

01173

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE MECÁNICA

TESIS:

**“SIMULACIÓN DE UN PROCESO DE MANUFACTURA CON OBSTÁCULO EN
LA LÍNEA DE PRODUCCIÓN”**

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:

EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. LUIS REYES ÁVILA

CD. UNIVERSITARIA,

SEPTIEMBRE DE 1998.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

266216

7
29.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



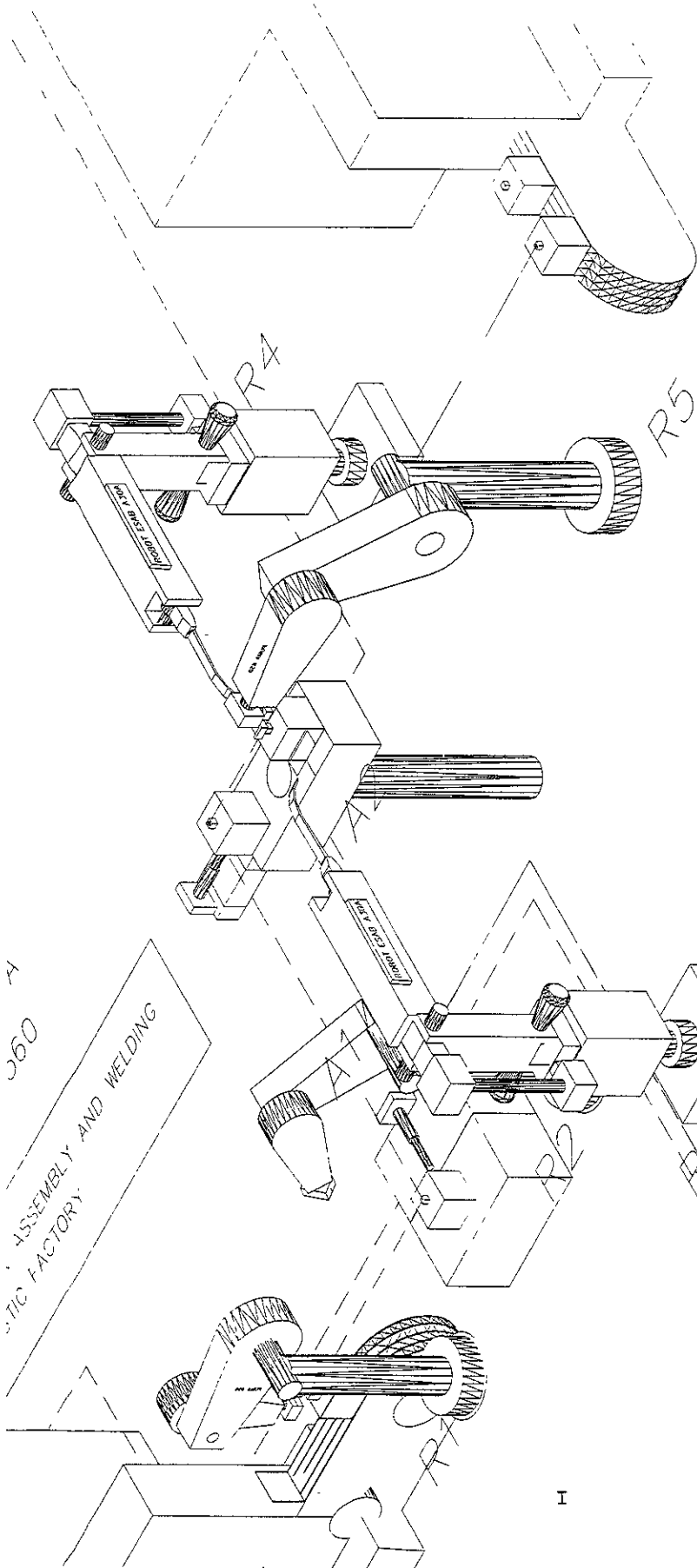
UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

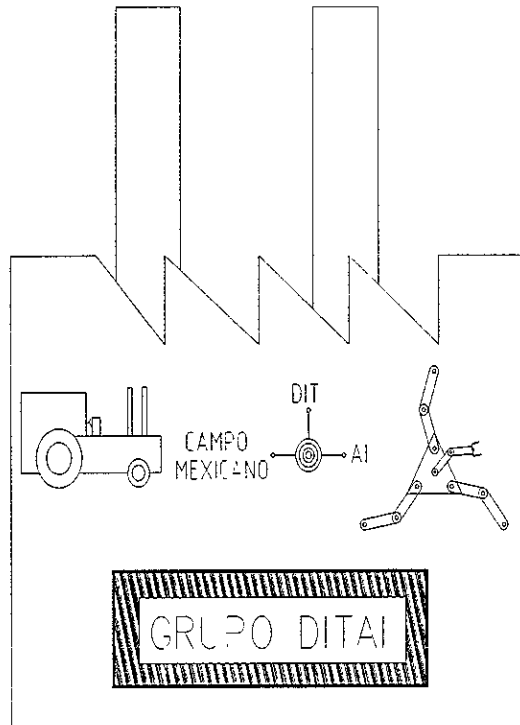
660
ASSEMBLY AND WELDING
FACTORY



MODULE II

CHEMTRONIC IV
SYSTEM X
GLOBAL SYSTEM

EL GRUPO DITAI



DEDICATORIA

A DIOS

“Por su grandeza, por fortalecer mis debilidades y por otorgarme la inteligencia para desarrollar este trabajo”

A mis Padres, Felipe y Natividad

“Por ser la base de mis éxitos, por sus consejos y por su apoyo incondicional para superarme en la vida”

A mis Hermanos, Alejandro, Concepción, Teresa, Mónica, Juana María, Hortensia y Damián

“Por sus consejos, apoyos morales y económicos a lo largo de mi vida”

A mis Tíos, Rolando, Froylán, Norma Laura, Luz María y Crescencio

“Por sus consejos”

A mi Ángel

“Por su magia”

A la Familia Reyes Quiroz

“Por su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera”

AGRADECIMIENTOS

Quiero externar mi más profundo agradecimiento al Dr. Luis Reyes Ávila por la dirección de este trabajo y por la formación científica que me inculcó, también al M. en I. Roberto Martínez Martínez por su valiosa cooperación en el desarrollo de los programas y del apoyo moral que como amigo me brindo, al Dr. Luis Ferrer Argote, al Dr. Jorge Carrera Bolaños, al Dr. Lorenzo Martínez Gómez, al Dr. Angel Rojas Salgado y al M. en I. Armando Ortiz Prado por sus consejos y recomendaciones a lo largo de mis estudios, a los integrantes del grupo DITAI por su apoyo y compañerismo, a mis alumnos del posgrado con quienes diariamente aprendo cosas nuevas, al restaurante Sanborns Galerías Coapa donde realice la mayor parte de este trabajo bajo el servicio amable y comprensivo de su personal.

INDICE

	Página
Dedicatoria.	V
Agradecimientos	VII
Prólogo	XVII
Introducción	1
CAPÍTULO I	
I Robots Clase I	5
1.1 Cadenas cinemáticas abiertas	7
1.1.1 Modelación cinemática de un sistema mecánico de cadena abierta tipo RR	8
1.1.1.1 Análisis de la posición no deformada de R_0	11
1.1.1.2 Planteamiento de lo problemas cinemáticos directo e inverso.	12
1.1.1.2.1 Problema cinemático inverso	12
1.1.1.2.2 Problema cinemático inverso.	12
1.1.1.3 Análisis de la configuración deformada de R_0	13
1.1.1.4 Problema cinemático inverso en la configuración deformada	15
1.1.1.5 Análisis de los movimientos del robot R_0	15
1.1.1.5.1 Análisis de los parámetros de rotación de las secuencias 3 y 4	20
1.2. Manipulador espacial tipo RRR	21
1.2.1 Caracterización del robot PUMA ³ en la configuración no deformada	23
1.2.1.1 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso	25
1.2.1.1.1 Problema cinemático directo	25
1.2.1.1.2 Problema cinemático inverso	25
1.2.2 Análisis de la configuración deformada de R_{PUMA}	26
1.2.2.1 Problema cinemático inverso en la configuración deformada	28
1.2.3 Secuencias de movimientos del robot R_{PUMA}	28

1.2.3.1 Ecuaciones de las secuencias de movimiento del robot (R_{PUMA})	38
1.2.3.2 Teorema sobre la actualización del eje de la rotación	39
1.2.3.3 Consecuencias del teorema de la actualización del eje de la rotación sobre las junta rotacionales	42
1.3 Cadenas cinemáticas cerradas	44
1.3.1 Modelación cinemática de un sistema tipo RRRR de un grado de libertad	44
1.3.1.1 Caracterización del mecanismo de cuatro barras en la configuración no deformada	44
1.3.1.2 Análisis en la configuración no deformada de M_{4B}	46
1.3.1.3 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso y de síntesis en la configuración no deformada	48
1.3.1.3.1 Problema cinemático directo	48
1.3.1.3.2 Problema cinemático inverso	48
1.3.1.3.3 Problema de síntesis en la configuración no deformada	49
1.3.1.4 Caracterización de la posición deformada del mecanismo de cuatro barras	49
1.3.1.4.1 Problema cinemático inverso en la configuración deformada	51
1.3.1.5 Diferencias entre los modelos de cadenas cinemáticas cerradas y abiertas	52
1.3.2.1 Solución al problema de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión	53
1.3.2.1.1 Planteamiento del problema de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión	61
1.4 Cadenas cinemáticas compuestas.	62
1.4.1 Robot paralelo planar tipo RRR	62
1.4.1.1 Caracterización del robot paralelo tipo RRR	62
1.4.1.2 Configuración no deformada de RP_{RRR}	64
1.4.1.3 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración no deformada	70
1.4.1.3.1 Problema cinemático directo	70
1.4.1.3.2 Problema cinemático inverso	71

1.4.1.4 Configuración deformada de RP_{RRR}	71
1.4.1.5 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e en la configuración deformada	76
1.4.1.5.1 Problema cinemático directo	76
1.4.1.5.2 Problema cinemático inverso	77
1.4.1.6 El área de trabajo de RP_{RRR}	77

CAPÍTULO II

2	Secuencias de movimientos	85
2.1	Secuencias de movimientos	85
2.1.1	Movimientos secuenciados	86
2.1.1.1	Consideraciones sobre las posiciones intermedias	89
2.1.1.2	Reflexiones	91
2.1.1.3	Secuencias combinadas	93
2.1.1.4	Ecuaciones que gobiernan los movimientos secuenciados	96
2.1.1.5	El problema directo de las secuencias uno a uno para un robot de 2GDL	99
2.1.1.6	Secuencias uno a uno para un robot de tres grados de libertad tipo RRR	99
2.1.1.6.1	Reflexiones y secuencias combinadas	101
2.1.1.6.2	Secuencias combinadas de orden 1 y orden 2	102
2.1.2	Movimientos simultáneos	105
2.1.2.1	Reflexiones simultáneas	107
2.1.2.2	Secuencias combinadas simultáneas	108
2.1.2.3	Ecuaciones que gobiernan los movimientos simultáneos	110
2.1.2.4	El problema directo de las secuencias simultáneas	111
2.1.2.5	Secuencias simultáneas de un robot tipo RRR	111
2.1.2.5.1	Secuencias combinadas simultáneas orden 1 clase 2	114
2.1.2.5.2	Secuencias combinadas simultáneas clase 2 orden 2	115
2.1.2.5.3	Secuencias simultáneas clase 1	116

2.1.2.5.4	Secuencias combinadas simultáneas clase 1, orden 1 y orden 2	119
2.1.2.5.5	Ecuaciones que gobiernan las secuencias simultáneas de un manipulador de 3GDL	123
2.1.2.5.6	El problema directo de las secuencias simultáneas simultáneas de un manipulador de 3GDL	124
2.1.3	Movimientos híbridos	125
2.1.3.1	Movimientos híbridos de un robot de 2GDL	125
2.1.3.1.1	Reflexiones y secuencias combinadas híbridas	128
2.1.3.1.2	Ecuaciones que gobiernan las secuencias híbridas de un robot de 2GDL	130
2.1.3.1.3	El problema directo de las secuencias híbridas	131
2.1.4	Espejo de la configuración no deformada del robot tipo RR	132

CAPÍTULO III

3	Robots clase II	137
3.1	Introducción	137
3.2	El marco teórico de la evasión de obstáculos.	
	Parte I. Condición $R_o \cap O_i \neq \emptyset$	138
3.2.1	Análisis sin obstáculos en el área de trabajo de R_o	138
3.2.2	Análisis con obstáculos en el área de trabajo de R_o	141
3.2.2.1	Caracterización del impacto real $R_o \cap O_i \neq \emptyset$	142
3.2.2.2	Caracterización del impacto virtual $R_o \cup O_i = S$	157
3.2.2.2.1.	Diseño del conjunto $S = (S_1, S_2)$	163
3.2.2.2.2	Dimensionamiento del cuerpo C_1	164
3.2.2.2.3	Caracterización de los sensores asociados a R_o^D	169
3.2.2.2.4	Código de rastreo para los cinco sensores asociados	179

3.3	Criterios de evasión	184
3.3.1	Criterios de evasión para un robot de dos grados de libertad, "sistema MARIANNE II"	184
3.3.1.1	Por secuencias uno a uno sin caracterización del obstáculo	184
3.3.2	Por secuencias uno a uno con caracterización del obstáculo utilizando la configuración espejo y secuencias uno a uno, "sistema MARIANNE IV"	186
3.3.3	Criterios de evasión para un robot de tres grados de libertad, "sistema CHEVOTRONIC III"	190
3.4	Problemas de evasión	195
3.4.1	El sistema MARIANNE II	195
3.4.1.1	Descripción	195
3.4.1.2	Definición del problema	196
3.4.1.3	Solución al problema	196
3.4.1.4	Desarrollo del problema	197
3.4.1.5	Desarrollo de la evasión(crónica)	199
3.4.1.6	Representación esquemática de la evasión	200
3.4.1.7	Diálogo general de la evasión	201
3.4.2	El sistema MARIANNE IV	205
3.4.2.1	Descripción	205
3.4.2.2	Definición del problema	205
3.4.2.3	Solución al problema	205
3.4.2.4	Desarrollo del problema	206
3.4.2.5	Desarrollo de la evasión(crónica)	207
3.4.2.6	Representación esquemática de la evasión	209
3.4.2.7	Diálogo general de la evasión	210
3.4.3	El sistema CHEVOTRONIC III	218
3.4.3.1	Descripción	218
3.4.3.2	Definición del problema	218

3.4.3.3	Solución al problema	219
3.4.3.4	Desarrollo del problema	219
3.4.3.5	Desarrollo de la evasión(crónica)	221
3.4.3.6	Representación esquemática de la evasión	222
3.4.3.7	Diálogo general de la evasión	223

CAPÍTULO IV

4	Simulación de sistemas de manufactura	231
4.1	Introducción	231
4.2	Descripción del “sistema MARIANNE XI”.	231
4.3	Simulación de un robot industrial marca IRB 2400/16 ABB en la Aplicación de silicón a planchas domésticas	232
4.3.1	Descripción	232
4.3.2	Restricciones de proceso	233
4.3.3	Restricciones de control	233
4.3.4	Diseño del proceso	234
4.3.5	Condiciones de paro de emergencia	237
4.3.6	Trayectorias de operación y velocidades	238
4.4	Simulaciones y generación de códigos binarios	240
4.4.1	Simulación del proceso sin paro de emergencia	240
4.4.1.1	Descripción del código binario 1	240
4.4.1.1.1	Código binario 1	242
4.4.2	Simulación del proceso con paro de emergencia 1	246
4.4.2.1	Descripción de la condición de paro de emergencia 1	246
4.4.2.2	Descripción del código binario 2	247
4.4.2.2.1	Código binario 2	248
4.4.3	Simulación del proceso con paro de emergencia 2	252
4.4.3.1	Descripción de la condición de paro de emergencia 2	252
4.4.3.2	Descripción del código binario 3	253
4.4.2.1.1	Código binario 3	254

CAPÍTULO V

5 Simulación	259
5.1 Introducción	259
5.2 La importancia de un simulador computacional	259
5.3 Programación y simulación de los modelos	259
5.3.1 Programa 1: Simulación de un manipulador de dos grados de libertad tipo RR realizando una trayectoria de 35 puntos en le plano XY. La trayectoria simulada es la palabra "LUIS"	259
5.3.2 Programa 2: Simulación de un manipulador de tres grados de libertad tipo RRR realizando una trayectoria de recta en el espacio con ejes definidos en (Z,X,Z)	260
5.3.3 Programa 3: Simulación de un modelo de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión de un mecanismo de cuatro barras	260
5.3.4 Programa 4: Simulación de un modelo de robot paralelo de tres grados de libertad	261
5.3.5 Programa 5: Simulación de un proceso de evasión de obstáculos mediante un sistema tipo RRR. Sistema CHEVOTRONIC III con ejes definidos en (Z,X,X)	261
5.3.6 Programa 6: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por robot IRB 2400/16 ABB para planchas de uso doméstico sin paro de emergencia	262
5.3.7 Programa 7: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por robot IRB 2400/16 ABB con paro de emergencia 1 para planchas de uso doméstico	262
5.3.8 Programa 8: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por robot IRB 2400/16 ABB con paro de emergencia 2 para planchas de uso doméstico	262

6	CONCLUSIONES	355
7	APENDICE A	359
	A El marco teórico.	
A.1	Definiciones generales	361
A.2	El marco teórico	367
A.3	Espacios vectoriales y transformaciones lineales	372
A.4	El álgebra de Cuaterniones	377
A.5	Movimientos.	393
8	APÉNDICE B	403
9	BIBLIOGRAFÍA	409

PRÓLOGO

El propósito de las empresas de manufactura es convertir las materias primas en productos terminados demandados por el mercado consumidor en el menor tiempo posible, al menor costo, con pocas pérdidas de material y el mínimo uso de energía.

Estas características las ofrecen las áreas de Automatización y Robótica, así, la automatización en manufactura es la tecnología que permite operar y controlar la producción por medio de sistemas mecánicos, electrónicos y computacionales. Esta tecnología incluye: máquinas herramientas para procesar partes; máquinas para ensamblado automático; manipuladores robóticos; sistemas de visión artificial; sistemas de manejo y almacenado automático; sistemas de inspección automático para el control de calidad, etc.

De esta manera, la manufactura actual a evolucionado de una manera vertiginosa, dejando atrás el control mecánico y las arduas tareas repetitivas que la mano de obra practicaba bajo condiciones de riesgo.

La manufactura a cambiado de arte a ciencia, es por eso que actualmente las empresas están adquiriendo tecnología que les permita automatizar sus procesos. Sin embargo, estos desarrollos tienen un costo relativamente alto, razón por la cual una gran parte de industria mexicana cuenta con infraestructura obsoleta.

Los costos son originados principalmente por la importación de tecnología, ya que en nuestro país no se cuenta con la infraestructura y recursos humanos que permitan el desarrollo y fabricación de sistemas automatizados, es decir, las universidades y centros de investigación realizan prototipos que no pueden fabricarse en serie, de manera que sólo resuelven problemas puntuales.

Existen empresas que se dedican a la asesoría e implementación de sistemas automáticos, sin embargo, los productos que ofrecen son importados, de manera que es necesario fortalecer los vínculos entre las universidades e industrias para generar grupos de investigación y desarrollo que permitan producir la tecnología necesaria para que tenga un

costo accesible hacia la modernización inminente de las empresas ante la apertura del Tratado de Libre Comercio de América del Norte.

La manera de producir desarrollos de primer nivel es dejar de crear productos y artículos de manera artesanal (práctica comúnmente empleada en México) y evolucionar a la ciencia, mediante procedimientos matemáticos adecuados que permitan modelar la física de los prototipos, para que de esta manera puedan obtenerse los parámetros óptimos para realizar un mejor diseño y construcción de los sistemas automatizados.

Cabe mencionar que los países altamente industrializados utilizan marcos teóricos rigurosos para sus desarrollos tecnológicos, de otra forma no podrían lanzar sus cohetes a la luna ni sus naves espaciales al planeta Marte, de esta forma la ciencia avanza de una forma acelerada en países como Francia, Estados Unidos, Alemania, Rusia, etc., en tanto en los países del tercer mundo los desarrollos son más lentos, por lo tanto consumidores de tecnologías de segunda mano.

El propósito del presente trabajo es el de crear una metodología que permita modelar la física de sistemas mecánicos (utilizados en los sistemas automatizados) mediante procedimientos matemáticos rigurosos, de esta manera se pretende en trabajos futuros realizar prototipos justificando cada parte de sus diseños.

Introducción.

Los objetivos fundamentales del presente trabajo son:

- Unificar las diferentes metodologías que existen para modelar sistemáticamente a los sistemas mecánicos, haciendo uso del álgebra de Cuaterniones.
- Identificar y caracterizar los movimientos secuenciados, simultáneos e híbridos de los robots clase I.
- Generar el marco teórico de la evasión de obstáculos para un robot de dos grados de libertad. Formular 3 problemas de evasión utilizando movimientos secuenciados y simultáneos.
- Simular un proceso de manufactura requerido por la empresa ABB Sistemas S.A., utilizando un robot de tres grados de libertad.
- Generar la programación y simulación de algunos sistemas mecánicos modelados.

Existen en la actualidad diversas metodologías para modelar sistemas mecánicos. El álgebra de los números complejos es ampliamente utilizada para modelar mecanismos de movimiento en el plano[4]. Los parámetro de Denavit – Hartenberg se usan en la caracterización cinemática de Robots[1]. En recientes trabajos se han modelado cadenas cinemáticas utilizando el álgebra de Cuaterniones [3], [18] y [23]. Los resultados obtenidos en estos trabajos, muestran ventajas significativas sobre los métodos tradicionales, sobre todo en la sistematización de los modelos. La transformación $\rho(p, \bullet): Q \rightarrow Q$, $p \in Q$ fijo, [6] sistematiza las rotaciones asociadas a los multicuerpos rígidos. Otra área de especial interés lo es la Inteligencia Artificial, la evasión de obstáculos forma parte de la caracterización de los robots clase II, sin embargo, los modelos base de esta clase de robots carecen de una sistematización adecuada. En [10] se modelan varios robots clase II utilizando métodos tradicionales, en este trabajo haremos uso de la teoría de las secuencias más elementales de movimiento de los robots clase I para caracterizar el marco teórico base de los robots

clase II. Otra área actualmente en desarrollo es la simulación de sistemas de manufactura, la complejidad de los modelos radica en la gran cantidad de variables que se tienen que considerar. Simuladores de procesos de manufactura existen en el mercado [26], sin embargo, tienen un costo relativamente alto y son difíciles de implementar. En este trabajo realizaremos una simulación de un robot industrial IRB 2400/16 ABB que simula un proceso de aplicación de silicón a planchas domésticas utilizando un robot clase I.

El presente trabajo se divide en 5 capítulos. El primero de ellos trata de la modelación cinemática de posición de los robots y mecanismos clase I. En esta parte se modelan 4 sistemas mecánicos, 2 cadenas cinemáticas abiertas, un mecanismo de 4 barras y un robot paralelo, también formularemos un problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión de un mecanismo de 4 barras. Se establecen los problemas cinemáticos directos e inversos de los multicuerpos modelados.

En el capítulo II, se caracterizan las secuencias de movimientos de un robot de dos grados de libertad y de un robot de tres grados de libertad. Asociaremos a las secuencias caracterizadas una nomenclatura y un código binario con el objetivo de establecer sus diferencias. Se establecen los problemas directos de los movimientos secuenciados, simultáneos e híbridos así como las ecuaciones que gobiernan el número total de movimientos.

En el capítulo III, se construye el marco teórico de la evasión de obstáculos para un robot de dos grados de libertad, utilizaremos para este propósito los resultados obtenidos en el capítulo II. Las condiciones $R_0^D \cap O_i \neq \phi$ y $R_0^{DV} \cap O_i \neq \phi$, corresponden a las diferentes caracterizaciones de impacto entre el robot y un obstáculo. En esta parte, dimensionaremos al robot R_0 de forma tal que R_0^D represente al robot dimensionado, posteriormente asociaremos un conjunto $S=(S_1, S_2)$ al robot R_0^D con el propósito de generar la teoría de impacto virtual, al robot R_0^{DV} lo llamaremos en este trabajo, el robot dimensionado con expansión virtual ($R_0^D \cup S = R_0^{DV}$). Se generarán criterios de evasión para un robot de dos grados de libertad y criterios para un robot de tres grados de libertad. Finalmente en este

capítulo, formularemos tres problemas de evasión de obstáculos, los sistemas usados para este propósito se llamarán “MARIANNE II”, “MARIANNE IV” y “CHEVOTRONIC III”.

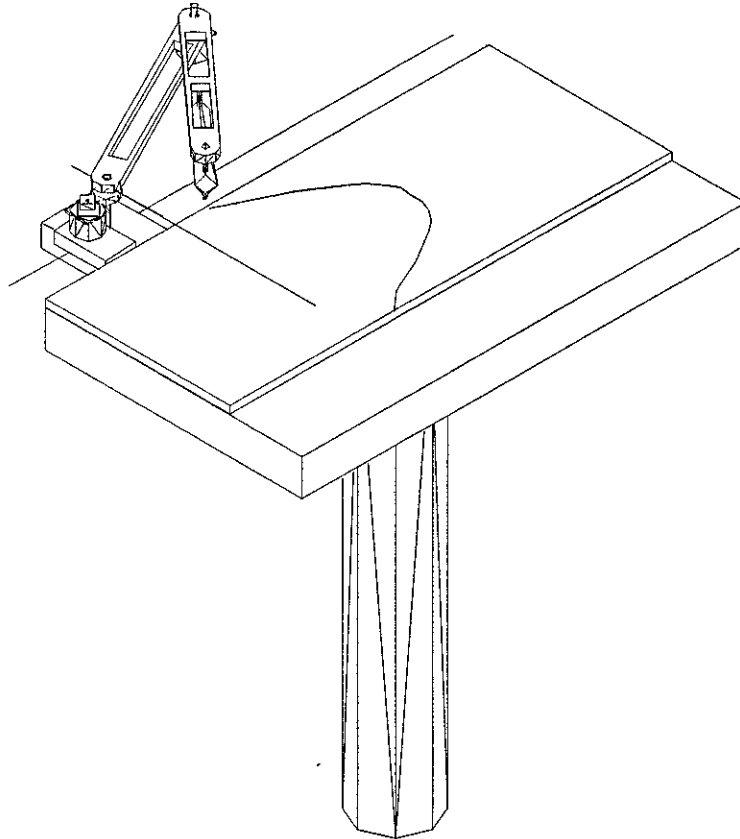
En el capítulo IV, se construye un simulador para procesos de manufactura requerido por la empresa ABB Sistemas S.A. Usaremos un robot tipo RRR para simular las operaciones del robot industrial IRB 2400/16 ABB[25], que deberá aplicar una película de silicón a planchas domésticas. El diseño del proceso se enmarca en las restricciones de control y proceso proporcionadas por la empresa. Se construyen los códigos binarios de operación y se sincroniza el proceso. Se realizan tres simulaciones, una con paro de emergencia y dos con condiciones de paro de emergencia.

En el capítulo V, se construyen 8 programas que prueban los modelos generados en los capítulos anteriores. Cuatro programas corresponden a los robots clase I modelados en el capítulo I, también en esta parte, se simula el sistema “CHEVOTRONIC III” y se muestran los programas asociados al proceso de manufactura. La programación y visualización de los resultados son realizados en el paquete de cálculo formal Mathematica[24].

Finalmente al término de este trabajo, se establecen las conclusiones y se muestran 2 apéndices, el primero de ellos corresponde al marco teórico utilizado a lo largo de la presente tesis, y el segundo son las fichas técnicas del robot industrial IRB 2400/16 ABB.

CAPÍTULO I

“ROBOTS CLASE I”



Robot de dos grados de libertad tipo RR en la operación de corte de plantillas clase I.

CAPÍTULO I

“ROBOTS CLASE I”

1 Robots clase I.

1.1 Cadenas Cinemáticas Abiertas.

En este capítulo, se desarrollará la metodología para modelar cadenas cinemáticas compuestas por cuerpos rígidos, los modelos generados forman la base de los robots industriales de la clase I, ver apéndice A.

Los marcos teóricos tratados en el apéndice A se usarán para modelar de forma sistemática las cadenas cinemáticas que componen a los robots y mecanismos. El objetivo de este capítulo es el de unificar las diferentes metodologías que existen para representar las rotaciones en base al marco teórico del álgebra de Cuaterniones[6]. Un aspecto importante en esta parte, es la generalización del método para la modelación de las cadenas cinemáticas abiertas y cerradas, así como para cadenas cinemáticas compuestas.

Normalmente los manipuladores son modelados con la metodología de Denavit-Hartenberg[1], en tanto los mecanismos son tratados con el álgebra compleja, en su representación exponencial[4]. La modelación con el álgebra de Cuaterniones permite las caracterizaciones cinemáticas de robots más complejos como el robot MARIANNE III[11], además de ser útil en los sistemas de giroscopios y en general a los sistemas mecánicos que produzcan movimiento.

Para mostrar el uso del álgebra de Cuaterniones en las rotaciones finitas de cuerpos rígidos acoplados, se modela una cadena cinemática de dos grados de libertad tipo RR, una cadena cinemática de tres grados de libertad tipo RRR, un mecanismo de cuatro barras y un robot paralelo tipo RRR.

1.1.1 Modelación cinemática de un sistema mecánico de cadena abierta tipo RR.

El multicuerpo a analizar, en esta parte, es una cadena cinemática abierta formada por dos cuerpos rígidos acoplados por medio de juntas rotacionales y su campo de acción es el plano XY.

El problema consiste en construir las ecuaciones que gobiernan la cinemática de la cadena mostrada en la figura 1.1 , el extremo final del segundo eslabón, está obligado, en este caso, a seguir una trayectoria específica descrita en el plano XY, con el fin de colocar una herramienta de trabajo que simule una operación de un proceso determinado.

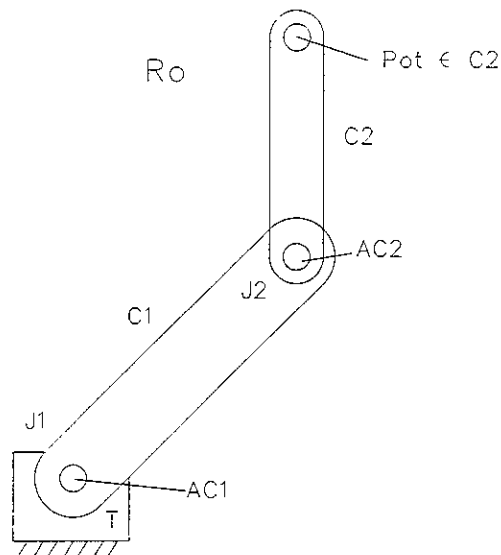


Figura 1.1 Caracterización de robot R_0 .

Consideremos el multicuerpo(R_0), mostrado en 1.1 , observemos que R_0 puede ser representado por:

$$R_0 = C_1 \cup C_2 \quad [1.1]$$

El multicuerpo está montado en el cuerpo T, mostrado en la figura anterior, al cual llamaremos la tierra del sistema. Llamaremos la junta del sistema denotada por J_1 , al conjunto de puntos dados por la intersección siguiente:

$$J_1 = T \cap C_1 \quad [1.2]$$

En la tierra se montará un actuador, al cual llamaremos AC_1 el cual se acoplará al cuerpo C_1 , a través de la junta J_1 y del eje del actuador.

La junta que conecta al cuerpo C_1 con el cuerpo C_2 se define como:

$$J_2 = C_1 \cap C_2 \quad [1.3]$$

En esta parte del cuerpo se localiza un segundo actuador al cual llamaremos AC_2 y está acoplado a los cuerpos C_1 y C_2 a través de la junta J_2 .

En este trabajo el multicuerpo R_0 se considerará formado de la forma siguiente:

$$R_0 = C_2 \cup J_2 \cup AC_2 \cup C_1 \cup AC_1 \cup J_1 \cap T \quad [1.4]$$

Sobre la junta J_1 se define un sistema cartesiano inercial, también sobre el eje de C_1 se define un sistema local y sobre la junta J_2 se define el sistema de referencia del cuerpo C_2 como se muestra en la figura 1.2. Los sistemas de referencia asociados a los cuerpos C_1 y C_2 serán llamados en este trabajo las bases móviles y están fijas en los cuerpos C_1 y C_2 . Las longitudes de los cuerpos C_1 y C_2 serán denotadas por L_1 y L_2 según se muestra en la figura 1.2. Por tanto, los vectores de posición que unen el centro de la junta J_1 con la junta J_2 y de la junta J_2 al punto $p_{OT} \in C_2$ mostrado en la figura 1.2, al cual llamaremos punto final de R_0 , están definidos con respecto a las bases locales. Esto es,

$$L_1 = l_1 \underline{e}'_1, \quad L_2 = l_2 \underline{e}''_1. \quad [1.5]$$

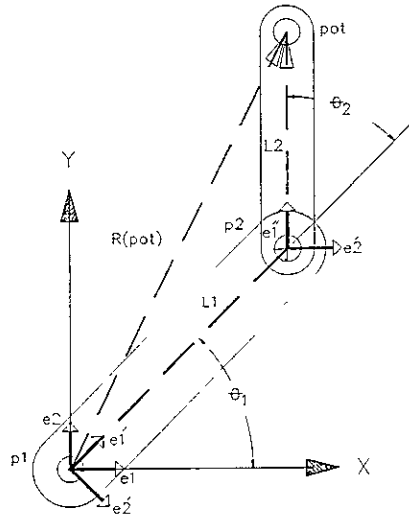


Figura 1.2 Configuración no deformada de R_o .

observemos que dichos vectores, \underline{L}_1 , \underline{L}_2 , al fijar los puntos $p_1 \in J_1$, $p_2 \in J_2$, $p_{ot} \in C_2$ pueden ser también expresados mediante la siguiente diferencia de puntos:

$$\underline{L}_1 = p_2 - p_1, \quad \underline{L}_2 = p_{ot} - p_2 \quad [1.6]$$

También el vector de posición de $p_{ot} \in C_2$ puede ser expresado como:

$$\underline{R}(p_{ot}) = p_{ot} - p_1 \quad [1.7]$$

El vector $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$ es representado a través de la siguiente ecuación:

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \quad [1.8]$$

1.1.1.1 Análisis en la configuración no deformada de R_o .

Consideremos que el multicuerpo R_o ocupa la posición mostrada en la figura 1.2. Entonces, el vector de posición de $p_{ot} \in C_2$, está dado por:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \underline{e}'_1 + l_2 \underline{e}''_1. \quad [1.9]$$

En este trabajo consideraremos que las bases móviles son rotaciones rígidas de la base inercial fija, de acuerdo a [3], tales rotaciones pueden expresarse, en el caso de Cuaterniones unitarios por:

$$\begin{aligned} \underline{e}'_1 &= \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_1 * \bar{p} \\ \underline{e}''_1 &= \rho(q, \rho(p, \underline{e}_1)) \equiv (q * p) * \underline{e}_1 * (\overline{q * p}) \end{aligned} \quad [1.10]$$

donde $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$, $p \in Q$, está definida en el apéndice A. En base a [1.10], la ecuación [1.9] puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ (q * p) * \underline{e}_1 * (\overline{q * p}) \} \quad [1.11]$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| p \| = \| q \| = 1. \quad [1.12]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración no deformada de R_o .

Las componentes de los Cuaterniones asociados $p, q \in \mathfrak{R}^4$ son definidos por [A.77] del apéndice A. Esto es,

$$\begin{aligned} p \in \mathfrak{R}^4 \quad p = (p_o, \underline{p}_v) \quad p_o \in \mathfrak{R} \quad p_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_1}{2} \\ \underline{p}_v \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{p}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_3, \end{aligned} \quad [1.13]$$

$$q \in \mathfrak{R}^4 \quad q = (q_0, \underline{q}_V) \quad q_0 \in \mathfrak{R} \quad q_0 = \pm \cos \frac{\theta_2}{2}$$

$$\underline{q}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{q}_V = \pm \sin \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_3.$$

1.1.1.2 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso.

En esta parte, definiremos dos problemas asociados al multicuerpo en estudio. El primero de ellos, será el problema de la cinemática directa y el segundo corresponde a la cinemática inversa. Tales problemas están asociados a la posición mostrada en la figura 1.2, la cual, será para nosotros la configuración no deformada. Consideremos entonces el siguiente problema:

1.1.1.2.1 Problema cinemático directo.

“Dados $p = (p_0, 0, 0, p_3)$, $q = (q_0, 0, 0, q_3)$ con $\|p\| = \|q\| = 1$ y $l_1 \in \mathfrak{R}^+$, $l_2 \in \mathfrak{R}^+$, encuentre $R(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^2$ tal que [1.11] sea satisfecha.”

1.1.1.2.2 Problema cinemático inverso.

Presentaremos ahora en esta parte el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el multicuerpo en estudio. Esto es,

“Dado $R(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^2$ y $l_1 \in \mathfrak{R}^+$, $l_2 \in \mathfrak{R}^+$, encuentre $p = (p_0, 0, 0, p_3)$, $q = (q_0, 0, 0, q_3)$ tal que [1.11] sea satisfecha y

$$p_0^2 + p_3^2 = 1 \quad [1.14]$$

$$q_0^2 + q_3^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa genera 4 ecuaciones algebraicas no lineales con 4 incógnitas del tipo polinomial.

1.1.1.3 Análisis de la configuración deformada de R_o .

En esta parte se supone que el robot (R_o) ha sido movido de su posición inicial (configuración no deformada) a través de accionamientos de los actuadores AC_1 y AC_2 (ver figura 1.3). El problema ahora consiste en determinar el lugar geométrico que ocupa el extremo final del multicuerpo. La configuración así obtenida se denominará configuración deformada.

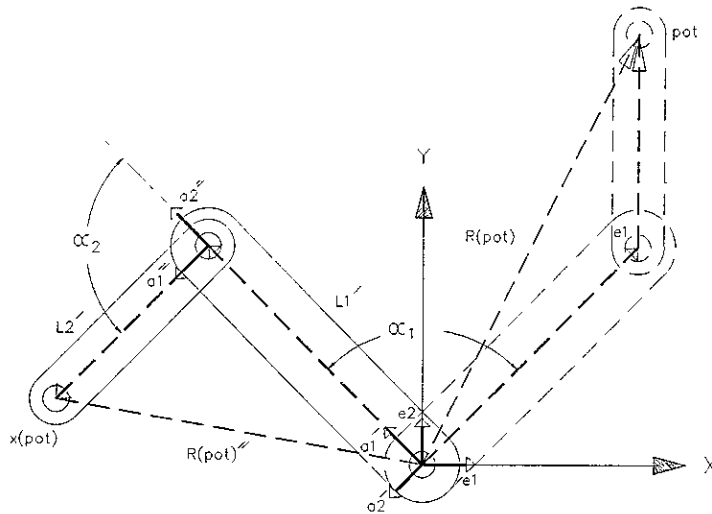


Figura 1.3 Configuración deformada de R_o .

Observemos que el vector de posición $\underline{R}(p_{ot})''$ correspondiente a la configuración deformada es expresado de la forma siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot})'' = \underline{L}_1' + \underline{L}_2' \quad [1.15]$$

Los vectores de posición \underline{L}_1' , \underline{L}_2' serán para nosotros los vectores deformados, los cuales también pueden ser escritos en términos de las bases locales. Esto es,

$\underline{L}_1' = l_1 \underline{a}_1'$, $\underline{L}_2' = l_2 \underline{a}_1''$. Las bases \underline{a}_1' , \underline{a}_1'' serán para nosotros las bases móviles deformadas.

En términos de Cuaterniones las bases deformadas se expresan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1' &= \rho(P, \underline{e}_1') \equiv P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \\ \underline{a}_1'' &= \rho(Q, \rho(P, \underline{e}_1'')) \equiv Q * P * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * P * q * p}) \end{aligned} \quad [1.16]$$

En base a [1.16] el vector de posición $\underline{R}(p_{ot})'' \in \mathfrak{R}^2$ puede ser representado de la forma siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_1 * \overline{(Q * P * q * p)} \} \quad [1.17]$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones $P, Q \in \mathfrak{R}^4$. Esto es,

$$\| P \| = \| Q \| = 1. \quad [1.18]$$

de esta forma obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración deformada del multicuerpo en estudio.

Al igual que en [1.13] los componentes de los Cuaterniones $P, Q \in \mathfrak{R}^4$ son:

$$\begin{array}{llll} P \in \mathfrak{R}^4 & P = (P_o, \underline{P}_v) & P_o \in \mathfrak{R} & P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \\ & & \underline{P}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{P}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_3, \\ Q \in \mathfrak{R}^4 & Q = (Q_o, \underline{Q}_v) & Q_o \in \mathfrak{R} & Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} \\ & & \underline{Q}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{Q}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_3. \end{array} \quad [1.19]$$

Ahora procederemos a plantear el problema cinemático inverso en la configuración deformada.

1.1.1.4 Problema cinemático inverso en la configuración deformada.

“Dado $\mathbb{R}(p_{ot})' \in \mathbb{R}^2$ y $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$, $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$ con $\|p\| = \|q\| = 1$, encuentre $P=(P_0,0,0,P_3)$, $Q=(Q_0,0,0,Q_3)$ tal que [1.17] sea satisfecha y

$$P_0^2 + P_3^2 = 1 \quad [1.20]$$

$$Q_0^2 + Q_3^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa en la posición deformada genera 4 ecuaciones algebraicas no lineales con 4 incógnitas del tipo polinomial.

1.1.1.5 Análisis de los movimientos de R_0 .

En esta parte analizaremos 4 posibles formas de movimiento del multicuerpo R_0 para alcanzar la configuración deformada mostrada en la figura 1.3.

Secuencia 1. La primer secuencia de movimientos mostrada en la figura 1.4 corresponde a mover primero al cuerpo C_1 a través del actuador AC_1 y después al cuerpo C_2 por medio del actuador AC_2 .

Observemos entonces que la configuración b) mostrada en 1.4 es para nosotros la configuración intermedia del multicuerpo en estudio. La ecuación que gobierna el primer movimiento mostrado en 1.4 es la siguiente:

$$\mathbb{R}(p_{ot})'_{s1} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ P * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{P * q * p}) \} \quad [1.21]$$

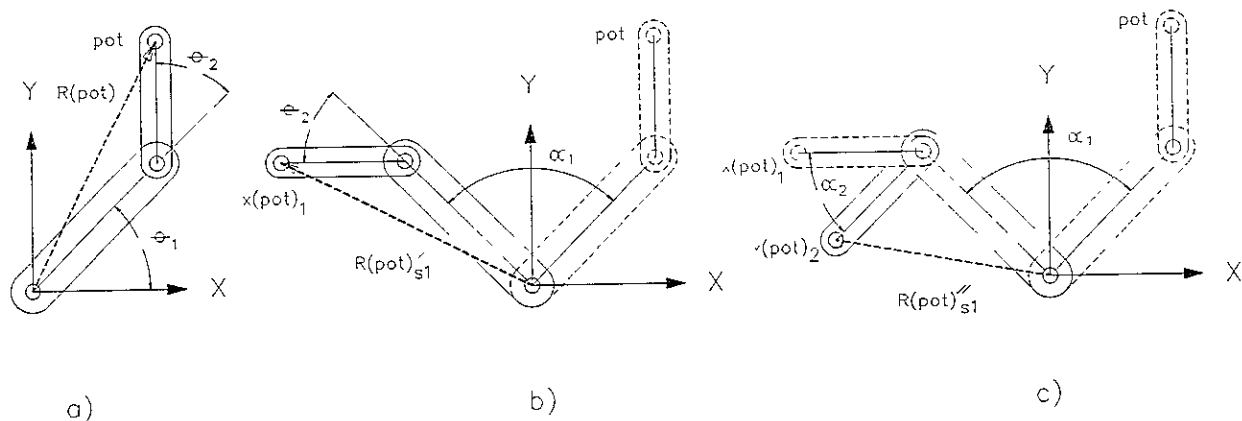


Figura 1.4 Secuencia 1.

La configuración c) es alcanzada mediante el movimiento del cuerpo C_2 desde la posición intermedia $R(pot)'_{s1}$. Observemos que la ecuación que gobierna la posición deformada para la secuencia 1 es [1.17].

Secuencia 2. Otra secuencia de movimiento del multicuerpo R_0 es mostrada en la figura 1.5, y corresponde a mover primero el cuerpo C_2 y después al cuerpo C_1 . La posición intermedia para esta secuencia es mostrada en la configuración b) de 1.5. La ecuación de la posición intermedia es caracterizada por la expresión siguiente:

$$R(pot)'_{s2} = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * q * p}) \} \quad [1.22]$$

La configuración c) es alcanzada mediante el movimiento del cuerpo C_1 desde la posición intermedia $R(pot)'_{s2}$. La ecuación que gobierna la posición deformada para la secuencia 2 es la siguiente:

$$R(pot)''_{s2} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{P * Q * q * p}) \} \quad [1.23]$$

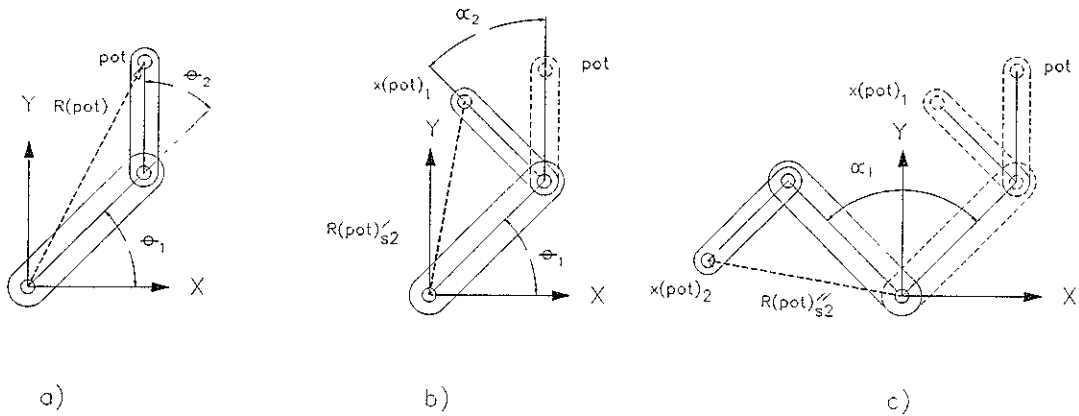


Figura 1.5 Secuencia 2.

Notemos que existen diferencias entre las ecuaciones [1.17] y [1.23], esto es debido a que las posiciones intermedias de ambas secuencias son diferentes.

Secuencia 3. Una secuencia de especial interés es la mostrada en la figura 1.6. La descripción de este movimiento es: mover al cuerpo C_1 y al mismo tiempo mover también al cuerpo C_2 con la misma cantidad de rotación que C_1 , finalmente desde la posición intermedia $\underline{R}(p_{ot})'_{s3}$ mover al cuerpo C_2 hasta la configuración deformada. La posición intermedia de esta secuencia es dada por la ecuación siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot})'_{s3} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ r * \underline{e}_1 * \overline{r} \} \quad [1.24]$$

siendo $r = P * q * p$.

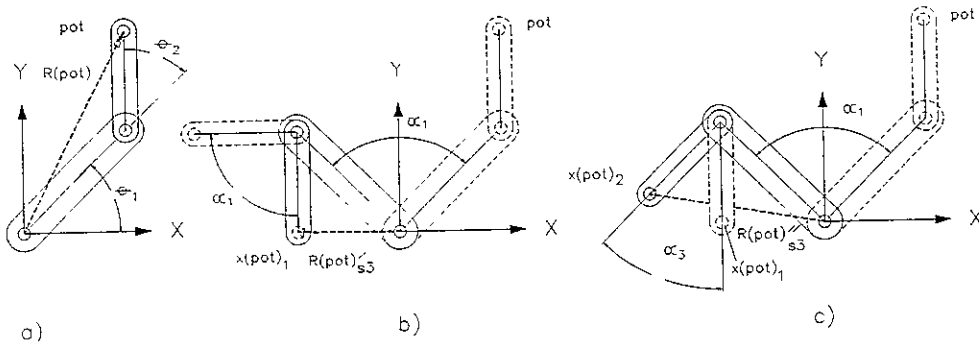


Figura 1.6 Secuencia 3.

La configuración deformada es alcanzada por el movimiento C_2 desde la posición intermedia $\underline{R}(p_{ot})'_{s3}$ mostrada en configuración b) de 1.6 . La ecuación asociada a la configuración deformada es la siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot})''_{s3} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ s * \underline{e}_1 * s \} \quad [1.25]$$

siendo $s = Q * r$.

Secuencia 4. Otra secuencia de movimiento es la mostrada en la figura 1.7. La descripción de este movimiento es: mover al cuerpo C_2 y al mismo tiempo mover también al cuerpo C_1 con la misma cantidad de rotación que C_2 , finalmente desde la posición intermedia $\underline{R}(p_{ot})'_{s4}$ mover al cuerpo C_1 hasta la configuración deformada. La posición intermedia de la secuencia 4 es dada por la ecuación siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot})'_{s4} = l_1 \{ t * \underline{e}_1 * \bar{t} \} + l_2 \{ Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * q * p}) \} \quad [1.26]$$

siendo $t = Q * p$.

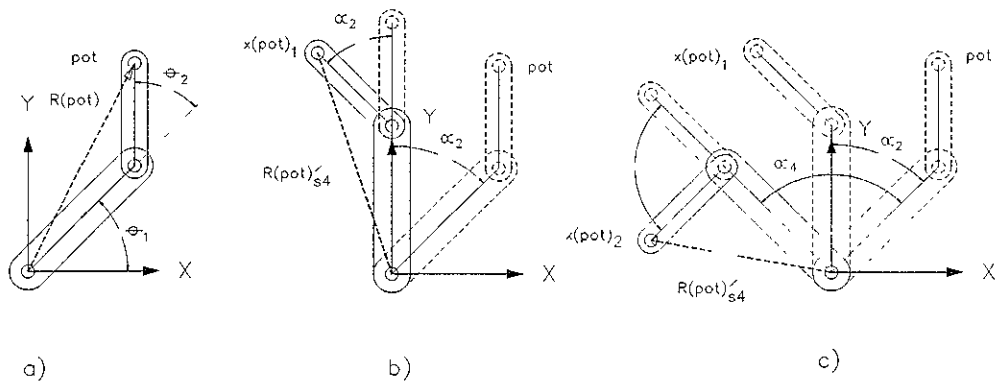


Figura 1.7 Secuencia 4.

La configuración deformada es alcanzada por el movimiento C_1 desde la posición intermedia $R(pot)'_{s4}$ mostrada en configuración b) de 1.7. La ecuación asociada a la configuración deformada de esta secuencia es la siguiente:

$$R(pot)'_{s4} = I_1 \{ u * \underline{e}_1 * \bar{u} \} + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{P * Q * q * p}) \} \quad [1.27]$$

siendo $u = P * t$.

Notemos también que las diferencias entre las cuatro secuencias se pueden caracterizar por dos formas, las cuales son:

- 1 Por las configuraciones intermedias.
- 2 Por el número de accionamientos de los actuadores AC_1 y AC_2 .

Observemos que las secuencias 3 y 4 necesitan al menos tres accionamientos de los actuadores para alcanzar la configuración deformada, en tanto las secuencias 1 y 2 utilizan 2 accionamientos.

1.1.1.5.1 Análisis de los parámetros de rotación de las secuencias 3 y 4.

En esta parte caracterizaremos los parámetros de los Cuaterniones $r, s, t, u \in \mathfrak{R}^4$ asociados con las secuencias de movimiento 3 y 4 del multicuerpo R_0 . Observemos que en base a [1.13], la forma de los Cuaterniones $r, s \in \mathfrak{R}^4$ asociados a la secuencia 3 son los siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 r \in \mathfrak{R}^4 & r = (r_0, \underline{r}_v) & r_0 \in \mathfrak{R} & r_0 = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2} & [1.28] \\
 & & \underline{r}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{r}_v = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_3, \\
 s \in \mathfrak{R}^4 & s = (s_0, \underline{s}_v) & s_0 \in \mathfrak{R} & s_0 = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3}{2} \\
 & & \underline{s}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{s}_v = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_3}{2} \underline{e}_3.
 \end{array}$$

Observemos que el parámetro $s_0 = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3}{2}$ con $\alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ contiene la información del segundo movimiento de C_2 . Cabe mencionar que si $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ entonces el movimiento de C_2 para esta secuencia, es contrario al movimiento de C_1 . La figura 1.8 muestra las consideraciones anteriores.

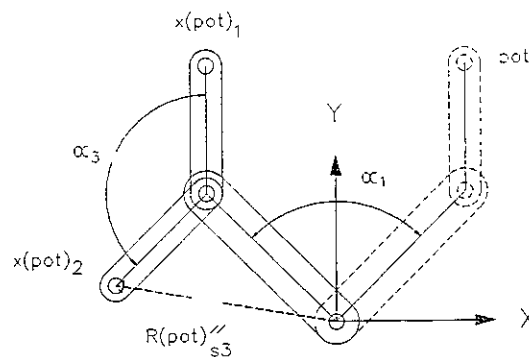


Figura 1.8 Movimiento contrario de C_2 .

Los parámetros de los Cuaterniones $t, u \in \mathfrak{R}^4$ asociados a la secuencia 4 son:

$$\begin{array}{llll}
 t \in \mathfrak{R}^4 & t = (t_0, \underline{t}_v) & t_0 \in \mathfrak{R} & t_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} \\
 & & \underline{t}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{t}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_3, \\
 u \in \mathfrak{R}^4 & u = (u_0, \underline{u}_v) & u_0 \in \mathfrak{R} & u_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2} \\
 & & \underline{u}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{u}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_4}{2} \underline{e}_3.
 \end{array} \quad [1.29]$$

Observemos que el parámetro $u_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2}$ asociado al movimiento final del cuerpo C_1 desde la posición intermedia $R(p_{ot})'_{s4}$ mostrada en 1.7, caracteriza el segundo movimiento de C_1 . En este caso $\alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_2$.

1.2 Manipulador espacial tipo RRR.

Presentaremos en esta parte, la modelación cinemática de un robot de tres grados de libertad, el movimiento del robot (R_{puma}) es en el espacio \mathfrak{R}^3 , la estructura de R_{puma} mostrado en la figura 1.9, corresponde a los primeros tres eslabones del robot industrial PUMA descrito en el apéndice A.

El problema consiste en construir al igual que el modelo anterior las ecuaciones que gobiernan la cinemática de la cadena mostrada en la figura 1.9, el extremo final del tercer eslabón, está obligado, en este caso, a seguir una trayectoria descrita en el espacio \mathfrak{R}^3 .

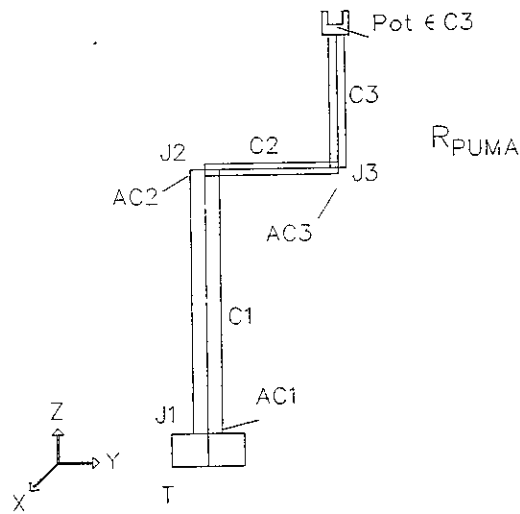


Figura 1.9 Configuración del robot R_{PUMA} .

Consideremos el multicuerpo mostrado en 1.9 , observemos que R_{puma} puede ser representado por:

$$R_{puma} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \quad [1.30]$$

Al igual que el modelo de dos grados de libertad, podemos escribir a las juntas que conectan a los cuerpos que componen al robot, por las intersecciones siguientes:

$$\begin{aligned} J_1 &= C_1 \cap T \\ J_2 &= C_1 \cap C_2 \\ J_3 &= C_2 \cap C_3 \end{aligned} \quad [1.31]$$

Sobre la junta J_1 mostrada en 1.9, se define un sistema cartesiano inercial, también sobre el eje de C_1 se define un sistema local y sobre el eje de la junta J_2 se define el sistema de referencia del cuerpo C_2 , también en el eje del cuerpo C_3 como se muestra en la figura 1.10, sobre las juntas J_1 , J_2 y J_3 se encuentran los actuadores AC_1 , AC_2 , y AC_3 según se muestra en 1.9. Las longitudes de los cuerpos C_1 , C_2 y C_3 serán \underline{L}_1 , \underline{L}_2 y \underline{L}_3 .

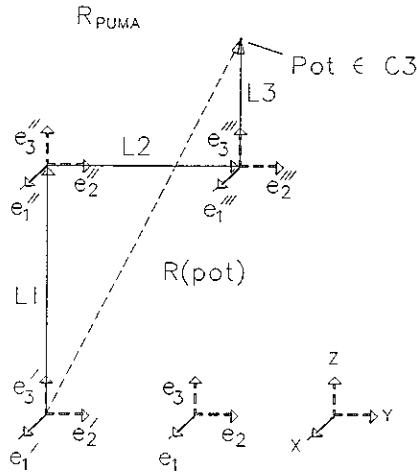


Figura 1.10 Configuración no deformada R_{PUMA} .

Los vectores de posición que unen el centro de la junta J_1 con la junta J_2 , el centro de la junta J_2 con la junta J_3 y J_3 con el punto $p_{OT} \in C_3$ mostrado en la figura 1.10, están definidos con respecto a las bases locales. Esto es,

$$\underline{L}_1 = l_1 \underline{e}_3', \quad \underline{L}_2 = l_2 \underline{e}_2'', \quad \underline{L}_3 = l_3 \underline{e}_3''' \quad [1.32]$$

El vector $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathbb{R}^3$ mostrado en 1.10, es representado a través de la siguiente ecuación:

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_3 \quad [1.33]$$

1.2.1 Caracterización del robot R_{PUMA} en la configuración no deformada.

Consideremos que el multicuerpo R_{PUMA} ocupa la posición mostrada en la figura 1.10. Entonces, el vector de posición de $p_{ot} \in C_3$ está dado por:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \underline{e}_3' + l_2 \underline{e}_2'' + l_3 \underline{e}_3''' \quad [1.34]$$

De acuerdo a [3], las rotaciones asociadas al robot R_{PUMA} en la configuración no deformada pueden expresarse, en el caso de Cuaterniones unitarios por:

$$\begin{aligned}
\underline{e}'_3 &= \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_3 * \bar{p} & [1.35] \\
\underline{e}''_2 &= \rho(q, \rho(p, \underline{e}_2)) \equiv (q * p) * \underline{e}_2 * (\overline{q * p}) \\
\underline{e}'''_3 &= \rho(r, \rho(q, \rho(p, \underline{e}_3))) \equiv (r * q * p) * \underline{e}_3 * (\overline{r * q * p})
\end{aligned}$$

En base a [1.35] , la ecuación [1.34] puede ser escrita de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
R(p_{ot}) &= l_1 \{ p * \underline{e}_3 * \bar{p} \} + l_2 \{ (q * p) * \underline{e}_2 * (\overline{q * p}) \} + \\
&+ l_3 \{ (r * q * p) * \underline{e}_3 * (\overline{r * q * p}) \}. & [1.36]
\end{aligned}$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| p \| = \| q \| = \| r \| = 1. \quad [1.37]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración no deformada del multicuerpo R_{PUMA} .

Los componentes de los Cuaterniones asociados $p, q, r \in \mathfrak{R}^4$ son definidos por [A.77] del apéndice A. Esto es,

$$\begin{array}{llll}
p \in \mathfrak{R}^4 & p = (p_o, \underline{p}_v) & p_o \in \mathfrak{R} & p_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_1}{2} & [1.38] \\
& & \underline{p}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{p}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_1}{2} \underline{e}'_3, \\
q \in \mathfrak{R}^4 & q = (q_o, \underline{q}_v) & q_o \in \mathfrak{R} & q_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_2}{2} \\
& & \underline{q}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{q}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_2}{2} \underline{e}''_1, \\
r \in \mathfrak{R}^4 & r = (r_o, \underline{r}_v) & r_o \in \mathfrak{R} & r_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_3}{2} \\
& & \underline{r}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{r}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_3}{2} \underline{e}'''_1.
\end{array}$$

1.2.1.2 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso.

En esta parte, como en el modelo anterior, definiremos los problemas cinemático directo y el problema cinemático inverso de la posición mostrada en la figura 1.10, la cual es para nosotros la configuración no deformada del multicuerpo R_{PUMA} . Consideremos entonces el siguiente problema:

1.2.1.2.1 Problema cinemático directo.

“Dados $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,q_1,0,0)$, $r=(r_0,r_1,0,0)$ con $\|p\|=\|q\|=\|r\|=1$, $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$ y $l_3 \in \mathbb{R}^+$, encuentre $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^3$ tal que [1.36] sea satisfecha.”

1.2.1.2.2 Problema cinemático inverso.

Presentaremos ahora en esta parte, el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el multicuerpo en estudio. Esto es,

“Dado $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^3$, $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$ y $l_3 \in \mathbb{R}^+$, encuentre $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,q_1,0,0)$, $r=(r_0,r_1,0,0)$, tal que [1.36] sea satisfecha y

$$p_0^2 + p_3^2 = 1 \quad [1.39]$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa genera 6 ecuaciones algebraicas no lineales con 6 incógnitas del tipo polinomial.

1.2.2 Análisis de la configuración deformada de R_{PUMA} .

En esta parte se supone que el robot (R_{PUMA}) ha sido movido de su posición inicial (configuración no deformada) a través de accionamientos de los actuadores AC_1 , AC_2 y AC_3 (ver figura 1.9). El problema ahora, consiste en determinar el lugar geométrico que ocupa el extremo final del multicuerpo en estudio. La configuración así obtenida será para nosotros la configuración deformada.

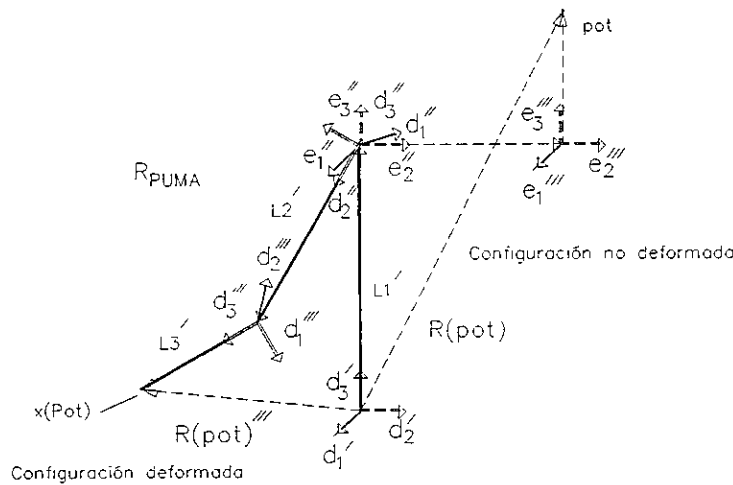


Figura 1.11 Configuración deformada R_{PUMA} .

Observemos que el vector de posición $R(pot)'''$ correspondiente a la configuración deformada que caracteriza el lugar geométrico $x(pot)$, puede ser expresado de la forma siguiente:

$$R(pot)''' = L_1' + L_2' + L_3' \quad [1.40]$$

Los vectores de posición L_1', L_2' y L_3' , también pueden ser escritos en términos de las bases locales, esto es, $L_1' = l_1 d_3'$, $L_2' = l_2 d_2''$ y $L_3' = l_3 d_3'''$. Las bases d_3', d_2'' y d_3''' serán para nosotros las bases móviles deformadas. En términos de Cuaterniones las bases deformadas se expresan de la forma siguiente:

$$\underline{d}'_3 = \rho(P, \underline{e}'_3) \equiv P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \quad [1.41]$$

$$\underline{d}''_2 = \rho(Q, \rho(P, \underline{e}''_2)) \equiv Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p})$$

$$\underline{d}'''_3 = \rho(R, \rho(P, \underline{e}'''_3)) \equiv R * Q * P * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{R * Q * P * r * q * p}).$$

En base a [1.41] el vector de posición $R(p_{ot})''' \in \mathfrak{R}^3$ puede ser representado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R(p_{ot})''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ R * Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{R * Q * P * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.42]$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones $P, Q, R \in \mathfrak{R}^4$. Esto es,

$$\| P \| = \| Q \| = \| R \| = 1. \quad [1.43]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración deformada del multicuerpo en estudio.

Al igual que en [1.38] los componentes de los Cuaterniones $P, Q, R \in \mathfrak{R}^4$ son:

$$P \in \mathfrak{R}^4 \quad P = (P_0, \underline{P}_V) \quad P_0 \in \mathfrak{R} \quad P_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad [1.44]$$

$$\underline{P}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{P}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{d}'_3,$$

$$Q \in \mathfrak{R}^4 \quad Q = (Q_0, \underline{Q}_V) \quad Q_0 \in \mathfrak{R} \quad Q_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\underline{Q}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{Q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{d}''_1.$$

$$R \in \mathfrak{R}^4 \quad R = (R_0, \underline{R}_V) \quad R_0 \in \mathfrak{R} \quad R_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2}$$

$$\underline{R}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{R}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_3}{2} \underline{d}'''_1.$$

Ahora procederemos a plantear el problema cinemático inverso en la configuración deformada.

1.2.2.1 Problema cinemático inverso en la configuración deformada.

“Dado $\mathbb{R} (p_{ot})''' \in \mathbb{R}^3$, $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,q_1,0,0)$, $r=(r_0,r_1,0,0)$ con $\| p \| = \| q \| = \| r \| = 1$, $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$ y $l_3 \in \mathbb{R}^+$, encuentre $P=(P_0,0,0,P_3)$, $Q=(Q_0,Q_1,0,0)$ $R=(R_0,R_1,0,0)$ tal que [1.42] sea satisfecha y

$$P_0^2 + P_3^2 = 1 \quad [1.45]$$

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

El problema de la cinemática inversa en la posición deformada genera 6 ecuaciones algebraicas no lineales con 6 incógnitas del tipo polinomial.

1.2.3 Secuencias de movimientos del robot (R_{puma}).

En esta parte analizaremos una secuencia de movimientos del multicuerpo R_{PUMA} motivo de nuestro estudio, para alcanzar la configuración deformada mostrada en la figura 1.11.

Secuencia 1. La secuencia de movimientos mostrada en la figura 1.11 corresponde a mover primero al cuerpo C_1 a través del actuador AC_1 , manteniendo fijos a los cuerpos C_2 y C_3 , después mover al cuerpo C_2 por medio del actuador AC_2 manteniendo fijos a los cuerpos C_1 y C_3 , finalmente mover el cuerpo C_3 a través del actuador AC_3 , manteniendo fijos a los cuerpos C_1 y C_2 .

La representación en forma de tabla de esta secuencia es mostrada en la tabla 1.1. La representación S_{E1} será para nosotros la secuencia 1 descrita anteriormente. Observemos que para el multicuerpo R_{PUMA} motivo de nuestro estudio, existen dos configuraciones intermedias antes de alcanzar la configuración deformada. La primer configuración intermedia es mostrada en la figura 1.12 , la ecuación que gobierna la posición intermedia 1 se expresa de la forma siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot})' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * q * p * \underline{e}_2 * \overline{P * q * p} \} + I_3 \{ P * r * q * p * \underline{e}_3 * \overline{P * r * q * p} \} \quad [1.46]$$

S_{E1}		
AC_1	AC_1	AC_1
1	2	3

Tabla 1.1 Caracterización de la secuencia S_{E1} .

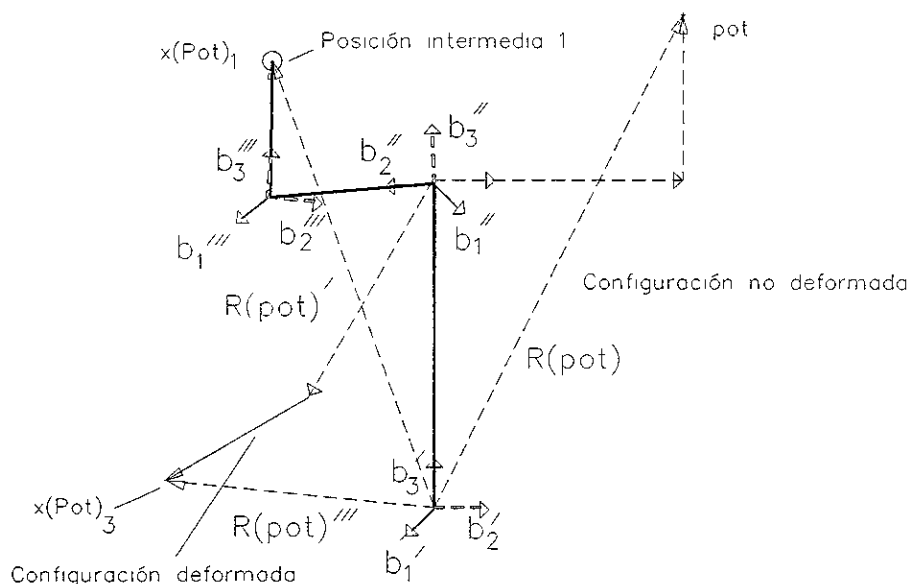


Figura 1.12 Configuración intermedia 1.

Debemos observar en esta parte, el comportamiento de los ejes de rotación, entonces la forma de los Cuaterniones asociados a la posición intermedia 1 mostrada en 1.12 es la siguiente:

$$\begin{array}{llll}
 P \in \mathfrak{R}^4 & P = (P_o, \underline{P}_v) & P_o \in \mathfrak{R} & P_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2} \\
 & & \underline{P}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{P}_v = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_1}{2} \underline{b}'_3, \\
 q \in \mathfrak{R}^4 & q = (q_o, \underline{q}_v) & q_o \in \mathfrak{R} & q_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_2}{2} \\
 & & \underline{q}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{q}_v = \pm \text{Sin } \frac{\theta_2}{2} \underline{b}''_1. \\
 r \in \mathfrak{R}^4 & r = (r_o, \underline{r}_v) & r_o \in \mathfrak{R} & r_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_3}{2} \\
 & & \underline{r}_v \in \mathfrak{R}^3 & \underline{r}_v = \pm \text{Sin } \frac{\theta_3}{2} \underline{b}'''_1.
 \end{array} \tag{1.47}$$

Observemos que la configuración intermedia 1, es alcanzada al mover el cuerpo C_1 manteniendo fijos los cuerpos C_2 y C_3 . Para este caso los parámetros asociados al movimiento del cuerpo C_1 son $P_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2}$ y $\underline{P}_v = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_1}{2} \underline{b}'_3$. El eje de la rotación \underline{b}'_3 asociado al movimiento de C_1 experimenta la forma siguiente:

$$\underline{b}'_3 = \underline{e}'_3 \tag{1.48}$$

Observemos que al mover el cuerpo C_1 , los ejes de las rotaciones de los cuerpos C_2 y C_3 tienen un cambio relativo con respecto a los definidos en la configuración no deformada. La nueva posición de los ejes \underline{e}''_1 y \underline{e}'''_1 son expresados a continuación:

$$\begin{aligned}
 \underline{b}''_1 &= \rho(P, \underline{e}''_1) = P * \underline{e}''_1 * \bar{P} \\
 \underline{b}'''_1 &= \rho(P, \underline{e}'''_1) = P * \underline{e}'''_1 * \bar{P}.
 \end{aligned}$$

Procederemos ahora a construir la ecuación que gobierna la posición intermedia 2 mostrada en la figura 1.13. En este caso la posición intermedia 2 es alcanzada desde la posición intermedia 1, moviendo el cuerpo C_2 y manteniendo fijos a los cuerpos C_1 y C_3 . La ecuación de la configuración intermedia 2 es expresada de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(p_{ot})'' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} \\ + I_3 \{ Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{Q * P * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.49]$$

Para la posición intermedia 2, la forma de los Cuaterniones es la siguiente:

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{R}^4 \quad P = (P_o, \underline{P}_V) \quad P_o \in \mathbb{R} \quad P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad [1.50] \\ \underline{P}_V \in \mathbb{R}^3 \quad \underline{P}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{c}_3', \\ Q \in \mathbb{R}^4 \quad Q = (Q_o, \underline{Q}_V) \quad Q_o \in \mathbb{R} \quad Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} \\ \underline{Q}_V \in \mathbb{R}^3 \quad \underline{Q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{c}_1'', \\ r \in \mathbb{R}^4 \quad r = (r_o, \underline{r}_V) \quad r_o \in \mathbb{R} \quad r_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_3}{2} \\ \underline{r}_V \in \mathbb{R}^3 \quad \underline{r}_V = \pm \text{Sin} \frac{\theta_3}{2} \underline{c}_1''' \end{aligned}$$

En este caso, los parámetros asociados al movimiento del cuerpo C_2 son: $Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$ y

$\underline{Q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{c}_1''$. El eje de la rotación \underline{c}_1'' asociado al movimiento de C_1 experimenta la

forma siguiente:

$$\underline{c}'_3 = \underline{b}'_3 = \underline{e}'_3$$

[1.51]

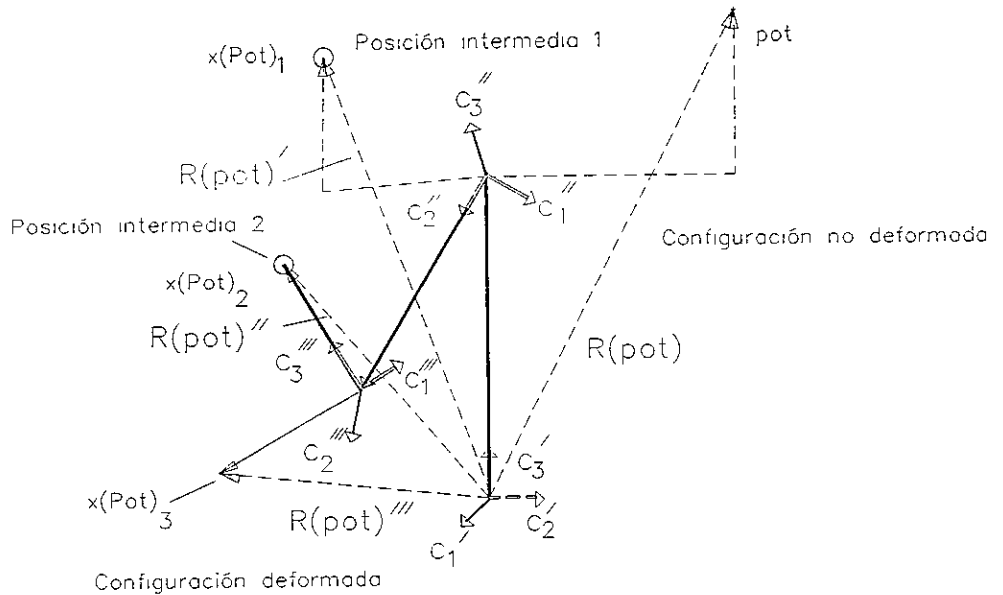


Figura 1.13 Configuración intermedia 2.

Observemos que en este movimiento, el cuerpo C_1 se mantuvo fijo, los ejes de las rotaciones de los cuerpos C_2 y C_3 no tienen un cambio relativo con respecto a los definidos en la posición intermedia 1. Entonces las posiciones de los ejes \underline{c}''_1 y \underline{c}'''_1 asociados a los cuerpos C_2 y C_3 en la posición intermedia 2, mostrada en la figura 1.13 son las siguientes:

$$\underline{c}''_1 = \underline{b}''_1$$

$$\underline{c}'''_1 = \underline{b}'''_1$$

Finalmente procederemos a caracterizar la posición deformada mostrada en 1.14 a través del movimiento del cuerpo C_3 manteniendo fijos los cuerpos C_1 y C_2 . La ecuación que gobierna la posición deformada a través de la secuencia S_{E1} es la siguiente:

$$\begin{aligned} R(p_{ot})''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ R * Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{R * Q * P * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.52]$$

Para la posición deformada a través de secuencia S_{E1} , la forma de los Cuaterniones es la siguiente:

$$\begin{array}{llll}
 P \in \mathfrak{R}^4 & P=(P_o, \underline{P}_V) & P_o \in \mathfrak{R} & P_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2} \\
 & & \underline{P}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{P}_V = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_1}{2} \underline{d}'_3, \\
 Q \in \mathfrak{R}^4 & Q=(Q_o, \underline{Q}_V) & Q_o \in \mathfrak{R} & Q_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_2}{2} \\
 & & \underline{Q}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{Q}_V = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_2}{2} \underline{d}''_1. \\
 R \in \mathfrak{R}^4 & R=(R_o, \underline{R}_V) & R_o \in \mathfrak{R} & R_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3}{2} \\
 & & \underline{R}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{R}_V = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_3}{2} \underline{d}'''_1.
 \end{array} \quad [1.53]$$

Para este caso los parámetros asociados al movimiento del cuerpo C_3 son: $R_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3}{2}$ y

$\underline{R}_V = \pm \text{Sin } \frac{\alpha_3}{2} \underline{d}'''_1$. El eje de la rotación \underline{d}'_3 asociado al movimiento de C_1 experimenta la

forma siguiente:

$$\underline{d}'_3 = \underline{c}'_3 = \underline{b}'_3 = \underline{e}'_3 \quad [1.54]$$

Observemos que en este movimiento, el cuerpo C_1 se mantuvo fijo al igual que C_2 , entonces los ejes de las rotaciones de los cuerpos C_1 , C_2 y C_3 no tienen un cambio relativo con respecto a los definidos en la posición intermedia 2. Las posiciones de los ejes \underline{d}''_1 y \underline{d}'''_1 asociados a los cuerpos C_2 y C_3 en la posición deformada mostrada en la figura 1.14 son las siguientes:

$$\begin{array}{l}
 \underline{d}''_1 = \underline{c}''_1 = \underline{b}''_1 \\
 \underline{d}'''_1 = \underline{c}'''_1 = \underline{b}'''_1.
 \end{array}$$

La forma de que el robot R_{puma} alcance la posición deformada desde la posición no deformada, puede ser de seis maneras diferentes, respetando siempre los parámetros P_o , Q_o , $R_o \in \mathfrak{R}$ y moviendo eslabón por eslabón. Las trayectorias de las seis secuencias son mostradas en las figuras y tablas siguientes:

S_{E1}

AC_1	AC_2	AC_3
1	2	3

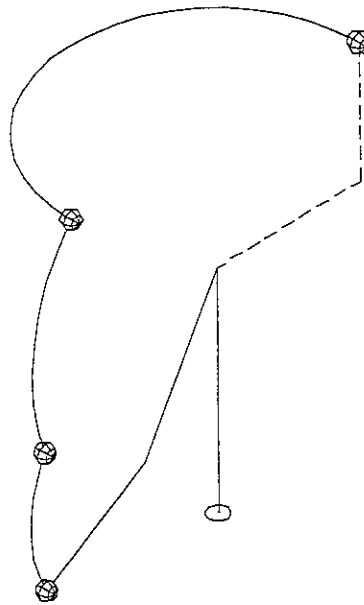


Figura 1.14 Trayectorias de la secuencia S_{E1} .

S_{E2}

AC_1	AC_2	AC_3
1	3	2

Tabla 1.2 Caracterización de la secuencia S_{E2} .

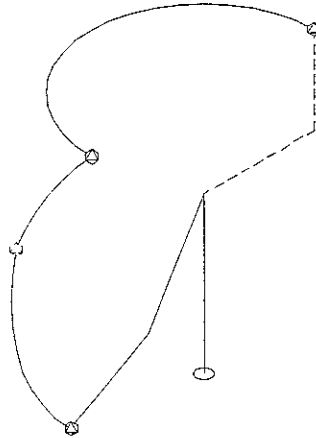


Figura 1.15 Trayectorias de la secuencia S_{E2} .

S_{E3}

AC_1	AC_2	AC_3
2	1	3

Tabla 1.3 Caracterización de la secuencia S_{E3} .

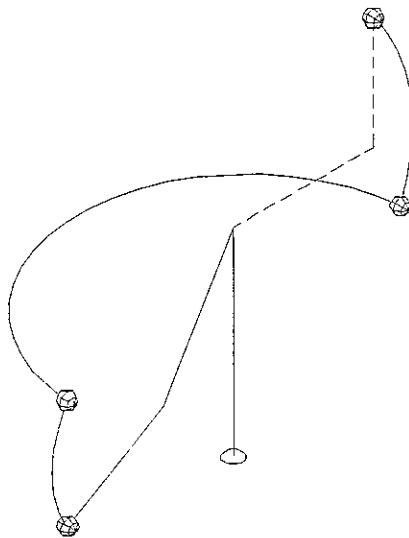


Figura 1.16 Trayectorias de la secuencia S_{E3} .

S_{E4}

AC_1	AC_2	AC_3
2	3	1

Tabla 1.4 Caracterización de la secuencia S_{E4} .

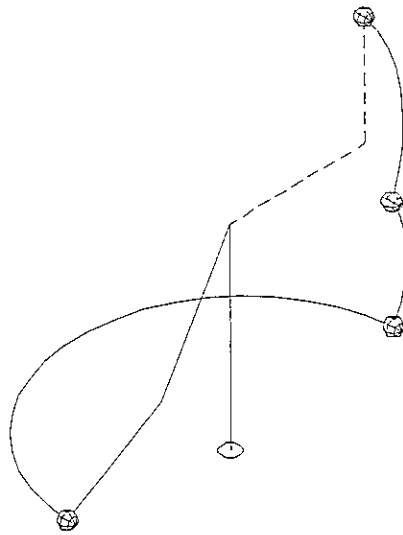


Figura 1.17 Trayectorias de la secuencia S_{E4} .

S_{E5}

AC_1	AC_2	AC_3
3	1	2

Tabla 1.5 Caracterización de la secuencia S_{E5} .

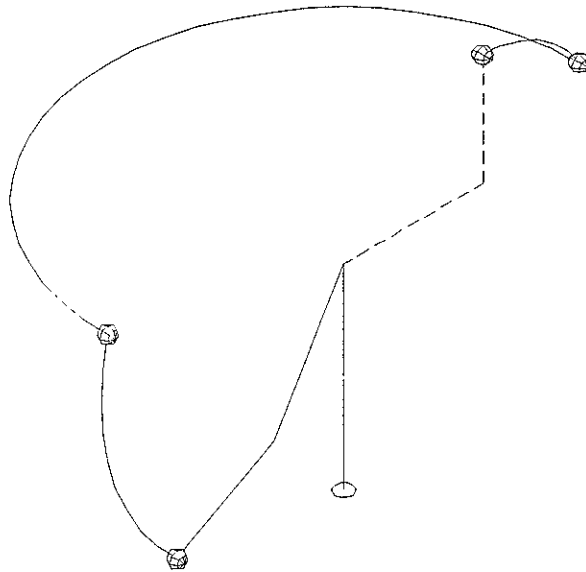


Figura 1.18 Trayectorias de la secuencia S_{E5} .

S_{E6}

AC_1	AC_2	AC_3
3	2	1

Tabla 1.6 Caracterización de la secuencia S_{E6} .

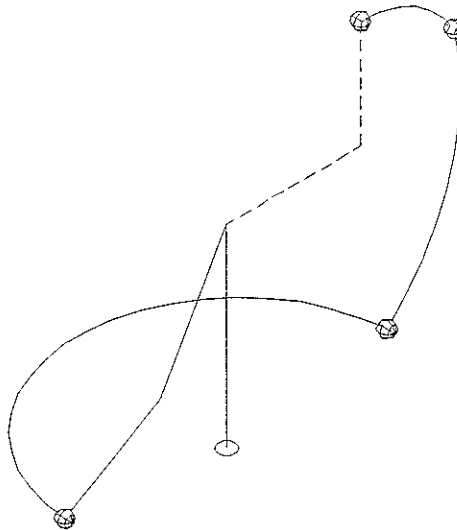


Figura 1.19 Trayectorias de la secuencia S_{E6} .

1.2.3.1 Ecuaciones de las secuencias de movimientos del robot (R_{puma}).

En esta parte mostraremos las ecuaciones de las configuraciones deformadas que gobiernan los movimientos del multicuerpo R_{PUMA} . Tales ecuaciones corresponden a las secuencias mostradas en las figuras 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18 y 1.19.

La ecuación correspondiente para la secuencia S_{E1} es [1.52].

La ecuación final de la secuencia S_{E2} es la siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{R}(p_{ot})_{SE2}''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ Q * R * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{Q * R * P * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.55]$$

La secuencia S_{E3} :

$$\begin{aligned} \underline{R}(p_{ot})_{SE3}''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{P * Q * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ R * P * Q * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{R * P * Q * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.56]$$

La secuencia S_{E4} :

$$\begin{aligned} \underline{R}(p_{ot})_{SE4}''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{P * Q * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ P * R * Q * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{P * R * Q * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.57]$$

La secuencia S_{E5} :

$$\begin{aligned} \underline{R}(p_{ot})_{SE5}''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ Q * P * R * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{Q * P * R * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.58]$$

La secuencia S_{E6} :

$$\begin{aligned} \underline{R}(p_{ot})_{SE6}''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{P * Q * q * p}) \} + \\ + I_3 \{ P * Q * R * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{P * Q * R * r * q * p}) \} \end{aligned} \quad [1.59]$$

La diferencia entre las ecuaciones se observa en los segundos y terceros términos, estas diferencias se deben a que las rotaciones son no conmutativas.

Una parte importante en la solución de las ecuaciones lo es la programación, los modelos de las secuencias del robot R_{PUMA} tienen una restricción importante en lo que se refiere a la arquitectura del robot y al grado de libertad de las juntas que conectan a los cuerpos. Es necesario encontrar las ecuaciones que nos permitan caracterizar los movimientos de un grado de libertad del tipo R, y que al mismo tiempo la programación de estas ecuaciones, permita la simulación de los movimientos de un grado de libertad.

Procederemos ahora a caracterizar tales ecuaciones mediante el teorema siguiente:

1.2.3.2 Teorema sobre la actualización del eje de la rotación.

Teorema 1.1.2.7 Sea $R(pot)''' \in \mathbb{R}^3$ el vector de posición que caracteriza al punto $x_3(pot)$ en la configuración deformada y ,

$$\begin{aligned} R(pot)''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * \overline{(Q * P * q * p)} \} + \\ + I_3 \{ R * Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * \overline{(R * Q * P * r * q * p)} \} \end{aligned} \quad [1.60]$$

es la ecuación de posición de una cadena cinemática abierta de tres grados de libertad tipo RRR, entonces la ecuación [1.60] puede tomar la forma siguiente:

$$\begin{aligned} R(pot)''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \}^* + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_2 * \overline{(P * Q * q * p)} \}^* + \\ + I_3 \{ P * Q * R * r * q * p * \underline{e}_3 * \overline{(P * Q * R * r * q * p)} \}^* \end{aligned} \quad [1.61]$$

y es llamada la ecuación de posición en la configuración deformada con "ejes actualizados."

Demostración:

Primero renombramos a [1.60], esto es:

$$\underline{R} (p_{ot})''' = A + B + C \quad [1.62]$$

donde:

$$A = \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} = P * \underline{e}'_3 * \overline{P} \quad [1.63]$$

$$B = I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} = Q * P * \underline{e}''_2 * \overline{P} * \overline{Q}$$

$$C = I_3 \{ R * Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{R * Q * P * r * q * p}) \} = R * Q * P * \underline{e}'''_3 * \overline{P} * \overline{Q} * \overline{R}$$

Observemos que la ecuación [1.60] representa la secuencia S_{E1} , esto es, primero se movió el cuerpo C_1 , luego el cuerpo C_2 y finalmente el cuerpo C_3 , entonces, si el movimiento se inicio en el eslabón C_1 , "A" toma la forma siguiente:

$$A \cong A^* = I_1 \{ P * \underline{e}'_3 * \overline{P} \}^* \quad [1.64]$$

La posición de la junta J_1 es la misma antes y después de aplicar la rotación caracterizada por el Quaternion $P \in \mathfrak{R}^4$.

Para la parte "B" tenemos:

$$B \cong B^* = I_2 \{ P * Q * \underline{e}''_2 * \overline{Q} * \overline{P} \}^* \quad [1.65]$$

esto es,

$$B^* = I_2 \{ P * (Q * P) * \overline{P} * \underline{e}''_2 * P * (\overline{P} * \overline{Q}) * \overline{P} \} \quad [1.66]$$

Al aplicar la identidad

$$\overline{P} * P = P * \overline{P} = I \quad [1.67]$$

a [1.66] donde $I \in \mathfrak{R}^4$ es el Quaternion identidad, entonces [1.66] toma la forma particular de [1.65].

Observemos entonces que [1.65] es válida dado que el segundo cuerpo fue afectado por el movimiento del cuerpo 1, también se vio afectada la posición angular de la junta J_2 .

Para la parte "C" tenemos:

$$C_1 \cong C_1^* = I_3 \{ P * (C) * \bar{P} \} \quad [1.68]$$

Expandiendo al ecuación [1.68] se tiene que:

$$C_1^* = I_3 \{ P * (R * Q * P) * \bar{P} * \underline{e_3}''' * P * (\bar{P} * \bar{Q} * \bar{R}) * \bar{P} \} \quad [1.69]$$

Aplicando [1.67] a [1.69] obtenemos lo siguiente:

$$C_1^* = I_3 \{ P * R * Q * \underline{e_3}''' * \bar{Q} * \bar{R} * \bar{P} \} \quad [1.70]$$

esto es, porque el eslabón C_3 y la junta J_3 han sido movido por el eslabón C_1 . La ecuación [1.70] representa la posición del cuerpo C_3 en la posición intermedia 1. Ahora debemos mover al cuerpo C_3 desde la posición intermedia 1 a la posición intermedia 2, debido al movimiento del cuerpo C_2 que corresponde al accionamiento del actuador AC_2 , con C_1 fijo, esto es,

$$C_2^* = I_3 \{ P * Q' * (R * Q) * \bar{Q}' * \underline{e_3}''' * Q' * (\bar{Q} * \bar{R}) * \bar{Q}' * \bar{P} \} \quad [1.71]$$

Aplicado $Q * \bar{Q}' = Q' * \bar{Q} = I$ a [1.71], entonces,

$$C_2^* = I_3 \{ P * Q * R * \underline{e_3}''' * \bar{R} * \bar{Q} * \bar{P} \} . \quad [1.72]$$

siempre que $Q = Q'$.

Observemos que $Q' \in \mathbb{R}^4$ es el Quaternion que mueve al cuerpo C_3 a la configuración intermedia 2, observese que la posición del Quaternion P en la ecuación [1.71] permanece

invariante debido a que al cuerpo C_1 se mantiene fijo, sin embargo, la posición de la junta J_3 debido al movimiento del cuerpo C_2 , si tuvo variación con respecto a la posición intermedia 1.

Finamente el movimiento del cuerpo C_3 para alcanzar la posición deformada no conduce a un movimiento inducido a otro eslabón, por tanto la ecuación [1.72] es quien representa la posición del cuerpo C_3 en la posición deformada. La junta J_3 no tuvo cambio relativo, esto es,

$$C^* = C_2^* = I_3 \{ P * Q * R * \underline{e_3}''' * \bar{R} * \bar{Q} * \bar{P} \}. \quad [1.73]$$

entonces,

$$\underline{R} (p_{ot})''' \cong \underline{R} (p_{ot})'''^* = A^* + B^* + C^*, \quad [1.74]$$

Sustituyendo [1.64], [1.65] y [1.73] en [1.74] tenemos que :

$$\begin{aligned} \underline{R} (p_{ot})''' \cong \underline{R} (p_{ot})'''^* = I_1 \{ P * p * \underline{e_3} * \overline{P * p} \}^* + \\ + I_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e_2} * \overline{P * Q * q * p} \}^* + \\ + I_3 \{ P * Q * R * r * q * p * \underline{e_3} * \overline{P * Q * R * r * q * p} \}^* \end{aligned} \quad [1.75]$$

Con lo cual [1.60] es satisfecha.



1.2.3.3 Consecuencias del teorema de la actualización del eje de la rotación sobre las juntas rotacionales.

Observemos entonces que la ecuación [1.75] caracterizada por el teorema anterior es la misma que [1.59] y representa la secuencia S_{E6} mostrada en la figura 1.19, sin embargo para efectos de programación la ecuación [1.75] toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
R(p_{ot})''' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \}'' + & \quad [1.76] \\
+ I_2 \{ P * p * Q * q * \underline{e}_2 * \overline{P * p * Q * q} \}'' + & \\
+ I_3 \{ P * p * Q * q * R * r * \underline{e}_3 * \overline{P * p * Q * q * R * r} \}'' &
\end{aligned}$$

Las ecuaciones que representan a las secuencias S_{E1} , S_{E2} , S_{E3} , S_{E4} y S_{E5} no garantizan que los movimientos de las juntas sean de un grado de libertad, por lo tanto, la ecuación que modela a R_{PUMA} , motivo de nuestro análisis es [1.76].

Físicamente el teorema 1.1.2.7 restringe el movimiento de 7 grados de libertad a sólo tres, los siete grados de libertad son: uno en la junta 1, tres en la junta 2 y tres en la junta 3 si las juntas 2 y 3 fueran esféricas, por lo tanto no existirían actuadores en ellas. Entonces las cinco ecuaciones que representan a las secuencias S_{E1} , S_{E2} , S_{31} , S_{E4} y S_{E5} son estrictamente programables si las juntas J_2 y J_3 fueran esféricas, sin embargo, para el robot analizado las juntas son puramente rotacionales de un grado de libertad y por lo tanto los ejes de las rotaciones deben ser conocidos, en el caso de las juntas esféricas esto no es necesario.

La ecuación [1.76] con ejes actualizados garantiza la perpendicularidad entre los ejes de rotación $\underline{e}'_3 \in \mathcal{R}^3$ y $\underline{e}''_1 \in \mathcal{R}^3$ también el paralelismo entre $\underline{e}''_1 \in \mathcal{R}^3$ y $\underline{e}'''_1 \in \mathcal{R}^3$ para cualquier movimiento. En el caso de las ecuaciones que representan a las cinco secuencias restantes no respetan estas restricciones y por lo tanto el sistema mecánico incrementa su grado de libertad.

El teorema 1.1.2.7 es de fundamental importancia porque representa la interrelación entre la física y la matemática de los movimientos de las cadenas cinemáticas abiertas. No es posible modelar matemáticamente un sistema físico si no se toman en cuenta las restricciones que un sistema mecánico necesita, para que este realice de forma eficiente su operación, esto es, al confundir un modelo de juntas esféricas con un modelo para juntas puramente rotacionales.

1.3 Cadenas cinemáticas cerradas.

1.3.1 Modelación cinemática de un sistema tipo RRRR de un grado de libertad.

En esta parte, unificaremos las metodologías usadas en la modelación tanto de las cadenas cinemáticas abiertas como las cadenas cinemáticas cerradas, con el fin de utilizar el mismo marco teórico para modelar cualquier sistema de cuerpos rígidos acoplados. Comúnmente un sistema mecánico de cadena cerrada de movimiento en el plano, es modelado con el álgebra compleja en su forma exponencial[1], sin embargo, el álgebra compleja no es aplicable a cadenas cinemáticas espaciales, por otro lado, no está clara la información sobre el eje de la rotación. El tipo de cadena cinemática cerrada que comúnmente en los textos se ejemplifica, es el llamado "mecanismo de cuatro barras". En la modelación del problema de síntesis para este mecanismo, algunos métodos se encuentran restringidos en el sentido del número de puntos de precisión, para formular los problemas de conducción de cuerpo rígido y generación de trayectoria. La metodología basada en el álgebra de Cuaterniones permite generar el problema de síntesis para 9 puntos de precisión en el plano [8], en esta parte realizaremos el análisis para tres puntos de precisión.

1.3.1.1. Caracterización del mecanismo de cuatro barras en la configuración no deformada.

En la figura 1.20 se muestra al mecanismo de cuatro barras, el multicuerpo M_{4B} , motivo de nuestro estudio, consta de cuatro cuerpos rígidos acoplados por juntas rotacionales, fijados a una base en la cual dos de sus eslabones están conectados con el eslabón tierra(T), entonces la estructura de esta cadena es representada por:

$$M_{4B} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \quad [1.77]$$

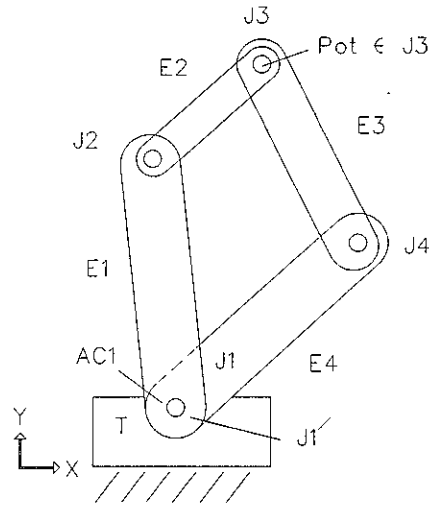


Figura 1.20 Mecanismo de cuatro barras.

Los cuerpos que componen a M_{4B} serán representados en este trabajo por E_1 , E_2 , E_3 y E_4 . Las juntas que conectan a los eslabones están definidas por las siguientes intersecciones:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= E_1 \cap T & [1.78] \\
 J_1' &= E_4 \cap T \\
 J_2 &= E_1 \cap E_2 \\
 J_3 &= E_2 \cap E_3 \\
 J_4 &= E_3 \cap E_4.
 \end{aligned}$$

El objetivo en esta parte, consiste en caracterizar el punto $pot \in J_3$ mostrado en 1.20. Sobre la junta J_1 se define un sistema cartesiano inercial, también sobre el eje de E_1 se define un sistema local y sobre la junta J_2 se define el sistema de referencia del cuerpo E_2 , lo mismo para J_4 y J_1' como se muestra en la figura 1.21.

En este caso la junta J_1' no conecta al eslabón E_4 con el eje del actuador AC_1 .

Los sistemas de referencia asociados a los Eslabones E_1 , E_2 , E_3 , y E_4 , son las bases móviles y están fijas a los eslabones. Las longitudes de los eslabones E_1 , E_2 , E_3 , y E_4 serán denotadas por \underline{L}_1 , \underline{L}_2 , \underline{L}_3 y \underline{L}_4 según se muestra en la figura 1.21. Los vectores de posición que unen el centro de la junta J_1 con la junta J_2 , de la junta J_1' con la junta J_4 , de la junta J_2 con la junta J_3 y de la junta J_4 con el punto $pot \in J_3$ mostrado en la figura 1.21, al cual llamaremos punto final de M_{4B} , están definidos con respecto a las bases locales. Esto es,

$$\underline{L}_1 = l_1 \underline{e}_1', \quad \underline{L}_2 = l_2 \underline{e}_1'', \quad \underline{L}_3 = l_3 \underline{e}_1^{IV}, \quad \underline{L}_4 = l_4 \underline{e}_1'''. \quad [1.79]$$

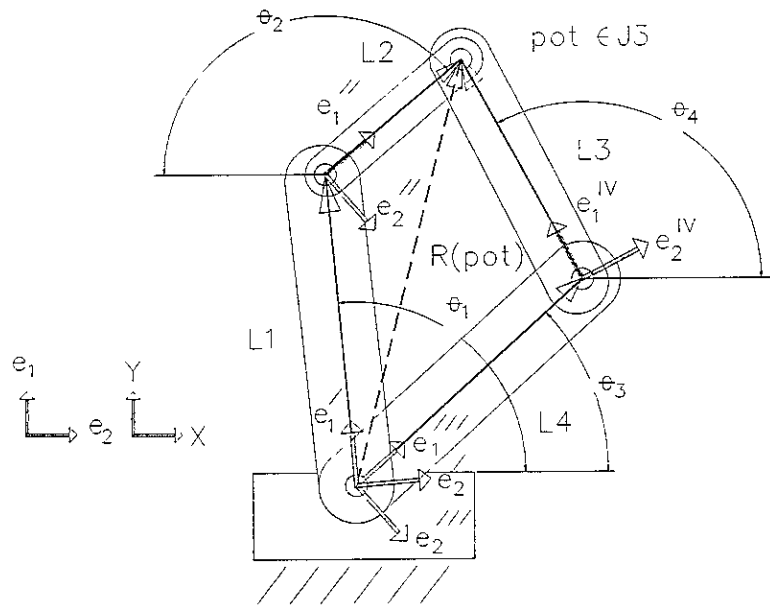


Figura 1.21 Configuración no deformada de M_{4B} .

El vector $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathcal{R}^2$ mostrado en 1.21 es representado a través de la siguiente ecuación:

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \quad [1.80]$$

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{L}_4 + \underline{L}_3$$

1.3.1.2 Análisis en la configuración no deformada de M_{4B} .

Consideremos que el multicuerpo M_{4B} ocupa la posición mostrada en la figura 1.21. Entonces, el vector de posición de $p_{ot} \in C_3$ es dado por la ecuación siguiente:

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' \quad [1.81]$$

$$\underline{R}(p_{ot}) = l_4 \underline{e}_1''' + l_3 \underline{e}_1^{IV}$$

Consideremos que las bases móviles son rotaciones rígidas de la base inercial fija, de acuerdo a [3], tales rotaciones pueden expresarse, en el caso de Cuaterniones unitarios por:

$$\underline{e}'_1 = \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_1 * \bar{p} \quad [1.82]$$

$$\underline{e}''_1 = \rho(q, \underline{e}_1) \equiv q * \underline{e}_1 * \bar{q}$$

$$\underline{e}'''_1 = \rho(r, \underline{e}_1) \equiv r * \underline{e}_1 * \bar{r}$$

$$\underline{e}^V_1 = \rho(s, \underline{e}_1) \equiv s * \underline{e}_1 * \bar{s}.$$

En base a [1.82], la ecuación [1.81] puede ser escrita de la forma siguiente:

$$R(p_{ot}) = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{q} \} \quad [1.83]$$

$$R(p_{ot}) = l_4 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \} + l_3 \{ s * \underline{e}_1 * \bar{s} \}.$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| p \| = \| q \| = \| r \| = \| s \| = 1, \quad [1.84]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración no deformada de M_{4B} .

Los componentes de los Cuaterniones asociados $p, q, r, s \in \mathfrak{R}^4$ son definidos por [A.77] del apéndice A. Esto es,

$$p \in \mathfrak{R}^4 \quad p = (p_0, \underline{p}_V) \quad p_0 \in \mathfrak{R} \quad p_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_1}{2} \quad [1.85]$$

$$\underline{p}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{p}_V = \pm \text{Sin} \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_3,$$

$$q \in \mathfrak{R}^4 \quad q = (q_0, \underline{q}_V) \quad q_0 \in \mathfrak{R} \quad q_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_2}{2}$$

$$\underline{q}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_3,$$

$$r \in \mathfrak{R}^4 \quad r = (r_0, \underline{r}_V) \quad r_0 \in \mathfrak{R} \quad r_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_3}{2}$$

$$\underline{r}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{r}_V = \pm \text{Sin} \frac{\theta_3}{2} \underline{e}_3,$$

$$\begin{aligned}
s \in \mathbb{R}^4 & \quad s = (s_0, \underline{s}_V) & s_0 \in \mathbb{R} & \quad s_0 = \pm \cos \frac{\theta_4}{2} \\
& & \underline{s}_V \in \mathbb{R}^3 & \quad \underline{s}_V = \pm \sin \frac{\theta_4}{2} \underline{e}_3.
\end{aligned}$$

1.3.1.3 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso y de síntesis en la configuración no deformada.

En esta parte, definiremos tres problemas asociados al multicuerpo en estudio. El primero de ellos será el problema de la cinemática directa, el segundo corresponde a la cinemática inversa y el tercero es el correspondiente al problema de síntesis considerando que la posición del punto $p \in J_3$ es un punto de precisión. Tales problemas están asociados a la posición mostrada en la figura 1.21. Consideremos entonces el siguiente problema:

1.3.1.3.1 Problema cinemático directo.

“Dados $p = (p_0, 0, 0, p_3)$, $q = (q_0, 0, 0, q_3)$, $r = (r_0, 0, 0, r_3)$, $s = (s_0, 0, 0, s_3)$, con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$ y $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$, $l_3 \in \mathbb{R}^+$, $l_4 \in \mathbb{R}^+$, encuentre $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$ tal que [1.83] sea satisfecha.”

1.3.1.3.2 Problema cinemático inverso.

Presentaremos ahora en esta parte, el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el multicuerpo en estudio. Esto es,

“Dado $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$ y $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$, $l_3 \in \mathbb{R}^+$, $l_4 \in \mathbb{R}^+$, encuentre $p = (p_0, 0, 0, p_3)$, $q = (q_0, 0, 0, q_3)$, $r = (r_0, 0, 0, r_3)$, $s = (s_0, 0, 0, s_3)$, tal que [1.83] sea satisfecha y

$$\begin{aligned}
p_0^2 + p_3^2 &= 1 & [1.86] \\
q_0^2 + q_3^2 &= 1 \\
r_0^2 + r_3^2 &= 1 \\
s_0^2 + s_3^2 &= 1.
\end{aligned}$$

El problema de la cinemática inversa genera 8 ecuaciones algebraicas no lineales con 8 incógnitas del tipo polinomial.

1.3.1.3.3 Problema de síntesis en la configuración no deformada.

Presentaremos ahora en esta parte, el problema de síntesis para el multicuerpo en estudio. Esto es,

“Dados $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$, $r=(r_0,0,0,r_3)$, $s=(s_0,0,0,s_3)$, con $\|p\|=\|q\|=\|r\|=\|s\|=1$, $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$, encuentre $l_1 \in \mathbb{R}^+$, $l_2 \in \mathbb{R}^+$, $l_3 \in \mathbb{R}^+$, $l_4 \in \mathbb{R}^+$, tal que [1.83] sea satisfecha.”

El problema de síntesis en la configuración no deformada genera 4 ecuaciones algebraicas no lineales con 4 incógnitas del tipo polinomial.

1.3.1.4 Caracterización de la posición deformada del mecanismo de cuatro barras.

En esta parte se supone que el mecanismo (M_{4B}) ha sido movido de su posición inicial (configuración no deformada), a través del accionamiento del actuador AC_1 , (ver figura 1.20). El problema ahora, consiste en determinar el lugar geométrico que ocupará el punto $p_{ot} \in J_3$ en configuración deformada de M_{4B} mostrada en 1.22.

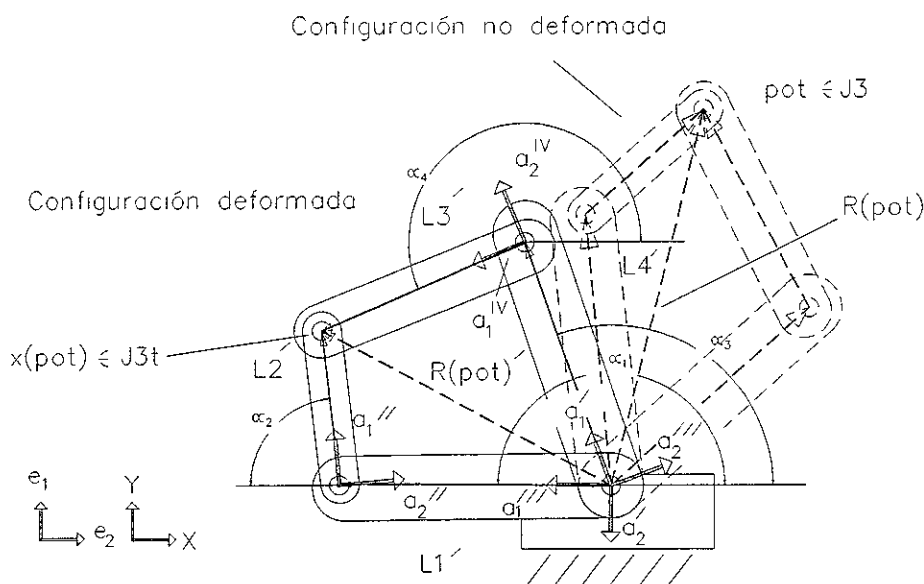


Figura 1.22 Configuración deformada M_{4B} .

Observemos que el vector de posición $\underline{R}(p_{ot})' \in \mathfrak{R}^2$ correspondiente a la configuración deformada puede ser expresado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{R}(p_{ot})' &= \underline{L}_1' + \underline{L}_2' \\ \underline{R}(p_{ot})' &= \underline{L}_4' + \underline{L}_3'\end{aligned}\quad [1.87]$$

Los vectores de posición \underline{L}_1' , \underline{L}_2' , \underline{L}_3' y \underline{L}_4' mostrados en 1.22, también pueden ser escritos en términos de las bases locales, esto es, $\underline{L}_1' = l_1 \underline{a}_1'$, $\underline{L}_2' = l_2 \underline{a}_1''$, $\underline{L}_3' = l_3 \underline{a}_1'''$ y $\underline{L}_4' = l_4 \underline{a}_1''''$. En términos de Cuaterniones las bases deformadas se expresan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{a}_1' &= \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) \equiv P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \\ \underline{a}_1'' &= \rho(Q, \rho(q, \underline{e}_1)) \equiv Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \\ \underline{a}_1''' &= \rho(R, \rho(r, \underline{e}_1)) \equiv R * r * \underline{e}_1 * \overline{R * r} \\ \underline{a}_1'''' &= \rho(S, \rho(s, \underline{e}_1)) \equiv S * s * \underline{e}_1 * \overline{S * s}.\end{aligned}\quad [1.88]$$

En base a [1.88], el vector de posición $\underline{R}(p_{ot})' \in \mathfrak{R}^2$ puede ser representado de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{R}(p_{ot})' &= l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \} \\ \underline{R}(p_{ot})' &= l_4 \{ R * r * \underline{e}_1 * \overline{R * r} \} + l_3 \{ S * s * \underline{e}_1 * \overline{S * s} \}.\end{aligned}\quad [1.89]$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones $P, Q, R, S \in \mathfrak{R}^4$. Esto es,

$$\| P \| = \| Q \| = \| R \| = \| S \| = 1, \quad [1.90]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración deformada del multicuerpo en estudio.

Al igual que en [1.85], los componentes de los Cuaterniones P, Q, R, S $\in \mathfrak{R}^4$ son:

$$\begin{array}{llll}
 P \in \mathfrak{R}^4 & P=(P_o, \underline{P}_V) & P_o \in \mathfrak{R} & P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} & [1.91] \\
 & & \underline{P}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{P}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_3, & \\
 Q \in \mathfrak{R}^4 & Q=(Q_o, \underline{Q}_V) & Q_o \in \mathfrak{R} & Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} & \\
 & & \underline{Q}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{Q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_3, & \\
 R \in \mathfrak{R}^4 & R=(R_o, \underline{R}_V) & R_o \in \mathfrak{R} & R_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2} & \\
 & & \underline{R}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{R}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_3}{2} \underline{e}_3, & \\
 S \in \mathfrak{R}^4 & S=(S_o, \underline{S}_V) & S_o \in \mathfrak{R} & S_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2} & \\
 & & \underline{S}_V \in \mathfrak{R}^3 & \underline{S}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_4}{2} \underline{e}_3. &
 \end{array}$$

Ahora procederemos a plantear el problema cinemático inverso en la configuración deformada.

1.3.1.4.1 Problema cinemático inverso en la configuración deformada.

“Dado $\underline{R}(p_o)' \in \mathfrak{R}^2$, $l_1 \in \mathfrak{R}^+$, $l_2 \in \mathfrak{R}^+$, $l_3 \in \mathfrak{R}^+$ y $l_4 \in \mathfrak{R}^+$, $p=(p_o, 0, 0, p_3)$, $q=(q_o, 0, 0, q_3)$, $r=(r_o, 0, 0, r_3)$, $s=(s_o, 0, 0, s_3)$, con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = 1$, encuentre $P=(P_o, 0, 0, P_3)$, $Q=(Q_o, 0, 0, Q_3)$, $R=(R_o, 0, 0, R_3)$, $S=(S_o, 0, 0, S_3)$ tal que [1.89] sea satisfecha y

$$\begin{array}{ll}
 P_o^2 + P_3^2 = 1 & [1.92] \\
 Q_o^2 + Q_3^2 = 1 \\
 R_o^2 + R_3^2 = 1 \\
 S_o^2 + S_3^2 = 1.
 \end{array}$$

El problema de la cinemática inversa en la posición deformada genera 8 ecuaciones algebraicas no lineales con 8 incógnitas del tipo polinomial.

De esta manera hemos modelado un multicuerpo compuesto por eslabones rígidos de un grado de libertad de cadena cinemática cerrada, para aplicar la metodología en fines prácticos, realizaremos un modelo de síntesis analítica de tres puntos de precisión para conducción de cuerpo rígido, esto es con el fin de mostrar la potencialidad del método matemático y la forma en que los factores de diseño son importantes en el sentido de generar los sistemas de ecuaciones.

Antes de generar las ecuaciones que gobiernan el problema de síntesis, procederemos a mostrar las diferencias entre los modelos cinemáticos de las cadenas abiertas con las cadenas cerradas.

1.3.1.5 Diferencias entre los modelos de cadenas cinemáticas abiertas y cerradas.

Observemos que las ecuaciones generadas para modelar el mecanismo de cuatro barras mostrado en 1.20, no contienen composición de rotaciones con respecto al eslabón anterior, es decir, las rotaciones de los eslabones se refieren directamente a la base inercial y no al eslabón anterior como en el caso de las cadenas cinemáticas abiertas, la explicación es que, en el caso de los manipuladores podemos plantear las secuencias de movimientos, en el sentido de que las rotaciones guardan la información a la base móvil anterior, esto es, al mover el eslabón primario los desplazamientos angulares entre los otros eslabones se mantienen constantes y para cada movimiento de cada eslabón, es necesario que permanezcan fijos los desplazamientos angulares de los otros eslabones.

Sin embargo, en el caso de las cadenas cinemáticas cerradas el término secuencia no es aplicable, en el sentido de que por cada accionamiento del actuador colocado en la junta J_1 mostrado en 1.20, los eslabones tienen movimiento relativo entre sí y no guardan los desplazamientos angulares respecto al eslabón anterior, esto es, se mueven simultáneamente. Si aplicáramos una secuencia de movimiento a los multicuerpos de cadena cerrada, entonces alguna de sus juntas se desacoplaría, lo cual mecánicamente es

inadmisible (ver figura 1.23). Otro factor importante es el grado de libertad, normalmente el caso de las cadenas cinemáticas abiertas el grado de libertad es igual al número de eslabones activos, esto es, por cada eslabón se asocia un actuador ó mecanismo de rotación como las bandas, por lo tanto el grado de libertad es muy importante para diferenciar los modelos entre las cadenas cinemáticas abiertas y las cerradas. Observemos que en el caso de los mecanismos, el grado de libertad no esta en relación directa con los eslabones. Un caso especial son las plataformas las cuales combinan las secuencias con los movimientos de un grado de libertad, sin embargo, esta cadena cinemática especial será tratada con más detalle en la última parte de este capítulo.

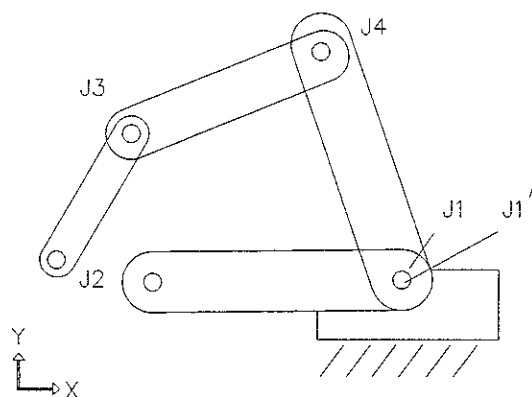


Figura 1.23 Desacoplamiento de la junta J_2 por la acción de un movimiento secuenciado.

1.3.2.1 Solución al problema de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión.

En esta parte, modelaremos el problema de síntesis para un mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 1.24, en este caso el eslabón E_4 está fijado a la tierra(T), el problema de síntesis, consiste en diseñar un mecanismo que transporte un cuerpo rígido independiente, mediante uno de sus eslabones a través de una trayectoria con puntos de precisión preestablecidos, también es necesario encontrar los desplazamientos angulares del mecanismo requerido, el problema es modelado conociendo los pivotes fijos de los eslabones articulados al eslabón tierra como se muestra en 1.24.

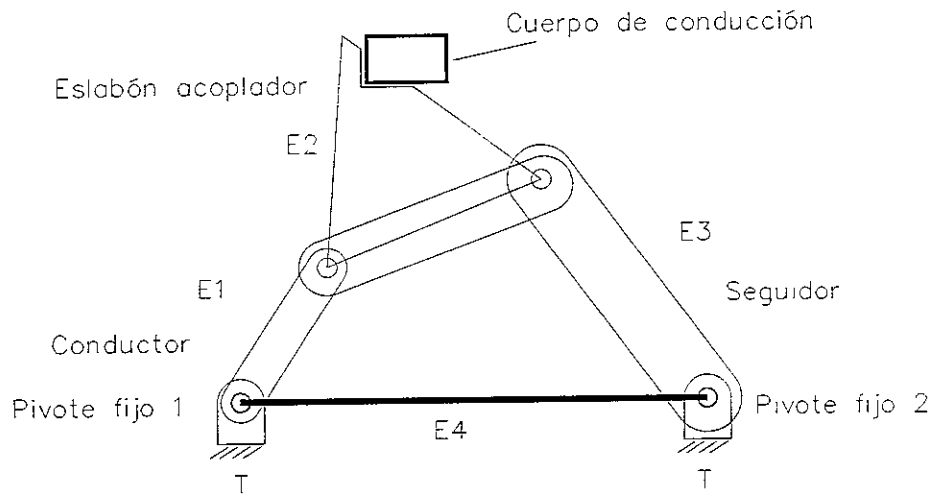


Figura 1.24 Mecanismo de cuatro barras con eslabón fijo.

El problema se plantea proponiendo tres configuraciones de mecanismos donde el eslabón de conducción mostrado en 1.25, posicione los puntos de precisión, esto es, un mecanismo en la posición 1 mostrada en 1.25, otro mecanismo en la configuración 2 y el tercer mecanismo en la configuración 3, por tanto, cualquier conjunto de desplazamientos angulares que caractericen a uno de los mecanismos serán incógnitas, puesto que lo que se busca es caracterizar un mecanismo y esto involucra dimensiones de los eslabones y los desplazamientos angulares entre ellos.

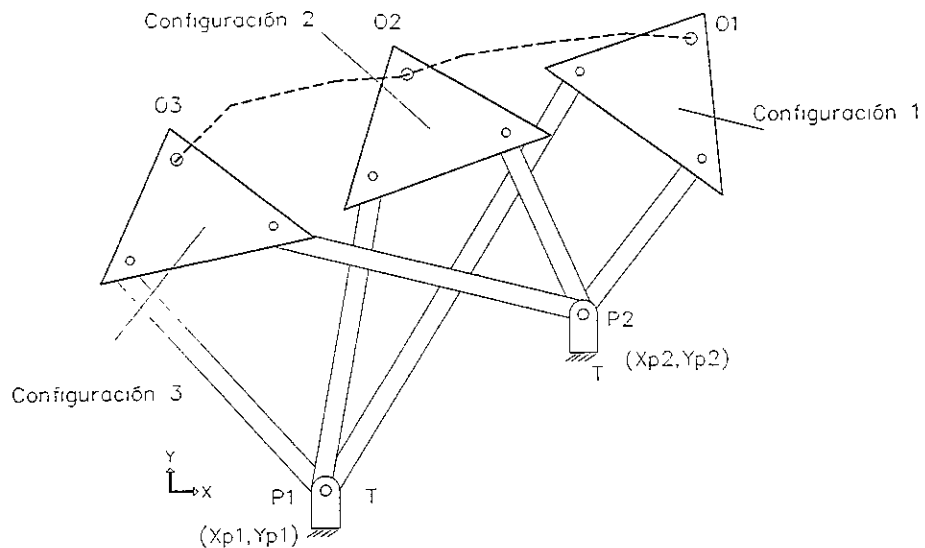


Figura 1.25 Configuraciones de los mecanismos.

Al observar las figuras 1.25 y 1.26, procederemos a establecer ecuaciones de lazo entre las configuraciones de los mecanismos, que involucren tanto a los puntos de precisión como a los pivotes fijos, además de las relaciones de lazo entre cada mecanismo.

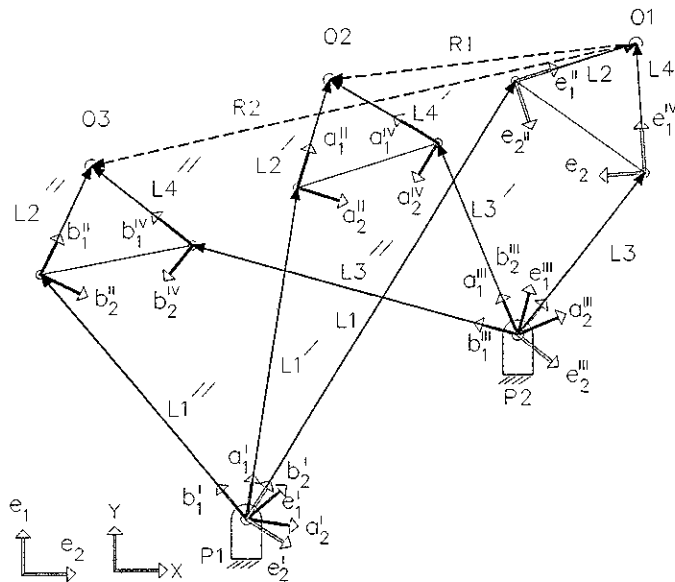


Figura 1.26 Vectores de posición asociados a los mecanismos.

El primer paso para construir las ecuaciones que gobiernan el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido, es definir vectores de posición entre los puntos de precisión mostrados en 1.25. Diremos entonces que $\underline{R}_1 \in \mathcal{R}^2$ es el vector entre los puntos O_1 y O_2 y está definido por la siguiente diferencia de puntos:

$$\underline{R}_1 = O_2 - O_1 \quad [1.93]$$

El vector de posición $\underline{R}_2 \in \mathcal{R}^2$ es el vector definido entre los puntos O_1 y O_3 y es representado por:

$$\underline{R}_2 = O_3 - O_1 \quad [1.94]$$

Los vectores de posición asociados a las configuraciones 1, 2 y 3 mostradas en 1.25, están definidos con respecto a las base locales. Esto es,

$$\underline{L}_1 = l_1 \underline{e}_1', \quad \underline{L}_2 = l_2 \underline{e}_1'', \quad \underline{L}_3 = l_3 \underline{e}_1''', \quad \underline{L}_4 = l_4 \underline{e}_1^{IV}. \quad [1.95]$$

$$\underline{L}_1' = l_1 \underline{a}_1', \quad \underline{L}_2' = l_2 \underline{a}_1'', \quad \underline{L}_3' = l_3 \underline{a}_1''', \quad \underline{L}_4' = l_4 \underline{a}_1^{IV}.$$

$$\underline{L}_1'' = l_1 \underline{b}_1', \quad \underline{L}_2'' = l_2 \underline{b}_1'', \quad \underline{L}_3'' = l_3 \underline{b}_1''', \quad \underline{L}_4'' = l_4 \underline{b}_1^{IV}.$$

Procederemos ahora a definir las ecuaciones de lazo correspondiente al pivote P_1 mostrado en 1.25 . Esto es,

$$\underline{R}_1 = \underline{L}_4 + \underline{L}_3 - \underline{L}_3' - \underline{L}_4' \quad [1.96]$$

$$\underline{R}_2 = \underline{L}_4 + \underline{L}_3 - \underline{L}_3'' - \underline{L}_4''.$$

De igual forma se construyen las ecuaciones de lazo para el pivote P_2 . Esto es,

$$\underline{R}_1 = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \underline{L}_2' - \underline{L}_1' \quad [1.97]$$

$$\underline{R}_2 = \underline{L}_1 + \underline{L}_2 - \underline{L}_2'' - \underline{L}_1''$$

Las ecuaciones [1.96] y [1.97] pueden ser escritas en términos de las bases móviles asociadas a las configuraciones mostradas en 1.26. Esto es,

$$\underline{R}_1 = l_4 \underline{e}_1^{IV} + l_3 \underline{e}_1''' - l_4' \underline{a}_1^{IV} - l_3' \underline{a}_1''' \quad [1.98]$$

$$\underline{R}_2 = l_4 \underline{e}_1^{IV} + l_3 \underline{e}_1''' - l_4'' \underline{b}_1^{IV} - l_3'' \underline{b}_1'''$$

$$\underline{R}_1 = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' - l_1' \underline{a}_1' - l_2' \underline{a}_1'' \quad [1.99]$$

$$\underline{R}_2 = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' - l_1'' \underline{b}_1' - l_2'' \underline{b}_1''$$

En base a [3] las bases móviles pueden representarse en términos de Cuaterniones. Esto es,

Para la configuración del mecanismo 1.

$$\underline{e}_1^I = \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_1 * \bar{p}$$

$$\underline{e}_1^{II} = \rho(q, \underline{e}_1) \equiv q * \underline{e}_1 * \bar{q}$$

$$\underline{e}_1^{III} = \rho(r, \underline{e}_1) \equiv r * \underline{e}_1 * \bar{r}$$

$$\underline{e}_1^{IV} = \rho(s, \underline{e}_1) \equiv s * \underline{e}_1 * \bar{s}.$$

Para la configuración del mecanismo 2.

$$\underline{a}_1^I = \rho(P, \underline{e}_1^I) \equiv P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p}$$

$$\underline{a}_1^{II} = \rho(Q, \underline{e}_1^{II}) \equiv Q * q * \underline{e}_1 * (\overline{Q * q})$$

$$\underline{a}_1^{III} = \rho(R, \underline{e}_1^{III}) \equiv R * r * \underline{e}_1 * (\overline{R * r})$$

$$\underline{a}_1^{IV} = \rho(S, \underline{e}_1^{IV}) \equiv S * s * \underline{e}_1 * (\overline{S * s})$$

Para la configuración del mecanismo 3.

$$\underline{b}_1^I = \rho(P', \underline{a}_1^I) \equiv P' * P * p * \underline{e}_1 * (\overline{P' * P * p})$$

$$\underline{b}_1^{II} = \rho(Q', \underline{a}_1^{II}) \equiv Q' * Q * q * \underline{e}_1 * (\overline{Q' * Q * q})$$

$$\underline{b}_1^{III} = \rho(R', \underline{a}_1^{III}) \equiv R' * R * r * \underline{e}_1 * (\overline{R' * R * r})$$

$$\underline{b}_1^{IV} = \rho(S', \underline{a}_1^{IV}) \equiv S' * S * s * \underline{e}_1 * (\overline{S' * S * s})$$

Observemos que las ecuaciones [1.98] y [1.99] pueden expresarse en términos de los Cuaterniones asociados. Esto es,

Para el pivote 1.

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 = l_4 \{ s * \underline{e}_1 * \bar{s} \} + l_3 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \} - & \quad [1.100] \\ - l_4' \{ S * s * \underline{e}_1 * (\overline{S*s}) \} - l_3' \{ R * r * \underline{e}_1 * (\overline{R*r}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{R}_2 = l_4 \{ s * \underline{e}_1 * \bar{s} \} + l_3 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \} - \\ - l_4'' \{ S' * S * s * \underline{e}_1 * (\overline{S'*S*s}) \} - l_3'' \{ R' * R * r * \underline{e}_1 * (\overline{R'*R*r}) \} \end{aligned}$$

Para el pivote 2.

$$\begin{aligned} \underline{R}_1 = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} - & \quad [1.101] \\ - l_1' \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P*p} \} - l_2' \{ Q * q * \underline{e}_1 * (\overline{Q*q}) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{R}_2 = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} - \\ - l_1'' \{ P' * P * p * \underline{e}_1 * (\overline{P'*P*p}) \} - l_2'' \{ Q' * Q * q * (\overline{Q'*Q*q}) \} \end{aligned}$$

Al tomar Cuaterniones unitarios las normas asociadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \| p \| = \| q \| = \| r \| = \| s \| = 1. & \quad [1.102] \\ \| P \| = \| Q \| = \| R \| = \| S \| = 1. \\ \| P' \| = \| Q' \| = \| R' \| = \| S' \| = 1. \end{aligned}$$

En base a [3] la forma de los Cuaterniones asociados se muestra a continuación:

Mecanismo 1.

$$\begin{array}{lll}
 p=(p_o, \underline{p}_v) & p_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_1}{2} & \underline{p}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_3, \\
 q=(q_o, \underline{q}_v) & q_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_2}{2} & \underline{q}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_3. \\
 r=(r_o, \underline{r}_v) & r_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_3}{2} & \underline{r}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_3}{2} \underline{e}_3. \\
 s=(s_o, \underline{s}_v) & s_o = \pm \text{Cos} \frac{\theta_4}{2} & \underline{s}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_4}{2} \underline{e}_3,
 \end{array} \quad [1.103]$$

Mecanismo 2.

$$\begin{array}{lll}
 P=(P_o, \underline{P}_v) & P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} & \underline{P}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_3, \\
 Q=(Q_o, \underline{Q}_v) & Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} & \underline{Q}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_3. \\
 R=(R_o, \underline{R}_v) & R_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2} & \underline{R}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_3}{2} \underline{e}_3. \\
 S=(S_o, \underline{S}_v) & S_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2} & \underline{S}_v = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_4}{2} \underline{e}_3,
 \end{array}$$

Mecanismo 3.

$$\begin{array}{lll}
 P'=(P'_o, \underline{P}'_v) & P'_o = \pm \text{Cos} \frac{\beta_1}{2} & \underline{P}'_v = \pm \text{Sin} \frac{\beta_1}{2} \underline{e}_3, \\
 Q'=(Q'_o, \underline{Q}'_v) & Q'_o = \pm \text{Cos} \frac{\beta_2}{2} & \underline{Q}'_v = \pm \text{Sin} \frac{\beta_2}{2} \underline{e}_3. \\
 R'=(R'_o, \underline{R}'_v) & R'_o = \pm \text{Cos} \frac{\beta_3}{2} & \underline{R}'_v = \pm \text{Sin} \frac{\beta_3}{2} \underline{e}_3. \\
 S'=(S'_o, \underline{S}'_v) & S'_o = \pm \text{Cos} \frac{\beta_4}{2} & \underline{S}'_v = \pm \text{Sin} \frac{\beta_4}{2} \underline{e}_3,
 \end{array}$$

Observemos que el sistema de ecuaciones no es cuadrado, esto es, se generan 20 ecuaciones con 28 incógnitas. Para obtener un sistema solucionable necesitamos interactuar con las variables conocidas de diseño. El área restringida del movimiento del mecanismo buscado debe ser conocida, por otro lado la condición de rigidez del eslabón acoplador otorga variables de desplazamiento angular conocidas. La no cuadratura del sistema de ecuaciones plantea la necesidad de interactuar con condiciones reales de diseño, de esta forma algunas variables son conocidas.

Las variables conocidas pueden caracterizarse de la forma siguiente:

- 1 Por la condición de rigidez del eslabón de conducción.
- 2 Por control del área de trabajo establecida.

La primera condición es válida ya que existe una igualdad entre los desplazamientos angulares de los eslabones l_2 y l_3 , esto es, por la rigidez, por lo tanto las igualdades siguientes son válidas:

$$\begin{aligned} Q &= S && [1.104] \\ Q' &= S' \end{aligned}$$

La segunda condición enmarca la necesidad de conocer el desplazamiento angular entre la manivela y el seguidor (l_2 y l_1) de los mecanismos 1 y 2, por lo tanto los Cuaterniones $P, R, P', R' \in \mathbb{R}^4$ son conocidos. También se puede establecer que el desplazamiento angular del eslabón l_2 y los puntos de precisión sea controlado, conociendo con esto los Cuaterniones Q y Q' debido a que estamos planteando el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido.

Estas consideraciones reducen el problema de síntesis para tres puntos de precisión a un sistema de ecuaciones e incógnitas de 12×12 . Observemos que al conocer los Cuaterniones anteriormente caracterizados por las consideraciones de diseño y por cuestiones de rigidez, las normas asociadas de los mismos no entran al sistema de ecuaciones, por tanto el número de ecuaciones se reduce a 12, también el número de incógnitas se reduce, esto es, en relación 2 a 1 con las ecuaciones.

1.3.2.1.1 Planteamiento del problema de síntesis.

En esta parte definiremos el problema de síntesis para conducción del cuerpo rígido para tres puntos de precisión. Consideremos el siguiente problema:

Dados $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}^2$, las coordenadas de los pivotes $(x_{P1}, y_{P1}), (x_{P2}, y_{P2})$, los Cuaterniones $P, Q, R, S, P', Q', R', S' \in \mathfrak{R}^4$ con $\|P\| = \|Q\| = \|R\| = \|S\| = \|P'\| = \|Q'\| = \|R'\| = \|S'\| = 1$, encuentre $p = \{p_0, 0, 0, p_3\}$, $q = \{q_0, 0, 0, q_3\}$, $r = \{r_0, 0, 0, r_3\}$, $s = \{s_0, 0, 0, s_3\}$, las longitudes $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathfrak{R}^+$, tal que [1.100] y [1.101] sean satisfechas y

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_3^2 &= 1 & [1.105] \\ q_0^2 + q_3^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_3^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_3^2 &= 1 \end{aligned}$$

Para nuestro caso, consideremos que las longitudes de los mecanismos mostrados en 1.25, tienen la restricción siguiente:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_1' = l_1'' & [1.106] \\ l_2 &= l_2' = l_2'' \\ l_3 &= l_3' = l_3'' \\ l_4 &= l_4' = l_4'' \end{aligned}$$

Un planteamiento para resolver el problema de síntesis hasta para nueve puntos de precisión es dado en [8] y es tratado con el álgebra compleja [9].

1.4 Cadenas cinemáticas compuestas

1.4.1 Robot paralelo planar tipo RRR.

En esta parte, realizaremos la modelación de un robot especial llamado "Plataforma o robot paralelo" mostrado en la figura 1.28, con el objetivo de utilizar la metodología de las cadenas cinemáticas cerradas. La definición de este robot se observa en el apéndice A.

Para la concepción de los robots paralelos necesitamos la utilización de una simulación que permita acceso fácil a sus diferentes características. El uso de los robots paralelos en la actualidad se encuentra confinada a los laboratorios, un freno a sus desarrollos reside en la gran complejidad de su puesta en marcha, sus comandos y su concepción. En este trabajo, mostraremos que con el uso del álgebra de Cuaterniones, el modelo matemático de los robots paralelos se simplifica, en comparación con otros métodos[4].

1.4.1.1 Caracterización del paralelo tipo RRR.

En la figura 1.28 se muestra al robot RP_{RRR} motivo de nuestro estudio , haciendo uso de su definición(ver apéndice A), el multicuerpo RP_{RRR} consta de tres cadenas cinemáticas cerradas independientes de un grado de libertad cada una, y es accionado por tres actuadores colocados en las posiciones 1,2 y 3 mostrados en 1.28. Las posiciones 1,2 y 3 definen las referencias con respecto al eslabón T(tierra). El robot RP_{RRR} contiene seis eslabones rígidos y una plataforma(P_L) conectados por juntas rotacionales tipo R. Los eslabones que componen al robot paralelo serán denotados por $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5,$ y E_6 según se muestra en 1.28. Sea CC_1 la cadena cinemática 1, entonces la representación de CC_1 es mediante la unión siguiente:

$$CC_1 = E_1 \cup E_2 \cup P_L, \quad [1.107]$$

Las cadenas CC_2 y CC_3 mostradas en 1.28, están compuestas por:

$$CC_2 = E_3 \cup E_4 \cup P_L$$

$$CC_3 = E_5 \cup E_6 \cup P_L$$

Las tres cadenas están unidas mediante la intersección siguiente:

$$P_L = CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3. \quad [1.108]$$

El multicuerpo(RP_{RRR}) es definido en términos de sus cadenas cinemáticas. Esto es,

$$RP_{RRR} = CC_1 \cup CC_2 \cup CC_3 \quad [1.109]$$

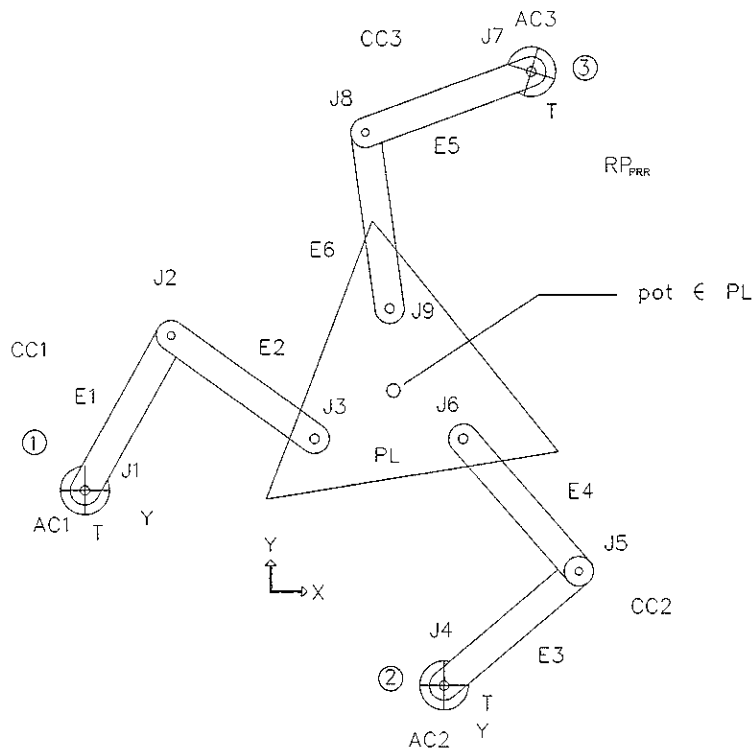


Figura 1.28 Caracterización del multicuerpo RP_{RRR} .

Las juntas que conectan a los cuerpos están definidas mediante las intersecciones siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 J_1 = E_1 \cap T & J_2 = E_1 \cap E_2 & J_3 = E_2 \cap P_L & [1.110] \\
 J_4 = E_3 \cap T & J_5 = E_3 \cap E_4 & J_6 = E_4 \cap P_L & \\
 J_7 = E_5 \cap T & J_8 = E_5 \cap E_6 & J_9 = E_6 \cap P_L &
 \end{array}$$

Los actuadores AC_1 , AC_2 , y AC_3 mostrados en 1.28, están colocados sobre las juntas J_1 , J_4 , y J_7 .

1.4.1.2 Configuración no deformada de RP_{RRR} .

El objetivo en esta parte, consiste en caracterizar el punto $pot \in P_L$ mostrado en 1. 29. Sobre la junta J_1 se define un sistema cartesiano inercial, también sobre el eje de E_1 se define un sistema local y sobre la junta J_2 se define el sistema de referencia del eslabón E_2 , lo mismo para J_4 y J_5 y para J_7 y J_8 , sobre la J_3 se definen tres sistemas locales y están fijos a la plataforma P_L como se muestra en la figura 1.29.

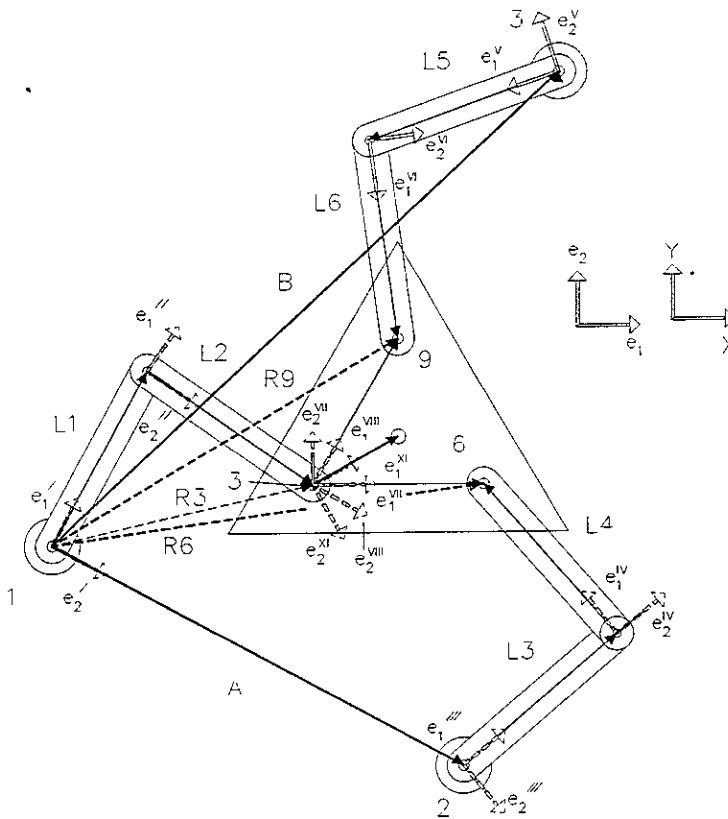


Figura 1.29 Configuración no deformada del multicuerpo RP_{RRR} .

Los sistemas de referencia asociados a los Eslabones E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , y E_6 , son las bases móviles y están fijas a los eslabones que componen al multicuerpo RP_{RRR} . Las longitudes asociadas a los eslabones E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 , E_6 y a la plataforma P_L serán denotadas por L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 , L_6 , y sobre la plataforma L_7 , L_8 y L_9 según se muestra en la figura 1.29. Los vectores de posición que unen el centro de la junta J_1 con la junta J_2 , de la junta J_2 con la

junta J_3 , de la junta J_4 con la junta J_5 , de la junta J_5 con la junta J_6 , de la J_3 con la junta J_6 , J_3 con la junta J_9 , y de la junta J_3 el punto $p_{ot} \in P_L$ mostrado en la figura 1.29, al cual llamaremos punto final de RP_{RRR} , están definidos con respecto a las bases locales . Esto es,

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 &= l_1 \underline{e}'_1 , \quad \underline{L}_2 = l_2 \underline{e}''_1 , & [1.111] \\ \underline{L}_3 &= l_3 \underline{e}'''_1 , \quad \underline{L}_4 = l_4 \underline{e}^{IV}_1 , \\ \underline{L}_5 &= l_5 \underline{e}^V_1 , \quad \underline{L}_6 = l_6 \underline{e}^{VI}_1 , \\ \underline{L}_7 &= l_7 \underline{e}^{VII}_1 , \quad \underline{L}_8 = l_8 \underline{e}^{VIII}_1 , \quad \underline{L}_9 = l_9 \underline{e}^X_1 . \end{aligned}$$

Los vectores de posición $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9, \underline{R}(p_{ot}) \in \mathcal{R}^2$ definidos de la junta J_1 a la junta J_3 , de la junta J_1 a la junta J_6 , de la junta J_1 a la junta J_9 y de la junta J_1 al punto $p_{ot} \in P_L$ mostrados en 1.29, son representados a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \underline{R}_3 &= \underline{L}_1 + \underline{L}_2 & [1.112] \\ \underline{R}_6 &= \underline{L}_3 + \underline{L}_4 + \underline{A} \\ \underline{R}_9 &= \underline{L}_5 + \underline{L}_6 + \underline{B} \end{aligned}$$

$$\underline{R}(p_{ot}) = \underline{R}_1 + \underline{L}_9. \quad [1.113]$$

Los vectores $\underline{A}, \underline{B} \in \mathcal{R}^2$ son definidos de la junta J_1 a la junta J_4 , de la junta J_1 a la junta J_7 según se muestra en 1.29. Observemos que podemos plantear ecuaciones de lazo, de forma tal que se involucren las cadenas cinemáticas que componen al multicuerpo RP_{RRR} y las posiciones 1, 2 y 3 como se muestra en la figura 1.29. Esto es;

$$\begin{aligned} \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_7 - \underline{L}_3 - \underline{L}_4 - \underline{A} &= 0 & [1.114] \\ \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \underline{L}_8 - \underline{L}_5 - \underline{L}_6 - \underline{B} &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones [1.114] nos serán de utilidad para plantear más adelante el problema cinemático directo. Consideremos que el multicuerpo RP_{RRR} ocupa la posición mostrada en la figura 1.29. Entonces, las ecuaciones [1.112] , [1.113] y [1.114] son expresadas en términos de las bases locales. Esto es,

$$R_3 = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' , \quad [1.115]$$

$$R_6 = l_3 \underline{e}_1''' + l_4 \underline{e}_1^{IV} + a \underline{e}_1$$

$$R_9 = l_5 \underline{e}_1^V + l_6 \underline{e}_1^{VI} + b \underline{e}_1$$

$$R(p_{ot}) = l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' + l_9 \underline{e}_1^{IX} . \quad [1.116]$$

$$l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' + l_7 \underline{e}_1^{VII} - l_3 \underline{e}_1''' - l_4 \underline{e}_1^{IV} - a \underline{e}_1 = 0 \quad [1.117]$$

$$l_1 \underline{e}_1' + l_2 \underline{e}_1'' + l_8 \underline{e}_1^{VIII} - l_5 \underline{e}_1^V - l_6 \underline{e}_1^{VI} - b \underline{e}_1 = 0$$

Consideremos que las bases móviles son rotaciones rígidas de la base inercial fija, de acuerdo a [3] , tales rotaciones pueden expresarse, en el caso de Cuaterniones unitarios por:

$$\underline{e}_1' = \rho(p, \underline{e}_1) \equiv p * \underline{e}_1 * \bar{p} \quad [1.118]$$

$$\underline{e}_1'' = \rho(q, \underline{e}_1) \equiv q * \underline{e}_1 * \bar{q}$$

$$\underline{e}_1''' = \rho(r, \underline{e}_1) \equiv r * \underline{e}_1 * \bar{r}$$

$$\underline{e}_1^{IV} = \rho(s, \underline{e}_1) \equiv s * \underline{e}_1 * \bar{s} .$$

$$\underline{e}_1^V = \rho(t, \underline{e}_1) \equiv t * \underline{e}_1 * \bar{t}$$

$$\underline{e}_1^{VI} = \rho(u, \underline{e}_1) \equiv u * \underline{e}_1 * \bar{u}$$

$$\underline{e}_1^{VII} = \rho(v, \underline{e}_1) \equiv v * \underline{e}_1 * \bar{v} .$$

$$\underline{e}_1^{VIII} = \rho(w, \underline{e}_1) \equiv w * \underline{e}_1 * \bar{w} .$$

$$\underline{e}_1^{IX} = \rho(z, \underline{e}_1) \equiv z * \underline{e}_1 * \bar{z} .$$

En base a [1.118], las ecuaciones [1.115], [1.116] y [1.117], pueden ser escritas de la forma siguiente:

$$\underline{R}_3 = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} \quad [1.119]$$

$$\underline{R}_6 = l_3 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \} + l_4 \{ s * \underline{e}_1 * \bar{s} \} + a \{ l * \underline{e}_1 * l \}$$

$$\underline{R}_9 = l_5 \{ t * \underline{e}_1 * \bar{t} \} + l_6 \{ u * \underline{e}_1 * \bar{u} \} + b \{ l * \underline{e}_1 * l \}$$

$$\underline{R}(p_0) = l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} + l_9 \{ z * \underline{e}_1 * \bar{z} \} \quad [1.120]$$

$$l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} + l_7 \{ v * \underline{e}_1 * \bar{v} \} - \quad [1.121]$$

$$- l_3 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \} - l_4 \{ s * \underline{e}_1 * \bar{s} \} - a \{ l * \underline{e}_1 * l \} = 0$$

$$l_1 \{ p * \underline{e}_1 * \bar{p} \} + l_2 \{ q * \underline{e}_1 * \bar{q} \} + l_8 \{ w * \underline{e}_1 * \bar{w} \} -$$

$$- l_5 \{ t * \underline{e}_1 * \bar{t} \} - l_6 \{ u * \underline{e}_1 * \bar{u} \} - b \{ l * \underline{e}_1 * l \} = 0$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| p \| = \| q \| = \| r \| = \| s \| = \| t \| = \| u \| = \| v \| = \| w \| = \| z \| = 0 \quad [1.122]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración no deformada del multicuerpo RP_{RRR} .

Las componentes de los Cuaterniones asociados $p, q, r, s, t, u, v, w, z \in \mathfrak{R}^4$ son definidos por [A.77] del apéndice A. Esto es,

$$p \in \mathfrak{R}^4 \quad p = (p_0, \underline{p}_v) \quad p_0 \in \mathfrak{R} \quad p_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_1}{2} \quad [1.123]$$

$$\underline{p}_v \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{p}_v = \pm \text{Sin} \frac{\theta_1}{2} \underline{e}_3,$$

$$q \in \mathfrak{R}^4 \quad q = (q_0, \underline{q}_v) \quad q_0 \in \mathfrak{R} \quad q_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_2}{2}$$

		$\underline{q}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{q}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_2}{2} \underline{e}_3,$
$r \in \mathfrak{R}^4$	$r = (r_o, \underline{r}_V)$	$r_o \in \mathfrak{R}$	$r_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_3}{2}$
		$\underline{r}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{r}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_3}{2} \underline{e}_3,$
$s \in \mathfrak{R}^4$	$s = (s_o, \underline{s}_V)$	$s_o \in \mathfrak{R}$	$s_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_4}{2}$
		$\underline{s}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{s}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_4}{2} \underline{e}_3,$
$t \in \mathfrak{R}^4$	$t = (t_o, \underline{t}_V)$	$t_o \in \mathfrak{R}$	$t_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_5}{2}$
		$\underline{t}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{t}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_5}{2} \underline{e}_3,$
$u \in \mathfrak{R}^4$	$u = (u_o, \underline{u}_V)$	$u_o \in \mathfrak{R}$	$u_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_6}{2}$
		$\underline{u}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{u}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_6}{2} \underline{e}_3,$
$v \in \mathfrak{R}^4$	$v = (v_o, \underline{v}_V)$	$v_o \in \mathfrak{R}$	$v_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_7}{2}$
		$\underline{v}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{v}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_7}{2} \underline{e}_3.$
$w \in \mathfrak{R}^4$	$w = (w_o, \underline{w}_V)$	$w_o \in \mathfrak{R}$	$w_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_8}{2}$
		$\underline{w}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{w}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_8}{2} \underline{e}_3.$
$z \in \mathfrak{R}^4$	$z = (z_o, \underline{z}_V)$	$z_o \in \mathfrak{R}$	$z_o = \pm \text{Cos } \frac{\theta_9}{2}$
		$\underline{z}_V \in \mathfrak{R}^3$	$\underline{z}_V = \pm \text{Sin } \frac{\theta_9}{2} \underline{e}_3.$

Antes de proceder a plantear los problemas cinemáticos directo e inverso, caracterizaremos algunas relaciones entre los vectores \underline{L}_7 , \underline{L}_8 , y \underline{L}_9 definidos sobre la plataforma PL.

Sean $p_3 \in J_3$, $p_6 \in J_6$ y $p_9 \in J_9$ puntos definidos sobre la plataforma y $\theta_9 \in \mathbb{R}$ el desplazamiento angular entre la coordenada X y el vector $\underline{L}_9 \in \mathbb{R}^2$ caracterizado por el parámetro $z_0 = \pm \text{Cos} \frac{\theta_9}{2}$, entonces las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\underline{L}_7 = p_6 - p_3.$$

$$\underline{L}_8 = p_9 - p_3.$$

$$\underline{L}_9 = p_{ot} - p_3.$$

$$X_{p_3} = X_{pot} - l_9 \text{Cos } \theta_9 \quad , \quad Y_{p_3} = Y_{pot} - l_9 \text{Sen } \theta_9 \quad [1.124]$$

$$X_{p_6} = X_{p_3} + l_7 \text{Cos } (\theta_9 - 30) \quad , \quad Y_{p_6} = Y_{p_3} + l_7 \text{Sen } (\theta_9 - 30)$$

$$X_{p_9} = X_{p_3} + l_8 \text{Cos } (\theta_9 + 30) \quad , \quad Y_{p_9} = Y_{p_3} + l_8 \text{Sen } (\theta_9 + 30)$$

Observemos que las relaciones [1.124] son válidas debido a que la plataforma es un triángulo equilátero. Los Cuaterniones $v, w \in \mathbb{R}^4$ son rotaciones de la base móvil e_1^{ix} sobre las aristas del triángulo definidas por los vectores de posición \underline{L}_7 y \underline{L}_8 , mostrados en 1.30. Estas consideraciones nos permiten conocer las coordenadas de los puntos $p_3 \in J_3$, $p_6 \in J_6$ y $p_9 \in J_9$ dadas las coordenadas del punto $pot \in P_L$. Dicho de otra forma, conociendo el vector $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$ se conocen los vectores $\underline{R}_3, \underline{R}_6, \underline{R}_9 \in \mathbb{R}^2$.

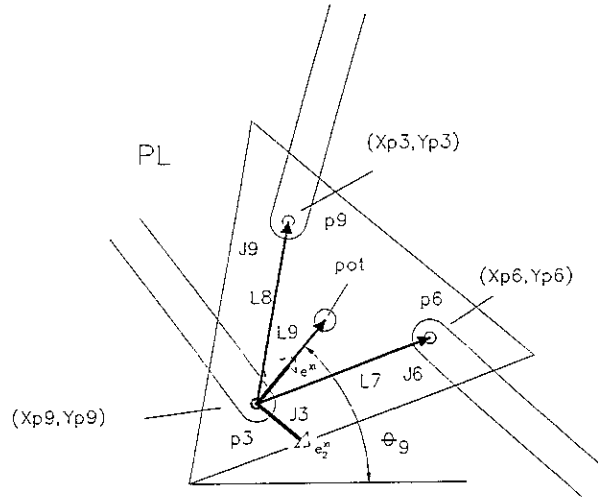


Figura 1.30 Consideraciones en la plataforma P_L .

1.4.1.3 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración no deformada.

En esta parte, definiremos dos problemas asociados al multicuerpo en estudio. El primero de ellos, será el problema de la cinemática directa, el segundo corresponde a la cinemática inversa. Tales problemas están asociados a la posición mostrada en la figura 1.29. Consideremos entonces el siguiente problema:

1.4.1.3.1 Problema cinemático directo.

“Dados $p=(p_0,0,0,p_3)$, $r=(r_0,0,0,q_3)$, $t=(t_0,0,0,t_3)$, con $\|p\|=\|r\|=\|t\|=1$, las dimensiones $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, \in \mathcal{R}^+$, encuentre $R(p_{ot}) \in \mathcal{R}^2$, $z=(z_0,0,0,z_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$, $s=(s_0,0,0,s_3)$, $u=(u_0,0,0,u_3)$, tal que [1.121] sea satisfecha y

$$z_0^2 + z_3^2 = 1 \quad [1.125]$$

$$q_0^2 + q_3^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_3^2 = 1$$

$$u_0^2 + u_3^2 = 1.$$

El problema de la cinemática directa genera 8 ecuaciones algebraicas no lineales con 8 incógnitas del tipo polinomial.

1.4.1.3.2 Problema cinemático inverso.

Presentaremos ahora en esta parte, el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el multicuerpo en estudio. Esto es,

"Dado $R(p_{0i}) \in \mathcal{R}^2$, $z=(z_0,0,0,z_3)$, con $\|z\|=1$, las dimensiones $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9 \in \mathcal{R}^+$ encuentre $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$, $r=(r_0,0,0,r_3)$, $s=(s_0,0,0,s_3)$, $t=(t_0,0,0,t_3)$, $u=(u_0,0,0,u_3)$, tal que [1.119] y [1.124] sean satisfechas y

$$p_0^2 + p_3^2 = 1 \quad [1.126]$$

$$q_0^2 + q_3^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_3^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_3^2 = 1.$$

$$t_0^2 + t_3^2 = 1$$

$$u_0^2 + u_3^2 = 1.$$

El problema de la cinemática inversa genera 12 ecuaciones algebraicas no lineales con 12 incógnitas del tipo polinomial.

1.4.1.4 Configuración deformada de RP_{RRR}

En esta parte, se supone que el robot (RP_{RRR}) ha sido movido de su posición inicial (configuración no deformada) a través de accionamientos de los actuadores AC_1 , AC_2 y AC_3 (ver figura 1.31). El problema ahora consiste en determinar el lugar geométrico que ocupa el punto $pot \in P_L$ del multicuerpo en estudio. La configuración así obtenida se denominará configuración deformada.

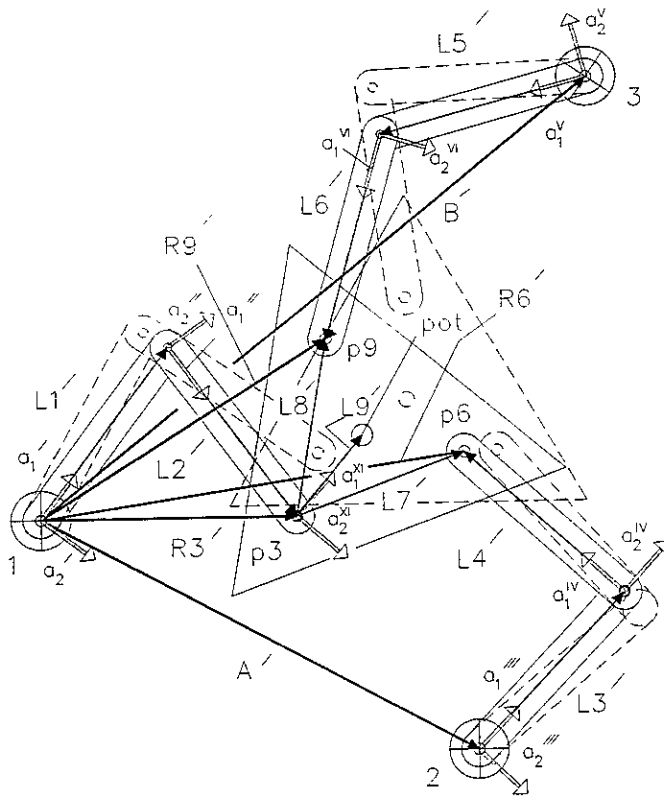


Figura 1.31 Configuración deformada de RP_{RRR} .

Los vectores de posición en la configuración deformada son definidos en términos de las bases móviles deformadas. Esto es,

$$\begin{aligned}
 \underline{L}_1' &= l_1 \underline{a}_1', & \underline{L}_2' &= l_2 \underline{a}_1'', & [1.127] \\
 \underline{L}_3' &= l_3 \underline{a}_1''', & \underline{L}_4' &= l_4 \underline{a}_1^{IV}, \\
 \underline{L}_5' &= l_5 \underline{a}_1^V, & \underline{L}_6' &= l_6 \underline{a}_1^{VI}, \\
 \underline{L}_7' &= l_7 \underline{a}_1^{VII}, & \underline{L}_8' &= l_8 \underline{a}_1^{VIII}, & \underline{L}_9' &= l_9 \underline{a}_1^{IX}.
 \end{aligned}$$

Los vectores de posición $\underline{R}_3', \underline{R}_6', \underline{R}_9', \underline{R}(\text{pot})' \in \mathcal{R}^2$, son representados a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_3' &= \underline{L}_1' + \underline{L}_2' & [1.128] \\
 \underline{R}_6' &= \underline{L}_3' + \underline{L}_4' + \underline{A}' \\
 \underline{R}_9' &= \underline{L}_5' + \underline{L}_6' + \underline{B}'
 \end{aligned}$$

$$\underline{R}(\rho_{\alpha})' = \underline{R}_1' + \underline{L}_9' \quad [1.129]$$

Observemos que podemos plantear ecuaciones de lazo en la configuración deformada. Esto es,

$$\begin{aligned} \underline{L}_1' + \underline{L}_2' + \underline{L}_7' - \underline{L}_3' - \underline{L}_4' - \underline{A}' &= 0 \\ \underline{L}_1' + \underline{L}_2' + \underline{L}_8' - \underline{L}_5' - \underline{L}_6' - \underline{B}' &= 0 \end{aligned} \quad [1.130]$$

Las ecuaciones [1.131] nos serán de utilidad para plantear más adelante el problema cinemático directo en la configuración deformada. En base [1.127], las ecuaciones [1.128], [1.129] y [1.130] son expresadas en términos de las bases móviles deformadas. Esto es,

$$\underline{R}_3 = l_1 \underline{a}_1' + l_2 \underline{a}_1'' \quad [1.131]$$

$$\underline{R}_6 = l_3 \underline{a}_1''' + l_4 \underline{a}_1^{IV} + a \underline{e}_1$$

$$\underline{R}_9 = l_5 \underline{a}_1^V + l_6 \underline{a}_1^{VI} + b \underline{e}_1$$

$$\underline{R}(\rho_{\alpha}) = l_1 \underline{a}_1' + l_2 \underline{a}_1'' + l_9 \underline{a}_1^{IX} \quad [1.132]$$

$$l_1 \underline{a}_1' + l_2 \underline{a}_1'' + l_7 \underline{a}_1^{VII} - l_3 \underline{a}_1''' - l_4 \underline{a}_1^{IV} - a \underline{e}_1 = 0 \quad [1.133]$$

$$l_1 \underline{a}_1' + l_2 \underline{a}_1'' + l_8 \underline{a}_1^{VIII} - l_5 \underline{a}_1^V - l_6 \underline{a}_1^{VI} - b \underline{e}_1 = 0$$

Las bases móviles deformadas se expresan en términos de Cuaterniones. Esto es,

$$\underline{a}_1' = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) \equiv P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \quad [1.134]$$

$$\underline{a}_1'' = \rho(Q, \rho(q, \underline{e}_1)) \equiv Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q}$$

$$\underline{a}_1''' = \rho(R, \rho(r, \underline{e}_1)) \equiv R * r * \underline{e}_1 * \overline{R * r}$$

$$\underline{a}_1^{IV} = \rho(S, \rho(s, \underline{e}_1)) \equiv S * s * \underline{e}_1 * \overline{S * s}$$

$$\underline{a}_1^V = \rho(T, \rho(t, \underline{e}_1)) \equiv T * t * \underline{e}_1 * \overline{T * t}$$

$$\begin{aligned} \underline{a}_1^{VI} &= \rho(U, \rho(u, \underline{e}_1) \equiv U * u * \underline{e}_1 * \overline{U * u}) \\ \underline{a}_1^{VII} &= \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1) \equiv V * v * \underline{e}_1 * \overline{V * v}) . \\ \underline{a}_1^{VIII} &= \rho(W, \rho(w, \underline{e}_1) \equiv W * w * \underline{e}_1 * \overline{W * w}) . \\ \underline{a}_1^X &= \rho(Z, \rho(z, \underline{e}_1) \equiv Z * z * \underline{e}_1 * \overline{Z * z}) . \end{aligned}$$

En base a [1.134], las ecuaciones [1.131], [1.132] y [1.133], pueden ser escritas de la forma siguiente:

$$R_3' = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \} \quad [1.135]$$

$$R_6' = l_3 \{ R * r * \underline{e}_1 * \overline{R * r} \} + l_4 \{ S * s * \underline{e}_1 * \overline{S * s} \} + a \{ l * \underline{e}_1 * l \}$$

$$R_9' = l_5 \{ T * t * \underline{e}_1 * \overline{T * t} \} + l_6 \{ U * u * \underline{e}_1 * \overline{U * u} \} + b \{ l * \underline{e}_1 * l \}$$

$$\begin{aligned} R_{(p_{ot})}' &= l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \} + \\ &+ l_9 \{ Z * z * \underline{e}_1 * \overline{Z * z} \} \end{aligned} \quad [1.136]$$

$$\begin{aligned} l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \} + \\ + l_7 \{ V * v * \underline{e}_1 * \overline{V * v} \} - l_3 \{ R * r * \underline{e}_1 * \overline{R * r} \} - \\ - l_4 \{ S * s * \underline{e}_1 * \overline{S * s} \} - a \{ l * \underline{e}_1 * l \} = 0 \end{aligned} \quad [1.137]$$

$$\begin{aligned} l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ Q * q * \underline{e}_1 * \overline{Q * q} \} + \\ + l_8 \{ W * w * \underline{e}_1 * \overline{W * w} \} - l_5 \{ T * t * \underline{e}_1 * \overline{T * t} \} - \\ - l_6 \{ U * u * \underline{e}_1 * \overline{U * u} \} - b \{ l * \underline{e}_1 * l \} = 0 . \end{aligned}$$

También considerando las normas unitarias de las Cuaterniones. Esto es,

$$\| P \| = \| Q \| = \| R \| = \| S \| = \| T \| = \| U \| = \| V \| = \| W \| = \| Z \| = 0 \quad [1.138]$$

obtenemos las ecuaciones que gobiernan la configuración deformada de RP_{RRR} .

Las componentes de los Cuaterniones asociados P, Q, R, S, T, U, V, W, Z $\in \mathfrak{R}^4$ son definidos por [A.77] del apéndice A. Esto es,

$$P \in \mathfrak{R}^4 \quad P = (P_o, \underline{P}_V) \quad P_o \in \mathfrak{R} \quad P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad [1.139]$$

$$\underline{P}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{P}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_1}{2} \underline{e}_3,$$

$$Q \in \mathfrak{R}^4 \quad Q = (Q_o, \underline{Q}_V) \quad Q_o \in \mathfrak{R} \quad Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\underline{Q}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{Q}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_2}{2} \underline{e}_3,$$

$$R \in \mathfrak{R}^4 \quad R = (R_o, \underline{R}_V) \quad R_o \in \mathfrak{R} \quad R_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2}$$

$$\underline{R}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{R}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_3}{2} \underline{e}_3,$$

$$S \in \mathfrak{R}^4 \quad S = (S_o, \underline{S}_V) \quad S_o \in \mathfrak{R} \quad S_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2}$$

$$\underline{S}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{S}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_4}{2} \underline{e}_3,$$

$$T \in \mathfrak{R}^4 \quad T = (T_o, \underline{T}_V) \quad T_o \in \mathfrak{R} \quad T_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_5}{2}$$

$$\underline{T}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{T}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_5}{2} \underline{e}_3,$$

$$U \in \mathfrak{R}^4 \quad U = (U_o, \underline{U}_V) \quad U_o \in \mathfrak{R} \quad U_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_6}{2}$$

$$\underline{U}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{U}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_6}{2} \underline{e}_3,$$

$$V \in \mathfrak{R}^4 \quad V = (V_o, \underline{V}_V) \quad V_o \in \mathfrak{R} \quad V_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_7}{2}$$

$$\underline{V}_V \in \mathfrak{R}^3 \quad \underline{V}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_7}{2} \underline{e}_3.$$

$$W \in \mathfrak{R}^4 \quad W = (W_o, \underline{W}_V) \quad W_o \in \mathfrak{R} \quad W_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_8}{2}$$

$$\begin{array}{ll}
 \underline{W}_V \in \mathbb{R}^3 & \underline{W}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_8}{2} \underline{e}_3. \\
 Z \in \mathbb{R}^4 & Z = (Z_0, \underline{Z}_V) \\
 Z_0 \in \mathbb{R} & Z_0 = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_9}{2} \\
 \underline{Z}_V \in \mathbb{R}^3 & \underline{Z}_V = \pm \text{Sin} \frac{\alpha_9}{2} \underline{e}_3.
 \end{array}$$

1.4.1.3 Planteamiento de los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración deformada.

En esta parte, definiremos dos problemas asociados al multicuerpo en estudio. Tales problemas están asociados a la posición mostrada en la figura 1.31. Consideremos entonces el siguiente problema:

1.4.1.3.1 Problema cinemático directo.

“Dados $p=(p_0,0,0,p_3)$, $r=(r_0,0,0,q_3)$, $t=(t_0,0,0,t_3)$, $z=(z_0,0,0,z_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$, $s=(s_0,0,0,s_3)$, $u=(u_0,0,0,u_3)$, $P=(P_0,0,0,P_3)$, $R=(R_0,0,0,R_3)$, $T=(T_0,0,0,T_3)$, con $\|p\| = \|r\| = \|t\| = \|z\| = \|q\| = \|s\| = \|u\| = \|P\| = \|R\| = \|T\| = 1$, las dimensiones $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9, \in \mathbb{R}^+$, encuentre $\underline{R}(p_0)' \in \mathbb{R}^2$, $Z=(Z_0,0,0,Z_3)$, $Q=(Q_0,0,0,Q_3)$, $S=(S_0,0,0,S_3)$, $U=(U_0,0,0,U_3)$, tal que [1.137] sea satisfecha y

$$\begin{array}{l}
 Z_0^2 + Z_3^2 = 1 \\
 Q_0^2 + Q_3^2 = 1 \\
 S_0^2 + S_3^2 = 1 \\
 U_0^2 + U_3^2 = 1.
 \end{array}
 \tag{1.140}$$

El problema de la cinemática directa genera 8 ecuaciones algebraicas no lineales con 8 incógnitas del tipo polinomial.

1.4.1.3.3 Problema cinemático inverso.

Presentaremos ahora en esta parte, el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos para el multicuerpo en estudio. Esto es,

“Dado $R(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^2$, $Z=(Z_0,0,0,Z_3)$, con $\|Z\| =1$, $p=(p_0,0,0,p_3)$, $q=(q_0,0,0,q_3)$, $r=(r_0,0,0,r_3)$, $s=(s_0,0,0,s_3)$, $t=(t_0,0,0,t_3)$, $u=(u_0,0,0,u_3)$, $z=(z_0,0,0,z_3)$,) con $\|p\| =\|r\| =\|t\| =\|z\| =\|q\| =\|s\| =\|u\| =1$, las dimensiones $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8, l_9 \in \mathfrak{R}^+$ encuentre $P=(P_0,0,0,P_3)$, $Q=(Q_0,0,0,Q_3)$, $R=(R_0,0,0,R_3)$, $S=(S_0,0,0,S_3)$, $T=(T_0,0,0,T_3)$, $U=(U_0,0,0,U_3)$, tal que [1.135] y [1.124] sean satisfechas y

$$P_0^2 + P_3^2 = 1 \quad [1.141]$$

$$Q_0^2 + Q_3^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_3^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_3^2 = 1.$$

$$T_0^2 + T_3^2 = 1$$

$$U_0^2 + U_3^2 = 1.$$

El problema de la cinemática inversa genera 12 ecuaciones algebraicas no lineales con 12 incógnitas del tipo polinomial.

2.2.2.8 El área de trabajo de RP_{RRR}

Presentaremos en esta parte, la caracterización del área de trabajo del multicuerpo RP_{RRR} motivo de nuestro estudio. Para caracterizar el área de trabajo utilizaremos una circunferencia que está asociada a las cadenas que componen al robot paralelo. Observemos que la circunferencia 1 mostrada en la figura 1.32 tiene de radio la suma de las longitudes de los eslabones que componen a la cadena CC_1 . Esto es,

$$X_1^2 + Y_1^2 = (l_1 + l_2 + l_9)^2. \quad [1.142]$$

con centro en la posición 1 , (sobre la junta $J_1 = E_1 \cap T$).

Igualmente para las cadenas CC_2 y CC_3 las circunferencias asociadas son las siguientes:

$$X_2^2 + Y_2^2 = (l_3 + l_4 + l_9)^2. \quad [2.143]$$

con centro en la posición 2 , (sobre la junta $J_2 = E_3 \cap T$) ,

$$X_3^2 + Y_3^2 = (l_5 + l_6 + l_9)^2. \quad [2.144]$$

con centro en la posición 3 , (sobre la junta $J_3 = E_5 \cap T$).

Entonces el área acotada por la intersección de las circunferencias 1,2 y 3 será para nosotros, el área de trabajo del multicuerpo en estudio. Esto es,

$$A_{TRP} = A_{1CC1} \cap A_{2CC2} \cap A_{3CC3} \quad [2.145]$$

En este caso A_{1CC1} es el área asociada a la circunferencia 1 y está definida a través de la inecuación siguiente:

$$X_1^2 + Y_1^2 \leq (l_1 + l_2 + l_9)^2 \quad [2.146]$$

Igualmente las áreas asociadas a las circunferencias 2 y 3 son las siguientes:

$$X_2^2 + Y_2^2 \leq (l_3 + l_4 + l_9)^2 \quad [2.147]$$

$$X_3^2 + Y_3^2 \leq (l_5 + l_6 + l_9)^2. \quad [2.148]$$

Todos los puntos contenidos en el área A_{TRP} (ver figura 1.33) pueden ser alcanzados por el centroide de la plataforma, sin embargo, es importante hacer la aclaración siguiente:

Aclaración: Los puntos contenidos sobre la frontera de A_{TRP} (ver figura 1.33) son alcanzados por el centro de la plataforma, pero la posición de cada cadena analizada, se encuentran en singularidad mecánica, esto es, la cadena se comporta como un cuerpo rígido y se degenera el grado de libertad, además, en los puntos contenidos en las intersecciones degeneran dos veces el grado de libertad, y es posible que en una operación de trabajo real del robot, se produzca una singularidad mecánica, esto es, uno de los motores puede estar trabajando excedido y puede originar problemas. Una forma de resolver el problema del área de trabajo, es restringiendo el radio efectivo de trabajo, de forma tal que $r_{efc} < l_1 + l_2 + l_9$, si es la cadena cinemática CC_1 . Esto es,

$$X_1^2 + Y_1^2 \leq (l_1 + l_2 + l_9 - e_{min})^2. \quad [2.149]$$

siendo e_{min} una distancia menor a l_9 .

De esta forma, las operaciones reales dentro del área efectiva de trabajo se pueden definir cualquier función de trayectoria, esto es, rectas, polinomios, curvas, etc, (ver figura 1.33).

De lo anterior, se concluye que la modelación de este tipo de robots es relativamente sencilla en comparación con otros métodos[4], además, la teoría de Cuaterniones unifica las diferentes metodologías que existen para modelar cuerpos rígidos acoplados, la única diferencia es la no composición de rotaciones en el caso de las cadenas cinemáticas cerradas, sin embargo, un aspecto importante de esta clase de robots, es en el sentido de que pueden existir secuencias de movimientos, porque las posiciones que guardan los eslabones E_1 , E_3 , E_5 con respecto al eslabón tierra (T) pueden ser fijadas a un determinado movimiento de cada cadena, esto es, mover el eslabón E_1 manteniendo fijos a los eslabones E_3 y E_5 en el tiempo T_1 , luego E_2 en el tiempo T_2 manteniendo fijos a E_1 , E_5 y finalmente en T_3 mover a E_5 fijando a E_1 y E_3 , en la modelación matemática esto no es factible ya que los eslabones que están conectados a la plataforma P_L no guardan las posiciones angulares con

respecto al eslabón anterior, por lo tanto los accionamientos en forma secuenciada es a través del control.

Aplicando la metodología y haciendo uso del álgebra de Cuaterniones es posible modelar cadenas cinemáticas mas complejas como el caso del robot MARIANNE III[11], este robot se compone de una plataforma ó robot paralelo y un robot tipo PUMA de 6 grados de libertad, en total el robot consta de 9 grados de libertad con $n - 1$ grados efectivos de movimientos, esto es, si el centroide de la plataforma no puede girar los 360° alrededor de su eje de rotación.

Otra modelación con el álgebra de Cuaterniones de este robot es vista en[12], una aplicación del robot paralelo modelado anteriormente se puede ver en [13] y es utilizado para operaciones de ensamble.

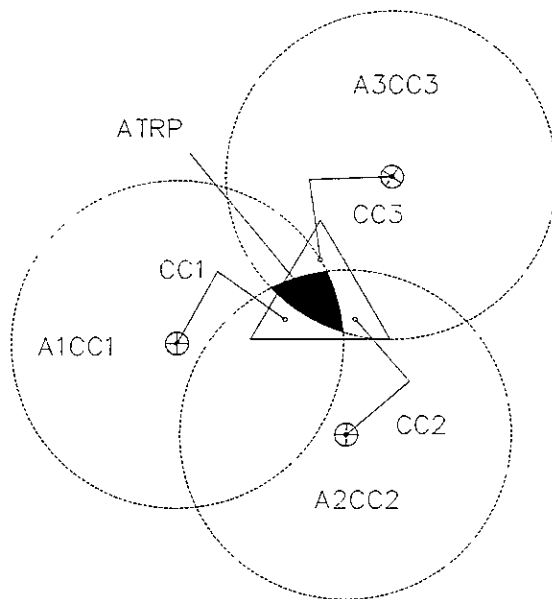


Figura 1.32 Funciones de circunferencia asociadas a los cadenas.

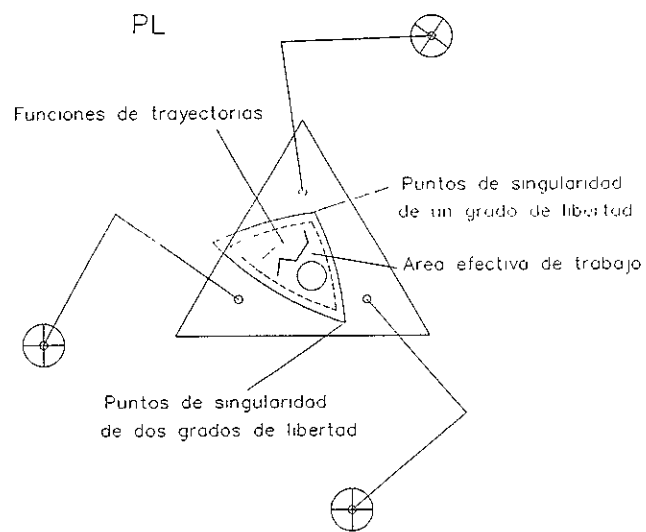
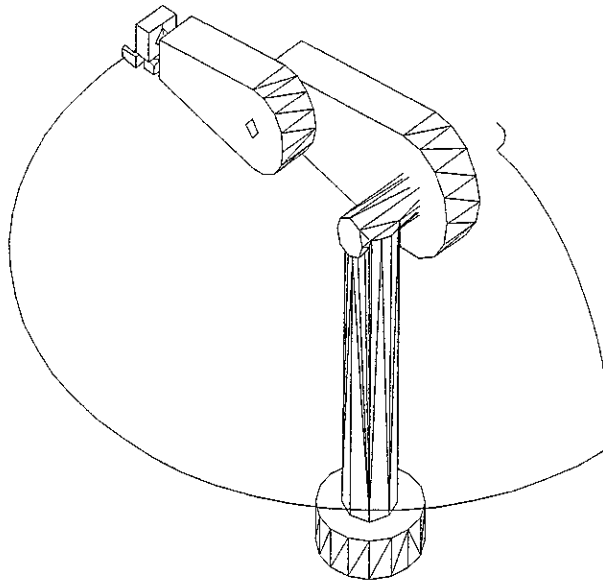


Figura 1.33 Área efectiva del robot paralelo.

CAPÍTULO II

“SECUENCIAS DE MOVIMIENTOS”



Robot PUMA efectuando la secuencia combinada

SC F1M23456

R1234

CAPÍTULO II

2 SECUENCIAS DE MOVIMIENTOS.

En este capítulo, introduciremos los conceptos de movimientos secuenciados y movimientos simultáneos, las caracterizaciones de tales movimientos serán de utilidad para formular el marco teórico de la evasión de obstáculos para un robot de dos grados de libertad(2GDL) tipo RR. Los robots utilizados serán de la clase I descritos en el apéndice A, y corresponden a las cadenas cinemáticas abiertas modeladas en el capítulo I.

2.1 Secuencias de movimientos.

En el capítulo I, se formularon las ecuaciones cinemáticas de posición de los robots clase I. Se mostró además, 4 movimientos básicos de un robot de 2GDL tipo RR y 6 movimientos de un robot espacial tipo RRR. En esta parte, caracterizaremos tres tipos fundamentales de movimientos los cuales se describen a continuación:

- 1 Movimientos secuenciados.
- 2 Movimientos simultáneos.
- 3 Movimientos híbridos.

Los movimientos secuenciados son de un grado de libertad, y están asociados de forma no rigurosa a las cadenas cinemáticas abiertas. Los movimientos secuenciados se caracterizan tomando en cuenta los actuadores. Observemos que es necesario que opere un solo actuador asociado a un eslabón que compone a un robot, manteniendo desactivos los otros actuadores para caracterizar los movimientos secuenciados. Un ejemplo de estos movimientos lo son la secuencia 1 y la secuencia 2 asociadas al robot de 2GDL, modelado en el capítulo I.

Los movimientos simultáneos son movimientos de dos o más grados de libertad. En este caso, es necesario que los actuadores que forman parte del robot operen simultáneamente. Un ejemplo de los movimientos simultáneos pueden verse en operaciones de corte o soldadura realizados por robot industrial[25].

Los movimientos híbridos son la combinación de movimientos secuenciados y movimientos simultáneos. Un ejemplo de esta clase de movimientos lo son la secuencia 3 y la secuencia 4 del robot de 2GDL discutidas en el capítulo 1.

Las secuencias de movimientos de los sistemas mecánicos, son la base en la caracterización de los procesos industriales, también son utilizadas en problemas relacionados con la Inteligencia Artificial. En este capítulo, caracterizaremos los movimientos asociados a los robots de 2 y 3 GDL, modelados en el capítulo 1.

2.1.1 Movimientos secuenciados.

En esta parte, definiremos una nomenclatura y un código binario, los cuales serán asociados a cada una de las secuencias de movimientos caracterizadas en este trabajo. El análisis del movimiento lo realizaremos de la configuración no deformada a la configuración deformada del multicuerpo mostrado en la figura 2.1. Introduciremos la variable tiempo(T) con el

propósito de construir el código binario. Observemos que los parámetros $P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$ y

$Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$ están relacionados con la configuración deformada mostrada en la figura 2.1.

Los actuadores AC_1 y AC_2 mostrados en 2.1, tomarán los parámetros $P_0, Q_0 \in \mathfrak{R}$ para realizar el movimiento del multicuerpo en estudio.

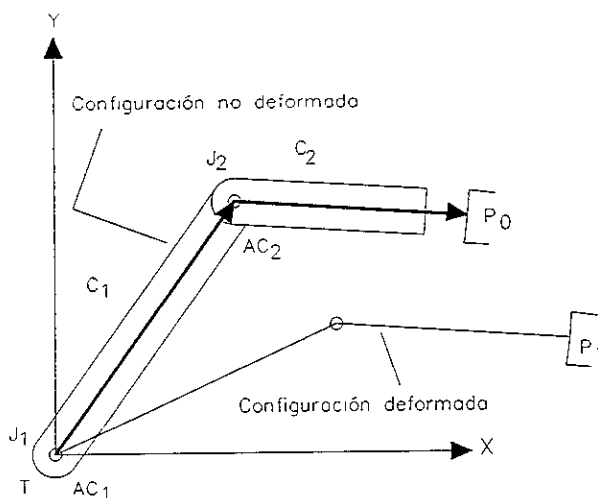


Figura 2.1 Robot de 2GDL

A continuación describiremos la secuencia 1 y la secuencia 2 asociadas al multicuerpo mostrado en la figura 1.3 del capítulo I, introduciendo la variable tiempo.

1 Secuencia 1.

Primero se activa el actuador AC_1 , el cual mueve al eslabón C_1 (a todo el multicuerpo), manteniendo AC_2 desactivo en el tiempo 1 (T_1), luego en el tiempo 2 (T_2) el actuador AC_1 está desactivado, y AC_2 se activa moviendo al eslabón C_2 , alcanzando el órgano terminal la configuración deformada mostrada en 1.3.

2 Secuencia 2.

Primero se activa el actuador AC_2 , el cual mueve al eslabón C_2 manteniendo AC_1 desactivo en el tiempo 1 (T_1), luego en el tiempo 2 (T_2), el actuador AC_2 está desactivado y AC_1 se activa moviendo al eslabón C_1 (junto con el eslabón C_2), alcanzando el órgano terminal la configuración deformada.

Llamaremos a la secuencia 1 y a la secuencia 2 secuencias reales. Definamos ahora una nomenclatura de caracterización para las secuencias reales. La representación siguiente está asociada a la secuencia real 1:

$$SR^{F1M2}$$

La descripción de esta secuencia es la siguiente:

AC_1 Activo $\rightarrow P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$	AC_2 Desactivo	T_1
AC_1 Desactivo	AC_2 Activo $\rightarrow Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$	T_2

La descripción anterior, es representada a través de un código binario. Esto es,

SR^{F1M2}

AC ₁	AC ₂	T
1	0	T ₁
0	1	T ₂

En este caso, el número 1 del código binario representa activación de los actuadores y el número 0 desactivación de los mismos. La representación SR^{F1M2} es interpretada de la forma siguiente:

“ Secuencia real de la familia 1 con el actuador M₂ activado en el tiempo T₂ “.

La familia caracteriza el actuador que es activado en el tiempo T₁. Representaremos a los actuadores en este trabajo, con la letra “M” en la nomenclatura (SR^{F1M2}), y en el código binario por AC.

La secuencia 2 del multicuerpo mostrado en la figura 1.1, es caracterizada de la forma siguiente:

SR^{F2M1}

La descripción de la secuencia real 2 es la siguiente:

AC ₁ Desactivo	AC ₂ Activo $\rightarrow Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$	T ₁
AC ₁ Activo $\rightarrow P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$	AC ₂ Desactivo	T ₂

La representación en código binario de la secuencia SR^{F2M1} es mostrada a continuación:

SR^{F2M1}

AC ₁	AC ₂	T
0	1	T ₁
1	0	T ₂

La interpretación de la secuencia SR^{F2M1} es la siguiente:

“ Secuencia real de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 ”.

Los modelos matemáticos de las secuencias SR^{F1M2} y SR^{F2M1} son las ecuaciones [1.17] y [1.23]. Los movimientos secuenciados, al ser movimientos de un grado de libertad generan una posición intermedia, la cual será llamada por nosotros la posición intermedia.

2.1.1.1 Consideraciones sobre las posiciones intermedias.

Las posiciones intermedias de las secuencias reales, son obtenidas cuando un actuador ha posicionado ya sea un eslabón (del multicuerpo) ó al multicuerpo en el tiempo T_1 . Observemos que la posición intermedia referida al lugar geométrico que ocupa el punto $pot \in C_2$ mostrado en la figura 1.4(b)) corresponde a la secuencia real SR^{F1M2} . Notemos que las posiciones intermedias son diferentes para cada secuencia. Las ecuaciones que gobiernan las posiciones intermedias de las secuencias reales SR^{F1M2} y SR^{F2M1} son [1.21] y [1.22]. La configuración intermedia relacionada con el multicuerpo motivo de nuestro estudio, se observa en la figura 2.2, y corresponde a la secuencia SR^{F1M2} . Definamos ahora una trayectoria τ sobre el área de trabajo del multicuerpo mostrado en 2.2, los puntos de interés para nosotros, serán p_0 y representa el punto final de la cadena en la configuración no deformada, p_1 que corresponde al lugar geométrico del punto p_0 en la configuración deformada y p_{12} que representa el lugar geométrico del punto p_0 en la posición intermedia correspondiente a la secuencia real SR^{F1M2} , mostrada en 2.2.

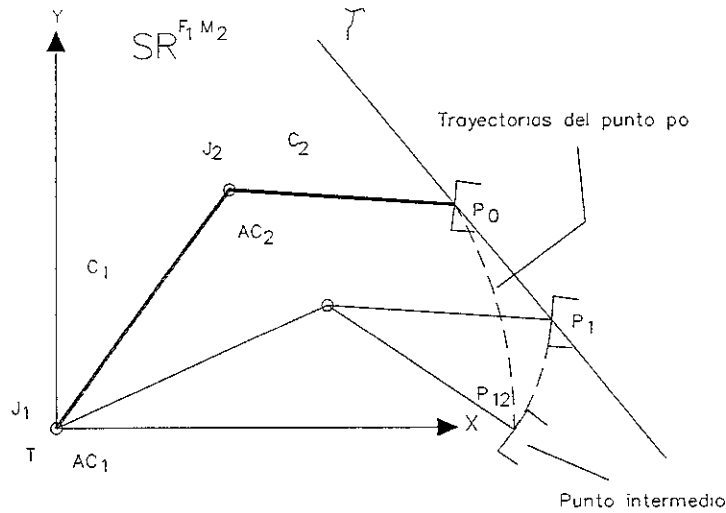


Figura 2.2 Trayectorias del punto p_0 asociadas a la secuencia real de la familia 1

Observemos que las trayectorias del punto p_0 son segmentos de circunferencia, y son debidas a los movimientos de un grado de libertad asociados a las secuencias reales. Las trayectorias del punto p_0 asociadas a la secuencia SR^{F1M2} son mostradas en 2.2. Las posiciones intermedias indican que las regiones que ocupan los eslabones que componen al multicuerpo en estudio, son diferentes para cada secuencia. Esta característica nos permitirá encontrar otras secuencias relacionadas con el movimiento de nuestra cadena. En la figura 2.3 se observan las trayectorias del punto p_0 correspondiente a la secuencia real SR^{F2M1}

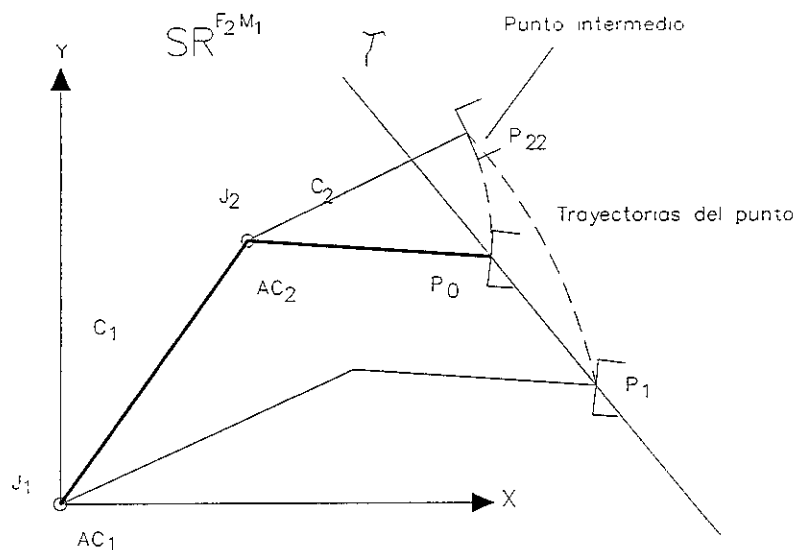


Figura 2.3 Trayectorias del punto p_0 asociadas a la secuencia SR^{F2M1}

2.1.1.2 Reflexiones.

Supongamos que los eslabones C_1 y C_2 mostrados en la figura 2.2 tienen libre movimiento en torno a una revolución, esto es, pueden desplazarse angularmente 2π . Sean $P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$ y

$Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$ los parámetros asociados a la configuración deformada mostrada en la figura

2.1, definamos ahora al parámetro $P_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ que corresponde al complemento

angular del parámetro $P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$ en torno a una revolución. De igual forma el parámetro

$Q_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$ corresponde al complemento angular del parámetro $Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$.

Describiremos a continuación una secuencia de movimiento relacionada con los parámetros $P_o^*, Q_o^* \in \mathcal{R}$. Esto es,

AC_1 Activo $\rightarrow P_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ AC_2 Desactivo T_1

AC_1 Desactivo AC_2 Activo $\rightarrow Q_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$ T_2 .

La nomenclatura asociada a esta secuencia es la siguiente:

$$R^{F1M2}$$

y representa la reflexión real de la familia 1 con el actuador M_2 activado en T_2 . El código binario asociado a la reflexión real es el siguiente:

$$R^{F1M2}$$

AC_1	AC_2	T
-1	0	T_1
0	-1	T_2

En este caso, el número -1 corresponde al giro complementario de los actuadores al tomar los parámetros $P_0^*, Q_0^* \in \mathfrak{R}$. Las trayectorias asociadas a la reflexión real R^{F1M2} se muestran en la figura 2.4, en este caso, el punto intermedio es p_{11} . Observemos que la posición intermedia asociada a R^{F1M2} corresponde a la secuencia real SR^{F1M2} .

La reflexión R^{F2M1} es descrita de la forma siguiente:

$$AC_1 \text{ Desactivo} \qquad AC_2 \text{ Activo} \rightarrow Q_0^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right) \quad T_1$$

$$AC_1 \text{ Activo} \rightarrow P_0^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right) \quad AC_2 \text{ Desactivo} \qquad T_2.$$

El código binario asociado a la reflexión R^{F2M1} es el siguiente:

$$R^{F2M1}$$

AC_1	AC_2	T
0	-1	T_1
-1	0	T_2

La descripción de esta secuencia se expresa a continuación:

“ Reflexión real de la familia 2 con el actuador AC_1 activado en T_2 ” .

La posición intermedia asociada a la reflexión R^{F2M1} corresponde a la secuencia real SR^{F2M1} . Las trayectorias de las reflexiones, son los complementos de los segmentos de las circunferencias de las secuencias reales. Observemos que los movimientos asociados a las reflexiones son diferentes a los movimientos de las secuencias reales.

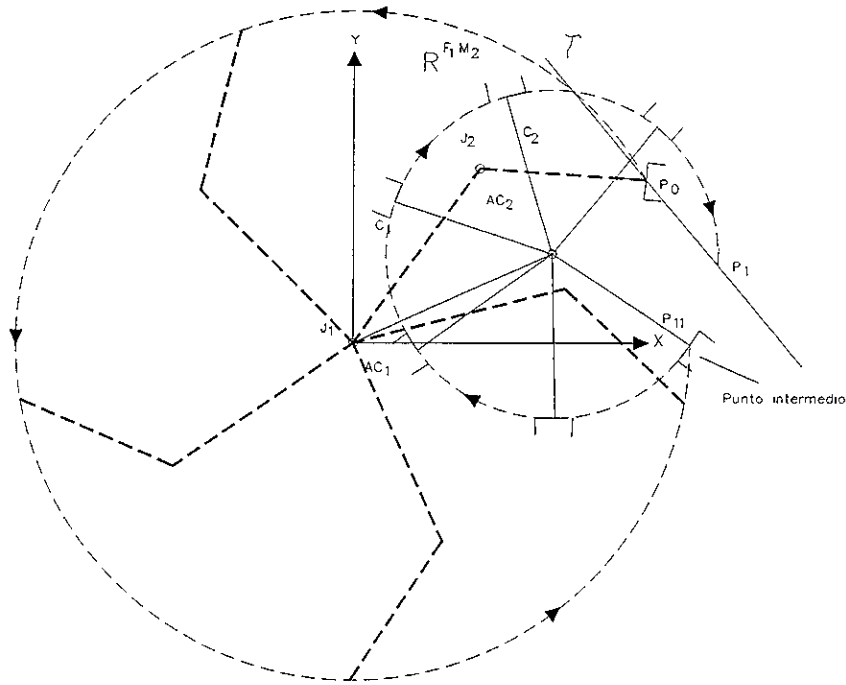


Figura 2.4 Trayectorias del punto p_0 asociadas a la reflexión R^{F1M2} .

Formularemos a continuación otra serie de secuencias asociadas al multicuerpo mostrado en 2.1.

2.1.1.3 Secuencias combinadas.

En esta parte, caracterizaremos los movimientos generados por una combinación de las secuencias reales y las reflexiones. Describamos ahora la secuencia siguiente:

AC_1	Activo $\rightarrow P_0^* = \pm \cos\left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2}\right)$	AC_2	Desactivo	T_1
AC_1	Desactivo	AC_2	Activo $\rightarrow Q_0 = \pm \cos\frac{\alpha_2}{2}$	T_2 .

Observemos que el actuador AC_1 ha tomado el parámetro $P_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ correspondiente al complemento angular del parámetro $P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2}$ en el tiempo T_1 , y en el tiempo T_2 el actuador AC_2 tomó el parámetro $Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$. Llamaremos secuencias combinadas a este tipo de movimientos. La nomenclatura asociada a la secuencia anteriormente descrita es la siguiente:

$$SC_{R1}^{F1M2}$$

y el código binario asociado a la secuencia SC_{R1}^{F1M2} es:

$$SC_{R1}^{F1M2}$$

AC_1	AC_2	T
-1	0	T_1
0	1	T_2

La descripción de esta secuencia se expresa a continuación:

“Secuencia combinada de la familia 1 con el actuador M_2 activado en T_2 , con sub-reflexión en el actuador AC_1 ”.

El término “ R_1 ” de la nomenclatura asociada a las secuencias combinadas, se refiere a que el actuador AC_1 ha tomado el complemento $P_o^* \in \mathcal{R}$. En este caso, el punto intermedio asociado a esta secuencia corresponde a la secuencia real SR^{F1M2} , las trayectorias

asociadas a la secuencia combinada SC_{R1}^{F1M2} se observan en la figura 2.5, en este caso,

el punto p_{11} corresponde al lugar geométrico del punto p_0 en la posición intermedia.

El número de secuencias combinadas asociadas al multicuerpo mostrado en la figura 2.1, son para este caso 4. A continuación mostraremos las nomenclaturas y códigos binarios de las secuencias faltantes.

$$SC_{R2}^{F1M2}$$

AC ₁	AC ₂	T
1	0	T ₁
0	-1	T ₂

Descripción:

“Secuencia combinada de la familia 1 con el actuador M₂ activado en T₂, con sub-reflexión en el actuador AC₂”.

$$SC_{R1}^{F2M1}$$

AC ₁	AC ₂	T
0	1	T ₁
-1	0	T ₂

Descripción:

“Secuencia combinada de la familia 2 con el actuador M₁ activado en T₂, con sub-reflexión en el actuador AC₁”.

$$SC_{R2}^{F2M1}$$

AC ₁	AC ₂	T
0	-1	T ₁
1	0	T ₂

Descripción:

“Secuencia combinada de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 , con sub-reflexión en el actuador AC_2 ”.

Observemos que existen 2 secuencias reales, 2 reflexiones y 4 secuencias combinadas para el multicuerpo mostrado en la figura 2.1.

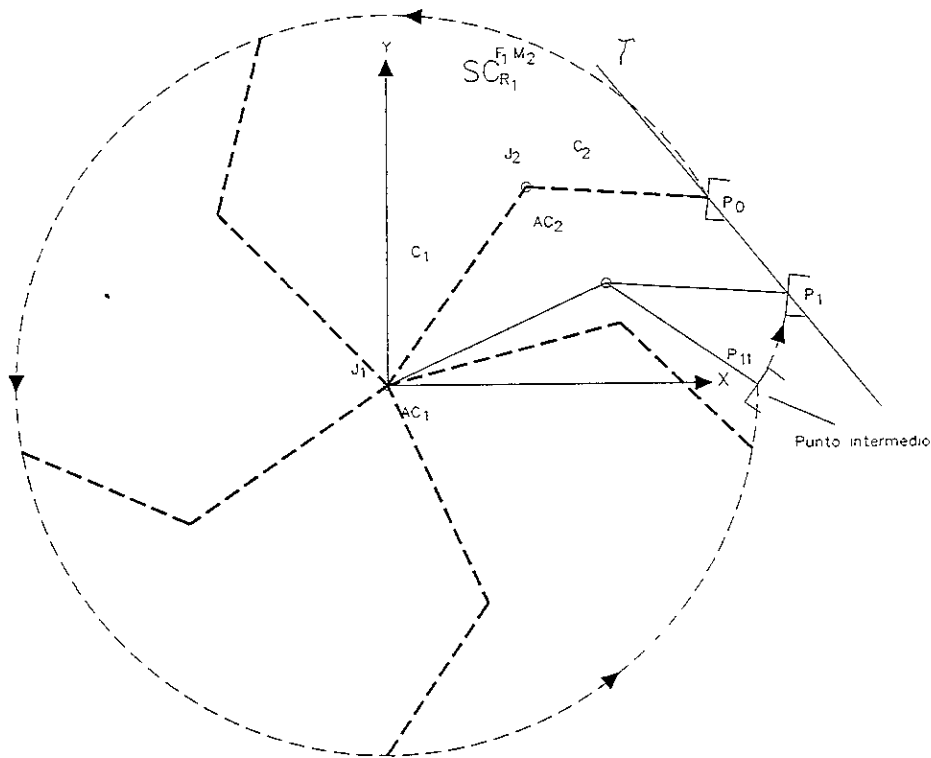


Figura 2.5 Trayectorias del punto p_0 asociadas a la secuencia combinada SC_{R1}^{F1M2} .

A continuación formularemos una ecuación que caracteriza el número total de secuencias.

2.1.1.4 Ecuaciones que gobiernan los movimientos secuenciados.

En esta parte, caracterizaremos las ecuaciones que gobiernan el número máximo y único de los movimientos secuenciados, asociados al multicuerpo de 2GDL mostrado en la figura 2.1. Observemos que existe una relación entre el grado de libertad del multicuerpo de 2GDL motivo de nuestro estudio, y el número de movimientos secuenciados. La siguiente ecuación

algebraica, será para nosotros la ecuación general de los movimientos secuenciados. Esto es,

$$N_{TS} = 2 n! + [n!]^2 \quad [2.1]$$

En este caso, N_{TS} representa el número máximo de movimientos secuenciados y “n” es el grado de libertad de la cadena.

Al expandir la ecuación [2.1], podemos encontrar las secuencias anteriormente caracterizadas. Esto es,

$$N_{TS} = n! + n! + [n!]^2. \quad [2.2]$$

Renombremos la ecuación [2.2] de la forma siguiente:

$$N_{TS} = A + B + C. \quad [2.3]$$

En este caso, el término A representa para nosotros el número máximo de secuencias reales, en tanto el término B caracteriza el número de reflexiones y finalmente el término C es el número de secuencias combinadas.

El número de familias también tiene relación directa con el grado de libertad. Esto es,

$$N_F = n \quad [2.4]$$

En este caso, N_F representa al número de familias. De igual forma los puntos intermedios están relacionados mediante la expresión siguiente:

$$N_{PI} = n - 1 \quad [2.5]$$

Al tomar $n=2$ y sustituir en las ecuaciones [2.1],[2.3],[2.4] y [2.5], obtendremos los resultados siguientes:

$$N_{TS} = 2! + 2! + [2!]^2 = 2 + 2 + 4 = 8$$

$N_{TS} = 8$ ← Total de secuencias.

$N_{SR} = 2$ ← Secuencias reales.

$N_R = 2$ ← Reflexiones.

$N_{SC} = 4$ ← Secuencias combinadas.

$N_F = 2$ ← Familias.

$N_{PI} = 1$ ← Puntos intermedios.

Clasifiquemos ahora los movimientos secuenciados para el robot de 2GDL mostrado en la figura 2.1. Llamaremos a los movimientos secuenciados “secuencias uno a uno”. La tabla 2.1 muestra las secuencias uno a uno caracterizadas por las familias.

Secuencias uno a uno de un robot de dos grados de libertad tipo RR.			
Familia 1	Punto intermedio	Familia 2	Punto intermedio
SR^{F1M2}	$p_{12} (p_{11})$	SR^{F2M1}	P_{22}
R^{F1M2}	$p_{12} (p_{11})$	R^{F2M1}	P_{22}
SC_{R1}^{F1M2}	$p_{12} (p_{11})$	SC_{R1}^{F2M1}	P_{22}
SC_{R2}^{F1M2}	$p_{12} (p_{11})$	SC_{R2}^{F2M1}	P_{22}

Tabla 2.1 Secuencias uno a uno de un robot de 2GDL.

2.1.1.5 El problema directo de las secuencias uno a uno para un robot de 2GDL.

En esta parte, definiremos el problema directo de las secuencias uno a uno asociado al multicuerpo mostrado en la figura 2.1. Consideremos entonces el siguiente problema:

“Dados $\mathbb{R}(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}(p_{ot})'' \in \mathbb{R}^2$, $P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$, $P_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2}\right)$, $Q_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2}\right)$, encuentre $\mathbb{R}(p_{ot})_{F1} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}(p_{ot})_{F2} \in \mathbb{R}^2$, el número máximo de secuencias uno a

uno, las secuencias reales, las reflexiones, las secuencias combinadas, el número de familias, y el número de puntos intermedios, tal que [2.1], [2.3], [2.4], y [2.5], sean satisfechas.”

En este caso $\mathbb{R}(p_{ot})_{F1} \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}(p_{ot})_{F2} \in \mathbb{R}^2$ representan para nosotros los vectores de posición de los puntos intermedios de cada familia (p_o es el punto p_{ot}).

2.1.1.6 Secuencias uno a uno para un robot de tres grados de libertad tipo RRR.

En esta parte, caracterizaremos las secuencias uno a uno del multicuerpo mostrado en la figura 1.9. Describiremos a continuación la secuencia de movimientos caracterizada en el capítulo I, la cual está asociada al movimiento del robot de 3GDL motivo de nuestro estudio, introduciendo la variable tiempo. Esto es,

“Primero se activa el actuador AC_1 , el cual mueve al eslabón C_1 (a todo el multicuerpo), manteniendo a los actuadores AC_2 y AC_3 desactivos en el tiempo $1(T_1)$, luego en el tiempo $2(T_2)$ los actuadores AC_1 y AC_3 están desactivados, y AC_2 se activa moviendo al eslabón C_2 (junto con el eslabón C_3), en el tiempo T_3 , se activa el actuador AC_3 manteniendo desactivos a los actuadores AC_1 y AC_2 alcanzando el órgano terminal la configuración deformada mostrada en la figura 1.11.”

Observemos que los parámetros asociados a la configuración deformada mostrada en 1.11 son : $P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$ y $R_o = \pm \cos \frac{\alpha_3}{2}$. Se muestra a continuación otra caracterización de la secuencia anteriormente descrita. Esto es,

$$\begin{array}{llll}
 AC_1 A \rightarrow P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2} & AC_2 D & AC_3 D & T_1 \\
 AC_1 D & AC_2 A \rightarrow Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2} & AC_3 D & T_2 \\
 AC_1 D & AC_2 D & AC_3 A \rightarrow R_o = \pm \cos \frac{\alpha_3}{2} & T_3
 \end{array}$$

Aquí, "A" corresponde a la activación de un actuador, y "D" es la desactivación. La representación de esta secuencia es la siguiente:

SR^{F1M23}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	1	0	0
T ₂	0	1	0
T ₃	0	0	1

Observese que el código binario tiene incluido el tiempo T₃, además por conveniencia nuestra, la columna de los tiempos se ha colocado del lado izquierdo.

La descripción de la secuencia SR^{F1M23} se expresa a continuación:

" Secuencia real de la familia 1 con el actuador AC₂ activado en el tiempo T₂ , y el actuador AC₃ activado en el tiempo T₃ ".

Las trayectorias asociadas a la secuencia SR^{F1M23} se muestran en la figura 1.14.

Utilizemos las ecuaciones [2.1], [2.3], [2.4] y [2.5] con n=3 para caracterizar el número máximo de secuencias uno a uno para el multicuerpo mostrado en la figura 1.9. Esto es,

- N_{TS} = 48 ← Total de secuencias.
- N_{SR} = 6 ← Secuencias reales.
- N_R = 6 ← Reflexiones.

$N_{SC} = 36$ ← Secuencias combinadas.
 $N_F = 3$ ← Familias.
 $N_{PI} = 2$ ← Puntos intermedios.

Los resultados obtenidos para $n=3$ indican que existen 6 secuencias reales, 6 reflexiones, y 36 secuencias combinadas.

A continuación caracterizaremos algunas secuencias asociadas al multicuerpo en estudio. Esto es,

SR^{F3M21}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	0	1
T ₂	0	1	0
T ₃	1	0	0

Descripción:

“ Secuencia real de la familia 3 con el actuador AC₂ activado en el tiempo T₂ , y el actuador AC₁ activado en el tiempo T₃ “.

2.1.1.6.1 Reflexiones y secuencias combinadas.

Para caracterizar las reflexiones y secuencias combinadas definiremos los complementos angulares en torno a un giro completo de los parámetros $P_o, Q_o, R_o \in \mathfrak{R}$. Esto es,

$$P_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right) \quad \rightarrow \quad P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad [2.6]$$

$$Q_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right) \quad \rightarrow \quad Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$$

$$R_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_3 - 2\pi}{2} \right) \quad \rightarrow \quad R_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2}$$

Describiremos a continuación una reflexión real asociada al multicuerpo de 3GDL, motivo de nuestro estudio.

La representación R^{F1M23} corresponde a una reflexión real de 3 GDL, el código binario asociado a esta secuencia se muestra a continuación:

$$R^{F1M23}$$

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	0	0
T ₂	0	-1	0
T ₃	0	0	-1

La descripción de la reflexión es la siguiente:

$$AC_1 \ A \rightarrow P_o^* = \pm \cos\left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2}\right) \quad AC_2 \ D \quad AC_3 \ D \quad T_1$$

$$AC_1 \ D \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_o^* = \pm \cos\left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2}\right) \quad AC_3 \ D \quad T_2$$

$$AC_1 \ D \quad AC_2 \ D \quad AC_3 \ A \rightarrow R_o^* = \pm \cos\left(\frac{\alpha_3 - 2\pi}{2}\right) \quad T_3$$

Descripción :

“ Reflexión real de la familia 1 con el actuador AC₂ activado en el tiempo T₂ , y el actuador AC₃ activado en el tiempo T₃ “.

2.1.1.6.2 Secuencias combinadas de orden 1 y orden 2.

Consideremos la secuencia siguiente:

$$AC_1 \ A \rightarrow P_o^* = \pm \cos\left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2}\right) \quad AC_2 \ D \quad AC_3 \ D \quad T_1$$

$$AC_1 \text{ D} \qquad AC_2 \text{ A} \rightarrow Q_0 = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) \quad AC_3 \text{ D} \quad T_2$$

$$AC_1 \text{ D} \qquad AC_2 \text{ D} \qquad AC_3 \text{ A} \rightarrow R_0 = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_3}{2} \right) \quad T_3$$

Observemos que el actuador AC_1 ha tomado el parámetro $P_0^* \in \mathfrak{R}$. Llamaremos secuencias combinadas de orden 1, cuando exista uno y sólo un actuador que tome el complemento angular de su respectivo parámetro. A continuación se muestra la secuencia combinada de orden 1 caracterizada anteriormente. Esto es,

SC ^{F1M23}
R1

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	0	0
T ₂	0	1	0
T ₃	0	0	1

Descripción :

“ Secuencia combinada de la familia 1 con el actuador AC_2 activado en el tiempo T_2 , y el actuador AC_3 activado en el tiempo T_3 con sub-reflexión en AC_1 “.

Las secuencias combinadas de orden dos se caracterizan cuando dos actuadores han tomado los complementos angulares de los parámetros respectivos, una secuencias combinada de orden 2 se muestra a continuación:

SC ^{F2M13}
R12

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	-1	0
T ₂	-1	0	0
T ₃	0	0	1

Descripción :

“ Secuencia combinada de la familia 2 con el actuador AC_1 activado en el tiempo T_2 , y el actuador AC_3 activado en el tiempo T_3 con sub-reflexión en AC_1 y AC_2 “.

Observemos que de acuerdo a [2.5], existen para las secuencias uno a uno, dos puntos intermedios, en las figuras 1.12 Y 1.13 se muestran los puntos intermedios asociados a la secuencia real SR^{F1M23} . Las ecuaciones [1.46] y [1.49] modelan las posiciones de las configuraciones intermedias de esta secuencia. La caracterización de las secuencias uno a uno, nos permite encontrar secuencias de multicuerpos más complejos. A continuación se muestra una secuencia del robot compuesto MARIANNE III, mostrado en la portada del apéndice A. Esto es,

SCRC^{F1M24589367}
R1URP R13579

AC_1	AC_2	AC_3	AC_4	AC_5	AC_6	AC_7	AC_8	AC_9	T
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	T_1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	T_2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	T_3
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	T_4
0	0	0	0	0	0	0	1	0	T_5
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	T_6
0	0	-1	0	0	0	0	0	0	T_7
0	0	0	0	0	1	0	0	0	T_8
0	0	0	0	0	0	-1	0	0	T_9

Descripción:

Secuencia combinada del robot compuesto, de la familia 1 con accionamiento en el tiempo T_2 del actuador 2, en $T_3 \rightarrow AC_4$, $T_4 \rightarrow AC_5$, $T_5 \rightarrow AC_8$, $T_6 \rightarrow AC_9$, $T_7 \rightarrow AC_3$, $T_8 \rightarrow AC_6$, $T_9 \rightarrow AC_7$ con sub-reflexión en los actuadores AC_1 , AC_3 , AC_5 , AC_7 y AC_9 .

2.1.2 Movimientos simultáneos.

En esta parte, caracterizaremos los movimientos simultáneos de los robots de 2 y 3 GDL mostrados en las figuras 2.1 y 1.9. Los movimientos simultáneos son utilizados para realizar operaciones complejas en los procesos de manufactura, tal es el caso de la aplicación de soldaduras y procesos de pintado utilizando robots industriales[24].

Observemos que las secuencias simultáneas son aquellas donde al menos existe una pareja de actuadores activados en un mismo tiempo. A continuación caracterizaremos las secuencias simultáneas asociadas al multicuerpo mostrado en la figura 2.1. Sean $P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$ los parámetros de rotación asociados a la configuración deformada del multicuerpo en estudio, mostrada en 2.1. Definamos ahora, una secuencia simultánea asociada al multicuerpo de 2GDL motivo de nuestro estudio. Esto es,

$$AC_1 \ A \rightarrow P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2} \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2} \quad T_1.$$

Supongamos que la siguiente igualdad es satisfecha:

$$P_0 = Q_0, \quad [2.7]$$

entonces la representación de la secuencia definida anteriormente es la siguiente:

SRS^{F0C1}

F_0	AC_1	AC_2
T_1	1	1

La secuencia SRS^{F0C1} representa para nosotros, “la secuencia real simultánea de la familia 0 clase 1.”

Observemos que la familia 0 representa la igualdad [2.7]. La clase se refiere a la activación de los dos actuadores en el tiempo T_1 , en este caso para el multicuerpo mostrado en 2.1, la clase (C_1) es fija. Supongamos ahora, que la desigualdad siguiente es satisfecha. Esto es,

$$P_o > Q_o, \quad (P_o^>) \quad [2.8]$$

Describiremos a continuación una secuencia simultánea asociada a la desigualdad [2.8].

$$AC_1 \ A \rightarrow P_o^> = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} \quad T_1.$$

La nomenclatura y el código asociado a esta secuencia son los siguientes:

SRS^{F1C1}

$P_o^>$	AC_1	AC_2
T_1	1	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 1 clase 1”

Notemos que el código binario de la secuencia **SRS^{F1C1}** es igual al código de la secuencia

SRS^{F0C1}, en este caso, incluiremos en el código de la secuencia **SRS^{F1C1}** la

representación $P_o^>$ para mostrar la diferencia entre estas dos secuencias. La familia 1, corresponde a todas las secuencias que estén gobernadas por la desigualdad [2.8].

La desigualdad siguiente, caracteriza la familia 2 de las secuencias simultánea. Esto es,

$$P_o < Q_o, \quad (Q_o^>) \quad [2.9]$$

La secuencia real simultánea asociada a la familia 2 se describe a continuación:

$$AC_1 \quad A \rightarrow P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$$

$$AC_2 \quad A \rightarrow Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$$

T_1 .

La representación de esta secuencia es la siguiente:

SRS^{F2C1}

Q_0^*	AC_1	AC_2
T_1	1	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 2 clase 1”

Observemos que las secuencias reales simultáneas clase 1 asociadas al multicuerpo mostrado en 2.1, no contienen puntos intermedios.

2.1.2.1 Reflexiones simultáneas.

En esta parte, caracterizaremos otras secuencias simultáneas asociadas al multicuerpo mostrado en 2.1. Sean $P_0^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ y $Q_0^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$ los complementos angulares de los parámetros $P_0, Q_0 \in \mathbb{R}$ en torno a una rotación completa. Llamaremos reflexión simultánea de la familia 0 clase 1, aquellas secuencias que cumplan con la igualdad siguiente:

$$P_0^* = Q_0^*, \quad [2.10]$$

La reflexión simultánea arriba descrita, es representada a través del código siguiente:

RS^{F0C1}

F_0	AC_1	AC_2
T_1	-1	-1

Las reflexiones faltantes nosotros las caracterizaremos bajo las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} P_o^* > Q_o^*, & \quad (P_o^{*\triangleright}) \\ Q_o^* > P_o^*, & \quad (Q_o^{*\triangleright}) \end{aligned} \quad [2.11]$$

A continuación presentamos las representaciones de las reflexiones de la familia 1 y la familia 2 clase 1 respectivamente. Esto es,

RS^{F1C1}

$P_o^{*\triangleright}$	AC_1	AC_2
T_1	-1	-1

RS^{F2C1}

$Q_o^{*\triangleright}$	AC_1	AC_2
T_1	-1	-1

2.1.2.2 Secuencias combinadas simultáneas.

Consideremos las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} P_o^* > Q_o, & \quad (P_o^{*\triangleright}) \\ Q_o^* > P_o, & \quad (Q_o^{*\triangleright}) \end{aligned} \quad [2.12]$$

Las secuencias combinadas simultáneas se caracterizan mediante la activación de un actuador que tome el parámetro P_o^* ó Q_o^* . A continuación describiremos tales secuencias. Esto es,

SCS^{F1C1}
R1

$P_o^{*\triangleright}$	AC_1	AC_2
T_1	-1	1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 1 clase 1 con sub-reflexión en AC_1 ”.

SCS ^{F2C1}
R2

Q_0	AC_1	AC_2
T_1	1	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 2 clase 1 con sub-reflexión en AC_2 ”.

Notemos, que al igual que las secuencias reales simultáneas, las reflexiones y secuencias combinadas no contienen puntos intermedios. La trayectorias descritas por los movimientos uno a uno y los movimientos simultáneos se muestran en la figura 2.6.

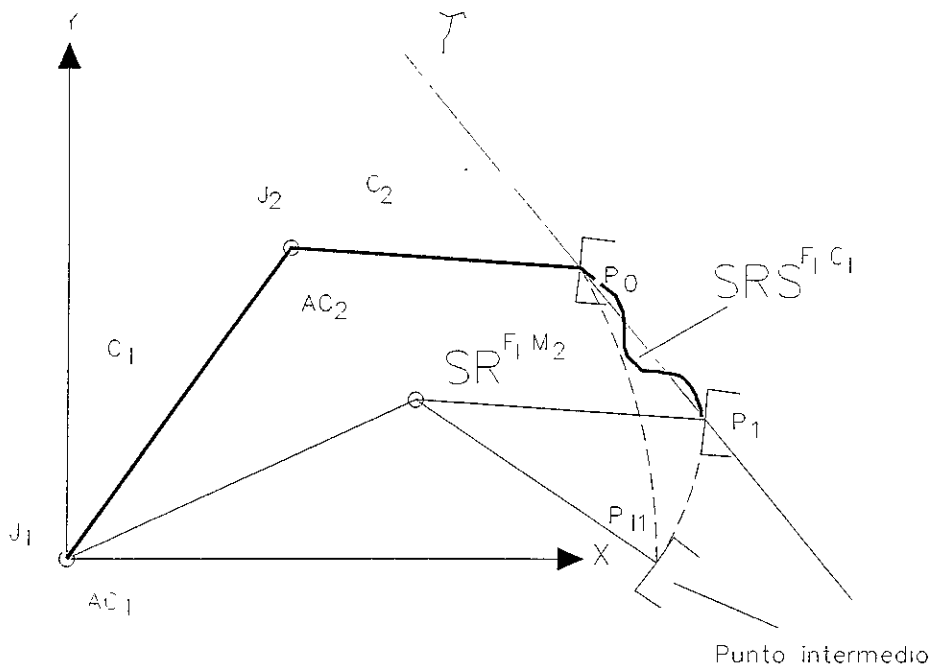


Figura 2.6 Trayectorias de las secuencias $SR^{F_1 M_2}$ y $SRS^{F_1 C_1}$.

2.1.2.3 Ecuaciones que gobiernan los movimientos simultáneos.

En esta parte, caracterizaremos las ecuaciones que gobiernan el número máximo de movimientos simultáneos, asociados al multicuerpo mostrado en la figura 2.1. Al igual que en los movimientos uno a uno, las secuencias simultáneas tienen relación directa con el grado de libertad. Esto es,

$$N_{TSS}=n(n+1)+K. \quad [2.13]$$

La ecuación [2.13] representa para nosotros, la ecuación general de los movimientos simultáneos para un manipulador de 2GDL. Aquí, N_{TSS} representa el número total de secuencias simultáneas de la clase 1, n el grado de libertad, y el factor K siempre fijo, representa las secuencias simultáneas de la clase 0. En el caso de las secuencias simultáneas asociadas a un robot de 2GDL como el mostrado en 2.1, las siguientes igualdades son satisfechas:

$$N_{TSRS} = N_{TRS} = N_{TSCS} = N_{TSSF0} \quad [2.14]$$

La ecuación [2.14] es válida debido a que las secuencias simultáneas asociadas al multicuerpo en estudio, son de la clase 1 fija. En este caso, N_{TSRS} corresponde al número de secuencias simultáneas reales, N_{TRS} es el número de reflexiones, N_{TSCS} es el número de secuencias combinadas simultáneas y N_{TSSF0} son las secuencias de la familia 0. Observemos que las secuencias de la familia 0 satisfacen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} P_o &= Q_o, & (\text{si es la secuencia simultánea real}) & & [2.15] \\ P_o^* &= Q_o^*, & (\text{si es la reflexión simultánea real}) & & \end{aligned}$$

Las clases y las familias también dependen del grado de libertad. Esto es,

$$\begin{aligned} N_{TC} &= n - 1 & [2.16] \\ N_{TF} &= n + 1 \end{aligned}$$

Aquí, N_{TC} corresponde al número total de clases y N_{TF} es el número de familias (incluyendo la familia de la clase 0). En las secuencias simultáneas asociadas al robot mostrado en la figura 2.1, no existen puntos intermedios.

A continuación describiremos el problema directo asociado a las secuencias simultáneas.

2.1.2.4 El problema directo de las secuencias simultáneas.

En esta parte, definiremos el problema directo de los movimientos simultáneos, asociados al multicuerpo mostrado en la figura 2.1. Consideremos entonces el problema siguiente:

“Dados $R(p_{ot}) \in \mathbb{R}^2$, $R(p_{ot})' \in \mathbb{R}^2$, $P_o = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_o = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$, $P_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$, $Q_o^* = \pm \cos \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$, encuentre N_{TSS} , N_{TSRS} , N_{TSR} , N_{TSCS} , N_{TF0} , N_{TC} , tal que [2.13], [2.14] y [2.16] sean satisfechas y

$$\begin{array}{ll}
 P_o = Q_o, & P_o^* = Q_o^*, \\
 P_o > Q_o, & Q_o > P_o, \\
 P_o^* > Q_o^*, & Q_o^* > P_o^*, \\
 P_o^* > Q_o, & Q_o^* > P_o.
 \end{array} \quad [2.17]$$

El problema de las secuencias simultáneas es resuelto solucionando las ecuaciones algebraicas [2.13], [2.14] y [2.16], en este caso para $n=2$. Observese que $p_{ot}=p_o$.

2.1.2.5 Secuencias simultáneas de un robot tipo RRR.

En esta parte, caracterizaremos algunos movimientos secuenciados del multicuerpo mostrado en la figura 1.9. El objetivo principal en esta parte, es el de agregar a la ecuación [2.13] un término que caracterice las secuencias de la clase 1 modificadas.

Una condición única y suficiente para caracterizar las secuencias reales simultáneas de la familia 0, es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 P_0 = Q_0 = R_0, & \quad (\text{secuencias reales}) & \quad [2.18] \\
 P_0^* = Q_0^* = R_0^*, & \quad (\text{reflexiones})
 \end{aligned}$$

La condición [2.18] caracteriza las secuencias simultáneas de la familia 0 y las secuencias de la clase 2 respectivamente. En este caso, la clase 2 corresponde a la activación de los actuadores AC_1 , AC_2 y AC_3 en el tiempo 1, mostrados en la figura 1.9. El hecho de que exista clase 2 en los movimientos simultáneos, corresponde a sustituir $n=3$ en la ecuación [2.16]. Observemos que las consecuencias de la ecuación [2.16] nos permite determinar que existen secuencias simultáneas de la clase 1 y de la clase 2. A continuación se muestran las secuencias simultáneas de la clase 2 familia 0. Esto es,

SRS^{F0C2}

F_0	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	1	1	1

$$AC_1 \ A \rightarrow P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2} \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2} \quad AC_3 \ A \rightarrow R_0 = \pm \cos \frac{\alpha_3}{2} \quad T_1.$$

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 0 clase 2”.

La reflexión de la clase 2 familia 0 es la siguiente:

RS^{F0C2}

F_0	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	-1	-1	-1

Otras condiciones únicas y suficientes para caracterizar las secuencias reales simultáneas y las reflexiones de las familias 1,2 y 3 clase 2, son las siguientes:

$P_o > Q_o, R_o$ (secuencias reales simultáneas) [2.19]

$Q_o > P_o, R_o$

$R_o > P_o, Q_o$

$P_o^* > Q_o^*, R_o^*$ (reflexiones simultáneas)

$Q_o^* > P_o^*, R_o^*$

$R_o^* > P_o^*, Q_o^*$

Mostraremos ahora, algunas secuencias simultáneas asociadas a las desigualdades [2.19].

Esto es,

SRS^{F3C2}

R_o	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	1	1	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 3 clase 2”.

RS^{F2C2}

Q_o	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	-1	-1	-1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 2 clase 2”.

RS^{F1C2}

P_o	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	-1	-1	-1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 1 clase 2”.

2.1.2.5.1 Secuencias combinadas simultáneas orden 1 clase 2.

En esta parte, caracterizaremos algunas secuencias combinadas simultáneas de la clase 2 orden 1. Las restricciones asociadas a este tipo de secuencias son las siguientes:

$$P_0^* > Q_0, R_0 \text{ (secuencias combinadas simultáneas) [2.20]}$$

$$Q_0^* > P_0, R_0$$

$$R_0^* > P_0, Q_0.$$

A continuación se muestran dos secuencias de este tipo. Esto es,

SCS ^{F3C2}
R3

R_0^*	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	1	1	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 3 clase 2, con sub-reflexión en AC_3 ”.

SCS ^{F1C2}
R1

P_0^*	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	-1	1	1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 1 clase 2, con sub-reflexión en AC_1 ”.

2.1.2.5.2 Secuencias combinadas simultáneas clase 2 orden 2.

En el caso de las secuencias combinadas simultáneas clase 2 orden 2, las desigualdades siguientes deberán ser satisfechas. Esto es,

$$\begin{aligned} P_o < Q_o^*, R_o^* & \quad [2.21] \\ Q_o < P_o^*, R_o^* \\ R_o < P_o^*, Q_o^*. \end{aligned}$$

A continuación se muestran dos secuencias combinadas simultáneas clase 2 orden 2.

SCS ^{F2C2}
R13

Q_o^*	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	1	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 2 clase 2 orden 2, con sub-reflexión en AC₁ y AC₃”.

SCS ^{F3C2}
R12

R_o^*	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	-1	1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 3 clase 2 orden 2, con sub-reflexión en AC₁ y AC₂”.

2.1.2.5.3 Secuencias simultáneas clase 1.

En esta parte, caracterizaremos otras secuencias de movimiento asociadas al multicuerpo mostrado en 1.9. Describiremos ahora, la secuencia siguiente:

$$AC_1 \ A \rightarrow P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} \quad AC_2 \ D \quad AC_3 \ D \quad T_1.$$

$$AC_1 \ D \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} \quad AC_3 \ A \rightarrow R_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2} \quad T_2.$$

La representación de la secuencia arriba descrita, se presenta a continuación:

SRS^{F1C1T2}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	1	0	0
T ₂	0	1	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 1 clase 1 en T₂.”

Observemos que para estas secuencias existen dos tiempos de activación de los actuadores mostrados en 1.9. Una característica en este tipo de movimientos, es que existe un punto intermedio. Notemos que al activar el actuador AC₁ A → P_o = ±

Cos $\frac{\alpha_1}{2}$ en el tiempo T₁, el primer sub-movimiento es de un grado de libertad y el segundo sub-movimiento es de dos grados de libertad. La ecuación que gobierna al primer sub-movimiento es [1.46], que a continuación se escribe:

$$\underline{R}(p_{ot})' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ P * q * p * \underline{e}_2 * \overline{(P * q * p)} \} \\ + I_3 \{ P * r * q * p * \underline{e}_3 * \overline{(P * r * q * p)} \}.$$

Mostraremos a continuación otras secuencias clase 1 en el tiempo T_2 . Esto es,

SRS^{F2C1T2}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	1	0
T ₂	1	0	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 2 clase 1 en T_2 .”

SRS^{F3C1T2}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	0	1
T ₂	1	1	0

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 3 clase 1 en T_2 .”

RS^{F2C1T2}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	-1	0
T ₂	-1	0	-1

Descripción:

“Reflexión simultánea de la familia 2 clase 1 en T_2 .”

RS^{F3C1T2}

	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	0	0	-1
T_2	-1	-1	0

Descripción:

“Reflexión simultánea de la familia 3 clase 1 en T_2 .”

En este caso, la familia se obtiene al conocer el actuador que realiza el sub-movimiento de un grado de libertad.

Analizemos ahora, una secuencia clase 1 tiempo T_1 . Esto es,

SRS^{F3C1T1}

	AC_1	AC_2	AC_3
T_1	1	1	0
T_2	0	0	1

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 3 clase 1 en T_1 .”

En este caso, el movimiento de un grado de libertad se observa en el tiempo T_2 .

La ecuación que caracteriza al punto intermedio de la secuencia en estudio, es [1.49], que a continuación se escribe:

$$\mathbb{R}(p_{ot})'' = I_1 \{ P * p * \underline{e}_3 * \overline{P * p} \} + I_2 \{ Q * P * q * p * \underline{e}_2 * (\overline{Q * P * q * p}) \} \\ + I_3 \{ Q * P * r * q * p * \underline{e}_3 * (\overline{Q * P * r * q * p}) \}.$$

Otras secuencias clase 1 en el tiempo T_1 son las siguientes:

SRS ^{F1C1T1}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	1	1
T ₂	1	0	0

Descripción:

“Secuencia real simultánea de la familia 1 clase 1 en T₁.”

RS ^{F1C1T1}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	-1	-1
T ₂	-1	0	0

Descripción:

“Reflexión simultánea de la familia 1 clase 1 en T₁.”

2.1.2.5.4 Secuencias combinadas simultáneas clase 1, orden 1 y orden 2.

En esta parte, caracterizaremos las secuencias combinadas clase 1 orden 1 asociadas al multicuerpo mostrado en 1.9. Describiremos ahora, la secuencia siguiente:

$$AC_1 \ A \rightarrow P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \quad AC_2 \ D \quad AC_3 \ D \quad T_1.$$

$$AC_1 \ D \quad AC_2 \ A \rightarrow Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2} \quad AC_3 \ A \rightarrow R_0 = \pm \cos \frac{\alpha_3}{2} \quad T_2.$$

La representación de la secuencia arriba descrita, se presenta a continuación:

SCS ^{F1C1T2}
R1

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	0	0
T ₂	0	1	1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 1 clase 1 en T₂, con sub-reflexión en AC₁, orden 1”

Observemos que el punto intermedio asociado a esta secuencia, es el mismo que el de la secuencia **SRS** ^{F1C1T2}.

Mostraremos ahora, una secuencia de la clase 1 en T₂ de orden 2. Esto es,

SCS ^{F1C1T2}
R23

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	1	0	0
T ₂	0	-1	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 1 clase 1 en T₂, con sub-reflexión en AC₂ y AC₃, orden 2”

Caracterizemos ahora, otra secuencia de interés. Esto es,

SCS ^{F2C1T2}
R13

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	0	1	0
T ₂	-1	0	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 2 clase 1 en T₂, con sub-reflexión en AC₁ y AC₃, orden 2”

Finalmente caracterizaremos las secuencias combinadas clase 1 en T₁ orden 1 y 2. La secuencia **SCS** ^{F2C1T1}_{R1} corresponde a la familia 2 de las secuencia combinadas orden 1 en

T₁. La representación y descripción en código binario se presenta a continuación:

SCS ^{F2C1T1}
R1

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	-1	0	1
T ₂	0	1	0

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 2 clase 1 en T₁, con sub-reflexión en AC₁, orden 1”.

Presentaremos ahora, una secuencia de especial interés. Esto es,

SCS ^{F3C1T1}
R23

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	1	-1	0
T ₂	0	0	-1

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea de la familia 3 clase 1 en T₁, con sub-reflexión en AC₂ y AC₃, orden 2”.

Con la sistematización de las secuencias simultáneas asociadas a los multicuerpos de cadena cinemática abierta, podemos caracterizar las secuencias de sistemas mecánicos más complejos. A continuación se muestra una secuencia combinada simultánea del robot compuesto MARIANNE III, mostrado en la portada del apéndice A. Esto es,

SCSRC ^{F1C42M279}
R1ORP R1359

AC ₁	AC ₂	AC ₃	AC ₄	AC ₅	AC ₆	AC ₇	AC ₈	AC ₉	T
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	T ₁
0	1	-1	1	-1	1	0	0	0	T ₂
0	0	0	0	0	0	1	1	0	T ₃
0	0	0	0	0	0	0	0	-1	T ₄

Descripción:

“Secuencia combinada simultánea del robot compuesto de la familia 1 con accionamiento en el tiempo 2 del actuador 2, Clase 4 en T₂ → AC₂, T₂ → AC₃, T₂ → AC₄, T₂ → AC₅, T₂ → AC₆, clase 1 en T₃, T₃ → AC₇, T₂ → AC₈ con sub-reflexión en los actuadores AC₁, AC₃, AC₅, AC₉.”

En este caso, R₁ es un robot PUMA 500, y RP es un robot paralelo planar tipo RRR.

2.1.2.5.5 Ecuaciones que gobiernan las secuencias simultáneas de un manipulador de 3GDL.

En esta parte, caracterizaremos las ecuaciones que gobiernan el número máximo de movimientos simultáneos, asociados al multicuerpo mostrado en la figura 1.9. Al igual que en los movimientos uno a uno, las secuencias simultáneas tienen relación directa con el grado de libertad. Esto es,

$$N_{TSS}=n(n+1)+K + 2(n+1)! \quad [2.22]$$

La ecuación [2.22] representa para nosotros, la ecuación general de los movimientos simultáneos para un manipulador de 3GDL. Al renombrar la ecuación [2.22] obtendremos los términos que otorgan las clases. Esto es,

$$N_{TSS}=C + K + D. \quad [2.23]$$

Aquí, "C" representa el número total de secuencias simultáneas de la clase 2, n el grado de libertad, el factor "K" de valor 2 siempre fijo, representa las secuencias simultáneas de la clase 0 y "D" representa el número de secuencias de la clase 1.

Los puntos intermedios asociados a las secuencias de la clase 1, están también relacionados con el grado de libertad. Esto es,

$$N_{TPI}=n-2. \quad [2.24]$$

Las clases, familias y la orden, se caracterizan a través de las ecuaciones siguientes:

$$N_{TC} = n-1 \quad [2.25]$$

$$N_{TF} = n+1 \quad [2.26]$$

$$N_{TOR} = n-1. \quad [2.27]$$

Aquí, N_{TPI} es el número de punto intermedios, N_{TC} las clases y N_{TOR} es el número de ordenes.

Observemos que en el caso de la ecuación [2.13], que corresponde al número máximo de secuencias simultáneas del robot de 2GDL, caracteriza el número de secuencias clase 1, en tanto en la ecuación [2.23], el término "C" caracteriza las secuencias de la clase 2. Notemos que no existe una ecuación general que determine el número total de secuencias simultáneas como en el caso de las secuencias uno a uno, esto se debe al número de clases.

A continuación describiremos el problema directo asociado a las secuencias simultáneas de un robot de 3GDL.

2.1.2.5.6 El problema directo de las secuencias simultáneas de un robot de 3GDL.

En esta parte, definiremos el problema directo de los movimientos simultáneos, asociados al multicuerpo mostrado en la figura 1.9. Consideremos entonces el problema siguiente:

"Dados $\underline{R}(p_{ot}) \in \mathfrak{R}^3$, $\underline{R}(p_{ot})' \in \mathfrak{R}^3$, $\underline{R}(p_{ot})''$, $\underline{R}(p_{ot})''' \in \mathfrak{R}^3$, $P_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_2}{2}$, $R_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3}{2}$, $P_o^* = \pm \text{Cos } (\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2})$, $Q_o^* = \pm \text{Cos } (\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2})$, $R_o^* = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_3 - 2\pi}{2}$, encuentre, el número total de secuencias simultáneas, las secuencias de la familia 0,1 2 3, los puntos intermedios, las clases, la orden, tal que [2.22], [2.24], [2.25], [2.26] y [2.27] sean satisfechas y

$$\begin{array}{ll}
 P_o = Q_o, & P_o^* = Q_o^*, \\
 P_o > Q_o, & Q_o > P_o, \\
 P_o^* > Q_o^*, & Q_o^* > P_o^*, \\
 P_o^* > Q_o, & Q_o^* > P_o.
 \end{array}
 \tag{2.28}$$

El problema de las secuencias simultáneas es resuelto solucionado las ecuaciones algebraicas [2.22], [2.24], [2.25], [2.26] y [2.27], en este caso para n=3.

Bajo este análisis, podemos establecer que para un manipulador de tres grados de libertad tipo RRR el número total de secuencias es de 112 secuencias (uno a uno y simultáneas), en este caso 5 de ellas (las secuencias reales simultáneas clase 2) son las que otorgan una trayectoria suave que permite realizar operaciones especiales, debemos tomar en cuenta que las reflexiones y las secuencias combinadas existen, si el sistema mecánico tiene una morfología que le permita realizar sub-reflexiones.

Una clase de robot inteligentes son aquellos que durante su operación de trabajo ocupa una secuencia real simultánea, y si dentro de su entorno existen obstáculos, entonces utilizará algunas de las 111 restantes secuencias para evadirlos.

***Aclaración:** se entiende que por secuencia simultánea, aquella donde al menos se activaron dos actuadores en un mismo tiempo.*

2.1.3 Movimientos Híbridos .

En esta parte, caracterizaremos los movimientos híbridos del manipulador de 2GDL mostrado en la figura 1.1. Los movimientos híbridos serán obtenidos mediante la combinación de movimientos de 1 y 2 grados de libertad.

2.1.3.1 Movimientos Híbridos de un robot de 2GDL.

En la primera parte de este capítulo, fueron definidos los movimientos híbridos. La secuencia 3 y 4 asociadas al multicuerpo mostrado en 1.1, corresponden a los movimientos híbridos. Observemos que tales movimientos son de 1 y 2 GDL. Caracterizemos ahora, el movimiento híbrido que corresponde a la secuencia 3 del robot de 2GDL motivo de nuestro estudio.

Sean $P_0 = \pm \cos \frac{\alpha_1}{2}$ y $Q_0 = \pm \cos \frac{\alpha_2}{2}$ los parámetros de rotación asociados a la configuración deformada mostrada en 1.3. Entonces la secuencia híbrida 3 se describe a continuación. Esto es,

$$\begin{array}{llll}
 AC_1 & \text{Activo} \rightarrow P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} & AC_2 & \text{Activo} \rightarrow P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2} & T_1 \\
 AC_1 & \text{Desactivo} & AC_2 & \text{Activo} \rightarrow S_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_3}{2} & T_2.
 \end{array}$$

Observemos que el parámetro $S_o \in \mathfrak{R}$, es tal que:

$$S_o = P_o \pm Q_o \quad [2.29]$$

Asociemos una nomenclatura y un código binario a la secuencia anteriormente descrita. Esto es,

SRH^{F1M2}

AC ₁	AC ₂	T
1	1	T ₁
0	1	T ₂

Descripción:

“ Secuencia real híbrida de la familia 1 con el actuador M₂ activado en T₂” .

En este caso, la familia se caracteriza por el actuador que realiza un sub-movimiento. Por ejemplo en la secuencia **SRH**^{F1M2} el actuador AC₁ se mantiene desactivo en el tiempo T₂.

Las secuencias híbridas al combinar los movimientos de 1 y 2 GDL, generan una y sólo una configuración intermedia. Observemos que la ecuación que gobierna la

posición intermedia de la secuencia **SRH**^{F1M2} es [1.24] que a continuación se escribe:

$$R(p_{ot})'_{s3} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ r * \underline{e}_1 * \bar{r} \}$$

siendo $r = P * q * p$.

La configuración intermedia de la secuencia SRH^{F1M2} se muestra en la figura b) de 1.6 . La configuración deformada del multicuerpo en estudio, mostrada en 1.6(c), es alcanzada desde la configuración intermedia a través de la ecuación [1.25] que a continuación se escribe:

$$\mathbb{R}(p_{ot})''_{s3} = l_1 \{ P * p * \underline{e}_1 * \overline{P * p} \} + l_2 \{ s * \underline{e}_1 * s \}$$

siendo $s = Q * r$.

Describiremos ahora, la secuencia real híbrida de la familia 2. Esto es,

SRH^{F2M1}

AC_1	AC_2	T
1	1	T_1
1	0	T_2

Descripción:

“ Secuencia real híbrida de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 ” .

Observemos que:

$$\begin{array}{llll}
 AC_1 & \text{Activo} \rightarrow Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} & AC_2 & \text{Activo} \rightarrow Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2} & T_1 \\
 AC_1 & \text{Activo} \rightarrow U_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_4}{2} & AC_2 & \text{Desactivo} & T_2.
 \end{array}$$

En este caso s es el parámetro $U_o \in \mathbb{R}$. Esto es,

$$U_o = Q_o \pm P_o \tag{2.30}$$

La ecuación que gobierna la posición intermedia de la secuencia SRH^{F2M1} es [1.26] que a continuación se escribe:

$$\underline{R}(p_{ot})'_{s4} = l_1 \{ t * \underline{e}_1 * \bar{t} \} + l_2 \{ Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{Q * q * p}) \}$$

siendo $t = Q * p$.

La configuración deformada mostrada en 1.7(C) es alcanzada por el movimiento de C_1 desde la posición intermedia $\underline{R}(p_{ot})'_{s4}$ mostrada en configuración b) de 1.7. La ecuación asociada a la configuración deformada de la secuencia SRH^{F2M1} es [1.27] que a continuación se escribe:

$$\underline{R}(p_{ot})''_{s4} = l_1 \{ u * \underline{e}_1 * \bar{u} \} + l_2 \{ P * Q * q * p * \underline{e}_1 * (\overline{P * Q * q * p}) \}$$

siendo $u = P * t$.

2.1.3.1.1 Reflexiones y secuencias combinadas híbridas.

En esta parte, caracterizaremos las secuencias combinadas y las reflexiones híbridas asociadas al multicuerpo mostrado en 1.1.

Sean $P_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ y $Q_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$ los parámetros complementarios de P_o , $Q_o \in \mathfrak{R}$ en relación de un giro completo. Entonces si los actuadores AC_1 y AC_2 toman el complemento P_o^* , $Q_o^* \in \mathfrak{R}$, diremos que existe una reflexión híbrida. En caso de los actuadores tomen una combinación de parámetros P_o^* , $Q_o \in \mathfrak{R}$ ó P_o , $Q_o^* \in \mathfrak{R}$, entonces diremos que se genera una secuencia combinada híbrida. A continuación se muestra una reflexión híbrida. Esto es,

RH^{F2M1}

AC_1	AC_2	T
-1	-1	T_1
-1	0	T_2

Descripción:

“ Reflexión híbrida de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 ” .

Mostraremos ahora, una secuencia combinada híbrida orden 1. Esto es,

$$SCH_{R1}^{F2M1}$$

AC_1	AC_2	T
-1	1	T_1
1	0	T_2

Descripción:

“ Secuencia combinada híbrida de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 con sub-reflexión en AC_1 ” .

Otra secuencia combinada híbrida de interés se muestra a continuación:

$$SCH_{R12}^{F2M1}$$

AC_1	AC_2	T
-1	-1	T_1
1	0	T_2

Descripción:

“ Secuencia combinada híbrida de la familia 2 con el actuador M_1 activado en T_2 con sub-reflexión en AC_1 y AC_2 orden 2” .

Observemos la secuencia siguiente:

$$SCH_{R11}^{F2M1}$$

AC ₁	AC ₂	T
-1	1	T ₁
-1	0	T ₂

Descripción:

“ Secuencia combinada híbrida de la familia 2 con el actuador M₁ activado en T₂ con doble sub-reflexión en AC₁ orden 2” .

Finalmente mostraremos otra secuencia híbrida asociada al multicuerpo mostrado en la figura 1.1. Esto es,

$$SCH_{R22}^{F1M2}$$

AC ₁	AC ₂	T
1	-1	T ₁
0	-1	T ₂

Descripción:

“ Secuencia combinada híbrida de la familia 1 con el actuador M₂ activado en T₂ con doble sub-reflexión en AC₂ orden 2” .

2.1.3.1.2 Ecuaciones que gobiernan las secuencias híbridas de un robot de 2GDL.

En esta parte, formularemos la ecuación que gobierna en número total de secuencias híbridas asociadas al multicuerpo mostrado en 1.1.

El número de secuencias híbridas, también tiene relación directa con el grado de libertad. Esto es,

$$N_{TSH} = 2n! + 2(n+1) \quad [2.31]$$

Aquí, N_{TSH} corresponde al número total de secuencias híbridas y “n” es el grado de libertad. Al expandir la ecuación [2.31], obtendremos los resultados siguientes:

$$N_{TSH} = n! + n! + 2(n+1) \quad [2.32]$$

Renombremos ahora la ecuación [2.32]. Esto es,

$$N_{TSH} = G + H + J \quad [2.33]$$

En este caso, “G” es el número de secuencias reales híbridas, “H” corresponde al número de reflexiones y “J” es el número de secuencias combinadas híbridas de orden 1 y 2. Los puntos intermedios, la orden y las familias son caracterizados por las ecuaciones siguientes:

$$N_{TPI} = n - 1 \quad [2.34]$$

$$N_{TF} = n \quad [2.35]$$

$$N_{TOR} = n \quad [2.36]$$

A continuación formularemos el problema directo de las secuencias híbridas asociadas al multicuerpo mostrado en 1.1.

2.1.3.1.3 El problema directo de las secuencias híbridas.

En esta parte, definiremos el problema directo de los movimientos híbridos, asociados al multicuerpo mostrado en la figura 1.1. Consideremos entonces el problema siguiente:

“Dados $R(p_{ot}s_3) \in \mathfrak{R}^2$, $R(p_{ot}s_3') \in \mathfrak{R}^2$, $R(p_{ot}s_3'') \in \mathfrak{R}^2$, $R(p_{ot}s_4) \in \mathfrak{R}^2$, $R(p_{ot}s_4') \in \mathfrak{R}^2$, $R(p_{ot}s_4'') \in \mathfrak{R}^2$, $P_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_1}{2}$, $Q_o = \pm \text{Cos} \frac{\alpha_2}{2}$, $P_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$, $Q_o^* = \pm \text{Cos} \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$, encuentre N_{TSH} , N_{TF} ,

N_{TPI} , N_{TSCS} , N_{TOR} , tal que [2.31], [2.34], [2.35] y [2.36] sean satisfechas y

$$\begin{array}{ll}
P_o = Q_o, & P_o^* = Q_o^*, \\
P_o > Q_o, & Q_o > P_o, \\
P_o^* > Q_o^*, & Q_o^* > P_o^*, \\
P_o^* > Q_o, & Q_o^* > P_o.
\end{array}
\tag{2.37}$$

2.1.4 Espejo de la configuración no deformada del robot tipo RR.

La configuración espejo se observa en la figura 2.7, y es caracterizada por una reflexión. Esto es,

La transformación $\rho(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, con $p \in \mathfrak{R}^2$ fijo definida por:

$$\rho(p, q) = \frac{1}{\|p\|} p * q \quad , \quad \forall q \in \mathfrak{R}^2.
\tag{2.38}$$

es una rotación en \mathfrak{R}^2 [9] siendo $p, q \in \mathfrak{R}^2$ números complejos, también la transformación $R(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, con $p \in \mathfrak{R}^2$ fijo, definida por:

$$R(p, q) = \frac{1}{\|p\|} \overline{p * q} \quad , \quad \forall q \in \mathfrak{R}^2.
\tag{2.39}$$

es una reflexión en \mathfrak{R}^2 .

La ecuación de la posición no deformada del robot R_o mostrado en 2.7, es la siguiente:

$$R(x) = l_1 \bullet T_V \rho(p, e_j) + l_2 \bullet T_V \rho(q, \rho(p, e_j))
\tag{2.40}$$

La configuración espejo se alcanza al aplicar la transformación [2.39] a [2.40]. Esto es,

$$R(x) = l_1 \bullet T_V R(p, e_j) + l_2 \bullet T_V R(q, R(p, e_j)).
\tag{2.41}$$

Es importante señalar que las transformaciones anteriores no contienen información sobre el eje de la rotación, en este caso nosotros las utilizaremos para aspectos demostrativos de la configuración espejo.

La configuración espejo para un robot de tres grados de libertad puede ser alcanzada dependiendo de las juntas del robot, por ejemplo, para un robot tipo RRR con ejes definidos en las direcciones (Z,X,X) la configuración espejo se presenta sobre el plano de rotación de los eslabones 2 y 3, esto es por lo arquitectura del robot, sin embargo, si las juntas fueran esféricas, entonces la configuración espejo se alcanzaría de forma infinita. La configuración espejo será usada en el capítulo III para generar los criterios de evasión de obstáculos.

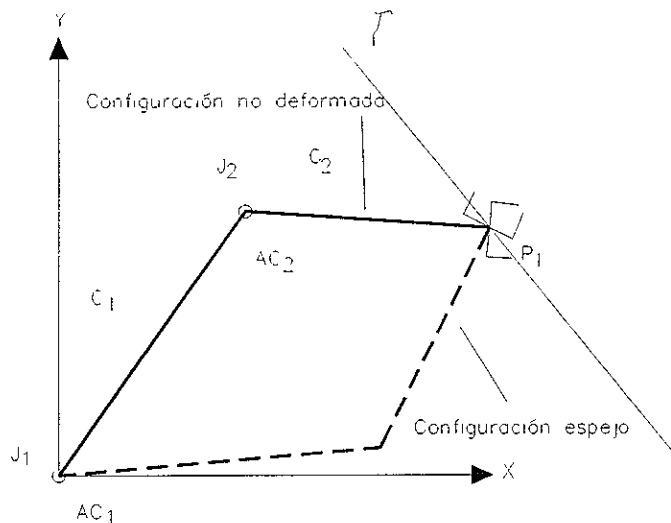
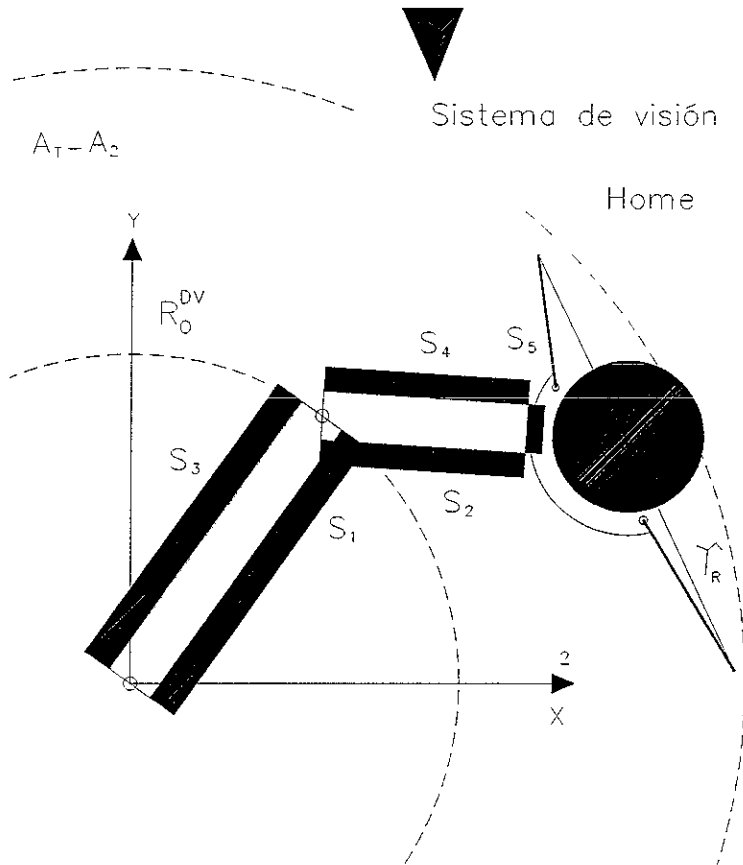


Figura 2.7 Configuración espejo en la posición no deformada.

Aclaración: Entenderemos por "reflexión", a toda transformación ortogonal cuyo determinante es -1 . En el caso de las nomenclaturas y códigos binarios asociados a las secuencias, la palabra reflexión ó sub-reflexión se refiere a los giros complementarios que realizan los actuadores.

CAPÍTULO III

“ROBOTS CLASE II”



$$SC_{R2} \xRightarrow{F2M1} SRS \xRightarrow{F1C1} SCH_{R11} \xRightarrow{F2M1}$$

$$SCH_{R11} \xRightarrow{F2M1}$$

AC_1	AC_2	T
-1	1	T_1
-1	0	T_2

Secuencias de evasión, “Sistema MARIANNE IV”.

CAPÍTULO III

3 ROBOTS CLASE II

3.1 Introducción.

En este capítulo, desarrollaremos el marco teórico de la evasión de obstáculos, utilizando para nuestros propósitos el robot de 2GDL mostrado en la figura 2.1. Los robots clase II son definidos en el apéndice A y corresponden a los multicuerpos de cadena cinemática abierta que reconocen parte del entorno que les rodea. En el capítulo I, se desarrollaron los modelos matemáticos de los robots clase I, el multicuerpo que utilizaremos en este capítulo, será llamado R_o . El robot R_o será dimensionado con el objetivo de utilizar las fronteras para la caracterización de la condición de impacto real $R_o^D \cap O_i \neq \phi$, en este caso, R_o^D será llamado el robot R_o dimensionado. Posteriormente caracterizaremos el impacto virtual $R_o^{DV} \cap O_i \neq \phi$ mediante sensores asociados a las fronteras del robot dimensionado (R_o^D), en este caso, R_o^{DV} representa al robot dimensionado con expansión virtual que cumple con la condición $R_o^D \cup S = R_o^{DV}$, donde "S" es el conjunto de sensores. Este capítulo está dividido en tres partes, la primera de ellas corresponde a la caracterización del marco teórico utilizando al robot R_o y un obstáculo con características circulares. En la segunda parte, se generarán los teoremas y corolarios respecto a las condiciones $R_o^D \cap O_i \neq \phi$ y $R_o^{DV} \cap O_i \neq \phi$. Finalmente en la tercera parte, se formularán los criterios de evasión y se generarán tres problemas de evasión de obstáculos. Utilizaremos a lo largo de este capítulo, la sistematización de las secuencias de movimientos desarrollada en el capítulo II.

3.2 El marco teórico de la evasión de obstáculos. Parte I. Condición $R_0 \cap O_i \neq \emptyset$.

En esta parte, desarrollaremos el marco teórico de la evasión de obstáculos en el entorno de dos grados de libertad, el cual también puede ser utilizado para un manipulador de tres grados de libertad, utilizaremos el multicuerpo mostrado en la figura 2.1 a lo largo de este capítulo.

Para el desarrollo de esta parte, plantearemos el análisis siguiente:

- 1 Análisis sin obstáculos en el área de trabajo de R_0 .
- 2 Análisis con obstáculo en el área de trabajo de R_0 .

3.2.1 Análisis sin obstáculos en el área de trabajo del multicuerpo R_0 .

En esta parte, caracterizaremos el área de trabajo del multicuerpo mostrado en la figura 2.1, utilizaremos la condición siguiente:

$$l_1 > l_2 \quad [3.1]$$

Aquí, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^+$ son las longitudes principales de los cuerpos que componen a R_0 motivo de nuestro estudio. Caractericemos ahora el área de trabajo de R_0 tomando en cuenta la condición [3.1]. Esto es,

Sea A_1 el conjunto de puntos acotados por la inecuación siguiente:

$$X^2 + Y^2 \leq (l_1 - l_2)^2 \quad [3.2]$$

Aquí, (X, Y) es un sistema cartesiano localizado en la junta J_1 mostrada en la figura 3.1. Sea también A_2, A_3, A_4 y A_5 las áreas definidas de la forma siguiente:

$$A_2 \rightarrow X^2 + Y^2 \leq (l_1)^2. \quad [3.3]$$

$$A_3 \rightarrow (X - h)^2 + (Y - k)^2 \leq (l_2)^2.$$

$$A_4 \rightarrow X^2 + Y^2 \leq (l_1 + l_2)^2.$$

$$A_5 \rightarrow A_4^C.$$

Aquí, (h,k) son las coordenadas del centro de la circunferencia asociada a A_3 , $A_4^C = A_5$ es el complemento de A_4 . El área de trabajo del multicuerpo mostrado en la figura 2.1 se define de la forma siguiente:

$$A_T = A_4 - A_1 \quad [3.4]$$

El área de trabajo de R_o se muestra en la figura 3.1. Definamos ahora una trayectoria de trabajo contenida en A_T . Esto es,

$$\tau = \{(L_{po}, t) \mid L_{po} \in R_{ot}, t \in \mathcal{R}^+\} \quad [3.5]$$

siendo L_{po} el lugar geométrico que ocupa el punto final del órgano terminal mostrado en 3.1. La órbita asociada a la trayectoria τ se define de la forma siguiente:

$$f : \varepsilon \times \mathcal{R}^+ \rightarrow \tau \quad [3.6]$$

$$x = t$$

$$y = mt + b.$$

En este caso, la órbita mostrada en 3.1, es una recta de pendiente "m" y ordenada "b".

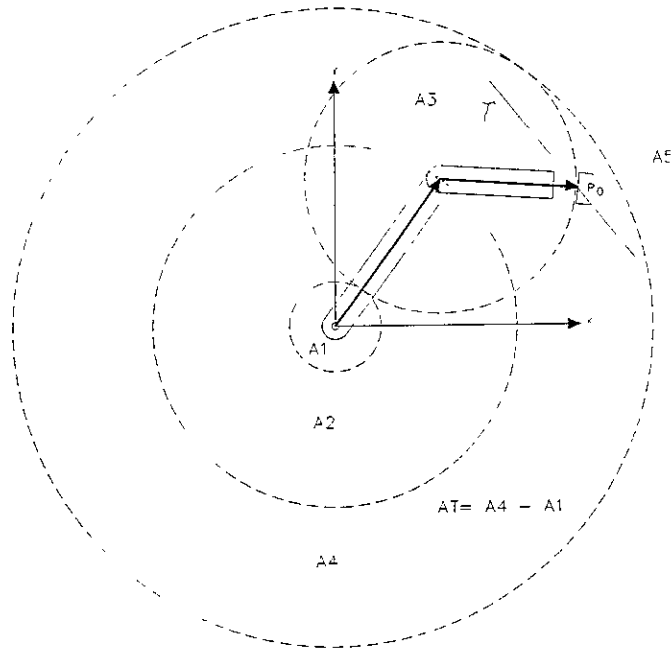


Figura 3.1 Área de trabajo del manipulador tipo RR.

A continuación definiremos dos rectas asociadas a los eslabones C_1 y C_2 que componen al multicuerpo en estudio. Esto es,

$$\begin{aligned}
 l_1' &= \{ p_1 + \alpha_1 \underline{L}_1 \mid \alpha_1 \in \mathfrak{R}^+, \alpha_1 = l_1 \in \mathfrak{R}^+, \text{ y } p_1 \in J_1, & [3.7] \\
 l_2' &= \{ p_2 + \alpha_2 \underline{L}_2 \mid \alpha_2 \in \mathfrak{R}^+, \alpha_2 = l_2 \in \mathfrak{R}^+, \text{ y } p_2 \in J_2.
 \end{aligned}$$

En este caso, l_1' y $l_2' \in L$ donde L es el conjunto de rectas. Sea "O" = $\{O_i\}_{i \in K}$ un obstáculo descrito como un conjunto conectado en \mathfrak{R}^2 , entonces diremos que el obstáculo no se encuentra en el área de trabajo si:

$$\text{"O"} \not\subset A_4. \tag{3.8}$$

También [3.8] equivale a "O" $\in A_5$.

3.2.2 Análisis con obstáculo en el área de trabajo de R_o .

En esta parte, consideraremos la condición siguiente:

$$"O" \subset A_4 \quad [3.9]$$

y representa al obstáculo contenido en el área de trabajo de R_o .

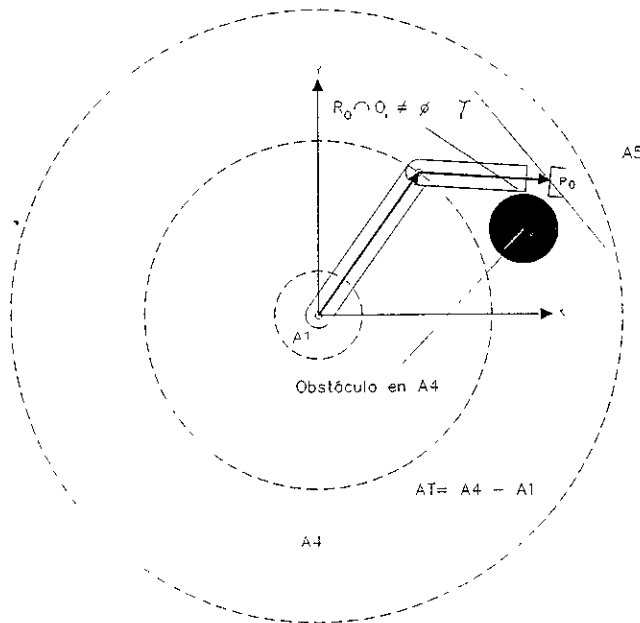


Figura 3.2 Obstáculo en el área de trabajo de R_o .

Observemos que si " O " $\subset A_4$, entonces es posible que se presente la condición siguiente:

$$R_o \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.10]$$

La condición [3.10] mostrada en 3.2, representa para nosotros, colisión ó impacto del robot R_o y el obstáculo " O_i ", en este caso, " O_i " son todos los posibles obstáculos tales que: " O " $\subset A_4$. A continuación caracterizaremos al obstáculo " O_i " localizado en el área A_4 . Esto es,

3.2.2.1 Caracterización del impacto real $R_o \cap O_i \neq \emptyset$.

Sea R_P el conjunto de todos los puntos de coordenadas $(x', y')^T \in \mathbb{R}^2$ tal que pertenezcan a las rectas l_1' y $l_2' \in L$ asociadas a los cuerpos C_1 y C_2 respectivamente.

Sea también $O = \{O_i\}_{i \in K}$ un obstáculo descrito como un conjunto conectado en \mathbb{R}^2 que se encuentra en la región A_4 , ver figura 3.2.

Definición 3.2.2.1 Sea el conjunto

$$V_R(O_i) = \{ \underline{R}(x) \in R_P \mid R_o \cap O_i \neq \emptyset \} \quad [3.11]$$

definido como “para todo $\underline{R}(x) \in R_P$ tal que R_o y O_i se intersecten en un punto de coordenadas $(x', y')^T \in R_P$ en el cual la intersección no será el conjunto vacío.”

Teorema 3.2.2.1 Si O es la unión de n obstáculos O_i , entonces podemos escribir :

$$O = O_1 \cup O_2 \cup O_3 \dots \cup O_n = \bigcup_{i=1}^n O_i \quad [3.12]$$

y

$$V_R(O) = \text{Sup} \{ O_i \}_{i \in K} = \bigcup_{i=1}^n O_i \neq \emptyset \quad [3.13]$$

Demostración:

Dado $\underline{R}(x) = (x', y')^T \in R_P$, tenemos por [3.11] y por [3.12] que:

$$R_o \cap O_i = R_o \cap \left(\bigcup_{i=1}^n O_i \right) \neq \emptyset,$$

entonces,

$$R_o \cap O_i = R_o \cap \left(\bigcup_{i=1}^n O_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (R_o \cap O_i) \neq \emptyset,$$

además,

$$\begin{aligned}
O &= \{ \underline{R(x)} \in R_o \cap O_i \in A_4 \mid R_o \cap O_i \neq \emptyset \} = \\
&= \{ \underline{R(x)} \in R_o \cap O_i \in A_4 \mid \bigcup_{i=1}^n (R_o \cap O_i) \neq \emptyset \} = \\
&= \bigcup_{i=1}^n (\{ \underline{R(x)} \in R_o \cap O_i \in A_4 \mid R_o \cap O_i \neq \emptyset \}),
\end{aligned}$$

entonces,

$$V_R(O) = \bigcup_{i=1}^n V_R(O_i) = \bigcup_{i=1}^n (\{ \underline{R(x)} \in R_o \cap O_i \in A_4 \mid R_o \cap O_i \neq \emptyset \}).$$

Si $\underline{R(x)} \in A_4$, entonces $\underline{R(x)} \in V_R(O)$. Esto es,

$$\underline{R(x)} \in \bigcup_{i=1}^n V_R(O_i)$$

además, como la unión de las familias de conjuntos es el mínimo de las cotas superiores, es decir, el supremo entonces,

$$V_R(O) = \text{Sup}\{O_i\}_{i \in K} = \bigcup_{i=1}^n O_i \neq \emptyset$$

por lo que [3.13] es satisfecha.

■

Definición 3.2.2.2 Sea P un conjunto y cuyos elementos se llamarán puntos, L es otro conjunto y cuyos elementos se llamarán líneas, R_l es una relación de incidencia entre P y L tal que:

$$R_l : P \times L \rightarrow r_K \in l \quad [3.14]$$

donde r_K es un punto contenido en la recta $l \in L$ y $R_l(r_K, l)$ es tal que $r_K \in l$.

Sea $l'_1, l'_2 \in L$ y también elementos del conjunto R_P y representan las líneas o rectas asociadas a los eslabones C_1 y C_2 respectivamente, entonces,

$$\begin{aligned} C_1 &\rightarrow l'_1 \in R_P && \text{y} && l'_1 \in L \\ C_2 &\rightarrow l'_2 \in R_P && \text{y} && l'_2 \in L \end{aligned}$$

Teorema 3.2.2.2 Si l'_1 y $l'_2 \in L$ son líneas rectas no paralelas asociadas a los cuerpos C_1 y C_2 , entonces se intersectan en el punto $j \in J_2$ (J_2 es la junta 2 que conecta a C_1 con C_2).

Demostración:

Sea $j \in P$ y también elemento de J_2 , $l'_1, l'_2 \in L$ y $l'_1, l'_2 \in R_P$ tal que l'_1 y l'_2 sean no paralelas, entonces, existe un $k \in P$ tal que $k \in l'_1$ y $k \in l'_2$, también un $k_1 \in p$, tal que $k_1 \in l'_1$ y $k_1 \in l'_2$, por tanto,

$$k = k_1 \in P \quad [3.15]$$

como la junta 2 está definida por $J_2 = C_1 \cap C_2$, entonces por la relación de incidencia [3.14] las dos rectas definidas sobre C_1 y C_2 se intersectan el punto $j \in J_2$ de tal forma que:

$$R_{l'_1, J_2}: R_P \times L \rightarrow j \in l'_1$$

$$R_{l'_2, J_2}: R_P \times L \rightarrow j \in l'_2$$

y j es el punto contenido tanto en l'_1 como en l'_2 entonces por [3.15],

$$j \in J_2 = k = k_1 \in R_P$$

■

Definición 3.2.2.3 El obstáculo "O" ocupa una región del plano euclidiano en \mathfrak{R}^2 . La morfología de "O" es un círculo definido por la función:

$$(X - h_o)^2 + (Y - k_o)^2 = R_C^2 \quad [3.16]$$

donde R_C es el radio del obstáculo de origen en cualquier cuadrante, observemos que si el obstáculo existe, entonces $R_C > 0$ y $R_C \in \mathfrak{R}^+$. Si la función anterior toma la forma $X^2 + Y^2 = R_C^2$, esto es, $h_o = 0$ y $k_o = 0$, siendo (h_o, k_o) el centro del obstáculo, entonces el centro de obstáculo se localiza sobre la junta 1 (J_1). Consideremos la restricción siguiente:

$$R_{\min} < R_C < R_{\max}. \quad [3.17]$$

En este caso, R_{\min} representa el radio mínimo del obstáculo y R_{\max} el radio máximo. En este trabajo el radio del obstáculo será de $R_{\min} = l_1 / 7$, y $R_{\max} = l_1 / 3$, $\forall R_{\min}, R_{\max} \in \mathfrak{R}^+$.

Otra forma de identificar las dimensiones del obstáculo es la siguiente:

$$R_{\min} = D_1 / 2 \text{ y } R_{\max} = 2D_1, \quad [3.18]$$

donde D_1 es el tamaño de la discretización de la trayectoria τ .

Teorema 3.2.2.3 Sea A_T el área de trabajo de R_O definida como $A_T = A_4 - A_1$, también sea la función $X_A^2 + Y_A^2 = R_A^2$ asociada a A_4 , si

$$V_R(O_i) \notin A_T$$

entonces:

- 1 $V_R(O_i) \in A_1$ [3.19]
- 2 $V_R(O_i) = \phi$
- 3 $V_R(O_i) = P_S$

donde P_S es una posición singular.

Demostración:

Sea la función $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = R_C^2$ que define el tamaño del obstáculo O_i , entonces, si $V_R(O_i) \notin A_T$, esto implica que $V_R(O_i) \in A_1$ ó $V_R(O_i) \in \phi$, sin embargo, dado que $V_R(O_i) \notin A_T$ implica automáticamente que $V_R(O_i) \notin \tau$, y la condición 1 es satisfecha, si las coordenadas $(h_0, k_0) \neq (0, 0)$ esto implica que $V_R(O_i) \in X_A^2 + Y_A^2 = R_A^2$ siendo R_A^2 el radio de A_4 definido como $(l_1 + l_2)^2$ y $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^+$, entonces la condición 1 es válida también si $V_R(O_i) \in X_A^2 + Y_A^2 \leq (l_1 - l_2)^2$. Para que la condición 2 sea satisfecha, $V_R(O_i) \in A_5 - A_4$ ó $V_R(O_i) \in A_5 - (A_3 \cup A_2 \cup A_1)$. Para que 3 se cumpla, es necesario que $(h, k) = (0, 0)$, es decir, que la función $(X - h)^2 + (Y - k)^2 = R_C^2$ tome la forma particular de $X^2 + Y^2 = R_C^2$ y entonces, $V_R(O_i) = P_S$. (ver figura 3.3).

■

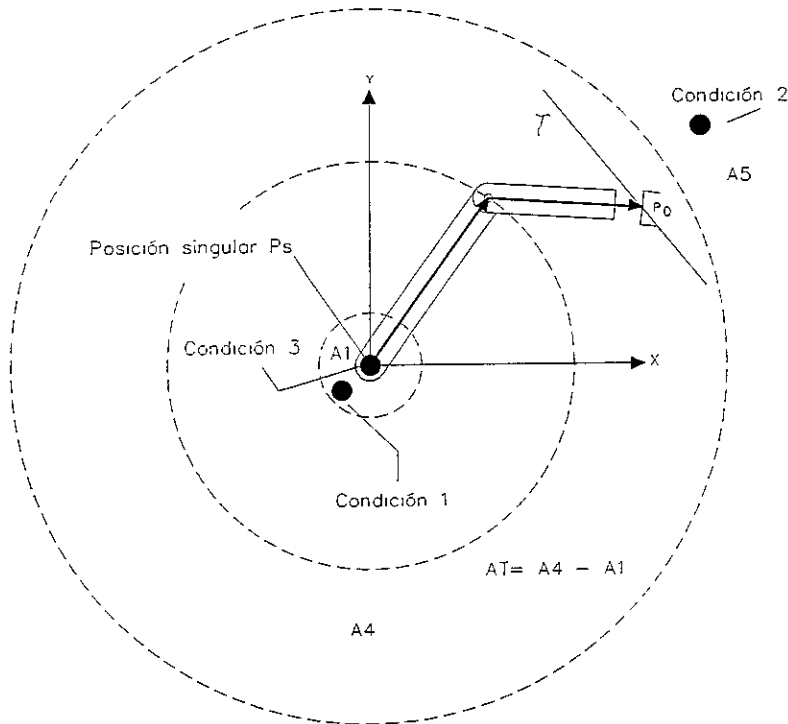


Figura 3.3 Consecuencias del teorema 3.2.2.3

Definición 3.2.2.4 Sobre la frontera $F_O \in O_i$ existen un número infinito de puntos. Esto es,

$$V_R(F_O) \in O = \{ R_P \in \mathbb{R}^2 \mid R_O \cap O = \infty \} \quad [3.20]$$

Definición 3.2.2.5 Sea F_O la frontera de O_i , entonces ,

$$V_R(F_O) \subseteq V_R(O_i) \quad [3.21]$$

esto implica que si $\underline{R}(x) \in V_R(O)$ entonces también $\underline{R}(x) \in V_R(F_O)$.

Sea I_O el interior de O_i , entonces,

$$V_R(O_i) \supseteq V_R(F_O) \cup I_O \quad [3.22]$$

y además , $R_O \cap I_O = \phi$.

Definición 3.2.2.6 El impacto de los eslabones $C_1, C_2 \in R_O$ con el obstáculo O_i es sobre la frontera F_O , y

$$1 \quad \text{Con } C_1 \text{ si: } O_i \in A_1 \text{ ó } O_i \in A_3 \cap A_2. \quad [3.23]$$

$$2 \quad \text{Con } C_2 \text{ si: } O_i \in A_3 \cap A_2 \in A_T.$$

Sea el conjunto $V_R(O_i) = \{ \underline{R}(x) \in R_P \mid R_O \cap O_i \neq \phi \}$, entonces por [3.21] tenemos que:

$V_R(F_O) \subseteq V_R(O_i)$ y por lo tanto podemos escribir:

$$V_R(F_O) = \{ \underline{R}(x) \in R_P \mid R_O \cap F_O \neq \phi \}. \quad [3.24]$$

Las coordenadas (h_o, k_o) de O_i son caracterizadas desde el sistema XY a través del vector de coordenadas polares $(\theta_o, R(x)_o)$ donde $R(x)_o$ es la distancia del origen de coordenadas ubicado sobre la junta $J_1 = T \cap C_1$ al centro (c_o) del obstáculo, y el $c_o \in I_O$ ubica el centro del obstáculo, θ_o es el desplazamiento angular entre $R(x)_o$ y el eje cartesiano X. Entonces si las coordenadas $(\theta_o, R(x)_o)$ localizan al obstáculo en la región A_1 excepto con la condición (h_o, k_o)

$= (0,0)$, entonces C_1 impacta con O_i en la región A_1 , y también O_i impacta con C_1 en $A_3 \cap A_2 \in A_T$, para el caso del cuerpo C_2 , la región de impacto es sobre toda A_T .

Teorema 3.2.2.4 Sea $t \in P$ un punto tal que $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$, de coordenadas $(x', y')^T \in \mathbb{R}^2$, y además $t \in l'_1$, esto es por la relación de incidencia $R_{it} : P \times L \rightarrow t \in F_o$, entonces $C_1 \in R_o$ impacta con O_i en el punto $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$.

Demostración:

En efecto, la condición para que $C_1 \in R_o$ impacte con O_i es que O_i se encuentre sobre la región A_1 ó $A_3 \cap A_2$, si $t \in P$ y $t \in l'_1$ entonces por la definición [3.2.2.2] y el teorema [3.2.2.3] tenemos que:

$$R_{it} : P \times L \rightarrow t$$

y si $P \subset R_o \cap F_o \neq \phi$, entonces $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$, por otra lado si l'_1 es la recta asociada al cuerpo C_1 , entonces

$$R_{it} : R_o \cap F_o \times l'_1 \rightarrow t \quad [3.25]$$

esto implica que $t \in l'_1$, si esta condición es válida entonces C_1 y O_i se impactan sobre el punto $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$ (ver figura 3.4).

■

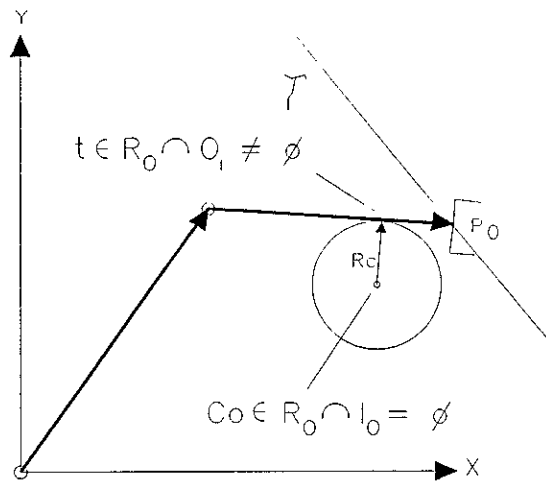


Figura 3.4 Consecuencias del teorema 3.2.2.4

Se sigue el mismo criterio para el cuerpo C_2 , para este caso es necesario que O_i se localice en la región A_T .

Teorema 3.2.2.5 Sea $c_0 \in R_0 \cap I_0 = \emptyset$ un punto en el interior de O_i caracterizado por el vector de coordenadas polares $(\theta_0, R(x)_0)$, entonces la recta $r_c \in L$ que pasa por los puntos $c_0 \in R_0 \cap I_0 = \emptyset$ y $t \in R_0 \cap F_0 \neq \emptyset$, es perpendicular a $l_1 \in L$ y representa el radio R_C de O_i .

Demostración:

En efecto, si c_0 es el punto interior de O_i y representa el centro del obstáculo, esto es, $c_0 \in I_0$ de coordenadas (h_0, k_0) con respecto al origen (X_0, Y_0) , entonces si $t \in F_0$ y por el teorema [3.2.2.4] $t \in R_0 \cap F_0 \neq \emptyset$, esto quiere decir que $t \in F_0$ es el punto de impacto de C_1 con O_i , entonces si definimos un vector \vec{R}_C del punto $c_0 \in I_0$ al punto $t \in F_0$ y una recta $l_c \in L$ asociada al vector \vec{R}_C , entonces por la definición [3.2.2.2] la intersección de la recta $l_c \in L$ con $l_1 \in L$ es el punto $t \in R_0 \cap F_0 \neq \emptyset$, como $l_1 \in L$ es tangente a O_i en $t \in F_0$ entonces la recta $l_c \in L$ es perpendicular a $l_1 \in L$ en el punto $t \in R_0 \cap F_0 \neq \emptyset$. Por otro lado, el radio de O_i es definido como la distancia entre el centro de O a cualquier punto $t_i \in F_0$, como el vector

\bar{R}_C es definido sobre estos puntos entonces la magnitud de \bar{R}_C representa en este caso, el radio R_C de O_i . (ver figura 3.4).



Corolario 3.2.2.1 Si O_i se encuentra en la región A_1 ó $O_i \in A_3 \cap A_2$, entonces el cuerpo C_1 se impacta con O_i en dos puntos $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$ y $t_1 \in R_o \cap F_o \neq \phi$ sobre la frontera de O_i , efectuándose al menos dos accionamientos del actuador AC_1 .

Demostración:

Para demostrar este corolario, necesitamos hacer uso de las secuencias uno a uno desarrolladas en el capítulo II, entonces por [2.1] el número total de secuencias de movimientos para los mecanismos de cadena abierta está gobernado por la siguiente ecuación :

$$N_{TS} = 2 n! + [n!]^2$$

donde n es el grado de libertad de la cadena , entonces por [2.2]

$$N_{TS} = n! + n! + [n!]^2,$$

El primer término de la ecuación [2.2], determina el número de secuencias reales, el segundo término las reflexiones y el tercero el número de secuencias combinadas.

De [2.4] las familias de movimientos están gobernadas por la ecuación siguiente:

$$N_F = n,$$

y el número de puntos intermedios queda determinado por [2.5]. Esto es,

$$N_{PI} = n - 1$$

Entonces para $n=2$, obtendremos los siguientes resultados:

$$N_{TS} = 2! + 2! + [2!]^2 = 2 + 2 + 4 = 8$$

$$N_{TS} = 8 \quad \leftarrow \quad \text{Total de secuencias.}$$

$$N_{SR} = 2 \quad \leftarrow \quad \text{Secuencias reales.}$$

$$N_R = 2 \quad \leftarrow \quad \text{Reflexiones.}$$

$$N_{SC} = 4 \quad \leftarrow \quad \text{Secuencias combinadas.}$$

$$N_F = 2 \quad \leftarrow \quad \text{Familias.}$$

$$N_{PI} = 1 \quad \leftarrow \quad \text{Puntos intermedios.}$$

En este caso, es importante señalar que cada familia de secuencias contiene uno y sólo un punto intermedio, esto es, el punto terminal p_0 de R_0 describe sub-trayectorias semicirculares para cada accionamiento de los actuadores en cada familia de movimientos, en este sentido el punto intermedio y las secuencias uno a uno las utilizaremos para demostrar el corolario 3.2.2.1. Caracterizaremos ahora, dos secuencias uno a uno de la misma familia, una secuencia real y su reflexión, estas secuencias se muestran a continuación:

SR^{F1M2}

	AC_1	AC_2
T_1	1	0
T_2	0	1

R^{F1M2}

	AC_1	AC_2
T_1	-1	0
T_2	0	-1

La secuencia real está gobernada por los parámetros $P_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_1}{2}$ y $Q_o = \pm \text{Cos } \frac{\alpha_2}{2}$, y la reflexión por los parámetros $P_o^* = \pm \text{Cos } \left(\frac{\alpha_1 - 2\pi}{2} \right)$ y $Q_o^* = \pm \text{Cos } \left(\frac{\alpha_2 - 2\pi}{2} \right)$.

Definición 3.2.2.7 Sea SR^{F1M2} una secuencia real uno a uno, entonces los actuadores AC_j toman los valores de los parámetros $P_o, Q_o \in \mathfrak{R}$ en cualquier sentido de la rotación con

$$0 < P_o < \pi \quad [3.26]$$

Definición 3.2.2.8 Sea SC^{F1M2} ó R^{F1M1} una secuencia combinada ó una reflexión de la misma familia, entonces los actuadores AC_i toman en valor de los parámetros $P_o, Q_o, P_o^*, Q_o^* \in \mathfrak{R}$ de la forma siguiente:

- 1 Si es una secuencia combinada, entonces existe un $P_o, Q_o \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$0 < P_o, Q_o < \pi \quad [3.27]$$

- 2 Para cada secuencia combinada existe un parámetro P_o^* tal que:

$$P_o < P_o^* < 2\pi \quad [3.28]$$

Esto es, cada parámetro P_o^* es accionado por AC_1 en el sentido positivo ó negativo a P_o (si es el eslabón C_1).

- 3 Para cada reflexión los parámetros P_o^* y Q_o^* cumplen con la parte 2.

Por ejemplo, si en un movimiento del multicuerpo R_o , el actuador AC_1 ha sido accionado con el parámetro P_o en el sentido de las manecillas del reloj, sin embargo, por cuestiones de interferencias, el actuador AC_1 a tomado el parámetro P_o^* que corresponde a una sub-reflexión. Los criterios de accionamiento de los actuadores son los siguientes:

- A Si AC_1 es accionado con el parámetro P_0 en el sentido anti-horario, entonces, si existe obstáculo (O_i) y R_0 impacta con él, AC_1 accionará con el parámetro P_0^* en el sentido horario.
- B Si se trata de una secuencia combinada, entonces la parte A es aplicada solamente al parámetro P_0^* , es decir, el parámetro P_0 que corresponde a una secuencia real ó una secuencia combinada, accionará en el sentido horario ó anti-horario dependiendo que secuencia se seleccione.

Esto es válido también para el actuador AC_2 colocado en la junta $J_2 = C_1 \cap C_2$. Con las definiciones anteriores, podemos continuar con la demostración del corolario 3.2.2.1.

Entonces por la definición [3.2.2.2] y el teorema [3.2.2.4] $C_1 \in R_0$ impacta en el punto $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, esto es, si el primer accionamiento es con el parámetro P_0 ó el parámetro P_0^* , si AC_1 se activa por segunda vez, entonces por la definición [3.2.2.6] y el teorema [3.2.2.5] $C_1 \in R_0$ impacta sobre $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ y representa el segundo punto de impacto.



Observación : Si en un movimiento de $C_1 \in R_0$ se tocan los puntos $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ y $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, entonces se han utilizado al menos dos secuencias y el robot R_0 queda en una posición singular, esto quiere decir que no puede ser alcanzado el punto intermedio de la familia utilizada, esto sucedería si el tamaño del obstáculo fuera muy grande para que R_0 alcance singularidad por $C_1 \in R_0$.

Corolario 3.2.2.2 Si el obstáculo O_i se encuentra en la región $A_3 \cap A_2$, entonces R_0 impacta con O_i en cuatro puntos $t_j \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, $j=1,2,3,4$.

Demostración:

Si O_i se encuentra en la región $A_3 \cap A_2$ ó A_4 , R_o impactará con O_i a través de sus dos eslabones C_1 y C_2 , ahora si O_i está en $A_3 \cap A_1$ por el corolario 3.2.2.1 los puntos $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$ y $t_1 \in R_o \cap F_o \neq \phi$ son los dos puntos de impacto de C_1 con O_i . Si O_i se encuentra en $A_3 \cap A_1$, entonces $C_2 \in R_o$ impacta con O_i sobre su frontera F_o . Esto es, si asociamos una recta l'_2 a C_2 , entonces $t_2 \in R_o \cap F_o \neq \phi$ y $t_3 \in R_o \cap F_o \neq \phi$ son los otros dos puntos de impacto de R_o con O_i a través del eslabón C_2 .



Corolario 3.2.2.3 Sea $l'_1 \in L$ la recta asociada a C_1 y originada por una secuencia real y $t \in R_o \cap F_o \neq \phi$ es el punto de impacto de R_o con O_i en la región A_1 ó $A_3 \cap A_2$, sea $l''_1 \in L$ otra recta asociada a C_1 y originada por otra secuencia de la misma familia, sea $t_1 \in R_o \cap F_o \neq \phi$ el segundo punto de impacto, entonces el punto de intersección de las rectas l'_1 y l''_1 es el origen de coordenadas (la posición de la junta J_1).

Demostración:

Observemos que l'_1 y l''_1 son rectas asociadas a C_1 , entonces por el corolario 3.2.2.1 y la definición [3.2.2.2] el punto de intersección de las rectas l'_1 y l''_1 es el origen de coordenadas.



Esto también es válido para C_2 si O_i se encuentra en la región $A_3 \cap A_2$, en este caso la intersección de las rectas asociadas a C_2 es el punto definido en J_2 .

Teorema 3.2.2.6 Si el obstáculo O_i se encuentra en la región $A_3 \cap A_2$, entonces las rectas asociadas a los eslabones C_1 y C_2 originadas por dos secuencias de familias distintas y sus dos reflexiones se intersectan en cuatro puntos $k_r \notin O_i$, $r = 1,2,3,4$, si y sólo si los actuadores AC_j se activan cuatro veces (dos accionamientos por cada actuador).

Demostración:

Sea la secuencia real de la familia 1 (SR^{F1M2}) y (SR^{F2M1}) la secuencia real de la familia 2 y sus reflexiones R^{F1M2} y R^{F2M1} , entonces por el corolario 3.2.2.1 y la definición [3.2.2.2] las rectas l_1' y l_1'' asociadas al cuerpo C_1 se impactan con O_i en los puntos $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ y $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, sin embargo, como O_i se encuentra en la región $A_3 \cap A_2$, esto implica que la recta l_1' y el punto $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ por la definición [3.2.2.1] caractericen el punto de impacto con O_i , también el punto final de la recta l_1' coincide con el punto $p_2 \in J_2$, por tanto los segmento de recta (l_1' y l_1'') antes y después del punto de impacto $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, son quienes se intersectan con los segmentos de rectas asociadas con el cuerpo C_2 (l_2' y l_2''), además, como las rectas l_1' y l_1'' son generadas por la secuencia real SR^{F1M2} y para este caso la reflexión R^{F1M2} en el tiempo 1, entonces esto quiere decir que se ha activado dos veces el actuador AC_1 y R_0 no alcanzó el punto intermedio 1, entonces se utiliza la secuencia SR^{F2M1} y la reflexión R^{F2M1} para generar las rectas l_2' y l_2'' en el tiempo 2, esto conduce a que el actuador AC_2 se activó también dos veces, entonces el espectro de las rectas l_1' y l_1'' se intersectan con las rectas l_2' y l_2'' en cuatro puntos fuera de la frontera F_0 del obstáculo, esto es, la recta l_2' intersecta a la recta l_1' al menos dos veces debido a la restricción $l_1 > l_2$ y a que O_i se localiza en la región $A_3 \cap A_2$.

■

Teorema 3.2.2.7 La distancia de la recta $h \in L$ entre los puntos $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ y $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ generados por la secuencia SR^{F1M2} y la reflexión R^{F1M2} es dada por :

$$\underline{h} = | \pm R_C \sqrt{2(1 - \text{Cos}\psi)} | \quad [3.29]$$

y R_C es el radio del obstáculo definido de $c_0 \in R_0 \cap I_0$ a $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ para la secuencia SR^{F1M2} , y $c_0 \in R_0 \cap I_0$ a $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ para la reflexión R^{F1M2} , además, ψ es ángulo entre los dos radios generados, y el conjunto de rectas (l'_1, l''_1, l''_3) conforman el área prohibida de $C_1 \in R_0$ (l''_3 es la recta definida del punto final de la recta l'_1 al punto final de la recta l''_1).

Demostración:

En efecto, debido a que las rectas l'_1, l''_1 son generadas por SR^{F1M2} y R^{F1M2} , entonces por el corolario 3.2.2.1 los puntos de impacto son $t \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$ y $t_1 \in R_0 \cap F_0 \neq \phi$, ahora si definimos una recta \underline{h} entre estos puntos y dos rectas de $c_0 \in R_0 \cap I_0 \neq \phi$ a los puntos de impacto siendo R_C la distancia, entonces por el teorema de los cosenos,

$$\underline{h}^2 = R_C^2 + R_C^2 - 2 R_C R_C \text{Cos} \psi$$

entonces,

$$\underline{h} = \left| \pm R_C \sqrt{2(1 - \text{Cos} \psi)} \right|$$

y $\psi = \pi - 2\gamma$, en este caso, γ es el ángulo entre R_C y \underline{h} . Por otro lado, el área definida por el conjunto (l'_1, l''_1, l''_3) nunca podrá ser alcanzada por el eslabón C_1 (debido a que $c_i \in I_0$ son todos los puntos tales que $R_0 \cap I_0 = \phi$) y tampoco el punto intermedio para la familia de secuencias seleccionadas, esto también es válido para el eslabón $C_2 \in R_0$ en toda la región A_T (ver figura 3.5).

■

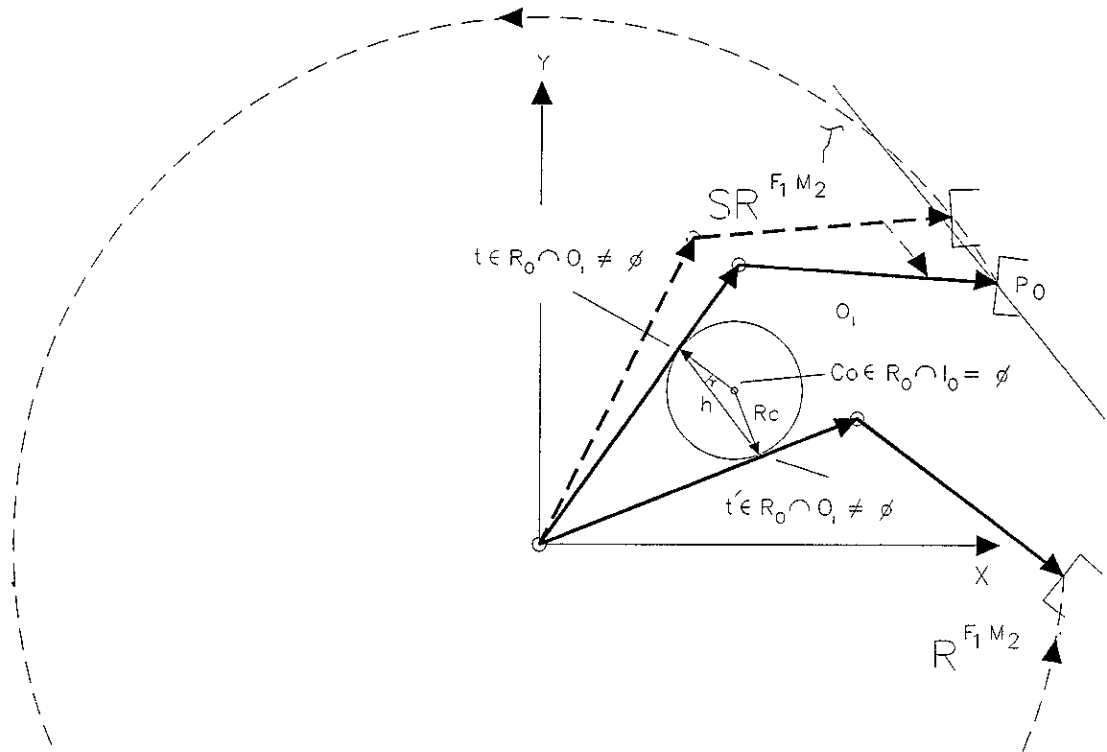


Figura 3.5 Consecuencias del corolario 3.2.2.1 y el teorema 3.2.2.7.

Hasta este momento hemos caracterizado las condiciones de impacto real $\in R_0 \cap F_0 \neq \emptyset$, a continuación asociaremos sensores al multicuerpo R_0 para caracterizar el impacto virtual.

3.2.2.2. Caracterización del impacto virtual $R_0 \cup O_i = S$.

Los teoremas y corolarios anteriores, caracterizan el impacto real de R_0 con O_i , sin embargo, para una operación de trabajo real, lo que necesitamos es que R_0 no colisione con O_i , por lo tanto es necesario introducir el concepto de "impacto virtual". Para caracterizar el "impacto virtual", es necesario dimensionar al robot R_0 , y además, colocar elementos de rastreo llamados sensores, esto es con el objetivo de conocer la posición del obstáculo y la región en donde se encuentra.

Definición 3.2.2.9 Los eslabones tienen asociados sensores en los eslabones C_1 y C_2 respectivamente, para este caso, definiremos al sensor como un cuerpo que cubre y sensa a todo C_1 si es el eslabón 1, para posteriormente caracterizar la forma de las regiones de sensado. Asociemos ahora, sensores a los cuerpos C_1 y C_2 de la forma siguiente:

Sea $S = (S_1, S_2)$ el conjunto de sensores ópticos ó inductivos colocados en los eslabones C_1 y C_2 respectivamente, de tal forma que:

$$C_1 \rightarrow S_1$$

$$C_2 \rightarrow S_2$$

En este caso, los sensores no se activarán detectando presencia tanto de C_1 como de C_2 , y serán activados en planos superpuestos de barrido de C_1 y C_2 respectivamente.

Observemos que la única región donde los dos sensores se activarán dada una sola secuencia, es en la región $A_3 - A_1$, sin embargo, necesitamos conocer todas las combinaciones de activación y las nuevas regiones de sensado, para esto definiremos un código de reconocimiento. Esto es,

S_1	S_2
1	0

el código señala que S_1 se ha activado y S_2 se mantiene en posición de barrido, en otras palabras S_1 a detectado obstáculo mientras que S_2 no.

Sea la secuencia SC_{R1}^{F1M2} la secuencia de análisis, los parámetros asociados son P_o^* , Q_o ,

$\in \mathbb{R}$, a continuación conoceremos las posibilidades de activación de los sensores $S_1, S_2 \in S$.

Esto es,

1 Si el código del conjunto S es:

S_1	S_2
1	0

entonces el obstáculo se encuentra en la región A_1 ó $A_3 \cap A_1$ y el sensor S_1 se ha activado.

2 Si el código del conjunto S es:

S_1	S_2
0	1

entonces el obstáculo se encuentra en la región $A_T = A_4 - A_1$, y el sensor S_2 ha sido activado.

3 Si el código del conjunto S es:

S_1	S_2
1	1

entonces existe más de un obstáculo en la región A_4 .

Observemos que las dos primeras condiciones son válidas en el sentido de que los sensores S_1 y S_2 se activan al accionar un sólo actuador, es decir, cuando el multicuerpo R_0 es conducido a la posición intermedia, la condición 3 es válida cuando S_1 detecta al mismo tiempo que S_2 un obstáculo.

Para mostrar los códigos anteriores y definir criterios de activación de los sensores es importante que se cumplan las siguientes restricciones:

1 Los eslabones C_1 y C_2 están diseñados de tal manera que $l_1 > l_2$.

- 2 Los actuadores AC_1 y AC_2 colocados en las juntas J_1 y J_2 , están gobernados por la restricción siguiente:

$$T_K \rightarrow 2\pi$$

donde T_K es el máximo tiempo que un actuador necesita para realizar una revolución.

- 3 La posición del obstáculo nunca estará en el origen de coordenadas, ni en la región A_5 .
- 4 La dimensión del obstáculo no será mayor que la distancia h generada por el mínimo parámetro.

Para cualquier secuencia de movimientos, las siguientes posibilidades son válidas:

Sea el conjunto $S = (S_1, S_2)$ y la secuencia real de análisis SR^{F1M2} con código

SR^{F1M2}

	AC_1	AC_2
T_1	1	0
T_2	0	1

entonces:

1 Si AC_1 es accionado y $AC_1 \rightarrow P_o$, entonces C_1 y C_2 son movidos hasta alcanzar el punto intermedio p_{11} , por tanto:

a) $AC_1 \rightarrow P_o$

S_1	S_2
1	0
0	0

esto se interpreta como impacto virtual por el eslabón C_1 al accionar AC_1 en T_1 .

Región de rastreo A_4 .

Región de impacto $A_2 \cup A_1$.

b) $AC_1 \rightarrow P_o$

S_1	S_2
0	1
0	0

Entonces el código se interpreta como impacto virtual por el eslabón C_2 al accionar AC_1 en el tiempo 1.

Región de rastreo A_4 .

Región de impacto A_T .

c) $AC_1 \rightarrow P_0$.

S_1	S_2
1	1
0	0

existe impacto virtual por el eslabón C_1 y C_2 al accionar AC_1 en el tiempo 1.

Región de rastreo A_4 .

Región de impacto A_4 .

d) $AC_1 \rightarrow P_0, AC_2 \rightarrow Q_0$.

S_1	S_2
0	0
0	1

Entonces existe impacto virtual por el eslabón C_2 con AC_2 activado en el tiempo 2.

Obstáculo nulo en la región A_2 .

Región de rastreo A_4 .

Región de impacto A_4 .

En base a las condiciones anteriores, concluimos que para cada secuencia de movimientos del multicuerpo R_0 , existen cuatro posibilidades de impacto virtual con el obstáculo O_i a través de los cuerpos C_1 y C_2 , con rastreo con el conjunto $S = (S_1, S_2)$ asociado a R_0 en la región A_4 .

3.2.2.2.1 Diseño del conjunto $S = (S_1, S_2)$.

Si usamos el término de impacto virtual, entonces entenderemos que R_o nunca impacta con O_i , es decir, $R_o \cup O_i = \phi$, por tanto hablar de colisión entre R_o y O_i es a través de sus sensores y

$$R_o \cup O_i = S_k \quad [3.30]$$

donde S_k es el conjunto de todos los puntos tal que R_o y O_i se impacten en forma virtual, es decir, los cuerpos C_1 y C_2 nunca tocarán a O_i . Por ejemplo si el actuador AC_1 se ha activado con el parámetro P_o y si existe un O_i que interfiere con $C_1 \in R_o$ en A_2 , entonces C_1 deberá detenerse y el desplazamiento angular recorrido es $\alpha_k < \alpha_1$ (siempre que el obstáculo se encuentre dentro del arco definido por α_1), si el eslabón no impacta con O_i entonces existe un parámetro P_o'' tal que:

$$P_o < P_o' < P_o'' \quad [3.31]$$

con $P_o' = \pm \cos \frac{\alpha_k}{2}$, y α_{k1} es el desplazamiento angular de diseño definido por $P_o'' = \pm \cos \frac{\alpha_{k1}}{2}$, esto es, α_{k1} debe estar relacionado con el diseño de los sensores. De esta forma α_{k1} gobernará el paro de los actuadores AC_i antes de que impacte con O_i ver figura 3.6. En este caso, el desplazamiento angular α_{k1} es quién gobernará el paro del actuador AC_1 antes de que $C_1 \in R_o$ impacte con O_i , entonces diremos que α_{k1} depende del diseño de los sensores.

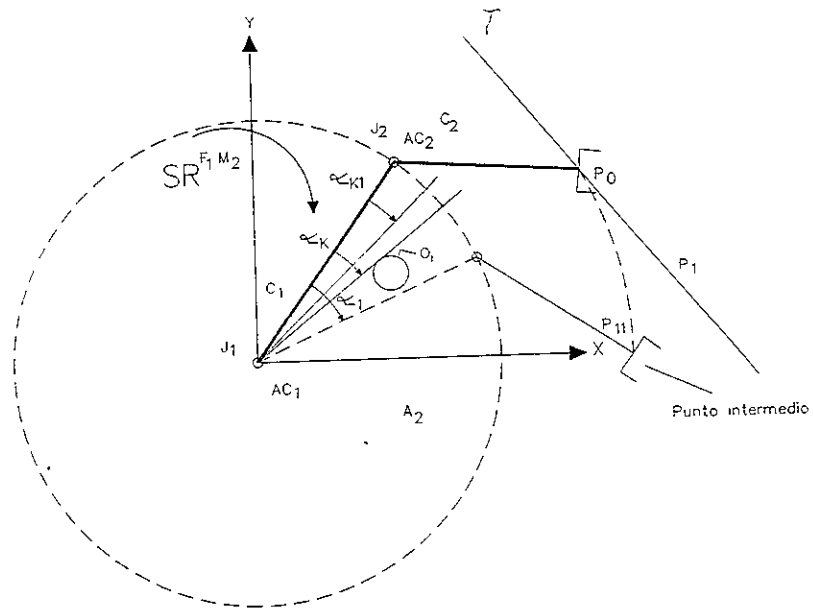


Figura 3.6 Desplazamientos angulares en A_2 .

3.2.2.2 Dimensionamiento del cuerpo C_1 .

Definición 3.2.3.0 Sea un rectángulo la morfología asociada al cuerpo C_1 , entonces las rectas $l_{A_i} \in L$ y $l_{B_i} \in L$ acotan al rectángulo con $l_{A_i} \in L$ las rectas asociadas a las fronteras menores y $l_{B_i} \in L$ son las rectas mayores, también la región ocupada por el cuerpo es A_{C_1} mostrada en 3.7.

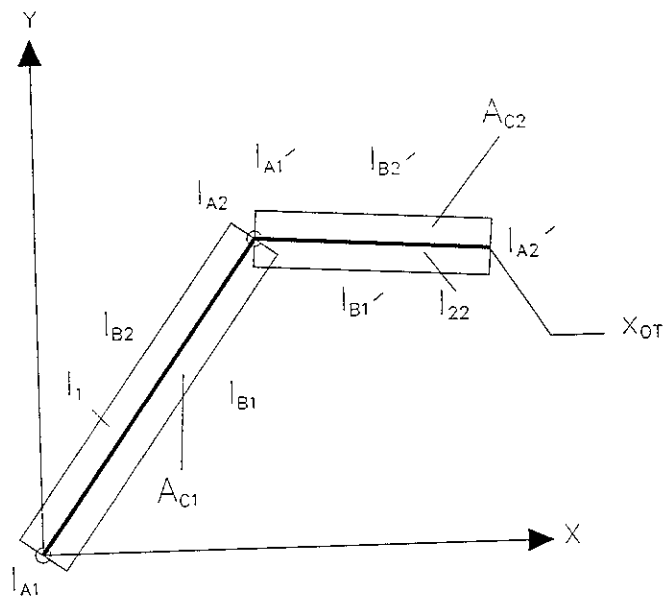


Figura 3.7 rectas asociadas a los cuerpos C_1 y C_2 .

Definición 3.2.3.1 Las rectas asociadas al rectángulo que define al cuerpo C_2 son l_{B1}' y l_{B2}' y corresponden a las fronteras mayores y l_{A1}' y l_{A2}' son fronteras menores.

Definición 3.2.3.2 La distancia de la recta mayor l_{B1} es $l_1 \in \mathfrak{R}^+$, siendo l_1 la longitud del cuerpo C_1 . También la distancia de la recta mayor asociada al eslabón C_2 es $l_2 \in \mathfrak{R}^+$.

Siempre que $l_1 > l_2$ entonces:

- 1 $l_{B1} > l_{B1}'$ [3.32]
- 2 $l_{B1} = l_{B2}$
- 3 $l_{B1}' = l_{B2}'$
- 4 $l_{A1}' = l_{A2}'$
- 5 $l_{A1} = l_{A1}'$
- 6 $A_{C1} > A_{C2}$

Definición 3.2.3.3 Las rectas menores de los rectángulos asociados a los eslabones C_1 y C_2 son iguales, esto es,

$$l_{A1} = l_{A2} = l_{A1}' = l_{A2}' \quad [3.33]$$

Definición 3.2.3.4 La recta l_{A2}' está asociada a la frontera última de C_2 y contiene al punto final del órgano terminal ($x_{pot} = p_o$).

Corolario 3.2.2.4 Sea $l_{22} \in L$ una recta asociada al cuerpo C_2 con,

$$l_{22} = \{ p_2 + \alpha_R L_2 \mid \alpha_R \in \mathfrak{R}^+, \alpha_R = l_2 \in \mathfrak{R}^+ \}, \text{ y } p_2 \in J_2, \quad [3.34]$$

entonces la intersección de la recta $l_{22} \in L$ con la recta l_{A2}' es el punto terminal $x_{OT} \in C_2$.

Demostración:

En efecto, por la definición [3.2.3.4] $x_{OT} \in l_{A2}'$ y como consecuencia de que $x_{OT} \in l_{22}$, esto es porque el vector L_2 es definido de $p_2 \in J_2$ a $x_{OT} \in J_2$, también $\alpha_R = l_2 \in \mathfrak{R}^+$, entonces la recta l_{22}

por medio de una relación de incidencia $R_1 : l_{22} \times C_2 \rightarrow x_{OT}$, con $x_{OT}=(\varepsilon, l_{22})$ contiene al punto x_{OT} . Sin embargo también existe otra relación de incidencia tal que ,

$$R_1 : l_{A2}' \cap l_{22} \times C_2 \rightarrow x_{OT}, \quad [3.35]$$

con $x_{OT}=(\varepsilon, l_{A2}' \cap l_{22})$, en este caso como la morfología asociada al cuerpo C_2 es un rectángulo, entonces l_{A2}' es perpendicular a l_{22} en $x_{OT} \in C_2$, por tanto $x_{OT} \in l_{A2}' \cap l_{22}$.

■

Definición 3.2.3.5 Sea $p_r \in P$ un punto contenido en la intersección de las rectas l_{B2}' y la recta l_{A2}' , entonces la distancia $D \in \mathfrak{R}^+$ del punto $x_{OT} \in l_{A2}' \cap l_{22}$ al punto $p_r \in l_{A2}' \cap l_{B2}'$ es $D = l_2/4$, ver figura 3.8.

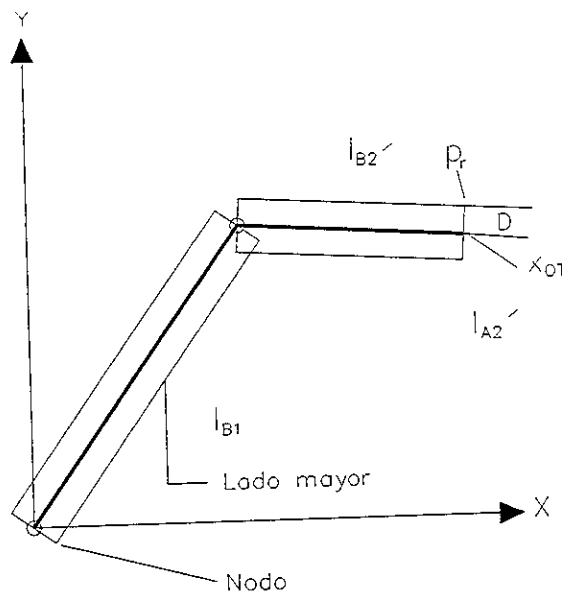


Figura 3.8 La distancia $D \in \mathfrak{R}^+$.

Definición 3.2.3.6 El punto $p_r \in P$ se llamará nodo del rectángulo asociado a C_2 si sobre el se intersectan dos rectas mutuamente perpendiculares y esté definida una relación de incidencia tal que:

$$\begin{aligned} R_1 : P \times l_{B2}' &\rightarrow p_r \\ R_1 : P \times l_{A2}' &\rightarrow p_r \end{aligned} \quad [3.36]$$

y p_r está contenido en la intersección de las rectas l_{B2}' y l_{A2}' .

Definición 3.2.3.7 Se llamará lado mayor de C_1 cuando la recta l_{B1} ó l_{B2} esté acotada por dos nodos (si es el eslabón 1).

Definición 3.2.3.8 Se llamará nodo interno final de C_2 al punto $x_{OT} \in l_{A2}' \cap l_{22}$.

Corolario 3.2.2.4 Sea $l_{B1} \in L$ la recta asociada a la frontera mayor de $C_1 \in R_0$, entonces el punto de impacto real en A_2 entre el obstáculo O_i y el cuerpo C_1 es:

$$t \in C_1^D \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.37]$$

donde C_1^D es el cuerpo C_1 dimensionado.

Demostración:

En efecto ver definición 3.2.3.0 y el teorema 3.2.2.4

■

Definición 3.3.3.9 Se llamará R_0^D al robot dimensionado, ver figura 3.9.

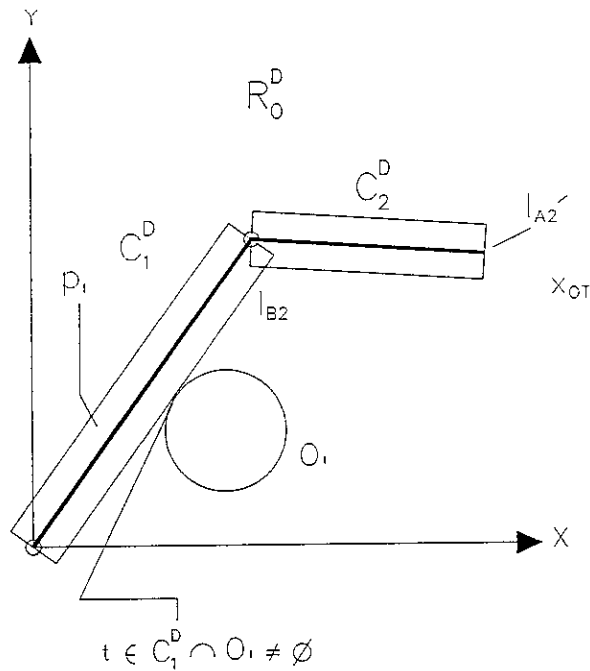


Figura 3.9 Impacto real de R_0^D .

Definición 3.2.3.10 Sea $p_i \in A_{C_1}$ los puntos internos contenidos en A_{C_1} , entonces,

$$p_i \in C_1^D \cap O_i = \emptyset \quad [3.38]$$

Corolario 3.2.2.5 Sea $x_{OT} \in l_{A_2'}$ y también $x_{OT} \in O_i$, entonces,

$$x_{OT} \in C_2^D \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.39]$$

si y sólo si $(x_{OT}, t) \in \tau_R$ siempre que el movimiento de R_0^D sea con secuencias simultáneas ó $(x_{OT}, t) \in \tau_{12}$ con τ_{12} el espectro de alguna secuencia uno a uno.

Demostración:

En efecto, ver definición [3.2.3.4], teorema 3.2.2.3 y teorema 3.2.2.4.

■

En la figura 3.10 se muestra las consecuencias del corolario 3.2.2.5.

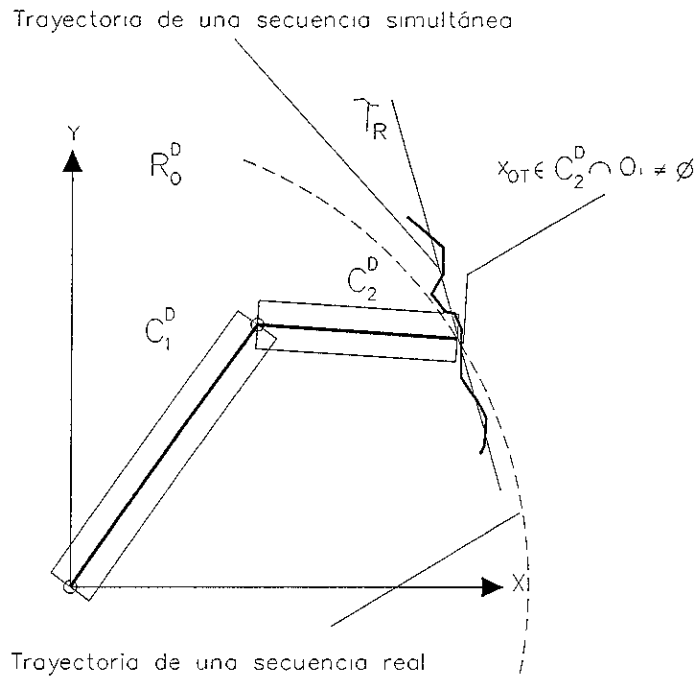


Figura 3.10 Impacto real por el punto terminal.

3.2.2.2.3 Caracterización de los sensores asociados a R_0^D .

Sea $S_1 \in S$ el sensor 1 asociado al eslabón 1 dimensionado, y $S_2 \in S$ el sensor 2 asociado al eslabón C_2^D , entonces es conveniente dimensionar y caracterizar el área móvil de sensado, para este propósito realizaremos las definiciones siguientes:

Definición 3.2.3.11 Sea A_{S_1} el área de sensado de $S_1 \in S$, la morfología que define el área móvil de sensado de S_1 es un rectángulo, con $l_{D_i} \in L$ y $l_{E_i} \in L$ rectas que acotan al rectángulo y $l_{D_i} \in L$ son las rectas asociadas a las fronteras menores, en tanto $l_{E_i} \in L$ son las rectas de las fronteras mayores.

Definición 3.2.3.12 Las rectas $l_{D_i} \in L$ y $l_{E_i} \in L$ son las fronteras menores y mayores del área A_{S_2} de $S_2 \in S$ con S_2 el sensor asociado al cuerpo C_2 dimensionado (C_2^D).

Definición 3.2.3.13 Se llamará R_0^{DV} al robot dimensionado con expansión virtual, esto es, cuando se asocia el conjunto $S=(S_1, S_2)$ y

$$R_0^{DV} = R_0^D \cup S. \quad [3.40]$$

Corolario 3.2.2.6 Sea $p_s \in P$ un punto contenido en la recta l_{E1} , entonces

$$p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.41]$$

donde C_1^{DV} es el eslabón 1 dimensionado con expansión virtual, y $p_s \in P$ representa el punto de impacto virtual con O_i en la región A_1 ó $A_2 \cap A_3$.

Demostración:

En efecto, ver definición[3.2.3.12] y corolario[3.2.2.4].



En la figura 3.11 se muestra el impacto virtual.

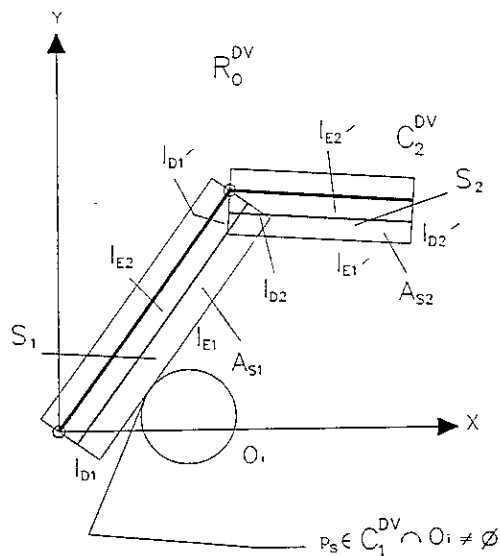


Figura 3.11 Impacto virtual por C_1^D y dimensionamiento de los sensores.

Definición 3.2.3.14 La distancia r_s de la recta l_{E1} definida del punto nodal p' contenido en $l_{A1} \cap l_{B1}$ y el punto nodal p'' contenido en $l_{E1} \cap l_{D1}$ representa la distancia máxima de sentido y es mostrada en la figura 3.12.

Definición 3.2.3.15 Los puntos contenidos en las fronteras mayores de C_1^D no serán sentidos por S_1 , lo mismo para el eslabón C_2^D .

Corolario 3.2.2.7 Existirán dos puntos de impacto virtual $p_{s1} \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ y $p_{s2} \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$, si O_i se encuentra en la región A_1 ó A_2 si y sólo si el movimiento de C_1^{DV} es con secuencias uno a uno y si la frontera l_{B2} tiene un sensor asociado.

Demostración:

En efecto, ver corolario 3.2.2.1.



En la figura 3.20 se observa las consecuencias del corolario 3.3.2.7.

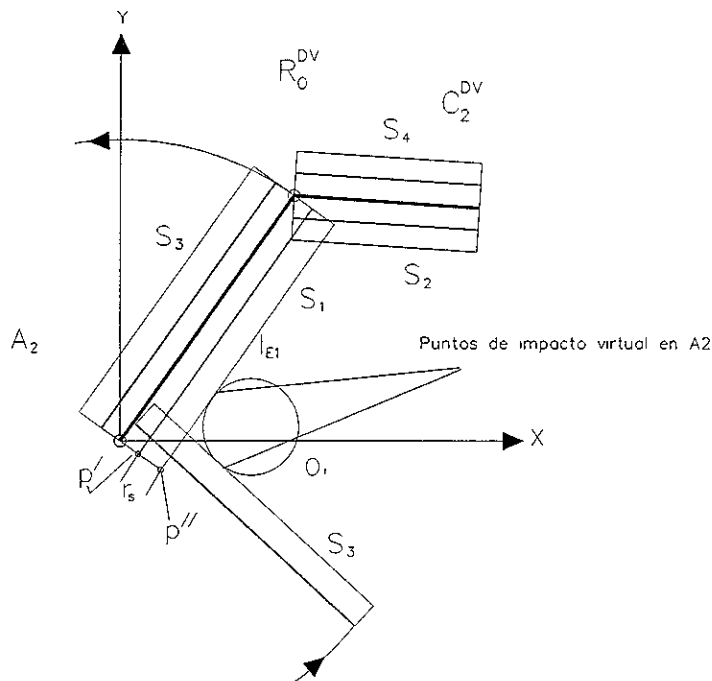


Figura 3.12 Impactos virtuales en A2.

Corolario 3.2.2.8 Existirán cuatro puntos de impacto virtual de R_0^{DV} en la región $A_2 \cap A_3$ si se activan cuatro secuencias uno a uno, dos de cada familia.

Demostración:

En efecto, ver corolario 3.2.2.2.

■

Definición 3.2.3.16 El punto $x_{OT} \in I_{A_2'} \cap I_{22}$ es tal que:

$$x_{OT} \in R_0^{DV} \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.42]$$

si existe un sensor S_5 asociado a la frontera última de C_2^D .

Definición 3.2.3.17 Sea p_s un punto asociado a la frontera mayor de I_{E1} con $p_s \in R_0^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$, sea también $p_1 \in J_1$ el punto de referencia de R_0^{DV} , entonces la distancia l_{s1} definida entre estos dos puntos es $\Psi(p_s, p_1) = L_{s1}$ con $\Psi: \varepsilon \times \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $l_{s1} \in \mathbb{R}^+$ es tal que $|L_{s1}| = l_{s1}$. La distancia $l_{s1} \in \mathbb{R}^+$ la llamaremos la distancia de impacto virtual referida al sistema inercial, ver figura 3.13.

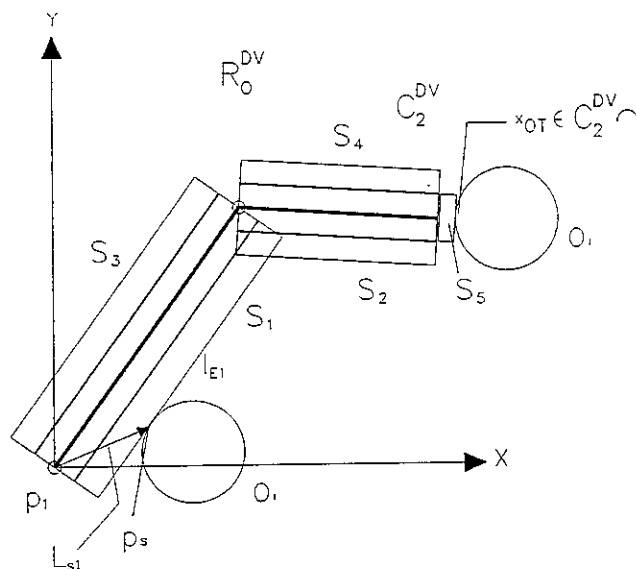


Figura 3.13 Distancia de impacto virtual con respecto a la referencia e impacto virtual en x_{OT} .

Definición 3.2.3.18 Sea SR^{F1M2} una secuencia de movimiento de R_0^{DV} , entonces la trayectoria del punto $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ entre las rectas l_{B1} y l_{E1} es dada por:

$$\tau_{ps} = \{ (p_s, t) \mid p_s \in C_1^{DV}, t \in \mathbb{R}^+ \} \quad [3.43]$$

y la órbita asociada a la trayectoria es:

$$f_{ps} : \varepsilon \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \tau_{ps} \quad [3.44]$$

$$x = t$$

$$y = \pm(|L_{s1}|^2 - t_2)^{1/2}.$$

Definición 3.2.3.19 Sea SR^{F1M2} un movimiento de R_0^{DV} , entonces si existe un obstáculo O_i en la región A_1 y se presenta la condición $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$, entonces la trayectoria que describe el punto p_s sobre la región de sensado móvil A_{S1} la llamaremos trayectoria virtual del punto p_s .

Definición 3.2.3.20 Se presentará impacto real de R_0^{DV} con O_i si existe un punto $p' \in C_1^{DV}$ tal que $p' \in l_{B1}$ y $(p', t) \in \tau_{ps}$. Ver figura 3.14.

Definición 3.2.3.21 Sea $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ y $p' \in l_{B1}$, entonces la norma del vector $L_{ps-p'}$ representa la distancia $l_D \in \mathbb{R}^+$ de seguridad.

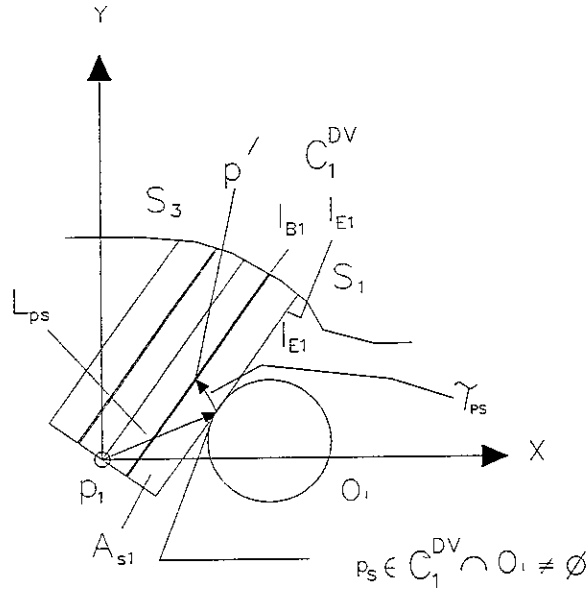


Figura 3.14 Trayectoria de impacto virtual dentro de la región A_{s1} .

Teorema 3.2.2.8 Sea SR^{F1M2} un movimiento secuenciado de R_0^{DV} , si existe un obstáculo O_i en la región A_1 ó $A_2 \cap A_3$, entonces $C_1^{DV} \in R_0^{DV}$ impacta realmente con O_i si la distancia de seguridad $l_D \in \mathcal{R}^+$ es tal que: $l_D = 0$, esto es,

$$p' = p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset \quad [3.45]$$

con $p' \in l_{B1}$ y $p_s \in l_{E1}$.

Demostración:

Sea $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ un punto de impacto de virtual del eslabón C_1^{DV} , esto es, cuando R_0^{DV} se ha movido con la secuencia SR^{F1M2} , sea τ_{ps} la trayectoria del punto $p_s \in l_{E1}$ en la región A_{s1} y $p' \in l_{B1}$ un punto localizado en la frontera mayor de C_1^{DV} con $(p', t) \in \tau_{ps}$, entonces la distancia $l_D \in \mathcal{R}^+$ es la norma del vector asociado a los puntos p' y p_s , esto es,

$\Psi(p_s, p') = L_{ps-p'}$ con $|L_{ps-p'}| = l_D \in \mathfrak{R}^+$, entonces siempre que $|\Psi(p_s, p')| = l_D = 0$. Esto es, si las coordenadas del punto p_s son las mismas para p' , por tanto C_1^{DV} impacta realmente con O_i en la región A_1 , esto es,

$$p' = p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$$

■

En la figura 3.15 se observa las consecuencias del teorema 3.2.2.8.

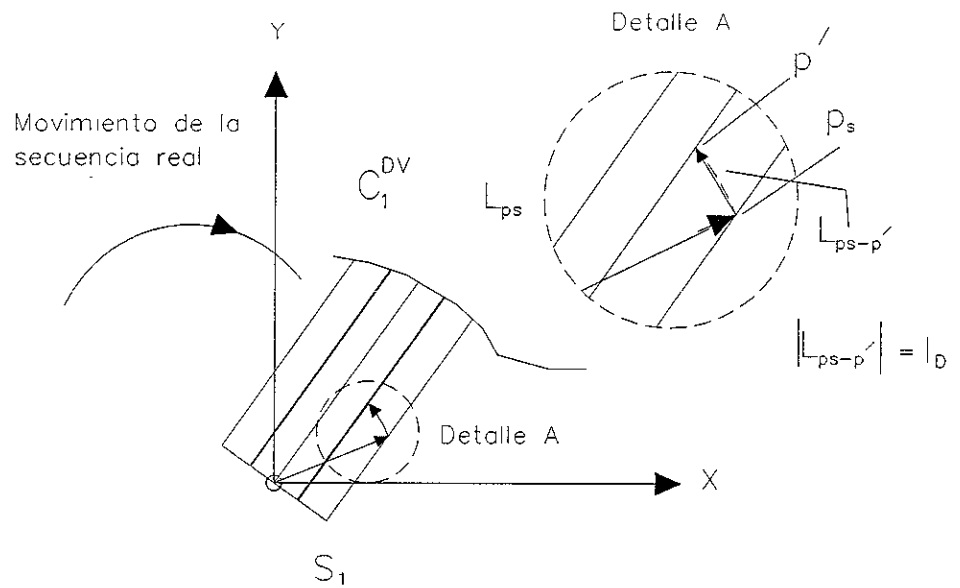


Figura 3.15 Consecuencias del teorema 3.2.2.8.

Corolario 3.2.2.9 Sea $p_s \in l_{E1} \cap l_{D1}$ un punto nodal definido sobre las fronteras de A_{S1} , sea también SR^{F1M2} una secuencia de movimiento de R_0^{DV} , entonces si existe un evento $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ en la región A_1 , la distancia l_T del punto $p' \in l_{B1}$ al punto $p'' \in l_{B1} \cap l_{A1}$ siendo $p' \in l_{B2}$ el punto de impacto real de C_1^{DV} con O_i es: $|L_T| = l_T \in \mathfrak{R}^+$ con $L_T = L_{ps-p'} - L_s$ con L_s el vector asociado a la máxima distancia de sensado, esto es, $|L_s| = r_s \in \mathfrak{R}^+$.

Demostración:

En efecto, ver definición [3.2.3.14] y teorema [3.2.2.8].

En la figura 3.24 se observa las consecuencias del corolario 3.2.2.9.

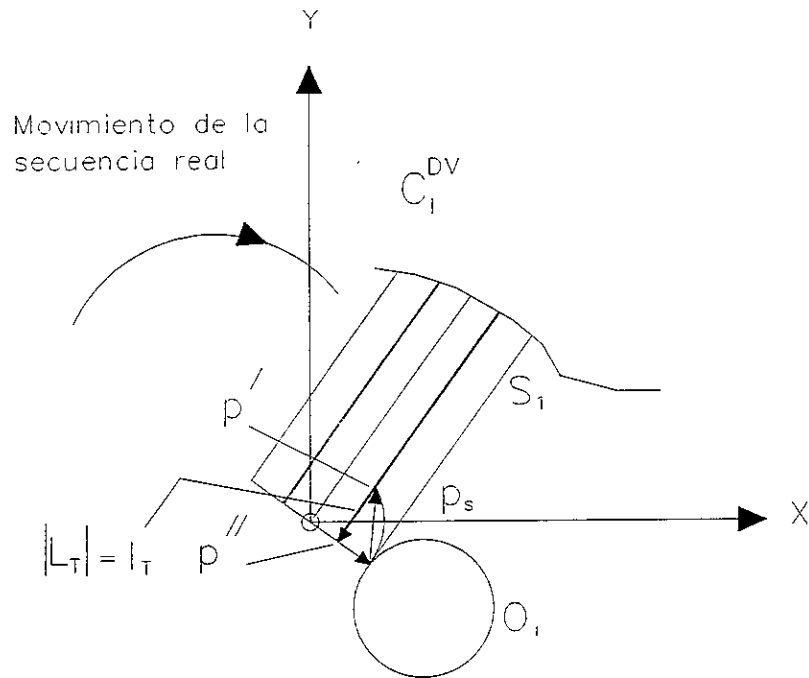


Figura 3.16 Consecuencias del corolario 3.2.2.9.

Las distancias r_s , l_D y l_T son fundamentales para caracterizar al sensor S_1 (también para el sensor S_2). La función de los sensores es la indicar la existencia de obstáculos, sin embargo, lo que se necesita es que el robot no impacte realmente con el obstáculo, esto es, se requiere detenerlo en la región A_{S1} , en otras palabras la distancia de seguridad debe ser tal que: $l_D \neq 0$. Para detener al robot necesitamos establecer la distancia de seguridad mediante un factor de aproximación, esto es,

$$K_1 < K_{dis} < K_2, \quad [3.46]$$

siendo K_1 el factor que determina la mínima distancia de seguridad y K_2 la máxima distancia de seguridad. La distancia de seguridad efectiva es dada por:

$$l_{DE} = K_{dis} l_D \quad [3.47]$$

Entonces l_{DE} es la distancia de paro del robot dentro de la región A_{S1} . Para determinar los valores de K_{dis} , a continuación se presentan los casos siguientes:

- 1 $K_{dis} = 1$ entonces R_0^{DV} impacta con O_i [3.48]
- 2 $K_{dis} > 1$ también R_0^{DV} impacta con O_i
- 3 $K_{dis} < 1$ R_0^{DV} impacta virtualmente con O_i .

De esta manera, la parte 3 es la de interés. Se requiere que

$$l_{DE} < l_D \quad [3.49]$$

entonces los valores que toma el factor K_{dis} deben estar entre $[0 < K_{dis} < 1]$ siendo $K_1 > 0$ y $K_2 < 1$. Esto es,

$$0 < K_{dis} < 1 \quad [3.50]$$

Los valores que toma el factor K_1 deben de estudiarse dentro del entorno de diseño del robot, ya que depende de las exactitudes con las que fueron hechos los elementos que componen al robot, esto es, un K_1 que tome valores cercanos a 0 (0.001 por ejemplo) puede que el robot impacte realmente si los distancias de juego son mayores que l_{DE} . Para los valores del factor K_2 se tienen que estudiar dentro del entorno del control, esto es, si el factor K_2 toma valores cercanos a 1 , entonces el programa de control debe procesar la señal del sensor S_1 y detener al robot en un intervalo muy corto de tiempo, ver figura 3.17.

Entonces la distancia l_{DE} es quién gobernará el punto de paro total dentro de la región A_{S1} si es el sensor S_1 asociado al cuerpo $C_1^{DV} \in R_0^{DV}$.

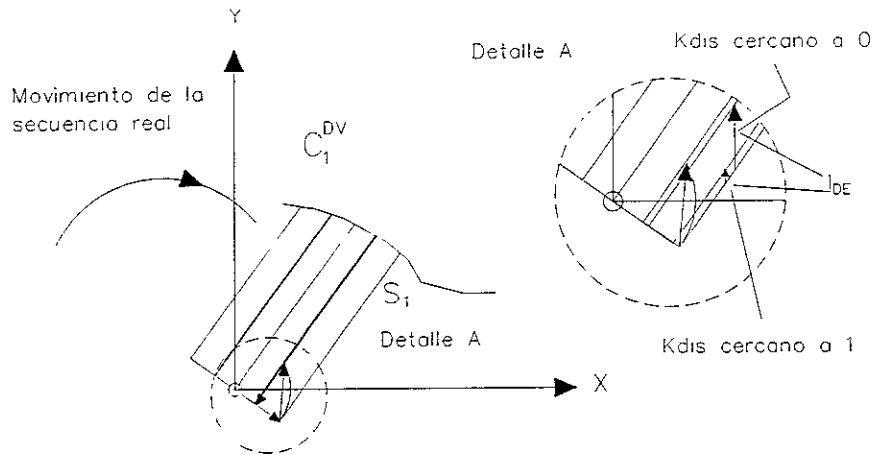


Figura 3.17 factores K_{dis} .

Corolario 3.2.2.10 Existe impacto real de C_1^{DV} con O_i sobre la región A_1 si $\alpha_K = \alpha_{K1}$ siendo α_K el desplazamiento angular máximo asociado a un punto $p_s \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$ desde el punto de referencia $p_1 \in J_1$, y α_{K1} el desplazamiento angular del punto $p' \in l_{B2}$, siempre que el movimiento sea con secuencias uno a uno.

Demostración :

En efecto, por [3.42] y el corolario 3.2.2.6.



Definición 3.2.3.22 El robot R_0^{DV} tiene asociado 5 sensores , 4 colocados en las fronteras mayores de C_1^{DV} y C_2^{DV} , y uno asociado a la frontera última de C_2^{DV} . Ver figura 3.13.

Definición 3.2.3.23 Los sensores asociados a las fronteras mayores de R_0^{DV} son del mismo tipo, es decir; $k_{dis} = 0.5$, en otras palabras tienen la misma distancia de seguridad.

Definición 3.2.3.24 El sensor S_5 asociado a la frontera última menor de C_2^{DV} tiene un factor $K_{dis} = 0.8$.

Definición 3.2.3.25 La distancia máxima de sensado de S_5 es:

$$l_{ss5} = l_{ss1}/2 \quad [3.51]$$

siendo l_{ss1} la distancia máxima de sensado S_1 y

$$l_{ss1} = l_{ss2} = l_{ss3} = l_{ss4}. \quad [3.52]$$

La definición anterior es de suma importancia cuando se trate de evaluar los criterios de evasión.

3.2.2.2.4 Códigos de rastreo para los cinco sensores asociados.

En esta parte, caracterizaremos los códigos binarios de los sensores asociados al multicuerpo R_0 , utilizaremos para este caso, la secuencia SR^{FIM2} .

Sea SR^{FIM2} una secuencia real, entonces los códigos binarios para los cinco sensores en la operación de rastreo sobre la región A_4 son mostrados a continuación:

1 Acción $\rightarrow AC_1 \rightarrow P_0$,

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	1	0	0	0	0
AC_2	T_2	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_1 ó $A_2 \cap A_3$.

2 Acción \rightarrow $AC_1 \rightarrow P_o$.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	1	0	0	0
AC_2	T_2	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_1 ó $A_2 \cap A_3$.

3 Acción \rightarrow $AC_1 \rightarrow P_o$.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	0	1	0	0
AC_2	T_2	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_3 ó $A_2 \cap A_3$.

4 Acción \rightarrow $AC_1 \rightarrow P_o$.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	0	0	1	0
AC_2	T_2	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_3 ó $A_2 \cap A_3$.

5 Acción \rightarrow AC₁ \rightarrow P_o,

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	0	0	0	0	1
AC ₂	T ₂	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la trayectoria τ_{TR} .

6 Acción \rightarrow AC₁ \rightarrow P_o,

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	1	0	1	0	0
AC ₂	T ₂	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A₁ ó A₂∪A₃.

O_i en la región A_T.

7 Acción \rightarrow AC₁ \rightarrow P_o,

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	0	1	0	1	1
AC ₂	T ₂	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A₁ ó A₂∪A₃.

O_i en la región A_T.

O_i en la trayectoria τ_{TR} .

8 Acción \rightarrow AC₁ \rightarrow P_o.

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	1	0	1	0	1
AC ₂	T ₂	0	0	0	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A₄.

9 Acción \rightarrow AC₂ \rightarrow Q_o,

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	0	0	0	0	0
AC ₂	T ₂	0	0	1	0	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A₃ ó A₂∪A₃.

10 Acción \rightarrow AC₂ \rightarrow Q_o,

		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅
AC ₁	T ₁	0	0	0	0	0
AC ₂	T ₂	0	0	0	1	0

Localización del obstáculo.

O_i en la región A₃ ó A₂∪A₃.

11 Acción \rightarrow $AC_2 \rightarrow Q_0$,

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	0	0	0	0
AC_2	T_2	0	0	0	0	1

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_T .

12 Acción \rightarrow $AC_2 \rightarrow Q_0$,

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	0	0	0	0
AC_2	T_2	0	0	1	0	1

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_3 ó $A_3 \cap A_2$.

O_i en la trayectoria τ_{TR} .

13 Acción \rightarrow $AC_2 \rightarrow Q_0$,

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
AC_1	T_1	0	0	0	0	0
AC_2	T_2	0	0	0	1	1

Localización del obstáculo.

O_i en la región A_3 ó $A_3 \cap A_2$.

O_i en la trayectoria τ_{TR} .

3.3 Criterios de evasión.

Para formalizar los criterios de evasión es importante señalar que las secuencias uno a uno generan puntos intermedios, entonces estos puntos se pueden utilizar para tomar decisiones, esto es, si en un determinado evento el robot encuentra obstáculo entonces es posible regresarlo al punto intermedio y que cambie de secuencia ó en su caso regresarlo a home.

Definición 3.3.3.26 Se define la robustez algorítmica de R_0 como el máximo número de secuencias de una familia. Así, sea k la robustez 1, entonces,

$K_1 = [1-4]$ 4 secuencias de la misma familia 1.

$K_2 = [5-8]$ 4 secuencias de la misma familia 2.

esto es, para secuencias uno a uno.

Definición 3.3.3.27 Un robot con robustez algorítmica potencial es aquel que está dotado de al menos dos secuencias, una de cada familia.

3.3.1 Criterios de evasión para un robot de dos grados de libertad.

“Sistema MARIANNE II.”

En esta parte, caracterizaremos los criterios de evasión asociados al multicuerpo mostrado en la figura 3.13.

3.3.1.1 Por secuencias uno a uno sin caracterización del obstáculo.

Criterio 1 Si el obstáculo se encuentra en la región A_1 y el impacto se realiza a través del eslabón C_1 , entonces el regreso debe ser a la discretización anterior y se cambia de secuencia de la misma familia (Si el impacto es en la primera discretización, entonces el regreso debe ser a home).

Criterio 2 Si el obstáculo se encuentra en la región $A_2 \cup A_3$ y el impacto se realiza a través del eslabón C_1 ó C_2 , entonces si es por C_2 el regreso debe ser al punto intermedio de la secuencia seleccionada y se realiza cambio de secuencia de la misma familia, si existe nuevamente impacto por C_2 , entonces el regreso será a la $n-1$ discretización anterior y se cambia de secuencia de la otra familia (Si el impacto es en la primera discretización, entonces el regreso debe ser a home). Si el impacto es por C_1 , entonces el primer criterio es válido, es importante señalar que si por dos secuencias de familias diferentes C_1 impacta, entonces el problema está en condición singular, debido a que ningún punto intermedio puede ser alcanzado.

Criterio 3 Si el obstáculo se encuentra en la región A_T y el impacto se realiza a través del eslabón C_2 , entonces el segundo criterio es válido.

Criterio 4 La secuencia seleccionada en el arranque debe cumplir con la restricción

$$T_{KR\alpha i} > T_{KSCR\alpha i} > T_{KSR\alpha i}, \text{ sí y sólo si } 2\pi \rightarrow T_K \quad [3.53]$$

En este caso,

$T_{KR\alpha i}$ = Tiempo máximo de una reflexión.

$T_{KSCR\alpha i}$ = Tiempo máximo de secuencia combinada.

$T_{KSR\alpha i}$ = Tiempo máximo de secuencia real.

T_K es el máximo tiempo que un actuador necesita para efectuar un giro completo.

Los tiempos de las secuencias están definidos por:

$$SR^{FjMk} \rightarrow T_{KSR\alpha i} = \left| \frac{P_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q_o \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.54]$$

$$R^{FjMk} \rightarrow T_{KR\alpha i} = \left| \frac{P^* \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q^* \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.55]$$

$$SC_{RK}^{FjMk} \rightarrow T_{KSCR\alpha i} = \left| \frac{P^* \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q^* \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.56]$$

(si es la secuencia SC_{R1}^{F2M1}).

Criterio 5 En las secuencias combinadas las sub-reflexiones en los puntos intermedios no serán más de una, ya que cambiaría automáticamente a reflexión real.

Criterio 6 La máxima robustez algorítmica de R_0 es de 8 secuencias, por tanto si en un proceso de evasión han sido agotadas todas las secuencias el problema se considera como singularidad total y R_0 debe regresar a home.

Criterio 7 Para no utilizar todas las secuencias, es necesario que R_0 este dotado de robustez algorítmica potencial, debido a que si no es posible alcanzar el punto intermedio con dos secuencias de familias diferentes no tiene sentido utilizar las 6 restantes.

3.3.2 **Por secuencias uno a uno con caracterización del obstáculo utilizando la configuración espejo y secuencias simultáneas.**

“Sistema MARIANNE IV.”

Antes de definir los criterios de evasión del sistema MARIANNE IV realizaremos el análisis siguiente:

Al hacer uso de las definiciones 3.2.3.23, 3.2.3.24 y 3.2.3.25 tenemos que para los cuatro sensores asociados a las fronteras mayores, el factor $K_{dis} = 0.5$, en tanto para el quinto sensor asociado a la frontera última del cuerpo C_2 el factor $K_{dis} = 0.8$. Por tanto las distancias de sensado para los primeros cuatro sensores es la misma y la de S_5 mayor. En este caso, la

distancia de paro total de R_0^{DV} es $l_{DE1} \in \mathbb{R}^+$ para los cuatro sensores de frontera mayor, y $l_{DE2} \in \mathbb{R}^+$ para S_5 . Sea $l_{EE} \in L$ una recta asociada al punto de paro total, (ver figura 3.18) entonces definiremos un punto tal que:

$$p_{E1} \in C_1^{DV} \cap O_i \neq \emptyset$$

con $p_{E1} \in l_{EE}$, esto es por una relación de incidencia $R_{IE} : C_1^{DV} \times l_{EE} \rightarrow l_{EE}$, con $p_{E1} \in (l_{EE}, C_1^{DV})$, entonces el punto $p_{E1} \in l_{EE}$ lo llamaremos el punto de paro total dentro de la región A_{s1} .

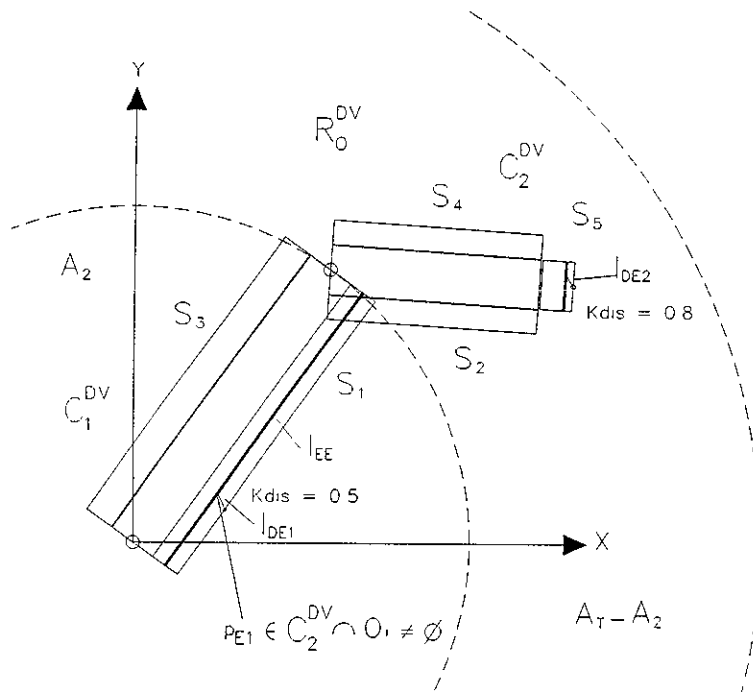


Figura 3.18 Distancias de seguridad.

Las consideraciones anteriores son de suma importancia debido a que el sistema MARIANNE IV es caracterizado en la región $A_T - A_2$. Esto es porque los primeros siete criterios definidos anteriormente han sido agotados y por lo tanto existió singularidad total en la región A_2 . Como consecuencia de que el K_{dis} de S_1 es menor que el de S_5 , entonces siempre que la región de sensado de S_5 sea menor que la de S_1 , el punto de paro total asociado al órgano terminal estará más restringido en el sentido de tener un control muy riguroso sobre el sensado de la frontera menor última. Lo que requerimos con este diseño de los sensores, es que la distancia de paro total asociada al sensor S_5 sea menor a la del sensor S_1 para construir una trayectoria virtual de evasión por rastreo del sensor S_5 . Lo

importante de diseñar una trayectoria de escape, es que se pueden utilizar secuencias simultáneas para realizar la evasión, tomando en cuenta la dimensión del obstáculo es posible que exista también singularidad total en la región $A_T - A_2$. La trayectoria se diseña caracterizando primero con secuencias uno a uno las coordenadas de los impactos virtuales, también con las distancias de seguridad las coordenadas de los puntos de paro total, de forma tal que desde el home se calcule la cinemática inversa de los puntos de impacto virtual. En este caso, las sub-trayectorias de home al primer punto de impacto virtual debe ser una recta con n-discretizaciones, para cada discretización se caracterizan las secuencias simultáneas. La sub-trayectoria desde el primer punto de impacto virtual al segundo punto de impacto virtual debe ser un semi-círculo con n-discretizaciones, el arco generado puede ser en contra ó a favor de las manecillas del reloj, esto depende de la posición del obstáculo y también de la posición del robot. Desde el segundo punto de impacto virtual debemos calcular la cinemática inversa del punto siguiente de la trayectoria real, y la sub-trayectoria asociada debe ser un recta. Bajo estas premisas y de acuerdo con el diseño de los sensores, el órgano terminal deberá a través del sensor S_5 barrer al obstáculo por el semi-círculo, de forma tal que S_5 nunca sea activado en el proceso de evasión por trayectoria virtual de escape. Estas afirmaciones son mostradas en la figura 3.19.

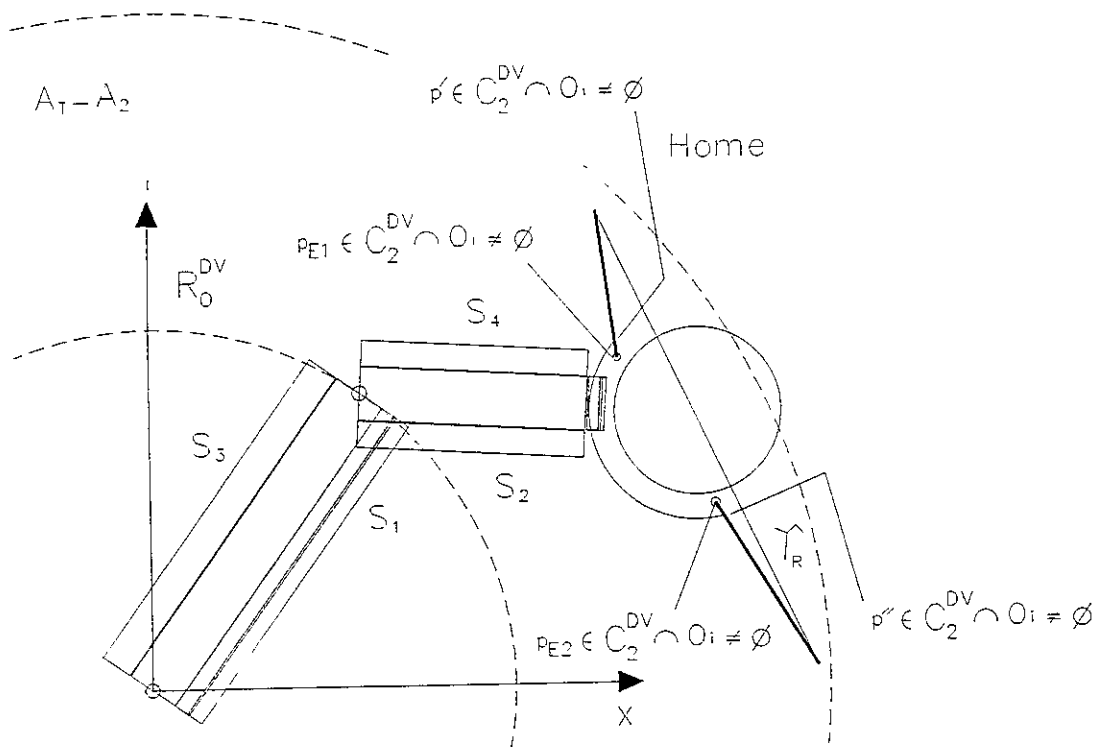


Figura 3.27 Trayectoria virtual de escape.

Entonces, con estas afirmaciones procederemos a generar los criterios siguientes.

Criterio 8 Por trayectoria virtual de rastreo, esto es, el algoritmo debe ser capaz de caracterizar el punto de impacto virtual ($p' \in R_0^{DV} \cap O_i \neq \phi$, $p'' \in R_0^{DV} \cap O_i \neq \phi$,) para generar un semi-círculo de radio $R_c + l_{DE}$, donde R_c es el radio del obstáculo, l_{DE} es la distancia de seguridad del sensor 1, también debe trazarse un semi-círculo en contra ó a favor de las manecillas del reloj. Los puntos de posicionamiento del órgano terminal fuera del obstáculo son $p_{E1} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$ y $p_{E2} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$.

Criterio 9 La secuencia de impacto debe ser una secuencia simultánea real de cualquier familia con los cinco sensores activados, en caso de colisión deberá regresar a $n-1$ discretización y cambiar a secuencias uno a uno y usar los criterios del 1 al 7.

Criterio 10 En caso de no evadir el obstáculo con el criterio 9, entonces el robot debe regresar a home desde la $n-1$ discretización utilizando secuencias simultáneas reales.

Criterio 11 En la posición home cambiar a la configuración espejo y calcular la cinemática inversa del punto $p_{E1} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$.

Criterio 12 Trazar el semi-círculo definido en el criterio 8, del punto $p_{E1} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$ al punto $p_{E2} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$, discretizar en n el semi-círculo y calcular la cinemática inversa.

Criterio 13 Desde el punto $p_{E2} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$ calcular la cinemática inversa del punto terminal de la trayectoria real y trazar una recta con n discretizaciones.

Criterio 14 Desde el home, otorgar salida a R_0 con los cinco sensores activos y con secuencias simultáneas reales.

Criterio 15 El sensor de barrido de la frontera última de C_2^{DV} no deberá activarse.

Criterio 16 Si un sensor de las fronteras mayores es activado, entonces R_o debe ser regresado al punto $p_{E1} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$ y cambiar a la configuración espejo.

Criterio 17 Si en la segunda salida desde el punto $p_{E1} \in R_0^{DV} \cup O_i = S$ se ha activado un sensor de la frontera mayor, entonces R_o deberá ser conducido a home y el problema se considera singularidad total.

3.3.3 Criterios de evasión para un robot de tres grados de libertad. "Sistema CHEVOTRONIC III."

Descripción:

El sistema CHEVOTRONIC III consta de un robot tipo RRR mostrado en 1.9, además, de dos sensores inductivos colocados en los eslabones 2 y 3. Para definir los criterios de este sistema debemos evaluar el número de posibilidades de impacto, para tener un control de las secuencias uno a uno, entonces las consideraciones siguientes deben ser satisfechas:

- 1 El robot deberá poseer una morfología que le permita realizar reflexiones.
- 2 Los eslabones 2 y 3 tendrán la siguiente restricción : $l_1 > l_3 + l_2$.
- 3 Las secuencias serán controladas bajo el siguiente régimen:
Los actuadores(AC_i) serán del mismo tipo(no necesariamente), es decir, deberán realizar una rotación completa(2π) en un tiempo T_K , luego entonces las secuencias estarán gobernadas por las ecuaciones siguientes:

$$SR^{FM_jk} \rightarrow T_{KSR\alpha i} = \left| \frac{P_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{R_o \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.57]$$

$$R^{F_1 M_{jk}} \rightarrow T_{KR\alpha i} = \left| \frac{P^*_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q^*_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{R^*_o \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.58]$$

$$SC_{Rm}^{F_1 M_{jk}} \rightarrow T_{KSCR\alpha i} = \left| \frac{P^*_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{Q_o \cdot T_K}{2\pi} \right| + \left| \frac{R_o \cdot T_K}{2\pi} \right| \quad [3.59]$$

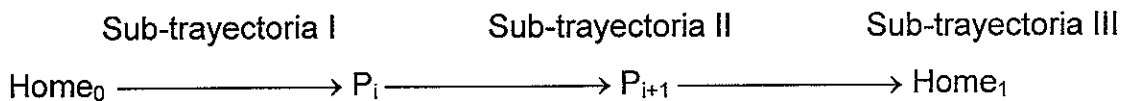
(si es la secuencia $SC_{R1}^{F_1 M_{23}}$).

Nota : Las subreflexiones de las secuencias combinadas no serán más de tres, ya que entonces se transformaría a una reflexión.

Plantearemos ahora la siguiente desigualdad:

$$T_{KR\alpha i} > T_{KSCR\alpha i} > T_{KSR\alpha i} , \text{ sí y sólo si } 2\pi \rightarrow T_K. \quad [3.60]$$

- 4 Debemos conocer sobre que sub-trayectoria están actuando los sensores, entonces por consecuencia de la ecuación[2.5] existen dos puntos intermedios para el manipulador tipo RRR, observemos que:



Siendo P_i el i-ésimo punto intermedio.

Los impactos virtuales pueden suceder en cualquiera de las sub-trayectorias.

- 5 Debemos condicionar los regresos, en caso de impacto, entonces el manipulador puede regresar tanto a Home₀ como a P_i y P_{i+1} de manera que se optimice el tiempo en la evasión del obstáculo, esto dependerá de la sub-trayectoria donde se realizó el impacto.

Con las condiciones anteriores debemos evaluar el número de posibilidades en las cuales los eslabones 2 y 3 puedan impactar, debemos analizar secuencia por secuencia, para este propósito utilizaremos la secuencia real SR^{F1M23} , el código de esta secuencia se muestra a continuación:

SR^{F1M23}

	AC ₁	AC ₂	AC ₃
T ₁	1	0	0
T ₂	0	1	0
T ₃	0	0	1

1 Si el actuador AC₁ se activa en T₁ podemos tener las siguientes posibilidades:

Sub-trayectoria sensada Home₀ \longrightarrow P_i

a).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	1	1

Esto es, impacto por el eslabón 2 y 3.

b).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	1	0

Impacto por el eslabón 2.

c).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	0	1

Esto es, impacto por el eslabón 3.

En este caso, el regreso debe ser a Home₀.

Criterio 18: 1 Si se selecciona sub-reflexión, automáticamente cambia a secuencia combinada de la misma familia.

2 Seleccionar la reflexión de la secuencia real utilizada.

2 Si el órgano terminal alcanzó P_i, entonces AC₂ se activa en T₂ y las condiciones siguientes se satisfacen.

Sub-trayectoria sensada P_i → P_{i+1}

a).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	0	0
T ₂	0	1	0	1	1

Esto es, impacto por el eslabón 2 y 3.

b).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	0	0
T ₂	0	1	0	1	0

Esto es, impacto por el eslabón 2.

c).-

	AC ₁	AC ₂	AC ₃	S ₁	S ₂
T ₁	1	0	0	0	0
T ₂	0	1	0	0	1

Esto es, impacto por el eslabón 3.

Entonces el regreso puede ser a P_i ó a Home₀ y

- Criterio 19:**
- 1 A P_i , y realice un cambio a secuencia combinada de la misma familia.
 - 2 A $Home_0$ si por la sub-reflexión utilizada no puede librar el obstáculo, entonces se realiza cambio de secuencia.
 - 3 Si el órgano terminal alcanzó P_{i+1} , entonces AC_3 se activa en T_3 .

Sub-trayectoria sensada $P_{i+1} \longrightarrow Home_1$

a).-

	AC_1	AC_2	AC_3	S_1	S_2
T_1	1	0	0	0	0
T_2	0	1	0	0	0
T_3	0	0	1	0	1

Esto es impacto sólo por el eslabón 3.

Luego el regreso es a P_{i+1} o $Home_1$ y

- Criterio 20:**
- 1 A P_{i+1} , cambio a secuencia combinada de la misma familia.
 - 2 A $Home_0$, debido que si la sub-reflexión utilizada no logró evadir el obstáculo, no tiene caso que regrese a P_i , de esta manera se realiza cambio de secuencia.

Observemos que para cada secuencia utilizada existen 7 formas posibles de impacto.

En la figura 3.20 se observa la configuración del sistema CHEVOTRONIC III.

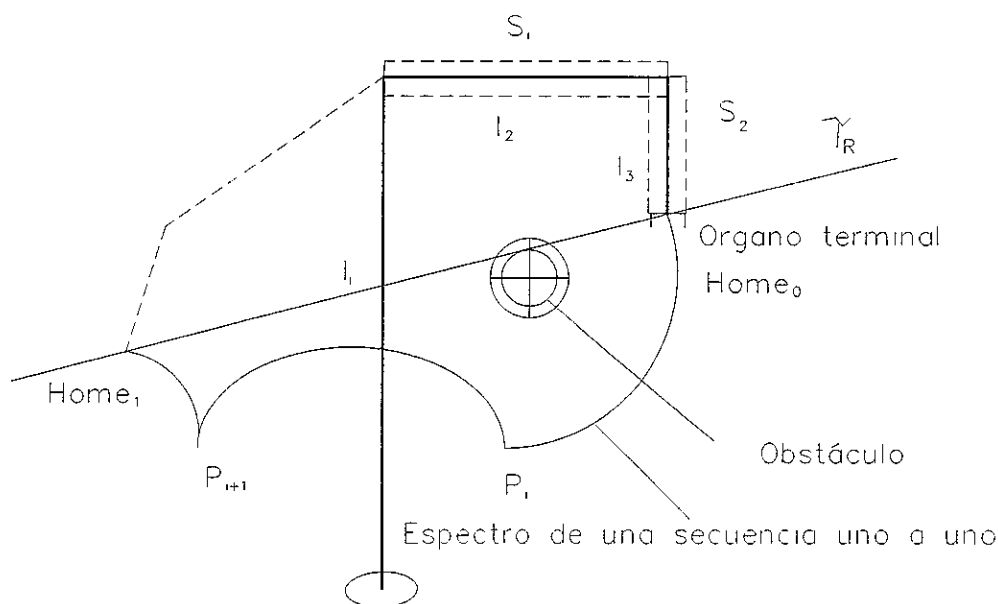


Figura 3.20 El sistema CHEVOTRONIC III

3.4 Problemas de evasión.

En esta parte, formularemos tres problemas de evasión de obstáculos, utilizaremos dos sistemas mecánicos de cadena abierta de dos y tres grados de libertad tipo RR y tipo RRR.

Los problemas de evasión formulados utilizarán los 20 criterios definidos anteriormente.

3.4.1 El sistema MARIANNE II.

3.4.1.1 Descripción:

El sistema MARIANNE II consiste de un robot de dos grados de libertad tipo RR dotado de un algoritmo que contiene secuencias uno a uno, un sistema de visión que otorga la información de los obstáculos y cinco sensores inductivos, cuatro de ellos se localizan en las fronteras mayores de los eslabones que componen al robot y uno situado en la frontera menor última del órgano terminal. El sistema MARIANNE II utiliza los criterios del 1 al 7 definidos anteriormente fundamentados bajo el marco teórico del impacto real. El objetivo

con este sistema, es utilizar las secuencias uno a uno para la evasión de obstáculos en el entorno de dos grados de libertad sin hacer consideraciones de impacto virtual, para este caso supondremos que el programa tiene la capacidad de detener al robot antes de que colisione con algún obstáculo. El sistema utiliza las ocho secuencias reales caracterizadas para el robot de dos grados de libertad y por lo tanto utiliza la máxima robustez algorítmica potencial. Para utilizar el sistema MARIANNE II en un problema de evasión, es necesario construir un diálogo virtual entre el programa de toma de decisiones, los sensores y el sistema de visión.

3.4.1.2 Definición del problema:

En un cierto proceso de producción efectuado con robot, se tienen problemas de invasión del área de trabajo por obstáculos, antes, algunos robots clase I han colisionado con dichos objetos y han tenido que ser reemplazados, lo cual eleva el costo final de la operación del proceso, por tanto es necesario implementar un sistema que permita evadir los obstáculos y por consecuencia reducir los costos de operación aún se tenga retrasos al utilizar dicho sistema.

3.4.1.3 Solución al problema:

Para solucionar el problema utilizaremos un robot clase II, en este caso el sistema MARIANNE II.

Debido a la complejidad de dicho proceso en el sentido de invasión de obstáculos no previstos, entonces particularizaremos el problema condicionando que los obstáculos no impactarán sobre el home del robot, sin embargo, es posible que en el proceso de evasión se tengan consideraciones de singularidad total cuando las dimensiones de los obstáculos sobrepasen la capacidad del sistema.

3.4.1.4 Desarrollo del problema:

Supongamos que existe una condición de obstáculo en la región $A_4 = A_T \cup A_1$ en un cierto intervalo de tiempo de operación del proceso, entonces simularemos tal condición con las características siguientes:

1 Existen dos obstáculos dentro de la región $A_4 = A_T \cup A_1$ detectados por un sistema de visión.

2 El sistema de visión informa de la situación de la forma siguiente:

- a) Obstáculo 1 en la región A_1 ,
- b) Obstáculo 2 en la región A_T .
- c) Características de los obstáculos:

Obstáculo 1 : Prisma rectangular

Obstáculo 2 : Esferoidal

d) Posición de los obstáculos desde el (0,0).

Obstáculo 1 : (x_1, y_1) .

Obstáculo 2 : (x_2, y_2) .

3 El sistema de visión informa de la situación de la forma siguiente:

Debido a que la evasión se realizará dentro del entorno de dos grados de libertad entonces se harán las siguientes consideraciones:

- a) El Obstáculo 1 se convertirá de: prisma rectangular \rightarrow rectángulo sobre el plano XY.
- b) El Obstáculo 2 se convertirá de: esferoidal \rightarrow circular sobre el plano XY.

- 4 Debido a que el sistema de visión también otorga información sobre las dimensiones de los obstáculos, entonces también es posible considerar que como la trayectoria pre-escrita del robot ya está caracterizada, por tanto ya se conocen los desplazamientos angulares de los eslabones para cada punto de la trayectoria, entonces se conoce el máximo y mínimo desplazamiento angular. De lo anterior es posible considerar singularidad total antes de que el robot intente evadir los obstáculos.
- 5 Las dimensiones de los eslabones son las siguientes:
- $$l_1 = D_1$$
- $$l_2 = D_2$$
- 6 Las restricciones del sistema son:
- a) $l_1 > l_2$
 - b) $T_{\max SR} < T_{\max SC} < T_{\max R}$
 - d) La robustez algorítmica potencial es máxima.
- 7 Para la simulación de este problema consideraremos, que si es posible la evasión, debido a que las dimensiones de los obstáculos así lo permiten.

En la figura 3.21 se muestra al sistema MARIANNE II y a los obstáculos en las regiones A_1 y A_T .

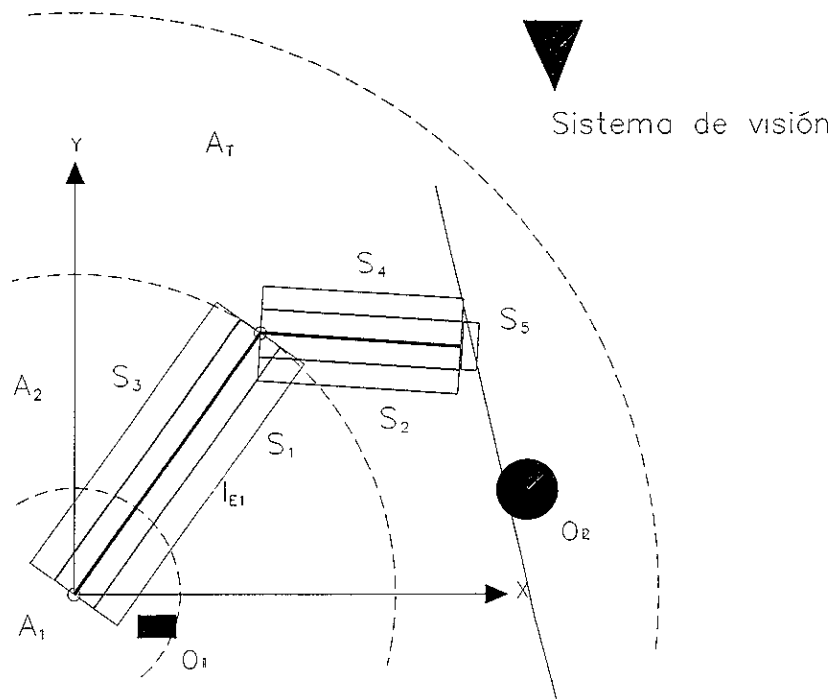


Figura 2.21 El sistema MARIANNE II.

3.4.1.5 Desarrollo de la evasión (crónica):

Con las restricciones anteriores realizaremos un breve resumen del diálogo entre los sensores y algoritmo de forma tal que se describa el proceso de evasión. Esto es,

“Salida₁ de home con $SR^{F1M2}(+)$, sensor S_2 activado”obstáculo en la región A_1 ”.

Regreso a home con $SR^{F1M2}(-)$, R_0 en home. Salida₂ de home con $SC_{R1}^{F1M2}(+)$,

punto intermedio alcanzado”evasión de obstáculo en A_1 ”. Secuencia de operación de la secuencia combinada $SC_{R1}^{F1M2}(+)$ hacia el punto siguiente de la trayectoria....., sensor

S_5 activado”obstáculo en la región A_T ”. Regreso al punto intermedio con $SC_{R1}^{F1M2}(-)$,

punto intermedio alcanzado. Regreso al home con $SC_{R1}^{F1M2}(-)$, home alcanzado.

Salida₃ del home” información del sistema de visión: obstáculo nulo en la región A_1 ”. Salida₃

de home con $SR^{F2M1}(+)$, sensores 1,2,3,4 y 5 desactivados, punto intermedio alcanzado. Secuencia de operación de la secuencia real $SR^{F2M1}(+)$ hacia el punto siguiente de la trayectoria....., sensores 1,2,3,4 y 5 desactivados, alcance del punto siguiente de la trayectoria, "positivo", evasión efectuada con SR^{F2M1} . Eureka!.

Nota: Los símbolos (+) ó (-) delante de las secuencias indican: (+) salida, (-) regreso.

La tercera salida se realiza con la secuencia SR^{F2M1} aún no exista obstáculo en la región A_1 , debido a que realizó el primer intento con la secuencia SR^{F1M2} y no logro la evasión, además, el sistema tiene un proceso secuenciado.

3.4.1.6 Representación esquemática de la evasión:

Una representación esquemática de la evasión se muestra en la figura 3.22.

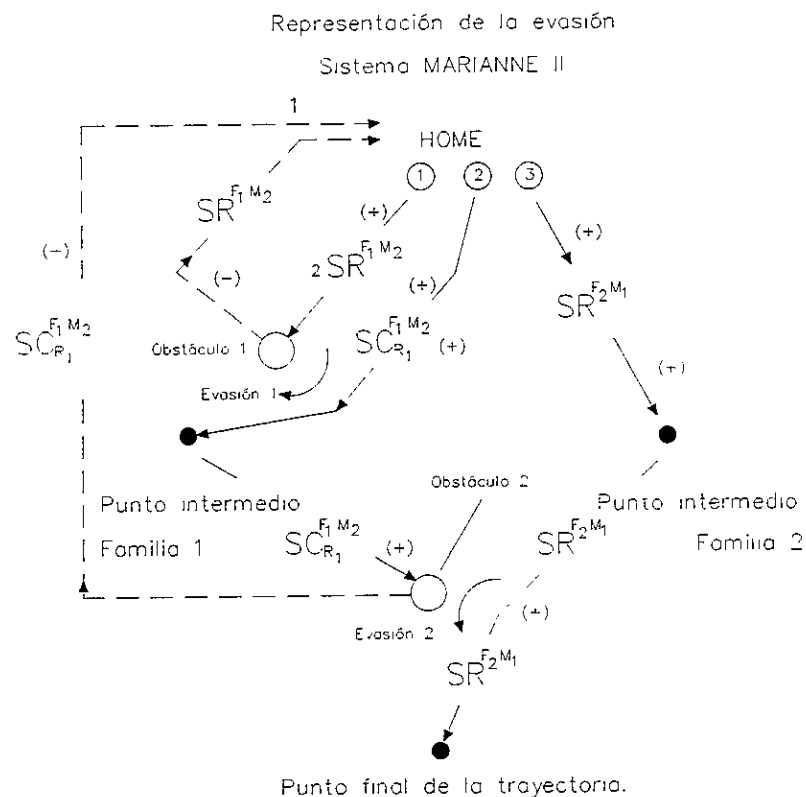


Figura 3.22 Esquema de la evasión con el sistema MARIANNE II.

3.4.1.7 Diálogo general del proceso de evasión:

En esta parte, presentaremos el diálogo completo entre el algoritmo y los sensores del sistema MARIANNE II, así también las ordenes y respuestas de salidas y regresos.

Sistema Marianne II. Diálogos virtuales.

Sin caracterización del obstáculo y con secuencias uno a uno.

Diálogo

Algoritmo-----sensores

Información del sistema de visión	Obstáculos en:
	En la región A_1
	En la región A_4
Orden 1 Salida 1	Activa $AC_1 \rightarrow P_0$
	Secuencia de salida ₁ SR^{F1M2}
	AC ₁ AC ₂ T
	1 0 T ₁
	0 1 T ₂
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_3
Respuesta 1	Impacto virtual en el punto (x_1, y_1)
	Código de rastreo
	S ₁ S ₂ S ₃ S ₄ S ₅
	1 0 0 0 0
	Región de impacto A_1
	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k1} < \alpha_1$
	Paro total en el punto (x, y)
Punto intermedio alcanzado:	

	Negativo.
Orden 2	Regresa a home
	Aplica $-\alpha_{k1}$ a AC_1
Respuesta 2	R_o en home
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_4
Orden 3 Salida 2	Activa $AC_1 \rightarrow P_0^*$
	Secuencia de salida ₂ SC_{R1}^{F1M2}
	AC_1 AC_2 T
	-1 0 T_1
	0 1 T_2
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_3
Respuesta 3	Punto intermedio alcanzado por $p_{OT} \in C_2$
	"Positivo"
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 0
	Región sensada $A_2 \cap A_3$
	Desplazamiento angular recorrido
	$\alpha_1 - 2\pi$
Orden 4	Activa $AC_2 \rightarrow Q_o$
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_3
Respuesta 4	Impacto virtual en el punto (x_2, y_2)
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 1

	Región de impacto $\tau_R \subset A_T$
	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k2} < \alpha_2$
	Paro total en el punto (x_{21}, y_{21})
	Punto final alcanzado: Negativo.
Orden 5	Regresa al punto intermedio.
	Aplica $-\alpha_{k2}$ a AC_2
Respuesta 5	Organo terminal $p_{OT} \in C_2$ en el punto intermedio
	Código de rastreo:
	S ₁ S ₂ S ₃ S ₄ S ₅
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_3
	Desplazamiento angular recorrido
	$-\alpha_{k2}$
Orden 6	Regresa a home
	Aplica $\rightarrow P_o^*$ a AC_1
Respuesta 6	R_o en home
	Código de rastreo
	S ₁ S ₂ S ₃ S ₄ S ₅
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_4
Orden 7 Salida 3	Activa $AC_2 \rightarrow Q_o$
	Secuencia de salida ₃ SR ^{F2M1}
	AC ₁ AC ₂ T
	0 1 T ₁
	1 0 T ₂
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_3
Respuesta 7	Organo terminal $p_{OT} \in C_2$ en el punto intermedio
	Código de rastreo:
	S ₁ S ₂ S ₃ S ₄ S ₅
	0 0 0 0 0

	Región sensada A_4
	Desplazamiento angular recorrido: α_2
Orden 8	Activa $AC_1 \rightarrow P_o$
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_4
Respuesta 8	Órgano terminal $p_{OT} \in C_2$ en el punto final
	Código de rastreo:
	$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5$
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_4
	Desplazamiento angular recorrido: α_1
Letrero de información final	Alcance del objetivo:
	Positivo .Eureka!
Información general de evasión	
Número de secuencias activadas:	3
Sensores activados:	3
Región sensada:	A_4
Nomenclatura de las secuencias:	$SR^{F1M2} \quad SC_{R1}^{F1M2} \quad SR^{F2M1}$
Secuencia de evasión final:	SR^{F2M1}

Nota: En este caso, el letrero de impacto virtual es en el sentido de que el robot se detiene antes de impactarse con el obstáculo.

3.4.2 El sistema MARIANNE IV.

3.4.2.1 Descripción:

El sistema MARIANNE IV es una especialización del sistema MARIANNE II. Consiste en el mismo robot con las cinco sensores y el sistema de visión, con la característica de usa 17 criterios en la evasión de obstáculos. Este sistema tiene la capacidad de evadir obstáculos con dimensiones más grandes. La condición para que el sistema sea funcional es que los obstáculos se encuentren en el área de trabajo, utiliza secuencias uno a uno y simultáneas.

El sistema tiene singularidad total si los obstáculos se encuentran en la región A_1 , esto es porque las dimensiones del obstáculo son lo suficientemente grandes de manera que sobrepasan el máximo desplazamiento angular, entonces no se pueden utilizar secuencias uno a uno en esa región(en caso de que las dimensiones sean pequeñas se usará primero el sistema MARIANNE II).

3.4.2.3 Definición del problema:

En el proceso anteriormente caracterizado, se ha utilizado el sistema MARIANNE II con éxito, sin embargo se tiene el problema de invasión de obstáculos con dimensiones mayores que los definidos anteriormente, también se ha resuelto que los obstáculos sean desviados de forma tal que la región A_1 se considere libre de obstáculos, no así el área de trabajo A_T . Por lo tanto se necesita implementar otro sistema de mayor capacidad que el sistema MARIANNE II de forma tal que el problema sea resuelto.

3.4.2.3 Solución al problema:

Una solución viable a este nuevo problema es sustituir al sistema MARIANNE II por el sistema MARIANNE IV, cabe señalar que el sistema MARIANNE IV también tiene restricciones en cuanto a las dimensiones de los obstáculos, por lo tanto el problema no es resuelto es su totalidad, esto es siempre y cuando los 17 criterios sean agotados.

3.4.2.4 Desarrollo del problema:

Supongamos que al igual que el modelo anterior, existe una condición evasión de obstáculo en un determinado tiempo de operación del proceso, entonces realizaremos la simulación con la información que otorga el sistema de visión para ese intervalo de tiempo. A continuación se caracteriza el proceso:

- 1 El sistema de visión informa:
Obstáculo en la región A_T
Característica del obstáculo:
Esferoidal \rightarrow Circular en el plano XY.
- 2 Posición del centro del obstáculo con respecto al (0,0).
Obstáculo 1 : (X_{ob} , Y_{ob})
- 3 Dimensión del obstáculo.
 $r_c = R_1$

Con la información obtenida el sistema decide iniciar la evasión de la forma siguiente:

- a) Debido a la posición del obstáculo, no puede evaluarse si se usan los primeros siete criterios, esto es, utilizar primero el sistema MARIANNE II y después el sistema MARIANNE IV, para simular este problema utilizaremos el sistema MARIANNE II para comprobar si es posible realizar la evasión con los primeros siete criterios.
- b) Si el sistema MARIANNE II tiene singularidad total, entonces se usará el sistema MARIANNE IV usando los criterios del 8 al 17 con el robot posicionado en Home.
- c) Las secuencias de salida del sistema MARIANNE II serán secuencias uno a uno.
- d) Las secuencias de salida del sistema MARIANNE IV serán secuencias simultáneas.
- e) La modificación de la trayectoria de evasión no alterará la operación del proceso.

- f) Las restricciones físicas del sistema MARIANNE IV son las mismas que las de el sistema MARIANNE II.

En la figura 3.23 se observa al sistema MARIANNE IV.

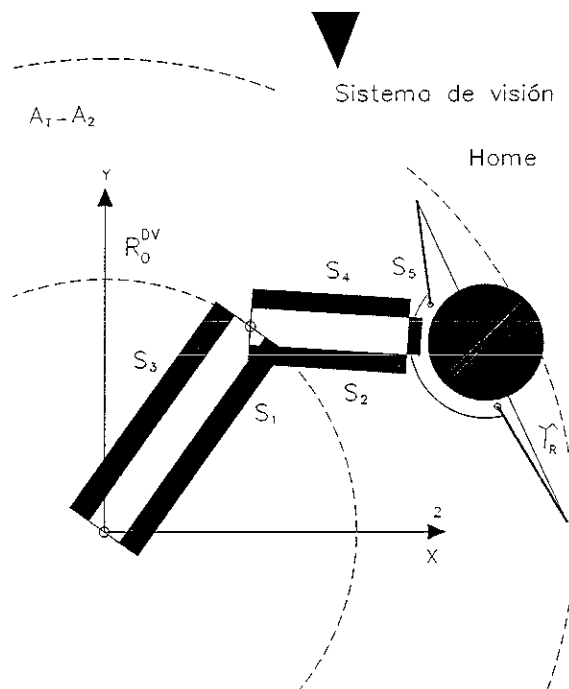


Figura 3.23 El sistema MARIANNE IV.

3.4.2.5 Desarrollo de la evasión (crónica):

A continuación realizaremos un breve resumen del diálogo de evasión caracterizado por los dos sistemas. Esto es,

“Información del sistema de visión; obstáculo en la región A_T “..... “Información de toma de decisión”; no es posible decidir si se utiliza los criterios del 1 al 7 ó del 8 al 17. Decisión, salida con el sistema MARIANNE II, “ Salida₁ con SR^{F1M2}(+), sensor 4 activado “obstáculo en A_T”, coordenadas del punto de impacto virtual R₁ (x₁, y₁), coordenadas del

punto de paro total $V_1 (x_2, y_2)$. Regreso a home con $SR^{F1M2} (-)$ robot en home. Salida₂ con $SC_{R1}^{F1M2} (+)$, sensor 3 activado “obstáculo en A_T ”, coordenadas del punto de impacto virtual $R_2 (x_3, y_3)$, coordenadas del punto de paro total $V_2 (x_4, y_4)$. Regreso a home con $SC_{R1}^{F1M2} (-)$ robot en home. Salida₃ con $SR^{F2M1} (+)$ sensor activado S_4 “obstáculo en A_T ”, coordenadas del punto de impacto virtual $R_3 (x_5, y_5)$, coordenadas del punto de paro total $V_3 (x_6, y_6)$. Regreso a home con $SR^{F2M1} (-)$ robot en home.

Información de toma de decisión” singularidad total del sistema MARIANNE II” , criterios del 1 al 7 agotados”. “Diálogo interno”, utilizar el sistema MARIANNE IV. “Diálogo interno”..... Información procesada, coordenadas del los puntos de impacto virtual y paro total procesada, primer intento, $R_1 (x_1, y_1)$, $V_1 (x_2, y_2)$, segundo intento , $R_2 (x_3, y_3)$, $V_2 (x_4, y_4)$. “Diálogo interno, secuencia de programa”, aplica la transformación $R(p, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la ecuación cinemática de posición no deformada(en home) , cálculo realizado. Salida₄ con secuencia real simultánea $SRS^{F1C1} (+)$ hacia la configuración espejo....., sensores 1,2,3,4 y

5 sin señal de obstáculo, reflexión realizada en home. “Diálogo interno” desde la posición home calcula la cinemática inversa del punto de paro total $V_1 (x_2, y_2)$ y trazar una recta con 3 discretizaciones, caracterizar secuencias simultáneas.....cálculo y caracterización realizada. Desde la posición $V_1 (x_2, y_2)$ calcula la cinemática inversa del punto de paro total $V_2 (x_4, y_4)$ y traza un semi-círculo en el sentido anti-horario con corrección de $1/7 r_c$ con 4 discretizaciones, caracterizar secuencias simultáneas.....cálculo y caracterización realizadas. Desde la posición $V_1 (x_4, y_4)$ calcula la cinemática inversa del punto buscado de la trayectoria real y traza una recta con 2 discretizaciones, caracterizar secuencias simultáneas.....cálculo y caracterización realizada. Diálogo de orden de salida. “Salida₅ con $SRS^{F1C1} (+)$ SRS^{F2C1} punto $V_2(x_2, y_2)$ alcanzado. Salida₅₁ con $SRS^{F1C1} (+)$
 SRS^{F2C1} punto $V_2(x_4, y_4)$ alcanzado. Salida₅₂ con $SRS^{F1C1} (+)$ SRS^{F2C1} punto de la trayectoria real alcanzado. “Evasión efectuada”. Eureka!

..... punto de la trayectoria real alcanzado. “Evasión efectuada”. Eureka!

Nota: El diálogo anterior es una breve descripción de la utilización de los criterios del 1 al 17.

Los puntos suspensivos se interpretan como acciones de orden y contestación en cierto intervalo de tiempo.

3.4.2.6 Representación esquemática de la evasión:

Una representación esquemática de la evasión se muestra en la figura 3.24.

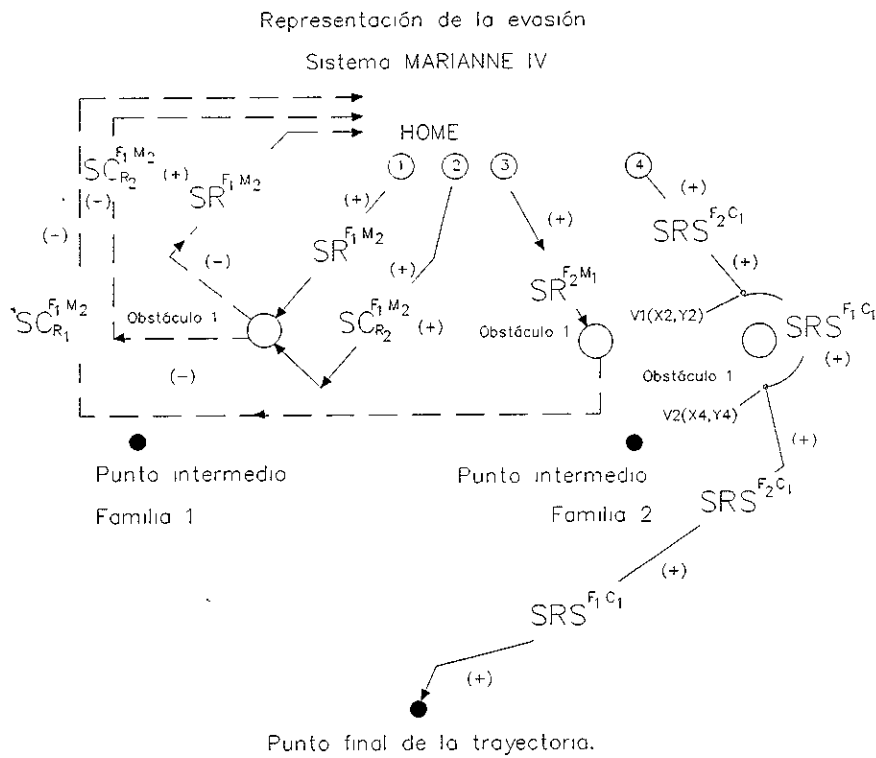


Figura 3.24 Representación esquemática de la evasión del sistema MARIANNEIV.

3.4.2.7 Diálogo general del proceso de evasión:

En esta parte, presentaremos el diálogo completo entre el algoritmo y los sensores del sistema MARIANNE IV, así también las ordenes y respuestas de salidas y regresos.

Sistema Marianne IV

Diálogos virtuales

Con caracterización del obstáculo, con secuencias uno a uno, secuencias simultáneas, trayectoria virtual de evasión y reflexión en la configuración no deformada.

Diálogo

Algoritmo-----sensores

Información del sistema de visión	Obstáculo en:									
	la región A_T									
Orden 1	Aplica el sistema MARIANNE II, por incertidumbre de tamaño y dimensiones del obstáculo.									
Orden 2	Activa $AC_1 \rightarrow P_0$									
Salida 1	Secuencia de salida ₁ SR ^{F1M2}									
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>AC_1</th> <th>AC_2</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>T_1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>T_2</td> </tr> </tbody> </table>	AC_1	AC_2	T	1	0	T_1	0	1	T_2
AC_1	AC_2	T								
1	0	T_1								
0	1	T_2								
	Sensando:									
	por órgano terminal A_T									
	por región de barrido A_3									
Respuesta 1	Impacto virtual en el punto $R_1(x_1, y_1)$									
	Paro total en el punto $V_1(x_2, y_2)$									
	Código de rastreo									
	$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5$									

	0 0 0 1 0
	Región de impacto A_3
	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k1} < \alpha_1$
	Sub-trayectoria sensada home $\rightarrow p_{11}$
	Punto intermedio alcanzado:
	Negativo.
Orden 3	Regresa a home
	Aplica $-\alpha_{k1}$ a AC_1
Respuesta 2	R_o en home
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_4
	Sub-trayectoria sensada home $\leftarrow p_{11}$
Orden 4 Salida 2	Activa $AC_1 \rightarrow P_o^*$
	Secuencia de salida ₂ SC_{R1}^{F1M2}
	AC_1 AC_2 T
	-1 0 T_1
	0 1 T_2
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
	por región de barrido A_4
Respuesta 3	Impacto virtual en el punto $R_2(x_3, y_3)$
	Paro total en el punto $V_2(x_4, y_4)$
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 1 0 0
	Región de impacto A_3
	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k1} < \alpha_1 - 2\pi$
	Sub-trayectoria sensada home $\rightarrow p_{12}$
	Punto intermedio alcanzado:
	Negativo.
Orden 5	Regresa a home

	Aplica $-\alpha_{k1}$ a AC_1
Respuesta 4	R_o en home
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_4
	Sub-trayectoria sensada home $\leftarrow p_{12}$
Orden 6 Salida 3	Activa $AC_2 \rightarrow Q_o$
	Secuencia de salida ₃ SR^{F2M1}
	AC_1 AC_2 T
	0 1 T_1
	1 0 T_2
	Sensando:
	por órgano terminal A_T
por región de barrido A_3	
Respuesta 5	Impacto virtual en el punto $R_3(x_5, y_5)$
	Paro total en el punto $V_3(x_6, y_6)$
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 1 0
	Región de impacto A_3
	Desplazamiento angular recorrido α_{k2}
	Sub-trayectoria sensada home $\rightarrow p_{21}$
Punto intermedio alcanzado:	
Negativo.	
Orden 6	Regresa a home
	Aplica $-\alpha_{k2}$ a AC_2
Respuesta 5	R_o en home
	Código de rastreo
	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5
	0 0 0 0 0
	Región sensada A_3
	Sub-trayectoria sensada home $\leftarrow p_{21}$

Orden 7	Aplica el sistema MARIANNE IV, siete criterios agotados.										
Diálogo interno entre el sistema	Realización de cálculos y trayectoria virtual de evasión										
Orden 8	Aplica la transformación $R(p, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la ecuación cinemática de posición en home, calcula la cinemática inversa y caracteriza la secuencia simultánea.										
Respuesta 6	<p>Cálculo realizado:</p> $\alpha_{PND1} = \Psi_1$ $\alpha_{PND2} = \Psi_2$ $\Psi_1 > \Psi_2$ <p>SRS^{FIC1}</p>										
Diálogo entre el sistema y los actuadores	Reflexión en el home.										
Orden 9	<p>Activa $AC_1 \rightarrow \Psi_1$ Activa $AC_2 \rightarrow \Psi_2$ Secuencia de salida SRS^{FIC1}</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">AC_1</td> <td style="text-align: center;">AC_2</td> <td style="text-align: center;">T</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">T_1</td> </tr> </table> <p>Sensando: por órgano terminal A_T por región de barrido A_3</p>	AC_1	AC_2	T	1	1	T_1				
AC_1	AC_2	T									
1	1	T_1									
Respuesta 7	<p>R_0 en home Código de rastreo</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">S_1</td> <td style="text-align: center;">S_2</td> <td style="text-align: center;">S_3</td> <td style="text-align: center;">S_4</td> <td style="text-align: center;">S_5</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> <td style="text-align: center;">0</td> </tr> </table> <p>Región sensada A_4</p>	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	0	0	0	0	0
S_1	S_2	S_3	S_4	S_5							
0	0	0	0	0							

Diálogo entre el sistema interno	Definición de la trayectoria virtual de evasión
Orden 10	Cálcula la cinemática inversa del punto de impacto virtual $R_1 (x_2, y_2)$
Respuesta 8	Cálculo realizado: $\alpha_{z1} = \Psi_{1V1}$ $\alpha_{z2} = \Psi_{2V1}$
Orden 11	Traza una recta del home al punto virtual $R_1 (x_2, y_2)$ y discretiza en 3 la recta, calcula la cinemática inversa y caracteriza las secuencias simultáneas.
Respuesta 9	Cálculo realizado: $\alpha_{z3} = \Psi_{1TV}$ $\alpha_{z4} = \Psi_{2TV}$ $\alpha_{z5} = \Psi_{3TV}$ $\alpha_{z6} = \Psi_{4TV}$ $\alpha_{z1} = \Psi_{1V1}$ $\alpha_{z2} = \Psi_{2V1}$ $\Psi_{1V1} > \Psi_{2V1}$ $\Psi_{1TV} > \Psi_{2TV}$ $\Psi_{3TV} < \Psi_{4TV}$ Para n=1 SRS ^{F1C1} Para n=2 SRS ^{F2C1} Para n=3 SRS ^{F1C1} Sub-trayectoria virtual de escape trazada.
Orden 12	Cálcula la cinemática inversa del punto de impacto virtual $R_1 (x_2, y_2)$ al punto de impacto virtual $R_2 (x_4, y_4)$
Respuesta 10	Cálculo realizado:

	$\alpha_{z7} = \Psi_{1V2}$ $\alpha_{z8} = \Psi_{2V2}$
Orden 13	Traza un semi-círculo del punto virtual $V_1 (x_2,y_2)$ al punto virtual $V_2 (x_2,y_2)$ y discretiza en 4, calcula la cinemática inversa y caracteriza las secuencias simultáneas.
Respuesta 11	<p>Cálculo realizado:</p> $\alpha_{z9} = \Psi_{5TV}$ $\alpha_{z10} = \Psi_{6TV}$ $\alpha_{z11} = \Psi_{7TV}$ $\alpha_{z12} = \Psi_{8TV}$ $\alpha_{z13} = \Psi_{9TV}$ $\alpha_{14} = \Psi_{10TV}$ $\alpha_{z7} = \Psi_{1V2}$ $\alpha_{z8} = \Psi_{2V2}$ $\Psi_{1V1} > \Psi_{2V2}$ $\Psi_{5TV} > \Psi_{6TV}$ $\Psi_{7TV} < \Psi_{8TV}$ $\Psi_{9V1} > \Psi_{2V10}$
	<p>Para n=1 SRS^{F1C1}</p> <p>Para n=2 SRS^{F2C1}</p> <p>Para n=3 SRS^{F1C1}</p> <p>Para n=4 SRS^{F2C1}</p> <p>Sub-trayectoria virtual de escape trazada.</p>
Orden 14	Cálcula la cinemática inversa del punto de paro total $V_2 (x_4,y_4)$ al punto siguiente de la trayectoria real
Respuesta 12	<p>Cálculo realizado:</p> $\alpha_{z15} = \Psi_{1PTR}$

	$\alpha_{z16} = \Psi_{2PTR}$						
Orden 15	Traza una recta del punto virtual $R_2(x_2, y_2)$ al punto siguiente de la trayectoria real, discretiza en 2, calcula la cinemática inversa y caracteriza las secuencias simultáneas.						
Respuesta 13	<p>Cálculo realizado:</p> $\alpha_{z17} = \Psi_{11TV}$ $\alpha_{z18} = \Psi_{112TV}$ $\alpha_{z15} = \Psi_{1PTR}$ $\alpha_{z16} = \Psi_{2PTR}$ $\Psi_{1PTR} > \Psi_{2PTR}$ $\Psi_{11TV} < \Psi_{12TV}$						
	<p>Para $n=1$ SRS^{F1C1}</p> <p>Para $n=2$ SRS^{F2C1}</p> <p>Sub-trayectoria virtual de escape trazada.</p>						
Diálogo entre el sistema y los actuadores	Intento de evasión por trayectoria virtual						
Orden 16	<p>Activa $AC_2 \rightarrow \Psi_{1TV}$</p> <p>Activa $AC_1 \rightarrow \Psi_{2TV}$</p> <p>Secuencias de salida</p> $SRS^{F1C1} \dots SRS^{F2C1} \dots SRS^{F1C1}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: center;">AC_1</td> <td style="text-align: center;">AC_2</td> <td style="text-align: center;">T</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">T_1</td> </tr> </table> <p>Sensando:</p> <p>por órgano terminal A_T</p> <p>por región de barrido $A_3 \cup A_2$</p>	AC_1	AC_2	T	1	1	T_1
AC_1	AC_2	T					
1	1	T_1					
Respuesta 14	<p>Punto de impacto virtual $V_1(x_2, y_2)$ alcanzado por el órgano terminal</p> <p>Código de rastreo</p>						

	S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 0 0 0 0 0 Región sensada A_4
Orden 17	Activa $AC_1 \rightarrow \Psi_{7TV}$ Activa $AC_2 \rightarrow \Psi_{8TV}$ Secuencias de salida SRS^{F1C1} SRS^{F2C1} SRS^{F1C1} SRS^{F2C1} AC_1 AC_2 T 1 1 T_1 Sensando: por órgano terminal A_T por región de barrido $A_3 \cup A_1$
Respuesta 15	Punto de impacto virtual $V_2(x_4, y_4)$ alcanzado por el órgano terminal Código de rastreo S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 0 0 0 0 0 Región sensada A_4
Orden 18	Activa $AC_1 \rightarrow \Psi_{1PTR}$ Activa $AC_2 \rightarrow \Psi_{2PTR}$ Secuencias de salida SRS^{F1C1} SRS^{F2C1} AC_1 AC_2 T 1 1 T_1 Sensando: por órgano terminal A_T por región de barrido $A_3 \cup A_2$
Respuesta 16	Punto siguiente de la trayectoria real alcanzado por el órgano terminal Código de rastreo S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 0 0 0 0 0 Región sensada A_4

Letrero de información final	Alcance del objetivo:
	Positivo .Eureka!
Información general de evasión	
Número de secuencias reales activadas:	3
Número de secuencias simultáneas activadas:	10
Sensores activados:	3
Región sensada:	A_4
Nomenclatura de las secuencias reales:	SR^{F1M2} SC_{R1}^{F1M2} SR^{F2M1}
Nomenclatura de las secuencias simultáneas:	$SRS^{F1C1}(5)$ $SRS^{F2C1}(5)$
Secuencia de evasión final:	SRS^{F2C1}

3.4.3 El sistema CHEVOTRONIC III.

3.4.3.1 Descripción:

El sistema CHEVOTRONIC III consiste de un robot de tres grados de libertad tipo RRR, utiliza también el teorema sobre la actualización del eje de la rotación aplicado a la ecuación cinemática de posicionamiento, tiene integrado un sistema de visión el cual otorga la información sobre los sucesos dentro del volumen de control, además, tiene asociados dos sensores inductivos en los eslabones 2 y 3. El poder del sistema CHEVOTRONIC III radica en que usa 48 secuencias uno a uno para realizar la evasión y utiliza los criterios del 18 al 20. Para fines demostrativos de la aplicación de este sistema se define el problema siguiente:

3.4.3.2 Definición del problema:

En el proceso anteriormente caracterizado, sea han utilizado los sistemas MARIANNE II y MARIANNE IV con éxito. Sin embargo el proceso se debe modificar debido a cambios en la línea de producción, entonces es necesario utilizar un sistema mecánico de cadena abierta de tres grados de libertad, también el problema de invasión de obstáculos no ha sido

resuelto, por lo tanto es conveniente implementar un robot clase II con el objetivo que el proceso de producción pueda efectuarse sin problemas.

3.4.3.3 Solución al problema:

Para solucionar el problema utilizaremos un robot clase II de tres grados de libertad, en este caso el sistema CHEVOTRONIC III.

Debido a la complejidad del problema en el sentido de evadir obstáculos con cierto volumen, el sistema CHEVOTRONIC III utilizará secuencias uno a uno de una sola familia, esto es, para efectos de simular el problema en el entorno de tres grados de libertad.

3.4.3.4 Desarrollo del problema:

Supongamos que existe una condición de obstáculo en la región V_T en un cierto intervalo de tiempo de operación del proceso, entonces simularemos tal condición con las características siguientes:

- 1 Existen dos obstáculos dentro de la región V_T detectados por un sistema de visión.
- 2 El sistema de visión informa de la situación de la forma siguiente:
 - a) Obstáculo 1 en la región V_T .
 - b) .Obstáculo 2 en la región V_T .
 - c) Características de los obstáculos:

Obstáculo 1 : Prisma rectangular.
Obstáculo 2 : Prisma rectangular.
 - d) Posición de los obstáculos desde el (0,0).

Obstáculo 1 : (x_1, y_1) .

Obstáculo 2 : (x_2, y_2) .

3 Debido a que el sistema de visión también otorga información sobre las dimensiones de los obstáculos, entonces también es posible considerar que como la trayectoria pre-escrita del robot ya está caracterizada, ya se conocen los desplazamientos angulares de los eslabones para cada punto de la trayectoria, entonces se conoce el máximo y mínimo desplazamiento angular. De lo anterior es posible considerar singularidad total antes de que el robot intente evadir los obstáculos.

3 Las dimensiones de los eslabones son las siguientes:

$$l_1 = D_1$$

$$l_2 = D_2$$

$$l_3 = D_3$$

4 Las restricciones del sistema son:

a) $l_1 > l_2 + l_3$

b) La evasión se realizará tomando aleatoriamente cualquier secuencias de la familia uno sin considerar optimización de tiempo.

c) La robustez algorítmica potencial es parcial.

5 Para la simulación de este problema se considera que si es posible la evasión debido a que las dimensiones de los obstáculos así lo permiten.

En la figura 3.24 se muestra al sistema CHEVOTRONIC III y a los obstáculos en la region V_T

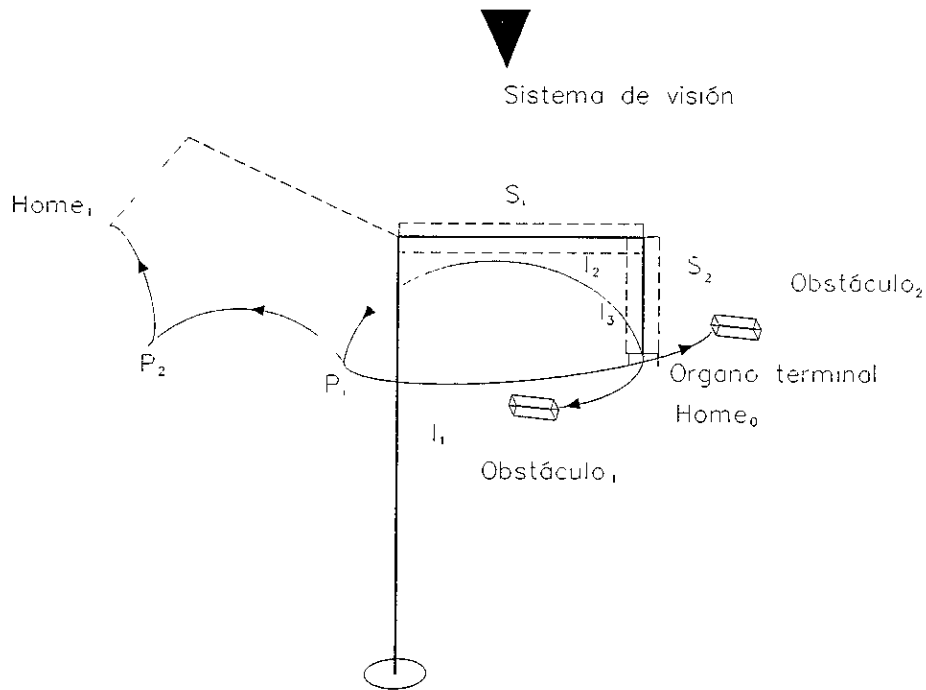


Figura 3.24 El sistema CHEVOTRONIC III y los obstáculos a evadir.

3.4.3.5 Desarrollo de la evasión (crónica):

Con las restricciones anteriores realizaremos un breve resumen del diálogo entre los sensores y algoritmo de forma tal que se describa el proceso de evasión con los datos del sistema de visión anteriormente descritos.

“Salida₁ de home con R^{F1M23} (+), sensor S₂ activado”obstáculo en la región V_T”.

Regreso a home con R^{F1M23} (-)....., R₀ en home. Salida₂ de home con SC_{R23}^{F1M23}

(+)....., punto intermedio alcanzado”evasión de obstáculo 1 en V_T”. Secuencia de operación de la secuencia combinada SC_{R23}^{F1M23} (+) hacia el punto siguiente de la trayectoria.....,

sensor S₂ activado”obstáculo en la región V_T”. Regreso al punto intermedio con SC_{R23}^{F1M23}

(-)....., punto intermedio alcanzado. Regreso al home con SC_{R23}^{F1M23} (-)....., home alcanzado. Salida₃ de home con SR^{F1M23} (+)....., sensores 1,2 desactivados(es decir, no detectaron obstáculo), punto intermedio alcanzado. Secuencia de operación de la secuencia real SR^{F1M23} (+) hacia el punto siguiente de la trayectoria....., sensores 1,2 desactivados "evasión de obstáculo 2 en V_1 ", alcance del punto siguiente de la trayectoria, "positivo", evasión efectuada con SR^{F1M23} . Eureka!.

3.4.3.6 Representación esquemática de la evasión:

Una representación esquemática de la evasión se muestra en la figura 3.25.

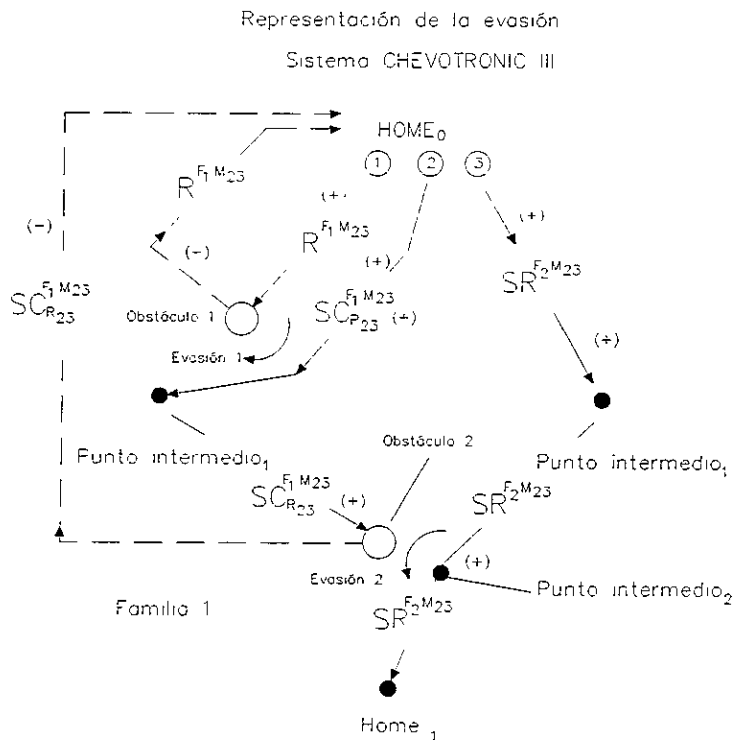


Figura 3.25 Representación esquemática de la evasión del sistema CHEVOTRONIC III.

3.4.3.7 Diálogo general del proceso de evasión:

En esta parte se presenta el diálogo completo entre el algoritmo y los sensores del sistema CHEVOTRONIC III, así también las ordenes y respuestas de salidas y regresos. En el capítulo V se muestra la simulación del sistema CHEVOTRONIC III.

Sistema CHEVOTRONIC III.

Diálogos virtuales.

Sin caracterización del obstáculo y con secuencias uno a uno.

Diálogo

Algoritmo-----sensores

<i>Información del sistema de visión</i>	2 obstáculos en:																
	La región V_T																
<i>Orden 1</i> <i>Salida 1</i>	Activa $AC_1 \rightarrow P_0$																
	Secuencia de salida ₁ R^{F1M23}																
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>AC_1</th> <th>AC_2</th> <th>AC_3</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>T_1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>T_2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>T_3</td> </tr> </tbody> </table>	AC_1	AC_2	AC_3	T	-1	0	0	T_1	0	-1	0	T_2	0	0	-1	T_3
	AC_1	AC_2	AC_3	T													
	-1	0	0	T_1													
	0	-1	0	T_2													
	0	0	-1	T_3													
	Sensando:																
	por $I_1 \rightarrow S_1$																
	por $I_2 \rightarrow S_2$																
Subtrayectoria sensada:																	
Home $\rightarrow P_{11}$																	
<i>Respuesta 1</i>	Impacto en el punto (x_1, y_1)																
	Código de rastreo																
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>S_1</td> <td>S_2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	S_1	S_2	0	1												
	S_1	S_2															
0	1																
Eslabón de impacto: I_2																	

	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k1} < \alpha_1 - 2\pi$																
	Paro total en el punto (x_1, y_1)																
	Punto intermedio alcanzado:																
	Negativo.																
	$\alpha_{k1} > \alpha_1$																
Orden 2	Regresa a home																
	Aplica $-\alpha_{k1}$ a AC_1																
Respuesta 2	R_0 en home																
	Código de rastreo																
	$S_1 \quad S_2$																
	0 0																
	Región sensada V_T																
Orden 3 Salida 2	Activa $AC_1 \rightarrow P_0$																
	Secuencia de salida ₁ SC_{R23}^{F1M23}																
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>AC_1</th> <th>AC_2</th> <th>AC_3</th> <th>T</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>T_1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-1</td> <td>0</td> <td>T_2</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>T_3</td> </tr> </tbody> </table>	AC_1	AC_2	AC_3	T	1	0	0	T_1	0	-1	0	T_2	0	0	-1	T_3
AC_1	AC_2	AC_3	T														
1	0	0	T_1														
0	-1	0	T_2														
0	0	-1	T_3														
	Sensando:																
	por $I_2 \rightarrow S_1$																
	por $I_3 \rightarrow S_2$																
	Subtrayectoria sensada:																
	Home $\rightarrow P_{11}$																
Respuesta 3	Punto intermedio P_{11} alcanzado																
	Código de rastreo																
	$S_1 \quad S_2$																
	0 0																
	Región sensada V_T																
	Desplazamiento angular recorrido																
	α_1																
Orden 4	Activa $AC_2 \rightarrow Q_0$																
	Sensando:																

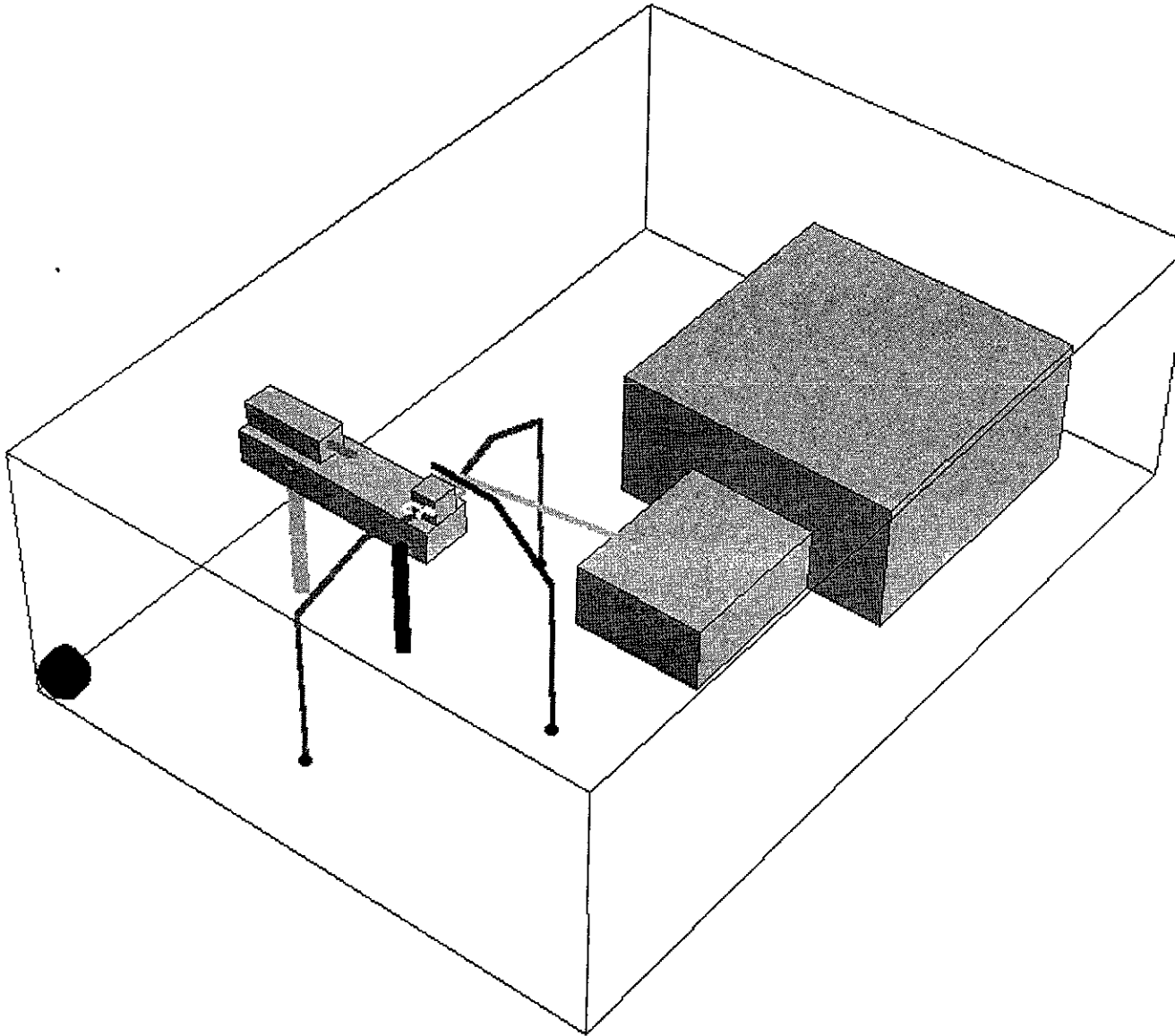
	por $l_2 \rightarrow S_1$
	por $l_3 \rightarrow S_2$
Respuesta 4	Impacto en el punto (X_2, Y_2)
	Código de rastreo
	$S_1 \quad S_2$
	0 1
	Eslabón de impacto: l_2
	Desplazamiento angular recorrido $\alpha_{k2} < \alpha_2 - 2\pi$
	Paro total en el punto (X_{21}, Y_{22})
	Punto intermedio alcanzado:
	Negativo.
$\alpha_{k2} > \alpha_2$	
Orden 5	Regresa al punto intermedio.
	Aplica $-\alpha_{k2}$ a AC_2
Respuesta 5	R_o en el punto intermedio
	Código de rastreo:
	$S_1 \quad S_2$
	0 0
	Región sensada V_T
	Desplazamiento angular recorrido
	$-\alpha_{k2}$
Orden 6	Regresa a home
	Aplica $-\alpha_1$ a AC_1
Respuesta 6	R_o en home
	Código de rastreo
	$S_1 \quad S_2$
	0 0
	Región sensada V_T
Orden 7 Salida 3	Activa $AC_1 \rightarrow P_o$
	Secuencia de salida ₁ SR ^{F1M23}
	AC ₁ AC ₂ AC ₃ T
	1 0 0 T ₁
	0 1 0 T ₂

	0 0 1 T ₃
	Sensando:
	por I ₂ → S ₁
	por I ₃ → S ₂
	Sub-trayectoria sensada:
	Home → P ₁₁
Respuesta 7	Punto intermedio P ₁₁ alcanzado
	Código de rastreo
	S ₁ S ₂
	0 0
	Región sensada V _T
	Desplazamiento angular recorrido: α ₁
Orden 8	Activa AC ₂ → Q _o
	Sensando:
	por I ₂ → S ₁
	por I ₃ → S ₂
Respuesta 8	Punto intermedio P ₁₂ alcanzado
	Código de rastreo
	S ₁ S ₂
	0 0
	Región sensada V _T
	Desplazamiento angular recorrido: α ₂
	Subtrayectoria sensada: P ₁₁ → P ₁₂
Orden 9	Activa AC ₃ → R _o
	Sensando:
	por I ₂ → S ₁
	por I ₃ → S ₂
Respuesta 9	Organo terminal en home ₁
	Código de rastreo
	S ₁ S ₂
	0 0
	Región sensada V _T

	Desplazamiento angular recorrido: α_3
	Sub-trayectoria sensada: $P_{12} \rightarrow \text{home}_1$
Letrero de información final	Alcance del objetivo:
	Positivo .Eureka!
Información general de evasión	
Número de secuencias reales activadas:	3
Sensores activados:	1(S_2)
Región sensada:	V_T
Nomenclatura de las secuencias reales: R^{F1M23} SC_{R23}^{F1M23} SR^{F1M23}	
Secuencia de evasión SR^{F1M23}	

CAPÍTULO IV

“SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE MANUFACTURA”



El módulo 2 con flexibilidad tipo A del sistema CHEVOTRONIC IV

CAPÍTULO IV

4 Simulación de sistemas de manufactura

4.1 Introducción

En esta parte simularemos un proceso de producción requerido por la empresa ABB Sistemas S.A., el cual consiste en la aplicación de silicón a un sistema de planchas domésticas por medio de robot industrial IRB 2400/16 ABB. El objetivo en este capítulo, es el de utilizar al robot tipo RRR modelado en el capítulo II para realizar el proceso, además de generar e interpretar los códigos binarios que gobiernan las operaciones dentro de la línea de producción. La simulación es realizada con restricciones de proceso y de control, formularemos igualmente, 3 simulaciones, una con paro de emergencia y las otras dos con condiciones de paro de emergencia, la programación y visualización de los resultados son vistas en el capítulo V. La formulación de este proyecto es el resultado de aplicar el “sistema MARIANNE XI” desarrollado por el grupo DITAI(Desarrollo e Integración Tecnológica y Asesoría en Investigación). El proyecto global se llama” Automatización Global de una Fábrica Futurista de Ensamble y Soldadura”. El proceso de manufactura a simular pertenece a la parte III del proyecto llamada “simulación”(Global Automation Assembly and Welding Futuristic Factory, Part III Simulation”)[15], y es un resumen del reporte de investigación interno No 6[14] de la DEPMI – UNAM, Departamento de Mecánica.

4.2 Descripción del “sistema MARIANNE XI” [15].

El sistema MARIANNE XI consiste de dos operarios, el software de diseño Autocad R-13 y el paquete de cálculo formal Mathematica. La rápida conceptualización de un proceso de manufactura permite obtener simulaciones en un tiempo relativamente corto en comparación con otros simuladores[25]. La aplicación sistemática del álgebra de Cuaterniones al modelado de robots, permite generar la programación de los procesos en el paquete Mathematica en forma rápida, en tanto las variables de dimensionamiento son obtenidas del diseño de planta y de proceso realizado en el software Autocad R-13. El sistema MARIANNE XI también caracteriza los movimientos de los actuadores dentro de las líneas de producción

permitiendo con esto, obtener simulaciones integradas de automatización y robotización de los procesos utilizando técnicas de sincronización.

El proyecto "Automatización Global de una Fábrica Futurista de Ensamble y Soldadura" pretende caracterizar de forma global los procesos de producción de una fábrica que consta de 8 módulos, en los cuales se incluyen procesos de corte, soldadura, ensamble, inspección, pintura, secado e impresión. La primera parte de este proyecto pretende mostrar una caracterización de las operaciones de la fábrica así como las sincronías locales de cada módulo y la sincronía global[16].

Una parte fundamental en la automatización y robotización de los procesos de manufactura es la simulación computacional, esta permite observar los movimientos de los elementos de trabajo dentro de las líneas de producción de un proceso específico. Con un simulador es posible tener un panorama de la ubicación, control y movimientos secuenciados ó sincronizados de los elementos de trabajo antes de ser instalados, y al mismo tiempo permite capacitar al recurso humano de operación, también puede ser retroalimentado con nuevas variables, de esta manera el proceso es diseñado virtualmente en un ambiente por computadora lo más apegado a la realidad. La potencialidad de un simulador radica en el número de variables con las cuales es gobernado y también en la interacción de robots y actuadores dentro de un entorno automatizado. Sin embargo, la mayoría de tales simuladores son relativamente caros y operan en equipo de cómputo algunas veces más caro que el propio simulador, por lo tanto es necesario crear y formalizar marcos teóricos que permitan la construcción de este tipo de simuladores.

4.3 "Simulación de un robot industrial marca IRB 2400/16 ABB en la aplicación de silicón a planchas domésticas"

4.3.1 Descripción:

En una empresa "A" que produce planchas domésticas se pretende automatizar parte del proceso de producción. El proceso consiste en la aplicación de silicón por medio de robot a una placa de la plancha, ver figura 4.1, para ello se necesita diseñar el posible arreglo del robot y los elementos periféricos, de forma tal que se muestren los movimientos del proceso

mediante un simulador computacional. La producción estimada es de 240 planchas cada hora, además, la alimentación de planchas es mediante operario. La línea de producción deberá ser simulada siguiendo restricciones de control y de proceso, dadas por la empresa ABB Sistemas S.A.

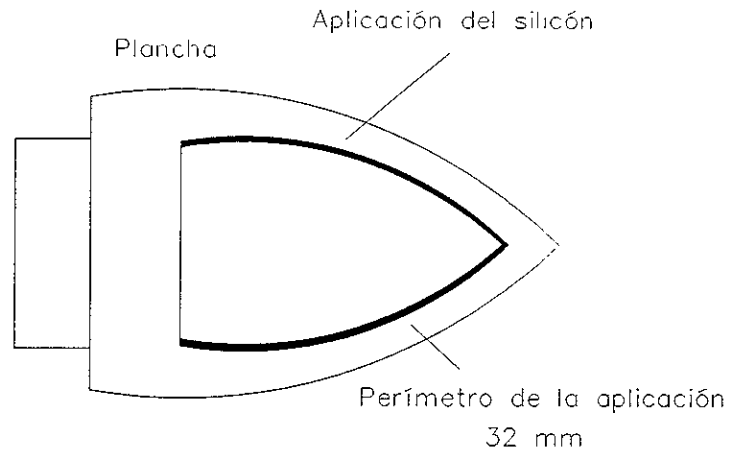


Figura 4.1 Perímetro de aplicación del silicón.

4.3.2 Restricciones de proceso:

- 1 La operación de la aplicación del silicón, es en dos mesas de operación de 1.5 x 1.2 mts.
- 2 La temperatura máxima de trabajo es 30°C.
- 3 El robot seleccionado es un IRB 2400/16 ABB.
- 4 La producción estimada debe ser de 240 piezas por hora.
- 5 El perímetro máximo de aplicación a cada plancha es de 32 cm.
- 6 La velocidad de aplicación es de 32 mm/segundo.
- 7 Un operario.

4.3.3 Restricciones de control:

- 1 La simulación deberá gobernarse con 8 sensores de presencia de pieza(inductivos).
- 2 Dos señales para iniciar el proceso.

- 3 Una señal para la aplicación del silicón.
- 4 Cuatro señales de paro de emergencia.

4.3.4 Diseño del proceso:

Para iniciar el diseño del proceso debemos caracterizar los elementos disponibles, los cuales se observan en la tabla 4.1.

Elemento de trabajo	Proceso	Grados de libertad requerido
Robot IRB 2400/16	Aplicación de silicón	6
2 mesas de trabajo	Soporte de planchas	1
8 sensores inductivos	Control	---
2 botones de encendido	Señal, control, arranque	---
1 sensor inductivo	Señal de aplicación	---
4 sensores	Paro de emergencia	---

Tabla 1 Elementos de trabajo del proceso.

Debido a la restricciones de proceso 4 , 5 y 6 el tiempo máximo de operación para cada plancha es de 10 segundos, también se proponen 2 mesas de operación de forma tal que sean colocadas 4 planchas por cada mesa(ver figura 4.2). Observemos que el tiempo total de la aplicación en cada mesa es de 40 segundos, sin embargo, debe existir un tiempo de carga y descarga de las planchas, además de tiempos de traslado del robot hacia las aplicaciones del silicón a cada plancha, si asignamos un tiempo de 15 s a la operación de carga y descarga de planchas y 9 s a la operación de traslado de robot, entonces el tiempo total de la operación es de 65 s. Al requerir que la línea de producción opere a 4 planchas por minuto(restricción de proceso 4), entonces a 65 s la restricción 4 no es satisfecha, por lo tanto es necesario implementar un doble cabezal de aplicación de manera que se reduzca el tiempo en la aplicación por mesa de 40 a 20s. El cabezal con doble pistola se justifica debido a que el robot tiene que partir de un home preestablecido y la pistola necesita de una señal para aplicar el silicón(restricción de control 3) que también requiere de un tiempo de activación por sensor inductivo, es decir, la pistola debe activarse, levantarse, trasladarse,

bajar y volver a activarse en cada aplicación del silicón. Por tanto necesitamos de mayor tiempo y el cabezal con doble pistola minimiza el tiempo de aplicación por mesa.

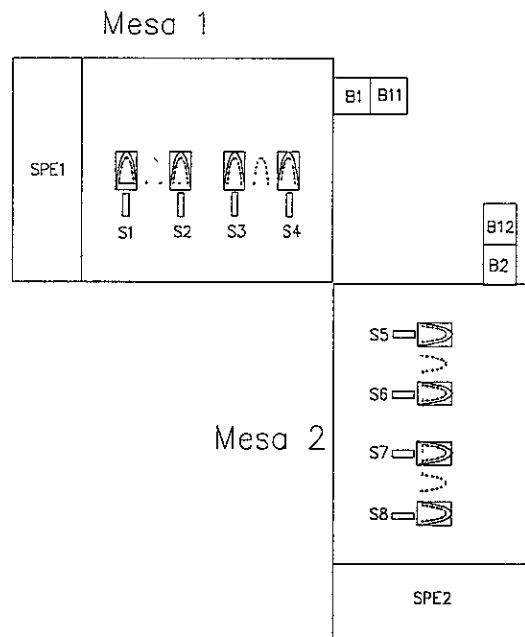


Figura 4.2 Posición de las mesa de operación.

El problema consiste en generar 4 planchas por mesa de operación y que además contenga un $home_1$ de inicio y un $home_2$ de paro de emergencia, también las trayectorias de posicionamiento del cabezal con doble pistola. El proceso es sincronizado a la razón de 120 segundos y controlado por la restricción 2(de control). Una forma de arreglo de robot es colocándolo en una posición simétrica con respecto a las mesas de operación, la ubicación de los homes también debe ser simétrica ya que esto garantiza la sincronía del proceso. Las mesas de operación y los homes 1 y 2 deberán estar contenidos dentro del reach(radio de máximo alcance) del robot, la trayectoria de aplicación consiste en dos perfiles de la placa de plancha defasados por cada mesa(ver figura 4.3). El error estimado en la operación depende del operario, por ejemplo si termina de descargar y cargar la segunda mesa después de 120 segundos, entonces el robot permanecerá en $home_1$ hasta que se active los botones de inicio(B_1 y B_2) y este tiempo de exceso se sumará al tiempo total de operación, en caso contrario si el operador termina antes de los 15 segundos asignados, entonces el robot llegará a $home_1$ y automáticamente inicia de nuevo el proceso al cabo de 120 segundos. El inicio del ciclo de operación debe estar condicionado por las restricciones de control 1 y 2, es

decir, se deberán colocar 8 sensores inductivos de presencia de piezas en las dos mesas de operación de manera que el robot no inicia si los 8 sensores ($S_1, S_2, S_3, \dots, S_8$) no están activados junto con los botones B_1 y B_2 . En la operación de aplicación de silicón se debe colocar un sensor de manera que se cumpla la restricción de control 3. Las señales de paro de emergencia pueden seleccionarse de la forma siguiente:

- 1 2 sensores ópticos colocados ha los costados de las mesas de operación para detectar si el operario (otras causas) a invadido en reach del robot.
- 2 2 botones de pulso colocados junto con los botones de inicio para que el operario pulse uno de ellos cuando exista alguna condición inusual dentro del proceso (ver figura 4.2).

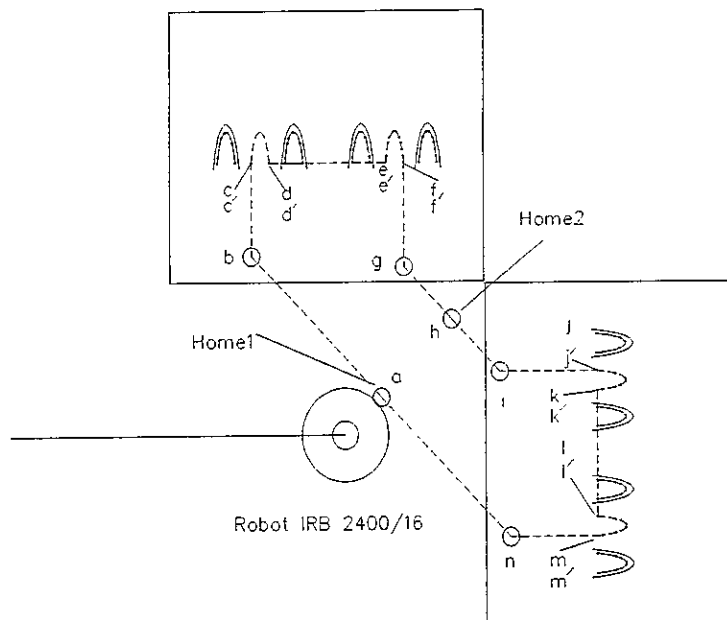


Figura 4.3 Puntos de las trayectorias y perfiles defasados de las planchas.

4.3.5 Condiciones de paro de emergencia :

Las condiciones de paro de emergencia son las siguientes:

- 1 Si el existe una condición(al menos un sensor ó botón de paro de emergencia) de paro de emergencia antes de la primera aplicación en la primer mesa, entonces en robot retornará a $home_1$.
- 2 Si el existe una condición de paro de emergencia en la aplicación de la primer mesa, entonces en robot deberá ir a $home_2$ y esperar que la condición sea desactivada, entonces iniciará el proceso desde el $home_2$ hacia la mesa de operación 2.
- 3 Si el existe una condición de paro de emergencia en la aplicación de la segunda mesa entonces el robot deberá ir a $home_1$, y esperar que la condición sea desactivada, entonces iniciará el proceso desde el $home_1$ hacia la mesa de operación 1.
- 4 Si el existe una condición de paro de emergencia en la aplicación de cualquier mesa, entonces el sensor de aplicación debe desactivar a las pistolas de aplicación de silicón ó por condición de PLC.
- 5 Si el existe una condición de paro de emergencia antes de la primera aplicación de la segunda mesa entonces en robot retornará a $home_2$.
- 6 Si el existe una condición de paro de emergencia después de la última aplicación de la segunda mesa, entonces en robot debe de ir a $home_1$.

4.3.6 Trayectorias de operación y velocidades :

Las trayectorias del proceso se muestran en la figura 4.3. En la tabla 2 se explican las características de cada posición importante de las trayectorias.

Posición	Tiempo (seg)	Perímetro (cm)	Velocidad (cm/s)	Característica
a-b	9	87.54	9.7	Salida de home ₁ a la mesa ₁
b-c	6	41.29	6.8	Trayectoria sobre la mesa ₁ hacia la aplicación de silicón
c-c'	1	3.2	3.2	Activación del sensor de aplicación S _A
c'-d'	10	32	3.2	Aplicación del silicón a las primeras 2 planchas
d'-d	1	3.2	3.2	Levante y desactivación de las pistolas
d-e	10	55.81	5.58	Traslado de las pistolas hacia las planchas 3 y 4
e-e'	1	3.2	3.2	Activación del sensor de aplicación S _A por segunda vez
e'-f'	10	32	3.2	Aplicación del silicón a las planchas 3 y 4
f'-f	1	3.2	3.2	Levante y desactivación de las pistolas
f-g	6	46.17	7.69	Trayectoria para encontrar el home ₂
g-h	5	32.61	6.52	Trayectoria de

				posicionamiento en home ₂
h-i	5	32.61	6.52	Salida de home ₂ a la mesa de operación 2
i-j	6	46.17	7.69	Trayectoria sobre la mesa2 hacia la aplicación del silicón
j-j'	1	3.2	3.2	Activación del sensor de aplicación S _A por tercera vez
j'-k'	10	32	3.2	Aplicación del silicón a las planchas 5 y 6
k'-k	1	3.2	3.2	Levante y desactivación de las pistolas
k-l	10	55.81	5.58	Traslado de las pistolas hacia las planchas 7 y 8
l-l'	1	3.2	3.2	Activación del sensor de aplicación por cuarta vez
l'-m'	10	32	3.2	Aplicación del silicón a las planchas 7 y 8
m'-m	1	3.2	3.2	Levante y desactivación de las pistolas
m-n	6	41.29	6.8	Trayectoria de salida de la mesa 2
n-a	9	87.54	9.7	Trayectoria hacia home1

Tabla 4.2 Trayectorias de operación y velocidades asignadas.

En la figura 4.4 se muestra una vista isométrica del proceso.

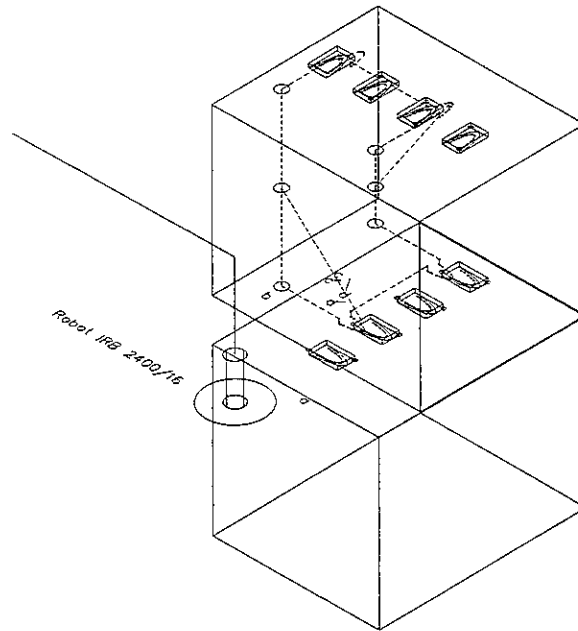


Figura 4.4 Vista isométrica del proceso.

4.4 Simulaciones y generación de códigos binarios.

4.4.1 Simulación del proceso sin paro de emergencia :

La simulación del proceso se realiza en el software Mathematica, los datos de las dimensiones de las mesas, del robot y de las trayectorias se han tomado de un paquete CAD donde se realizó el dibujo del proceso. El proceso es explicado a través de un código binario el cual se describe a continuación:

4.4.1.1 Descripción código binario 1.

Importancia del código: El código binario permite conocer los eventos que suceden dentro de la línea de producción , en la parte superior del código se localizan los elementos de control

y trabajo, de lado izquierdo los tiempos de operación, con el código binario podemos detectar fallas en las líneas de producción, también juegan un papel importante en la programación de los PLCs.

Descripción del código binario 1: Al tiempo T_1 está activada la línea 1, la condición de arranque es: Los sensores de presencia de piezas deben estar activados (S_1, S_2, \dots, S_8), además de los botones B_1 y B_2 , en tanto el sensor de aplicación S_A debe estar desactivado así también los 4 sensores de paro de emergencia, si esto es cierto, entonces el robot inicia el proceso.

Al tiempo T_{16} el sensor S_A se activa y las pistolas inician la aplicación del silicón hasta el tiempo T_{25} , esta operación se repite en T_{38} , T_{72} y T_{94} . Debido a que esta simulación es sin paro de emergencia, las columnas de los sensores B_{11} , B_{11} , SPE_1 y SPE_2 son ceros (desactivados) en todo el proceso ($T_1 \rightarrow T_{120}$). En T_{61} el operario realiza el cambio de planchas en la mesa 1 y termina en T_{75} (en estos tiempos los sensores S_1, S_2, S_3 y S_4 tienen ceros en sus columnas) y activa el botón B_1 en T_{76} (B_1 se activa en T_{76} hasta T_{120}).

En T_{106} el operario cambia las planchas de la segunda mesa hasta T_{119} (se necesitan 15 segundos para la operación de cargar y descargar). Al terminar de cargar las planchas en la mesa 2 al tiempo T_{120} el operario activa el botón B_2 que junto con B_1 inician de nuevo el proceso.

En la columna del robot (R_1) existen unos (1) debido al trabajo continuo del robot en caso de que el operario trabaje la operación de carga y descarga en T_{120} ó antes.

En la simulación se observa que en el proceso se desaparecen las planchas de la mesa 1, esto simula que el operador está en la operación de descargar y cargar, también ocurre esto al finalizar la operación de silicón en la mesa 2. Recordemos que para que inicie el proceso nuevamente la línea 120 debe ser idéntica a la línea 1. A continuación se muestra el código binario descrito anteriormente:

4.4.1.1.1 Código binario 1 "Simulación sin paro de emergencia".

T	R1	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	B1	B2	SA	B11	B12	SPE ₁	SPE ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
51	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
53	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
56	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
59	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
60	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
61	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
62	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
63	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
64	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
65	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
66	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
67	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
68	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
69	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
70	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
71	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
72	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
73	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
74	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
75	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
76	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
77	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
78	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
81	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
82	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
86	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

89	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
92	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
94	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
103	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
104	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
106	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
107	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
108	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
109	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
110	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
111	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
112	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
113	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
114	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
115	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
116	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
117	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
118	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
119	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
120	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

La salida del programa se muestra el la figura siguiente:

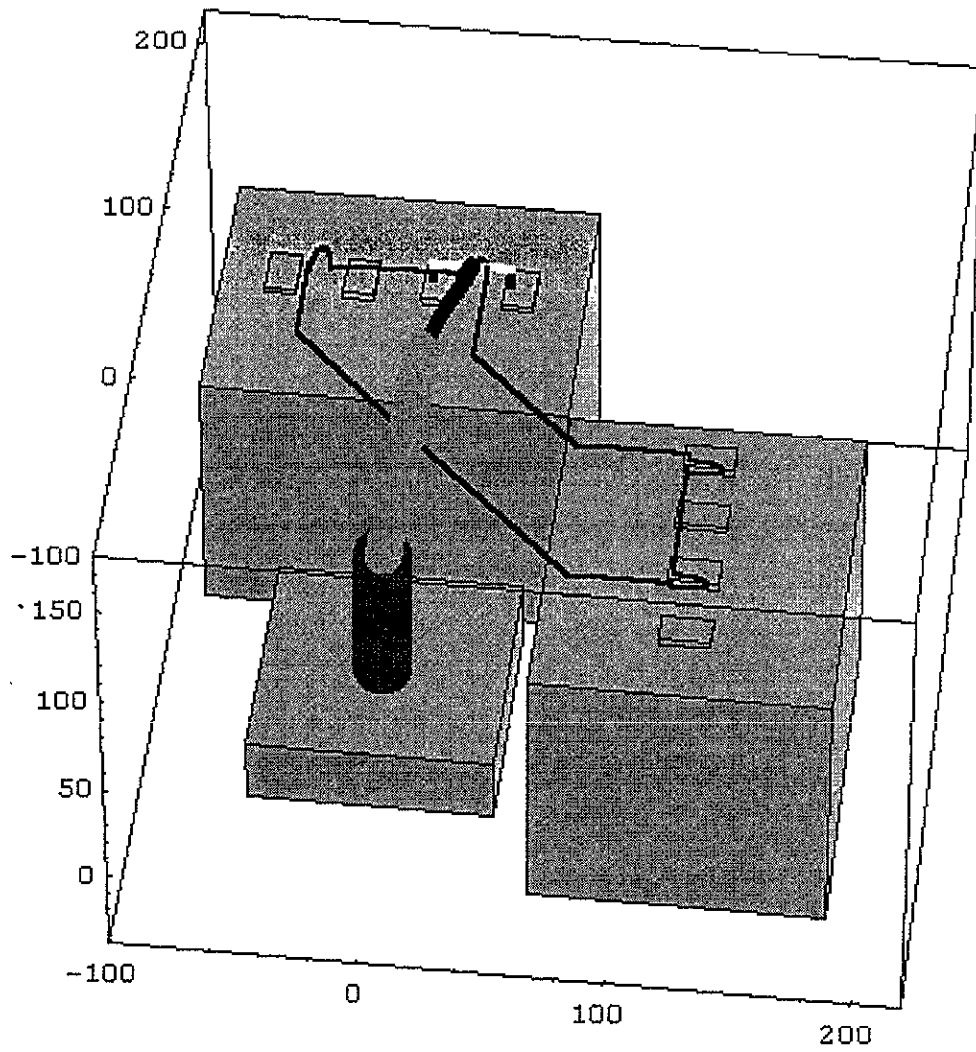


Figura 4.5 Salida del programa en T₄₆

4.4.2 Simulación con la condición de paro de emergencia 1.

En esta parte realizaremos una simulación con paro de emergencia, la descripción de esta condición es la siguiente:

4.4.2.1 Descripción de la condición de paro de emergencia 1.

En una parte del proceso, el operario activó el botón de paro de emergencia B_{11} , el problema fue que en la mesa de operación 1 el robot estaba aplicando mal el silicón debido a que las planchas 3 y 4 no estaban alineadas, al estar el robot realizando la operación de aplicación en esas planchas, el operario activó el botón B_{11} de paro de emergencia y el robot suspende la aplicación y se aplica la condición 2, es decir, el robot elige una trayectoria hacia el home₂ donde se mantendrá parado hasta que se la condición de paro de emergencia este desactivada. La trayectoria hacia home se observa en la figura 4.6

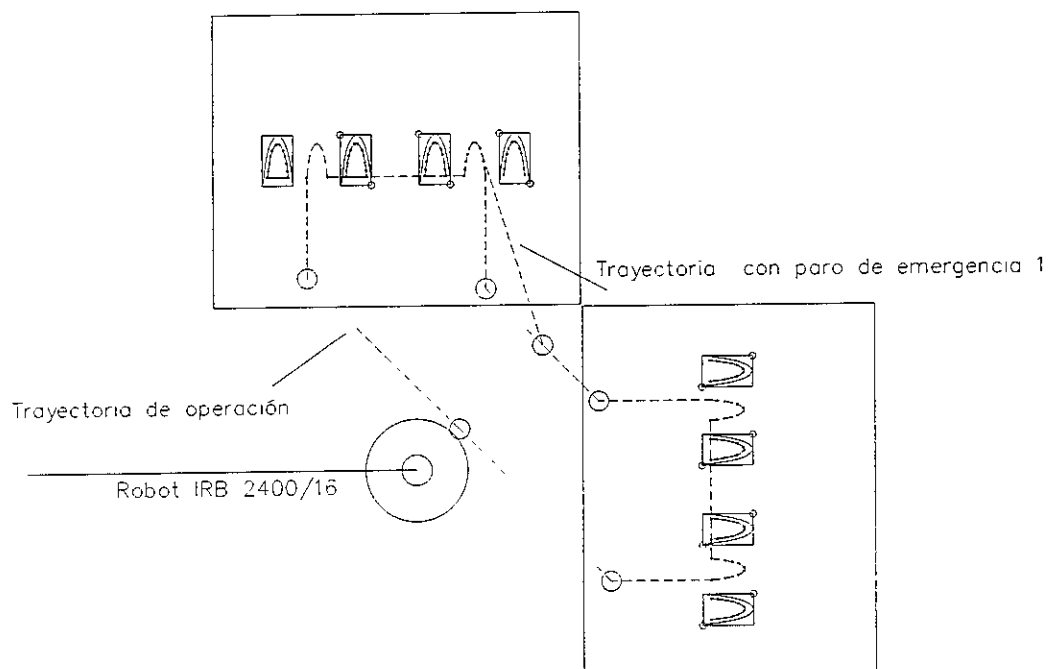


Figura 4.6 Trayectorias de paro de emergencia.

El proceso de paro de emergencia 1 es detallado a través de un código binario que a continuación se describe:

4.4.2.2 Descripción del código binario 2.

Al tiempo T_1 la condición de arranque es la misma que el proceso anterior , esto es,

T	R1	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	B1	B2	SA	B11	B12	SPE ₁	SPE ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

al tiempo T_{16} se inicia la operación de aplicación de silicón a las planchas 1 y 2 con el sensor S_A activado,

16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

, al tiempo T_{38} se aplica el silicón a las planchas 3 y 4, antes de terminar esta operación el operario detecta el problema de desalineación de las planchas y activa el botón B_{11} en T_{46} ,

T	R1	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	B1	B2	SA	B11	B12	SPE ₁	SPE ₂
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0

5 segundos después de activarse la señal de paro de emergencia, el operario descarga y carga las planchas de la mesa 1 y es esos momentos el robot se dirige al home ₂ donde permanecerá 10 segundos, del tiempo T_{57} al tiempo T_{66} .

57	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
58	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
59	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
60	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
61	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
62	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
63	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
64	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
65	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0
66	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0			0	0	0

En T_{67} el operario activa de nuevo los botones B_1 y B_2 y desactiva al botón de paro de emergencia B_{11} , tiempo seguido el robot inicia de nuevo el proceso desde $home_2$ hacia la mesa de operación 2.

El proceso termina al tiempo T_{127} en el cual se inicia el ciclo nuevamente. A continuación se muestra el código binario descrito anteriormente:

4.4.2.3 Código binario 2: Simulación con paro de emergencia 1.

T	R ₁	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	B ₁	B ₂	S _A	B ₁₁	B ₁₂	SP E ₁	SP E ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
51	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
52	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
53	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
54	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
55	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
56	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
57	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
58	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
59	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
60	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
61	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
62	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
63	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
64	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
65	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
66	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		0	0	0
67	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
68	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
69	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
70	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
71	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
72	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
73	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
74	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
75	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
76	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

77	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
78	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
81	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
82	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
86	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
92	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
94	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
103	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
104	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
105	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
106	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
107	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
108	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
109	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
110	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
111	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
112	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
113	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
114	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
115	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
116	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
117	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
118	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
119	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
120	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
121	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
122	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

123	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
124	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
125	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
126	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
127	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

La salida del programa se muestra en la figura 4.6

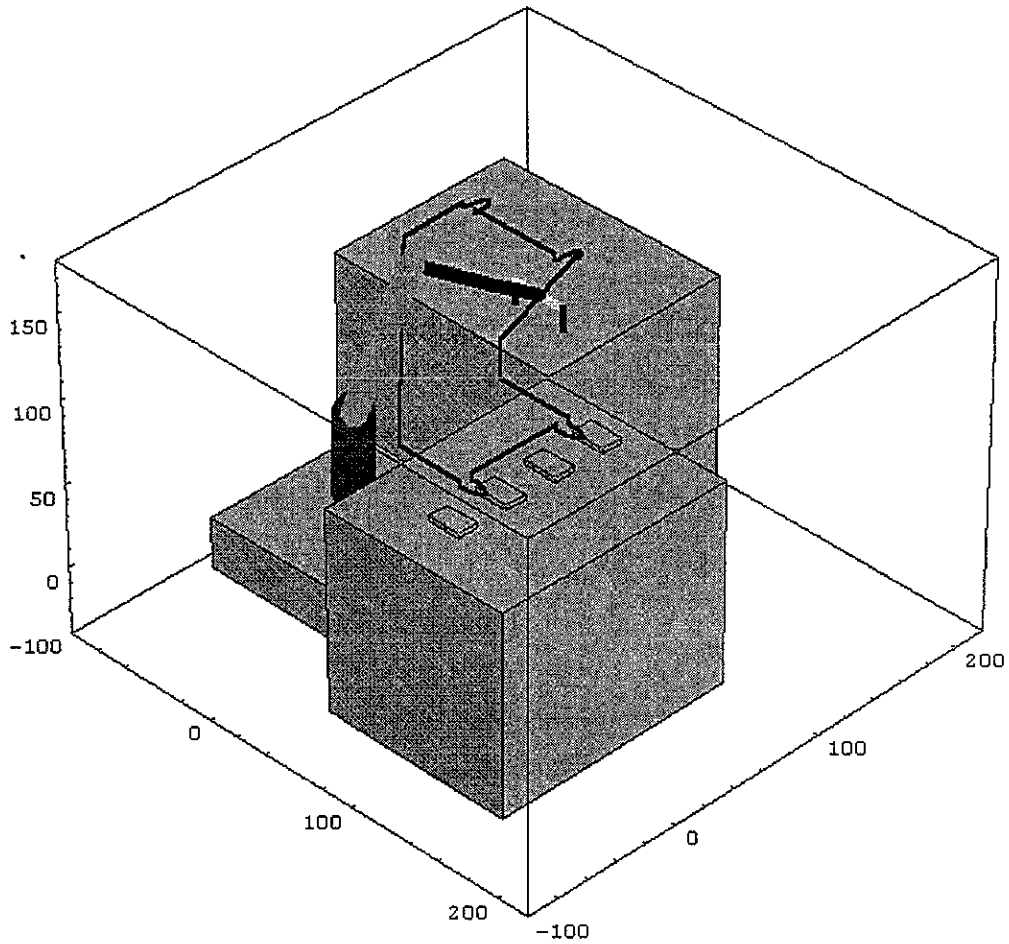


Figura 4.6 Robot en la trayectoria de emergencia 1

4.4.3 Simulación con la condición de paro de emergencia 2.

4.4.3.1 Descripción de la condición de paro de emergencia 2.

En esta parte, realizaremos una simulación de condición extrema de paro de emergencia, donde dos señales han sido activadas, el problema consiste en que una persona invadió el reach del robot y el operario ha activado el botón B_{12} , entonces robot es dirigido al $home_1$ y permanecerá en $home_1$ hasta que la condición de paro de emergencia sea desactivada. Esta situación se presenta cuando el robot está aplicando silicón a las planchas 7 y 8 situadas en la mesa de operación 2, entonces las condiciones 3 y 4 son utilizadas. La trayectoria de paro de emergencia 2 se muestra en la figura 4.7

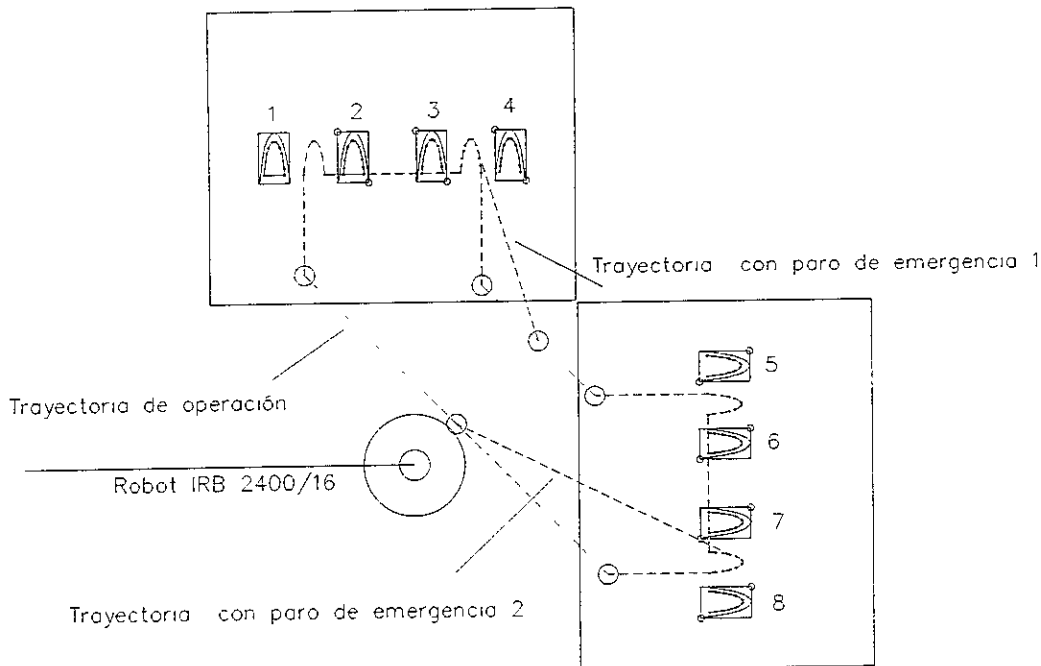


Figura 4.7 Trayectorias de paro de emergencia.

La descripción de este proceso se explica a continuación:

4.4.3.1 Descripción del código binario 3.

Al tiempo T_1 la condición de arranque es la misma que el proceso anterior , esto es,

T	R ₁	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	B ₁	B ₂	S _A	B ₁₁	B ₁₂	SPE ₁	SPE ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

al tiempo T_{16} se inicia la operación de aplicación de silicón a las planchas 1 y 2 con el sensor s_A activado,

16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

, al tiempo T_{38} se aplica el silicón a las planchas 3 y 4,

38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

también al tiempo T_{72} se aplica el silicón a las planchas 5 y 6 ,

72	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

en T_{96} el robot esta aplicando silicón a las planchas 7 y 8 , a los 3 segundos de esta operación se presenta la señal de paro de emergencia a través de los sensores B_{12} y SPE_2 , el robot suspende la aplicación y se dirige al $home_1$ de acuerdo con las condiciones 3 y 4 anteriormente descritas. El robot se traslada a $home_1$ en 5 segundos y permanecerá desactivado hasta el tiempo T_{103} ,

94	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
96	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
103	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

El código completo de operación es el siguiente:

4.4.3.3 Código binario 3: Simulación con paro de emergencia 3.

T	R ₁	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	S ₅	S ₆	S ₇	S ₈	B ₁	B ₂	S _A	B ₁₁	B ₁₂	SPE ₁	SPE ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
20	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
24	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
35	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
36	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
38	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
39	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
40	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0

41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
42	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
44	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
45	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
46	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
48	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
49	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
51	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
52	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
53	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
54	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
55	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
56	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
57	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
58	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
59	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
60	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
61	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
62	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
63	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
64	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
65	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
66	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
67	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
68	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
69	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
70	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
71	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
72	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
73	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
74	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
75	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
76	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
77	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
78	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
79	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
80	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
81	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
82	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
83	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
84	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
85	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
86	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

87	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
88	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
89	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
91	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
92	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
94	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
95	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
96																
97	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
98	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
99	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
100	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
101	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
102	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1

La salida del programa se muestra en la figura siguiente:

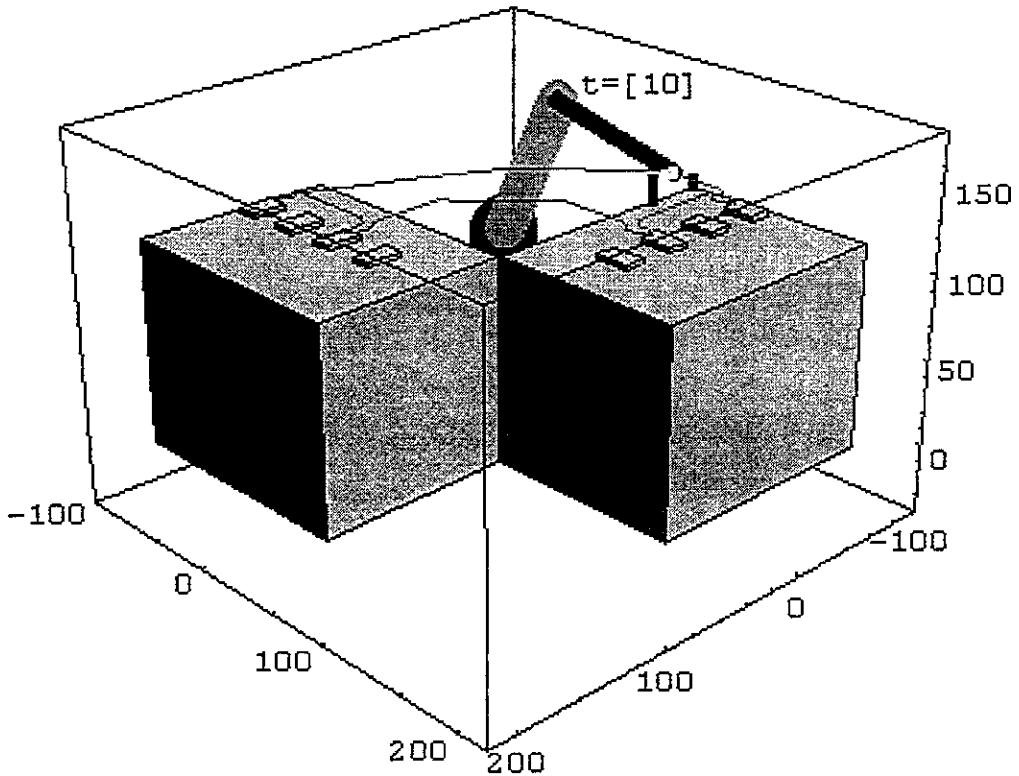


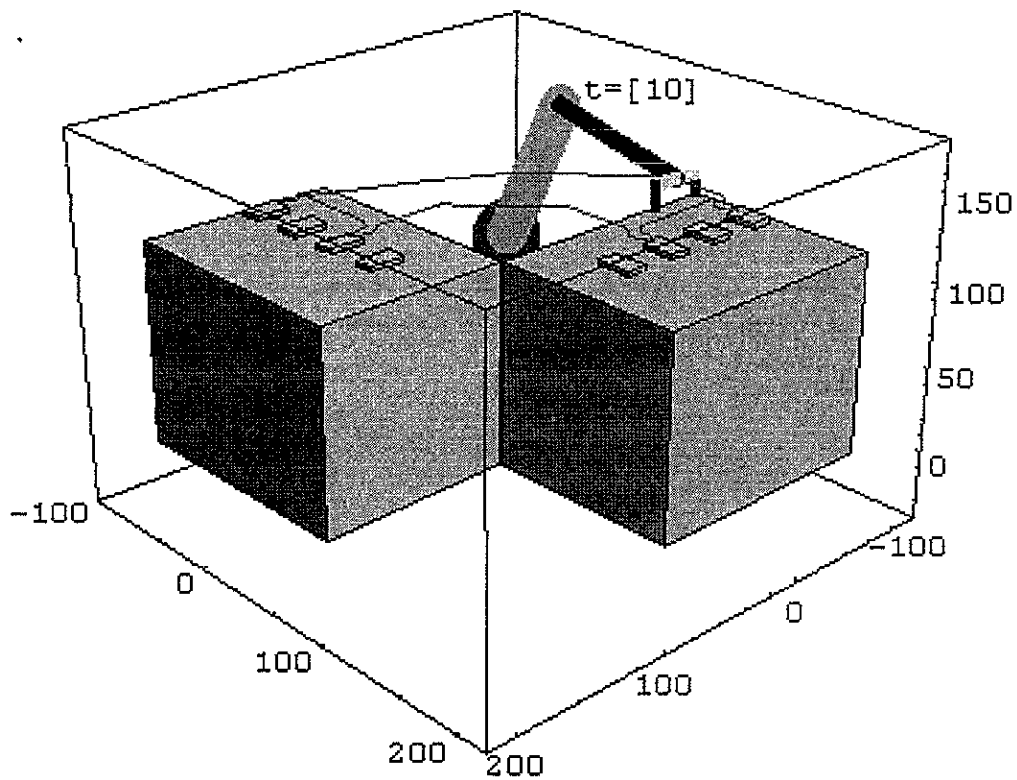
Figura 4.8 Operación del robot en T_{10} .

La programación del proceso es realizada en el capítulo V.

CAPÍTULO IV

“SIMULACIÓN”

T	R1	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	B1	B2	SA	B ₁₁	B ₁₂	SPE ₁	SPE ₂
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0



Simulación de un robot industrial IRB 2400/16 ABB

CAPÍTULO V

5 SIMULACIÓN

5.1 Introducción

En esta parte, realizaremos la programación y simulación de 8 modelos de robot y mecanismos caracterizados en los capítulos anteriores, el objetivo de este capítulo es el de mostrar como el uso sistemático del álgebra de Quateriones permite una fácil programación y visualización de los movimientos de los robots.

5.2 La importancia de un simulador computacional.

Los grandes avances que se han dado en los últimos años en el desarrollo de software y hardware, han permitido construir modelos virtuales de sistemas complejos, siendo la simulación computacional una herramienta muy útil en la actualidad para la modelación matemática y gráfica. El modelo virtual construido en la computadora tiene una aplicación enorme, pues el sólo hecho de variar condiciones iniciales permite analizar el comportamiento del fenómeno a la profundidad que sea requerido, lo que no se puede hacer con un modelo fabricado para satisfacer un cierto conjunto de condiciones iniciales.

Los modelos a simular se presentan a continuación:

5.3 Programación y simulación de los modelos.

5.3.1 Programa 1: Simulación de un manipulador de dos grados de libertad tipo RR realizando una trayectoria de 35 puntos en el plano de referencia X,Y. La trayectoria simulada es la palabra "LUIS".

El programa que se desarrolla en esta parte, corresponde a un robot de dos grados de libertad tipo RR que simula una trayectoria por puntos de la palabra "LUIS", el modelo matemático fue desarrollado en el capítulo I. Las ecuaciones que se programan son [1.17] y [1.20] que corresponden a la ecuación de la posición deformada. El programa es detallado en

bloques y la simulación corresponde a una serie de fotografías empalmadas de cada punto de la trayectoria. Las dimensiones de los eslabones están incluidas en el programa. La resolución de las ecuaciones es hecha con la orden FindRoot de Mathematica que utiliza el algoritmo de Newton Ralphson. Otros modelos de este tipo de robots pueden observarse en [17], [18] y [19].

5.3.2 Programa 2: Simulación de un manipulador de tres grados de libertad tipo RRR realizando una trayectoria recta en el espacio con ejes definidos en (Z,X,Z).

El modelo matemático de este robot, fue desarrollado en el capítulo I, la única diferencia es en la definición de los ejes de rotación, la trayectoria a simular es una recta parametrizada en el espacio con 13 discretizaciones, las ecuaciones a programar son [1.76] y [1.45] que corresponden a la cinemática inversa del modelo con ejes actualizados. El programa de este robot es la base para los simuladores de procesos industriales cambiando los ejes de los eslabones. Esto es, (Z,X,X) que corresponde a los tres primeros eslabones de un robot industrial marca PUMA ó de las series IRB de ABB[25]. Otros modelos de este robot se observan en [18], [20].

5.3.3 Programa 3: Simulación de un modelo de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión de un mecanismo de cuatro barras.

El programa que se plantea en esta parte, corresponde al problema de síntesis de un mecanismo de cuatro barras para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión. Este programa forma la base para resolver un problema hasta de 9 puntos de precisión. El sistema de ecuaciones a programar es [1.100], [1.101] y [1.105], también se observa que no existen composiciones de rotaciones en las ecuaciones de posición, los datos iniciales y de diseño de este problema están incluidas en el programa. La base de este programa se ve en [8], otras modelaciones del problema de síntesis utilizando el álgebra de Cuaterniones son vistas en [21].

5.3.4 Programa 4: Simulación de un robot paralelo tipo RRR de tres grados de libertad.

La simulación de este robot es muy importante, debido a que en la literatura tradicional[4] se maneja que para este tipo de sistemas su concepción y simulación son complicadas, debido a los modelos matemáticos, sin embargo, el modelo planteado en el capítulo I utilizando el álgebra de Cuaterniones permite generar un programa que simula la cinemática inversa y directa de este sistema mecánico. Las ecuaciones a programar son [1.135], [1.124] y [1.141] para la cinemática inversa y [1.137] y [1.140] que corresponden a cinemática directa. La concepción de este tipo de robots se da en el marco de las cadenas cinemáticas cerradas. Otro modelo de este robot se ve en [12], y la base de este programa fue desarrollada en [22].

5.3.5 Programa 5: Simulación de un proceso de evasión de obstáculos mediante un sistema tipo RRR. Sistema CHEVOTRONIC III con ejes definidos en (Z,X,X).

El modelo a programar en esta parte, corresponde a las ecuaciones [1.76] y [1.45] del robot tipo RRR de tres grados de libertad, con los ejes definidos en (Z,X,X) a las cuales se les ha aplicado el teorema sobre la actualización del eje de la rotación. Los criterios 18, 19 y 20 serán aplicados en este programa. Los obstáculos a evadir tienen una morfología de prisma rectangular, las secuencias que utilizaremos, corresponden a la misma familia y el orden de activación es aleatorio. El sistema CHEVOTRONIC III utiliza dos puntos intermedios para realizar los criterios, cabe aclarar que los datos y activaciones son desde en punto de vista determinístico. Los datos de la posición del home y las coordenadas de los obstáculos se dan en el programa. El problema de evasión es formulado en el capítulo III.

5.3.6 Programa 6: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un robot IRB 2400L/16 ABB para planchas de uso doméstico sin paro de emergencia.

El robot utilizado para realizar el proceso, corresponde al tipo RRR con ejes actualizados, modelado en el capítulo 1. Las dimensiones de los eslabones son tomadas del manual de ABB [25] que corresponden a los tres primeros eslabones del robot industrial IRB 2400/16 ABB. Las consideraciones de diseño fueron tomadas del paquete Autocad R-13 y están implícitas en el programa, la sistematización del álgebra Cuaterniones permite construir simuladores de procesos de manufactura con gran facilidad. Este programa simula al proceso sin condiciones de paro de emergencia, y es compatible con el código binario 1 de operación formulado en el capítulo IV. Las trayectorias de operación son realizadas por puntos y por trayectorias rectas parametrizadas, las variables involucradas están contenidas en el programa.

5.3.7 Programa 7: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un Robot IRB 2400L/16 ABB con paro de emergencia 1 para planchas de uso doméstico.

Las consideraciones para este programa son las mismas que las del programa anterior , en este caso, debemos agregar las condiciones de paro de emergencia 1 descritas y formuladas en el capítulo IV.

5.3.8 Programa 8: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un Robot IRB 2400L/16 ABB con paro de emergencia 2 para planchas de uso doméstico.

También las consideraciones para este programa son las mismas que las del programa anterior, en este caso, debemos agregar las condiciones de paro de emergencia 2 descritas y formuladas en el capítulo IV.

Las estructuras de los programas se describen a continuación:

Programa 1: Simulación de un manipulador de dos grados de libertad tipo RR realizando una trayectoria de 35 puntos en el plano de referencia X,Y. La trayectoria simulada es la palabra “LUIS”.

Definición de variables.

```
ClearAll[e1,ep,epp,p0,p1,p2,p3,p,q0,q1,q2,q3,q,P0,
P1,P2,P3,P,Q0,Q1,Q2,Q3,Q,f1,f2,t1,t2,d1,d2,b1,b2,r1,
r2,e11,e21,b12,b22]
```

Función de multiplicación entre los Cuaterniones P y Q

```
Mpq[P_,Q_]:={P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-
P[[4]] Q[[4]],P[[1]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[1]]+P[[3]] Q[[4]]-
P[[4]] Q[[3]],P[[1]] Q[[3]]-P[[2]] Q[[4]]+P[[3]] Q[[1]]+
P[[4]] Q[[2]],P[[1]] Q[[4]]+P[[2]] Q[[3]]-P[[3]] Q[[2]]+
P[[4]] Q[[1]]};
```

Definición del conjugado del Cuaternion P

```
Conj[P_]:={P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};
```

Función de rotación entre Cuaterniones P y Q

```
Ropq[P_,Q_]:=Mpq[P,Mpq[Q,Conj[P]]];
```

Definición de la base canónica y desplazamientos angulares de la posición no deformada.

```
e1={0,1,0,0}; f1=N[30*Pi/360];f2=N[40*Pi/360];
```

Definición de los Cuaterniones de la posición no deformada y definición de los ejes de rotación.

```
P0=N[Cos[f1]];P1=0;P2=0;P3=N[Sin[f1]];P={P0,0,0,P3};
```

```
Q0=N[Cos[f2]];Q1=0;Q2=0;Q3=N[Sin[f2]];Q={Q0,0,0,Q3};
```

Definición de los cuaterniones de la posición deformada y definición de los ejes de rotación.

$$p=\{p0,0,0,p3\};$$

$$q=\{q0,0,0,q3\};$$

Definición de las bases móviles para los eslabones y la tenaza del órgano terminal

$$ep=Ropq[P,e1];epp=Ropq[Q,ep];$$

$$e11=Ropq[p,Ropq[P,e1]];e21=Ropq[q,Ropq[Q,e11]];$$

Dimensionamiento de los eslabones y bases móviles asociadas

$$d1=9;d2=8;b1=d1*ep;b2=d2*epp;$$

$$r1=b1+b2;$$

Vectores deformados

$$b12=d1*e11;b22=d2*e21;$$

$$r2=b12+b22;$$

Definición de las variables de la tenaza

$$R=\{0.7071,0,0,0.7071\};$$

$$ea=Ropq[R,epp];$$

$$ra=r1+0.5*ea;$$

$$rb=ra+0.5*epp;$$

$$rc=r1+(-0.5)*ea;$$

$$rd=rc+0.5*epp;$$

$$eb=Ropq[R,e21];$$

$$ra2=r2+0.5*eb;$$

$$rb2=ra2+0.5*e21;$$

$$rc2=r2-(0.5)*eb;$$

$$rd2=rc2+0.5*e21;$$

Cinemática inversa

Cálculo para la letra "L"

```
For[i=1,i<6,i++,  
puntox=1;  
puntoy=6-i;  
sol1[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},  
{q3,Q3}];  
?sol1
```

Cálculo para la letra "U"

```
For[i=1,i<3,i++,  
puntox=1+i;  
puntoy=1;  
sol2[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},  
{q3,Q3}];  
?sol2  
For[i=1,i<6,i++,  
puntox=5;  
puntoy=6-i;  
sol3[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},  
{q3,Q3}];  
?sol3  
For[i=1,i<3,i++,  
puntox=5+i;  
puntoy=1;  
sol4[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},  
{q3,Q3}];  
?sol4
```


Cálculo para la letra “ I ”

```
For[i=1,i<5,i++,
puntox=7;
puntoy=1+i;
sol5[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol5
For[i=1,i<6,i++,
puntox=9;
puntoy=6-i;
sol6[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol6
For[i=1,i<4,i++,
puntox=16-i;
puntoy=5;
sol7[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol7
```

Cálculo para la letra “ S ”

```
For[i=1,i<3,i++,
puntox=13;
puntoy=5-i;
sol8[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol8
For[i=1,i<3,i++,
puntox=13+i;
puntoy=3;
sol9[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol9
```

```

For[i=1,i<3,i++,
puntox=15;
puntoy=3-i;
sol10[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol10
For[i=1,i<3,i++,
puntox=15-i;
puntoy=1;
sol11[i]=FindRoot[{r2[[2]]==puntox,r2[[3]]==puntoy,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q3^2==1},{p0,P0},{p3,P3},{q0,Q0},
{q3,Q3}]];
?sol11

```

Resultados de la cinemática inversa (po,p3,qo,q3.)

```

pp={{0.993198129641925,-0.1164365718998243},
{0.989310290246402,-0.1458257508555347},
{0.98462772370358,-0.1746660977817577},
{0.979167269259987,-0.2030553097309716},
{0.971243339789917,-0.2438303155424379},
{0.864707907370597,-0.5022750590371409},
{0.802564755491907,-0.5965650117482716},
{0.929656462846532,-0.3684275520203038},
{0.902109509687347,-0.4315071639401307},
{0.866182620000311,-0.4997275946046973},
{0.819811081410669,-0.5726340810642249},
{0.7618034068237338,-0.6478082813238443},
{0.7604810452769458,-0.6493601310324526},
{0.7654425375127905,-0.6435042515523736},
{0.810214112053189,-0.5861340227540644},
{0.84974353603931,-0.5271962850394618},
{0.88356319194916,-0.4683119535444418},
{0.911874499795052,-0.4104691177464189},
{0.908647403785659,-0.4175642412774134},
{0.882875105804346,-0.4696078657251876},
{0.853708205214183,-0.5207516686002824},
{0.821419580638443,-0.5703243573123672},

```

{0.7866119173707835,-0.6174477236578494},
{0.961685932296873,-0.2741535475281948},
{0.946802828406173,-0.3218142385322166},
{0.93466339765298,-0.3555338705212029},
{0.916008607885444,-0.4011586098786495},
{0.896044025792171,-0.4439652056661196},
{0.912007755832141,-0.4101729553517913},
{0.930526623953641,-0.3662242511268738},
{0.914132766526893,-0.4054149542899099},
{0.897686957383831,-0.4406337782591818},
{0.874525241055589,-0.4849800024296508},
{0.853657592583065,-0.5208346327053209}};
pq={{0.6036981735242116,0.7972129673327768},
{0.5538715085962365,0.832602157074631},
{0.5027494187992891,0.864432196240386},
{0.4503805360531337,0.892836699931456},
{0.3960523570811989,0.918557694498965},
{0.4503805360531337,0.892836699931456},
{0.5027494187992891,0.864432196240386},
{0.6991725391052827,0.7149529778671267},
{0.6675840239018163,0.7445344659792852},
{0.6399167190397436,0.7684442677861615},
{0.6179697882457236,0.786201844830916},
{0.6036981735242119,0.7972129673327766},
{0.6521620611193299,0.7580795776411521},
{0.6991725391052826,0.7149529778671268},
{0.7089000625568391,0.7053089403282155},
{0.7243589986813003,0.6894229768650187},
{0.7446087637972455,0.6675011527153627},
{0.7686095742388823,0.6397181585575981},
{0.84002793377392,0.5425431507995639},
{0.821790065200069,0.5697903901773593},
{0.806680987480998,0.5909871271328017},
{0.7953448615048064,0.6061572001369779},
{0.7883089524053166,0.6152796076237474},
{0.999614144062089,0.02777702271694117},
{0.987490196267055,0.1576804118349911},
{0.965685542856586,0.2597141357681181},
{0.956629776165274,0.291306490408259},

```

{0.949008188162155,0.3152514215688532},
{0.975581177224637,0.2196391737486584},
{0.994679719861197,0.1030157992584213},
{0.992207760099476,0.1245943850997311},
{0.990544054948344,0.1371950261726099},
{0.968514651195994,0.2489565633171814},
{0.939686184100995,0.3420378274543787});

```

Subrutina de graficación y simulación

```

For[i=1,i<35,i++,
p0=pp[[i,1]];
p3=pp[[i,2]];
q0=pq[[i,1]];
q3=pq[[i,2]];

```

Graficación de la palabra "LUIS"

```

G[i]=Show[Graphics[{{PointSize[0.01],
RGBColor[0,0,1],Point[{0,0}],Point[{20,20}],
Point[{20,-20}],Point[{-20,20}],Point[{-20,-20}],
Point[{r2[[2]],r2[[3]]}],{AbsoluteThickness[1.0],
RGBColor[0,0,1],Line[{{1,5},{1,1}}]},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{1,1},{3,1}}]},{AbsoluteThickness[1.0],
RGBColor[0,0,1],Line[{{5,5},{5,1}}]},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{5,1},{7,1}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{7,1},{7,5}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{9,5},{9,1}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{15,5},{13,5}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{13,5},{13,3}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{13,3},{15,3}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{15,3},{15,1}}]},{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,0,1],
Line[{{15,1},{13,1}}]},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[1,0,0],
Line[{{0,0},{b12[[2]],b12[[3]]}}]},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[0,1,0],
Line[{{b12[[2]],b12[[3]]},{r2[[2]],r2[[3]]}}]},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[1,0,0],

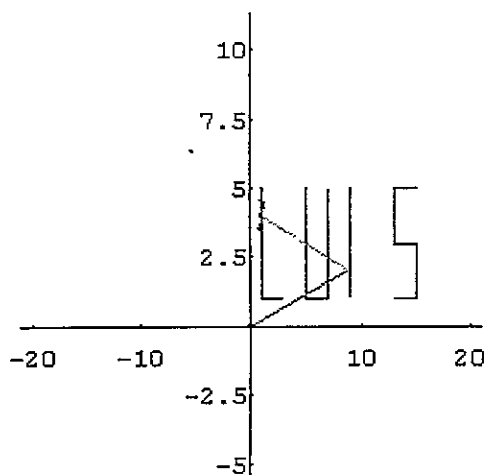
```

```

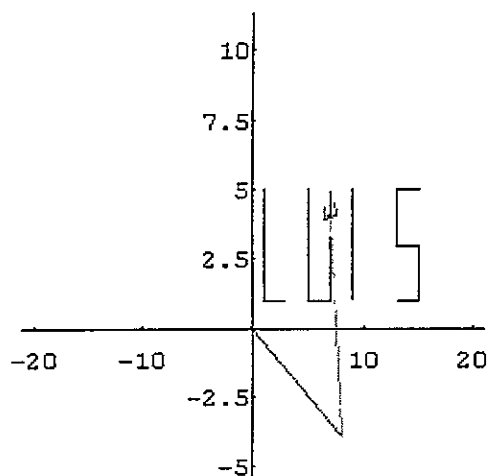
Line[{{r2[[2]],r2[[3]]},{ra2[[2]],ra2[[3]]}},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[1,0,0],
Line[{{ra2[[2]],ra2[[3]]},{rb2[[2]],rb2[[3]]}},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[1,0,0],
Line[{{r2[[2]],r2[[3]]},{rc2[[2]],rc2[[3]]}},
{AbsoluteThickness[1.0],RGBColor[1,0,0],
Line[{{rc2[[2]],rc2[[3]]},{rd2[[2]],rd2[[3]]}},
AspectRatio->1/1,Axes->True]]

```

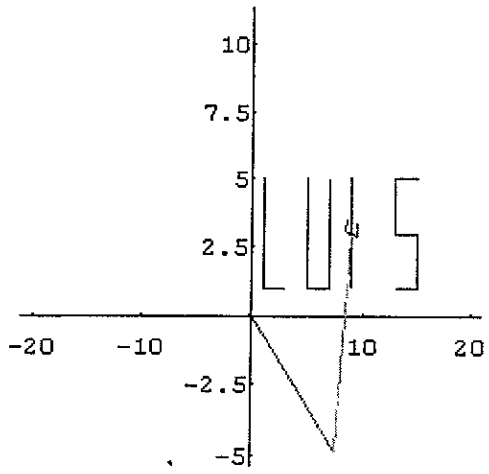
Visualización de la trayectoria.



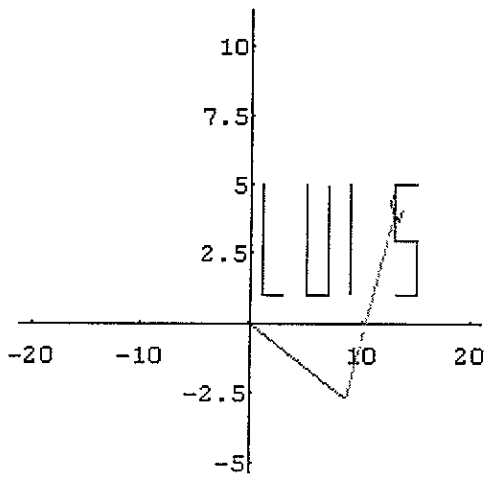
Inicio de la letra " L "



Realizando la letra " U "



Realizando la letra "I"



Realizando la letra "S"

Programa 2 : Simulación de un manipulador de tres grados de libertad tipo RRR realizando una trayectoria recta en el espacio con ejes definidos en (Z,X,Z).

ClearAll[F0,F3,G0,G1,H0,H3,f0,f3,g0,g1,h0,h3,v1,v2,v3,e1,e2,e3,F,G,H,
f,g,h,e11,e21,e31,e21,e22,e32,e31,e32,e33]

Función de multiplicación entre los Cuaterniones P y Q

Mpq[P_,Q_]:= {P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-
P[[4]] Q[[4]],P[[1]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[1]]+P[[3]] Q[[4]]-
P[[4]] Q[[3]],P[[1]] Q[[3]]-P[[2]] Q[[4]]+P[[3]] Q[[1]]+
P[[4]] Q[[2]],P[[1]] Q[[4]]+P[[2]] Q[[3]]-P[[3]] Q[[2]]+
P[[4]] Q[[1]]};

El Cuaternion conjugado de P

Conj[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};

Función de rotación entre los Cuaterniones P y Q

Ropq[P_,Q_]:=Mpq[P,Mpq[Q,Conj[P]]];

Definición de la base canónica

e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};

Desplazamientos angulares de la posición no deformada

v1=0;v2=0;v3=0;

Cuaterniones de la posición no deformada

F0=Cos[(v1/2)*Degree]/N;F1=0;F2=0;F3=Sin[(v1/2)*Degree]/N;
G0=Cos[(v2/2)*Degree]/N;G1=Sin[(v2/2)*Degree]/N;G2=0;G3=0;
H0=Cos[(v3/2)*Degree]/N;H1=0;H2=0;H3=Sin[(v3/2)*Degree]/N;

Quaterniones de la posición deformada y definición de los ejes de rotación

$F=\{F0,0,0,F3\}$; $G=\{G0,G1,0,0\}$; $H=\{H0,0,0,H3\}$;
 $f=\{f0,0,0,f3\}$; $g=\{g0,g1,0,0\}$; $h=\{h0,0,0,h3\}$;

Dimensionamiento de los eslabones

$d1=5$; $d2=4$; $d3=4$;

Definición de las bases móviles

$e11=\text{Ropq}[f,\text{Ropq}[F,e1]]$;
 $e21=\text{Ropq}[f,\text{Ropq}[F,e2]]$;
 $e31=\text{Ropq}[f,\text{Ropq}[F,e3]]$;
 $b1=d1*e31$;

$e12=\text{Ropq}[g,\text{Ropq}[G,e11]]$;
 $e22=\text{Ropq}[g,\text{Ropq}[G,e21]]$;
 $b2=d2*e12$;

$e23=\text{Ropq}[h,\text{Ropq}[H,e22]]$;
 $b3=d3*e23$;

Definición del vector de posición

$rp=\text{Simplify}[b1+b2+b3]$;
 $rpp=b1+b2$;

Cálculo de la cinemática inversa

$\text{ClearAll}[\text{Sol}]$
 $\text{For}[i=0;f0=F0;g0=G0;h0=H0;f3=F3;g1=G1;h3=H3,2*i<23,i++,$
 $t=(\text{Sqrt}[2*i])$;

Parametrización de la trayectoria recta

$$x=2+(3/\text{Sqrt}[22])*t;$$

$$y=3+(2/\text{Sqrt}[22])*t;$$

$$z=4+(3/\text{Sqrt}[22])*t;$$

Solución al sistema de ecuaciones

```
Sol[i]=FindRoot[{rp[[2]]==x,rp[[3]]==y,rp[[4]]==z,f0^2+f3^2==1,  
g0^2+g1^2==1,h0^2+h3^2==1},{f0,f0},{g0,g0},{h0,h0},  
{f3,f3},{g1,g1},{h3,h3},MaxIterations->30]
```

Lista de resultados de f0,f3,g0,g1,h0,h3

```
Lf={{0.999252651270308,-0.03865409330537433},  
{0.999530837964698,-0.03062848278299634},  
{0.999959796555956,-0.00896689867075943},  
{0.999909937673148,0.01342075044400072},  
{0.999354403325612,0.03592737888728634},  
{0.998286399861538,0.05851720987443806},  
{0.996689866180745,0.0812976669567354},  
{0.99453119776529,0.1044399189560042},  
{0.991752300791832,0.1281693172101174},  
{0.988259605912683,0.152784002177282},  
{0.983903296483515,0.178701715629347},  
{0.978433758592604,0.2065608386077825}};
```

```
Lg={{0.990543041684683,-0.1372023417076254},  
{0.999918867865894,-0.0127380408928979},  
{0.999367323917419,0.03556616209456264},  
{0.997604487360053,0.06917576742679256},  
{0.995475791686535,0.095015515396525},  
{0.993256099060405,0.1159410267304333},  
{0.991053782039669,0.1334631076547664},  
{0.988913755858044,0.1484910215290383},  
{0.986853278864573,0.1616187055827432},  
{0.984876524714908,0.1732577013165244},  
{0.982981017728099,0.1837071549674419},  
{0.981160409024078,0.1931948543924113}};
```

```
Lh={{0.951889746759615,0.3064407120699133},
- {0.985850971987533,0.1676241660120562},
  {0.995030645774306,0.0995691416552675},
  {0.99915709428506,0.04104998099676328},
  {0.999907564864318,-0.01359638654622213},
  {0.997784870252456,-0.06652332444556912},
  {0.992911563272743,-0.1188554900678899},
  {0.985215112980109,-0.1713218642076677},
  {0.974474290285405,-0.2244991259955294},
  {0.960306887946323,-0.2789456595160582},
  {0.942104497855448,-0.3353194225220784},
  {0.91887484725767,-0.3945491288511411}};
```

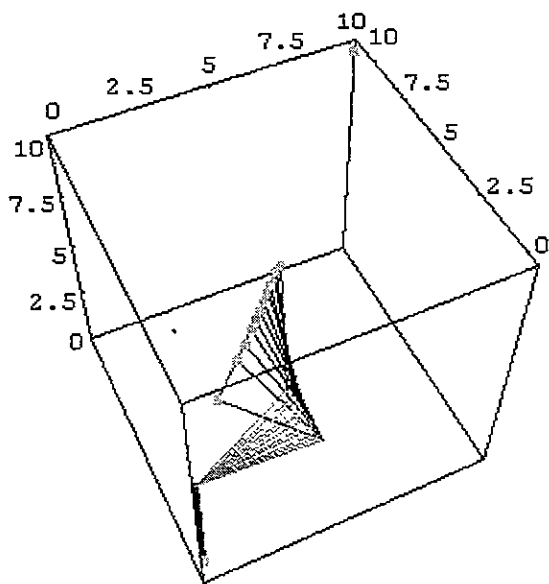
Graficación y simulación de la trayectoria

```
For[i=1,i<13,i++,
f0=Lf[[i,1]];
f3=Lf[[i,2]];
g0=Lg[[i,1]];
g1=Lg[[i,2]];
h0=Lh[[i,1]];
h3=Lh[[i,2]];
```

Graficación

```
A[i]=Graphics3D[{{PointSize[0.01],RGBColor[0,1,1],
Point[{0,0,0}],Point[{10,10,10}],Point[{rp[[2]],rp[[3]],rp[[4]]]}},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{b1[[2]],b1[[3]],
b1[[4]]}}]},{AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,1,0],Line[{{b1[[2]],
b1[[3]],b1[[4]]},{rpp[[2]],rpp[[3]],rpp[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,1],Line[{{rpp[[2]],rpp[[3]],
rpp[[4]]},{rp[[2]],rp[[3]],rp[[4]]}}]},{AbsoluteThickness[1],RGBColor
[1,0,0],Line[{{2,3,4},{5,5,7}}]}},ViewPoint->{-0.893,-1.874,2.672},
Axes->True]]
Show[A[1],A[2],A[3],A[4],A[5],A[6],A[7],A[8],A[9],A[10],A[11],A[12]]
-Graphics3D-
```

Simulación de la trayectoria



Salida del programa con 13 puntos de la trayectoria recta en el espacio

Programa 3: Simulación de un modelo de síntesis analítica para conducción de cuerpo rígido para tres puntos de precisión de un mecanismo de cuatro barras.

Función Multiplicación de los Cuaterniones P y Q

$$\text{Mult}[P_ , Q_]:= \{P[[1]]*Q[[1]]-P[[2]]*Q[[2]]-P[[3]]*Q[[3]]-P[[4]]*Q[[4]], P[[1]]*Q[[2]]+P[[2]]*Q[[1]]+P[[3]]*Q[[4]]-P[[4]]*Q[[3]], P[[1]]*Q[[3]]-P[[2]]*Q[[4]]+P[[3]]*Q[[1]]+P[[4]]*Q[[2]], P[[1]]*Q[[4]]+P[[2]]*Q[[3]]-P[[3]]*Q[[2]]+P[[4]]*Q[[1]]\}$$

Conjugado de un Quaternion P

$$\text{Conj}[P_]:=\{P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]\}$$

Transformación de R4 a R3

$$\text{T2D}[P_]:=\{P[[2]], P[[3]]\}$$

Función de rotación entre los Cuaterniones P y Q

$$\text{Ro}[P_ , Q_]:=\text{Mult}[P, \text{Mult}[Q, \text{Conj}[P]]]$$

Elementos de la base inercial

$$e1=\{0,1,0,0\};$$

Definición de la función norma.

$$\text{Nm}[P_]:=P[[1]]^2+P[[4]]^2$$

Puntos de precisión y definición de vectores.

Coordenadas de los puntos de precisión

$$P1=\{0,25,15,0\};$$

$$P2=\{0,12,20,0\};$$

$$P3=\{0,0,15,0\};$$

Vectores definidos entre los puntos de precisión

$$P21=P2-P1;$$

$$P31=P3-P1;$$

Valores iniciales de diseño.

ClearAll[p2,p3,q2,q3,r2,r3,s2,s3]

Desplazamientos angulares angulares de la manivela

$$\beta_2 = 20^\circ; \beta_3 = 25^\circ;$$

Desplazamientos angulares angulares del acoplador

$$\alpha_2 = 30^\circ; \quad \alpha_3 = 30^\circ;$$

Desplazamientos angulares angulares del seguidor

$$\gamma_2 = 15^\circ; \quad \gamma_3 = 20^\circ;$$

Parámetros de rotación correspondientes

Manivela

$$p_2 = \{\text{Cos}[\beta_2/2], 0, 0, \text{Sin}[\beta_2/2]\};$$

$$p_3 = \{\text{Cos}[\beta_3/2], 0, 0, \text{Sin}[\beta_3/2]\};$$

Acoplador

$$q_2 = \{\text{Cos}[\alpha_2/2], 0, 0, \text{Sin}[\alpha_2/2]\};$$

$$q_3 = \{\text{Cos}[\alpha_3/2], 0, 0, \text{Sin}[\alpha_3/2]\};$$

Seguidor

$$r_2 = \{\text{Cos}[\gamma_2], 0, 0, 0, \text{Sin}[\gamma_2/2]\};$$

$$r_3 = \{\text{Cos}[\gamma_3], 0, 0, \text{Sin}[\gamma_3/2]\};$$

Consideraciones de rigidez

$$s2 = q2;$$

$$s3 = q3;$$

Cálculo de las bases locales de los mecanismos virtuales

```
ClearAll[e11,e21,e31,e41,a11,a21,a31,a41,  
b11,b21,b31,b41,p1,q1,r1,s1,  
p11,p12,q11,q12,r11,r12,s11,s12]
```

$$p1 = N[\{p11,0,0,p12\}]; \quad q1 = N[\{q11,0,0,q12\}];$$

$$r1 = N[\{r11,0,0,r12\}]; \quad s1 = N[\{s11,0,0,s12\}];$$

Bases asociadas a la primera configuración (Mecanismo 1)

$$e11=N[Ro[p1,e1]];$$

$$e21=N[Ro[q1,e1]];$$

$$e31=N[Ro[r1,e1]];$$

$$e41=N[Ro[s1,e1]];$$

Bases asociadas a la segunda configuración (Mecanismo 2)

$$a11=N[Ro[p2,e11]];$$

$$a21=N[Ro[q2,e21]];$$

$$a31=N[Ro[r2,e31]];$$

$$a41=N[Ro[s2,e41]];$$

Bases asociadas a la tercera configuración (Mecanismo 3)

$$b11=N[Ro[p3,a11]];$$

$$b21=N[Ro[q3,a21]];$$

$$b31=N[Ro[r3,a31]];$$

$$b41=N[Ro[s3,a41]];$$

Solución al sistema de ecuaciones.

Se construyen las ecuaciones de lazo vectorial y se definen las normas de los Cuaterniones asociados.

```
ClearAll[l2,li,ld,l4,EC1,EC2,EC3,EC4]
```

Ecuaciones de lazo(pivote 1)

$$EC1 = \text{Simplify}[l2 a11 + li a21 - li e21 - l2 e11 - P21];$$

$$EC2 = \text{Simplify}[l2 b11 + li b21 - li e21 - l2 e11 - P31];$$

Ecuaciones de lazo(pivote 2)

$$EC3 = \text{Simplify}[l4 a31 + ld a41 - ld e41 - l4 e31 - P21];$$

$$EC4 = \text{Simplify}[l4 b31 + ld b41 - ld e41 - l4 e31 - P31];$$

Solución al sistema de ecuaciones

```
sol=FindRoot[{  
    EC1[[2]]==0,  
    EC1[[3]]==0,  
    EC2[[2]]==0,  
    EC2[[3]]==0,  
    EC3[[2]]==0,  
    EC3[[3]]==0,  
    EC4[[2]]==0,  
    EC4[[3]]==0,  
    Nm[p1]==1,  
    Nm[q1]==1,  
    Nm[r1]==1,  
    Nm[s1]==1 },
```

Condiciones iniciales para resolver el sistema.

```
{l2,90},  
{li,120},  
{ld,25},  
{l4,60},  
{p11,0},  
{p12,1},  
{q11,0},
```

```

{q12,1},
{r11,0},
{r12,1},
{s11,0},
{s12,1},
MaxIterations->250];(*Termina FindRoot*)

```

Definición del vector solución

```

l2=l2/.sol[[1]];
li=li/.sol[[2]];
ld=ld/.sol[[3]];
l4=l4/.sol[[4]];
p11=p11/.sol[[5]];
p12=p12/.sol[[6]];
q11=q11/.sol[[7]];
q12=q12/.sol[[8]];
r11=r11/.sol[[9]];
r12=r12/.sol[[10]];
s11=s11/.sol[[11]];
s12=s12/.sol[[12]];

```

Resultados que definen la configuración del mecanismo.

```
ClearAll[l1,O2,O4]
```

Marco

$$l1 = l2 e_{11} + li e_{21} - ld e_{41} - l4 e_{31};$$

Pivote O2

$$O2 = P1 - li e_{21} - l2 e_{11};$$

Pivote O4

$$O4 = P1 - ld e_{41} - l4 e_{31};$$

Impresión de la solución

```
Print["Longitudes" ]
Print["manivela: ",l2 ]
Print["acoplador izq.: ",li]
Print["acoplador der. ",ld ]
Print["seguidor: ",l4 ]
Print[" "]
Print["Configuración inicial" ]
Print["manivela: ",N[2*ArcCos[p11]*180/Pi ],"." ]
Print["acoplador izq.: ",N[2*ArcCos[q11]*180/Pi ],"." ]
Print["acoplador der.: ",N[2*ArcCos[s11]*180/Pi ],"." ]
Print["seguidor: ",N[2*ArcCos[r11]*180/Pi ],"." ]
Print[" "]
Print["Pivotes"]
Print["O2: ",O2 ]
Print["O4: ",O4 ]
Longitudes
manivela: 33.492
acoplador izq.: -47.4216
acoplador der. -27.8746
seguidor: 9.59767
```

```
Configuración inicial
manivela: 206.46
acoplador izq.: 219.212
acoplador der.: 235.593
seguidor: 198.654
```

```
Pivotes
O2: {0, 18.2406, -0.0560388, 0}
O4: {0, 18.3425, -4.928, 0}
```

Graficación y simulación

Se redefinen bases b_{ij} para graficar cada configuración del mecanismo. El primer subíndice está asociado al eslabón, mientras que el segundo subíndice se asocia a la j -ésima configuración del mecanismo:

b_{1j} : base asociada a la manivela

b_{2j} : base asociada al lado izquierdo del acoplador

b_{3j} : base asociada al seguidor.

Bases asociadas

$b_{1[1]} = e_{11}; \quad b_{1[2]} = a_{11}; \quad b_{1[3]} = b_{11};$

$b_{2[1]} = e_{21}; \quad b_{2[2]} = a_{21}; \quad b_{2[3]} = b_{21};$

$b_{3[1]} = e_{31}; \quad b_{3[2]} = a_{31}; \quad b_{3[3]} = b_{31};$

Subrutina de graficación

For[t=1,t<=3,t+=1,

es11=Line[{T2D[O2],T2D[O2+l1] }];

es12=Line[{T2D[O2],T2D[O2 + l2 b1[t]] }];

es13=Polygon[{T2D[O2+l2 b1[t]],T2D[O2 + l2 b1[t]+
li b2[t]],T2D[O2+l1+l4 b3[t]],T2D[O2+l2 b1[t]]}];

es14=Line[{T2D[O2+l1],T2D[O2+l1+l4 b3[t]]}];

pprec={ Point[T2D[P1]],Point[T2D[P2]],Point[T2D[P3]] };

or2=Point[T2D[O2]];

or4=Point[T2D[O4]];

marco=Graphics[{AbsoluteThickness[1.5],es11}];

manivela=Graphics[{AbsoluteThickness[1.5],
RGBColor[0,0,1],es12}];

acoplador=Graphics[{Hue[1],es13}];

seguidor=Graphics[{AbsoluteThickness[1.5],
RGBColor[0,1,0],es14}];

puntos=Graphics[{PointSize[0.01],
RGBColor[1,0,1],pprec}];

pivote1=Graphics[{PointSize[0.01],or2}];

pivote2=Graphics[{PointSize[0.01],or4}];

```
Show[marco,manivela,acoplador,  
seguidor,puntos,pivote1,pivote2,
```

```
Axes->True,PlotRange->
```

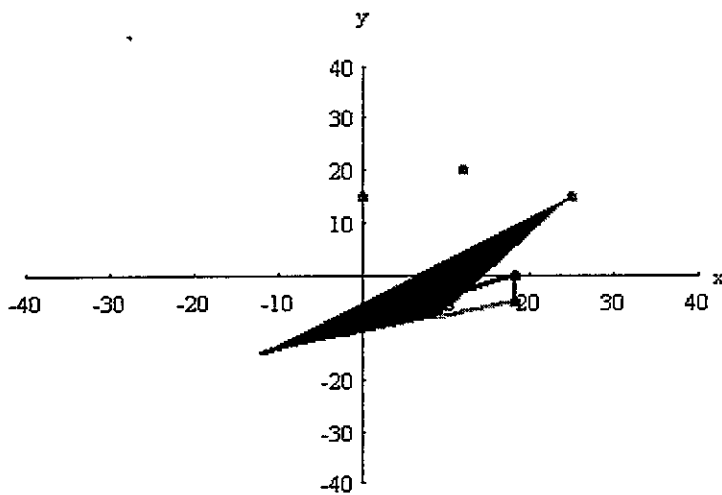
```
{ {-40,40},{-40,40} },
```

```
AxesLabel->{"x","y"},DefaultFont ->
```

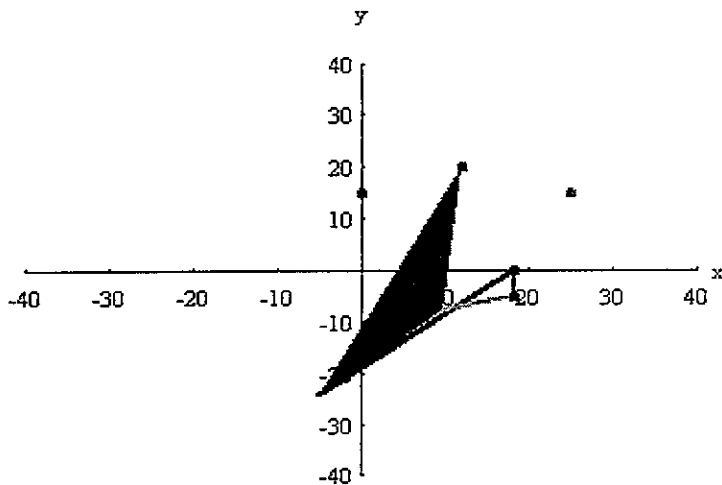
```
{"Times",8} ] ];
```

Simulación

Punto de precisión 1



Punto de precisión 2



Programa 4: Simulación de un robot paralelo tipo RRR de tres grados de libertad.

Función de multiplicación entre los Cuaterniones P y Q

```
QMULT[P_,Q_]:= {P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-  
P[[4]] Q[[4]],P[[1]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[1]]+  
P[[3]] Q[[4]]-P[[4]] Q[[3]],P[[1]] Q[[3]]-  
P[[2]] Q[[4]]+P[[3]] Q[[1]]+P[[4]] Q[[2]],  
P[[1]] Q[[4]]+P[[2]] Q[[3]]-P[[3]] Q[[2]]+  
P[[4]] Q[[1]]}
```

Definición del Cuaternion quaternion P

```
QCONJ[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]}
```

Función de rotación entre los Cuaterniones P y Q

```
ROT[P_,Q_]:=QMULT[P,QMULT[Q,QCONJ[P]]]
```

Definición de la base canónica

```
ClearAll["q**","p**","r**","s**","t**","u**","v**","w**","x**"];  
e1 = {0,1,0,0}; e2 = {0,0,1,0}; e3 = {0,0,0,1};
```

Cuaterniones de la posición no deformada

```
P = {1,0,0,0}; Q = {1,0,0,0}; R = {1,0,0,0};  
S = {1,0,0,0}; T = {0,0,0,1}; U = {0,0,0,1};  
V = {1,0,0,0};
```

Cuaterniones de la posición deformada y ejes definición de los jes de rotación

```
p = {p0,0,0,p3}; q = {q0,0,0,q3}; r = {r0,0,0,r3};  
s = {s0,0,0,s3}; t = {t0,0,0,t3}; u = {u0,0,0,u3};  
v = {v0,0,0,v3};
```

Quaterniones definidos en la plataforma P_L

$m = \{\text{Cos}[15 \text{ Degree}], 0, 0, \text{Sin}[15 \text{ Degree}]\};$

$n = \{\text{Cos}[-15 \text{ Degree}], 0, 0, \text{Sin}[-15 \text{ Degree}]\};$

Cadena cinemática CC_1 (definiciones de las bases móviles)

$e_{11} = \text{ROT}[p, \text{ROT}[P, e_1]];$

$e_{21} = \text{ROT}[p, \text{ROT}[P, e_2]];$

$e_{12} = \text{ROT}[q, \text{ROT}[Q, e_1]];$

$e_{22} = \text{ROT}[q, \text{ROT}[Q, e_2]];$

Cadena cinemática CC_1 (vectores deformados)

$l_1 = L_1 * e_{21}; l_2 = L_2 * e_{12}; r_{p1} = l_1 + l_2;$

Plataforma P_L (definiciones de las bases móviles)

$e_{13} = \text{ROT}[r, \text{ROT}[R, e_1]];$

$e_{23} = \text{ROT}[r, \text{ROT}[R, e_2]];$

$e_{14} = \text{ROT}[m, e_{13}}];$

$e_{24} = \text{ROT}[m, e_{23}}];$

$e_{15} = \text{ROT}[n, e_{13}}];$

$e_{25} = \text{ROT}[n, e_{23}}];$

Plataforma P_L (vectores deformados)

$l_3 = L_3 * e_{13}; l_4 = L_4 * e_{14}; l_5 = L_5 * e_{15};$

Cadena cinemática CC_2 (definiciones de las bases móviles)

$e_{16} = \text{ROT}[s, \text{ROT}[S, e_1]];$

$e_{26} = \text{ROT}[s, \text{ROT}[S, e_2]];$

$e_{17} = \text{ROT}[t, \text{ROT}[T, e_1]];$

$e_{27} = \text{ROT}[t, \text{ROT}[T, e_2]];$

Cadena cinemática CC_2 (vectores deformados)

$$l6=L6*e26; l7=L7*e17; rp2=l6+l7;$$

Cadena cinemática CC_3 (definiciones de las bases móviles)

$$e18 = \text{ROT}[u, \text{ROT}[U, e1]];$$

$$e28 = \text{ROT}[u, \text{ROT}[U, e2]];$$

$$e19 = \text{ROT}[v, \text{ROT}[V, e1]];$$

$$e29 = \text{ROT}[v, \text{ROT}[V, e2]];$$

Cadena cinemática CC_3 (vectores deformados)

$$l8=L8*e28; l9=L9*e19; rp3=l8+l9;$$

Simplificación de las ecuaciones del modelo

$$l1 = \text{Simplify}[l1];$$

$$l2 = \text{Simplify}[l2];$$

$$rp1 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l1+l2]];$$

$$l1 = \text{InputForm}[l1];$$

$$l2 = \text{InputForm}[l2];$$

$$l3 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l3]];$$

$$l4 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l4]];$$

$$l5 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l5]];$$

$$l6 = \text{Simplify}[l6];$$

$$l7 = \text{Simplify}[l7];$$

$$rp2 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l6+l7]];$$

$$l6 = \text{InputForm}[l6];$$

$$l7 = \text{InputForm}[l7];$$

$$l8 = \text{Simplify}[l8];$$

$$l9 = \text{Simplify}[l9];$$

$$rp3 = \text{InputForm}[\text{Simplify}[l8+l9]];$$

$$l8 = \text{InputForm}[l8];$$

$$l9 = \text{InputForm}[l9];$$

Ecuaciones cinemáticas del manipulador (simplificadas)

```
ClearAll[p0,p3,q0,q3,r0,r3,s0,s3,t0,t3,u0,u3,v0,v3,  
solucion,solucion1,solucion2];
```

lado = 30; (* Longitud del triángulo externo *)

RR1 = {0,lado,0,0};

RR2 = N[{0,lado*Cos[60 Degree],lado*Sin[60 Degree],0}];

Longitud de los brazos del manipulador

L1 = 10; L2 = 10; L4 = 11;

L6 = 10; L7 = 10; L3 = N[L4*Sin[30 Degree]/Sin[120 Degree]];

L8 = 10; L9 = 10; L5 = L4;

Constantes de las ecuaciones

A1 = p0*p3; A2 = (p0^2 - p3^2);

A3 = q0*q3; A4 = (q0^2 - q3^2);

A5 = r0*r3; A6 = (r0^2 - r3^2);

A7 = s0*s3; A8 = (s0^2 - s3^2);

A9 = t0*t3; A10 = (-t0^2 + t3^2);

A11 = u0*u3; A12 = (-u0^2 + u3^2);

A13 = v0*v3; A14 = (v0^2 - v3^2);

I1 = {0, -2*L1*A1, L1*A2, 0};

I2 = {0, L2*A4, 2*L2*A3, 0};

I3 = {0, L3*A6, 2*L3*A5, 0};

I4 = {0, L4*(r0^2*Cos[30*Degree] - r3^2*Cos[30*Degree] -
2*r0*r3*Sin[30*Degree]),
L4*(2*r0*r3*Cos[30*Degree] + r0^2*Sin[30*Degree] -
r3^2*Sin[30*Degree]), 0};

I5 = {0, L5*(r0^2*Cos[30*Degree] - r3^2*Cos[30*Degree] +
2*r0*r3*Sin[30*Degree]),
L5*(2*r0*r3*Cos[30*Degree] - r0^2*Sin[30*Degree] +

$$r3^2 * \sin[30 * \text{Degree}], 0);$$

$$I6 = \{0, -2 * L6 * A7, L6 * A8, 0\};$$

$$I7 = \{0, L7 * A10, -2 * L7 * A9, 0\};$$

$$I8 = \{0, 2 * L8 * A11, L8 * A12, 0\};$$

$$I9 = \{0, L9 * A14, 2 * L9 * A13, 0\};$$

$$rp1 = \{0, -2 * L1 * A1 + L2 * A4, L1 * A2 + 2 * L2 * A3, 0\};$$

$$rp2 = \{0, -2 * L6 * A7 + L7 * A10, L6 * A8 - 2 * L7 * A9, 0\};$$

$$rp3 = \{0, 2 * L8 * A11 + L9 * A14, L8 * A12 + 2 * L9 * A13, 0\};$$

Cinemática directa

Se proporciona rotación a los eslabones I1, I6 y I8 a la vez, ó a cada uno por separado, manteniendo sin rotación a los otros dos.

Solución de ecuaciones

```
ClearAll[p0,p3,q0,q3,r0,r3,s0,s3,t0,t3,u0,u3,v0,v3,solucion];
```

```
i = 1;
```

```
iq0=.1;iq3=.8;ir0=.8;ir3=.8;
```

```
it0=.1;it3=.8;iv0=.8;iv3=.8;
```

```
inc=5;
```

```
For[phi=-20,phi<=35,phi+=inc,
```

```
  phi1=phi;phi2=phi/5+35;phi3=phi/5+40;
```

```
  angulos[i]={phi1,phi2,phi3};
```

```
  p0=Cos[phi1/2 Degree]; p3=Sin[phi1/2 Degree];
```

```
  s0=Cos[phi2/2 Degree]; s3=Sin[phi2/2 Degree];
```

```
  u0=Cos[phi3/2 Degree]; u3=Sin[phi3/2 Degree];
```

```
f0=N[RR1[[2]]+rp2[[2]]-(rp1[[2]]+I5[[2]])];
```

```
f1=N[RR1[[3]]+rp2[[3]]-(rp1[[3]]+I5[[3]])];
```



```

g0=N[RR2[[2]]+rp3[[2]]-(rp1[[2]]+l4[[2]]);
g1=N[RR2[[3]]+rp3[[3]]-(rp1[[3]]+l4[[3]]);

```

```

solucion[i] = FindRoot[{f0==0,f1==0, g0==0,g1==0,
    q0^2+q3^2==1,r0^2+r3^2==1,
    t0^2+t3^2==1,v0^2+v3^2==1},
    {q0, iq0}, {q3, iq3}, {r0, ir0}, {r3, ir3},
    {t0, it0}, {t3, it3}, {v0, iv0}, {v3, iv3}, MaxIterations->50];

```

```

If[N[Abs[(f0/.solucion[i])]<10^-5 && Abs[(f1/.solucion[i])<10^-5 &&
    Abs[(g0/.solucion[i])<10^-5 && Abs[(g1/.solucion[i])<10^-5],
iq0=q0/.solucion[i];iq3=q3/.solucion[i];
ir0=r0/.solucion[i];ir3=r3/.solucion[i];
it0=t0/.solucion[i];it3=t3/.solucion[i];
iv0=v0/.solucion[i];iv3=v3/.solucion[i],

```

```

Print["No se encontró solución para phi = ",phi];
iq0=.5;iq3=.8;ir0=.5;ir3=.8;it0=.5;it3=.8;iv0=.5;iv3=.8];
i++ ];

```

Graficación para visualizar el movimiento

```

For[j=1,j<i,j++,solq[j]={q0,q3}/.solucion[j];
    solr[j]={r0,r3}/.solucion[j];
    solt[j]={t0,t3}/.solucion[j];
    solv[j]={v0,v3}/.solucion[j];

```

```

g1=g2={SurfaceGraphics[{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,0}},
    MeshRange->{{-L1,lado+L6},
    {-(Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]/3+L1),Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]+L8}}];

```

```

For[j=1,j<i,j++, q0=solq[j][[1]];q3=solq[j][[2]];
    r0=solr[j][[1]];r3=solr[j][[2]];
    t0=solt[j][[1]];t3=solt[j][[2]];
    v0=solv[j][[1]];v3=solv[j][[2]];

```

```

phi1 = angulos[j][[1]]; phi2 = angulos[j][[2]]; phi3 = angulos[j][[3]];

```

$p_0 = \cos[\text{phi}1/2 \text{ Degree}]$; $p_3 = \sin[\text{phi}1/2 \text{ Degree}]$;
 $s_0 = \cos[\text{phi}2/2 \text{ Degree}]$; $s_3 = \sin[\text{phi}2/2 \text{ Degree}]$;
 $u_0 = \cos[\text{phi}3/2 \text{ Degree}]$; $u_3 = \sin[\text{phi}3/2 \text{ Degree}]$;

$\text{punto1} = N[\{l_1[[2]], l_1[[3]], l_1[[4]]\}]$;
 $\text{punto2} = N[\{rp_1[[2]], rp_1[[3]], rp_1[[4]]\}]$;
 $\text{punto3} = N[\{rp_1[[2]] + l_4[[2]], rp_1[[3]] + l_4[[3]], rp_1[[4]] + l_4[[4]]\}]$;
 $\text{punto4} = N[\{rp_1[[2]] + l_5[[2]], rp_1[[3]] + l_5[[3]], rp_1[[4]] + l_5[[4]]\}]$;
 $\text{punto5} = N[\{rp_1[[2]] + l_3[[2]], rp_1[[3]] + l_3[[3]], rp_1[[4]] + l_3[[4]]\}]$;
 $\text{punto6} = N[\{l_6[[2]] + \text{lado}, l_6[[3]], l_6[[4]]\}]$;
 $\text{punto7} = N[\{rp_2[[2]] + \text{lado}, rp_2[[3]], rp_2[[4]]\}]$;
 $\text{punto8} = N[\{l_8[[2]] + \text{lado}/2, l_8[[3]] + \sqrt{\text{lado}^2 - (\text{lado}/2)^2}, l_8[[4]]\}]$;
 $\text{punto9} = N[\{rp_3[[2]] + \text{lado}/2, rp_3[[3]] + \sqrt{\text{lado}^2 - (\text{lado}/2)^2}, rp_3[[4]]\}]$;

Graficación y simulación

$g_2 = \{\text{Graphics3D}[\{\text{PointSize}[0.01], \text{Point}[\text{punto5}], \text{RGBColor}[0, 1, 0]\}], g_2\}$;

$g_3 = \text{Graphics3D}[$

Plataforma P_L

$\{\{\text{AbsoluteThickness}[2], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Line}[\{\text{punto2}, \text{punto3}\}]\},$
 $\{\text{AbsoluteThickness}[2], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Line}[\{\text{punto3}, \text{punto4}\}]\},$
 $\{\text{AbsoluteThickness}[2], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Line}[\{\text{punto2}, \text{punto4}\}]\},$
 $\{\text{AbsoluteThickness}[2], \text{RGBColor}[0, 0, 1], \text{Line}[\{\text{punto2}, \text{punto5}\}]\},$

CC_1

$\{\text{AbsoluteThickness}[5], \text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{Line}[\{\text{punto1}, \text{punto2}\}]\},$
 $\{\text{AbsoluteThickness}[10], \text{RGBColor}[0, 1, 0], \text{Line}[\{\{0, 0, 0\}, \text{punto1}\}]\},$

CC_2

$\{\text{AbsoluteThickness}[5], \text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{Line}[\{\text{punto6}, \text{punto7}\}]\},$
 $\{\text{AbsoluteThickness}[10], \text{RGBColor}[0, 1, 0], \text{Line}[\{\{\text{lado}, 0, 0\}, \text{punto6}\}]\},$

CC₃

```
{AbsoluteThickness[10],RGBColor[0,1,0],  
Line[{{lado/2,Sqrt[lado^2-(lado/2)^2],0},punto8}],  
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0],Line[{{punto8,punto9}}]
```

```
}};
```

```
Show[g1,g3,g2,Axes->True,PlotRange->{{-L1,lado+L6},  
{-(Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]/3+L1),Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]+L8},{0,0}},  
ViewPoint->{0,0,3.384}];
```

Cinemática inversa

Solución de ecuaciones para diferentes trayectorias

Líneas rectas

```
ClearAll[p0,p3,q0,q3,r0,r3,s0,s3,t0,t3,u0,u3,v0,v3,  
solucion1,solucion2,solucion3];
```

```
i=1;
```

```
ip0=.1; ip3=.866; iq0=.5; iq3=.866;
```

```
is0=.5; is3=.866; it0=.5; it3=.866;
```

```
iu0=.5; iu3=.866; iv0=.5; iv3=.866;
```

```
S0={24,5,0}; S1={6,10,0};
```

Ecuaciones de Lazo

```
f0 = N[rp1[[2]]];
```

```
f1 = N[rp1[[3]]];
```

```
g0 = N[RR1[[2]]+rp2[[2]]];
```

```
g1 = N[RR1[[3]]+rp2[[3]]];
```

```
h0 = N[RR2[[2]]+rp3[[2]]];
```

```
h1 = N[RR2[[3]]+rp3[[3]]];
```

```
inc=5; inct=.125;
```

```
For[Theta = 0;t=0,t<=1,Theta += inc;t+=inct,
```

```
px=S0[[1]]+(S1[[1]]-S0[[1]])*t;
```

```

py=S0[[2]]+(S1[[2]]-S0[[2]])*t;
punto[i]={px,py,Theta};
    p1x = N[ px - L3*Cos[Theta Degree]];
p1y = N[ py - L3*Sin[Theta Degree]];
p2x = N[ p1x + L4*Cos[(Theta-30) Degree]];
p2y = N[ p1y + L4*Sin[(Theta-30) Degree]];
p3x = N[ p1x + L5*Cos[(Theta+30) Degree]];
p3y = N[ p1y + L5*Sin[(Theta+30) Degree]];

```

Cadena cinemática CC₁

```

solucion1[i]=FindRoot[{f0 == p1x,
    f1 == p1y,
    p0^2 + p3^2==1,
    `q0^2 + q3^2==1},
    {p0,ip0},{p3,ip3},
    {q0,iq0},{q3,iq3},
    MaxIterations->50];

If[N[Abs[(f0-p1x/.solucion1[i])]<10^-5 &&
    Abs[(f1-p1y/.solucion1[i])<10^-5],
ip0=p0/.solucion1[i];ip3=p3/.solucion1[i];
iq0=q0/.solucion1[i];iq3=q3/.solucion1[i],

Print["No se encontró solución1 para Theta = ",Theta];
ip0=.5;ip3=.8;iq0=.5;iq3=.8];

```

Cadena cinemática CC₂

```

solucion2[i]=FindRoot[{g0==p2x,
    g1==p2y,
    s0^2+s3^2==1,
    t0^2+t3^2==1},
    {s0,is0},{s3,is3},
    {t0,it0},{t3,it3},
    MaxIterations->50];

If[N[Abs[(g0-p2x/.solucion2[i])<10^-5 &&
    Abs[(g1-p2y/.solucion2[i])<10^-5],
is0=s0/.solucion2[i];is3=s3/.solucion2[i];

```

```
it0=t0/.solucion2[i];it3=t3/.solucion2[i],
```

```
Print["No se encontró solución2 para Theta = ",Theta];  
is0=.5;is3=.8;it0=.5;it3=.8];
```

Cadena cinemática CC₃

```
solucion3[i]=FindRoot[{h0==p3x, h1==p3y,  
    u0^2 + u3^2==1, v0^2 + v3^2==1},  
    {u0,iu0},{u3,iu3},{v0,iv0},{v3,iv3},  
    MaxIterations->50];
```

```
If[N[Abs[(h0-p3x/.solucion3[i])]<10^-5 &&  
    Abs[(h1-p3y/.solucion3[i])]<10^-5],
```

```
iu0=u0/.solucion3[i];iu3=u3/.solucion3[i];
```

```
iv0=v0/.solucion3[i];iv3=v3/.solucion3[i],
```

```
Print["No se encontró solución3 para Theta = ",Theta];
```

```
iu0=.5;iu3=.8;iv0=.5;iv3=.8];
```

```
i++
```

```
]
```

Graficación para visualizar la trayectoria seleccionada

```
For[j=1,j<i,j++,solp[j]={p0,p3}/.solucion1[j];
```

```
    solq[j]={q0,q3}/.solucion1[j];
```

```
    sols[j]={s0,s3}/.solucion2[j];
```

```
    solt[j]={t0,t3}/.solucion2[j];
```

```
    solu[j]={u0,u3}/.solucion3[j];
```

```
    solv[j]={v0,v3}/.solucion3[j];
```

```
g1=g2={SurfaceGraphics[{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,0}},
```

```
    MeshRange->{{-L1,lado+L6},
```

```
    {-(Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]/3+L1),Sqrt[lado^2-(lado/2)^2+L8]}}];
```

```
For[j=1,j<i,j++, p0=solp[j][[1]];p3=solp[j][[2]];
```

```
    q0=solq[j][[1]];q3=solq[j][[2]];
```

```
    s0=sols[j][[1]];s3=sols[j][[2]];
```

```
    t0=solt[j][[1]];t3=solt[j][[2]];
```

```

u0=solu[[1]];u3=solu[[2]];
v0=solv[[1]];v3=solv[[2]];

```

```

px = puntop[[1]];
py = puntop[[2]];
Theta = puntop[[3]];
p1x = N[ px - L3*Cos[Theta Degree]];
p1y = N[ py - L3*Sin[Theta Degree]];
p2x = N[ p1x + L4*Cos[(Theta-30) Degree]];
p2y = N[ p1y + L4*Sin[(Theta-30) Degree]];
p3x = N[ p1x + L5*Cos[(Theta+30) Degree]];
p3y = N[ p1y + L5*Sin[(Theta+30) Degree]];

```

```

punto1=N[{l1[[2]],l1[[3]],l1[[4]]};
punto2=N[{rp1[[2]],rp1[[3]],rp1[[4]]};
punto3={p3x,p3y,0};
punto4={p2x,p2y,0};
punto5={px,py,0};
punto6=N[{l6[[2]]+lado,l6[[3]],l6[[4]]};
punto7=N[{rp2[[2]]+lado,rp2[[3]],rp2[[4]]};
punto8=N[{l8[[2]]+lado/2,l8[[3]]+Sqrt[lado^2-(lado/2)^2],l8[[4]]};
punto9=N[{rp3[[2]]+lado/2,rp3[[3]]+Sqrt[lado^2-(lado/2)^2],rp3[[4]]};

```

```

g2={Graphics3D[{PointSize[0.01],Point[punto5],
  RGBColor[0,1,0]},g2];

```

```

g3=Graphics3D[

```

Plataforma P_L

```

{{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto2,punto3}]},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto3,punto4}]},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto2,punto4}]},
{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,1], Line[{punto2,punto5}]},

```

Cadena cinemática CC₁

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{punto1,punto2}},  
{AbsoluteThickness[10],RGBColor[0,1,0], Line[{{0,0,0},punto1}}},
```

Cadena cinemática CC₂

```
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{punto6,punto7}},  
{AbsoluteThickness[10],RGBColor[0,1,0], Line[{{lado,0,0},punto6}}},
```

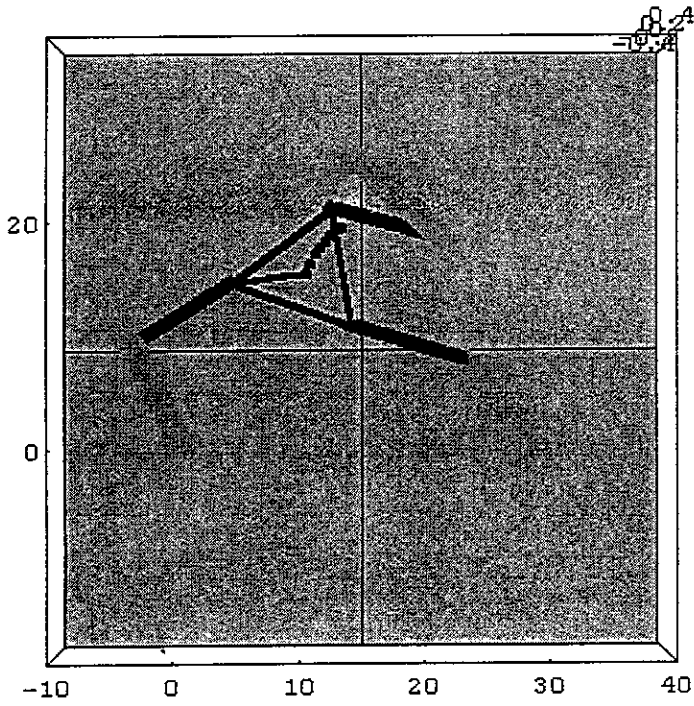
Cadena cinemática CC₃

```
{AbsoluteThickness[10],RGBColor[0,1,0],  
Line[{{lado/2,Sqrt[lado^2-(lado/2)^2],0},punto8}},  
{AbsoluteThickness[5],RGBColor[1,0,0], Line[{punto8,punto9}}}
```

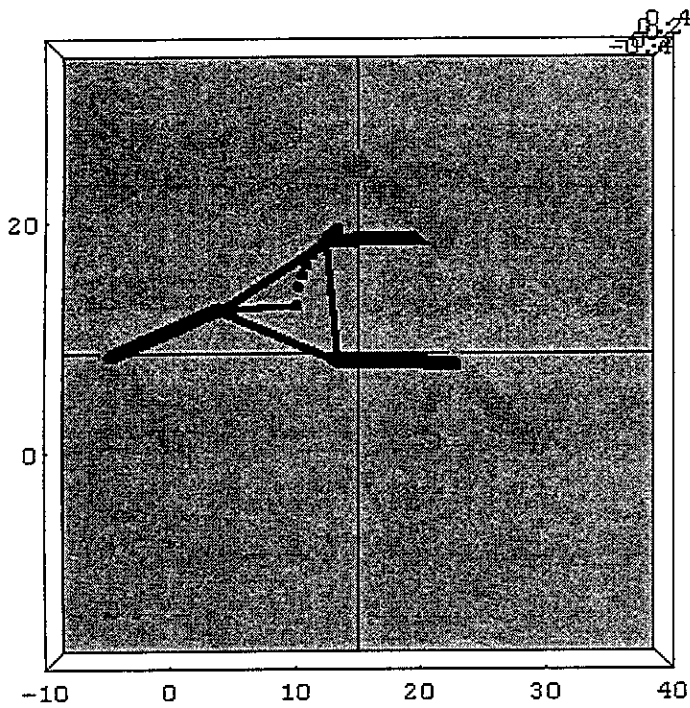
```
}};
```

```
Show[g1,g3,g2,Axes->True, PlotRange->{{-L1,lado+L6},  
{-(Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]/3+L1),Sqrt[lado^2-(lado/2)^2]+L8},{0,0}},  
ViewPoint->{0,0,3.384}]]];
```

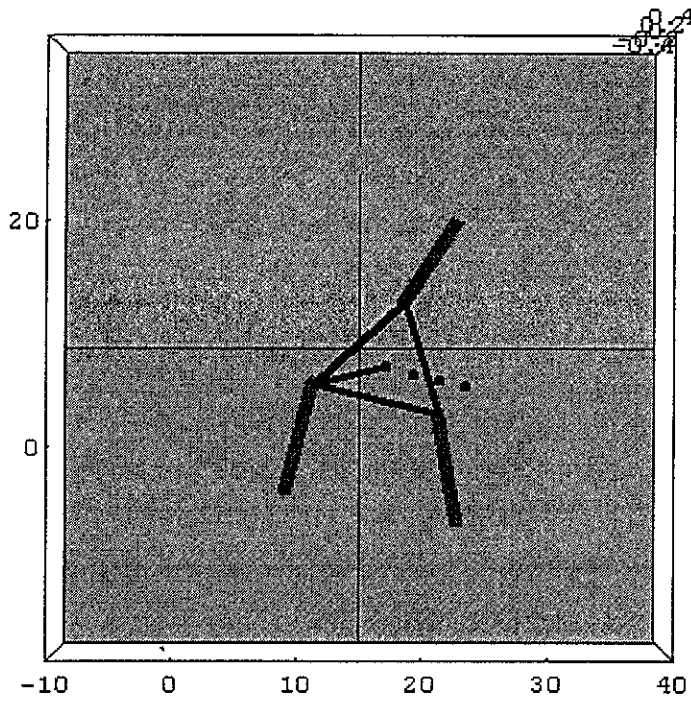
Simulación.



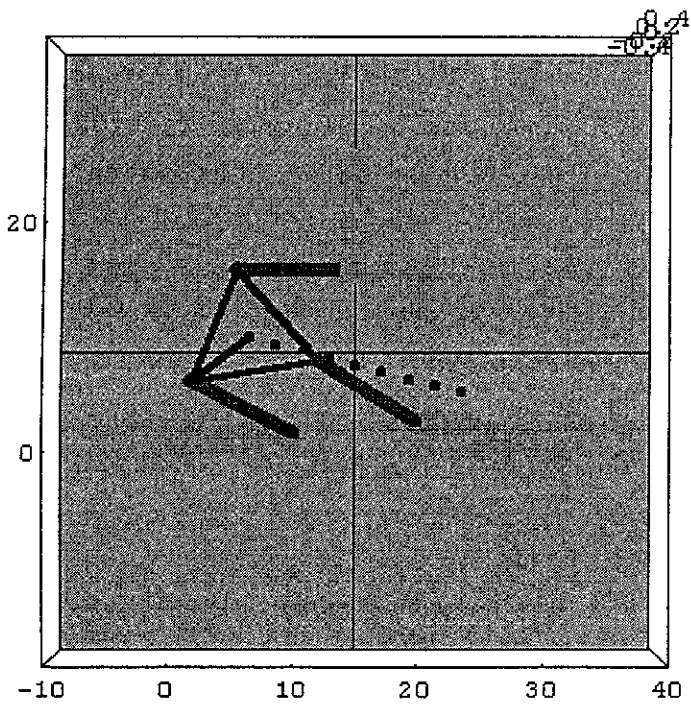
Salida de la cinemática directa 1



Salida de la cinemática directa 2



Salida de la cinemática inversa 1



Salida de la cinemática inversa 2

Programa 5. Simulación de un proceso de evasión de obstáculos mediante un sistema tipo RRR. Sistema CHEVOTRONIC III con ejes definidos en (Z,X,X).

ClearAll[F0,F1,F2,F3,F,G0,G1,G2,G3,G,H0,H1,H2,H3,H,f0,f1,f2,f3,f,g0,g1,g2,g3,g,
h0,h1,h2,h3,h,v1,v2,v3,d1,d2,d3,c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,b1,b2,b3,b1d,b2d,
b3d,md,rnn,rd,rdd,a113,a223,a233,e1,e2,e3,e11,e22,e23,k1,k2,k3,k4,k5,
k6,k7,k8,k9,k10,k11,k12,k13,s1,s2,s3,s11,s21,s31,s12,s22,s32,s13,s23,
s33,r,r1,r2,r3,fpf,gpf,hpi,hpf,hpf,the1,the2,the3,the4,the5,the6]

Función de multiplicación de los Cuaterniones P y Q

Mpq[P_,Q_]:= {P[[1]] Q[[1]]-P[[2]] Q[[2]]-P[[3]] Q[[3]]-P[[4]] Q[[4]],
P[[1]] Q[[2]]+P[[2]] Q[[1]]+P[[3]] Q[[4]]-P[[4]] Q[[3]],
P[[1]] Q[[3]]-P[[2]] Q[[4]]+P[[3]] Q[[1]]+P[[4]] Q[[2]],
P[[1]] Q[[4]]+P[[2]] Q[[3]]-P[[3]] Q[[2]]+P[[4]] Q[[1]]};

Conjugado de un Cuaternion P

Conj[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};

Función de rotación entre los Cuaterniones P y Q

Ropq[P_,Q_]:=Mpq[P,Mpq[Q,Conj[P]]];

Definición de la base canónica

e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};

Desplazamientos angulares de la posición no deformada

v1=-90;v2=0;v3=-90;

Dimensionamiento de los eslabones

d1=15;d2=7;d3=6;

Quaterniones de la posición no deformada

$F0=\text{Cos}[(v1/2)*\text{Degree}]/N; F1=0; F2=0; F3=\text{Sin}[(v1/2)*\text{Degree}]/N;$
 $G0=\text{Cos}[(v2/2)*\text{Degree}]/N; G1=\text{Sin}[(v2/2)*\text{Degree}]/N; G2=0; G3=0;$
 $H0=\text{Cos}[(v3/2)*\text{Degree}]/N; H3=0; H2=0; H1=\text{Sin}[(v3/2)*\text{Degree}]/N;$

Quaterniones de la posición deformada y determinación de los ejes de rotación

$F=\{F0,0,0,F3\}; G=\{G0,G1,0,0\}; H=\{H0,H1,0,0\};$
 $f=\{f0,0,0,f3\}; g=\{g0,g1,0,0\}; h=\{h0,h1,0,0\};$

Composición de Quaterniones

$c1=\text{Mpq}[F,G]; c2=\text{Mpq}[c1,H]; c3=\text{Mpq}[f,F]; c4=\text{Mpq}[g,G]; c5=\text{Mpq}[h,H];$
 $c6=\text{Mpq}[c3,c4]; c7=\text{Mpq}[c6,c5];$

Definición de las bases móviles

Configuración no deformada

Base 1

$e11=\text{Ropq}[F,e3];$

Base 2

$e22=\text{Ropq}[c1,e2];$

Base 3

$e23=\text{Ropq}[c2,e2];$

Vector de la posición no deformada

$b1=d1*e11; b2=d2*e22; b3=d3*e23;$
 $\text{rnd}=\text{Chop}[b1+b2+b3]/N;$
 $\text{rnn}=\text{Chop}[b1+b2]/N;$

Configuración deformada

Base 1

$a113=\text{Ropq}[c3,e3];$

Base 2

$a223=\text{Ropq}[c6,e2];$

Base 3

```
a233=Ropq[c7,e2];
```

Vector de la Posición deformada

```
b1d=d1*a113;b2d=d2*a223;b3d=d3*a233;  
rd=Chop[Simplify[b1d+b2d+b3d]];  
rdd=b1d+b2d;
```

Solución al problema cinemático inverso

```
ClearAll[Sol,Vec,μ1,μ2,μ3]
```

Coordenadas del punto final de la trayectoria

```
x=-10.95;  
y=0;  
z=19.95;
```

Solución al sistema de ecuaciones

```
Sol=FindRoot[{rd[[2]]==x,rd[[3]]==y,rd[[4]]==z,f0^2+f3^2==1,  
g0^2+g1^2==1,h0^2+h1^2==1},{f0,0.9},{g0,0.9},{h0,0.8},  
{f3,-0.1},{g1,-0.1},{h1,-0.1},MaxIterations->20];  
Vec={f0,g0,h0,f3,g1,h1}/.Sol;
```

Desplazamientos angulares de la posición deformada

```
μ1=2 (ArcSin[Vec[[4]])/Degree//N;  
μ2=2 (ArcSin[Vec[[5]])/Degree//N;  
μ3=2 (ArcSin[Vec[[6]])/Degree//N;  
μ4=2 (ArcCos[Vec[[1]])/Degree//N;  
μ5=2 (ArcCos[Vec[[2]])/Degree//N;  
μ6=2 (ArcCos[Vec[[3]])/Degree//N;
```

Simulación de las órdenes de cambio de secuencia

Vector de desplazamiento angular $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\mu_1 = \text{ALFA 1}$

$\mu_2 = \text{ALFA 2}$

$\mu_3 = \text{ALFA 3}$

Coordenadas del los punto de posicionamiento del órgano terminal

Punto de arranque (home 0)	----	{7,0,9}
Punto de alcance (home 1)	----	{-10.95,0,19.95}

Información del sistema de visión:

Coordenadas del los punto de posicionamiento del órgano terminal

punto de impacto 1	----	{0,-7,9}
punto de impacto 2	----	{9.19,0,13.7}

Graficación de la posición no deformada

```
CDN=Graphics3D[{{AbsoluteThickness[0.03],Point[{7,0,9]}},
{AbsoluteThickness[0.03],Point[{-10.95,0,19.95}]},
{Cuboid[{0,-7,9]}},{Cuboid[{9.19,0,13.7}]},
{RGBColor[1,0,1],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{7,0,15},{7,0,9}}]}}];
```

Simulación del diálogo virtual del sistema CHEVOTRONIC III

Orden 1 --- salida 1

Reflexion real de la familia 1 con M23 actuando en T2 $\rightarrow R^{F1M23}$

Código de la secuencia	----	[-1 0 0
		0-1 0
		0 0-1]

Subtrayectoria sensada----- home 0 --- p11

Desplazamiento angular efectuado por M1-----ALFA1 - 2 PHI

```

For[j=0,i>=-90,i+=22.5,
f0=Cos[i/2 Degree];f3=Sin[i/2 Degree];
g0=Cos[0/2 Degree];g1=Sin[0/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];

```

Respuesta 1 ----- obstáculo en el punto {0,-7,9}

Punto de alcance "negativo"

Desplazamiento angular recorrido por M1---ALFA K1= -90

Orden 2 ----- regresa a home 0 aplicando ALFA K1= 90

```

For[j=-90,i<=0,i+=22.5,
f0=Cos[i/2 Degree];f3=Sin[i/2 Degree];
g0=Cos[0/2 Degree];g1=Sin[0/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];

```

Respuesta 2 ----- órgano terminal en home 0

Punto de alcance "negativo"

Desplazamiento angular recorrido por M1---ALFA K1= -90

Orden 3 --- salida 2

Cambia a secuencia combinada de la familia 1 con M23

actuando en T2 → SC_{R23}^{F1M23}

Código de la secuencia----- [1 0 0

0-1 0

0 0-1]

Subtrayectoria sensada----- home 0 --- p11

Desplazamiento angular efectuado por M1-----ALFA1 - 2 PHI=180

```

For[i=0,i<=180,i+=22.5,
f0=Cos[i/2 Degree];f3=Sin[i/2 Degree];
g0=Cos[0/2 Degree];g1=Sin[0/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[{{
{RGBColor[1,0,0],Line[{{(0,0,0),(0,0,15)},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}}},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}]];

```

**Respuesta 3 ----- órgano terminal en el punto intermedio p11
Punto de alcance "negativo"**

Orden 4

Aplica a M2----- ALFA 2 - 2 PHI

Subtrayectoria sensada ----- P11 --- P12

```

For[i=0,i>=-135,i=-22.5,
f0=Cos[180/2 Degree];f3=Sin[180/2 Degree];
g0=Cos[i/2 Degree];g1=Sin[i/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[{{
{RGBColor[1,0,0],Line[{{(0,0,0),(0,0,15)},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}}},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}]];

```

Respuesta 4 ----- obstáculo en el punto {9.19,0,13.7}

Punto de alcance "negativo"

Desplazamiento angular recorrido por M2--- ALFA K2= -135

Orden 5

Regresa a p11 aplicando a M2—ALFA K2= 135

```
For[j=-135,i<=0,i+=22.5,
f0=Cos[180/2 Degree];f3=Sin[180/2 Degree];
g0=Cos[i/2 Degree];g1=Sin[i/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[{
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];
```

Respuesta 5 — órgano terminal en el punto p11

Punto de alcance "negativo"

Desplazamiento angular recorrido por M2—ALFA K2=135

Orden 6

Regresa a home o aplicando a M1—ALFA 1=-180

```
For[j=180,i>=0,i-=22.5,
f0=Cos[i/2 Degree];f3=Sin[i/2 Degree];
g0=Cos[0/2 Degree];g1=Sin[0/2 Degree];
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[{
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];
```

respuesta 6 — órgano terminal en home 0

Punto de alcance "negativo"

Desplazamiento angular recorrido por M1—ALFA 1=-180

Orden 7 ---salida 3

Cambia a secuencia real de la familia 1 con M23 actuando en T2 → SR^{F1M23}

**Código de la secuencia ----- [1 0 0
0 1 0
0 0 1]**

**Subtrayectoria sensada----- home 0 --- p11
desplazamiento angular efectuado por M1-----ALFA1**

```
For[i=0,i<=180,i+=22.5,  
f0=Cos[i/2 Degree];f3=Sin[i/2 Degree];  
g0=Cos[0/2 Degree];g1=Sin[0/2 Degree];  
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];  
Show[CDN,Graphics3D[{  
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},  
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},  
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];
```

**Respuesta 7 ----- órgano terminal en el punto intermedio p11
Punto de alcance "negativo"**

**Subtrayectoria sensada----- home 0 --- p11
Desplazamiento angular efectuado por M1-----ALFA1**

Orden 8

Aplica a M2----- ALFA 2

Subtrayectoria sensada ----- p11 --- p12

```
For[i=0,i<=45,i+=22.5,  
f0=Cos[180/2 Degree];f3=Sin[180/2 Degree];  
g0=Cos[i/2 Degree];g1=Sin[i/2 Degree];  
h0=Cos[0/2 Degree];h1=Sin[0/2 Degree];  
Show[CDN,Graphics3D[{  
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},  
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}]},Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},  
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];
```

Respuesta 8 -----órgano terminal en el punto intermedio p12

Punto de alcance "negativo"

Subtrayectoria sensada----- p11 --- p12

Desplazamiento angular efectuado por M2-----ALFA 2

Orden 9

Aplica a M3----- ALFA 3

Subtrayectoria sensada p12 --- home 1

```
For[i=0,i<=45,i+=22.5,
f0=Cos[180/2 Degree];f3=Sin[180/2 Degree];
g0=Cos[45/2 Degree];g1=Sin[45/2 Degree];
h0=Cos[i/2 Degree];h1=Sin[i/2 Degree];
Show[CDN,Graphics3D[
{RGBColor[1,0,0],Line[{{0,0,0},{0,0,15},{rdd[[2]],rdd[[3]],rdd[[4]]},
{rd[[2]],rd[[3]],rd[[4]]}}],Axes->True,PlotRange->{{-20,20},{-20,20},{-20,30}},
ViewPoint->{-2.728,-1.671,1.104}];
```

Respuesta 9 -----órgano terminal en el punto de alcance home 1

Punto de alcance "positivo"

Subtrayectoria sensada P12 --- HOME 1

Desplazamiento angular efectuado por M3-----ALFA 3

Respuesta general :

Tipo de secuencia de evasión-----Secuencia real de la familia I con M23 ----T2 → SR^{F1M23}

Código de la secuencia ----- [1 0 0
0 1 0
0 0 1]

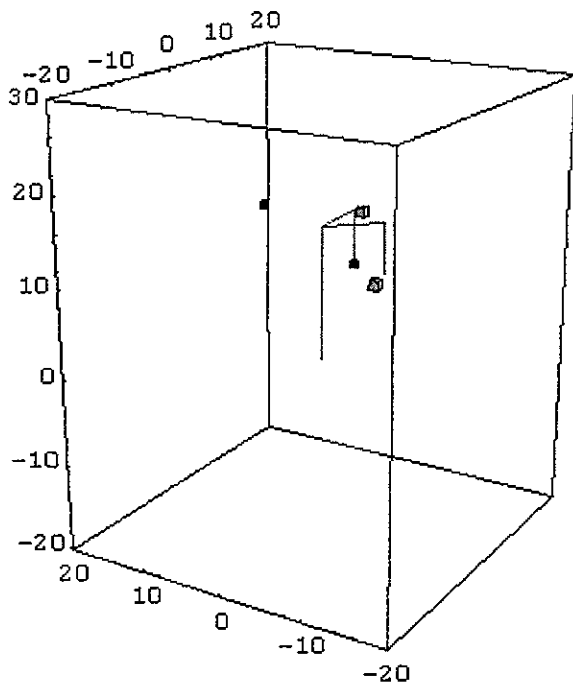
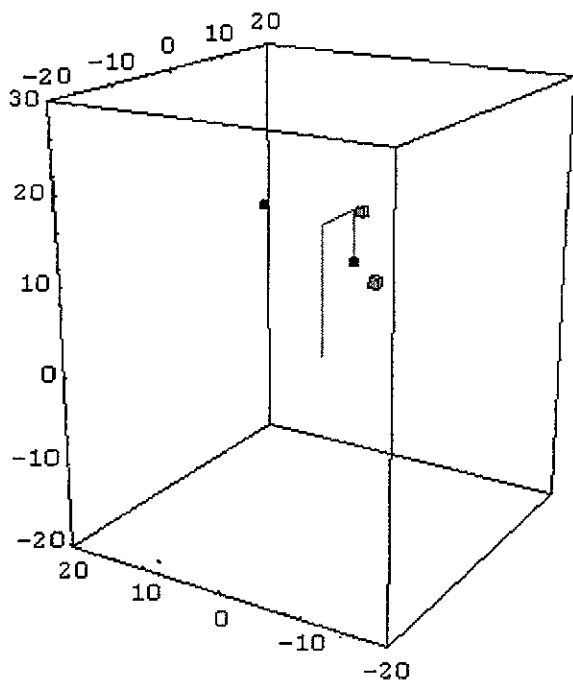
Trayectoria total sensada-----home 0--p11--p12--home 1

Desplazamiento angular total-----1080

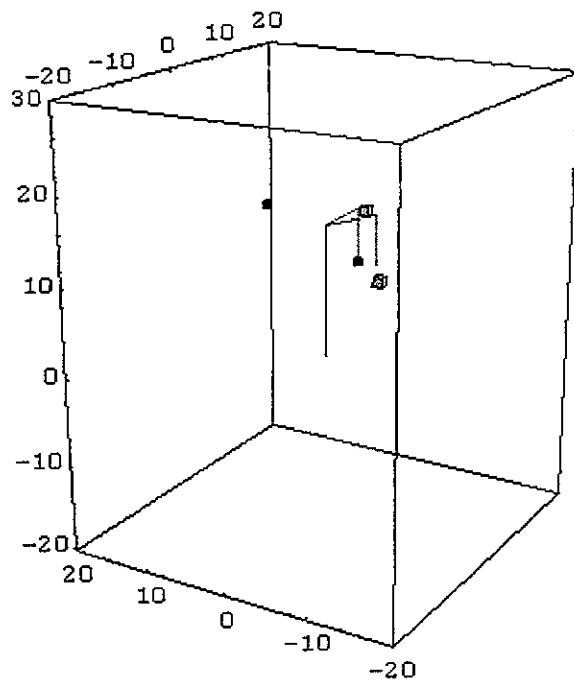
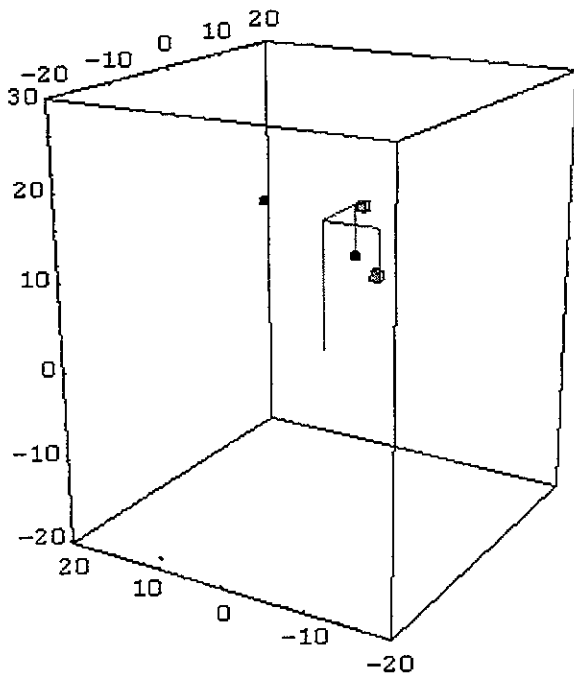
Discretizaciones de la trayectoria-----22.5

Total de puntos alcanzados-----48

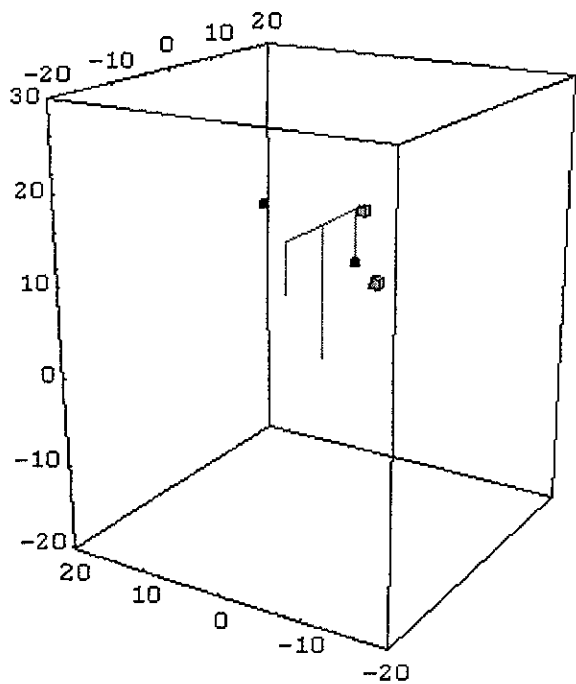
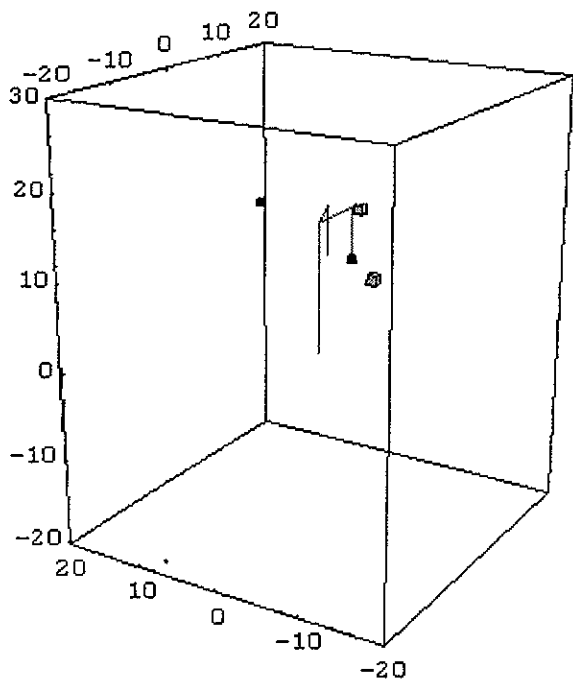
Simulación:



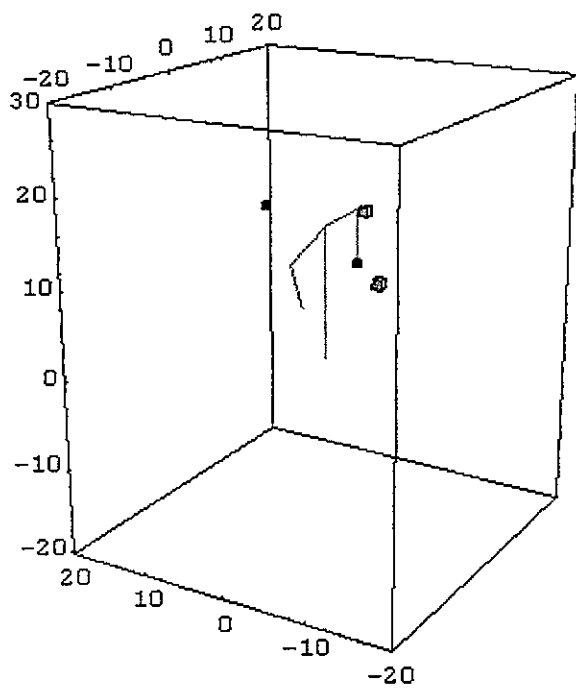
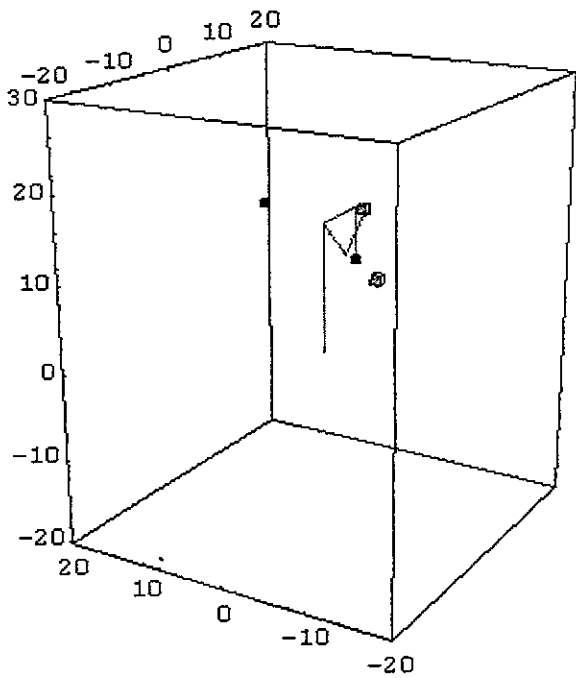
Salida del programa: Graficación del home y salida₁ con R^{F1M23}



Salida del programa: Impacto con el obstáculo y regreso con R^{F1M23} a home

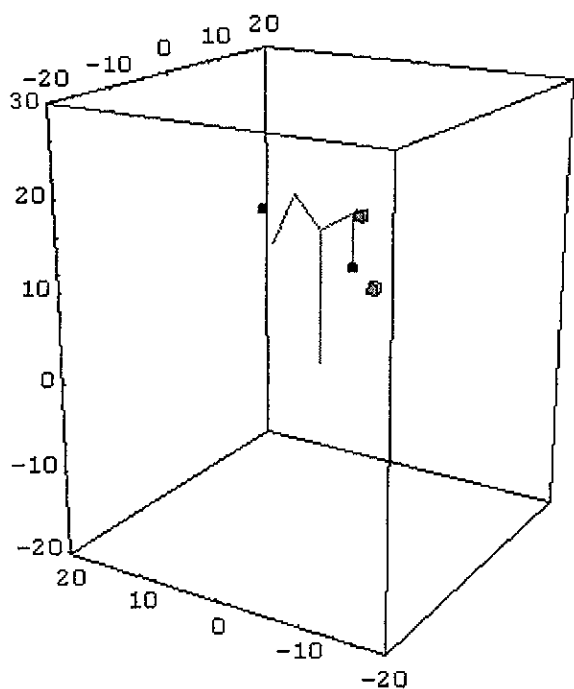
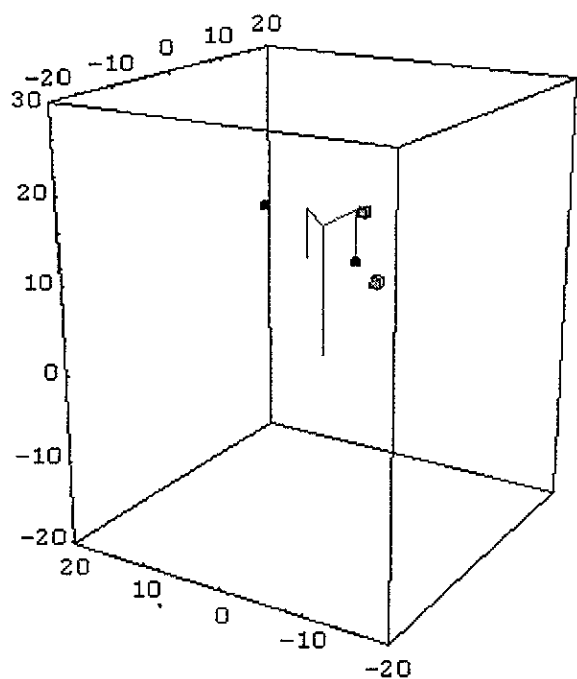


Salida del programa: Salida con SC_{R23}^{FIM23} y alcance del punto intermedio p11

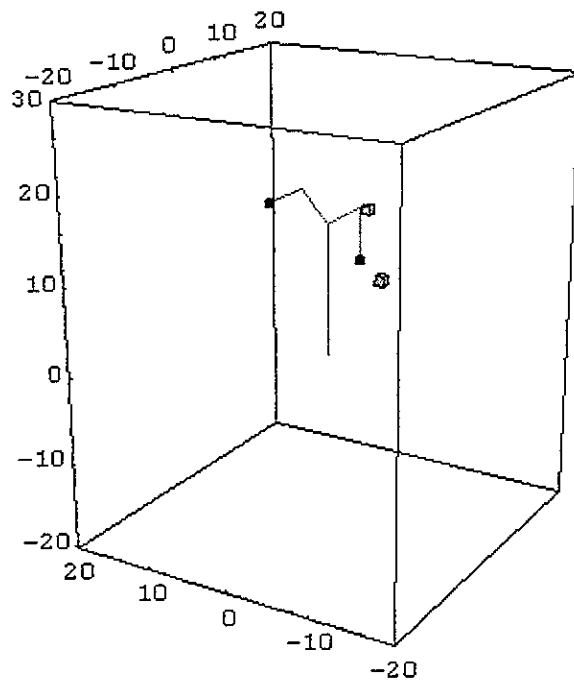
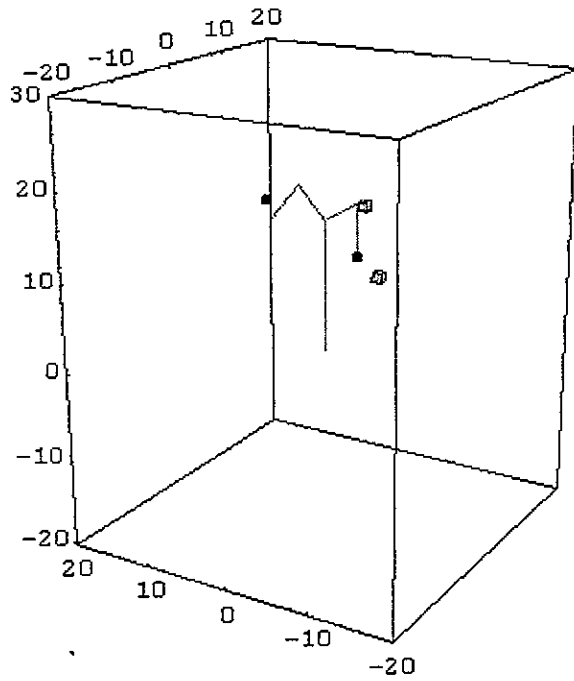


Salida del programa: Impacto con el obstáculo 2 y regreso al punto intermedio p11 con

SC_{R23}^{F1M23}



Salida del programa: Salida con SR^{F1M23} y alcance del punto intermedio p12



Salida del programa: Salida hacia home1 desde p12 con SR^{F1M23} y alcance del home1

Evasión efectuada. Eureka!.

Programa 6: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un robot IRB 2400L/16 ABB para planchas de uso doméstico sin paro de emergencia.

Multiplicación entre Cuaterniones P y Q

```
Mult[P_,Q_]:= {P[[1]]*Q[[1]]-P[[2]]*Q[[2]]-P[[3]]*Q[[3]]-P[[4]]*Q[[4]],  
              P[[2]]*Q[[1]]+P[[1]]*Q[[2]]-P[[4]]*Q[[3]]+P[[3]]*Q[[4]],  
              P[[3]]*Q[[1]]+P[[4]]*Q[[2]]+P[[1]]*Q[[3]]-P[[2]]*Q[[4]],  
              P[[4]]*Q[[1]]-P[[3]]*Q[[2]]+P[[2]]*Q[[3]]+P[[1]]*Q[[4]]};
```

Conjugado de un Cuaternion

```
Conj[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};
```

Función de rotación

```
Ro[P_,Q_]:=Mult[ P,Mult[Q,Conj[P]] ];
```

Elementos de la base inercial

```
e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};
```

```
ClearAll[P,Q,R,p0,p3,q0,q1,r0,r1];
```

Cuaterniones para la posición no deformada

```
P={0.3945,0,0,0.9188};
```

```
Q={0.8823,0.4705,0,0};
```

```
R={0.3086,0.9511,0,0};
```

Cuaterniones para la posición deformada

```
p={p0,0,0,p3};q={q0,q1,0,0};r={r0,r1,0,0};
```

Longitud de los eslabones

```
n1=61.5;n2=84;n3=75.5;
```

Vectores que definen a los eslabones

El eslabón 1 se define en k con rotación en k,

El eslabón 2 se define en j con rotación en i,

El eslabón 3 se define en j con rotación en i

```
b1=n1*Ro[P,Ro[p,e3]];
b2=n2*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,e2]]]];
b3=n3*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,Ro[R,Ro[r,e2]]]]]]];
```

Posición del órgano terminal

```
Pos=Simplify[b1+b2+b3+{0,0,0,30}];
```

Resolución de la cinemática inversa

```
(*Trayectoria Home1-p1; p1={0,-44.42,78.5,135.2} *)
ClearAll[Vec,Sol,a1,a2,a3,a4,a5,a6]
```

Nota importante: Debido a las condiciones iniciales se presentó una reflexión de los eslabones l_2 y l_3 lo cual representaba impacto del robot con las mesas de operación, por lo tanto se debió jugar con las condiciones iniciales para reflexionar al robot en otra configuración que permitiera iniciar al robot desde home sin condiciones de impacto.

Quaterniones de la configuración no deformada obtenidos al modificar las condiciones iniciales

```
a1=0.99;a2=-0.001;a3=0.99;a4=0.005;a5=0.99;a6=-0.006;
```

Cinemática inversa de los puntos de las trayectorias de trabajo

Posición a—b

Tiempo de operación 9 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
For[t=0,t<=9,t++,
x=17.45-(61.87/9)*t;y=16.57+(61.93/9)*t;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ,MaxIterations->50];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
```

```

a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición b—c

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=10,t<=15,t++,
x=-44.42;y=78.5+(41.29/6)^(t-9);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición c—c'—d'—d

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 1 y 2(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]

Pun={{-44.42,119.79,132},{-44.14,122.46,132},{-43.72,125.57,132},{-43.14,128.59,132},
{-42.46,130.86,132},{-40.82,133.35,132},{-39.50,133.35,132},{-37.86,130.86,132},
{-37.18,128.59,132},{-36.6,125.57,132},{-35.9,119.79,132},{-35.9,119.79,135.2}};
For[t=16,t<=27,t++,
x=Pun[[t-15]][[1]];y=Pun[[t-15]][[2]];z=Pun[[t-15]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición d—e

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=28,t<=37,t++,
x=-35.9+(55.8/10)*(t-27);y=119.79;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición e—e'—f—f'

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 3 y 4(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```
Pus={{19.9,119.79,132},{20.18,122.46,132},{20.60,125.57,132},{21.18,128.59,132},
{21.86,130.86,132},{23.5,133.35,132},{24.84,133.35,132},{26.46,130.86,132},
{27.14,128.59,132},{27.72,125.56,132},{28.42,119.79,132},{28.42,119.79,135.2}};
For[t=38,t<=49,t++,
x=Pus[[t-37]][[1]];y=Pus[[t-37]][[2]];z=Pus[[t-37]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición f—g

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=50,t<=55,t++,
x=28.42;y=119.79-(46.15/6)*(t-49);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición g—h

Tiempo de operación 5 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=56,t<=60,t++,
x=28.42+(23.07/5)*(t-55);y=73.63-(23.13/5)*(t-55);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición h—i

Tiempo de operación 5 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=61,t<=65,t++,
x=51.49+(26.99/5)*(t-60);y=50.50-(23.09/5)*(t-60);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición i—j

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=66,t<=71,t++,
x=78.48+(42.07/6)*(t-65);y=27.46;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición j—j'—k'—k

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 5 y 6(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```
ClearAll[Sol,t]
Pur={{120.55,27.46,132},{123.22,27.18,132},{126.33,26.76,132},{129.34,26.19,132},
{131.61,25.51,132},{134.1,23.87,132},{134.1,22.54,132},{131.61,20.9,132},
{129.34,20.23,132},{126.33,19.65,132},{120.55,18.95,132},{120.55,18.95,135.2}};
```

```

For[t=72,t<=83,t++,
x=Pur[[t-71]][[1]];y=Pur[[t-71]][[2]];z=Pur[[t-71]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/Sol[t][[1]];a2=p3/Sol[t][[2]];
a3=q0/Sol[t][[3]];a4=q1/Sol[t][[4]];
a5=r0/Sol[t][[5]];a6=r1/Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]
]

```

Posición k—l

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=84,t<=93,t++,
x=120.55;y=18.95-(55.81/10)*(t-83);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/Sol[t][[1]];a2=p3/Sol[t][[2]];
a3=q0/Sol[t][[3]];a4=q1/Sol[t][[4]];
a5=r0/Sol[t][[5]];a6=r1/Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]
]

```

Posición l—l'----m'-----m

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 5 y 6(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]
Pup={{120.55,-36.86,132},{123.22,-37.14,132},{126.33,-37.56,132},{129.34,-38.13,132},
{131.61,-38.81,132},{134.1,-40.45,132},{134.1,-41.78,132},{131.61,-43.42,132},
{129.34,-44.09,132},{126.33,-44.67,132},{120.55,-45.37,132},{120.55,-45.37,135.2}};
For[t=94,t<=105,t++,
x=Pup[[t-93]][[1]];y=Pup[[t-93]][[2]];z=Pup[[t-93]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[

```

```

{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]      ]

```

Posición m—n

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=106,t<=111,t++,
x=120.55-(41.24/6)*(t-105);y=-45.37;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]      ]

```

Posición n—a

Tiempo de operación 9 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=112,t<=120,t++,
x=79.31-(61.86/9)*(t-111);y=-45.37+(61.92/9)*(t-111);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]      ]

```


Simulación y graficación

Graficación del home 1 y home 2

```
Home1={17.45,16.57,135.20};Home2={51.45,50.55,135.20};  
Punto1={-44.42,78.5,135.2};Punto2={-44.42,119.79,135.2};Punto3={19.9,119.79,135.2};  
Punto4={28.42,73.63,135.2};Punto5={74.48,27.46,135.2};Punto6={120.55,27.46,135.2};  
Punto7={120.55,-36.86,135.2};Punto8={79.31,-45.37,135.2};
```

Graficación de las trayectorias

```
Trayectoria1=Graphics3D[Line[{Home1,Punto1,Punto2,Pun[[1]],Pun[[2]],Pun[[3]],Pun[[4]],Pun[[5]],  
Pun[[6]],Pun[[7]],Pun[[8]],Pun[[9]],Pun[[10]],Pun[[11]],Pun[[12]],Punto3,Pus[[1]],Pus[[2]],  
Pus[[3]],Pus[[4]],Pus[[5]],Pus[[6]],Pus[[7]],Pus[[8]],Pus[[9]],Pus[[10]],Pus[[11]],Pus[[12]],  
Punto4,Hóme2,Punto5,Punto6,Pur[[1]],Pur[[2]],Pur[[3]],Pur[[4]],Pur[[5]],Pur[[6]],Pur[[7]],  
Pur[[8]],Pur[[9]],Pur[[10]],Pur[[11]],Pur[[12]],Punto7,Pup[[1]],Pup[[2]],Pup[[3]],Pup[[4]],  
Pup[[5]],Pup[[6]],Pup[[7]],Pup[[8]],Pup[[9]],Pup[[10]],Pup[[11]],Pup[[12]],Punto8,Home1}],  
Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},  
ViewPoint->{0.000,-0.000,3.384};
```

Simulación a 120 segundos

Graficación de las pistolas de aplicación

```
For[t=0,t<=120,t++,  
p0=Vec[t][[1]];p3=Vec[t][[2]];q0=Vec[t][[3]];  
q1=Vec[t][[4]];r0=Vec[t][[5]];r1=Vec[t][[6]];  
If[t<=66,g1={0,16.08,0,0};g2={0,0,0,-12};g1={0,0,16.08,0};g2={0,0,0,-12};  
L1=Pos+g1;  
L2=Pos-g1;  
L3=L1+g2;  
L4=L2+g2;  
Poo=b1+{0,0,0,30};  
Po=b1+b2+{0,0,0,30};
```

Graficación de planchas de la mesa 1 y 2

```
If[t<=60,Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}],
```

Descarga de las planchas de la mesa 1

```
If[t<=76,Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}],
```

Graficación de planchas de la mesa 1 y 2

```
If[t<=105,Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}],
```

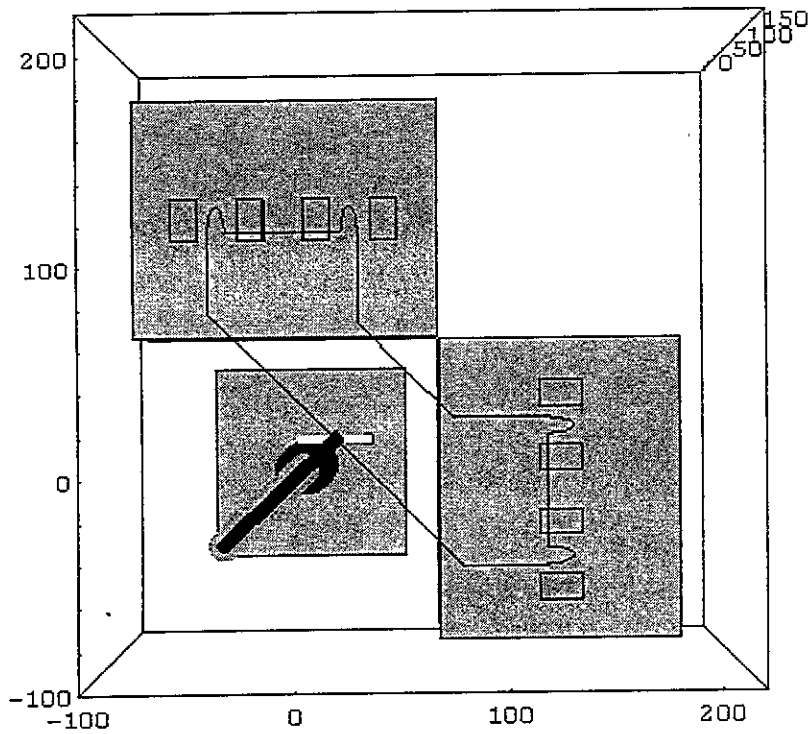
Descarga de las planchas de la mesa 2

```
Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]}}];
```

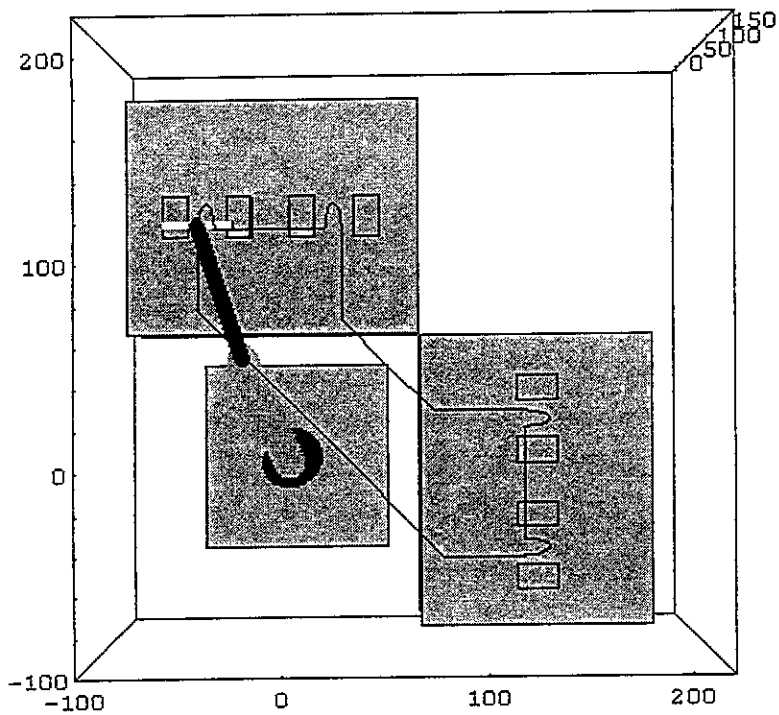
Graficación de las mesas de operación, base de robot y elementos del robot

```
Show[Trayectoria1,Planchas,Graphics3D[{
  {Cuboid[{-50,-50,0},{50,50,30}]},
  {Cuboid[{187.72,66.05,-7.44},{67.72,-83.95,112.56}]},
  {Cuboid[{67,186.97,-7.44},{-83,66.97,112.56}]},
  {AbsoluteThickness[20],RGBColor[1,0,0],
    Line[{{0,0,30},{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[12],RGBColor[0,1,0],
    Line[{{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]},
      {Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[6],RGBColor[0,0,1],
    Line[{{Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]},
      {Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
    Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
      {L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
    Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
      {L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[3],Line[{{L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]},
      {L3[[2]],L3[[3]],L3[[4]]}}]},
  {AbsoluteThickness[3],Line[{{L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]},
      {L4[[2]],L4[[3]],L4[[4]]}}]},
  Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},
  ViewPoint->{0.000,-0.000,3.384}}];
```

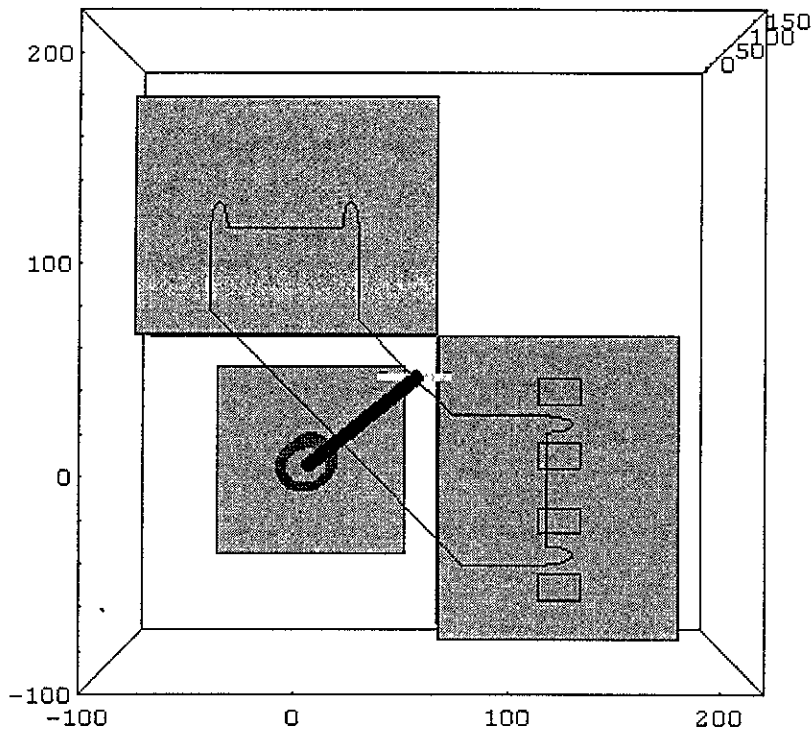
Simulación



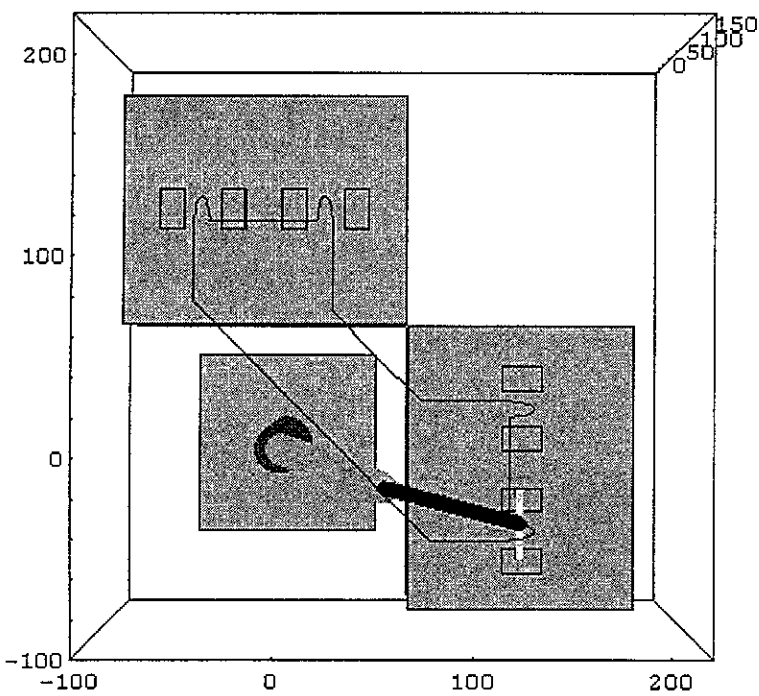
Robot en home en T_0



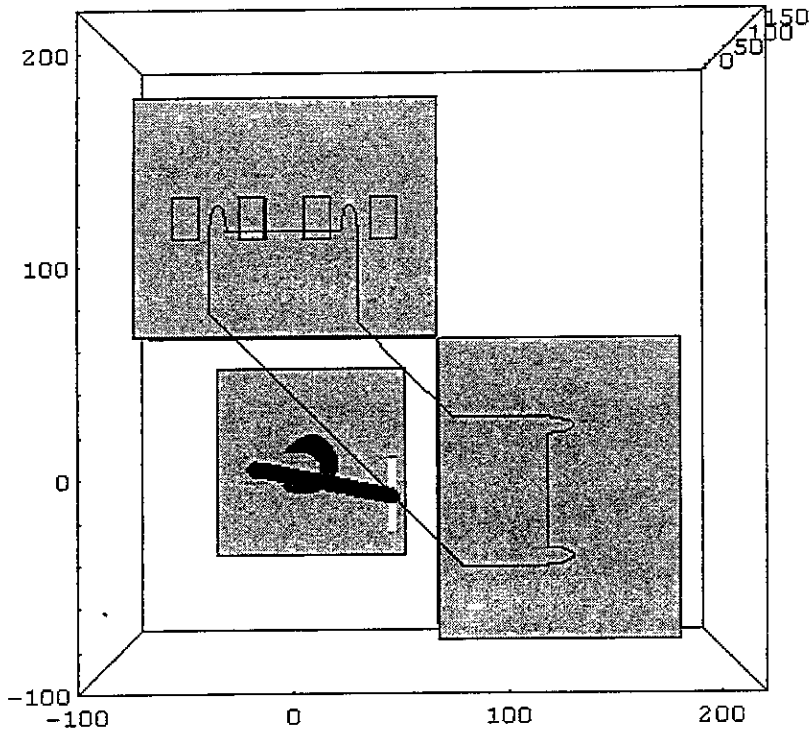
Robot en la aplicación de silicón a las planchas 1 y 2



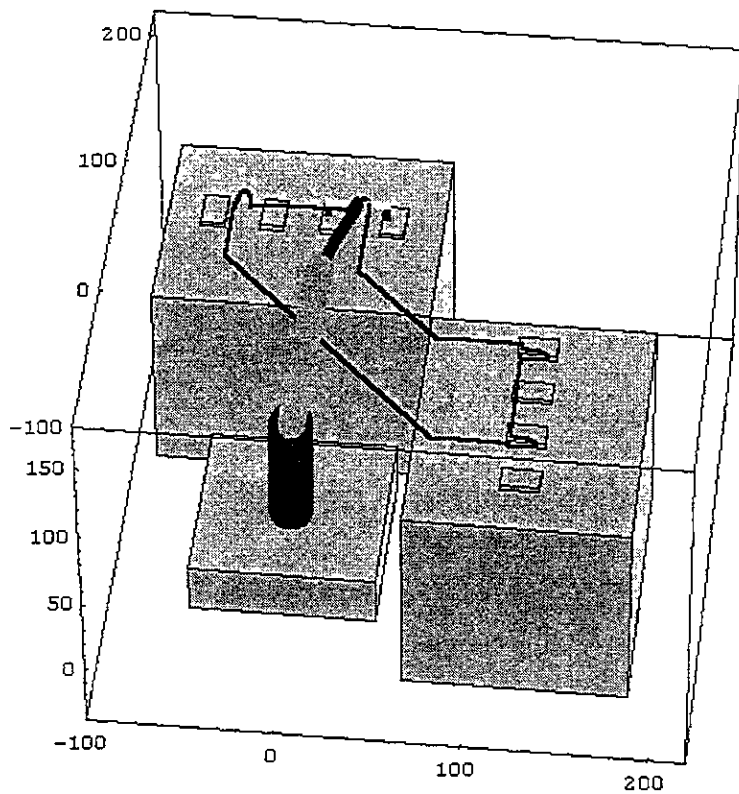
Robot en home 2 y descarga de planchas en la mesa 1 en T_{60}



Robot en la aplicación de silicón a las planchas 7 y 8



Robot en la trayectoria de regreso a home 1 en T_{166}



Robot en la aplicación de silicon a las planchas 3 y 4, vista tridimensional

Programa 7: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un Robot IRB 2400L/16 ABB con paro de emergencia 1 para planchas de uso doméstico.

Multiplicación entre Cuaterniones P y Q

```
Mult[P_,Q_]:= {P[[1]]*Q[[1]]-P[[2]]*Q[[2]]-P[[3]]*Q[[3]]-P[[4]]*Q[[4]],  
              P[[2]]*Q[[1]]+P[[1]]*Q[[2]]-P[[4]]*Q[[3]]+P[[3]]*Q[[4]],  
              P[[3]]*Q[[1]]+P[[4]]*Q[[2]]+P[[1]]*Q[[3]]-P[[2]]*Q[[4]],  
              P[[4]]*Q[[1]]-P[[3]]*Q[[2]]+P[[2]]*Q[[3]]+P[[1]]*Q[[4]]};
```

Conjugado de un Quaternion

```
Conj[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};
```

Función de rotación

```
Ro[P_,Q_]:=Mult[ P,Mult[Q,Conj[P]]];
```

Elementos de la base inercial

```
e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};
```

```
ClearAll[P,Q,R,p0,p3,q0,q1,r0,r1];
```

Cuaterniones para la posición no deformada

```
P={0.3945,0,0,0.9188};
```

```
Q={0.8823,0.4705,0,0};
```

```
R={0.3086,0.9511,0,0};
```

Cuaterniones para la posición deformada

```
p={p0,0,0,p3};q={q0,q1,0,0};r={r0,r1,0,0};
```

Longitud de los eslabones

```
n1=61.5;n2=84;n3=75.5;
```

Vectores que definen a los eslabones

El eslabón 1 se define en k con rotación en k,

El eslabón 2 se define en j con rotación en i,

El eslabón 3 se define en j con rotación en i

```
b1=n1*Ro[P,Ro[p,e3]];
b2=n2*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,e2]]]];
b3=n3*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,Ro[R,Ro[r,e2]]]]]]];
```

Posición del órgano terminal

```
Pos=Simplify[b1+b2+b3+{0,0,0,30}];
```

Resolución de la cinemática inversa

```
(*Trayectoria Home1-p1; p1={0,-44.42,78.5,135.2} *)
ClearAll[Vec,Sol,a1,a2,a3,a4,a5,a6]
```

Nota importante: Debido a las condiciones iniciales se presentó una reflexión de los eslabones l_2 y l_3 lo cual representaba impacto del robot con las mesas de operación, por lo tanto se debió jugar con las condiciones iniciales para reflexionar al robot en otra configuración que permitiera iniciar al robot desde home sin condiciones de impacto.

Quaterniones de la configuración no deformada obtenidos al modificar las condiciones iniciales

```
a1=0.99;a2=-0.001;a3=0.99;a4=0.005;a5=0.99;a6=-0.006;
```

Cinemática inversa de los puntos de las trayectorias de trabajo

Posición a—b

Tiempo de operación 9 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
For[t=0,t<=9,t++,
x=17.45-(61.87/9)*t;y=16.57+(61.93/9)*t;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ,MaxIterations->50];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
```



```

a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]

```

Posición b—c

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=10,t<=15,t++,
x=-44.42;y=78.5+(41.29/6)*(t-9);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]

```

Posición c—c'-----d'-----d

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 1 y 2(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]

Pun={{-44.42,119.79,132},{-44.14,122.46,132},{-43.72,125.57,132},{-43.14,128.59,132},
{-42.46,130.86,132},{-40.82,133.35,132},{-39.50,133.35,132},{-37.86,130.86,132},
{-37.18,128.59,132},{-36.6,125.57,132},{-35.9,119.79,132},{-35.9,119.79,135.2}};
For[t=16,t<=27,t++,
x=Pun[[t-15]][[1]];y=Pun[[t-15]][[2]];z=Pun[[t-15]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]

```

Posición d—e

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=28,t<=37,t++,
x=-35.9+(55.8/10)*(t-27);y=119.79;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición e—e'—f—f'

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 3 y 4(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

Nota: Condición de paro de emergencia , punto 8 de aplicación a la plancha 4 botón de paro de emergencia.

```
ClearAll[Sol,t]
Pus={{19.9,119.79,132},{20.18,122.46,132},{20.60,125.57,132},{21.18,128.59,132},
{21.86,130.86,132},{23.5,133.35,132},{24.84,133.35,132},{26.46,130.86,132},
{27.14,128.59,132},{27.14,128.59,135.2}};
For[t=38,t<=47,t++,
x=Pus[[t-37]][[1]];y=Pus[[t-37]][[2]];z=Pus[[t-37]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
ClearAll[Sol,t]
```

Posición 8 de aplicación — home 2
Permanencia del robot en home 2

Tiempo de operación 10 segundos
Tiempo de permanencia 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
For[t=48,t<=67,t++,  
If[t<=57,  
x=27.14+(24.31/10)*(t-47);y=128.59-(78.04/10)*(t-47);z=135.2,  
x=51.45;y=50.55;z=135.2];  
Sol[t]=FindRoot[  
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},  
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];  
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];  
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];  
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];  
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición h—i

Tiempo de operación 5 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]  
For[t=68,t<=72,t++,  
x=51.49+(26.99/5)*(t-67);y=50.50-(23.09/5)*(t-67);z=135.2;  
Sol[t]=FindRoot[  
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,  
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},  
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];  
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];  
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];  
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];  
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición i—j

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]  
For[t=73,t<=78,t++,  
x=78.48+(42.07/6)*(t-72);y=27.46;z=135.2;  
Sol[t]=FindRoot[
```

```

{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]      ]

```

Posición j—j'—k'—k

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación SA y aplicación de silicón a las planchas 5 y 6(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]
Pur={{120.55,27.46,132},{123.22,27.18,132},{126.33,26.76,132},{129.34,26.19,132},
{131.61,25.51,132},{134.1,23.87,132},{134.1,22.54,132},{131.61,20.9,132},
{129.34,20.23,132},{126.33,19.65,132},{120.55,18.95,132},{120.55,18.95,135.2}};
For[t=79,t<=90,t++,
x=Pur[[t-78]][[1]];y=Pur[[t-78]][[2]];z=Pur[[t-78]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]      ]

```

Posición k—l

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=91,t<=100,t++,
x=120.55;y=18.95-(55.81/10)*(t-90);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];

```

```

a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición l—l'-----m'-----m

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 7 y 8(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]
Pup={{120.55,-36.86,132},{123.22,-37.14,132},{126.33,-37.56,132},{129.34,-38.13,132},
{131.61,-38.81,132},{134.1,-40.45,132},{134.1,-41.78,132},{131.61,-43.42,132},
{129.34,-44.09,132},{126.33,-44.67,132},{120.55,-45.37,132},{120.55,-45.37,135.2}};
For[t=101,t<=112,t++,
x=Pup[[t-100]][[1]];y=Pup[[t-100]][[2]];z=Pup[[t-100]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición m—n

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=113,t<=118,t++,
x=120.55-(41.24/6)*(t-112);y=-45.37;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición n—a

Tiempo de operación 9 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=119,t<=127,t++,
x=79.31-(61.86/9)*(t-118);y=-45.37+(61.92/9)*(t-118);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Simulación y graficación

Graficación del home 1 y home 2

```
Home1={17.45,16.57,135.20};Home2={51.45,50.55,135.20};
Punto1={-44.42,78.5,135.2};Punto2={-44.42,119.79,135.2};Punto3={19.9,119.79,135.2};
Punto4={28.42,73.63,135.2};Punto5={74.48,27.46,135.2};Punto6={120.55,27.46,135.2};
Punto7={120.55,-36.86,135.2};Punto8={79.31,-45.37,135.2};
```

Graficación de las trayectorias

```
Trayectoria1=Graphics3D[Line[{Home1,Punto1,Punto2,Pun[[1]],Pun[[2]],Pun[[3]],Pun[[4]],Pun[[5]],
Pun[[6]],Pun[[7]],Pun[[8]],Pun[[9]],Pun[[10]],Pun[[11]],Pun[[12]],Punto3,Pus[[1]],Pus[[2]],
Pus[[3]],Pus[[4]],Pus[[5]],Pus[[6]],Pus[[7]],Pus[[8]],Pus[[9]],Pus[[10]],Home2,Punto5,Punto6,
Pur[[1]],Pur[[2]],Pur[[3]],Pur[[4]],Pur[[5]],Pur[[6]],Pur[[7]],
Pur[[8]],Pur[[9]],Pur[[10]],Pur[[11]],Pur[[12]],Punto7,Pup[[1]],Pup[[2]],Pup[[3]],Pup[[4]],
Pup[[5]],Pup[[6]],Pup[[7]],Pup[[8]],Pup[[9]],Pup[[10]],Pup[[11]],Pup[[12]],Punto8,Home1}],
Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},
ViewPoint->{0.000,-0.000,3.384};
```

Simulación a 127 segundos

Graficación de las pistolas de aplicación

```
For[t=0,t<=127,t++,  
p0=Vec[t][[1]];p3=Vec[t][[2]];q0=Vec[t][[3]];  
q1=Vec[t][[4]];r0=Vec[t][[5]];r1=Vec[t][[6]];  
If[t<=66,g1={0,16.08,0,0};g2={0,0,0,-12};g1={0,0,16.08,0};g2={0,0,0,-12};  
L1=Pos+g1;  
L2=Pos-g1;  
L3=L1+g2;  
L4=L2+g2;  
Poo=b1+{0,0,0,30};  
Po=b1+b2+{0,0,0,30};
```

Graficación de planchas de la mesa 1 y 2

```
If[t<=48,Planchas=Graphics3D[{  
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}],
```

Descarga de planchas de la mesa 1 y graficación de las planchas de la mesa 2

```
If[t<=67,Planchas=Graphics3D[{  
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}],
```

Graficación de las planchas de la mesa 1 y 2

```
If[t<=112,Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}];
```

Descarga de las planchas de la mesa 2 y graficación de las planchas de la mesa 1

```
Planchas=Graphics3D[{
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]}}];
```

Graficación de las mesas de operación, base de robot y elementos del robot

```
Show[Trayectoria1,Planchas,Graphics3D[{
  {Cuboid[{-50,-50,0},{50,50,30}]},
  {Cuboid[{187.72,66.05,-7.44},{67.72,-83.95,112.56}]},
  {Cuboid[{67,186.97,-7.44},{-83,66.97,112.56}]},
  {AbsoluteThickness[20],RGBColor[1,0,0],
    Line[{{0,0,30},{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]}}],
  {AbsoluteThickness[12],RGBColor[0,1,0],
    Line[{{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]},
      {Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]}}],
  {AbsoluteThickness[6],RGBColor[0,0,1],
    Line[{{Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]},
      {Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]}}],
  {AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
    Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
      {L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]}}],
  {AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
    Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
```

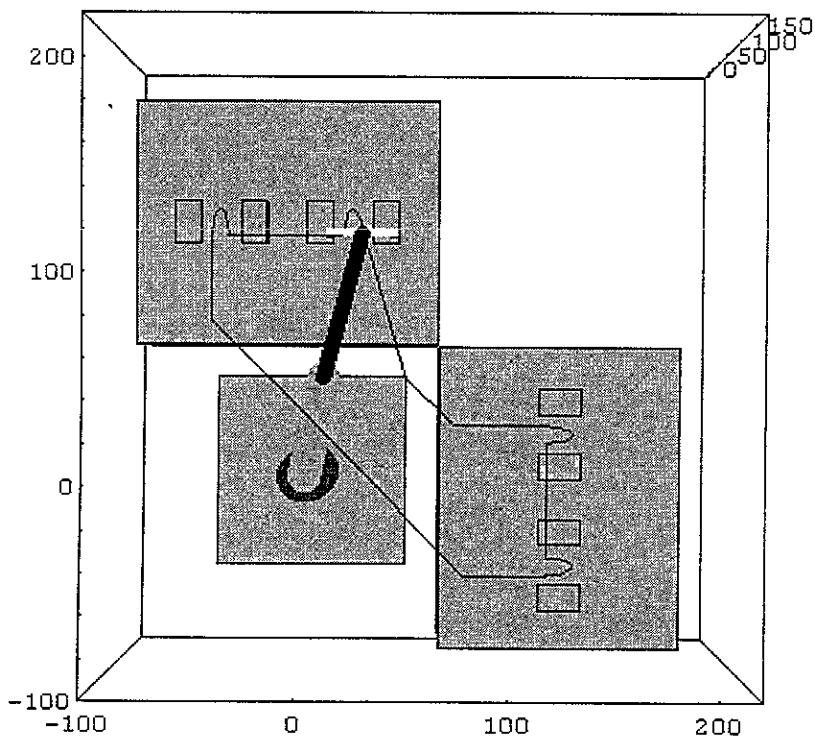


```

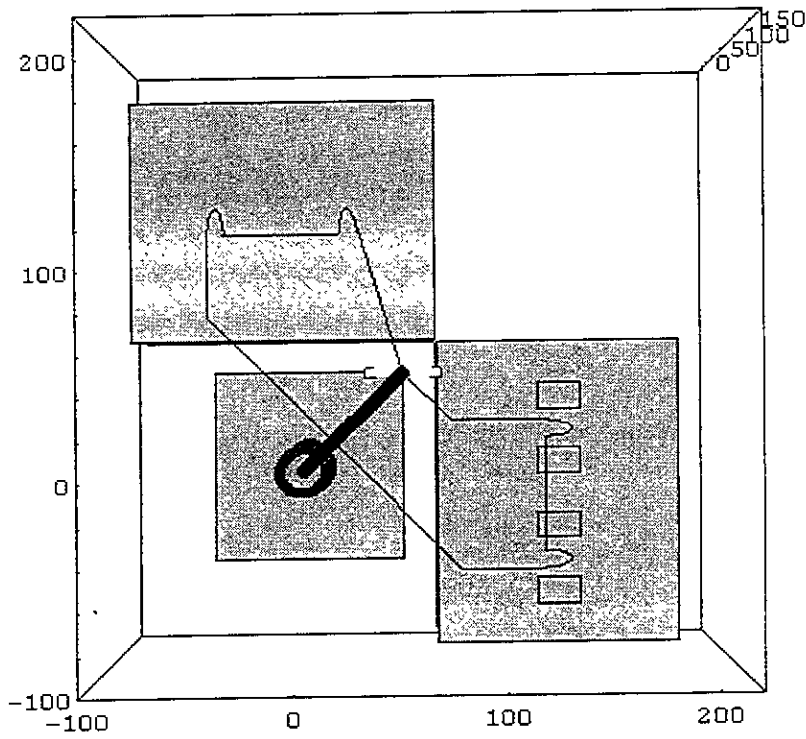
    {L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]}},
  {AbsoluteThickness[3],Line[{{L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]},
    {L3[[2]],L3[[3]],L3[[4]]}}},
  {AbsoluteThickness[3],Line[{{L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]},
    {L4[[2]],L4[[3]],L4[[4]]}}},
  Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},
  ViewPoint->{0.000,-0.000,3.384}]]];

```

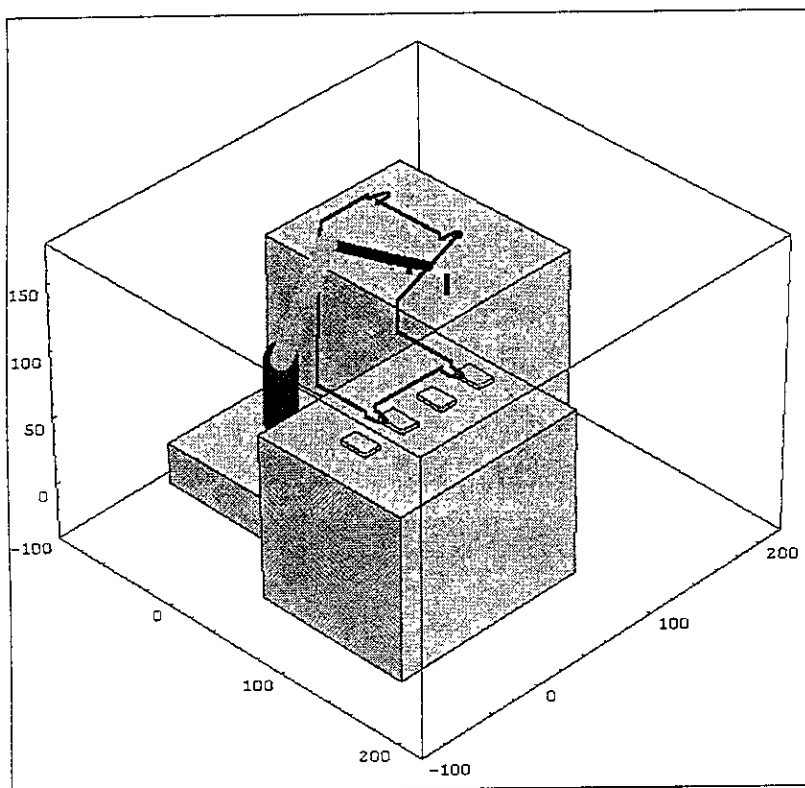
Simulación



Simulación del paro de emergencia 1 en T_{46}



Robot en home 2 en T_{58} , Descarga de planchas de la mesa 1



Robot en la trayectoria de paro de emergencia en T_{51}

Programa 8: Modelación y simulación de un proceso de aplicación de silicón por un Robot IRB 2400L/16 ABB con paro de emergencia 2 para planchas de uso doméstico.

Multiplicación entre los Cuaterniones P y Q

```
Mult[P_,Q_]:= {P[[1]]*Q[[1]]-P[[2]]*Q[[2]]-P[[3]]*Q[[3]]-P[[4]]*Q[[4]],  
              P[[2]]*Q[[1]]+P[[1]]*Q[[2]]-P[[4]]*Q[[3]]+P[[3]]*Q[[4]],  
              P[[3]]*Q[[1]]+P[[4]]*Q[[2]]+P[[1]]*Q[[3]]-P[[2]]*Q[[4]],  
              P[[4]]*Q[[1]]-P[[3]]*Q[[2]]+P[[2]]*Q[[3]]+P[[1]]*Q[[4]]};
```

Conjugado de un Cuaternion P

```
Conj[P_]:= {P[[1]],-P[[2]],-P[[3]],-P[[4]]};
```

Función de rotación

```
Ro[P_,Q_]:= Mult[ P, Mult[Q, Conj[P]] ];
```

Elementos de la base inercial

```
e1={0,1,0,0};e2={0,0,1,0};e3={0,0,0,1};
```

```
ClearAll[P,Q,R,p0,p3,q0,q1,r0,r1];
```

Cuaterniones para la posición no deformada

```
P={0.3945,0,0,0.9188};
```

```
Q={0.8823,0.4705,0,0};
```

```
R={0.3086,0.9511,0,0};
```

Cuaterniones para la posición deformada

```
p={p0,0,0,p3};q={q0,q1,0,0};r={r0,r1,0,0};
```

Longitud de los eslabones

```
n1=61.5;n2=84;n3=75.5;
```

Vectores que definen a los eslabones

El eslabón 1 se define en k con rotación en k,

El eslabón 2 se define en j con rotación en i,

El eslabón 3 se define en j con rotación en i

```
b1=n1*Ro[P,Ro[p,e3]];
b2=n2*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,e2]]]];
b3=n3*Ro[P,Ro[p,Ro[Q,Ro[q,Ro[R,Ro[r,e2]]]]]]];
```

Posición del órgano terminal

```
Pos=Simplify[b1+b2+b3+{0,0,0,30}];
```

Resolución de la cinemática inversa

```
(*Trayectoria Home1-p1; p1={0,-44.42,78.5,135.2} *)
ClearAll[Vec,Sol,a1,a2,a3,a4,a5,a6]
```

Nota importante: Debido a las condiciones iniciales se presentó una reflexión de los eslabones l_2 y l_3 lo cual representaba impacto del robot con las mesas de operación, por lo tanto se debió jugar con las condiciones iniciales para reflexionar al robot en otra configuración que permitiera iniciar al robot desde home sin condiciones de impacto.

Quaterniones de la configuración no deformada obtenidos al modificar las condiciones iniciales

```
a1=0.99;a2=-0.001;a3=0.99;a4=0.005;a5=0.99;a6=-0.006;
```

Cinemática inversa de los puntos de las trayectorias de trabajo

Posición a—b

Tiempo de operación 9 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
For[t=0,t<=9,t++,
x=17.45-(61.87/9)*t;y=16.57+(61.93/9)*t;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ,MaxIterations->50];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
```

```

a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición b—c

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=10,t<=15,t++,
x=-44.42;y=78.5+(41.29/6)*(t-9);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición c—c'—d'

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 1 y 2(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```

ClearAll[Sol,t]

Pun={{-44.42,119.79,132},{-44.14,122.46,132},{-43.72,125.57,132},{-43.14,128.59,132},
{-42.46,130.86,132},{-40.82,133.35,132},{-39.50,133.35,132},{-37.86,130.86,132},
{-37.18,128.59,132},{-36.6,125.57,132},{-35.9,119.79,132},{-35.9,119.79,135.2}};
For[t=16,t<=27,t++,
x=Pun[[t-15]][[1]];y=Pun[[t-15]][[2]];z=Pun[[t-15]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}
];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]

```

Posición d—e

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=28,t<=37,t++,
x=-35.9+(55.8/10)*(t-27);y=119.79;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición e—e'—f—f'

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 3 y 4(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```
Pus={{19.9,119.79,132},{20.18,122.46,132},{20.60,125.57,132},{21.18,128.59,132},
{21.86,130.86,132},{23.5,133.35,132},{24.84,133.35,132},{26.46,130.86,132},
{27.14,128.59,132},{27.72,125.56,132},{28.42,119.79,132},{28.42,119.79,135.2}};
For[t=38,t<=49,t++,
x=Pus[[t-37]][[1]];y=Pus[[t-37]][[2]];z=Pus[[t-37]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición f—g

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=50,t<=55,t++,
x=28.42;y=119.79-(46.15/6)*(t-49);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición g—h

Tiempo de operación 5 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=56,t<=60,t++,
x=28.42+(23.07/5)*(t-55);y=73.63-(23.13/5)*(t-55);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]
```

Posición h—i

Tiempo de operación 5 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=61,t<=65,t++,
x=51.49+(26.99/5)*(t-60);y=50.50-(23.09/5)*(t-60);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
```

```
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Posición i—j

Tiempo de operación 6 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=66,t<=71,t++,
x=78.48+(42.07/6)*(t-65);y=27.46;z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Posición j—j'—k'—k

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación SA y aplicación de silicón a las planchas 5 y 6(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

```
ClearAll[Sol,t]
Pur={{120.55,27.46,132},{123.22,27.18,132},{126.33,26.76,132},{129.34,26.19,132},
{131.61,25.51,132},{134.1,23.87,132},{134.1,22.54,132},{131.61,20.9,132},
{129.34,20.23,132},{126.33,19.65,132},{120.55,18.95,132},{120.55,18.95,135.2}};
For[t=72,t<=83,t++,
x=Pur[[t-71]][[1]];y=Pur[[t-71]][[2]];z=Pur[[t-71]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
```



```
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Posición k—I

Tiempo de operación 10 segundos

Trayectoria recta parametrizada

```
ClearAll[Sol,t]
For[t=84,t<=93,t++,
x=120.55;y=18.95-(55.81/10)*(t-83);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Posición l—m'----m'-----n

Tiempo de operación 12 segundos

Trayectoria por puntos

Activación del sensor(1 segundo) de Aplicación S_A y aplicación de silicón a las planchas 7 y 8(10segundos) y levante de las pistolas(1 segundo)

Nota: Condición de paro de emergencia 2, punto 3 de aplicación a la plancha 7 botón y sensor de paro de emergencia activados

```
ClearAll[Sol,t]
Pup={{120.55,-36.86,132},{123.22,-37.14,132},{126.33,-37.56,132},{129.34,-38.13,132},
{129.34,-38.13,135.2}};
For[t=94,t<=98,t++,
x=Pup[[t-93]][[1]];y=Pup[[t-93]][[2]];z=Pup[[t-93]][[3]];
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6} ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t] ]
```

Trayectoria recta parametrizada

Trayectoria de escape

```

ClearAll[Sol,t]
For[t=99,t<=103,t++,
x=129.34-(111.89/5)*(t-98);y=-38.13+(54.7/5)*(t-98);z=135.2;
Sol[t]=FindRoot[
{Pos[[2]]==x,Pos[[3]]==y,Pos[[4]]==z,
p0^2+p3^2==1,q0^2+q1^2==1,r0^2+r1^2==1},
{p0,a1},{p3,a2},{q0,a3},{q1,a4},{r0,a5},{r1,a6}  ];
a1=p0/.Sol[t][[1]];a2=p3/.Sol[t][[2]];
a3=q0/.Sol[t][[3]];a4=q1/.Sol[t][[4]];
a5=r0/.Sol[t][[5]];a6=r1/.Sol[t][[6]];
Vec[t]={p0,p3,q0,q1,r0,r1}/.Sol[t]  ]

```

Graficación y simulación de los resultados

Graficación del home 1 y home 2

```

Home1={17.45,16.57,135.20};Home2={51.45,50.55,135.20};
Punto1={-44.42,78.5,135.2};Punto2={-44.42,119.79,135.2};Punto3={19.9,119.79,135.2};
Punto4={28.42,73.63,135.2};Punto5={74.48,27.46,135.2};Punto6={120.55,27.46,135.2};
Punto7={120.55,-36.86,135.2};Punto8={79.31,-45.37,135.2};

```

Graficación de trayectorias

```

Trayectoria1=Graphics3D[{{RGBColor[1.000,0.000,0.502],
Line[{Home1,Punto1,Punto2,Pun[[1]],Pun[[2]],Pun[[3]],Pun[[4]],Pun[[5]],
Pun[[6]],Pun[[7]],Pun[[8]],Pun[[9]],Pun[[10]],Pun[[11]],Pun[[12]],Punto3,Pus[[1]],Pus[[2]],
Pus[[3]],Pus[[4]],Pus[[5]],Pus[[6]],Pus[[7]],Pus[[8]],Pus[[9]],Pus[[10]],Pus[[11]],Pus[[12]],
Punto4,Home2,Punto5,Punto6,Pur[[1]],Pur[[2]],Pur[[3]],Pur[[4]],Pur[[5]],Pur[[6]],Pur[[7]],
Pur[[8]],Pur[[9]],Pur[[10]],Pur[[11]],Pur[[12]],Punto7,Pup[[1]],Pup[[2]],Pup[[3]],Pup[[4]],
Pup[[5]],Home1}}},
Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},
ViewPoint->{2.107,2.257,1.384}];

```

Graficación de las pistolas de aplicación

Tiempo del proceso (103 segundos)

```
For[t=0,t<=103,t++,  
p0=Vec[t][[1]];p3=Vec[t][[2]];q0=Vec[t][[3]];  
q1=Vec[t][[4]];r0=Vec[t][[5]];r1=Vec[t][[6]];  
If[t<=66,g1={0,16.08,0,0};g2={0,0,0,-12};g1={0,0,16.08,0};g2={0,0,0,-12}];  
L1=Pos+g1;  
L2=Pos-g1;  
L3=L1+g2;  
L4=L2+g2;  
Poo=b1+{0,0,0,30};  
Po=b1+b2+{0,0,0,30};
```

Graficación de las planchas en la mesa 1 y planchas de la mesa 2

```
If[t<=60,Planchas=Graphics3D[{  
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]},  
  }],
```

Descarga de planchas en la mesa 1

```
If[t<=76,Planchas=Graphics3D[{  
  {Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},  
  {Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]},  
  }],
```

Planchas en la mesa 1 (cargadas)

Planchas en la mesa 2 (sin descarga por paro de emergencia)

```
If[t<=98,Planchas=Graphics3D[{  
  {Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
```

```

{Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
{Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
{Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]},
{Cuboid[{137.88,45.36,120},{117.19,32.75,123}]},
{Cuboid[{137.88,13.2,120},{117.19,0.59,123}]},
{Cuboid[{137.88,-19,120},{117.19,-31.6,123}]},
{Cuboid[{137.88,-51.12,120},{117.19,-63.73,123}]}}];

```

```

Planchas=Graphics3D[
{Cuboid[{-62.74,137.1,120},{-50.14,116.41,123}]},
{Cuboid[{-30.58,137.1,120},{-17.98,116.41,123}]},
{Cuboid[{1.58,137.1,120},{14.18,116.41,123}]},
{Cuboid[{34.16,137.1,120},{46.77,116.41,123}]}}];

```

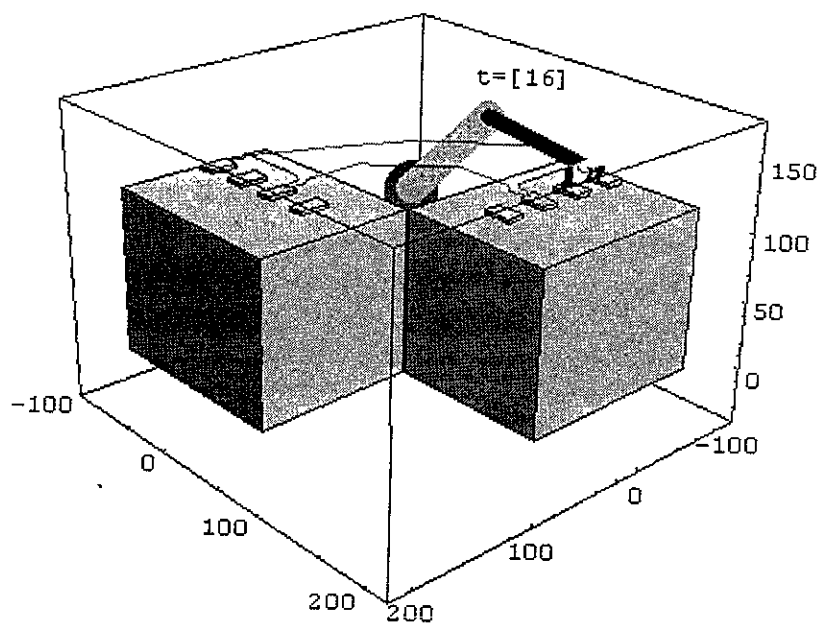
Graficación de las mesas de aplicación, el robot y base del robot

```

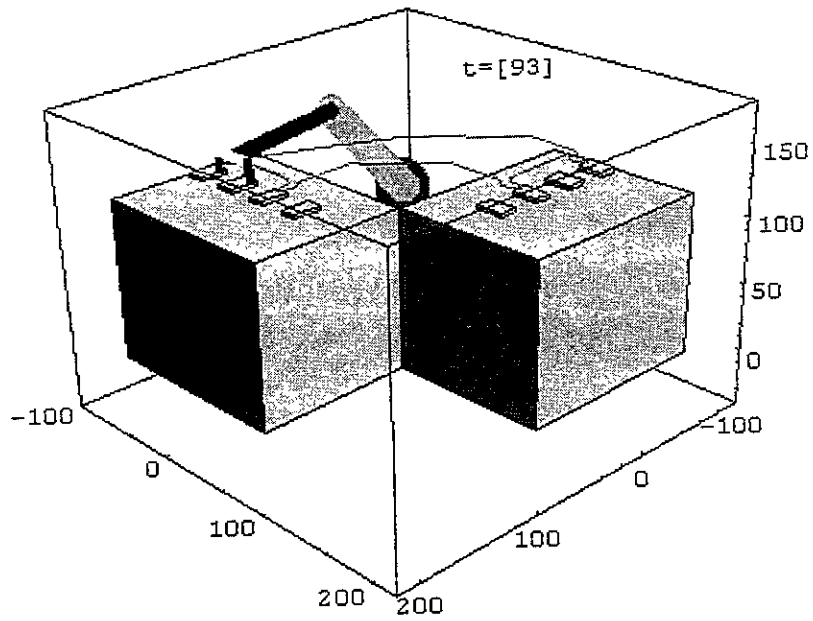
Show[Trayectoria1,Planchas,Graphics3D[{{Text["t="][t,{0,100,200}]},
{Cuboid[{-50,-50,0},{50,50,30}]},
{Cuboid[{187.72,66.05,-7.44},{67.72,-83.95,112.56}]},
{Cuboid[{67,186.97,-7.44},{-83,66.97,112.56}]},
{AbsoluteThickness[20],RGBColor[1,0,0],
Line[{{0,0,30},{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[12],RGBColor[0,1,0],
Line[{{Poo[[2]],Poo[[3]],Poo[[4]]},
{Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[6],RGBColor[0,0,1],
Line[{{Po[[2]],Po[[3]],Po[[4]]},
{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
{L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[3],RGBColor[1,1,0],
Line[{{Pos[[2]],Pos[[3]],Pos[[4]]},
{L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[3],Line[{{L1[[2]],L1[[3]],L1[[4]]},
{L3[[2]],L3[[3]],L3[[4]]}}]},
{AbsoluteThickness[3],Line[{{L2[[2]],L2[[3]],L2[[4]]},
{L4[[2]],L4[[3]],L4[[4]]}}]},
Axes->True,PlotRange->{{-100,220},{-100,220},{-40,180}},
ViewPoint->{2.107,2.257,1.384}];

```

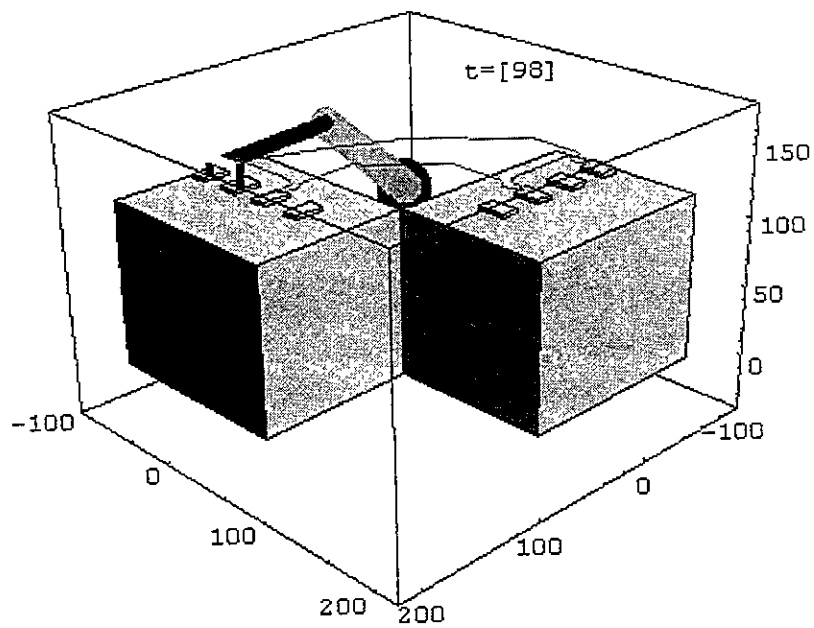
Simulación:



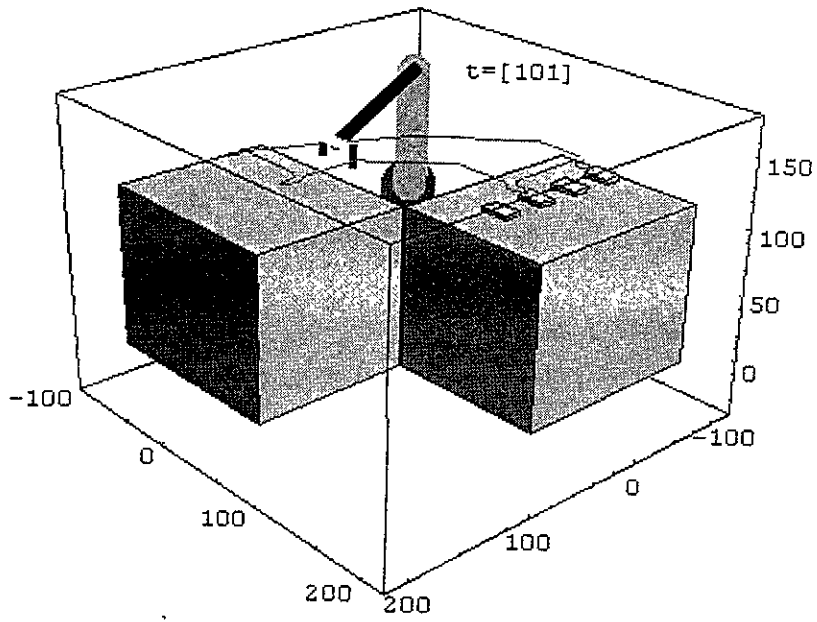
Robot en la aplicación de silicón a las planchas 1 y 2 en T_{16}



Robot en la aplicación de silicón a las planchas 7 y 8 antes del paro de emergencia 2



Robot en la condición de paro de emergencia 2 en T_{98}



Robot en la trayectoria de escape de paro de emergencia 2 en T_{101}

6 Conclusiones.

A través de la presente tesis fueron satisfechos los objetivos siguientes:

- Unificar las diferentes metodologías que se utilizan para modelar sistemas mecánicos, utilizando el álgebra de Cuaterniones.
- Se caracterizaron 3 tipos de movimientos fundamentales de las cadenas cinemáticas abiertas.
- Se generó el marco teórico de la evasión de obstáculos asociado a un robot de dos grados de libertad.
- Se realizó la caracterización y el diseño del proceso de manufactura requerido por la empresa ABB Sistemas S.A.
- Se realizó la programación y la visualización de 8 modelos de robots y mecanismos.

A continuación se describen los resultados obtenidos en este trabajo:

En el capítulo I, se logró unificar las diferentes metodologías usadas en la modelación de sistemas mecánicos haciendo un uso sistemático del álgebra de Cuaterniones. En la modelación del robot de 2GDL se logró establecer 4 tipos de movimientos básicos caracterizados a través de las configuraciones intermedias de cada secuencia. En la modelación del robot de 3GDL se logró determinar la ecuación de posición que garantiza los movimientos de las juntas tipo RRR, mediante el "teorema sobre la actualización del eje de la rotación". La diferencia entre los modelos matemáticos de las secuencias del robot de 3GDL, muestran lo importante de sistematizar los movimientos de las cadenas cinemáticas abiertas. En la parte de las cadenas cinemáticas cerradas, se construyeron los modelos de posición y síntesis para tres puntos de precisión para conducción de cuerpo rígido, los sistemas de ecuaciones obtenidos son de 8×8 para el modelo de posición y de 12×12 para el modelo de

síntesis, con los resultados obtenidos en esta parte, se logró clarificar la modelación de este tipo de sistemas mecánicos, en relación con los modelos tratados en [3] y [21]. Otro resultado importante en esta parte, es la no composición de rotaciones, esta consideración otorga beneficios en la programación ya que reduce el número de operaciones, además, se muestra la diferencia entre los modelos de cadenas abiertas con las cadenas cerradas. En la modelación del robot paralelo se logró clarificar y simplificar los sistemas de ecuaciones en lo que se refiere al planteamiento del problema cinemático directo. En [12] el sistema de ecuaciones para la cinemática directa es de 10×10 , en este trabajo se logró simplificar el modelo a un sistema de 8×8 . En este capítulo se plantearon de forma adecuada los problemas cinemáticos directos e inversos (de posición) asociados a los robots y mecanismos clase I.

En el capítulo II, se caracterizaron los movimientos de los robots de 2 y 3 GDL. Un resultado importante fue el establecimiento de 30 formas posibles de movimiento de un robot de 2GDL, esto es, de la configuración no deformada a la configuración deformada, en este caso las secuencias caracterizadas fueron: 12 secuencias uno a uno, 8 secuencias simultáneas y 10 secuencias híbridas. También se logró establecer que existen 4 puntos intermedios asociados a las secuencias uno a uno e híbridas, en tanto para las secuencias simultáneas el punto intermedio no es considerado. Para el robot de 3GDL se encontraron 112 secuencias de movimientos, 48 secuencias uno a uno y 64 simultáneas. En el caso de las secuencias uno a uno, el número de puntos intermedios es de 2 para cada familia. En este capítulo, se construyeron las ecuaciones que gobiernan el número máximo de secuencias, encontrándose que en el caso de las secuencias uno a uno, la ecuación es general, es decir, para toda cadena abierta, en el caso de las secuencias simultáneas, cada robot tiene su propia ecuación, esto es debido a las clases. Se plantearon los problemas directos de cada conjunto de secuencias.

En el capítulo III, se logró caracterizar las condiciones de impacto real e impacto virtual en base a los resultados del capítulo II. El marco teórico generado en esta parte, forma la base para construir simuladores de evasión de obstáculos mucho más complejos. El dimensionamiento del robot de 2GDL y la asociación de sensores en sus fronteras fue la base para generar la teoría de impacto virtual. La región de sensado, la distancia de seguridad y los factores de seguridad fueron las variables principales para construir al

sistema "MARIANNE VI". La sistematización de los movimientos asociados a los robots, jugaron un papel importante en la caracterización de sistemas complejos como el sistema "CHEVOTRONIC III". Cabe mencionar que los problemas propuestos en esta parte, fueron idealizados con el propósito de crear los fundamentos para la construcción de sistemas inteligentes.

En el capítulo IV, se construyeron los simuladores del proceso de manufactura requerido por la empresa ABB Sistemas S.A. El diseño propuesto resulto ser satisfactorio para la empresa, ya que cumple con las restricciones de proceso, también se logró la sincronía local de la línea de producción. El código binario asociado a las operaciones de este proceso otorga beneficios cuando se construyen los diagramas escalera. En la programación del robot de 3GDL utilizado para el proceso, se logró observar que el robot podía operar con algunas configuraciones no deseadas, esto es, operaba en forma correcta pero la configuración de los eslabones 2 y 3 impactaba con la mesa de operación. Esta observación permitió considerar que era necesario el uso del "enseñador del robot"(Teach- Pendant) para corregir tal configuración. Sin embargo, con el uso de álgebras[9] en la modelación cinemática también es posible eliminar las configuraciones no deseadas, estas conclusiones es una aportación de relevancia, ya que es posible eliminar al enseñador de robot utilizando software que permita incluir álgebras, esto en lo que se refiere a la enseñanza del robot y no a la del operario. En este capítulo, se logró probar con variables reales de proceso a los sistemas "CHEVOTRONIC IV "[20] y "MARIANNE XI"[15] , el primero de estos sistemas corresponde al primer simulador de sistemas de manufactura desarrollado al principio de esta investigación, y el segundo forma parte de un proyecto ambicioso de automatización y robotización global de una fábrica.

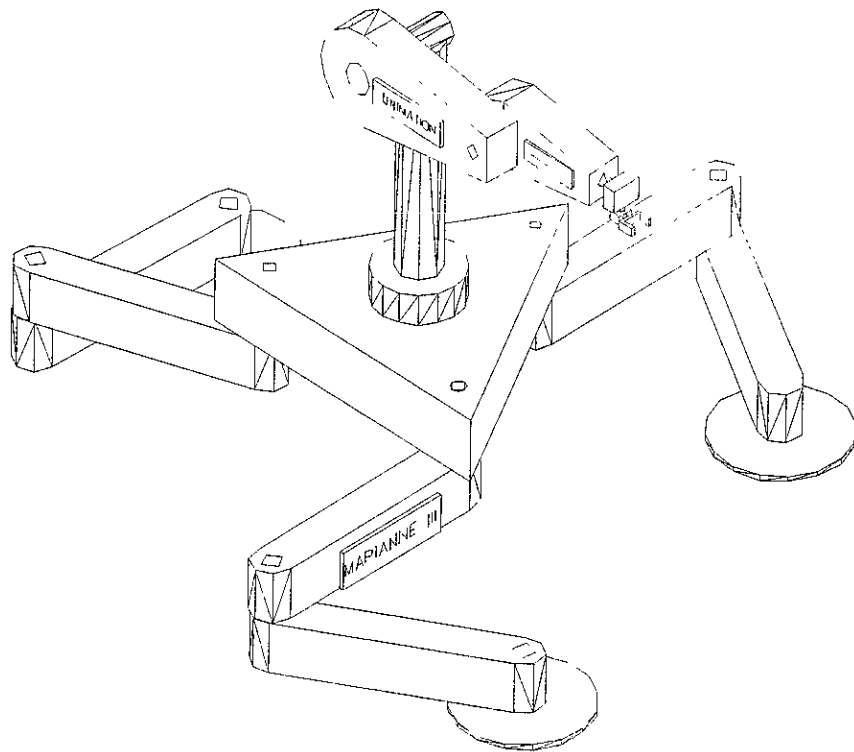
En el capítulo V, se programaron 8 modelos de robots y mecanismos así como los correspondientes al proceso de manufactura. Se probó que con la ayuda del paquete de cálculo formal Mathematica[24] es posible programar y simular de forma rápida y eficiente los modelos cinemáticos asociados a los sistemas mecánicos.

Posibles investigaciones relacionadas con este trabajo son:

- Modelación dinámica de multicuerpos.
- Simulación de sistemas de manufactura.
- Modelación cinemática y dinámica de robots clase II.
- Diseño y fabricación de robots.
- Control de robots.
- Robótica flexible.
- Diseño y fabricación de celdas de manufactura flexible.
- Automatización global de fábricas.

7 ÁPENDICE A

“EL MARCO TEÓRICO”



Robot Compuesto MARIANNE III

ÁPENDICE A

A EL MARCO TEÓRICO”

En este ápendice, se presenta las definiciones importantes y el marco teórico que será usado a lo largo de este trabajo. El marco teórico aquí presentado, se divide en 4 partes, la primera de ellas se refiere a la teoría de conjuntos, la segunda corresponde a los espacios vectoriales y transformaciones lineales, en la tercera parte se presenta el álgebra de Cuaterniones y finalmente la cuarta parte se refiere a los movimientos rígidos.

A.1 Definiciones generales.

Definición A.1.1 La palabra “robot” proviene de la palabra Checa “ROBOTA” que significa trabajo. Para el “Robot Institute of America”, un robot es un manipulador reprogramable multifuncional diseñado para mover materiales, piezas y dispositivos especializados a través de movimientos variables programados para la realización de una diversidad de tareas.

Los robots son importantes porque pueden realizar tareas manipuladoras sencillas tanto ó más eficientemente que el hombre y son capaces de realizarlas en forma repetitiva y de manera incansable, pero lo que verdaderamente los hace útiles e importantes es el hecho de que pueden trabajar en medios ambientes en los que un ser humano puede poner en riesgo su integridad física y aún su vida, tal es el caso por ejemplo: en operaciones de manejo de materiales radioactivos; tareas con sustancias químicas; entre otras. Actualmente los robots son utilizados también en la industria espacial, en simuladores de vuelo, en la industria farmacéutica y en general en la industria de la transformación.

Definición A.1.2 Los robots son dispositivos mecánicos y electrónicos de alta precisión que se dañan fácilmente si no se manejan adecuadamente, además de ser herramientas de trabajo muy caras, por estos motivos es necesario proporcionar a las personas que van a trabajar con ellos un medio confiable que les permita familiarizarse con éstos sin arriesgar la integridad física del robot y menos aún de las personas. De esta manera, es necesario capacitar al personal en simuladores computacionales que tienen la ventaja de ser baratos y

seguros, ya que lo peor que le puede suceder a un simulador es dejar de interactuar con el usuario, pero este problema se puede resolver fácilmente reiniciando el simulador.

Un robot posee dos características importantes[2]:

- 1) Versatilidad, la cual puede definirse como la potencialidad estructural de ejecutar tareas diversas y/o ejecutar una misma tarea de forma diversificada.
- 2) La adaptabilidad al entorno. Esto es, el robot debe, por sí solo, alcanzar su objetivo (la ejecución de una tarea), a pesar de las perturbaciones imprevistas (pero limitadas) de su entorno a lo largo de la ejecución de una tarea.

Un robot manipulador, en principio, es un dispositivo de propósito general. En la práctica los manipuladores son usualmente diseñados pensando en que cubran al menos una clase amplia de aplicaciones, como podría ser, soldar; manejar materiales; ensamblar; entre otras tareas. Estas aplicaciones en gran parte dictan la elección de varios parámetros de diseño del manipulador, incluyendo su estructura cinemática. Por ejemplo, el ensamblado de tarjetas de circuitos es realizada por un manipulador tipo SCARA¹.

Definición A.1.3 Los manipuladores pueden ser clasificados por muchos criterios, tales como su geometría, estructura cinemática, el tipo de aplicación para la cual fueron diseñados, la manera en que son controlados, etc.

Muchos manipuladores industriales actuales tienen 6 ó menos grados de libertad, son usualmente clasificados cinemáticamente sobre la base del primer brazo ó las primeras 3 juntas, describiendo por separado el órgano terminal ó muñeca. La mayoría de estos manipuladores se clasifican en uno de los siguientes tipos de geometría.

- 1 Articulados.
- 2 Esféricos.
- 3 Tipo SCARA.
- 4 Cilíndricos.

5 Cartesianos.

Algunos de los robots industriales más usados son los tipo PUMA² y la serie IRB ABB Systems de seis grados de libertad para transporte de piezas y ensamblado de partes, el tipo SCARA de cuatro grados de libertad para operaciones de inspección, robot tipo MotoMan de cinco grados de libertad para operaciones de soldadura y el tipo AS-RS para trabajos de almacenaje de dos grados de libertad. Existen en la actualidad cadenas cinemáticas especiales llamadas plataformas ó robots paralelos que tiene ventajas sobre los manipuladores convencionales dada su alta precisión, sin embargo, su uso no está bien difundido por lo complicado de sus modelos matemáticos y altas redundancias, por lo que se encuentran en laboratorios de las universidades y su uso esta restringido en la industria manufacturera, sin embargo, en la industria aeronáutica y espacial son usados para construir simuladores complejos. De esta manera es necesario definir a los robot paralelos de una forma correcta y estudiarlos para una aplicación mas general. Con el fin de un buen desarrollo de este trabajo se definirán los siguientes conceptos:

Definición A.1.4 Un simulador de robot es un sistema que imita el funcionamiento ó comportamiento del robot. Tiene el objetivo de enseñar a los futuros operadores las características y restricciones de robot que se va a manejar.

Definición A.1.5 Las cadenas cinemáticas están constituidas por elementos llamados eslabones, el acoplamiento entre dos eslabones se realiza por medio de pares, los cuales pueden ser de dos clases: pares inferiores y pares superiores. Un par inferior existe cuando un elemento es acoplado a otro por medio de una acción envolvente y el contacto se realiza entre superficies. Si el contacto tiene lugar a lo largo de una línea ó punto(un par de engranes), el acoplamiento se conoce como un par superior. En robótica se utilizan frecuentemente los pares inferiores.

¹ Selective Compliance Assembly Robot Arm

² Programmable Universal Machine for Assembly

Definición A.1.6 Los pares inferiores pueden clasificarse en seis tipos[3]:

- a) Par de rotación(R), el cual permite un giro alrededor de un eje y evita traslaciones. Impone cinco restricciones, tres de traslación y dos de rotación.
- b) Par prismático(P), permite únicamente traslación a lo largo de una dirección. También impone cinco restricciones, evita traslación sobre dos direcciones y rotaciones con respecto a tres ejes.
- c) Par de tornillo(H), permite traslación a lo largo de un eje y rotación alrededor del mismo eje, existiendo una relación entre ellos. Por lo tanto, también impone cinco restricciones.
- d) Par cilíndrico(C), permite dos movimientos independientes, traslación sobre un eje y rotación alrededor del mismo. Impone cuatro restricciones.
- e) Par esférico(S), permite rotación alrededor de tres ejes no coplanares e impide movimientos de traslación. Impone tres restricciones.
- f) Par plano(E), permite traslación a lo largo de dos direcciones independientes y rotación alrededor de un eje perpendicular al plano de esas direcciones. Impone tres restricciones.

Definición A.1.7 El grado de libertad de un sistema mecánico se define como un número entero correspondiente al número mínimo de coordenadas requeridas para especificar una configuración geométrica de un sistema dado. Para ubicar un cuerpo rígido en el espacio se necesitan seis grados de libertad, es decir, una traslación a lo largo de cada una de las tres direcciones del espacio y una rotación alrededor de un eje tridimensional.

Definición A.1.8 Un multicuerpo es un conjunto de cuerpos rígidos en el cual los cuerpos pueden tener movimiento relativo unos con respecto a otros. La conexión de eslabones mediante pares cinemáticos constituye una cadena cinemática.

Definición A.1.9 Los sistemas mecánicos se clasifican de tres formas(en base a la operación de trabajo que realizan):

- 1) De cadena abierta. Es un conjunto de eslabones rígidos unidos por pares cinemáticos, donde uno de los extremos es fijado a una base, y el otro está libre, el cual es equipado con alguna herramienta que realiza una tarea específica, se les conoce comúnmente como manipuladores.
- 2) De cadena cerrada. Los eslabones (≥ 4) forman lazos cerrados y el órgano terminal esta conectado a una base fija, también se les llama mecanismos.
- 3) Plataformas(Robots paralelos). Son mecanismos de cadena cinemática cerrada, constituido por un órgano terminal de n grados de libertad y de una base fija unida entre sí por cadenas cinemáticas independientes, cada una de ellas cuenta a lo sumo de dos segmentos articulados, la articulación entre estos dos segmentos deberá tener un sólo grado de libertad. El movimiento de este mecanismo se efectúa por n actuadores simples, uno por cada cadena[4].

Los robots también se clasifican por medio de sus pares cinemáticos. Esto es,

El robot PUMA posee seis articulaciones del tipo revolución, entonces es del tipo RRRRRR, el tipo SCARA se clasifica como RRRP(P es un par prismático), el MotoMan del tipo RRRRR, en tanto el AR-SR del tipo PP. Una plataforma de tres grados de libertad en el plano puede tener una configuración tipo RRR si posee articulaciones de revolución, ver figura A.1.

Definición A.1.10 Los robots se clasifican también en clases, por ejemplo los primeros robots que se construyeron son de la clase I, sus movimientos se restringen sólo a moverse en trayectorias puntuales, específicas y su interacción con el personal es directa, y no pueden trabajar en medios ambientes desconocidos, es decir, no reconocen su entorno. La clase II, se refiere a una generación de robots dotados de sensores capaces de reconocer el entorno y pueden evitar obstáculos, sus lenguajes de programación son más sofisticados y pueden interactuar con medios ambientes hostiles. La clase III son robots dotados de inteligencia artificial

y con sistemas de visión capaces de reconocer objetos variados y tomar decisiones por ellos mismos, su comunicación es a través de lenguaje de hombre ó por sistemas de realidad virtual.

De esta manera, hemos clasificado a los robots tanto por sus pares cinemáticos como por las clases de generaciones a través del tiempo. Para el propósito de este trabajo trabajaremos con cadenas cinemáticas que poseen pares de revolución y se realizará una simulación computacional de un robot de la clase II, es decir, las simulaciones se realizarán con sensores virtuales localizados en los eslabones de un robot tipo RR y un tipo RRR y se definirán criterios de evasión de obstáculos bajo una información precisa de las secuencias de movimientos mas elementales.

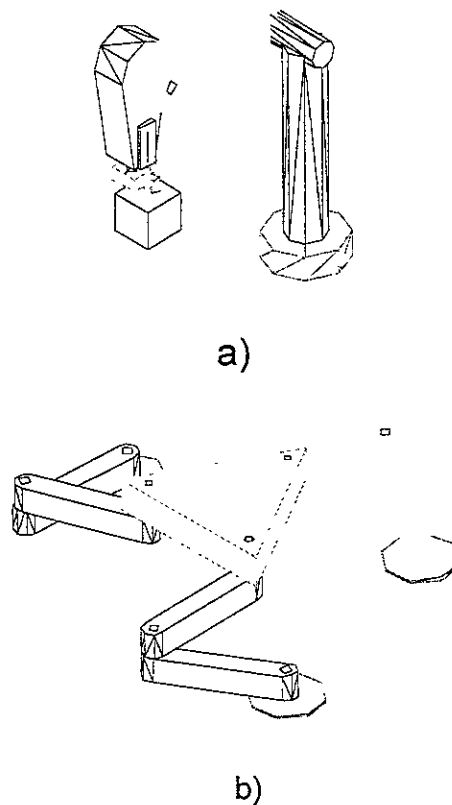


Figura1 a) Robot PUMA, b)Robot paralelo tipo RRR.

En este contexto utilizaremos el álgebra de Cuaterniones como una herramienta matemática para describir los movimientos geométricos de las cadenas cinemáticas, observaremos como los cambios de base representados a través de operaciones binarias, son más eficientes que la

representadas con matrices trigonométricas. Los parámetros de Denavit - Hartenberg no se utilizarán, además la metodología tratada en este trabajo no permite su uso, modificando con esto las estructuras matemáticas tradicionales que se emplean comúnmente en la modelación de robots y mecanismos.

A.2 El marco teórico

A.2.1 Teoría de conjuntos[5].

Un robot se puede analizar como un conjunto de cuerpos rígidos, en tanto que se compone de cables, tornillos cadenas, eslabones, juntas, etc. El robot se puede particionar en conjuntos, y por ende en clases, al caracterizar sus elementos bajo alguna relación. Es en este sentido que conviene utilizar la teoría de conjuntos, mediante la cual analizaremos los elementos del robot.

El concepto de conjunto (de una colección de elementos) desempeña un papel de extraordinaria importancia en las ciencias modernas no sólo porque la propia teoría de conjuntos ha pasado a ser en la actualidad una disciplina sumamente vasta, sino, principalmente, en virtud de la influencia que la teoría de conjuntos ha ejercido y ejerce sobre las matemáticas que a su vez son el fundamento de las ciencias aplicadas, entre ellas la robótica.

En este escrito sólo trataremos los conceptos más importantes sobre conjuntos relacionados con la robótica. Designaremos a los conjuntos con letras mayúsculas A, B. La afirmación de que “un elemento a pertenece al conjunto A” se denotará por $a \in A$; $a \notin A$ significará que “el elemento a no pertenece al conjunto A”. Si todos los elementos que componen al conjunto A pertenece también al conjunto B (con la particularidad de que $A=B$ no está excluido), se dirá que “A es subconjunto de B” lo que se escribe $A \subset B$.

Par denotar las operaciones sobre conjuntos utilizaremos los símbolos comunmente empleados en los libros de matemáticas. Esos símbolos son: \cup , \cap , \setminus , Δ , y denotan la unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica de conjuntos, respectivamente.

Definición A.2.1.1 Dados dos conjuntos M y N de naturaleza arbitraria, se dice que está definida sobre M una función f (que se llamará en este escrito función de caracterización) con valores en N, si a cada elemento $x \in M$ se le pone en correspondencia un elemento y sólo uno, y viseversa.

Definición A.2.1.2 Sea $a \in M$, el elemento $y = f(a) \in N$ se denomina imagen del elemento a (para la aplicación f). La colección de elementos de M que tienen por imagen el elemento $b \in N$ se denomina imagen recíproca del elemento b y se denota mediante $f^{-1}(b)$.

Sea f la función de caraterización $f: I \rightarrow P(\Omega)$ con las siguientes propiedades:

- 1 La función es uno a uno;
- 2 La $\text{Im}(f) = C \subset P(\Omega)$ [A.1]
- 3 Para toda $i \in I$, $f(i) = C_i$ (I es el conjunto de índices)

Bajo esas indicaciones tenemos que los elementos de un robot se pueden caracterizar mediante:

$$f(i) = C_i \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \{ C_i \mid i \in I \} = C \subset P(\Omega). \quad [A.2]$$

Donde C_i son los subconjuntos en los que se puede subdividir a un robot. Luego todo conjunto C se puede escribir como :

$$C = \{ C_i \}_{i \in I} = C_1 + C_2 = \text{Im}(f) \quad [A.3]$$

es decir, los elementos de los robots pueden ser clasificados en familias.

Definición A.2.1.3 Sea Ω un conjunto cualesquiera, $C \subset P(\Omega)$ y P una partición de Ω , sea I otro conjunto arbitrario, entonces la familia $C = \{ C_i \}_{i \in I}$ indicada por I es una función

$f: I \rightarrow P(\Omega)$ tal que:

- 1 la función f es uno a uno ; [A.4]
- 2 La $\text{Im}(f) = C = \{C_i\}_{i \in I}$.

Teorema A.2.1.1 Sea $C = \{C_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de un conjunto Ω ; entonces las siguientes proposiciones 1 y 2 son verdaderas:

- 1 Existe un conjunto, y un sólo conjunto que denotaremos

$$\bigcup_{i \in I} X_i \quad [A.5]$$

que tiene las siguientes propiedades:

- a) $\bigcup_{i \in I} X_i \subset \Omega$
- b) $X_i \subset \bigcup_{i \in I} X_i \quad \forall i \in I$
- a) si $Y \subset \Omega$ es tal que $X_i \subset Y \quad \forall i \in I$, entonces $\bigcup_{i \in I} X_i \subset Y$ [A.6]

En otras palabras como la relación de inclusión \subset es una relación de orden en $P(\Omega)$, entonces lo que se está afirmando es que:

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \sup\{X_i\}_{i \in I} \quad [A.7]$$

o sea, que el conjunto $\bigcup_{i \in I} X_i$, que llamaremos la unión de la familia $X = \{X_i\}_{i \in I}$, es la menor de las cotas superiores de la familia C ; es decir su supremo.

- 2) Existe un conjunto, y un sólo conjunto que denotaremos

$$\bigcap_{i \in I} X_i \quad [A.8]$$

y se llamará la intersección de la familia $X = \{ X_i \}_{i \in I}$, que se caracteriza por tener las siguientes propiedades:

- a) $\bigcap_{i \in I} X_i \subset \Omega$
- b) $\bigcap_{i \in I} X_i \subset X_i \quad \forall i \in I$ [A.9]
- c) si $Y \subset X_i \quad \forall i \in I$ es tal que $X_i \subset Y \quad \forall i \in I$, entonces $Y \subset \bigcap_{i \in I} X_i$

Esto es, la intersección de la familia es el ínfimo de ella bajo la relación de orden inducida por la relación de inclusión \subset en $P(\Omega)$. Esto es,

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \inf\{ X_i \}_{i \in I} \quad [A.10]$$

ya que $\bigcap_{i \in I} X_i$ es una cota inferior de la familia C y es la mayor de las cotas inferiores de la familia.

Definición A.2.1.4 Sea $C = \{ C_i \}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de C_i de un conjunto Ω , indicada por el conjunto I . Se define entonces

- 1 $\bigcup_{i \in I} C_i = \{ x \in \Omega \mid \text{existe un } i \in I \text{ tal que } x \in C_i \}$
- 2 $\bigcap_{i \in I} C_i = \{ x \in \Omega \mid x \in C_i \quad \forall i \in I \}$ [A.11]

Cuando el conjunto de índices I sea el conjunto de los números naturales N , esto es, cuando

$C = \{ C_i \}_{i \in I} = \{ C_n \}_{n=1}^{\infty}$ sea una sucesión con

$$I = N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \dots \}$$

la unión y la intersección de esta sucesión la denotaremos por

$$1 \quad \bigcup_{i \in I} C_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \quad [A.12]$$

$$2 \quad \bigcap_{i \in I} C_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Sea $I = \{1, 2\}$ y $C = \{C_i\}_{i \in I} = \{C_1, C_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} C_i &= \{x \mid \text{existe } i \in C_i \text{ tal que } x \in C_i\} = \\ &= \{x \mid x \in C_1 \text{ o } x \in C_2\} = C_1 \cup C_2 \end{aligned} \quad [A.13]$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} C_i &= \{x \mid x \in C_i \forall i \in I\} = \\ &= \{x \mid x \in C_1 \text{ y } x \in C_2\} = C_1 \cap C_2 \end{aligned} \quad [A.14]$$

Teorema A.2.1.2 Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos, entonces

$$\begin{aligned} 1 \quad (\bigcup_{i \in I} A_i)^c &= \bigcap_{i \in I} A_i^c \\ 2 \quad (\bigcap_{i \in I} A_i)^c &= \bigcup_{i \in I} A_i^c \end{aligned} \quad [A.15]$$

Demostración en [5].

Teorema A.2.1.3 Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos, y supóngase que algunos de los conjuntos es vacío, esto es,

Existe un $j \in I$ tal que $A_j = \emptyset$

entonces:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset \quad [A.16]$$

Definición A.2.1.5 Sea $I = \{1,2,3\}$ y $C = \{C_i\}_{i \in I} = \{C_1, C_2, C_3\}$, entonces la diferencia entre los conjuntos C_1, C_2 está dada por el conjunto C_3

$$C_3 = C_1 - C_2$$

El marco teórico aquí definido, es de fundamental importancia cuando se caracteriza el área de trabajo de los robots y para plantear el marco teórico de la evasión de obstáculos desarrollado en el capítulo III.

A.3 Espacios vectoriales y transformaciones lineales.

Se presenta en esta parte las bases conceptuales de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

A.3.1 Estructuras algebraicas.

Definición A.3.1.1 Sea X un conjunto y $*$: $X \times X \rightarrow X$ una operación binaria. La pareja $(X, *)$ es un grupo si:

- 1 Ley asociativa: $x *(y *z) = (x *y) *z \quad \forall x,y,z \in X,$
- 2 Existencia de la identidad: $\forall x \in X,$ existe $l \in X,$ tal que:

$$x * l = x,$$

- 3 $\forall x \in X$ existe un $x^{-1} \in X$ tal que: [A.17]

$$x * x^{-1} = l$$

Definición A.3.1.2 El grupo $(X, *)$ es un grupo conmutativo ó abeliano si:

$$x * y = y * x, \quad \forall x,y \in X, \quad \text{[A.18]}$$

Definición 1.3.1.3 Sea X un conjunto y $\oplus : X \times X \rightarrow X$, $*$: $X \times X \rightarrow X$ dos operaciones binarias. La terna $(X, \oplus, *)$ es un campo si:

- i) La pareja (X, \oplus) es un grupo conmutativo,
- ii) La pareja $(X, *)$ es un grupo conmutativo, excepto por la existencia del inverso con respecto a la operación $*$: $X \times X \rightarrow X$ del elemento nulo de la operación $\oplus : X \times X \rightarrow X$, además, las siguientes propiedades distributivas deben ser satisfechas:

$$x *(y \oplus z) = (x *y) \oplus (x *z), \quad [A.19]$$

$$(x \oplus y) *z = x *z + y *z.$$

A.3.2 Espacios vectoriales

Definición A.3.2.1 Sea (X, \oplus) un grupo conmutativo y sea $(\kappa, \oplus, *)$ un campo. La terna (X, \oplus, \bullet) es un espacio vectorial si existe una operación $\bullet : \kappa \times X \rightarrow X$, llamada multiplicación escalar tal que:

- 1) $x \oplus (-1 \bullet x) \equiv 0, \quad \forall x, 0 \in X, \quad [A.20]$
- 2) $\alpha \bullet (x \oplus y) \equiv \alpha \bullet x \oplus \alpha \bullet y, \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \kappa$
- 3) $\alpha \bullet (x * y) \equiv (\alpha \bullet x) * y, \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \kappa,$
- 4) $\alpha \bullet (\beta \bullet x) \equiv (\alpha \bullet \beta) \bullet x, \quad \forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa,$
- 5) $1 \bullet x \equiv x, \quad \forall x \in X.$

Donde -1 es el inverso con respecto a $\oplus : X \times X \rightarrow X$ de la identidad con respecto a $*$: $X \times X \rightarrow X$.

Definición A.3.2.2 Llamaremos base de un espacio n -dimensional X a cualquier conjunto $B = \{e_k\} \subset X$ generador de vectores linealmente independientes.

Definición A.3.2.3 Si el número de elementos de una base $B = \{e_k\}_{k=1}^m$ de un espacio vectorial tiene un número finito de elementos, entonces se dice que el espacio es de dimensión finita. El número de elementos de la base es llamado la dimensión del espacio vectorial.

A.3.3 Transformaciones lineales.

Definición A.3.3.1 Sean (X, \oplus) y (Y, \oplus) dos espacios vectoriales sobre el mismo campo κ .

La transformación $T: X \rightarrow Y$ es lineal si:

$$T(\alpha \cdot x \oplus \beta \cdot y) = \alpha \cdot T x \oplus \beta \cdot T y \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa. \quad [A.21]$$

Definición A.3.3.2 Sea $T: X \rightarrow Y$ lineal, entonces el conjunto,

$N_T = \{u \in X : Tu = 0\} \subset X$ es llamado el núcleo de $T: X \rightarrow Y$. [A.22]

El conjunto

$$R_T = \{v \in Y : \text{existe algún } u \in X, \text{ tal que } v = Tu\} \subset Y,$$

es llamado el rango de $T: X \rightarrow Y$.

Definición A.3.3.3 La transformación $T: X \rightarrow Y$ es uno a uno si

$$Tx = Ty \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X. \quad [A.23]$$

Definición A.3.3.4 La transformación $T: X \rightarrow Y$ es sobre si:

$$R_T = Y. \quad [A.24]$$

Definición A.3.3.5 La transformación $T: X \rightarrow Y$ es un isomorfismo si T es lineal, uno a uno y sobre.

Definición A.3.3.6 Sea X un espacio vectorial sobre κ . Un tensor de segundo orden es una transformación lineal $T: X \rightarrow X$.

Definición A.3.3.7 Sea X un espacio vectorial sobre el campo κ , el conjunto definido por:

$$L(X, X) \equiv \{ T: X \rightarrow X, T \text{ lineal} \}$$

con la estructura algebraica definida por

- i) $(S + W) x = S x + W x, \quad \forall S, W \in L(X, X), x \in X$ [A.25]
 ii) $\alpha \bullet (S) x = \alpha \bullet (S x) \quad \forall \alpha \in \kappa, S \in L(X, X), x \in X$

es un espacio vectorial real y es llamado el espacio de tensores de segundo orden.

Definición A.3.3.8 Sea X un espacio vectorial sobre κ . La transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle: X \times X \rightarrow \mathfrak{R}$ es un producto interno si:

- 1) $\langle x, y \rangle \equiv \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in X, \quad [A.26]$
 2) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle \equiv \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \quad \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \kappa,$
 3) $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X,$
 $\langle x, x \rangle = 0, \quad x = 0$

Definición A.3.3.9 Sea X un espacio vectorial sobre κ . La función $n: X \rightarrow \mathfrak{R}^+$ es una norma en X si:

- 1) $n(x) \geq 0, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad n(x) = 0 \text{ si y sólo si } x = 0$
 2) $n(x \otimes y) \leq n(x) \otimes n(y) \quad \forall x, y \in X, \quad [A.27]$
 3) $n(\alpha \bullet x) = \alpha \bullet n(x) \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathfrak{R}^+,$

Definición A.3.3.10 Sean $x, y \in X$, entonces la transformación $x \otimes y: X \rightarrow X$ definida por :

$$(x \otimes y)z = \langle y, z \rangle x \quad [A.28]$$

es llamado el producto tensorial de x, y .

Definición A.3.3.11 Las componentes cartesianas del tensor $S \in L(X, X)$ se definen por:

$$S_{ij} = e_i \bullet S e_j \quad [A.29]$$

Definición A.3.3.12 La traza de la transformación $S: X \rightarrow X$, se define por:

$$\text{tr } S \equiv S_{ii}, \quad [A.30]$$

Definición A.3.3.13 La transformación $Q: X \rightarrow X$ es ortogonal si:

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in X \quad [A.31]$$

Definición A.3.3.14 Sean $S \in L(X, X)$ y $W \in L(X, X)$, la función $\bullet: L(X, X) \times L(X, X) \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por:

$$S \bullet T = \text{tr}(S^T W), \quad [A.32]$$

es un producto interno en $L(X, X)$.

Definición A.3.3.15 Sea $R: X \rightarrow X$ una transformación ortogonal. Se dice que R es una rotación si:

$$\det R > 1 \quad [A.33]$$

Si el $\det R < 1$ se dice que R es una reflexión.

Definición A.3.3.16 Sea $R: X \rightarrow X$, una rotación, el conjunto

$$E_Q \equiv \{x \in X: x = Rx\}, \quad [A.34]$$

es llamado el eje de la rotación de R.

Definición A.3.3.17 Sean $u, v \in X$, el producto vectorial de los vectores u y v se define por:

$$w = u \times v = \varepsilon_{ijk} u_i v_j e_k, \quad [A.35]$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si algún índice se repite,} \\ 1 & \text{si los índices siguen una permutación par de } i,j,k, \\ -1 & \text{si los índices siguen una permutación impar de } i,j,k. \end{cases}$$

Definición A.3.3.18 Un escalar w es un eigenvalor de un tensor $S : X \rightarrow X$ si existe un vector \underline{e} tal que:

$$S\underline{e} = w\underline{e}, \quad \forall \underline{e} \in X \quad [A.36]$$

A.4 El álgebra de Cuaterniones[6].

Para modelar sistemas de multicuerpos rígidos se han desarrollado diversas herramientas matemáticas, por ejemplo en la década de los años cuarentas se implementó una técnica de modelación para describir los movimientos geométricos de cuerpos rígidos llamados parámetros de Denavit - Hartenberg, así, los cambios de base se modelan mediante matrices trigonométricas, en los últimos 40 años la robótica a fundamentado sus modelaciones en esta técnica, en tanto, los mecanismos se modelan con la función exponencial compleja, muchos sistemas mecánicos también se modelan con los números imaginarios dejando muchos vacíos en la estructura matemática y en la interpretación de los movimientos. El siglo pasado Sr. Hamilton desarrolló los llamados Cuaterniones desde un punto de vista geométrico pero fué hasta principios de los años noventas de éste siglo cuando en Francia el Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique publicó un artículo llamado Quaternion: Une Representation Parametrique Systematique De Rotations Finies Partie 1: Le Cadre Théorique.(Luis Reyes Avila), donde se presenta una forma paramétrica de representar las rotaciones. Así, los cambios de base son

representados mediante dos operaciones binarias. Se plantea una transformación lineal que permite representar de forma adecuada la física de los sistemas mecánicos.

En esta parte, se presenta un resumen de este reporte(INRIA) con el fin de mostrar la sistematización del álgebra de Cuaterniones, en la primera parte se presenta la estructura algebraica en \mathfrak{R}^4 que permitirá identificar la estructura de los Cuaterniones(Q) como un grupo multiplicativo no conmutativo, y se mostrará igualmente que Q es un espacio vectorial normado. En la segunda parte definiremos una transformación lineal $\rho(p, \bullet): Q \rightarrow Q$, $p \in Q$ fijo, que preserva el producto interno y en donde la representación matricial, permite identificar un grupo de Lie de transformaciones ortogonales propias que representan en la mecánica las rotaciones finitas de cuerpos rígidos. En la tercera parte se encontrarán algunos resultados importantes de la representación $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$, $p \in Q$ fijo concerniente a la composición de rotaciones. En la cuarta parte se introducirán la forma paramétrica de los valores característicos asociados a la matriz de rotación, y finalmente se estudiará las soluciones del problema cinemático inverso de cuerpos rígidos.

Las siguientes notaciones serán utilizadas en el desarrollo en esta parte:

- 1 Sea $V = \mathfrak{R}^n$, $n=1,2,3,4$. Un espacio vectorial de dimensión n.
- 2 $A(V,V) \equiv \{ A : L(V,V) : A = -A^T \}$ = Espacio vectorial de tensores antisimétricos orden 2.
- 3 $S(V,V) \equiv \{ A : L(V,V) : A = A^T \}$ = Espacio vectorial de tensores simétricos orden 2
- 4 $M_{n \times m} = \{ M : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n : M \text{ es una matriz real de orden } n \times m \}$,
- 5 $Q \equiv$ Espacio Vectorial de Cuaterniones

Se definen dos operaciones binarias en \mathfrak{R}^4 , una aditiva $\oplus : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ y una multiplicativa $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$, donde los conjuntos (\mathfrak{R}^4, \oplus) y $(\mathfrak{R}^4, *)$ forman un grupo aditivo conmutativo y un grupo multiplicativo no conmutativo. También definiremos una multiplicación escalar $\bullet : \mathfrak{R} \times Q \rightarrow Q$ y un producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle : Q \times Q \rightarrow \mathfrak{R}$, mediante tal estructura el conjunto $Q = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno llamado el espacio vectorial de Cuaterniones.

Sea el conjunto en \mathfrak{R}^4 el cual se definen dos operaciones binarias $\oplus : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ y $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$. Esto es,

$$i) \quad (a,b,c,d) \oplus (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a+\alpha, b+\beta, c+\gamma, d+\delta)$$

$$ii) \quad (a,b,c,d) * (\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta, a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma, a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta, a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha), \quad \forall (a,b,c,d), (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathfrak{R}^4. \quad [A.37]$$

La operación $\oplus : \mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ es la suma usual en \mathfrak{R}^4 y es bien conocido que el conjunto (\mathfrak{R}^4, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo. Además las operaciones anteriores satisfacen lo siguiente:

Teorema A.4.1 El conjunto $Q \equiv (\mathfrak{R}^4, \oplus, *)$ es un cuerpo no conmutativo.

Demostración:

1) La operación $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ es asociativa, dado $p,q,s \in Q$, tal que $p=(a,b,c,d)$, $q=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ y $s=(x,y,z,w)$, entonces

$$p*(q*s) = (p*q)*s.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} p*(q*s) &= ((a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)x - (a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)y - (a\gamma-b\delta-c\alpha+d\beta)z - (a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)w, \\ &\quad (a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)x + (a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)y - (a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)z - (a\gamma-b\delta-c\alpha+d\beta)w, \\ &\quad (a\gamma-b\delta+c\alpha-d\beta)x + (a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)y + (a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)z - (a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)w, \\ &\quad (a\delta+b\gamma-c\beta+d\alpha)x + (a\gamma-b\delta+c\alpha+d\beta)y + (a\beta+b\alpha+c\delta-d\gamma)z - (a\alpha-b\beta-c\gamma-d\delta)w) = \\ &= (p*q)*s. \end{aligned}$$

2) El elemento $1=(1,0,0,0) \in Q$ es tal que : $1*p=p*1=p, \forall p \in Q$, esto es, 1 es el elemento neutro de la multiplicación en Q .

- 3) Para toda $p \in Q$, $p \neq (0,0,0,0)$, existe un $p' \in Q$ tal que $p * p' = I$, donde p' es el inverso multiplicativo, dado $p = (a,b,c,d)$, $p' = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, p y $q \in Q$, tal que $p * p' = I$. En efecto si $p * p^{-1} = I$, entonces

$$a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta = 0, a\beta + b\alpha + c\delta - d\gamma = 1, a\gamma - b\delta - c\alpha + d\beta = 1, a\delta + b\gamma - c\beta + d\alpha = 1,$$

resolviendo el sistema de ecuaciones se verifica que el elemento inverso es

$$p' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-c}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \frac{-d}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \right)$$

- 4) La operación $*$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ no es conmutativa. Dado $p = (0,1,0,0) \in Q$ y $q = (0,0,1,0) \in Q$ entonces $p * q = -q * p = (0,0,0,1)$.

- 4) Dados $p, q, s \in Q$, entonces son satisfechas las siguientes propiedades distributivas:

$$(p \oplus q) * s = p * s \oplus q * s,$$

$$p * (q \oplus s) = p * q \oplus p * s.$$

- 6) La operación \bullet : $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ definida por:

$$\alpha \bullet (a,b,c,d) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c, \alpha d), \forall (a,b,c,d) \in \mathfrak{R}^4, \alpha \in \mathfrak{R} \quad [A.38]$$

es una multiplicación escalar en Q . Por lo tanto la terna $(\mathfrak{R}^4, \oplus, \bullet)$ es un espacio vectorial real.

La transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle$: $\mathfrak{R}^4 \times \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}$, dada por:

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^3 p_i q_i \in \mathfrak{R} \quad [A.39]$$

es un producto vectorial interno en \mathfrak{R}^4 y la norma asociada es:

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{\frac{1}{2}} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{1}{2}}, \quad [A.40]$$

Por lo tanto $Q = (\mathfrak{R}^4, \oplus, *, \bullet, |\bullet|)$, es un espacio vectorial normado el cual se llamará Espacio Vectorial de Cuaterniones y sus elementos Cuaterniones.

Consideremos ahora los siguientes subespacios vectoriales de Q

$$\begin{aligned} Q_R &= (a, 0, 0, 0) : a \in \mathfrak{R} \subset Q, \\ Q_V &= ((0, b, c, d) : b, c, d \in \mathfrak{R}^3), \end{aligned} \quad [A.41]$$

donde Q_R y Q_V es un espacio vectorial real en \mathfrak{R} , luego entonces podemos representar el espacio Q como:

$$Q = Q_R \oplus Q_V = \{ p \in Q : p = p_R \oplus p_V, p_R \in Q_R, p_V \in Q_V \}.$$

entonces, las transformaciones $T_R : Q_R \rightarrow \mathfrak{R}$, $T_V : Q_V \rightarrow \mathfrak{R}^3$, definidas por :

$$\begin{aligned} T_R(a, 0, 0, 0) &= a \\ T_V(0, b, c, d) &= (b, c, d) \end{aligned}$$

son isomorfismos, por lo tanto, si $p = (a, b, c, d) \in Q$, entonces podemos expresar a p como sigue

$$p = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b, c, d). \quad [A.42]$$

Se observa entonces que la estructura algebraica definida por el teorema A.4.1 es una generalización a \mathfrak{R}^4 del álgebra de los números complejos, entonces se puede introducir el concepto siguiente:

Un Quaternion conjugado $\bar{p} \in \mathbb{Q}$ de $p = (a, b, c, d)$ está definido por

$$\bar{p} = (a, -b, -c, -d). \quad [\text{A.43}]$$

Teorema A.4.2 Dado $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{Q}$, $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{Q}$, entonces

$$1 \quad \overline{p \oplus q} = \bar{p} \oplus \bar{q},$$

$$2 \quad \overline{p * q} = \bar{q} * \bar{p}, \quad [\text{A.44}]$$

$$3 \quad p * \bar{p} = \bar{p} * p \in \mathbb{Q}_R.$$

Demostración:

Utilizando las propiedades de la adición y la definición de Quaternion conjugado se tiene:

$$1 \quad \overline{p \oplus q} = (p_0 + q_0, -p_1 - q_1, -p_2 - q_2, -p_3 - q_3) = \bar{p} \oplus \bar{q},$$

$$2 \quad \overline{p * q} = (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3, p_0 q_1 - p_1 q_0 - p_2 q_3 + p_3 q_2, \\ -p_0 q_2 + p_1 q_3 - p_2 q_0 - p_3 q_1, -p_0 q_3 - p_1 q_2 + p_2 q_1 - p_3 q_0) = \bar{q} * \bar{p},$$

$$3 \quad p * \bar{p} = (p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, 0, 0, 0) = p * \bar{p}.$$

La transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$\langle p, q \rangle = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^4 \quad [\text{A.45}]$$

La norma $\| \bullet \| : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ admite la siguiente representación:

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \text{TR} \{p * p\}^{1/2} \quad [A.46]$$

A.4.1 Representación paramétrica de las rotaciones.

El objetivo de esta parte es unificar y por consecuencia simplificar las diferentes formas utilizadas en la mecánica para representar paramétricamente las rotaciones finitas de cuerpos rígidos. Para este objetivo se define la siguiente transformación lineal :

Sea $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$, $p \in Q$, entonces:

$$\rho(p, q) = p * q * p^{-1} = \frac{1}{\|p\|^2} \bullet (p * q * \bar{p}), \quad \forall p, q \in Q, \quad [A.47]$$

Dicha transformación preserva el producto interno, la norma y el ángulo.

Teorema A.4.1.1 : La transformación $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$ es lineal, ortogonal y $\rho(p, q) \in Q_V, \forall q \in Q_V$.

Demostración:

Utilizando las propiedades asociativas y distributivas de la estructura algebraica de Q , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(p, q \oplus s) &= \frac{1}{\|p\|^2} \bullet \{p * ((q \oplus s) * \bar{p})\} = \frac{1}{\|p\|^2} \bullet \{p * ((q * \bar{p} \oplus s * \bar{p}))\} = \\ &= \frac{1}{\|p\|^2} \bullet \{p * (q * \bar{p}) \oplus p * (\bar{s} * \bar{p})\} = \rho(p, q) \oplus \rho(p, s), \quad \forall p, q, s \in Q. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(p, \alpha \bullet q) &= \frac{1}{\|p\|^2} \bullet \{p * (\alpha \bullet q) * \bar{p}\} = \frac{\alpha}{\|p\|^2} \{p * q * \bar{p}\} = \\ &= \alpha \bullet \rho(p, q), \quad \forall p, q, s \in Q. \quad \alpha \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Para probar la ortogonalidad debemos demostrar que:

$$\langle \rho(p, q), \rho(p, s) \rangle = \langle q, s \rangle \quad \forall q, s \in Q.$$

En efecto, utilizando los teoremas A.4.1, y A.4.2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \rho(p, q), \rho(p, s) \rangle &= \frac{1}{2\|p\|^4} \{ (p * q * \bar{p}) * (p * s * \bar{p}) \oplus (p * s * \bar{p}) * (p * q * \bar{p}) \} = \\ &= \frac{1}{2\|p\|^4} \{ (q * \bar{p}) * \bar{p} * (p * s * \bar{p}) \oplus ((s * \bar{p}) * p) * (p * q * \bar{p}) \} = \\ &= \frac{1}{2\|p\|^2} \{ p * (\bar{q} * s \oplus \bar{s} * q) * \bar{p} \} = \langle q, s \rangle. \end{aligned}$$

Observemos que si $Q = (0, q_1, q_2, q_3) \in Q_V$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(p, q) &= \frac{1}{\|p\|^2} (0, (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)q_1 + 2(p_1 p_2 - p_0 p_3)q_2 + 2(p_0 p_2 + p_1 p_3)q_3, \\ &\quad 2(p_0 p_3 - p_1 p_2)q_1 + (p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2)q_2 + 2(p_2 p_3 - p_0 p_1)q_3, \\ &\quad 2(p_1 p_3 - p_0 p_2)q_1 + 2(p_0 p_1 + p_2 p_3)q_2, (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)q_3) \in Q_V. \end{aligned}$$

En base al resultado anterior, podemos construir la matriz $M_{\rho(p, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$ asociada a la transformación [A.47]. Esto es,

Teorema A.4.1.2 La matriz $M_{\rho(p, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$ asociada a la transformación

$\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$, dada la base $B = \{e_j\}_{j=1}^4$ es :

$$M_{\rho(p, \bullet)} = \frac{1}{\|p\|^2} \begin{pmatrix} \|p\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 2(p_1 p_2 - p_3 p_0) & 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) \\ 0 & 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) & p_0^2 - p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 & 2(p_2 p_3 - p_0 p_1) \\ 0 & 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) & 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 + p_3^2 \end{pmatrix} \quad [A.49]$$

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q$$

Entonces la transformación $\rho(p, \bullet) : Q_V \rightarrow Q_V$, utiliza el isomorfismo entre Q_V y \mathfrak{R}^3 y se puede tener su representación en una matriz de orden 3 x 3. Para nuestro caso construiremos la matriz de $\rho(p, \bullet) : Q \rightarrow Q$ de orden 4 x 4 respecto a la estructura algebraica de Q.

Dada la base $B = \{e_i \otimes e_j\}_{i,j=1}^4$ que es una base ortonormal del espacio $L(Q,Q)$, podemos tener la siguiente representación tensorial:

$$\begin{aligned} \rho(p, \bullet) = & \frac{1}{\|p\|^2} [\|p\|^2 e_1 \otimes e_1 + (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) e_2 \otimes e_2 + 2(p_1 p_2 - p_0 p_3) e_2 \otimes e_3 + \quad [A.50] \\ & + 2(p_0 p_2 + p_1 p_3) e_2 \otimes e_4 + 2(p_0 p_3 + p_1 p_2) e_3 \otimes e_2 + (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) e_3 \otimes e_3 + \\ & 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) e_3 \otimes e_4 + 2(p_1 p_3 - p_0 p_2) e_4 \otimes e_2 + 2(p_0 p_1 + p_2 p_3) e_4 \otimes e_3 + \\ & + (p_0^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2) e_4 \otimes e_4] \end{aligned}$$

Teorema A.4.1.3 La transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q,Q)$ puede tomar la representación siguiente:

$$\rho(p, \bullet) = I + \frac{1}{\|p\|^2} [W \circ W + p_0 W] \quad [A.51]$$

donde $W \in A(Q,Q)$ y

$$W = -p_3 e_2 \otimes e_3 + p_2 e_2 \otimes e_4 + p_3 e_3 \otimes e_2 - p_1 e_3 \otimes e_4 - p_2 e_4 \otimes e_2 + p_1 e_4 \otimes e_3. \quad [A.52]$$

Teorema A.4.1.4 La transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q,Q)$ puede tomar la forma siguiente:

$$\rho(p, \bullet) = \frac{1}{\|p\|^2} [\|p\|^2 \underline{I} - 2\|p\|^2 I_0 + 2 p_V \otimes p_V + 2p_0 W], \quad [A.53]$$

$P_V \in \mathfrak{R}^3$ es la parte vectorial de $p \in Q$ y la transformación $I_0 : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ es definida por :

$$I_0 = e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 + e_4 \otimes e_4$$

El teorema anterior muestra la representación de $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ en su parte simétrica y antisimétrica.

Teorema A.4.1.5 La transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ experimenta la forma siguiente:

$$\rho(p, \bullet) = I_R + F \quad [A.54]$$

donde

$$I_R = e_1 \otimes e_1 \text{ y}$$

$$F = \frac{1}{\|p\|^2} [p_0^2 I_0 + W \circ W + p_V \otimes p_V + 2p_0 W].$$

La transformación $F \in L(\mathfrak{R}^4, \mathfrak{R}^4)$ permite identificar un isomorfismo apropiado de un elemento de un grupo de Lie de transformaciones ortogonales, de tal forma que:

$$SO(3) = \{T \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3) : T \circ T^T = T^T \circ T = \bar{I}, \det T = 1\}. \quad [A.55]$$

Tal grupo representa en mecánica las rotaciones finitas de cuerpos rígidos.

Teorema A.4.1.6 Los elementos de la matriz $M_{\rho(p, \bullet)} \in M_{4 \times 4}$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{33} \\ M_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{44} & M_{34} \\ M_{44} & 0 & -M_{24} \\ -M_{34} & M_{24} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{22} \\ M_{32} \\ M_{42} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{42} & M_{32} \\ M_{42} & 0 & -M_{22} \\ -M_{32} & M_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{23} \\ M_{33} \\ M_{43} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_{22} \\ M_{32} \\ M_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{43} & M_{33} \\ M_{43} & 0 & -M_{23} \\ -M_{33} & M_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{24} \\ M_{34} \\ M_{44} \end{pmatrix} \quad [A.56]$$

Teorema A.4.1.6 La transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ es tal que:

$$\rho(p, \bullet) \in \{T \in L(Q, Q) : T \circ T^T = T^T \circ T = \bar{I}, \det T = 1\}. \quad [A.57]$$

El tensor F es tal que;

$$F = \hat{F} \in SO(3), \quad [A.58]$$

Luego entonces, dada $\{e_i\}_{i=1}^3$ la base canónica en \mathfrak{R}^3 tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{F} = & M_{22} e_1 \otimes e_1 + M_{23} e_1 \otimes e_2 + M_{24} e_1 \otimes e_3 + M_{32} e_2 \otimes e_1 + M_{33} e_2 \otimes e_2 + \\ & + M_{34} e_2 \otimes e_3 + M_{42} e_3 \otimes e_1 + M_{43} e_3 \otimes e_2 + M_{44} e_3 \otimes e_3. \end{aligned}$$

A.4.2 Composición de las rotaciones.

Teorema A.4.2.1 La transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ es tal que:

$$\rho(p, \bullet)^n = I_R + F^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

y

$$F = \frac{1}{\|p\|^2} [p_0^2 I_0 + p_V \otimes p_V + W \circ W + 2p_0 W], \quad [A.59]$$

$$I_R = e_1 \otimes e_1$$

Teorema A.4.2.2 La siguiente expresión se satisface para $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$,

$$\begin{aligned} \rho(p, \bullet)^2 = I_R + \frac{1}{\|p\|^4} [p_0^4 I_0 + (2p_0^2 + \|p_v\|^2) p_v \otimes p_v + (6p_0^2 - \|p_v\|^2) W^2 + \\ + 4p_0(p_0^2 - \|p_v\|^2) W] \end{aligned} \quad [A.60]$$

A.4.3 Valores característicos de las rotaciones.

En esta parte determinaremos los valores característicos asociados a la transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$, de la definición [1.47] y $\hat{F} \in SO(3)$ se deduce la ecuación característica:

$$\det (M_{\rho(p, \bullet)} - \lambda I) = \frac{1}{\|p\|^8} (1 - \lambda) \det (\hat{F} - \lambda I_0) = 0 \quad [A.61]$$

De la ecuación anterior podemos notar que un valor característico de $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ es $\lambda_1 = 1$, y los otros tres valores se obtienen a partir de la siguiente ecuación:

$$-\lambda^3 + (\text{tr } \hat{F}) \lambda^2 - \frac{1}{2} [(\text{tr } \hat{F})^2 - \text{tr } (\hat{F}^2)] \lambda + 1 = 0, \quad [A.62]$$

donde $\text{tr } \hat{F}$ representa la traza de \hat{F} y el $\det \hat{F} = 1$.

Teorema A.4.3.1 Los valores característicos de $\hat{F} \in SO(3)$ son:

$$\lambda_2 = 1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{1}{\|p\|^2} ((p_0^2 - \|p_v\|^2) \pm 2p_0 \|p_v\|) \quad [A.63]$$

La ecuación [A.62] puede escribirse de la forma siguiente:

$$\lambda^3 + (\text{tr } \hat{F}) \lambda^2 - (\text{tr } \hat{F}) \lambda - 1 = 0, \quad [A.64]$$

De la ecuación anterior podemos deducir fácilmente que $\lambda_2=1$ es una raíz. El espacio característico de este valor característico es aplicado en la mecánica y representa el eje de la rotación de $\hat{F} \in SO(3)$. Luego entonces los demás valores característicos son soluciones de la ecuación :

$$\lambda^2 - (1 - \text{tr } \hat{F})\lambda + 1 = 0 \quad [A.65]$$

Las raíces restantes $\lambda_{3,4}$ son complejas y están dadas por :

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{\|p\|^2} ((p_0^2 - \|p_v\|^2) \pm 2p_0 \|p_v\|). \quad [A.66]$$

Notemos que si $p_0 = 0$, entonces los valores característicos son distintos:

$$\lambda_1 = \|p_v\|^2, \lambda_2 = 1, \lambda_{3,4} = (-1 \pm 0) = -1, \quad [A.67]$$

Observemos que $-1 \in \mathfrak{R}$ es un valor característico de multiplicidad 2. Dado $p \in Q$ y $p_v \in Q_v$ donde p_v es un vector característico de valor característico $1 \in \mathfrak{R}$ de la transformación $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$. Definiremos a continuación el siguiente teorema:

Teorema A.4.3.2 Sea $p \in Q$, entonces :

$$\rho(p, p_v) = p_v. \quad [A.68]$$

Donde $p_v \in Q_v$ es la parte vectorial del Quaternion $p \in Q$.

Demostración :

El resultado es obtenido a partir de la definición [1.47] de $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$, entonces:

$$\rho(p, \bullet) = \frac{1}{\|p\|^2} (p * p_v * \bar{p}) = (0, \|p\|^2 p_1, \|p\|^2 p_2, \|p\|^2 p_3) = p_v.$$

A.4.4 El problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos.

En esta parte, desarrollaremos la metodología para encontrar los parámetros de Euler , luego entonces el problema inverso de la cinemática de cuerpos rígidos experimenta la forma siguiente :

$$\text{Dado } \theta \in [0, n\pi], n \in \mathfrak{R}, w \in \mathfrak{R}^3, \|w\| = 1$$

$$\text{y } p \in Q \text{ tal que } \rho(p, w) = w \quad [A.69]$$

donde w representa el eje de la rotación y θ el parámetro de cantidad de rotación, encuentre las relaciones entre w y θ en función de $q \in Q$.

Para esto, emplearemos funciones trigonométricas utilizadas en mecánica para representar las rotaciones de $\hat{F} \in SO(3)$.

Recordemos que $p \in Q$, entonces la parte vectorial es un vector característico de $\rho(p, \bullet) \in L(Q, Q)$ de un valor característico unitario, luego entonces, el espacio característico de Q_ε de valor característico $\lambda = 1$ se define por :

$$Q_\varepsilon = \{q \in Q : \rho(p, q) = q\} \cup \{0\}, \quad [A.70]$$

y el complemento ortogonal de Q_ε , es:

$$Q_\varepsilon^\perp = \{p \in Q : \langle p, q \rangle = 0, \forall q \in Q_\varepsilon\}. \quad [A.71]$$

Teorema A.4.4.1 Sea $u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in Q_\varepsilon^\perp, \|u\| = 1$, entonces :

$$\text{Cos } \theta = \frac{1}{\|u\|^2} \langle u, \rho(p, u) \rangle = \frac{1}{\|p\|^2} \{ p_0^2 + \|p_v\|^2 (2u_0^1 - 1) \}, \quad [A.72]$$

$$\text{Sen } \theta = (\pm) 2 \frac{\|p_v\|}{\|p\|} \sqrt{(1-u_0^2)(p_0^2 + u_0^2 \|p_v\|^2)}.$$

Corolario A.4.4.1 Sea $u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in Q_v$, entonces :

$$\text{Cos } \theta = \frac{1}{\|p\|^2} \{p_0^2 - \|p_v\|^2\}, \quad \text{Sin } \theta = (\pm) 2 \frac{\|p_v\|}{\|p\|} p_0 \quad [A.73]$$

$$u \times \rho(p, u) = (\pm) \frac{1}{\|p\|} \text{Sin } \theta \underline{e}$$

$$\underline{e} = \frac{1}{\|p_v\|} p_v .$$

Teorema A.4.4.2 Sea $\theta \in [0, n\pi]$, $n \in \mathfrak{R}$, $w \in \mathfrak{R}^3$, $\|w\| = 1$

y $p = (p_0, p_1, p_3, p_4) \in Q$

tal que $\rho(p, w) = w$, $p_0 \in \mathfrak{R} - \{0\}$, entonces :

$$p_v = (\pm) \frac{\|p\|^2}{2p_0} \text{Sin } \theta w, \text{ es tal que } \rho(p, w) = w. \text{ Luego entonces } p_0 \in \mathfrak{R} - \{0\}$$

satisface la ecuación :

$$4 p_0^4 - 4 p_0^2 \|p\|^2 \text{Cos } \theta - \|p\|^4 \text{Sin}^2 \theta = 0 \quad [A.74]$$

Demostración:

A partir de del teorema A.4.3.2 para $p \in Q$ se obtiene $\rho(p, p_v) = p_v$.

También por la linealidad de $\rho(p, \bullet)$ se obtiene el resultado siguiente:

$$\rho(p, p_v) = (\pm) \frac{\|p\|^2}{2p_0} \sin \theta \quad \rho(p, w) = p_v = (\pm) \frac{\|p\|^2}{2p_0} \sin \theta$$

Por otro lado, $\rho(p, p_v) = w$. Del corolario A.4.4.1 se obtiene

$$p_0^2 = \|p\|^2 \cos \theta + \|p_v\|^2 = \|p\|^2 \cos \theta + \frac{\|p\|^4}{4p_0^2} \sin^2 \theta$$

entonces,

$$4 p_0^4 - 4 p_0^2 \|p\|^2 \cos \theta - \|p\|^4 \sin^2 \theta = 0$$

Teorema A.4.4.3 Las raíces reales de la ecuación de cuarto grado

$$4 p_0^4 - 4 p_0^2 \|p\|^2 \cos \theta - \|p\|^4 \sin^2 \theta = 0$$

son,

$$p_{01} = \|p\| \cos \frac{\theta}{2}, \quad p_{02} = -\|p\| \cos \frac{\theta}{2}, \quad [A.75]$$

Demostración:

Sea $\omega = p_0^2$, entonces la ecuación de cuarto grado puede ser escrita de la forma siguiente:

$$4 \omega^2 - 4 \omega \|p\|^2 \cos \theta - \|p\|^4 \sin^2 \theta = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \|p\|^2 (\cos \theta + 1), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \|p\|^2 (\cos \theta - 1)$$

y,

$$\rho_0 = (\pm) \|p\| \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}} = (\pm) \|p\| \cos \frac{\theta}{2}. \quad [A.76]$$

En base al resultado anterior se observa que las singularidades se presentan a lo largo de $\cos \frac{\theta}{2} = 0$, entonces $\theta \in \{\pm n\pi, 1, 3, \dots\}$. Entonces con la combinación de resultados de los teoremas anteriores se obtienen los resultados siguientes:

$$\rho_0 = \|p\| \cos \frac{\theta}{2}, \quad \rho_V = \rho_0 = \|p\| \sin \frac{\theta}{2} w, \quad [A.77]$$

y son llamados los parámetros de Euler.

A.5 Movimientos [7].

A.5.1 Cinemática de los medios continuos.

Sea ε un espacio de puntos euclidiano tridimensional. Un cuerpo β es una región regular posiblemente no acotada de ε . Los puntos $p \in \beta$ serán llamados puntos materiales y las subregiones acotadas de β serán llamadas partes. La función

$$f : \beta \subset \varepsilon \rightarrow f(\beta) \subset \varepsilon \text{ tal que,}$$

- 1 $f \in C^1(\beta, f(\beta))$ es uno a uno
- 2 $f^{-1} \in C^1(f(\beta), \beta)$
- 3 $\det \nabla f(p) > 0 \quad \forall p \in \beta$, donde $\nabla f : \beta \rightarrow L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$, [A.78]

es llamada una función de deformación del cuerpo β . Una deformación de gradiente constante, esto es, $\nabla f(p) = \nabla f(q)$, $\forall p, q \in \beta$ es llamada una deformación homogénea. El campo vectorial $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definido por

$$\mu(p) = f(p) - p, \quad p \in \beta, \quad [A.79]$$

es llamado el campo de desplazamientos del cuerpo β . Cuando $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ es constante, esto es, $\mu(p) = \mu(q)$, $\forall p, q \in \beta$, se dice que $f : \beta \rightarrow f(\beta)$ es una traslación. Los puntos $X \in f(\beta)$ serán llamados puntos espaciales y $x = f(p)$, $p \in \beta$, será el lugar geométrico que ocupa el punto material $p \in \beta$ en la configuración deformada $f(\beta)$.

Teorema A.5.1 Teorema de Descomposición Polar.

Sea $F \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$, $\det F > 0$. Entonces existen tensores positivos definidos simétricos $U \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$, $V \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ y una rotación $R \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ tal que

$$F = R \circ U = V \circ R. \quad [A.80]$$

Además esta descomposición es única y

$$U = (F^T \circ F)^{1/2}, V = (F \circ F^T)^{1/2}. \quad [A.81]$$

La representación $F = R \circ U$ es llamada la descomposición polar derecha de $F \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ y $F = V \circ R$ es la descomposición polar izquierda.

Otro resultado importante está dado en el siguiente teorema:

Teorema A.5.2 Sea Γ una region abierta ó cerrada y $f : \Gamma \rightarrow v$ suave, donde v es un conjunto de puntos ó un espacio vectorial. Sea $F = \nabla f : \Gamma \rightarrow L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ constante. Entonces,

$$f(x) = f(y) + F(x-y), \forall x, y \in \Gamma. \quad [A.82]$$

Sean $p, q \in \beta$. Entonces el valor de $f : \beta \rightarrow f(\beta)$ en $p \in \beta$ puede ser representado como

$$f(p) = f(q) + F(q)(p-q) + O(p-q), \forall p, q \in \beta, \quad [A.83]$$

donde $F(q) = \nabla f(q)$. Esto es, en una vecindad de un punto $q \in \beta$ y dentro de un error de orden $O(p-q)$ una deformación se comporta como una deformación homogénea. Además por [A.80] y el teorema A.5.1, tenemos que

$$F(q) = R(q) \circ U(q) = V(q) \circ R(q), \quad q \in \beta. \quad [A.84]$$

Entonces, $R(q) \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ es una medida local de las rotaciones rígidas de puntos cercanos a $q \in \beta$ y $U(q), V(q) \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ es una medida de los alargamientos en una vecindad de $q \in \beta$.

A.5.2 Deformaciones rígidas

En esta parte estudiaremos un caso particular de las deformaciones homogéneas definidas anteriormente. Este caso corresponde a las deformaciones rígidas. La deformación $f : \beta \rightarrow f(\beta)$ es rígida si

$$|f(p) - f(q)| = |p - q|, \quad \forall p, q \in \beta. \quad [A.85]$$

Se tiene para este tipo de deformaciones es el siguiente resultado:

Teorema A.5.2.1 Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1 $f : \beta \rightarrow f(\beta)$ es una deformación rígida
- 2 $f : \beta \rightarrow f(\beta)$ admite la siguiente representación

$$f(p) = f(q) + R(p-q) \quad \forall p, q \in \beta,$$

con $R \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ ortogonal, $\det R = 1$

- 3 $F(p) \in L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ es una rotación, $\forall p \in \beta$
- 4 $U(p) = I \quad \forall p, q \in \beta.$ [A.86]

El campo vectorial $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ admite la representación siguiente

$$\mu(p) = \mu(q) + W(p-q) \quad \forall p, q \in \beta, \quad [A.87]$$

donde $W \in A(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$, es llamado el campo de desplazamientos rígidos infinitesimales. De hecho,

$$\mu(p) = \mu(q) + \omega \times (p-q) \quad \forall p, q \in \beta, \quad [A.88]$$

donde $\omega \in \mathfrak{R}^3$ es el vector axial asociado a $W \in A(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$. Para este tipo de desplazamientos se tiene el resultado siguiente,

Teorema A.5.2.2 Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- 1 $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ es un desplazamiento rígido infinitesimal
- 2 $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ posee la propiedad de proyección, esto es,

$$(p-q) \cdot [\mu(p) - \mu(q)] = 0 \quad \forall p, q \in \beta.$$

$$3 \quad \nabla \mu(p) \in A(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3), \quad \forall p \in \beta.$$

$$4 \quad E(p) = 0 \quad \forall p \in \beta. \quad [A.89]$$

y $E : \beta \rightarrow L(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3)$ es la parte simétrica del campo de desplazamientos.

Observemos que, de acuerdo a [A.87], el campo de desplazamiento $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ asociado a una deformación rígida tiene la forma siguiente:

$$\mu(p) = \mu(q) + (R-I)(p-q) \quad \forall p, q \in \beta. \quad [A.90]$$

Para el caso en que la rotación rígida sea infinitesimal, esto es ,

$$R = I + W, \quad W \in A(\mathfrak{R}^3, \mathfrak{R}^3), \quad [A.91]$$

entonces [A.87] toma la forma particular [A.90]. Esto es, el campo vectorial de desplazamientos $\mu : \beta \rightarrow \mathfrak{R}^3$ asociado a una rotación rígida infinitesimal es un campo de desplazamientos rígidos infinitesimales e inversamente.

A.5.3 Movimientos de medios continuos.

Sea β un cuerpo. Un movimiento de β es una función $X \in C^3(\beta \times \mathfrak{R}^+, \varepsilon)$ con $X(\bullet, t) : \beta \rightarrow \varepsilon$ una deformación y $t \in \mathfrak{R}^+$. Se denotará por $\mathbf{x} = X(p, t)$ al lugar geométrico que ocupa el punto material p en el tiempo t . También $\beta_t = X(\beta, t)$ es la región del espacio que ocupa el cuerpo β en el tiempo t .

El conjunto definido por

$$\tau = \{ (\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \beta_t, t \in \mathfrak{R}^+ \}, \quad [A.92]$$

es llamado la trayectoria del cuerpo β . Puesto que $X(\bullet, t) : \beta \rightarrow \beta_t$ es uno a uno existe el inverso $\Psi(\bullet, t) : \beta_t \rightarrow \beta$ tal que

$$X(\Psi(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}, \quad \Psi(X(p, t), t) = p. \quad [A.93]$$

Además, dado $(\mathbf{x}, t) \in \tau$, $p = \Psi(\mathbf{x}, t)$ es un punto material que ocupa el lugar geométrico \mathbf{x} en el tiempo t . La transformación $\Psi : \tau \rightarrow \beta$ es llamada la transformación de referencia del movimiento.

Introduciremos en esta parte, una terminología que será de utilidad para los desarrollos. Se dice que ϕ es un campo material si $\phi : \beta \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \underline{U}$, donde \underline{U} es un conjunto de puntos ó un espacio vectorial. El campo φ es un campo espacial si $\varphi : \tau \rightarrow \underline{U}$.

La representación espacial del campo material $\phi : \beta \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \underline{U}$ se define por,

$$\phi_e = (\mathbf{x}, t) = \phi(p, t) \Big|_{p = \Psi(\mathbf{x}, t)} \quad [A.94]$$

Asimismo, la representación material del campo espacial $\varphi : \tau \rightarrow \underline{U}$ está definida por

$$\varphi_m = \varphi(p, t) \Big|_{x=X(p, t)} \quad [A.95]$$

Observemos que $\phi_e: \tau \rightarrow \underline{U}$ y $\varphi_m = \beta \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \underline{U}$. Con estas ideas se está en posibilidades de introducir los siguientes conceptos:

La velocidad y la aceleración del punto material p en el tiempo $t \in \mathfrak{R}^+$ se definen por

$$\dot{X}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} X(p, t) \quad [A.96]$$

$$\ddot{X}(p, t) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{X}(p, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(p, t)$$

Observemos que $\dot{X}: \beta \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^3$, $\ddot{X}: \beta \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \mathfrak{R}^3$. La representación espacial de estos campos es de acuerdo a [A.94] y [A.95] es la siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{v}(x, t) &\equiv (\dot{X}_e)(x, t) = \dot{X}(p, t) \Big|_{p=\Psi(x, t)}, \\ \underline{a}(x, t) &= (\ddot{X}_e)(x, t) = \ddot{X}(p, t) \Big|_{p=\Psi(x, t)}. \end{aligned} \quad [A.97]$$

Ahora se define el siguiente concepto. El campo vectorial $\underline{r}: \tau \rightarrow \mathfrak{R}^3$ definido por

$$\underline{r}(x, t) = \underline{r}(x) = x - \underline{Q}, \quad (x, t) \in \tau. \quad [A.98]$$

es conocido como el vector de posición del lugar geométrico $x \in \beta_t$ en el tiempo t , con respecto al punto $\underline{Q} \in \varepsilon$.

A.5.4 Movimientos rígidos.

El objetivo en esta parte, es presentar la idea de movimientos rígidos. Al caracterizar tal tipo de movimientos en términos de la representación espacial del campo de velocidades y del tensor antisimétrico correspondiente, se arriverá al concepto de velocidad angular.

Sea $\delta : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ la función definida por

$$\delta(t) = |X(p,t) - X(q,t)| \quad \forall p, q \in \beta, \quad [\text{A.99}]$$

la cual representa la distancia en el tiempo $t \in \mathcal{R}^+$ entre los puntos materiales $p, q \in \beta$. El movimiento $X \in C^3(\beta \times \mathcal{R}^+, \varepsilon)$ es un movimiento rígido si:

$$\frac{\partial}{\partial t} |X(p,t) - X(q,t)| = 0 \quad \forall p, q \in \beta, t \in \mathcal{R}^+. \quad [\text{A.100}]$$

El teorema siguiente caracteriza los movimientos rígidos infinitesimales.

Teorema A.5.4.2.1 Sea $X \in C^3(\beta \times \mathcal{R}^+, \varepsilon)$ un movimiento y $\underline{v} : \tau \rightarrow \mathcal{R}^3$ el correspondiente campo de velocidades. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 $X \in C^3(\beta \times \mathcal{R}^+, \varepsilon)$ es rígido
- 2 Para todo tiempo $\underline{v}(\bullet, t) : \beta_t \rightarrow \mathcal{R}^3$ posee la forma de un desplazamiento rígido infinitesimal. Esto es,

$$\underline{v}(\mathbf{x}, t) = \underline{v}(\mathbf{y}, t) + \underline{W}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \beta_t, \quad [\text{A.101}]$$

donde $\underline{W}(t) : \mathcal{R}^+ \rightarrow \in A(\mathcal{R}^3, \mathcal{R}^3)$.

- 3 El campo tensorial gradiente de velocidades es antisimétrico. Esto es, $\underline{L} : \tau \rightarrow A(\mathcal{R}^3, \mathcal{R}^3)$.

Entonces el campo de velocidades en su representación espacial puede ser escrito en función del vector axial asociado al tensor antisimétrico $\underline{W}(t) : \mathcal{R}^+ \rightarrow \in A(\mathcal{R}^3, \mathcal{R}^3)$. Esto es,

$$\underline{v}(\mathbf{x}, t) = \underline{v}(\mathbf{y}, t) + \underline{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \beta_t, t \in \mathcal{R}^+. \quad [\text{A.102}]$$

El campo vectorial $\underline{\omega} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ es conocido con el nombre de velocidad angular de β_t en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. Observemos también que $\forall \mathbf{x} \in \beta_t$,

$$\underline{\omega}(t) \times \underline{u} = \underline{W}(t) \underline{u} = \frac{1}{2} [\text{grad } \underline{v}(\mathbf{x}, t) - \text{grad } \underline{v}(\mathbf{x}, t)^T] \underline{u} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v}(\mathbf{x}) \times \underline{u}, \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3,$$

esto es, $\text{rot } \underline{v}(\mathbf{x}) = 2 \underline{\omega}(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. [A.103]

Teorema A.5.4.2.2 Sea $X \in C^3(\beta \times \mathbb{R}^+, \varepsilon)$ un movimiento rígido y $\underline{v} : \tau \rightarrow \mathbb{R}^3$ el correspondiente campo de velocidades. Entonces, si $\mathbf{y} \in \beta_t$,

$$\dot{\underline{v}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\underline{v}}(\mathbf{y}, t) + \dot{\underline{\omega}}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \underline{\omega}(t) \times [\underline{\omega}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \beta_t \quad \text{[A.104]}$$

donde $\underline{\omega} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la velocidad angular, y $\dot{\underline{\omega}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la aceleración angular de β_t en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$. Ahora se define el siguiente concepto. Sea β un cuerpo y $X \in C^3(\beta \times \mathbb{R}^+, \varepsilon)$ un movimiento rígido. El campo vectorial $\underline{k} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ rota con el cuerpo si:

$$\underline{k}(t) = \underline{Q}(t) \underline{k}(0). \quad \text{[A.105]}$$

siendo $Q(t)$ una rotación.

A.5.5 La órbita del punto material "p".

En esta parte definiremos el concepto de la órbita que describe el punto material $p \in \beta$ cuando una función arbitraria de puntos se asocia a una trayectoria.

Sea el conjunto definido en [A.92]

$$\tau = \{ (\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \beta_t, t \in \mathbb{R}^+ \},$$

la trayectoria que describe el punto material p en el tiempo t , y sea también la función $y = mx + b$ que representa la ecuación de una recta, entonces definiremos una transformación de la forma siguiente:

$$f : \varepsilon \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \tau \quad \text{[A.106]}$$

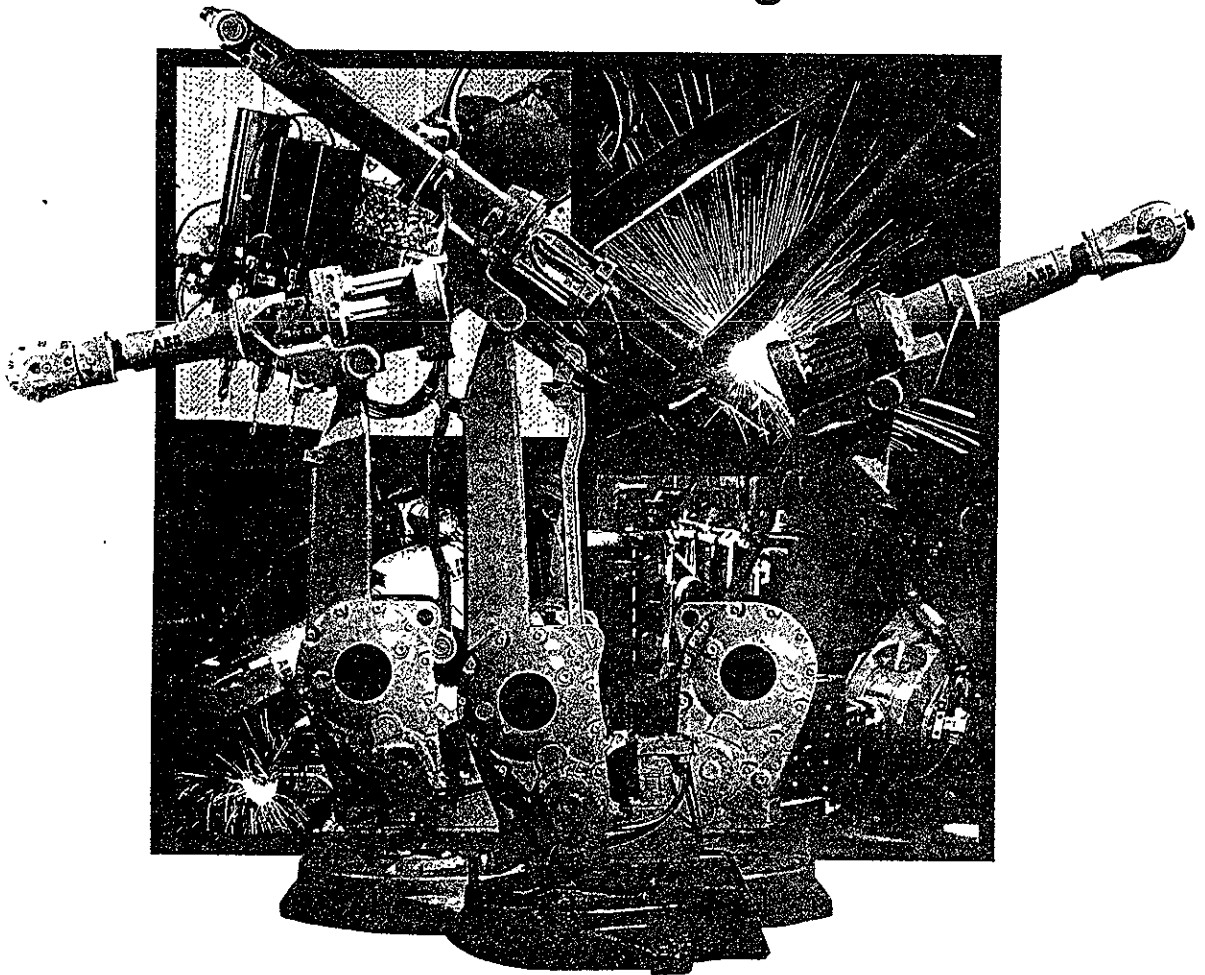
se dice que f parametriza a la función $y = mx + b$ si:

$$\begin{aligned}x &= t \\ y &= mt+b\end{aligned}\quad \forall x,y \in \varepsilon, t \in \mathfrak{R} \quad [\text{A.107}]$$

La forma de la parametrización involucra puntos y tiempos, entonces podemos asociar cualquier función a la trayectoria τ y se parametriza con la función f . Por ejemplo para una curva representada por $x^2 + y^2 = R^2$ que representa la ecuación de una circunferencia,

$$\begin{aligned}f &: \varepsilon \times \mathfrak{R}^+ \rightarrow \tau \\ x &= t \\ y &= \pm (R^2 - t^2)^{1/2}\end{aligned}\quad \forall x,y \in \varepsilon, t \in \mathfrak{R}^+ \quad [\text{A.108}]$$

**For cost effective
manufacturing**

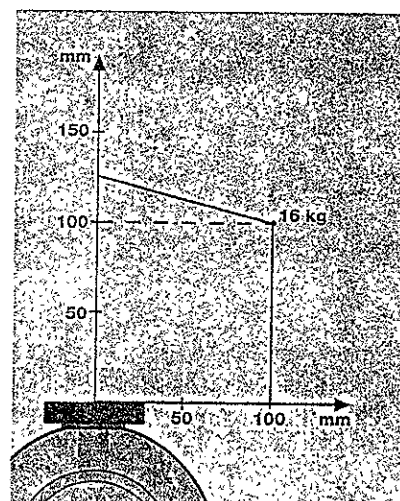
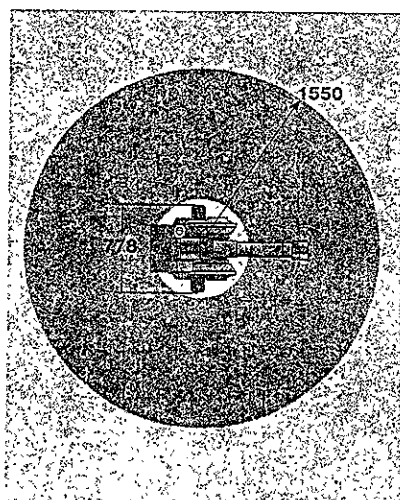
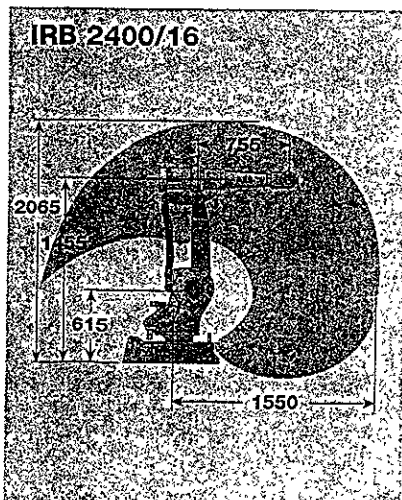
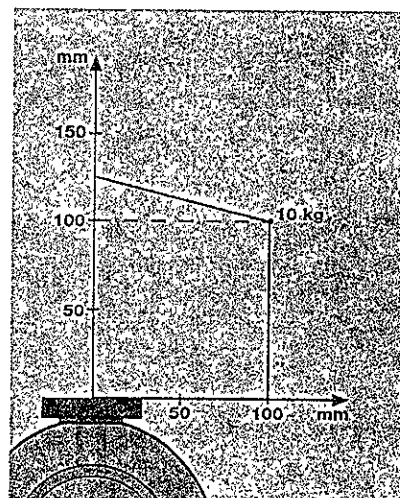
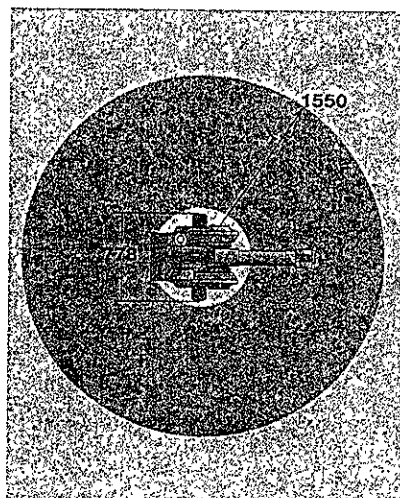
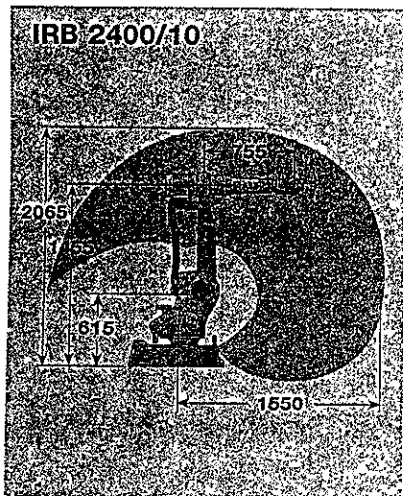
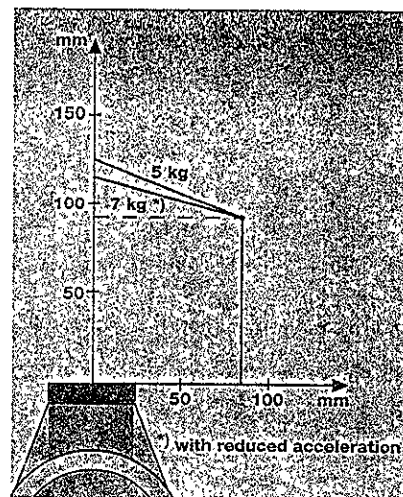
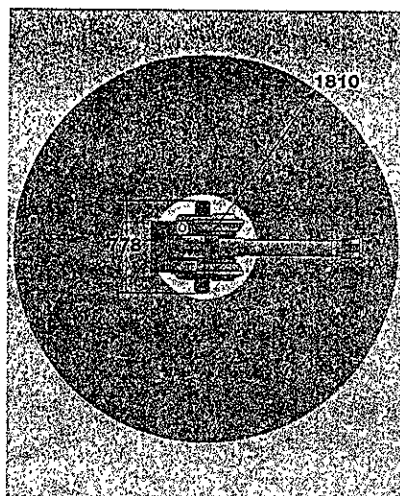
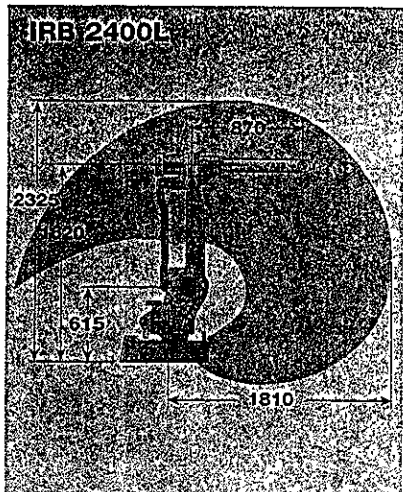


**IRB 2400L
IRB 2400/10, IRB 2400/16**

ABB Flexible Automation



Working range and load offset



Technical data

IRB 2400 industrial robot

SPECIFICATIONS

	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
Handling capacity	5-7 kg	10 kg	16 kg
Reach	1.8 m	1.5 m	1.5 m
Load offset	92/85 mm	100/100 mm	100/100 mm
<i>All three robots are available in sealed "F" version</i>			
Supplementary load			
Upper arm,			
-wrist end	1 kg	2 kg	2 kg
-rear end	10 kg	10 kg	10 kg
Base unit	35 kg	35 kg	35 kg

	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
Number of axes			
Robot manipulator	6	6	6
External devices	6	6	6

Integrated signal supply	23 poles, 50 V DC 10 poles, 250 V AC
--------------------------	---

Integrated air supply	Max. 8 bar
-----------------------	------------

Memory/Instructions	
Program memory	1-5 Mb, 3,000-12,000 instructions
Storage memory	0.5-5 Mb, 3,000-35,000 instructions
3.5" diskette drive	1.44 Mb, 15,000 instructions

PERFORMANCE

Positional repeatability	±0.06 mm
--------------------------	----------

	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
--	-----------	-------------	-------------

Working range

Positioning

Axis 1, Rotation	360°	360°	360°
Axis 2, Arm	200°	200°	200°
Axis 3, Arm	125°	125°	125°

Re-orientation

Axis 4, Wrist	370°	400°	400°
Axis 5, Bend	240°	240°	240°
Axis 6, Rotation	800°	800°	800°
Axis 6, Option	Unlimited	Unlimited	Unlimited

Max. speed

Positioning

Axis 1, Rotation	135°/s	135°/s	135°/s
Axis 2, Arm	135°/s	135°/s	135°/s
Axis 3, Arm	135°/s	135°/s	135°/s

Re-orientation

Axis 4, Wrist	310°/s	330°/s	330°/s
Axis 5, Bend	310°/s	330°/s	330°/s
Axis 6, Rotation	310°/s	400°/s	400°/s

ELECTRICAL CONNECTIONS

Supply voltage	200-600 V, 50/60 Hz
----------------	---------------------

Rated power, supply transformer	4 kVA
---------------------------------	-------

PHYSICAL

Dimensions	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
------------	-----------	-------------	-------------

Total height	1,731 mm	1,564 mm	1,564 mm
Manipulator bases	723x600 mm	723x600 mm	723x600 mm
Cabinet, H x W x D	950 x 800 x 540 mm		

Weight	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
--------	-----------	-------------	-------------

Robot manipulator	380 kg	380 kg	380 kg
Cabinet	240 kg	240 kg	240 kg

ENVIRONMENT

Ambient temperature	IRB 2400L	IRB 2400/10	IRB 2400/16
---------------------	-----------	-------------	-------------

Basic manipulator in operation	5°C to 45°C
Sealed version in operation	Surface temperature < 100°C
Cabinet	5°C to 52°C

Relative humidity	Max. 95%
-------------------	----------

Degree of protection	
Manipulator	
Basic version	IP 54
Sealed version "F"	IP 55/56/67
Control system	IP 54

Noise level	Max. 70 dB (A)
-------------	----------------

Safety	Double circuits, emergency stops, safety functions
--------	--

Emission	EMC/EMI-shielded
----------	------------------

USER INTERFACES

Operator's panel	In cabinet or external
------------------	------------------------

Programming unit	Portable with joystick and keypad. Display 16 lines x 40 characters. Windows style communication. Enabling device, 3 positions. All programming and hot-edit functions.
------------------	---

Languages	Choice between 10 national languages
-----------	--------------------------------------

Off-line programming	RRS and ProgramMaker
----------------------	----------------------

PC-based training tools	QuickTeach
-------------------------	------------

MACHINE INTERFACES

Digital inputs/outputs	96/96, 24 V DC, 110 V AC or 250 V AC
------------------------	--------------------------------------

Analogue inputs/outputs	4/4, ±10 V and ±20 mA
-------------------------	-----------------------

Remote I/O	Allen Bradley PLC
------------	-------------------

Serial channels	Three RS 232 and one RS 485
-----------------	-----------------------------

Computer link	Robot Application Protocol, based on MMS
---------------	--

Process interfaces	Media and signals on upper arm
--------------------	--------------------------------

Robot vision	OptiMaster
--------------	------------

Travel units	Integrated track motion
--------------	-------------------------

RobotWare SOFTWARE PRODUCTS

BaseWare	Superior robot performance and communication
----------	--

ProcessWare	Includes ArcWare, GlueWare etc.
-------------	---------------------------------

FactoryWare	Online PC-based, user-adapted functionality
-------------	---

DeskWare	Offline, PC-based user support including training, library, laboratory and programming
----------	--

Examples of ArcWare functionality	
-----------------------------------	--

Examples of signal interfaces	Laser sensor interface
-------------------------------	------------------------

	Control of power source and wire feed from robot pendant
--	--

	Status of arc, voltage, current, water, gas, wire-feed (DI)
--	---

	On/off of power, gas, wire-feed, error information (DO)
--	---

	Value of wire-feed velocity, voltage, current (AO)
--	--

Examples of functions	Process tuning
-----------------------	----------------

	Programming parameters
--	------------------------

	Execution
--	-----------

	Weld retry
--	------------

	Weld error report and log
--	---------------------------

	Arc start/stop
--	----------------

	Material preheating/cooling
--	-----------------------------

	Scrape start
--	--------------

	Crater filling
--	----------------

	Wire burnback
--	---------------

	Weave pattern
--	---------------

	Monitor arc/water/voltage/current/gas
--	---------------------------------------

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--

--	--



Data and dimensions may be changed without notice.

Flexible Automation Centers

407

Argentina ABB Brown Boveri S.A. 017654104 Australia ABB Industrial Pty Ltd, Lilydale 0397357222 Austria ABB Industrie GmbH Wien 01601093894 Benelux ASEA Brown Boveri N.V. Zaventem 027186311 Brazil ASEA Brown Boveri Ltda Osasco-SP 0117049111 Canada ASEA Brown Boveri Inc Burlington 09056810565 China ABB Flexible Automation Ltd Shanghai 02164855648 Czech Republic Asea Brown Boveri s.r.o Praha 02 67132277 Denmark ABB Energi&Industri A/S Odense 066147008 Finland ABB Service Oy Helsinki 0050691 France ABB Flexible Automation SA Ouen L'Aumône 0134402525 Preciflex Systems Beauchamp 0130404700 Germany ABB Flexible Automation GmbH Dietzenbach 060748390 Friedberg-Hessen 06031850 Langenfeld 0217379010 Hungary Asea Brown Boveri Ltd Budapest 012701555 India ASEA Brown Boveri Ltd Bangalore 0808395181 Italy ABB Robotica SpA Corsico MI 024502275 Japan ABB Industry KK Kobe 0789914505 Korea ASEA Brown Boveri Ltd Seoul 025283070 Malaysia ABB Industrial and Building Kuala Lumpur 039721888 Mexico ABB Sistemas Mexico 053281400 Norway ABB Flexible Automation AS Bryne 051489000 Poland Asea Brown Boveri Ltd Warsaw 0226581020 Portugal ABB Electrica Amadora 014169200 Spain ABB Flexible Automation SA Sant Quirze del Valleron 093703020 - 155 edition 2 August 1987

9 BIBLIOGRAFÍA

1. Miomir Vukobratovic´ , Introduction to robotics,
Springer-Verlang Berlin Hiedelberg 1989.
2. P Coiffet.; M. Chirouze, Elementos de Róbotica. Colección Ciencia Electrónica. Editorial Gustavo Gili, S.A. Barcelona 1986.
3. Méndez Canseco Mauricio C., Modelado Cinemático de Sistemas Mecánicos de Cadena Cerrada.
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica.
UNAM – DEPFI, México D.F., 1995.
4. Merlet Jean – Pierre. Les Robots Paralléles.
Traité del Nouvelles Technologies – Serie Robotique. Hermés.
Paris, 1990.
5. Arturo Fregoso. Los elementos del Lenguaje de la Matemática 2, Funciones.
Editorial Trillas S.A. de C.V.
Traité del Nouvelles Technologies – Serie Robotique. Hermés.
México D.F., 1979.
6. Reyes Ávila Luis. Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies. Partie 1: Le Cadre Theorique.
Rapport de Recherche INRIA Rocquencourt, France 1990.
7. Reyes Ávila Luis. Quaternions: Une Formulation Rationnelle D´Equation D´Equilibre de la Dynamique des Corps Rigides.
Rapport de Recherche INRIA Rocquencourt DEPFI - UNAM,(próximo a salir).
México D.F., 1998.

8. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis, Luciano Vela M. Síntesis Análítica de un Mecanismo de 4 Barras.
Reporte de la materia Análisis y Síntesis de Mecanismos.
DEPFI-UNAM.
México D.F., 1997.
9. Reyes Ávila Luis. Sobre la Parametrización de las Rotaciones y reflexiones en el plano.
Parte 1: El Marco Teórico. Universidad Anáhuac Del Sur.
México D.F., 1997.
10. J.M. Skowronski. Control Dynamics of Robotic Manipulators.
Academics Press Inc.
Orlando Florida. 1986.
11. Jiménez L. Eusebio, "MARIANNE III System. "
Global Automation Assembly and Welding Futuristic Factory.
Part IV: Special Mechanisms and Robots.
DEPFI-UNAM.(próximo a salir).
México D.F., 1997.
12. Cuenca J. Francisco, "Modelado del análisis Cinemático de una Plataforma Paralela Plana. ": Una aplicación del álgebra de Cuaterniones.
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica.
UNAM – DEPFI, México D.F., 1996.
13. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis. "Assembly Module. "
Global Automation Assembly and Welding Futuristic Factory.
Part VI: Manufacturing processes.
DEPFI-UNAM.(próximo a salir).
México D.F., 1998.

14. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis, Martínez M. Roberto. " Simulación de un Proceso de Aplicación de Silicón a Planchas Domésticas realizado por Robot Industrial IRB 2400/16 ABB.
Automatización Global de una Fábrica Futurista de Ensamble y Soldadura.
Parte VI: Procesos de Manufactura.
Reporte de investigación No 6 DEPFI-UNAM.
México D.F., 1998.
15. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis. "MARIANNE XI System. "
Global Automation Assembly and Welding Futuristic Factory.
Part I: Description.
DEPFI-UNAM.(próximo a salir).
México D.F., 1998.
16. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis. "Global Synchrony of MARIANNE XI System. "
Global Automation Assembly and Welding Futuristic Factory.
Part X: Control.
DEPFI-UNAM.(próximo a salir).
México D.F., 1998.
17. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis, Rivera M. Angel, Vela M. Luciano, Pérez M. Roberto, Mendoza S. Fidencio. "Modelado de un Manipulador de Dos Grados de Libertad que genera Plantillas para Corte de Tubos". Una aplicación del álgebra de Cuaterniones.
Reporte del trabajo de Investigación I. DEPFI – UNAM.
México D.F., 1997.
18. Martínez M. Roberto, . "Modelación y Simulación Computacional de Trayectorias Tridimensionales. "
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica.
UNAM – DEPFI, México D.F., 1997.

19. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis, Martínez M. Roberto. " El sistema CHEVOTRONIC IV".
Automatización Global de una Fábrica Futurista de Ensamble y Soldadura.
Parte I: El Módulo de Punzonado.
Reporte de investigación No 8 DEPMI-UNAM.
México D.F., 1997.
20. Jiménez L. Eusebio, Reyes Ávila Luis, Martínez M. Roberto. " El sistema CHEVOTRONIC IV".
Automatización Global de una Fábrica Futurista de Ensamble y Soldadura.
Parte 2: El Módulo de Soldadura.
Reporte de investigación No 9 DEPMI-UNAM.
México D.F., 1997.
21. Cuenca J. Francisco,. "Problemas de Síntesis de Mecanismos de Cuatro Barras. "
Parte 1: Modelación Matemática y Computacional.
Reporte de investigación No 14 DEPMI-UNAM.
México D.F., 1998.
22. Olvera A. Ernesto. Vega Miguel A. "Simulación y Construcción de un Robot Paralelo. "
Reporte del Proyecto de Maestría I.
UNAM – DEPMI, México D.F., 1997.
23. Vega Miguel A. "Simulación Computacional de cadenas Cinemáticas Abiertas Tridimensionales".
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica.
UNAM – DEPMI, México D.F., 1997.
24. Stephen Wolfram. "Mathematica , A system For Doing Mathematics by Computer".
Addison – Weley,. Publishing Company, Inc.
USA. 1990.