

01162

2
2cy.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**TRANSITO DE AVENIDAS EN
EMBALSES Y CAUCES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA HIDRAULICA
P R E S E N T A :
ING. MARITZA LILIANA ARGANIS JUAREZ

266258

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS A. ESCALANTE SANDOVAL



CIUDAD UNIVERSITARIA, MEXICO, D. F., 1998

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TRÁNSITO DE AVENIDAS EN EMBALSES Y CAUCES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERÍA
HIDRÁULICA**

PRESENTA:

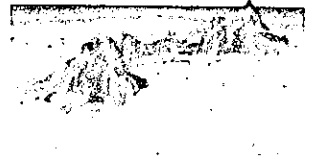
ING. MARITZA LILIANA ARGANIS JUÁREZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS A. ESCALANTE SANDOVAL



CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO, D.F., 1998

AGRADECIMIENTOS



A Carlos Jesús, con cariño

A mis Padres Horacio y Amparito

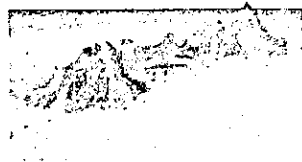
A mis hermanos Elia, Auri, Carlos y Esther

Al niño feliz

∞

A los profesores de la Facultad de Ingeniería, que se dedican a la noble labor de la enseñanza

CONTENIDO



CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	...1.1
CAPÍTULO 1. ANTECEDENTES	...1.1
1.1 Generalidades	...1.1
1.2 Modelos de tránsito de avenidas	...1.2
CAPÍTULO 2. TRÁNSITO DE AVENIDAS EN EMBALSES	...2.1
2.1 Ecuaciones básicas	...2.1
2.2 Método de Goodridge para el tránsito de avenidas por vasos reguladores (Vega, 1968)	...2.4
2.3 Método de Puls modificado (Vega, 1968)	...2.6
2.4 Tránsito de avenidas en vasos por un método semigráfico (Manual de CFE, 1980)	...2.11
2.5 Tránsito de avenidas en vasos por un método numérico (Manual de CFE ,1980)	...2.16
2.6 Método de la curva masa (Singh, 1988)	...2.18
2.6.1 Solución directa	...2.18
2.6.2 Procedimiento por ensayo y error	...2.19
2.7 Método de la señal de almacenamiento (Singh,1988)	...2.23
2.8 Método de Puls (Singh, 1988)	...2.24
2.9 Método de Wisler-Brater (WB) (Singh, 1988)	...2.25
2.10 Método de Goodrich (Singh,1988)	...2.26
2.11 Método de Steinberg (Singh, 1988)	...2.26
2.12 Método del coeficiente (Singh, 1988)	...2.27
2.13 Tránsito de avenidas en embalses utilizando solución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden	...2.28
2.13.1 Aproximación por el método de Runge-Kutta (Kuo,1993)	...2.28

2.13.2 Aproximación por el método de Euler (Kuo, 1993)	... 2.30
2.13.3 Método de Campos (1994) Campos (1994)	... 2.31
Cuadro 2.3 Métodos de tránsito de avenidas en embalses	... 2.34
CAPÍTULO 3. TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES	... 3.1
3.1 Métodos hidrológicos	... 3.1
3.1.1 Método de Muskingum (Viessman, 1989)	... 3.3
A) Método de mínimos cuadrados(Escalante, 1990)	... 3.7
B) Método de optimización directa de los coeficientes de tránsito (Escalante, 1990)	... 3.10
C) Método de las funciones de núcleo (Escalante, 1990)	... 3.11
D) Método de Overton (Escalante, 1990)	... 3.15
3.1.2 Método de Muskingum de tránsito del segmento de cresta (Viessman, 1989)	... 3.17
3.1.3 Método Convexo del Servicio de Conservación de Suelos (SCS) (Viessman, 1989)	... 3.18
3.1.4 Método de Muskingum-Cunge (Viessman, 1989)	... 3.21
3.1.5 Método de Kulandaiswamy-Krishnaswami-Ramalingam (Kulandaiswamy et al, 1967)	... 3.24
3.1.6 Método hidrológico semigráfico para el tránsito de avenidas en cauces (Chow, 1994)	... 3.27
3.2 Métodos hidráulicos	... 3.32
3.2.1 Método de onda cinemática, de difusión y dinámica (Viessman, 1989)	... 3.36
3.2.2 Método Sánchez -Fuentes (Fuentes et al, 1996)	... 3.42
3.3 Tránsito en sistemas de ríos (Fuentes et al, 1996)	... 3.48
3.3.1 Programa TX.EXE (Fuentes et al, 1996)	... 3.50
3.3.2 Método de tránsito de avenidas en redes hidrográficas preservando correlación de gastos (Collado et al, 1990)	... 3.51
Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces	... 3.53
CAPÍTULO 4. TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES UTILIZANDO MODELOS ARMA(p,q)	... 4.1
4.1 Modelos autorregresivos de promedios móviles ARMA(p,q)	... 4.1
4.2 Tránsito de avenidas en cauces utilizando modelos ARMA(p,q) (Wang y Yu, 1986)	... 4.5

CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DE MODELOS DE TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES	...5.1
	...5.1
5.1 Ejemplo No. 1	...5.4
5.2 Ejemplo No. 2	...5.10
5.3 Ejemplo No. 3	
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	...6.1
	...B.1
BIBLIOGRAFÍA	...A1.1
ANEXO 1 EJEMPLO 1	...A2.1
ANEXO 2 EJEMPLO 2	...A3.1
ANEXO 3 EJEMPLO 3	

INTRODUCCIÓN



INTRODUCCIÓN

La precipitación, componente del ciclo hidrológico, con el cual se inicia el estudio de éste, era invocada por los antiguos mexicanos a Tláloc, dios de la lluvia; el cual puede considerarse que hasta la fecha lleva una caprichosa relación con la Madre Tierra.

Sabedor de la necesidad que ésta tiene de recibir sus dones para dar la vida se los regatea durante la larga temporada de estiaje, después de rociarla con las lluvias invernales apenas remedo de las nieves septentrionales, y cuando la agostada tierra languidece entre el polvo y el agrietado suelo, Tláloc inconsciente de su poder se llena de la fuerza de los vientos del huracán, abasteciéndose del agua oceánica que va a descargar en tempestuosos torrentes sobre sierras y valles para fertilizar la tierra en el abrazo del arco iris, dejando a su paso corrientes desbordadas que se abren camino entre cañadas y barrancas hasta llenar las cuencas de los ríos, inundando campos y pueblos; arrasando todo en su loco camino hacia el mar que le dio el ser.

México, debido a su situación geográfica, es un desierto apenas modificado por las sierras que lo recorren de norte a sur y que forman barreras para los vientos húmedos de los océanos que los bañan. El altiplano no tiene fuentes de aguas glaciares y por ende sus ríos, salvo el Bravo cuyos orígenes se encuentran muy al norte de su frontera, son formados por el desagüe de las vertientes, lo que da lugar a que no brinden al mexicano vías de navegación de la importancia de los ríos de otros países.

El aprovechamiento de sus aguas requiere de obras de infraestructura hidráulica que han ido permitiendo, principalmente, el abastecimiento de agua potable, la irrigación y la generación de energía eléctrica, pero en cierta forma han sido limitadas por las condiciones económicas del país, dado sus altos costos de construcción de tal manera que los ríos siguen siendo fuente potencial de catástrofes por inundación para las poblaciones ribereñas.

Es muy conocida la mayor inundación sufrida en la cuenca del río Papaloapan en el presente siglo en el año de 1969 y sólo comparable con la de 1944 donde no había ninguna obra de infraestructura hidráulica y que si bien alcanzó mayores niveles, tuvo menor duración.

La ocurrencia de estos eventos extremos en México, ha provocado el desarrollo de metodologías útiles para pronosticar su comportamiento dentro de los cuerpos de agua, como es el caso, por ejemplo, de las obras de almacenamiento.

Para diseñar obras de control de avenidas, presas de almacenamiento, pronosticar crecientes, se requiere del conocimiento de métodos de tránsito de avenidas tanto en embalses como en cauces; por ello este trabajo se inicia con una síntesis de diversas técnicas existentes para realizar el tránsito de avenidas tanto en embalses como en cauces.

El problema que se observa en los métodos antes mencionados es que la mayoría de ellos son modelos determinísticos que no toman en cuenta el carácter aleatorio de las variables involucradas; el principal objetivo de este trabajo es comprobar que la utilización de modelos estocásticos $ARMA(p,q)$ proporcionan estimaciones óptimas en el hidrograma de salida resultado del tránsito de avenidas por un cauce cuando la variable en estudio (gasto) es aleatoria; para lograr lo anterior se analizan tres ejemplos de avenidas en cauces, haciendo comparaciones de los resultados que se obtienen por algunos de los métodos presentados, en lo que se refiere a la determinación de los errores en el gasto de pico de salida y del tiempo de pico, con respecto a la respuesta proporcionada por nuestros modelos en estudio, en particular el modelo $ARMA(3,2)$.

En el capítulo 1 "Antecedentes", se establece el propósito de hacer el tránsito de avenidas, tanto en embalses como en cauces, indicando su utilidad en diferentes obras hidráulicas, particularmente en las de protección y control de avenidas.

En el capítulo 2 "Tránsito de avenidas en embalses" , se analizan distintos procedimientos tanto gráficos como analíticos para la realización del mismo en embalses, estudiados por distintos autores y las ecuaciones en que se fundamentan.

En el capítulo 3 "Tránsito de avenidas en cauces" se presentan las características en general de algunos modelos de tránsito tanto hidrológicos como hidráulicos así como de tipo combinado o mixto; las ecuaciones en que se fundamentan estos métodos, indicando las ventajas y desventajas en su aplicación.

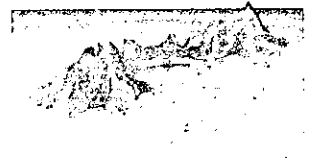
En el capítulo 4 "Tránsito de avenidas en cauces utilizando modelos $ARMA(p,q)$ ", se describen a estos modelos, en lo que se refiere a su uso con fines de generación de muestras sintéticas y pronóstico usando series de tiempo; posteriormente se establece su aplicación para el tránsito de avenidas en cauces.

En el capítulo 5 " Aplicación de modelos de tránsito de avenidas en cauces", se muestran los resultados obtenidos al utilizar modelos $ARMA(p,q)$, en particular el modelo $ARMA(3,2)$ con respecto a algunos de los métodos hidrológicos, hidráulicos y combinados del tránsito de avenidas, a saber, el método de Muskingum, con distintas técnicas de obtención de sus parámetros, el de Muskingum-Cunge, el esquema Sánchez-Fuentes, el método de advección-difusión; presentando gráficas comparativas de resultados, enfatizando la buena aproximación dada por los modelos $ARMA(3,2)$ con fines de calibración del modelo.

En el último capítulo se establecen las conclusiones y recomendaciones, resultado de todos los aspectos contemplados en este trabajo.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES



CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1 Generalidades

El abastecimiento de agua, la producción de alimentos así como de energía eléctrica, son los principales problemas de interés nacional relacionados con la ingeniería hidrológica; otro problema que debe considerarse debido a que afecta de manera indirecta a la economía es el control de avenidas, tanto en presas de almacenamiento como en los sitios aguas abajo de éstas, mediante bordos de protección o delimitando las planicies de inundación. Para lograr lo anterior es necesario conocer la frecuencia de los gastos máximos, contar con una forma de transitar avenidas en cauces naturales y poder determinar el escurrimiento a partir de la lluvia.

El tránsito de avenidas es un procedimiento, que puede ser, de tipo hidrológico o hidráulico y permite calcular el efecto del almacenamiento en embalses y cauces debido a una onda de avenida; es decir, puede determinarse la forma de un hidrograma de salida a partir de uno de entrada; también se trata de un proceso que muestra la forma en que una onda de avenida puede ser reducida y atenuada por efecto del almacenamiento entre dos puntos de un tramo de corriente en cierto intervalo de tiempo; su utilidad principal es la predicción y pronóstico en tiempo real de avenidas aguas abajo.

La aplicación del tránsito de avenidas en un vaso de una presa antes de la realización de ésta, permite determinar el nivel de aguas máximo extraordinario (NAME), dimensionamiento de la obra de excedencias, obras de desvío, una altura de ataguías; variación de los niveles dentro del vaso y los gastos de salida por la obra de excedencias con ello se sabe con anticipación si las políticas de operación son adecuadas para evitar daños en la cortina, así como en las poblaciones existentes aguas abajo de la obra.

También es aplicable el tránsito de avenidas en embalses para la revisión de las políticas de operación de las compuertas de una obra de excedencias de la presa ya puesta en marcha.

1.2 Modelos de tránsito de avenidas

En el caso de embalses los modelos de tránsito de avenidas son de tipo hidrológico; se basan en la ecuación de continuidad, expresada en su forma diferencial, y también en la ley de descargas de la estructura vertedora o bien de la sección de salida; la solución a estas ecuaciones se obtiene a partir de un esquema en diferencias finitas o bien con aplicación de métodos de tipo numérico, así como procedimientos gráficos o semigráficos; ejemplos de estos modelos son los propuestos por Goodrich (1931), Steinberg (1947), Winsler y Brater (1959), Soil Conservation Service(1964), Vega (1968), NERC (Natural Environment Research Council) (1975), Manual de la Comisión Federal de Electricidad (1980), Butler (1982), y Campos (1987).

El tránsito de avenidas en cauces sirve para conocer la variación de un hidrograma cuando en una corriente superficial se recorre cierta longitud; es muy importante porque permite pronosticar la posible inundación en lugares situados aguas abajo de un cauce debida a crecientes en un río producidas por presas reguladoras existentes aguas arriba pudiéndose prevenir los daños construyendo bordos de contención contra inundaciones, obras de desvío, etc. Los modelos determinísticos utilizados en el tránsito en cauces son de tipo hidrológico, que representan los efectos de traslación y almacenamiento sobre el hidrograma de entrada, apoyados en la ecuación de continuidad; en modelos hidráulicos que utilizan tanto continuidad como cantidad de movimiento, es decir resuelven las ecuaciones de Saint Venant, modelan las condiciones de flujo existente y comúnmente se resuelven con esquemas en diferencias finitas o el método de las características o inclusive el método del elemento finito; por último están los modelos que combinan aspectos tanto hidrológicos como hidráulicos, por ejemplo aquellos que utilizan la analogía de difusión, métodos de onda cinemática, que también se resuelven con ayuda de esquemas en diferencias finitas.

Uno de los procedimientos hidrológicos de tránsito comúnmente utilizado es el método de Muskingum, propuesto por Mc Carthy (1938), que ha sido analizado ampliamente por otros autores como, por ejemplo, Overton (1966), Gill(1977), Stephenson(1978), Ponce (1979), O'Donell (1985), O'Donell et al (1988), Perumal (1989), Yeou-Koung-Tung (1985), Singh(1987), Aldama (1987), Mohan (1997) ; los análisis incluyen la utilización del modelo en su forma lineal o no lineal. Otros métodos de este tipo son el presentado por Kulandaiswamy et al (1967), el cual maneja una ecuación de recurrencia similar al método de Muskingum, el método de Chow (1994), de tipo semigráfico, así como el de Collado y Wagner (1990) aplicable en sistemas de ríos.

En lo que se refiere a métodos hidráulicos, pueden citarse los trabajos de Ameing y Fang (1969), Price (1974), Quick y Pipes (1975), Amein y Ling Chu (1975), Cooley y Moin (1976), Oosterveld y Adamocoski(1976), Sivaloganathan (1978 y 1979), Huang (1978), Sánchez y Fuentes (1996), etc.

Ejemplo de métodos que combinan los aspectos hidrológicos e hidráulicos son: el método de Muskingum Cunge propuesto por Cunge (1969), el modelo de Advección-Difusión de Aguilar (1995), etc.

Se pueden identificar métodos de tránsito de avenidas que requieren la determinación de sus parámetros (calibración del modelo) a partir de registros de avenidas históricas para su posterior utilización con fines de pronóstico; así como métodos que no requieren de una calibración previa, cuyos parámetros se determinan con las características hidráulicas del cauce en estudio como son: área hidráulica, rugosidad, velocidad media, longitud del tramo, pendiente de plantilla, etc.

Los dos principales tipos de problemas que tratan los métodos de tránsito de avenidas son aquellos en los que:

- 1) El hidrograma es conocido en la estación de aforo y es requerido el nivel de descarga histórico en un sitio aguas abajo. Este problema incluye pronóstico de los niveles del agua en la corriente después de los cambios realizados al cauce de un río por obras humanas, por ejemplo después del confinamiento del flujo entre bordos.
- 2) La suposición de lluvia uniforme es poco razonable para cuencas mayores de 500 km²; por lo consiguiente, la cuenca se subdivide en subcuencas razonablemente homogéneas y sus gastos se combinan por métodos de tránsito de avenidas. La combinación de las ondas de flujo de los tributarios es un problema similar.

El tránsito de avenidas es un problema de flujo no permanente. Tiene que ver con la traslación de la onda de flujo y los cambios asociados en su forma. Los métodos de tránsito que se han desarrollado se pueden clasificar de acuerdo con su orden de complejidad en tres grupos:

- 1) Métodos de tránsito hidrológico, basados en la ecuación de continuidad, se subdividen en aquellos aplicables a embalses y los correspondientes a cauces o canales.
- 2) Tránsito basado en un modelo de conveccion-difusión .
- 3) Métodos basados en la solución numérica de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, también denominados de tránsito hidráulico, los cuales son aplicados en cauces.

La característica en común que tienen los métodos hidráulicos e hidrológicos es que utilizan modelos matemáticos determinísticos que generan hidrogramas de entradas y salidas en el sistema analizado considerando los escurrimientos como una serie de tiempo discreta.

Hacer la suposición de usar una variable discreta introduce un error en los modelos al cual se añade el error del estimado de los parámetros del modelo, el error de discretización de los métodos numéricos, el error producido al considerar como determinísticas a las

variables que intervienen en el proceso y los errores en las mediciones de campo que son prácticamente inevitables; este conjunto de errores pueden alterar significativamente los resultados que se obtienen del cálculo del tránsito de la avenida; también debe tomarse en cuenta el problema de estabilidad de algunos esquemas en diferencias finitas, que aparentemente proporcionan soluciones pero éstas no son congruentes con el problema físico analizado; para su aplicación deben cumplirse con alguna desigualdad de restricción.

Un camino alternativo para realizar el tránsito de avenidas en cauces es utilizando modelación estocástica; como es el caso de la aplicación de modelos autorregresivos de promedios móviles $ARMA(p,q)$ aplicables a series de tiempo. El modelo $ARMA(p,q)$ expresa la descarga presente en la estación aguas abajo como una combinación lineal de los ingresos presentes e históricos en la estación aguas arriba y de los egresos históricos en la estación aguas abajo. En este trabajo se presenta el proceso utilizado por Wang et al (1987) para aplicar los modelos $ARMA(p,q)$, haciendo hincapié en el modelo $ARMA(3,2)$.

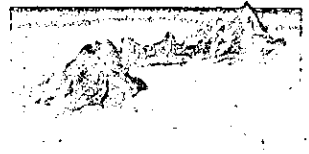
Hay que tomar en cuenta que los modelos $ARMA(p,q)$ requieren de una calibración (determinación de sus parámetros) a partir de avenidas históricas registradas en el sitio de estudio para su posterior aplicación en avenidas similares; este primer paso podría tomarse como una desventaja respecto a métodos que no requieren calibración previa (por ejemplo el de Muskingum-Cunge o procedimientos hidráulicos), pero hay que recordar que los datos de entrada para estos últimos métodos pueden, en un momento dado, ser desconocidos o difíciles de obtener en el momento que se les requiere.

Los modelos $ARMA(p,q)$ utilizados en el tránsito de avenidas pueden trabajarse con sencillez en una hoja de cálculo como la de EXCEL, se requiere hacer operaciones muy sencillas entre matrices y el tiempo de cálculo no se considera excesivo; lo anterior evita la necesidad de realizar un programa cuya codificación puede, hasta cierto punto, llevar mucho tiempo al usuario además de requerir la captura del programa, revisión de los resultados y correcciones continuas hasta que proporcione las soluciones adecuadas. No se pretende establecer que el ingeniero no deba programar, simplemente se enfatiza que una herramienta alternativa para hacer el análisis del tránsito consiste en usar la hoja de cálculo.

La utilización de técnicas estocásticas tienen la finalidad de minimizar los efectos de los errores de modelación y de medición así como de proporcionar estimaciones óptimas del hidrograma de la avenida.

CAPÍTULO 2

TRANSITO DE AVENIDAS EN EMBALSES



CAPÍTULO 2

TRÁNSITO DE AVENIDAS EN EMBALSES

2.1 Ecuaciones básicas

El problema de tránsito de avenidas en embalses se resuelve utilizando la ecuación de continuidad. Las simplificaciones que se hacen son: la velocidad del flujo es muy baja y la superficie libre del agua en el depósito es prácticamente horizontal; tanto el almacenamiento como la descarga se ponen en función del nivel del depósito. En la Figura 2.1 se muestran los hidrogramas de entrada y salida de un embalse con descarga libre (sin compuertas), los cuales indican la variación del gasto con respecto al tiempo.

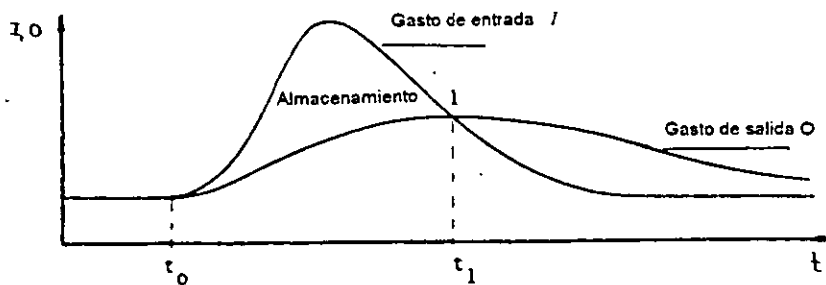


Figura 2.1 Hidrogramas de entrada y de salida de un almacenamiento

De la figura anterior se observa que antes del tiempo t_0 las condiciones son uniformes y el gasto de entrada iguala al de salida. Después de la llegada de la onda de flujo, es decir en $t_0 < t < t_1$, el gasto de entrada es mayor que el de salida. El nivel del embalse se eleva y el máximo almacenamiento se alcanza en $t=t_1$; el área entre los dos hidrogramas entre $t=t_0$ y $t=t_1$ representa el volumen de agua almacenado. En $t=t_1$ el gasto de salida alcanza su máximo valor, es decir, $\frac{dO}{dt} = 0$. Para valores del tiempo superiores a t_1 el gasto de salida es

mayor que el de entrada y baja el nivel del embalse. Los efectos más dominantes del depósito sobre el hidrograma de salida son la atenuación y el retraso.

De acuerdo con Raudkivi (1978) los procedimientos que se utilizan para el tránsito de una avenida en un embalse se basan en la ecuación de continuidad, expresada en términos del principio de conservación de la masa que establece:

$$\text{Almacenamiento} = \text{Entradas} - \text{Salidas}$$

En forma discreta se expresa como:

Gasto medio de ingreso = gasto medio de salida + cambio en el almacenamiento

es decir:

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2)\Delta t = \frac{1}{2}(O_1 + O_2)\Delta t + (S_2 - S_1) \quad (2.1)$$

reordenando de manera conveniente:

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \left(\frac{S_1}{\Delta t} - \frac{O_1}{2}\right) = \frac{S_2}{\Delta t} - \frac{O_2}{2} \quad (2.2)$$

donde:

I_1, I_2 ingresos correspondientes a los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente [L^3T^{-1}]

O_1, O_2 egresos correspondientes a t_1 y t_2 , respectivamente [L^3T^{-1}]

S_1, S_2 volúmenes almacenados en t_1 y t_2 , respectivamente [L^3]

$\Delta t = t_2 - t_1$ [T]

La ecuación (2.2) tiene dos incógnitas, que son los gastos de salida y los volúmenes almacenados, por lo que debe establecerse otra condición que es la relación dinámica entre el gasto de salida y el almacenamiento que representa al gasto como una función de la carga del vertedor, por ejemplo la proporción:

$$O \propto H^{\frac{3}{2}}$$

donde:

H carga de agua en el depósito, por arriba de la cresta del vertedor

O Gasto descargado por el vertedor

El almacenamiento también se conoce debido a que es función de la elevación:

$$S = \int_0^H A(H) dH \quad (2.3)$$

donde:

A área de la superficie libre del depósito que corresponde a un determinado nivel H

Cuando el embalse tiene paredes prácticamente rectangulares se hace la aproximación de que $S \cong AH$. Entonces, la descarga es posible expresarla como $Q=f(S)$ y a la ecuación (2.1) resolverla por prueba y error. También se emplean gráficas auxiliares de $O-S/\Delta t$ y $O-(S/\Delta t+O/2)$ que tienen la forma presentada en la Figura 2.2, con las cuales el problema se resuelve, ya sea, en forma tabular o gráfica.

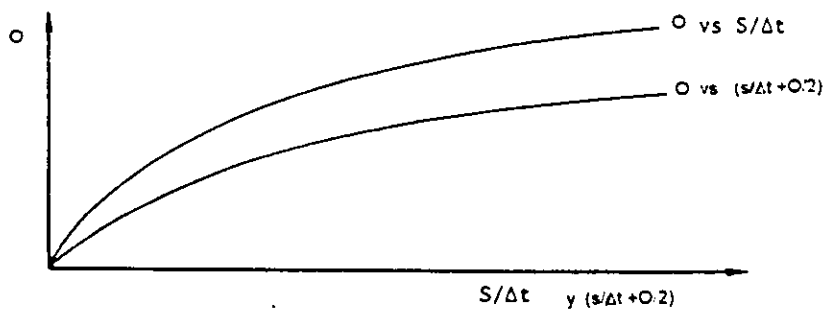


Figura 2.2 Relaciones almacenamiento-descarga para el tránsito de una avenida en un embalse

Los proyectistas de estructuras de descarga tienen que considerar también los efectos de la precipitación y evaporación sobre el embalse y los periodos críticos de lluvia en el sistema de captación-depósito. No toda la precipitación que se presenta contribuye al hidrograma de entrada analizado, ya que una parte de la lluvia cae directamente en la superficie del embalse y otra parte sobre la cuenca de captación, la cual drena directamente al depósito sin llegar a ser parte del hidrograma de entrada. La precipitación y evaporación sobre la superficie del embalse contribuye directamente al almacenamiento y la relación almacenamiento-descarga, para los cálculos del hidrograma de salida, puede modificarse de acuerdo con ella en cada paso del cálculo. El gasto de ingreso directo es más difícil de cuantificar, por lo que una aproximación aceptable es aumentar a escala la aportación de la precipitación directa sobre la superficie del embalse en forma proporcional a la contribución por parte del flujo superficial. En la práctica las aproximaciones fluctúan desde sumar el ingreso directo total al hidrograma de entrada (el cual se transita por el embalse) hasta añadir todo el ingreso directo al hidrograma de salida. El efecto de más de un hidrograma de

entrada se obtiene por superposición. Los flujos locales de corrientes no aforadas podrían considerarse por medio de hidrogramas sintéticos.

El embalse de un sitio en particular tiene un periodo crítico de precipitación para una probabilidad dada de nivel de ocurrencia. Este periodo se determina de manera similar al método para determinar el período crítico para una cuenca. Dado el criterio de diseño para una precipitación con periodo de retorno de x años, los hidrogramas para este periodo de retorno producido por T , $2T$, $3T$,...etc. precipitaciones horarias se transitan a través del embalse. La gráfica de los gastos de pico de los hidrogramas de salida contra estos periodos revelan aquél que producirá el máximo egreso. El diseñador debe tener en mente que la tormenta crítica puede llegar cuando el depósito ya está lleno, o que dos tormentas críticas pueden presentarse en forma consecutiva.

A continuación se presentan distintos métodos tránsito de avenidas en embalses.

2.2 Método de Goodridge para el tránsito de avenidas por vasos reguladores (Vega, 1968)

El tránsito de avenidas o de escurrimientos de una corriente por un vaso se aplica en obras hidráulicas para dimensionar diferentes estructuras que tienen la finalidad de dar paso al agua durante la construcción de una obra o para dar salida a los excedentes de una presa durante su vida útil.

Los problemas que pueden presentarse son:

1. Dimensionar obras de desvío (tajos, túneles, tuberías, etc).
2. Determinar la altura de ataguías para la construcción de una cortina.
3. Dimensionar obras de excedencias y de control en las presas y determinar el gasto máximo de salida y el nivel de aguas máximo extraordinario NAME.
4. Estudiar y programar el cierre de cortinas.

Inicialmente se analiza un vaso de almacenamiento que cuenta con una estructura para la salida del agua a cierta elevación, como la presentada en la Figura 2.3

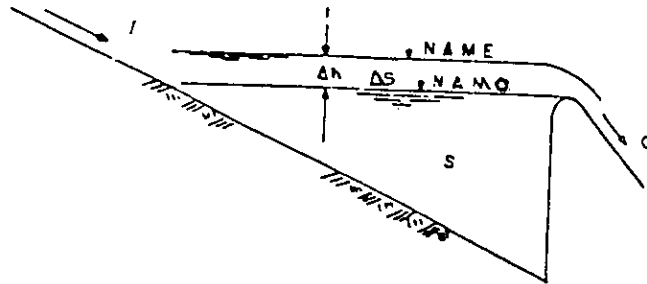


Figura 2.3 Vaso de almacenamiento y obra de descarga

En un intervalo de tiempo Δt el volumen de entrada al vaso es igual al de salida más el cambio en el almacenamiento:

$$I\Delta t = O\Delta t + \Delta S \quad (2.4)$$

La ecuación anterior no tiene solución directa debido a que el gasto de salida O está en función de la carga sobre el vertedor h , la cual está sujeta al cambio en el almacenamiento ΔV , que a su vez depende de la diferencia $I-O$.

El método de Goodridge resuelve la ecuación por un procedimiento por tanteos y con auxilio gráfico a partir de los datos siguientes:

- 1) Hidrograma de entrada.
- 2) La curva elevaciones-capacidades del vaso.
- 3) La curva de gastos de salida de la estructura de que se trate.

Los resultados que se determinan son:

- a) El hidrograma de salida.
- b) La curva de volúmenes almacenados.

2.3 Método de Puls Modificado (Vega, 1968)

Este procedimiento de tanteos permite resolver la ecuación (2.4) de manera más sencilla. Se han realizado varias modificaciones al método de Puls con la finalidad de hacer más sencillo su uso y sobretodo para resolver el problema sin necesidad de utilizar un programa de cómputo; una de ellas es la propuesta por Vega (1968) que se expresa de la siguiente manera:

Los valores puntuales de I y de O se consideran valores promedio en la ecuación(2.4):

$$\left(\frac{I_1 + I_2}{2}\right)\Delta t = S_2 - S_1 + \left(\frac{O_1 + O_2}{2}\right)\Delta t \quad (2.5)$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{2}{\Delta t}$ y reordenando:

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{\Delta t}(S_2 - S_1) + O_1 + O_2$$

$$I_1 + I_2 = \frac{2}{\Delta t}S_2 - \frac{2}{\Delta t}S_1 + O_1 + O_2$$

Si se fija una unidad de tiempo constante (segundo, hora, día, mes) puede omitirse el Δt , y trabajando sólo con volúmenes:

$$I_1 + I_2 = 2S_2 + O_2 - 2S_1 + O_1 \quad (2.6)$$

Reordenando en forma conveniente:

$$2S_2 + O_2 = I_1 + I_2 + 2S_1 - O_1 \quad (2.7)$$

El método de Puls modificado propuesto por Vega (1968) se basa en la ecuación (2.7) que se resuelve construyendo dos curvas auxiliares llamadas $2S+O$ y $2S-O$, con el procedimiento que se describe a continuación:

A partir de los datos:

1. Hidrograma de entrada.
2. Curva de elevaciones-capacidades del vaso, desde el umbral de la estructura de descarga hacia arriba.
3. Curva de gastos de salida (obtenida de acuerdo con la estructura de que se trate).

Se hacen coincidir los ejes de Elevaciones de la curva de gastos de salida y de la curva de capacidades; se tabulan las elevaciones y se identifica a qué gastos y volúmenes corresponde la misma elevación, construyendo un cuadro con los siguientes datos:

Cuadro 2.1 Auxiliar para la construcción de las curvas $2S+O$ y $2S-O$. Método de Puls modificado

Elevación	S	O	$2S+O$	$2S-O$

Teniendo las curvas de elevaciones-capacidades y elevaciones-gastos de salida, se prolonga el eje vertical para formar el $2S \pm O$, al cual se le agrega un eje horizontal de volúmenes; en el plano formado por estos dos ejes se dibujan las curvas $2S+O$ y $2S-O$, para cada S se obtiene su correspondiente valor $2S+O$ y $2S-O$, como se observa en la Figura 2.4.

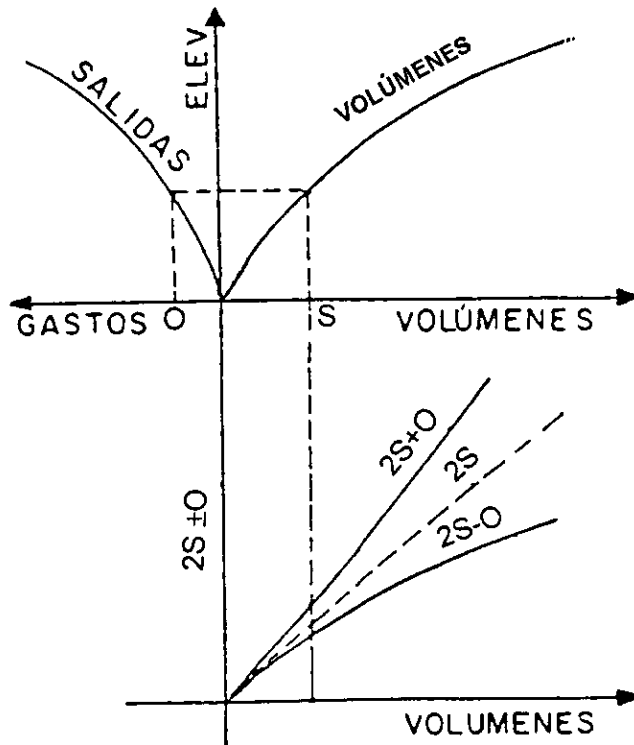


Figura 2.4 Curvas auxiliares elevaciones-volúmenes y $2S \pm O$ -volúmenes del método de Puls modificado, de acuerdo con Vega (1968).

Se dibuja el hidrograma de entrada teniendo como ejes, los gastos, cuyas unidades deben coincidir con la curva de salidas y el eje de tiempos colocado sobre el eje $2S \pm O$, con la unidad de tiempo seleccionada, Figura 2.5.

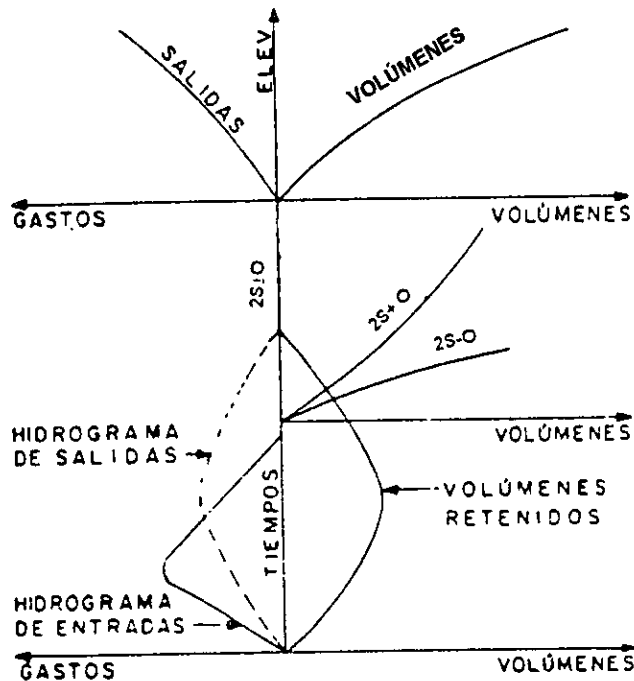


Figura 2.5 Hidrogramas de entrada y de salida. Método de Puls modificado, Vega (1968).

En el cuadrante opuesto al hidrograma de entrada se calcula la curva de volúmenes retenidos, teniendo como ejes el tiempo y el de volúmenes de la curva de capacidades.

Secuencia de cálculo:

La ecuación (2.7) se resuelve por intervalos, de acuerdo con la unidad de tiempo seleccionada; conocidos S_2 y O_2 para un instante dado, éstos serán S_1 y O_1 para el instante siguiente.

- 1) El cálculo comienza suponiendo que el nivel de la superficie libre del agua corresponde a la elevación del umbral de la estructura de salida de que se trate; cuando se tiene el primer ingreso I en el vaso, se tiene $I_1=0, I_2=I_2, 2S_1=0, O_1=0$; por lo tanto, de la ecuación (2.7) se obtiene: $2S_2 + O_2 = I_2$.
- 2) Con el valor de I_2 se entra al eje $2S \pm O$, llevando una horizontal hasta encontrar a la curva $2S+O$ en el punto A, Figura 2.6.
- 3) Se lleva una vertical hacia el eje de volúmenes, cortándolo en el punto B. La magnitud del segmento OB será el volumen retenido en el vaso en ese instante.
- 4) El punto B se lleva a la curva de capacidades en el punto C, al cual corresponde una elevación D.
- 5) Se determina en la curva de salidas el gasto correspondiente a la elevación D, el cual queda establecido por el punto E, se baja una vertical al eje de los gastos en el punto F.
- 6) Debido a que el eje de gastos de la curva de salidas y del hidrograma de entrada son iguales, se proyecta el punto F al instante correspondiente al I_2 , determinándose el gasto de salida para dicho instante en el punto G.
- 7) La horizontal que pasa por G se prolonga hasta cortar en el punto H a la vertical que pasa por B, se obtiene el volumen S retenido en el instante de análisis, resolviendo la ecuación para dicho Δt .
- 8) Se pasa al siguiente intervalo de tiempo, haciendo $S_2=S_1, O_2=O_1$; gráficamente se refiere verticalmente el punto A de la curva $2S+O$ al punto J de la curva $2S-O$, el cual al ser llevado horizontalmente al eje $2S \pm O$ en el punto L, permitirá obtener el valor de dicho término en la ecuación cuya magnitud será $\overline{O'L}$.
- 9) Se hace $I_2=I_1$; se le suma a I_1 el I_2 más el término $2S-O$ obtenido en el inciso anterior, resolviendo nuevamente la ecuación (2.7).
- 10) Con el nuevo valor de $2S_2+O_2$ se encuentra el punto M en el eje $2S \pm O$, el cual al referirse a la curva $2S+O$ permite obtener el punto N con el cual se repite el procedimiento descrito.
- 11) Al unir todos los puntos de los gastos de salida se determina el hidrograma de salida; uniendo los puntos correspondientes a los volúmenes del vaso en cada instante, se determina la curva de volúmenes retenidos.

En la Figura 2.6 se presentan gráficamente los pasos antes descritos.

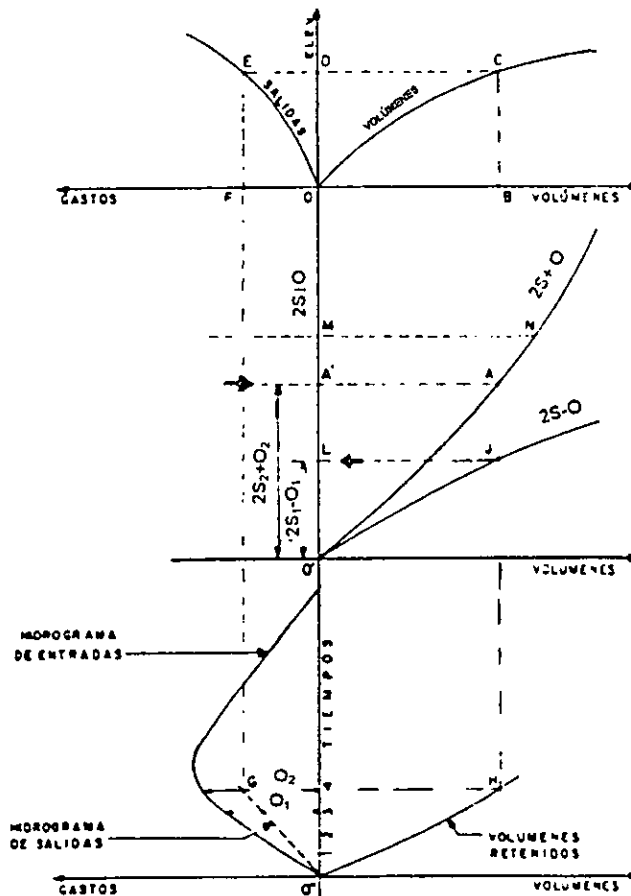


Figura 2.6 Tránsito de avenidas por el método de Puls Modificado, Vega (1968).

Es conveniente tener un registro de elevaciones del nivel del agua contra tiempo cuando se trate del cierre del túnel de desvío en la construcción de una cortina.

En el caso de una avenida, cuando deja de haber un gasto de entrada al vaso, aún existe un volumen retenido, el cual ocasiona la regularización del vaso; en este caso $I_1=I_2$ y la ecuación (2.7) toma la forma: $2S_2 + O_2 = 2S_1 - O_1$. El proceso se reduce a determinar el gasto de salida O_2 a partir del último valor de $2S_1 - O_1$, equivalente al $2S_2 + O_2$, en el eje $2S \pm O$; lo anterior se hace en forma repetitiva hasta obtener un resultado igual a cero, instante en el cual ha dejado de salir el volumen retenido y el vaso ha regresado a sus condiciones iniciales, finalizando el problema.

En este método se recomienda utilizar la misma escala en todos los ejes que correspondan a los volúmenes para evitar errores en los cálculos y evitar el cambio de escalas en las diferentes etapas del proceso.

2.4 Tránsito de avenidas en vasos por un método semigráfico (Manual de CFE ,1980)

En el Manual de la Comisión Federal de Electricidad se aborda el tema del tránsito de avenidas en vasos para la determinación del hidrograma de salida de una presa a partir de las características del almacenamiento y de un hidrograma de entrada conocido; en el tránsito no se consideran variables como la evaporación y la infiltración debido a que su magnitud es despreciable comparada con los volúmenes de entrada y de salida por escurrimiento; lo anterior se observa comparando el intervalo de tiempo utilizado en el tránsito (comúnmente horas) con respecto del funcionamiento de vaso (mensual).

El método semigráfico se fundamenta en la ecuación de continuidad expresada en volumen:

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (2.8)$$

donde:

I gasto de entrada al vaso

O gasto de salida del vaso

$\frac{dS}{dt}$ variación del almacenamiento S en el tiempo t

La solución propuesta en el Manual de la CFE parte de un esquema en diferencias finitas de la forma:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} = \frac{S_{i+1} - S_i}{\Delta t} \quad (2.9)$$

En la ecuación anterior:

Δt Intervalo de tiempo seleccionado para realizar los cálculos del tránsito de avenidas; un valor de Δt cercano a cero se aproxima más al concepto de derivada, en el cual se basa el esquema de diferencias finitas utilizado; se sugiere utilizar $\Delta t \leq 0.1 t_p$, siendo t_p el tiempo para el cual ocurre el gasto máximo de entrada, Figura 2.7. En casos particulares en los que el cociente del tiempo base t_b entre el tiempo de pico t_p sea cercano a 2, el valor Δt puede tomarse mayor que el recomendado, un valor adecuado puede ser $\Delta t \leq 0.3 t_p$.

$i, i+1$ subíndices que representan inicio y final del intervalo Δt .

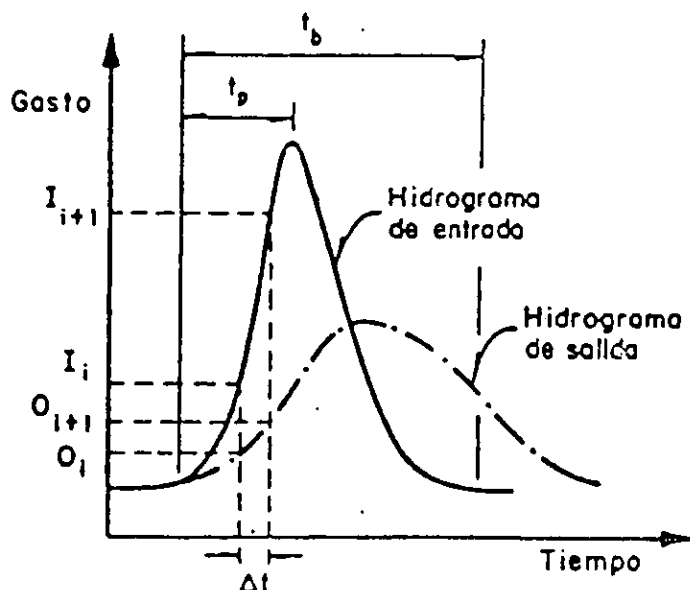


Figura 2.7 Hidrogramas de entrada y salida por el vaso de una presa

Debe establecerse una relación entre el almacenamiento y los gastos de salida; para ello es necesario el manejo de dos curvas: la curva elevaciones-volúmenes de almacenamiento del vaso, obtenida a partir de los planos topográficos del vaso; y la curva elevaciones-gastos de salida por la obra de excedencias, que si es un vertedor de cresta libre, se obtiene a partir de la ecuación :

$$Q = CL(h - H)^{3/2} \quad (2.10)$$

donde:

H elevación de la cresta del vertedor [L]

L longitud del vertedor [L]

C coeficiente de descarga del vertedor [$L^{1/2} T^{-1}$]

h elevación del espejo de agua en el vaso ($h > H$) [L]

Si se tiene el caso de un vertedor de cresta controlada, la curva elevación-gasto de salida se obtiene a partir de las reglas de operación de las compuertas empleadas. Deben incluirse dentro de los gastos de salida los correspondientes a la obra de toma.

Las curvas anteriores permiten conocer la elevación del agua para cada volumen y el correspondiente gasto de salida.

La información básica requerida para aplicar el método semigráfico es:

- 1) Hidrograma de entrada.
- 2) Elevación del nivel del agua en el vaso en el instante en que comienza a presentarse la avenida, correspondiente al hidrograma de entrada.
- 3) Gasto de salida por el vertedor en el instante en que empieza la avenida.
- 4) Gasto de salida por la obra de toma.
- 5) Curva elevaciones-volúmenes de almacenamiento.
- 6) Curva elevaciones-gastos de salida por la obra de excedencias .

Se construye una gráfica auxiliar de valores $\frac{2S_i}{\Delta t} + O_i$ contra O_i de la manera siguiente:

- a) Se determina un intervalo de tiempo Δt , fijando un valor cualquiera del espejo de agua en el vaso $h_i > H$. Si se trata de un proceso de revisión, se sugiere escoger como elevación inicial el nivel más bajo del vaso, por ejemplo, la elevación de la cresta del vertedor, calculando $h_{i+1} = h_i + \Delta h$, considerando $\Delta h \leq \frac{1.2 A_t}{10}$, expresión en la que A_t puede ser la altura de la presa o bien la diferencia entre la elevación entre la cresta del vertedor y el NAME(nivel de aguas máximas extraordinarias).
- b) Se obtiene S_i correspondiente al valor de h_i leyendo en la curva elevaciones-volúmenes de almacenamiento .
- c) Se obtiene O_e correspondiente a h_i a partir de la curva de elevaciones-gastos de salida de la obra de excedencias.
- d) Se calcula $O_i = O_e + O_b$, donde O_b es el gasto de salida por la obra de toma.
- e) Se calcula $\frac{2S_i}{\Delta t} + O_i$.
- f) Se repiten los pasos 2 al 5 tantas veces como sea necesario.
- g) Se dibuja la gráfica $\frac{2S_i}{\Delta t} + O_i$ contra O_i , Figura 2.8.

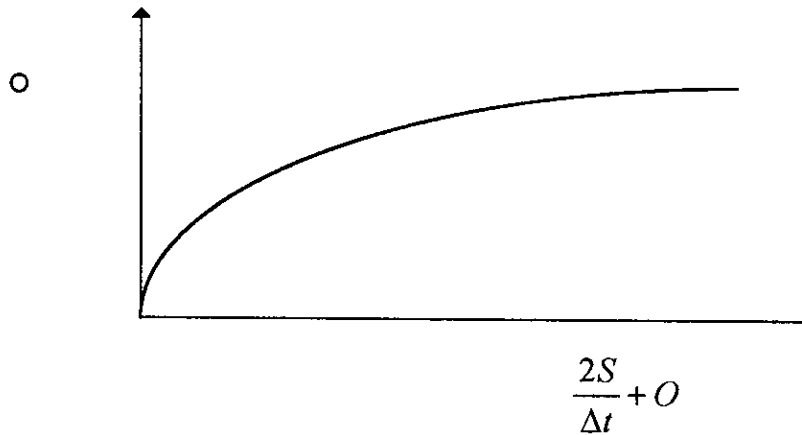


Figura 2.8 Gráfica $\frac{2S_i}{\Delta t} + O_i$ contra O_i

La ecuación (2.9) se ordena de la manera siguiente :

$$I_i + I_{i+1} + \left(\frac{2S_i}{\Delta t} - O_i \right) = \frac{2S_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1} \quad (2.11)$$

En la expresión anterior los valores O_{i+1} y S_{i+1} se desconocen.

El tránsito de la avenida se realiza procediendo como sigue:

- 1) Con los datos iniciales correspondientes a $i=1$ se determinan S_i y O_i .
- 2) Se calcula $\frac{2S_i}{\Delta t} - O_i$
- 3) A partir del hidrograma de entrada se obtienen I_i e I_{i+1} y con el valor calculado en el paso 2 se determina $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$ de la ecuación (2.11).
- 4) El valor de $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$ se ubica en la gráfica de la Figura 2.8 y se lee el valor O_{i+1} .
- 5) Restando dos veces el valor de O_{i+1} al valor de $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$ se determina $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} - O_{i+1}$
- 6) Hacer $i=i+1$, repitiendo el procedimiento de cálculo desde el paso 3; observar que esta vez el valor $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} - O_{i+1}$ corresponde al cálculo que se realiza en 2) para el nuevo valor de i .

El procedimiento anterior se resume en el cuadro siguiente:

Cuadro 2.2 Guía para tabular los valores obtenidos al realizar el tránsito de avenidas por un vaso, utilizando el método semigráfico

1) tiempo	2) i	3) I_i	4) $I_i + I_{i+1}$	5) $\frac{2S_i}{\Delta t} - O_i$	6) $\frac{2S_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1}$	7) O_{i+1}
t_1	1	I_1	$I_1 + I_2$			
t_2	2	I_2	$I_2 + I_3$			
t_3	3	I_3	$I_3 + I_4$			
.	.	.	.			
.	.	.	.			
t_n	n	I_n	$I_n + I_{n+1}$			

La columnas del Cuadro 2.2 se obtienen con el procedimiento siguiente:

- 1) Tiempo seleccionado para el tránsito de avenidas (con un incremento en horas, por ejemplo, $\Delta t = 4$ horas)
- 2) Subíndice correspondiente al tiempo analizado.
- 3) Gasto de entrada I_i al vaso correspondientes al tiempo t_i .
- 4) Suma de los valores de gasto de ingreso correspondientes a $I_i + I_{i+1}$.
- 5) El primer valor se obtiene con los pasos 1 y 2 del proceso de cálculo.
- 6) Suma de las columnas 4) y 5) correspondientes al valor i .
- 7) Con el valor de la columna 6) correspondiente al valor i se lee en la Figura 2.8 el valor de la descarga, que será O_{i+1} y se anotará en el renglón $i+1$.

El cálculo termina si al llegar a la columna 7) si se ha generado el hidrograma de salida; si no es el caso entonces se continúa con el proceso siguiente:

- a) Al valor del renglón i de la columna 6) se resta el doble del valor del renglón i de la columna 7) anotando el resultado en la columna 5) en el renglón $i+1$.
- b) Se incrementa una unidad el valor de i repitiendo los pasos de la columna 5) a la 7).

El método semigráfico debe aplicarse cuidadosamente debido a que el error de lectura en las figuras es acumulativo. Debido a que su utilización implica fijar con anticipación la curva elevaciones-gastos de salida por la obra de excedencias, no se recomienda su uso cuando se tenga una política de operación compleja.

La curva elevaciones-volúmenes debe calcularse con la mayor precisión posible para evitar errores en los cálculos.

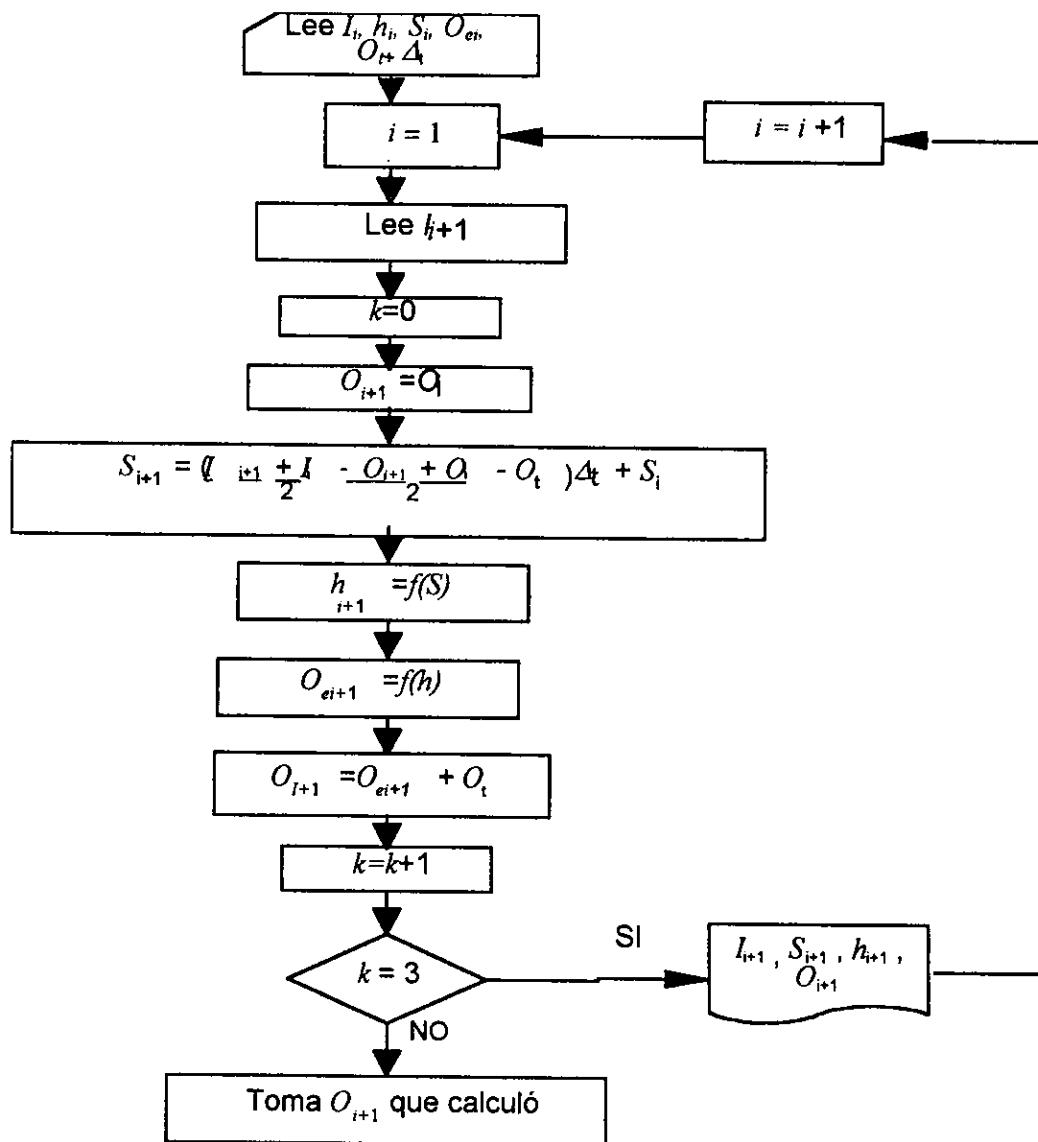
2.5 Tránsito de avenidas en vasos por un método numérico (Manual de CFE, 1980)

La ecuación (2.11) se resuelve utilizando un procedimiento por aproximaciones sucesivas, auxiliándose de una computadora o calculadora programable. Los datos que se requieren son los mismos que los utilizados en el método semigráfico, el algoritmo de solución del problema y su correspondiente diagrama de flujo (Figura 2.9) se presentan a continuación:

Algoritmo

1. Se selecciona un valor de Δt .
2. Se conocen los valores $S_b, I_b, I_{i+1}, O_{ei}, h_b, O_t$ (Para $i=1$ son los datos iniciales y se hace $O_{i+1}=O_{ei}+O_t$ y $k=0$).
3. Se calcula S_{i+1} de la ecuación (2.11).
4. Con S_{i+1} se obtiene de la curva elevaciones-volúmenes la elevación h_{i+1} .
5. Con h_{i+1} , utilizando la curva elevaciones-gasto de salida de la obra de excedencias, se obtiene O_{ei+1} ; se calcula $O_{i+1}=O_{ei+1}+O_t$.
6. Se hace $k=k+1$ (k es el número de iteraciones) y si $k < 3$ se regresa al paso 2, de otra manera, se continúa con el paso 7.
7. El valor de O_{i+1} corresponde al gasto de salida del intervalo de tiempo correspondiente.
8. Se hace $i=i+1$ y se regresa al paso 1 las veces que sea necesario hasta definir el hidrograma de salida (hasta que se observe que el gasto de salida se vuelve aproximadamente constante).

Las curvas elevaciones-volúmenes y elevaciones-gastos de salida se introducen al programa de cálculo en forma de funciones tabulares en las que se hacen interpolaciones lineales para obtener valores intermedios.



- I* Gasto de entrada al vaso, en m³/s
- O* Gasto de salida del vaso, en m³/s
- O_e* Gasto de salida por la obra de excedencias, en m³/s
- O_t* Gasto de salida por la obra de toma, en m³/s
- S* Volumen, en millones de m³
- h* Elevación del vaso, en m
- Δt* Intervalo de tiempo, en s
- f(S)* Curva elevaciones-volúmenes
- f(h)* Curva elevaciones-gastos de salida por la obra de excedencias
- i, i+1* Subíndices que representan los valores de las variables al inicio y al final del intervalo de tiempo, respectivamente.

Figura 2.9 Diagrama de flujo para el método numérico de tránsito de avenidas en embalses (CFE, 1980).

El método numérico es rápido y permite analizar diferentes curvas elevaciones-gastos de salida, por complicadas que sean, como pueden ser las políticas de operación de compuertas si se tiene un vertedor de cresta controlada.

Si se desea mayor precisión en la determinación del gasto de salida O_{i+1} , se aumenta el número de iteraciones k ($k > 3$).

2.6 Método de la curva masa (Singh, 1988)

Este es uno de los métodos más versátiles de tránsito de avenidas (Soil Conservation Service, 1964). Se resuelve por un procedimiento directo, por ensayo y error o bien gráficamente, a continuación se presentan los primeros dos casos por ser los más prácticos.

2.6.1 Solución directa

En la solución directa la ecuación de continuidad:

$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (2.12)$$

Se integra separando variables:

$$\int_0^S dS = \int_0^t Idt - \int_0^t Odt \quad (2.13)$$

Si se selecciona un incremento del tiempo Δt para realizar el tránsito, de tal manera que $\Delta t = t_2 - t_1$, siendo t_1 el valor inicial y t_2 el valor final del intervalo de tiempo y considerando el almacenamiento inicial igual a cero, se tiene:

$$\int_0^{S_{t+\Delta t}} dS = \int_0^{t+\Delta t} Idt - \int_0^t Qdt - \int_t^{t+\Delta t} Qdt$$

$$S_{t+\Delta t} = M_{t+\Delta t} - V_t - \left(\frac{Q_t + Q_{t+\Delta t}}{2} \right) \Delta t \quad (2.14)$$

donde:

- $S_{t+\Delta t}$ almacenamiento en el tiempo $t+\Delta t$
- $M_{t+\Delta t}$ volumen acumulado de entrada en el tiempo $t+\Delta t$
- V_t volumen acumulado de salida en el tiempo t

$O_t, O_{t+\Delta t}$ gastos de salida al inicio y final del intervalo analizado.

En la ecuación (2.14) las incógnitas son $O_{t+\Delta t}$ y $S_{t+\Delta t}$

De la ecuación (2.13) es claro que el volumen de salida en cualquier tiempo es igual a la diferencia entre el volumen de entrada y el almacenamiento:

$$V_t = M_t - S_t \quad (2.15)$$

Sustituyendo (2.15) en (2.14) y reordenando términos:

$$M_{t+\Delta t} - M_t + \left(S_t - \frac{\Delta t}{2} O_t \right) = S_{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} O_{t+\Delta t} \quad (2.16)$$

la expresión (2.16) es la ecuación de recurrencia de la solución directa del método de la curva masa y puede resolverse numéricamente, esta ecuación es la versión de la curva masa del método de señal de almacenamiento.

En la ecuación (2.16) el primer miembro es totalmente conocido y el segundo desconocido; por lo tanto para resolver esta ecuación se requiere de la relación almacenamiento-gasto de salida.

2.6.2 Procedimiento por ensayo y error

El método de ensayo y error busca la solución a la ecuación de continuidad escrita como:

$$M_{t+\Delta t} - (V_t + \bar{O} \Delta t) = S_{t+\Delta t} \quad (2.17)$$

donde:

\bar{O} representa la descarga promedio durante Δt .

La ecuación (2.17) se resuelve por ensayo y error e involucra la utilización de las curvas de elevación-almacenamiento y elevación-descargas, ya sea en forma separada o bien combinadas. El procedimiento de tránsito es simple, fácil de realizar y se adapta de manera eficiente a problemas de tránsito complicados.

Como se deduce de la ecuación (2.17) la entrada incluye el volumen de ingreso, mientras que la salida incluye el volumen de salida, hidrograma de salida y el almacenamiento del embalse. El intervalo de tránsito Δt puede ser variable o constante, no obstante es conveniente utilizar una variable Δt que sea pequeña para un gran cambio en el volumen de entrada y grande para un pequeño cambio en dicho volumen.

Antes de obtener la solución por ensayo y error, deben seguirse los pasos siguientes:

1. Desarrollar una curva de elevación-descarga de la obra de excedencias de que se trate.
2. Construir una curva elevación-almacenamiento del depósito.
3. Los pasos 1 y 2 pueden combinarse, si se desea, en una sola relación almacenamiento-descarga.
4. Graficar el volumen acumulado de gasto de entrada (curva masa).
5. Desarrollar un cuadro auxiliar de cálculos para el tránsito (ver paso 7).
6. Determinar el almacenamiento del embalse para iniciar el tránsito. Hacer los ajustes necesarios para indicar almacenamiento cero en la elevación donde se inicia el tránsito.
7. Determinar la descarga de la obra de excedencias (por ejemplo un vertedor) al inicio del tránsito. La solución por ensayo y error para el tránsito en embalses involucra los pasos siguientes:
 - a) Escoger el tiempo y tabularlo en la columna 1 del cuadro auxiliar de cálculos.
 - b) Determinar Δt e introducirlo en la columna 2.
 - c) En la columna 3 indicar el volumen de entrada M_t para el tiempo correspondiente a la columna 1.
 - d) Suponer un volumen de salida V_t e introducirlo en la columna 4.
 - e) Calcular el almacenamiento del embalse S_t , el cual es $M_t - V_t$ (columna 3-columna 4) e indicarlo en la columna 5.
 - f) Obtener la descarga instantánea de la obra de excedencias, lo anterior realiza determinando la elevación para S_t en la columna 5 de la curva elevación-almacenamiento, posteriormente definir la descarga para esta elevación de la curva elevación-descarga. Por otra parte, si lo que se tiene es la curva almacenamiento-descarga, utilizarla directamente para obtener la descarga para el valor S_t . Establecer este valor en la columna 6.
 - g) Calcular la descarga promedio para Δt . Esta se considera como la media aritmética de la descarga determinada en el paso f y aquella correspondiente a un instante anterior, tabularla en la columna 7.
 - h) Calcular el gasto de salida O_t para Δt , el cual, es el resultado de multiplicar Δt de la columna 2 por la descarga promedio definida en el paso g. El gasto de salida calculado se indica en la columna 8.
 - i) Determinar el volumen de salida V_t acumulando de manera sucesiva los valores de O_t de la columna 8 y tabulándolo en la columna 9.
 - j) Comparar el V_t de la columna 9 con el V_t supuesto en la columna 4. Si el error relativo entre ellos es menor comparado con cierta tolerancia, entonces continúa con el tránsito en el siguiente instante, si no, suponer otro V_t en la columna 4 y repetir los incisos d) a j).

2.7 Método de la señal de almacenamiento (Singh, 1988)

Este método de tránsito de avenidas en embalses también es conocido como método de Puls modificado, representa a la ecuación de continuidad por medio del esquema en diferencias finitas:

$$S_{t+\Delta t} - S_t = (I_{t+\Delta t} + I_t) \frac{\Delta t}{2} - (O_{t+\Delta t} + O_t) \frac{\Delta t}{2} \quad (2.18)$$

En la expresión anterior O_t puede incluir tanto salidas controladas O_c como descargas no controladas O_s , es decir:

$$O_t = O_c + O_s$$

La ecuación (2.18) supone que el gasto de entrada durante un intervalo de tiempo Δt es igual al promedio de los gastos de entrada al inicio y al final del intervalo de tiempo; se supone lo mismo para el gasto de salida; además, el cambio en el almacenamiento es igual al almacenamiento al final del intervalo menos el almacenamiento al inicio del intervalo Δt .

Separando las cantidades conocidas de las desconocidas y ordenando de manera conveniente:

$$(I_t + I_{t+\Delta t}) - (O_c + O_{c+\Delta t}) \left(\frac{2S_t}{\Delta t} - O_s \right) = \frac{2S_{t+\Delta t}}{\Delta t} + O_{s+\Delta t} \quad (2.19)$$

El primer miembro de la ecuación (2.19) es conocido y el segundo es desconocido. El hidrograma de entrada es conocido. O_c , el cual es conocido, es la descarga controlada la cual puede pasar a través de turbinas, obra de toma o por la obra de excedencias (vertedor). Las cantidades restantes del lado izquierdo de la ecuación (2.19) se suponen conocidas al inicio del tránsito, esto es, S_1 y O_1 se conocen al inicio y se determinan para los instantes siguientes.

El gasto de descarga no controlado O_s fluye libremente por el vertedor u obra de excedencias, depende de la carga sobre el vertedor y de su geometría. La carga sobre el vertedor depende del tirante en el depósito o almacenamiento, por lo tanto:

$$S = S(y)$$

$$O_s = O_s(y)$$

Donde y representa la elevación de la superficie del agua. El lado derecho de la ecuación (2.19) puede escribirse como:

$$\frac{2S}{\Delta t} + O = f(y)$$

Para utilizar la ecuación (2.19) deben especificarse relaciones elevación-almacenamiento y elevación-descarga. Por simplicidad, se supone que O_c es despreciable. Por lo consiguiente, O puede tomarse como O_s .

La relación elevación-descarga se utiliza para determinar el gasto de salida, se construye dando valores a la carga sobre la estructura vertedora y utilizando la ecuación general para vertedores:

$$Q = CLh^{\frac{3}{2}} \quad (2.20)$$

donde:

C coeficiente de descarga del vertedor
 L ancho de la cresta del vertedor
 h carga sobre el vertedor

La elevación y correspondiente a h puede obtenerse de información topográfica. Entonces puede construirse ya sea la curva y contra O , o bien h contra O .

Para construir la curva elevación-almacenamiento de nuevo se utiliza un plano topográfico. La carga h sobre el vertedor multiplicada por el área de la superficie del embalse proporciona el almacenamiento (transitorio) del depósito. El área superficial del embalse se conoce también del plano topográfico. Por lo tanto, el almacenamiento transitorio S para cualquier h es aproximadamente igual a:

$$S = \frac{h}{2}(A_1 + A_2) \quad (2.21)$$

donde :

A_1 área de la superficie del depósito cuando $h=0$
 A_2 área cuando la profundidad del flujo es h

Entonces pueden construirse las curvas y contra S o bien h contra S . Entonces se combinan las curvas elevación-almacenamiento con elevación-descarga y construir una la curva almacenamiento-descarga. De esta manera el almacenamiento en un depósito depende únicamente del gasto de salida.

El siguiente paso del tránsito utilizando la ecuación (2.19) es la selección del intervalo de tiempo del tránsito Δt . Su valor no debe ser ni muy largo ni muy corto. Si es muy largo y excede el tiempo de viaje de la avenida a través del depósito, entonces el segmento de cresta del gasto de salida que contiene la descarga de pico podría pasar a través del depósito entre dos intervalos de tiempo y no ser calculado. Por otra parte si Δt es muy corto entonces toma mucho tiempo realizar el tránsito de la avenida. Se recomienda que Δt sea tan corto que los gastos de entrada I se comporten de manera aproximadamente lineal durante este periodo. Linsley, Kohler y Paulhus (1975) recomiendan que Δt sea del orden de un tercio a un medio del tiempo de viaje de la onda de avenida a través del depósito.

Antes de que el tránsito pueda llevarse a cabo, deben construirse curvas $\frac{2S}{\Delta t} \pm O$ contra O . Esto se realiza seleccionando un gasto de salida inicial O , estimando la elevación correspondiente utilizando la curva elevación-descarga, se determina el almacenamiento correspondiente de la curva elevación-almacenamiento, posteriormente se calcula $\frac{2S}{\Delta t} + O$ y se dibuja contra O .

El tránsito con la ecuación (2.19) puede realizarse como sigue:

1. Al inicio del tránsito el gasto de entrada y de salida se conocen de las condiciones iniciales del depósito.
2. Determinar $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) + O$ para el O dado en el paso 1.
3. Obtener $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) - O$ restando dos veces el valor de O del paso 1.
4. Añadir los dos gastos de entrada y el valor del paso 3; con ello se obtiene $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) + O$.
5. Determinar O contra $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) + O$ del paso 4 utilizando la curva $\frac{2S}{\Delta t} + O$ contra O .
6. Determinar $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) - O$
7. Regresar al paso 4 y repetir el procedimiento.

Este método tiene dos inconvenientes, el primero es que la suposición de que el flujo de salida empieza al mismo tiempo que el flujo de entrada implica que el flujo de entrada pasa a través del depósito instantáneamente sin tomar en cuenta su longitud. De cualquier manera esta situación no es seria si la proporción $\frac{T_i}{T_m}$ es menor o igual que un medio, donde T_m denota el tiempo del gasto de pico del hidrograma de entrada y T_i el tiempo de viaje. T_i es

igual a $\frac{L}{u}$, donde L es la longitud del tramo y u es la velocidad media en flujo uniforme. El segundo inconveniente es que es difícil elegir un valor adecuado de Δt . Se presentan valores negativos del gasto de salida cuando $\Delta t > \frac{2S_{t+\Delta t}}{O_{t+\Delta t}}$ o $\frac{O_{t+\Delta t}}{2} > \frac{S_{t+\Delta t}}{\Delta t}$. Esto significa que la forma del hidrograma está distorsionada. Este problema puede evitarse dibujando la curva O contra $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) + O$ en papel log-log y comparar la gráfica con la línea de valores iguales. Si los valores dibujados caen por arriba de la línea de valores iguales, la gráfica $\left(\frac{2S}{\Delta t}\right) + O$ debe desecharse y se debe seleccionar un nuevo valor de Δt .

2.8 Método de Puls (Singh, 1988)

El método de Puls es similar al método de señal de almacenamiento; también expresa a la ecuación de continuidad como:

$$\frac{I + I_{t+\Delta t}}{2} \Delta t - S_t - \frac{O_t}{2} \Delta t = S_{t+\Delta t} + \frac{O_{t+\Delta t}}{2} \Delta t \tag{2.22}$$

se busca su solución utilizando las curvas de almacenamiento característico de una manera similar. Para utilizar la ecuación (2.22) se deben construir curvas para $S \pm \frac{O}{2} \Delta t$ contra h o bien contra el gasto de salida O , como se presenta en la Figura 2.10

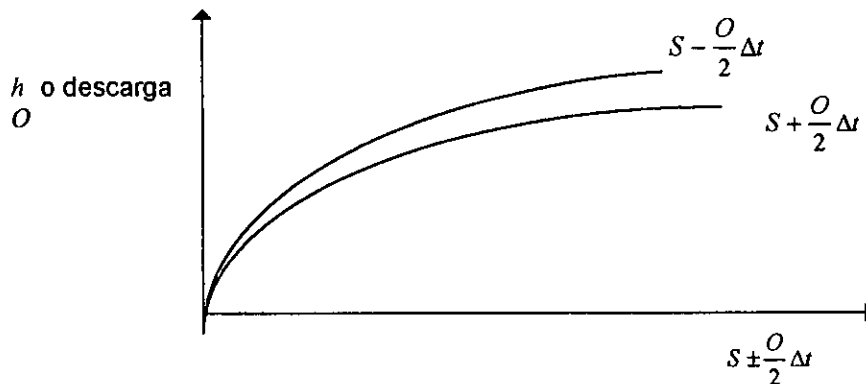


Figura 2.10 Curvas que indican la relación de la elevación h o descarga O contra $S \pm \frac{O}{2} \Delta t$

En este método se utilizan los siguientes pasos:

1. Seleccionar el intervalo de tiempo del tránsito Δt . Para cualquier Δt se conoce I_t e $I_{t+\Delta t}$ así como h_t o bien O_t .
2. Obtener $S_t - \frac{O}{2}\Delta t$, correspondiente al valor conocido de O_t o bien de h_t , utilizando la gráfica correspondiente a la Figura 2.10.
3. Determinar $S_{t+\Delta t} + \frac{O_{t+\Delta t}}{2}\Delta t$ utilizando la ecuación (2.22)
4. Obtener $h_{t+\Delta t}$ o bien $O_{t+\Delta t}$ para el valor $S_{t+\Delta t} + \frac{O_{t+\Delta t}}{2}\Delta t$, del paso 3, utilizando la Figura 2.10.
5. Determinar $h_{t+\Delta t}$ o bien $O_{t+\Delta t}$ utilizando la curva elevación-descarga.
6. Repetir este procedimiento para el intervalo de tiempo siguiente y continuar hasta que el tránsito esté completo.

Este procedimiento tiene los mismos inconvenientes que el método de la señal de almacenamiento. Los resultados que se obtienen con este método son comparables con los que se obtienen con el de la curva masa.

2.9 El método de Wisler-Brater (WB) (Singh, 1988)

Wisler y Brater (1959) proponen un método que expresa el almacenamiento como una función de la suma del gasto de entrada y de salida, se auxilia de la construcción de curvas de almacenamiento que relacionan a $I + O$ contra $\left[\frac{2S}{\Delta t} + I + O \right]$; la ecuación de continuidad se expresa de la manera siguiente:

$$\frac{2S_t}{\Delta t} + I_t + 2I_{t+\Delta t} - O_t = \frac{2S_{t+\Delta t}}{\Delta t} + I_{t+\Delta t} + O_{t+\Delta t} \quad (2.23)$$

Debido a que el lado izquierdo de la ecuación (2.23) se conoce para un cierto instante del tránsito, el lado derecho puede determinarse. El valor de $I_{t+\Delta t} + O_{t+\Delta t}$ se lee de las curvas de almacenamiento. Debido a que $I_{t+\Delta t}$ es conocido, $O_{t+\Delta t}$ es obtenido de manera inmediata. Este procedimiento puede repetirse para los siguientes intervalos de tiempo del tránsito, hasta terminarlo. Este método se modifica de manera sencilla para el caso en el que el almacenamiento esté en función de la suma ponderada de los gastos de entrada y de salida.

2.10 Método de Goodrich (Singh, 1988)

Goodrich (1931) propuso un método que involucra la construcción de una familia de curvas de tránsito para $\frac{2S}{\Delta t} + O$ contra O para varios valores de I , como se muestra en la Figura

2.11. La ecuación de continuidad se escribe como:

$$I_t + I_{t+\Delta t} + \frac{2S_t}{\Delta t} - O_t - \frac{2S_{t+\Delta t}}{\Delta t} = O_{t+\Delta t} \quad (2.24)$$

Dado que se conocen todos los términos del primer miembro de la ecuación (2.24), el segundo miembro se obtiene rápidamente para un cierto periodo Δt . El valor de $O_{t+\Delta t}$ se lee de las curvas $\frac{2S}{\Delta t} + O$ contra O y entonces calcular el término $\frac{2S_{t+\Delta t}}{\Delta t}$. El tránsito se lleva a cabo para instantes de tiempo siguientes, hasta concluirlo. Rutter, Greaves y Snyder (1939) utilizaron este método con buenos resultados.

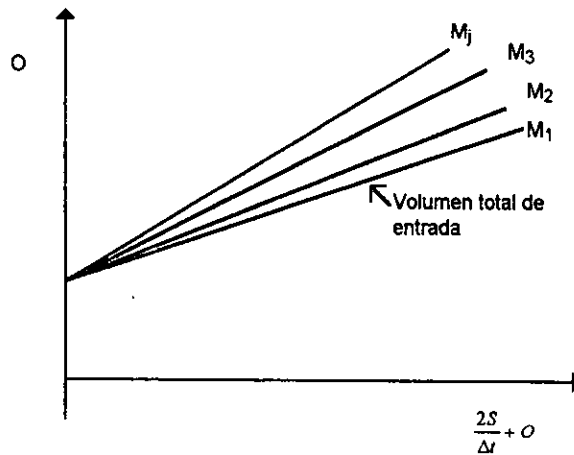


Figura 2.11 Curvas de tránsito típicas para el método de Goodrich

2.11 Método de Steinberg (Singh, 1988)

El método de Steinberg (1947) expresa a la ecuación de continuidad como:

$$\left(I_t + I_{t+\Delta t} - O_t \right) \frac{\Delta t}{2} + S_t = \frac{\Delta t}{2} O_{t+\Delta t} + S_{t+\Delta t} + K \quad (2.25)$$

El término $K = S \frac{O\Delta t}{2}$ se conoce como el factor de almacenamiento. Las curvas de almacenamiento que presentan al almacenamiento como una función del gasto de entrada y de salida, se superponen sobre curvas K, se ilustra en la Figura 2.12. Todos los términos del lado izquierdo de la ecuación (2.25) se conocen, de tal manera que el lado derecho se obtiene rápidamente; posteriormente $O_{t+\Delta t}$ y $S_{t+\Delta t}$ se leen de las curvas correspondientes. El tránsito se lleva a cabo de manera similar para periodos de tiempo posteriores.

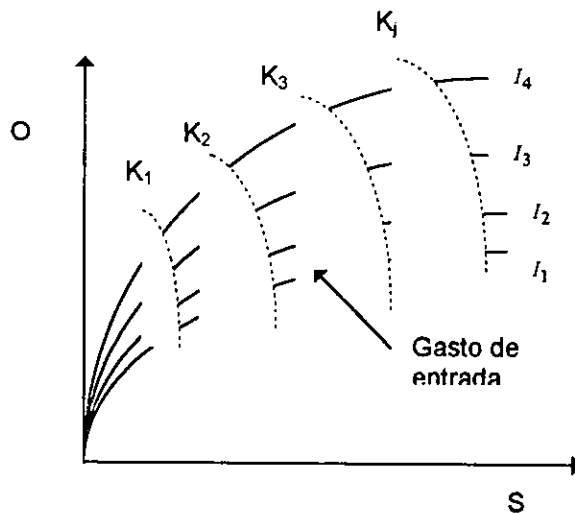


Figura 2.12 Curvas típicas de tránsito para el método de Steinberg

2.12 Método del coeficiente (Singh, 1988)

Este método plantea que el almacenamiento es directamente proporcional al gasto de salida O :

$$S = kO \quad (2.26)$$

En la ecuación anterior k es un factor de proporcionalidad igual al recíproco de la pendiente de la curva de almacenamiento que puede ser una constante o bien una función del gasto de salida. Si k es constante, entonces el sistema es lineal, en caso contrario es no lineal; para cada uno de estos casos existen soluciones que pueden ser tanto de forma dimensional como adimensional (Singh, 1988). Para efectos de tránsito de avenidas, normalmente se utiliza una aproximación en diferencias finitas; combinando la ecuación de continuidad con la ecuación (2.26) y ordenando de manera conveniente se obtiene:

$$O_{t+\Delta t} = O_t + C(I_t - O_t) + 0.5C(I_{t+\Delta t} - I_t) \quad (2.27)$$

donde:

$$C = \frac{\Delta t}{k + 0.5\Delta t} \quad (2.28)$$

Si k es variable, se determina un valor de C para cada valor de k y entonces C se dibuja contra el gasto de salida O , correspondiente a cada Δt . Se realiza el tránsito de la avenida utilizando la ecuación (2.27).

2.13 Tránsito de avenidas en embalses utilizando solución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden

2.13.1 Aproximación por el método de Runge-Kutta (Kuo, 1993)

En este método la descarga del gasto de salida para embalses con descargas no controladas (sin compuertas) puede expresarse en términos de la carga h sobre la cresta del vertedor:

$$O = Ch^m \quad (2.29)$$

Donde el coeficiente C y el exponente m son constantes del vertedor.

Sustituyendo la ecuación (2.29) en la ecuación de continuidad expresada como:

$$I - O = \frac{dS}{dt} \quad (2.30)$$

Se obtiene:

$$I - Ch^m = \frac{dS}{dt} \quad (2.31)$$

Si S es función de h , por ejemplo, para un depósito de área superficial constante A se tiene que :

$$\frac{dS}{dt} = A \frac{dh}{dt} \quad (2.32)$$

De esta manera, la ecuación (2.31) puede escribirse:

$$I - Ch^m = A \frac{dh}{dt} \quad (2.33)$$

Suponiendo que el gasto de entrada I puede expresarse como una función del tiempo t , entonces la ecuación (2.33) es función de t y de h :

$$\frac{dh}{dt} = f(t, h) \quad (2.34)$$

Tomando en cuenta las condiciones iniciales (t_0, h_0) , haciendo $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_0 + 2\Delta t$, etc., siendo Δt el incremento de tiempo constante seleccionado, los correspondientes valores h_1 , h_2 , etc., pueden calcularse utilizando el método clásico de Runge-Kutta de cuarto orden, ver Robertson et al(1988), dado por:

$$h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.35)$$

donde los valores k_i corresponden a la ecuación (2.34), valuados en distintos puntos, es decir:

$$k_1 = f(t_i, h_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, h_i + \frac{\Delta t}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, h_i + \frac{\Delta t}{2} k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta t, h_i + (\Delta t)k_3)$$

Si se conoce el punto de condición inicial es decir, el valor de h_0 en $t_0=0$, la ecuación (2.35) puede aplicarse para cada incremento de tiempo Δt y los valores correspondientes al gasto de salida O determinarse de la ecuación (2.29), obteniendo así el hidrograma de salida buscado.

El método de Runge- Kutta de cuarto orden tiene la ventaja de ser un método numérico que no requiere el cálculo de las derivadas de la función. Los errores que se cometen son por discretización y redondeo, además es un método que proporciona resultados muy similares a los exactos.

2.13.2 Aproximación por el método de Euler (Kuo, 1993)

El método de Euler, de acuerdo con Chapra y Canale (1985), es la aproximación numérica más simple para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, se basa en transformar en serie de Taylor la función $f(t)$, en el entorno del punto de abscisa $t=t$ y valorarlo en el punto $t=t+\Delta t$, es decir:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t) + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \quad (2.36)$$

y posteriormente truncar la serie después del segundo término, lo cual resulta:

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) \quad (2.37)$$

Si Δt es el incremento de tiempo entre dos ordenadas lineales, entonces $f(t)$ corresponde a la carga h en el tiempo t , partiendo del punto de condición inicial (t_0, h_0) , la ordenada siguiente h_1 puede obtenerse de:

$$h_1 = h_0 + \Delta t \left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=0} \quad (2.38)$$

sustituyendo $\frac{dh}{dt}$ de la ecuación (2.33), se obtiene:

$$h_1 = h_0 + \Delta t \frac{(I_0 - Ch_0^m)}{A} \quad (2.39)$$

y en general para un instante t_{i+1} :

$$h_{i+1} = h_i + \Delta t \frac{(I_i - Ch_i^m)}{A} \quad (2.40)$$

La ecuación (2.40) se aplica para cada incremento de tiempo Δt , obteniendo las cargas h sobre el vertedor en cada instante y los correspondientes valores del gasto de descarga O se determinan con la ecuación (2.29) y de esta manera se construye el hidrograma de salida.

El método de Euler es muy sencillo de aplicar, ya que sólo se requiere valuar $\frac{dh}{dt}$; sin embargo, es de los métodos que proporcionan el mayor error, resultado tanto del truncamiento de la serie de Taylor, como de los errores de discretización y de redondeo que acompañan a los métodos numéricos. Se utiliza sólo cuando se quiera una estimación del

hidrograma de salida a nivel anteproyecto. Para el proyecto definitivo, debe buscarse otro método que proporcione un menor error. Una posible alternativa sería un método "predictor-corrector", como es el caso del método de Euler-Gauss o bien el de Runge-Kutta de cuarto orden.

2.13.3 Método de Campos (1994) (Campos, 1994)

Este método es similar a la aproximación por Runge-Kutta, pero toma en cuenta que el embalse en estudio tenga descargas controladas (presencia de compuertas).

Dada la ecuación de continuidad en su forma diferencial:

$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (2.41)$$

Y la ecuación:

$$S = \alpha h^\beta \quad (2.42)$$

donde:

S volumen almacenado en el embalse, [L³]

h elevación del embalse [L]

α y β son constantes características de cada embalse (vaso).

Expresando la ecuación (2.41) como:

$$\frac{dS}{dt} \frac{dh}{dh} = I - O$$

$$\frac{dh}{dt} \frac{dS}{dh} = I - O$$

Sustituyendo (2.42) en (2.41) y derivando:

$$\frac{dh}{dt} \frac{d(\alpha h^\beta)}{dh} = I - O$$

$$\frac{dh}{dt} \alpha \beta h^{\beta-1} = I - O$$

Despejando la dh/dt y considerando que $O=QDES(h)$, suma de gastos de descarga de las estructuras vertedoras:

$$DHT = \frac{dh}{dt} = \frac{I - QDES(h)}{\alpha \beta h^{\beta-1}} \quad (2.43)$$

La expresión (2.43) es una ecuación diferencial no lineal cuya solución, de acuerdo con Campos (1987), puede obtenerse a partir del método de Runge-Kutta de cuarto orden Burden et al(1981), cuyas ecuaciones de recurrencia para determinar el gasto de salida (Q_s) al final de cada intervalo i , en el problema en particular son:

$$Q_{s,i+1} = QDES(h_{i+1}) \quad (2.44)$$

donde:

$$h_{i+1} = h_i + \frac{k1 + 2k2 + 2k3 + k4}{6} \quad (2.45)$$

y:

$$k1 = \Delta t \cdot DHT(QE_i, h_{i+1}) \quad (2.46)$$

$$k2 = \Delta t \cdot DHT\left(\frac{QE_i + QE_{i+1}}{2}, h_i + \frac{k1}{2}\right) \quad (2.47)$$

$$k3 = \Delta t \cdot DHT\left(\frac{QE_i + QE_{i+1}}{2}, h_i + \frac{k2}{2}\right) \quad (2.48)$$

$$k4 = \Delta t \cdot DHT(QE_{i+1}, h_i + k3) \quad (2.49)$$

En las ecuaciones (2.46) a (2.49), DHT significa "derivada de h con respecto a t ", QE es el gasto de entrada medido a la mitad del intervalo (i) que se analiza; NERC (1975) propuso la siguiente expresión general para evaluar el gasto de descarga de cada una de las estructuras vertedoras:

$$O = B.C(h - h_2)^x = QDES(h) \quad (2.50)$$

donde:

O gasto de descarga en m^3/s

B constante que para un vertedor de descarga libre es igual a la longitud de cresta; para un orificio de descarga es igual al producto del área hidráulica por $\sqrt{2g} \cong 4.43$

C coeficiente que en vertedores de cresta libre tiene variación lineal de C_j a C_{j+1} conforme la carga cambia de h_j a h_{j+1} . En orificios es igual al coeficiente de descarga.

H carga hidráulica en la estructura vertedora, en m, para la cual se calcula el gasto de descarga O .

h_z elevación o nivel del agua en el embalse en m, para la cual el gasto de descarga es nulo.

X exponente igual a 1.5 en vertedores de cresta libre e igual a 0.50 en orificios de descarga.

Este método numérico tiene las ventajas y limitaciones expresadas en el apartado 2.13.1 .

En las páginas siguientes se presenta un cuadro resumen de los métodos de tránsito de avenidas en embalses que se han abordado en este Capítulo, indicando la información que requieren, sus ventajas y desventajas.

Cuadro 2.3 Métodos de tránsito de avenidas en embalses (continuación)

Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
<p>4) Método Numérico (CFE, 1980)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Elevación inicial del nivel del agua - tabla de elevaciones-volumenes - tabla de elevaciones-gastos de salida - gasto de salida por el vertedor y por obra de toma al inicio - intervalo de tiempo para el tránsito 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p>	<ul style="list-style-type: none"> -Rápido - Aplicable en políticas de operación complicadas - Pocas iteraciones para obtener resultados 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere una computadora programable o computadora - Errores debidos a interpolaciones lineales para el cálculo de volúmenes y gastos de salida - Errores de discretización y redondeo
<p>5) Curva-masa, solución directa</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Relación volúmenes-gastos de salida - volumen acumulado de entrada - volumen de almacenamiento inicial - gasto de salida inicial -Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación sencilla de resolver 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo

Cuadro 2.3 Métodos de tránsito de avenidas en embalses (continuación)

Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
6) Curva-masa, por ensayo y error	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curva elevación-almacenamiento - Curva elevación-descargas - Volumen acumulado de gastos de entrada (curva-masa) - Volumen de salida inicial - Intervalo de tiempo para el tránsito 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Procedimiento sencillo - Se adapta a problemas de tránsito complicados 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores acumulados en lecturas de datos de curvas
7) Señal de Almacenamiento	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Ecuaciones de gasto de descarga-elevaciones - Volumen de almacenamiento inicial - Gasto de salida inicial - Ecuación de elevaciones - volúmenes - Almacenamiento - cartas topográficas - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Sencillo de aplicar cuando se cuenta con toda la información 	<ul style="list-style-type: none"> - Se desprecia la longitud del depósito al considerar que el gasto de salida ocurre al mismo tiempo que de entrada - Dificultad en la selección del Δt adecuado - Procedimiento semigráfico que implica errores en lecturas de gráficas y cartas topográficas
8) Método de Puls	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curvas $S+O\Delta t/2$ - h o contra O - Elevaciones contra tiempos - Curva elev-descargas - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Sencillo de aplicar - Resultados similares a los del método de curva-masa 	<ul style="list-style-type: none"> - Mismas que las del método de señal de almacenamiento

Cuadro 2.3 Métodos de tránsito de avenidas en embalses (continuación)

Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
9) Wisler-Brater(WB)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curva $I+O$ contra $[2S/\Delta t + I + O]$ - Gasto de salida inicial - Almacenamiento inicial - Intervalo de tiempo para el tránsito 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Procedimiento sencillo 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo - Errores las lecturas de curvas
10) Goodrich	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curvas $2S/\Delta t + O$ contra O - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Sencillo de aplicar 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo - Errores en lecturas de datos
11) Steinberg	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curva almacenamiento contra gastos de salida - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$)</p> <p>Almacenamiento en cada instante</p>	<ul style="list-style-type: none"> - De aplicación sencilla 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo - Errores en lecturas de datos
12) Coeficiente	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Curva $C-O$ - Curva almacenamiento contra gastos de salida - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de recurrencia sencilla 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo - Errores en lecturas de datos

Cuadro 2.3 Métodos de tránsito de avenidas en embalses (continuación)

Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
13) Aproximación por el método de Runge-Kutta	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Ecuación del gasto de descarga con respecto a la carga sobre el vertedor - Ecuación almacenamiento contra carga - Área del espejo de agua del embalse - Intervalo de tiempo - Instante inicial, carga inicial 	Hidrograma de salida ($O-t$)	<ul style="list-style-type: none"> - No requiere el cálculo de derivadas, sólo se valúan funciones - Resultados muy cercanos a los exactos 	<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo - Error al suponer al área A constante.
14) Aproximación por el método de Euler	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Ecuación del gasto de descarga con respecto a la carga sobre el vertedor - Ecuación almacenamiento contra carga - Área del espejo de agua del embalse - Intervalo de tiempo - Instante inicial, carga inicial 	Hidrograma de salida ($O-t$)	<ul style="list-style-type: none"> - Sencillo de aplicar, sólo se valúan funciones - No requiere el cálculo de derivadas - Estimación a nivel anteproyecto 	<ul style="list-style-type: none"> - Es de los métodos numéricos que proporcionan el mayor error en la aproximación - Errores de truncamiento, discretización y redondeo - Error al suponer el área A constante

CAPÍTULO 3

TRANSITO DE AVENIDAS EN CAUCES



CAPÍTULO 3

TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES

3.1 Métodos hidrológicos

Cuando en un tramo de un cauce se presenta una onda de avenida, los hidrogramas del gasto de entrada y de salida aguas arriba y aguas abajo del tramo, tienen forma similar a los mostrados en la Figura 3.1a.

Si en el tramo analizado las pérdidas o ganancias de agua son despreciables, las áreas totales bajo los hidrogramas son iguales puesto que el volumen de agua de la avenida no cambia.

En cauces naturales las fuerzas de resistencia en el canal y su capacidad de almacenamiento son altas, por tal motivo la onda de avenida tendrá modificaciones significativas en sus características. Como se observa en la Figura 3.1a, el pico de la avenida se atenúa y se retrasa.

La diferencia entre ordenadas de los hidrogramas de entrada y de salida es igual a la tasa de almacenamiento en el tramo, lo cual queda establecido en la ecuación de continuidad expresada como:

$$I - O = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (3.1)$$

donde:

I gasto medio de entrada al tramo del cauce analizado, en el periodo Δt

O gasto medio de salida del tramo del cauce analizado, en el periodo Δt

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ cambio en el almacenamiento en el periodo Δt

La ecuación de continuidad constituye la base de los métodos hidrológicos de tránsito de avenidas en cauces.

La tasa de almacenamiento se dibuja con respecto al tiempo, como se presenta en la Figura 3.1b, en la cual se aprecia que el almacenamiento aumenta antes del instante en que el gasto de entrada es igual al de salida y disminuye a partir de dicho instante.

El área bajo la curva de la figura de tasa de almacenamiento-tiempo, representa el volumen de almacenamiento en un tiempo t después del inicio de la avenida; al dibujar este volumen con respecto al tiempo se determina una curva almacenamiento-volumen similar al de la Figura 3.1c. El punto máximo de la curva representa el máximo volumen de almacenamiento, el cual ocurre cuando el gasto de entrada es igual al de salida.

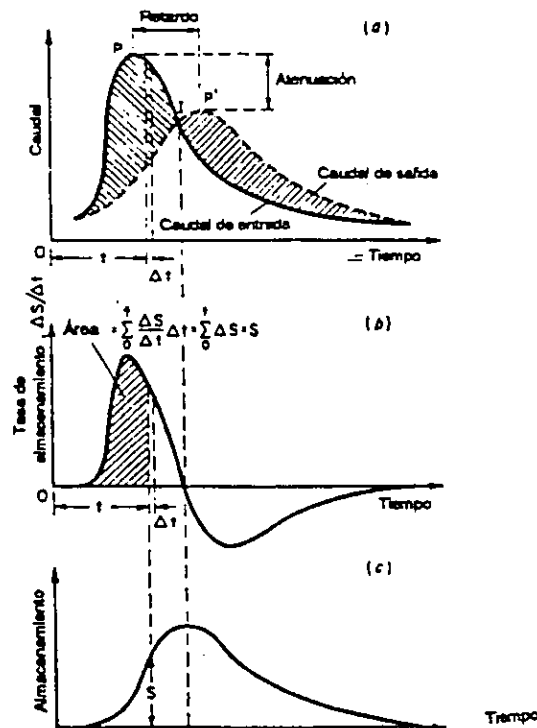


Figura 3.1 Relación entre el gasto de entrada, de salida y el almacenamiento de un tramo de un canal al presentarse una avenida

Si se hace una gráfica almacenamiento contra caudal de salida, se obtiene una curva que forma un lazo, Figura 3.2, lo que quiere decir que el almacenamiento para un gasto de salida determinado en la parte ascendente de la avenida es mayor que el almacenamiento que corresponde a la condición de flujo permanente ($\frac{\partial v}{\partial t} = 0$), cuya relación almacenamiento-gasto de salida corresponde a la línea punteada, prácticamente en medio de las dos ramas del lazo.

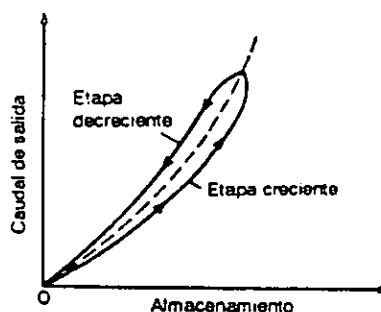


Figura 3.2 Relación Almacenamiento-gasto de salida

El almacenamiento en un tramo de un cauce, cuando el flujo es no permanente ($\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$), está en función de los gastos de entrada y de salida, las características geométricas e hidráulicas del canal y de las estructuras de control existentes.

Diversos autores han propuesto soluciones al problema de tránsito de avenidas resolviendo la ecuación de continuidad en su forma diferencial, por medio de esquemas de diferencias finitas, también utilizando relaciones entre el almacenamiento y los gastos de entrada y salida, haciendo simplificaciones del problema.

3.1.1 Método de Muskingum (Viessman, 1989)

Este método fue desarrollado en los años treinta cuando se realizaban diseños de obras de protección de avenidas en la cuenca del río Muskingum, en el estado de Ohio, E.U.A; presentado por Mc Carthy (1938), se basa en considerar que el almacenamiento en un tramo de río con flujo establecido depende principalmente de las descargas dentro y fuera del tramo, así como de las características hidráulicas de la sección transversal. El almacenamiento dentro del tramo en un intervalo de tiempo dado puede expresarse como:

$$S = \frac{b}{a} \left[XI^{\frac{m}{n}} + (1-X)O^{\frac{m}{n}} \right] \quad (3.2)$$

donde:

a y n son coeficientes que reflejan características de la fase de descarga de las secciones de control al final del tramo.

b y m indican las características del volumen de la sección.

X cantidad que define los factores de peso relativo dados al gasto de entrada y de salida por el tramo analizado.

El método de Muskingum, de acuerdo con Mc Carthy (1938), considera la relación $m/n = 1$ y hace $b/a = K$, expresando a la ecuación como:

$$S = K[XI + (1 - X)O] \quad (3.3)$$

donde:

K Constante de tiempo de almacenamiento para el tramo.

X Factor de peso que varía entre 0 y 0.5

La aplicación de esta ecuación ha mostrado que K es con frecuencia razonablemente cercana al tiempo de recorrido de la onda a través de la sección y el valor de X en promedio es de 0.2.

El comportamiento de la onda de avenida debido a cambios en el factor de peso X se aprecia con facilidad en la Figura 3.3. La onda de avenida aguas abajo es descrita comúnmente por la cantidad de traslación, que es el tiempo de retraso, y por la cantidad de atenuación o reducción en la descarga de pico. Como puede observarse de la Figura 3.1, cuando $X=0.5$ únicamente se tiene traslación de la onda de avenida.

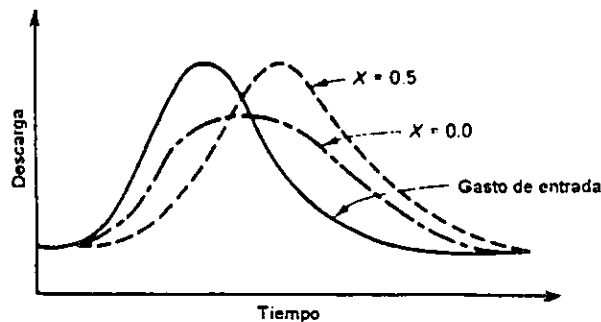


Figura 3.3 Efecto del factor de peso X

Las ecuaciones (3.1) y (3.3) se aplican directamente a un tramo de cauce si se conocen los valores de K y X .

El procedimiento de tránsito inicia dividiendo el periodo de tiempo analizado en subintervalos utilizando un incremento constante Δt y expresando la ecuación (3.1) mediante el esquema en diferencias finitas:

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} = \frac{S_{i+1} - S_i}{2} \quad (3.4)$$

Los subíndices i e $i+1$ indican el inicio y final del intervalo de tiempo Δt .

Δt se selecciona normalmente como un valor adecuado dentro de los límites de $K/3$ y K ; es decir como una fracción del tiempo de viaje de la onda de avenida a través del tramo (se determina a partir del hidrograma de entrada).

El cambio en el almacenamiento en el tramo de río durante el intervalo de tránsito, de acuerdo con la ecuación (3.4), es:

$$S_{i+1} - S_i = K[X(I_{i+1} - I_i) + (1-X)(O_{i+1} - O_i)] \quad (3.5)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (3.4) se obtiene la ecuación del método de Muskingum:

$$O_{i+1} = C_0 I_{i+1} + C_1 I_i + C_2 O_i \quad (3.6)$$

donde:

$$C_0 = \frac{-KX + 0.5\Delta t}{K - KX + 0.5\Delta t} \quad (3.7)$$

$$C_1 = \frac{KX + 0.5\Delta t}{K - KX + 0.5\Delta t} \quad (3.8)$$

$$C_2 = \frac{K - KX - 0.5\Delta t}{K - KX + 0.5\Delta t} \quad (3.9)$$

En las ecuaciones anteriores se observa que K y Δt deben tener las mismas unidades y que la suma de los tres coeficientes C_i es igual a la unidad.

La estabilidad del método numérico se asegura si Δt se encuentra dentro del intervalo de valores de $2KX$ y $2K(1-X)$.

El valor teórico de K corresponde al tiempo requerido para que una onda elemental (cinemática) recorra el tramo analizado. Es aproximadamente el intervalo de tiempo entre los gasto de pico de entrada y salida, si se cuenta con esa información; en caso contrario, la velocidad de la onda se estima para canales con diferentes secciones como una función de la velocidad media V para cualquier gasto representativo Q . La velocidad para condiciones de flujo uniforme establecido puede estimarse por la ecuación de Manning o de Chezy. Velocidades de onda aproximadas para canales con diferente sección se presentan en el Cuadro 3.1.

Cuadro 3.1 Velocidades* de onda cinemática para canales con diferente sección transversal

Sección transversal del canal	Ecuación de Manning	Ecuación de Chezy
Rectangular muy ancho*	$\frac{5}{3}V$	$\frac{3}{2}V$
Triangular	$\frac{4}{3}V$	$\frac{5}{4}V$
Parabólico muy ancho*	$\frac{11}{9}V$	$\frac{7}{6}V$

* A la velocidad de una onda cinemática se le llama celeridad

Un canal se considera muy ancho cuando el tirante y es aproximadamente igual al radio hidráulico ($R \approx A/P$)

Debido a que los gastos de entrada I_i e I_{i+1} son conocidos en cualquier instante y debe conocerse el primer gasto de salida O_i , el tránsito se realiza resolviendo la ecuación (3.6) dando un incremento constante del tiempo en forma consecutiva utilizando cada valor obtenido del gasto de salida O_{i+1} como el valor O_i en el siguiente incremento del tiempo.

Para que los valores de K y X sean adecuados para el problema en estudio se realiza una estimación de estos parámetros (calibración del modelo), si se conocen registros de un hidrograma de entrada y de salida para una o más avenidas históricas. Lo anterior se logra invirtiendo el procedimiento de tránsito con el fin de proporcionar mejores valores de K y X para el tramo analizado; un procedimiento por tanteos se realiza como se indica a continuación:

Se dibujan valores de S contra $XI+(1-X)O$ para cada instante, correspondientes a distintos valores propuestos de X (que varía entre 0 y 0.5). Debido a que las variables S y $XI+(1-X)O$ se consideran que tiene una relación lineal de acuerdo con la ecuación (3.3), el valor aceptado de X es aquel que proporciona el mejor ajuste a una recta (el lazo más estrecho). El valor K se determina calculando el recíproco de la pendiente a través del lazo más angosto, de acuerdo con la ecuación (3.3) resulta:

$$K = \frac{S}{XI + (1 - X)O} \quad (3.10)$$

A continuación se presentan otros métodos para la determinación de los parámetros K y X del método de Muskingum:

A) Método de mínimos cuadrados (Escalante, 1990)

Una manera de aplicar este método es propuesta por Gill (1977), quien considera que el almacenamiento S en la ecuación (3.3) es absoluto (es decir, se toma en cuenta el almacenamiento inicial en el depósito al comenzar la avenida) . Los valores prácticos del almacenamiento que se miden normalmente son relativos (los producidos únicamente por los gastos de entrada y de salida, si tomar en cuenta el valor inicial del almacenamiento). De acuerdo con la ecuación (3.3), si los valores absolutos del almacenamiento se dibujan contra los valores $[XI + (1 - X)O]$, pueden ajustarse a una recta que pase por las posiciones medias de los puntos dibujados, con ordenada al origen nula. Si los valores de almacenamiento son relativos, la línea recta no pasará por el origen; de acuerdo con lo anterior la ecuación (3.10) se expresa:

$$S = K[XI + (1 - X)O] + \sigma \quad (3.11)$$

donde:

S almacenamiento relativo

σ diferencia entre los almacenamientos relativo y absoluto

Haciendo $A = KX$ y $B = K(1 - X)$ y sustituyendo en la ecuación (3.11):

$$S = AI + BO + \sigma \quad (3.12)$$

Se deben determinar los valores de A , B y σ para ajustar la posición de la línea recta, de manera que el ancho del lazo sea mínimo.

Llamando δ al error entre el valor real y el calculado de S , tal que :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= S_1 - (AI_1 + BO_1 + \sigma) \\ \delta_2 &= S_2 - (AI_2 + BO_2 + \sigma) \\ &\vdots \\ \delta_N &= S_N - (AI_N + BO_N + \sigma) \end{aligned}$$

El método de mínimos cuadrados pretende minimizar la suma de los cuadrados del error, dada por:

$$\sum_i^N \delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2 \quad (3.13)$$

donde :

N número de datos disponibles

La minimización se logra derivando parcialmente con respecto a cada variable, con lo cual se obtienen las ecuaciones normales siguientes:

$$\begin{aligned} A \sum_1^N I + B \sum_1^N O + N\sigma &= \sum_1^N S \\ A \sum_1^N I^2 + B \sum_1^N OI + \sigma \sum_1^N I &= \sum_1^N SI \\ A \sum_1^N IO + B \sum_1^N O^2 + \sigma \sum_1^N O &= \sum_1^N OS \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cuando se determinan los valores de A y B de las ecuaciones (3.14), se calculan los valores de K y X a partir de:

$$X = \frac{\frac{A}{B}}{1 + \frac{A}{B}} \quad (3.15)$$

$$K = A + B \quad (3.16)$$

Un segundo criterio en la aplicación de este método es propuesto por Aldama (1987), consiste en desprestigiar el valor de σ en la ecuación (3.12), además de considerar a S como el almacenamiento absoluto, teniéndose:

$$S = AI + BO \quad (3.17)$$

Aldama (1987), define al error en un instante j como:

$$\varepsilon_j = AI_j + BO_j - S_j \quad (3.18)$$

La suma de los cuadrados de los errores resulta:

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 = \sum_1^N (AI + BO_j - S_j)^2 \quad (3.19)$$

Para minimizar la ecuación (3.19), ésta se deriva parcialmente con respecto a A y B :

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_j^2}{\partial A} = 0 = 2 \sum (AI_j + BO_j - S_j)(I_j) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon_j^2}{\partial B} = 0 = 2 \sum (AI_j + BO_j - S_j)(O_j) \quad (3.21)$$

Las ecuaciones (3.20) y (3.21) forman el sistema de ecuaciones siguiente:

$$A \sum I_j^2 + B \sum O_j I_j = \sum S_j I_j \quad (3.22)$$

$$A \sum I_j O_j + B \sum O_j^2 = \sum S_j O_j$$

Cuya solución es:

$$A = \frac{\sum S_j I_j \sum O_j^2 - \sum S_j O_j \sum I_j O_j}{\sum I_j^2 \sum O_j^2 - (\sum I_j O_j)^2} \quad (3.23)$$

$$B = \frac{\sum I_j^2 \sum S_j O_j - \sum S_j I_j \sum I_j O_j}{\sum I_j^2 \sum O_j^2 - (\sum I_j O_j)^2} \quad (3.24)$$

Con los valores de A y B calculados con las ecuaciones (3.23) y (3.24), se determinan los parámetros X y K utilizando las ecuaciones (3.15) y (3.16).

Otro ejemplo de obtención de los parámetros del método de Muskingum aplicando mínimos cuadrados es aquél que incorpora aportes laterales, propuesto por O'Donnell (1985), este modelo supone que la cantidad de aporte lateral es directamente proporcional al flujo de entrada; es similar a los métodos anteriores y sus ecuaciones pueden consultarse en el Anexo 2 de este trabajo.

B) Método de optimización directa de los coeficientes de tránsito (Escalante, 1990)

Un método directo propuesto por Stephenson (1978) es la obtención de los coeficientes C_0 , C_1 y C_2 del método de Muskingum sin calcular primero K y X . El procedimiento se basa en minimizar la función de error, resultado de la comparación de un hidrograma de salida transitado con un hidrograma de entrada registrado. La función de error puede definirse, por ejemplo, como la suma de los valores absolutos de los errores en diferentes puntos de observación; dependiendo de la forma en que se defina dicha función serán distintos los resultados.

En este método no se obtienen primero los valores de K y X comparando el almacenamiento en el tramo con $K[XI + (1 - X)O]$ sino que es posible resolver directamente para C_0 , C_1 y C_2 tomando en cuenta que:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (3.25)$$

Además:

$$X = \frac{C_1 + 0.5C_2 - 0.5}{C_1 + C_2} \quad (3.26)$$

$$K = \frac{\Delta t(C_1 + C_2)}{(1 - C_2)} \quad (3.27)$$

En las ecuaciones (3.25) a la (3.27) las incógnitas son positivas lo cual implica que no se pueden aplicar las técnicas de programación lineal. Para superar esta situación la ecuación (3.6), que define el tránsito paso a paso, se expresa de la manera siguiente :

$$C_1(I_2 - I_1) + C_2(I_2 - O_1) = I_2 - O_2 \quad (3.28)$$

La coeficientes C_1 y C_2 se determinan comparando los gastos de un hidrograma conocido de entradas con los gastos del correspondiente hidrograma de salida.

De esta manera se obtienen gastos de salida para distintos intervalos de tiempo, en términos de los coeficientes desconocidos y se comparan los gastos de salida calculados con los registrados; la diferencia entre la el gasto de salida calculado y el registrado será el error en cualquier instante. De la ecuación (3.28), el error en el intervalo de tiempo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ es:

$$C_1(I_{n+1} - I_n) + C_2(I_{n+1} - O_n) - I_{n+1} + O_{n+1} \quad (3.29)$$

Llamando U_n al error positivo y denotando al error negativo como $-V_n$, puede escribirse:

$$C_1(I_{n+1} - I_n) + C_2(I_{n+1} - O_n) + U_n - V_n = (I_{n+1} - O_{n+1}) \quad (3.30)$$

Se obtienen N ecuaciones correspondientes a n intervalos de tiempo.

Si el proceso de optimización no permite variables negativas, los valores de U_n y V_n , se supondrán iguales a cero.

Los valores de $(I_{n+1} - I_n)$, $(I_{n+1} - O_n)$ y de $(I_{n+1} - O_{n+1})$ se calculan a partir de los valores conocidos I_{n+1} , I_n , O_n y O_{n+1} conocidos en cada intervalo.

Se busca minimizar la suma de los valores absolutos del error en cada intervalo de tiempo:

$$\sum_{n=1}^N \min(U_n + V_n) \quad (3.31)$$

También se puede minimizar el valor absoluto del máximo error.

Se tienen las siguientes restricciones para minimizar el valor absoluto del máximo error (X):

$$\begin{aligned} C_1(I_{n+1} - I_n) + C_2(I_{n+1} - O_n) - X &\leq I_{n+1} - O_{n+1} \\ C_1(I_{n+1} - I_n) + C_2(I_{n+1} - O_n) + X &\geq I_{n+1} - O_{n+1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

C) Método de las funciones de núcleo (Escalante, 1990)

Este procedimiento se basa en el hecho de que un sistema lineal se puede caracterizar mediante una función simple denominada núcleo. Dicha función es la respuesta del sistema analizado a una excitación particular. En realidad es la respuesta a un impulso unitario (también conocido como Función Delta de Dirac). Otras excitaciones particulares de interés son los pulsos unitarios, los cuales se emplean en la teoría del Hidrograma Unitario, así como el paso unitario.

En la Figura 3.4 se ilustran ejemplos de estas relaciones excitación-respuesta.

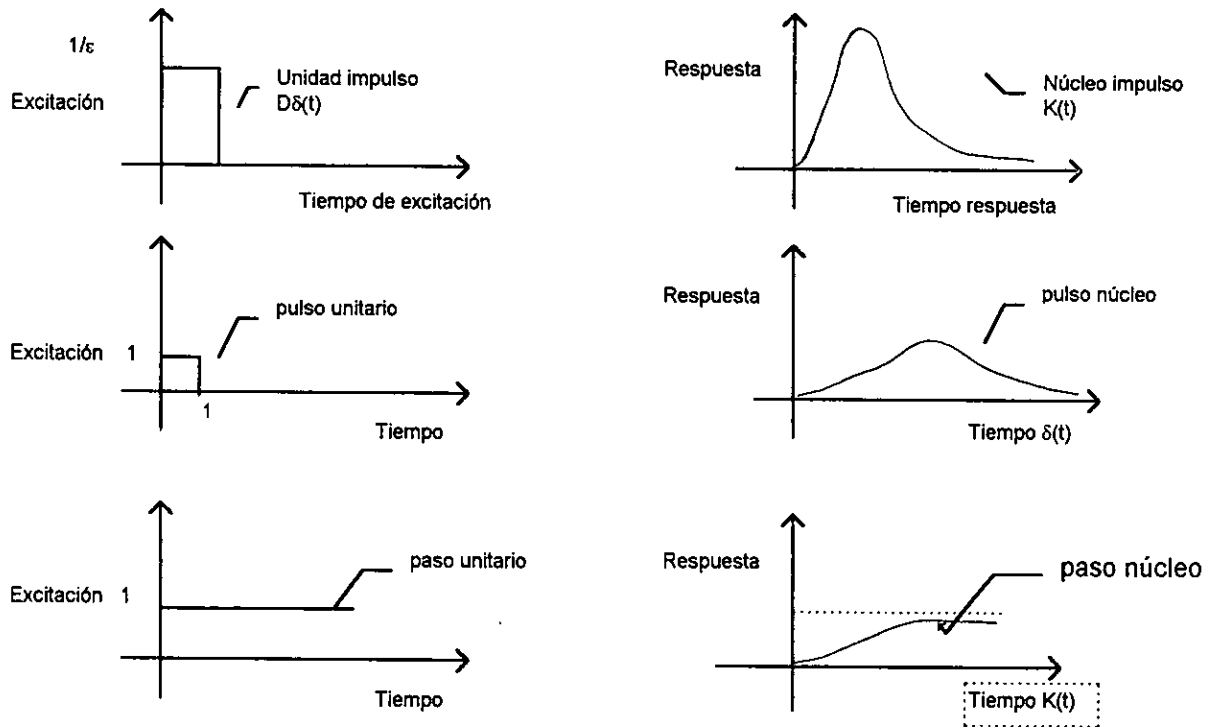


Figura 3.4 Excitaciones especiales y sus correspondientes respuestas núcleo

Los parámetros K y X se pueden estimar a partir de un método similar al de momentos utilizado en estadística. El procedimiento matemático es casi idéntico pero la interpretación es distinta en virtud de que no se analizan variables aleatorias.

Si se calculan los momentos de la respuesta a una secuencia generalizada de pulsos de magnitud $I(\nu)$, por el método de superposición de causas y efectos, el momento general de primer orden de la respuesta es:

$$M_1 = K \sum_{n=1}^N I(n) + \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2} \right) I(n) \quad (3.33)$$

por lo tanto:

$$K = \frac{M_1 - \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) I(n)}{\sum_{n=1}^N I(n)} \quad (3.34)$$

El momento general de primer orden de la respuesta se expresa también en términos de $O(n)$:

$$M_1 = \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{O(n) + O(n+1)}{2}\right) \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.34) se obtiene al parámetro K en función de los gastos de entrada $I(n)$ y de salida $O(n)$:

$$K = \frac{\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{O(n) + O(n+1)}{2}\right) - \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) I(n)}{\sum_{n=1}^N I(n)} \quad (3.36)$$

El segundo momento, el cual se calcula con base en los gastos de salida $O(n)$, es:

$$M_2 = \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{O(n) + O(n-1)}{2}\right) \quad (3.37)$$

el momento general de segundo orden es de la forma:

$$M_2 = \left(2K^2(1-x) + \frac{1}{12}\right) \sum_{n=1}^N I(n) + 2K \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) I(n) + \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 I(n) \quad (3.38)$$

Igualando las ecuaciones (3.37) y (3.38) es posible determinar al parámetro X a partir de la ecuación siguiente:

$$2K^2(1-X) + \frac{1}{12} = \frac{\sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{O(n) + O(n+1)}{2} - I(n)\right) - 2K \sum_{n=1}^N \left(n - \frac{1}{2}\right) I(n)}{\sum_{n=1}^N I(n)} \quad (3.39)$$

Los valores de K y X que se obtienen a partir de las ecuaciones (3.36) y (3.39) son sesgados, razón por la cual se corrigen de la manera siguiente:

$$K_{corr} = 1.15K - 0.04 \quad (3.40)$$

por otra parte, para obtener el valor corregido de X se utiliza el siguiente valor de K en la ecuación (3.39):

$$K_x = 0.98K + 0.10 \quad (3.41)$$

Calculados K_{corr} y X_{corr} se efectúa el tránsito de la avenida de interés por el método de Muskingum usual, no obstante, es posible realizar una modificación a este método que consiste en obtener las funciones núcleo del método de Muskingum como:

$$\delta_m(1) = 1 - \frac{e^{-\frac{1}{K(1-X)}}}{1-X} \quad (3.42)$$

$$\delta_m(n) = \frac{1}{1-X} e^{-\frac{1}{K(1-X)}} e^{-\frac{n}{K(1-X)}} \quad (3.43)$$

Una vez identificadas las ordenadas δ_i , el tránsito se realiza aplicando convolución a dichas ordenadas relacionándolas con los gastos de entrada con la finalidad de obtener los gastos de salida del tramo a partir de la igualdad:

$$O(n) = \sum_{v=1}^n \delta_n(n-v+1)I(v) \quad (3.44)$$

De acuerdo con la teoría del Hidrograma Unitario se establece que $I(v)$ es el gasto promedio de entrada al tramo de análisis durante el intervalo $n-1 \leq t \leq n$ y $O(n)$ es el gasto instantáneo de salida del tramo en el instante n .

Es posible que el primer núcleo discreto de Muskingum $\delta(1)$ sea negativo; lo anterior ocurre cuando se tenga la condición siguiente:

$$\frac{1}{K} < [1-X] \ln\left(\frac{1}{1-X}\right) \quad (3.45)$$

es decir, si K (tiempo de retraso) es mayor que 1 (incremento de tiempo seleccionada). Se recomienda escoger un incremento de tiempo mayor o igual que $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{3}$ de K para evitar el problema mencionado.

D) Método de Overton (Escalante, 1990)

Este método propuesto por Overton (1966) permite determinar los parámetros K y X con base en las consideraciones siguientes:

1) El hidrograma de entrada se considera triangular y se representa por:

$$I = \frac{I_p}{t_p} t = I^* t \quad (3.46)$$

aplicable para $0 \leq t \leq t_p$ (rama ascendente).

$$I = \frac{I_p}{t_p} (2t_p - t) = I^* (2t_p - t) \quad (3.47)$$

Válida para $t_p \leq t \leq 2t_p$ (rama descendente).

En las ecuaciones (3.46) y (3.47):

I_p gasto pico de entrada.

t_p tiempo pico del hidrograma de entrada.

2) K es más pequeño que el tiempo de pico t_p correspondiente al hidrograma de entrada.

Combinando las ecuaciones (3.1) y (3.3):

$$I - O = KX \frac{dI}{dt} + K(1 - X) \frac{dO}{dt} \quad (3.48)$$

o bien:

$$\frac{dO}{dt} + \frac{O}{K(1 - X)} = \frac{I}{K(1 - X)} - \left[\frac{X}{1 - X} \right] \frac{dI}{dt} \quad (3.49)$$

La ecuación (3.49) se integra para los intervalos: $0 \leq t \leq t_p$ y $t_p \leq t \leq 2t_p$.

La solución correspondiente al primer intervalo, en el cual las entradas están representadas por la ecuación (3.46), es:

$$O = I^* \left[t - K \left(1 - e^{-\frac{t}{K(1-X)}} \right) \right] \quad (3.50)$$

y para el segundo intervalo, en el que el gasto de entrada está dado por la ecuación (3.47), la solución es:

$$O = I^* \left[2t_p - t + K - K \left(2 - e^{-\frac{t_p}{K(1-X)}} * e^{-\frac{-(t-t_p)}{K(1-X)}} \right) \right] \quad (3.51)$$

Las ecuaciones (3.50) y (3.51) representan el hidrograma de salida correspondientes a un hidrograma de entrada simplificado (en forma de triángulo isósceles) que es transitado a través de un tramo.

El tiempo de pico de salida T_p , correspondiente al gasto pico de salida O_p , puede obtenerse derivando e igualando a cero la ecuación (3.51), resultando:

$$T_p = t_p - K(1-X) \operatorname{Ln} \left(\frac{1-X}{2 - e^{-\frac{t_p}{K(1-X)}}} \right) \quad (3.52)$$

El gasto pico de salida será:

$$O_p = I^* [t_p - (T_p - t_p) + KX] \quad (3.53)$$

Debido a que este análisis se limita a casos en los que K es menor que t_p , el término exponencial en la ecuación (3.52) resulta menor que dos, de manera que dicha ecuación se reduce a:

$$T_p = t_p - K(1-X) \operatorname{Ln} \left(\frac{1-X}{2} \right) \quad (3.54)$$

En el intervalo de valores de X entre 0 y 0.5, el factor $(1-X) \operatorname{Ln} \left(\frac{1-X}{2} \right)$ varía de -0.69 a -0.73; seleccionando el valor medio que es -0.71, la ecuación (3.54) se simplifica como:

$$T_p \cong t_p + 0.71K \quad (3.55)$$

y despejando el valor de K :

$$K = \frac{T_p - t_p}{0.71} = 1.41(T_p - t_p) \quad (3.56)$$

Si los hidrogramas de entrada y salida son conocidos, K se evalúa utilizando la ecuación (3.56); dicha ecuación indica que el tiempo de pico de salida T_p depende de K sin involucrar a X ; también la ecuación (3.56) indica que K no es en realidad el tiempo de viaje de la onda de avenida por el tramo, sino que es una función del tiempo de retraso ($T_p - t_p$).

El valor de X se calcula utilizando la ecuación (3.51), de manera que:

$$X = \frac{1}{K} = \frac{O_p}{I} - t_p + (T_p - t_p) \quad (3.57)$$

o bien:

$$X = 0.71 - \frac{t_p}{K} \left[\frac{I_p - O_p}{I_p} \right] \quad (3.58)$$

A partir de la ecuación (3.58) se observa que X es función de K , de un porcentaje de la atenuación $\frac{(I_p - O_p)}{I_p}$, así como del tiempo de pico t_p del hidrograma de entrada.

3.1.2 Método de Muskingum de tránsito del segmento de cresta (Viessman, 1989)

En ocasiones se desea resolver para un solo gasto de salida o transitar solamente una porción de un hidrograma de entrada por el método de Muskingum (por ejemplo, el segmento de la cresta cuando únicamente se necesita conocer el gasto de salida máximo). Esto se logra de manera muy sencilla nombrando en forma sucesiva a los gastos de entrada como $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n, I_{n+1}$ y reescribir la ecuación (3.6) como:

$$O_n = C_0 I_n + C_1 I_{n-1} + C_2 O_{n-1} \quad (3.59)$$

donde:

O_n gasto de salida en cualquier tiempo n

El gasto O_{n-1} se elimina de la ecuación (3.59) haciendo la sustitución:

$$O_n = C_0 I_n + C_1 I_{n-1} + C_2 O_{n-2} \quad (3.60)$$

Sustituyendo la ecuación (3.60) en la (3.59) y haciendo nuevos cambios de los valores O_{n-2}, O_{n-3}, \dots , de tal manera de eliminarlos, es posible expresar a O_n en función únicamente de los primeros n valores del gasto de entrada:

$$O_n = K_1 I_n + K_2 I_{n-1} + K_3 I_{n-2} + K_n I_1 \quad (3.61)$$

donde:

$$\begin{aligned} K_1 &= C_0 \\ K_2 &= C_0 C_2 + C_1 \\ K_3 &= K_2 C_2 \\ &\vdots \\ K_i &= K_{i-1} C_2 \\ \text{para} \\ &i)2 \end{aligned}$$

3.1.3 Método Convexo del Servicio de Conservación de Suelos (SCS) (Viessman, 1989)

El Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos desarrolló una técnica de tránsito en canales utilizando coeficientes, similar al método de Muskingum, en su Manual de Ingeniería Nacional, el cual se ha utilizado generalmente en planeación y diseño, lográndose aplicar exitosamente incluso cuando existe poca información de datos de almacenamiento del tramo analizado.

La ecuación de recurrencia del método se obtiene a partir del análisis de la Figura 3.5.

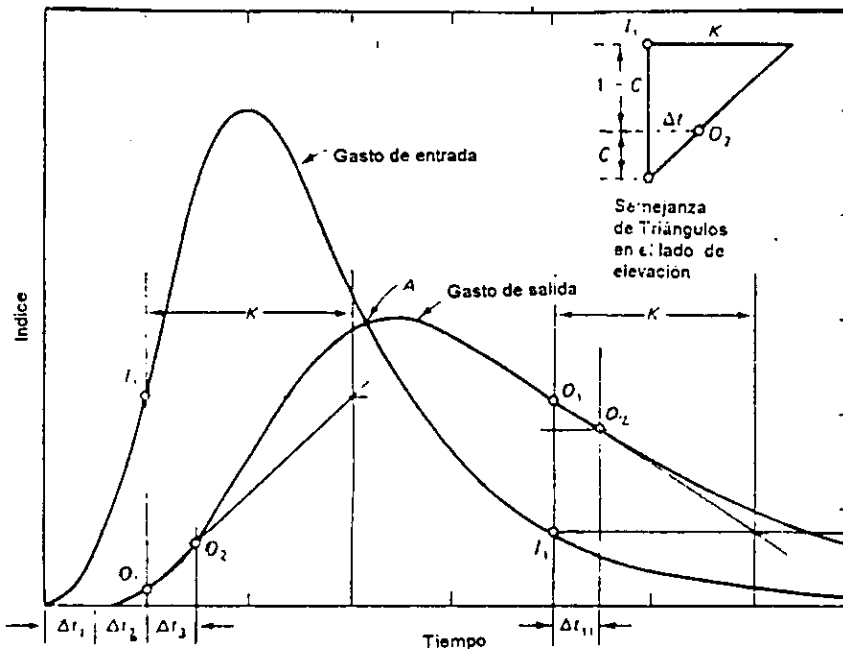


Figura 3.5 Relaciones geométricas utilizadas en el método convexo de tránsito del SCS (de acuerdo con el Servicio de Conservación de suelos de E.U.)

Debido a que las áreas bajo las dos curvas son iguales y dado que el gasto de salida máximo es menor y ocurre posteriormente que el gasto máximo de entrada, las curvas se cortan en el punto A, lo cual implica que el valor O_2 siempre caerá entre I_1 y O_1 . En cualquier instante, la distancia vertical de O_2 por arriba de O_1 (o por abajo de O_1 a la derecha de A) es una fracción C_t de la diferencia $I_1 - O_1$ como se muestra en el extremo superior derecho de la Figura 3.5. Por semejanza de triángulos:

$$O_2 = O_1 + C_t(I_1 - O_1) \quad (3.62)$$

Esta relación se utiliza para transitar el hidrograma de entrada completo si se conoce el valor de C_t .

De la ecuación (3.62):

$$C_t = \frac{O_2 - O_1}{I_1 - O_1} \quad (3.63)$$

Debido a que Δt es un cateto del triángulo indicado en el extremo superior derecho de la Figura 3.5:

$$\frac{\Delta t}{k} = \frac{O_2 - O_1}{I_1 - O_1} \quad (3.64)$$

Donde la constante k es el tiempo medido horizontalmente desde O_1 a la intersección de la recta que pasa por O_1 y O_2 con la recta horizontal trazada desde I_1 .

Entonces C_t es función tanto de Δt como de k , es decir:

$$C_t = \frac{\Delta t}{k} \quad (3.65)$$

El método es aplicable solamente si O_2 siempre está entre O_1 e I_1 , como lo indica la Figura 3.5, lo cual se logra a partir de la teoría matemática surgida del análisis de conjuntos convexos, lo que explica el nombre dado a este método; además C_t debe estar comprendido entre 0.0 y 1.0, lo que se consigue con la selección de Δt .

k es un parámetro de almacenamiento que tiene unidades de tiempo y puede aproximarse con el valor de la K del método de Muskingum. De manera similar, C_t es aproximadamente el doble de la X del método de Muskingum.

Otra estimación de k se obtiene dividiendo la longitud del tramo analizado por la velocidad de onda (estimada del Cuadro 3.1), o bien pueden utilizarse medidas reales del tiempo de recorrido por el tramo. La ecuación (3.65) puede resolverse para encontrar C_t .

El valor recomendado por el SCS, cuando no se realicen otras estimaciones es:

$$C_t = \frac{V}{V + 1.7} \quad (3.66)$$

donde:

V velocidad para una descarga establecida representativa, en la ecuación (3.66) debe sustituirse en pies/s. Si se usa en m/s, en lugar de 1.7 en el denominador se utiliza 0.51816.

$V+1.7$ aproximación de la celeridad (velocidad) de una onda cinemática que viaja a través de la sección, en pies/s o bien $V+ 0.51816$ en m/s.

El tránsito de la avenida se realiza con sencillez una vez que es estimado el valor de C_t .

El incremento Δt debe ser menor o igual que un quinto del tiempo pico del hidrograma de entrada para asegurar un número suficiente de gastos de salida calculados para definir el hidrograma. Como en todos los métodos de tránsito de avenidas, el incremento del tiempo debe seleccionarse de manera que un punto caiga en el punto máximo o cerca del mismo y de otros puntos de cambio rápido en el hidrograma.

A diferencia de otros métodos de tránsito, la ecuación del método convexo para O_2 es independiente de I_2 , de esta manera el procedimiento puede utilizarse para pronosticar el gasto de salida de un tramo sin conocer el gasto de ingreso en el instante de análisis. Lo anterior resulta en un método para cálculos de pronóstico y prevención de avenidas. Se pueden unir registradores de gasto a través de microprocesadores para sistemas de alerta que calculen los potenciales de la avenida aguas abajo al menos un intervalo de tiempo completo de tránsito antes de la avenida.

El procedimiento se invierte para encontrar el hidrograma de entrada a partir de un hidrograma de salida dado, o bien transitarse una curva masa acumulativa de gasto de entrada al tramo analizado en lugar del propio hidrograma de entrada.

3.1.4 Método de Muskingum-Cunge (Viessman, 1989)

Varios intentos de superar las limitaciones del método de Muskingum no han sido del todo exitosas debido a lo complicado de los cálculos o dificultades en la interpretación física de los parámetros del tránsito. Los parámetros de Muskingum son mejores cuando se obtienen de mediciones del flujo y no se relacionan fácilmente con las características del cauce.

Cunge(1969), mezcló la precisión del método de difusión (método hidráulico de tránsito) con la sencillez del de Muskingum, resultando uno de las técnicas más recomendadas para uso general. Se clasifica como un método hidrológico, aunque de acuerdo con la información requerida y su algoritmo es de tipo combinado -hidrológico e hidráulico-) y proporciona resultados comparables con los de métodos hidráulicos. Domínguez, et al, 1994, menciona que el esquema de Muskingum-Cunge es una aproximación de segundo orden a la ecuación de advección-difusión, al cumplirse ciertas restricciones en sus parámetros.

Cunge demostró que el esquema en diferencias finitas de la ecuación de Muskingum se convierte en la ecuación de difusión, si los parámetros de ambos métodos son relacionados de manera adecuada. De la ecuación de continuidad en forma diferencial y la ecuación (3.3), la de Muskingum es igual a:

$$K \frac{d}{dt} [XI + (1-X)O] = \bar{I} - \bar{O} \quad (3.67)$$

Sustituyendo Q_i en lugar de I y Q_{i+1} en lugar de O , y reescribiendo utilizando un esquema de diferencias finitas se obtiene:

$$\frac{K}{\Delta t} [XQ_i^{t+1} + (1-X)Q_{i+1}^{t+1} - XQ_i^t - (1-X)Q_{i+1}^t] = \frac{1}{2}(Q_i^{t+1} - Q_{i+1}^{t+1} + Q_i^t - Q_{i+1}^t) \quad (3.68)$$

Si K se hace igual a $\frac{\Delta x}{c}$, la ecuación (3.68) es también el esquema en diferencias finitas de la ecuación de onda cinemática:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.69)$$

y puede derivarse combinando las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento. La variable Δx representa un incremento de la distancia a lo largo de un eje con la dirección de la corriente.

La ecuación que se utiliza para el tránsito de avenidas se determina de la ecuación (3.68) resolviendo para el gasto de salida desconocido, tomando en cuenta que $I = Q_i$ y $O = Q_{i+1}$:

$$O^{t+1} = C_0 I^{t+1} + C_1 I^t + C_2 O^t \quad (3.70)$$

donde:

$$C_0 = \frac{\frac{\Delta t}{K} - 2X}{2(1-X) + \frac{\Delta t}{K}} \quad (3.71)$$

$$C_1 = \frac{\frac{\Delta t}{K} + 2X}{2(1-X) + \frac{\Delta t}{K}} \quad (3.72)$$

$$C_2 = \frac{2(1-X) - c \frac{\Delta t}{\Delta x}}{2(1-X) + \frac{\Delta t}{K}} \quad (3.73)$$

$t, t+1$ superíndices correspondientes a los instantes t y $t+1$ respectivamente

Debido a que $K = \frac{\Delta x}{c}$ representa el tiempo que una onda tarda en transitar por el tramo una longitud Δx , moviéndose con una velocidad c , Cunge demuestra que la velocidad c es la celeridad de una onda cinemática (Cuadro 3.1).

Cuando $X=0.5$ y $c \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1.0$, la ecuación de tránsito produce traslación sin atenuación.

Cuando $\Delta x = 0$ (longitud de tramo nula), no ocurre traslación ni atenuación.

Si se cuenta con registros históricos de una avenida, el parámetro de tránsito c puede obtenerse invirtiendo los cálculos del tránsito. Los parámetros también se estiman a partir de mediciones de gasto y del cauce.

El valor de X que se usa en el Método de Muskingum-Cunge es:

$$X = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q_0}{S_0 c \Delta x} \right) \quad (3.74)$$

donde:

S_0 pendiente de la plantilla del canal (adimensional)

q_0 gasto unitario (por unidad de ancho) descargado, normalmente es obtenido para el gasto máximo de entrada

El valor de la celeridad c puede estimarse como una función de la velocidad media V :

$$c = mV \quad (3.75)$$

donde:

V es la velocidad media e igual a $\frac{Q}{A}$

m constante e igual a 5/3 para canales naturales muy anchos

El coeficiente m proviene de la ecuación de flujo uniforme:

$$Q = bA^m \quad (3.76)$$

La cual al derivarla parcialmente con respecto a A resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = mbA^{m-1} = m \frac{bA^m}{A} = m \frac{Q}{A} = mV \quad (3.77)$$

Multiplicando (3.77) en ambos miembros de la ecuación de continuidad expresada como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.78)$$

Se obtiene la ecuación (3.69) si se hace $c=mV$. El coeficiente m se determina con la ecuación (3.76) si se conocen datos de descarga. Valores para canales con sección transversal usual se dan en el Cuadro 3.1.

El tránsito se puede realizar considerando a m y a c constantes (utilizando una sola velocidad media V) o bien suponiendo dichos parámetros como variables (usando en cada instante un nuevo valor de V). El valor c se obtiene de la ecuación (3.75), el valor de X se determina de la ecuación (3.74) y las ecuaciones (3.71) a (3.73) se usan con $K = \frac{\Delta x}{c}$.

Al utilizar este método, los valores de Δx y Δt deben seleccionarse de manera que se asegure que los detalles de la onda de flujo se transitan adecuadamente. El tiempo para el gasto máximo de entrada se divide en cinco o diez intervalos. Para conseguir una solución tanto en tiempo como en espacio, la longitud total del tramo debe dividirse en varias secciones de longitud Δx ; el gasto de salida de una sección se toma como gasto de entrada en la sección siguiente.

El valor de C_1 siempre es positivo, C_2 puede ser positivo o negativo sin que exista problema; C_0 en la práctica se procura que siempre sea positivo; a partir de la ecuación (3.71) se observa que se evitan valores negativos de C_0 cuando:

$$\frac{\Delta t}{K} > 2X \quad (3.79)$$

El método de Muskingum Cunge ha sido estudiado ampliamente por Salas (1995) en lo que se refiere a un análisis de sensibilidad y sus límites de aplicación; su trabajo incluye un programa de cómputo para efectuar el tránsito de avenidas en cauces. Este método también fue analizado por Aguilar (1995), el cual encuentra inconvenientes en las suposiciones de Cunge y propone un método que combina aspectos hidrológicos e hidráulicos llamado Advección-Difusión, por medio del cual los parámetros obtenidos por calibración a partir de una avenida conocida se corrigen con fines de predicción; el autor realiza comparaciones con el método de Muskingum y concluye que su método proporciona el mejor resultado en lo que se refiere a predicción de avenidas distintas a la utilizada con fines de calibración del modelo.

3.1.5 Método de Kulandaiswamy-Krishnaswami-Ramalingam (Kulandaiswamy et al, 1967)

Los métodos hidrológicos para el tránsito de avenidas, como se ha visto, se basan en la ecuación de continuidad y utilizan expresiones para el almacenamiento como las siguientes:

$$S = KO \quad (3.80)$$

$$S = K[XI + (1 - X)O] \quad (3.81)$$

$$S = KO^n \quad (3.82)$$

con la finalidad de eliminar incógnitas, pero dichas expresiones no toman en cuenta los efectos de inestabilidad de los gastos de entrada y de salida; las suposiciones y aproximaciones que se hacen al aplicar estas expresiones se traducen en una simplificación excesiva del problema real.

Kulandaiswamy (1967), plantea la siguiente ecuación para el almacenamiento, mucho más general:

$$S = \sum_{m=1}^M a_{m-1} \frac{d^{m-1}O}{dt^{m-1}} + \sum_{n=1}^N b_{n-1} \frac{d^{n-1}I}{dt^{n-1}} \quad (3.83)$$

Donde :

a y b coeficientes que pueden ser constantes o funciones de variables que incluyen al gasto de entrada I y de salida O . Si los coeficientes a y b son constantes o funciones del tiempo, la ecuación de almacenamiento (3.83) es lineal, pero si uno o más de estos coeficientes son funciones de O , I y sus derivadas, entonces la ecuación es no lineal.

Los valores de M y N dependen del orden de las derivadas con respecto al tiempo de O e I que se necesiten considerar.

Utilizando diferencias hacia atrás, la ecuación de continuidad se puede escribir en diferencias finitas como:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{t=j\Delta t} = \left(\frac{I_j + I_{j-1}}{2}\right) - \left(\frac{O_j + O_{j-1}}{2}\right) \quad (3.84)$$

Si los coeficientes a y b se suponen constantes en la ecuación (3.83), y se sustituye expresándola en diferencias hacia atrás en la ecuación de continuidad y reacomodando los términos del gasto de entrada y de salida, se obtiene la ecuación siguiente :

$$O_j = \sum_{x=1}^M (-1)^{x+1} A_{x-1} O_{j-x} + \sum_{x=1}^N (-1)^{x+1} B_{x-1} I_{j-x} + \frac{1}{2k} (CI_j + I_{j-1} - O_{j-1}) \quad (3.85)$$

donde:

$$A_x = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M-x-1} \frac{a_{r+x}}{(\Delta t)^{r+x+1}} \binom{r+x+1}{r}$$

$$B_x = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{N-x-1} \frac{b_{r+x}}{(\Delta t)^{r+x+1}} \binom{r+x+1}{r}$$

y :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$k = \frac{1}{2} + \sum_{r=0}^{M-1} \frac{a_r}{(\Delta t)^{r+1}}$$

$$C = 1 - 2 \sum_{r=0}^{N-1} \frac{b_r}{(\Delta t)^{r+1}}$$

La ecuación (3.85) indica que el gasto de salida al final del intervalo j -ésimo puede calcularse si se conocen los valores del gasto de salida para M intervalos de tiempo antes del j -ésimo así como los valores del gasto de entrada para $N+1$ intervalos tanto anteriores como el propio valor del gasto de entrada del j -ésimo intervalo.

Se verifica la utilidad de la ecuación (3.85) aplicándola en tramos de un canal en el que se cuente con registros históricos de gasto de entrada y salida de una avenida, comparando los resultados calculados con los observados. Para que se pueda aplicar este método en casos reales, se necesita determinar los valores de M y N que se utilicen y posteriormente obtener los coeficientes a y b .

Si a y b se suponen constantes, una forma de obtener sus valores es aplicando el método de mínimos cuadrados, si se fijan M y N . Tomando algunos términos de la ecuación (3.83) se obtienen las siguientes ecuaciones para el almacenamiento:

$$S = a_0 O \quad (3.86)$$

$$S = a_0 O + a_1 \frac{dO}{dt} + a_2 \frac{d^2 O}{dt^2} \quad (3.87)$$

$$S = a_0 O + a_1 \frac{dO}{dt} + b_0 I \quad (3.88)$$

$$S = a_0 O + a_1 \frac{dO}{dt} + b_0 I + b_1 \frac{dI}{dt} \quad (3.89)$$

Al Aplicar los autores estas ecuaciones a datos de tres avenidas conocidas, determinaron los coeficientes a y b por mínimos cuadrados, obtuvieron que la ecuación (3.88) proporciona resultados satisfactorios respecto a los valores observados. La precisión de los resultados no es significativamente mayor si se toman derivadas de orden superior a $M=2$ y $N=1$.

Utilizando $M=2$ y $N=1$ la ecuación (3.85) se reduce a:

$$O_j = A O_{j-1} + B O_{j-2} + C I_j + D I_{j-1} \quad (3.90)$$

donde:

$$A = \frac{2a_1 + a_0 \Delta t - \frac{1}{2} (\Delta t)^2}{a_1 + a_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}$$

$$B = \frac{-a_1}{a_1 + a_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}$$

$$C = \frac{-b_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}{a_1 + a_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}$$

$$D = \frac{b_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}{a_1 + a_0 \Delta t + \frac{1}{2} (\Delta t)^2}$$

Cuando se aplican estas ecuaciones en el tránsito de una avenida en la que existen registros históricos, resulta que los valores obtenidos por este método proporcionan coeficientes de correlación cercanos a la unidad. Al hacer comparaciones de estos resultados con los proporcionados por el método de Muskingum, se ha verificado que los de Kulandaiswamy-Krishnswami-Ramalingam se aproximan más a los valores observados (incluyendo puntos importantes como es el gasto máximo de salida).

Se observa como ventaja de este método respecto al de Muskingum, el hecho de que los coeficientes a y b se obtienen por un método directo y sencillo como el de mínimos cuadrados, eliminando los procesos iterativos, mientras que los parámetros X y K del método de Muskingum si bien se pueden determinar por este método, los resultados no son tan buenos si se comparan con aquellos que se logran con procedimientos de prueba y error, pero estos procesos implican que para un mismo problema pueden obtenerse valores diferentes de X y K .

Debe considerarse que en las ecuaciones (3.86) a (3.89) se consideran constantes los valores de los coeficientes a y b , además el modelo sólo se ha estudiado para tres avenidas. Es conveniente un análisis más completo, en numerosos registros de gastos de entrada y salida de avenidas históricas, considerando los valores a y b como funciones de los gastos de ingreso y egresos para generar ecuaciones aplicables a diferentes problemas de tránsito de avenidas a partir de las bases dadas por este método.

3.1.6 Método hidrológico semigráfico para el tránsito de avenidas en cauces (Chow, 1994)

Este método, aunque aproximado y simple, es útil para fines prácticos; se fundamenta en las suposiciones siguientes:

- a) El cauce se divide en un número de tramos relativamente cortos y con características físicas constantes; el tramo más corto puede corresponder al que se encuentre entre las dos secciones de aforo más cercanas; el tránsito de la avenida se realiza de manera sucesiva de un tramo al otro.

- b) Los gastos se determinan en intervalos de tiempo iguales ($\Delta t = \text{constante}$), el incremento o decremento del gasto de entrada y de salida se supone que varía linealmente.
- c) Los gastos de entrada y de salida se toman como una medida del almacenamiento en el tramo. La suposición anterior es válida en un canal si la longitud del tramo no es muy larga, de tal manera de asegurar que no se tengan variaciones significativas en el almacenamiento entre los niveles ascendente y descendente de la onda de avenida. Se recomienda que la longitud del tramo se seleccione aproximadamente igual al producto del tiempo del tránsito por la velocidad media del flujo en el tramo.
- d) Se pueden despreciar, si las cantidades son pequeñas: el caudal en el tramo, aportes de gasto de tributarios no aforados, aguas subterráneas, precipitación y evaporación o infiltración local. En el caso de que su magnitud sea apreciable, se introducen estas variables al flujo de entrada (aumentándolo o disminuyéndolo).

Para el tránsito de avenidas en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ con $\Delta t = t_2 - t_1$, se tiene:

I_1 y O_1 gastos de entrada y de salida correspondientes al instante t_1 .

S_1 almacenamiento en el tramo en el instante t_1 .

S_2 almacenamiento al final del intervalo.

Considerando:

$$I = \frac{I_1 + I_2}{2} \quad \text{gasto de entrada medio durante } \Delta t$$

$$O = \frac{O_1 + O_2}{2} \quad \text{gasto de salida medio durante } \Delta t$$

$$S = S_2 - S_1 \quad \text{cambio en el almacenamiento durante } \Delta t$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación de continuidad (3.1) y reordenando en forma conveniente:

$$2 \frac{S_1}{\Delta t} - O_1 + I_1 + I_2 = 2 \frac{S_2}{\Delta t} + O_2 \quad (3.91)$$

En el caso particular en que I_1 , I_2 , O_1 , O_2 se den en pies^3/s , S_1 y S_2 estén dados en acres-pies, Δt en días y tomando en cuenta que un $\text{pies}^3/\text{s} \cong 2$ acres-pies/día (apd), entonces la ecuación anterior toma una forma más simple:

$$\frac{S_1}{\Delta t} - O_1 + I_1 + I_2 = \frac{S_2}{\Delta t} + O_2 \quad (3.92)$$

Si además $\Delta t=1$ día, caso común, la ecuación será:

$$S_1 - O_1 + I_1 + I_2 = S_2 + O_2 \quad (3.93)$$

En el caso de que Δt no sea igual a un día entonces se utiliza la ecuación (3.92)

El método consiste en construir curvas auxiliares en un sistema de ejes coordenados con abscisas S , en acres-pie y ordenadas $O+S$, en pies³/s, Figura 3.6 (se indican esta unidades en el sistem inglés por las simplificaciones en las ecuaciones, si se utilizan unidades del sistema internacional las curvas serían $2S/\Delta t$ contra $O+2S/\Delta t$). Las curvas se construyen a partir de conocer dos de los siguientes datos: gasto de entrada, gasto de salida y registros históricos del almacenamiento de una avenida, el tercer dato se calcula aplicando la ecuación de continuidad (3.1).

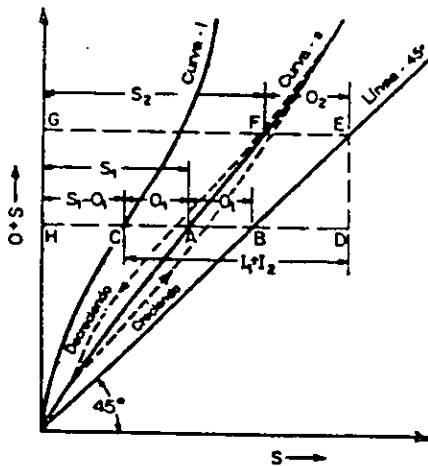


Figura 3.6 Curva auxiliar para el tránsito de avenidas, método semigráfico

El procedimiento para la construcción de las curvas auxiliares es el siguiente

1. Dibujar una recta a 45°, desde el origen del plano S contra $S+O$.
2. Dibujar S contra $O+S$, obteniendo una curva que forma un lazo, si éste no es ancho, se dibuja una curva S promedio aproximada en medio del lazo, de tal manera de representar una relación lineal entre S y $O+S$, si el lazo es ancho la curva promedio S se obtiene como se indica en la Figura 3.7, en la que también se dibuja un curva S contra $I+S$ en el segundo cuadrante, dicha curva también formará un lazo. A partir de las abscisas

correspondientes al mismo almacenamiento se trazan líneas verticales que cortan a los lazos en los puntos A, B, A' y B'. Se unen con rectas los puntos A y A' así como los puntos B y B'; la intersección de las rectas define el punto C, a partir de este punto se traza una recta horizontal que corta al segmento vertical \overline{AB} en C', punto requerido sobre la curva S promedio correspondiente al almacenamiento S' determinado. Puede demostrarse que la ordenada del punto C' es igual a la suma de S' mas un gasto Q que corresponde al promedio de los niveles de ascenso y descenso de la avenida.

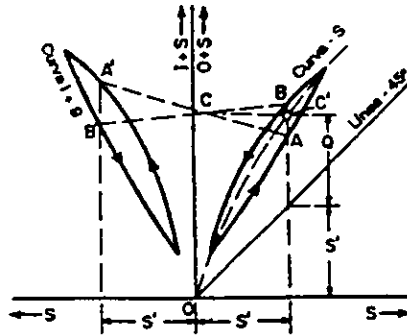


Figura 3.7 Construcción de la curva S promedio si el lazo es amplio.

- 3) Se construye la curva imagen I (Figura 3.5), cuya abscisa es igual a $S_1 - O_1$; es una imagen de la recta a 45° reflejada horizontalmente en el lado izquierdo de la curva S . Se construye tomando las distancias horizontales entre la curva S y la recta original a 45° llevando esa distancia hacia el lado izquierdo de la curva S .

La determinación del gasto de salida se lleva a cabo como sigue:

Se debe contar con el hidrograma de entrada del tramo que se va a transitar, así como las curvas auxiliares antes descritas, considerando el incremento del tiempo Δt o periodo de tránsito igual a un día:

1. El gasto de salida inicial O_1 debe conocerse o suponerse sin que por ello se cometa un error significativo.
2. Esta magnitud se lleva con una horizontal hasta que toque exactamente a la curva S y a la línea a 45° , definiéndose el segmento $\overline{AB} = O_1$, Figura 3.6.
3. Se extiende \overline{AB} hacia la izquierda hasta tocar a la curva I en C , Figura 3.6.
4. Se extiende \overline{AB} hacia la derecha hasta el punto D , de tal manera que $\overline{CD} = I_1 + I_2$ (del hidrograma de entrada).

5. Se traza una línea vertical \overline{DE} desde D hasta tocar a la recta a 45° en E .
6. Se dibuja la línea horizontal \overline{EF} desde E hacia la izquierda hasta tocar a la curva S en F .
7. La longitud del segmento \overline{EF} corresponde al valor del gasto de salida O_2 al final del intervalo.
8. Se repiten los pasos 1 al 7 sucesivamente, partiendo desde F que corresponde al punto A en el proceso anterior.

De esta manera se determinan valores consecutivos del gasto de salida, pudiéndose determinar el hidrograma correspondiente.

El procedimiento anterior para calcular el gasto de salida se demuestra a continuación:

Se prolongan los segmentos \overline{CD} y \overline{EF} hacia la izquierda hasta encontrar el eje de las ordenadas en H y G , respectivamente; se puede obtener a partir de la Figura 3.6:

$$\begin{aligned}\overline{HD} &= \overline{HA} - \overline{CA} + \overline{CD} = S_1 - O_1 + I_1 + I_2 \\ \overline{GE} &= \overline{GF} + \overline{FE} = S_2 + \overline{FE} \\ \overline{HD} &= \overline{GE}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$S_1 - O_2 + I_1 + I_2 = S_2 + \overline{FE} \quad (3.94)$$

Ecuación que comparada término a término con la (3.93) hace ver que $\overline{FE} = O_2$.

El valor de O_2 obtenido al final se puede transformar a unidades del sistema internacional.

Por tratarse de un procedimiento prácticamente manual para desarrollar el tránsito, los métodos semigráficos están sujetos a errores inherentes o propios de los datos que son errores de apreciación cuando se toman lecturas en las escalas de las gráficas que se utilizan, además de que demandan más tiempo del que se podría emplear con métodos analíticos que utilizan programas de cómputo o bien hoja de cálculo, las cuales en muchos problemas prácticos son de gran utilidad y sencillas de manejar.

3.2 Métodos hidráulicos

Los métodos hidráulicos para el tránsito de avenidas en cauces se obtienen a partir de resolver las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento (ecuaciones de Saint-Venant) correspondientes a flujo transitorio espacialmente variado; debido a que no existe una solución analítica para las mismas se utilizan procedimientos de tipo numérico, como son los esquemas en diferencias finitas tanto implícitos, como explícitos, el método de las características o el método del elemento finito, lo cual hace necesario la utilización de dispositivos de cálculo veloces y eficientes.

Estas ecuaciones también incluyen el análisis de planicies de inundación así como la consideración de términos de ingresos laterales de precipitación al tramo analizado; se pueden simplificar y utilizar para resolver problemas de tránsito en cauces.

Los métodos hidráulicos describen en forma más precisa el proceso del tránsito, tanto en el tiempo como en el espacio, pero requieren información detallada de rugosidades, geometría del cauce, condiciones de frontera además de técnicas numéricas complejas. Los principales factores que determina la selección de un método de tránsito son los datos disponibles y la información de salida que se requiere.

Ya se ha mencionado que la ecuación de continuidad establece que el cambio en el almacenamiento es igual al gasto de entrada menos el de salida; para relacionar este concepto con una sección de un cauce con condición de gasto de entrada lateral debido a precipitación, se considera un elemento diferencial de longitud Δx y ancho unitario, como se muestra en la Figura 3.8.

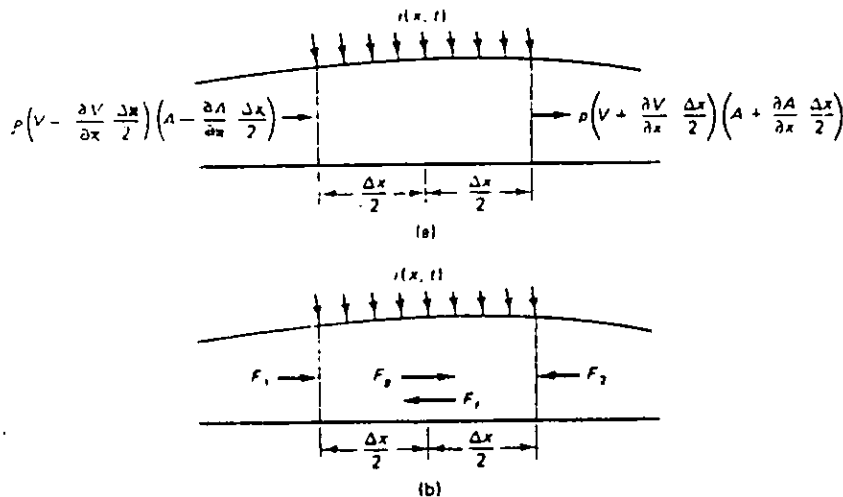


Figura 3.8 Esquema de los elementos que participan en la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento (donde ρ es la densidad del agua, V la velocidad media, y el tirante, i el gasto de entrada lateral para el elemento diferencial y S la pendiente de la plantilla del cauce

El gasto total de entrada es:

$$\rho \left(V - \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(A - \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta t + \rho \int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} i(x,t) dt dx \quad (3.95)$$

El gasto total de salida es:

$$\rho \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta t \quad (3.96)$$

El cambio en el almacenamiento es:

$$\rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \Delta t \quad (3.97)$$

En consecuencia la ecuación de continuidad resulta:

$$-\rho \left(A \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + V \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x \right) \Delta t + \rho \bar{i} \Delta x \Delta t - \rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \Delta t = 0 \quad (3.98)$$

donde \bar{i} es el gasto lateral promedio de entrada resultante de la precipitación en la longitud Δx y en el tiempo Δt .

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.98) por $\frac{1}{\rho \Delta x \Delta t}$ se obtiene la ecuación de continuidad para flujo transitorio con gasto de entrada lateral, indicada a continuación:

$$A \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = \bar{i} \quad (3.99)$$

En el caso particular de que el análisis se realice por unidad de ancho, se hace la simplificación de que $A = y$, y la ecuación (3.99) toma la forma:

$$y \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} - \bar{i} = 0 \quad (3.100)$$

Por otra parte, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo es igual al cambio en su cantidad de movimiento. La ecuación de cantidad de movimiento para flujo transitorio espacialmente variado puede obtenerse bajo las suposiciones siguientes:

- 1) El flujo es unidireccional y la velocidad es uniforme a lo largo de la sección.
- 2) La presión es hidrostática.
- 3) La pendiente de plantilla en el cauce es relativamente pequeña (ángulo de inclinación menor que ocho grados).
- 4) Puede usarse la ecuación de Manning para calcular las pérdidas por fricción debido a la rugosidad de las paredes del cauce.
- 5) El gasto lateral de entrada ingresa a la corriente sin componente de la velocidad en la dirección del flujo.
- 6) El valor de \bar{i} representa las variaciones en espacio y en tiempo del gasto de entrada lateral.

Las fuerzas que actúan sobre un elemento de longitud Δx se muestran en la Figura 3.8, F_1 y F_2 representan las fuerzas hidrostáticas sobre el elemento y se expresan como:

$$F_1 = \gamma \left[\bar{y}A - \frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \quad (3.101)$$

$$F_2 = \gamma \left[\bar{y}A + \frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right] \quad (3.102)$$

Donde \bar{y} es la distancia desde la superficie del agua al centroide del área. La fuerza hidrostática resultante es $F_1 - F_2$ o:

$$F_p = -\gamma \frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} \Delta x \quad (3.103)$$

Suponiendo que la pendiente del fondo del cauce es pequeña, la componente del peso del agua, en la dirección de la misma está dada por:

$$F_g = \gamma AS \Delta x \quad (3.104)$$

La fuerza de fricción a lo largo del fondo es igual a la pendiente de fricción S_f multiplicada por el peso del agua en un elemento Δx :

$$F_f = \gamma AS_f \Delta x \quad (3.105)$$

La derivada de la cantidad de movimiento con respecto al tiempo se expresa como:

$$\frac{d(mV)}{dt} = m \frac{dV}{dt} + V \frac{dm}{dt} \quad (3.106)$$

donde m es la masa del fluido.

Si se supone que el flujo de entrada lateral ingresa al escurrimiento sin componente de la velocidad en la dirección de éste y que \bar{i} representa las variaciones en tiempo y espacio del flujo de entrada lateral, la razón de cambio en la cantidad de movimiento para el elemento puede representarse como:

$$\frac{d(mV)}{dt} = \rho A \Delta x \frac{dV}{dt} + \rho V \bar{i} \Delta x \quad (3.107)$$

donde:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.108)$$

Por lo tanto, la razón de cambio en la cantidad de movimiento es:

$$\rho A \Delta x \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \rho V \bar{i} \Delta x \quad (3.109)$$

Estableciendo la ecuación de impulso y cantidad de movimiento y considerando todas las fuerzas externas que actúan en el elemento diferencial, puede obtenerse:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{A} \frac{\partial(\bar{y}A)}{\partial x} + \frac{V\bar{i}}{A} = g(S - S_f) \quad (3.110)$$

En el caso particular de que el análisis se realice por unidad de ancho, la ecuación (3.110) toma la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{V}{y} \bar{i} - g(S - S_f) = 0 \quad (3.111)$$

Las ecuaciones (3.99) y (3.110), o bien (3.100) y (3.111) (si el análisis es por unidad de ancho) se transforman en un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas, sujeto a condiciones de frontera apropiadas, cuyas incógnitas son V y el área A o bien V y el tirante y . La solución de estas ecuaciones es sumamente difícil sin la ayuda de un método de cálculo eficiente.

3.2.1 Método de onda cinemática, de difusión y dinámica (Viessman, 1989)

Partiendo de un análisis del cauce por unidad de ancho, si el gasto de entrada lateral i es nulo, la ecuación (3.111) puede reescribirse en términos de la pendiente de fricción como:

$$S_f = S - \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3.112)$$

donde:

S_f pendiente de fricción

S pendiente de plantilla

$\frac{\partial y}{\partial x}$ pendiente de la superficie del agua

$V \frac{\partial V}{\partial x}$ aceleración convectiva

$\frac{\partial V}{\partial t}$ aceleración local

Si se considera únicamente el primer término del segundo miembro de la ecuación (3.112), se tendrá el análisis únicamente de la onda cinemática

Si se considera hasta el segundo término del segundo miembro de la ecuación (3.112) se tendrá un análisis de la onda de difusión.

Si se consideran todos los términos de la ecuación (3.112) es una análisis de onda dinámica completa.

Los tres tipos de análisis del tránsito de avenidas en flujo transitorio aplicables en canales abiertos difieren no sólo por el número de términos considerados en la ecuación (3.112) sino también en las suposiciones con respecto a las condiciones de flujo para satisfacer la ecuación de cantidad de movimiento y calcular la pendiente de fricción; en el Cuadro 3.2 se muestran esas suposiciones.

Cuadro 3.2 Suposiciones utilizadas en distintos métodos hidráulicos de tránsito de avenidas

Método	Condición del flujo para valuar la pendiente de fricción	Perfil de la superficie del agua
De onda cinemática	permanente	uniforme
De onda de difusión	permanente	no uniforme
De onda dinámica completa	no permanente	no uniforme

Esta condición se presenta al suponer que el flujo viaja junto con la onda de avenida

El flujo permanente es aquel que no cambia con el tiempo y el flujo uniforme aquel en el cual la pendiente de la superficie libre del agua es paralela a la pendiente de plantilla. Para el caso de flujo permanente uniforme, la curva índice de descarga es una curva sencilla sin lazos. El flujo permanente no uniforme tiene descarga constante pero variación en la pendiente de la superficie libre del agua, semejante a la que se encuentra en la entrada a un depósito o en las cercanías de una cascada.

Una forma de seleccionar el método aplicable es examinar la curva índice de descarga y evaluar si es la misma para etapas ascendentes y descendentes. La selección de la

ecuación para el tránsito depende de que la diferencia sea pequeña (correspondiendo a un onda cinemática), relativamente grande (onda dinámica) o intermedia (difusión).

El método de la onda cinemática supone que la pendiente de fricción es igual a la pendiente de plantilla del cauce, despreciando los términos restantes de la ecuación (3.112). La conservación de la cantidad de movimiento es aproximada al suponer flujo permanente y uniforme; el tránsito se lleva a cabo combinando la ecuación de continuidad con cualquier ecuación para calcular pérdidas por fricción, por ejemplo, la de Manning o Chezy.

La ecuación de Chezy es:

$$V = C\sqrt{RS} \quad (3.113)$$

La ecuación de Manning es:

$$V = \frac{1}{n}R^{2/3}S^{1/2} \quad (3.114)$$

donde:

C es un coeficiente de fricción, según Chezy y n coeficiente de fricción, según Manning.

S es la pendiente de fricción

R es el radio hidráulico (igual al área entre el perímetro mojado)

V velocidad media del flujo

Cualquiera de estas ecuaciones pueden sustituirse en la parte cinemática de la ecuación (3.112), igualando la pendiente de la línea del gradiente de energía con la pendiente de plantilla para considerar la cantidad de movimiento. Cuando no existe un gasto lateral de ingreso, y si se considera que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(VA)}{\partial x} = V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x}$ la ecuación de continuidad (3.99) se expresa como:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3.115)$$

La ecuación de Manning o de Chezy tiene la forma:

$$Q = bA^m \quad (3.116)$$

Cuya derivada parcial con respecto al área es:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = bmA^{m-1} = m \frac{bA^m}{A}$$

y de acuerdo con (3.116):

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = m \frac{Q}{A} = mV \quad (3.117)$$

Multiplicando la ecuación (3.115) por $\frac{\partial Q}{\partial A}$ se obtiene:

$$mV \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (3.118)$$

O si $c=mV$, la ecuación cinemática de tránsito de avenidas es:

$$c \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (3.119)$$

La cual se resuelve utilizando diferentes métodos numéricos, por ejemplo, un esquema en diferencias finitas hacia adelante.

La celeridad c en la ecuación (3.119) es igual a mV o bien a $\frac{\partial Q}{\partial A}$. Para un canal rectangular ancho, de acuerdo con Manning, $m=5/3$, o con Chezy $m=3/2$. Valores para otras formas de canal se proporcionan en el Cuadro 3.1. La celeridad también está dada por:

$$c = \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{B} \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (3.120)$$

donde:

B ancho de superficie libre del canal.

Cuando los efectos de la pendiente de la superficie libre del agua no pueden ignorarse, se tiene un problema de flujo no uniforme y el término de la pendiente $\frac{\partial y}{\partial x}$ en la ecuación (3.112) no debe despreciarse. Esta forma ha tenido numerosas aplicaciones y en particular es útil cuando las pendientes son relativamente más horizontales que aquellas que son apropiadas para suponer onda cinemática.

La ecuación de onda de difusión, conservando la pendiente de la superficie libre del agua $\frac{\partial y}{\partial x}$, se obtiene de la manera siguiente:

Tomando hasta el segundo término de la ecuación (3.112):

$$S_f = S - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.121)$$

y considerando que la pendiente de fricción se calcula con las ecuaciones de flujo uniforme, por ejemplo la de Manning o de Chezy, el gasto toma la forma:

$$Q_n = K.A.R^x \sqrt{S_0} \quad (3.122)$$

donde:

- Q_n gasto para la condición de flujo permanente
- K constante que depende de ecuación de fricción seleccionada
- A área de la sección transversal
- R radio hidráulico
- S_0 pendiente de plantilla

Para el caso en que el flujo es no permanente, Q se puede expresar como:

$$Q_n = K.A.R^x \sqrt{S_f} \quad (3.123)$$

Despejando $K.A.R^x$ de la ecuación (3.122) y sustituyéndola en (3.123) junto con el valor de S_f expresado con la expresión (3.121):

$$Q = Q_n \sqrt{1 - \frac{1}{S_0} \frac{\partial y}{\partial x}} \quad (3.124)$$

la ecuación anterior se deriva parcialmente con respecto a x , tomando en cuenta que es una función del tirante y así como de la $\frac{\partial y}{\partial x}$ y al combinarse con la ecuación de

continuidad (3.115), se obtiene la ecuación del método de onda de difusión que tiene la forma:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = d \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (3.125)$$

El primer miembro de la ecuación corresponde a la onda cinemática y el segundo toma en cuenta el efecto de difusión del perfil no uniforme de la superficie libre del agua.

El coeficiente de difusión hidráulica d está dado por:

$$d = \frac{q}{2S} \quad (3.126)$$

donde :

q gasto por unidad de ancho de canal igual a Q/B

S pendiente de la plantilla

El término d explica el por qué el análisis de onda cinemática es válido cuando las pendientes de plantilla son fuertes (d es pequeño) o cuando el canal es muy ancho (q es pequeño). Para pendientes de plantilla suaves, el coeficiente de difusión hidráulica es importante.

La ecuación (3.125) se puede resolver numéricamente, por ejemplo, usando esquemas en diferencias finitas, al sustituirse en ella la expresión:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial y}{\partial x} \quad (3.127)$$

La ecuación de Manning o Chezy es utilizada para la pendiente de fricción, donde:

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2} \quad (3.128)$$

donde $K = Q / \sqrt{S_f}$ de cualquiera de las dos ecuaciones. Las ondas de difusión son aplicables a un conjunto de problemas más amplio que las formulaciones cinemáticas, y la solución de sus ecuaciones es casi tan complicada como los métodos utilizados en el tránsito dinámico.

El último tipo de análisis de onda toma en cuenta todos los términos de la ecuación (3.112) incluyendo los componentes de inercia, flujo transitorio y no uniforme. A esto se conoce como el método dinámico o dinámico completo. Las soluciones de la ecuación de onda dinámica son mucho más complicadas, pero con frecuencia son necesarias para el análisis del caudal a lo largo de pendientes muy suaves, en depósitos grandes, en ondas de avenida de un flujo transitorio que ocasione daños en una presa, mareas. Estas condiciones se encuentran con frecuencia en las costas.

Como una regla general el análisis de la onda dinámica completa se hace necesario cuando:

$$S > \frac{15}{T_p} \sqrt{\frac{D}{g}} \quad (3.125)$$

donde:

S pendiente de la plantilla plantilla, adimensional

T_p tiempo de pico del hidrograma de gastos de entrada, en s

D tirante medio del flujo, en m o en pies

g aceleración de la gravedad, en m/s^2 o en $pies/s^2$

3.2.2 Método Sánchez-Fuentes (Fuentes et al, 1996)

Este método considera como flujo unidimensional al movimiento del agua en el cauce natural; se limita al flujo en cauces y a volúmenes de control constantes en el espacio en los que solo se modifica el tirante hidráulico. El modelo matemático resuelve las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre en un cauce natural.

Las ecuaciones de flujo no permanente a superficie libre para cauces no prismáticos se consideran de la manera siguiente:

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} = B \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (3.126)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = - \left[\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + S_f \right] \quad (3.127)$$

donde:

Y elevación de la superficie libre del agua respecto a un plano horizontal de referencia (suma del tirante más la cota de plantilla), en m

A área hidráulica m^2

V velocidad media en m/s

B ancho de la superficie libre, en m

g aceleración de la gravedad m/s^2

S_f pendiente de la línea de energía, adimensional

x distancia longitudinal, en m

t tiempo en s

Para representar en diferencias finitas a las ecuaciones (3.126) y (3.127) se toman en cuenta los volúmenes de control mostrados en la Figura 3.9:

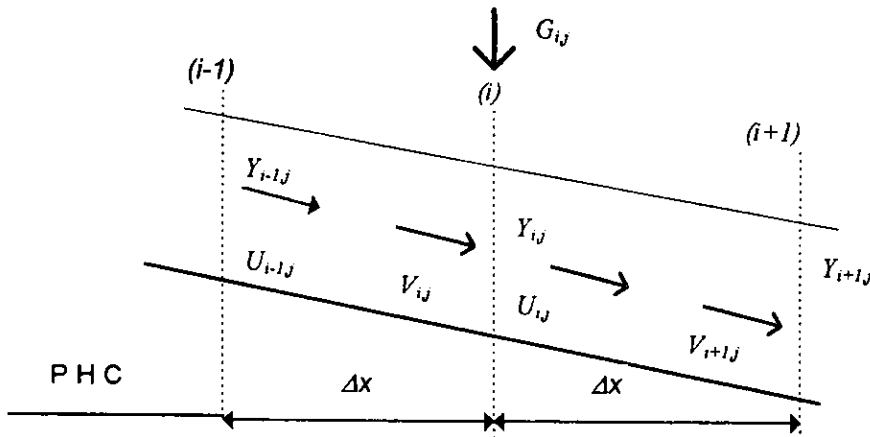


Figura 3.9 Notación utilizada para el esquema Sánchez-Fuentes en tres secciones consecutivas de un cauce

Debido a que las elevaciones y velocidades varían con el tiempo y la posición, los distintos términos de las ecuaciones (3.126) y (3.127) se escriben en diferencias finitas de la manera siguiente:

$$\frac{\partial Y}{\partial X} \cong \frac{\theta}{\Delta X_i} (Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta X_i} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (3.128)$$

$$\frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \cong \frac{V_{i+1,j+1} + U_{i,j+1}}{2g\Delta X_i} (V_{i+1,j} - U_{i,j}) \quad (3.129)$$

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \cong \frac{1}{2g\Delta t} [(U_{i,j+1} + V_{i+1,j+1}) - (U_{i,j} + V_{i+1,j})] \quad (3.130)$$

$$S_f \cong \frac{1}{4} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| (U_{i,j+1} + V_{i+1,j+1}) \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial(AV)}{\partial x} \cong \frac{A_{i+1,j}V_{i+1,j+1} - A_{i,j}U_{i,j+1}}{\Delta X_i} \quad (3.132)$$

$$B \frac{\partial Y}{\partial t} \cong \frac{B_{i+1,j} + B_{i,j}}{4\Delta x} [(Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1}) - (Y_{i+1,j} + Y_{i,j})] \quad (3.133)$$

donde θ es un factor de peso que sirve para calcular promedios ponderados en el tiempo con la finalidad de mejorar la aproximación de las derivadas temporales.

Sustituyendo las ecuaciones (3.132) y (3.133) en la ecuación (3.126) y las ecuaciones (3.128) a (3.133) en la (3.127) se obtiene:

$$A_{i,j}U_{i,j+1} - A_{i+1,j}V_{i+1,j+1} = F_{i,j}(Y_{i+1,j+1} + Y_{i,j+1} - Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) \quad (3.134)$$

$$C_{i,j}U_{i,j+1} + C_{i,j}V_{i+1,j+1} = Y_{i+1,j+1} - Y_{i,j+1} + D_{i,j} \quad (3.135)$$

donde:

$$F_{i,j} = \frac{\Delta X_i}{4\Delta t} (B_{i+1,j} + B_{i,j}) \quad (3.136)$$

$$C_{i,j} = \frac{U_{i,j} - V_{i+1,j}}{2g\theta} - \frac{\Delta X_i}{2g\theta\Delta t} - \frac{\Delta X_i}{4\theta} \frac{n^2}{r_{i,j}^{4/3}} |U_{i,j} + V_{i+1,j}| \quad (3.137)$$

$$D_{i,j} = \frac{1-\theta}{\theta} (Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) - \frac{\Delta X_i}{2g\theta\Delta t} (U_{i,j} + V_{i,j}) \quad (3.138)$$

Las ecuaciones (3.134) y(3.135) forman un sistema lineal no homogéneo en $U_{i,j+1}$ y $V_{i+1,j+1}$ cuya solución se escribe como:

$$U_{i,j+1} = P_{i,j}Y_{i+1,j+1} + Q_{i,j}Y_{i,j+1} + R_{i,j} \quad (3.139)$$

$$V_{i,j+1} = S_{i,j}Y_{i+1,j+1} + T_{i,j}Y_{i,j+1} + W_{i,j} \quad (3.140)$$

En estas expresiones:

$$P_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} + \frac{A_{i+1,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.141)$$

$$Q_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} - \frac{A_{i,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} \quad (3.142)$$

$$R_{i,j} = \frac{D_{i,j}A_{i+1,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}(Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (3.143)$$

$$S_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (3.144)$$

$$T_{i,j} = \frac{A_{i+1,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} - \frac{F_{i,j}}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (3.145)$$

$$W_{i,j} = \frac{D_{i,j}A_{i,j}}{C_{i,j}(A_{i,j} + A_{i+1,j})} + \frac{F_{i,j}(Y_{i+1,j} + Y_{i,j})}{A_{i,j} + A_{i+1,j}} \quad (3.146)$$

Cuando la ecuación de continuidad se establece en la sección i (Figura 3.9), se obtiene:

$$A_{i,j}U_{i,j+1} + \theta G_{i,j+1} + (1 - \theta)G_{i,j} = A_{i,j}V_{i,j+1} \quad (3.147)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.139) y (3.140) en la (3.147) se llega a la expresión:

$$T_{i-1}Y_{i-1,j-1} + (Q_{i,j} - S_{i-1,j})Y_{i,j+1} + P_{i,j}Y_{i+1,j+1} = W_{i-1,j} - R_{i,j} + \frac{1}{A_{i,j}}(\theta G_{i,j+1} + (1-\theta)G_{i,j}) \quad (3.148)$$

Esta ecuación se plantea en las secciones intermedias. Cuando el flujo es subcrítico (el número de Froude es menor que uno), se requiere una ecuación adicional en cada uno de los extremos del río.

Las ecuaciones (3.148) junto con las de las secciones correspondientes a sus extremos, forman un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal, cuyas incógnitas son las elevaciones Y_i en la etapa de cálculo $j+1$. Una vez obtenidas las elevaciones, las velocidades de llegada ($V_{i,j+1}$) y de partida ($U_{i,j+1}$) se calculan con las ecuaciones (3.139) y (3.140).

En las secciones inicial y final deben fijarse las condiciones de frontera, las cuales se determinan de acuerdo con el problema en estudio, por ejemplo, para el caso particular de flujo subcrítico la condición de frontera aguas arriba se obtiene de la manera siguiente:

En la primera sección ($i=1$) propone como condición que el gasto de ingreso es conocido; de modo que el gasto (G_1) promedio es igual al de salida $A_{1,j}U_{1,j+1}$, esto es:

$$\theta G_{1,j+1} + (1-\theta)G_{1,j} = A_{1,j}U_{1,j+1} \quad (3.149)$$

ecuación que al tomar en cuenta la (3.139) para $i=1$ resulta:

$$Q_{1,j}Y_{1,j} + P_{1,j}Y_{1,j} = -R_{1,j} + \frac{1}{A_{1,j}}(\theta G_{1,j+1} + (1-\theta)G_{1,j}) \quad (3.150)$$

Como condición de frontera aguas abajo se considera una elevación de la superficie libre conocida, sea Y_F ; las velocidades del último tramo son:

$$U_{M-1,j+1} = P_{M-1,j}Y_F + Q_{M-1,j}Y_{M-1,j} + R_{M-1,j} \quad (3.151)$$

$$V_{M-1,j+1} = S_{M-2,j}Y_{M-1,j+1} - T_{M-2,j}Y_{M-2,j+1} + W_{M-2,j} \quad (3.152)$$

Al proponer la ecuación de continuidad en la penúltima sección ($i = M - 1$) da lugar a:

$$3T_{M-2,j}Y_{M-2,j+1} + (Q_{M-1,j} - S_{M-2,j})Y_{M-1,j+1} = W_{M-2,j} - R_{M-1,j} - \frac{1}{A_{M-1}} [\theta G_{M-1,j+1} + (1 - \theta)G_{M-1,j}] - P_{M-1,j}Y_F \quad (3.153)$$

Para asegurar que la descarga de esta sección sea con una elevación del agua mayor o igual a la mínima (la asociada al tirante crítico y_{cj} para el instante j) se emplea la ecuación siguiente:

$$\frac{A_{cj}}{B_{cj}} = \frac{V_{mj}}{g} \quad (3.154)$$

donde:

- A_{cj} área correspondiente al tirante crítico, en m^2
- B_{cj} ancho de la superficie correspondiente al tirante crítico, en m
- V_{mj} velocidad de entrada m/s en la sección M para el instante j .

Es así como Y_F queda definido de la manera siguiente:

$$Y_F = \begin{cases} y_F + Z_F si & y_f > y_{cj} \\ y_{cj} + Z_F si & y_f \leq y_{cj} \end{cases} \quad (3.155)$$

donde:

- Z_f elevación del fondo de la sección $i = M$, en m
- y_F tirante conocido en dicha sección, en m

El cálculo se realiza de la forma siguiente:

Para obtener las elevaciones del agua en la etapa de cálculo se forma un sistema de ecuaciones lineales, considerando:

- a) Sección aguas arriba del tramo en estudio ($i=1$), se utiliza la ecuación de condición de frontera aguas arriba, ecuación (3.150)
- b) Secciones intermedias ($i=2,3,\dots, L-1$), se utiliza la ecuación (3.148)
- c) Sección aguas abajo del tramo ($i+1=L$) se toma en cuenta la condición de frontera aguas abajo, ecuación (3.153)

- d) Las ecuaciones que se obtienen en los incisos a), b) y c) forman un sistema de $M-1$ ecuaciones lineales, tridiagonal, cuyas incógnitas son las elevaciones $Y_{i,j+1}$ (para $i=1,2,\dots,M-1$).
- e) Una vez resuelto el sistema, las velocidades de llegada ($V_{i,j+1}$) y de partida ($U_{i,j+1}$) se determinan a partir de las elevaciones $Y_{i,j+1}$ utilizando las ecuaciones (3.139) y (3.140).

Una de las ventajas del esquema Sánchez-Fuentes es que permite definir el comportamiento del cauce en la parte final, al existir una condición de frontera en el extremo de aguas abajo, lo anterior no es posible si se emplea el método de Muskingum-Cunge.

Este esquema permite representar de mejor forma condiciones de frontera complejas y considerar la posibilidad de transitar simultáneamente los afluentes y el cauce principal, de manera que se logra tener una simulación más cercana a la realidad.

3.3 Tránsito en sistemas de ríos (Fuentes et al, 1996)

Un sistema de ríos está formado por un cauce principal, sus afluentes, subafluentes, etc. (Figuras 3.10 y 3.11).

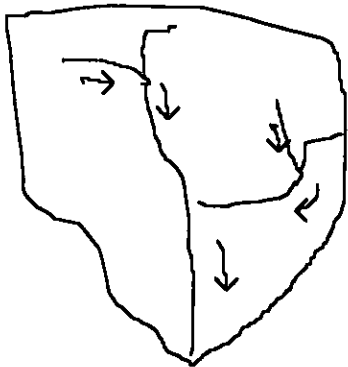


Figura 3.10 Sistemas de ríos y afluentes

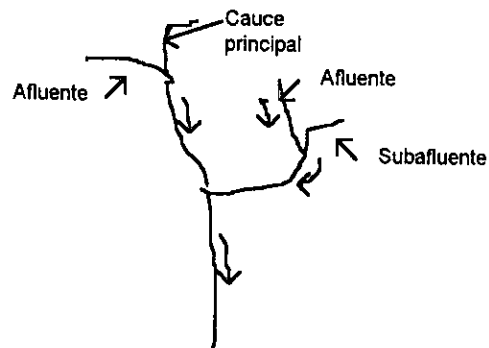


Figura 3.11 Organización del sistema en ríos y afluentes

Para hacer el tránsito se definen los nombres de los ríos haciendo una clasificación de los mismos: "clase 0" y "clase 1".

El esquema Sánchez-Fuentes puede considerarse como fronteras inferiores relaciones entre gastos y tirantes o simplemente tirantes constantes; lo anterior puede aprovecharse para llevar a cabo el tránsito en el cauce principal y sus afluentes de la manera siguiente:

Se separa el cálculo de los ríos clase "0" y clase "1" en un intervalo de tiempo; cuando se transitan los ríos clase "0" (Figura 3.12) se consideran como constantes las aportaciones de los ríos clase "1", calculados en el instante anterior, para después transitar los ríos clase "1" (Figura 3.13), considerando ahora como frontera inferior a los tirantes de los ríos clase "0", calculados anteriormente.

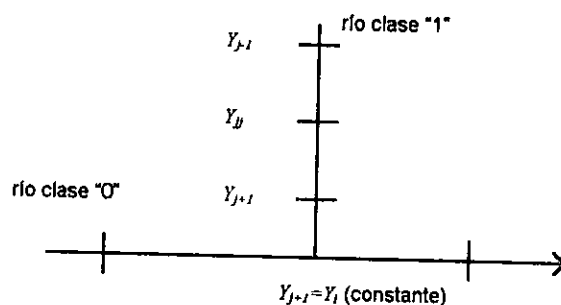
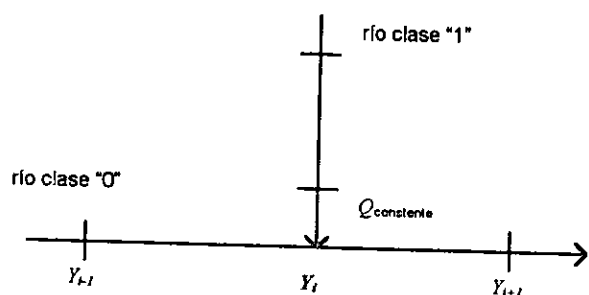


Figura 3.12 Tránsito de los ríos clase "0" en la primera mitad del intervalo Δt

Figura 3.13 Tránsito de los ríos clase "1" en la segunda mitad del intervalo Δt

Para clasificar a los ríos como clase "0" y "1" se procede de la manera siguiente: el cauce principal siempre es de clase "0" sus afluentes clase "1" y a los subafluentes otra vez como clase "0" (Figura 3.14); si estos últimos tienen a su vez subafluentes, éstos se clasifican como clase "1". Por lo anterior se debe verificar que un río clase "1" debe descargar en río clase "0" y viceversa.

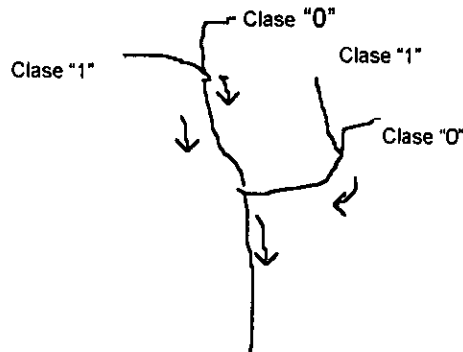


Figura 3.14 Clasificación de ríos y afluentes en clase "0" o Clase "1"

3.3.1 Programa TX.EXE (Fuentes et al, 1996)

Existe un programa realizado por el Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED), denominado TX.EXE el cual lleva a cabo el tránsito de avenidas en cauces naturales basándose en el esquema Sánchez-Fuentes, además cuenta con un conjunto de programas que ayudan a revisar la información de entrada y los resultados obtenidos, representándolos gráficamente.

Es posible realizar el tránsito de una avenida en un río y al mismo tiempo en sus afluentes y subafluentes, es decir en un sistema de ríos donde las confluencias solamente pueden unir al cauce principal y a uno de sus afluentes, o bien a un afluente y un solo subafluente, pero no a dos.

Como todos los métodos hidráulicos el programa requiere como datos de entrada información sobre la geometría de las secciones, así como el coeficiente de rugosidad y la pendiente de los tramos del cauce, limitados por las secciones analizadas. Además, es necesario definir las fronteras del flujo, lo cual implica establecer las condiciones de flujo aguas arriba y aguas abajo (en la primera y en la última sección). Por ejemplo, el hidrograma de entrada en la sección aguas arriba es conocido, mientras que aguas abajo de la última sección se mantiene un tirante constante o una curva de tirantes contra gastos. En cada una de las secciones se puede incluir un gasto lateral que puede variar con el tiempo (hidrograma).

Otro requisito para iniciar la simulación del tránsito de la avenida es iniciar con flujo uniforme, por lo que al principio del programa se hacen los cálculos necesarios para que se establezca dicha condición proponiendo al inicio tirantes y velocidades (esta etapa se conoce como "de calentamiento"). También debe cuidarse la condición de Courant para que exista estabilidad en el cálculo; el número de Courant se define al

estudiar la estabilidad de los esquemas de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Saint-Venant:

$$C_r = \frac{C\Delta t}{\Delta X} \quad (3.156)$$

donde:

$$C = |V| + \sqrt{gY} \quad (3.157)$$

en la ecuación (3.157), V es la velocidad media del flujo, Y es el tirante hidráulico igual al área hidráulica entre el ancho de superficie libre.

En los esquemas explícitos el número de Courant debe ser menor que uno para que sean estables; si un esquema es implícito y es linealmente estable, el número de Courant puede ser mayor que uno, pero al usar valores grandes se va perdiendo precisión. El número de Courant está relacionado con la longitud del tramo y del intervalo de tiempo seleccionado; como regla práctica para obtener una buena definición de tirantes y velocidades en esquemas implícitos linealmente estables, conviene usar al menos diez tramos y el número de Courant puede estar entre 3 y 5., si se utiliza un número de Courant mayor deben usarse al menos veinte tramos, para no perder precisión $C_r \leq 10$.

3.3.2 Método de tránsito de avenidas en redes hidrográficas preservando correlación de gastos (Collado et al, 1990)

Si se necesita realizar el tránsito de una avenida por un cauce y no se dispone de la información necesaria para resolver las ecuaciones de Saint-Venant, se recurre a modelos más simplificados como son los modelos hidrológicos; si las avenidas por transitar conservan el volumen, es decir, no existen gastos de entrada laterales significativos, es posible transitar la avenida por tramos en toda la red de canales hasta el punto de interés aguas abajo. En contraste, si no existe un aforo de las aportaciones laterales y éstas son significativas, la estimación de los parámetros de los modelos hidrológicos es complicada e incluso imposible. Añadiendo a lo anterior el carácter aleatorio de las precipitaciones, su falta de homogeneidad y sus diversas formas de traslado, ocurre que para la misma precipitación media se tienen distintas formas del hidrograma de salida; lo anterior hace ver la necesidad de contar con un método que pueda responder de manera amplia a diferentes condiciones hidrológicas, en particular, a la distribución espacial de la precipitación a través de hidrogramas en una red hidrográfica.

Collado y Wagner (1990), proponen un método para el tránsito de avenidas en redes hidrográficas, preservando la correlación entre los gastos de los tributarios y entre éstos y el hidrograma aguas abajo. El tránsito se lleva a cabo determinando una función de respuesta en la frecuencia para cada estación hidrométrica aguas arriba. Estas funciones se calculan de manera simultánea relacionando la matriz de variancia-covariancia de los gastos aguas arriba en el dominio de la frecuencia, con los gastos aguas abajo. Para que las funciones se adapten a distintas formas de los hidrogramas de entrada se optimizan dichas funciones a través de una selección óptima de hidrogramas. Al aplicar este método, los autores encontraron que se preserva la correlación entre los gastos de la red hidrográfica, lo cual permite la obtención de mejores resultados cuando existen crecientes tanto en algunos tributarios del cauce principal como en todos ellos; este método considerado rápido, simple pero suficientemente aproximado, es recomendado cuando no sea posible obtener toda la información requerida para resolver las ecuaciones de Saint-Venant mediante un esquema numérico de solución.

En las páginas siguientes se presenta un cuadro resumen de los métodos de tránsito de avenidas en cauces tratados en este Capítulo, indicando la información que requieren, ventajas y desventajas.

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces

Métodos Hidrológicos				
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
1) Muskingum por tanteos	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Almacenamiento acumulado - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - Curva S contra $XI + (I-X)O$ - intervalo de tiempo del tránsito 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$) Almacenamiento acumulado en el tiempo</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de recurrencia sencilla de aplicar - Poca información - Sencillez en determinación de los parámetros K y X 	<ul style="list-style-type: none"> - El proceso por tanteos origina resultados muy diferentes al proponer valores distintos de X - Se requiere calibración previa del modelo para obtener K y X adecuados
2) Muskingum por mínimos cuadrados, Gill(1977)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Número de datos disponibles - Hidrograma de entrada - Almacenamiento acumulado en el tiempo - Gasto de salida inicial - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$) Almacenamiento acumulado en el tiempo</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de recurrencia sencilla - K y X se obtienen de manera simple - Se eliminan los tanteos - Poca información - Poco error en la estimación del gasto de salida de pico y tiempo de pico 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados
3) Muskingum por mínimos cuadrados, Aldama (1987)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Hidrograma de entrada - Almacenamiento acumulado en el tiempo - Gasto de salida inicial - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida ($O-t$) Almacenamiento acumulado en el tiempo</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Mayor sencillez en obtención de K y X - Se eliminan tanteos - Poca información 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados - En algunos casos proporciona error grande en el gasto de salida de pico y tiempo de pico

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos Hidrológicos				
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
4) Método de Muskingum por mínimos cuadrados, O'Donnell(1985)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - intervalo de tiempo del tránsito 	Hidrograma de salida (O-t)	<ul style="list-style-type: none"> - Poca información -Sencillez en determinación de los parámetros K y X - Se eliminan los tanteos - Toma en cuenta aportaciones laterales 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere calibración previa del modelo para obtener K y X adecuados - En algunos casos proporciona errores grandes en el gasto de pico -No se recomienda en pronóstico
5) Muskingum, optimización directa de los coeficientes de tránsito, Stephenson(1978)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Número de datos disponibles - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - Intervalo de tiempo 	Hidrograma de salida (O-t)	<ul style="list-style-type: none"> - Se eliminan los tanteos - Poca información 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados - Se requiere de un método de optimización, necesidad de equipo de cómputo
6) Muskingum , método de las funciones de núcleo	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Número de datos disponibles - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial 	Hidrograma de salida (O-t)	<ul style="list-style-type: none"> - Se eliminan tanteos - Poca información 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados - Ecuaciones complicadas para obtención de K y X, necesidad de equipo de cómputo - En algunos casos proporciona ligeros errores en gasto de pico y tiempo de pico

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos Hidrológicos				
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas	Desventajas
7) Método de Muskingum Overton(1966)	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - intervalo de tiempo del tránsito 	Hidrograma de salida ($O-t$)	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuaciones muy sencillas para la determinación de los parámetros K y X - Se eliminan los tanteos - Poca información 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere calibración previa del modelo para obtener K y X adecuados - En algunos casos proporciona errores grandes en el gasto de pico
8) Muskingum, de tránsito del segmento de cresta	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Porción del hidrograma de salida - Intervalo de tiempo del tránsito 	Gasto de salida en un instante de interés o un tramo de interés	<ul style="list-style-type: none"> - Se eliminan los tanteos - Poca información - Aplicar cuando sólo se desea conocer una porción del hidrograma de salida o el gasto de salida de pico 	<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados
9) Método Convexo del SCS	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - Intervalo de tiempo del tránsito 	Hidrograma de salida ($O-t$)	<ul style="list-style-type: none"> - Se eliminan tanteos - Poca información - Ecuación de recurrencia sencilla de aplicar - Un solo parámetro por determinar - Se puede usar en pronóstico de gastos de salida en un tramo sin conocer el ingreso en dicho instante 	<ul style="list-style-type: none"> - Limitaciones en su aplicación, según la forma de los hidrogramas históricos - Calibración previa para determinar su parámetro C_1

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos Hidrológicos			
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas
			Desventajas
<p>10) Muskingum-Cunge Cunge(1969)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrograma de entrada - Gasto de salida inicial - intervalo de tiempo del tránsito -Pendiente de plantilla del cauce - Gasto unitario (correspondiente al gasto de entrada de pico) - Celeridad de onda cinemática - Longitud del tramo - Área de la sección transversal del cauce -Ancho de la superficie libre - Velocidad media 	<p>Hidrograma de salida (<i>O-t</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuaciones de recurrencia sencilla - Se eliminan los tanteos - No requiere calibración previa - Resultados adecuados en muchos casos prácticos - Método de tipo combinado o mixto, toma en cuenta aspectos hidrológicos e hidráulicos
<p>11) Kulandaiswamy-Krishnaswami-Ramalingam (con cuatro términos)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenida histórica - Almacenamiento histórico - Hidrograma de entrada - Los dos primeros valores del hidrograma de salida - Intervalo de tiempo 	<p>Hidrograma de salida (<i>O-t</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Requiere mucha información del cauce - Δt y Δx deben seleccionarse de manera adecuada - Resultados muy diferentes al ligeramento a Δt y Δx dentro de sus límites de aplicación - En ocasiones no refleja la atenuación en la onda de avenida
			<ul style="list-style-type: none"> - Se requiere de calibración previa para obtener K y X adecuados

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos Hidrológicos			
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas
12) Semigráfico	<ul style="list-style-type: none"> - Registro histórico de hidrogramas de entrada, salida y almacenamiento - Intervalo de tiempo del tránsito 	Hidrograma de salida (O-I)	<ul style="list-style-type: none"> - No requiere de dispositivos de cálculo veloces
			<ul style="list-style-type: none"> - Errores inherentes en lecturas de datos y en el manejo de escalas - Procedimiento casi manual, implica tiempo para el usuario
Métodos Hidráulicos			
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas
13) Onda cinemática	<ul style="list-style-type: none"> - Longitud del tramo - Intervalo de tiempo del tránsito - Celeridad - Ancho de la superficie libre del canal - Coeficiente de fricción - Pendiente de fricción - Área hidráulica - Perímetro mojado - condiciones iniciales y de frontera 	Hidrograma de salida (O-I)	<ul style="list-style-type: none"> - Toma en cuenta características hidráulicas del canal, en particular, la influencia de la pendiente de fricción
			<ul style="list-style-type: none"> - Errores de discretización y redondeo acumulados al utilizar esquemas en diferencias finitas - Requiere equipo de cómputo - Los valores de Δt y Δx deben elegirse adecuadamente para cumplir con estabilidad - Variación en los resultados según el Δt y Δx seleccionado - Se requiere mucha información

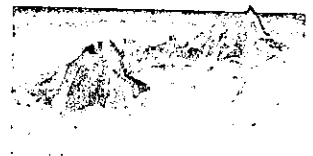
Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos hidráulicos			
Método	Información requerida	Obitiene	Ventajas
			Desventajas
14) Difusión	<ul style="list-style-type: none"> - Longitud del tramo - Intervalo de tiempo del tránsito - Celeridad - Ancho de la superficie libre del canal - Coeficiente de fricción - Pendiente de fricción - Área hidráulica - Perímetro mojado - Gasto unitario en el canal o cauce - Pendiente de plantilla - Condiciones iniciales y de frontera 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Toma en cuenta características hidráulicas del canal, en particular, la influencia de la pendiente de fricción y de la pendiente de plantilla - La ecuación que se resuelve es más complicada que la de onda cinemática - Errores de discretización y redondeo acumulados al utilizar esquemas en diferencias finitas - Requiere equipo de cómputo - Los valores de Δt y Δx deben elegirse adecuadamente para cumplir con estabilidad en el método - Variación en los resultados según el Δt y Δx seleccionado - Se requiere mucha información
15) Onda dinámica	<ul style="list-style-type: none"> - Toda la del método anterior y además del tiempo de pico del hidrograma de entrada, tirante medio del flujo, aceleración de la gravedad 	<p>Hidrograma de salida (O-t)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Se analiza al flujo de la manera más completa - Son las ecuaciones más complicadas que se tienen para efectuar el tránsito - Todas las desventajas del método anterior

Cuadro 3.3 Métodos determinísticos de tránsito de avenidas en cauces (continuación)

Métodos hidráulicos			
Método	Información requerida	Obtiene	Ventajas
<p>16) Sánchez-Fuentes</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Longitud del tramo - Intervalo de tiempo del tránsito - Geometría de la sección - Coeficiente de Manning - Velocidades del flujo - Pendiente de plantilla en el tramo de cauce - Hidrograma de entrada - Tirante aguas abajo o curva tirantes-gastos - Gastos laterales - Condiciones iniciales y de frontera 	<p>Hidrograma de salida (<i>O-t</i>)</p>	<p style="text-align: center;">Desventajas</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mucha información - La selección de Δt y Δx debe ser adecuada para que se tenga estabilidad en el método - Requiere de equipo de cómputo eficiente
<p>17) Tránsito de avenidas en redes hidrográficas preservando correlación de gastos</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Hidrogramas de entrada y salida de avenidas históricas en los tramos de la red hidrográfica 	<p>Hidrograma de salida (<i>O-t</i>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Poca información (únicamente hidrogramas) - No requiere esquema numérico de solución - Buenos resultados en la determinación del hidrograma de salida

CAPÍTULO 4
TRANSITO DE AVENIDAS EN CAUCES UTILIZANDO
MODELOS ARMA(P,Q)



CAPÍTULO 4

TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES UTILIZANDO MODELOS ARMA(p,q)

Debido a que los datos de entrada para realizar el estudio de tránsito de avenidas obedecen generalmente a un comportamiento aleatorio y no determinístico como lo plantean los modelos presentados en capítulos anteriores, se presenta en este Capítulo una técnica estocástica que permite modelar el problema del tránsito de avenidas en cauces tomando en cuenta el carácter aleatorio de las variables involucradas.

4.1 Modelos autorregresivos de promedios móviles ARMA(p,q)

Las series de tiempo en hidrología se pueden analizar utilizando modelación estocástica; de acuerdo con Box y Jenkins (1976), los modelos autorregresivos de promedios móviles ARMA(p,q) son una combinación de un modelo autorregresivo AR(p) y una componente de promedios móviles MA(q); la serie se supone que es estacionaria y normal.

El modelo AR(p) tiene la forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (4.1)$$

Donde:

Z_t valor de la serie de tiempo estandarizada (media μ igual a cero y varianza igual a uno), correspondiente al instante t , la cual se obtiene como un resultado de estandarizar a la variable normalizada y_t (coeficiente de asimetría igual a cero y coeficiente de curtosis igual a tres), que a su vez se obtiene al normalizar la serie de tiempo x_t .

ε_t residual del modelo correspondiente al instante t , en el caso de generación sintética, se tiene: $\varepsilon_t = \sigma_e \xi_t$.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ parámetros del modelo AR(p)

El arreglo general de la componente de promedios móviles MA(q) es:

$$Z_t = \varepsilon_t - \sum_{j=0}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (4.2)$$

donde:

ε_t residual del modelo correspondiente al instante t

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ parámetros del componente autorregresivo de promedios móviles MA(q), este componente remodela a los residuales.

Al combinar las ecuaciones (4.1) y (4.2), se obtiene la forma general de un modelo ARMA(p,q), que está dada por:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4.3)$$

o de manera condensada:

$$Z_t = \sum_{j=0}^p \phi_j Z_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (4.4)$$

donde:

Z_t valor de la serie de tiempo estandarizada (media igual a cero y varianza igual a uno), correspondiente al instante t , la cual se obtiene como un resultado de estandarizar a la variable normalizada y_t (coeficiente de asimetría igual a cero y coeficiente de curtosis igual a tres), que a su vez se obtiene al normalizar la serie de tiempo x_t .

ε_t residual del modelo correspondiente al instante t , en el caso de generación sintética, se tiene: $\varepsilon_t = \sigma_\varepsilon \xi_t$.

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ parámetros del modelo AR(p)

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ parámetros del componente MA(q).

Además se requieren determinar los estadísticos: μ de la muestra, σ_ε^2 varianza de los residuales; es decir son un total de $p+q+2$ parámetros que se obtienen a partir de los datos de la serie de tiempo estandarizada.

Utilizando un modelo ARMA(p,q) se realiza una remodelación de los residuales por efecto del componente de promedios móviles, tal como se observa en la ecuación (4.4).

Los modelos ARMA(p,q) se pueden aplicar en la generación de muestras sintéticas de una serie de tiempo anual o periódica (mensual, semanal, diaria), por ejemplo, para una serie de tiempo anual se tiene el proceso siguiente:

1. Contar con una serie de tiempo con un número adecuado de años de registro (por ejemplo 15 años).
2. Se calcula los estadísticos de la serie de tiempo: media, varianza, desviación estándar, coeficiente de asimetría, coeficiente de curtosis, coeficiente de variación.
3. Se realiza la prueba de independencia de la serie construyendo el correlograma dibujando los coeficientes de autocorrelación serial de retraso k , r_k , contra el tiempo de retraso k , así como los límites de confianza (Salas, 1980). Si más del diez porciento de los puntos salen de los límites de confianza la muestra será dependiente y la variable no es aleatoria por lo que se tiene que analizar de manera determinística, en caso contrario se continúa con el proceso.
4. Si la muestra es normal (coeficiente de asimetría igual a cero y curtosis igual a tres) se continúa con el paso 5, si no es normal se aplica un proceso de transformación normalizante, por ejemplo, el de Box- Cox, obteniendo a la variable y_t .
5. Se estandariza la variable , en el caso de series anuales se puede aplicar remoción de la media : $Z_t = y_t - \bar{y}$ o si son datos muy grandes lo que se aplica es modulación: $Z_t = \frac{y_t}{\bar{y}}$, en series periódicas la estandarización es completa : $Z_t = \frac{y_t - \bar{y}}{\sigma_y}$.
6. Si, por ejemplo, se quiere utilizar el modelo ARMA(1,1), primero se analiza el caso de un modelo AR(1); se calcula el parámetro ϕ , que está en función del coeficiente r_k , en este caso $\phi_1=r_1$, también deben considerarse la autocovarianza de retraso cero y uno C_0 y C_1 , (Salas, 1980).
7. Se aplica la prueba de estacionareidad.

Para que un modelo AR(p) con parámetros constantes sea estacionario se requiere que el conjunto de parámetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ satisfagan la condición de que las raíces de la ecuación característica:

$$u^p - \phi_1 u^{p-1} - \phi_2 u^{p-2} - \dots - \phi_p = 0$$

caigan dentro del círculo unitario, es decir: $|u_i| < 1$ para $i=1,2,\dots,p$

8. Se verifica la normalidad e independencia de los residuales, calculando sus estadísticos y correlograma.
9. Se calcula la varianza de los residuales σ_e^2 , la cual depende del modelo AR(p) y de la varianza de la serie normal.
10. Con la varianza de los residuales σ_e^2 y C_0 y C_1 se determina el parámetro θ_1 y el valor de σ_e^2 . Para un modelo ARMA(1,1) las ecuaciones son:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{C_0}{1 + \hat{\theta}_1^2} \text{ y } \hat{\theta}_1 = -\frac{C_1}{\hat{\sigma}_e^2}$$

El procedimiento es de tipo iterativo, introduciendo en la segunda ecuación los valores determinados con el modelo AR(1) y sustituyendo el valor de θ_1 en la primera ecuación para calcular un valor de σ_e^2 corregido, después este valor se introduce en la segunda ecuación, el nuevo θ_1 se aplica en la primera ecuación y así sucesivamente hasta cumplir con cierta tolerancia para determinar los parámetros σ_e^2 y θ_1 del modelo ARMA(1,1).

En general para un modelo ARMA(p,q), los parámetros se estiman con:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{C_0}{1 + \hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2} \text{ y } \hat{\theta}_j = -\left(\frac{C_j}{\hat{\sigma}_e^2} - \hat{\theta}_1 \hat{\theta}_{j+1} - \hat{\theta}_2 \hat{\theta}_{j+2} - \dots - \hat{\theta}_{q-j} \hat{\theta}_q \right)$$

El circunflejo ^ indica estimador del parámetro.

11. Se verifica el principio de parsimonia utilizando el criterio de información de Akaike :

$$CIA(p,q) = N \ln(\sigma_e^2) + 2(p+q)$$

12. Se repite el procedimiento desde el paso 6 con diferentes modelos, seleccionando aquel que tenga menor CIA(p,q).
13. Con el modelo seleccionado se generan las muestras sintéticas, por ejemplo, para un modelo ARMA(1,1) se utiliza:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \sigma_e \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1}$$

Para un modelo ARMA(3,2) se utiliza:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + \sigma_e \xi_t - \theta_1 \xi_{t-1} - \theta_2 \xi_{t-2}$$

Donde los valores ξ son números aleatorios que tienen una distribución normal, los cuales se pueden obtener a partir de números con distribución uniforme y las ecuaciones de Box-Müller (Salas, 1980).

La ecuación de generación se puede utilizar para pronóstico, tanto a tiempo real como de corto o largo plazo, la diferencia estriba en el hecho de que los valores de $Z_{t,j}$ son los reales para pronóstico a tiempo real mientras que para el largo plazo sólo los valores iniciales son reales.

Su uso en tránsito de avenidas es un proceso independiente de la forma de tratar la información, por lo tanto no se debe utilizar de la misma manera que en la generación de muestras sintéticas y pronóstico.

Los métodos que se han mencionado en capítulos anteriores son de tipo determinístico y no hay que perder de vista que, en la naturaleza, el escurrimiento de un cauce tiene por lo general un comportamiento aleatorio, excepto cuando existen presas aguas arriba del cauce analizado; el análisis de variables no determinísticas es esencialmente distinto, por esta razón se presentan a los modelos ARMA(p,q) como un método alternativo para efectuar el tránsito de avenidas en cauces.

4.2 Tránsito de avenidas utilizando modelos ARMA(p,q) (Wang y Yu, 1986)

El tránsito de avenidas también puede analizarse considerando el carácter aleatorio de las variables que participan; los modelos estocásticos autorregresivos de promedios móviles ARMA(p,q) son aplicables para la solución del problema de tránsito.

Por medio de un modelo ARMA(p,q) se puede expresar la descarga presente en una estación aguas abajo como una combinación lineal de gastos de entrada presentes y pasados en la estación aguas arriba y gastos de salida pasados observados en la estación aguas abajo.

Si se considera el tránsito de avenidas en un cauce natural como un caso especial del arreglo más general de un modelo con entrada-salida; para el caso de un sistema lineal continuo la función con respecto al tiempo que relaciona al gasto de entrada con el gasto de salida se puede obtener a partir de la ecuación diferencial:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^p \alpha_i D^i\right) Q(t) = \left(\sum_{j=0}^q \beta_j D^j\right) I(t) \quad (4.5)$$

donde:

D^i operador diferencial con respecto al tiempo de i-ésimo orden
 α y β coeficientes constantes a ser determinados

$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1) + b_2 I(t-2) \quad (4.8)$$

donde:

a y b parámetros que no dependen del tiempo y que deben estimarse utilizando un método de optimización.

Siendo los residuales $e(t)$ errores entre los gastos de salida observados y calculados:

$$e(t) = \hat{Q}(t) - Q(t) \text{ para } t=1,2,\dots,m \quad (4.9)$$

donde:

$\hat{Q}(t)$ gasto de salida registrado en un tiempo t

$Q(t)$ gasto de salida calculado con el modelo ARMA a partir de gastos de entrada registrados.

Si $Q(t)$ se obtiene con la ecuación (4.8), se sustituye en la (4.9) y se escribe esta última en forma matricial resulta:

$$e(t) = \hat{Q}(t) - D\beta \quad (4.10)$$

donde:

$$e(t) = [e(1) \ e(2) \ \dots \ e(m)]^T$$

$\hat{Q} = [\hat{Q}(1) \ \hat{Q}(2) \ \dots \ \hat{Q}(m)]^T$, vector formado por m renglones y una columna, para $t=1,2,\dots,m$

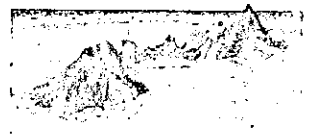
$$\beta = [a_1 \ b_0 \ b_1]^T \text{ para un ARMA}(1,1)$$

$$\beta = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ b_0 \ b_1 \ b_2]^T \text{ para un ARMA}(3,2)$$

en general:

$$\beta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_q]$$

CAPÍTULO 5
APLICACIÓN DE MODELOS DE TRÁNSITO DE
AVENIDAS EN CAUCES



CAPÍTULO 5

APLICACIÓN DE MODELOS DE TRÁNSITO DE AVENIDAS EN CAUCES

En este capítulo se presentan aplicaciones de algunos métodos de tránsito de avenidas en cauces para comparar los resultados entre ellos y ,en particular, se analiza el comportamiento de los modelos estocásticos $ARMA(p,q)$, recordando que es el objetivo principal de este trabajo. Son tres los ejemplos de aplicación, los cuales se describen a continuación:

5.1 Ejemplo No. 1

El primer ejemplo corresponde a un sitio en el que se cuenta con registros del hidrograma de entrada y de salida (Wilson, 1985); cuyos datos se muestran en el Anexo 1. Se realiza la calibración de los modelos hidráulicos correspondientes al método de Muskingum, tomando en cuenta distintos procedimientos para la obtención de sus parámetros K y X : el procedimiento por tanteos, el método de Overton (1966), Aldama (1987), funciones de núcleo. Por otra parte, considerando que se cuenta con información de las características hidrológicas del canal, se aplica el método de Muskingum-Cunge, el cual no requiere de una calibración previa, puesto que los parámetros K y X se calculan con datos del cauce; finalmente, se realiza la calibración de los modelos $ARMA(1,1)$, $ARMA(2,1)$ y $ARMA(3,2)$ y se comparan resultados entre todos los métodos. Para realizar este ejemplo se utilizó una hoja de cálculo de EXCEL, resultando práctica y sencilla la realización de los cálculos involucrados; la hoja de cálculo completa correspondiente al Ejemplo 1 se presenta en el Anexo 1.

Los hidrogramas de salida, resultado de la calibración de todos los métodos (excepto el de Muskingum-Cunge, cuyos parámetros se obtienen de la manera señalada), se muestran en la Figura 5.1.

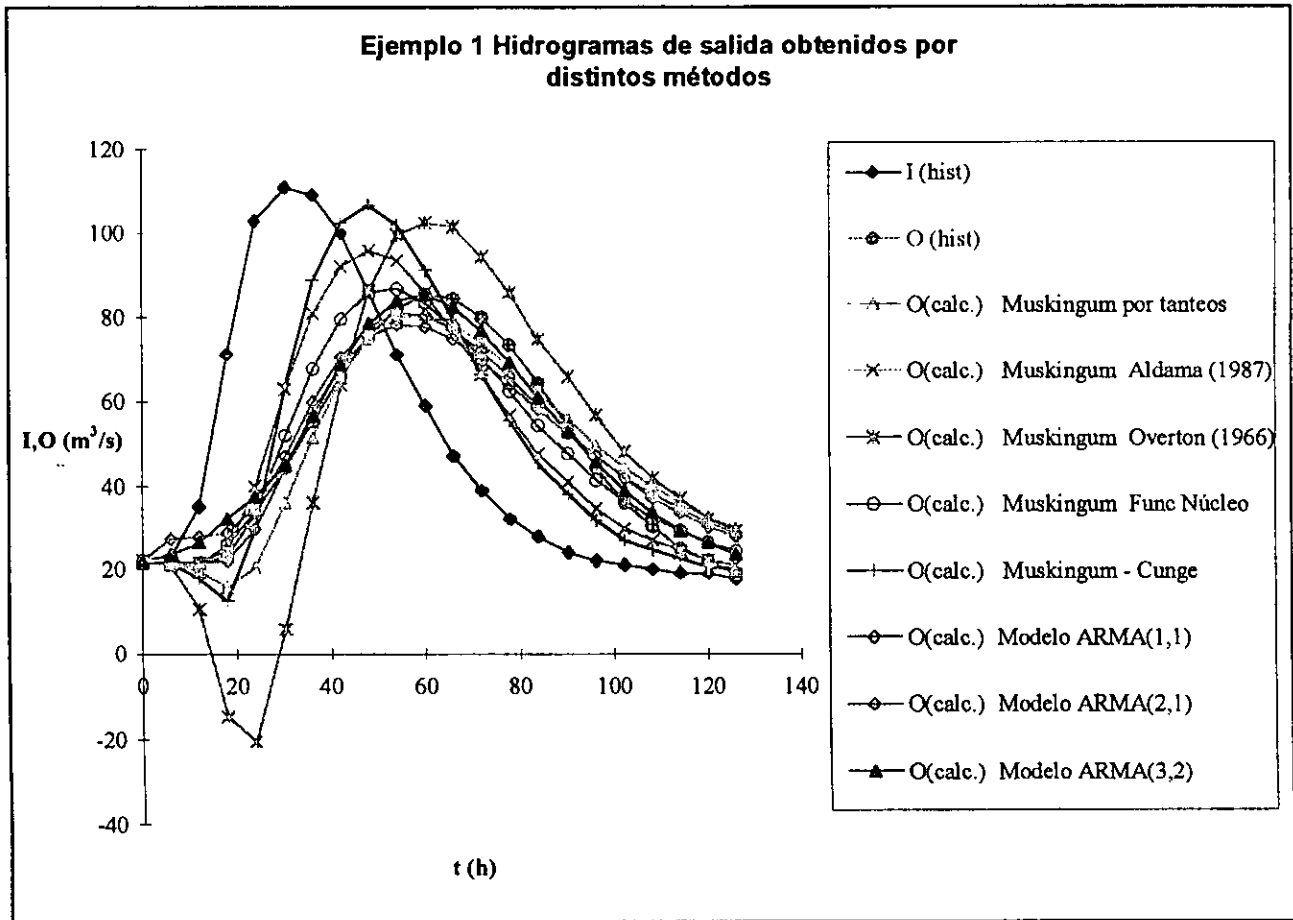


Figura 5.1 Calibración y aplicación de los métodos de Muskingum, Muskingum-Cunge y Modelos $ARMA(p,q)$

El gasto de pico de salida histórico se presenta a la hora 60, resultando de 85 m^3/s ; los errores relativos en % en el gasto pico de salida y en el tiempo de pico, utilizando los distintos métodos se indican en el Cuadro 5.1.

Cuadro 5.1 Error relativo en % en el gasto de pico de salida y en el tiempo de pico obtenidos por distintos métodos de tránsito de avenidas en cauces, Ejemplo 1

Método	Muskingum Tanteos	Muskingum Aldama (1987)	Muskingum Overton (1966)	Muskingum Func de Núcleo	Muskingum-Cunge	ARMA (1,1)	ARMA (2,1)	ARMA (3,2)
Q_{pico} Error relativo %	5.21	12.65	20.60	1.97	25.52	8.12	4.78	0.44
t_{pico} Error relativo %	0	20	0	10	20	10	10	0

De acuerdo con los resultados resumidos en el Cuadro 5.1 se observa que el método que proporciona menor error en la estimación del gasto de pico de salida es el modelo ARMA(3,2), resultando del 0.44%, además de que no se presenta error en el tiempo de pico; el método que reporta el segundo menor error en el gasto de pico es el de Muskingum con los parámetros obtenidos con Funciones de Núcleo, resultando del 1.97% sin embargo este método proporciona un error del 10% en la estimación del tiempo de pico; el tercer menor error en lo que se refiere al gasto de pico lo tiene el modelo ARMA(2,1), siendo del 4.78% pero este modelo también presenta un error del 10% en la estimación del tiempo de pico; el cuarto lugar en cuanto a errores en la estimación del gasto de pico lo ocupa el método de Muskingum con sus parámetros obtenidos por tanteos, teniendo un error del 5.21% y con error nulo en el tiempo de pico, le siguen el modelo ARMA(1,1) con un error del 8.12% en el gasto de pico y un error del 10% en el tiempo de pico, el Método de Muskingum de acuerdo con Aldama(1987), con un error del 12.65% en el gasto de pico y un error del 20% en el tiempo de pico, Muskingum por Overton(1966), con un error del 20.6% en el gasto de pico y del 0 % en el tiempo de pico y el método que proporciona el mayor error es el de Muskingum-Cunge con un error del 25.52% en la estimación del gasto de pico y un error del 20% en el tiempo de pico.

De acuerdo con lo anterior el mejor método, con fines de calibración, es el modelo ARMA(3,2), puesto que no reporta error en la estimación del tiempo de pico y el gasto de pico que se obtiene ($85.37 \text{ m}^3/\text{s}$, de acuerdo con el Anexo 1) no trae consigo un subdiseño; el método que proporciona el peor hidrograma de salida es el de Muskingum-Cunge (pero hay que tomar en cuenta que los resultados de éste varían según el valor de Δt y Δx que se tomen); el método de Muskingum por tanteos proporciona buenos resultados en lo que se refiere a la estimación del tiempo de pico pero se tendría un subdiseño debido a que el gasto de pico que reporta es menor respecto al real (es de $80.576 \text{ m}^3/\text{s}$, de acuerdo con Anexo 1). Los métodos de Muskingum por funciones de Núcleo, modelos ARMA(1,1) y ARMA(2,1) proporcionan pequeños errores en el gasto de pico de salida pero todos reportan error en el tiempo de pico, esto quiere decir que indican un menor retraso en la onda de avenida respecto a lo que ocurre realmente en la sección de canal analizada. El método de

Muskingum por Aldama(1987) proporciona un error grande en la estimación del tiempo de pico y también en el gasto de pico, indicando menor atenuación y traslado en la onda de avenida, no siendo aconsejable su uso. El método de Overton presenta una estimación precisa del tiempo de pico pero en lo que se refiere al gasto de pico de salida el error que reporta es muy grande; además de acuerdo con los parámetros que se obtienen de sus ecuaciones el hidrograma de salida reporta gastos negativos (Figura 5.1) lo que nos indica deficiencias en este método no siendo recomendable su utilización.

Cabe hacer mención de que los datos del hidrograma de entrada tenían un coeficiente de asimetría igual a 0.827 y un coeficiente de curtosis de 2.472 valores aproximados a cero y a tres correspondientes a una distribución normal; por otra parte al realizar la prueba de independencia al hidrograma de entrada, utilizando la prueba del correlograma de un total de 21 valores de los coeficientes de autocorrelación serial r_k , sólo tres se salían de los límites de confianza, correspondiendo al límite de puntos (el diez por ciento del total de puntos), Figura 5.2, para que aún pueda considerarse variable aleatoria; esta aclaración es importante tomando en cuenta que los modelos ARMA(p,q) se aplican a variables aleatorias, con distribución normal.

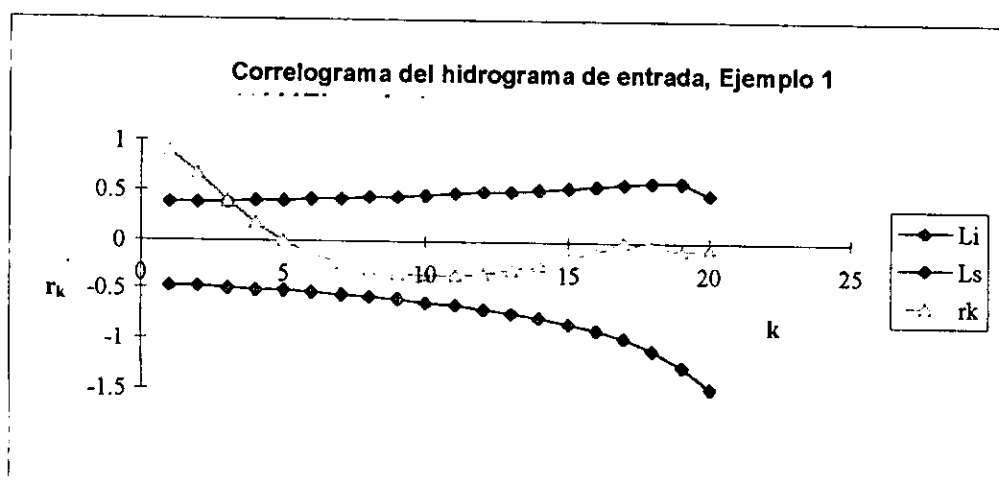


Figura 5.2 Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 1

5.2 Ejemplo No. 2

El segundo ejemplo consistió en utilizar primero, con fines de calibración del modelo ARMA(3,2), la avenida analizada por Aguilar (1995), que parte de un hidrograma de entrada y obtiene con un procedimiento en diferencias finitas un hidrograma de salida considerado el gasto de salida "real"; posteriormente se realizan pronósticos con el modelo ARMA(3,2) utilizando la avenida que Aguilar (1995) obtiene duplicando y quintuplicando el hidrograma de entrada, obteniendo el hidrograma de salida con un procedimiento hidráulico en diferencias finitas que se considera el valor "real"; los resultados obtenidos se compararon con los de Aguilar(1995), quien aplicó un modelo de Advección-Difusión, así como el

método de Muskingum de acuerdo con Gill(1977) y O'Donell (1985), calibrados previamente con la avenida original, pero haciéndole correcciones únicamente a su método AD. El enunciado del problema y los datos de la avenida y del cauce analizado se presentan en la hoja de cálculo presentada en el Anexo 2; todas las operaciones se realizaron en EXCEL, se observa que el hidrograma de entrada es muy similar al del Ejemplo 1, pero consta de más datos.

La Figura 5.3 presenta hidrogramas de salida resultado de la calibración del modelo ARMA(3,2), en el inciso a) del Ejemplo 2 así como los otros modelos previamente mencionados.

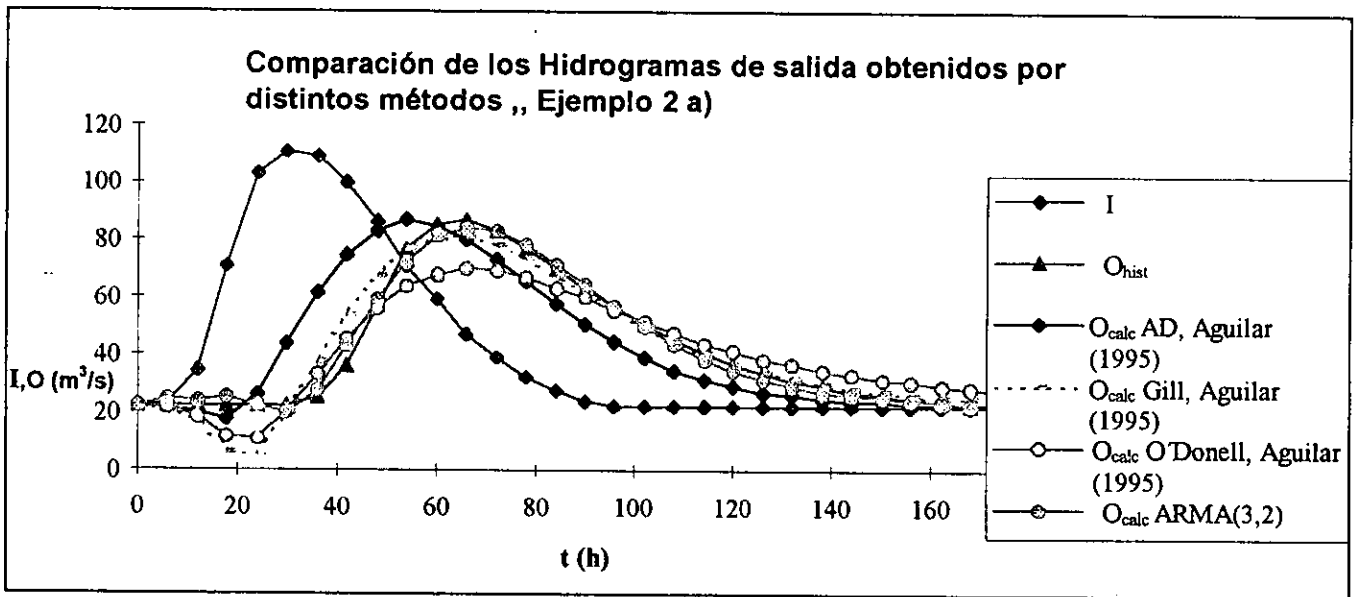


Figura 5.3 Calibración de distintos métodos de tránsito en cauces, Ejemplo 2 a)

El gasto de pico de salida "real", se presenta en la hora 66, siendo de 86.555 m³/s; el error relativo en % obtenido en el gasto de pico de salida y en el tiempo de pico, por los distintos métodos se presentan en el Cuadro 5.2.

Cuadro 5.2 Error relativo en % en el gasto de pico de salida y en el tiempo de pico, por distintos métodos de tránsito en cauces, calibración, Ejemplo 2 a)

Método	AD Aguilar (1995)	Gill Aguilar (1995)	O'Donell Aguilar (1995)	ARMA(3,2)
O_{pico} Error relativo en %	0.0012	5.79	19.39	2.79
t_{pico} Error relativo en %	18.18	0	0	0

De acuerdo con los resultados presentados en el Cuadro 5.2, el menor error en el gasto de pico lo reporta el método AD propuesto y trabajado por Aguilar (1995), siendo del 0.0012%, pero este método reporta un error del 18.18% en la estimación del tiempo de pico; es decir indica prácticamente el mismo efecto de atenuación de la avenida respecto al real pero indica un menor retraso en ella, por lo que no refleja correctamente el efecto de almacenamiento en la sección de cauce; el segundo mejor método en cuanto al error en el gasto de pico es el modelo ARMA(3,2), el cual presenta un error del 2.79 % en el gasto de pico y un error del 0 % en el tiempo de pico; el gasto que reporta este método (84.14 m³/s, según Anexo 2), es ligeramente menor al real, por lo que se tendría un subdiseño, aún así este método es el que mejor se apega al efecto de almacenamiento de la sección de cauce analizada; le siguen en error en el tiempo de pico el método de Gill, con 5.79% de error en el gasto de salida de pico y 0 % de error en el tiempo de pico y el método con mayor error en el gasto de pico es el de O'Donell, resultando del 19.39 % y 0 % de error en el tiempo de pico.

Nuevamente se concluye que, para fines de calibración, el modelo que mejor se comporta es el ARMA(3,2), seguido del método de Gill (si se toma en cuenta tanto el gasto de salida de pico como su tiempo de ocurrencia), este método presenta deficiencias, se observa que en las horas 18 y 24 los gastos que se obtienen están muy por debajo de los valores reales; si sólo es de interés el gasto de pico el modelo que da el mejor resultado es el AD propuesto y trabajado por Aguilar (1995); el modelo que proporciona el peor error en el gasto de pico es el de O'Donell, el cual también reporta valores muy por debajo de los reales en las horas 28 y 24, considerándose deficiente.

Para esta primera parte del problema, el hidrograma de entrada utilizado con propósitos de calibración cuenta con un coeficiente de asimetría de 1.369 y un coeficiente de curtosis de 3.596 por lo que la muestra no tiene una distribución normal; en cuanto a la prueba de independencia, por tenerse 31 datos se calcularon ocho valores de r_k y se determinó que cuatro puntos se salían de los límites de confianza del correlograma, Figura 5.4 ;teniéndose eventos dependientes, y por lo tanto la variable no es aleatoria, sino determinística. A pesar de ello el modelo ARMA(3,2), proporcionó los mejores resultados en la calibración.

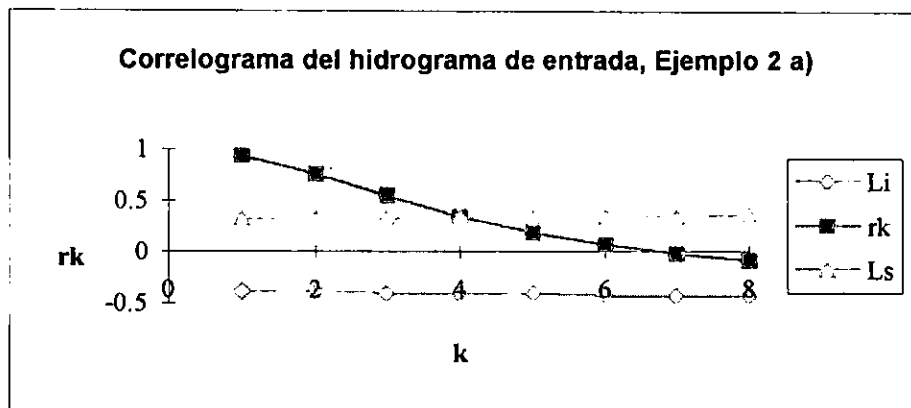
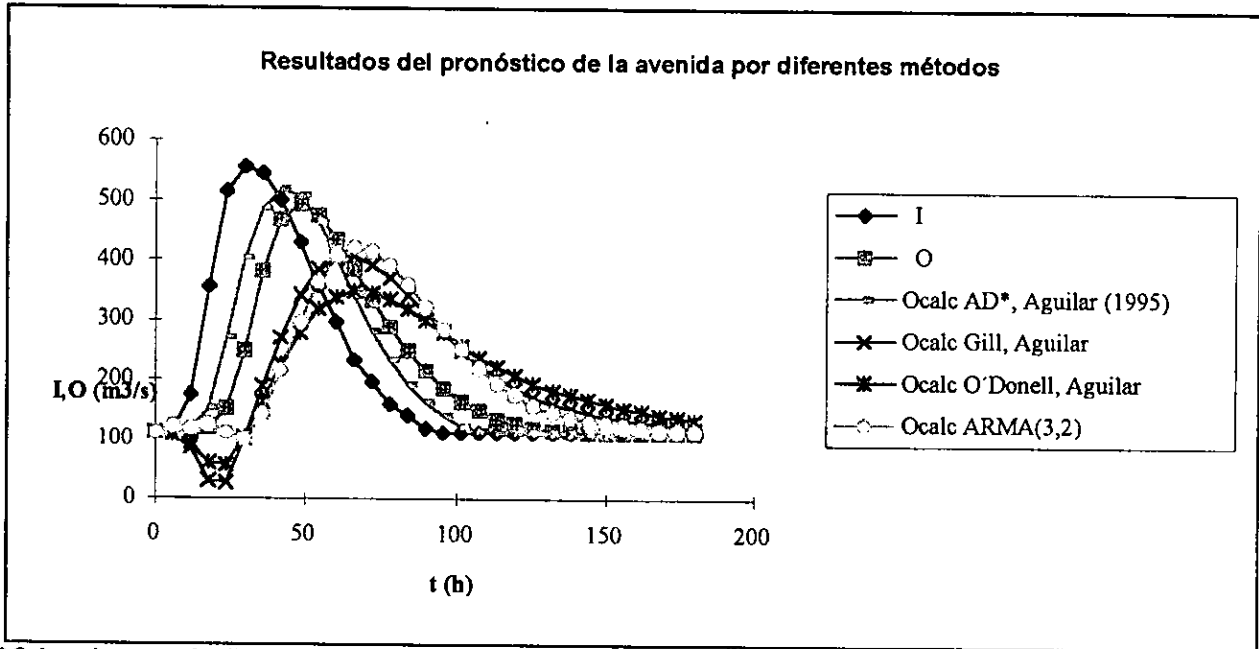


Figura 5.4 Correlograma de los datos del hidrograma de entrada, Ejemplo 2a)

En lo que se refiere a los cálculos realizados con fines de pronóstico, para una avenida con un hidrograma de entrada cinco veces mayor que el utilizado en la calibración, se obtuvieron los siguientes hidrogramas de salida, Figura 5.5.



* Cabe aclarar que Aguilar (1995), realizó correcciones en los parámetros de su modelo AD para usarlo con fines de pronóstico, mientras que para los otros métodos no se realizan cambios.

Figura 5.5 Resultados del pronóstico correspondiente a cinco veces la avenida utilizada en la calibración, Ejemplo 2 b)

El gasto de salida considerado como "real" fue obtenido por Aguilar (1995) utilizando un método hidráulico resuelto con un esquema en diferencias finitas (Aguilar, 1995); dicho gasto de salida se comparó con el pronóstico dado por los otros métodos; El gasto de pico de salida "real" ocurre en la hora 48, siendo de 492.756 m³/s; los errores relativos en % correspondientes al gasto de pico de salida y al tiempo de pico proporcionado por los distintos métodos en el pronóstico se incluyen en el Cuadro 5.3 .

Cuadro 5.3 Error relativo en % en el gasto de pico de salida y en el tiempo pico obtenido en el pronóstico, por diferentes métodos de tránsito de avenidas en cauces, Ejemplo 2 b)

Método	AD* Aguilar (1995)	Gill Aguilar (1995)	O'Donell Aguilar (1995)	ARMA(3,2)
Q_{pico} Error relativo en %	4.99	17.26	29.20	14.62
t_{pico} Error relativo en %	12.5	37.5	37.5	37.5

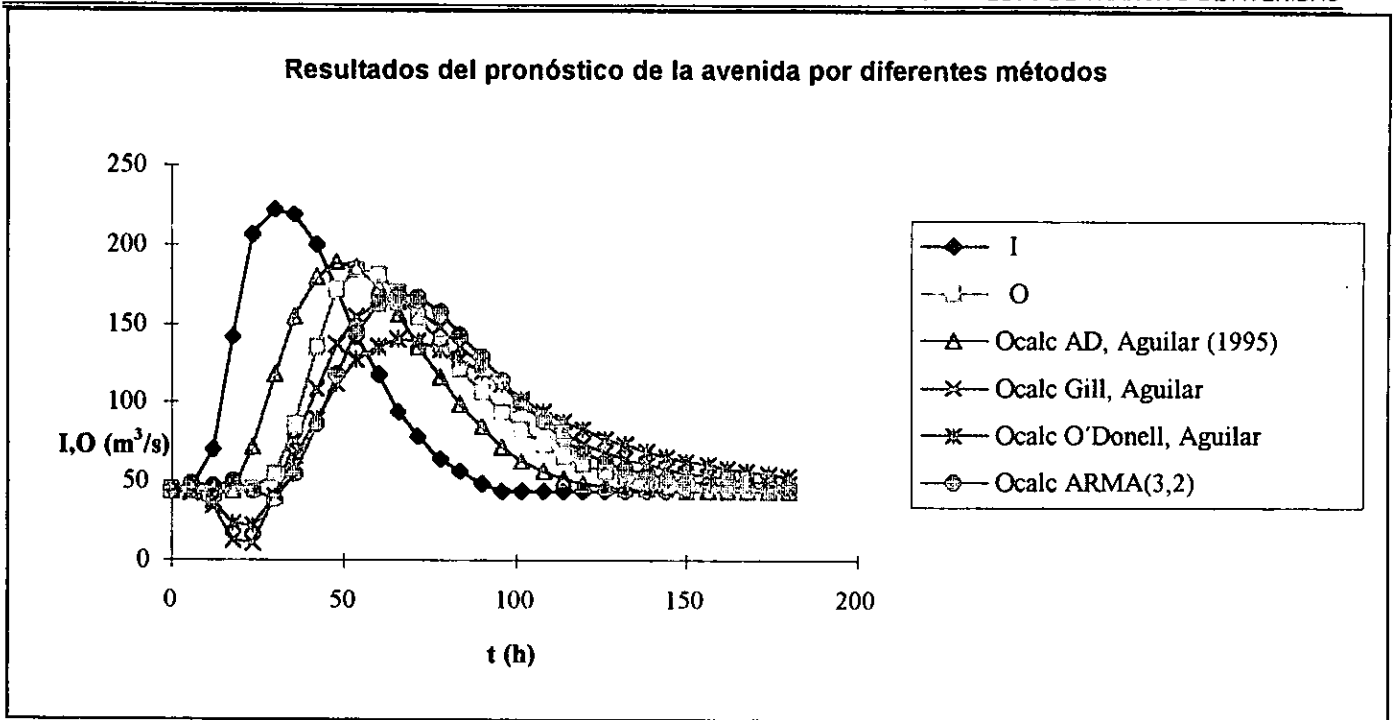
* Utiliza modificaciones en sus parámetros (Aguilar, 1995).

De acuerdo con la Figura 5.4, los hidrogramas de salida obtenidos muestran que, por una parte, el hidrograma de salida considerado como "real" obtenido por Aguilar (1995) presenta poca atenuación y retraso, ocurriendo el gasto de salida de pico tan sólo un instante después que el gasto de pico de entrada, en la hora 48, casi no se observa el efecto de almacenamiento al incrementar cinco veces el hidrograma de entrada; el método AD es el único que refleja lo anterior, por otra parte, los métodos de Muskingum por Gill y O'Donell así como el modelo ARMA(3,2) siguen reportando un efecto de atenuación y retraso, resultado del almacenamiento en el tramo, que en este caso no ocurre.

El error relativo en % en el gasto de pico obtenido resulta menor por el método AD con parámetros modificados, siendo del 4.99%, con un error en el tiempo de pico del 12.5 %, el modelo ARMA(3,2) presenta el segundo menor error en el gasto de pico de salida, siendo del 14.62% pero el tiempo de pico tiene un error del 37.5%, es muy grande, le siguen en error el método de Gill con un error del 17.26% en el gasto de pico de salida y el mismo error en el tiempo de pico y finalmente el método de O'Donell con un error del 29.2 % en el gasto de pico de salida y también con un error del 37.5% en el tiempo de pico.

En este caso, se concluye que con fines de pronóstico el mejor método es el AD, con parámetros modificados por Aguilar (1995), resultados regulares los proporcionan el ARMA(3,2), seguido del método de Gill y el método que da el peor pronóstico es el de O'Donell; estos dos últimos métodos siguen observando deficiencias en la estimación de una porción del hidrograma de salida, como se observa en la Figura 5.5. Cabe aclarar que en este caso todos los métodos fallan en la obtención del tiempo de pico real.

Para el pronóstico de una avenida correspondiente a dos veces los valores del hidrograma de entrada, los hidrogramas de salida que resultaron, se presentan en la Figura 5.6.



* Cabe aclarar que Aguilar (1995), realizó correcciones en los parámetros de su modelo AD para usarlo con fines de pronóstico, mientras que para los otros métodos no se realizan cambios

Figura 5.6 Resultados del pronóstico correspondiente a dos veces la avenida utilizada en la calibración, Ejemplo 2 c)

En este caso, el gasto de salida de pico, se presenta en la hora 54, siendo de 183.865 m³/s, los errores relativos en % en el gasto de pico de salida y en el tiempo de pico obtenidos por los métodos en el pronóstico son, Cuadro 5.4:

Cuadro 5.4 Error relativo en % en el gasto de pico de salida y en el tiempo de pico obtenidos en el pronóstico, por diferentes métodos de tránsito de avenidas en cauces, ejemplo 2 c)

Método	AD* Aguilar (1995)	Gill Aguilar (1995)	O'Donell Aguilar (1995)	ARMA(3,2)
Q_{pico} Error relativo en %	2.78	11.30	24.11	8.48
t_{pico} Error relativo en %	11.11	22.22	22.22	22.22

* Utiliza modificaciones en sus parámetros (Aguilar, 1995).

En este caso el modelo AD* presenta el menor error del 2.786 % en el gasto de pico de salida así como un error del 11.11% en el tiempo de pico, seguido por el modelo ARMA(3,2), el cual presenta un error del 8.48% en el gasto de pico de salida y un error del

22.22 % en el tiempo de pico; en este caso el modelo ARMA(3,2) da resultados por debajo de los "reales", pronosticando mayor efecto de atenuación y retraso que el modelo AD*, el tercer lugar lo ocupa el método de Gill con un error en el gasto de pico del 11.30% y 22.22% de error en el tiempo de pico y finalmente el método de O'Donell con un error del 24.11% en el gasto de pico de salida y un error del 22.22% en el tiempo de pico.

Nuevamente los métodos de Gill, O'Donell y ARMA (3,2) reflejan mayores efectos de atenuación y retraso que el método AD propuesto por Aguilar(1995) que en este caso es el mejor método con fines de pronóstico, le siguen el modelo ARMA(3,2) , Gill y el menos conveniente es el de O'Donell.

En este caso el modelo ARMA(3,2) presenta el segundo menor error relativo tanto en gasto de pico como en tiempo de pico; pero hay que tomar en cuenta que en general el hidrograma obtenido es menor que el "real" ; reporta mayor atenuación y retraso que lo que sucede realmente en la sección de canal analizada; el método AD con parámetros modificados por Aguilar(1995) supera en este caso al modelo en estudio.

Debe tomarse en cuenta que en los incisos b) y c) los correlogramas del hidrograma de entrada son idénticos al de la avenida original planteada en a); es decir, existe dependencia de eventos y la variable no es aleatoria sino determinística; en el Anexo 2 se presentan dichos correlogramas.

5.3 Ejemplo No. 3

En el tercer ejemplo se ha utilizado la avenida trabajada por Salas (1995), el cual a partir de un hidrograma de entrada conocido, toma como hidrograma de salida "real" el proporcionado por el método hidráulico resuelto por el esquema Sánchez-Fuentes y realiza el tránsito por el método de Muskingum-Cunge, variando sus parámetros; en particular se usan los resultados obtenidos por Salas(1995) considerando un $\Delta t = 50$ minutos para compararlos con los obtenidos por el modelo ARMA(3,2) cuando se calibran sus parámetros con los datos del hidrograma de salida dado por el método Sánchez-Fuentes. Los datos del ejemplo 3 y las operaciones realizadas en la hoja de cálculo en EXCEL se presentan en el Anexo 3 de este trabajo.

En este ejemplo se observa claramente que el hidrograma de entrada está basado en ecuaciones determinísticas, como se aprecia en la Figura 5.7, en la que también se muestran los resultados de la calibración del modelo ARMA(3,2):

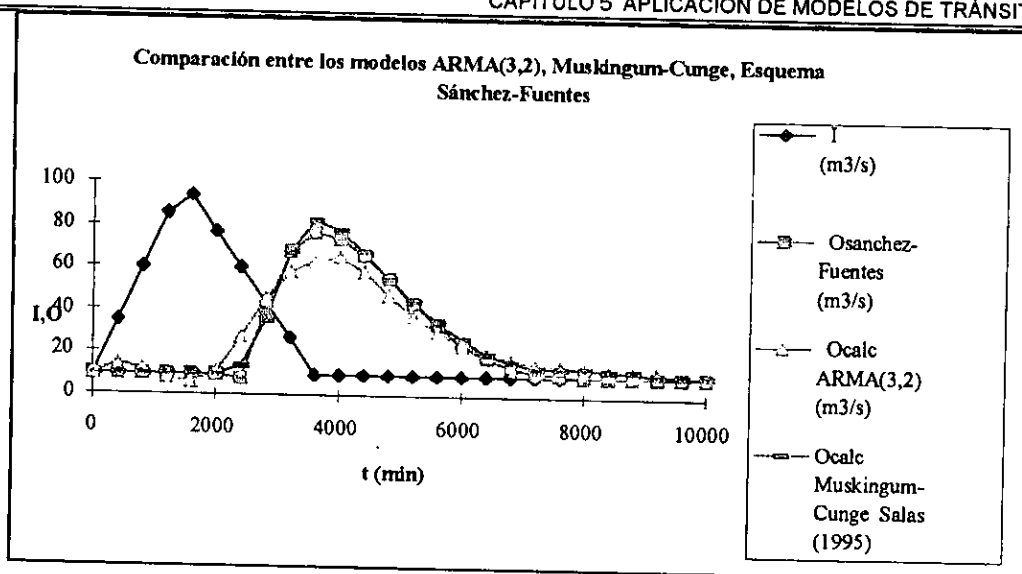


Figura 5.7 Calibración del modelo ARMA(3,2) y su comparación con los resultados del método Muskingum-Cunge y Esquema Sánchez -Fuentes, Ejemplo 3

En este problema, el gasto de pico de salida, de acuerdo con el esquema Sánchez-Fuentes trabajado por Aguilar (1995) se presenta en el minuto 3600, siendo de 76.8 m³/s, comparando los resultados obtenidos por los modelos, en lo que se refiere a gastos de pico de salida y tiempos de pico, Cuadro 5.5:

Cuadro 5.5 Error relativo en % en el gasto de pico de salida y tiempo de pico, Ejemplo 3

Método	Muskingum-Cunge Salas (1995)	ARMA (3,2)
O_{pico} Error relativo en %	7.16	15.43
t_{pico} Error relativo en %	0	11.11

En este caso el método de Muskingum-Cunge proporciona el menor error en la estimación de gasto de pico, siendo del 7.16 % y con error nulo en tiempo de pico; el modelo ARMA(3,2) presenta mayor error tanto en el gasto de pico, 15.43% , como en el tiempo de pico, 11.11%, en este caso el modelo ARMA(3,2) es superado, lo anterior se atribuye a la ecuación determinística utilizada por Salas(1995) para establecer el hidrograma de entrada.

El modelo ARMA(3,2) refleja mayor atenuación y retraso en la onda de avenida que lo que reporta el resultado "real" dado por el esquema Sánchez Fuentes y que es bien reflejado por el método de Muskingum-Cunge.

No hay que perder de vista que los resultados que se obtienen por el Método de Muskingum-Cunge dependen de los valores de Δt y Δx que se consideren.

De acuerdo con la prueba de independencia, en la que no más del diez por ciento de los valores de r_k deben estar fuera de los límites de confianza para que exista independencia de eventos, la variable está en el límite entre un comportamiento determinístico y uno aleatorio porque son 24 valores de r_k y tres puntos fuera de los límites de confianza.; además, de acuerdo como se muestra en el correlograma, Figura 5.8, los datos no tienen una distribución normal (coeficiente de asimetría igual a 1.557 y coeficiente de curtosis igual a 4.324), (ver Anexo 3) y lo anterior afecta la aplicabilidad de los modelos ARMA(p, q).

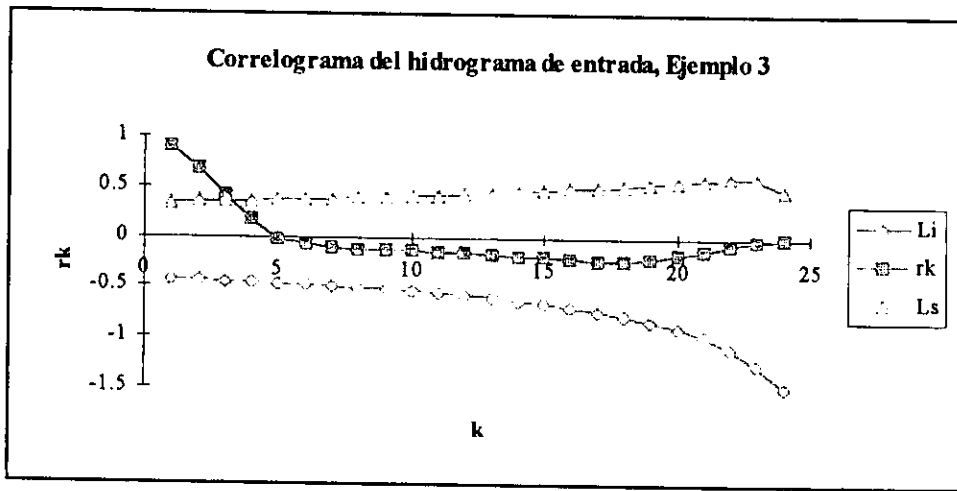
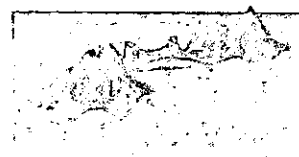


Figura 5.8 Correlograma de los datos del hidrograma de entrada del Ejemplo 3

Los resultados obtenidos con los ejemplos vistos hacen ver que los modelos ARMA(p, q) se pueden aplicar con buenos resultados con fines de calibración en cuencas con información, en especial, si se trata de variables aleatorias, para posteriormente utilizarse en avenidas que tengan el mismo patrón que la empleada en la calibración de los parámetros; requiriendo únicamente el hidrograma de entrada o en la sección aguas arriba, así como el primer dato de salida de la sección aguas abajo; los resultados del método reflejan la atenuación y el retraso debidos al efecto del almacenamiento en el tramo de cauce analizado; si la avenida que se desea transitar es muy diferente a la utilizada en la calibración de los parámetros, se ha observado que el modelo ARMA(3,2) ya no proporciona resultados similares a los que se obtienen de métodos hidráulicos que requieren el conocimiento de datos específicos del cauce en estudio. Deben desarrollarse técnicas para corregir los parámetros del método tomando en cuenta el nuevo hidrograma de entrada.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES



BIBLIOGRAFÍA



BIBLIOGRAFÍA

Aguilar Garduño E., Método Hidrológico con Base Física para el Tránsito de Avenidas. Tesis de Maestría. DEPMI. UNAM. 1995.

Amein, M., Ling Chu M., "Implicit Numerical Modeling of Unsteady Flow". Journal of Hydraulics Division. ASCE, Vol 101, No. HY6, June 1975. pags. 717-731.

Aparicio, M. Francisco J. Fundamentos de Hidrología de Superficie. Limusa-Noriega editores. México, 1996.

Campos, A. Daniel Francisco. "Modelo Matemático Determinístico para Pronóstico de Crecientes en Cuencas Rurales". Ingeniería Hidráulica en México, Vol IX, No. 1 pags:43-62, enero-abril 1994.

Cappelaere, B., "Accurate Diffusive Wave Routing". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. Vol. 123, No. 3, March 1997, pags. 174-181.

CFE, Manual de Diseño de Obras Civiles. Hidrotecnia .A.1.8 Tránsito de Avenidas en Vasos. México, 1980.

CFE, Manual de Diseño de Obra Civiles. Hidrotecnia. A.2.16. Métodos Numéricos, México, 1983.

Chow, V.T. Hidráulica de Canales Abiertos. Mc Graw Hill. Colombia, 1994.

Collado, J.,Wagner A.I." Un Método para Transitar Avenidas en Redes Hidrográficas Preservando Correlación de Gastos".Décimo Primer Congreso Nacional de Ingeniería Hidráulica, Tomo II. Asociación Mexicana de Hidráulica A.C, México, 1990.

Domínguez Mora R, J.E.M, Reflexiones sobre las Inundaciones en México. Cuadernos de Investigación, No. 4, Julio 1994. Centro Nacional de Prevención de Desastres, México.

Domínguez, Mora R, J.E.M. Modelo Lluvia-Escurrimiento. Cuadernos de Investigación, No. 5, Julio 1994. Centro Nacional de Prevención de Desastres, México.

Escalante, S. C.A., Tránsito de Avenidas Utilizando Modelación Estocástica. Subtema del Curso Técnicas Estadísticas en Hidrología, DEPMI. UNAM, México, 1990.

Fuentes, Mariles O.A, S.S.M.A, Escurremientos en Ríos y Volúmenes de Inundación por Desbordamiento. Cuadernos de Investigación, No. 26, Febrero 1996. Centro Nacional de Prevención de Desastres, México.

Fuentes, Mariles O.A., F.H.L.E., Modelo Matemático de Áreas de Inundación, Cuadernos de Investigación, No. 41, mayo 1997, Centro Nacional de Prevención de Desastres, México.

Fuentes, Mariles O.A., M.A.P., Introducción a los Métodos Numéricos Aplicados a la Hidráulica. IMTA, SARH, septiembre 1988.

Gottschalk, L., L.G, Stochastic Processes in Water Resources Engineering, Second International Symposium of Stochastic Hydraulic, Lund Institute of Technology , Univesity of Lund, Water Resources Publication, Sweden, Agosto 2-4, 1976.

Gupta, Ram S., Hydrology and Hydraulic Systems., Prentice Hall, USA, 1989.

Henderson, F.M., Open Channel Flow, Mc Millan Company, USA, 1966.

Henderson, F.M., "Flood Waves in Prismatic Channels". Journal of the Hydraulics Division. ASCE, Vol. 189 No. HY4 July 1963, part 1, pags. 39-67 .

Hoggan, Daniel H., Computer-Assisted Flood Plain Hydrology and Hydraulics, Featuring the US Army Corpos of Enginners' HEC-1 and HEC-2 Software Systems, Mc Graw Hill, USA, 1989.

Hrodomadkall, T. V., Whitley, R.J, Stochastic Integral Equations and Rainfall-Runoff Models, Springer-Verlag, USA 1989.

Jin, Ming, D.L. Fread, "Channel Routing with Flow Losses", Technical Notes, Journal of Hydraulics Engineering, ASCE, Vol 122 No. 10, October 1996, pags. 580-582.

Jin Ming, Fread D.L., "Dynamic Flood Routing with Explicit and Implicit Numerical Solution Schemes". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE. Vol 123, No. 3, March 1997, pags 166-173.

Kuo, Chin Y., Engineering Hydrology, Hydraulics Division of the ASCE, San Fco. California, Julio 25-30 1993.

Kulandaiswamy, V.C, M.Krishnaswami, M. Ramlingam, T.N. "Flood Routing Through Channels". Journal of Hidrology, No. 5 , 1967, pags. 279-285.

-
- Linsley, Kohler P. Hidrología para Ingenieros. Segunda edición. Mc Graw-Hill, México 1988.
- Martínez, Barbosa Pablo J. Modelación de Cuencas. Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPFI. UNAM. 1996.
- Mc Cuen, Richard H., Hydrologic Analysis and Design, Prentice Hall, USA, 1989.
- Mohan, S. Parameter Estimation on Nonlinear Muskingum Models using Genetic Algorithm. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol 123, No. 2, February 1997, pags. 137-142.
- O'Donnell, Terence, "A Direct Three-Parameter Muskingum Procedure Incorporating Lateral Inflow". Hydrological Sciences Journal, Vol.30 No. 4, 1985, pags. 479-496.
- O'Donnell, Terence, Pearson, C.P, W.R.A, "Improved fitting for Three-Parameter Muskingum Procedure. Journal of Hydraulic Engineering. ASCE. Vol 114, No.5, May 1988, pags. 516-528.
- Perumal, Muthiah, Seth, S.M., "On the Mathematics of Storage Routing - A Comment". Journal of Hidrology, No. 73, 1984. Pags. 389-394.
- Perumal, Muthiah, "Unification of Muskingum Schemes". Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol. 115, No. 4, April 1989. Pags. 536-543.
- Ponce, Victor M., Engineering Hydrology. Principles and Practices, Prentice Hall, USA, 1989.
- Quick, M.C., Pipes, A., "Nonlinear Channel Routing by Computer". Journal of the Hydraulics Division. ASCE, Vol. 101, No. HY6, June 1975, pags. 651-664.
- Raudkivi, A.J. Hidrology. Pergamon Press, 1979.
- Rivera, T. J.L., Estimación Conjunta de Gasto Pico y Volumen Total de Avenidas. Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPFI. UNAM. 1997.
- Robertson, Cassidy, Chaudry., Hydraulic Engineering, Houghton Mifflin Company, USA, 1988.
- Salas, J.D., Delleur, J.W. et Al., Applied Modeling of Hydrologic Time Series. Water Resources Publications. U.S.A., 1980.
- Salas, Salinas Marco A. Método de Muskingum-Cunge, Análisis de Sensibilidad y Límites de Aplicación. Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPFI. UNAM. 1995.
-

Singh, Vijay P. Hydrologic Systems .Rainfall-Runoff Modeling Vol 1. Prentice Hall, USA 1988.

Singh, Vijay P., D Scarlatos P., "Analysis of Nonlinear Muskingum Flood Routing.", Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol 113, No.1 January 1987.

Wang G.T, Yun S.Y, Wu W. "Improved Flood Routing by ARMA Modelling and the Kalman Filter Technique". Journal of Hidrology, No. 93 , 1987, pags. 175-190.

Vega, P. Macario." El Método de Puls Modificado para el Estudio del Paso de Avenidas por Vasos Reguladores". Ingeniería Hidráulica en México, Vol XXII, No.1, 1988.

Viessman,W., Lewis, G.L, Knapp. Introduction to Hydrology. Harper and Row, Third Edition, 1989.

White, W.R., Watts J., "Second International Conference on River Floods Hydraulics". H. R. Wallingford LTD, By John Wiley and Sons, Great Britain 1994.

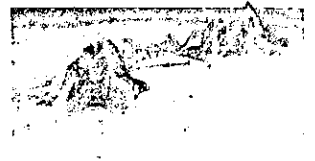
Wilson, E.M. Engineering Hydrology. Macmillan Civil Engineering Hydraulics. Hong Kong 1985.

Yeou-Koung-Tung, "River Flood Routing by Nonlinear Muskingum Method". Journal of Hydraulic Engineering. ASCE, Vol 111, No.12, Dec. 1985.

ANEXO 1
EJEMPLO 1



HOJA DE CÁLCULO DEL EJEMPLO 1

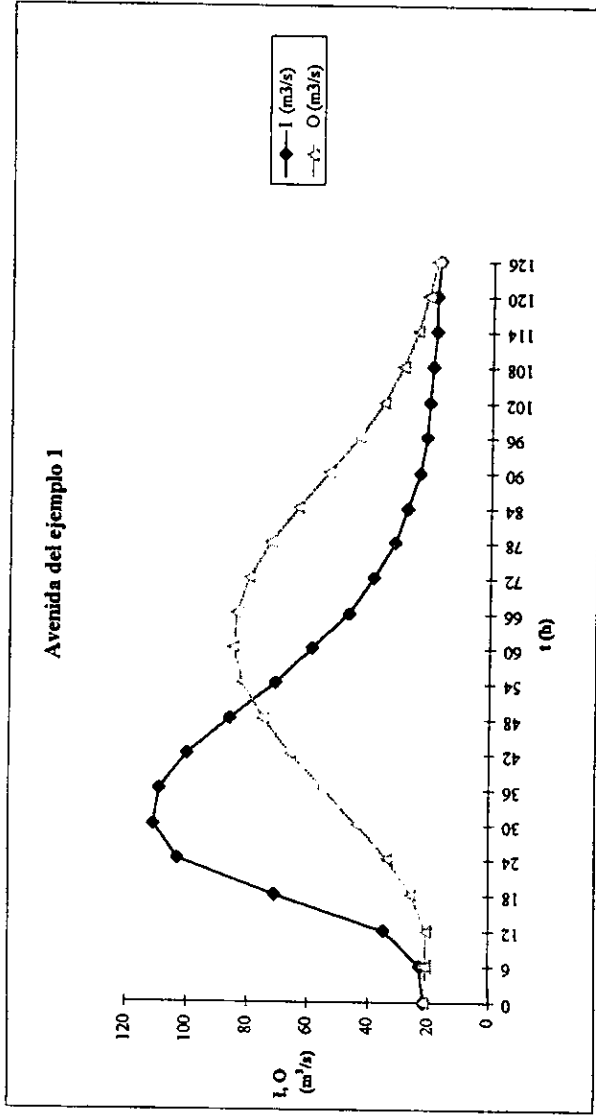


Ejemplo 1 Aplicación de modelos de tránsito de avenidas en una cuenca con Información.

1.a) Método de Muskingum, procedimiento por tanteos

Se conocen los hidrogramas de entrada y salida de un tramo de cauce para distintos instantes:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	22	22
6	23	21
12	35	21
18	71	26
24	103	34
30	111	44
36	109	55
42	100	66
48	86	75
54	71	82
60	59	85
66	47	84
72	39	80
78	32	73
84	28	64
90	24	54
96	22	44
102	21	36
108	20	30
114	19	25
120	19	22
126	18	19



Se calcula el almacenamiento acumulado:

t (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .día/4s)	S _{acum.} (m ³ .día/4s)	S _{acum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	96.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando $(b+B)/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son
 m³.día/4s

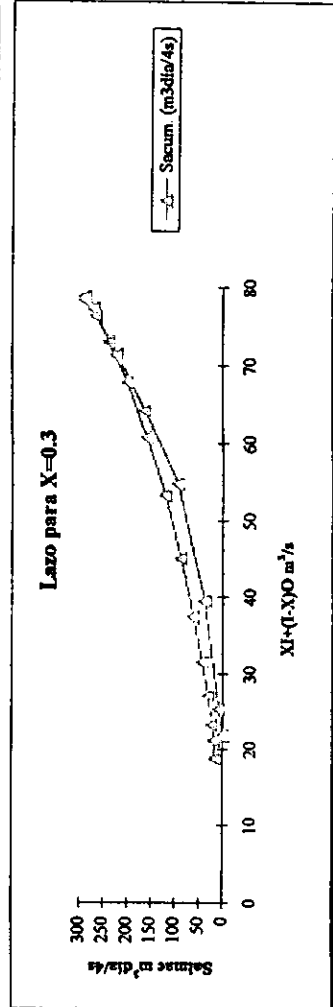
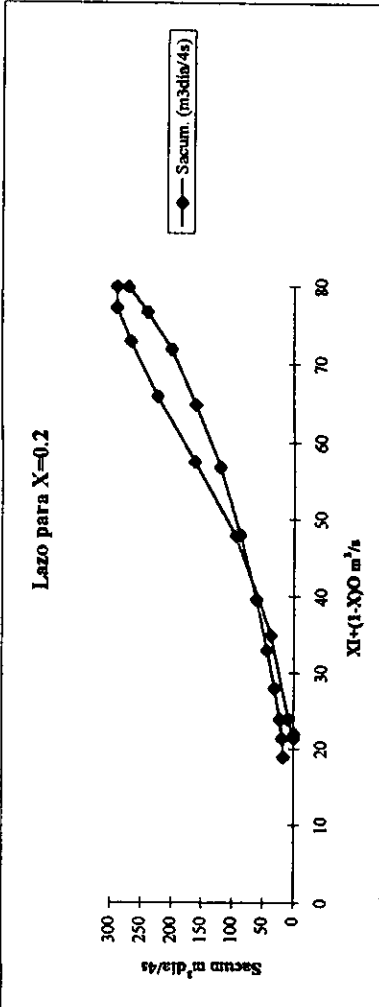
Procedimiento por tanteos:

Para calcular X se proponen valores de este parámetro y se graficará el almacenamiento acumulado S_{acum} contra $(X)(1-X)(O)$

Tiempo (h)	X=0.2		X=0.3		X=0.25		X=0.24	
	(X)(1-X)(O) (m ³ /s)	S_{acum} (m ³ día/4s)	(X)(1-X)(O) (m ³ /s)	S_{acum} (m ³ día/4s)	(X)(1-X)(O) (m ³ /s)	S_{acum} (m ³ día/4s)	(X)(1-X)(O) (m ³ /s)	S_{acum} (m ³ día/4s)
0	22	0	22	0	22	0	22	0
6	21.4	1	21.6	1	21.5	1	21.48	1
12	23.8	9	25.2	9	24.5	9	24.36	9
18	35	38.5	39.5	38.5	37.25	38.5	36.8	38.5
24	47.8	95.5	54.7	95.5	51.25	95.5	50.56	95.5
30	57.4	163.5	64.1	163.5	60.75	163.5	60.08	163.5
36	65.8	224	71.2	224	68.5	224	67.96	224
42	72.8	268	76.2	268	74.5	268	74.16	268
48	77.2	290.5	78.3	290.5	77.75	290.5	77.64	290.5
54	79.8	290.5	78.7	290.5	79.25	290.5	79.36	290.5
60	79.8	272	77.2	272	78.5	272	78.76	272
66	76.6	240.5	72.9	240.5	74.75	240.5	75.12	240.5
72	71.8	201.5	67.7	201.5	69.75	201.5	70.16	201.5
78	64.8	160.5	60.7	160.5	62.75	160.5	63.16	160.5
84	56.8	122	53.2	122	55	122	55.36	122
90	48	89	45	89	46.5	89	46.8	89
96	39.6	63	37.4	63	38.5	63	38.72	63
102	33	44.5	31.5	44.5	32.25	44.5	32.4	44.5
108	28	32	27	32	27.5	32	27.6	32
114	23.8	24	23.2	24	23.5	24	23.56	24
120	21.4	19.5	21.1	19.5	21.25	19.5	21.28	19.5
126	18.8	17.5	18.7	17.5	18.75	17.5	18.76	17.5

Puntos auxiliares para graficar

X=0.2		X=0.3		X=0.25		X=0.24	
$(XI+(1-X)O)$ (m ³ /s)	S _{acum.} (m ³ día/4s)	$(XI+(1-X)O)$ (m ³ /s)	S _{acum.} (m ³ día/4s)	$(XI+(1-X)O)$ (m ³ /s)	S _{acum.} (m ³ día/4s)	$(XI+(1-X)O)$ (m ³ /s)	S _{acum.} (m ³ día/4s)
18.8	17.5	18.7	17.5	18.75	17.5	18.76	17.5
21.4	19.5	21.1	19.5	21.25	19.5	21.28	19.5
23.8	24	23.2	24	23.5	24	23.56	24
28	32	27	32	27.5	32	27.6	32
33	44.5	31.5	44.5	32.25	44.5	32.4	44.5
39.6	63	37.4	63	38.5	63	38.72	63
48	89	45	89	46.5	89	46.8	89
56.8	122	53.2	122	55	122	55.36	122
64.8	160.5	60.7	160.5	62.75	160.5	63.16	160.5
71.8	201.5	67.7	201.5	69.75	201.5	70.16	201.5
76.6	240.5	72.9	240.5	74.75	240.5	75.12	240.5
79.8	272	77.2	272	78.5	272	78.76	272

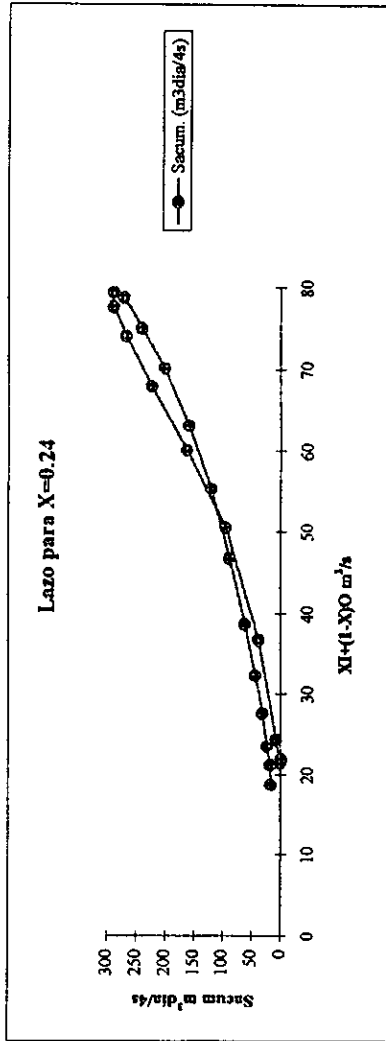
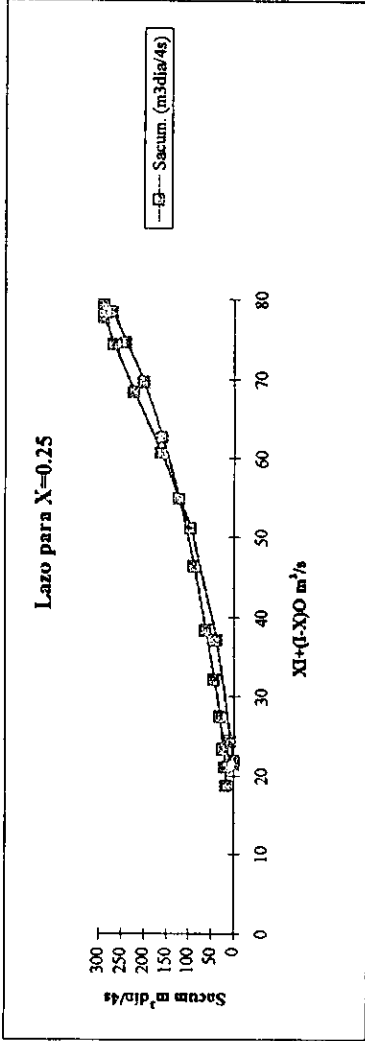


De la recta media:

$$K = (290.5 - 0) / (79.25 - 30)$$

$$K = 5.898 (\text{dia}/4) \times (86400 \text{s}/1 \text{ dia})$$

$$K = 127396.8 \text{ s}$$



Se observa que el lazo más angosto corresponde a la curva para $X= 0.25$
 y al obtener a K como la pendiente de la recta media para dicho lazo (ecuación 3.10) se encuentra que
 $K = 127396.8 \text{ s}$

Con los valores anteriores se obtienen los coeficientes del modelo con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9)
 considerando que $\Delta t = 6h \times 3600 \text{ (s/h)} = 21600 \text{ s}$

$$C_0 = -0.1979283$$

$$C_1 = 0.401035848$$

$$C_2 = 0.796892455$$

Sumando:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad \text{Se cumple con la condición}$$

La ecuación de recurrencia del método de Muskingum , de acuerdo con la ecuación (3.6) , es:

$$O_{t+1} = -0.1979283I_{t+1} + 0.4010358I_t + 0.7968925O_t$$

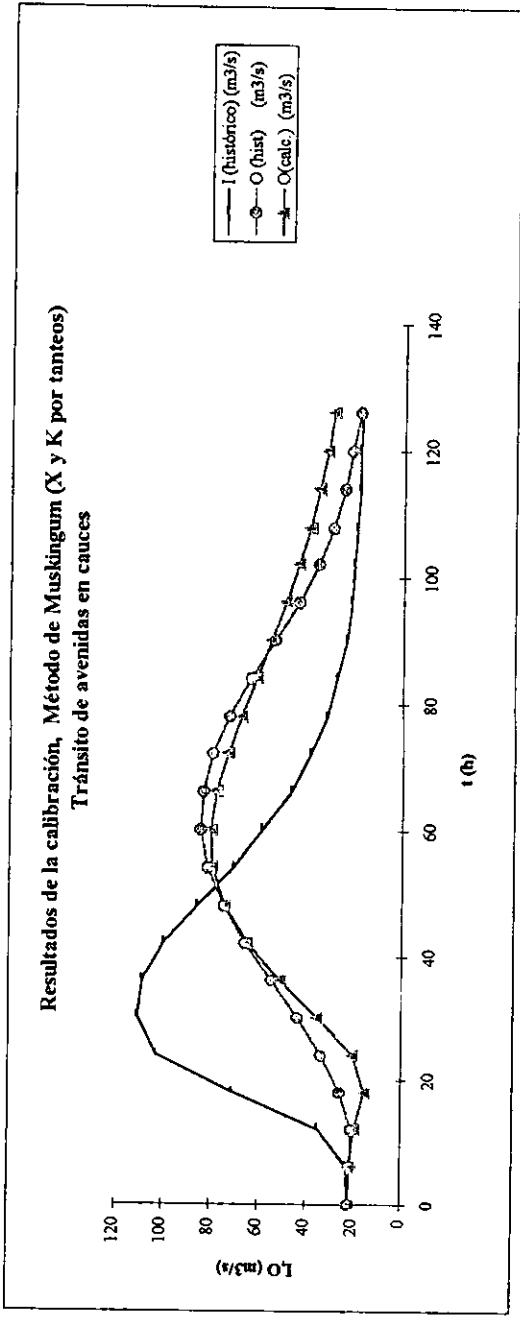
Aplicando la ecuación anterior de manera recursiva, se obtiene el siguiente hidrograma de salida calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O(calc.) (m³/s)	O (hist) (m³/s)
0	22	22.000	22
6	23	21.802	21
12	35	19.670	21
18	71	15.658	26
24	103	20.565	34
30	111	35.725	44
36	109	51.410	55
42	100	64.888	66
48	86	74.790	75
54	71	80.036	82
60	59	80.576	85
66	47	78.569	84
72	39	73.740	80
78	32	68.070	73
84	28	61.536	64
90	24	55.516	54
96	22	49.511	44
102	21	44.121	36
108	20	39.623	30
114	19	35.835	25
120	19	32.416	22
126	18	29.869	19

$\text{Error relativo en \%} = \frac{\text{valor .real} - \text{valor aproximado}}{\text{valor .real}}$

Error relativo % en el gasto de pico	5.205
Error relativo en % en tiempo de pico	0.000

Dibujando los resultados anteriores:



Se observa que el hidrograma de salidas obtenido se ajusta de manera aproximada al histórico

Se presenta un error relativo del 5.20 % en el gasto pico de salida y un 0 % de error en el tiempo de pico.

Almacenamiento calculado:

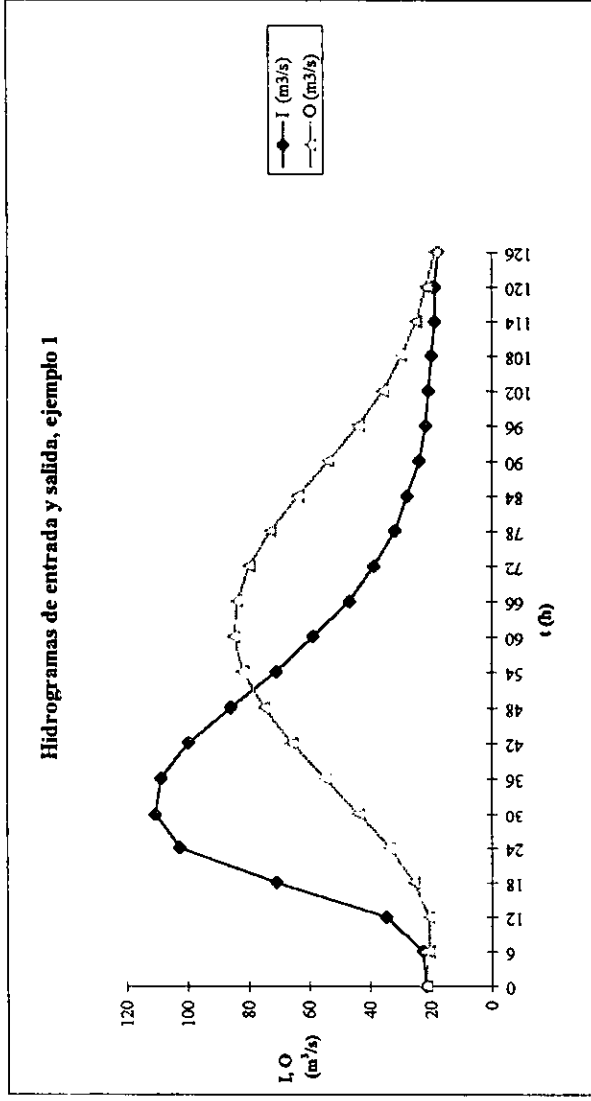
Tiempo (h)	i (hist) (m³/s)	Q(calc.) (m³/s)	S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.dia/4s)	S _{acum} (m³.dia/4s)	S _{acum} (m³)	S _{acum} (hist) (m3)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
6	23	21.802	1.198	0.599	0.599	12937.626	21600.000	40.104
12	35	19.670	15.330	8.264	8.863	191436.656	194400.000	1.524
18	71	15.658	55.342	35.336	44.198	954687.218	831600.000	14.801
24	103	20.565	82.435	68.888	113.087	2442674.4	2062800.0	18.415
30	111	35.725	75.275	78.855	191.942	4145945.1	3531600.0	17.396
36	109	51.410	57.590	66.433	258.375	5580894.5	4838400.0	15.346
42	100	64.888	35.112	46.351	304.726	6582081.0	5788800.0	13.704
48	86	74.790	11.210	23.161	327.887	7082353.5	6274800.0	12.870
54	71	80.036	-9.036	1.087	328.973	7105825.8	6274800.0	13.244
60	59	80.576	-21.576	-15.306	313.667	6775214.7	5875200.0	15.319
66	47	78.569	-31.569	-26.572	287.095	6201250.3	5194800.0	19.374
72	39	73.740	-34.740	-33.155	253.940	5485109.9	4352400.0	26.025
78	32	68.070	-36.070	-35.405	218.535	4720358.5	3466800.0	36.159
84	28	61.536	-33.536	-34.803	183.732	3968620.1	2635200.0	50.600
90	24	55.516	-31.516	-32.526	151.207	3266064.4	1922400.0	69.895
96	22	49.511	-27.511	-29.513	121.693	2628577.4	1360800.0	93.164
102	21	44.121	-23.121	-25.316	96.378	2081755.8	961200.0	116.579
108	20	39.623	-19.623	-21.372	75.006	1620122.6	691200.0	134.393
114	19	35.835	-16.835	-18.229	56.777	1226375.4	518400.0	136.569
120	19	32.416	-13.416	-15.126	41.651	899663.5	421200.0	113.595
126	18	29.889	-11.889	-12.652	28.989	626371.7	378000.0	65.707

¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son m³.dia/4s

1. b) Muskingum, Mínimos cuadrados, de acuerdo con Aldama(1987)

A partir de los datos de entrada y salida:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	22	22
6	23	21
12	35	21
18	71	26
24	103	34
30	111	44
36	109	55
42	100	66
48	86	75
54	71	82
60	59	85
66	47	84
72	39	80
78	32	73
84	28	64
90	24	54
96	22	44
102	21	36
108	20	30
114	19	25
120	19	22
126	18	19



Se calcula el almacenamiento acumulado:

t (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{acum.} (m ³ .dia/4s)	S _{acum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando (b+B)/2 estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son
 m³.dia/4s

Aplicando mínimos cuadrados de acuerdo con Aldama(1987):

t (h)	i (m ³ /s)	O (m ³ /s)	Sacum. (m ³)	i ²	O ²	S ²	IO	SI	SO
0	22	22	0	484	484	0	484	0	0
6	23	21	21600	529	441	466560000	483	496800	453600
12	35	21	194400	1225	441	3.7791E+10	735	6804000	4082400
18	71	26	831600	5041	676	6.9156E+11	1846	59043600	21621600
24	103	34	2062800	10609	1156	4.2551E+12	3502	212468400	70135200
30	111	44	3531600	12321	1936	1.2472E+13	4884	392007600	155390400
36	109	55	4838400	11881	3025	2.341E+13	5995	527385600	266112000
42	100	66	5788800	10000	4356	3.351E+13	6600	578880000	382060800
48	86	75	6274800	7396	5625	3.9373E+13	6450	539632800	470610000
54	71	82	6274800	5041	6724	3.9373E+13	5822	445510800	514533600
60	59	85	5875200	3481	7225	3.4518E+13	5015	346636800	499392000
66	47	84	5194800	2209	7056	2.6986E+13	3948	244155600	436363200
72	39	80	4352400	1521	6400	1.8943E+13	3120	169743600	348192000
78	32	73	3466800	1024	5329	1.2019E+13	2336	110937600	253076400
84	28	64	2635200	784	4096	6.9443E+12	1792	73785600	168652800
90	24	54	1922400	576	2916	3.6956E+12	1296	46137600	103809600
96	22	44	1360800	484	1936	1.8518E+12	968	29937600	59875200
102	21	36	961200	441	1296	9.2391E+11	756	20185200	34603200
108	20	30	691200	400	900	4.7776E+11	600	13824000	20736000
114	19	25	518400	361	625	2.9874E+11	475	9849600	12960000
120	19	22	421200	361	484	1.7741E+11	418	8002800	9266400
126	18	19	378000	324	361	1.4288E+11	342	6804000	7182000
Sumas:	1079	1062	57596400	76493	63488	2.6007E+14	57867	3842229600	3839108400

Utilizando las ecuaciones (3.23) y (3.24):

A= 14443.43909

B= 47305.15861

Sustituyendo en (3.15) y (3.16):

X= 0.23390716

K= 61748.59771

Con los valores anteriores se obtienen los coeficientes del modelo con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9)

considerando que Dt= 6h*3600 (s/h)= 21600 s

C₀= -0.062704228

C₁= 0.434444027

C₂= 0.628260201

Sumando:

C₀+C₁+C₂= 1

Se cumple con la condición

La ecuación de recurrencia del método de Muskingum, de acuerdo con la ecuación (3.6), es:

$$O_{t+1} = -0.062704228I_{t+1} + 0.434444027I_t + 0.628260201O_t$$

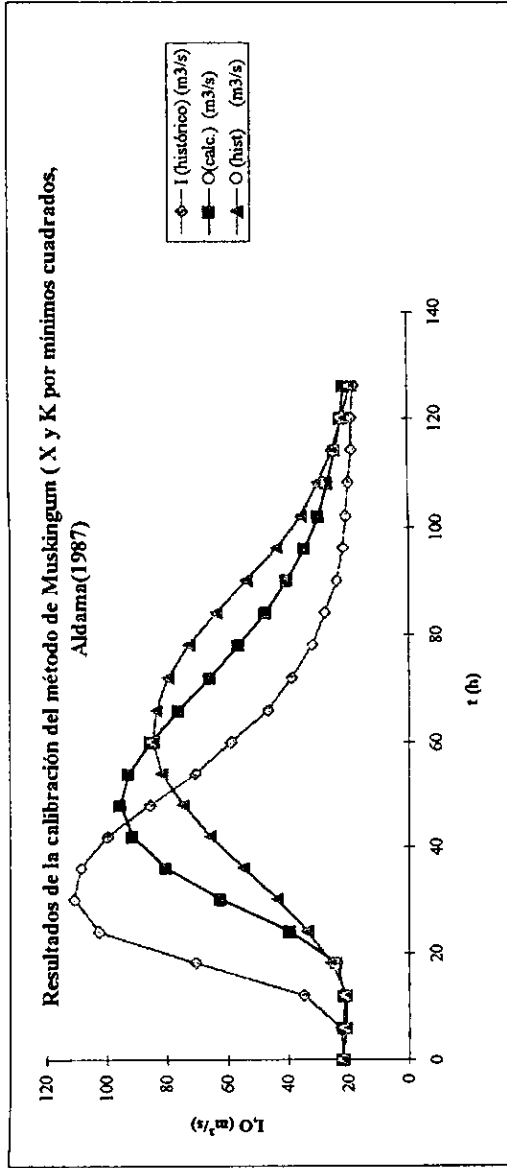
Aplicando la ecuación anterior de manera recursiva, se obtiene el siguiente hidrograma de salida calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O(calc.) (m³/s)	O (hist) (m³/s)
0	22	22.000	22
6	23	21.937	21
12	35	21.580	21
18	71	24.311	26
24	103	39.661	34
30	111	62.705	44
36	109	80.784	55
42	100	91.837	66
48	86	95.749	75
54	71	93.066	82
60	59	85.615	85
66	47	76.474	84
72	39	66.019	80
78	32	56.414	73
84	28	47.589	64
90	24	40.558	54
96	22	34.528	44
102	21	29.934	36
108	20	26.675	30
114	19	24.257	25
120	19	22.302	22
126	18	21.138	19

$$\text{Error relativo en \%} = \frac{\text{valor real} - \text{valor aproximado}}{\text{valor real}}$$

Error relativo % en el gasto de pico	12.646
Error relativo en % en tiempo de pico	20

Dibujando los resultados anteriores:



Este método reporta menor atenuación y retraso en la onda de avenida.

Se presenta un error relativo del 12.65% en el gasto pico de salida y un error relativo del 12% en el tiempo de pico.

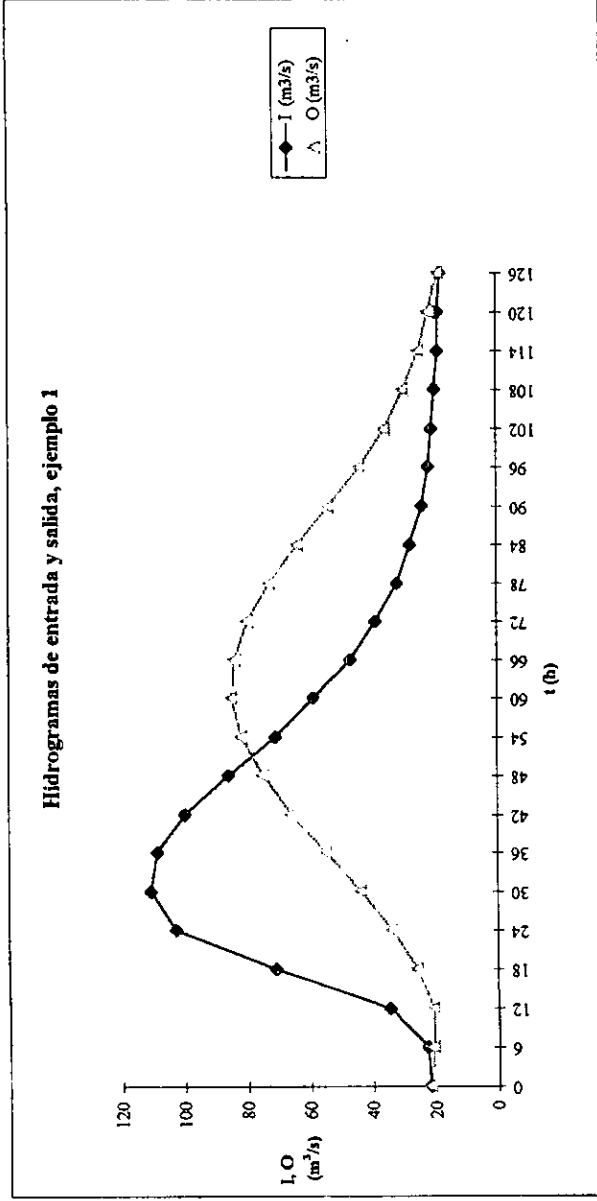
Almacenamiento calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O(calcul.) (m³/s)	S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.dia/4s)	S _{acum} (m³.dia/4s)	S _{acum} (calc) (m³)	S _{acum} (hist) (m³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22	0	0	0	0	0	
6	23	21.94	1.06	0.53	0.53	11477.21	21600.00	46.86
12	35	21.58	13.42	7.24	7.77	167891.55	194400.00	13.64
18	71	24.31	46.69	30.05	37.83	817066.33	831600.00	1.75
24	103	39.66	63.34	55.01	92.84	2005366.99	2062800.00	2.78
30	111	62.70	48.30	55.82	148.66	3211017.23	3531600.00	9.08
36	109	80.78	28.22	38.26	186.91	4037342.53	4838400.00	16.56
42	100	91.84	8.16	18.19	205.10	4430240.56	5788800.00	23.47
48	86	95.75	-9.75	-0.79	204.31	4413107.03	6274800.00	29.67
54	71	93.07	-22.07	-15.91	188.40	4069603.75	6274800.00	35.15
60	59	85.62	-26.62	-24.34	164.06	3543746.93	5875200.00	39.68
66	47	76.47	-29.47	-28.04	136.02	2937981.91	5194800.00	43.44
72	39	66.02	-27.02	-28.25	107.77	2327859.74	4352400.00	46.52
78	32	56.41	-24.41	-25.72	82.05	1772386.18	3466800.00	48.88
84	28	47.59	-19.59	-22.00	60.05	1297154.99	2635200.00	50.78
90	24	40.56	-16.56	-18.07	41.98	906768.50	1922400.00	52.83
96	22	34.53	-12.53	-14.54	27.44	592640.97	1360800.00	56.45
102	21	29.93	-8.93	-10.73	16.71	360855.53	961200.00	62.46
108	20	26.68	-6.68	-7.80	8.90	192279.55	691200.00	72.18
114	19	24.26	-5.26	-5.97	2.94	63415.56	518400.00	87.77
120	19	22.30	-3.30	-4.28	-1.34	-29021.76	421200.00	106.89
126	18	21.14	-3.14	-3.22	-4.56	-98573.66	378000.00	126.08

1. c) Muskingum, método de Overton (1966)

A partir de los datos registrados:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	22	22
6	23	21
12	35	21
18	71	26
24	103	34
30	111	44
36	109	55
42	100	66
48	86	75
54	71	82
60	59	85
66	47	84
72	39	80
78	32	73
84	28	64
90	24	54
96	22	44
102	21	36
108	20	30
114	19	25
120	19	22
126	18	19



Se calcula el almacenamiento acumulado:

t (h)	I (m³/s)	O (m³/s)	S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.día/4s)	S _{acum.} (m³.día/4s)	S _{acum.} (m³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2082800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	280.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando (b+B)/h/2 estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son m³.día/4s

Aplicando el Método de Overton (1966):

Utilizando las ecuaciones (3.56) y (3.58)

$$X = 0.543693694$$

$$K = 152112.6761$$

Con los valores anteriores se obtienen los coeficientes del modelo con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) considerando que $\Delta t = 6h \cdot 3600 (s/h) = 21600$ s

$$C_0 = -0.896430951$$

$$C_1 = 1.165724146$$

$$C_2 = 0.730706805$$

Sumando:

$C_0 + C_1 + C_2 = 1$ Se cumple con la condición

La ecuación de recurrencia del método de Muskingum, de acuerdo con la ecuación (3.6), es:

$$O_{t+1} = -0.89643I_{t+1} + 1.165724I_t + 0.7307068O_t$$

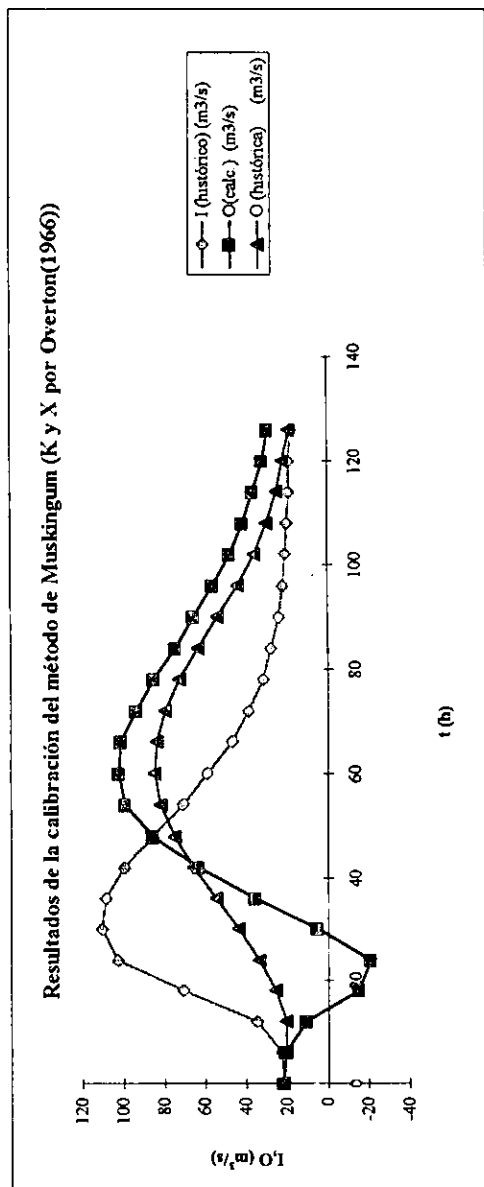
Aplicando la ecuación anterior de manera recursiva, se obtiene el siguiente hidrograma de salida calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O (calc.) (m³/s)	O (histórica) (m³/s)
0	22	22.000	22
6	23	21.104	21
12	35	10.857	21
18	71	-14.913	26
24	103	-20.463	34
30	111	5.613	44
36	109	35.786	55
42	100	63.570	66
48	86	85.930	75
54	71	99.396	82
60	59	102.506	85
66	47	101.547	84
72	39	94.030	80
78	32	85.485	73
84	28	74.668	64
90	24	65.686	54
96	22	56.253	44
102	21	47.926	36
108	20	41.571	30
114	19	36.659	25
120	19	31.903	22
126	18	29.325	19

$$\text{Error relativo en \%} = \frac{\text{valor real} - \text{valor aproximado}}{\text{valor real}}$$

Error relativo % en el gasto de pico	20.595
Error relativo en % en tiempo de pico	0

Dibujando los resultados anteriores:



Se presenta un error relativo del 20.60% en el gasto pico de salida y un error del 0% en el tiempo de pico del hidrograma de salida

Los valores de gastos de salidas negativos indican deficiencias de este método y se deben al valor negativo obtenido para el coeficiente C_0 que forma parte del modelo.

Almacenamiento calculado:

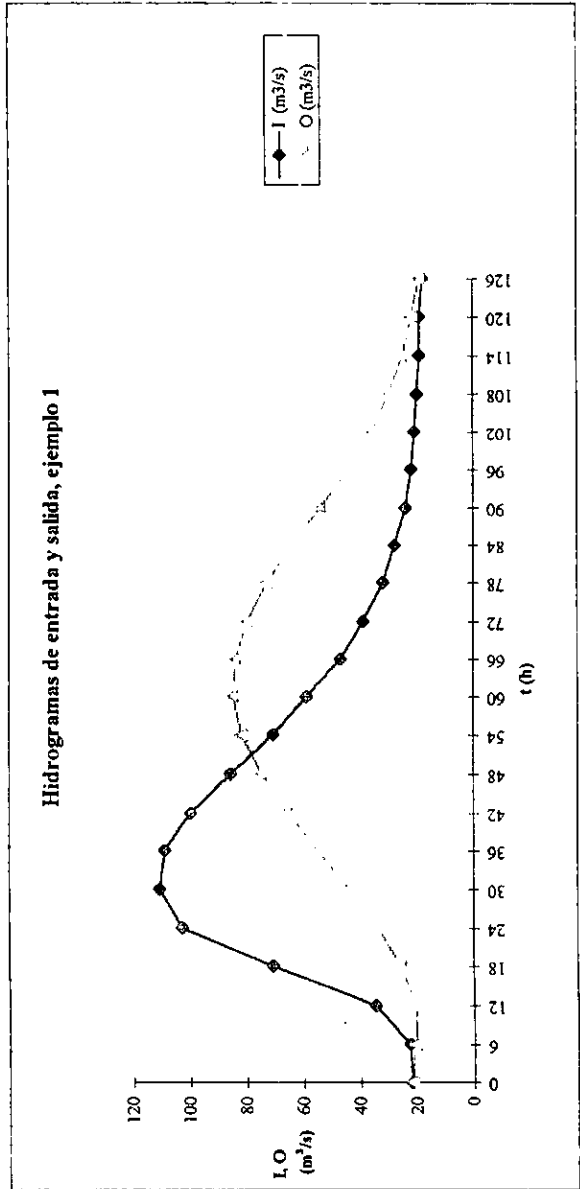
Tiempo (h)	I (hist) (m ³ /s)	O(calc.) (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (m ³)	Sacum (hist) (m ³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
6	23	21.10	1.90	0.95	0.95	20481.45	21600.00	5.18
12	35	10.86	24.14	13.02	13.97	301706.30	194400.00	55.20
18	71	-14.91	85.91	55.03	69.00	1490309.01	831600.00	79.21
24	103	-20.46	123.46	104.69	173.68	3751567.99	2062800.00	81.87
30	111	5.61	105.39	114.42	288.11	6223143.49	3531600.00	76.21
36	109	35.79	73.21	89.30	377.41	8152029.25	4838400.00	68.49
42	100	63.57	36.43	54.82	432.23	9336183.20	5788800.00	61.28
48	86	85.93	0.07	18.25	450.48	9730379.10	6274800.00	55.07
54	71	99.40	-28.40	-14.16	436.32	9424458.56	6274800.00	50.20
60	59	102.51	-43.51	-35.95	400.37	8647921.07	5875200.00	47.19
66	47	101.55	-54.55	-49.03	351.34	7588944.94	5194800.00	46.09
72	39	94.03	-55.03	-54.79	296.55	6405514.79	4352400.00	47.17
78	32	85.49	-53.49	-54.26	242.29	5233552.51	3466800.00	50.96
84	28	74.67	-46.67	-50.08	192.22	4151895.70	2635200.00	57.56
90	24	65.69	-41.69	-44.18	148.04	3197670.08	1922400.00	66.34
96	22	56.25	-34.25	-37.97	110.07	2377522.19	1360800.00	74.72
102	21	47.93	-26.93	-30.59	79.48	1716790.19	961200.00	78.61
108	20	41.57	-21.57	-24.25	55.23	1193025.91	691200.00	72.60
114	19	36.66	-17.66	-19.61	35.62	769344.88	518400.00	48.41
120	19	31.90	-12.90	-15.28	20.34	439276.81	421200.00	4.29
126	18	29.32	-11.32	-12.11	8.22	177612.38	378000.00	53.01

¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
si h= 6 horas x 1dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son
m³.dia/4s

1 d) Muskingum, Método de las funciones de núcleo

A partir de los datos registrados:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	22	22
6	23	21
12	35	21
18	71	26
24	103	34
30	111	44
36	109	55
42	100	66
48	86	75
54	71	82
60	59	85
66	47	84
72	39	80
78	32	73
84	28	64
90	24	54
96	22	44
102	21	36
108	20	30
114	19	25
120	19	22
126	18	19



Se calcula el almacenamiento acumulado:

t (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .día/4s)	S _{acum.} (m ³ .día/4s)	S _{acum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando $(b+B)/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son m³.día/4s

Aplicando el Método de las funciones de núcleo

Utilizando un programa en Basic realizado por el Dr.Carlos Escalante S.

Se obtienen los siguientes valores corregidos de X y K:

$$X = 0.1837577$$

$$K = 85924.68 \text{ s}$$

Con los valores anteriores se obtienen los coeficientes del modelo con las ecuaciones (3.7), (3.8) y (3.9) considerando que $\Delta t = 6h \cdot 3600 \text{ (s/h)} = 21600 \text{ s}$

$$C_0 = -0.06164576$$

$$C_1 = 0.328525407$$

$$C_2 = 0.733120352$$

Sumando:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad \text{Se cumple con la condición}$$

La ecuación de recurrencia del método de Muskingum de acuerdo con la ecuación (3.6), es:

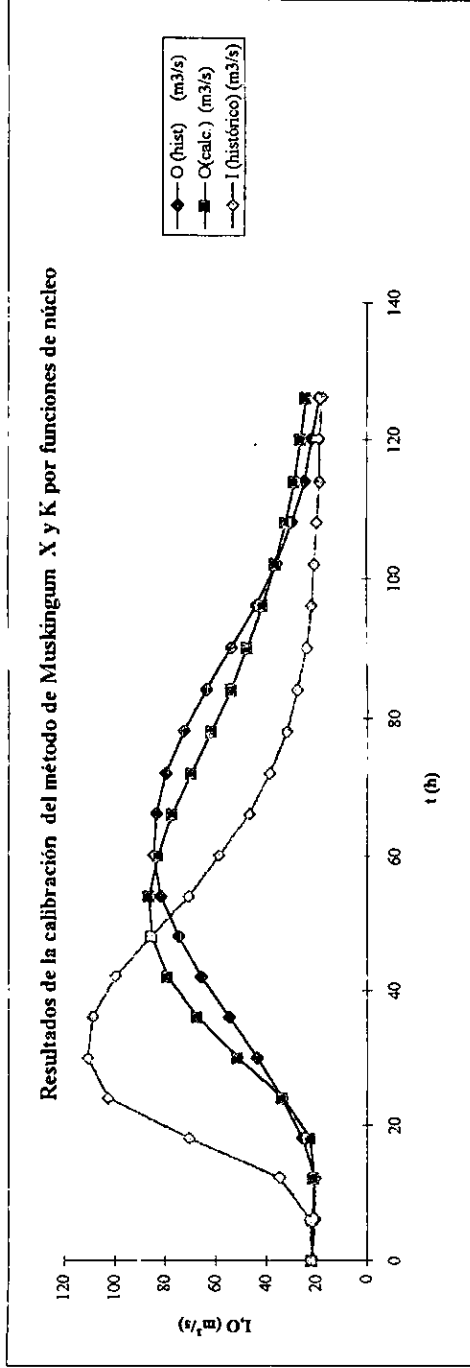
$$O_{t+1} = -0.0616458I_{t+1} + 0.3285254I_t + 0.7331204O_t$$

Aplicando la ecuación anterior de manera recursiva, se obtiene el siguiente hidrograma de salida calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O(calc.) (m³/s)	O (histórica) (m³/s)
0	22	22.000	22
6	23	21.938	21
12	35	21.482	21
18	71	22.870	26
24	103	33.743	34
30	111	51.733	44
36	109	67.673	55
42	100	79.257	66
48	86	85.656	75
54	71	86.673	82
60	59	83.230	85
66	47	77.503	84
72	39	69.856	80
78	32	62.052	73
84	28	54.279	64
90	24	47.512	54
96	22	41.360	44
102	21	36.255	36
108	20	32.245	30
114	19	29.039	25
120	19	26.360	22
126	18	24.457	19

Error relativo % en el gasto de pico	1.968
Error relativo en % en tiempo de pico	10

Dibujando los resultados anteriores:



Se presenta un error relativo del 1.97% en el gasto pico de salida
y un error en el tiempo de pico del 10%.

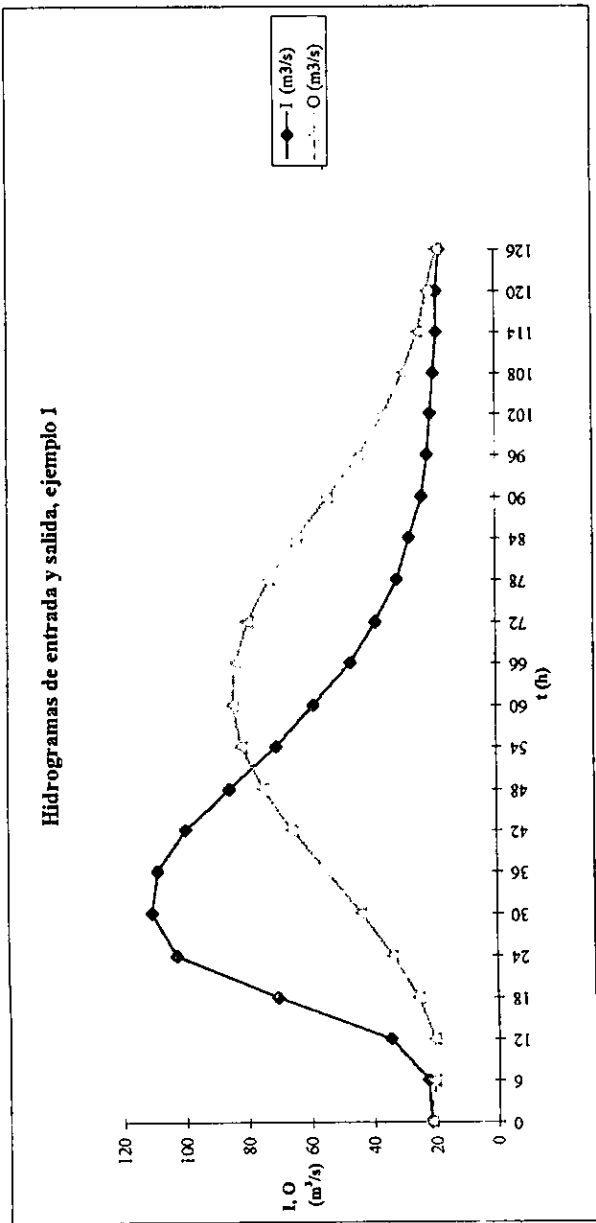
Almacenamiento calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m ³ /s)	O (calc.) (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (calc) (m ³)	Sacum (hist) (m ³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22	0	0	0	0	0	
6	23	21.9383424	1.061645759	0.53082288	0.530822879	11465.77419	21600	46.91771207
12	35	21.48193678	13.51806322	7.28985449	7.820677366	168926.6311	194400	13.10358482
18	71	22.87038543	48.12961457	30.8238389	38.64451626	834721.5512	831600	0.375366904
24	103	33.74253577	69.25746423	58.6935394	97.33805566	2102502.002	2062800	1.92466561
30	111	51.7327774	59.2672226	64.2623434	161.6003991	3490568.62	3531600	1.16183543
36	109	67.67328445	41.32671555	50.2969691	211.8973681	4576983.152	4838400	5.402960649
42	100	79.25735559	20.74264441	31.03468	242.9320481	5247332.24	5788800	9.353713385
48	86	85.65618586	0.343814142	10.5432293	253.4752774	5475065.992	6274800	12.74517129
54	71	86.67262923	-15.67262923	-7.6644075	245.8108699	5309514.789	6274800	15.38352156
60	59	83.22967256	-24.22967256	-19.951151	225.859719	4878569.93	5875200	16.96333862
66	47	77.50301517	-30.50301517	-27.366344	198.4933751	4287456.902	5194800	17.4663721
72	39	69.85554728	-30.85554728	-30.679281	167.8140939	3624784.428	4352400	16.71757128
78	32	62.05234998	-30.05234998	-30.453949	137.3601452	2966979.137	3466800	14.41735499
84	28	54.27857242	-26.27857242	-28.165461	109.1946841	2358605.175	2635200	10.49616061
90	24	47.51193928	-23.51193928	-24.895256	84.2994282	1820867.649	1922400	5.281541349
96	22	41.36037271	-19.36037271	-21.436156	62.8632722	1357846.68	1360800	0.217028252
102	21	36.25512901	-15.25512901	-17.307751	45.55552134	983999.2609	961200	2.371958068
108	20	32.2454913	-12.2454913	-13.75031	31.80521118	686992.5616	691200	0.608715047
114	19	29.03906465	-10.03906465	-11.142278	20.66293321	446319.3573	518400	13.90444496
120	19	26.3598426	-7.359842604	-8.6994536	11.96347958	258411.159	421200	38.64882264
126	18	24.45729616	-6.457296156	-6.9085694	5.054910204	109186.0604	378000	71.11479883

1 e) Método de Muskingum- Cunge

A partir de los datos registrados:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	22	22
6	23	21
12	35	21
18	71	26
24	103	34
30	111	44
36	109	55
42	100	66
48	86	75
54	71	82
60	59	85
66	47	84
72	39	80
78	32	73
84	28	64
90	24	54
96	22	44
102	21	36
108	20	30
114	19	25
120	19	22
126	18	19



So=	0.00		
Δx=	186.45	mi	(300 km)
lp=	3919.93	pie ³ /s	(111 m ³ /s)
A=	392.00	pie ²	(36.42 m ²)
T _p =	32.81	pie	(10 m)
Δt=	6.00	h	

Suponiendo una pendiente de plantilla
 Un incremento en la longitud del tramo
 Gasto de pico del hidrograma de entrada
 Area de la sección transversal para lp:
 Ancho para lp:

Por otra parte, el almacenamiento acumulado real es:

t (h)	I (m³/s)	O (m³/s)	S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.día/4s)	S _{ocum.} (m³.día/4s)	S _{acum.} (m³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	288	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando (b+B)/2 estando b y B en m³/s, h en horas si h= 6 horas x 1día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son m³.día/4s

Resolviendo por el método de Muskingum -Cunge.

Para obtener X se calcula

$$q_0 = I_p / T_0 = 119.4794056 \text{ pie}^3 / (\text{s} \cdot \text{pie}) \quad (11.10 \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m}))$$

$$V_p = I_p / A_p = 9.999816342 \text{ pie} / \text{s} \quad (3.048 \text{ m/s})$$

$$c = 5V_p / \beta = 16.66636057 \text{ pie/s} \quad (5.080 \text{ m/s})$$

Sustituyendo en (3.74) y si $K = \Delta x / c$:

$$X = 0.463582008$$

$$K = 59056.20272 \text{ s}$$

Con los valores anteriores se obtienen los coeficientes del modelo con las ecuaciones (3.71), (3.72) y (3.73) considerando que $\Delta t = 6h * 3600 (\text{s}/1h) = 21600 \text{ s}$

$$C_0 = -0.390250885$$

$$C_1 = 0.89873971$$

$$C_2 = 0.491511175$$

$$\frac{\Delta t / K}{0.365753283} < 0.927164017$$

se cumple con restricciones

Sumando:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1$$

Se cumple con la condición

La ecuación de recurrencia del método de Muskingum- Cunge, de acuerdo con la ecuación (3.70), es:

$$Q_{i+1}^{*} = -0.390250885Q_i^{*+1} + 0.89873971Q_i' + 0.491511175Q_{i+1}'$$

Y recordando que
El modelo resulta:

$$Q_i = I_i Q_{i+1} = 0$$

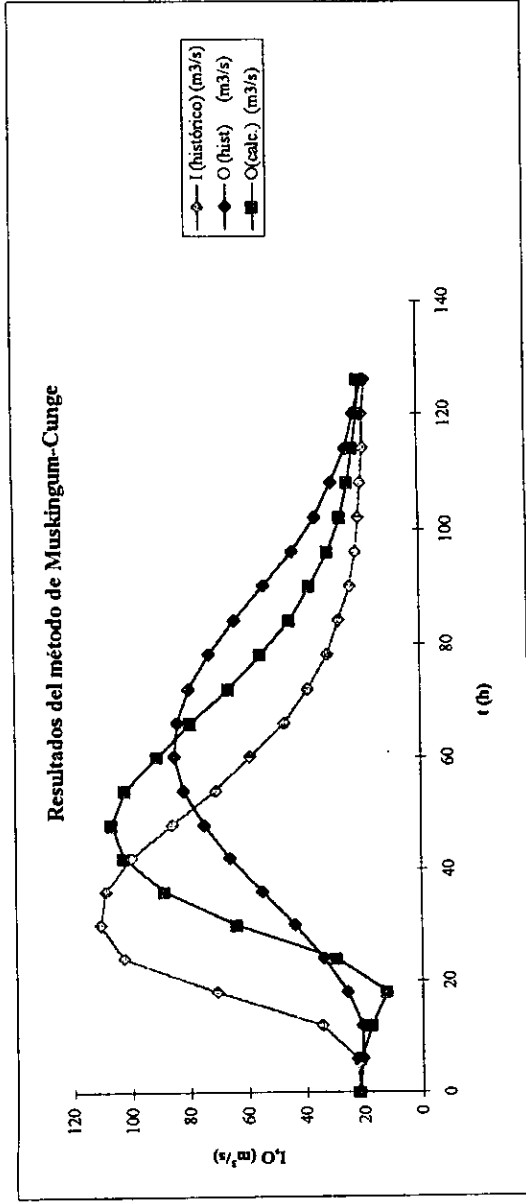
$$O_{i+1} = -0.390250885I_{i+1}' + 0.89873971I_i' + 0.491511175O_i'$$

Aplicando la ecuación anterior de manera recursiva, se obtiene el siguiente hidrograma de salida calculado:

Tiempo (h)	I (histórico) (m³/s)	O (calc.) (m³/s)	O (histórica) (m³/s)
0	22	22	22
6	23	21.6097491	21
12	35	17.6336655	21
18	71	12.4152207	26
24	103	29.7168979	34
30	111	63.8585293	44
36	109	88.6099421	55
42	100	102.490317	66
48	86	106.687531	75
54	71	102.021916	82
60	59	90.930629	85
66	47	79.3772716	84
72	39	66.0357979	80
78	32	55.020153	73
84	28	44.875666	64
90	24	37.855582	54
96	22	31.5906751	44
102	21	27.1041749	36
108	20	24.3905211	30
114	19	22.5482411	25
120	19	20.7440001	22
126	18	20.2474464	19

Error relativo % en el gasto de pico	25.515
Error relativo en % en tiempo de pico	20

Dibujando los resultados anteriores:



Se presenta un error relativo del 25.52 % en el gasto pico de salida y un error en el tiempo de pico del 20%

En este método no se observa la atenuación, y el traslado de la onda de avenida es menor lo anterior se debe a los valores de Δt y Δx considerados.

En los instantes 12 y 18 se observa una disminución notable en los gastos de salida, debidos al valor negativo del coeficiente C_0 que forma parte del modelo.

Calculando el almacenamiento y el error en éste:

Tiempo (h)	I (histórico)		O(calcc.)		S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.dia/4s)	S _{accum} (m³.dia/4s)	S _{accum} (calc) (m³)	S _{accum} (hist) (m³)	Error relativo en S _{accum} (%)
	(m³/s)	(m³/s)	(m³/s)	(m³/s)						
0	22	22.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	
6	23	21.61	1.39	0.70	1.39	0.70	15014.71	21600.00	21600.00	30.49
12	35	17.63	17.37	9.38	17.37	9.38	217585.83	194400.00	194400.00	11.93
18	71	12.42	58.58	37.98	58.58	37.98	1037857.86	831600.00	831600.00	24.80
24	103	29.72	73.28	65.93	73.28	65.93	2462030.98	2062800.00	2062800.00	19.35
30	111	63.86	47.14	60.21	47.14	60.21	3762616.36	3531600.00	3531600.00	6.54
36	109	88.61	20.39	33.77	20.39	33.77	4491956.87	4838400.00	4838400.00	7.16
42	100	102.49	-2.49	8.95	-2.49	8.95	4685274.08	5788800.00	5788800.00	19.06
48	86	106.69	-20.69	-11.59	-20.69	-11.59	4434963.33	6274800.00	6274800.00	29.32
54	71	102.02	-31.02	-25.85	-31.02	-25.85	3876491.30	6274800.00	6274800.00	38.22
60	59	90.93	-31.93	-31.48	-31.93	-31.48	3196603.82	5875200.00	5875200.00	45.59
66	47	79.38	-32.38	-32.15	-32.38	-32.15	2502078.49	5194800.00	5194800.00	51.83
72	39	66.04	-27.04	-29.71	-27.04	-29.71	1860417.34	4352400.00	4352400.00	57.26
78	32	55.02	-23.02	-25.03	-23.02	-25.03	1319813.07	3466800.00	3466800.00	61.93
84	28	44.88	-16.88	-19.95	-16.88	-19.95	888938.23	2635200.00	2635200.00	66.27
90	24	37.86	-13.86	-15.37	-13.86	-15.37	557040.75	1922400.00	1922400.00	71.02
96	22	31.59	-9.59	-11.72	-9.59	-11.72	303821.17	1360800.00	1360800.00	77.67
102	21	27.10	-6.10	-7.85	-6.10	-7.85	134316.79	961200.00	961200.00	86.03
108	20	24.39	-4.39	-5.25	-4.39	-5.25	20974.08	691200.00	691200.00	96.97
114	19	22.55	-3.55	-3.97	-3.55	-3.97	-64764.56	518400.00	518400.00	112.49
120	19	20.74	-1.74	-2.65	-1.74	-2.65	-121920.76	421200.00	421200.00	128.95
126	18	20.25	-2.25	-2.00	-2.25	-2.00	-165028.38	378000.00	378000.00	143.66

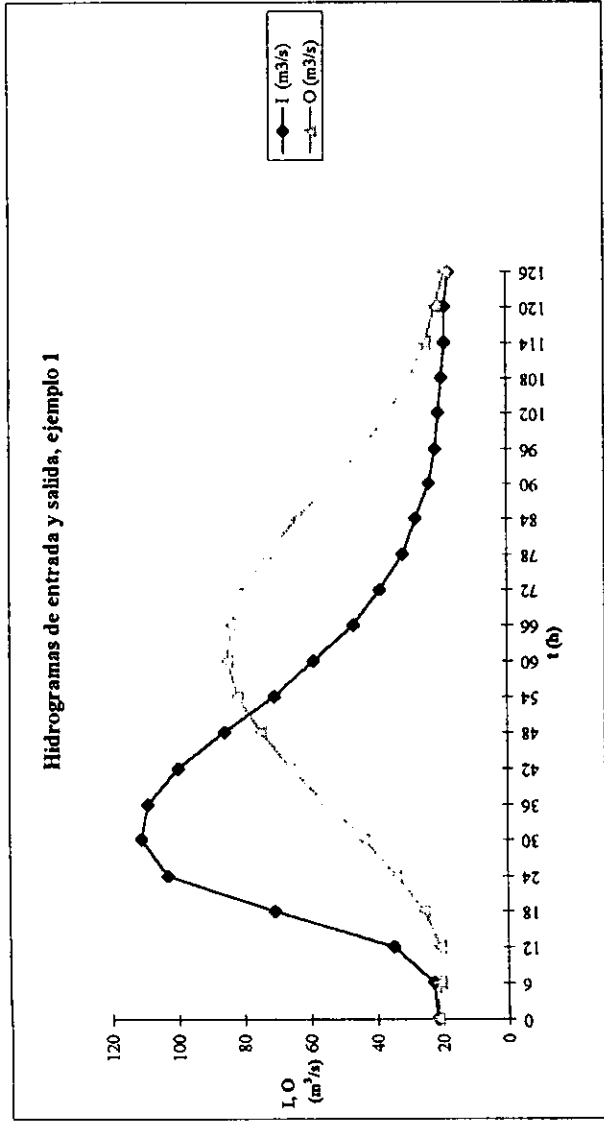
¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1dia/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son m³.dia/4s

1 f) Modelo ARMA(1,1)
Calibración del modelo ARMA(1,1)

A partir de los datos registrados:

Proponiendo:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	t
0	22	22	0
6	23	21	1
12	35	21	2
18	71	26	3
24	103	34	4
30	111	44	5
36	109	55	6
42	100	66	7
48	86	75	8
54	71	82	9
60	59	85	10
66	47	84	11
72	39	80	12
78	32	73	13
84	28	64	14
90	24	54	15
96	22	44	16
102	21	36	17
108	20	30	18
114	19	25	19
120	19	22	20
126	18	19	21
Media	49.04545455	48.27272727	
Desv est	33.50405416	24.12503505	
Coef de Asim	0.826685739	0.272408035	
Coef de curtosis	2.10252941	1.448825289	



El almacenamiento acumulado histórico es:

T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ día/4s)	S _{ecum.} (m ³ día/4s)	S _{acum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando $(b+B)/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son
 m³ día/4s

Ubicando $t=1$ para la hora.6

Aplicando el método Lagrangiano (Capítulo cuatro)

Matriz D para el periodo de análisis, de acuerdo con lo tratado en el Capítulo cuatro:

	1	2	3
1	22	23	22
2	21	35	23
3	21	71	35
4	26	103	71
5	34	111	103
6	44	109	111
7	55	100	109
8	66	86	100
9	75	71	86
10	82	59	71
11	85	47	59
12	84	39	47
13	80	32	39
14	73	28	32
15	64	24	28
16	54	22	24
17	44	21	22
18	36	20	21
19	30	19	20
20	25	19	19
21	22	18	19

D=

$i=$ renglones
 $j=$ columnas

Determinando la matriz transpuesta

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22	21	21	26	34	44	55	66	75	82
2	23	35	71	103	111	109	100	86	71	59
3	22	23	35	71	103	111	109	100	86	71

$D^T=$

$\beta=$ $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad | \quad r$

Elementos del vector Q(t):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	26	34	44	55	66	75	82	85	84

Q(t)=

Continuación de la matriz D transpuesta

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
85	84	80	73	64	54	44	36	30	25	22
47	39	32	28	24	22	21	20	19	19	18
59	47	39	32	28	24	22	21	20	19	19

Continuación del vector Q(t)

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
80	73	64	54	44	36	30	25	22	19

$D^T Q =$	62535	$2D^T Q =$	125070
	57383		114766
	61567		123134
$D^T D =$	63127	53003	57525
	53003	76009	74351
	57525	74351	76169
$2D^T D =$	126254	106006	115050
	106006	152018	148702
	115050	148702	152338

El sistema de ecuaciones lineales que resulta, de acuerdo con las ecuaciones (4.14) y (4.15) es:

$$\begin{matrix}
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 126254 & 106006 & 115050 & 1 & 1 & 125070 \\
 106006 & 152018 & 148702 & 1 & 1 & 114766 \\
 115050 & 148702 & 152338 & 1 & 1 & 123134 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 a_1 & b_0 & b_1 & \lambda & &
 \end{matrix} =$$

La inversa de la matriz de coeficientes es:

2.2581E-05	1.75659E-05	-4.0147E-05	0.905868504
1.75659E-05	0.000157508	-0.00017507	1.227695177
-4.0147E-05	-0.000175074	0.000215221	-1.133563682
0.905868504	1.227695177	-1.133563688	-114096.0755

La solución del sistema es:

a_1	$=$	0.802594135	
b_0		-0.05632493	
b_1		0.253730796	suma= 1
λ		518.3326404	

El modelo ARMA(1,1), de acuerdo con la ecuación (4.7), resulta:

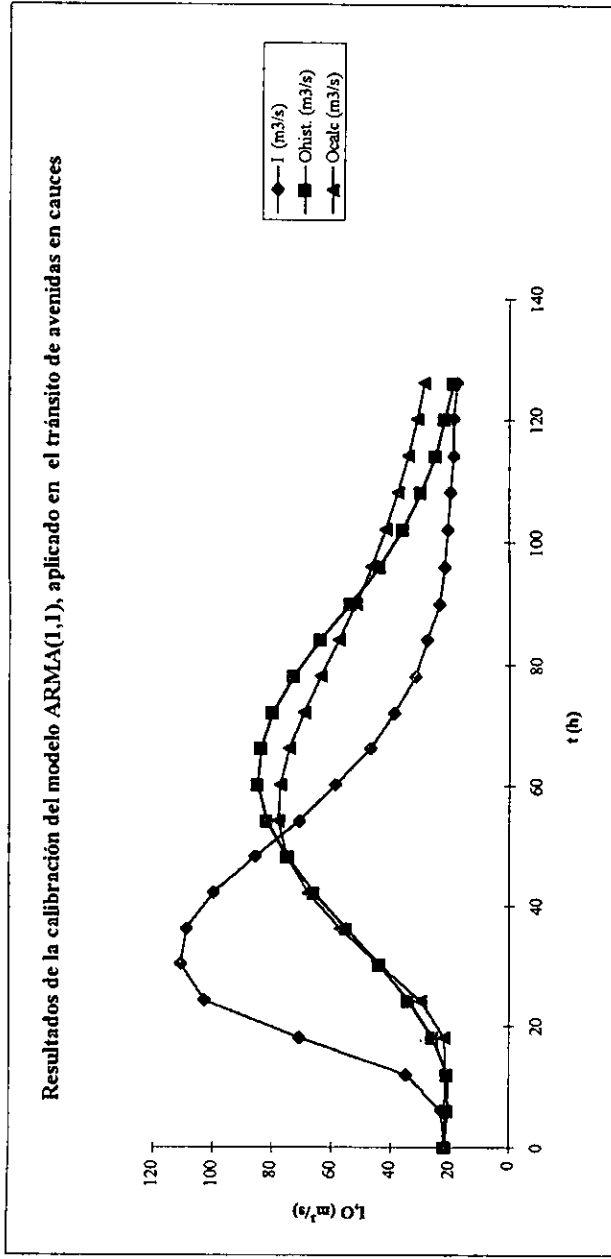
$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + b_0 J(t) + b_1 J(t-1)$$

Obteniendo los gastos calculados con el modelo:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O _{hist.} (m ³ /s)	O _{calc.} (m ³ /s)
0	22	22	22.000
6	23	21	21.944
12	35	21	21.476
18	71	26	22.118
24	103	34	29.965
30	111	44	43.932
36	109	55	57.284
42	100	66	68.000
48	86	75	75.106
54	71	82	78.101
60	59	85	77.375
66	47	84	74.424
72	39	80	69.461
78	32	73	63.842
84	28	64	57.761
90	24	54	52.128
96	22	44	46.688
102	21	36	41.871
108	20	30	37.807
114	19	25	34.348
120	19	22	31.318
126	18	19	28.943

Error relativo % en el gasto de pico	8.116
Error relativo en % en tiempo de pico	10

Dibujando los resultados anteriores.



El error en el gasto de pico es del 8.12 %
y el error en el tiempo de pico es del 10 %

Este método reporta más atenuación y menor traslado de la onda de avenida

Almacenamiento calculado:

Tiempo (h)	i (hist) (m ³ /s)	O(calc.) (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (m ³ .dia/4s)	S _{acum} (m ³)	Sacum (hist) (m ³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22.000	0.000	0.000	0.000	0	0	
6	23	21.944	1.056	0.528	0.528	11408.3093	21600	47.184
12	35	21.476	13.524	7.290	7.818	168872.572	194400	13.131
18	71	22.118	48.882	31.203	39.021	842851.309	831600	1.353
24	103	29.965	73.035	60.958	99.979	2159547.72	2052800	4.690
30	111	43.932	67.068	70.051	170.030	3672652.91	3531600	3.994
36	109	57.284	51.716	59.392	229.422	4955512.11	4838400	2.420
42	100	68.000	32.000	41.858	271.279	5859635.98	5788800	1.224
48	86	75.106	10.894	21.447	292.726	6322889.38	6274800	0.766
54	71	78.101	-7.101	1.896	294.623	6363952.88	6274800	1.419
60	59	77.375	-18.375	-12.738	281.885	6088705.59	5875200	3.634
66	47	74.424	-27.424	-22.900	258.985	5594074.57	5194800	7.686
72	39	69.461	-30.461	-28.942	230.043	4968920.42	4352400	14.165
78	32	63.842	-31.842	-31.151	198.891	4296050.74	3466800	23.920
84	28	57.781	-29.781	-30.812	168.080	3630518.07	2635200	37.770
90	24	52.128	-28.128	-28.955	139.125	3005098.98	1922400	56.320
96	22	46.688	-24.688	-26.408	112.717	2434691.44	1360800	78.916
102	21	41.871	-20.871	-22.779	89.938	1942660.76	961200	102.108
108	20	37.807	-17.807	-19.339	70.599	1524943.2	691200	120.623
114	19	34.348	-15.348	-16.578	54.022	1168668.92	518400	125.090
120	19	31.318	-12.318	-13.833	40.189	868072.298	421200	106.095
126	18	28.943	-10.943	-11.631	28.558	616851.57	378000	63.188

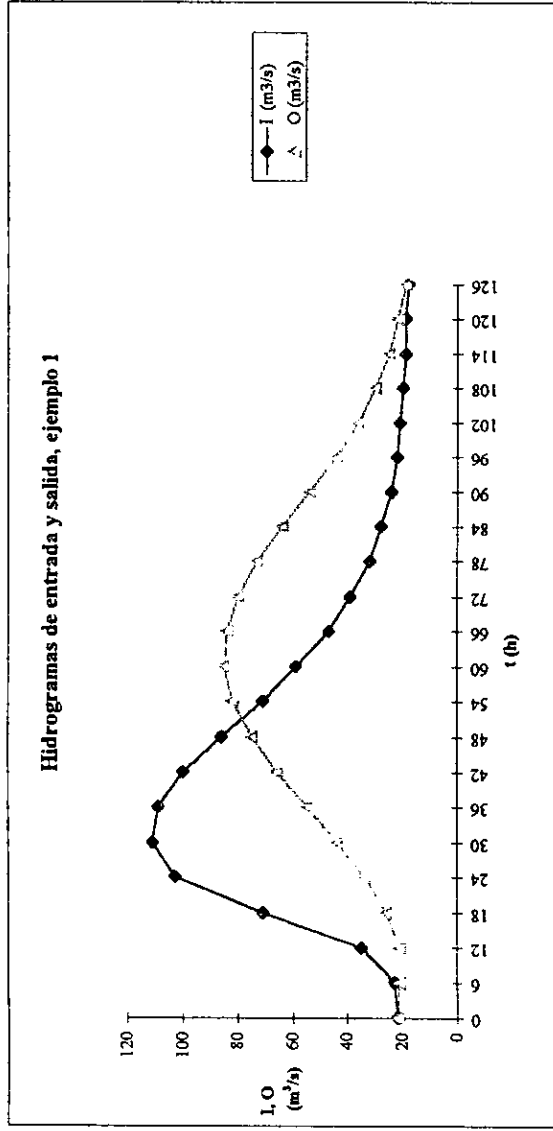
¹ considerando (b+B)/2 estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son m³ dia/4s

1 g) Modelo ARMA(2,1)

Calibración del modelo ARMA(2,1)

A partir de los datos registrados:

Proporcionando:			
Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	t
0	22	22	0
6	23	21	1
12	35	21	2
18	71	26	3
24	103	34	4
30	111	44	5
36	109	55	6
42	100	66	7
48	86	75	8
54	71	82	9
60	59	85	10
66	47	84	11
72	39	80	12
78	32	73	13
84	28	64	14
90	24	54	15
96	22	44	16
102	21	36	17
108	20	30	18
114	19	25	19
120	19	22	20
126	18	19	21
Media	49.0454545	48.272727	
Desv est	33.5040542	24.125035	
Coef de Asim	0.82668574	0.272408	
Coef de curtosis	2.10252941	1.4488253	



El almacenamiento acumulado histórico es:

T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{acum.} (m ³ .dia/4s)	S _{acum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son
 m³.dia/4s

Continuación de la matriz D transpuesta

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
84	80	73	64	54	44	36	30	25	22
85	84	80	73	64	54	44	36	30	25
39	32	28	24	22	21	20	19	19	18
47	39	32	28	24	22	21	20	19	19

Continuación del vector Q(t)

13	14	15	16	17	18	19	20	21
73	64	54	44	36	30	25	22	19

D ^T Q=	62535	125070
	60549	121098
	57383	114766
	61567	123134

D ^T D=	63127	62117	53003	57525
	62117	62643	48232	52607
	53003	48232	76009	74351
	57525	52607	74351	76169

2D ^T D=	126254	124234	106006	115050
	124234	125286	96464	105214
	106006	96464	152018	148702
	115050	105214	148702	152338

El sistema de ecuaciones lineales que se obtiene, de acuerdo con las ecuaciones (4.14) y (4.15) es:

126254	124234	106006	115050	1	a1	125070
124234	125286	96464	105214	1	a2	121098
106006	96464	152018	148702	1	b0	114766
115050	105214	148702	152338	1	b1	123134
1	1	1	1	0	λ	1

La inversa de la matriz de coeficientes es:

0.00089627	-0.0007394	0.0001533	-0.00031021	-0.864773877
-0.00073937	0.0006257	-0.000115	0.000228546	1.498439987
0.00015332	-0.0001149	0.0001786	-0.00021704	0.95257839
-0.00031021	0.0002285	-0.000217	0.000298699	-0.5862445
-0.86477388	1.49844	0.9525784	-0.5862445	-110507.6274

La solución del sistema es:

a1	1.09281
a2	-0.245601
b0	-0.011232
b1	0.1640228
λ	-69.82937
suma=	1

El modelo ARMA(2,1), de acuerdo con la ecuación (4.16), resulta:

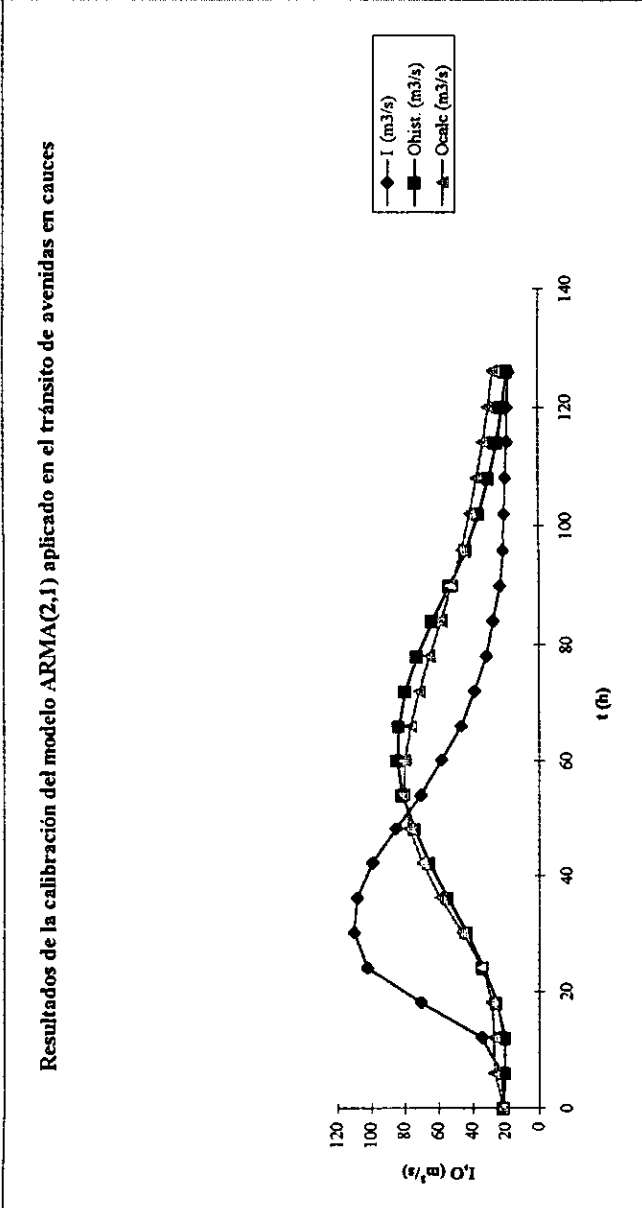
$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1)$$

Obteniendo los gastos calculados con el modelo:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O _{hist.} (m ³ /s)	O _{calc.} (m ³ /s)
0	22	22	22
6	23	21	27.391984
12	35	21	27.9104
18	71	26	28.7166
24	103	34	35.0157
30	111	44	46.8603
36	109	55	59.5917
42	100	66	70.3698
48	86	75	77.7003
54	71	82	80.937
60	59	85	80.3490
66	47	84	77.0773
72	39	80	71.7681
78	32	73	65.5361
84	28	64	58.9265
90	24	54	52.6228
96	22	44	46.7238
102	21	36	41.5086
108	20	30	37.1055
114	19	25	33.4217
120	19	22	30.3135
126	18	19	27.8328

Error relativo % en el gasto de pico	4.779
Error relativo en % en tiempo de pico	10

Dibujando los resultados anteriores:



El error en el gasto de pico es del 4.78%
y el error en el tiempo de pico es del 10 %

Respecto al modelo ARMA(1,1), el modelo ARMA(2,1) reporta menor error en el gasto de pico pero el tiempo de pico sigue siendo diferente al histórico.

Almacenamiento calculado:

Tiempo (h)	I (hist) (m³/s)	O (calc.) (m³/s)	S (m³/s)	S _{medio} ¹ (m³.día/4s)	S _{acum} (m³.día/4s)	S _{acum} (m³)	S _{acum} (hist) (m³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	
6	23	27.392	-4.392	-2.196	-2.196	-47433.425	21600	319.599
12	35	27.910	7.090	1.349	-0.847	-18299.378	194400	109.413
18	71	28.717	42.283	24.839	23.839	514928.669	831600	38.080
24	103	35.016	67.984	55.134	78.973	1705819.714	2062800	17.306
30	111	46.960	64.140	66.062	145.035	3132759.258	3531600	11.293
36	109	59.592	49.408	56.774	201.809	4359077.680	4838400	9.907
42	100	70.369	29.631	39.520	241.329	5212704.022	5788800	9.952
48	86	77.700	8.300	18.965	260.294	5622358.038	6274800	10.398
54	71	80.937	-9.937	-0.819	259.475	5604670.116	6274800	10.680
60	59	80.349	-21.349	-15.643	243.832	5266776.117	5875200	10.356
66	47	77.077	-30.077	-25.713	218.119	4711372.153	5194800	9.306
72	39	71.768	-32.768	-31.423	186.696	4032641.730	4352400	7.347
78	32	65.536	-33.536	-33.152	153.544	3316556.111	3466800	4.334
84	28	58.926	-30.926	-32.231	121.313	2620360.213	2635200	0.563
90	24	52.623	-28.623	-29.775	91.538	1977228.436	1922400	2.852
96	22	46.724	-24.724	-26.673	64.865	1401085.879	1360800	2.960
102	21	41.508	-20.509	-22.616	42.249	912576.171	961200	5.059
108	20	37.105	-17.105	-18.807	23.442	506343.758	691200	26.744
114	19	33.422	-14.422	-15.764	7.678	165849.616	518400	68.007
120	19	30.314	-11.314	-12.868	-5.189	-112091.141	421200	126.612
126	18	27.833	-9.833	-10.573	-15.763	-340470.791	378000	190.072

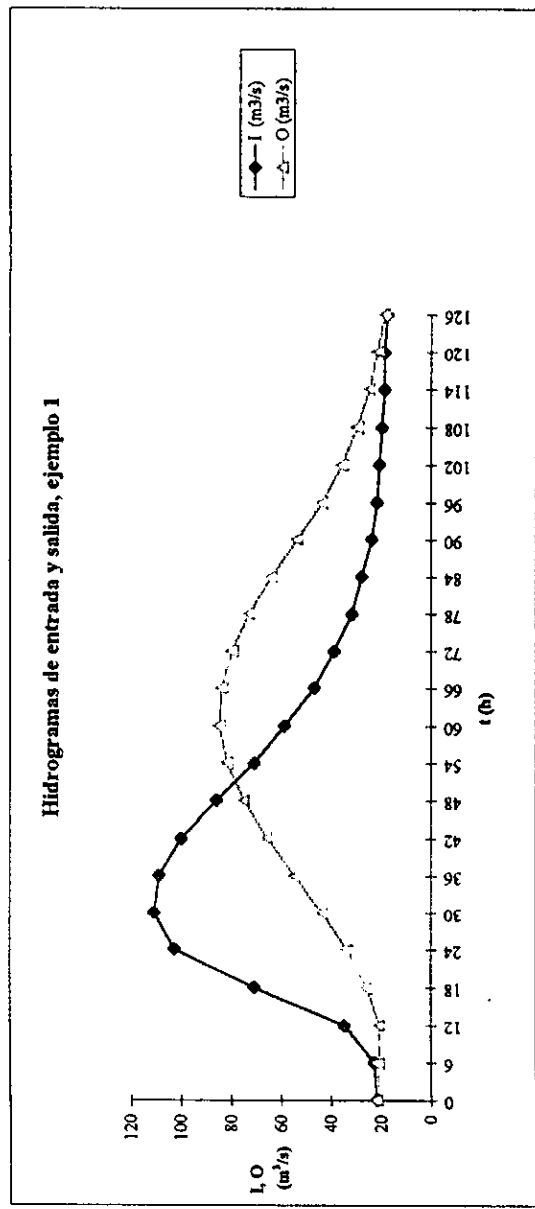
¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 día/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son m³.día/4s

1 h) Modelo ARMA (3,2)

Calibración del modelo ARMA(3,2)

De acuerdo con los datos registrados:

Proponiendo:			
Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	t
0	22	22	0
6	23	21	1
12	35	21	2
18	71	26	3
24	103	34	4
30	111	44	5
36	109	55	6
42	100	66	7
48	86	75	8
54	71	82	9
60	59	85	10
66	47	84	11
72	39	80	12
78	32	73	13
84	28	64	14
90	24	54	15
96	22	44	16
102	21	36	17
108	20	30	18
114	19	25	19
120	19	22	20
126	18	19	21
Media	49.045	48.273	
Desv est	33.504	24.125	
Coef de Asim	0.827	0.272	
Coef de curtosis	2.103	1.449	



El almacenamiento acumulado histórico es:

T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ .dia/4s)	S _{secum.} (m ³ .dia/4s)	S _{secum.} (m ³)
0	22	22	0	0	0	0
6	23	21	2	1	1	21600
12	35	21	14	8	9	194400
18	71	26	45	29.5	38.5	831600
24	103	34	69	57	95.5	2062800
30	111	44	67	68	163.5	3531600
36	109	55	54	60.5	224	4838400
42	100	66	34	44	268	5788800
48	86	75	11	22.5	290.5	6274800
54	71	82	-11	0	290.5	6274800
60	59	85	-26	-18.5	272	5875200
66	47	84	-37	-31.5	240.5	5194800
72	39	80	-41	-39	201.5	4352400
78	32	73	-41	-41	160.5	3466800
84	28	64	-36	-38.5	122	2635200
90	24	54	-30	-33	89	1922400
96	22	44	-22	-26	63	1360800
102	21	36	-15	-18.5	44.5	961200
108	20	30	-10	-12.5	32	691200
114	19	25	-6	-8	24	518400
120	19	22	-3	-4.5	19.5	421200
126	18	19	-1	-2	17.5	378000

¹ considerando $(b+B)/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1dia/24 horas= 1/4 día, entonces las unidades son
 m³.dia/4s

Ubicando $t=1$ para la hora:6

Aplicando el método Lagrangiano (Capítulo cuatro):

Matriz D para el periodo de análisis, de acuerdo con lo tratado en el Capítulo cuatro :

	1	2	3	4	5	6
1	22	0	0	23	22	0
2	21	22	0	35	23	22
3	21	21	22	71	35	23
4	26	21	21	103	71	35
5	34	26	21	111	103	71
6	44	34	26	109	111	103
7	55	44	34	100	109	111
8	66	55	44	86	100	109
9	75	66	55	71	86	100
10	82	75	66	59	71	86
11	85	82	75	47	59	71
12	84	85	82	39	47	59
13	80	84	85	32	39	47
14	73	80	84	28	32	39
15	64	73	80	24	28	32
16	54	64	73	22	24	28
17	44	54	64	21	22	24
18	36	44	54	20	21	22
19	30	36	44	19	20	21
20	25	30	36	19	19	20
21	22	25	30	18	19	19

$i=$ renglones
 $j=$ columnas

Determinando la matriz transpuesta

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	22	21	21	26	34	44	55	66	75	82
2	0	22	21	21	26	34	44	55	66	75
3	0	0	22	21	21	26	34	44	55	66
4	23	35	71	103	111	109	100	86	71	59
5	22	23	35	71	103	111	109	100	86	71
6	0	22	23	35	71	103	109	100	86	71
$i=$	6	$j=21$	b_0	b_1	b_2	$ r$				
a_1	a_2	a_3								
$i=$	1									
$j=$	6									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
21	21	34	44	55	66	75	82	85	84	
$i=$	1	$j=$								

Continuación de la matriz D transpuesta

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
85	84	80	73	64	54	44	36	30	25	22
82	85	84	80	73	64	54	44	36	30	25
75	82	85	84	80	73	64	54	44	36	30
47	39	32	28	24	22	21	20	19	19	18
59	47	39	32	28	24	22	21	20	19	19
71	59	47	39	32	28	24	22	21	20	19

Continuación del vector Q(t)

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
80	73	64	44	36	30	25	22	22	19

La solución del sistema es:

- a1 1.123521348
- a2 -0.25427711
- a3 -0.04589478
- b0 = 0.164622243
- b1 -0.22679358
- b2 0.238821875
- λ -268.043698

Suma = 1

El modelo ARMA(3,2), de acuerdo con la ecuación (4.8), resulta:

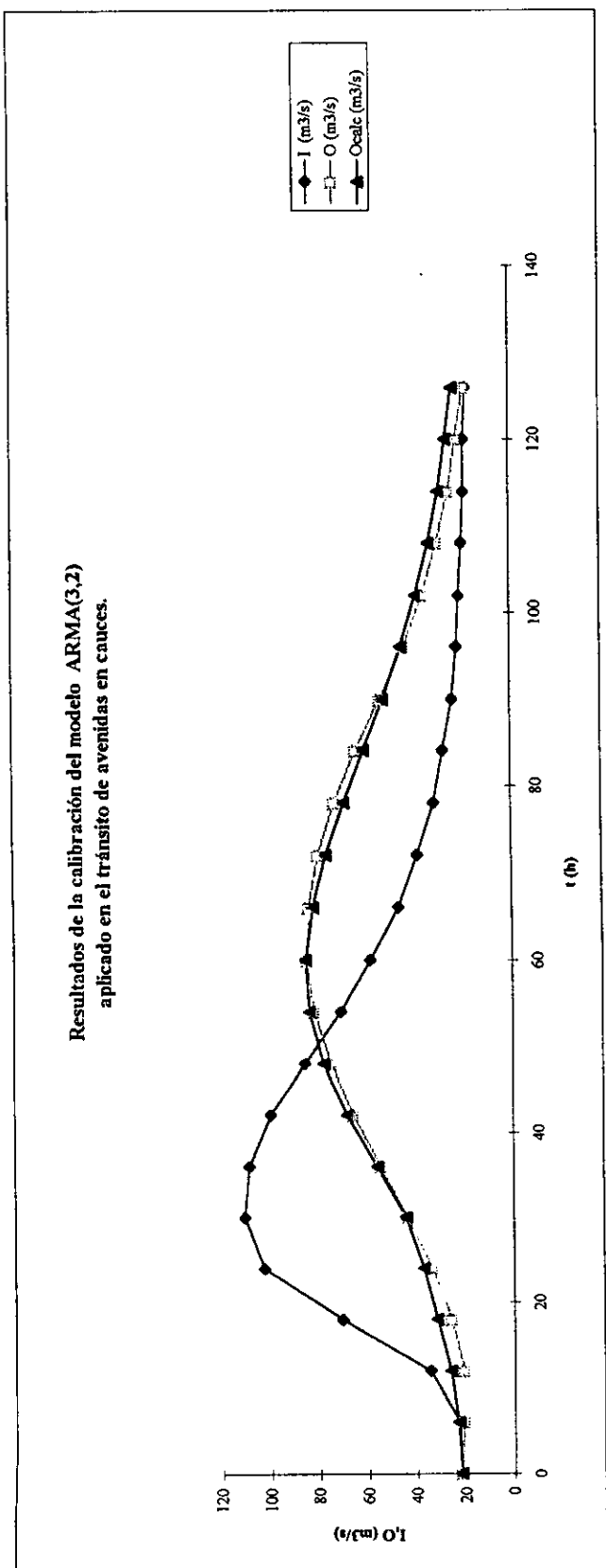
$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1) + b_2 I(t-2)$$

Obteniendo los gastos calculados con el modelo:

Tiempo (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)	O _{calc} (m ³ /s)
0	22	22	22
6	23	21	23.514
12	35	21	26.624
18	71	26	32.167
24	103	34	37.504
30	111	44	44.605
36	109	55	56.470
42	100	66	68.633
48	86	75	78.214
54	71	82	83.898
60	59	85	85.372
66	47	84	82.307
72	39	80	76.767
78	32	73	69.050
84	28	64	60.947
90	24	54	52.638
96	22	44	45.339
102	21	36	38.957
108	20	30	33.608
114	19	25	29.380
120	19	22	26.271
126	18	19	23.694

Error relativo % en el gasto de pico	0.438
Error relativo en % en tiempo de pico	0

Dibujando los resultados anteriores:



El error en el gasto de pico es del 0.44%

El error en el tiempo de pico es del 0 %

El modelo ARMA(3,2) proporciona el mejor ajuste tanto en el valor del gasto de pico como en el tiempo de pico, respecto a los modelos ARMA(1,1) y ARMA(2,1).

Almacenamiento calculado:

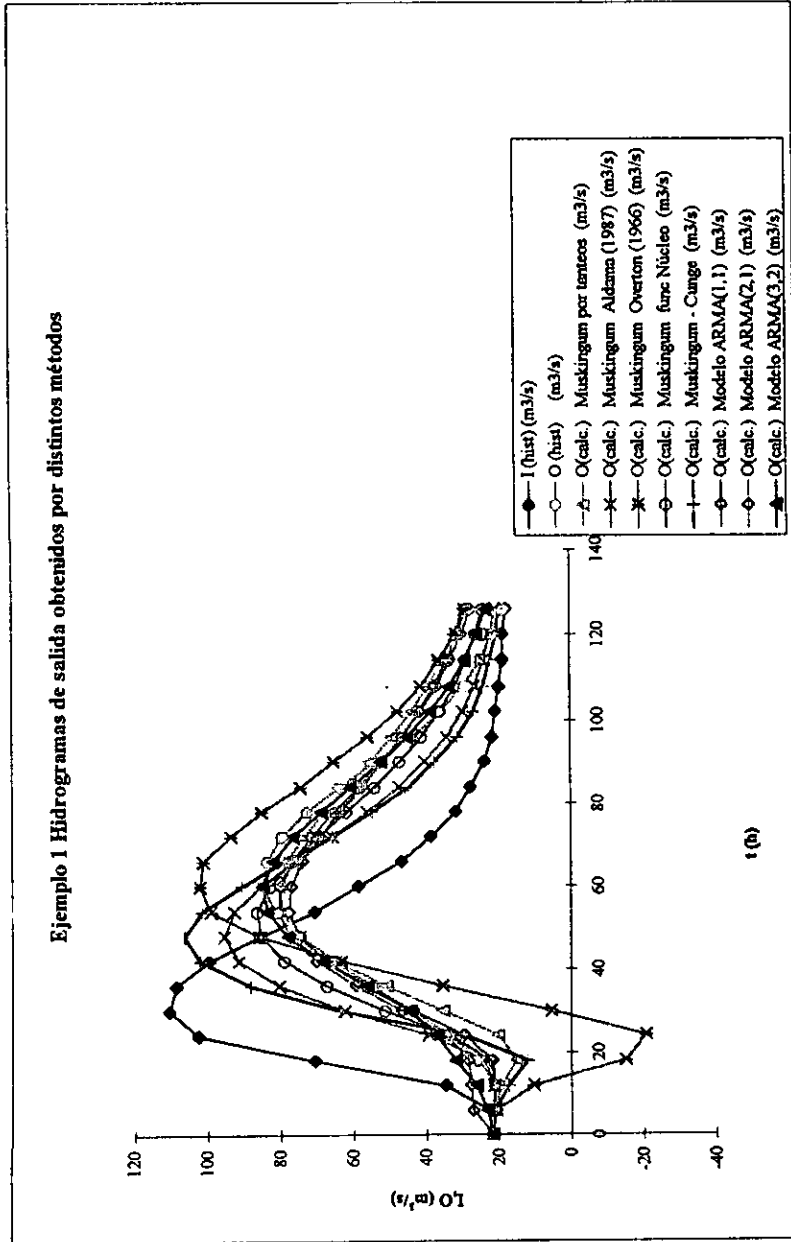
Tiempo (h)	I (hist) (m ³ /s)	O (calc.) (m ³ /s)	S (m ³ /s)	S _{medio} ¹ (m ³ dia/4s)	S _{acum} (m ³ dia/4s)	S _{acum} (m ³)	S _{acum} (hist) (m ³)	Error relativo en S _{acum} (%)
0	22	22.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0	
6	23	23.514	-0.514	-0.257	-0.257	-5554.684	21600	125.716
12	35	26.624	8.376	3.931	3.674	79347.606	194400	59.183
18	71	32.167	38.833	23.604	27.278	589195.594	831600	29.149
24	103	37.504	65.496	52.184	79.442	1715940.866	2062800	16.815
30	111	44.605	66.395	65.945	145.387	3140359.876	3531600	11.078
36	109	56.470	52.530	59.462	204.849	4424744.297	4838400	8.549
42	100	68.633	31.367	41.948	246.797	5330823.836	5788800	7.911
48	86	78.214	7.786	19.576	266.373	5753667.153	6274800	8.305
54	71	83.898	-12.898	-2.556	263.817	5698450.149	6274800	9.185
60	59	85.372	-26.372	-19.635	244.182	5274327.904	5875200	10.227
66	47	82.307	-35.307	-30.840	213.342	4608185.622	5194800	11.292
72	39	76.767	-37.767	-36.537	176.805	3818982.543	4352400	12.256
78	32	69.050	-37.050	-37.408	139.396	3010962.101	3466800	13.149
84	28	60.947	-32.947	-34.999	104.398	2254991.711	2635200	14.428
90	24	52.638	-28.638	-30.793	73.605	1589870.942	1922400	17.298
96	22	45.339	-23.339	-25.988	47.617	1028523.906	1360800	24.418
102	21	38.957	-17.957	-20.648	26.969	582533.158	961200	39.395
108	20	33.608	-13.608	-15.782	11.187	241633.867	691200	65.041
114	19	29.380	-10.380	-11.994	-0.807	-17437.636	518400	103.364
120	19	26.271	-7.271	-8.825	-9.633	-208064.059	421200	149.398
126	18	23.694	-5.694	-6.482	-16.115	-348083.637	378000	192.086

¹ considerando $(b+B)h/2$ estando b y B en m³/s, h en horas
 si h= 6 horas x 1 dia/24 horas= 1/4 dia, entonces las unidades son
 m³ dia/4s

Ejemplo 1, resultados obtenidos por todos los métodos

Tiempo	I (hist)	O (hist)	O(calc.) Muskingum por tanteos (m3/s)	O(calc.) Muskingum Aldama (1987) (m3/s)	O(calc.) Muskingum Overton (1966) (m3/s)	O(calc.) Muskingum func Núcleo (m3/s)	O(calc.) Muskingum - Cunge (m3/s)	O(calc.) Modelo ARMA(1,1) (m3/s)	O(calc.) Modelo ARMA(2,1) (m3/s)	O(calc.) Modelo ARMA(3,2) (m3/s)
0	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
6	23	21	21.802	21.937	21.104	21.938	21.610	21.944	27.392	23.514
12	35	21	19.670	21.580	10.857	21.482	17.634	21.476	27.910	26.624
18	71	26	15.658	24.311	-14.913	22.870	12.415	22.118	28.717	32.167
24	103	34	20.565	39.661	-20.463	33.743	29.717	29.965	35.016	37.504
30	111	44	35.725	62.706	5.613	51.733	63.859	43.932	46.860	44.605
36	109	55	51.410	80.784	35.786	67.673	88.610	57.284	59.592	56.470
42	100	66	64.888	91.837	63.570	79.257	102.490	68.000	70.369	68.633
48	86	75	74.790	95.749	85.930	85.656	106.888	75.106	77.700	78.214
54	71	82	80.036	93.066	99.396	86.873	102.022	78.101	80.937	83.898
60	59	85	80.576	85.615	102.508	83.230	90.931	77.375	80.349	85.372
66	47	84	78.569	76.474	101.547	77.503	79.377	74.424	77.077	82.307
72	39	80	73.740	66.019	94.030	69.856	66.036	69.461	71.768	76.767
78	32	73	68.070	56.414	85.485	62.052	55.020	63.842	65.536	69.050
84	28	64	61.536	47.589	74.668	54.279	44.876	57.781	58.926	60.947
90	24	54	55.516	40.558	65.686	47.512	37.856	52.128	52.623	52.638
96	22	44	49.511	34.528	56.253	41.360	31.591	46.688	46.724	45.339
102	21	36	44.121	29.934	47.926	36.255	27.104	41.871	41.509	38.957
108	20	30	39.623	26.675	41.571	32.245	24.391	37.807	37.105	33.608
114	19	25	35.835	24.257	36.659	29.039	22.548	34.348	33.422	29.380
120	19	22	32.416	22.302	31.903	26.360	20.744	31.318	30.314	26.271
126	18	19	29.889	21.138	28.325	24.457	20.247	28.943	27.833	23.694

Dibujando los resultados anteriores:

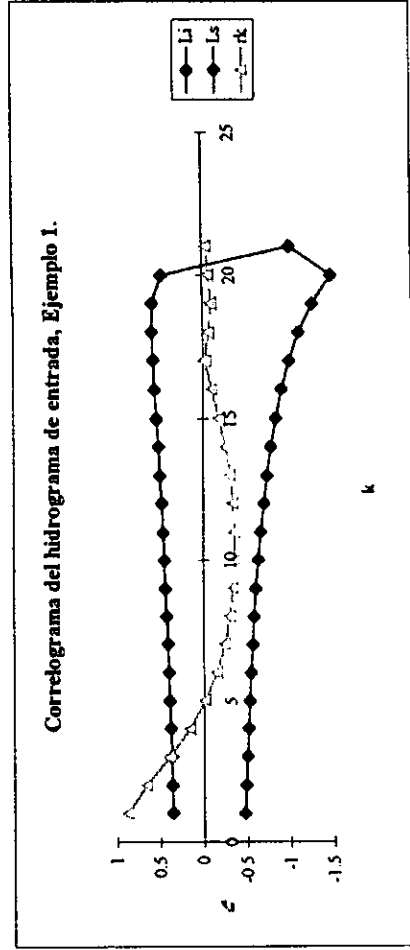


El mejor método resulta el modelo ARMA(3,2) resultando el menor error tanto en gasto de pico de salida como en tiempo de pico del gasto de salida.

Se observa que el método que presenta mayor deficiencia es el de Muskingum con los parámetros K y X obtenidos por el método de Overton(1966), obteniéndose gastos de salida negativos.

Prueba de Independencia
Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 1

k	Ll	rk	Ls
1	-0.465	0.89	0.37
2	-0.477	0.668	0.377
3	-0.49	0.402	0.385
4	-0.505	0.167	0.393
5	-0.52	-1.10E-02	0.402
6	-0.537	-0.143	0.411
7	-0.556	-0.235	0.422
8	-0.576	-0.293	0.433
9	-0.599	-0.329	0.445
10	-0.625	-0.346	0.458
11	-0.654	-0.347	0.473
12	-0.688	-0.331	0.488
13	-0.727	-0.298	0.505
14	-0.773	-0.247	0.523
15	-0.829	-0.178	0.543
16	-0.897	-9.90E-02	0.564
17	-0.984	-1.69E-02	0.584
18	-1.099	-5.55E-02	0.599
19	-1.257	-8.62E-02	0.591
20	-1.48	-6.88E-02	0.48
21	-1	-3.56E-02	-1



A1.1 Tránsito de avenidas obteniendo los parámetros del método de Muskingum aplicando mínimos cuadrados y considerando aportes laterales, método de O'Donnell, 1985

En este método se establece que la cantidad de gasto de entrada lateral es directamente proporcional al gasto de entrada a la sección, Figura A1.1.

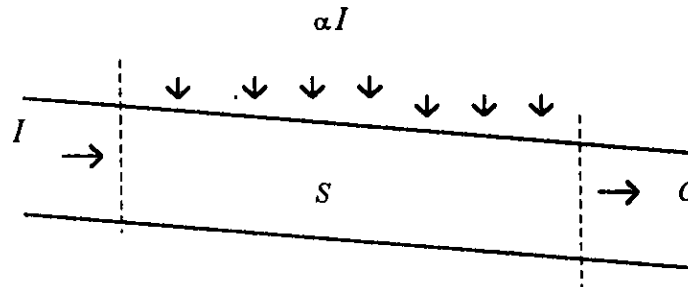


Figura A1.1 Entrada, almacenamiento, salida y aporte lateral en un tramo de cauce

En este método se elimina el coeficiente C_0 y la ecuación para estimar los gastos de salida resulta:

$$O_{j+1} = I_{j+1} + C_1(I_j - I_{j+1}) + C_2(O_j - I_{j+1}) \quad (A1.1)$$

La solución por mínimos cuadrados es:

$$C_1 = D^{-1} \left\{ \left[\sum (O_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum (I_j + I_{j+1})(O_{j-1} - I_{j+1}) \right] - \left[\sum (I_j - I_{j+1}) \right] \left[\sum (O_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] \right\} \quad (A1.2)$$

$$C_2 = D^{-1} \left\{ \left[\sum (I_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum (O_j + I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] - \left[\sum (I_j - I_{j+1}) \right] \left[\sum (I_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] \right\} \quad (A1.3)$$

Donde :

$$D = \left[\sum (I_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum (O_j + I_{j+1})^2 \right] - \left[\sum (I_j - I_{j+1})(O_j - I_{j+1}) \right]^2 \quad (A1.4)$$

las sumatorias anteriores van desde $j=1$ hasta n .

Los valores de K y X se determinan a partir de :

$$K = \frac{C_1 + C_2}{1 - C_2} \Delta t \quad (\text{A1.5})$$

$$X = 1 - \frac{1 + C_2}{2(C_1 + C_2)} \quad (\text{A1.6})$$

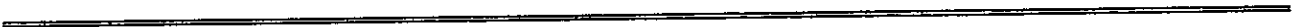
Una vez obtenidos K y X se determinan los coeficientes utilizando:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\Delta t + 2KX}{\Delta t + 2K(1 - X)} \\ C_2 &= \frac{\Delta t - 2KX}{\Delta t + 2K(1 - X)} \\ C_3 &= \frac{-\Delta t + 2K(1 - X)}{\Delta t + 2K(1 - X)} \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Posteriormente se efectúa el tránsito de la avenida con la siguiente ecuación:

$$O_{j+1} = C_1 I_j + C_2 I_{j+1} + C_3 O_j \quad (\text{A1.8})$$

**LISTADO Y CORRIDA DEL PROGRAMA EN BASIC,
MÉTODO DE LAS FUNCIONES DE NÚCLEO**



```

10 PRINT
15 PRINT "PROGRAMA QUE OBTIENE LOS PARAMETROS K Y X (MUSKINGUM) POR EL METODO DE
  LAS FUNCIONES DE NUCLEO"
20 CLS
30 '*****
40 DIM T(50),I(50),O(50),IT(50),DELS(50),SC(50),OC(50),S(50)
50 DIM I1(50),O1(50),IT1(50),OT(50)
60 DIM I1M(50),O1M(50),ITM(50),OM(50),DELM(50),OTN(50)
70 DIM JN(50),JN2(50)
72 FOR J=1 TO 22
74 READ I(J)
75 NEXT J
76 FOR J=1 TO 22
77 READ O(J)
79 NEXT J
100 DATA 22,23,35,71,103,111,109,100,86,71,59,47,39,32,28,24,22,21,20,19,19,18
130 DATA 22,21,21,26,34,44,55,66,75,82,85,84,80,73,64,54,44,36,30,25,22,19
160 '*****
170 ' lee: deltat= intervalo de tiempo en horas
180 '     n=número de ordenadas
190 '     Qbase=gasto del rio al iniciar la avenida en m3/s
200 '*****
210 INPUT "Indique el intervalo de tiempo en horas";DELTAT
211 INPUT "INDIQUE EL NUMERO DE ORDENADAS";N
215 INPUT "INDIQUE EL GASTO BASE (INICIAL)EN M3/S";QBASE
220 '*****
230 ' inicializa: dels(1)= cambio de almacenamiento en el instante 1
240 '     s(1)=almacenamiento en el instante 1
250 ' calcula: deltseg=intervalo de tiempo en segundos
260 '*****
270 DELS(1)=0: S(1)=0: DELTSEG=DELTAT*60^2
280 '*****
290 ' calcula T(j)=tiempo real en horas correspondiente al instate j-esimo
300 ' *****
310 FOR J=1 TO N
320 T(J)=(J)*DELTAT
330 NEXT J
340 '*****
460 GOSUB 2000: ' Imprime hidrogramas históricos
470 '*****
480 ' calcula I1(j) y O1(j)= desviaciones de las entradas y salidas del instante
  j-esimo respectivamente
490 ' *****
500 FOR J=1 TO N
510 I1(J)=I(J)-QBASE: O1(J)=O(J)-QBASE
520 NEXT J
530 ' *****
540 ' CALCULA: I1M(J) Y O1M(J)= ,MEDIA DE LAS DESVIACIONES DE LAS ENTRADAS Y SAI
  IDAS DE INSTANTE J-ESIMO RESPECTIVAMENTE
550 ' DELS(j)=cambio de almacenamiento en el instante j-esimo
560 '     S(J)= ALMACENAMIENTO EN EL INSTANTE J-ESIMO
570 ' *****
580 I1M(1)=I1(1)/2: O1M(1)=O1(1)/2
590 FOR J=2 TO N
600 I1M(J)=(I1(J)+I1(J-1))/2
610 O1M(J)=(O1(J)+O1(J-1))/2
620 DELS(J)=(I1M(J)-O1M(J))*DELTSEG
630 S(J)=S(J-1)+DELS(J)
640 NEXT J
650 FOR J=1 TO N

```

```

660 JN(J)=J-.5: JN2(J)=JN(J)^2
670 NEXT J
680 '*****
690 ' INICIALIZA: SUM1,SUM2,...,SUM5= SUMATORIAS PARA APLICAR LAS ECUACIONES
700 ' METODO OBJETIVO PARA ESTIMAR LOS PARAMETROS K Y X
710 ' *****
720 SUM1=0:SUM2=0:SUM3=0:SUM4=0:SUM5=0:SUM6=0
730 ' *****
740 ' CALCULA LAS SUMATORIAS SUM1,SUM2, SUM,..., SUM 5
750 ' *****
760 FOR J=1 TO N
770 SUM1=SUM1+(JN(J)*O1M(J))
780 SUM2= SUM2+(JN(J)*I1M(J))
790 SUM3=SUM3+I1M(J)
800 SUM4=SUM4+(JN2(J)*O1M(J))
810 SUM5= SUM5+(JN2(J)*I1M(J))
820 NEXT J
830 ' PRINT SUM1,SUM2,SUM3,SUM4, SUM5
840 ' *****
850 ' PARA EL METODO DE MUSKINGUM:
860 ' CALCULA K1= K CON SESGO = K1 VECES DELTAT
870 ' K2=K CORREGIDA POR SESGO (K=K2*DELTAT)
880 ' K=K CORREGIDA POR SESGO EN SEGUNDOS
890 ' KE=K1 CORREGIDA POR SESGO PARA EL CALCULO DEL PARAMETRO X
900 ' X=X DEL METODO DE MUSKINGUM
910 ' C0= PARAMETRO C0
920 ' C1= PARAMETRO C1
930 ' C2= PARAMETRO C2
940 ' *****
950 K1= (SUM1-SUM2)/SUM3: K2=(1.15*K1-.4): K=K2*DELTSEG:KE=(.98*K1)+.1
960 ' PRINT K1,K,KE
970 UNOME=((SUM4-(2*KE*SUM2)-SUM5)/SUM3)-(1/12))/(2*KE^2)
980 X=1-UNOME
990 DELT2=DELTSEG/2:GAMA=K-(K*X)+DELT2: KX=K*X
1000 C0=KX-DELT2:C1=KX+DELT2:C2=K-KX-DELT2
1010 C0=-1*C0/GAMA:C1=C1/GAMA:C2=C2/GAMA
1020 PRINT "":PRINT""
1030 PRINT "K=";K;"SEGUNDOS","X=";X
1040 PRINT"C0=";C0,"C1=";C1,"C2=";C2
1050 PRINT "":PRINT""
1060 ' *****
1070 ' opcion de calculo de datos para graficar resultados de la calibración
1080 ' *****
1090 INPUT "desea datos para graficar los resultados de la calibración";CALIF$
1100 IF CALIF$="no" OR CALIF$="NO" GOTO 1250
1110 '*****
1120 ' calcula s(j)=almacenamiento real en miles de m3
1130 ' sc(j)= almacenamiento calculado con los parámetros K y X
1140 ' oc(j)=ordenadas del hidrograma de salida con base en
los parametros C0, C1 Y C2 TOMANDO COMO HIDROGRAMA A TRANSITAR EL
HISTORICO USADO PARA LA CALIBRACION
1150 ' *****
1160 OC(1)=I(1)
1170 FOR J=2 TO N
1180 S(J)=S(J)/1000:SC(J)=((X*I1(J)+(1-X)*O1(J))*K)/1000
1190 OC(J)=C0*I(J)+C1*I(J-1)+C2*OC(J-1)
1200 NEXT J
1210 GOSUB 2110 : ' IMPRESION DE LOS RESULTADOS DE LA CALIBRACION
1220 ' *****
1230 ' OPCION PARA TRANSITAR AVENIDAS

```

```

1240 ' *****
1250 INPUT "DESEA TRANSITAR ALGUNA AVENIDA"; TRAN$
1260 IF TRAN$="NO" OR TRAN$="no" GOTO 1990
1270 ' *****
1280 ' LEE: NT=NUMERO DE ORDENADAS DEL HIDROGRAMA A TRANSITAR
1290 PRINT "IT(J)=ORDENADAS DEL HIDROGRAMA DE ENTRADAS A TRANSITAR"
1291 INPUT "NT=NUMERO DE ORDENADAS DEL HIDROGRAMA A TRANSITAR";NT
1292 ' *****
1294 FOR J=1 TO NT
1296 PRINT "IT";"(";J;")"
1297 INPUT IT(J)
1298 NEXT J
1350 ' *****
1360 ' opcion de calculo por el metodo tradicional
1370 ' *****
1380 INPUT "por el metodo tradicional";TRAD$
1390 IF TRAD$="no" OR TRAD$="NO" THEN 1540
1400 ' *****
1410 ' calcula OT(j)=ordenadas de salida del hidrograma transitado
1420 REM
1430 IT(0)=IT(1):OT(0)=OT(1)
1440 FOR J=1 TO NT
1450 OT(J)=C0*IT(J)+C1*IT(J-1)+C2*OT(J-1)
1460 NEXT J
1470 PRINT "":PRINT " "
1480 PRINT "HIDROGRAMA TRANSITADO POR EL METODO TRADICIONAL"
1490 PRINT"":PRINT""
1500 GOSUB 2230:GOSUB 2290:' IMPRESION DE RESULTADOS
1510 ' *****
1520 ' OPCION DE CALCULO POR EL METODO DE CONVOLUCION DE LAS FUNC NUCLEO
1530 ' *****
1540 INPUT "POR EL METODO DE CONVOLUCION DE LOS NUCLEOS";CONV$
1550 IF CONV$="no" OR CONV$="NO" GOTO 1990
1560 REM
1570 ' CALCULA : DELM(J)=FUNCIONES NUCLEO DE MUSKINGUM
1580 ' *****
1590 DENO=-1/(K*UNOME/21600): ARG1=DENO:ARG2=-1*DENO
1600 EXP1=EXP(ARG1):EXP2=EXP(ARG2)
1610 DELM(1)=1-(EXP1/UNOME)
1620 SUMDEL=DELM(1)
1630 ' PRINT DELM(1)
1640 CONS=(EXP2-1)/UNOME
1650 INPUT "TIEMPO DE MEMORIA";MEMO
1660 FOR J=2 TO MEMO
1670 ARG3=(J*DENO):EXP3=EXP(ARG3)
1680 ' PRINT CONS,EXP3
1690 DELM(J)=CONS*EXP3
1700 SUMDEL=SUMDEL+DELM(J)
1710 ' print j;delm(j)
1720 NEXT J
1730 PRINT SUMDEL
1740 FOR J=MEMO+1 TO NT
1750 DELM(J)=0
1760 NEXT J
1770 ' *****
1780 ' CALCULA: ITM(J)=ORDENADAS MEDIAS DEL HIDROGRAMA DE ENTRADA A TRANSITAR
1790 ' OTN(J)=ORDENADAS DE SALIDA DEL HIDROGRAMA TRANSITADO
1800 ' *****
1810 ITM(1)=((IT(1)+QBASE)/2)-QBASE
1820 FOR J=2 TO NT

```

```

1830 ITM(J)=(IT(J)+IT(J-1))/2-QBASE
1840 NEXT J
1850 FOR J=1 TO NT
1860 OTN(J)=0
1870 FOR NU=1 TO J
1880 OTN(J)=OTN(J)+DELM(J-NU+1)*ITM(NU)
1890 NEXT NU
1900 OTN(J)=OTN(J)+QBASE
1910 NEXT J
1920 FOR J=1 TO N
1930 ' PRINT DELM(J),ITM(J),OTN(J)
1940 NEXT J
1950 PRINT "":PRINT""
1960 PRINT " HIDROGRAMA TRANSITADO POR CONVOLUCION DE LAS FUNCIONES DE NUCLEO"
1970 PRINT "":PRINT ""
1980 GOSUB 2230:GOSUB 2330: ' IMPRESION DE RESULTADOS
1990 END
2000 PRINT "HIDROGRAMAS HISTORICOS DE ENTRADAS Y SALIDAS PARA UN CAUCE"
2010 PRINT "":PRINT ""
2020 PRINT "      TIEMPO"," ENTRADAS", " SALIDAS"
2030 PRINT"      "," HIST. "," " "HIST."
2040 PRINT "      (HORAS)"," M^3/S"," M^3/S"
2050 PRINT ""
2060 FOR J=1 TO N
2070 PRINT USING"#####.##";T(J),I(J),O(J)
2080 NEXT J
2090 PRINT " "
2100 RETURN
2110 PRINT"":PRINT""
2120 PRINT " RESULTADOS DE LA CALIBRACION USANDO PARA EL TRANSITO DE LA AVENIDA"
2130 PRINT " DE ENTRADA HISTORICA AL TRAMO DEL RIO EN ESTUDIO"
2140 PRINT"":PRINT""
2150 PRINT" ":PRINT" "
2160 PRINT"      TIEMPO";"      SALIDA      ";"      ALMACENAMIENTO"
2170 PRINT "      ";"HISTORICA";" CALCULADA";" "HISTORICO";" CALCULADO"
2180 PRINT "      (HRS)";"      (M^3/S)      ";"      (10^3 m^3"
2190 FOR J=1 TO N
2200 PRINT USING "#####.##";T(J),O(J),OC(J),S(J),SC(J)
2210 NEXT J
2220 RETURN
2230 PRINT" ":PRINT"": PRINT ""
2240 PRINT"      TIEMPO","ENTRADAS"," SALIDAS "
2250 PRINT"      ","DISEÑO","TRANSITADAS"
2260 PRINT "      (HRS)","(M^3/S)"," (M^3/S) "
2270 PRINT ""
2280 RETURN
2290 FOR J=1 TO NT
2300 PRINT USING "#####.##";T(J),IT(J),OT(J)
2310 NEXT J
2320 RETURN
2330 FOR J=1 TO NT
2340 PRINT USING"#####.##";T(J),IT(J),OTN(J)
2350 NEXT J
2360 RETURN
2370 '*****'

```

RUN

PROGRAMA QUE OBTIENE LOS PARAMETROS K Y X (MUSKINGUM) POR EL METODO DE LAS FUNCIONES DE NUCLEO

Indique el intervalo de tiempo en horas? 6

INDIQUE EL NUMERO DE ORDENADAS? 22

INDIQUE EL GASTO BASE (INICIAL) EN M³/S? 22

HIDROGRAMAS HISTORICOS DE ENTRADAS Y SALIDAS PARA UN CAUCE

TIEMPO (HORAS)	ENTRADAS HIST.	SALIDAS 0 M ³ /S	M ³ /S
6.00	22.00	22.00	
12.00	23.00	21.00	
18.00	35.00	21.00	
24.00	71.00	26.00	
30.00	103.00	34.00	
36.00	111.00	44.00	
42.00	109.00	55.00	
48.00	100.00	66.00	
54.00	86.00	75.00	
60.00	71.00	82.00	
66.00	59.00	85.00	
72.00	47.00	84.00	
78.00	39.00	80.00	
84.00	32.00	73.00	
90.00	28.00	64.00	
96.00	24.00	54.00	
102.00	22.00	44.00	
108.00	21.00	36.00	
114.00	20.00	30.00	
120.00	19.00	25.00	
126.00	19.00	22.00	
132.00	18.00	19.00	

K= 85924.68 SEGUNDOS
C0=-6.164577E-02

X= .1837577
C1= .3285255 C2= .7331203

desea datos para graficar los resultados de la calibración? SI

RESULTADOS DE LA CALIBRACION USANDO PARA EL TRANSITO DE LA AVENIDA DE ENTRADA HISTORICA AL TRAMO DEL RIO EN ESTUDIO

TIEMPO (HRS)	SALIDA HISTORICA (M ³ /S)	SALIDA CALCULADA	ALMACENAMIENTO HISTORICO (10 ³ m ³)	ALMACENAMIENTO CALCULADO
6.00	22.00	22.00	0.00	0.00
12.00	21.00	21.94	21.60	-54.35
18.00	21.00	21.48	194.40	135.13
24.00	26.00	22.87	831.60	1054.22
30.00	34.00	33.74	2062.80	2120.56

36.00	44.00	51.73	3531.60	2948.23
42.00	55.00	67.67	4838.40	3688.14
48.00	66.00	79.26	5788.80	4317.52
54.00	75.00	85.66	6274.80	4727.69
60.00	82.00	86.67	6274.80	4981.80
66.00	85.00	83.23	5875.20	5002.73
72.00	84.00	77.50	5194.80	4743.13
78.00	80.00	69.86	4352.40	4336.27
84.00	73.00	62.05	3466.80	3734.80
90.00	64.00	54.28	2635.20	3040.42
96.00	54.00	47.51	1922.40	2275.91
102.00	44.00	41.36	1360.80	1542.98
108.00	36.00	36.26	961.20	966.11
114.00	30.00	32.25	691.20	529.50
120.00	25.00	29.04	518.40	163.04
126.00	22.00	26.36	421.20	-47.37
132.00	19.00	24.46	378.00	-273.56

DESEA TRANSITAR ALGUNA AVENIDA? SI

IT(J)=ORDENADAS DEL HIDROGRAMA DE ENTRADAS A TRANSITAR

NT=NUMERO DE ORDENADAS DEL HIDROGRAMA A TRANSITAR? 22

IT(1)

? 22

IT(2)

? 23

IT(3)

? 35

IT(4)

? 71

IT(5)

? 103

IT(6)

? 111

IT(7)

? 109

IT(8)

? 100

IT(9)

? 86

IT(10)

? 71^a

IT(11)

? 59

IT(12)

? 47

IT(13)

? 39

IT(14)

? 32

IT(15)

? 28

IT(16)

? 24

IT(17)

? 22

IT(18)

? 21

IT(19)

? 20

IT(20)

? 19

IT(21)

? 19

IT(22)

? 18

por el metodo tradicional? SI

HIDROGRAMA TRANSITADO POR EL METODO TRADICIONAL

TIEMPO (HRS)	ENTRADAS DISEÑO (M ³ /S)	SALIDAS TRANSITADAS (M ³ /S)
6.00	22.00	5.87
12.00	23.00	10.11
18.00	35.00	12.81
24.00	71.00	16.52
30.00	103.00	29.08
36.00	111.00	48.32
42.00	109.00	65.17
48.00	100.00	77.42
54.00	86.00	84.31
60.00	71.00	85.69
66.00	59.00	82.51
72.00	47.00	76.97
78.00	39.00	69.47
84.00	32.00	61.77
90.00	28.00	54.07
96.00	24.00	47.36
102.00	22.00	41.25
108.00	21.00	36.17
114.00	20.00	32.19
120.00	19.00	28.99
126.00	19.00	26.33
132.00	18.00	24.43

POR EL METODO DE CONVOLUCION DE LOS NUCLEOS? SI

TIEMPO DE MEMORIA? 22

.9986017

HIDROGRAMA TRANSITADO POR CONVOLUCION DE LAS FUNCIONES DE NUCLEO

TIEMPO (HRS)	ENTRADAS DISEÑO (M ³ /S)	SALIDAS TRANSITADAS (M ³ /S)
6.00	22.00	22.00
12.00	23.00	22.05
18.00	35.00	22.82
24.00	71.00	26.85
30.00	103.00	37.17
36.00	111.00	52.37

42.00	109.00	67.15
48.00	100.00	77.96
54.00	86.00	83.85
60.00	71.00	84.83
66.00	59.00	81.81
72.00	47.00	76.16
78.00	39.00	69.02
84.00	32.00	61.38
90.00	28.00	53.97
96.00	24.00	47.22
102.00	22.00	41.30
108.00	21.00	36.30
114.00	20.00	32.27
120.00	19.00	29.05
126.00	19.00	26.47
132.00	18.00	24.44

Ok

**LISTADO Y CORRIDA DEL PROGRAMA EN BASIC,
PRUEBA DE INDEPENDENCIA, EJEMPLO 1**



```

10 DIM Q(100), R(100), LS(100), LI(100), T(100), P(100)
20 REM LECTURA DE DATOS DE LA MUESTRA
30 INPUT "NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA"; NM
40 READ Q(1), Q(2), Q(3), Q(4), Q(5), Q(6), Q(7), Q(8), Q(9), Q(10), Q(11), Q(12)
, Q(13), Q(14), Q(15), Q(16), Q(17), Q(18), Q(19), Q(20), Q(21), Q(22)
60 DATA 22,23,35,71,103,111,109,100,86,71,59,47,39,32,28,24,22,21,20,19,19,18
80 PRINT "PRUEBA DE INDEPENDENCIA DEL HIDROGRAMA DE ENTRADA, EJEMPLO 1"
90 REM "VALOR DE LA MEDIA DE LA MUESTRA"
100 SUM=0
110 FOR I=1 TO NM
120 SUM=SUM+Q(I)
130 NEXT I
140 X=SUM/NM
150 PRINT "LA MEDIA ES"; X
160 REM "VERIFICACION DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA"
170 IF NM<=30 THEN GOTO 220
180 NK=.25*NM
190 PRINT "0.25NM=";NK
200 INPUT "ELEGIR EL VALOR DE K"; NK
210 GOTO 230
220 NK=NM-1
230 REM "RUTINA PARA CALCULAR COVARIANZA RETRASO CK, COVARIANZA CO, Y"
240 REM "AUTOCORRELACION SERIAL RK"
250 PRINT TAB(5)"k";TAB(20)"LI";TAB(35)"RK";TAB(50)"LS"
260 CO=0
270 FOR T=1 TO NM
280 CO=CO+(Q(T)-X)^2
290 NEXT T
310 FOR K=1 TO NK
320 CK=0
330 FOR T=1 TO (NM-K)
340 CK=CK+((Q(T)-X)*(Q(T+K)-X))
350 NEXT T
360 R(K)=CK/CO
370 LS(K)=(-1+1.96*(NM-K-1)^.5)/(NM-K)
380 LI(K)=(-1-1.96*(NM-K-1)^.5)/(NM-K)
390 PRINT TAB(5)K;TAB(20)LI(K);TAB(35)R(K);TAB(50)LS(K)
400 NEXT K
410 REM "RUTINA PARA ANALIZAR LA INDEPENDENCIA DE EVENTOS"
420 FOR K=1 TO NK
430 IF ABS (R(K))>ABS(LI(K)) THEN GOTO 470
440 IF ABS (R(K))>ABS(LS(K)) THEN GOTO 470
450 NEXT K
460 GOTO 490
470 CON=CON+1
480 GOTO 450
490 IF CON>.1*NK THEN GOTO 520
500 PRINT "EXISTE INDEPENDENCIA DE EVENTOS"
510 GOTO 530
520 PRINT "EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA"
530 REM "ESTADISTICOS MUESTRALES NO SESGADOS"
540 REM "MEDIA, DESVIACION ESTANDAR, VARIANZA, COEFICIENTE DE ASIMETRIA"
550 REM "COEFICIENTE DE CURTOSIS, COEFICIENTE DE VARIACION"
560 PRINT "LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA"; X
570 SUM=0
580 FOR K=1 TO NM
590 SUM=SUM+(Q(K)-X)^2
600 NEXT K
610 SD=(SUM/(NM-1))^2:PRINT "LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES"; SD
620 SV=SD^2: PRINT "LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES"; SV

```

```
625 INPUT Y
630 SUM=0
640 FOR I=1 TO NM
650 SUM=SUM+(Q(I)-X)^3
660 NEXT I
670 GSE=SUM/(NM*(SD^3))
675 CT=NM^2/((NM-1)*(NM-2))
680 G=CT*GSE
685 PRINT "EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES"; G
690 SUM=0
700 FOR K=1 TO NM
710 SUM=SUM+(Q(K)-X)^4
720 NEXT K
730 KS=(SUM/(NM*SD^4))
740 KNS=(NM^3/((NM-1)*(NM-2)*(NM-3)))*KS: PRINT "EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES"; KNS
750 CV=SD/X: PRINT "EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES"; CV
755 END
```

RUN

NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA? 22

PRUEBA DE INDEPENDENCIA DEL HIDROGRAMA DE ENTRADA, EJEMPLO 1

LA MEDIA ES 49.04546

k	LI	RK	LS
1	-.4650184	.8903133	.3697803
2	-.4771722	.6676196	.3771722
3	-.4902935	.4018914	.3850303
4	-.504516	.1672869	.3934049
5	-.52	-1.100303E-02	.402353
6	-.5369405	-.1430362	.4119405
7	-.5555766	-.2345568	.4222432
8	-.5762057	-.292871	.4333486
9	-.599203	-.3286787	.4453569
10	-.6250487	-.3459636	.4583821
11	-.6543695	-.3467119	.4725513
12	-.688	-.3308733	.488
13	-.7270797	-.298016	.5048575
14	-.7732091	-.2471566	.5232091
15	-.8287143	-.1784184	.543
16	-.8971155	-9.902281E-02	.5637822
17	-.984	-1.686982E-02	.584
18	-1.098705	5.550889E-02	.5987049
19	-1.257286	8.616604E-02	.5906194
20	-1.48	6.877314E-02	.48
21	-1	3.561872E-02	-1

EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA

LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA 49.04546

LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES 33.50404

LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES 1122.521

?

EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES .8266868

EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES 2.47176

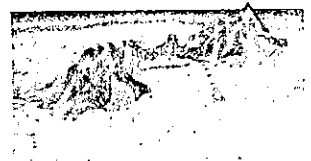
EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES .6831222

OK

ANEXO 2
EJEMPLO 2



HOJA DE CÁLCULO DEL EJEMPLO 2

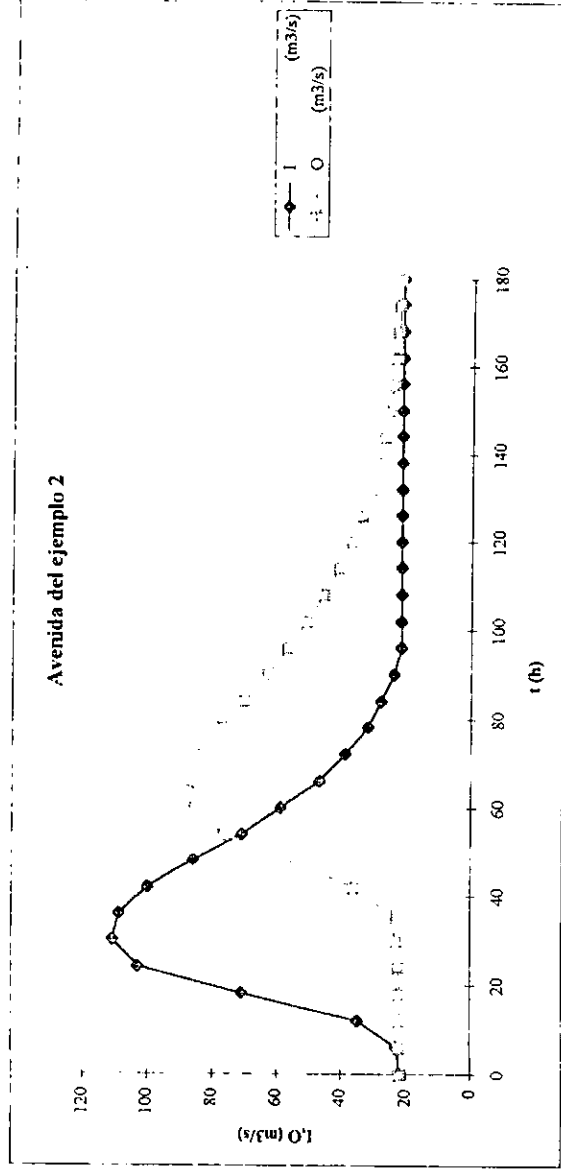


Ejemplo 2 a) Se analiza el ejemplo trabajado por Aguilar (1995), el cual obtuvo resultados de la avenida planteada utilizando el método hidrológico de Advección-Difusión, así como el método de Muskingum con la estimación de parámetros de acuerdo con Gill (1977) y O'Donnell (1985). Se aplica el modelo ARMA(3,2) y se hace una comparación de los resultados

Enunciado del problema:

Considerar un canal trapecial con ancho de plantilla $b=100$ m, talud $k=2$, Longitud $L=50500$ m, pendiente de plantilla $S_0=0.0001$ y coeficiente de Manning $n=0.08$. La avenida registrada de acuerdo con Aldama (1990) es la siguiente:

t	T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	0	22	22
1	6	23	22
2	12	35	22.001
3	18	71	22.005
4	24	103	22.0078
5	30	111	22.624
6	36	109	25.541
7	42	100	36.093
8	48	86	57.113
9	54	71	76.565
10	60	59	85.625
11	66	47	86.555
12	72	39	82.866
13	78	32	76.915
14	84	28	70.106
15	90	24	63.251
16	96	22	56.781
17	102	22	50.894
18	108	22	45.651
19	114	22	41.066
20	120	22	37.137
21	126	22	33.834
22	132	22	31.114
23	138	22	28.91
24	144	22	27.158
25	150	22	25.789
26	156	22	24.746
27	162	22	23.963
28	168	22	23.384
29	174	22	22.964
30	180	22	22.662



Utilizando programas de cómputo en lenguaje Fortran, Aguilar (1995) aplicó el método hidrológico de Advección-Difusión así como el método de Muskingum utilizando la estimación de parámetros de Gill (1977) y O'Donnell(1985), obteniendo los siguientes resultados (calibración):

t	I	O	O _{calc} AD, Aguilar (1995)	O _{calc} Gill, Aguilar (1995)	O _{calc} O'Donnell, Aguilar (1995)
0	22	22	22	22	22
6	23	22	21.835	21.606	21.74
12	35	22.001	20.142	17.134	18.778
18	71	22.005	17.924	6.217	11.505
24	103	22.0078	25.99	5.447	10.882
30	111	22.624	44.053	20.116	20.737
36	109	25.541	61.238	37.506	32.956
42	100	36.093	74.752	54.111	45.155
48	86	57.113	83.425	68.009	55.909
54	71	76.565	88.558	77.204	63.715
60	59	85.625	84.626	80.797	67.784
66	47	88.555	80.16	81.542	69.771
72	39	82.866	73.136	78.384	68.903
78	32	76.915	65.701	73.946	66.851
84	28	70.106	57.879	67.859	63.376
90	24	63.251	51.019	62.154	59.833
96	22	56.781	44.548	55.972	55.709
102	22	50.894	38.871	49.766	51.341
108	22	45.651	34.624	44.694	47.538
114	22	41.066	31.446	40.548	44.228
120	22	37.137	29.068	37.16	41.347
126	22	33.834	27.289	34.39	38.84
132	22	31.114	25.957	32.127	36.657
138	22	28.91	24.961	30.277	34.758
144	22	27.158	24.216	28.765	33.104
150	22	25.789	23.658	27.529	31.665
156	22	24.746	23.24	26.519	30.412
162	22	23.963	22.928	25.694	29.322
168	22	23.384	22.694	25.019	28.373
174	22	22.964	22.52	24.467	27.547
180	22	22.662	22.389	24.017	26.828

	AD, Aguilar (1995)	Gill, Aguilar (1995)	O'Donnell, Aguilar (1995)
Error relativo en O _{pico} (%)	0.00116	5.792	19.391
Error relativo en t _{pico} (%)	18.182	0.000	0.000

Aplicando el modelo ARMA(3,2) y resolviendo por el método Lagrangiano (Capítulo cuatro):

Matriz D:

	1	2	3	4	5	6
1	22	0	0	23	22	0
2	22	22	0	35	23	22
3	22.001	22	22	71	35	23
4	22.005	22.001	22	103	71	35
5	22.0078	22.005	22.001	111	103	71
6	22.624	22.0078	22.005	109	103	103
7	25.541	22.624	22.0078	100	109	111
8	36.093	25.541	22.624	86	100	109
9	57.113	36.093	25.541	71	86	100
10	76.565	57.113	36.093	59	71	86
11	85.625	76.565	57.113	47	59	71
12	86.555	85.625	76.565	39	47	59
13	82.866	86.555	85.625	32	39	47
14	76.915	82.866	86.555	28	32	39
15	70.106	76.915	82.866	24	28	32
16	63.251	70.106	76.915	22	24	28
17	56.781	63.251	70.106	22	22	24
18	50.894	56.781	63.251	22	22	22
19	45.651	50.894	56.781	22	22	22
20	41.066	45.651	50.894	22	22	22
21	37.137	41.066	45.651	22	22	22
22	33.834	37.137	41.066	22	22	22
23	31.114	33.834	37.137	22	22	22
24	28.91	31.114	33.834	22	22	22
25	27.158	28.91	31.114	22	22	22
26	25.789	27.158	28.91	22	22	22
27	24.746	25.789	27.158	22	22	22
28	23.963	24.746	25.789	22	22	22
29	23.384	23.963	24.746	22	22	22
30	22.964	23.384	23.963	22	22	22

i=30 j=6

Matriz D transpuesta:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	22	22	22.001	22.005	22.0078	22.624	25.541	36.093	57.113	76.565	85.625
2	0	22	22	22.001	22.005	22.0078	22.624	25.541	36.093	57.113	76.565
3	0	0	22	22	22.001	22.005	22.0078	22.624	25.541	36.093	57.113
4	23	35	71	103	111	109	100	86	71	59	47
5	22	23	35	71	103	111	109	100	86	71	59
6	0	22	23	35	71	103	111	109	100	86	71

D^T=

i=6 j=30

Vector Q:

Q=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	22	22.001	22.005	22.0078	22.624	25.541	36.093	57.113	76.565	85.625	86.555
	1x30										

D^TQ=

67455.5409	134911.0817
65135.2975	2D ^T Q=
62086.1171	130270.595
53564.7314	124172.2342
57839.7568	107129.4628
62012.637	115679.5136
	124025.274

D^TD=

68109.087	66935.1307	64605.36927	49937.9438	53550.1674	57341.1928
66935.1307	67581.7417	66398.14053	46547.8502	49432.7358	53044.9594
64605.3693	66398.1405	67034.9302	43601.598	46033.4022	48918.2878
49937.9438	46547.8502	43601.598	80898	79162	74202
53550.1674	49432.7358	46033.4022	79162	80898	78678
57341.1928	53044.9594	48918.2878	74202	78678	80414

2D^TD=

136218.174	133870.261	129210.7385	99875.8876	107100.3348	114682.386
133870.261	135163.483	132796.2811	93095.7004	98865.4716	106089.919
129210.739	132796.281	134069.8604	87203.196	92066.8044	97836.5756
99875.8876	93095.7004	87203.196	161796	158324	148404
107100.335	98865.4716	92066.8044	158324	161796	157356
114682.386	106089.919	97836.5756	148404	157356	160828

El sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo con las ecuaciones (4.14) y (4.15), resulta:

136218.174	133870.261	129210.7385	99875.8876	107100.3348	114682.386	1	a1	134911.0817
133870.261	135163.483	132796.2811	93095.7004	98865.4716	106089.919	1	a2	130270.595
129210.739	132796.281	134069.8604	87203.196	92066.8044	97836.5756	1	a3	124172.2342
99875.8876	93095.7004	87203.196	161796	158324	148404	1	b0	107129.4628
107100.335	98865.4716	92066.8044	158324	161796	157356	1	b1	115679.5136
114682.386	106089.919	97836.5756	148404	157356	160828	1	b2	124025.274
						0	λ	

La inversa de la matriz de coeficientes es:

0.00068876	-0.0010339	0.000384319	0.00020442	-0.000366932	0.0001233	0.66582138
-0.0010339	0.00200488	-0.0009779	-0.0004152	0.000832556	-0.0004105	-1.8320378
0.00038432	-0.0009779	0.000580777	0.00018955	-0.000416319	0.00023958	1.69955709
0.00020442	-0.0004152	0.00018955	0.00044105	-0.00078221	0.00036238	1.41015024
-0.0003669	0.00083256	-0.00041632	-0.0007822	0.001533716	-0.0008008	-1.9774525
0.0001233	-0.0004105	0.000239577	0.00036238	-0.000800811	0.00048603	1.03396158
0.66582138	-1.8320378	1.699557091	1.41015024	-1.977452493	1.03396158	-112673.98

La solución del sistema resulta:

a1	1.371700362
a2	-0.64243519
a3	0.133114465
b0	= 0.146455269
b1	-0.41736207
b2	0.408527166
λ	85.10939462
	Suma= 1

El modelo ARMA(3,2), de acuerdo con (4.8), resulta:

$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 J(t) + b_1 J(t-1) + b_2 J(t-2)$$

Continuación de la matriz D^T

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
86.555	82.866	76.915	70.106	63.251	56.781	50.894	45.651	41.066	37.137	33.834	31.114
85.625	86.555	82.866	76.915	70.106	63.251	56.781	50.894	45.651	41.066	37.137	33.834
76.565	85.625	86.555	82.866	76.915	70.106	63.251	56.781	50.894	45.651	41.066	37.137
39	32	28	24	22	22	22	22	22	22	22	22
47	39	32	28	24	22	22	22	22	22	22	22
59	47	39	32	28	24	22	22	22	22	22	22

Continuación del vector Q

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
82.866	76.915	70.106	63.251	56.781	50.894	45.651	41.066	37.137	33.834	31.114	28.91

Continuación de la matriz D^T

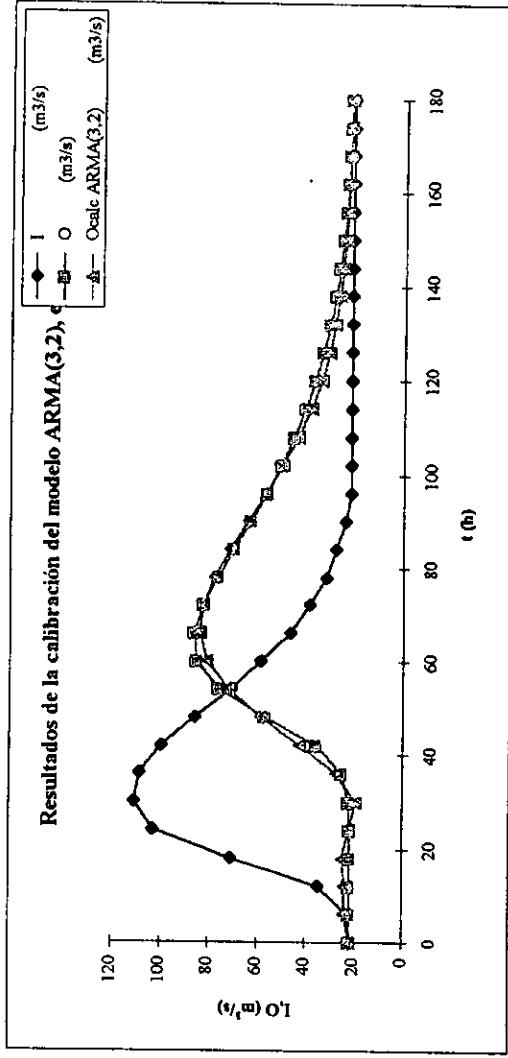
24	25	26	27	28	29	30
28.91	27.158	25.789	24.746	23.963	23.384	22.964
31.114	28.91	27.158	25.789	24.746	23.963	23.384
33.834	31.114	28.91	27.158	25.789	24.746	23.963
22	22	22	22	22	22	22
22	22	22	22	22	22	22
22	22	22	22	22	22	22

Continuación del vector Q

24	25	26	27	28	29	30
27.158	25.789	24.746	23.963	23.384	22.964	22.662

Determinando los gastos calculados con el modelo:

t	I	O	Ocalc
(h)	(m ³ /s)	(m ³ /s)	ARMA(3,2) (m ³ /s)
0	22	22	22
6	23	22	24.364
12	35	22.001	23.801
18	71	22.005	25.110
24	103	22.0078	22.147
30	111	22.624	19.690
36	109	25.541	27.837
42	100	36.093	42.983
48	86	57.113	59.085
54	71	76.565	72.497
60	59	85.625	81.349
66	47	86.555	84.141
72	39	82.866	83.004
78	32	76.915	78.241
84	28	70.106	71.876
90	24	63.251	64.279
96	22	56.781	57.054
102	22	50.894	50.379
108	22	45.651	44.035
114	22	41.066	38.660
120	22	37.137	34.474
126	22	33.834	31.341
132	22	31.114	29.017
138	22	28.91	27.285
144	22	27.158	25.984
150	22	25.789	25.005
156	22	24.746	24.265
162	22	23.963	23.707
168	22	23.384	23.286
174	22	22.964	22.969
180	22	22.662	22.731
Coef asim	1.369		
Coef de Curtosis	3.387		

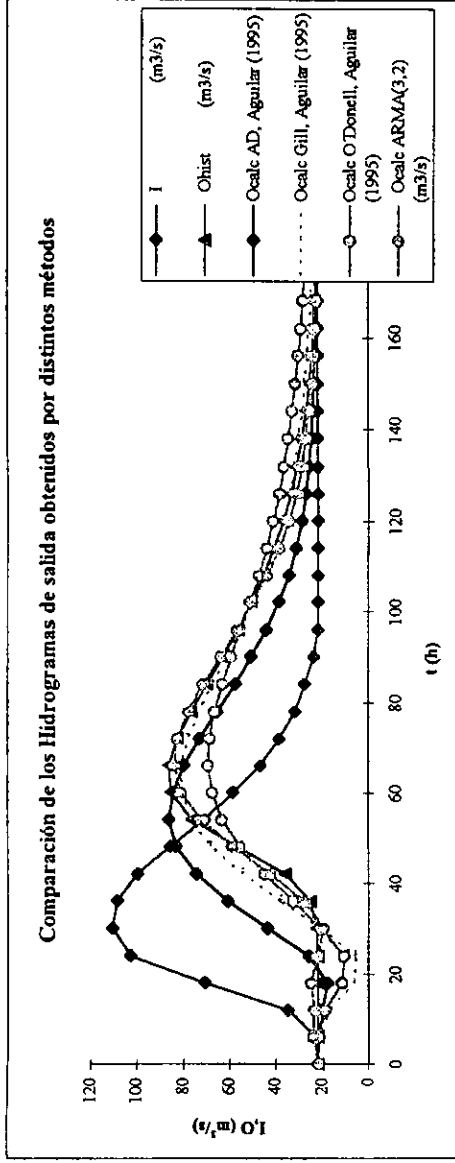


$$\text{Error relativo en \%} = \frac{\text{valor .real} - \text{valoraproximado}}{\text{valor .real}}$$

Error relativo % en el gasto de pico	ARMA(3,2)
	2.789
Error relativo % en tiempo de pico	0.000

Comparando los hidrogramas obtenidos:

t (h)	I (m ³ /s)	O _{hist} (m ³ /s)	O _{calc} AD, Aguilar (1995)	O _{calc} Gill, Aguilar (1995)	O _{calc} O'Donnell, Aguilar (1995)	O _{calc} ARMA(3,2) (m ³ /s)
0	22	22	22	22	22	22
6	23	22	21.835	21.606	21.74	24.364
12	35	22.001	20.142	17.134	18.778	23.801
18	71	22.005	17.924	6.217	11.505	25.110
24	103	22.0078	25.99	5.447	10.882	22.147
30	111	22.624	44.053	20.116	20.737	19.690
36	109	25.541	61.238	37.506	32.956	27.837
42	100	36.093	74.752	54.111	45.155	42.983
48	86	57.113	83.425	68.009	55.909	59.085
54	71	76.565	88.556	77.204	63.715	72.497
60	59	85.625	84.626	80.797	67.784	81.349
66	47	88.555	80.16	81.542	69.771	84.141
72	39	82.866	73.136	78.384	68.903	83.004
78	32	76.915	65.701	73.946	66.851	78.241
84	28	70.106	57.879	67.859	63.376	71.876
90	24	63.251	51.019	62.154	59.833	64.279
96	22	56.781	44.548	55.972	55.709	57.054
102	22	50.894	38.871	49.766	51.341	50.379
108	22	45.651	34.624	44.694	47.538	44.035
114	22	41.066	31.446	40.548	44.228	38.660
120	22	37.137	29.068	37.16	41.347	34.474
126	22	33.834	27.289	34.39	38.84	31.341
132	22	31.114	25.957	32.127	36.657	29.017
138	22	28.91	24.961	30.277	34.758	27.285
144	22	27.158	24.216	28.765	33.104	25.984
150	22	25.789	23.658	27.529	31.665	25.005
156	22	24.746	23.24	26.519	30.412	24.265
162	22	23.963	22.928	25.694	29.322	23.707
168	22	23.384	22.694	25.019	28.373	23.286
174	22	22.984	22.52	24.467	27.547	22.969
180	22	22.662	22.389	24.017	26.828	22.731

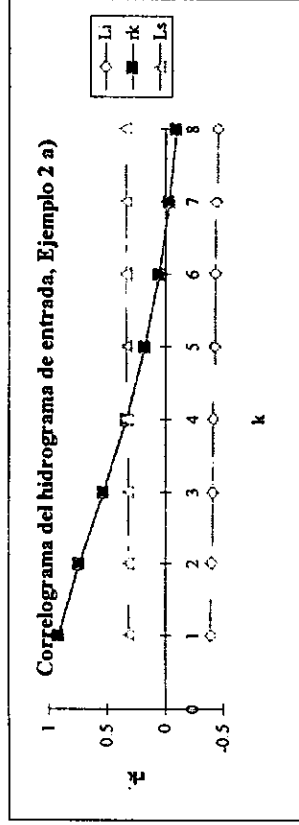


Se observa que aunque el modelo AD proporciona el menor error en el gasto pico de salida (0.001 %), esto no ocurre respecto al tiempo de pico, en el que presenta mayor error respecto a todos los métodos (18.18 %); el modelo ARMA(3,2), en cambio, presenta un error del 2.79% en el gasto de pico y un error del 0 % en el tiempo de pico, considerando que es el que proporciona mejores resultados para este ejemplo.

Prueba de independencia
Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 2a)

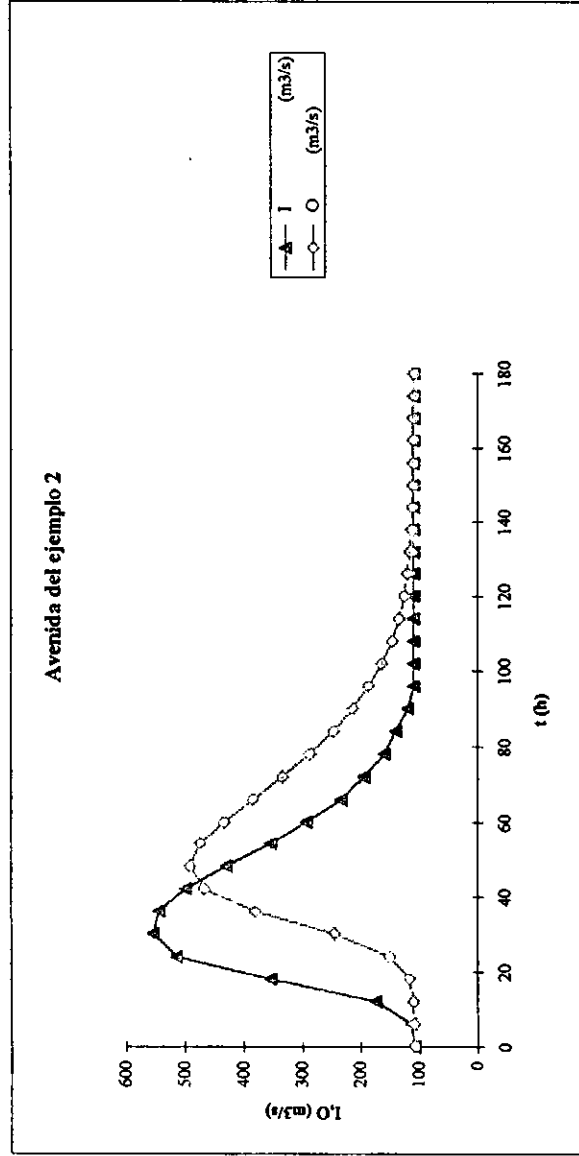
k	L1	rk	Ls
1	-0.385	0.923	0.318
2	-0.392	0.749	0.323
3	-0.399	0.536	0.328
4	-0.407	0.339	0.333
5	-0.415	0.18	0.338
6	-0.424	0.058	0.344
7	-0.433	-0.0297	0.35
8	-0.443	-0.0901	0.356

Existe dependencia de eventos, no es variable aleatoria



Ejemplo 2 b) Utilizando un hidrograma de entrada correspondiente a cinco veces los valores del hidrograma de entrada empleado en a), Aguilár transitó la avenida por el canal con un método hidráulico basado en un esquema en diferencias finitas que resuelve las ecuaciones de Saint Venant (Aldama, 1991) Posteriormente realizó el pronóstico de esta avenida por los métodos AD*, y el de Muskingum de acuerdo con Gill y O'Donell; con los parámetros que obtuvo anteriormente. En este caso se aplicará el modelo ARMA(3,2), con los parámetros que se determinaron en a) para poder hacer comparaciones y determinar la bondad de la predicción con este método.

t	T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	0	110	110
1	6	115	110.031
2	12	175	110.793
3	18	355	117.719
4	24	515	151.603
5	30	555	247.25
6	36	545	381.404
7	42	500	468.034
8	48	430	492.756
9	54	355	475.226
10	60	295	434.134
11	66	235	384.72
12	72	195	334.579
13	78	160	288.4
14	84	140	248.163
15	90	120	214.405
16	96	110	186.594
17	102	110	163.997
18	108	110	146.694
19	114	110	134.295
20	120	110	125.844
21	126	110	120.219
22	132	110	116.555
23	138	110	114.178
24	144	110	112.618
25	150	110	111.652
26	156	110	111.044
27	162	110	110.665
28	168	110	110.426
29	174	110	110.259
30	180	110	110.169



El pronóstico obtenido por Aguilar (1995) para la avenida obtenida como cinco veces los valores de a) por el método AD* así como el método de Muskingum utilizando la estimación de parámetros de Gill (1977) y O'Donnell. Además de los resultados obtenidos con el modelo ARMA(3,2), con los parámetros calculados en a) son:

t	I (m ² /s)	O (m ³ /s)	O _{calc} AD* (1995) Aguilar	O _{calc} Gill, Aguilar (1995)	O _{calc} O'Donnell, Aguilar (1995)	O _{calc} ARMA(3,2)
0	110	110	110	110	110	110.000
6	115	110.031	110.16	108.03	108.698	121.820
12	175	110.793	114.738	85.67	93.889	119.003
18	355	117.719	153.542	31.086	57.523	125.552
24	515	151.603	269.096	27.233	54.408	110.737
30	555	247.25	405.162	100.58	103.684	98.448
36	545	381.404	486.969	187.531	164.779	139.187
42	500	468.034	517.333	270.557	225.775	214.914
48	430	492.756	505.587	340.044	279.545	295.427
54	355	475.226	461.751	386.02	318.576	362.486
60	295	434.134	401.315	403.987	338.855	406.745
66	235	384.72	341.118	407.712	348.855	420.706
72	195	334.579	281.67	391.918	344.516	415.022
78	160	288.4	233.043	369.732	334.253	391.204
84	140	248.163	192.366	339.297	316.878	359.381
90	120	214.405	163.022	310.768	299.163	321.393
96	110	186.594	139.12	279.859	278.547	285.272
102	110	163.997	123.159	248.83	256.703	251.895
108	110	146.694	115.946	223.469	237.69	220.177
114	110	134.295	112.687	202.741	221.141	193.302
120	110	125.844	111.214	185.799	206.737	172.372
126	110	120.219	110.549	171.952	194.199	156.706
132	110	116.555	110.248	160.635	183.287	145.085
138	110	114.178	110.112	151.385	173.789	136.424
144	110	112.618	110.051	143.825	165.521	129.922
150	110	111.652	110.023	137.646	158.326	125.023
156	110	111.044	110.01	132.596	152.052	121.325
162	110	110.665	110.005	128.468	146.611	118.535
168	110	110.426	110.002	125.094	141.866	116.432
174	110	110.259	110.001	122.337	137.736	114.847
180	110	110.169	110	120.083	134.141	113.653

* Cabe aclarar que Aguilar (1995) realiza una corrección de los parámetros obtenidos en la calibración tomando en cuenta el nuevo hidrograma de entrada y los métodos restantes utilizan los mismos parámetros, sin correcciones.

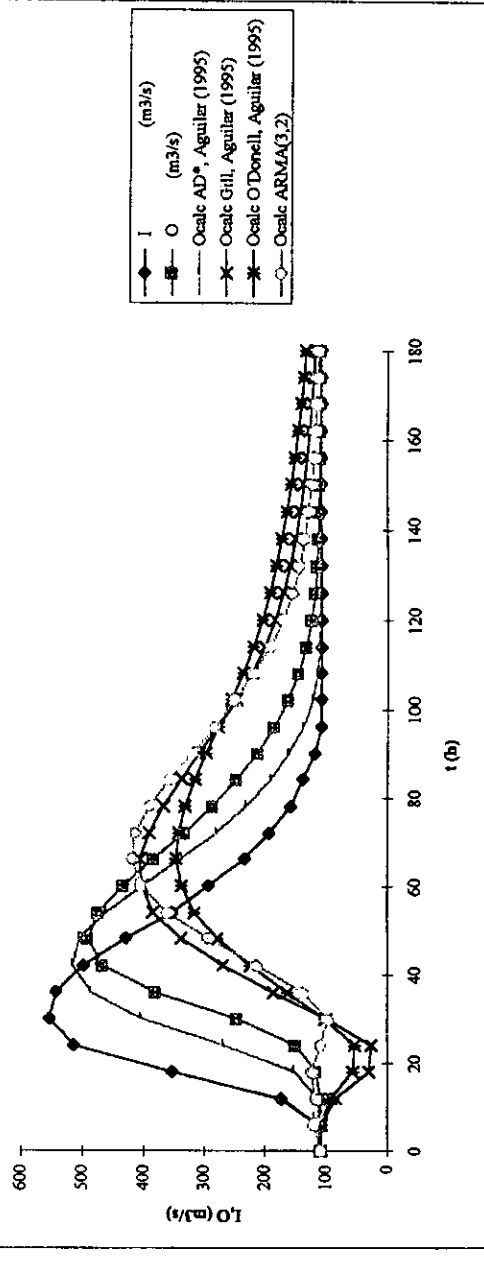
Parámetros del modelo ARMA(3,2)

a1	1.3717004	
a2	-0.642435	
a3	0.1331145	
b0	=	0.1464553
b1		-0.417362
b2		0.4085272
λ		85.109395
	suma=	1

Modelo ARMA(3,2)

$$\hat{Q}(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1) + b_2 I(t-2)$$

Resultados del pronóstico de la avenida por diferentes métodos

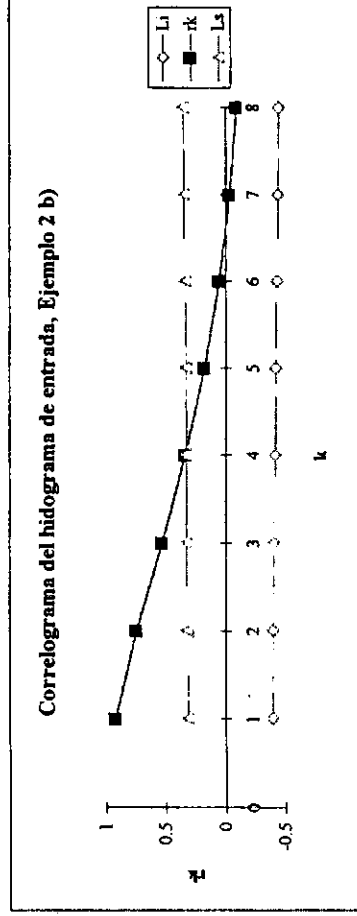


En este caso todos los métodos reportan error en el tiempo de pico; siendo menor el del método AD* (12.5 %) los métodos restantes, incluyendo el modelo ARMA(3,2) pronostican un tiempo de pico con un error del 37.5 %; indicando mayor traslado de la onda de avenida; en lo que se refiere al gasto de pico calculado, el método AD* proporciona el menor error (4.99 %) seguido del modelo ARMA(3,2) con error del 14.62 %.

De ser posible encontrar técnicas de ajuste a los parámetros del modelo ARMA(3,2) para transitar avenidas diferentes a las utilizadas para la calibración del modelo, seguramente se tendrían muy buenos resultados por este método.

Prueba de independencia
Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 2 b)

k	Ll	rk	Ls
1	-0.385	0.923	0.318
2	-0.392	0.749	0.323
3	-0.399	0.536	0.328
4	-0.407	0.339	0.333
5	-0.415	0.18	0.338
6	-0.424	0.058	0.344
7	-0.433	-0.0297	0.35
8	-0.443	-0.0901	0.356

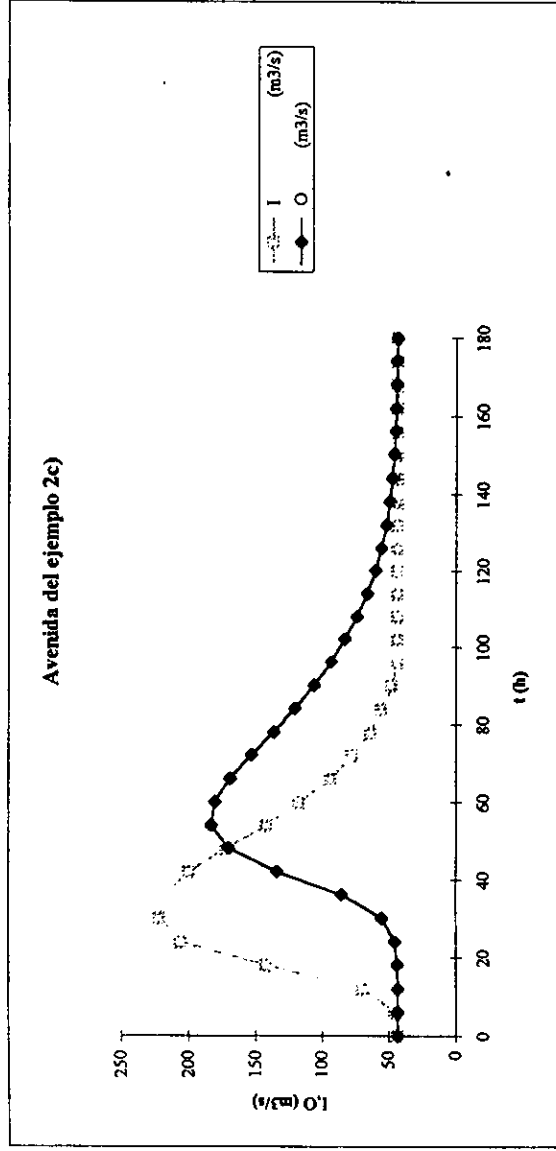


Existe dependencia de eventos, no es variable aleatoria

Ejemplo 2

c) Utilizando un hidrograma de entrada correspondiente a dos veces los valores del hidrograma de entrada empleado en a), Aguilar transitó la avenida por el canal con un método hidráulico basado en un esquema en diferencias finitas que resuelve las ecuaciones de Saint Venant (Aldama, 1991) Posteriormente realizó el pronóstico de esta avenida por los métodos AD⁺, y el de Muskingum de acuerdo con Gill y O'Doneli; con los parámetros que obtuvo anteriormente. En este caso se aplicará el modelo ARMA(3,2), con los parámetros que se determinaron en a) para poder hacer comparaciones y determinar la bondad de la predicción con este método.

t	T (h)	I (m ³ /s)	O (m ³ /s)
0	0	44	44
1	6	46	43.966
2	12	70	44.003
3	18	142	44.256
4	24	206	46.184
5	30	222	55.816
6	36	218	86.073
7	42	200	134.712
8	48	172	170.774
9	54	142	183.865
10	60	118	180.875
11	66	94	169.133
12	72	78	153.546
13	78	64	136.99
14	84	56	121.125
15	90	48	106.751
16	96	44	94.163
17	102	44	83.342
18	108	44	74.203
19	114	44	66.723
20	120	44	60.775
21	126	44	56.185
22	132	44	52.718
23	138	44	50.157
24	144	44	48.293
25	150	44	46.956
26	156	44	46.022
27	162	44	45.369
28	168	44	44.925
29	174	44	44.624
30	180	44	44.417



El pronóstico obtenido por Aguilar (1995) para la avenida obtenida como dos veces los valores de a) por el método AD* así como el método de Muskingum utilizando la estimación de parámetros de Gill (1977) y O'Donnell. Además de los resultados obtenidos con el modelo ARMA(3,2), con los parámetros calculados en a) son:

t	I	O	O _{calc} AD, Aguilar (1995)	O _{calc} Gill, Aguilar (1995)	O _{calc} O'Donnell, Aguilar (1995)	O _{calc} ARMA(3,2)	Error relativo en O _{calc} (%)	AD*, Aguilar (1995)	Gill, Aguilar (1995)	O'Donnell, Aguilar (1995)	ARMA(3,2)
0	44	44	44	44	44	44.000		2.775	11.302	24.106	8.475
6	46	43.966	43.801	43.212	43.479	48.728					
12	70	44.003	42.186	34.268	37.555	47.601					
18	142	44.256	44.784	12.434	23.009	50.221					
24	206	46.184	72.526	10.893	21.763	44.295					
30	222	55.816	117.762	40.232	41.473	39.379					
36	218	86.073	154.73	75.012	65.912	55.675					
42	200	134.712	178.717	108.223	90.31	85.966					
48	172	170.774	188.988	136.018	111.818	118.171					
54	142	183.865	185.999	154.408	127.43	144.994					
60	118	180.875	172.949	161.595	135.569	162.698					
66	94	169.133	156.058	163.085	139.542	168.283					
72	78	153.546	135.877	156.767	137.806	166.009					
78	64	136.99	116.964	147.893	133.701	156.482					
84	56	121.125	99.178	135.719	126.751	143.752					
90	48	106.751	84.825	124.307	119.665	128.557					
96	44	94.163	72.304	111.943	111.419	114.109					
102	44	83.342	62.374	99.532	102.681	100.758					
108	44	74.203	56.928	89.387	95.076	88.071					
114	44	66.723	51.743	81.096	88.456	77.321					
120	44	60.775	49.027	74.32	82.695	68.949					
126	44	56.185	47.263	68.781	77.68	62.682					
132	44	52.718	46.118	64.254	73.315	58.034					
138	44	50.157	45.375	60.554	69.515	54.569					
144	44	48.293	44.893	57.53	66.209	51.969					
150	44	46.956	44.579	55.058	63.33	50.009					
156	44	46.022	44.376	53.038	60.625	48.530					
162	44	45.369	44.244	51.387	58.644	47.414					
168	44	44.925	44.159	50.038	56.746	46.573					
174	44	44.624	44.103	48.935	55.094	45.939					
180	44	44.417	44.067	48.033	53.656	45.461					

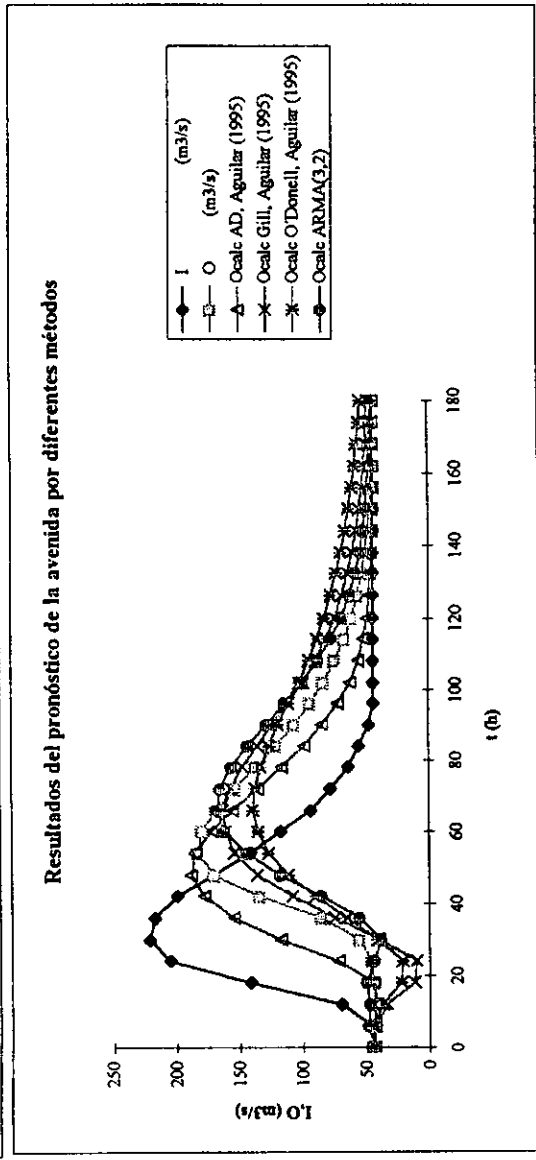
*Cabe aclarar que Aguilar (1995) realizó una corrección de los parámetros obtenidos en la calibración del método AD tomando en cuenta el nuevo hidrograma de entrada y en los métodos restantes se usaron los mismos parámetros, sin correcciones

Parámetros del modelo ARMA(3,2)

a1 1.37170036
 a2 -0.6424352
 a3 0.13311447
 b0 = 0.14645527
 b1 -0.4173621
 b2 0.40852717
 suma= 1
 λ 85.1093946

Modelo ARMA(3,2)

$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1) + b_2 I(t-2)$$

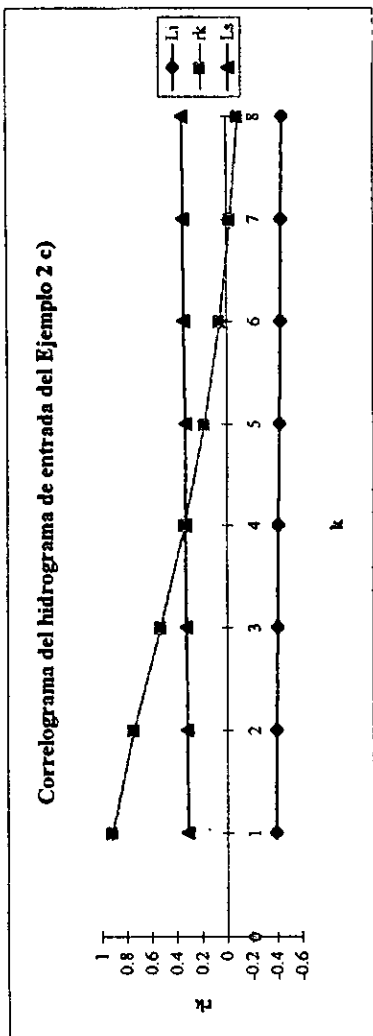


En este caso todos los métodos reportan error en el tiempo de pico, siendo menor el del método AD* (11.11 %) los métodos restantes, incluyendo el modelo ARMA(3,2) pronostican un tiempo de pico con un error del 22.22 %, indicando mayor traslado de la onda de avenida; en lo que se refiere al gasto de pico calculado, el método AD* proporciona el menor error (2.78 %) seguido del modelo ARMA(3,2) con error del 8.48 %.

De ser posible encontrar técnicas de ajuste a los parámetros del modelo ARMA(3,2) para transitar avenidas diferentes a las utilizadas para la calibración del modelo, seguramente se tendrían muy buenos resultados utilizando dichos modelos.

**Prueba de independencia
Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 2 c)**

k	Li	rk	Ls
1	-0.385	0.923	0.318
2	-0.392	0.749	0.323
3	-0.399	0.536	0.328
4	-0.407	0.339	0.333
5	-0.415	0.18	0.338
6	-0.424	0.058	0.344
7	-0.433	-0.0297	0.35
8	-0.443	-0.0801	0.356



PRUEBA DE INDEPENDENCIA, EJEMPLO 2



RUN

NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA? 31

PRUEBA DE INDEPENDENCIA HIDROGRAMA DE ENTRADA DEL EJEMPLO 2 A)

LA MEDIA ES 41.6129

0.25NM= 7.75

ELEGIR EL VALOR DE K? 8

k	LI	RK	LS
1	-.3851642	.9234454	.3184975
2	-.3921154	.7494808	.3231499
3	-.399445	.5359643	.3280164
4	-.407188	.3385504	.3331139
5	-.4153846	.1799292	.3384616
6	-.42408	5.816197E-02	.34408
7	-.4333263	-2.971613E-02	.3499929
8	-.4431833	-9.010519E-02	.3562268

EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA

LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA 41.6129

LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES 30.38715

LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES 923.3787

?

EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES 1.36862

EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES 3.595877

EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES .7302338

Ok

RUN

NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA? 31

PRUEBA DE INDEPENDENCIA HIDROGRAMA DE ENTRADA DEL EJEMPLO 2B

LA MEDIA ES 208.0645

0.25NM= 7.75

ELEGIR EL VALOR DE K? 8

k	LI	RK	LS
1	-.3851642	.9234454	.3184975
2	-.3921154	.7494814	.3231499
3	-.399445	.5359647	.3280164
4	-.407188	.3385506	.3331139
5	-.4153846	.1799293	.3384616
6	-.42408	.058162	.34408
7	-.4333263	-2.971619E-02	.3499929
8	-.4431833	-9.010529E-02	.3562268

EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA

LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA 208.0645

LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES 151.9356

LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES 23084.43

?

EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES 1.368623

EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES 3.595887

EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES .7302333

OK

RUN

NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA? 31

PRUEBA DE INDEPENDENCIA HIDROGRAMA DE ENTRADA DEL EJEMPLO 2C

LA MEDIA ES 83.22581

0.25NM= 7.75

ELEGIR EL VALOR DE K? 8

k	LI	RK	LS
1	-.3851642	.9234454	.3184975
2	-.3921154	.7494808	.3231499
3	-.399445	.5359643	.3280164
4	-.407188	.3385504	.3331139
5	-.4153846	.1799292	.3384616
6	-.42408	5.816197E-02	.34408
7	-.4333263	-2.971613E-02	.3499929
8	-.4431833	-9.010519E-02	.3562268

EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA

LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA 83.22581

LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES 60.77428

LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES 3693.513

?

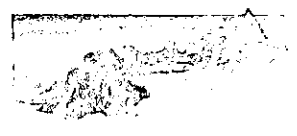
EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES 1.368621

EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES 3.595881

EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES .7302336

OK

ANEXO 3
EJEMPLO 3



HOJA DE CÁLCULO DEL EJEMPLO 3

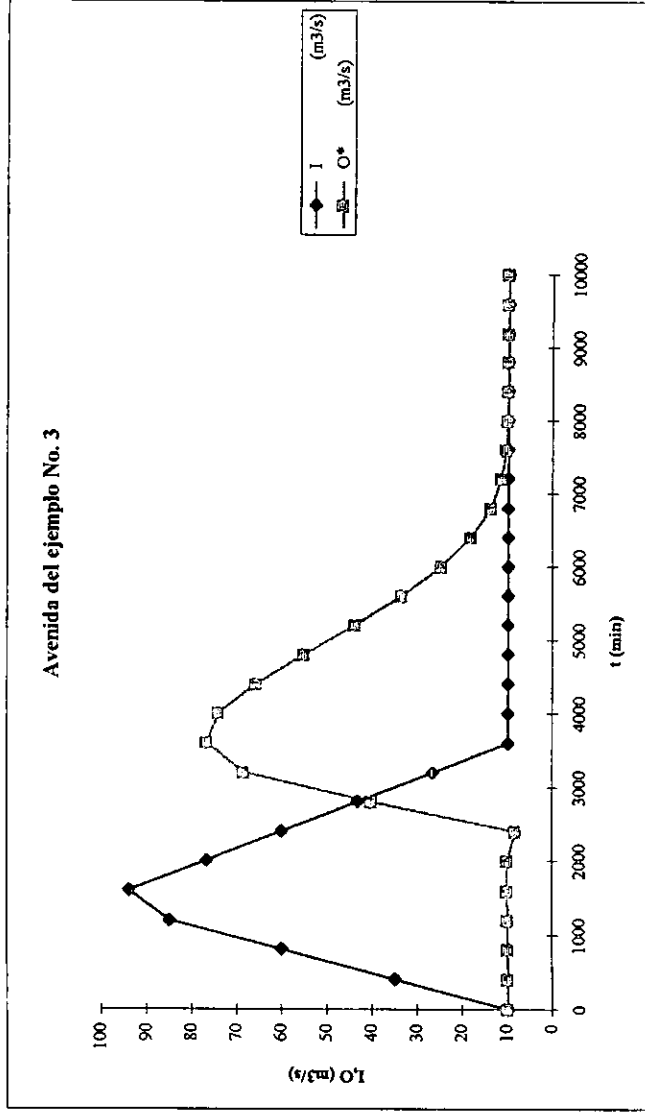


Ejemplo 3 Se utiliza la avenida trabajada por Salas (1995), el cual toma como hidrograma de salidas real el proporcionado por un método hidráulico (Esquema Sánchez-Fuentes) y realiza el tránsito por el método de Muskingum-Cunge, variando sus parámetros. Se realizan comparaciones de los resultados que obtuvo Salas (1995) considerando un $\Delta t = 50$ min y los resultados que proporciona el modelo ARMA(3,2) cuando se calibra con los datos del hidrograma de salida dado.

Datos del problema: Canal rectangular de 10 m de ancho, coeficiente de forma $P = 5/3$, 200 km de longitud, 20 tramos de 10 000 m, pendiente media de 0.00032, desnivel entre extremos 64 m, rugosidad media de 0.030.

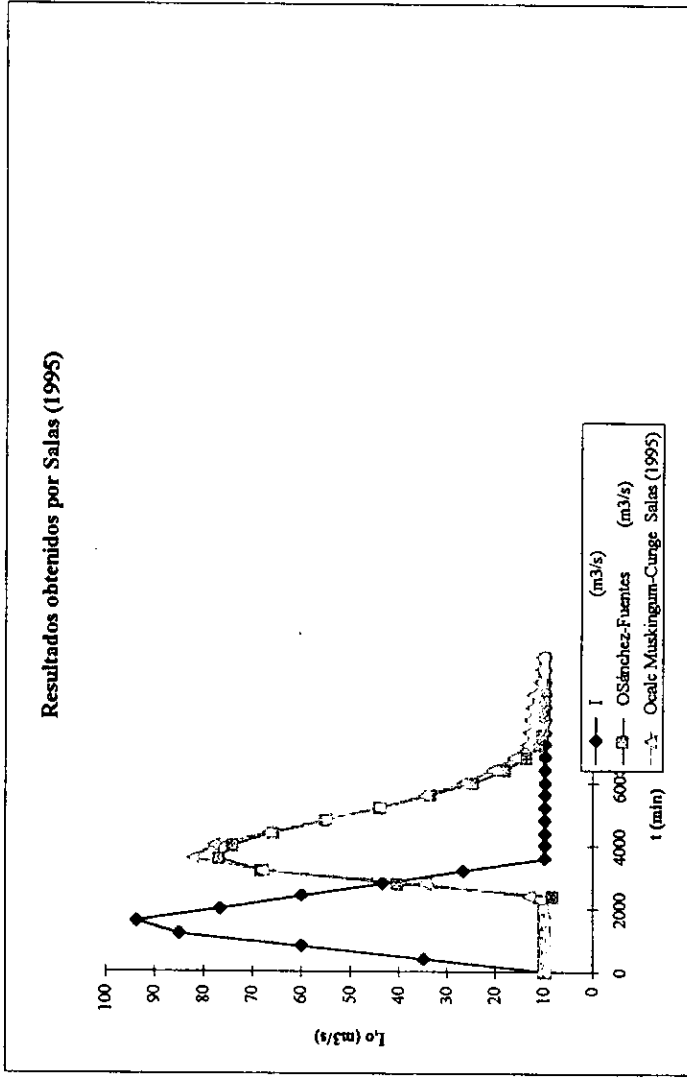
t	t (min)	i (m ² /s)	O* (m ³ /s)
0	0	10	10
1	400	35	10
2	800	60	10
3	1200	85	10
4	1600	93.9	10.01
5	2000	76.7	10.01
6	2400	60	8.2
7	2800	43.33	40.2
8	3200	26.7	68.3
9	3600	10	76.8
10	4000	10	74
11	4400	10	65.7
12	4800	10	55.1
13	5200	10	43.9
14	5600	10	33.5
15	6000	10	24.7
16	6400	10	18.1
17	6800	10	13.8
18	7200	10	11.5
19	7600	10	10.4
20	8000	10	10.1
21	8400	10	10
22	8800	10	10
23	9200	10	10
24	9600	10	10
25	10000	10	10

* Calculado con el esquema Sánchez Fuentes, Método Hidráulico(Salas, 1995)



Salas (1995) obtuvo los siguientes resultados al aplicar el método de Muskingum-Cunge

t (min)	I (m ³ /s)	O _{Sánchez-Fuentes} (m ³ /s)	O _{calc Muskingum-Cunge Salas (1995)} (m ³ /s)
0	10	10	10
400	35	10	10
800	60	10	10
1200	85	10	10
1600	93.9	10.01	10
2000	76.7	10.01	10.17
2400	60	8.2	13.26
2800	43.33	40.2	34.69
3200	26.7	68.3	67.86
3600	10	76.8	82.3
4000	10	74	77.97
4400	10	65.7	66.87
4800	10	55.1	55.07
5200	10	43.9	44.23
5600	10	33.5	34.81
6000	10	24.7	26.98
6400	10	18.1	20.85
6800	10	13.8	16.41
7200	10	11.5	13.7
7600	10	10.4	13.42
8000	10	10.1	13.11
8400	10	10	12.75
8800	10	10	12.41
9200	10	10	11.1
9600	10	10	10.83
10000	10	10	10.6
Media	25.409	25.551	
Desvest	26.799	23.428	
Coeffic de asim	1.557	1.241	
Coeffic de curtosis	3.891	2.851	



Error relativo en O _{pico} (%)	7.161
Error relativo en t _{pico} (%)	0.000
MC, Salas(1995)	

Calibración del modelo ARMA(3,2) a partir de los resultados del esquema Sánchez-Fuentes

Aplicando el modelo ARMA(3,2) y resolviendo por el método Lagrangiano (Capítulo cuatro):

Matriz D:

	1	2	3	4	5	6
1	10	0	0	35	10	0
2	10	10	0	60	35	10
3	10	10	10	85	60	35
4	10	10	10	93.9	85	60
5	10.01	10	10	76.7	93.9	85
6	10.01	10.01	10	60	76.7	93.9
7	8.2	10.01	10.01	43.33	60	76.7
8	40.2	8.2	10.01	26.7	43.33	60
9	68.3	40.2	8.2	10	26.7	43.33
10	76.8	68.3	40.2	10	10	26.7
11	74	76.8	68.3	10	10	10
12	65.7	74	76.8	10	10	10
13	55.1	65.7	74	10	10	10
14	43.9	55.1	65.7	10	10	10
15	33.5	43.9	55.1	10	10	10
16	24.7	33.5	43.9	10	10	10
17	18.1	24.7	33.5	10	10	10
18	13.8	18.1	24.7	10	10	10
19	11.5	13.8	18.1	10	10	10
20	10.4	11.5	13.8	10	10	10
21	10.1	10.4	11.5	10	10	10
22	10	10.1	10.4	10	10	10
23	10	10	10.1	10	10	10
24	10	10	10	10	10	10
25	10	10	10	10	10	10

i=25 j=6

Matriz D transpuesta:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	10	10	10	10	10.01	10.01	8.2	40.2	68.3	76.8	74
2	0	10	10	10	10.01	10.01	10.01	8.2	40.2	68.3	76.8
3	0	10	10	10	10	10	10.01	10.01	8.2	40.2	68.3
4	35	60	85	93.9	76.7	60	43.33	26.7	10	10	10
5	10	35	60	85	93.9	76.7	60	26.7	10	10	10
6	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10
7	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10
8	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10
9	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10
10	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10
11	0	10	10.01	10.01	10.01	60	43.33	43.33	26.7	10	10

D^T=

i=6 j=25

ESTA TEX NO DEBE
 CALR DE LA BIBLIOTECA

Vector Q:

Q=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	10	10	10	10.01	10.01	8.2	40.2	68.3	76.8	74	65.7

$D^T Q =$

29366.3721	58732.7442
26443.904	52887.808
22990.915	45981.83
12441.182	24882.364
14999.728	29999.456
18524.314	37048.628

$D^T D =$

30595.3302	29266.3721	26343.904	10995.013	12441.182	14899.728
29266.3721	30495.3302	29166.3721	10170.2733	10895.013	12341.182
26343.904	29166.3721	30395.3302	9600.0003	10070.2733	10795.013
10995.013	10170.2733	9600.0003	34640.4789	32959.341	28488.211
12441.182	10895.013	10070.2733	32959.341	34640.4789	32859.341
14899.728	12341.182	10795.013	28488.211	32859.341	34540.479

$2D^T D =$

61190.6604	58532.7442	52687.808	21990.026	24882.364	29799.456
58532.7442	60990.6604	58332.7442	20340.5466	21790.026	24682.364
52687.808	58332.7442	60790.6604	19200.0006	20140.5466	21590.026
21990.026	20340.5466	19200.0006	69280.9578	65918.682	56976.422
24882.364	21790.026	20140.5466	65918.682	69280.9578	65718.682
29799.456	24682.364	21590.026	56976.422	65718.682	69080.958

El sistema de ecuaciones lineales, de acuerdo con (4.14) y (4.15), resulta:

61190.6604	58532.7442	52687.808	21990.026	24882.364	29799.456	1	a1
58532.7442	60990.6604	58332.7442	20340.5466	21790.026	24682.364	1	a2
52687.808	58332.7442	60790.6604	19200.0006	20140.5466	21590.026	1	a3
21990.026	20340.5466	19200.0006	69280.9578	65918.682	56976.422	1	b0
24882.364	21790.026	20140.5466	65918.682	69280.9578	65718.682	1	b1
29799.456	24682.364	21590.026	56976.422	65718.682	69080.958	1	b2
						0	λ

=

58732.7442	52887.808	45981.83	24882.364	29999.456	37048.628
------------	-----------	----------	-----------	-----------	-----------

La inversa de la matriz de coeficientes es:

0.00045511	-0.00065102	0.000245329	-9.883E-05	0.00025422	-0.0002048	0.282471
-0.000651	0.001178987	-0.000575221	2.36E-05	-0.0001092	0.0001329	-0.626915
0.00024533	-0.00057522	0.000349493	1.8144E-05	-3.466E-05	-3.086E-06	0.798753
-9.883E-05	2.35997E-05	1.81443E-05	0.00055784	-0.0010201	0.0005193	1.349822
0.00025422	-0.00010923	-3.46602E-05	-0.0010201	0.00203106	-0.0011213	-2.02767
-0.0002048	0.00013288	-3.08565E-06	0.0005193	-0.0011213	0.0006771	1.223539
0.28247108	-0.62691455	0.798753032	1.34982177	-2.0276699	1.2235386	-38364.29

La solución del sistema resulta:

a1	1.441470823
a2	-0.725151457
a3	0.153144083
b0	= 0.146307772
b1	-0.461846598
b2	0.446075377
λ	Suma= 1
	-113.8088282

El modelo ARMA(3,2), de acuerdo con (4.8), resulta:

$$Q(t) = a_1 Q(t-1) + a_2 Q(t-2) + a_3 Q(t-3) + b_0 I(t) + b_1 I(t-1) + b_2 I(t-2)$$

Continuación de la matriz D^T

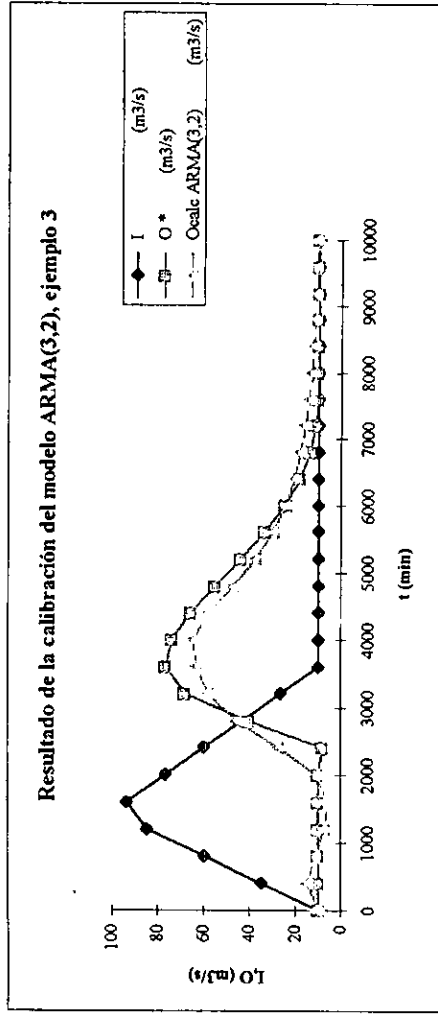
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
65.7	55.1	43.9	33.5	24.7	18.1	13.8	11.5	10.4	10.1	10	10	10	10
74	65.7	55.1	43.9	33.5	24.7	18.1	13.8	11.5	10.4	10.1	10	10	10
76.8	74	65.7	55.1	43.9	33.5	24.7	18.1	13.8	11.5	10.4	10.1	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Continuación del vector Q

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
55.1	43.9	33.5	24.7	18.1	13.8	11.5	10.4	10.1	10	10	10	10	10

Determinando los gastos calculados con el modelo:

t (min)	I (m ³ /s)	O* (m ³ /s)	Ocalc ARMA(3,2) (m ³ /s)
0	10	10	10.000
400	35	10	14.917
800	60	10	11.326
1200	85	10	7.378
1600	93.9	10.01	5.952
2000	76.7	10.01	10.735
2400	60	8.2	27.530
2800	43.33	40.2	45.653
3200	26.7	68.3	58.147
3600	10	76.8	63.388
4000	10	74	64.953
4400	10	65.7	57.872
4800	10	55.1	47.333
5200	10	43.9	37.516
5600	10	33.5	29.922
6000	10	24.7	24.482
6400	10	18.1	20.642
6800	10	13.8	17.890
7200	10	11.5	15.874
7600	10	10.4	14.375
8000	10	10.1	13.256
8400	10	10	12.420
8800	10	10	11.797
9200	10	10	11.335
9600	10	10	10.991
10000	10	10	10.736

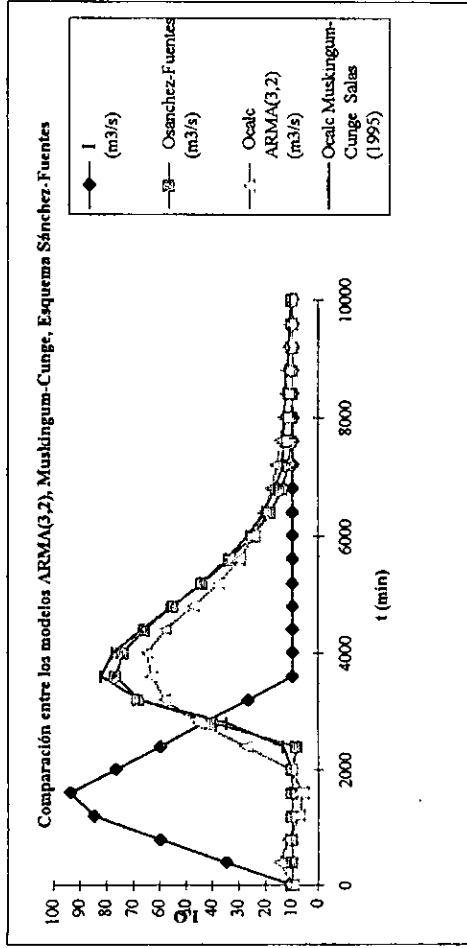


$$\text{Error relativo en \%} = \frac{\text{valor.real} - \text{valoraproximado}}{\text{valor.real}}$$

ARMA(3,2)	
Error relativo % en el gasto de pico	15.425
Error relativo % en tiempo de pico	11.111

Comparando los hidrogramas obtenidos:

t (min)	I (m ³ /s)	O _{Sanchez- Fuentes} (m ³ /s)	O _{calc} Muskingum- Cunge Salas (1995)	O _{calc} ARMA(3,2) (m ³ /s)
0	10	10	10	10.000
400	35	10	10	14.917
800	60	10	10	11.326
1200	85	10	10	7.378
1600	93.9	10.01	10	5.952
2000	76.7	10.01	10.17	10.735
2400	60	8.2	13.26	27.530
2800	43.33	40.2	34.69	45.653
3200	26.7	68.3	67.86	58.147
3600	10	76.8	82.3	63.388
4000	10	74	77.97	64.953
4400	10	65.7	66.87	57.872
4800	10	55.1	55.07	47.333
5200	10	43.9	44.23	37.516
5600	10	33.5	34.81	29.922
6000	10	24.7	26.98	24.482
6400	10	18.1	20.85	20.642
6800	10	13.8	16.41	17.890
7200	10	11.5	13.7	15.874
7600	10	10.4	13.42	14.375
8000	10	10.1	13.11	13.256
8400	10	10	12.75	12.420
8800	10	10	12.41	11.797
9200	10	10	11.1	11.335
9600	10	10	10.83	10.991
10000	10	10	10.6	10.736



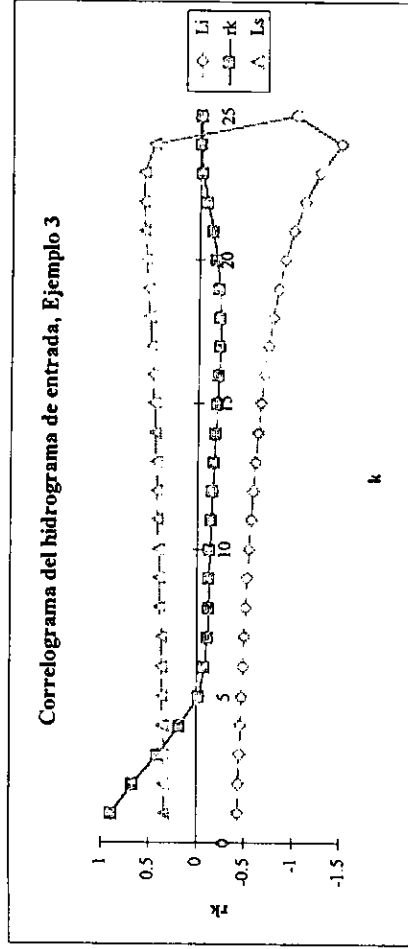
Se observa que el modelo ARMA(3,2) calibrado a partir de los resultados del Esquema Sánchez Fuentes, proporciona un error relativo del 15.43 % en el gasto de pico, mientras que el de Muskingum-Cunge, el cual no requiere calibración, proporciona un error del 7.16% en el gasto de pico.

Hay que tomar en cuenta que el hidrograma de entrada de este problema corresponde a una variable determinística, de acuerdo con lo indicado por Salas, 1995; lo cual influye en los resultados proporcionados por el modelo estocástico ARMA(3,2).

Nuevamente se observa la desventaja el modelo ARMA(3,2) en lo que se refiere a la necesidad de una calibración previa a su aplicación en una avenida se requiere contar con registros históricos para la calibración.

Prueba de Independencia
Correlograma del hidrograma de entrada del Ejemplo 3

k	Li	rk	Ls
1	-0.424	0.893	0.344
2	-0.433	0.672	0.35
3	-0.443	0.41	0.356
4	-0.454	0.181	0.363
5	-0.465	-0.023	0.37
6	-0.477	-0.0723	0.377
7	-0.49	-0.112	0.385
8	-0.505	-0.12	0.393
9	-0.52	-0.119	0.402
10	-0.537	-0.132	0.412
11	-0.556	-0.145	0.422
12	-0.576	-0.159	0.433
13	-0.599	-0.172	0.445
14	-0.625	-0.185	0.458
15	-0.654	-0.198	0.472
16	-0.688	-0.212	0.488
17	-0.727	-0.225	0.505
18	-0.773	-0.224	0.523
19	-0.829	-0.208	0.543
20	-0.897	-0.179	0.564
21	-0.984	-0.135	0.584
22	-1.089	-0.0758	0.599
23	-1.257	-0.0247	0.591
24	-1.48	-0.00499	0.48
25	-1	-0.0132	-1



PRUEBA DE INDEPENDENCIA, EJEMPLO 3



RUN

NUMERO DE DATOS DE LA MUESTRA? 26

PRUEBA DE INDEPENDENCIA HIDROGRAMA DE ENTRADA DEL EJEMPLO 3

LA MEDIA ES 25.40885

k	LI	RK	LS
1	-.42408	.8931436	.34408
2	-.4333263	.6718448	.3499929
3	-.4431833	.4100836	.3562268
4	-.4537204	.1813867	.3628113
5	-.4650184	2.298686E-02	.3697803
6	-.4771722	-7.227616E-02	.3771722
7	-.4902935	-.1122514	.3850303
8	-.504516	-.1201243	.3934049
9	-.52	-.1190162	.402353
10	-.5369405	-.1322403	.4119405
11	-.5555766	-.1454643	.4222432
12	-.5762057	-.1586883	.4333486
13	-.599203	-.1719124	.4453569
14	-.6250487	-.1851364	.4583821
15	-.6543695	-.1983604	.4725513
16	-.688	-.2115845	.488
17	-.7270797	-.2248085	.5048575
18	-.7732091	-.2237004	.5232091
19	-.8287143	-.2083203	.543
20	-.8971155	-.1786338	.5637822
21	-.984	-.1346152	.584
22	-1.098705	-7.583542E-02	.5987049
23	-1.257286	-2.469368E-02	.5906194
24	-1.48	4.992802E-03	.48
25	-1	1.322403E-02	-1

EXISTE DEPENDENCIA DE EVENTOS, NO ES VARIABLE ALEATORIA

LA MEDIA ARITMETICA DE LA MUESTRA 25.40885

LA DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA ES 26.79896

LA VARIANZA DE LA MUESTRA ES 718.1845

?

EL COEFICIENTE DE ASIMETRIA DE LA MUESTRA ES 1.556698

EL COEFICIENTE DE CURTOSIS DE LA MUESTRA ES 4.323795

EL COEFICIENTE DE VARIACION DE LA MUESTRA ES 1.05471

OK