^4 E$$

Para la columna nivel 0.2

$$K = 1.5 \times 10^4 E$$

Rigideces y factores de transporte del marco a analizar

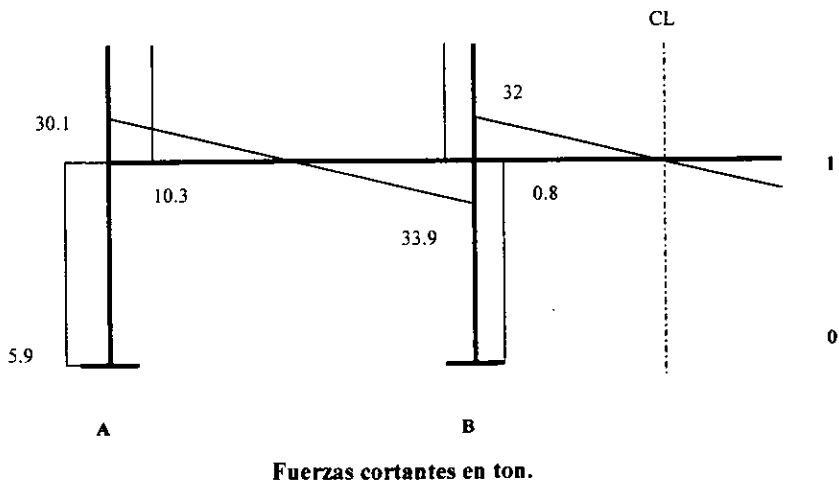
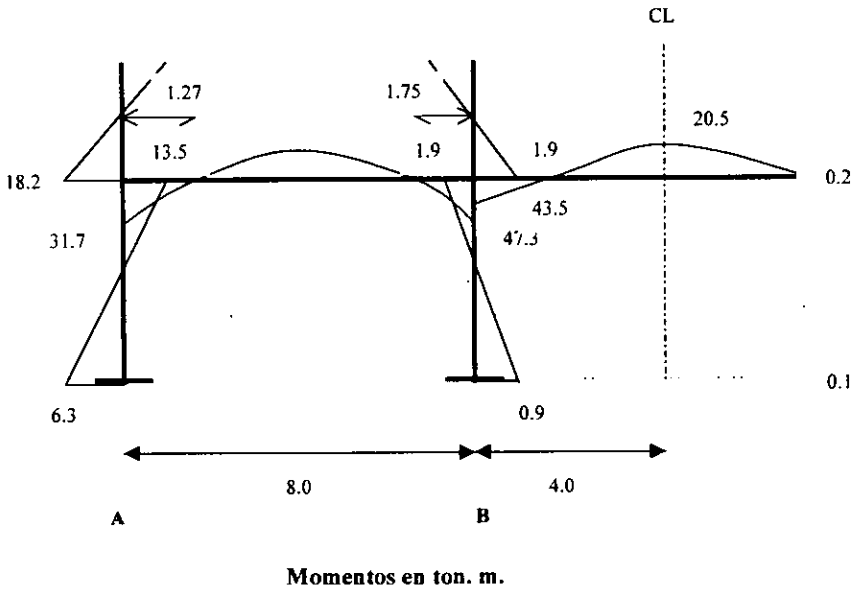


Marco en el eje 2

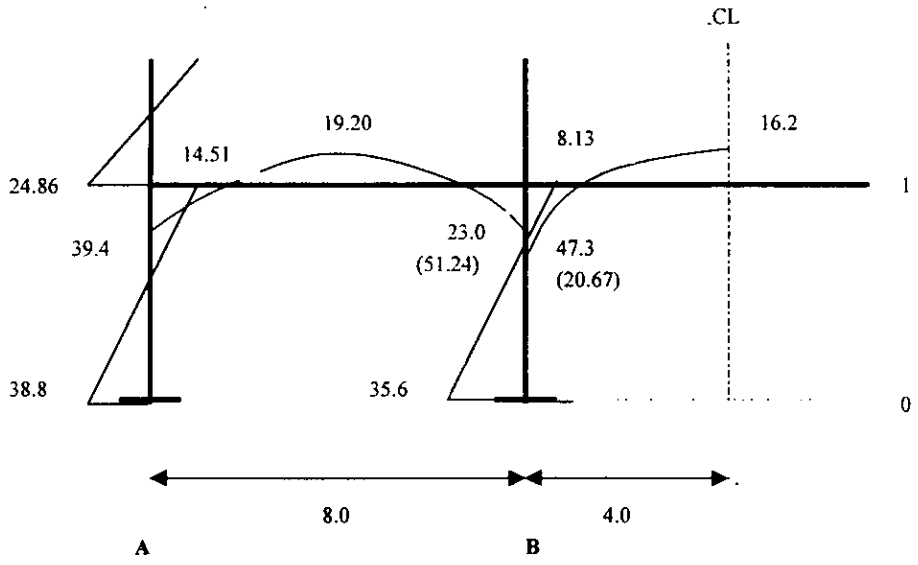


Después de analizar el marco se obtuvieron los siguientes momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

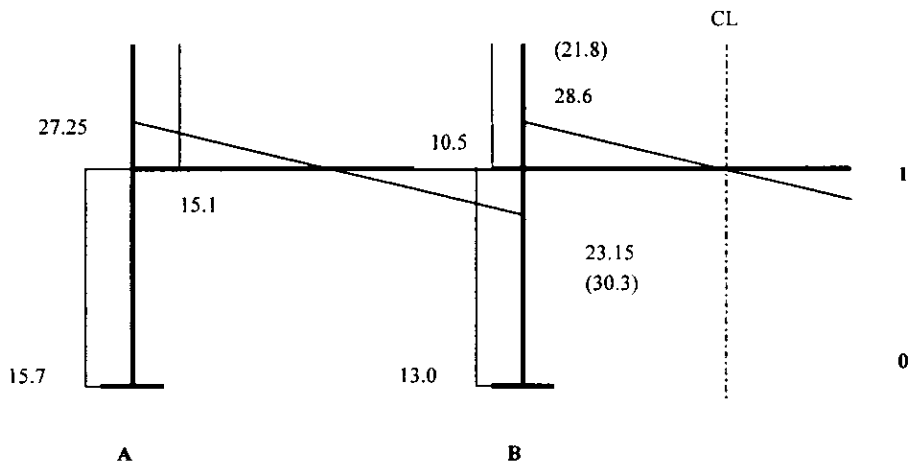
A) Carga muerta y carga viva.



B) Carga muerta, carga viva y carga accidental. ( fuerzas horizontales ).



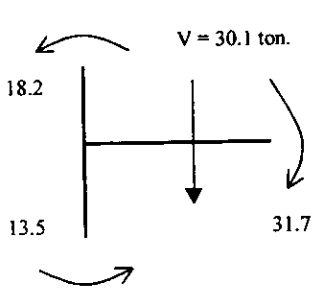
Momentos en ton. m.



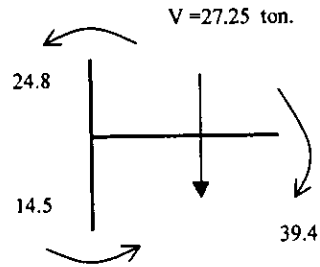
Fuerzas cortantes en ton.

## Revisión del cortante por penetración de la columna A - Z

Acciones sobre la columna.

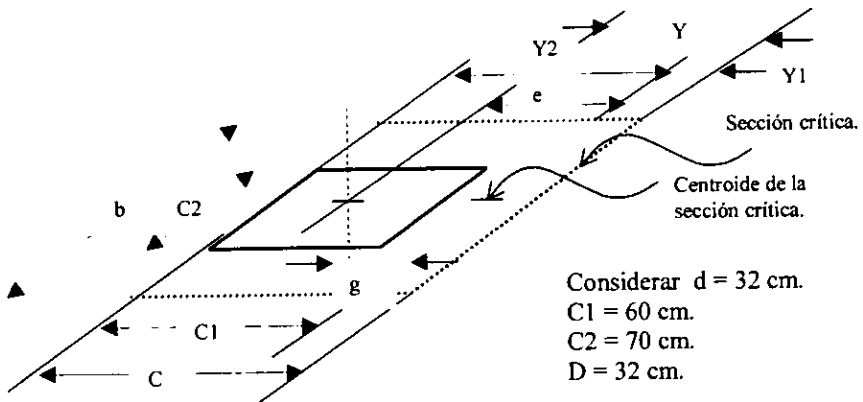


Carga muerta y viva.



Carga muerta, viva y accidental.

Propiedades geométricas.



$$C = C1 + d / 2 = 60 + 16 = 76 \text{ cm.}$$

$$B = C2 + d = 70 + 32 = 102 \text{ cm.}$$

$$\text{Area de la sección crítica} = A_c = (2c + b)d = (2 \times 76 + 102) \times 32 = 8128 \text{ cm}^2$$

Cálculo del centroide de la sección crítica.

$$(2c + b) \times g = b \times \frac{c}{2}$$

$$g = \frac{bc}{2(2c + b)} = \frac{102 \times 76}{2(2 \times 76 + 102)} = 15.2 \text{ cm.}$$

$$Y = C - C1 / 2 = 76 - 60 / 2 = 46 \text{ cm.}$$

$$Y1 = C / 2 - g = 76 / 2 - 15.2 = 22.8 \text{ cm.}$$

$$e = Y - Y1 = 46 - 22.8 = 23.2 \text{ cm.}$$

Cálculo del momento polar de inercia.

$$J = \frac{cd^3}{6} + \frac{dc^3}{6} + b d Y1^2 + 2C d g^2$$

$$J = \frac{76 \times 32^3}{6} + \frac{32 \times 76^3}{6} + 102 \times 32 \times 22.8^2 + 2 \times 76 \times 3 \times 15.2^2$$

$$J = 5576800 \text{ cm}^4$$

Cálculo de la fracción de momento flexionaste que se transmite por excentricidad de la fuerza cortante.

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C1 + \frac{d}{2}}{C2 + d}}}$$

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{76}{102}}} = 0.365$$

a) revisión bajo carga muerta y viva.

$$(V_u \text{ max.}) = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v \times M_u}{J} \gamma_1$$

$$V_u \text{ max.} = \frac{30100}{8128} + \frac{0.365 \times 31.7 \times 10^5 \times 22.8}{55.768 \times 10^5}$$

$$V_u \text{ max.} = 3.7 + 4.7 = 8.4 \text{ kg./cm}^2$$

$$V_c = FR\sqrt{f^*c} = 0.7\sqrt{160} = 8.8 \text{ kg./cm}^2$$

$$V_c = (0.5 + \gamma) \times FR\sqrt{f^*c} = (0.5 + \frac{60}{70}) \times FR\sqrt{f^*c} > FR\sqrt{f^*c}$$

Como  $V_u \text{ max.} < V_c$ , no se requiere refuerzo por cortante.

b) revisión bajo carga muerta, viva y accidental.

$$V_u \text{ max.} = \frac{27250}{8128} + \frac{0.365 \times 39.4 \times 10^5 \times 22.8}{55.768 \times 10^5}$$

$$V_u \text{ max.} = 3.4 + 5.9 = 9.3 \text{ kg / cm}^2$$

Como  $V_u \text{ max.} > V_c$ , se requiere refuerzo por cortante.

Cálculo del refuerzo por cortante.

$$V_{CR} = 0.4F_R \sqrt{f^*c} bd$$

$$b = \text{ancho de la viga ficticia} = d + C2 = 32 + 70 = 102 \text{ cm.}$$

$$V_{CR} = 0.4 \times 0.7 \times \sqrt{160} \times 102 \times 32 = 11560 \text{ kg.}$$

$$V_u = V_{u \text{ max. } bd} = 9.3 \times 102 \times 32 = 30\,355 \text{ kg.}$$

$$V_s = V_u - V_{CR} = 30355 - 11560 = 18\,795 \text{ kg.}$$

$$S = \frac{A_v \times f_y \times d}{FR V_s}$$

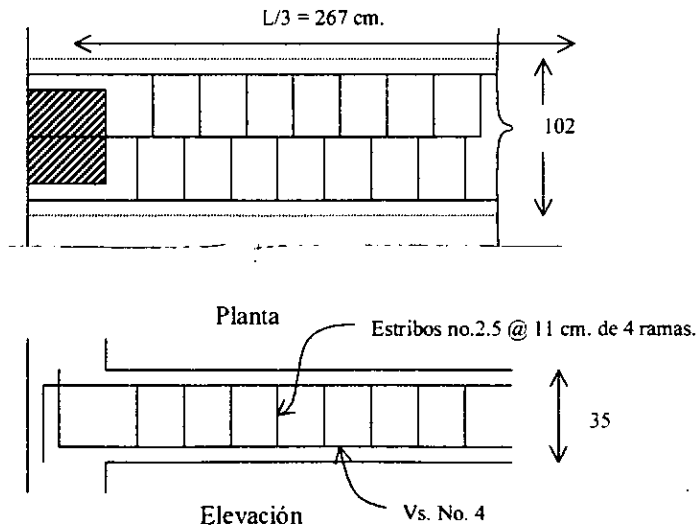
Suponiendo estribos No.2.5 de cuatro ramas,  $A_v = 1.96 \text{ cm}^2$

$$S = \frac{1.96 \times 4200 \times 32}{0.7 \times 18\,795} = 20 \text{ cm.}$$

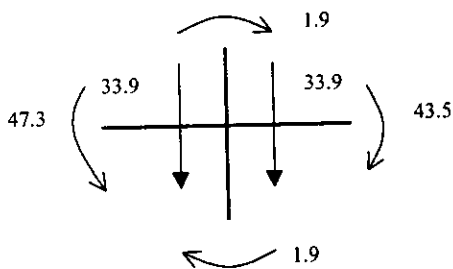
$$S > S_{\text{max.}} \frac{d}{3} = 11 \text{ cm.}$$

Se colocan estribos No. 2.5 a cada 11 cm. en una viga ficticia de ancho  $b = 102 \text{ cm.}$  y peralte  $d = 32 \text{ cm.}$  También se colocan barras longitudinales en las esquinas de la viga y en los dobleces de los estribos como se presenta en el croquis siguiente.

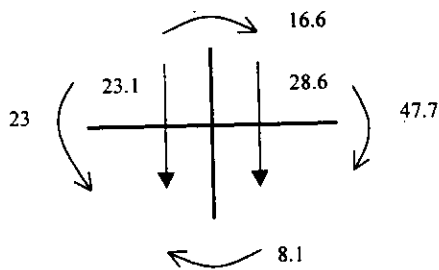
Croquis del refuerzo transversal.



## Revisión del cortante por penetración de la columna B - 2

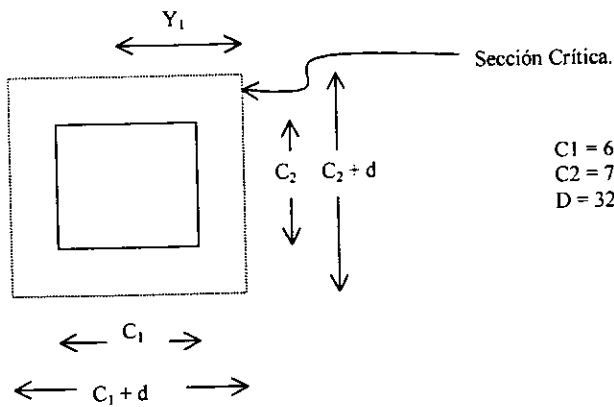


Carga muerta y viva.



Carga muerta, viva y accidental

### Propiedades geométricas.



C1 = 60 cm.  
C2 = 70 cm.  
D = 32 cm.

$$C_1 + d = 60 + 32 = 92 \text{ cm.}$$

$$C_2 + d = 70 + 32 = 102 \text{ cm.}$$

$$Y_1 = \frac{C_1 + d}{2} = \frac{92}{2} = 46 \text{ cm.}$$

Area de la sección crítica.

$$A_c = 2d (C_1 + C_2 + 2d)$$

$$A_c = 2 \times 32 (60 + 70 + 64) = 12416 \text{ cm}^2$$

Cálculo de la fracción de momento flexionante que se transmite por excentricidad de la fuerza cortante.

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(C_1 + d)}{C_2 + d}}}$$

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{92}{102}\right)}} = 0.39$$

Cálculo del momento polar de inercia.

$$J = \frac{d \times (c + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d) \times d^3}{6} + \frac{d \times (c_2 + d)(c_1 + d)^2}{2}$$

$$J = \frac{32 \times 92^3}{6} + \frac{92 \times 32^3}{6} + \frac{32 \times 102 \times 92^2}{2}$$

$$J = 184.69 \times 10^5 \text{ cm}^4$$



a) revisión bajo carga muerta y viva.

$$(Vu \text{ max.}) = \frac{Vu}{Ac} + \frac{\gamma_v \times Mu}{J} Y_1$$

$$Vu \text{ max.} = \frac{(33.9 + 32) \times 10^3}{12416} + \frac{0.39(47.3 - 43.5) \times 10^5 \times 46}{184.69 \times 10^5}$$

$$Vu \text{ max.} = 5.3 + 0.4 = 5.7 \text{ kg./cm}^2$$

$$Vc = FR\sqrt{f'c} = 0.7\sqrt{160} = 8.8 \text{ kg./cm}^2$$

$Vu \text{ max.} < Vc$ , por lo tanto no se requiere refuerzo por cortante.

Como  $Vu \text{ max.} < Vc$ , no se requiere refuerzo por cortante.

b) revisión bajo carga muerta, viva y accidental.

$$Vu \text{ max.} = \frac{Vu}{Ac} + \frac{\gamma_v Mu}{J} Y_1$$

$$Vu \text{ max.} = \frac{(23.25 + 28.57) \times 10^3}{12416} + \frac{0.39 (47.7 - 23.0) \times 10^5 \times 46}{184.69 \times 10^5}$$

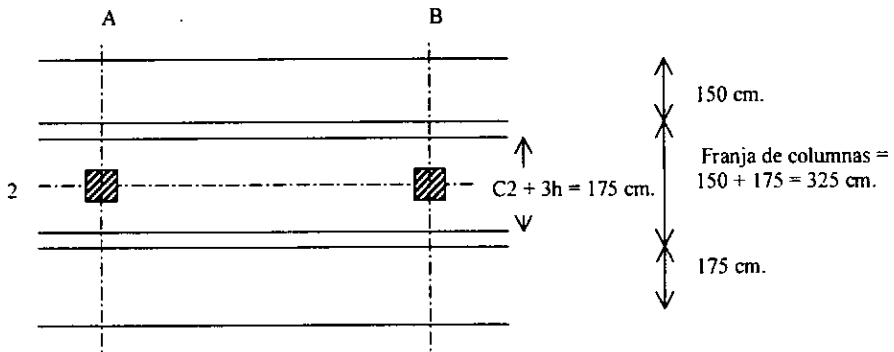
$$Vu \text{ max.} = 4.2 + 2.4 = 6.6 \text{ kg / cm}^2 < Vc$$

No se requiere refuerzo por cortante

El croquis de refuerzo mínimo es similar al de la columna A - 2.



## Dimensionamiento por flexión.



Eje 2, claro A - B, extremo A ( momentos negativos )

El momento máximo se presenta bajo carga muerta, carga viva y carga accidental simultáneamente.

$$M_u = 39.4 \text{ ton. m.}$$

El momento en la sección crítica localizada en el paño de columna es

$$M_{\text{CRIT.}} = M_{\text{EJE}} - V \frac{C1}{2} + W \left( \frac{C1}{2} \right) \left( \frac{C1}{4} \right)$$

$$M_{\text{CRIT.}} = 39.4 - 27.25 \times 0.30 + 0.924 \times 6.5 \times 0.30 \times 0.15$$

$$M_{\text{CRIT.}} = 31.5 \text{ ton.}$$

Por ser un borde, todo el refuerzo necesario se debe colocar en un ancho  $C2 + 3h = 175 \text{ cm.}$

$$\frac{MR}{FR \text{ bd}^2 f'c} = \frac{31.5 \times 10^5}{0.9 \times 175 \times 32^2 \times 136} = 0.144$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.165$$

$$p = q f'c / fy = 0.165 \times 136 / 4200 = 0.0053$$

$$p \text{ min.} = 0.7 \sqrt{f'c} / fy = 0.7 \sqrt{200} / 4200 = 0.0024$$

$$p \text{ min.} = \frac{f'c}{fy} \times \frac{4800}{fy + 6000} = \frac{136}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.015$$

$$0.75 p \text{ balanceada.} = 0.75 \times 0.015 = 0.011$$

$$p \text{ min.} < p < p \text{ balanceada}$$

Se usarán barras (11) del no. 6 repartidas en la franja de 175 cm. Al menos el 60 % ( 7 barras ) deben pasar por el núcleo de la columna.

Fuera de la franja de 175 cm. de ancho quedan las siguientes nervaduras:

1 fracción de nervadura de ancho  $b = 7.5$  cm.

1 fracción de nervadura de ancho  $b = 12.5$  cm.

5 nervaduras de ancho  $b = 10$  cm.

$\frac{1}{2}$  nervadura de ancho  $b = 5$  cm.

En estas nervaduras se deben colocar el acero mínimo, tomando  $b = 10$  cm., el área necesaria sería:

$$As = p \text{ min.} b d = 0.0024 \times 10 \times 32 = 0.768 \text{ cm}^2$$

Colocar una barra del no. 4 en cada nervadura.

Transmisión de momento por flexión entre losa y columna.

$$(1 - \gamma_v) M_u = (1 - 0.365) (39.4) = 25.0 \text{ ton.m} < (M_{\text{crit.}} = 31.5)$$

Por lo tanto no hay problema de transmisión de momento.

Eje dos, claro A – B, momentos positivos.

a) Por cargas verticales

a – 1) Momento en la franja de columnas  $M (+) = 24.5 \text{ t.m.}$

$$\text{Momento en la franja de columnas} = 0.6 \times 24.5 \text{ ton.m}$$

Ancho de todas las nervaduras en la franja de columnas:

1. una nervadura de 40 cm.
2. dos nervaduras de 20 cm.
3. una nervadura de 10 cm.

$$b = 40 + 20 + 10 = 70 \text{ cm.}$$

$$\frac{MR}{FR b d^2 f'c} = \frac{14.7 \times 10^4}{0.9 \times 70 \times 32^2 \times 136} = 0.167$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.185$$

$$p = q f'c / f_y = 0.185 \times 136 / 4200 = 0.0060$$

$$p_{\text{min}} < p < p_{\text{bal.}} \times 0.75$$

Areas de acero:

- En la nervadura de 40 cm. =  $0.0060 \times 40 \times 32 = 7.7 \text{ cm}^2$  Usar tres barras del no. 6
- En las dos nervaduras de 20 cm. =  $0.0060 \times 20 \times 32 = 3.8 \text{ cm}^2$  Usar tres barras del no. 4.
- En la nervadura de 10 cm. =  $0.0060 \times 10 \times 32 = 1.92 \text{ cm}^2$  Usar dos barras del no. 4.

a-2) Momento en la franja central

$$M(+) = 24.5 \text{ ton.m}$$

$$\text{Momento en la franja central} = 0.4 \times 25.4 = 9.8 \text{ ton.m}$$

Ancho de todas las nervaduras en la franja central.

1. Cuatro nervaduras de 10 cm.
2. Una nervadura de 5 cm.

$$b = 4 \times 10 + 5 = 45 \text{ cm.}$$

$$\frac{MR}{FR bd^2 f'c} = \frac{9.8 \times 10^5}{0.9 \times 45 \times 32^2 \times 136} = 0.17$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.19$$

$$p = q f'c / f_y = 0.19 \times 136 / 4200 = 0.0061$$

$$p_{\min} < p < p_{\text{bal.}} \times 0.75$$

Areas de acero:

- En cada nervadura de 10 cm. =  $0.0061 \times 10 \times 32 = 1.95 \text{ cm}^2$  Usar dos barras no. 4
- En la media nervadura de 5 cm. =  $0.0061 \times 5 \times 32 = 0.98 \text{ cm}^2$  Usar 1 barra del no. 4

b) Por cargas verticales y horizontales simultáneas.

$$M(+)\text{ cv } 1.1 / 1.4 \times 24.5 = 19.25 \text{ ton.m}$$

$$M(+)\text{ sismo} = 19.2 - 19.25 = 0.05 \text{ ton.m}$$

Es más desfavorable el caso de cargas verticales únicamente.

a - 2) Momento en la franja central.

$$M_{\text{crit.}} = 37.5 \text{ ton.m}$$

$$\text{Momento en la franja central } M_{\text{central}} = 0.25 \times 37.5 = 9.4 \text{ ton.m}$$

En la franja central quedan las siguientes nervaduras

- Cuatro nervaduras de 10 cm.
- Una media nervadura de 5 cm.

$$\text{Por lo tanto } b = 4 \times 10 + 5 = 45 \text{ cm.}$$

$$\frac{MR}{FR b d^3 f'c} = \frac{9.4 \times 10^5}{0.9 \times 45 \times 32^2 \times 136} = 0.17$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.19$$

$$p = q f'c / f_y = 0.19 \times 136 / 4200 = 0.0062$$

$$p_{\min} < p < p_{\text{bal.}} \times 0.75$$

Area de acero en cada nervadura de 10 cm.

$$\text{As nerv.} = 0.0062 \times 10 \times 32 = 1.98 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar 2 barras del no. 4}$$

b) Por cargas verticales y horizontales simultáneamente.

b-1) Franja de columnas.

Momento en el eje = 51.24 ton.m

$$\text{Momento en la sección crítica} = M_{\text{eje}} - V \cdot c_1 / 2 + W (c_1 / 2) (c_1 / 4)$$

Eje 2, claro A - B, extremo B ( momento negativos )

a) Por cargas verticales

a-1) Momento en la franja de columnas

M (-) = 47.3 ton.m

M en la sección crítica = 37.5 ton.m

Momento en la franja de columnas = 28.1 ton.m

Toda la franja de columnas queda dentro de la zona maciza de losa, por lo tanto:

$$b = 150 + 175 = 325 \text{ cm.}$$

$$\frac{MR}{FR \cdot b d^2 f'c} = \frac{28.1 \times 10^5}{0.9 \times 325 \times 32^2 \times 136} = 0.069$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.075$$

$$p = q f'c / f_y = 0.075 \times 136 / 4200 = 0.0024$$

$$p = p \text{ min.}$$

$$A_s = p b d = 0.0024 \times 325 \times 32 = 25 \text{ cm}^2$$

En una franja de ancho  $C_2 + 3h$  se debe colocar la mitad del área de acero anteriormente calculada y en el resto de la franja de columnas los otros  $12.5 \text{ cm}^2$ . Las barras se propondrán después de diseñar por cargas verticales y horizontales simultáneas para determinar qué caso es más desfavorable.

$$M \text{ crítico} = 51.24 - 30.3 \times 0.30 + 0.924 \times 0.30 \times 0.15 = 42.2 \text{ ton.m}$$

La parte de este momento producida por cargas verticales es:

$$M_{cv} = 1.1 / 1.4 \times 37.5 = 29.5 \text{ ton.m}$$

(1.1 es el factor de carga para acciones combinadas, 1.4 es el factor de carga para carga únicamente y 37.5 es el momento en la sección crítica vertical únicamente.)

La parte del momento debida a cargas horizontales es:

$$M_{c-H} = 42.2 - 29.5 = 12.7 \text{ ton.m}$$

Momento por carga vertical en la franja de columnas:

$$M_{FCOL} = 0.75 \times 29.5 = 22.1 \text{ ton.m}$$

La mitad de este momento se asigna a la franja de ancho  $C_2 + 3h$  y se suma al momento por cargas horizontales. La otra mitad se asigna al resto de la franja de columnas.

Momento en la franja de ancho  $C_2 + 3h = 175 \text{ cm}$ .



$$M = 22.1 / 2 + 12.7 = 23.74 \text{ ton.m}$$

$$\frac{MR}{FR bd^2 f'c} = \frac{23.74 \times 10^5}{0.9 \times 175 \times 32^2 \times 136} = 0.108$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.12$$

$$p = q f'c / fy = 0.12 \times 136 / 4200 = 0.00388$$

$$p_{\min} < p < p_{\text{bal.}} \times 0.75$$

$$As = 0.00388 \times 175 \times 32 = 21.7 \text{ cm}^2$$

Momento en el resto de la franja de columnas.

$$M = 22.1 / 2 = 11.05 \text{ ton.m}$$

$$b = 325 - 175 = 150 \text{ cm}$$

$$\frac{MR}{FR bd^2 f'c} = \frac{11.05 \times 10^5}{0.9 \times 150 \times 32^2 \times 136} = 0.059$$

De la gráfica de diseño por flexión

$$q = 0.063$$

$$p = q f'c / fy = 0.063 \times 136 / 4200 = 0.002 < p_{\min.} = 0.0024$$

para el resto de la franja de columnas es más desfavorable el caso de cargas verticales únicamente. Por lo tanto, se debe colocar un área de acero de  $12.5 \text{ cm}^2$

Revisión de la transmisión de momento entre losa y columna.

Momento que debe transferirse por flexión en una franja de ancho  $C_2 + 3h$

$$M = (1 - \gamma_v) M_u = (1 - 0.39)(47.7 - 23.0) = 15.07 \text{ ton.m}$$

Este momento es menor que el momento de  $23.74 \text{ ton.m}$  con el que se diseñó el acero de la franja de ancho  $C_2 + 3h$

b-2) Franja central.

Momento por cargas verticales en la franja central =  $0.25 \times 29.5 = 7.38 \text{ ton.m}$

Momento por cargas horizontales en la franja central igual a cero por que todo se asignó a la franja de ancho  $C_2 + 3h$

Momento total en la franja central =  $7.38 < 9.4$  carga vertical

El acero en la franja central es el que se calculó para cargas verticales únicamente.

c) Barras de acero necesarias

En la franja de ancho  $C_2 + 3h$

$A_s = 21.7 \text{ cm}^2$  Usar 8 barras del no. 6

El 60% del área correspondiente a cargas horizontales debe cruzar el núcleo de la columna. Esta área es:

$$A_s \text{ núcleo} = 0.6 \times 12.69 / 23.74 \times 21.7 = 6.95 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar 3 barras no.6}$$

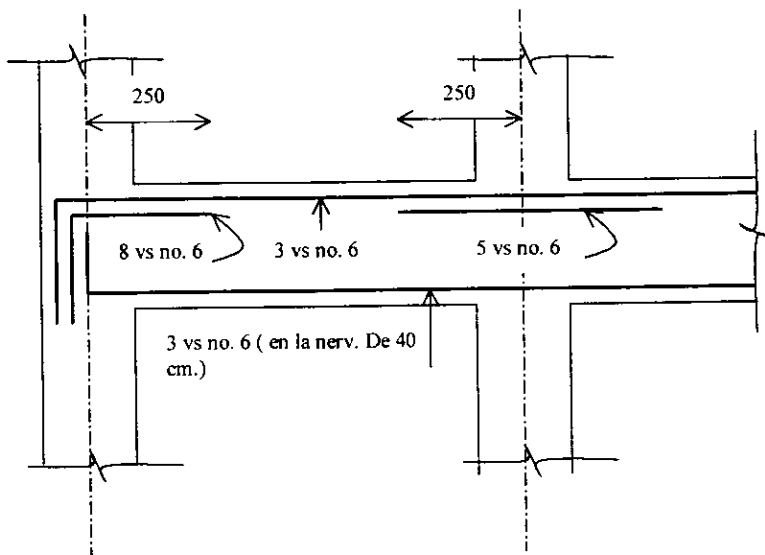
En el resto de la franja de columnas

$$A_s = 12.5 \text{ cm}^2 \quad \text{Usar 10 barras del no. 4}$$

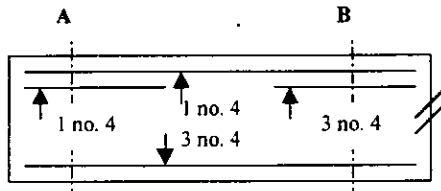
En la franja central

$$A_s \text{ nervadura} = 1.98 = 2 \text{ barras del no. 4 en cada nervadura de 10 cm. de ancho}$$

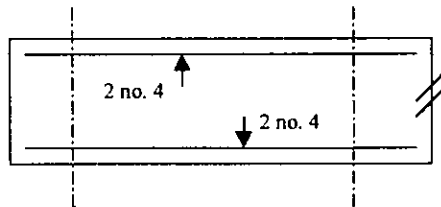
Croquis de armado.



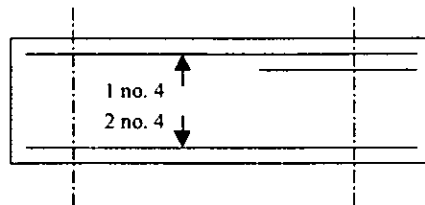
Franja de 175 cm de ancho



**Nervaduras de 20 cm. de ancho**



**Primera nervadura de 10 cm. de ancho abajo del eje 2**



**Otras nervaduras de 10 cm de ancho.**

## CAPITULO VII

### ZAPATAS.

#### **Introducción.**

Las cargas de piso acumuladas de una superestructura se soportan con sub estructuras de cimentación en contacto directo con el suelo. La función de la cimentación es transmitir con seguridad las reacciones concentradas de las columnas o los muros, o las cargas laterales de los muros de contención al suelo, sin asentamientos laterales peligrosos para la estructura que se soporta y sin falla del suelo.

Si las cimentaciones de soporte no se proporcionan adecuadamente, una parte de la estructura puede asentarse más que otra parte adyacente y varios componentes de un sistema en estas condiciones, pueden tener esfuerzos demasiado elevados en las uniones de las trabes con columnas a causa de los asentamientos desiguales de los apoyos que conducen a deformaciones grandes. Los momentos flexionantes y torsionantes adicionales que pueden exceder la capacidad resistente de los miembros, pueden dar lugar a agrietamientos excesivos debidos a la fluencia del refuerzo y, por último, producir la falla estructural.

Si la estructura completa padece asentamientos iguales, los esfuerzos adicionales son mínimos o nulos. Este comportamiento se observa cuando la cimentación es muy rígida y el suelo cede en tal medida, que la estructura se comporta de modo similar a un cuerpo flotante que se puede hundir o inclinar, sin fallar. Se pueden encontrar numerosos ejemplos de estas estructuras en la Ciudad de México, con edificios sobre losas de cimentación o con apoyos rígidos, que al pasar los años se hundieron varios metros debido a las consolidaciones altas de los suelos.

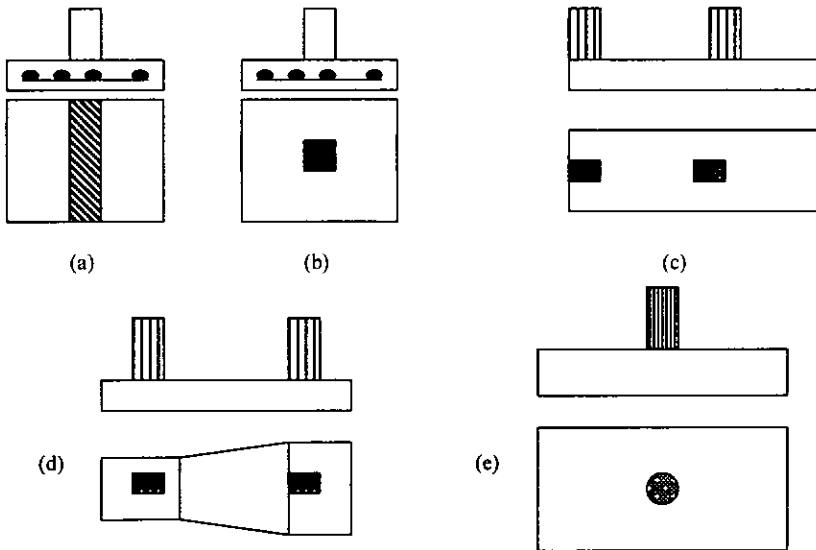
La disposición de los apoyos estructurales varía ampliamente y las condiciones del suelo difieren de un lugar a otro y también dentro del mismo sitio. Así, pues, estos factores y las consideraciones del costo óptimo, gobernarán la selección del tipo de

cimentación. En resumen, antes de iniciar el estudio de las alternativas posibles para la disposición de los apoyos.

### Tipos de cimentaciones.

Existen seis tipos básicos de estructuras de cimentación, que se muestran en la **figura 6.1**

El área de la cimentación debe ser adecuada para soportar las descargas de las columnas, el peso de la cimentación y cualquier sobrecarga, dentro de las columnas, dentro de la capacidad de carga del suelo.



**Figura 6.1** Tipos de cimentaciones.

- a) Zapatas corridas. Estas zapatas consisten en una franja continua de losa a lo largo de un muro y de un ancho mayor que el espesor del mismo. La proyección de la losa de cimentación se trata como un voladizo cargado con la presión distribuida del

suelo. La longitud de la proyección, se determina con la capacidad de resistencia del suelo; la sección crítica por flexión se encuentra en el paño del muro. El refuerzo principal se distribuye perpendicularmente a la dirección del muro.

- b) Zapatas aisladas. Consisten de losas rectangulares o cuadradas, que pueden tener un espesor constante o que se reduce en la punta del voladizo. Se refuerzan en las dos direcciones y son económicas para cargas relativamente pequeñas o para cimentaciones sobre roca.
- c) Zapatas combinadas. Estas zapatas soportan las descargas de dos o más columnas. Son necesarias cuando se debe colocar una columna en la colindancia de un edificio y la losa de la zapata no se puede proyectar fuera de la colindancia. En este caso, una zapata independiente tendría carga excéntrica, dando lugar a una tensión aparente en el suelo de desplante. Con el objeto de lograr una distribución relativamente uniforme de esfuerzos, la zapata de la columna exterior se puede combinar con la de la columna interior más cercana. Por otra parte, las zapatas combinadas también se utilizan cuando las distancias entre columnas sucesivas son relativamente cortas, como en el caso de un corredor de columnas, pues es más barato construir zapatas combinadas para columnas.
- d) Zapatas en voladizo o ligadas. Estas son similares a las anteriormente mencionadas, excepto que la zapata de la columna exterior y la de la columna interior, se construyen independientemente. Están unidas con la viga de liga para transmitir el efecto del momento flexionante, el cual se produce en la columna exterior debido a la excentricidad de la carga, a la cimentación de la columna interior.
- e) Losas de cimentación. Estos sistemas de cimentación son necesarios cuando la capacidad de carga permisible del suelo es muy baja hasta profundidades grandes, lo cual hace que las cimentaciones con pilotes sean económicas. En este caso es necesario hacer una excavación lo suficientemente profunda, para que la cantidad de

suelo que se remueve sea casi equivalente a la carga de la superestructura. Puesto que es necesario extender la subestructura de la cimentación a toda el área del edificio, se considera que la superestructura flota teóricamente en una balsa. Estas estructuras, que básicamente son sistemas de pisos invertidos, se requieren en suelos que se están consolidando en forma continua.

- f) Cimentaciones en pilotes. Este tipo de cimentaciones son esenciales cuando el suelo de desplante consiste de estratos poco resistentes muy profundos. Los pilotes se pueden hincar hasta llegar a roca sólida o un estrato duro, o a la profundidad necesaria dentro del suelo, para que el pilote desarrolle su capacidad permisible por medio de la resistencia de fricción o una combinación de ambos. Los pilotes pueden ser prefabricados y por lo tanto se hincan en el suelo, o colados en el lugar haciendo una perforación que después se rellena con concreto. Los pilotes prefabricados pueden ser de concreto reforzado o presforzado. Otros tipos de pilotes se fabrican de acero o de madera tratada. En todos los tipos, los pilotes deben contar con cabezas de concreto reforzado en las dos direcciones, diseñadas apropiadamente.

### **Comportamiento a flexión y cortante de zapatas.**

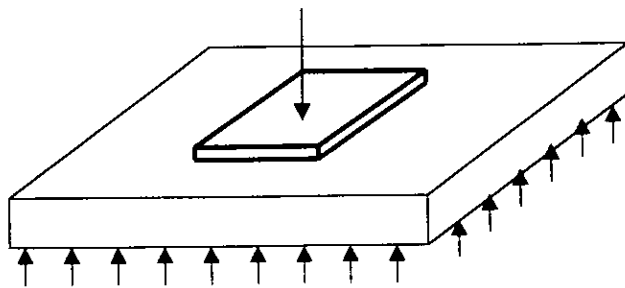
Para simplificar el diseño de las cimentaciones, se hace la hipótesis de que son rígidas y el suelo que las soporta consta de capas elásticas; en consecuencia, se puede suponer que la distribución de presiones del suelo es uniforme o varía en forma uniforme. El cálculo de los momentos flexionantes y del cortante se hace con la presión neta del suelo que se obtiene sustrayendo el peso propio de la cimentación y la sobrecarga de la presión total del suelo. Si la zapata de una columna se considera como un segmento invertido de losa, en el que considera que la intensidad que la presión neta del suelo está actuando sobre una losa en voladizo apoyada en una columna, la losa estará sujeta a flexión y a cortante de modo similar a la losa de un piso que soporta cargas de gravedad.



Cuando intervienen cargas concentradas muy fuertes, se ha comprobado que el cortante y no la flexión controla la mayoría de los diseños de las cimentaciones. El mecanismo de falla por cortante en las losas de las zapatas es semejante al de las losas de piso. Sin embargo, la capacidad de cortante es considerablemente más alta que las de las vigas. Puesto que en la mayoría de los casos la zapata se flexiona en doble curvatura, se debe considerar el cortante y la flexión con respecto a los dos ejes principales.

El estado de esfuerzos en cualquier elemento de la zapata, se debe principalmente a los efectos combinados del cortante, la flexión y la compresión axial. Por consecuencia, es esencial comprender muy bien el comportamiento fundamental de la losa de la zapata, pues permite lograr el sentido de las hipótesis básicas que se aplican para las necesidades de análisis y diseño básico de las zapatas, tanto en cortante como en flexión.

Se han efectuado muchos ensayos de elementos como el mostrado en la **figura 6.2**, en los que se trata de reproducir el problema de la transmisión por fuerza cortante de la carga de una zapata a una columna. Los elementos ensayados han sido en su mayor parte de forma cuadrada o rectangular, con carga concentrada aplicada sobre una superficie cuadrada menor, y apoyados generalmente en todo el perímetro.

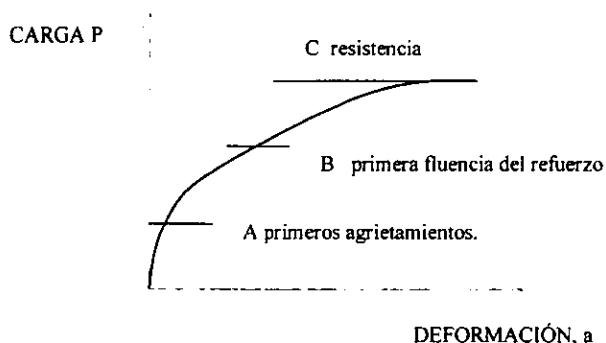


**Figura 6.2** Elemento ancho con refuerzo en las dos direcciones sujeto a  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $M_x$  y  $M_y$ , apoyado perimetralmente o en toda su base (caso esquemático de una losa o zapata).

Ocasionalmente, con el objeto de simular el efecto de la reacción del terreno en zapatas, se han probado elementos apoyados en toda su superficie sobre camas de resortes. Sin embargo, el comportamiento general bajo carga y el modo de falla observado han sido los mismos, cualquiera que sea el tipo de apoyo; perimetral o en camas de resortes.

La **figura 6.3** muestra esquemáticamente una gráfica carga – deformación al centro de uno de estos elementos. En general, si se tiene un elemento relativamente esbelto y dúctil, se pueden desarrollar las tres etapas mostradas en la figura.

- 1ª. Del origen al punto A. En esta etapa el comportamiento es aproximadamente lineal, hasta que se presentan los primeros agrietamientos en la cara de tensión de la losa.
- 2ª. En esta etapa, comprendida entre los puntos A y B, se alcanza la primera fluencia del refuerzo horizontal de tensión y el agrietamiento se extiende por la losa. Simultáneamente pueden presentarse grietas inclinadas que van del acero de tensión hacia la periferia de la superficie cargada, formando una pirámide o cono truncado alrededor de esta superficie.
- 3ª. Al final de esta etapa se alcanza la resistencia (punto C) y se produce el colapso final por penetración de la columna a través de la losa, con una superficie de falla en forma de pirámide o cono truncado.



**Figura 6.3** Característica carga – deformación de una zapata.

Dependiendo de la relación entre el claro y el peralte de la losa, o de la relación entre el área de la superficie de aplicación de carga y de la cantidad de acero longitudinal de flexión, la falla por perforación puede presentarse antes o después de que fluya el acero longitudinal. En otras palabras, en una losa de poca esbeltez y con mucho acero longitudinal no se podrán desarrollar más que las etapas OA y AB de la curva descrita anteriormente. Incluso, puede suceder que la columna perfora la losa antes de que se alcance el punto B, aunque este caso es poco probable para las dimensiones usuales en la práctica.

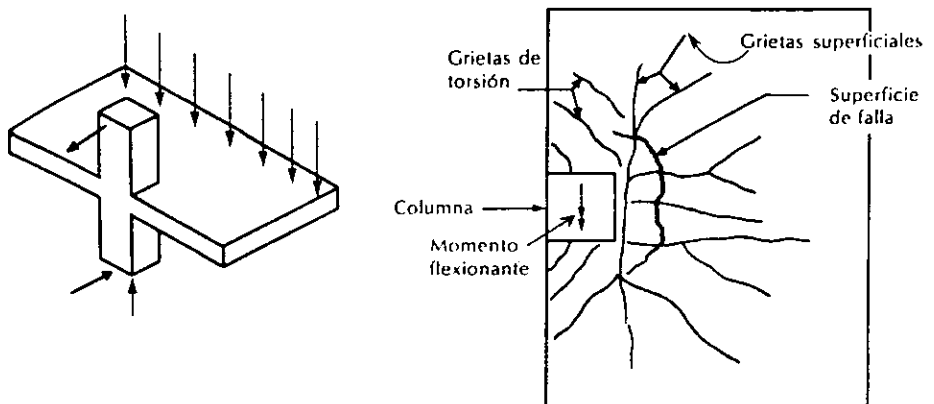
Cuando el colapso por penetración se presenta después de que la losa ha sufrido un agrietamiento considerable, y después de que el acero longitudinal ha fluido, el tipo de falla puede clasificarse como de flexión y se caracteriza por una deformación importante independientemente de la magnitud de la deformación a la falla, el colapso final se presenta siempre por perforación de la columna a través de la losa, y la superficie de falla tiene la forma de una pirámide o de un cono truncado. Lo anterior indica que existe siempre una etapa previa al colapso final, en el cual se desarrollan grietas inclinadas alrededor de la superficie cargada, hasta que se forma una superficie de falla.

Los esfuerzos nominales correspondientes a la resistencia de un elemento de este tipo, son, en general mayores que para una viga, debido principalmente al efecto del ancho del elemento y, a que el concreto alrededor de la superficie cargada esta sujeto a compresiones normales en dos direcciones, que le proporcionan un cierto confinamiento lateral.

También se han realizado ensayos en especímenes como el mostrado en la **figura 6.4 a** que simulan la conexión de una losa plana o de una zapata con una columna de borde. En este caso, además de carga axial, se transfiere un momento flexionante de la losa a la columna, por lo que el elemento en cuestión se encuentra sometido a sollicitaciones más severas que cuando sólo existe carga axial. Aunque pueden desarrollarse las tres etapas de carga mencionadas anteriormente, la configuración de

agrietamiento difiere debido a la existencia de un borde libre en la losa. En la **figura 6.4 b** se muestra el estado típico de agrietamiento al producirse la falla en este tipo de elementos. Puede verse que se desarrollan también grietas de torsión originadas por la transferencia de momento flexionante.

Un caso intermedio entre los dos presentados en esta sección es el de una columna interior conectada a una losa que tiene momentos flexionantes diferentes a ambos lados de la columna. El momento flexionante que se transfiere de la losa a la columna es la diferencia entre los dos momentos flexionantes. La pirámide o cono truncado no resulta simétrico y el grado de asimetría depende de la relación entre la carga axial y el momento transferido.



**Figura 6.4** Especimen de ensaye y configuración de agrietamiento en una losa conectada a una columna de borde.

## Mecanismo de falla por cortante.

Las grietas inclinadas de cortante se desarrollan esencialmente de la misma forma que en las vigas, estabilizándose aproximadamente al 65% de la carga última y extendiéndose con rapidez hacia el eje neutro. Posteriormente, las grietas se propagan lentamente en dirección a la zona de compresión, de tal forma que en la falla permanece una zona de compresión poco profunda.

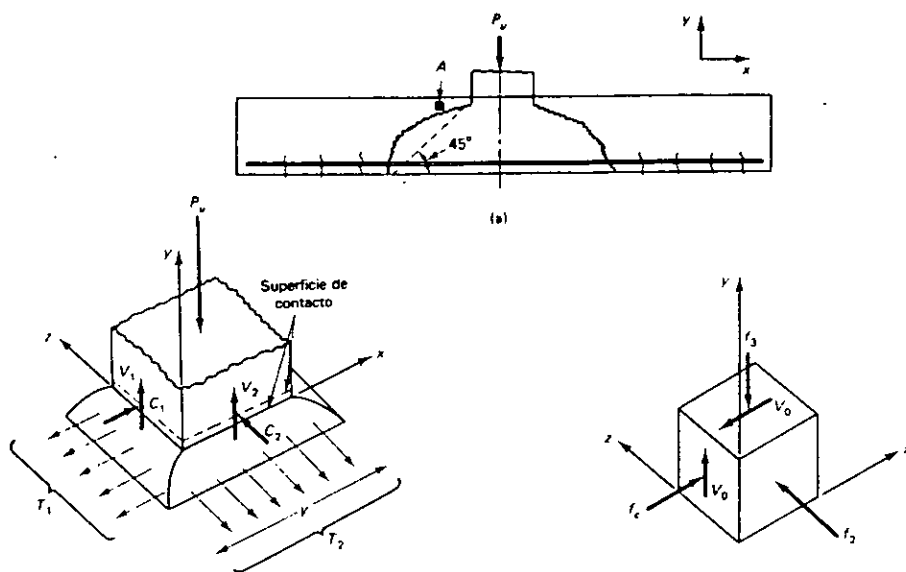
Las grietas inclinadas siempre se forman cerca de las cargas concentradas o la reacción de la columna en losas o zapatas en dos direcciones, como se puede ver en la **figura 6.5 a**

Esto se debe en parte a la concentración alta de momentos flexionantes en la región cercana a la cara de la columna, que forman una pirámide truncada en el pie de la región de la columna. La columna puede punzonar a través de la losa en esta forma de falla, si la losa no está diseñada adecuadamente para resistir esta falla de cortante (también llamada falla de tensión diagonal). La acción de confinamiento de la losa penetrada en la superficie de interacción con la losa de la columna que atraviesa a la losa en la **figura 6.5 b**, se puede representar con las fuerzas de cortante resultantes  $V_1$  y  $V_2$ , las fuerzas de compresión  $C_1$  y  $C_2$  y las fuerzas de tensión  $T_1$  y  $T_2$ , además de la acción de membrana y de dovela interna de la losa.

En la **figura 6.5 c** se muestra un elemento infinitesimal extraído de la zona de compresión, por encima de la grieta en diagonal. El elemento está sujeto a las cuatro componentes de esfuerzos siguientes:

- (1) Esfuerzo cortante vertical  $v_v$ ;
- (2) Esfuerzo directo de compresión  $f_c$ ;
- (3) Esfuerzo vertical de compresión  $f_a$  y
- (4) Esfuerzo lateral de compresión  $f_z$ .

El esfuerzo cortante vertical  $V_o$  es el resultante del cortante total que debe transmitir completamente a la zona de compresión ubicada encima de la grieta inclinada. El esfuerzo directo de compresión  $f_c$ , que varía a lo largo de la sección crítica es el resultado de los momentos flexionantes. La fuerza vertical de compresión  $f_3$  se debe a la carga muy concentrada de la columna, y tiene una influencia muy alta en el incremento de la capacidad al cortante de la losa. El esfuerzo lateral de compresión  $f_2$  es resultado del momento flexionante con respecto a un eje perpendicular a la sección crítica.



**Figura 6.5** Mecanismo de falla en losas y zapatas con acción en dos direcciones, a) Elevación de zapata, b) Piramide de falla, c) Elemento en la zona de compresión.

## **Cargas y reacciones.**

Resulta esencial hacer las hipótesis correctas para evaluar todas las fuerzas combinadas que actúan en la cimentación. La losa de la zapata se debe proporcionar para soportar todas las cargas factorizadas aplicadas y las reacciones inducidas, incluyendo las cargas axiales, los cortantes y los momentos que se deben resistir en la base de la zapata.

Una vez que se determina la presión admisible del suelo a partir de los datos disponibles del lugar, de los principios de la mecánica de suelos y de los reglamentos locales, el tamaño del área de la zapata se calcula con las cargas sin factorizar ( de servicio ), como las cargas muerta, viva, de viento o las cargas de sismo, en cualquier combinación que gobierne al diseño.

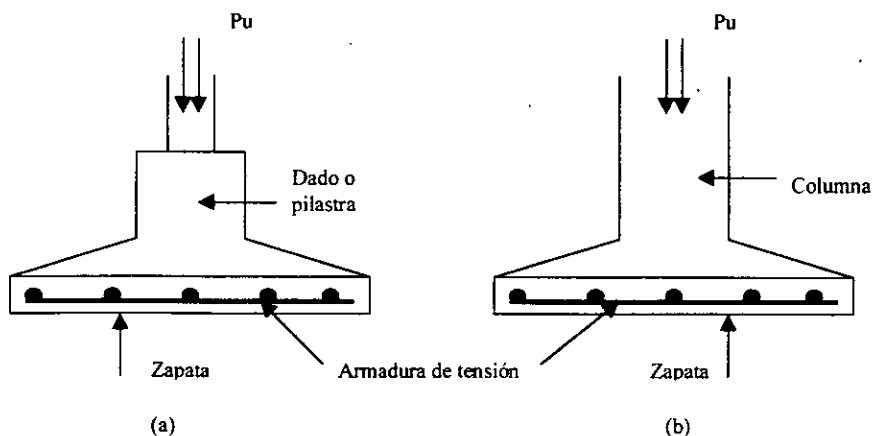
En el diseño de las zapatas, se desprecian los requisitos de excentricidad mínima por consideraciones de la esbeltez de las columnas y sólo se considera que se transfieren a la zapata los momentos finales calculados que existan en la base de una columna. Es los casos donde existen cargas excéntricas o momentos producidos por cualquier combinación de cargas, la presión extrema del suelo que resulta de estas condiciones de carga se debe encontrar dentro de los valores permisibles de la capacidad del suelo.

Una vez que se determine el tamaño de una zapata, es posible determinar la geometría de la zapata aplicando los principios y métodos para diseño por cortante y por flexión. Las cargas y momentos externos de servicio que se usaron para determinar el tamaño del área de la cimentación, se transforman a sus valores últimos factorizados aplicando los factores de carga apropiados y los factores de reducción de la resistencia, para determinar los valores de la resistencia nominal que se utilizarán para el análisis y el proporcionamiento del tamaño y la distribución del refuerzo en la zapata.

## Zapata aislada.

Se emplean para recibir cargas de una columna. Por lo general son de sección cuadrada o también rectangular, y su trabajo a flexión es en dos direcciones, llevando por lo tanto, refuerzo espaciado uniformemente en ambos sentidos.

La columna podrá apoyarse sobre una pilastra o dado, éste a su vez sobre la placa de la zapata, o bien, colocarse directamente sobre la zapata; si se utiliza el dado, se recomienda que su sección sea, como mínimo igual al de la columna y su altura no mayor de tres veces el lado mayor del dado. (figura 6.6)



**Figura 6.6** Zapata aislada, a) para una columna con dado, b) para una columna apoyada directamente sobre la zapata.

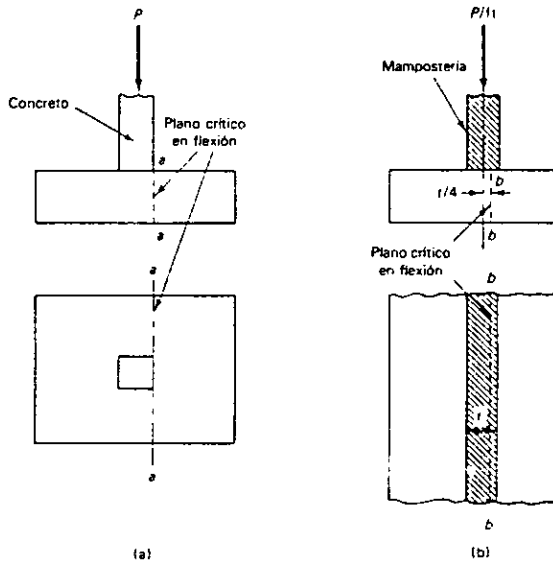
El área de la zapata se obtiene dividiendo la carga total de diseño de la columna ( $P_u$ ), más el peso de la zapata (se recomienda tomar como peso de la zapata el 10% de la carga de la columna), entre la resistencia del terreno a la compresión ( $R_T$ ).

El momento máximo externo en cualquier sección de una zapata se determina con base a los momentos factorizados de las fuerzas que actúan en toda el área de la zapata.



a un lado de un plano vertical que pasa a través de la zapata. Este plano se toma en los siguientes lugares:

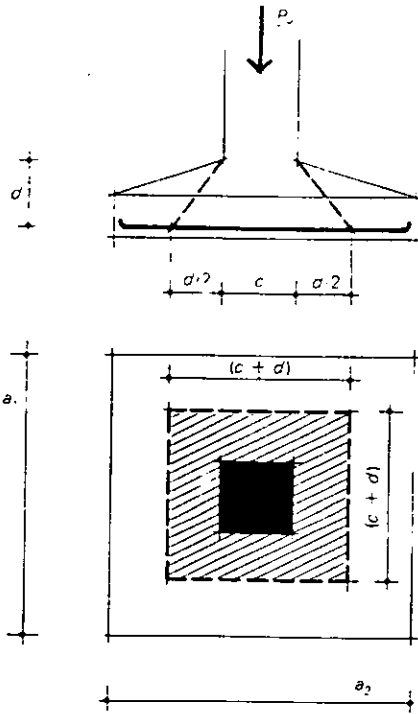
- En zapatas que soporten elementos de concreto, el plano vertical tangente a la cara del elemento. ( figura 6.7 a )
- En zapatas que soporten muros de mampostería, la sección entre el paño y el eje del muro. (figura 6.7 b )
- En zapatas que soporten columnas de acero a través de placas de base, la sección crítica será en el perímetro de la columna, a menos que la rigidez y resistencia de la placa permitan considerar una sección más alejada.



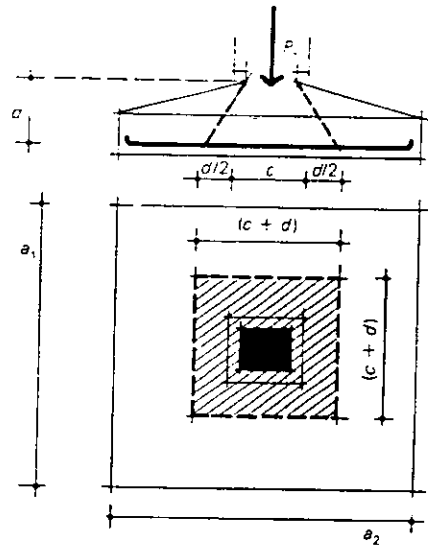
**Figura 6.7** Planos críticos por flexión, a) columna de concreto; b) muro de mampostería.

Para zapatas con cargas concentradas, la sección crítica para fuerza cortante será perpendicular al plano de la zapata y se localizará de acuerdo con lo siguiente:

- (a) Cuando el área donde actúa la reacción o la carga concentrada no tiene entrantes, la sección crítica formará una figura definida por la periferia del área cargada, a una distancia de ésta igual al peralte entre 2 (  $d/2$  ). Ver **figura 6.8**
- (b) Si el área cargada tiene entrantes, el perímetro de la sección crítica será mínimo y en ningún caso punto su distancia a la periferia del área será menor que  $d/2$ . Ver **figura 6.9**



**Figura 6.8** Sección crítica para fuerza Cortante cuando el dado o columna no Tiene entrantes.



**Figura 6.9** Sección crítica para fuerza Cortante cuando el dado o columna si tiene entrantes.

Según las NTC - 96 si no hay transmisión de momento entre la losa o zapata y la columna, o si el momento por transmitir,  $M_u$ , no excede de  $0.2 V_u d$ , el esfuerzo cortante de diseño se calculará con la fórmula siguiente:

$$\alpha = \frac{V_u}{b_o d}$$

Donde  $b_o$  es el perímetro de la sección crítica y  $V_u$  la fuerza cortante de diseño en dicha sección.

Cuando entre la zapata y la longitud haya transmisión de momento por la aplicación sobre la estructura de fuerzas horizontales o bien cuando los claros contiguos sean diferentes en longitud y carga, se supondrá que una fracción dada por:

$$\gamma = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{C1 + d}{C2 + d}}}$$

Se transmite por excentricidad de la fuerza cortante total. El resto del momento, es decir  $(1 - \alpha)$ , deberá transmitirse por flexión en un ancho igual a  $(C2 + 3h)$ , centrando en el eje de columnas.

El esfuerzo cortante máximo de diseño,  $V_u$  se obtendrá tomando en cuenta el efecto de la carga axial y del momento, suponiendo que los esfuerzos cortantes varían linealmente. **Figura 6.10**

$$V_{yz} = \frac{V_u}{b_o d} + \frac{\alpha M_u C_{vz}}{J}$$

$$b_o = 2(C1 + d) + 2(C2 + d) = 4d + 2C1 + 2C2$$

$$J = \frac{d(C1 + d)^3}{6} + \frac{(C1 + d) \times d^3}{6} + \frac{d(C2 + d)(C1 + d)^2}{2}$$

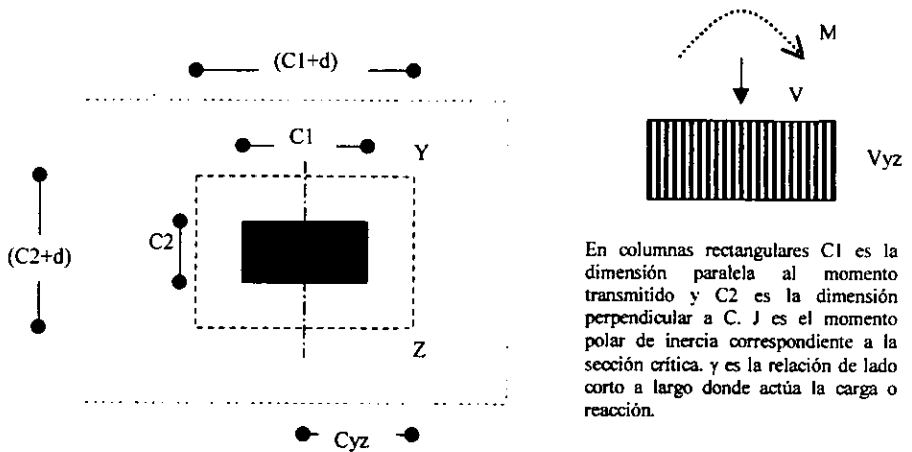


Figura 6.10 Transmisión de momento combinado con carga axial.

El esfuerzo cortante máximo de diseño,  $V_u$ , obtenido con los criterios anteriores no debe exceder de:

$$V_u \leq FR (0.5 + \gamma) \sqrt{f'_c} ; \quad \text{ni de } FR \sqrt{f'_c}$$

A menos que se suministre refuerzo.

Al considerar la combinación de acciones permanentes, variables y sismo, con la expresión anterior y en la de los dos párrafos siguientes, el factor FR se tomará igual a 0.7 en lugar de 0.8.

Para calcular el refuerzo necesario se considerarán dos vigas ficticias perpendiculares entre sí, que cruzan sobre la columna. El ancho,  $b$ , de cada viga será igual al peralte efectivo de la zapata,  $d$ , más la dimensión horizontal de la cara de la columna a la cual llega si ésta es rectangular y su peralte será igual al de la zapata. ( si la columna es circular se puede tratar como cuadrada de lado igual a  $(0.8D - 0.2d)$ , donde  $D$  es el diámetro de la columna. En cada una de estas vigas se suministrarán estribos

verticales cerrados con una barra longitudinal en cada esquina y cuyo espaciamiento será el 85 % del calculado con la expresión:

$$S = \frac{FR A_v f_y d (\sin \theta + \cos \theta)}{V_u - V_{CR}} \leq \frac{FR A_v f_y}{3.5b}$$

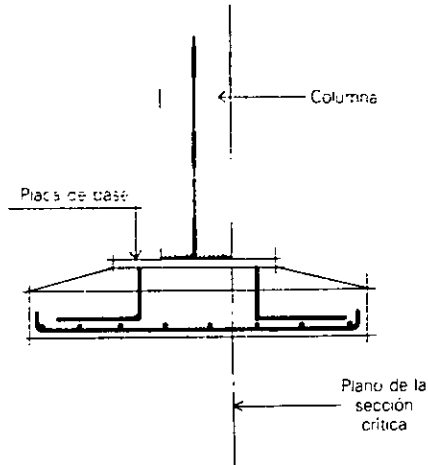
$A_v$  es el área transversal del refuerzo por tensión diagonal comprendido en una distancia  $s$  y  $\theta$  es el ángulo que dicho refuerzo forma con el eje de la pieza; ésta separación no deberá ser mayor de  $d/3$ ; la separación entre ramas verticales de los estribos no debe exceder de 20 cm. se supondrá:

$$V_u = v_u b d \quad \text{y} \quad V_{CR} = 0.4 FR b d \sqrt{f'_c}$$

Donde  $v_u$  es el esfuerzo cortante máximo de diseño que actúa en la sección crítica en cada viga ficticia. El espaciamiento determinado para cada viga en la sección crítica se mantendrá en una longitud no menor que un cuarto del claro entre ejes de columnas en el caso de losas planas, o hasta el borde en zapatas, menos que mediante un análisis se demuestre que puede interrumpirse antes.

En ningún caso se admitirá que  $v_u$  sea mayor que  $1.3 FR \sqrt{f'_c}$ , las secciones críticas para adherencia o anclaje son las mismas que para flexión.

Cuando la zapata soporta una columna de acero a través de una placa de base, la sección crítica se encuentra en el perímetro de la columna, o bien, se podrá considerar una sección más alejada cuando la resistencia y rigidez de la placa lo permitan. **Figura 6.11**



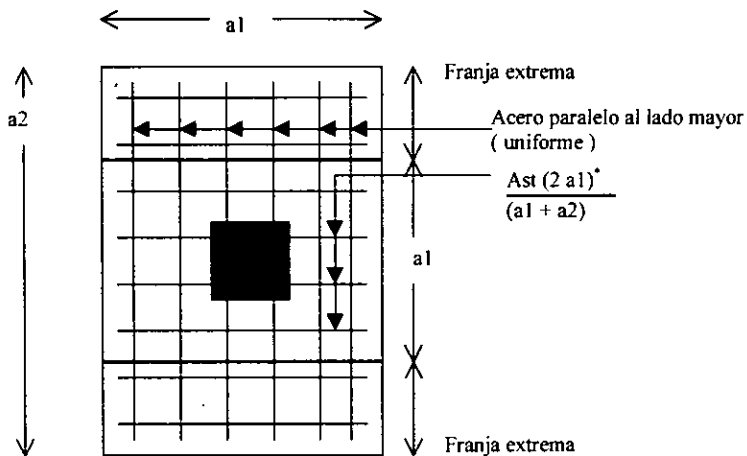
**Figura 6.11** Zapata para un poste de acero, sección crítica.

Para zapatas aisladas de sección rectangular se tomarán las reglamentaciones dadas para las zapatas cuadradas, considerando únicamente que la colocación del acero deberá cumplir con la siguiente especificación:

- El acero paralelo al lado mayor se distribuirá uniformemente. El acero paralelo al lado menor se colocará en tres franjas en la forma siguiente. En la franja central de ancho  $a_1$ , una cantidad de refuerzo igual a la totalidad del acero que debe colocarse en esa sección, multiplicada por  $2 a_1 / (a_1 + a_2)$ . El resto del refuerzo se distribuirá uniformemente en las dos franjas extremas. **Figura 6.12**

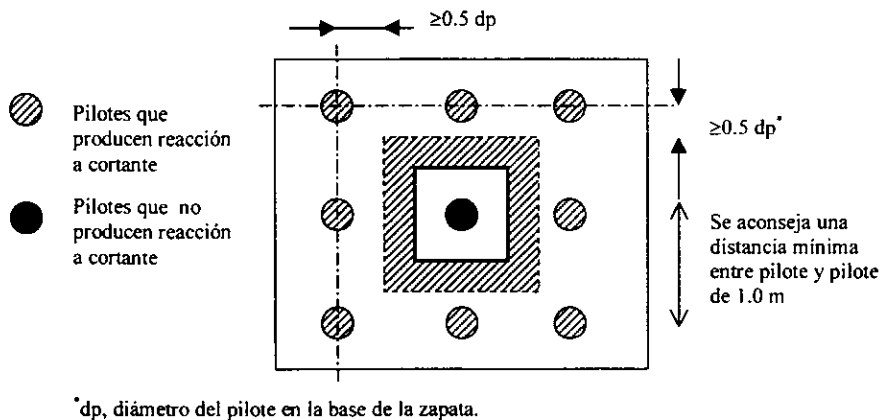
Cuando la zapata se apoya sobre pilotes, al calcular la fuerza cortante la reacción de los pilotes cuyos centros quedan a  $0.5 d_p$  o más hacia fuera de dicha sección. Cuando los centros de los pilotes queden a  $0.5 d_p$  o más hacia dentro de la sección considerada, se supondrá que las reacciones de los pilotes no producen cortante. **Figura 6.13**

En este tipo de zapatas el peralte está controlado generalmente por los esfuerzos cortantes, y el espesor total en la zapata se recomienda sea uniforme; así mismo, es aconsejable dejar como mínimo las distancias que aparecen en la **figura 6.14**

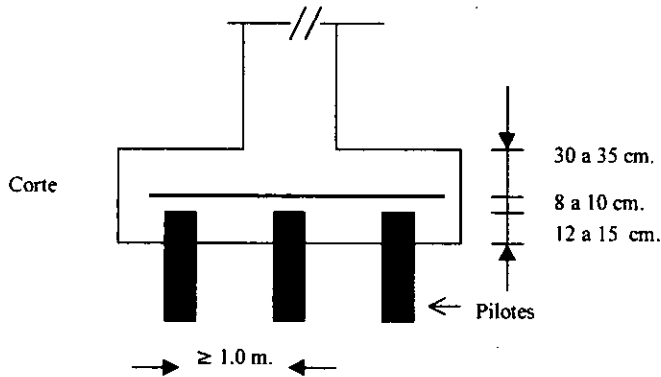


\*Ast totalidad del acero en la dirección considerada.

**Figura 6.12** Colocación del acero en una zapata aislada rectangular.



**Figura 6.13** distancias mínimas recomendables para una zapata aislada apoyada sobre pilotes.



**Figura 6.14** Dimensiones mínimas para una zapata aislada apoyada sobre pilotes.

### **Zapata corrida.**

Se utilizan para soportar muros de concreto, piedra o tabique, y para su trabajo se efectúa en un solo sentido. El cimienta para muros representa en el caso de una losa invertida en voladizo, con carga de gran intensidad ejercida por la presión del terreno y repartida uniformemente.

La zapata se encuentra sometida a esfuerzos de flexión, cortante y adherencia y deberá dejarse finalmente el peralte mayor de los tres.

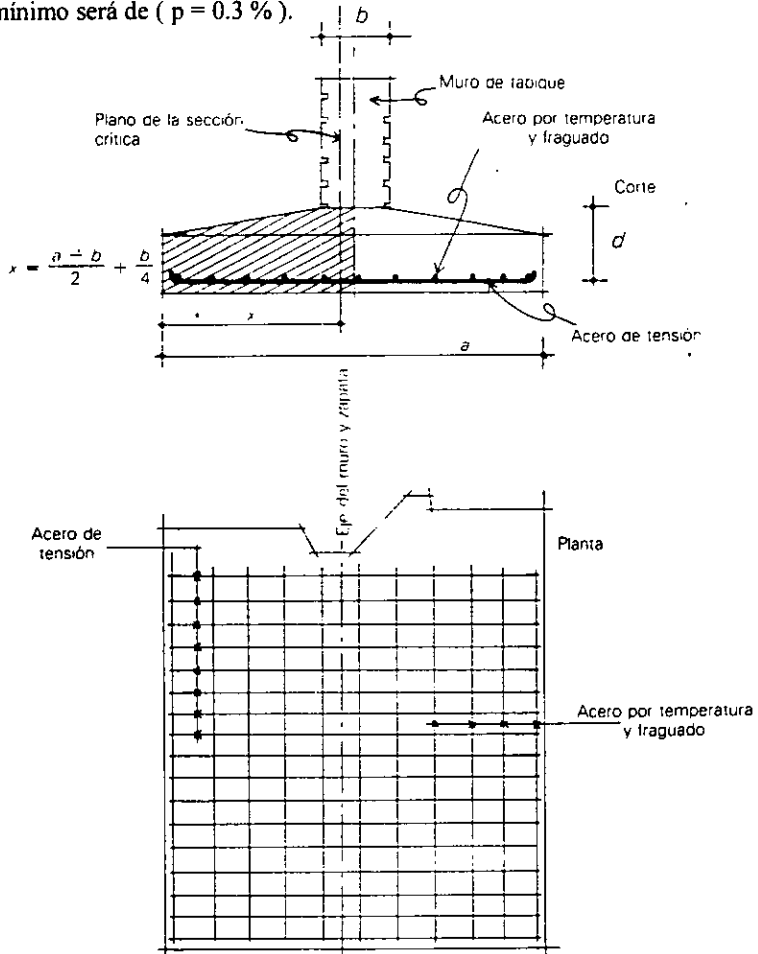
En zapatas que soporten muros de mampostería, la sección crítica se encuentra en la parte media entre el paño y el eje centroidal del muro, para zapatas que soporten muros de concreto se tomarán las especificaciones indicadas ya para zapatas aisladas. **Figura 6.15**



Estos cimientos sólo llevan acero de tensión en un sentido ( acero perpendicular al muro ); además, llevan acero paralelo al muro para absorber las contracciones y los cambios de temperatura.

Para el acero por temperatura las NTC – 96 especifican lo siguiente:

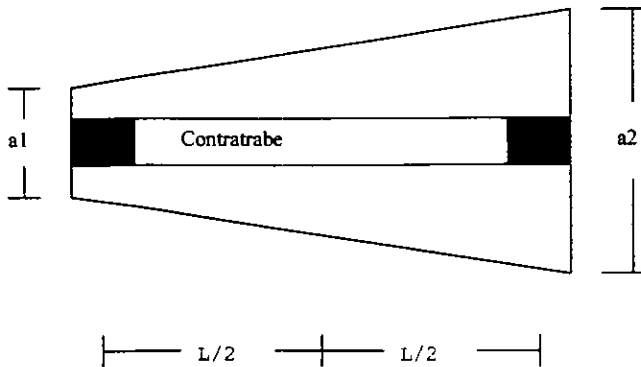
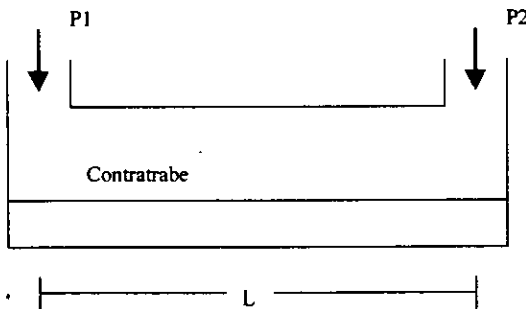
- Para elementos protegidos de la intemperie, se colocará un porcentaje mínimo de (  $p = 0.2 \%$  ). Cuando se trate de elementos estructurales expuestos a la intemperie, el porcentaje mínimo será de (  $p = 0.3 \%$  ).



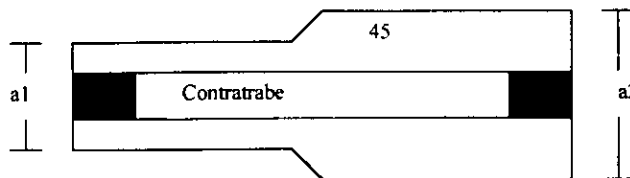
**Figura 6.15** Sección crítica para momento flexionante.

## Zapatas combinadas.

Se recomiendan para soportar dos o más columnas. Cuando las columnas reciben cargas iguales, ambos centroides el de la carga y el de la zapata coinciden fácilmente. Sin embargo, con frecuencia las cargas sobre los apoyos son diferentes y se hace necesario localizar la posición de su resultante para que coincida con el centroide del área de la zapata; su construcción puede ser de forma trapezoidal, **figura 6.16** o bien, de forma rectangular **figura 6.17** recomendándose ésta última por facilidad constructiva.



**Figura 6.16**  
Cimiento  
trapezoidal

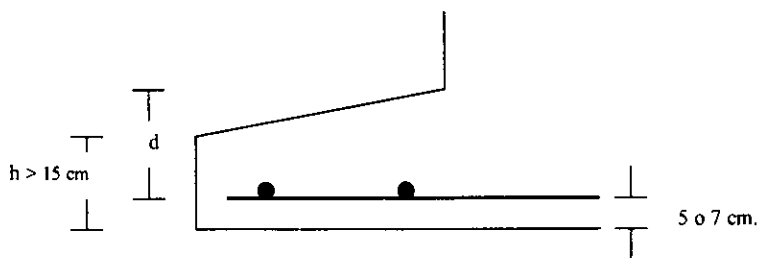


**Figura 6.17**  
Cimiento  
rectangular.

Para su cálculo, las NTC - 96 no incluyen ninguna recomendación apropiada en cuanto a zapatas combinadas se refiere, pero se recomienda tener en cuenta las mismas especificaciones dadas para las zapatas aisladas.

### Espesor mínimo en zapatas de concreto armado.

En el borde de una zapata el espesor mínimo será de 15 cm. Cuando la zapata se apoye sobre pilotes, el espesor mínimo será de 30 cm. Se especifica, igualmente, que el recubrimiento libre del acero sea de 5 cm. en suelos secos y de 7 cm. para suelos agresivos o sulfatados. ( figura 6.18 )



**Figura 6.18** Espesor mínimo en zapatas de concreto armado.

**Ejemplo. Diseñar una zapata cuadrada para recibir una columna de 50 X 50 cm. con carga de 110 ton. ( En la estructura sólo intervienen acciones variables y permanentes.)**

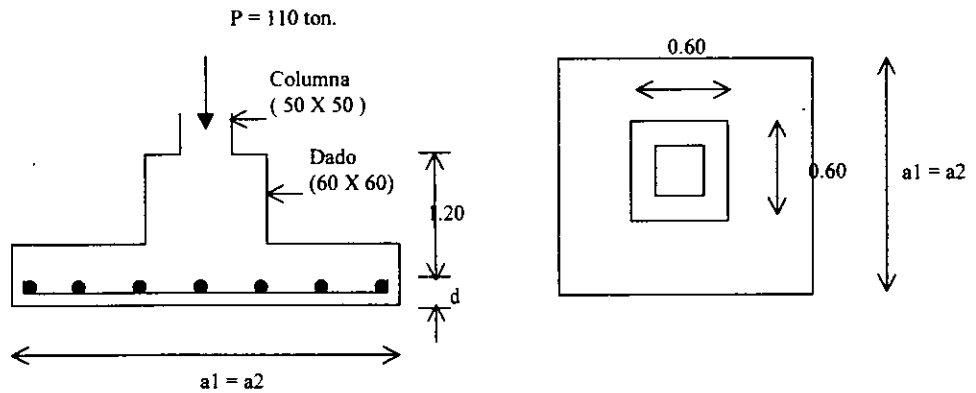
Datos:

$$F_c = 1.4$$

$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$R_T = 22000 \text{ kg/cm}^2$$



$$P_u = 110\,000 \times 1.4 = 154\,000 \text{ kg.}$$

Obtención del ancho de la zapata.

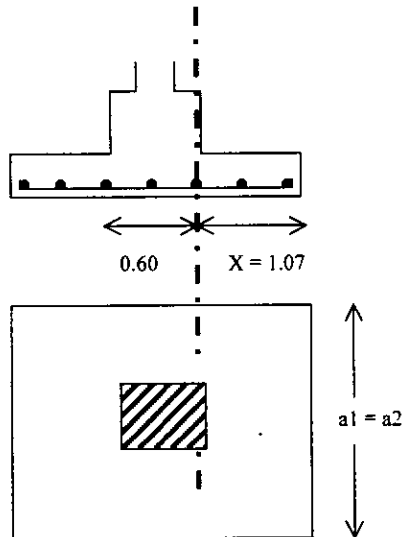
$$\text{Peso del dado} = (0.60^2) \times 1.20 \times 2400 = 1040 \text{ kg.}$$

Para el peso de la zapata se estimará el 6 % de la reacción del terreno, por lo tanto se tiene:

$$A_z = \frac{154000 + 1040}{R_n = 22000 - 6\% (22000)} = \frac{155040}{20680} = 7.50 \text{ m}^2$$

Por lo tanto  $a_1 = a_2 : \sqrt{7.5} = 2.74 \text{ m}$

Para calcular el momento de flexión, se tiene:



Por lo tanto

$$M = \frac{\text{reacción neta (Rn)} \times x^2 \times a}{2} = \frac{20680 \times 1.07^2 \times 2.74}{2} = 3\,244\,000 \text{ kg.cm}$$

El peralte por flexión vale

$M_R = F_R b d^2 f'c \gamma (1 - 0.59 \gamma)$ , primeramente obtenemos el porcentaje de acero ( $p$ ), que deberá estar comprendido entre un mínimo y un máximo para evitar un comportamiento frágil.

$$p_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033 \quad y$$

$$p_b = \frac{0.85 \times 200}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.019$$

$$\therefore p = 0.011$$

$$\gamma = \frac{p f_y}{f'c} = \frac{0.011 \times 4200}{\frac{200}{462}} = 0.23$$

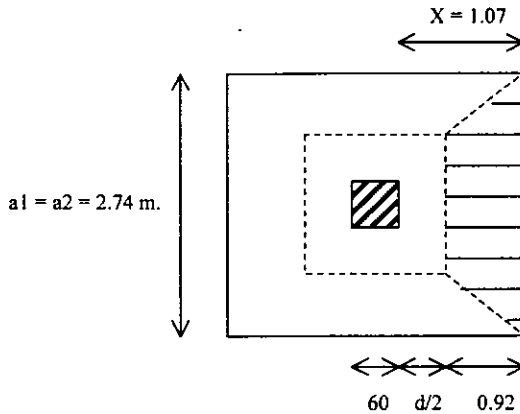
Despejando d ( peralte ) de la fórmula tenemos:

$$d^2 = \frac{M_R}{F_R b f c \gamma (1-0.59\gamma)}$$

$$d^2 = \frac{3244000}{0.9 \times 274 \times 200 \times 0.23 (1-0.59 \times 0.23)} = 331 \text{ cm}^2$$

$$\therefore d = \sqrt{331} = 18.2 \text{ cm.}$$

Por lo general en estas zapatas los esfuerzos cortantes y de adherencia son más altos que el de flexión y dominan el diseño de la pieza. Por lo anterior, se supone un peralte mayor; por ejemplo d = 30 cm.



También por reglamento

$$M / Vd < 2 = 3244000 / 34743 \times 47.7 = 1.96 < 2.0 \text{ (Correcto)}$$

Peralte por perforación o penetración necesario.

$b_o = 4 ( 60 + d ) = 4d + 240$  , multiplicando los términos por  $d$ , se tiene  $b_o d = A d^2 + 240d$ , entonces  $b_o d = 155040 / v_u = 10.12 = 15320 \text{ cm}^2$

Por lo tanto

$$4d^2 + 240d - 15320 = 0 \quad \therefore \quad d^2 + 60d - 3830 = 0$$

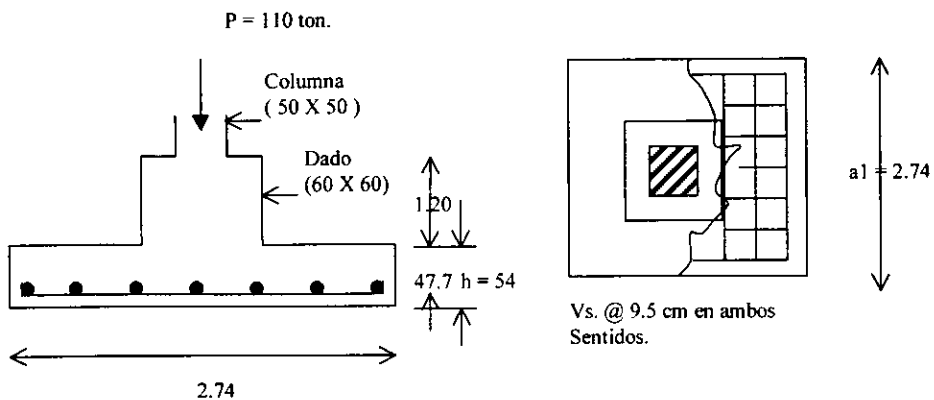
$$d_p = \frac{-60 + \sqrt{(60)^2 - 4(-3830)}}{2} = \frac{-60 + 137.55}{2} = 38.80 \text{ cm.}$$

Por lo que domina el peralte de 47.70 cm.

Cálculo del área de acero

$p = 0.11$  ( supuesto )

$$A_s = p b d = 0.011 \times 274 \times 47.70 = 143.77 \text{ cm}^2$$



Con barras del no. 8 tenemos:

$$143.77 / 5.07 = 28 \text{ vs } \# 8$$

$$\text{sep.} = 274 / 28 = 9.8 \text{ cm.}$$

$$h = d + \frac{1}{2} \phi + r = 47.70 + 1.27 + 5.03 = 54 \text{ cm.}$$

Cálculo de la longitud de desarrollo

$$L_d = 0.06 \frac{A_b f_y}{\sqrt{f_c}} = 0.06 \frac{5.07 \times 4200}{\sqrt{200}} = 90 \text{ cm.}$$

y

$$L_{db} \geq 0.006 d_b f_y = 0.006 \times 2.54 \times 4200 = 64 \text{ cm.}$$

$\therefore L_{db} > 64 \text{ cm.}$  (correcto)

**Ejemplo Diseño de una zapata corrida para soportar un muro de tabique de 28 cm. de espesor que transmite una carga por metro lineal de muro de 12 600 kg./ml. La capacidad de carga del terreno se supone de 8 200 kg/m<sup>2</sup>**

Datos:

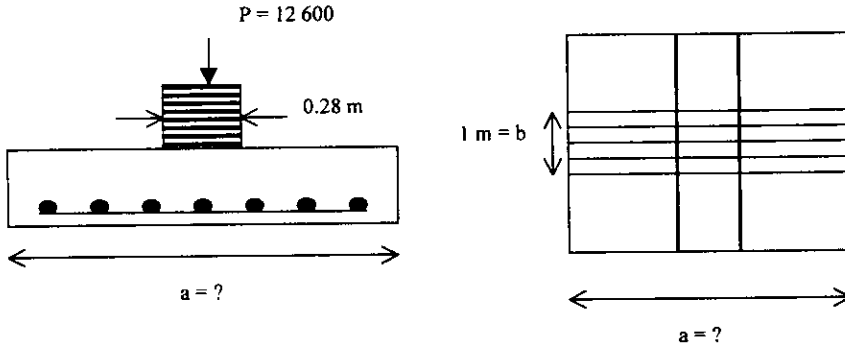
$$f_c = 200 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$R_T = 8200 \text{ kg/cm}^2$$



$$FC = 1.4$$



$$P_u = 12\,600 \times 1.4 = 17\,640\text{ kg/m}$$

$$\text{Ancho de la zapata} = 17\,640 / 8\,200 - 6\% \text{ de } 8\,200 = 2.30\text{ m.}$$

En este ejemplo se toma para el porcentaje de acero, un valor ligeramente superior al mínimo requerido:

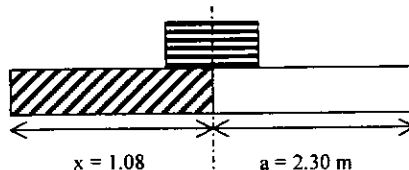
$$p_{\min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4\,200} = 0.0033$$

$$\text{Se tomará } p = 0.004$$

Obtención del momento de flexión, en una franja de  $1.0\text{ m}$ .

$$x = \frac{2.30 - 0.28}{2} + \frac{0.28}{4} = 1.08\text{ m.}$$

$$M_u = \frac{R_n \times x^2 \times 1}{2} = \frac{7\,708 \times 1.08^2 \times 1}{2} = 4\,495 = 44\,950\text{ kg}^* \text{ cm}$$



### Cálculo del peralte por flexión

$$\gamma = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.004 \frac{4200}{200} = 0.084$$

$$d^2 = \frac{449500}{0.9 \times 100 \times 200 \times 0.084(1 - 0.59 \times 0.084)} = \frac{449500}{1436} = 313 \text{ cm}^2$$

$$d_M = \sqrt{313} = 17.70 \text{ cm}$$

$$h = d + 1/2 \phi + r = 17.70 + 0.64 + 5.66 = 24 \text{ cm} > 15 \text{ cm.}$$

### Verificación del peralte por esfuerzo cortante.

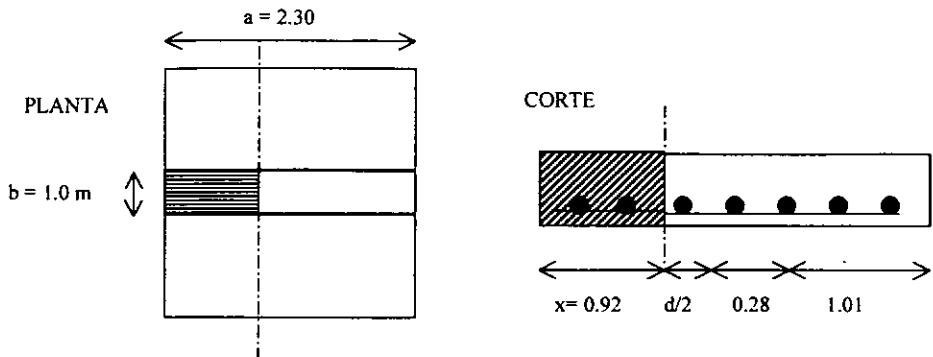
$$x = 1.01 - d/2 = 1.01 - 17.7/2 = 0.9215 \approx 0.92 \text{ m.}$$

$$\text{area sombreada} = 0.92 \times 1.0 = 0.92 \text{ m}^2$$

$$V_{\max.} = R_n \times A = 7708 \times 0.92 = 7092 \text{ kg.}$$

$$u \leq FR \sqrt{f'_c} = 0.8 \sqrt{200 \times 0.8} = 10.12 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore d \geq \frac{V_u}{FR \times 100 \times u} = \frac{7708}{0.8 \times 100 \times 10.12} = 9.52 \text{ cm.}$$



Domina el peralte por flexión al resultar mucho mayor que el peralte requerido por cortante

Cálculo del área de acero.

$$A_s = \rho b d$$

$$A_s = 0.004 \times 100 \times 17.7 = 7.08 \text{ cm}^2$$

$$\text{Con varillas \# 4} \quad \text{no. vars} = 7.08 / 1.27 = 7 \text{ vars. \# 4}$$

$$\text{Sep} = 100 / 7 = 14.30 \text{ cm.} \quad ; \quad d/2 = 17.7 / 2 = 8.85 \text{ cm.}$$

Longitud de desarrollo del acero

$$L_{db} = 0.06 \frac{A_b f_y}{\sqrt{f'_c}} = 0.006 \frac{1.27 \times 4200}{\sqrt{200}} = 23 \text{ cm.}$$

$$L_{db} = 0.006 d_b f_y = 0.006 \times 1.27 \times 4200 = 32 \text{ cm.}$$

En este caso rige 32 cm; como la longitud disponible a cada lado del muro es de 1.01 m, cubre sobradamente la longitud requerida de 32 cm. Al respecto, recuérdese que el reglamento especifica que en ningún caso la longitud de desarrollo del acero será menor de 30 cm.

Obtención del área por temperatura.

Se trata de un elemento estructural protegido de la intemperie, por lo tanto se tiene:

$$A_{st} = 0.2\% \times a \times d = 0.002 \times 230 \times 17.70 = 8.14 \text{ cm.} \quad ; \quad \text{utilizando vars. } 3/8''$$

$$\text{no. vars} = 8.14 / 0.71 = 12 \text{ vars.} \quad ; \quad \text{sep} = 230 / 12 = 19 \text{ cm.}$$

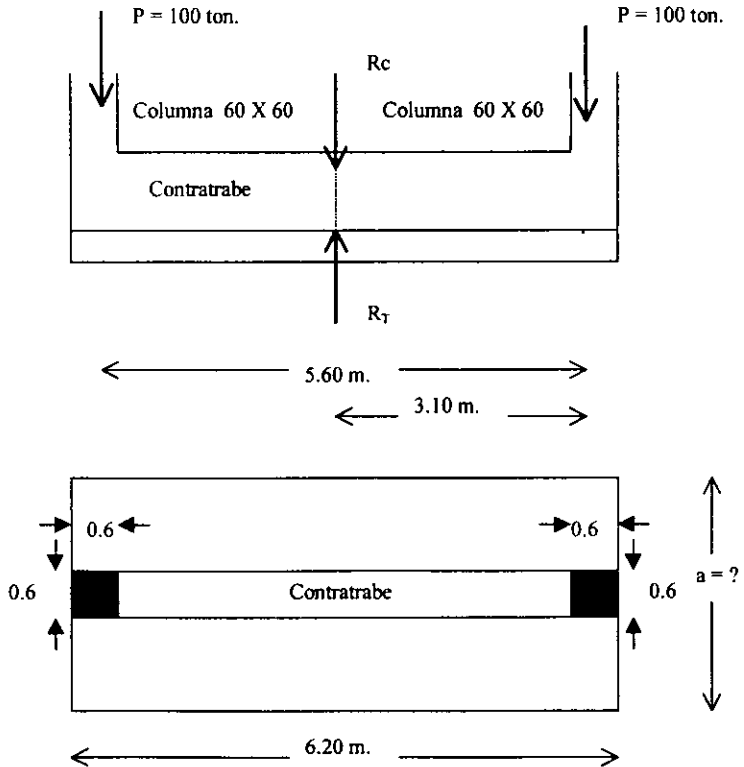
**Ejemplo Diseño de una zapata combinada con contratrabe para soportar dos columnas que reciben cargas iguales, el factor de carga se considera de 1.4**

Datos:

$$f_c = 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

$$R_T = 22 \text{ t/m}^2$$



$$P_u = 100 \times 1.4 = 140 \text{ ton}$$

Suponemos en este caso el 8% para el peso de la zapata; en consecuencia, la reacción neta vale:  $R_n = R_T - 8\% R_T = 22000 - 1760 = 20240 \text{ kg/m}^2$

Ancho de la zapata

$$Az = \frac{280000 \text{ kg}}{20240 \text{ kg/m}^2} = 13.83 \text{ m}^2 \quad \therefore a = \frac{13.83}{6.20} = 2.24 \text{ m}$$

Como las columnas reciben cargas iguales, las resultantes tanto de fuerzas verticales como de la reacción del terreno, coinciden a la mitad entre ambas columnas.

$140000 \times 6.20 = (280000)(x)$ , despejando  $x$  tenemos:

$$x = 140000 \times 6.20 / 280000 = 3.10 \text{ m.}$$

Cálculo del momento de flexión.

$$x = \frac{2.24 - 0.60}{2} = 0.82 \text{ m.}$$

$$Mu = \frac{Rn \times x^2 \times 100}{2} = \frac{202240 \times 0.82^2 \times 100}{2} = 6805 \text{ kg} \cdot \text{m}$$

Porcentaje de acero en la zapata.

$$p \text{ m\u00edn.} = \frac{14}{fy} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

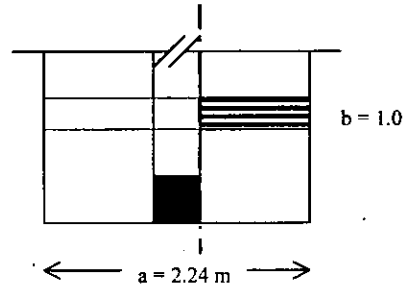
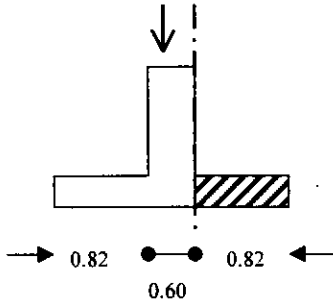
$$\text{suponemos } p = 0.01, \quad \gamma = \frac{0.01 \times 4200}{250} = 0.168$$

Por lo tanto se tiene:

$$d^2 = \frac{M_u}{F_R b f' c \gamma (1 - 0.59\gamma)}$$

$$d^2 = \frac{680500}{0.9 \times 274 \times 250 \times 0.168 (1 - 0.59 \times 0.168)} = 180 \text{ cm}^2$$

$$\therefore d = \sqrt{180} = 13.50 \text{ cm.}$$



### Verificación del peralte a fuerza cortante

$$x = 0.82 - d / 2 = 0.82 - 0.0675 = 0.7525 \approx 0.76 \text{ m.}$$

$$\text{area sombreada} = 0.76 \times 1.0 = 0.76 \text{ m}^2$$

$$V_{\text{max.}} = R_n \times A = 20240 \times 0.76 = \text{kg.}$$

$$u_u \leq F_R \sqrt{f' c} = 0.8 \sqrt{250 \times 0.8} = 11.32 \text{ kg/cm}^2$$

$$\therefore d_9 = \frac{V_u}{F_R \times 100 \times u_u} = \frac{15382}{0.8 \times 100 \times 11.32} = 17.0 \text{ cm.}$$

$$h = 17 + 0.8 + 5.2 = 23 \text{ cm.}$$

Domina el peralte por cortante.

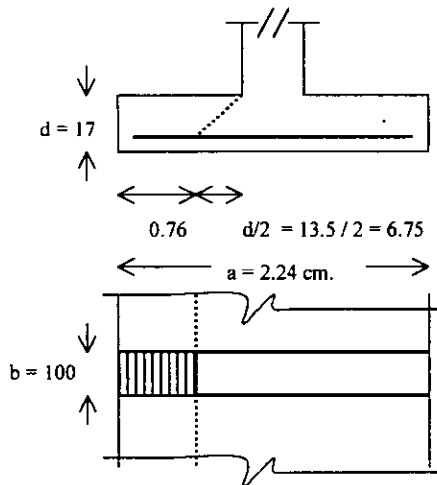
Cálculo del área de acero.

$$A_s = \rho b d$$

$$A_s = 0.01 \times 100 \times 17 = 17.0 \text{ cm}^2$$

Con varillas # 5      no. vars =  $17 / 1.99 = 9$  vars. # 5

$$\text{Sep} = 100 / 9 = 11.10 \text{ cm.} \quad ; \quad d/2 = 11.1 / 2 = 5.550 \text{ cm.}$$



Longitud de desarrollo.

$$L_{db} = 0.06 \frac{A_b f_y}{\sqrt{f'_c}} = 0.006 \frac{1.99 \times 4200}{\sqrt{250}} = 31.80 \text{ cm.}$$

$$L_{db} = 0.006 d_b f_y = 0.006 \times 1.59 \times 4200 = 40 \text{ cm.}$$

La longitud a cada lado de la contratrabe cubre sobradamente la longitud requerida de 40 cm.

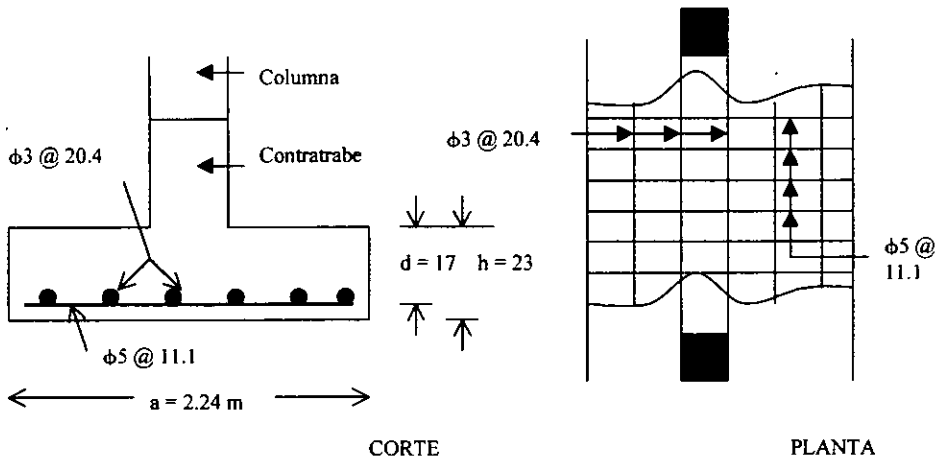
### Cálculo del acero por temperatura.

La estructura esta protegida de la intemperie

$$A_{st} = 0.2\% \times a \times d = 0.002 \times 224 \times 17.0 = 7.72 \text{ cm. ; utilizando vars. 3}$$

$$\text{no. vars} = 7.72 / 0.71 = 11 \text{ vars. ; sep} = 224 / 11 = 20.4 \text{ cm.}$$

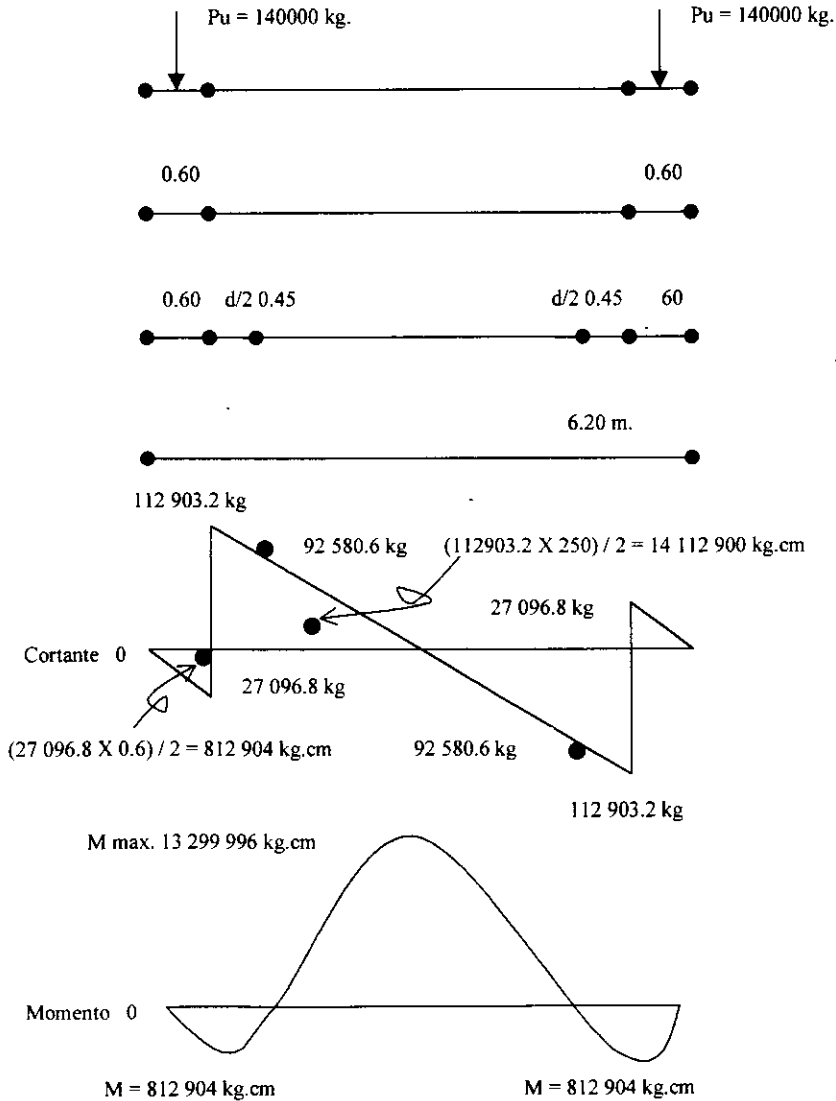
### Colocación del acero en la zapata.





Cálculo de la contratrabe.

Se calcularán primeramente los cortantes en los puntos principales a lo largo de la contratrabe, para después obtener la gráfica de momentos.



Carga por metro lineal.

$$280\,000 / 6.20 = 45\,161.30 \text{ kg/ml}$$

Cortante en los paños interiores de columnas.

$$45\,161.3 \times 0.60 = 27\,096.80 \text{ kg.}$$

$$\text{Por lo tanto } 27\,096.80 - 140\,000 = 112\,903.2 \text{ kg.}$$

Cortante a una distancia (d/2), de los paños interiores de columnas.

Suponemos para la contratrabe un peralte de 90 cm.

$$-112903.2 + (45161.30 \times 0.45) = -92580.6 \text{ kg.}$$

$$-92580.6 + (45161.30 \times 4.10) = 92580.6 \text{ kg.}$$

Máximo momento entre paños interiores de columnas

$$M_{\max.} = 13\,299\,996 \text{ kg.} \cdot \text{cm.}$$

Porcentaje de acero:

$$p_{\min.} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.003$$

y

$$p_b = \frac{0.85 \times 250}{4200} \times \frac{4800}{4200 + 6000} = 0.024$$

Se va a suponer  $p = 0.006$

$$\gamma = p \cdot f_y / f_c = 0.006 \cdot 4200 / 250 = 0.10$$

### Determinación del peralte por flexión

$$d^2 = \frac{M_u}{F_R b f_c \gamma (1 - 0.59\gamma)}$$

$$d^2 = \frac{13299996}{0.9 \times 60 \times 250 \times 0.10 (1 - 0.59 \times 0.10)} = 10472 \text{ cm}^2$$

$$\therefore d = \sqrt{10472} = 102 \text{ cm.}$$

$$h = 102 + 1.5 + 5.0 = 109 \text{ cm.}$$

### Revisión del peralte por cortante.

A una distancia ( $d/2$ ) de los paños interiores de las columnas, el cortante vale (92 580.6 kg.), por lo tanto:

$$u = \frac{92580.6}{0.8 \times 60 \times 102} = 18.91 \text{ kg/cm}^2$$

Y el esfuerzo máximo que absorbe el concreto es de  $u \leq FR \sqrt{f_c} = 0.8 \sqrt{0.8 \times 250} = 11.32 \text{ kg/cm}^2$  esto nos quiere decir que la contratrabe falla por cortante.

Al fallar a cortante se puede aumentar el peralte, pero en este caso se respetará la sección de 60 X 102 cm., de tal manera que la diferencia la absorberemos con estribos de 3/8":

$$sep = \frac{FR A_v f_y d (\sin \theta + \cos \theta)}{V_u - VCR} \leq \frac{FR A_v f_y}{3.5b}$$

$$sep = \frac{0.8 \times 2 \times 0.71 \times 4200 \times 102 \times (\sin 90^\circ + \cos 90^\circ)}{92580.6 - 69278} = 69278 \text{ kg}$$

$$VCR = u b d = 11.32 \times 60 \times 102 = 69278 \text{ kg.}$$

$$\frac{FR Av fy}{3.5 b} = \frac{0.8 \times 2 \times 0.71 \times 4200}{3.5 \times 60} = 22.70 \text{ cm.}$$

Por lo tanto la separación será de 20 cm.

Cálculo del área de acero.

$$As = p b d$$

$$As = 0.006 \times 60 \times 102 = 36.72 \text{ cm}^2$$

$$\text{Con varillas } 1'' \text{ } 1/8'' \quad \text{no. vars} = 36.72 / 6.42 = 6 \text{ vars. \# 9}$$

Para el momento de 812 904 kg \* cm., el área de acero la obtenemos en forma proporcional

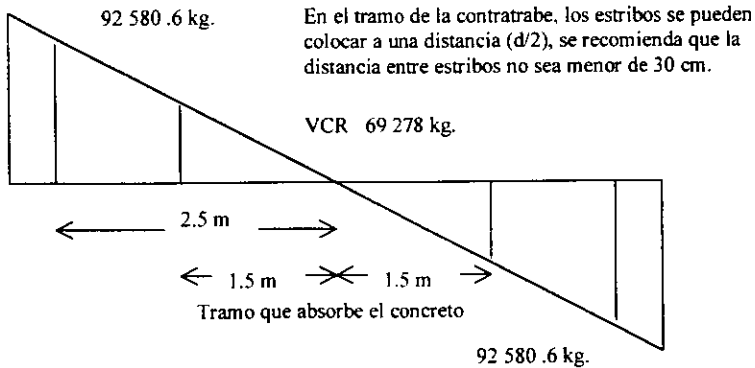
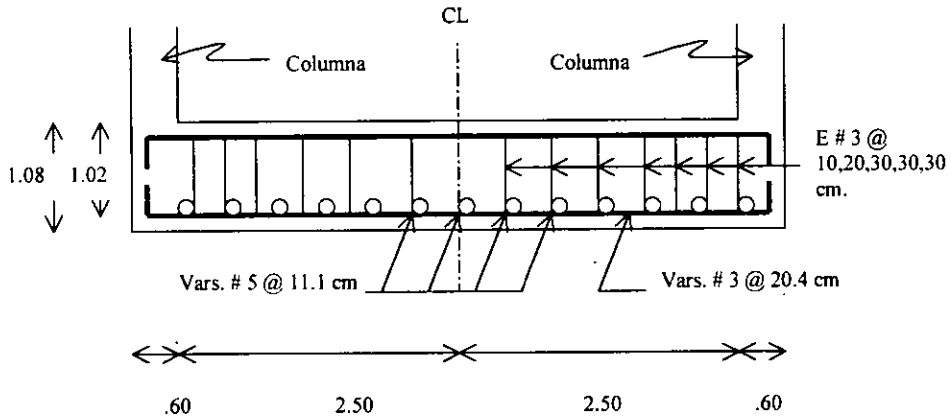
$$\begin{array}{r} 13299996 \text{ ----- } 36.72 \\ 812904 \quad \text{----- } x \end{array}$$

$$x = \frac{812904 \times 36.72}{13299996} = 2.24 \text{ cm}^2$$

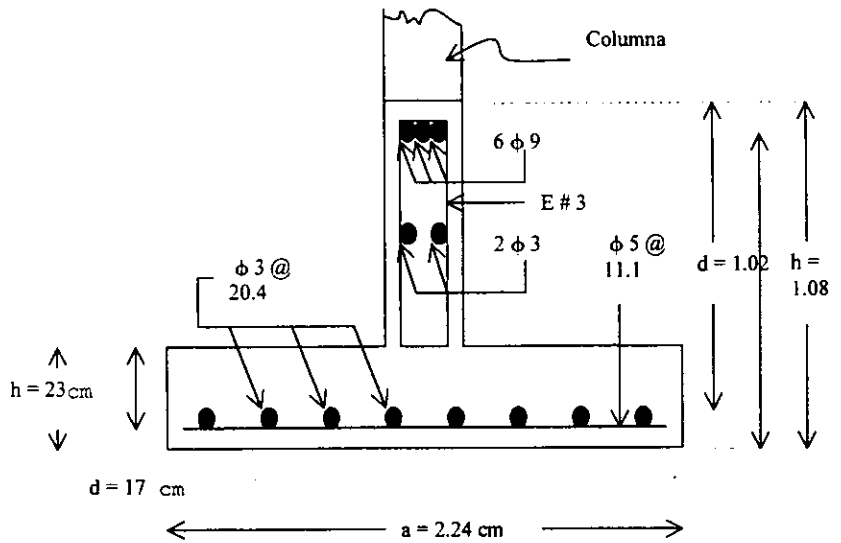
Sean varillas. # 4

$$\text{No. vars.} = 2.24 / 1.27 = 2 \text{ vars. \# 4}$$

Croquis de armado de la contratrabe.



Armado de zapata.



## **CAPITULO VIII**

### **RECOMENDACIONES Y CONCLUSIONES**

#### **Introducción.**

La verificación de la calidad de los materiales componentes del concreto antes del inicio de una obra permite seleccionar aquellos que potencialmente tienen las características requeridas para fabricar la clase de concreto que se necesita en la obra. En la verificación se deberá hacer énfasis en las propiedades directamente relacionadas con la resistencia, rigidez y durabilidad del concreto.

#### **Control, manejo y almacenamiento de materiales.**

Los agregados fino y grueso, el cemento y los aditivos químicos deberán ser adecuadamente almacenados, dosificados y manejados para mantener su calidad. Es recomendable que los agregados fino y grueso sean de buena calidad, libres de contaminación y uniformes en granulometría y contenido de humedad.

El almacenaje en montones de agregado se debe mantener al mínimo, pues aún bajo condiciones ideales los finos tienden a asentarse y a acumularse. Sin embargo, cuando es necesario almacenar en montones, el uso de métodos correctos minimiza los problemas con los finos, segregación, rompimiento del agregado y una excesiva variación en la granulometría. Los montones se deben construir en capas horizontales o suavemente inclinadas, no por volteo. Sobre los montones no deben operarse camiones, cargadores u otra unidad pesada, puesto que, además de quebrar el agregado, a menudo dejan tierra sobre los depósitos. Se debe tener una base dura con un buen drenaje para impedir la contaminación del material con el fondo, y el traslape de los diferentes tamaños se debe evitar mediante muros apropiados o amplios espacios entre los montones.

Se debe prestar especial atención en el almacenamiento de agregados especiales para concreto, incluyendo los de peso ligero, alta densidad y para acabado arquitectónico. Hay que hacer un esfuerzo para asegurar un contenido de humedad estable en el agregado cuando éste se dosifique. El uso de agregados que tienen cantidades variables de agua, es una de las causas más frecuentes de la pérdida de control de la consistencia del concreto (revenimiento).

El cemento se debe almacenar en estructuras protegidas contra la intemperie, apropiadamente ventiladas, para impedir la absorción de humedad. El tiempo de almacenamiento para después utilizar el cemento en forma satisfactoria depende, principalmente del lugar de almacenamiento y de las condiciones del clima.

- En lata hermética - indefinidamente
- A granel en silo - alrededor de 3 meses
- En bolsas - puede perder mucha resistencia (cerca del 20%) al cabo de 4 o 6 semanas.

En la práctica, la mayor parte de los aditivos químicos se entregan en forma líquida, por lo tanto se debe tener mucho cuidado para proteger los aditivos líquidos contra la congelación. Si se congelan, el mezclado o la recombinación apropiada se debe llevar a cabo antes de que se usen en el concreto. Se deberán seguir las recomendaciones del fabricante. La ceniza volante, la escoria molida y otros aditivos finamente divididos o pulverizados deben ser manejados, transportados y almacenados de la misma manera que el cemento.

### Medición y dosificación.

Un objetivo importante en la producción del concreto es obtener la uniformidad y homogeneidad indicadas por propiedades físicas, tales como peso volumétrico, revenimiento, contenido de aire, resistencia y peso.



Durante las operaciones de medición, los agregados de deben manejar de tal manera que tengan la granulometría deseada, pesándose todos los materiales a la tolerancia requerida para mantener homogéneas las reproducciones de la mezcla de concreto escogida.

Los factores que afectan la selección del sistema apropiado de dosificación son: Tamaño de la obra, Volumen / hora requerido, Normas de rendimiento que se requieran en la dosificación.

La dosificación por volumen incluye únicamente la dosificación de los agregados inertes, puesto que el cemento viene envasado con peso y volumen determinado ( peso 50 kg., volumen 33 litros ) y los proporcionamientos en estos casos se calcularán por saco de cemento. La medida de los materiales en volumen por medio de botes o carretillas, no es de recomendarse, en vista que las dosificaciones resultan con variaciones muy grandes originando con ello la obtención de un concreto poco uniforme y de consistencia variable.

En la actualidad se expresan las proporciones en peso, en vista de que se emplea exactamente la cantidad de material calculada para cada mezcla de concreto.

Es muy importante que el personal que opere los instrumentos y equipo de operación sepan atender cualquier ajuste que se haga, ya que cualquier cambio en el sistema podría afectar adversamente la calidad del concreto.

Además de la medición exacta de los materiales, también se deben emplear procedimientos de operación, si se requiere mantener la uniformidad del concreto. Se debe tener cuidado de asegurar que los materiales que se han dosificado estén puestos en la secuencia apropiada, y combinados de manera que se carguen uniformemente dentro de la mezcla.

## **Mezclado y transporte.**

Es esencial un mezclado completo para la producción de un concreto de calidad uniforme. Por lo tanto, el equipo y los métodos que se empleen deben ser capaces de mezclar con eficacia los materiales. El método y la secuencia de carga de las mezcladoras es de gran importancia para determinar si el concreto estará apropiadamente mezclado.

Para las mezcladoras de planta central se recomienda obtener un efecto de precombinación o premezclado, al tiempo que el chorro de materiales fluye dentro de la mezcladora.

En los camiones mezcladores todos los procedimientos de carga deben ser diseñados de modo que se evite el amontonamiento del material, particularmente arena y cemento, en la cabeza del tambor durante la carga. La probabilidad del amontonamiento disminuye si se coloca alrededor del 10% del agregado grueso y agua en el tambor de la mezcladora antes de la arena y el cemento.

El tiempo de mezclado se deberá basar en la capacidad de la mezcladora para producir un concreto uniforme en cada mezcla y mantener la misma calidad en la mezclas siguientes. El tiempo de mezclado se debe medir a partir del momento en que todos los ingredientes están dentro de la mezcladora. Durante un mezclado nunca deberá excederse la cantidad de agua de la relación agua - cemento.

Es recomendable que las mezcladoras tengan un mantenimiento apropiado para evitar fugas de mortero y material seco. Las superficies internas en la mezcladora se deben mantener limpias y las paletas gastadas se deben reemplazar. Las mezcladoras que no cumplan con los requisitos de funcionamiento, deben ser retiradas de servicio hasta que el mantenimiento y las reparaciones necesarias corrijan sus deficiencias.

El concreto se puede transportar por métodos y equipos diversos, tales como camión – revolvedor, camión de caja fija, cucharones transportados por camión, por conductos y mangueras o por bandas transportadoras. El método de transportación que se usa debe entregar eficientemente el concreto en el punto de colocación y sin alterar significativamente sus propiedades deseadas con respecto a la relación agua – cemento, revenimiento, contenido de aire y homogeneidad. Cada método de transportación tiene ventajas bajo condiciones particulares, tales como tamaño de ingredientes y proporciones, tipo y accesabilidad de colocación, capacidad de entrega requerida, localización de la planta de dosificación, condiciones ambientales y otros. Estas diferentes condiciones se deben revisar con detenimiento al seleccionar el tipo de transportación que mejor se adopte para obtener económicamente un concreto de calidad en el lugar de colocación.

### **Colocación del concreto.**

La colocación del concreto se efectúa con recipientes, tolvas, carretillas propulsadas a mano o con motor, tubos de caída, bandas transportadoras, bombeo y equipo para pavimentar.

Un requisito básico en todo lo que se refiere al manejo del concreto es que tanto la calidad como uniformidad del concreto se deben mantener o conservar. La selección del equipo de debe basar en su capacidad para manejar eficientemente el concreto en las condiciones más ventajosas, de tal modo que pueda ser fácilmente consolidado en su lugar mediante vibración. No es recomendable emplear equipo en el que sea necesario ajustar las proporciones de mezcla fuera de los límites.

Una planeación anticipada debe asegurar una provisión adecuada y consistente del concreto. Se debe prever suficiente capacidad de colocación, de manera que el concreto se mantenga plástico y libre de juntas frías mientras se coloca. Todo el equipo para colocación debe estar limpio y en buen estado. También se debe arreglar de modo que el

concreto se entregue en su posición final sin segregación objetable. Así mismo el equipo debe estar dispuesto para que la colocación se desarrolle sin tardanzas indebidas y la mano de obra debe ser la suficiente como para asegurar la apropiada colocación, consolidación y acabado del concreto. Si el concreto ha de ser colocado en la noche, el sistema de iluminación debe ser suficiente para iluminar el interior de las cimbras y para proporcionar un lugar seguro de trabajo.

La colocación del concreto no debe empezar cuando exista la posibilidad de temperaturas de congelación, a menos que se hayan dispuesto de instalaciones adecuadas para la protección contra el frío. Se debe tener a la mano equipo para el rápido comienzo del curado o para la aplicación de compuestos de sellado. En los casos en que sea práctico, es ventajoso tener comunicaciones por radio o por teléfono entre el sitio de las colocaciones más importantes y la planta de mezclado y dosificación, a fin de controlar mejor los programas de entrega y evitar retrasos excesivos y desperdicios de concreto.

Se debe realizar una inspección final detallada de los cimientos, juntas de construcción, cimbras, tapas de juntas, acero de refuerzo y otros detalles de colocación del concreto antes de que se coloque. Es necesario desarrollar un método para documentar tal inspección y éste deberá ser aprobado para todas las partes interesadas antes del comienzo del trabajo. Todos estos detalles se deben examinar cuidadosamente para asegurarse que coinciden con los planos, especificaciones y con una práctica correcta.

Al momento de colocar el concreto, el acero de refuerzo y las piezas ahogadas deberán estar limpias y libres de lodo, aceite u otros materiales que pudieran afectar adversamente la capacidad de adherencia. Se debe tener cuidado en asegurarse de que todo el acero de refuerzo sea del tamaño y longitud apropiadas y de que sea colocado en la posición correcta y empalmado de acuerdo con los planos. Debe mantenerse un recubrimiento adecuado de concreto al acero de refuerzo.

El equipo utilizado debe disponerse de tal manera que el concreto tenga una caída vertical libre hasta el punto de colado o hasta el interior del contenedor que lo reciba. El chorro de concreto no debe separarse, permitiendo que caiga libremente sobre varillas, espaciadores, refuerzos u otros materiales ahogados. Si las cimbras están suficientemente abiertas y libres, de manera que no estorben la caída vertical del concreto en el lugar de colocación, generalmente es preferible la descarga directa y sin el empleo de tolvas, conductos o vertedores. El concreto debe ser depositado en o cerca de su posición final durante su colocación, ya que presenta la tendencia a segregarse cuando tiene que hacerse fluir lateralmente hasta su lugar.

Si se desea colocar concreto de manera monolítica en una viga peraltada, muro o columna con una losa o marco, se debe programar una demora que permita el asentamiento del concreto inferior antes de colocar el concreto de la losa o marco. El tiempo de demora dependerá de la temperatura y las características de fraguado del concreto que se emplee, generalmente alrededor de 1 hora, pero la colocación se debe empezar lo suficientemente pronto como para permitir la liga de la capa nueva con la anterior por medio de vibración.

La vibración interna es el método más eficaz para consolidar concreto plástico para la mayor parte de las aplicaciones. La efectividad de un vibrador plástico interno depende principalmente del diámetro de su cabeza, de la frecuencia y de su amplitud. Los vibradores no se deben emplear para mover concreto en sentido lateral, y deben insertarse y quitarse verticalmente a intervalos próximos, usando un patrón sistemático de vibración para asegurar que todo el concreto haya sido adecuadamente consolidado.

A continuación se presentan recomendaciones prácticas para consolidar concreto empleando vibrador interno.

Asegúrese de que se puede observar la superficie del concreto, el vibrador se debe introducirse con rapidez, se debe dejar el vibrador dentro del concreto durante 10 segs., al sacarlo debe ser lentamente, introducir de nuevo el vibrador a no más de 50 cm. de

distancia de su posición anterior, se debe evitar a toda costa que el vibrador toque la cara de la cimbra y el acero de refuerzo, evitar utilizar el vibrador para hacer fluir el concreto. Es importante mencionar que los operadores experimentados y competentes, que trabajen con vibradores con un buen mantenimiento, y con suficientes unidades de reserva, son esenciales para una exitosa consolidación del concreto fresco.

### **Curado del concreto.**

El curado del concreto consiste en mantener un contenido satisfactorio de humedad y temperatura en el concreto recién colado, para que se puedan desarrollar las propiedades deseadas. La resistencia y la durabilidad del concreto se desarrollan plenamente sólo si se cura de manera adecuada, sin embargo, cuando las condiciones ambientales de humedad y temperatura son bastantes favorables para el curado, no se requiere de ninguna acción adicional.

La temperatura se debe controlar para evitar la congelación del concreto hasta que se desarrolle una resistencia a la compresión por lo menos  $35 \text{ kg/cm}^2$ .

El procedimiento más usual para hacer el curado es conservar la superficie expuesta continuamente húmeda mediante un curado apropiado, no sólo se evita dicha pérdida de agua, sino que se eliminan las contracciones excesivas que pueden originar un agrietamiento superficial.

Para acelerar la adquisición de resistencia y reducir el tiempo de curado, puede usarse el curado con vapor a alta presión, vapor a presión atmosférica, o algún otro proceso que sea aceptado.

## **Cimbras, preparación de juntas y acabados.**

Las cimbras son los moldes dentro de los cuales se coloca el concreto. El diseño de la cimbra debe quedar establecido antes de la construcción de la misma. Los planos deben estar disponibles en el sitio durante la construcción de la cimbra y cuando se coloque el concreto. Se debe revisar el diseño y la construcción de la cimbra para el concreto a fin de minimizar costos, sin sacrificar ni seguridad ni calidad. Puesto que la ejecución de construcciones de concreto frecuentemente se juzga por la apariencia del concreto al quitar las cimbras, el comportamiento apropiado de la cimbra, mientras soporta el peso del concreto en estado plástico y el peso vivo de las construcciones es de vital importancia.

Las cimbras se deben construir con la suficiente resistencia y rigidez para cargas la masa y la presión del fluido del concreto y de los materiales, equipo que se vayan a colocar sobre ellas. Las cimbras se deben proteger del deterioro, de la intemperie y de las contracciones, aceitándolas o humedeciéndolas convenientemente antes de colocar el concreto. Las superficies de las cimbras deben estar limpias y ser de textura uniforme, y cuando se vuelven a emplear se deben limpiar y aceitar con cuidado, si fuera necesario.

Las caras de las cimbras se deben tratar con un agente descimbrante para evitar que el concreto se pegue a éstas y así pueda ser más fácil el descimbrado. El agente descimbrante también puede actuar como sellador o capa protectora para las cimbras, a fin de evitar la absorción de agua desde el concreto hacia la cimbra.

Debe existir un acceso amplio al interior de las cimbras para permitir una limpieza, colocación, vibración e inspección del concreto convenientes. Las juntas de construcción ocurren siempre que el colado del concreto se detiene o se demora, es decir que el concreto fresco colado subsecuentemente contra el concreto endurecido, no puede adherirse a la colocación previa. Las superficies de todas las juntas de construcción se deben limpiar y preparar adecuadamente para asegurar una correcta adherencia con el concreto adyacente y lograr impermeabilidad cuando se necesite.

La superficie limpia de la junta de concreto debe estar saturada y superficialmente seca al momento en que se coloque sobre ella nuevo concreto. La humedad de la superficie debilita la junta e incrementa la relación agua – cemento del concreto recién colado. Hay que asegurarse de que la primera capa de concreto en la junta de construcción esté adecuadamente consolidada para lograr una buena adherencia.

Para lograr una superficie durable del concreto se tienen que seguir con cuidado los procedimientos apropiados. El concreto utilizado debe ser del menor revenimiento posible para su consolidación apropiada, preferiblemente mediante vibración mecánica interna, después de la consolidación, los trabajos de aplanado y pulido y el primer allanado de deben llevar a cabo de tal manera que el concreto se rebaje y se manipule lo menos que sea posible, para obtener el resultado deseado. Trabajar el concreto en demasía conduce a un exceso de finos y agua en la superficie, daña la calidad de la superficie terminada causa efectos indeseables como el agrietamiento, cuarteaduras y polvo. Por la misma razón, cada paso en la operación del acabado, desde el primero hasta el último acabado, se debe posponer tanto como sea posibles para lograr el grado deseado de textura superficial.

## **Conclusiones**

El concreto reforzado es un material que por sus características de resistencia y durabilidad puede ser empleado prácticamente en cualquier medio, sin embargo, debe recordarse que es susceptible al ataque de los sulfatos, por lo que bajo estas condiciones habrá que tomar precauciones a fin de evitar su deterioro, estas precauciones pueden consistir en el uso de un cemento resistente al ataque de sulfatos o en su caso si ya está construido el elemento recubrirlo con cemento asfáltico.

El uso de concreto reforzado es recomendado en elementos cuya forma sea básicamente regular, esto no significa que formas caprichosas no puedan conseguirse,



sin embargo, en esos casos habrá que tomarse en cuenta el aspecto económico ya que podrá incrementarse sustancialmente, así mismo, se tendrá especial cuidado con las formas angulosas ( en general no recomendables ) ya que éstas tenderán a desconcharse o romperse, además que dificultarán el armado y colado del elemento. Estructuralmente, el concreto reforzado puede usarse ampliamente, casi en cualquier elemento estructural resultando con un buen comportamiento.

Cuando se construye una estructura con concreto reforzado, los problemas de mantenimiento en condiciones de servicio son prácticamente nulos, aunque en gran medida esta aseveración depende de las condiciones en que se elaboró y colocó el concreto. Hablando de diseño, se debe mencionar que el concreto armado es un material cuyas características mecánicas varían a través del tiempo, es cierto que la resistencia crece con la edad, pero cabe mencionar que su deformación también la hace aunque en un rango bajo, es debido a éstas características que resulta difícil predecir el comportamiento de una estructura de concreto reforzado para fines de reforzamiento o remodelación, y esto puede convertirse en un problema.

Algunas ventajas que ofrece el concreto reforzado son:

- Buen comportamiento estructural.
- Posibilidad de construcción en cualquier ambiente.
- Bajos costos de mantenimiento.
- La continuidad en la estructura.
- Se pueden construir los elementos en su posición definitiva, es decir que la estructura se cuele en el lugar.
- Buen comportamiento ante altas temperaturas.

Pero se debe tener en cuenta cuando se construye con concreto reforzado que:

- Los elementos estructurales tienden a ser robustos.

- Se debe tener especial cuidado en su fabricación y colocación si se desea obtener el máximo beneficio.
- El tiempo de ejecución de una obra con este material es largo lo que encarece la construcción.
- Su eficiente comportamiento estructural puede verse afectado por la calidad de los materiales empleados en su fabricación.

Finalmente, considero que el concreto reforzado es un material que se seguirá empleando por largo tiempo, sin embargo dadas las características de la construcción actual deberán procurarse nuevas técnicas que permitan obtener mayores resistencias y menores costos, así mismo deberán aparecer nuevas investigaciones que permitan que el diseño de elementos de concreto armado conduzca a elementos óptimos y en otros casos que perfeccionen el conocimiento del comportamiento de los elementos bajo ciertas solicitaciones.

# **Ayudas de diseño**

Instituto de Ingeniería, U.N.A.M.

Tabla no.1 Constantes de Cálculo.

$f'_c$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$f^*_c$	$f''_c$	$\sqrt{f^*_c}$	$0.5\sqrt{f^*_c}$	$\sqrt{f'_c}$	$0.7\sqrt{f'_c}$	$8000\sqrt{f'_c}$	$14000\sqrt{f'_c}$
150	120	102	10.95	5.48	12.25	8.57	97980	
200	160	136	12.65	6.32	14.14	9.90	113100	198000
250	200	170	14.14	7.07	15.81	11.07	126500	221400
300	240	204	15.49	7.75	17.32	12.12		242500
350	280	231.3	16.73	8.37	18.71	13.10		261900
400	320	254.1	17.89	8.94	20.00	14.00		280000

Se utilizaron las siguientes fórmulas

$$f^*_c = 0.8 f'_c$$

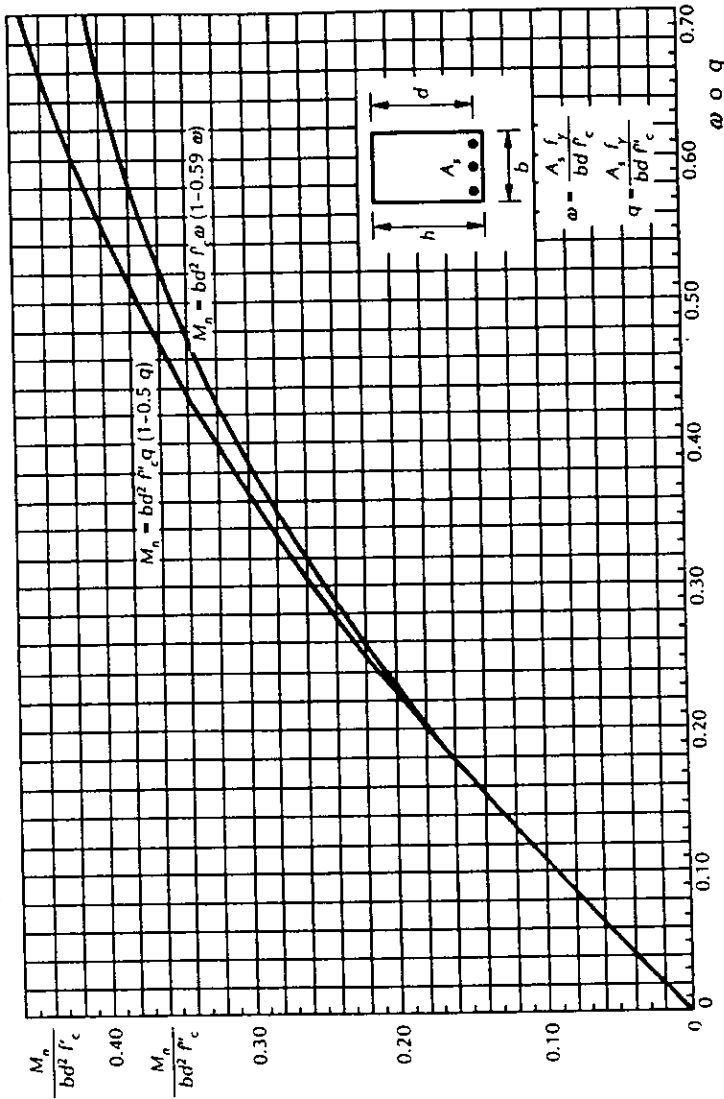
$$f''_c = 0.85 f^*_c \quad \text{si } f^*_c \leq 250 \text{ kg/cm}^2$$

$$f''_c = \left(1.05 - \frac{f^*_c}{1250}\right) f^*_c \quad \text{si } f^*_c > 250 \text{ kg/cm}^2$$

Tabla no.2 Diámetros, pesos y áreas de barras.

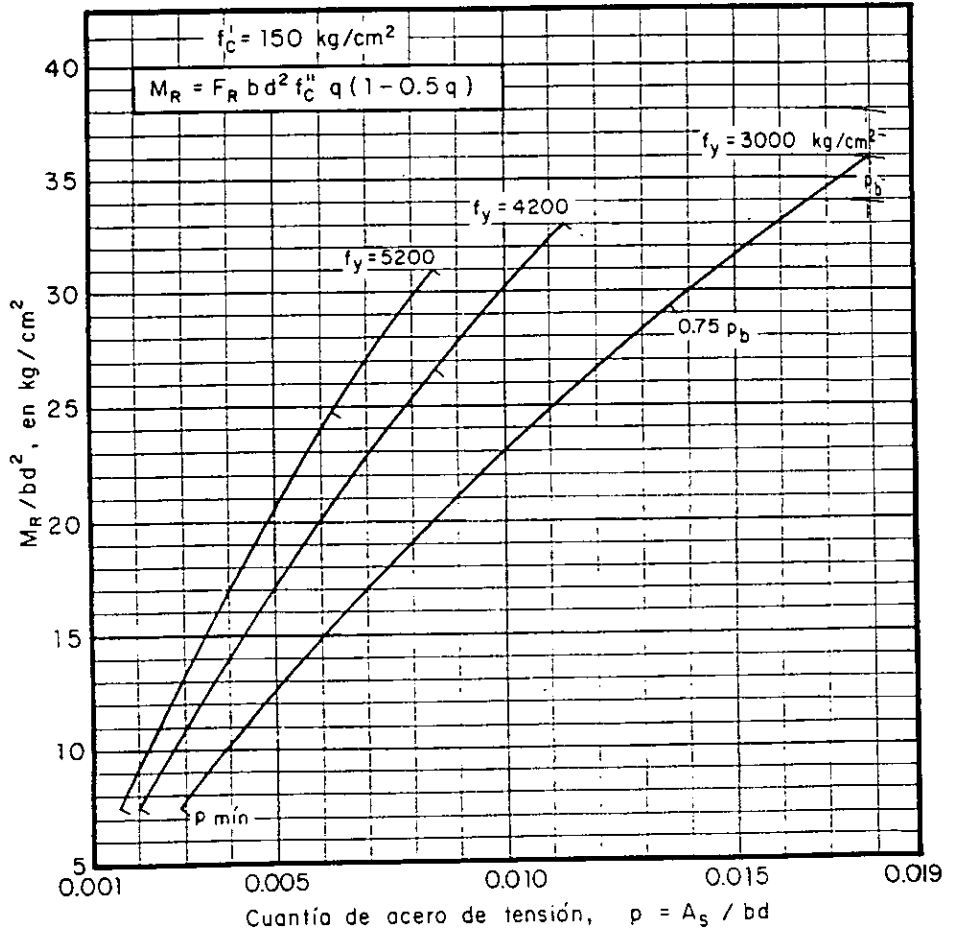
Número de designación	Diámetro nominal		Peso kg/m	NUMERO DE BARRAS										Areas de acero, en cm <sup>2</sup>									
	pulg	mm		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1/4	6.4	0.248	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20	0.32	0.64	0.96	1.28	1.60	1.92	2.24	2.56	2.88	3.20
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90	0.49	0.98	1.47	1.96	2.45	2.94	3.43	3.92	4.41	4.90
3	3/8	9.5	0.559	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.20	0.71	1.42	2.13	2.84	3.55	4.26	4.97	5.68	6.39	7.20
4	1/2	12.7	0.993	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70	1.27	2.54	3.81	5.08	6.35	7.62	8.89	10.16	11.43	12.70
5	5/8	15.9	1.552	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80	1.98	3.96	5.94	7.92	9.90	11.88	13.86	15.84	17.82	19.80
6	3/4	19.0	2.235	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50	2.85	5.70	8.55	11.40	14.25	17.10	19.95	22.80	25.65	28.50
7	7/8	22.2	3.042	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80	3.88	7.76	11.64	15.52	19.40	23.28	27.16	31.04	34.92	38.80
8	1	25.4	3.973	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70	5.07	10.14	15.21	20.28	25.35	30.42	35.49	40.56	45.63	50.70
9	1 1/8	28.6	5.028	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10	6.41	12.82	19.23	25.64	32.05	38.46	44.87	51.28	57.69	64.10
10	1 1/4	31.8	6.207	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20	7.92	15.84	23.76	31.68	39.60	47.52	55.44	63.36	71.28	79.20
11	1 3/8	34.9	7.511	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80	9.58	19.16	28.74	38.32	47.90	57.48	67.06	76.64	86.22	95.80
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00	11.40	22.80	34.20	45.60	57.00	68.40	79.80	91.20	102.60	114.00

## Gráfica para diseño por flexión

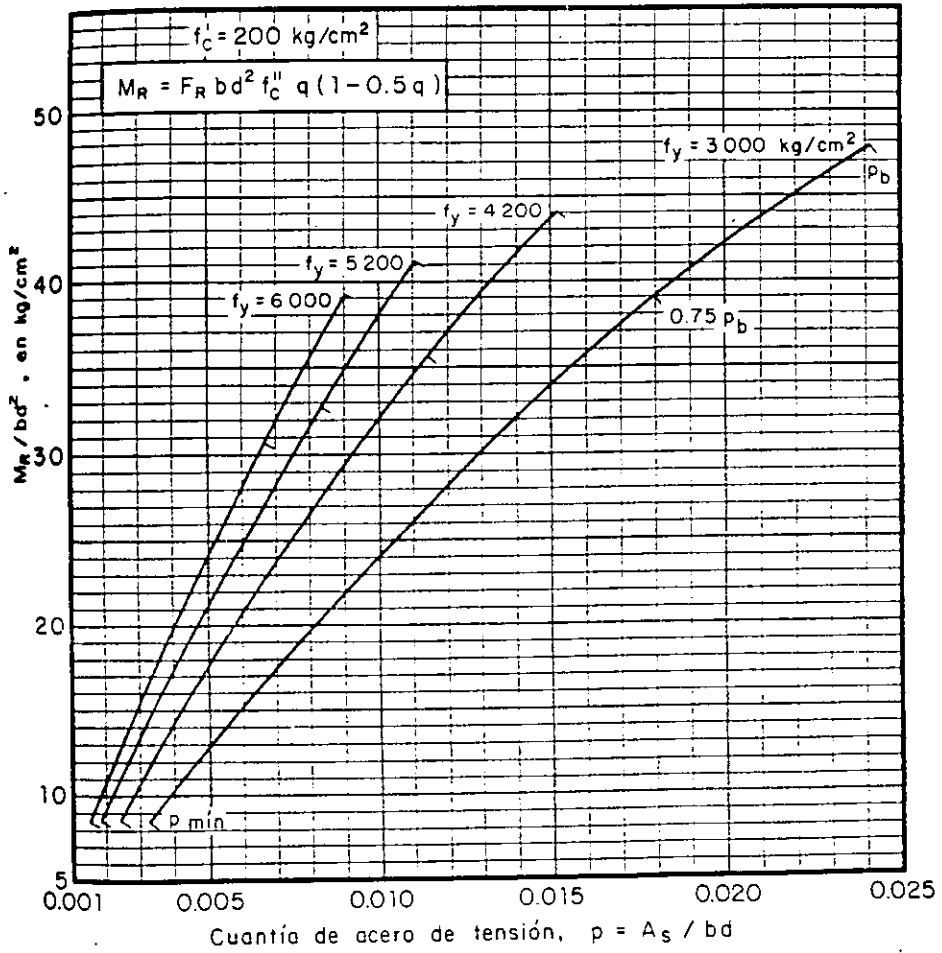


Momentos resistentes nominales de secciones rectangulares para  $\omega \leq \omega_b$ ,  $q \leq q_b$

## Momentos resistentes de secciones rectangulares

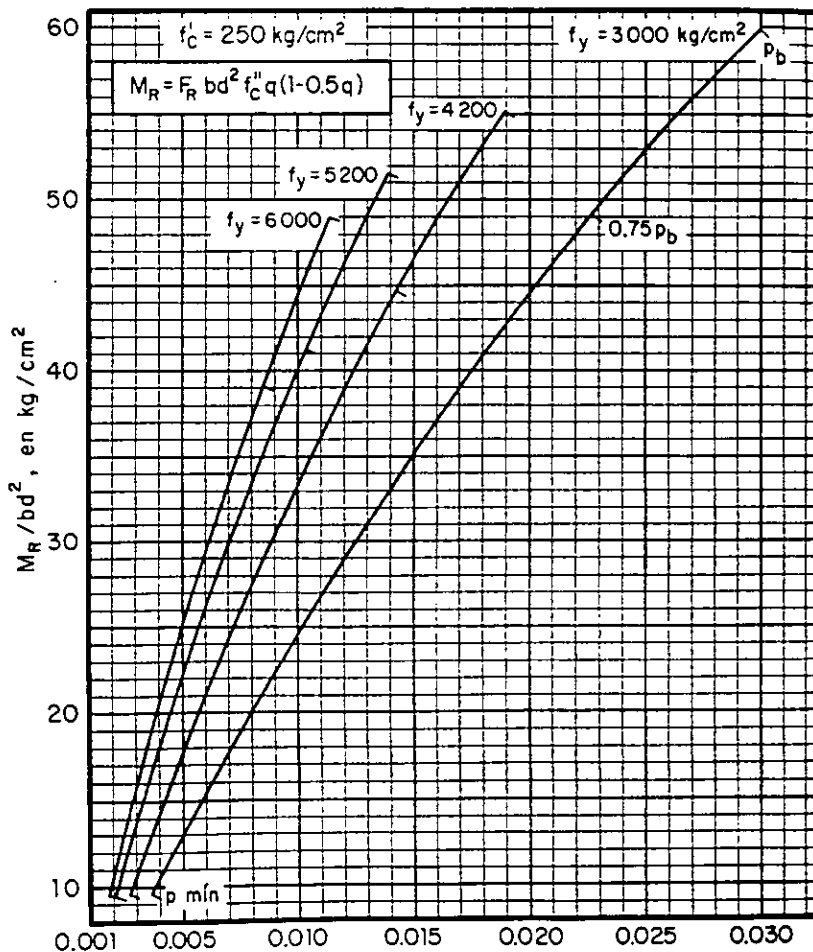


## Momentos resistentes de secciones rectangulares



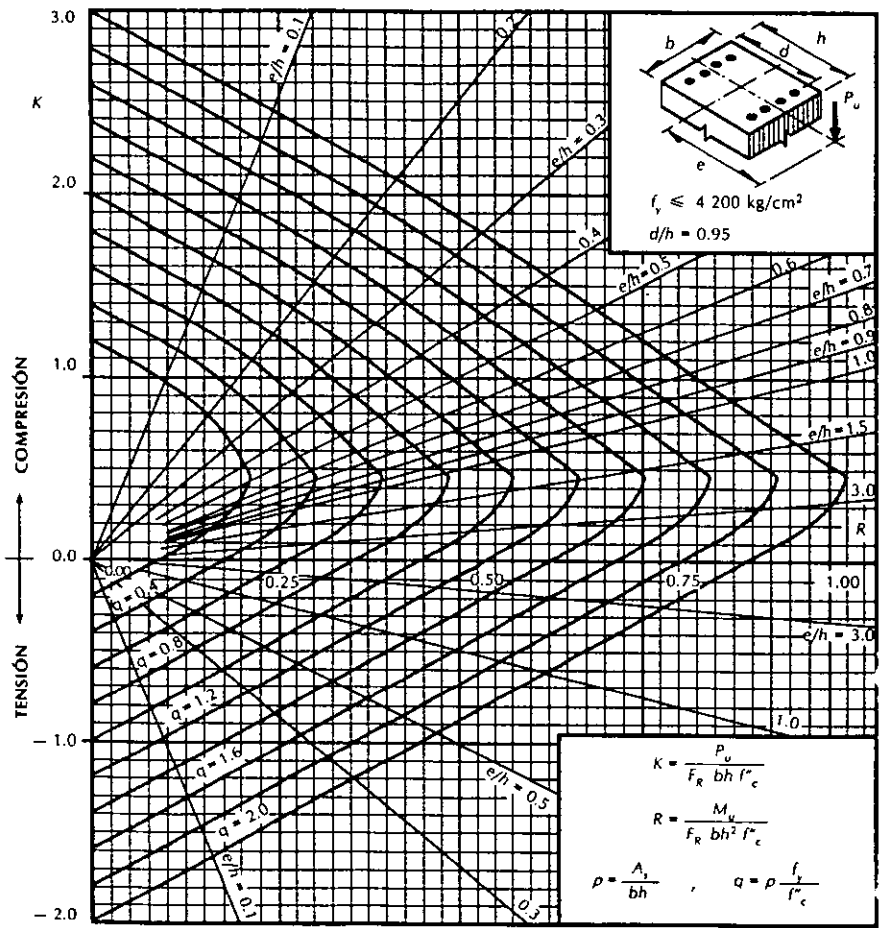


## Momentos resistentes de secciones rectangulares



**Diagramas de interacción para columnas de  
concreto reforzado.**

Instituto de ingeniería UNAM.



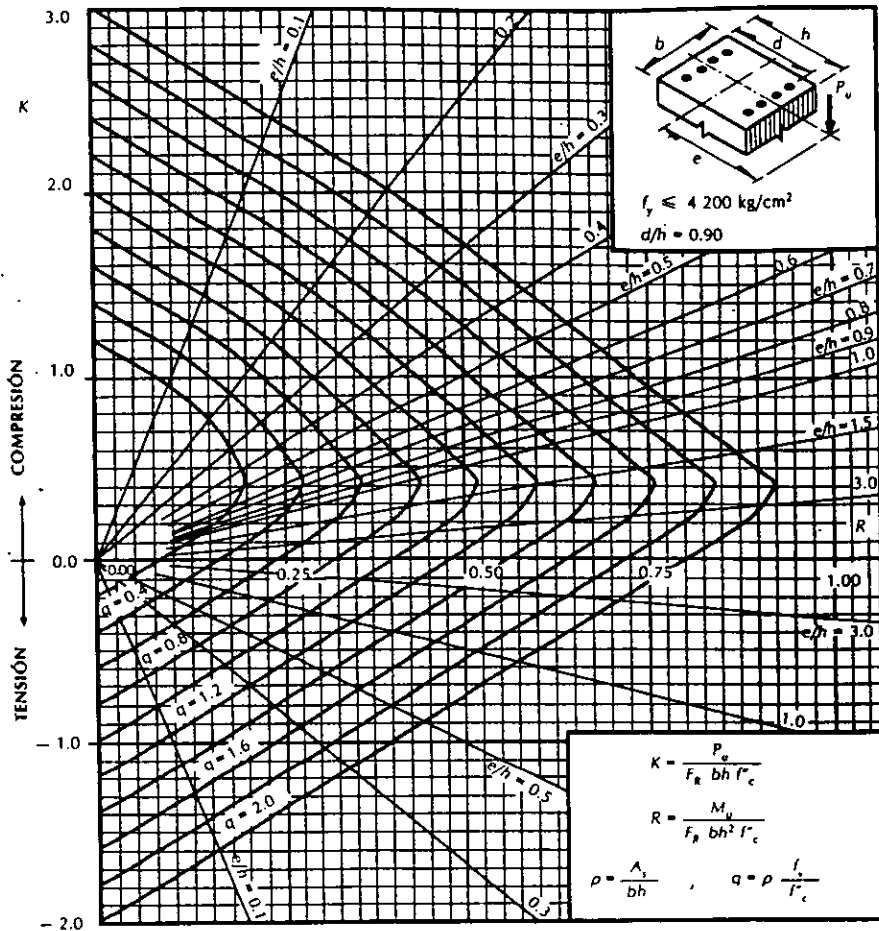
As = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^* c$ , si  $f^* c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^* c}{1400}\right) f^* c$ , si  $f^* c > 280 \text{ kg/cm}^2$

FR = Factor de reducción de resistencia

Pu = Carga axial última

Mu = Momento flexionante último



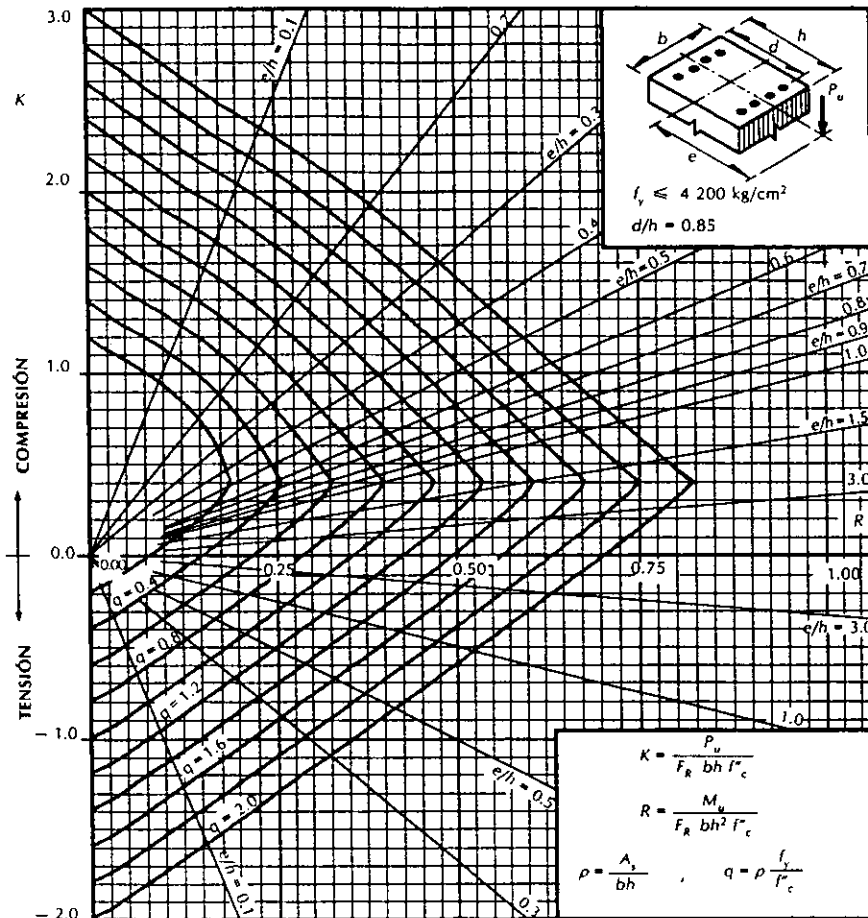
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^* c$ , si  $f^* c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^* c}{1400}\right) f^* c$ , si  $f^* c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia

$P_u$  = Carga axial última

$M_u$  = Momento flexionante último



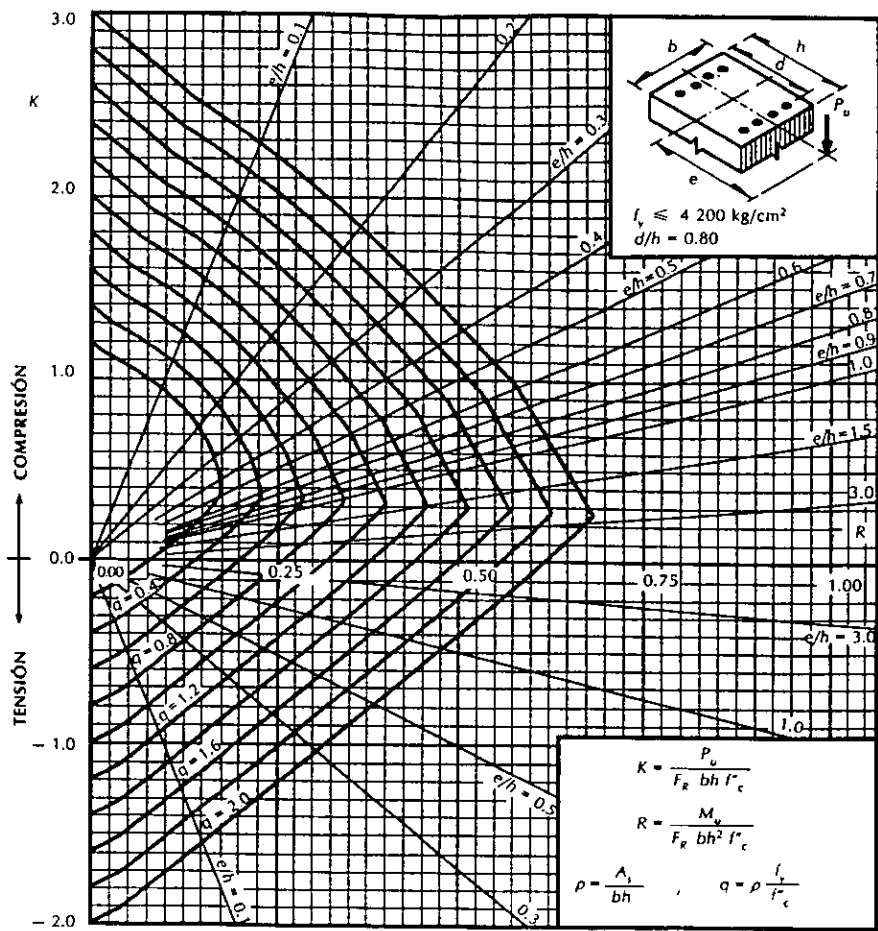
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducci3n de resistencia

$P_u$  = Carga axial 3ltima

$M_u$  = Momento flexionante 3ltimo



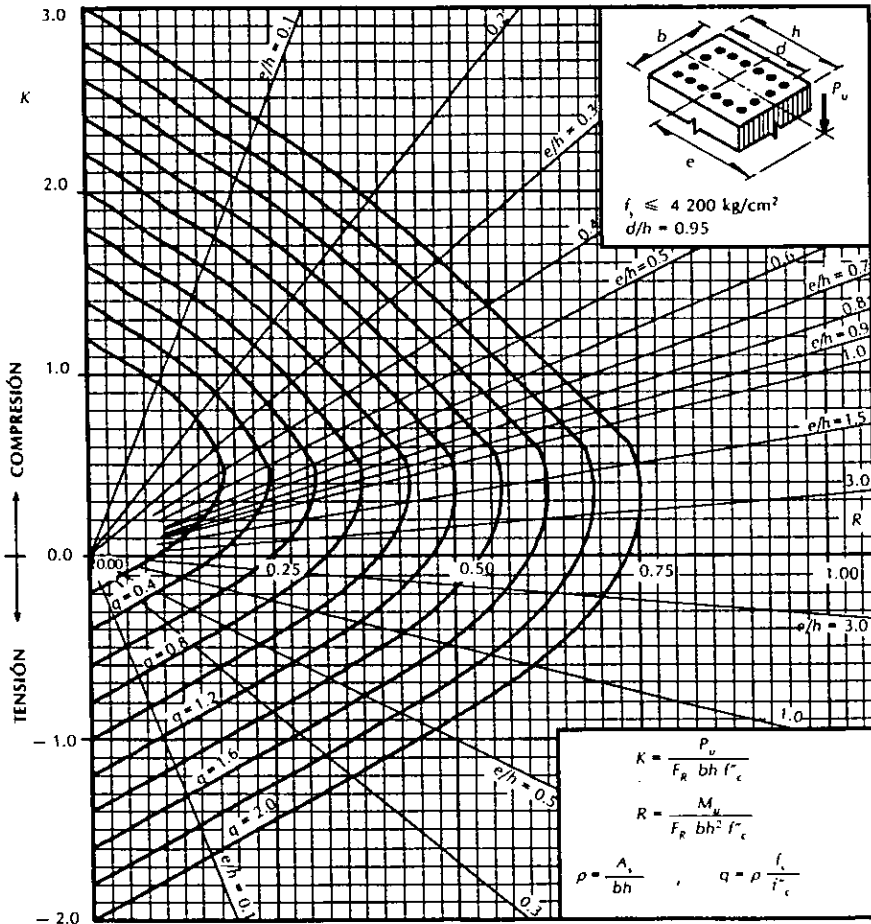
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia

$P_u$  = Carga axial última

$M_u$  = Momento flexionante último



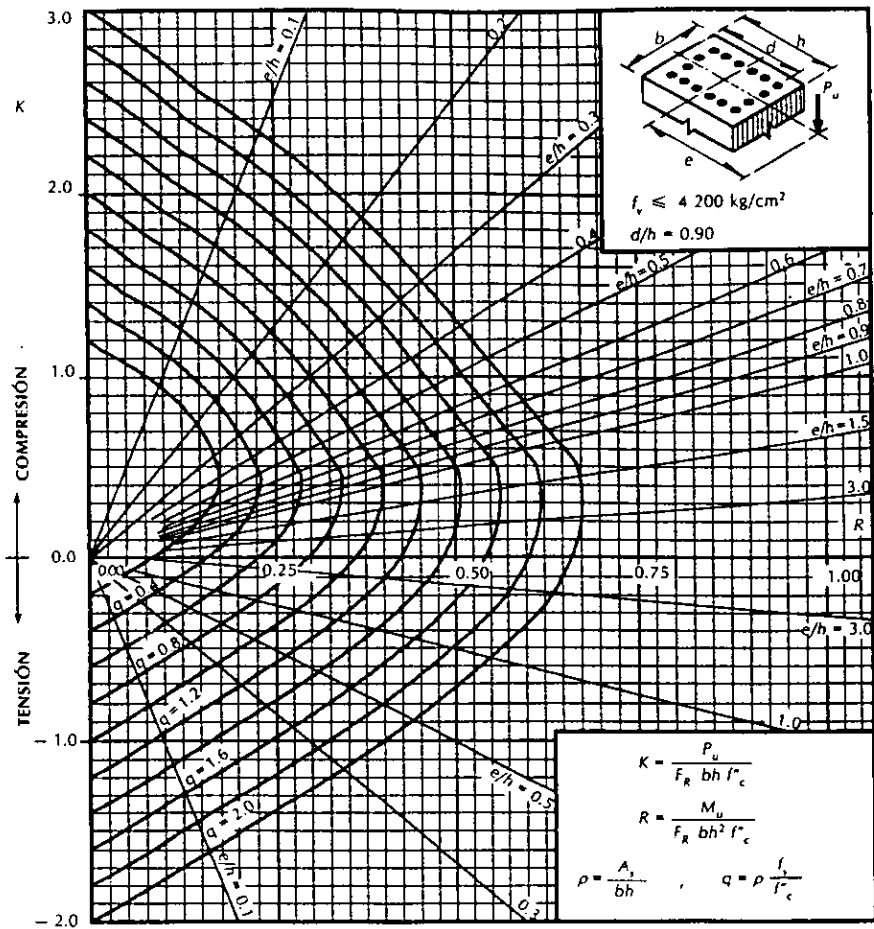
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'c = 0.85 f^*c$ . si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ . si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia

$P_u$  = Carga axial última

$M_u$  = Momento flexionante último



$A_s$  = Area total de refuerzo

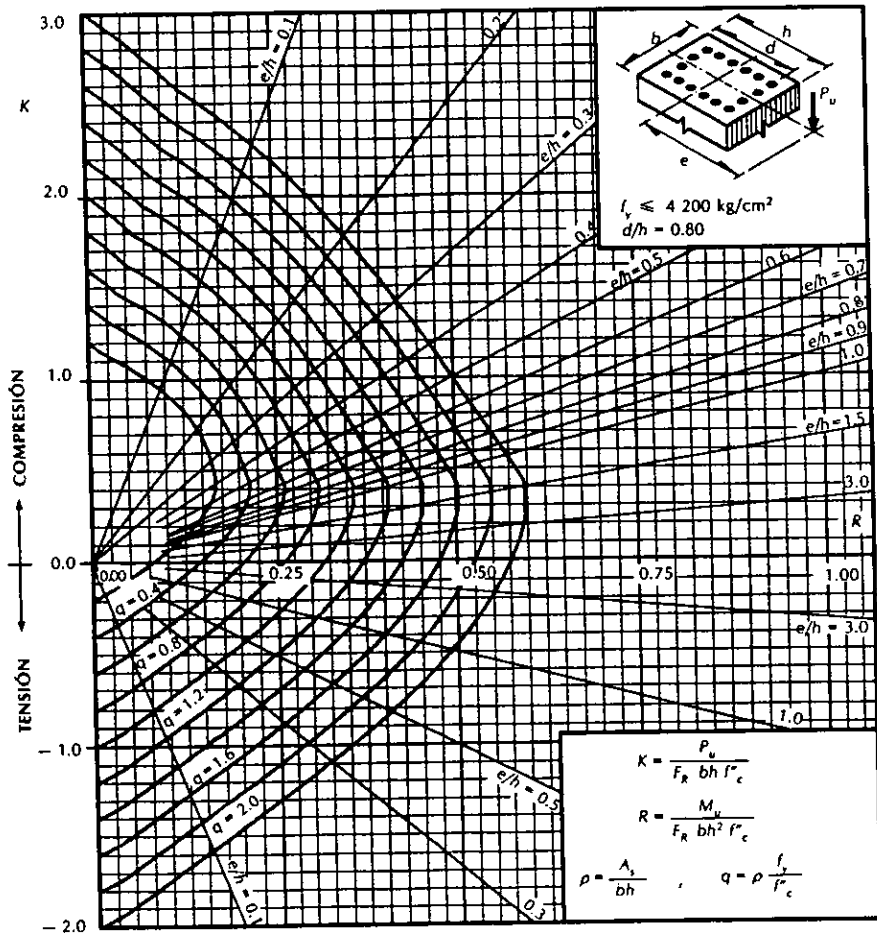
$$f'c = 0.85 f^*c, \text{ si } f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c, \text{ si } f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

$F_R$  = Factor de reducci3n de resistencia

$P_u$  = Carga axial 3ltima

$M_u$  = Momento flexionante 3ltimo





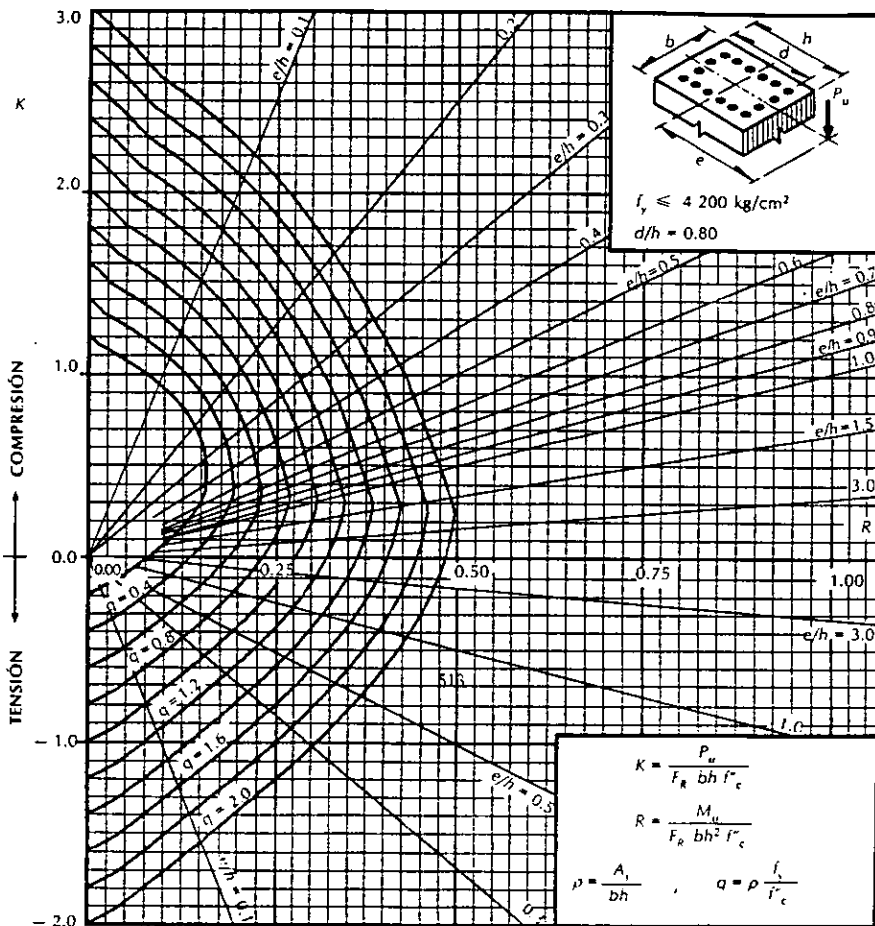
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia

$P_u$  = Carga axial última

$M_u$  = Momento flexionante último



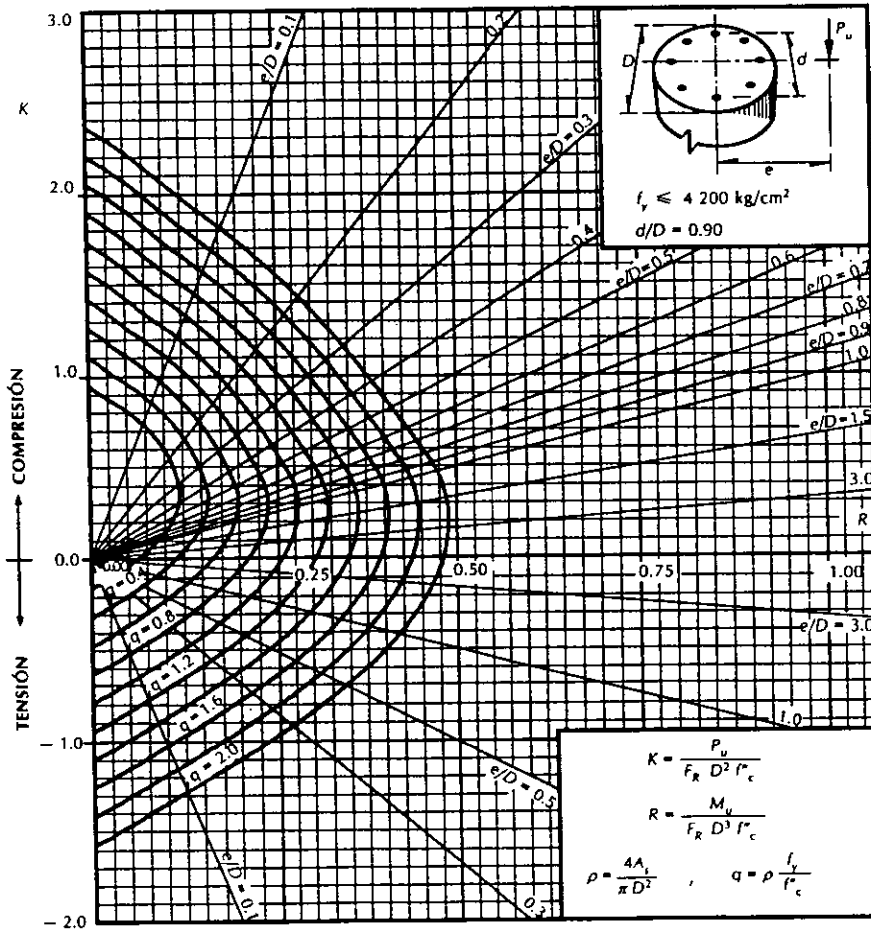
$A_s$  = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

$F_R$  = Factor de reducción de resistencia

$P_u$  = Carga axial última

$M_u$  = Momento flexionante último



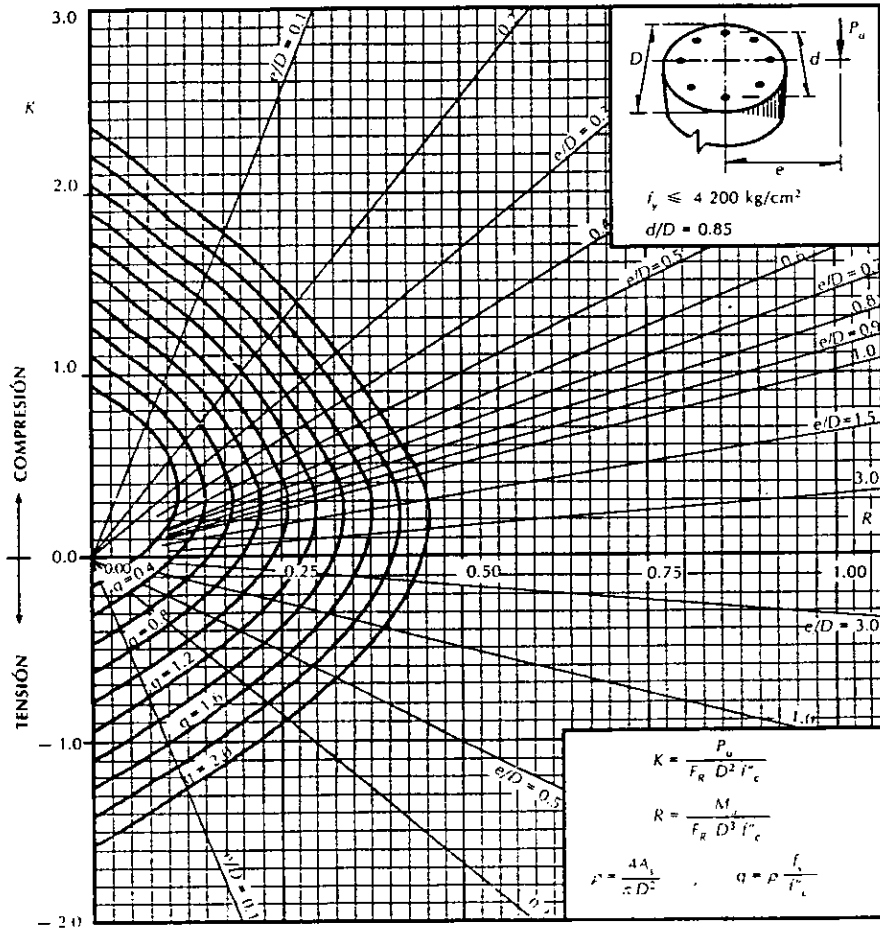
As = Area total de refuerzo

$$f'c = 0.85 f^*c, \text{ si } f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2; f'c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c, \text{ si } f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$$

FR = Factor de reducción de resistencia

Pu = Carga axial última

Mu = Momento flexionante último



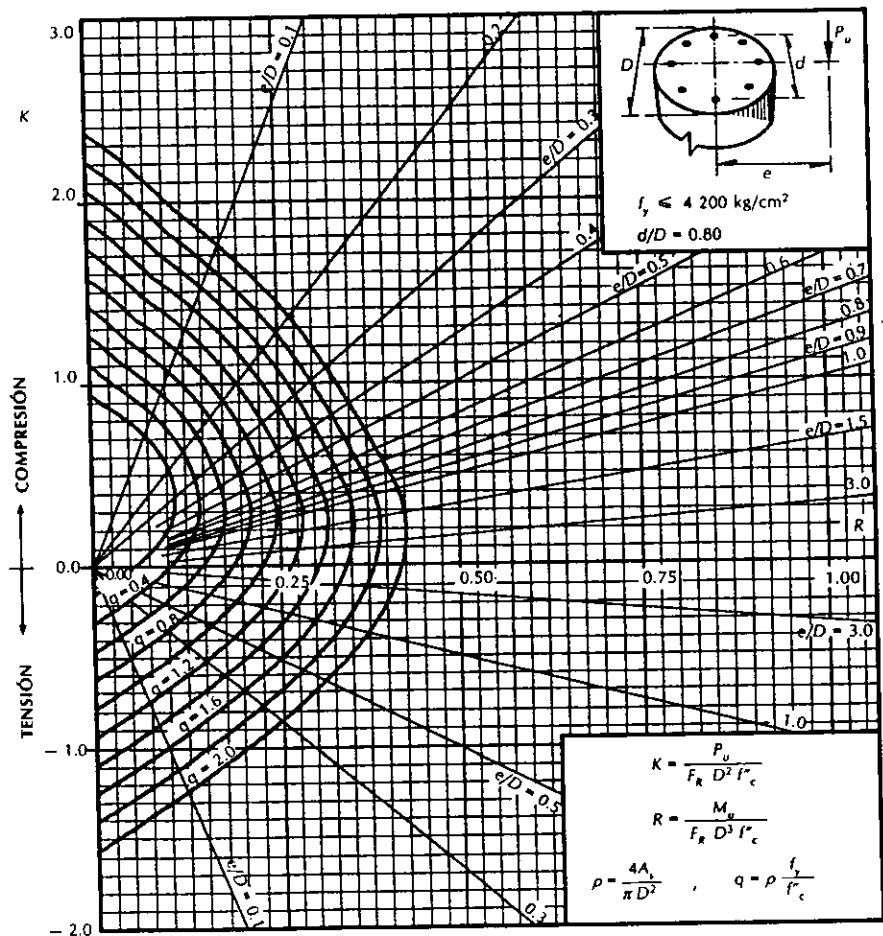
As = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

FR = Factor de reducción de resistencia

Pu = Carga axial última

Mu = Momento flexionante último



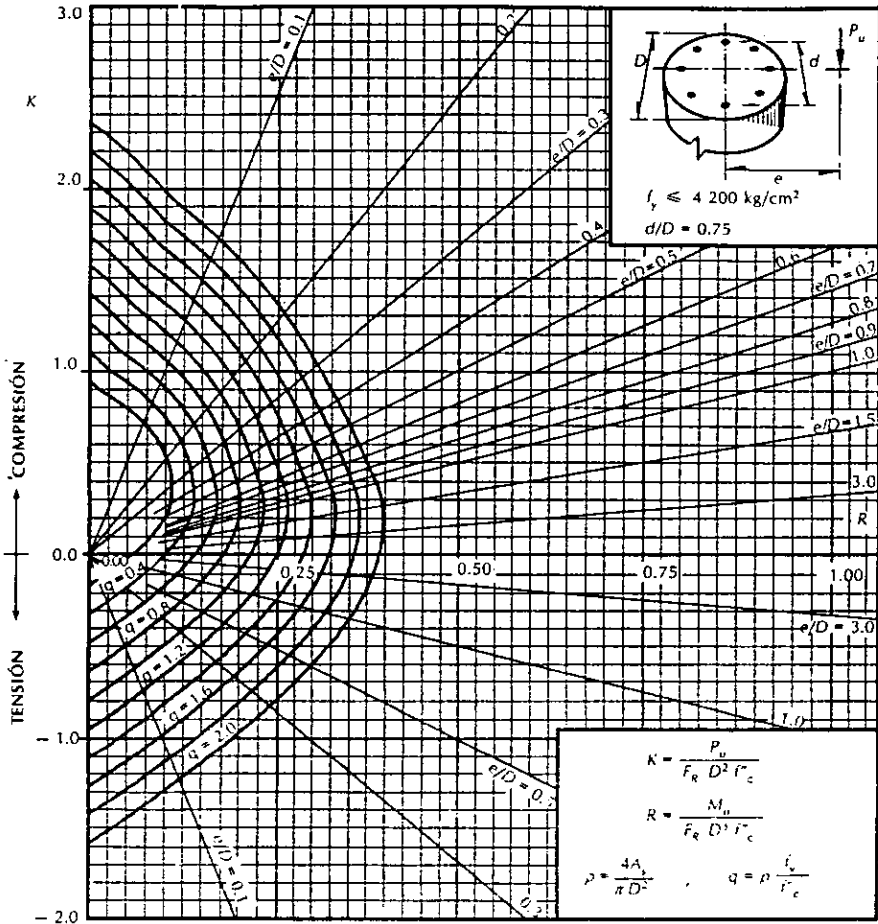
As = Area total de refuerzo

$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

FR = Factor de reducci3n de resistencia

Pu = Carga axial 3ltima

Mu = Momento flexionante 3ltimo



As = Area total de refuerzo

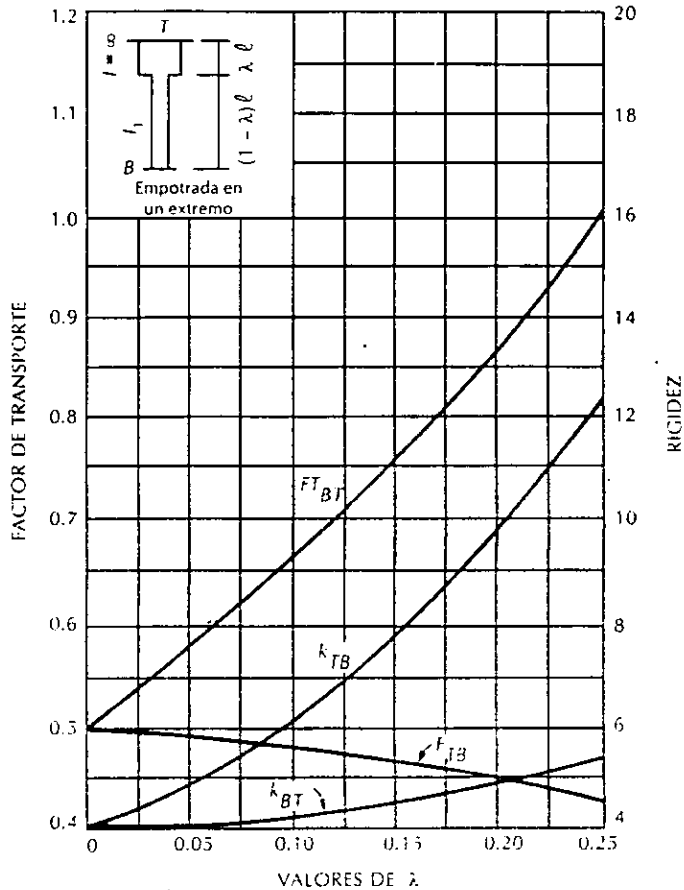
$f'_c = 0.85 f^*c$ , si  $f^*c \leq 280 \text{ kg/cm}^2$ ;  $f'_c = \left(1.05 - \frac{f^*c}{1400}\right) f^*c$ , si  $f^*c > 280 \text{ kg/cm}^2$

FR = Factor de reducción de resistencia

Pu = Carga axial última

Mu = Momento flexionante último

# Gráfica para determinar factores de rigidez y transporte para miembros con rigidez infinita en una parte de su longitud.

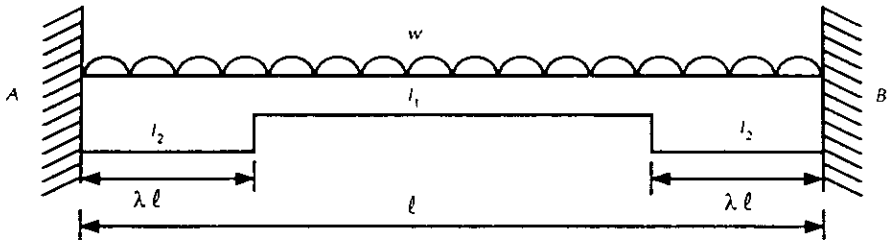


Rigideces:

$$K_{BT} = k_{BT} \frac{EI_1}{\ell}$$

$$K_{TB} = k_{TB} \frac{EI_1}{\ell}$$

**Ecuaciones para calcular los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte de vigas con tramos extremos iguales y con momentos de inercia distintos al del tramo central.**



$$\text{Momentos de empotramiento perfecto} = \bar{M} = \frac{\theta_A}{\theta_{AA} + \theta_{AB}}$$

$$\text{Rigidez a flexión} = K = \frac{\theta_{AA}}{\theta_{AA}^2 - \theta_{AB}^2}$$

$$\text{Factor de transporte} = FT = \frac{\theta_{AB}}{\theta_{AA}}$$

En las ecuaciones anteriores

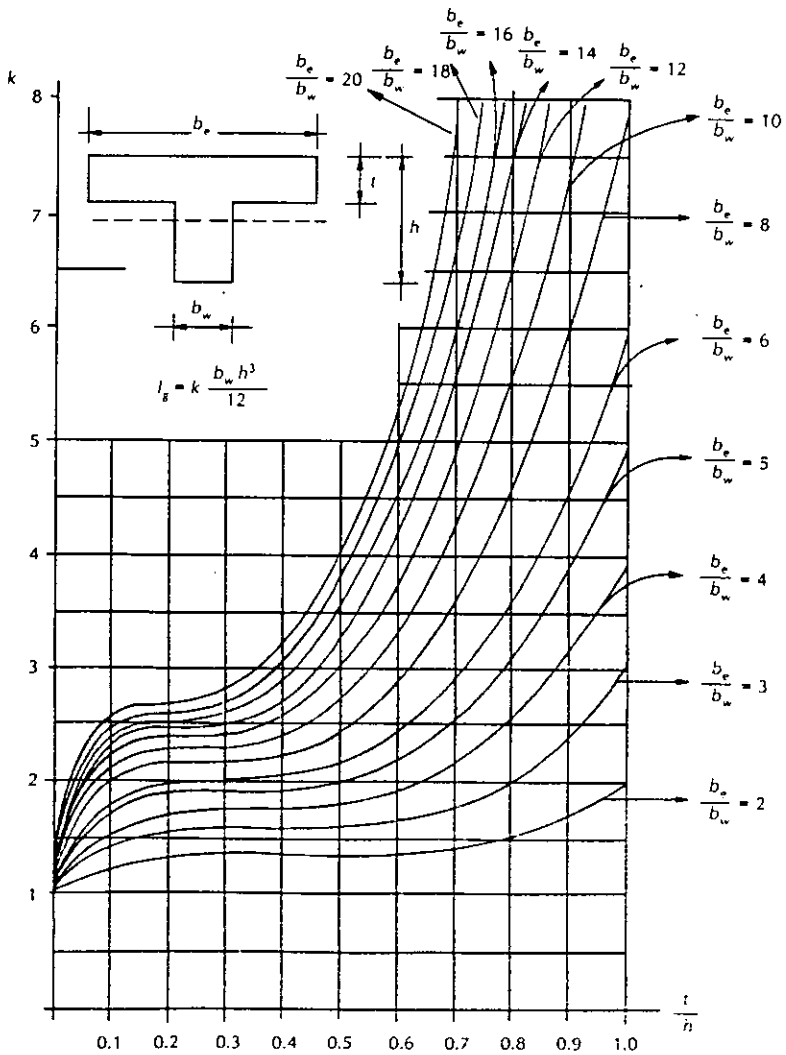
$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24EI_1} (1 - 6\lambda^2 + 4\lambda^3) + \frac{w\ell^3}{24EI_2} (6\lambda^2 - 4\lambda^3)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( \lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3 \right)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1} \left( \frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3 \right) + \frac{\ell}{EI_2} \left( \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3 \right)$$



## Gráfica para calcular el momento de inercia de sección I o L.



## Bibliografía

- Nawy, Edward., (1988) **Concreto reforzado, un enfoque básico.** Editorial Prentice Hall. México, D.F. 743 pp.
- Robles, F. Francisco., González, Cuevas Oscar., (1996 ) **Aspectos fundamentales del concreto reforzado.** Editorial Limusa. México, D.F. 757 pp.
- Pérez, Alama Vicente., ( 1996 ) **Diseño y cálculo de estructuras de concreto reforzado.** Editorial Trillas. México D.F.
- Paez, Alfredo., ( 1986 ) **Hormigón armado.** Editorial Reverté. Barcelona, España.
- Winter, George., Nilson, Arthur., ( 1986 ) **Proyecto de estructuras de hormigón.** Editorial Reverté. Barcelona, España.
- American Concrete Institute., ( 1983 ) **ACI Tecnología del concreto.** Tomo I y II American Concrete Institute, Detroit, 441 pp.
- Arnal, Luis., Betancourt, Max., ( 1991 ) **Nuevo Reglamento de construcciones para el Distrito Federal.** Editorial Trillas. México, D.F.

- Loera, S., Mendoza, C. J., Rodriguez, M., Meli, R. ( 1991 ) **Comentarios, ayudas de diseño y ejemplos de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, DDF.** Series del Instituto de ingeniería, U.N.A.M. México, D.F.
- Gaceta oficial del Departamento del Distrito Federal. (1996 ) **Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto.** México, D.F.
- Hernández, B. Oscar., ( 1980 ) **Diseño de muros de concreto con falla por cortante.** Series del instituto de ingeniería, U.N.A.M. México, D.F.
- Rosenblueth, Emilio., ( 1992 ) **Diseño de estructuras resistentes a sismos.** Editorial Instituto Mexicano del Cemento y del concreto. México, D.F. \