2
2Es.

"EL PROBLEMA DEL CONTINUO EN THOMAS BRADWARDINE"

Patricia Díaz Herrera

LICENCIADO EN FILOSOFIA

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

1998

AGRADECIMIENTOS

Son tantas las personas que, de algún modo u otro, contribuyeron a la aparición de esta tesis, que esta sección se convertiría en una *Tabula Gratulatoria* de varias páginas. Solamente mencionaré a algunas de ellas, sin desdoro de las demás, a quienes agradeceré personalmente.

La tesis fue posible gracias al apoyo recibido de parte de los miembros del *Seminario de Historia de la Filosofía,* del Instituto de Investigaciones Filosóficas (IIF). José Antonio Robles, mi asesor de tesis y coordinador de los proyectos del citado seminario, revisó con todo cuidado cada capítulo, haciendo comentarios que siempre sirvieron para mejorar el texto. Esto mismo puedo decir de Laura Benítez, , Rafael Martínez , Alejandra Velázquez y Carmen Silva, quienes leyeron y corrigieron pacientemente la versión final.

Mauricio Beuchot, Alejandro Herrera y Raymundo Morado me hicieron valiosas sugerencias en cuanto a la estructuración de la tesis y/o a la bibliografía. Carolina Ponce tuvo la amabilidad de realizar la mayoría de las traducciones del texto latino.

Agradezco especialmente la colaboración de Marcos Jiménez Dávila, quien aportó ideas, bibliografía y soluciones a problemas que yo no habría podido manejar adecuadamente. Y por su apoyo y cariño, a Angélica Díaz, Amparo Herrera y Francisco Díaz.

Por último, mencionaré que, durante la elaboración del trabajo, conté con dos becas otorgadas por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA), las cuales facilitaron la búsqueda del material, entre otras cosas.

NOTA BIO-BIBLIOGRÁFICA*

Thomas Bradwardine nació en Chichester, Inglaterra, alrededor de 1290. Murió el 26 de agosto de 1349 en Lambeth (Londres) durante la epidemia de peste negra, poco después de haber sido electo arzobispo de Canterbury. Se sabe que fue agustino y que recibió influencia del pensamiento de Duns Escoto y Anselmo de Canterbury. *Fellow* y luego director del Merton College hasta 1335, prosiguió su carrera académica, llegando a ser doctor en teología (Oxford, *ca.* 1338). En 1337, fue presbítero de la catedral de San Pablo. Formó parte de la corte de Eduardo III; fue capellán de éste y quizá su confesor alrededor de 1338.

Las obras del llamado *Doctor Profundus* abarcan gran variedad de temas: escribió sobre lógica, matemáticas, filosofía natural y teología. Sus trabajos más sobresalientes son el *Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus* (1328) y el *De causa Dei contra Pelagium et de virtute causarum ad suos Mertonenses* (*ca.* 1335). Sus libros fueron muy comentados en su época y continuaron causando interés durante los siglos XVI y XVII.

El *Tractatus de proportionibus* forma parte de la tradición oxoniense de ciencia natural. Su objetivo es establecer una relación matemática entre la variación en la velocidad de un móvil y la variación en las causas de esa velocidad (las fuerzas y resistencias que la determinan). En este texto se critican otras soluciones dadas al problema, por no resultar adecuadas a la física aristotélica. La conclusión a la que Bradwardine llegó puede formularse de la siguiente manera: la velocidad varía aritméticamente mientras que la razón de la fuerza sobre la resistencia varía geométricamente. Esta "ley dinámica" no fue expresada en matemáticas sofisticadas —no tiene que ver con funciones exponenciales— sino a través de ejemplos ambiguos y apegados a la física aristotélica.

* *Cf.* GILSON, É. *La filosofía en la Edad Media.* Madrid, Gredos, 1989, pp. 574-575; GRANT, E. (ed.). *A source book in medieval Science.* Cambridge, Harvard University Press, 1974, p. 828; MURDOCH, J. "Bradwardine, Thomas", en: *Dictionary of Scientific Biography.* N.Y., Scribners, 1980, v. 1&2, pp. 380-387.

Existieron varios seguidores de Bradwardine que son conocidos como la "escuela" de Merton. Tanto ellos como Nicole Oresme introdujeron mejoras a las propuestas de Bradwardine.

El *De causa Dei* continúa la crítica escotista a la teología natural e inicia la corriente conocida como *determinismo* teológico. Bradwardine construye su teología de manera geométrica, deduciendo su doctrina de axiomas como éstos: a) *el concepto de Dios es lógicamente posible.* Esto significa que no implica contradicción. Y, según tal concepto, Dios es absolutamente perfecto, por lo cual no puede no existir; b) *en cada género de seres siempre hay un principio.* Por tanto, no podemos remontarnos *ad infinitum* en la serie causal. Esto último permite sostener la predestinación absoluta: la primera causa eficiente, suficiente y necesaria de cada acto libre es Dios.

En esta obra, la separación de los ámbitos de la fe y la razón es contundente: el Dios omnipotente, al cual Bradwardine apela, se encuentra más allá de la filosofía natural aristotélica, pues ningún principio de ésta podría restringir los actos divinos.

Otras obras de Bradwardine son: *De incipit et desinit*, *Geometria speculativa*, *Arithmetica speculativa* y *Tractatus de continuo*, que será examinada en este trabajo de investigación.

Pero no olvidemos que estamos en medio de los infinitos y los indivisibles, aquéllos incomprensibles para nuestro finito entendimiento debido a su grandeza y éstos a causa de su pequeñez. A pesar de todo, vemos cómo la razón humana no cesa de dar vueltas a su alrededor, de modo que, tomándome cierta libertad, os comunicaré alguna de mis fantasías que, si no son necesariamente concluyentes, sí son capaces, al menos, debido a su originalidad, de suscitar cierta admiración. (...) el infinito, por sí solo, excede nuestra capacidad de comprensión, lo mismo que ocurre con los indivisibles. Pensad lo que pasará si se encuentran juntos.

GALILEI, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.*

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE

INTRODUCCIÓN

¿Quién no ha sentido alguna vez —sobre todo, durante la infancia— pasión por los récords y datos insólitos? El hombre más alto y el más pequeño, la galaxia más lejana, el bicho que parasita a un parásito ya de por sí minúsculo…

La historia nos muestra, en repetidas ocasiones, a la humanidad fascinada u horrorizada ante extremos como lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño. Es relativamente común reconocerse, al igual que Pascal, como una nada entre dos infinitos. Y la razón no parece cansarse nunca de la aspiración metafísica hacia lo que la sobrepasa en cualquier sentido.

El laberinto del continuo es una de esas cuestiones que dan comezón constantemente y nos remite a ambos extremos de la infinitud. Y encontrar algún hilo de Ariadna puede llevarnos un buen tiempo. ¿Por qué adentrarse en ese laberinto? Porque conduce a paradojas; porque es una cuestión límite que nos remite al filo de lo decible o lo pensable. El problema de la composición del continuo es una cuestión que puede llevarnos a preguntar por el origen del embrollo y a sospechar que todos tienen algo de razón y que, en otro sentido, nadie la tiene. ¿Quién posee la verdad sobre el asunto? La perspectiva que, por lo pronto, me parece más satisfactoria, es la que evita comprometerse ontológicamente con cualquiera de los partidos y aboga por el empleo de la hipótesis que mejor funcione en cada caso o que potencie determinadas investigaciones. Esto es, el problema de la composición última del continuo se encuentra entre los *insolubilia* que merodean por el campo de lo racional. En mi opinión, el análisis kantiano de estos temas, por estar situado en un nivel metafilosófico (en cuanto hace una filosofía de la filosofía), permite dar sentido a una polémica interminable.

Al examinar la obra de Bradwardine quise, entre otras cosas, comprobar un supuesto derivado de lo que he venido mencionando: los diversos actores que han intervenido en la historia del problema se colocan siempre de un lado u otro de la segunda antinomia registrada por Kant. Y en este laberinto, el que no cae, resbala.

Los capítulos de esta tesis pueden verse como cuadros expuestos en una galería. Se trata de una exposición en donde los cuadros son relativamente independientes. Los nexos entre ellos existen y espero que se vayan percibiendo al andar, así como en las consideraciones finales, donde ofrezco una visión de conjunto de lo hallado durante el recorrido por la galería. También podría decir que la parte del laberinto que he atravesado, tenía colgados, en sus muros, los cinco cuadros. Las consideraciones finales son la salida que creo haber encontrado y buscan darle sentido al conjunto.

A lo largo del camino, fueron surgiendo dudas y me di cuenta de que, para llenar mis lagunas, era necesario un telón de fondo. Ésa es la principal función de los dos primeros capítulos y de parte del tercero, mismos que contienen la información que requería para una mejor comprensión del problema.

En el primer capítulo presento "colores primarios" que se combinarán en el resto de los cuadros. Lo considero parte del cuerpo de la investigación -y no una introducción-, porque me refiero a él desde otros lugares y porque me parece indispensable para comprender el resto. De él se desprenden una serie de criterios acerca de la mejor manera de unir filosofía e historia de la filosofía. En el segundo capítulo y su apéndice intento dar mi perspectiva general sobre el problema del continuo. El tercer capítulo es una introducción más directa al *Tractatus de continuo* (TC) y prepara para el análisis de las tesis de Bradwardine, que serán analizadas en el capítulo siguiente. Por último, el quinto capítulo aporta elementos para evaluar, partiendo de un sitio cercano, la posición del *Doctor Profundus*.

En cuanto al texto con el cual trabajé debo aclarar varias cosas. El primer acercamiento que tuve con un escrito de Bradwardine fue a través de los comentarios que Alexandre Koyré y Edward Grant han hecho a varios fragmentos del *De causa Dei*.[1] Después, tuve noticia de la existencia de un artículo de John Murdoch en el cual se presentaba la estructura del *Tractatus* y se traducían las Definiciones, Suposiciones y fragmentos de las 151 Conclusiones.[2] Este artículo me condujo, finalmente, a la tesis doctoral de Murdoch,[3] que se encuentra en alguna biblioteca de la Universidad de Wisconsin. Conseguí una copia de ella gracias a los servicios que presta el Centro de Información Científica y Humanística (CICH) de la UNAM. El citado centro estableció contacto con la compañía UMI-Dissertation Services, que hizo una copia facsimilar a partir de un microfilm del original. En la base de datos de UMI se puede hallar información bibliográfica acerca de la tesis.

La tesis de Murdoch contiene el manuscrito íntegro del *Tractatus* en latín, que abarca de la página 338 a la 471. La mayoría de las proposiciones y fragmentos fueron traducidos al español por Carolina Ponce, de Letras Clásicas. Indico en nota al pie los casos en que la traducción me pertenece.

Presté mayor atención a las conclusiones relacionadas con la geometría que a las relacionadas con otras ciencias, porque cuento con más información acerca del contexto o la discusión en la cual se inscriben, gracias a la investigación de Murdoch y a otros artículos.

Ya que no deseo extenderme más en estos preliminares, sólo me resta comentar que el sistema que empleo para dar las referencias de las citas me fue sugerido por el Dr. Robles. La refe-

---

[1] *Cf.* (33) y (41) en la bibliografía.
[2] *Cf.* (56). V. bibliografía.
[3] *Geometry and the Continuum in the fourteenth century. a philosophical analysis of Thomas Bradwardine's 'Tractatus de Continuo'*. University of Wisconsin, 1957. El número que le he asignado en la bibliografía general es el (53).
El lector interesado puede consultar la página dedicada a Bradwardine en Internet:
http://www-groups.dcs.st and.ac.uk...ry/Mathematicians/Bradwardine.html.

rencia de la cita debe contrastarse con la bibliografía, atendiendo al número que ha sido asignado a cada obra consultada. Esto hizo más fácil el manejo de la información.

I. ¿POR QUÉ UNA TESIS SOBRE HISTORIA DE LA FILOSOFÍA?

1.1 LA HISTORIA DE LA FILOSOFÍA PUEDE SER FILOSÓFICA

Lo que me propongo en este párrafo inicial es sostener la tesis de que al hacer historia de la filosofía es posible hacer filosofía. Me parece indispensable detenerme en esta idea antes de adentrarme en el análisis y evaluación de los argumentos que Bradwardine esgrime sobre la composición del continuo. Y lo creo indispensable porque nunca falta quien nos recuerde maliciosamente el chiste de Quine, según el cual existen dos tipos de personas interesadas en la filosofía: las que se interesan por la filosofía y las que se interesan por la historia de la filosofía. Intento hacer ver que esta disciplina incluye múltiples métodos y que no está en principio reservada a los historiadores, que los filósofos pueden acercársele sin temor a que los haga abandonar la filosofía. Busco justificar teóricamente el estudio del pasado filosófico, arguyendo que, en su naturaleza, están incluidos algunos rasgos esenciales del quehacer del filósofo, los suficientes como para poder decir que la historia de la filosofía puede ser hecha filosóficamente. Más adelante, mencionaré con mayor precisión cuáles serían esos rasgos o funciones y algunas ventajas que el estudio de su historia trae para la filosofía misma. Esto me permitirá contestar preguntas como por qué o para qué hacer una tesis de historia de la filosofía y qué valor filosófico puede tener.

La tradición analítica ha sido indiferente u hostil hacia la historia de la filosofía, ha tendido a restarle importancia y, a veces, ni siquiera le reconoce un *status* filosófico, pues la caracteriza como "historia de los errores" superados por la filosofía contemporánea.[1] En obras dedicadas al estudio de doctrinas o autores del pasado, suele exponerse rápidamente, en unas cuantas líneas, la posición del autor sobre la utilidad de la historia de la filosofía para la filosofía, la mejor manera de elaborar tal historia, el anacronismo, etc. (Estoy pensando específicamente en *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz* de Russell, quien afirma en el prefacio que existen unos cuantos tipos de doctrinas inmutables, recurrentes y en las cuales es posible agrupar a los distintos filósofos. Éste es un supuesto fuerte que no se justifica ni se vuelve a mencionar en la obra).

Tal actitud proviene de la separación tajante entre verdad filosófica y hecho o verdad histórica, considerándose esta última irrelevante para cuestiones filosóficas. Son consecuencias de este punto de vista oposiciones como las siguientes: la perspectiva de un filósofo y la del historiador de la filosofía, con respecto a la historia de ésta, son incompatibles pues, si uno intenta acercarse al pasado filosóficamente, deja de hacer historia y viceversa, al historiar se pierde la dimensión filosófica. El filósofo hará reconstrucciones racionales de las doctrinas del pasado y el historiador reconstrucciones históricas. La reconstrucción racional interpreta y evalúa; la histórica describe o expone. Aquélla traduce a términos modernos y problemas del presente lo dicho por un filósofo del pasado; ésta lo entiende en sus propios términos. A quien se acerca a la historia de la filosofía *qua* filósofo, le es permitido ser anacrónico, pues lo que importa es polemizar con los antecesores, como si fueran contemporáneos nuestros. En cambio, se espera que el historiador dé un retrato fiel, objetivo, del pasado. El filósofo lleva a cabo una lectura argumentada del texto histórico, cuyas afirmaciones serán introducidas en un contexto nuevo, desde el cual se considerará su importancia o pertinencia. El historiador busca explicar el pasado, intenta recobrar el contexto original en el que surgieron determinadas tesis y, con ello, el significado, lo que quiso decir un autor.

Estas oposiciones tienen paralelo en dos posturas extremas sobre la posibilidad de la traducción conceptual en la historia de la filosofía. Jorge Gracia denomina a un bando los "anticuarios" y al otro los "anacronistas".[2] Los anticuarios se oponen a toda traducción, buscan presentar lo que se dijo, *tal cual* se dijo, sin distorsión, y ponen énfasis en la descripción. Quienes abogan por una reconstrucción histórica inmaculada, neutra o desinteresada se alinearían, me parece, con ellos. Los anacronistas, por su parte, sostienen que la traducción es inevitable y que el pasado no se recobra como fue así que, en realidad, no hay que temer la distorsión. El pasado se entiende solamente en

[1] *Cf.* (66), p. 27 y ss. Ver Bibliografía.
[2] En (30), p. 66 ss.

nuestros términos y desde nuestras categorías. En fin, nunca se da un acceso directo, sino mediado, al objeto de estudio; no hay un pasado, sino múltiples interpretaciones de él. De este lado podemos situar al filósofo para quien lo intraducible del pensamiento pasado resulta prescindible o que impone sus problemas y léxico al filósofo muerto y le enmienda la plana o lo "reeduca".

Me cuento entre quienes prefieren un término medio, tanto respecto de la oposición reconstrucción racional/reconstrucción histórica, como en relación con el par anticuarios/anacronistas. Empecemos por estos últimos.

No estamos completamente aislados del pasado. Tampoco nos identificamos con él. No creo que no podamos tender puentes entre nosotros y la tradición, de la cual, en parte, somos resultado. Entre el presente y el pasado existen continuidades y rupturas.[3] Lo mismo se aplica a la historia del pensamiento, así que esta idea puede emplearse como conjetura de trabajo a constatar en cada caso. Se trata de

> suponer que cualquier autor o tradición de pensamiento ha tenido, en algún nivel, cierta continuidad, una sistematización más o menos explícita en su trabajo —temática, argumental o, por lo menos, de perspectiva al abordar los problemas— y, al mismo tiempo que en el desarrollo de sus esfuerzos se ha corregido, y hasta eventualmente ha modificado sus creencias, incluso hasta llegar a cambiar los problemas y el enfoque mismo de su investigación.[4]

Los anticuarios no pueden salvar o comprender el pasado si se atienen estrictamente a sus premisas:

> ...si ninguno de nuestros conceptos puede ser usado con seguridad para explorar el pasado por temor a la contaminación, no tenemos manera de acercárnosle, puesto que no somos pizarrones en blanco sobre los cuales pueda escribirse el pasado...[5]

[3] John Passmore recomienda lo siguiente: "el buen historiador estará tan consciente de las discontinuidades como de las continuidades" (en (61), p.3). Debe encontrarse el equilibrio entre la enfermedad profesional del filósofo ("exagerar su originalidad") y la del historiador ("insistir demasiado fuertemente en las continuidades").
[4] En (63), p. 22.
[5] En (30), p. 67.

Mucho se ha dicho contra la pretensión de una historia imparcial, escrita sin prejuicios o desde el punto de vista de Dios. Recordemos que la reconstrucción del pasado es posible gracias a una selección previa de los hechos a historiar. Y esta selección depende de preferencias, de juicios de valor hechos desde nuestra situación presente.

El ejemplo propuesto por Bernard Williams es claro al respecto: aunque se ejecutaran partituras del siglo XVII, con instrumentos y según la práctica de entonces, no podríamos producir música del XVII, ya que necesariamente tenemos oídos del XX.[6]

Por otro lado, comparto lo que Gracia argumenta contra los anacronistas radicales. Nuestra experiencia no confirma que sea imposible trascender la interpretación y llegar hasta alguna dimensión del pasado tal como de hecho fue. Lo que debe definirse es en qué medida y de qué manera es posible traducir el pasado al presente, mas no la posibilidad misma de la comprensión del pasado:

> ...aunque es verdad que nos acercamos al pasado a través de una red conceptual contemporánea, hay aspectos del pasado que no son destruidos o reestructurados al pasar la red. La red tiene agujeros que permiten a fases completas de la historia e ideas pasadas atravesar casi intactas. Esto parece muy evidente en nuestra comprensión de lenguas muertas y textos antiguos.[7]

No podemos admitir el supuesto ahistórico de que existe un mismo conjunto de ideas, posiciones o problemas eternos capaces de traspasar todas las redes de la historia de la filosofía. Pero sí diremos que, junto a las nuevas cuestiones, persisten problemas de origen remoto. John Passmore sostiene que podemos entender los problemas de Platón al leerlo en el contexto de la vida griega y que, al hacerlo, tal vez encontraremos que estaba interesado en muchas de las mismas

[6] En (93), p. 9.
[7] En (30), pp. 67-68.

cuestiones de hoy y que nos ofrece alternativas,[8] como podría ser el caso de la pregunta por la naturaleza de la justicia.

Otro ejemplo sería el problema del continuo, del cual se hablará en los capítulos siguientes. Parece ser una de esas cuestiones rastreables en varios períodos de la historia de la filosofía, las cuales se comportan como si fueran "monedas que pueden pasar de mano en mano con alteración relativamente pequeña, sirviendo cada vez a aquellos que las tienen".[9]

A manera de conclusión citaré a Alejandro Tomasini:

> Frente al dogmatismo triunfante de quien pretendiera decirnos "lo que realmente pensó x" o el escepticismo claudicante de quien piense que toda reconstrucción es ya una falsificación...podemos asumir con confianza una posición..."sensata": la buena historia de la filosofía [es]...aquella que, por combinar virtudes estéticas, análisis minuciosos y una perspectiva determinada, echa luz sobre el pensamiento de los pensadores...y nos facilita por ello el que sigamos adelante en nuestra propia investigación.[10]

Volvamos ahora a la primera oposición, que exige optar o bien por la historia o bien por la razón. Contra esta separación artificial y poco fructífera se han señalado varias cosas. Ambos tipos de reconstrucción no sólo coexisten pacíficamente en los textos de historia de la filosofía, sino que son complementarios y quizá no exista una línea divisoria tan marcada entre ellos como se pretende. De acuerdo con Laura Benítez, la reconstrucción histórica de la filosofía supone metodológicamente una *guía racional*:

> ...de manera general, quien historia la filosofía tiene en mente una idea de lo que ésta debe ser y decide sobre la pertinencia de tópicos y autores con arreglo a la norma o guía racional de su elección...de manera inicial para hacer historia de la filosofía se requiere de una perspectiva filosófica [para seleccionar y ordenar racionalmente lo que se va a reconstruir histó-

[8] *Cf.* (61), p. 12.
[9] En (30), p. 70.
[10] En (88), pp. 200-201.

ricamente].[11]

La historia de la filosofía no es reconstrucción histórica pura; también caben en ella la traducción conceptual, el diálogo con el pasado y la valoración de los autores desde los intereses y necesidades presentes. La reconstrucción histórica está estrechamente vinculada con la guía o reconstrucción racional, que incluye no solamente lo que la filosofía analítica entiende por esto sino "cualquier forma de acercarse a la historia de la filosofía que implique un punto de vista filosófico"[12] como, por ejemplo, una caracterización plausible de lo que sea la filosofía.

Otro punto de vista, acerca de la interdependencia entre ambas reconstrucciones, es el de Jonathan Rée, quien afirma lo siguiente:[13] (1) la reconstrucción histórica da cuenta de cuestiones como las influencias y describe quién pensó qué cosa y por qué. Pero no podemos prescindir de la comprensión filosófica al atribuir una creencia a alguien, lo cual implica darle sentido articulándola en nuestro lenguaje y conceptos; (2) tampoco es posible desconectar la comprensión filosófica del conocimiento histórico. Para saber si una opinión filosófica es correcta, es necesario identificarla primero. Se requiere localizarla en un sistema de creencias, situarla en un contexto distinto de las opiniones, conocer el lenguaje en que fueron expresadas y las prácticas comunicativas que les eran propias, así como un conocimiento de las fronteras intelectuales de su época, etc.

Entonces, la reconstrucción racional requiere, a su vez, de la reconstrucción histórica. El contexto histórico no resulta inútil para valorar la verdad o falsedad de afirmaciones y argumentos. Antes de evaluar, se tienen que identificar o describir e interpretar las doctrinas, y la reconstrucción histórica juega un papel muy importante en cada uno de estos momentos. Tener ideas más claras sobre qué quería transmitir un filósofo ayuda a determinar si lo dicho es verdad. Y, para que suceda lo primero, debemos interpretar correctamente:

---

[11] En (14), p. 182.
[12] *Op cit.*, p. 191
[13] *Cf.* (66), p. 30.

> Para encontrar qué quiso decir Hume, y así estar en posición de pronunciarse sobre la verdad o la falsedad, necesitamos tomar en cuenta las preguntas precisas que se hizo a sí mismo; y para hacer esto debemos reconstruir la situación en la cual filosofó, lo cual quiere decir saber acerca de los libros que lo emocionaban, familiarizarse con sus intereses extrafilosóficos, tomar en cuenta factores en la atmósfera intelectual de la época que pudieran haber hecho que algunos argumentos le parecieran convenientes y otros no, y así sucesivamente.[14]

Todo esto lleva a dudar si realmente el estudio de Hume, hecho por un filósofo y el de un historiador de literatura filosófica, se podrían distinguir de manera absoluta. La tarea de explicar el pasado y la de analizarlo y evaluarlo se entremezclan, aunque respondan a distintos intereses. En términos de Carlos Pereda,[15] una lectura argumentada (semejante a la reconstrucción racional) de un texto del pasado, se convierte en historia argumentada de la filosofía, cuando el lector se ve obligado a efectuar tres clases de salidas hacia la historia, dado lo difícil que es tratar con interlocutores ausentes:

(1) *Elucidaria* (*sic*) o *aclaratoria*: busca comprender mejor las intervenciones argumentales ofrecidas por el texto, que es tomado como un debate, situándolas históricamente y explicándolas mediante textos o acontecimientos de la época;

(2) *Apoyadora*: recurre a la historia para respaldar defensas o ataques;

(3) *Articulante*: vincula distintas propuestas para poder evaluar cómo cada una de ellas trata cierto problema; se comparan y articulan distintas formulaciones del problema y sus tratamientos.

Incluso Rorty, quien sostiene que las dos reconstrucciones —la racional y la histórica— deben hacerse, pero *por separado*,[16] y que es importante conservar la distinción, admite que estos géneros de la historia de la filosofía no se excluyen, no constituyen necesariamente un dilema y no se dan puros en la práctica. Son tipos ideales, que aparecen mezclados en diversas proporciones en todo

[14] En (92), p. 81.
[15] *Cf.* (63), p. 24.
[16] En (71), p. 69.

libro de historia de la filosofía[17] y forman parte de un proceso único. Serafín Vegas comenta la concepción rortiana de la historia de la filosofía y considera que, al reconocer la legitimidad de diversos géneros Rorty es

> ...capaz de dar cuenta de las plurales tensiones que se entrecruzan en el hecho de *historiar la filosofía* misma...Rorty ha sabido recordar que la complejidad de la historiación de lo filosófico abarca diferentes facetas y modelos que el historiador de la filosofía debe ver como exigencias de mutua implicación...[18]

Lo importante es, entonces, no perder de vista que esta historia especial deberá tender al *pluralismo metodológico*,[19] si busca comprender y juzgar adecuadamente su objeto. En los capítulos siguientes intento cumplir este requisito. Busco plantear una perspectiva global, de corte kantiano, frente a los conceptos de continuo y de infinito, mediante un uso articulante —en términos de Pereda— de la historia del problema. Emplearé algunas características importantes del siglo XIV y contribuciones de autores del período, así como la perspectiva global, para evaluar -luego de describirlos- los argumentos de Bradwardine, con lo cual efectuaría un uso aclaratorio de la historia filosófica. De este modo, espero acercarme en alguna medida al ideal de "conectar el texto con su contexto de época y, a la vez, conectarlo con el presente".[20]

En el siguiente párrafo, tocaré dos temas vinculados con lo hasta aquí expresado: qué voy a entender por "tratamiento filosófico" o por "filosofía" (recuérdese que la historia de la filosofía supone una concepción de "lo filosófico"), asunto que relacionaré con el de las ventajas que trae el estudio del pasado filosófico. Una tercera cuestión será la de hablar un poco en favor de una historia de la filosofía que no se ocupe de filósofos ni épocas canónicos.

---

[17] *Cf.* (71), p. 90. El autor agrega un tercer género, la *Geistesgeschichte*, o historia de la filosofía entendida como "formación-de-un-canon...en función de lo que *merece* ser contado como 'filosofía'" (en (90), p. 167).
[18] En (90), p. 171.
[19] *Cf.* (14), p. 194; (15), p. 207 y (88), p. 199 ss.
[20] En (15), p. 207.

1.2 ESBOZO DE UNA CARACTERIZACIÓN DE LA FILOSOFÍA. BREVE ALEGATO EN PRO DE LA HISTORIA FILOSÓFICA Y DEL PERÍODO A HISTORIAR

En esta sección no pretendo agotar la difícil y extensa cuestión de la definición de la filosofía. Sólo identificaré ciertas funciones o quehaceres que pueden encontrarse en tal disciplina, al igual que en su historia. No se hará referencia a las múltiples concepciones de lo que es o debe ser la filosofía como, por ejemplo, la que considera que es una visión del mundo o *Weltanschauung*. La razón para excluir una concepción como ésta no es que la piense equivocada, sino que me propongo emplear en mi trabajo sobre Bradwardine cada función definida con el fin de ilustrar la tesis propuesta en este capítulo (que la historia de la filosofía puede hacerse filosóficamente) —y no me siento capaz de imprimir en este ensayo toda una *Weltanschauung*, que tendría que ser un discurso mucho más completo y sistemático de lo que puedo ofrecer aquí.

Las funciones que abordaremos son las de análisis de conceptos y argumentos, la crítica y la que llamo "propositiva".

El análisis es la actividad a través de la cual se llega a los elementos constituyentes de, en este caso, conceptos o argumentos. Los conceptos son vistos como totalidades a descomponer en sus partes, es decir, serán definidos. Las partes, a su vez, habrán de descomponerse hasta dar con principios de los cuales se puedan derivar las propuestas originales que analizamos. Respecto de los argumentos, el análisis detecta cuáles son las premisas de las que se supone se deriva la conclusión y si ésta ha sido obtenida de aquéllas mediante un procedimiento deductivo válido. El análisis esclarece lo implicado en una noción o razonamiento, lo cual permite establecer el significado del concepto analizado y si tiene un mínimo de congruencia interna o determinar si el argumento es lógicamente correcto.

La crítica se sirve del análisis de conceptos y argumentos. Consiste en sacar a la luz los

supuestos de un discurso o una idea y en cuestionar, problematizar, afirmaciones para mejorarlas o desecharlas. Ésta es una de las principales funciones de la filosofía, precisamente la que le confiere su radical modo de proceder. El filósofo que critica también evalúa la eficacia de argumentos, sopesa los pros y contras de una posición, se entrelaza en un diálogo con quien es criticado.
Tanto el análisis como la crítica son "disolventes": su labor es, más bien, la separación de un conjunto en sus partes. No se trata de proponer nada, sino que se aceptan datos y se procede a desmenuzarlos, reducirlos al absurdo, hallar sus lados flacos.

La "función propositiva" sería, en cambio, la fase constructiva de la filosofía. Consiste en presentar soluciones para los problemas planteados; en sugerir alternativas para evitar callejones sin salida; en la creación de conceptos y hasta de sistemas, etc. En esta fase, el filósofo se arriesga a lanzar su punto de vista, declara sus preferencias y fobias respaldándolas con argumentos.

Ahora bien, todas estas funciones no tienen por qué no aparecer en la historia de la filosofía. Más aún, podría decirse que una buena historia de la filosofía debería incluirlas, si quiere ser mejor y más interesante que una mera colección de opiniones. A mi modo de ver, la reconstrucción racional contempla, al menos, las dos funciones disolventes. La pertinencia de la función propositiva para el estudio del pasado filosófico ha sido cuestionada pero, quienes tienden a verla con desconfianza en este ámbito, suelen ser los que defienden una Historia tipo "anticuarios", que rechaza toda incursión de los intereses del presente en su virginal isla.

Si la historia de la filosofía abarca estas tres funciones, entonces su lectura —y su escritura—, resulta muy útil para el filósofo, que podrá hallar en ella ejemplos de buen y mal razonamiento, de cómo se desenvuelve la crítica, de lo que es la reflexión filosófica. El pasado de la filosofía proporciona conocimiento de errores e ideas valiosas o alternativas para problemas comunes; nos da lecciones para evitar la "re-inauguración" de rutas ya canceladas y para beneficiarnos con la experiencia de filósofos anteriores.

Al estudiar la filosofía de épocas distintas de la propia nos vemos enfrentados al origen y a la evolución de conceptos todavía vigentes, lo cual nos hace repensarlos y comprenderlos mejor. Asimismo, al confrontar pasado y presente, podemos darnos cuenta de los defectos del pensamiento actual y de prejuicios que de otra forma pasarían desapercibidos:

> ...hacemos siempre nuestra filosofía dentro de tradiciones determinadas de pensamiento en las cuales nos hallamos tan sumergidos que son para nosotros la realidad misma y no las reconocemos como tales particulares tendencias o ensayos de la mente humana que no son los únicos posibles. Sólo estaremos en la plena posesión de estas tradiciones...si las sabemos bien...poniendo al descubierto sus más "evidentes" supuestos.[21]

Es decir, esta rama de la filosofía (más que de la historia) tiene un efecto liberador porque combate el "provincianismo filosófico".[22] Nos saca de nosotros mismos para descubrir lo asumido por el antepasado, *i.e.* sus límites. Y, enfrentándonos al antiguo, al otro absoluto, hace que tomemos conciencia de los límites propios. Es siempre, por esto, como un viaje que termina en su punto de partida.

Pero, ¿por qué visitar a un monje casi desconocido que obliga a desplazarse hasta el siglo XIV, período que muchos miran como de transición, si no es que de franca decadencia? Porque todo viaje ilustra. Porque, en términos como "transición" y "decadencia", deberíamos hallar motivos para "averiguar la extraña y concreta figura que toma la vida humana"[23] bajo tales categorías historiográficas. Porque, así como hay siglos marcados por la límpida construcción de sistemas, los hay que revelan un temperamento disolvente, *problemático*; son momentos de crisis general, en donde no se busca la síntesis, mas no por ello menos filosóficos.[24]

Dice Ortega que la historia de Bréhier es una obra dedicada tanto a las etapas triunfales del

---

[21] En (60), p. 43.
[22] *Cf.* (30), cap. 3. En especial, p. 170 ss.
[23] En (60), p. 21.
[24] *Cf.* (12), pp. 13-15.

pensamiento como a las oscuras. Coincido con él en la importancia que tiene llenar los huecos de conocimiento abiertos entre las eras ilustres; en que se necesita, también, la historia de esas edades que generalmente nos brincamos en los cursos regulares y en los textos, porque "la montaña reclama el valle". Acepto, entonces, su invitación a acometer el estudio de una época *supuestamente* deslucida -más, quizá, por nuestra ignorancia que por lo que aconteció en ella.

II. EL PROBLEMA DEL CONTINUO EN LA HISTORIA DE LA FILOSOFÍA

2.0 INTRODUCCIÓN

Los objetivos de este capítulo son:

(1) formular la cuestión que nos ocupa, es decir, establecer cuáles son las dificultades a las que nos enfrentamos;

(2) exponer una muy discreta historia del problema del continuo.

¿Cómo se enlazan estos objetivos con el resto de la tesis? Respecto a (1): es necesario tener una noción lo más clara posible del problema(s) implicado(s) en general para poder:

a) identificar la posición de nuestro autor al respecto, las respuestas que ofrece y

b) determinar si cumple los cometidos que él mismo se ha propuesto, *i.e.* refutar cierta doctrina sobre la composición de los continuos.

Respecto a (2): no siempre puede establecerse **qué es** un problema filosófico sin investigar **qué ha sido** a través de la historia de la filosofía. La historia del problema del continuo ayuda, entonces, a conocer ese problema, así que (2) contribuye a aclarar (1).

Por otra parte si, como se menciona en el capítulo I, se evaluarán las ideas de Bradwardine, tomando como trasfondo su contexto y también un contexto más cercano a nosotros, resultará necesario describir qué dijeron algunos de los actores principales de esta historia específica. Se hablará de la cuestión tal como aparece en Zenón de Elea, en Aristóteles y en algunos medievales. Habrá que revisar la segunda antinomia kantiana y mencionaremos cómo Russell da cuenta del asunto, valiéndose de la teoría cantoreana del infinito. Creí indispensable seleccionar unos cuantos autores para evitar extenderme en demasía y, hay que confesarlo, para disminuir el riesgo de perderme en el laberinto del continuo. El criterio principal para esta elección fue que consideré sus aportaciones como definitivas o contundentes. Esto no quiere decir que subestime a otros autores y no los considere dignos siquiera de mención, pero sí que me resulta más natural tender puentes entre los elegidos y Bradwardine.

2.1 ¿QUÉ ES O EN QUÉ CONSISTE EL PROBLEMA DEL CONTINUO?

2.1.1 Dos nociones de infinito; dos nociones de continuo.

A. W. Moore distingue, en su libro *The Infinite*, dos grupos de nociones de infinito presentes en la historia de la filosofía, mismos que han favorecido la polarización de opiniones en torno suyo.[25] Me parece importante retomar su distinción, pues es una guía útil al historiar el problema del infinito. Y, ¿qué tiene que ver esto con el problema del continuo? Sostendré que, de manera similar, pueden hallarse dos nociones del continuo paralelas a aquéllas.

La distinción de Moore es la siguiente:

1) *Conceptos positivos del infinito.* Se trata de nociones como las de unidad, totalidad, perfección, absoluto y autosuficiencia. Tienen que ver con el infinito en acto o que está dado todo de una sola vez; es lo que Leibniz denominó "infinito verdadero". De este lado encontramos las propuestas de tono metafísico o teológico alrededor del infinito.

2) *Conceptos negativos del infinito.* Son, por ejemplo, las nociones de ilimitación, inmensidad, carencia de fronteras e infinitud. Hacen referencia a lo que Aristóteles llamaría el infinito potencial, tal como la serie de los números naturales, que no tiene último término y que, en opinión del Estagirita, no puede ser recorrida o completada. Estos conceptos conforman una propuesta de tono más bien matemático o lógico acerca del tema.

Por lo general —y debido a que no parece haber conexión entre ambos grupos—, quienes favorecen cierto tipo de nociones, consideran que la perspectiva del bando contrario está equivocada, no llega al fondo del asunto o, de plano, es una tomadura de pelo. Russell opina, por ejemplo, que calificar como verdadero un infinito es una impertinencia de los filósofos y que tal

[25] *Cf.* (51), pp. 1-13.

distinción obstaculiza la comprensión adecuada del tema, la cual es proporcionada por la teoría matemática de los números infinitos[26]. En el siguiente fragmento, Russell da cuenta de la mutua descalificación entre quienes sostienen una y otra perspectivas:

> Las confusiones introducidas en las nociones de los filósofos por el llamado "verdadero" infinito son curiosas. Ellos ven que esta última noción no es la misma que el infinito matemático, pero escogen creer que es la noción que los matemáticos intentan alcanzar en vano. Entonces, informan amable pero firmemente a los matemáticos, que se equivocan al adherirse al "falso" infinito pues, evidentemente, el "verdadero" infinito es algo muy distinto. La réplica a esto es que lo que llaman infinito "verdadero" es una noción totalmente irrelevante para el problema del infinito matemático, con el cual tiene aquél sólo una analogía caprichosa y verbal. Tan remota es ésta que no me propongo volver confuso el asunto ni siquiera mencionando qué es el "verdadero" infinito. Es el "falso" infinito el que nos concierne y tenemos que mostrar que el epíteto "falso" es inmerecido.[27]

Ahora bien, en lo relativo al problema del continuo, quizá también estén en juego dos nociones diversas (aunque no necesariamente opuestas) de continuidad. La primera, que podríamos denominar "positiva", hace énfasis en el hecho de que lo continuo es algo completo, un todo o unidad de múltiples partes —y, a veces, se subraya que tal todo es *anterior*, en algún sentido, a las partes. Considero que esta concepción apunta hacia aspectos y problemas lógico-ontológicos, pues remite a la oposición identidad/diversidad.

La segunda, que sería "negativa", entiende lo continuo como lo que es infinitamente divisible. Para Aristóteles, por ejemplo, algo esencial a la continuidad es que siempre puede encontrarse un tercer término entre otros dos cualesquiera que señalemos en lo continuo como, por ejemplo, en una línea o una serie de números reales.[28]

Esta doble definición de continuidad está implicada en la advertencia de A. Koyré, acerca de

---

[26] En (75), p. 184.
[27] *Op. cit*, pp. 185-186.
[28] Tal noción, conocida como *densidad* o *compacidad*, la poseen los números racionales; sin embargo, la "línea" de racionales tiene "huecos" en donde quiera que aparezca un irracional. La unión de racionales e irracionales producirá una línea sin huecos (un campo ordenado *completo*), lo cual constituye el conjunto de los reales. Para un desarrollo más detallado de estas nociones, véase el apéndice de este capítulo. Allí se mostrará que existe una noción de continuidad distinta de las ya señaladas, la elaborada por las matemáticas contemporáneas.

que no debe confundirse **lo continuo** con la **magnitud continua**[29]. Lo continuo puro o en sí es el Uno, el Ser mismo, la extensión única, infinita e indivisible -como la sustancia spinoziana. Aquí se está empleando nuestra primera concepción. El sentido profundo de los argumentos de Zenón de Elea, afirma Koyré, no es el hacer objeciones al movimiento, sino el mostrar la imposibilidad de dividir o limitar el continuo puro y éste es un problema distinto a los planteados por la magnitud continua, que tienen que ver más bien con lo que hemos llamado concepción negativa de la continuidad.

Henri Poincaré distingue, por su parte, entre una concepción ordinaria de continuo y el continuo aritmético, mismas que corresponden, respectivamente, a las nociones positiva y negativa:

> [El continuo aritmético] no es sino una colección de individuos dispuestos en un cierto orden, infinitos en número...[y] externos entre sí. Ésta no es la concepción ordinaria, en la que se supone que hay entre los elementos del continuo una especie de vínculo íntimo que hace un todo de ellos, en el que el punto no es anterior a la línea, sino ésta a aquél. De la fórmula "el continuo es unidad de multiplicidad", sólo subsiste la multiplicidad, la unidad ha desaparecido.[30]

Cada noción trae aparejados ciertos problemas, así que no hay, desde nuestro punto de vista, *un* solo problema del continuo, sino un grueso manojo de dificultades, algunas de las cuales serán mencionadas en seguida.

A partir de la noción positiva, surge la pregunta sobre cómo es posible mantener que un continuo es esencialmente *uno* y, aun así, hablar de sus *partes* o de *posiciones* (puntos) dentro del mismo:

> ...podemos formular el problema fundamental del continuo como *el problema de la fijación de partes y posiciones dentro de la unidad esencial del continuo.* O más breve y tradicionalmente...como el problema de la determinación de la *multiplicidad* dentro de la

[29] En (42), pp. 27-28.
[30] Citado en (76), p. 430.

unidad del continuo.[31]

Para determinar una parte (o un punto) debe mostrarse que es distinta de otras y cómo está conectada con el resto del continuo. Pero no da igual fijar un punto que una parte: esta última es algo en lo cual el continuo está dividido y, por definición, se trata de su componente, que posee las mismas propiedades —excepto la magnitud— que el todo. En cambio, aunque los puntos estén contenidos en los continuos, resulta dudoso que entren en su composición. Por ejemplo, es difícil explicar las suaves transiciones que percibimos durante los movimientos continuos mediante "saltos" de un punto a otro; los puntos conducen, más bien, a la idea de algo discreto.

La cuestión general, a la cual nos conduce la noción positiva, sería a la de decidir si el continuo está o no compuesto de elementos. Ésta es, nada menos, la segunda antinomia de la razón pura:[32]

a) Tesis: Toda sustancia compuesta consta de partes simples y, en el mundo, no existe más que lo simple o lo compuesto de lo simple.

b) Antítesis: Ninguna cosa compuesta consta de partes simples y, en el mundo, no existe nada simple.

Como es sabido, estas conclusiones son, a decir de Kant, proposiciones metafísicas, independientes de la experiencia -no pueden verificarse ni falsearse mediante ella. Por ello, constituyen un escándalo para la razón, que encuentra argumentos a favor de ambas y es incapaz de salir del apuro.[33]

Junto con la noción negativa, aparecen las dificultades de lo infinitamente pequeño y las series infinitas. En este caso, la decisión que se tome en cuanto al infinito - si es un concepto

[31] En (53), p 5.
[32] En (37), p. 400
[33] V. *infra*, sección 2 2.3.

autocontradictorio o no, si debe rechazarse el infinito en acto, etc.- puede repercutir en la doctrina de la continuidad que finalmente se admita.

Una de las paradojas que surgen es la siguiente: si se completa la división infinita de una línea, ¿qué resta al final del proceso? Suponiendo que se obtenga un número infinito de partes, cabrá preguntarse si éstas *tienen* o *no extensión*. De tenerla, el número infinito de partes tendría que conformar una línea infinitamente larga, siendo que partimos de una de longitud finita. Si carecen de extensión, ni siquiera con un número *infinito* de tales partes supuestas podríamos recobrar el original. En otros términos, ¿cómo lo continuo, que debe ser extenso, podría componerse de elementos sin extensión, *v.g.* de puntos?

Los problemas tradicionales, relacionados con la noción negativa de continuo, son las cuatro paradojas de Zenón de Elea acerca del movimiento. De acuerdo con los dos primeros argumentos ("Dicotomía" y "Aquiles"), la infinita divisibilidad de espacio y tiempo —y, con ella, los racionales entendidos como compactos— conduce a absurdos. Según la Dicotomía, no es posible pasar del punto A al B, porque primero es necesario haber recorrido todos y cada uno de los términos de la serie interminable de puntos (racionales) existentes entre A y B. Y, por igual razón, Aquiles no dará alcance a la tortuga, que conservará por siempre la ventaja concedida al inicio de la carrera. Pero esto no significa que la noción de lo infinitamente divisible sea incoherente. El tercero y el cuarto argumentos ("Flecha" y "Estadio") arremeten contra la hipótesis opuesta, la concepción discreta de espacio y tiempo, que los hace constar de un número finito de elementos simples, atómicos. De acuerdo con el tercer argumento, el movimiento de la flecha estaría compuesto de inmovilidades, pues en cada momento del trayecto se encontraría en un solo punto, como en reposo.

El cuarto argumento refuta la suposición de instantes indivisibles. El carro a'b'c'd' se recorre un lugar a la izquierda y a*b*c*d* uno a la derecha (véase la figura más abajo). Como los instantes son indivisibles, a* y b' no pueden cruzarse. En **un** instante, entonces, a' está sobre a* y al siguiente, es c' la que está sobre a*. Sin embargo, a* debería haber pasado bajo b' durante ese mismo instante que, en consecuencia, tendría que ser divisible:

a b c d

. . . .

← **a' b' c' d'**

. . . .

a* b* c* d* →

. . . .

En el apartado siguiente se rastrearán, en algunas discusiones que se han dado entre matemáticos y filósofos sobre el continuo, las nociones arriba esbozadas.

2.1.2 Continuo físico y continuo matemático. Metafísicos *versus* matemáticos.

El par de conceptos continuo positivo-continuo negativo, se ha aplicado, respectivamente, en dos niveles: el continuo en los planos físico y matemático. El continuo físico suele considerarse como una unidad indisoluble o un flujo ininterrumpido. En el continuo matemático, según Poincaré, "cada uno de sus puntos es un individuo completamente distinto de los demás y completamente indivisible".[34] Al continuo físico, que captamos sensorialmente, se le aplica la ley de Fechner: no percibimos las sutiles diferencias existentes entre, por ejemplo, diversos grados o tonalidades de un mismo color, a menos que se encuentren muy alejados uno del otro. No distingo un tono A del B, ni el B del C, aunque pueda distinguir el A del C. De ésto, Poincaré concluye —indebidamente, dirá Russell— [35] que, en el continuo físico, se dan transiciones graduales, indiscernibles, entre uno y otro.

Henri Bergson, también dentro de esta perspectiva, sostuvo que el continuo no era sólo una yuxtaposición de elementos discretos: el análisis falsea la verdadera naturaleza del todo continuo,

[34] En (64), p. 25.

[35] V. *infra*, pp. 22 y 23.

que es algo más que suma de partes. Cuando observamos el movimiento de un objeto, no se aprecian saltos de una posición a otra, sino un solo desplazamiento.

El matemático —o en general, el científico— descompone este único proceso en una serie de estados separados, siendo que se trata, más bien, de un todo indivisible. Bergson, como Aristóteles, busca describir los fenómenos continuos dados en la percepción y considera que la matemática no es adecuada para ello. Quizá aceptaría una definición aristotélica del continuo, como aquello que posee partes cuyos límites son comunes.

Quien sí retomó esa definición fue Franz Brentano.[36] Ni él ni Aristóteles reconocían validez al concepto de totalidad infinita y menos el que una totalidad así pueda ser mayor que otra. Las teorías de Dedekind o Cantor, según las concibe Brentano, no describen adecuadamente lo dado en la percepción y sólo proporcionan cierta idealización del fenómeno de la continuidad. Para Brentano, entonces, el continuo debería considerarse más como fenómeno perceptual que como construcción matemática y su objetivo es hacer una descripción fenomenológica de cómo se da lo continuo en la percepción. Existen tres momentos en la aprensión del continuo: la sensación nos presenta objetos con partes que coinciden. Dados los objetos, abstraemos el concepto de *límite* y aprendemos que los objetos poseen límites que coinciden. Esta aprensión conduce al concepto de un continuo, ya sea cualitativo (entre dos grados de una cualidad siempre hay un tercero), espacial o temporal. El continuo nos es dado en una intuición individual y, a partir de ésta, abstraemos su concepto. Resulta inaceptable sostener que tal concepto tiene su origen en operaciones artificiales del pensamiento, como lo es la de obtener paso a paso, *ad infinitum*, la serie de racionales entre dos números -si así construyéramos el concepto en cuestión, un niño carecería del mismo. El concepto de continuo no se obtiene por algún proceso intrincado, sino de manera inmediata.

Intuimos, pues, que el todo contiene incontables límites y coincidencias de límites -mas no un número infinito en acto de ellos:

[36] *Cf.* (17), especialmente la introducción de Chisholm y Körner, pp. i-xx.

> Uno puede decir de un continuo, entonces, solamente que puede ser descrito como siendo tan grande como un número finito de cualesquiera entidades en acto [*i.e.* de partes en acto], pero no como un número infinitamente grande de entidades en acto. Uno sólo puede sostener que hay, en potencia, infinitamente muchas entidades.[37]

Por tanto, ser continuo y ser divisible infinitamente son conceptos que no coinciden en su contenido.[38] Por otra parte, al ver un objeto vemos simultáneamente nuestro ver mismo; soy consciente de que veo y de que, a cada parte del cuerpo visto, corresponde una parte de mi visión. Aparezco ante mí mismo como poseyendo multiplicidad y continuidad de estados. Y esta experiencia de sucesión nos hace conscientes del tiempo, el cual se nos presenta como un continuo primario que fundamenta todo otro continuo.

Por otro lado, Russell considera que este tipo de doctrinas se basa en prejuicios o dogmas, afirma socarronamente que los filósofos rodean de un velo de misterio el continuo, lo tratan como no analizable y hacen eco del sentido común. Las definiciones matemáticas de continuidad

> ... no se adaptan demasiado a la idea imprecisa que el hombre de la calle o el filósofo suele asociar con esta palabra. Estos conciben la continuidad más bien como ausencia de separación, como la forma de supresión general de las distinciones propia de una densa niebla. La niebla crea una impresión de amplitud sin una multiplicidad o división definidas. Esto es lo que entiende por "continuidad" un metafísico, quien la presenta, muy acertadamente, como una característica de su vida mental y de la de los niños y los animales.[39]

Russell afirma que debe emplearse el análisis matemático si se quiere dar cuenta, de una vez por todas, de las supuestas contradicciones del infinito y si se busca una definición clara del mismo y de la continuidad. Sólo se oponen a la teoría matemática sentimientos o hábitos mentales, como aquel de no admitir que el movimiento consiste en que un cuerpo ocupa posiciones consecutivas en tiempos consecutivos:

---

[37] Citado en *op. cit.*, introd., p. xiii.
[38] *Ibid*, p. 6.

> Un movimiento *lento*, como el de la manecilla del reloj que marca la hora, sólo es conocido en la manera en la cual los matemáticos nos llevarían a esperar, es decir, observando un cambio de posición después de un lapso de tiempo; pero, cuando observamos el movimiento del segundero, no vemos meramente una posición primero y luego otra —vemos algo tan directamente sensible como el color. ¿Qué es este algo que vemos y que llamamos movimiento visible? Sea lo que sea, *no es* la ocupación sucesiva de posiciones sucesivas: se requiere algo más allá de la teoría matemática del movimiento para dar cuenta de ello. Los oponentes de la teoría matemática subrayan este hecho. ... Creo que [esta objeción] puede ser completamente respondida sin apartarnos de los métodos y la perspectiva que han conducido a la teoría matemática del movimiento.[40]

Russell procede detalladamente al refutar la propuesta de que el continuo matemático es inadecuado para dar cuenta de los datos de los sentidos. En primer lugar, los adversarios parecen suponer que el análisis falsea porque las partes de un todo complejo son diferentes, cuando están combinadas en el todo, de cuando no lo están (pues el todo es más que mera suma de partes). Esto será interpretado como queriendo decir que una cosa (cada parte) es *modificada* por la relación que mantiene con otras cosas; entonces, no es la misma antes y después de entrar en relación con las demás. Pero esto es un absurdo lógico: es como si un hombre *sufriera una alteración radical* en su naturaleza por volverse padre, de manera que no fuese ya el mismo hombre. Psicológicamente podría ser cierto, pero lógicamente implica que sería imposible que se diesen dos o más hechos respecto de una misma cosa.[41]

En segundo lugar, pueden estarse confundiendo cuatro cuestiones distintas: a) la posibilidad lógica de las series que poseen continuidad de tipo matemático; b) aunque fuesen posibles lógicamente, ¿no serían imposibles en tanto aplicadas a los *sense data*? En este último nivel no existen términos fijos perfectamente distinguibles, como sí pueden hallarse en la serie de fracciones, por ejemplo; c) el que la explicación matemática suponga puntos e instantes, ¿no la vuelve ficticia? y d) suponiendo que se responden los incisos anteriores, ¿hay alguna razón *suficiente* para considerar el mundo sensible como un continuo matemático?

---

[39] En (74), p. 95.
[40] En (75), p. 144.
[41] *Op. cit.*, p. 157.

La respuesta al primer inciso depende de los resultados de la teoría cantoreana: como las colecciones infinitas no implican contradicción alguna, la continuidad bien puede explicarse valiéndonos de aquéllas. Remito a la sección 2.2.3 para más información. Respecto al inciso b): no puede ser decidido por experiencia empírica si los *sense data* están compuestos por unidades discretas. La tesis opuesta -el flujo sensible es indivisible y las disecciones del intelecto lo falsean- tampoco se prueba por experiencia inmediata, pues puede suceder que existan diferencias imperceptibles entre los datos empíricos, de modo que produzcan un efecto de interpenetración, de suaves transiciones a la Bergson. Se supone que, si los datos *son* diferentes, deberían *parecernos* diferentes; su diferencia también tendría que ser un dato inmediato. Y como no nos aparece inmediatamente, entonces no hay tal diferencia y sí existe la interpenetración. Sin embargo, es posible que nuestros sentidos capten dos tonos diferentes y aun así no nos percatemos de que no son iguales. Que no percibamos la diferencia no garantiza que, de hecho, ella no exista. Russell piensa que el atomismo debe ser defendido desde el terreno lógico, no el empírico:

> [Las bases lógicas del atomismo] descansan ... sobre la imposibilidad de explicar la complejidad sin asumir constituyentes ... Siempre hay algo autocontradictorio en las teorías que, aun admitiendo esta complejidad [*i e.* la del campo visual], intentan negar que resulta de la combinación de unidades mutuamente externas.[42]

Acerca de c), Russell sostiene que las explicaciones matemáticas no serán ficticias, siempre que se interpreten correctamente los términos 'punto' e 'instante'. No hay que comprometerse ontológicamente con ellos, pueden ser vistos como ficciones útiles. Tanto la hipótesis que los supone, como la que los niega, son *consistentes* con los hechos y con la lógica y ninguna de ellas es *necesaria* según los mismos criterios. Lo mismo vale para las hipótesis sobre si espacio y tiempo son absolutos o relativos. En la práctica científica, se adoptará la hipótesis más económica y se dejará abierta la posibilidad de que puntos e instantes existan como entidades independientes.

Finalmente, la respuesta a d) es negativa. Aunque la hipótesis de la continuidad constituida por

---

[42] *Ibid.*, p. 152.

elementos discretos sea consistente empírica y lógicamente y aunque resulte técnicamente más simple, no es la única ni es verificable, pues

> ... nuestros poderes de discriminación entre objetos sensibles muy parecidos no son infinitamente precisos ... [y no podemos decidir entre las distintas teorías en pugna porque] *sólo difieren respecto a lo que se encuentra por debajo del margen de discriminación.*[43]

Su posición frente a los tres últimos cuestionamientos —excepto cuando asegura que el atomismo tendría bases lógicas de las cuales la otra doctrina carece— trae a la mente la doctrina kantiana, que abordaré en 2.2.4.

2.1.3 La falacia descriptivista

Se ha expuesto la actitud cautelosa de Russell ante la posibilidad de aplicar *directamente* el concepto matemático de continuidad al continuo físico. Ese concepto no es un *reflejo* del continuo empírico, no describe los hechos. Más bien, es un marco al cual deben ajustarse otras teorías y que permite hacer, previa interpretación adecuada, enunciados verdaderos acerca del mundo:

> El tema de la relación entre el tipo de continuidad que se da entre los números reales y la que presenta, por ejemplo, todo cuanto vemos ... es difícil y complejo. No puede afirmarse que ambos tipos de continuidad sean simplemente idénticos, pero es muy posible ... afirmar que la concepción matemática ... ofrece el marco lógico abstracto al que habría de ser posible incorporar el material empírico mediante un tratamiento adecuado para poder designar ese material como "continuo" en cualquier sentido susceptible de una definición precisa.[44]

Si este filósofo hubiera dicho que la continuidad matemática es la única hipótesis viable y que ella indica cómo es *realmente* el continuo físico, habría cometido lo que José Antonio Robles denomina *falacia descriptivista.*[45] Ésta consiste en suponer que el lenguaje es significativo *porque* denota ciertas entidades. John Locke, por ejemplo, explicaba el significado de los términos generales apelando a ideas abstractas, que serían su objeto y harían comprensible la aplicabilidad

[43] *Ibid.*, p. 154.
[44] En (74), pp. 95-96.

general de tales términos a las cosas particulares. Si la única función del lenguaje es describir el mundo, entonces su significado depende completamente de que hace referencia a ciertos objetos. De aquí que, si los signos calcan lo real, lo válido en su nivel vale también para el mundo. George Berkeley atacó este salto, mismo que había detectado en Locke y en algunas expresiones de matemáticos contemporáneos suyos. Por ejemplo, se consideraba que una línea física, por pequeña que fuese, era divisible en un número infinito de partes. Esta conclusión era derivada de la proposición euclidiana según la cual toda magnitud es divisible *ad infinitum*. El error radica en transferir a ciertas líneas físicas significadas las propiedades de la línea que funciona como su signo, que es un constructo de la razón. Se olvida, pues, que la línea-signo es representante de las otras y se concluye que, al igual que ella, sus representadas pueden ser divididas infinitamente. Con esta crítica, Berkeley señala que

> ... los matemáticos *no* describen la realidad mediante sus enunciados ... [y que] la posibilidad matemática rebasa con mucho la posibilidad empírica pues, entre otras cosas, el matemático puede realizar procesos indefinidamente largos de operaciones (divisiones, p. ej.) utilizando sus signos, pero tales operaciones *no* tendrían correlato alguno en el mundo de la experiencia sensorial.[46]

Esta falacia, lejos de haber sido erradicada, reaparece varias veces en la historia del problema que tratamos. Podríamos decir que Bradwardine está completamente inmerso en ella. Pero, dada la concepción de la geometría predominante en su época, resultaba *natural* asimilar el continuo físico —ya fuera espacial o de movimiento— al matemático.

He intentado formular diversas facetas problemáticas del continuo. Se ha visto que no se trata de un único asunto y que pueden señalarse, por lo menos, dos derroteros de la discusión. Adelanto que Bradwardine trabaja sobre todo con la concepción negativa de continuidad, pero sin deslindar el continuo físico del matemático, y desde una perspectiva geométrica.

[45] *Cf.* (67), pp. 19-34.
[46] *Op. cit.*, p. 31.

En el próximo apartado, seguiré tratando el desarrollo histórico del problema y su relevancia.

2.2 IMPORTANCIA DEL PROBLEMA.

No debe dejarse pasar la cuestión de en dónde radica el interés *filosófico* del problema. ¿Con qué otros temas de la filosofía está engarzado el *labyrinthus continui*? Al menos con tres: el *status* ontológico de tiempo y espacio; las relaciones todo-parte y las paradojas del infinito; los límites de la capacidad humana para determinar si lo real está constituido de partículas simples o bien es infinitamente divisible. Dedico sendas secciones a cada tema, con el fin de ir haciendo explícito por qué me preocupa esta materia y por dónde creo que podría encontrarse una salida.

2.2.1 La negación de la extensión.

¿Está el espacio compuesto de puntos o átomos y el tiempo de instantes? O, por el contrario, ¿consiste el espacio de espacios y el tiempo de tiempos, es decir, de partes cuya característica es la divisibilidad sin fin? Estas preguntas han dado mucho en qué pensar desde tiempos de Zenón de Elea quien, en los antes mencionados argumentos contra la existencia del movimiento, muestra también las dificultades que se siguen de aceptar cualquiera de las respuestas posibles, ya sea la atomista o la divisibilista. El escéptico Pierre Bayle (1647-1706), autor del monumental *Dictionnaire Historique et Critique*, retoma las paradojas de Zenón para negar que exista la extensión. Razonaba así: si la extensión existiera, estaría compuesta o bien de puntos matemáticos, de átomos o de partes divisibles al infinito. Sin embargo, ninguna de las tres opciones puede ser verdadera, pues conduce a absurdos. Por tanto, la extensión no existe. Respecto a la primera opción, argumenta lo siguiente: lo que carece de extensión nunca formará algo extenso, así que es imposible o, al menos, inconcebible, que el continuo esté formado por puntos inextensos. Los átomos tampoco serían la respuesta: si se trata de corpúsculos indivisibles y extensos, tendrán lados, mismos que ocuparán distintos lugares —pues esto es característico de todo lo extenso. Entonces, el átomo tendrá partes, podremos distinguir en él izquierda y derecha. Si éstas son distintas es porque son separables y, por ende, el átomo será, en realidad, divisible.[47] Ahora bien, el divisibilismo es la doctrina adoptada por Aristóteles y la mayoría de los autores medievales. Bayle expone varias objeciones a esta tesis, pero sólo mencionaré una: la extensión supone necesariamente el contacto inmediato de sus partes —en general, en eso consiste la continuidad según el Filósofo. No obstante, tal tipo de contacto se vuelve imposible con la divisibilidad al infinito: cualesquiera dos partes están separadas por una infinidad de otras partes y ni Dios podría hacer que se tocasen. De aquí concluirá Bayle, además de que la extensión es imposible, que los cuerpos existen sólo idealmente en nuestro espíritu:

> Decimos, entonces, que el contacto de las partes de la materia no es sino ideal; es en nuestro espíritu que se pueden reunir las extremidades de varios cuerpos.[48]

Los objetos que se presentan a nuestro espíritu no poseen, en realidad o de manera absoluta, la propiedad de ser extensos; únicamente aparecen con cierta extensión, figura, situación, color, etc.

Negarle realidad a la extensión, recurriendo a las paradojas que entrañan la composición del continuo, ha sido un expediente popular en la historia de la filosofía. Otro conspicuo representante de esta postura fue Leibniz, para quien el problema del continuo y el de la libertad constituyen inquietantes enigmas que deben ser resueltos si se quiere construir una metafísica firme. Leibniz sale del laberinto distinguiendo tres tipos de entidades, las ideales (espacio y tiempo), las reales (mónadas o sustancias simples, indivisibles, pero no materiales ni extensas) y los fenómenos bien fundados (objetos materiales, aquello que aparece). Las cosas ideales pueden dividirse, una y otra vez, pero sólo idealmente. Es decir, no tienen partes reales, mientras que la materia sí las tiene, es un compuesto de lo simple. Pero las entidades divisibles no llenan los requisitos de unidad sustancial necesarios para ser un verdadero individuo; tales condiciones sólo se dan en las mónadas. La naturaleza —el conjunto de fenómenos bien fundados— es infinita en sentido sincategoremático: no es un todo infinito en acto, sino algo tal que, dada una parte finita, siempre

[47] *Cf.* (11), p. 540 a.
[48] *Op. cit.*, p 541 a.

existirán más. Entonces, espacio, tiempo y lo que en ellos se encuentra, es infinito por adición y por división y esto es la base de la creencia leibniziana en la irrealidad de espacio y tiempo:

> La infinita divisibilidad requería totalidades con partes cuya existencia era parásita de las totalidades, y esto, en opinión de Leibniz, burlaba un principio metafísico básico de lo real.[49]

Tanto buscar partes reales en lo ideal o pensar que debería haber un límite de su divisibilidad, como creer que los fenómenos bien fundados son infinitamente divisibles, cuando son agregados de mónadas, es confundir estos planos de realidad, lo que acarrea contradicciones inexplicables.[50]

El problema del continuo se encuentra estrechamente ligado, como hemos visto, con el de la existencia del mundo externo y el *status* ontológico que posean espacio y tiempo —pues también son aplicables, a este último, las paradojas del continuo. Bertrand Russell señala que la realidad del mundo sensible ha sido cuestionada, arguyendo que las nociones de infinito y continuo son autocontradictorias, pero que los matemáticos (Cantor) han probado que esto es falso, así que no hay mejores razones para apoyar una teoría idealista que una realista sobre espacio y tiempo.[51]

Según Russell, para escapar de las paradojas de Zenón de Elea se han propuesto tres hipótesis:[52]

(1) El espacio y el tiempo están constituidos de un número infinito de puntos e instantes.
(2) Ni espacio ni tiempo consisten de puntos o instantes (Bergson).
(3) Ni espacio ni tiempo son reales (Parménides).

Russell sostiene que las series de puntos en la línea son equiparables a las series de fracciones.

---

[49] En (51), p. 79.
[50] *Cf.* (78), pp. 478b-479a.
[51] *Cf.* (73), pp. 68-71 y (75), pp. 159 ss.
[52] *Cf.* (75), p. 183 ss.

Como no es posible negar que hay fracciones, tampoco sería válido negar los puntos. Entonces, (2) es inviable. Y la tercera opción es descartada por Russell de entrada. En su opinión, para resolver las paradojas de Zenón solamente queda proponer una teoría coherente de los números infinitos, de modo que se destruya la creencia de que son imposibles. En 2.2.2 hablaremos de esta última opción. Antes de proseguir, recuerdo de paso que se debe tener cuidado con la identificación de magnitudes y series numéricas. ¿Qué nos garantiza que el continuo aritmético o geométrico describe o es idéntico al físico?

2.2.2 ¿Es el todo mayor que la parte?

Una idea vinculada con el problema del continuo es la que Euclides propuso como quinto axioma (o *noción común*) de su geometría: "Y el todo es mayor que la parte".[53] En su calidad de axioma, resulta ser una proposición verdadera, base de ulteriores demostraciones y, por ello mismo, indemostrable. Esto explica que, durante gran parte de las historias de la matemática y de la filosofía, todo aquello que pareciera contradecir tal noción, fuera considerado falso, erróneo, absurdo, autocontradictorio o imposible. Ésa fue la suerte que tuvieron las colecciones infinitas, pues cuando de ellas se trata, el quinto axioma parece ser violado: en ellas, las partes parecen igualar el todo en número de elementos. Citemos el ejemplo que ofrece Galileo en las *Consideraciones sobre dos nuevas ciencias*. La serie de los números cuadrados forma parte, o es un subconjunto propio, de la serie de los naturales. No obstante, es posible numerar la primera serie valiéndonos de la segunda:

1	4	9	16	25	36 ...
1	2	3	4	5	6 ...

Podría parecernos que la primera serie es *menor* que la segunda por estar contenida en ella y, sin embargo, podemos establecer una correspondencia biunívoca entre ellas, lo cual indica que

[53] En (24), noción común 5. Las nociones comunes llegan a ésta, la quinta; otras se añadieron posteriormente (no por Euclides). *Cf.* (25), p. 232 ss.

poseen el mismo número de elementos... ¿O acaso la serie de los naturales es un infinito *mayor* que el infinito de la serie de los cuadrados? Esta noción también fue considerada incoherente. Generalmente, se tendió a pensar que, o el infinito en acto no existía (Aristóteles) o que, de existir, los infinitos tendrían que ser iguales entre sí. Otros, como Nicole Oresme, Nicolás de Cusa y Galileo, optaron por decir que relaciones como *igual a, mayor* o *menor que*, no se aplican a los infinitos, sino únicamente a lo finito.[54]

Durante la Edad Media, existieron tres actitudes respecto de los infinitos desiguales y las relaciones todo-parte.[55] La primera actitud consistía en negar la posibilidad de un infinito en acto, por ejemplo, la eternidad del mundo, dado que conducía a la igualación de todo y parte. Es decir, no se resuelve la paradoja, sino que se rechazan las premisas que la originan. Un representante de este punto de vista fue San Buenaventura. La segunda actitud, que sería compartida por Galileo, no niega el infinito en acto; pero, ya que puede mostrarse que algunos infinitos son tanto iguales como desiguales entre sí, debe concluirse que, en realidad, son incomparables.[56] Por último, la tercera perspectiva consiste en cuestionar el uso de un mismo axioma todo-parte para cantidades finitas e infinitas. Esta idea se encuentra, más o menos explícita, en Henry Harclay —oxoniense contemporáneo de Bradwardine— y el agustino italiano Gregorio de Rímini (c. 1300-1358), personajes de los que se hablará en el capítulo V. La primera actitud sería, para Russell, producto típico de los prejuicios de los filósofos, quienes a) adoptan, sin examen, el axioma de finitud ("*una colección dada de muchos términos debe contener algún número finito de ellos*"[57]) por temor a violar el axioma euclídeo y b) extienden ilegítimamente a lo infinito las características y hábitos

[54] Concluye Galileo: "la multitud de los cuadrados no es menor que la de todos los números, ni ésta mayor que aquélla ...los atributos de mayor, menor e *igual no se* aplican a los infinitos, sino sólo a las cantidades finitas" (en (26), pp. 109-110).
[55] *Cf.* (54), pp. 570 ss.
[56] Es decir, no pueden aplicarse a las colecciones infinitas - o al menos, no en idéntico sentido - expresiones como *igual a, mayor que* o *menor que*, ni el axioma todo-parte, so pena de incurrir en contradicciones. Esto fue sostenido a finales del XIV por Nicole Oresme (†1382, *cf.* (70), n. 1, pp. 24-25) y más tarde, por Nicolás de Cusa (1401-1464) e incluso Newton. El Cusano insistió en que las dificultades con el infinito se originaban al intentar apresarlo con nuestra razón limitada (*cf.* (51), pp. 55-56).
[57] En (76), p. 248.

mentales derivados de lo finito.[58] Sobre la segunda actitud opina lo siguiente:

> ...la solución que propone [Galileo] no es la acertada. Lo cierto del caso es que el número de números cuadrados (finitos) es igual al número de números (finitos) ... Toda la dificultad...proviene de la creencia de que si *mayor* y *menor* son aplicables [al infinito], una parte del conjunto infinito deberá tener menos elementos que el todo y, cuando se niega ésto, toda contradicción desaparece.[59]

Las supuestas contradicciones del infinito, piensa Russell, tienen su origen en un desconocimiento de sus propiedades y en su asimilación con lo finito. La colección infinita se define exactamente por aquello que constituía un absurdo: posee partes que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el todo. La expresión *ser mayor que* debe sustituirse por la frase menos ambigua *contener un número mayor de términos*. En este sentido, que el todo no contenga un número mayor de elementos que la parte no es una contradicción. Ésta es la base de la teoría matemática moderna del infinito.

De acuerdo con Russell, las dificultades del continuo son, de hecho, dificultades respecto al infinito, pues una serie continua debe tener un número infinito de términos:

> Las paradojas de Zenón de Elea y los problemas sobre el análisis del espacio, del tiempo y del movimiento, los explica completamente la teoría moderna del continuo. Esto se debe a que se ha encontrado una teoría no contradictoria de acuerdo a la cual el continuo está formado por una infinidad de elementos distintos, lo que anteriormente parecía imposible.[60]

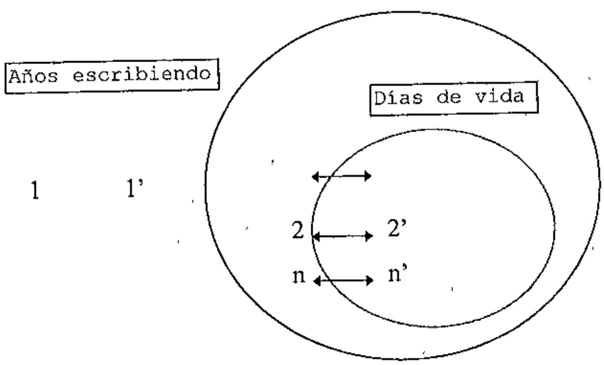
Por tanto:

> ... al liberar al infinito de contradicción, estamos al mismo tiempo mostrando la posibilidad

[58] *Vg.* la propiedad que poseen los números naturales de ser obtenidos, a partir de 1, por adiciones sucesivas de 1; es decir, que se obtienen contando, paso a paso (inductividad). Asimismo, la propiedad de los naturales de aumentar cuando se le añade 1 (no-reflexividad). Los números infinitos son no-inductivos (nunca se alcanzan contando; el primer número infinito carece de predecesor inmediato) y reflexivos (no aumentan cuando se les suma cualquier número finito o un conjunto infinito de cardinalidad inferior, ni disminuyen cuando se les resta).
[59] En (75), p. 92.
[60] En (73), p. 70.

lógica de la continuidad tal como es asumida en la ciencia.[61]

Pero, ¿cómo lograr que la igualdad entre un todo y alguna de sus partes no constituya una contradicción? En primer lugar, el axioma euclídeo es muy grato para el sentido común, pero no hay evidencia a su favor excepto la supuesta en él mismo. Russell sostiene que el axioma "no sólo es inútil, sino positivamente destructivo en matemática, y en contra de su exclusión no se puede argumentar nada salvo el prejuicio".[62] Para ilustrar el punto de vista cantoreano —que sí puede haber correlación biunívoca de todo y parte—, expone la paradoja de Tristram Shandy,[63] misma que no implica el axioma quinto y, por ello, debe ser aceptada, al contrario de la paradoja de Aquiles y la tortuga, que sí lo supone.[64] Shandy intenta hacer su biografía y tarda dos años en escribir la historia de sus dos primeros días de vida. A ese paso, se lamenta, tendrá más material del que puede ir narrando y nunca terminará. Pero, acota Russell, si viviera eternamente y siguiera escribiendo, aunque su vida estuviera llena de sucesos, ninguna parte de la misma quedaría sin ser escrita. Podría considerarse, el tiempo dedicado a escribir, como un todo respecto al tiempo vivido y ambos tendrán igual número de términos (infinito). Véase la figura siguiente:



[61] En (75), p. 159.
[62] En (76), p. 444.
[63] *Cf.* (76), pp. 442 ss.
[64] Russell interpreta a Zenón de este modo: aceptar que puedan correlacionarse término a término parte y todo, trae consecuencias absurdas. Si eso fuera posible, Aquiles, cuya trayectoria es parte de la trayectoria de su rival, nunca alcanzaría a la tortuga Por tanto, no es posible que la parte iguale al todo.

Sirva esto como ejemplo de la alteración que sufren las nociones de todo y parte cuando se trata de colecciones infinitas.

Por otro lado, deben hacerse varias distinciones, en opinión de Russell, para salir del embrollo. Cuando empleamos colecciones finitas, es imposible asimilar la parte al todo. En un todo finito, el todo y las partes pueden ser definidos tanto extensional como intensionalmente. La definición extensional consiste en la enumeración de los términos o individuos que conforman el conjunto. Un individuo del conjunto es parte de la extensión de éste y es lógicamente anterior a tal conjunto tomado colectivamente. Es decir, si existe el todo, es porque previamente existían las partes. En cambio, según la definición intensional, el todo es una clase de términos que tienen alguna relación dada con algún otro término. El todo es conocido por la(s) característica(s) común(es) a los miembros que agrupa; es tomado como un concepto-clase. No es necesaria la enumeración de los términos para definir el todo, pues basta con conocer las características que cada individuo debe poseer si y sólo si pertenece a la colección. En este caso, los miembros particulares y las subclases contenidas en el conjunto, no son lógicamente anteriores al mismo, no tienen que existir de antemano para que sea posible la definición intensional del todo. El todo y las partes se definen por conceptos-clase. Por ejemplo: por la definición del todo "europeos" sabemos, aun sin enumeración, que "ingleses" es una de sus partes; pues todo inglés es europeo, pero no viceversa.

Ahora bien, cuando se trata de colecciones infinitas, la definición extensional de todo y parte resulta imposible, por lo menos para nuestras limitadas capacidades, ya que nunca terminaríamos de enumerar los elementos de tales conjuntos (inclusive, por esta razón, podría cuestionarse si una serie infinita es un todo verdadero). Sin embargo, los todos infinitos sí aceptan la definición intensional:

> ...no es esencial para la existencia de una colección, o incluso para el conocimiento y razonamiento acerca de ella, que debamos ser capaces de pasar revista a uno por uno de sus términos. Esto puede ser visto en el caso de las colecciones finitas; podemos hablar de "la humanidad" o "la raza humana", aunque no conozcamos personalmente a muchos de los individuos de esta colección... conocemos varias características que cada individuo tiene si

> pertenece a la colección, y que no tiene si no pertenece a ella. Y exactamente lo mismo sucede en el caso de las colecciones infinitas: pueden ser conocidas por sus características aunque sus términos no puedan ser enumerados. En este sentido, una serie *interminable* puede, no obstante, formar un todo, y pueden existir nuevos términos más allá de toda ella.[65]

El todo infinito, cuyas partes poseen igual complejidad que él, es un todo de tipo distributivo, no colectivo. Este último es aquel en donde a) el todo equivale a tales y tales individuos; b) una parte se toma enumerando algunos, no todos los individuos; c) el individuo es parte del todo y d) ni el todo ni las partes *necesitan tomarse* como clases. Por el contrario, en el todo distributivo, es decir, el definido por intensión, tanto el todo como la parte deben ser tomados como clases. La relación parte-todo se explica como sigue: a es un concepto-clase cuya extensión es parte del concepto-clase b, si para todos los valores de x, "x es un a" implica "x es un b". Decir "a es similar a b" significará que existe una relación biunívoca **R** que cumple estas condiciones: "si x es un a existe un término y de la clase b tal que $x\mathbf{R}y$; si y' es un b existe un término x' de la clase a tal que $x'\mathbf{R}y'$".[66] No puede demostrarse que, siendo a parte de b, tal relación resulte inverificable en algún caso, pues sería necesario efectuar una enumeración completa, lo cual es imposible en la colección infinita.

Ya con estos elementos puede darse cuenta del ejemplo de Galileo: nos parece contradictorio que la clase de los cuadrados sea igual a la de los naturales solamente porque estamos tomando todo y parte definidos por enumeración. Mas, si los definimos intensionalmente, esta sensación desaparecerá, pues será posible sostener que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre parte y todo (*i.e.* que son similares) y, a la vez, que los cuadrados son una parte propia de los naturales. Esto último no podremos demostrarlo por enumeración, pero sí podemos deducirlo de las siguientes definiciones intensionales: "si x es número cuadrado, x es un número natural" y "si x es un número natural, no se deduce que x sea número cuadrado".

Es casi seguro que Russell no tuvo noticia de la existencia de la tercera actitud medieval

[65] En (75), p. 187.
[66] En (76), p. 446.

mencionada más arriba. Me parece que, en la Edad Media, sí llegaron a sospecharse algunas características de las colecciones infinitas, las cuales, posteriormente, se tornaron sus propiedades definitorias, como lo es la de poseer partes equivalentes al todo. Asimismo —contra lo que solían afirmar Cantor y Russell—, desde entonces se sabía que no todo lo que vale para lo finito puede transferirse a lo infinito; que este último no puede comprenderse con las categorías acostumbradas para dar cuenta de lo finito. Por ello, considero que las acusaciones de Russell —ignorancia absoluta de las propiedades del infinito, una masa de prejuicios "finitistas" y el dogma-axioma quinto— no dan cuenta cabalmente de por qué el problema del continuo ha sido tan polémico y permaneció (¿permanece?) sin solución por tantos siglos. En suma, no basta con disolver las supuestas contradicciones del infinito para determinar cuál es la doctrina verdadera respecto a la composición del continuo, pues, en mi opinión, existen dificultades de otra índole implicadas en el asunto. Para hacer plausible esta afirmación, daré varias razones.

(i) La hipótesis finitista también ha sido atacada, no sólo las hipótesis que manejan un número infinito de individuos o la divisibilidad infinita. Se ha observado que la hipótesis finitista conduce a conclusiones como ésta, señalada por Bradwardine: si el continuo está formado por un número finito de átomos, la diagonal medirá lo mismo que el lado del cuadrado, pues es posible unir los puntos del lado con otros tantos en la diagonal.[67] Entonces, no han existido únicamente argumentos prejuiciosos contra el infinito *per se* (por cierto, Bradwardine defiende la divisibilidad *ad infinitum* y Harclay la composición *ex atomi* en número infinito).

(ii) En el apartado inmediato anterior (*supra*, 2.2.1), aludí a algunos de los argumentos y réplicas presentados por Bayle. En ninguno de ellos, creo, surge la cuestión de si es posible una totalidad infinita o no, si todo y parte pueden ser iguales, etc. No parece suponer ni el axioma euclídeo ni el llamado axioma de finitud y, sin embargo, los problemas persisten.

(iii) Existen argumentos contra los átomos en número infinito que descansan sobre la idea de

[67] Más adelante, en 4.3.2, se expondrá el argumento completo.

que la inmediatez entre los átomos no produce *continuidad* (*v.g.* la refutación, por parte de Bradwardine, de la tesis de Harclay),[68] *y no sobre* la imposibilidad del número infinito de indivisibles.

(iv) Resumiré mi opinión acerca de la perspectiva de Russell, retomando algunas ideas de Poincaré. Como menciono en la primera parte de este capítulo (2.1.2), el autor evita confundir el continuo matemático con el físico. Por otra parte, menciona que la noción de continuidad consiste en la posibilidad de hallar —en una recta o un plano— dos puntos infinitamente próximos y expone una definición analítica del continuo que luego criticará:

> Un continuo de *n* dimensiones es un conjunto de *n* coordenadas, es decir, un conjunto de *n* cantidades, susceptibles de variar *independientemente* una de la otra, y de tomar todos los valores reales que satisfacen ciertas desigualdades.[69]

Aunque matemáticamente impecable, tal definición no parece del todo convincente, pues:

> ... excluye el origen intuitivo de la noción del continuo y de todas las riquezas que encierra esta noción. Figura en el tipo de definiciones que se han hecho tan frecuentes en la matemática, desde que se tiende a "aritmetizar" esta ciencia. Tales condiciones, irreprochables ... desde el punto de vista de la matemática, no podrían satisfacer a la filosofía. Reemplazan el objeto por definir y la noción intuitiva de este objeto, por una construcción hecha con materiales más simples; se ve desde luego que tal construcción es posible con esos materiales, pero también se observa que podrían hacerse con ellos muchas otras construcciones. Lo que no deja de verse es la profunda razón por la cual se reunieron los materiales de esa manera y no de otra. *No quiero decir que semejante "aritmetización" sea algo malo; simplemente afirmo que no lo es todo.*[70]

Comparto esta última aseveración. En el próximo apartado, haré referencia a la controversia Clarke-Leibniz sobre la naturaleza del continuo y a las cuestiones centrales planteadas en la segunda antinomia de la razón pura, pues proporcionan buenos ejemplos de que el problema que tratamos no es reductible al plano puramente matemático. La posición de Russell tiende a ser la

[68] Véase la refutación mencionada en 4.3.2.
[69] En (64), pp. 21-22.

opuesta y no la considero completamente adecuada.

2.2.3 Divisibilidad al infinito y límites de la razón.

> ¿No ha progresado nada la filosofía? Si alguien rasca donde pica, ¿debe considerarse eso como progreso? Si *no*, ¿significa esto que no fue un acto de rascar auténtico? ¿Ni un picor auténtico? ¿No podría prolongarse durante mucho tiempo esta respuesta al estímulo, antes de que se encontrara un remedio para el picor?
>
> Wittgenstein, Ludwig *Vermischte Bemerkungen.*

Leibniz cuenta, en el *post scriptum* de su cuarta misiva a Clarke, que, cuando joven, dejóse llevar por su imaginación y creyó en las agradables ficciones del vacío y los átomos, pero que la razón lo condujo finalmente al camino correcto. Los hombres, dice, detienen su investigación en esas ficciones y pretenden haber dado con los primeros elementos de las cosas. Se supone que la naturaleza no va más allá, que es finita, como nuestra mente. Por el contrario, dadas la grandeza y majestad divinas y porque no podemos atribuirle una creación imperfecta:

> ... el último corpúsculo está de hecho subdividido *in infinitum* y contiene un mundo de otras criaturas, las cuales faltarían en el universo si ese corpúsculo fuera un átomo, esto es, un cuerpo de una pieza entera, sin subdivisión.[71]

El átomo es una ficción arbitraria, pues no podemos dar ninguna razón para detener la progresión de la subdivisión en la naturaleza. Tampoco el vacío posee una razón suficiente. No hay un principio para determinar qué proporción de materia debería haber, de todos los grados posibles entre el pleno y el vacío. Podría decirse que tendría que haber igual cantidad de ambos. Pero, como la materia es más perfecta que el vacío, merece la preferencia y debe existir más materia que vacío. Y ya que la perfección de la materia respecto del vacío es como la de algo existente respecto de nada, se concluye que el vacío no existe.

---

[70] *Op. cit.*, pp. 22-23 El subrayado es mío.
[71] En (2), p. 43-44.

El principio de razón suficiente prueba que el espacio no puede ser absoluto, subsistente *per se* —como quieren los vacuistas—, sino un orden o relación entre las cosas coexistentes. El espacio es la posibilidad de situar cuerpos, así que no existe sin ellos.

En defensa del atomismo —y de Newton—, Clarke argumentaba así: si hay partículas perfectamente sólidas de materia y se dividen en partes con la misma figura y dimensión, estas partes serán átomos exactamente iguales. Si no las hay, no existe la materia. Pues, a medida que se dividan y subdividan las partes de un cuerpo, la proporción de poros irá en aumento, comparada con la materia sólida. Si se prosigue la división infinitamente y no se llega a partículas perfectamente sólidas, el cuerpo consistirá de poros solamente, sin materia, lo cual resulta absurdo.[72] Por otra parte, contra la doctrina relacional de Leibniz, Clarke sostiene que el espacio no está limitado por los cuerpos, sino que existe tanto en ellos como fuera de ellos. El espacio no está encerrado entre los cuerpos; los cuerpos existen en un espacio infinito y están delimitados por sus propias dimensiones.

De acuerdo con la argumentación leibniziana, estar en el espacio es, siempre, estar compuesto. Si las supuestas partículas simples son extensas, entonces poseerán partes, como el espacio mismo. El espacio es continuo; la materia también tendrá que serlo. Para Clarke, por el contrario, el espacio es indivisible y los objetos materiales son divisibles finitamente. Considerar "partido" el espacio es una contradicción en los términos, pues "debe haber espacio en la partición misma; lo cual es suponerlo partido y aún no partido a la vez".[73] Dios es un ser infinito y eterno entre cuyos atributos o consecuencias se encuentra el espacio. La inmensidad u omnipresencia de Dios a través del espacio no implica una división de Su sustancia en partes, así como Su duración, o continuidad en la existencia, no supone una división de Su existencia en partes. Clarke concluye: "no hay dificultad aquí, sino la que surge del abuso figurativo de la palabra *partes*".[74] Mas el contraataque de Leibniz no se hace esperar:

[72] *Op. cit.*, p. 54.
[73] *Ibid.*, p. 31

> Objeté que el espacio no puede estar en Dios, porque [el espacio] posee partes. Al respecto, el autor [Clarke] busca otro subterfugio, apartándose del sentido que reciben las palabras; sosteniendo que el espacio no tiene partes, porque sus partes no son separables y no se puede remover una de otra mediante división. Pero es evidente que el espacio posee partes, ya sean separables o no; y ellas pueden serle asignadas al espacio por los cuerpos que están en él o por líneas y superficies que pueden ser dibujadas y descritas en él.[75]

En fin, ambos contrincantes podrían acumular argumentos indefinidamente sin llegar a un acuerdo. ¿Qué es lo que se encuentra en el fondo de esta situación, de esta oposición infructuosa de doctrinas quizá inconmensurables? ¿Por qué pueden rebatirse entre sí una y otra vez, sin que sea posible afirmar que alguno de ellos tiene la última palabra? Pierre Bayle ya había detectado el mismo *impasse*.[76] Cada una de las "sectas" que proponen cierta composición del continuo (v. *supra* 2.2.1), cuando ataca a las demás, triunfa y destruye a sus oponentes. Sin embargo, le tocará el turno de ser anulada, a su vez, por las otras dos. Pero, entonces, ¿carecen de sentido estas especulaciones? No del todo. Para Bayle, el beneficio que podemos obtener de ellas radica no en la adquisición de nuevos conocimientos, sino en hacernos conscientes de los límites de nuestro entendimiento.[77]

Y no es otro, me parece, el objetivo perseguido por Kant al plantear las antinomias de la razón pura. Las antinomias son conflictos de la razón consigo misma y representan un escándalo, pues implican una incapacidad de resolver, de hallar argumentos definitivos a favor de alguna de las tesis sostenidas —es decir, cada antinomia denuncia una mancha de irracionalidad en el seno de la razón. La segunda antinomia consigna, específicamente, el problema de si la materia consta de elementos simples o no. La tesis asume una teoría atómica de corte newtoniano; la antítesis corresponde a la metafísica leibniziana.[78]

---

[74] *Ibid.*, p. 32.
[75] *Ibid.*, p. 73.
[76] *Cf.* (11), pp. 540b ss.
[77] De hecho, Bayle cita a los lógicos de Port-Royal: "La utilidad que se puede obtener de estas especulaciones no es simplemente la de adquirir esos conocimientos [se refiere a la inconcebible divisibilidad infinita], que son por ellos mismos bastante estériles; pero es la de aprender a conocer los límites de nuestro espíritu, y a hacerle reconocer...que hay cosas que son, aunque no sea capaz de comprenderlas y es por ello que es bueno fatigarlo con esas sutilezas, a fin de domeñar su presunción..." (en (10), p. 208).
[78] *Cf.* (1), p. 46 ss., para una argumentación a favor de esta interpretación de la segunda antinomia, que coloca a los newtonianos del lado *dogmático* y a los leibnizianos como *empiristas*.

No es apelando a la experiencia como podrá darse término a la disputa, pues ambos bandos pretenden que sus doctrinas son verdades acerca de la naturaleza de las cosas como son *en sí mismas*, no acerca de la forma en que *nosotros* las experimentamos. Lo que experimentamos, nunca se nos presenta como algo absolutamente simple, pero tampoco como una infinita composición en acto. Y la experiencia sólo ofrece resultados contingentes, no indudables ni necesarios. En cambio, cada contrincante asegura estar proporcionando conocimiento metafísico, de la realidad tal cual, mismo que posee absoluta certeza.

Así, la antinomia no puede decidirse por vía racional o empírica. Kant propondrá una salida distinta: no hay que optar por alguno de los partidos, sino descubrir un malentendido común a los dos. La antinomia no es un conflicto genuino; no se da entre juicios *sintéticos a priori* sobre el mundo, sino entre conclusiones dogmáticas. Éstas aparentan ser legítimas, mas no lo son debido a que descansan en una ilusión trascendental: los dogmáticos hipostasían lo que existe sólo *para* el sujeto y lo toman como objeto real existente aparte del pensamiento; no deslindan, como la filosofía crítica, el fenómeno del noúmeno e ignoran hasta dónde sigue siendo válida la aplicación de los principios del entendimiento. Kant considera, al igual que Bayle, que las antinomias pueden resultar de gran utilidad para el conocimiento humano y señala varios de sus beneficios:

(i) contribuyen a que la filosofía despierte de su sueño dogmático y emprenda un examen crítico de la razón. El filósofo crítico no dirá nada sobre la naturaleza de los objetos; sólo señalará que los supuestos de ambas partes conducen a cuestiones vacías y que no deben extenderse los principios del entendimiento más allá de los límites de la experiencia, so pena de producir tesis pseudorracionales. Cuando se aclara el malentendido, la tesis y la antítesis pierden su apoyo aparente;

(ii) muestran la futilidad de los conflictos dogmáticos. La ganancia que las antinomias producen está en el darse cuenta de que la disputa interminable es evidencia de que, en realidad, los contrincantes pelean por nada. La antinomia es

> ... un campo de batalla dialéctico en el que triunfa la parte que puede atacar y en el que sale indudablemente vencida la que se ve obligada a adoptar una postura meramente defensiva. Incluso los caballeros fornidos saben muy bien, tanto si sostienen una buena causa como una mala, que conseguirán la corona de la victoria si se aseguran el privilegio de efectuar el último ataque y no están obligados a aguantar una nueva embestida del adversario ... Como jueces imparciales debemos prescindir de si los combatientes luchan por una buena o por una mala causa, dejando que decidan la cuestión entre ellos. Acaso vean por sí mismos, una vez que estén más agotados que heridos, la nulidad de su lucha y se separen como buenos amigos.[79]

Los contendientes pretenden hablar de algo que no puede pensarse mediante ningún predicado, pues se encuentra fuera de la esfera de los objetos que pueden sernos dados;

(iii) la revisión de la razón a la cual conducen posee efecto liberador en la filosofía pues, mediante tal revisión,

> ...podemos deshacernos, con unos costos muy reducidos, de una infinidad de elementos dogmáticos, poniendo en su lugar una crítica sobria, una crítica que, como verdadero catártico, eliminará, afortunadamente, las ilusiones vanas y su consecuencia, la presunción de saberlo todo.[80]

Considero pertinente incluir una breve digresión aquí. Aunque diversos pensadores fueron conscientes de los límites de nuestro entendimiento, cayeron de nuevo en afirmaciones dogmáticas, como si tuviesen acceso a la cosa en sí. Antes hemos mencionado a Leibniz, quien reconoce la finitud de la mente humana, mas se sirve de ello para afirmar que la infinita divisibilidad no puede ser frenada. Algo semejante encontramos en los autores de la *Logique ou l'art de penser*. Según Arnauld y Nicole, debemos distinguir entre tres géneros de objetos: aquello que es posible conocer clara y ciertamente; aquello que no se conoce claramente, pero podría ser conocido y, finalmente, aquello que es *imposible* conocer con certeza, ya sea porque carecemos de principios para lograrlo o porque son materias *desproporcionadas* en relación a nuestro espíritu. No deberíamos investigar lo

[79] En (37) A 423, B 451, p. 393.
[80] *Op. cit*, A 486, B 514, p. 434.

que excede nuestras capacidades:

> De este género son todas las cuestiones que conciernen a la potencia de Dios, la cual es ridículo querer encerrar en los estrechos límites de nuestro espíritu y, en general, todo lo que se relaciona con el infinito; pues siendo finito nuestro espíritu, se pierde y deslumbra en la infinitud, y queda abatido bajo la multitud de pensamientos contrarios que ella produce.[81]

Y, sin embargo, "hay cosas que son incomprensibles en su manera de ser y que son ciertas en su existencia; no se puede concebir cómo pueden ser y, sin embargo, es cierto que son",[82] *verbi gratia*, la infinita divisibilidad:

> ¿Qué medio hay de comprender que el más pequeño grano de materia sea divisible al infinito y que jamás se pueda llegar a una parte tan pequeña que ella no solamente no encierre muchas otras, sino que no encierre un infinito de ellas; que el más pequeño grano de trigo encierre en sí, aun cuando más pequeñas en proporción, tantas partes como el mundo entero; que allí se encuentren realmente todas las figuras imaginables y que contenga un pequeño mundo con todas sus partes ...; y que no hay parte alguna de este grano que no contenga además, un mundo proporcional? ¿Cuál puede ser, en este pequeño mundo, la parte que corresponda al tamaño de un grano de trigo ... ? Sin embargo, esta parte cuya pequeñez nos es ya incomprensible, contiene aún otro mundo proporcional y así al infinito ... Todas estas cosas son inconcebibles y, sin embargo, es preciso, por necesidad, que sean, puesto que se demuestra la divisibilidad de la materia al infinito y puesto que la geometría nos proporciona pruebas tan claras como cualquiera de las verdades que ella nos descubre.[83]

Se duda, pues, de la capacidad de nuestro espíritu para dar cuenta de la infinita divisibilidad, mas no de esta última.

Otro tanto sucede con la tesis opuesta. Berkeley, por ejemplo, sostiene que existe un límite último más allá del cual dejamos de percibir algo. En cuanto a la divisibilidad, el límite de lo perceptible se alcanza después de un número finito de divisiones. Y dado su principio, según el cual ser es ser percibido, cuando no hay ya percepción, tampoco habrá ser. Los objetos límite de la

[81] En (10), p. 205.
[82] *Op. cit.*, p. 206.
[83] *Ibid.*, pp. 206-207.

percepción son los llamados *minima sensibilia*. El objeto percibido está compuesto de un número finito de tales *minima*, que son indivisibles y extensos.[84] De manera semejante a Epicuro, Berkeley afirma que, si los *minima* pudieran dividirse —*per impossibile*—, pasarían del ser al no ser. Y, así como un ser no puede estar formado por nadas, "lo que es visible no puede estar hecho de cosas invisibles".[85] Lo que puede hacerse en principio o matemáticamente, *i.e.* proseguir la división *ad infinitum*, no equivale a lo que puede hacerse empíricamente. Por otro lado, la imaginación no alcanza para que nos representemos mentalmente un número infinito de partes en acto, como totalidad acabada. El obispo de Cloyne tomó dos posturas, en distintas etapas, acerca de la creencia de los matemáticos en la posibilidad de la división infinita de las magnitudes: primero, sostuvo que a) no hay percepción alguna que pudiese dar sustento a una idea así, por tanto, se trata de una idea abstracta. Hablar de tal división es absurdo, carece de sentido, pues se están empleando palabras sin contenido que aparentan decir algo; más tarde, modificó esta tesis por b) las expresiones infinitarias de los matemáticos pueden aceptarse mientras mantengan un sentido instrumental, sin compromisos ontológicos.

Berkeley acepta la infinita divisibilidad en tanto ficción útil y conserva su compromiso con los *minima*, sean visibles o tactiles. A su atomismo epistemológico -hay indivisibles perceptuales con sus respectivas ideas- corresponde un atomismo ontológico: la extensión perceptual se divide hasta cierto límite, luego del cual ya no es perceptible y, más aún, ya no es.

Hemos mencionado que este salto -de lo que es para mí a lo que es en sí- es un supuesto fundamental en la antinomia. ¿Cómo ha de manejarse este asunto, en términos kantianos? El único tratamiento adecuado es un *método escéptico*, mediante el cual se toma distancia de los partidos implicados en la discusión y se localiza el origen del malentendido, volviéndolo inofensivo. El método en cuestión no es llano escepticismo, pues, a diferencia de este último

[84] V. un tratamiento detallado de este tema en (68), caps. I y III. También en (67), cap. 2.
[85] Citado en (67), p. 47.

> ... apunta a la certeza, tratando de descubrir en esa lucha, que es sincera por ambas partes y está llevada con la cabeza, el punto que ha desencadenado el malentendido y haciendo como los legisladores prudentes, que de la confusión de los jueces en los pleitos extraen enseñanzas para sí mismos acerca de los defectos e imprecisiones de sus leyes.[86]

Ahora bien, ¿es posible erradicar para siempre las afirmaciones dogmáticas que conforman la antinomia? No, de acuerdo con Kant, porque no se trata de proposiciones sofísticas comunes, que giran en torno a cuestiones arbitrarias planteadas a voluntad, sino de problemas con los que "*necesariamente* (énfasis mío) tropieza toda razón humana al avanzar".[87] Asimismo, tesis y antítesis no conforman una ilusión artificial que desaparece cuando la conocemos, sino que ésta es

> ... una ilusión natural e inevitable. Incluso cuando esta ilusión ha dejado de engañarnos sigue pareciendo lo que no es, aunque ya no nos confunda.[88]

Existe, por tanto, una tendencia innata a hacer afirmaciones metafísicas, a hablar sobre lo que no se puede hablar (lo nouménico). Y parece que nuestro único resguardo consiste en mantener una actitud de vigilancia epistemológica constante, en conservar un temperamento mental crítico. Pero, además podemos, según Kant, convertir las afirmaciones dogmáticas en principios regulativos o reglas de procedimiento en relación con la experiencia, a fin de que sean útiles en la investigación científica de fenómenos. Así, la idea de la finita o infinita divisibilidad de la materia se convierte en la regla o principio de la razón "de no tener nunca por absolutamente completo el regreso empírico en la descomposición de lo extenso, de conformidad con la naturaleza de este fenómeno".[89] Ni un límite en la regresión de la división (lo simple), ni un todo infinitamente dividido, nos son dados en la intuición sensible; sólo captamos partes finitas una y otra vez, es decir, una serie de divisiones siempre condicionada empíricamente. El mundo no se nos da como una totalidad, ya sea infinitamente divisible o bien compuesta de lo simple; no podemos decir siquiera que es una totalidad en sí mismo. La razón busca un más allá de tal serie de fenómenos, una condición incondicionada, pues se guía por el siguiente principio: "*si se da lo condicionado, se da también la*

[86] En (37), A 424, B 452, p. 393.
[87] *Op cit.*, A 422, p. 392.
[88] *Ibid.*, B 450, p. 392.

suma de las condiciones y, por tanto, lo absolutamente incondicionado, que constituye el medio que hace posible lo condicionado".[90]

Esta condición incondicionada es una idea trascendental, misma que puede ser admitida con tal que sea meramente *inteligible*, que no pertenezca a la serie fenoménica y, por tanto, que no interrumpa su continuo regreso. Lo incondicionado se puede pensar de dos modos: a) como la serie entera, la totalidad de lo condicionado que es, ella misma, incondicionada; b) como una parte de la serie a la cual están subordinados los demás miembros y que no depende de otra condición. En el caso de la segunda antinomia, lo incondicionado sería a') una serie infinita dada por entero (la división infinita en acto, el que los fenómenos en el espacio consten de una multitud infinita de partes en acto), o b') un primer elemento en la serie de partes de un todo, *i.e.* lo simple.

Lo que nos da la experiencia, sin embargo, es *siempre finito*, son siempre conceptos respecto de los cuales la idea trascendental es o demasiado grande (la división infinita completada) o demasiado pequeña (la parte simple en donde cesa la división). Mas ello no nos autoriza a declarar *imposible* lo infinito. Kant considera que, argumentando de esta manera, se llega a una *avenencia* entre las afirmaciones de la antinomia; el entendimiento, cuyo campo de acción es lo finito, coexiste con la razón, que exige lo infinito. En términos aristotélicos: sólo experimentamos un infinito en potencia; el infinito en acto no existe *de facto*, se trata de un ideal en cuyo contraste adquiere sentido el infinito potencial.[91]

Las ideas trascendentales que salen a relucir en las antinomias *no* proporcionan información

[89] *Ibid.*, A 527-B 555, p. 460.
[90] *Ibid*, B 436, p. 384.
[91] Quizá podríamos comparar este proceder con el de G Cantor: la definición de infinito es anterior a la de lo finito y la hace posible. El conjunto infinito es equivalente a una de sus partes, ambos son de la misma potencia. El conjunto finito no es infinito, no posee partes de igual potencia que la del todo. El infinito es la noción primera y positiva; lo finito es su negación. A. Koyré comenta al respecto que "el concepto de infinito en acto no podría ser reducido o reconstruido a partir de otros conceptos. Los conceptos de infinito virtual, de aumento infinito y de variación sin fin, con los cuales se ha querido relacionar al infinito en acto o con los que incluso se ha querido sustituirlo, descansan, por el contrario, sobre él, y lógicamente lo presuponen. El infinito virtual no es posible lógicamente, mas que sobre la base del infinito actual. es el acto el que fundamenta la potencia y no a la inversa" (en (42), p 23).

final sobre cómo es realmente el mundo:

> ...el principio de la razón no es en realidad más que la *regla* que impone en la serie de las condiciones de fenómenos dados un regreso al que nunca está permitido detenerse en un incondicionado absoluto... ella [la regla] no puede decir *qué sea el objeto*, sino *cómo hay que efectuar el regreso empírico* si se quiere obtener un concepto completo de ese mismo objeto... No se puede, pues, pretender con ello decir que la serie de las condiciones de un condicionado dado sea en sí finita o infinita...[92]

Tales ideas, al contrario de las categorías del entendimiento, no son aplicables a los datos de la intuición sensible, no constituyen o conforman objetos y no pueden ser empleadas para conocerlos. Tampoco es legítimo darles un *uso trascendente*, fuera de los límites de la experiencia, so pena de caer en ilusiones como las antinomias. No obstante, estimulan la investigación en vista de su *uso regulativo*: la tarea de la razón es dar unidad sistemática a todas las operaciones empíricas del entendimiento y las ideas sirven para lograr tal objetivo, orientando la investigación hacia la unidad total que cada una representa. Resulta útil para el científico estudiar la naturaleza *como si* ésta fuera una totalidad, suponiendo que posee unidad y que cuanto acaece puede subsumirse bajo las mismas leyes -entonces, las ideas trascendentales confieren a los fenómenos inteligibilidad:

> ...lo peculiar de la razón a este respecto, lo que ella intenta lograr es la *sistematización* del conocimiento, es decir, su interconexión a partir de un solo principio. Esta unidad de la razón presupone siempre una idea, la de la forma de un todo del conocimiento... esta idea postula en el conocimiento del entendimiento una unidad completa gracias a la cual este conocimiento sea, no un agregado fortuito, sino un sistema ligado por leyes necesarias.[93]

Las ideas funcionan como principios heurísticos que impulsan al espíritu para que recorra sin descanso la cadena causal o la serie fenoménica, para que no se contente con lo ya establecido y continúe tratando, tanto de extender el campo de la experiencia hasta su máximo, como de ir dando mayor unidad sistemática a los fenómenos a través de leyes causales —aunque, por otra parte, este acercamiento sea asintótico—:

---

[92] *Ibid*, A 509-B 537 a A 510-B538, pp. 448-449.

[93] *Ibid*, A 645-B 673, p. 532..

> ...la coherencia sistemática que la razón puede proporcionar al uso empírico del entendimiento no sólo asegura su ampliación, sino incluso su corrección. El principio de esta unidad sistemática es también objetivo, pero de modo indeterminado...como principio meramente regulador y como máxima destinados a fomentar y reforzar hasta lo infinito (indeterminado) el uso empírico de la razón, abriendo nuevos caminos desconocidos para el entendimiento, pero sin jamás oponerse con ello a las leyes de dicho uso empírico.[94]

2.3 RECAPITULACIÓN

¿Por qué se ha recurrido insistentemente a la historia de la filosofía en los tres primeros apartados y en la primera sección del presente capítulo? ¿Cuál es el motivo que anima la incursión en la doctrina kantiana? Respondo primero a la última cuestión. Considero de gran utilidad los resultados que obtiene Kant en su análisis de las antinomias. No debemos ceder, al enfrentarnos con el laberinto del continuo, ante ninguna de estas dos tentaciones: el dogmatismo que defiende sólo una de las opciones, negándole, de entrada, todo crédito a las demás, lo cual impide un diálogo fructífero; la desesperación escéptica, que se limita a lamentarse por la estrechez de la razón y mina todo posible avance, confinándonos al papel de observadores pasivos de la contienda. Si procedemos valiéndonos del método escéptico, nos habremos librado de caer en cualquiera de los extremos, los cuales, pensaba Kant, representaban la muerte o la eutanasia —respectivamente— de la filosofía sana. Me parece digno de tomar en cuenta, por otra parte, el hecho de que la ilusión dialéctica sea irresistible y pertinaz y que Kant quisiera prevenir confusiones futuras. Puede recaerse una y otra vez en ella —no es tan fácil deshacerse de la metafísica— por lo cual es deseable mantener la actitud vigilante, la distancia crítica ante los contendientes. Otro elemento importante en la doctrina kantiana, que aparece también en autores anteriores (*v.g.* Berkeley), es la distinción entre lo que es *de facto* y lo que es *de iure*, con lo cual puede sortearse la falacia descriptivista. Mi intención es poder aplicar estos resultados como directrices al momento de sopesar los argumentos de Bradwardine, así como los de sus interlocutores, para lograr una valoración lo más equilibrada posible.

---

[94] *Ibid*, A 680-B 708, p. 553.

La primera pregunta tendría su respuesta completa en el primer capítulo y el comienzo del segundo, pero me gustaría añadir aquí algo expresado por A.W. Moore:

> ...la historia sirve como un útil correctivo contra aquellos inclinados a decir que, mediante los esfuerzos combinados de gente como Bolzano, Dedekind y Cantor, hemos sido, por fin, llevados a ver lo que la infinitud es realmente: una propiedad compartida por cualquier conjunto cuyos miembros puedan ser puestos en relación biunívoca con los miembros de uno de sus subconjuntos propios -como si *esto* fuera la última palabra acerca de todo lo que inquietaba a Aristóteles, Kant, Hegel y los demás.[95]

¿Se ha domesticado ya la noción de infinito o a su pareja, la noción de continuo? Sin duda, el sentido técnico de "infinitud" contribuye a aclarar lo que antes era un misterio, por ejemplo, las paradojas implicadas en las colecciones infinitas.[96] La palabra "continuidad" adquiere un sentido muy preciso; es la propiedad de series que: a) no son numerables, es decir que, aunque tomemos sus términos en orden adecuado, nunca podremos hacerlos corresponder uno a uno con los enteros finitos, porque siempre habrá alguno que escape a la enumeración (*v.g.* el conjunto de los reales no puede ser numerado con los naturales, porque posee un grado de infinitud *mayor*); b) carecen de primero o último término; c) son compactas, hay un término entre cualesquiera otros dos.[97]

La teoría matemática del infinito permite hablar de totalidades infinitas de manera coherente y precisa. Cantor hizo posible, como Russell proclama, la aceptación de lo que otrora fuera contradictorio: una colección infinita que puede considerarse como un todo completo, en donde la parte equivale al todo. Tómese, por ejemplo, la serie de los números naturales: representan un proceso sin fin, pero este hecho se reconoce de una sola vez, como si captásemos de golpe la serie completa, un infinito en acto. Cantor se concibe a sí mismo como dando al traste con la tradicional perspectiva aristotélica, según la cual, el infinito matemático es siempre potencial. De acuerdo con su teoría, la serie infinita de los naturales es concebible como un conjunto genuino sin contradicción y, como tal, puede asignársele una cardinalidad, es decir, existe un número infinito

[95] En (51), p. 198.
[96] Lo que sigue está basado en los cap. 8 y 13 de (51).
[97] *Cf.* (76), pp. 370-371. Para mayores precisiones sobre este tema, v. el apéndice técnico.

que representa la cantidad de elementos en tal conjunto. Esto cambió el modo de pensar acerca de las series infinitas y se opuso radicalmente al sentido común. En cierto sentido, las volvió finitas, comprensibles, definibles o delimitables. Sin embargo, el mismo desarrollo de sus ideas lo condujo a afirmar que ciertas totalidades son multiplicidades demasiado grandes para ser consideradas como un todo, series cuya infinitud impide que sus miembros sean reunidos en un conjunto, pues no habría un conjunto lo suficientemente grande para tal fin. Se trata de las totalidades *inconsistentes*, descritas como *absolutamente infinitas*. Un ejemplo sería el conjunto de los números ordinales. Cada ordinal es sucedido por otro; cada conjunto de ordinales puede ser sucedido por otro ordinal. Todos estos números podrían ser agrupados en un conjunto infinito. Por definición, si tal conjunto existe, debería haber un primer ordinal que fuese el sucesor de todos los demás. Pero el sucesor no está dentro el conjunto, pues ninguno de sus miembros sería lo suficientemente grande para medirlo. Entonces, el supuesto conjunto de todos los ordinales no puede contenerlos a todos; la serie de ordinales no existe *qua* conjunto, porque tal existencia sería autocontradictoria. Cantor había demostrado que ciertos infinitos son *numerables*, es decir, que podían ser puestos en correspondencia uno a uno con el conjunto de enteros positivos, por lo cual eran del mismo tamaño que esa serie. Sin embargo, descubrió también infinitos *no numerables*, como la mencionada serie de los ordinales. Raymond Smullyan explica la misma idea como sigue:

> ...dada cualquier enumeración S_1, S_2, ... S_n, ... de conjuntos [tanto finitos como infinitos] de enteros positivos, existe un conjunto S de enteros positivos que es diferente de cualquiera de los S_n, esto es, el conjunto de todos los n tal que n no pertenece a S_n. Así, la secuencia infinita S_1, S_2, ... S_n, ... falla en contener a *todo* conjunto de enteros positivos, ya que el conjunto S ha quedado fuera. Por lo tanto, el conjunto de todos los conjuntos de enteros positivos no es numerable.[98]

Para Cantor, una totalidad inconsistente como ésa se resiste al tratamiento matemático, elude nuestra comprensión. Es un infinito que siempre escapa: "lo Absoluto sólo puede ser reconocido y admitido, nunca conocido, ni siquiera aproximadamente".[99] Podemos pensar que hay aquí una

[98] En (79), p. 222.
[99] Citado en (51), p. 128

tensión entre lo que está permitido decir (*i.e.* que lo absoluto no existe *de facto*) y lo que se quiere decir (*i.e.* que de algún modo lo captamos). Esto nos conduce a una paradoja subyacente a los temas tratados en este capítulo. Si lo infinito no deja de ser lo inaccesible, lo que no se deja reducir a nuestras categorías; si definirlo es forzarlo a entrar en un marco limitado, sólo apto para lo que es también limitado, es porque la noción de infinitud quizá es incoherente y hasta desechable (como pensaba Hume -y Berkeley en un principio). Esta solución es extrema y tal vez no adecuada. ¿Cómo podría entenderse el uso continuo que hacen los matemáticos de ese concepto? ¿Acaso la matemática en bloque está equivocada? Otro camino es reconocer que, aunque está allí, no podemos pensarlo ni decir algo coherente sobre él, pues inmediatamente caemos en contradicción. Sin embargo, si esta vía es correcta, se anula a sí misma: se define el infinito como lo que escapa a toda definición, se lo comprende como lo incomprensible, se habla de él como de lo inefable... y todas estas proposiciones no carecen de sentido, a pesar de incluir un *nonsense*, un noúmeno o una falta gramatical. Ante esta situación, no diré que más vale guardar silencio ante aquello de lo cual no podemos hablar, pero sí que la tensión disminuye si el infinito funciona como postulado regulador, lo cual no entra en conflicto con lo que es legítimo decir de él.

Dicho con otras palabras, no necesitamos dar una interpretación realista de ciertos enunciados de las demostraciones matemáticas. Aunque la cuestión de si existen o no totalidades infinitas siga abierta, la noción de infinito puede funcionar como una guía o ideal que permite a los matemáticos tratar ciertos temas de manera unificada y alcanzar resultados que, de otro modo, serían difíciles de obtener. Ésta es la posición de David Hilbert. Abraham Robinson sostiene algo similar: las totalidades infinitas en acto no existen ni real ni idealmente. Cualquier mención de ellas carece de significado. La teoría cantoreana no es ni más ni menos racional que otras que no emplean términos infinitarios. Sin embargo, es útil. Por ello, debe procederse como si realmente existiesen tales entidades, para que continúe la labor de la matemática.[100]

Creo haber cumplido ya con el objetivo que tenía en mente al redactar este capítulo: dejar

[100] *Cf.* (68), pp. 210 ss. y 361 ss.

asentadas algunas de las cuestiones claves en torno a las nociones de infinito y continuo, junto con la perspectiva que más me ha convencido al respecto. En los capítulos siguientes, comienza el análisis del *Tractatus de continuo*, no sin antes hacer alguna referencia a su contexto histórico y a otra obra que auxilia en su comprensión, la *Geometria speculativa*.

BREVE APÉNDICE TÉCNICO

Antes de dar paso al capítulo III y a la noción de continuo que aparece en la obra de Bradwardine, es indispensable hacer un alto para establecer qué es lo que, en matemáticas y lógica, se entiende por continuidad. La finalidad de este apéndice es doble:

a) definir el concepto de continuidad al cual han llegado los matemáticos, tras años (o siglos) de un uso no del todo claro del mismo;
b) sentar las bases para rastrear indicios de tal concepto —o, por el contrario, para constatar su ausencia— en el ideario medieval.

Como puede apreciarse, este apéndice no es de ninguna manera prescindible dentro de la estructura de la tesis. Más adelante, en el capítulo IV y en las conclusiones finales, se hará referencia a lo aquí asentado.[101]

Habrá que mencionar algo sobre la relevancia del concepto de continuidad para las matemáticas o sobre la problemática general en la cual encaja esa cuestión. El concepto de continuidad resulta clave para el cálculo. Para el tratamiento de este tema, remito a biografía especializada.[102] En este anexo, expondré brevemente otro asunto relacionado con el tema que nos ocupa: los números irracionales y la manera en que se dio cuenta de ellos, cuestión que constituyó una de las preocupaciones principales de la matemática griega. Saltaba a la vista la dificultad de construir los números irracionales (como el expresado por π o por $\sqrt{2}$) partiendo de los racionales, es decir, como cocientes de dos números naturales. Fue hasta el siglo XIX que se encontraron métodos satisfactorios para construir los irracionales a partir de los racionales, con la obra de Richard Dedekind. Gracias a este último y a las contribuciones de otros matemáticos, es posible construir el conjunto de los números reales —que incluye los números naturales, enteros, racionales e irracionales— empleando los cinco axiomas de Peano que

[101] Nuestra exposición se apoya en los textos (72), pp. 166-173 y (80).
[102] *Cf.* (16), p 647 *passim* (29), cap. 7 y (68), cap. IV.

caracterizan el conjunto de los naturales.

Existen dos perspectivas para estudiar los números reales. Una es el llamado *método constructivo* y la segunda es el *enfoque axiomático*. En este último enfoque, "los números reales se definen como entes que satisfacen un conjunto de propiedades ya conocidas",[103] mismas que fungen como axiomas.

En el método constructivo, en cambio,

> (...) se estudian primero los números naturales y, a partir de ellos, se introducen los enteros, que a su vez sirven como base para definir los números racionales; por último, introduciendo los números irracionales, se completa la construcción.[104]

Este procedimiento "se identifica más con la evolución histórica de las matemáticas"[105] y considera los axiomas del otro enfoque como teoremas a demostrar. No se expondrán aquí todos los pasos de tal metodología. Sólo retomaremos lo que concierne más directamente la cuestión general que nos ocupa.

Comenzaremos por algunas características de los racionales (Q). Éstos pueden representarse como pares de naturales (x, y) y pueden situarse en la recta numérica. Poseen la propiedad conocida como ***densidad***, pues entre dos racionales diferentes siempre puede encontrarse otro racional, como lo expresa el siguiente teorema:

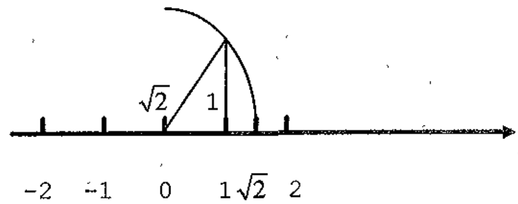
Para todo $x, y \in Q$, con $x < y$, $\exists\ z \in Q$ tal que: $x < z < y$

Los naturales y los enteros, por otro lado, son discretos, no densos. Esto es, nada hay entre dos enteros sucesivos (5 y 6, por ejemplo).

Ahora bien, aunque Q es denso, sus elementos no bastan para "llenar" la recta, pues hay puntos en ésta que **no** corresponden a ningún racional. Por ejemplo, es posible localizar la raíz de

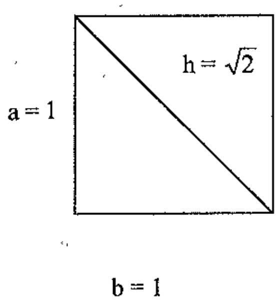
[103] En (80), p. 14.
[104] *Ibid.*
[105] *Loc. cit.*

2 de este modo, de acuerdo con el teorema de Pitágoras:[106]



Supongamos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 1. Se sitúa un compás en el origen (0), tomándolo como centro. En seguida, se lleva sobre la recta la longitud de la hipotenusa, que es $\sqrt{2}$, como puede verse en la figura anterior.

El teorema de Pitágoras nos permite hallar una recta de longitud expresable solamente con un irracional: en un cuadrado cuyos lados miden 1, la hipotenusa resulta ser $\sqrt{2}$, como muestra la figura siguiente:[107]



Si $a^2 + b^2 = h^2$,

$1^2 + 1^2 = h^2$

y $h = \sqrt{2}$

Entonces, de acuerdo con la primera figura, para llenar la recta han de considerarse también los irracionales (**Q'**). El conjunto de los reales (**R**) es la unión de Q y Q' y representa todos los puntos de la recta: a cada real corresponde un punto de la recta y viceversa. Además, no hay

[106] Tomado de (80), p. 65.
[107] *Cf.* (68), pp. 173-178.

intersección entre Q y Q'.

En R es posible resolver ecuaciones como $x^2 = 2$, para las cuales no hay solución en Q. Esto significa que R tiene una propiedad de la cual Q carece: la ***completitud***. Para explicar esta propiedad —que, a su vez, permite explicar el concepto de continuidad en R— hay que manejar los conceptos de: *cota superior*, *elemento máximo* y *elemento supremo* de un conjunto. Sus definiciones se expondrán en seguida.

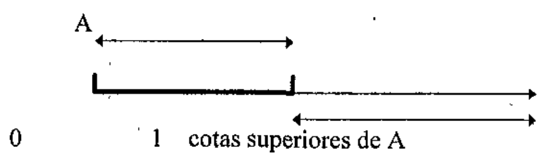
1. *Definición*

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $t \in R$ es una cota superior de S si

$$x \leq t, \ \forall x \in S$$

Ejemplo: Sea $A = \{x \mid x \in R, x \leq 1\} \subset R$

Este conjunto está acotado superiormente por $t = 1$ y por cualquier otro número real mayor que t:



2. *Definición*

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $m \in R$ es un máximo de S si:

i) $x \leq m, \ \forall x \in S$

y

ii) $m \in S$

Lo cual se representa así : max S = m

Un elemento es máximo si es una cota superior y, además, pertenece al conjunto. En el ejemplo anterior, el elemento máximo del conjunto A es el 1. En otros términos, la clase A tiene un *límite intrínseco* y puede ser representada como un intervalo cerrado:

$$A = [0,1]$$

El máximo es único, a diferencia de las cotas superiores: sean m y m' dos máximos de S. Como $m \in S$ y m' es máximo, $m \leq m'$. Como $m' \in S$ y m es máximo, $m' \leq m$. Por lo tanto, $m' = m$. El elemento máximo de un conjunto es la menor de sus cotas superiores. Sin embargo, hay conjuntos acotados superiormente que carecen de máximo. En estos casos, la menor de las cotas superiores es lo que se llama un supremo.

3. *Definición*

Sea S un subconjunto de R. Un elemento $p \in R$ es supremo de S si

i) $x \leq p, \forall x \in S$

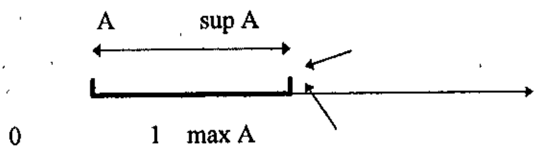
y

ii) $q \in R$ y $x \leq q, \forall x \in S \Rightarrow p \leq q$

Lo cual se denota sup S = p.

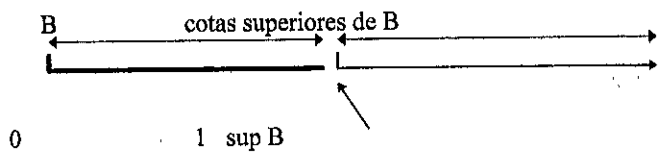
Un elemento p es el supremo de un conjunto si p es una cota superior y ningún número menor que p es cota superior del conjunto. El supremo, si existe, también es único. La única diferencia entre el elemento máximo y el supremo, es que el primero debe ser elemento del conjunto, mientras que el segundo puede serlo o no.

El supremo del conjunto A es también el 1.



En ese ejemplo coinciden los tres conceptos en un mismo número. No obstante, pueden no coincidir, como en el siguiente caso:

Sea $B = \{ x \mid x \in R, x < 1\} \subset R$



Aquí, 1 es cota superior y supremo, pero no hay elemento máximo. Esto quiere decir que la clase B tiene un *límite extrínseco*, lo cual puede entenderse como un intervalo abierto:

$$B = [0,1), \text{ donde } 1 \notin B.$$

Ahora bien, el teorema de completitud consiste en lo siguiente:

> Todo subconjunto no vacío de R, que está acotado superiormente, tiene un supremo que pertenece a R.

Para cualquier conjunto de números reales acotado superiormente, existe una mínima cota superior, misma que pertenece a R. Los racionales no poseen esta propiedad, como se verá en seguida.

$\sqrt{2}$ representa un número x tal que $x^2 = 2$. Para empezar a aproximarse a su valor, puede hacerse esto:

Si $(1)^2 = 1$ y $(2)^2 = 4$,

entonces $1 < \sqrt{2} < 2$

En una aproximación "por la izquierda" al valor de $\sqrt{2}$, la primera cifra será 1. Se puede formar un conjunto tal que, a partir de 1, se acerque a $\sqrt{2}$ mediante decimales con un numero finito de cifras o bien, infinito; siempre que las cifras se repitan periódicamente -es decir, en todo caso, mediante racionales.

Sea S tal conjunto:

$S = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, ...\}$

mismo que continua indefinidamente, dado que la expresión decimal de $\sqrt{2}$ no es periódica. Las características de S son:

1] Cada aproximación es mayor que la anterior.
2] S contiene un numero infinito de elementos.
3] $S \neq \varnothing$, $S \subset Q$ y S está acotado superiormente.

Si en el teorema de completitud reemplazáramos R por Q de este modo:

> Todo subconjunto no vacío de Q que está acotado superiormente tiene un supremo que pertenece a Q,

las condiciones enunciadas en 3) satisfarían las hipótesis del teorema, pero la conclusión no sería válida porque S no tiene supremo en Q: $\sqrt{2}$ es la mínima cota superior de S y no pertenece a Q.[108]

Antes de explicar lo que se entiende por continuidad, comparemos algunas propiedades de Q y R. Ambas clases son densas y carecen tanto de primero como de último elementos. Esta última característica se puede explicar así: supongamos un segmento de recta del 0 al 1. Siempre

[108] Cf. (80), p. 76.

podremos encontrar números más y más cercanos al cero, nunca *el más cercano* de todos, pues dada la densidad de Q y R, entre 0 y cualquier cifra, por pequeña que sea, podremos encontrar otro número, sea racional o irracional. Lo mismo vale para el otro extremo del segmento: podemos aproximarnos tanto como se quiera al 1, pero no existe un número racional o no que sea su predecesor inmediato.

Ahora bien, existen tres conceptos matemáticos, introducidos por Dedekind, que son empleados para caracterizar y diferenciar las clases densas y las continuas. Las nociones aludidas son las de *salto* (*jump*), *cortadura* (*cut*) y *brecha* (*gap*), mismas que también pueden expresarse en términos de límites intrínsecos o extrínsecos.

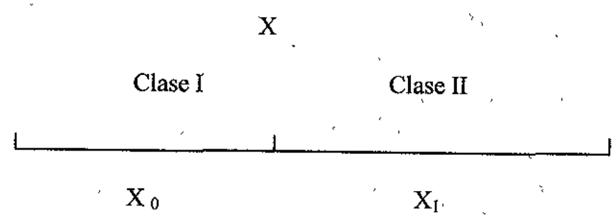
Una clase o agregado puede tener límites intrínsecos, sea un máximo o un mínimo que pertenece a la clase que limita. Cuando una clase no tiene máximo o mínimo, puede estar limitada por un elemento extrínseco, que no pertenece a la clase. Según Dedekind, para describir cualquier punto de un continuo, es necesario dar una descripción general de toda separación posible de un todo ordenado en dos clases. Asimismo, esto último permitirá dar cuenta de la continuidad. La separación en dos clases (I y II) del todo ordenado es una *partición*, la cual debe ser de tal modo que cumpla con las siguientes condiciones:

(1) Cada elemento pertenece a la clase I o bien a la II.

(2) El primer elemento pertenece a I; el último a II.

(3) Cualquier elemento de I precede a cualquier elemento de II.

Por ejemplo, sea X una clase y X_0, X_1 una partición ordenada de X, tal que la recta X quede dividida en dos segmentos:



Si las tres condiciones se cumplen, pueden darse cuatro tipos de división en clases:

(1) I tiene último elemento y II tiene primer elemento.
(2) I tiene último elemento y II no tiene primero.
(3) I no tiene último elemento y II tiene primero.
(4) I no tiene último elemento y II no tiene primero.

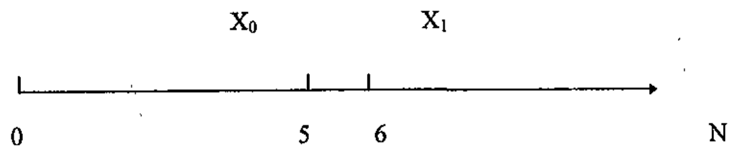
Un salto equivale al primer tipo de división. Si encontramos el segundo o el tercer tipo, tendremos una cortadura. El cuarto tipo corresponde a la brecha. Veamos un ejemplo de cada una de las particiones posibles.

Salto.

El conjunto de los números naturales (N) contiene saltos, como en este caso:

i) los elementos de X_0 pertenecen a los naturales (N) y son menores o iguales a 5;
ii) X_1 incluye a todos los naturales diferentes de los elementos de X_0.

Entonces, X_0, X_1 es un salto en los naturales, como se puede ver en la figura siguiente.



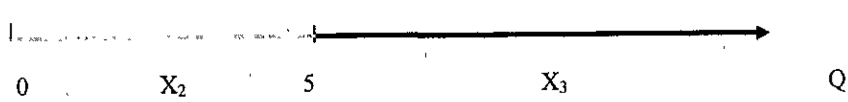
Aquí, 5 es el último elemento de X_0 y es su máximo o límite intrínseco, pues $5 \in X_0$. El primer elemento de X_1 es 6, que también es su mínimo o límite intrínseco pues $6 \in X_1$. Este par ordenado de clases puede representarse así: $X_0, X_1 = [0,5], [6,\infty]$. Entre 5 y 6 no hay otro número sino, precisamente, un salto, pues *los naturales son discretos, no densos.* Según *esto* último, ninguna clase densa puede contener saltos; ni Q ni R los presentan. Sin embargo, las clases densas sí pueden presentar cortaduras.

Cortaduras.

Un ejemplo en Q de esta partición es:

i) los elementos de X_2 pertenecen a Q y son menores o iguales a 5;
ii) los elementos de X_3 son todos los elementos de Q diferentes de los elementos de X_2

Entonces, X_2 X_3 es un corte en Q, pues X_2 tiene último elemento (5) y X_3 carece de un primero, ya que siempre habrá una aproximación a 5 menor que cualquier otra dada, sin que sea posible hallar un racional inmediato:



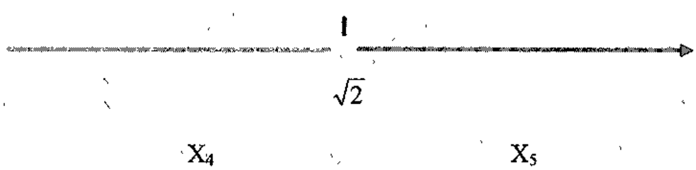
El 5 es límite intrínseco o máximo de X_2 y límite extrínseco de X_3, pues no pertenece a esta última clase. En términos de intervalos: X_2,X_3 = $[0,5]$ $(5,\infty]$. La cortadura también puede producirse cuando X_2 no tenga último elemento (*v.g.* si sus elementos son menores que 5) y X_3 posea primer elemento (por abarcar los racionales mayores o iguales a 5). En ese caso, el intervalo sería: $X_2,X_3 = [0,5), [5,\infty]$.

La cortadura es posible por la densidad de Q. En R también podrían definirse cortaduras, puesto que se trata de una clase densa. Sin embargo, el siguiente tipo de partición sólo es posible en Q.

Brecha

El caso típico de una brecha dentro de Q es el siguiente:

i) Los elementos de X_4 pertenecen a Q y son menores que $\sqrt{2}$.
ii) Los elementos de X_5 son todos los elementos de Q distintos de los elementos de X_4.



$\sqrt{2}$ es un límite extrínseco tanto de X_4 como de X_5, porque *no pertenece* a ninguna de ellas. X_4 no tiene último elemento y X_5 carece de primer elemento. Entonces:

$X_4,X_5 = [0,\sqrt{2}),(\sqrt{2},\infty]$.

Los irracionales, finalmente, sentaron cabeza: un irracional es una brecha, un elemento *ajeno*, dentro de Q. Pero, por otro lado, $\sqrt{2}$ **sí pertenece** a R, no representa una brecha en ese conjunto.

Nótese que, por definición, R carece de brechas: siendo la clase que incluye tanto a Q como a Q', no puede decirse que ocurran en ella elementos ajenos (gracias a que es más amplia que Q). Y de esto se trata, precisamente, el teorema de completitud: cualquier cota superior que pueda señalarse en R pertenecerá, *en todo caso*, a R. Esto no sucede con Q, como ya se ha visto. No poseer la propiedad de completitud implica tener brechas.

En suma, R no contiene ni saltos ni brechas. En eso radica su carácter de clase continua. Q es densa, pero carece de completitud. La completitud —y, por ende, la continuidad— es privativa de R. Esto significa que la matemática contemporánea ha deslindado dos nociones que parecían la misma. Para que una clase sea continua, ha de ser densa, entre otras características. Sin embargo, no toda clase densa es continua.

Para decirlo en términos aristotélicos, la infinita divisibilidad —indicador de una magnitud densa— no implica continuidad. Esta importante distinción no se encuentra en Aristóteles ni, como espero mostrar, en la tradición medieval, que sólo maneja las nociones de densidad y de cortadura.

III. CONTEXTO DEL *TRACTATUS DE CONTINUO* (*TC*)

Este capítulo estará dedicado a establecer lo que podríamos llamar dos tipos de contextos en los cuales está inserto el *Tractatus*. El primero consiste en el clima intelectual prevaleciente durante el siglo en el que esta obra fue escrita y algunos supuestos directamente relacionados con el tema que aborda. El segundo contexto es, digamos, intertextual: relaciono el *TC* con otros escritos atribuidos a Bradwardine: *Geometria speculativa* y *De Causa Dei*. Finalmente, se expone cómo está conformado el *TC*. Todo lo anterior pretende servir como introducción al análisis más detallado de las propuestas del *Doctor Profundus*.

3.1 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL SIGLO XIV

3.1.1 Bradwardine y el siglo XIV

En el *TC*, nuestro autor alaba las matemáticas porque ofrecen verdades certeras y las coloca en un lugar importante dentro de la jerarquía de las ciencias:

> Ella [la matemática], en efecto, contemplada más acuciosamente que sus restantes hermanas [las otras ciencias], arroja inflexible el dardo y se protege con el escudo del tutor. Pues nadie, en un certamen físico, espera que habrá de alegrarse con el triunfo si no utiliza el consejo de la matemática y si no se fortalece con su ayuda. Ella es, pues, la reveladora de toda verdad sincera y conoce todo secreto escondido y da la clave de todas las letras sutiles. Luego, cualquiera que presuma de ser físico, si la desdeña, conozca que nunca habrá de pasar el umbral de la sabiduría.[109]

Pero también es capaz de afirmar algo como lo siguiente: "sonroja de vergüenza, oh filosofía y arrogante conocimiento, el presumir tener el más pequeño entendimiento de Dios" (*De causa Dei*).[110]

¿Cómo interpretar estas afirmaciones? Quizá podríamos hacerlo recurriendo a un elemento que

[109] En (53), pp. 400-401. El fragmento corresponde a la introducción de la Conclusión 57. V. sección 3.5, para aclarar la estructura del *TC*.
[110] Citado en (48), p. 299.

se encontraba en el ambiente del siglo XIV: la intención de efectuar un deslinde entre el ámbito propio de la razón y el de la fe. Gente como Escoto y Occam son representativos de esta tendencia, que busca reubicar la filosofía dentro de ciertos límites. La razón sólo podría ocuparse de lo natural y la teología trataría lo sobrenatural, apegándose a la Revelación y la fe. Es por esto que el sistema tomista no tendrá ya la cantidad de seguidores que tuvo durante el siglo XIII. El XIV está más preocupado por definir cuál es el alcance de la razón y dejar claro que Dios es inaccesible para ella, pues escapa a cualquier constricción o legalidad establecida, en vez de construir edificios conceptuales que pretendan sintetizar fe y razón, teología y filosofía. Por un lado, se reivindicaba la independencia de la filosofía respecto de la teología —dejaba de ser *ancilla theologiae*— y, a veces, de la filosofía natural respecto a la metafísica aristotélica. Éste es el caso de la corriente escéptica y empirista del XIV representada por Occam (c. 1300-1350) y sus continuadores. Los escépticos, al situar a Dios en el plano sobrenatural fuera del alcance de la razón y al recalcar que la voluntad divina nos es incognoscible, pues nada indica que pueda pensarse a Dios como causa de acciones efectuadas en el plano natural, reafirmaron el libre albedrío, la autosuficiencia humana. Los teólogos, por otro lado (y entre ellos el mismo Occam), insistían en borrar todo vestigio del determinismo aristotélico que pudiera filtrarse en su quehacer. Para ello, retomaron las nociones de omnipotencia y libertad absoluta de Dios, volviendo a una idea más bíblica y cristiana, la del Dios cuya Voluntad es anterior a Su Intelecto. El espíritu que anima la Condena de 1277 es la afirmación de un Dios de los teólogos, para el cual es fácil alterar el *cosmos aristotélico:* sería ya posible, desde ese momento, que Dios creara múltiples mundos o un espacio más allá de la última esfera celeste; que conociera e incluso quisiera todos los actos aún no realizados por Sus criaturas (los futuros contingentes); que fuera la causa primera e inmediata de los actos "libres", etc.

Gordon Leff[111] caracteriza esta corriente como un retorno del principio de autoridad por sus fueros, perdidos en medio de tanto aristotelismo y escepticismo. Los escépticos y quienes defendían el principio de autoridad se enfrentaron a menudo, pero ambos hicieron hincapié en la necesidad de

[111] *Cf.* (48), caps. 8 y 9.

disolver la unidad filosofía/teología del XIII, y tienen en común el no ser de corte tomista-aristotélico. Así, de acuerdo con Leff, estas corrientes de pensamiento del XIV que, a primera vista parecerían incompatibles, resultan ser dos caras de una misma moneda.

Como ejemplo de la doctrina de la autoridad, Leff pone el *De causa Dei*. En esta obra Bradwardine rehúsa "conceder algo a los hechos o a la evidencia natural", pues "veía toda verdad como verdad revelada".[112] El primer axioma del *De causa Dei* establece la existencia de Dios, quien es omnipotente y posee todos los atributos enunciados por el dogma. Todas las cuestiones siguientes se deducen de estas premisas no racionales y los problemas planteados después se resuelven según la Revelación. Bradwardine ataca tanto a escépticos como a aristotélicos. A los primeros les responderá con un Dios que causa todos y cada uno de los actos humanos, negando así la autodeterminación. A los segundos les opondrá el Dios omnipotente. Por eso es que el *De causa Dei* "hizo, para la teología, lo que el escepticismo estaba haciendo para la razón: la volvió un cuerpo autocontenido de leyes y principios"[113] que no necesitaba de la experiencia natural.

La interpretación del *De causa Dei*, hecha por Koyré, no dista mucho de la de Leff, pues clasifica a Bradwardine como uno de los "retardatarios"[114] que no seguían la *vía moderna* y fueron carcomiendo la cosmología aristotélica y que, aunque retrasados respecto de sus contemporáneos, se les adelantan por lo que toca a las especulaciones en torno a la existencia del vacío y el espacio infinito allende el cosmos cerrado. Koyré considera a Bradwardine como un teólogo antes que otra cosa, pues lo que le preocupa en primer lugar

> no es el problema del mundo sino las condiciones de la salvación; la estructura cosmológica del universo y aun su estructura ontológica no le interesan más que en la medida que su estudio permita aportar iluminaciones sobre el ser del hombre y sobre el de Dios.[115]

[112] *Op. cit.*, p. 297.
[113] *Ibid.*, p. 299.
[114] En (41), p. 39.
[115] *Op cit.*, p. 72.

Sin embargo, recuerda que Bradwardine era también matemático y filósofo y termina afirmando que no fueron preocupaciones teológicas aisladas o preocupaciones puramente científicas las que llevaron a Bradwardine a concebir el espacio imaginario fuera del cosmos como algo real, a conferirle realidad a ese espacio vacío que, para el aristotelismo, equivalía a la nada. Según Koyré, esta conclusión sólo se explica por "el encuentro, en un mismo espíritu, de la noción teológica de la infinidad divina con la noción geométrica de la infinitud espacial".[116]

Hasta ahora he venido hablando de la faceta de Bradwardine relacionada con la autoridad, la teología y la fe. No es posible dar cuenta, desde esta perspectiva, de aquella actitud más benévola hacia las ciencias que consignamos al inicio del apartado. Y es que Bradwardine también presenta la duplicidad de caras que Leff le atribuye a su siglo. Hemos visto ya a un Bradwardine que defiende la independencia y la primacía de la teología y la fe respecto de la filosofía, la razón y las ciencias. Pero faltaría hablar de sus trabajos sobre filosofía natural, lógica y matemáticas. Desde esta nueva perspectiva se aprecia que, sin llegar a ser un escéptico y empirista estilo Occam, Bradwardine también da por sentado —no explícitamente, hasta donde sé— que es posible hacer ciencia sin apelar a la teología o al dogma. Si las ciencias y la filosofía se mueven dentro del terreno que les corresponde, ¿por qué no concederles cierta validez? Nunca competirán con la teología y las verdades reveladas, mas ello no necesariamente exige que sean rechazadas o menospreciadas. Esto es lo que parece encontrarse detrás de obras como el *Tractatus de proportionibus*, la *Geometria speculativa* y el *TC*.

3.1.2 Algunas predilecciones y herramientas conceptuales del XIV

John Murdoch afirma que, pese a que la variedad de temas tocados por la filosofía natural del XIV es mayor que la de su similar del XIII, hay una preferencia poco común por problemas que, de un modo u otro, comprenden el infinito y el continuo, tanto en comentarios a la obra de Aristóteles, como en numerosos tratados y *quaestiones* especializadas en estos temas.[117]

---

[116] *Ibid.*, p. 84.
[117] *Cf.* (54), pp. 564-565.

En los análisis acerca del infinito y el continuo en el siglo XIV aparecen, de acuerdo con este autor, cinco elementos que no estaban presentes en el tratamiento aristotélico de tales cuestiones y que son:[118]

1) El interés en el problema de la existencia de indivisibles en el continuo.
2) El ataque al indivisibilismo se hace con argumentos matemáticos o *rationes mathematicae*, ya empleadas por Escoto.
3) La adscripción de límites a una secuencia continua o serie o la asignación de primeros y últimos instantes ("comienzos" y "finales") a cambios o procesos ocurridos en un tiempo continuo.
4) El problema de series infinitas que parecían mayores que otras, a pesar del axioma de que todos los infinitos debían ser iguales.
5) La cuestión, dentro de la teología como de la filosofía natural, de cuáles infinitos podrían ser lógicamente posibles bajo el supuesto de la omnipotencia divina, y la pregunta por la posibilidad de un infinito en acto.

Cada uno de estos problemas aparece en, por lo menos, una de las obras de Bradwardine. Por ejemplo, el inciso 3) es el tema de *De incipit et desinit*, pero lo encontramos repetidamente en el *TC*; el 4) es tratado en la *Geometria speculativa* y en *De causa Dei*, en la cual también se toca 5); 1) y 2) son característicos del *TC*.

A través de estos cinco elementos, es posible vislumbrar algunos de los instrumentos conceptuales que desarrollaron los pensadores de ese siglo, mismos que distinguen su filosofía natural, tanto de la aristotélica o la medieval anterior, como de la ciencia moderna. Para el estudio de estos temas conviene, según un precepto metodológico de Koyré,

> olvidar las verdades que han llegado a ser parte integrante de nuestro pensamiento... adoptar los modos ... las categorías de razonamiento... y los principios metafísicos que, para las personas de una época pasada, eran bases del razonamiento y la investigación tan válidas y seguras como lo son para nosotros los principios de la física matemática y los

[118] *Cf.* (58), p.165.

datos de la astronomía.[119]

En consecuencia, no deben perderse de vista cuestiones como las siguientes: a) en el siglo XIV, ciencia equivale a filosofía, a filosofía natural para ser más exactos; b) no existe un cuerpo de conocimientos bien definido que pudiera ser llamado la "mecánica" del XIV, así como tampoco lo hay dentro del *corpus* aristotélico; c) en el XIV surgen nuevos "lenguajes" que marcan un alejamiento respecto del modo en el que Aristóteles hacía filosofía natural, sin que esto implique, *necesariamente*, estar anunciando a Galileo; d) algunos especialistas consideran que el avance, respecto de la física aristotélica, se dio más a nivel del análisis lógico que en un plano inductivista.[120]

Me referiré solamente a algunos de las nuevos conceptos y teorías típicas de este período, pues aparecen en las doctrinas de Bradwardine que abordo en este capítulo y los siguientes. Se trata, por ejemplo, de:

(1) la intensión (aumento) y remisión (disminución) de formas, los grados y latitudes. Estos términos eran empleados para determinar cómo las cualidades y otras formas aumentan o disminuyen su intensidad. Conforma un tratamiento cuantitativo de las variaciones cualitativas;

(2) la teoría de la suposición, herramienta analítica para enfrentarse casi a cualquier problema. Se combinó con el nominalismo occamista: no se hablaba de las cosas implicadas en los problemas tradicionales de la filosofía natural, sino de las proposiciones cuyos términos representan tales cosas. Así, se resuelven los problemas mediante el análisis proposicional y removiendo las entidades problemáticas. Los términos abstractos eran vistos en función de términos concretos (*v.g.* en lugar de 'movimiento', 'este móvil'). Se substituían términos como 'punto' o 'instante' por proposiciones que no los incluyeran;

(3) la apelación constante a la *potentia Dei absoluta*, gracias a la cual se podía ir de lo física a lo lógicamente posible, aunque esto contradijera alguna verdad revelada. La filosofía natural aristotélica determinaba qué era lo físicamente

[119] Citado en (49), p. 159.
[120] *Cf.* (55), pp. 58-61 y (49), pp. 164-165.

> posible; la imaginación de los autores medievales tardíos se remontaba más allá, hasta lo que no era autocontradictorio *per se*. Era común efectuar experimentos mentales (razonar *secundum imaginationem*) pero, al parecer, no importaba mucho contrastarlos con la experiencia. Más bien interesaba generar los llamados *sophismata*, proposiciones irresolubles, como ejercicio dialéctico.

3.1.3 Los *Calculatores*

En Oxford, específicamente en Merton College, se dio en llamar *calculatores* a una serie de filósofos naturales que guardaban alguna relación con Bradwardine o continuaban su trabajo *Tractatus de proportionibus*. Estos calculadores (*v.g.* Walter Burley, Richard Swineshead, Juan de Sajonia) medían, en general, todo tipo de cambios: en las cualidades (intensiones y remisiones), velocidades, etc. Efectuaban experimentos mentales, variando de múltiples maneras las condiciones o entidades que intervenían en los experimentos. Alain de Libera explica así su proceder: no intentaban matematizar la física, ni describir o dar cuenta de lo real. Transitaron, por la influencia del occamismo, de la filosofía natural a una *semiofísica*, "del análisis cuantitativo de procesos reales...[al] análisis lógico de enunciados cuantificacionales relativos a las sustancias y las cualidades implicadas en los cambios".[121] En suma:

> las técnicas de "cálculo" no estaban destinadas a la investigación sistemática de los fenómenos naturales. El acento principal recaía sobre las "experiencias de pensamiento", *secundum imaginationem*, que no guardan ninguna relación con una realización concreta y que, en su mayoría, no podrían hallar lugar dentro del marco de la "naturaleza".[122]

Ya tendremos ocasión de apreciar cómo se presentan todas estas características en el pensamiento de Bradwardine, tanto en el presente capítulo (en especial, en 3.3) como en el siguiente.

[121] En (49), p. 162.
[122] *Loc. cit.*

3.2 RASGOS PRINCIPALES DE LA GEOMETRÍA DE BRADWARDINE (REALISMO GEOMÉTRICO)

En este apartado, explicaré por qué considero que la posición ontológica de Bradwardine, en cuanto a la Geometría, tiende al realismo y cómo se relaciona tal postura con su doctrina sobre el continuo. Para empezar, recordemos que, según nuestro autor, la matemática es la "reveladora de toda verdad sincera" y que el *TC* imita a los *Elementos*. ¿Qué lo motiva a seguir este procedimiento? La respuesta es que, para los contemporáneos de Bradwardine, iba cobrando cada vez más importancia el razonamiento de tipo geométrico al tratar el continuo. La argumentación estaba formada por abstracciones geométricas y las leyes de la lógica. Aristóteles había considerado que los principios de las matemáticas tenían un grado de certeza sólo inferior al de la metafísica, pues no sólo están basados en hechos, sino en las razones o causas de los mismos. Además, la matemática está constituida por menos principios que otras ciencias (*v.g.* la física) y no es una ciencia de propiedades en tanto inhieren en un sujeto, *i.e.* es abstracta.[123] Todo lo anterior fue tenido muy en cuenta por los escolásticos, quienes creían que, al emplear razones geométricas para dar cuenta de la continuidad u otros problemas, estaban ofreciendo argumentos con un mayor grado de certeza que el permitido por principios pertenecientes a la filosofía natural.

Existe otra razón por la cual Bradwardine y sus contemporáneos consideraron que la geometría era efectiva para abordar el problema del continuo en general: para ellos, lo que es válido geométricamente resulta válido a nivel físico.[124] Su punto de arranque eran las ideas aristotélicas sobre la naturaleza y el modo de existencia de los objetos matemáticos. El Filósofo, consecuente con su crítica al platonismo en otras áreas, niega la existencia sustancial de los objetos matemáticos, ya sea separados de o en las cosas perceptibles.[125] Sin embargo, esto no quiere decir que la matemática verse sobre algo que *no es*: los objetos matemáticos existen *en potencia* en las cosas concretas y al matemático le toca hacerlos actuales mediante su pensamiento.

[123] *Cf.* (5), I, 27, 87a 31-37.
[124] Esto no le habría gustado del todo a Aristóteles, quien trató de separar la cuestión matemática de la física —aunque de manera no muy convincente— para evitar dificultades que se mencionarán más adelante.

El geómetra, por ejemplo, parte de objetos físicos, pero realiza una abstracción: separa mentalmente la materia y algunas de sus cualidades sensibles (peso, dureza, calor, etc.), de modo que se queda solamente con "lo cuantitativo y continuo",[126] es decir, la extensión. Al considerar las entidades geométricas como si fuesen independientes, les confiere existencia en acto, pues su proceso de pensamiento está en acto también. Cuando construimos una línea, actualizamos una línea potencial mediante un acto previo, nuestro pensamiento.

En consecuencia, si los principios de la matemática han sido abstraídos del mundo sensible, todas las deducciones que los tomen como base y obedezcan las leyes lógicas tendrán, a su vez, algún correlato en tal mundo. Las propiedades del continuo geométrico tienen existencia en acto en el pensamiento; entonces, deben tener existencia potencial en el continuo físico. Éste es uno de los supuestos básicos del *TC*, el cual, mediante argumentos geométricos, intenta refutar definitivamente el atomismo —sea de puntos inextensos o de corpúsculos— y trata lo mismo de líneas o figuras geométricas que de cuerpos, movimientos y el tiempo.

La *Geometria speculativa*, obra de Bradwardine que fue comentada incluso hasta el XVII, también contiene rasgos de realismo matemático:[127]

(i) En general, no parece gustar de las construcciones: no presenta las proposiciones geométricas como problemas a resolver o demostraciones por efectuar, sino que prefiere expresarlas como teoremas y sólo una vez, en todo el *TC*, hace referencia a la constructibilidad. Además, siempre que puede, evita las pruebas de la existencia de las líneas que usa al construir. Esto le conviene, porque la consideración del papel que desempeña la construcción en geometría puede conducir a una interpretación más bien nominalista o subjetivista. La doctrina aristotélica podría prestarse para lo último pues, si es el pensamiento el que da actualidad a la línea potencial al

[125] En (7), XI, 1, 1059b 13.
[126] *Op. cit.*, XI, 3, 1061a 29-33.
[127] *Cf.* (50), pp. 131-136.

construirla, entonces, la línea en acto sólo existe en la mente, no hay nada afuera o antes de la construcción.

Para contrarrestar esta posibilidad, el platónico Proclo, en su comentario a los *Elementos*, señalaba que los diversos movimientos que se efectúan en geometría son, en realidad, movimientos del entendimiento en los cuales las cosas eternas (objetos geométricos) son vistas como si llegaran a ser. Para él, las proposiciones geométricas no tienen que ver con acciones, sino únicamente con el conocimiento.[128] Bradwardine, en cambio, escoge una vía más corta y se desentiende de las construcciones.

(ii) Parece aceptar que las relaciones entre magnitudes (*v.g.* igualdad y desigualdad, conmensurabilidad e inconmensurabilidad, etc.) existen como cosas distintas de los términos relacionados. En la sección donde Bradwardine habla de las razones o proporciones, *i.e.* de las comparaciones entre cantidades o magnitudes, se acerca al problema de su *status* ontológico. ¿Son las razones un tipo de relación entre cantidades o una especie distinta de cantidad? Unos cuatro siglos más tarde, Leibniz, en su quinta carta a Clarke, sostenía que una razón puede concebirse de tres modos: a) el término mayor es el sujeto y el menor el objeto de la relación; ésta es un accidente; b) el término menor es el sujeto; c) se considera la razón abstraída de ambos términos. En este último caso, no puede decirse que ambos términos sean el sujeto, pues el accidente (*i.e.* la razón) estaría partido en dos. Por tanto, la relación está fuera de los sujetos. Pero entonces, no es un accidente; ya que tampoco puede ser una substancia, debe tratarse de una cosa ideal que, por otro lado, resulta útil. Bradwardine se acerca a esta última concepción. Aunque no llega a hablar de ficciones útiles, sí abandona la doctrina aristotélica de las relaciones, pues no se expresa de las razones como de propiedades de un sujeto sino, más bien, como de cantidades independientes:

> Así como una cantidad es a otra, así es su razón a la razón de la otra ... De aquí puede obtenerse un argumento para probar que una relación es una cosa distinta de las cosas

[128] *Cf. Op. cit.*, p. 139.

relacionadas, pues, si la línea A es mayor que la B, las cantidades serán desiguales, pero las razones de las líneas a sus mitades son iguales...[129]

Como se ve en la cita anterior, para el autor es posible predicar igualdad de una razón, es decir, de una relación. Esto es imposible desde el punto de vista aristotélico, pues sería tanto como predicar una relación de una relación. Las razones, en una perspectiva tradicional, tampoco pueden considerarse cantidades, porque resultarían ser cantidad de la cantidad.

(iii) Considera el todo como algo diferente de las partes. De acuerdo con el nominalismo, esto es falso: el todo no es nada más que sus partes reunidas. Bradwardine incluye, además del consabido "el todo es mayor que sus partes", un axioma no-euclídeo: "el todo es igual a todas sus partes tomadas juntas y viceversa". Sin embargo, Bradwardine aclara que el término "todo" debe ser tomado *categoremáticamente*, es decir, como denotando una *res absoluta*, con el fin de evitar la falacia consistente en que lo predicado de todas y cada una de las partes sea, también, predicado del todo.[130]

Otro elemento que permite hablar de un realismo geométrico es que, en obras posteriores a la *Geometria*, Bradwardine acepta la existencia de un espacio infinito externo al cosmos, con lo cual rompe con la cosmovisión aristotélica que exige un mundo finito, pleno de materia y con espacio interno a él. Por su importancia, desarrollo esta cuestión en el apartado siguiente.

3.3 RUPTURA DEL COSMOS ARISTOTÉLICO: DIVINIZACIÓN Y GEOMETRIZACIÓN DEL ESPACIO

La finitud o la infinitud del espacio es una cuestión relacionada con la del realismo geométrico en Bradwardine porque, como iremos viendo, es muy probable que el *Doctor Profundus* haya sido conducido, de una noción de cosmos finito a la de espacio infinito, por el ya mencionado supuesto

[129] Citado en *ibid*, p. 159.

de que la geometría describe el mundo físico -entre otras razones. La cosmología aristotélica es referencia obligada para entender cuáles son las aportaciones de la escolástica tardía —y, en especial, del autor que nos ocupa— respecto al tema, así que dedicaré a ella las páginas siguientes.

3.3.1 El cosmos aristotélico y la negación del vacío

Durante la Edad Media se aceptó, casi siempre, la opinión aristotélica según la cual el cosmos es pleno, no puede existir un vacío dentro de él.[131] Si el vacío es un lugar sin nada en él o un lugar privado de cuerpo y, *además, distinto de los cuerpos que lo pudieran ocupar*, entonces, dado que —para Aristóteles— sería tridimensional, se trataría de un cuerpo tan impenetrable como los demás, por lo que no podría haber otro cuerpo en el mismo lugar. Por otro lado, si hubiera vacío, el movimiento en él sería instantáneo, al no existir ningún tipo de resistencia; la velocidad alcanzada sería infinita y el cuerpo se movería *ad infinitum*, a menos que algo más poderoso lo impidiera —principio inercial que rechaza Aristóteles. Asimismo, tal móvil carecería de dirección hacia la cual desplazarse, pues en el vacío infinito no hay arriba ni abajo, no existen lugares naturales —lo que echaría por tierra la dinámica aristotélica.

Aristóteles también negaba la posibilidad de que hubiera un espacio vacío más allá del cosmos, pues más allá de éste no existen ni tiempo ni lugar. Este último es definido como sigue:

> ...el lugar...debe ser el límite del cuerpo continente, el cual está en contacto con lo contenido, *i.e. con aquello que es movible localmente.*[132]
>
> El lugar parece ser una suerte de superficie, recipiente o contenedor. Más aún, el lugar es coincidente con aquello de lo cual es lugar, pues los límites son coincidentes con lo que limitan.[133]
>
> Ya que el lugar contiene el cuerpo, parece como si debiera ser la forma; pues las

[130] *Cf. ibid.*, pp. 144-145.

[131] Y varios siglos más tarde, Descartes propondrá una tesis similar: como la materia es extensión y viceversa, no hay ni (lógicamente) puede haber espacio vacío. El cosmos es un *plenum* (*cf.* (19), II, 16).

[132] En (8), 212a6.

[133] *Op. cit*, 212a29.

> extremidades del contenedor y el contenido coinciden. Ambos son límites, pero mientras la forma es el límite de la cosa misma, el lugar es el límite del contenedor.[134]

No existe el espacio en sí; el *tener un lugar* depende del *estar contenido* en algo. La última esfera celeste no tendrá lugar, ya que no hay un cuerpo fuera de ella que la contenga —en cambio, *toda* la materia, los cinco elementos, están contenidos dentro de ella. I. Düring comenta lo siguiente en relación al tema:

> No existe "lugar" fuera de las cosas, sino sólo como la determinación geométrica y métrica de una cosa, que puede padecer movimiento, es decir, el lugar es la consecuencia en la relación que dos cuerpos tienen entre sí. Puesto que el Universo como totalidad no se mueve en relación a algo distinto, no tiene sentido preguntar por el lugar del Universo[135].

Entonces, no hay *nada* fuera del cosmos finito: ni vacío, ni lugar, ni tiempo -sin lugar ni cuerpos, no existirá el movimiento, cuya medida es el tiempo.

3.3.2 Las especulaciones sobre el espacio extra-cósmico. Factores teológicos de la discusión

La negación de un posible espacio vacío extra-cósmico no tuvo la misma suerte que el rechazo del vacío dentro del mundo, pues era corriente formular hipótesis que contradecían los supuestos aristotélicos al respecto. El pitagórico Arquitas de Tarento (siglo IV A.C.), por ejemplo, ya argumentaba a favor de un cosmos ilimitado de la siguiente manera:

> Si estoy en el extremo del cielo de las estrellas fijas, ¿puedo estirar hacia afuera mi mano o un bastón? Es absurdo suponer que no podría y, si puedo, lo que está fuera debe ser o un cuerpo o espacio. Entonces, podríamos del mismo modo llegar otra vez al exterior de eso y así sucesivamente y si siempre hay un lugar nuevo al cual el bastón puede ser levantado, esto claramente implica una extensión sin límites.[136]

Los estoicos defendían ideas similares. A pesar de esto, las propuestas aristotélicas pasaron a formar parte de la escolástica cristiana. Sin embargo, en el siglo XIV se llegó nuevamente a postular la existencia en acto de un espacio vacío más allá del cosmos. Entre las raíces históricas de

[134] *Ibid.*, 211 b11
[135] En (22), p. 497.

este concepto se encuentran algunas seculares y otras teológicas. Del lado secular, ya he mencionado el papel del realismo geométrico (o del descriptivismo, si se quiere) en la aceptación de un espacio infinito, además de las opiniones de Arquitas. En seguida, nos ocuparemos del lado teológico.

Considero, junto con E. Grant que, durante la Edad Media, el problema de la existencia de un espacio vacío extra-cósmico cobró mayor relevancia al introducirse en discusiones teológicas. Una de las raíces de tipo teológico fue la Condena de 1277, hecha por el obispo de París (Étienne Tempier) en la cual eran tachadas de erróneas o heréticas, no siempre con mucha fortuna, 219 opiniones contrarias a los dogmas y teología cristianos. Entre sus principales objetivos estuvo el de destacar la omnipotencia divina por encima de cualquier limitación que la filosofía de la naturaleza aristotélica pudiera imponerle. Esto propició que se empezaran a plantear hipótesis o "experimentos mentales" que salían del marco de la física y de la cosmología aristotélicas,[137] aun antes de que la burbuja del cosmos medieval estallase dando paso al universo infinito de la modernidad.

El dilema consistente en aceptar o que el mundo es increado y, por tanto, eterno, como Aristóteles creía, puesto que nunca se genera algo de la nada, o que hubo un espacio vacío anterior a la Creación, en el cual Dios situó el mundo; ésta era una cuestión relacionada con la defensa de la omnipotencia divina. Optar por la segunda idea trajo como consecuencia el surgimiento de las siguientes hipótesis:

a) si el espacio anterior a la Creación es independiente de Dios, podría ser considerado una criatura eterna, lo cual es herético. Este problema desaparece si se sostiene que Dios creó tal espacio antes, durante o después de la creación del

[136] Citado en (33), p. 106.

[137] Una opinión contraria a la expuesta es la de Koyré, quien arguye que discusiones sobre el vacío y el infinito, análogas a las que se dieron en el medio cristiano, aparecieron entre árabes y judíos sin que hubiera alguna condena de la cosmología aristotélica de por medio. Por ello, piensa que tales discusiones pudieron haber surgido en la escolástica cristiana, aun sin la Condena de 1277, "en virtud de la necesidad interna de problemas y también en virtud del estudio de la *Física* de Aristóteles y de los comentarios griegos y árabes a ésta" (en (41), p. 34n.). Sin embargo, me parece que la Condena sí determinó en gran medida el tenor característico de la problemática que se irá tratando.

mundo. Pero con esto no quedaba explicado si era posible que Dios creara un ente infinito, como lo sería el vacío;

b) si el espacio anterior a la Creación no es independiente de Dios, sería entonces una propiedad o atributo de Éste y podría ser eterno sin que ello condujera a una herejía. Así, se llegó a relacionar el concepto de espacio vacío externo al mundo -que incluye el concepto de espacio-lugar del mundo- con la inmensidad y omnipresencia divinas[138].

Y, como veremos, Bradwardine se encuentra entre quienes siguieron esta última vía durante el siglo XIV.

3.3.3 El vacío infinito y Dios en el De causa Dei

En el primer libro de su *De causa Dei* (*c.* 1335), Thomas Bradwardine presenta la proposición "Dios no está de ninguna manera sujeto al cambio"[139] y de ella deriva estas cinco conclusiones o corolarios:

1. Primero, que esencialmente y en presencia, Dios está necesariamente en todo lugar en el mundo y todas sus partes;

2. Y también más allá del mundo real, en un lugar o en un vacío imaginario infinito.

3. Y así, verdaderamente, puede Él ser llamado inmenso e ilimitado.

4. Y de este modo parece surgir una réplica a las preguntas de los gentiles y heréticos —"¿Dónde está tu Dios?" Y "¿dónde estaba Dios antes de {la creación} del mundo?".

5. Y también parece obvio que un vacío puede existir sin cuerpo, pero de ninguna manera puede existir sin Dios.[140]

Detengámonos en cada proposición para comprender cómo es que Bradwardine llega a asociar la omnipresencia e inmensidad divinas con la existencia de un espacio vacío infinito más allá del

[138] *Cf.* (33), parte II, cap. 5.
[139] Fragmento tomado de (41), p. 74. Los demás fragmentos del *De Causa Dei* que se han usado fueron traducidos a partir de la versión que aparece en (34), pp. 556-560.

cosmos.

Para Bradwardine, el mundo es finito, pero esto no quiere decir que acepte la cosmología y la física aristotélicas. Él se encuentra entre los teólogos defensores de la omnipotencia divina frente al aristotelismo y prueba de ello son sus constantes referencias a la Condena de 1277. En el primer corolario, Bradwardine asienta la *omnipresencia* divina dentro del mundo.[141] Dios es omnipresente *porque:*

1) "...creando el mundo y cada parte de él en el comienzo, Dios estaba simultáneamente con el mundo y en cada parte de él", así como el motor o agente existe simultáneamente con lo que es movido y sufre la acción. Dios es fundamento de todas las cosas, que descansan en Él y son en sí mismas inestables. Por eso, Dios "está infuso en el mundo que Él hace...y Él no se separa de nada y no es externo [a lo que hace]";[142]

2) es "más perfecto estar por todas partes en algún lugar y simultáneamente en muchos lugares, que en un único lugar solamente"[143] y un espíritu infinitamente perfecto bien puede lograr esto, sin necesidad de las criaturas y sin movimiento, como establece la proposición de la cual se dedujeron los corolarios.

En la segunda afirmación, Bradwardine hace caso omiso de los supuestos del aristotelismo, escudándose en el Dios omnipotente. Ahí sostiene que Dios está presente, también, "más allá del mundo real en un lugar o en un vacío imaginario infinito". Tal afirmación va directamente en contra de la opinión aristotélica de acuerdo con la cual nada existe más allá del mundo. Como vimos,

[140] En (34), pp. 556 a-557 a.
[141] Nótese que Dios está "esencialmente y en presencia" en todo lugar, por lo que no se está hablando solamente de **ubicuidad** (o "estar en todo lugar"), sino de **omnipresencia** (o "todo Dios está en todo lugar"). Esta doctrina parece serle de utilidad a Bradwardine para justificar su determinismo radical, según el cual Dios es causa inmediata de todas las cosas y acciones. No obstante, Dios no es extenso (o material) de la misma manera como es extenso el Universo. El que Dios esté "entero" en cada parte o punto del espacio infinito posibilita, también, la afirmación de que, tanto Dios *como ese Espacio, permanecen no extensos e indivisibles (cf. (33), p. 260). Una tesis similar es expresada por S. Clarke:* "Dios, siendo omnipresente, está realmente presente ante toda cosa, esencial y sustancialmente. Su presencia se manifiesta a sí misma, de hecho, por su operación, pero ella no podría operar si no estuviera allí" (en (2), carta III, 12).
[142] *Op. cit.*, pp. 558 a-559 a.
[143] *Ibid.*, p. 559 a.

según Aristóteles los lugares se encuentran *dentro* del cosmos, que no está situado él mismo en alguno. El vacío solamente sería posible en el mundo, pues es "un lugar que no está lleno, pero es capaz de ser llenado",[144] aun cuando Aristóteles niega que haya tal vacío. No existe más que este universo pues, de lo contrario, la física de los lugares naturales se vendría abajo. Al mismo tiempo, Bradwardine se está oponiendo a la concepción aristotélica del movimiento local pues, conforme a ella, éste sólo puede efectuarse de un lugar a otro y en relación al centro terreste, ya sea alejándose, acercándose o girando en torno a él. Por ende, el mundo no tendría un lugar hacia el cual desplazarse. Bradwardine sostiene que Dios podría mover el mundo desde el lugar de éste —un espacio representado por "A"— hasta otro lugar imaginario separado del mundo —representado por "B".[145] Quien negara tal posibilidad, estaría limitando la omnipotencia divina y esa posición está entre las condenadas. Ya que Dios está en toda parte del mundo, estaría ahora en B. Bradwardine plantea que o bien:

a) Dios estuvo en B antes de efectuar el movimiento. Entonces, su presencia ha sido efectiva también afuera del mundo (y en todo lugar extra-cósmico, pues B puede estar en cualquier espacio) o

b) Dios no estaba en B antes de mover el mundo. Esto es, de entrada, imposible, pues Dios es omnipresente. Pero si tal caso pudiera darse, Dios debió haber

[144] *Ibid*, p. 560 b.
[145] *Cf. ibid.*, p. 557 a-b. Este experimento mental supone un espacio absoluto, independiente de los cuerpos e infinito; un "recipiente" que contiene el mundo y en el cual pueden distinguirse, de manera absoluta, dos lugares, aunque sean exactamente iguales. S. Clarke empleó el mismo ejemplo para criticar la doctrina leibniziana del espacio: "Si el espacio no fuera más que el orden de las cosas coexistentes; se seguiría que si Dios moviera en línea recta el mundo material entero...aun así, continuaría siempre en el mismo lugar" (en (2), Carta III, 4) Leibniz replicó: "el espacio no es sino un orden de la existencia de las cosas, consideradas como existiendo juntas y, por tanto, la ficción de un universo material finito, moviéndose entero en un espacio vacío infinito, no puede ser admitida Es del todo irracional e impracticable Pues ..no hay un espacio real fuera del universo material" y, además, tales lugares indiscernibles son, en realidad, el mismo. Por ello, no se trataría de un verdadero cambio (Carta V, 29). Leibniz afirma que estas tesis son producidas por filósofos que dan absoluta realidad al espacio, por aquellos que, en tanto "meros matemáticos", son presa de las fantasías de la imaginación y se ven llevados a forjar tales nociones. La propuesta leibniziana tiene un antecedente remoto en el segundo director del Liceo, Teofrasto (*c.* 372-287), quien, según Simplicio (*fl.* 500 a.C), dijo lo siguiente: "Tal vez el espacio no sea una realidad en sí misma, sino que se defina por la posición y el orden de los cuerpos, según sus naturalezas y facultades, como ocurre con los animales y plantas y todos los cuerpos no homogéneos, que tienen alma o no la tienen pero poseen cierto orden y posición de sus partes con respecto al conjunto de su sustancia. De este modo, dícese de cada ser en su lugar propio que posee su orden específico, especialmente dado que cada una de las partes de su cuerpo desea y tiende a ocupar su lugar y posición propios" (citado en (77), p. 18).

> estado previamente en A. Por tanto, habría partido de A para llegar a B y se habría desplazado con un tipo de movimiento como el que ocurre cuando "nuestra alma es movida con el movimiento de nuestro cuerpo".[146]

Aun sin suponer que Dios moviera el mundo, pudo haberlo creado en B; puede formar otros mundos en múltiples espacios vacíos y es capaz, asimismo, de aniquilar el mundo en A para recrearlo en B, En cada uno de estos casos, en los cuales no interviene ningún movimiento, surgiría de nuevo la disyunción mencionada más arriba.

Según Bradwardine, el aristotelismo también disminuye la potencia divina de otra manera: Dios tuvo que hacer el mundo necesariamente en A, con cierto tamaño. Sin embargo, Dios tiene la facultad de situar el mundo en cualquier lugar[147] y de hacerlo de mayores o menores dimensiones.

Como se podrá notar, el espacio del cual nos habla Bradwardine no es la nada aristotélica; no es mera hipótesis y va cobrando cierto tipo de realidad. De hecho, debe haber existido un lugar vacío antes de la Creación pues, de lo contrario, el mundo sería eterno y eso es otra herejía. Grant explica este argumento así: si no hubo ese vacío, siempre ha existido un *plenum* y, por ende, la materia sería eterna.[148] Es necesario que Dios haya estado eternamente en el espacio vacío anterior a la Creación, pues el haber llegado en un momento dado implicaría que hubo un cambio en Él (ésta es la respuesta a las preguntas formuladas en la cuarta parte del corolario).

[146] *Loc.cit.*
[147] Clarke da un argumento similar, como ejemplo de que la razón suficiente puede ser la voluntad divina: "por qué este particular sistema de materia debía ser creado en un lugar particular y, aquél, en otro lugar particular; cuando (siendo todo lugar absolutamente indiferente a toda materia), habría sido exactamente lo mismo *vice versa*, suponiendo que los dos sistemas (o las partículas) de materia son semejantes; no puede haber otra razón, sino la mera voluntad de Dios" (en (2), carta II, 1).
[148] *Cf.* (34), p. 558n.

3.3.4 El espacio vacío y la inmensidad divina

Falta mostrar por qué ha de ser infinito ese espacio y en qué sentido lo es.[149] Bradwardine parece derivar la tercera proposición (la inmensidad divina) de la segunda: "En cierto sentido y por una razón similar [por la omnipresencia divina en el lugar infinito e imaginario, nota mía], también puede Él ser llamado infinito".[150] Pero si, como ya se ha dicho, el espacio vacío infinito es visto como un atributo divino, sería correcto también establecer, primero, la inmensidad divina y de ella derivar la del espacio. A continuación sigo ese orden: Dios es inmenso e ilimitado o no circunscrito por nada y es Él quien "limita, contiene y rodea todas las cosas". Para apoyar lo anterior, que es el contenido del tercer corolario, Bradwardine menciona tres definiciones de Dios que aparecían en el tratado pseudo-hermético *El libro de los XXIV filósofos*:

> Dios es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna...Dios es una esfera que tiene tantas circunferencias como puntos...Dios es aquello cuyo poder no es cuantificable, cuyo ser no está circundado [y] cuya bondad no es limitada...[151]

No obstante, Bradwardine advierte que puede decirse de Dios que es infinitamente grande, de magnitud infinita o infinitamente extenso, pero sólo en "un sentido metafórico e impropio",[152] pues carece de extensión y dimensión en acto.

---

[149] Entre las fuentes seculares de la idea de un vacío infinito extra-cósmico se encuentra, además del argumento de Arquitas, la concepción estoica según la cual habría un espacio de ese tipo rodeando el universo esférico finito, hecho que podría comprobar quien estuviera situado en el extremo del mundo y extendiera la mano fuera de la última esfera celeste. Ese vacío sería tridimensional e ilimitado. Las razones para considerarlo carente de límites eran: a) ya que no contiene cuerpos, nada puede limitarlo; b) sería absurdo que el vacío se limitara a sí mismo y no hay razón suficiente para señalar un determinado final del vacío en vez de otro cualquiera (*cf.* (33), p. 107). Existe también la respuesta medieval pro aristotélica. fuera del universo *nada* y el supuesto espacio al sacar la mano es *el espacio de la mano misma*. Conforme a Simplicio, Estratón de Lampsaco (*fl.* 300 a C), hace la siguiente propuesta antiaristotélica (adelantándose a Juan Filopón): "Algunos hacen el espacio igual en extensión al cuerpo cósmico y afirman de él que aunque pudiera estar vacío por su propia naturaleza, está siempre lleno de cuerpos, pudiendo considerarse sólo teóricamente como existiendo por sí mismo Ésa es la opinión de muchos de los filósofos platónicos y creo que Estratón de Lampsaco era de la misma opinión" (en (77), p 19)

[150] *Ibid.*, p. 559 a.

[151] *Loc. cit*

[152] *Loc. cit.*

Aunque Bradwardine no lo afirma explícitamente, el espacio extra-cósmico debería poseer esos mismos rasgos pues, si fuera algo independiente, si tuviera alguna naturaleza positiva distinta de la divina, sería una criatura infinita y eterna, afirmación que había sido condenada por herética:

> Más aún, como nadie puede ignorar, este lugar imaginario no puede tener naturaleza positiva pues de otro modo habría cierta naturaleza positiva que no es Dios ni proveniente de Dios...tal naturaleza sería coeterna con Dios, algo que ningún Cristiano puede aceptar...En efecto, si de acuerdo con el supuesto del Filósofo y sus seguidores no podría haber vacío ni algún espacio imaginario no llenado por un cuerpo, [entonces] el mundo es eterno, lo cual es herético...o bien, antes que la creación del mundo hubo un espacio imaginario vacío, no ocupado por ningún cuerpo. El artículo citado previamente [en donde se condena la opinión de que "muchas cosas son eternas", nota mía] condenó esta respuesta y su argumento irracional. Ya que estos argumentos no sirven para obstaculizarnos de ningún modo, se muestra que la premisa razonada [es decir, que el vacío no puede tener naturaleza positiva, nota de Grant] permanece sin crítica.[153]

Además, otra de las definiciones del vacío que aparece en la *Física* de Aristóteles, aquella según la cual es una "dimensión corpórea separada de las formas naturales, como si fuera un cuerpo matemático o una cantidad por sí misma separada de otras cosas naturales",[154] tampoco la acepta Bradwardine como definición de su vacío. Otro rasgo de este espacio externo al cosmos es el ser increado. Bradwardine lo caracterizó así no sólo para evitar la existencia de una criatura infinita o eterna, sino porque si el espacio anterior a la Creación fuera a su vez creado, esto le restaría singularidad a la Creación del mundo.[155]

[153] *Ibid.*, p. 558 a. La nota de Grant aludida es la número 21.
[154] Esta cita es del texto de Bradwardine, en: *op. cit.*, p. 560. Tal definición aparece, junto con otras, en el libro IV de la *Física* (214 b12 -216 b21).
[155] *Cf.* (32), p. 155. La caracterización negativa del espacio, *i.e.* "algo" que no podía caer dentro del sistema categorial aristotélico, fue tomada en cuenta a) por Francesco Patrizzi (1529-1597), aun cuando él nos dice que el espacio fue la primera creación de Dios y b) por Pierre Gassendi (1592-1655), quien señala que Dios no puede crear lo negativo y, así, es coeterno con Dios, aun cuando, por ser algo negativo no entra en pugna con la majestad divina. Lo primero que Dios crea, según Gassendi, son los átomos y les impone movimiento (todo esto dentro del espacio preexistente). La de Gassendi es una propuesta similar a la cartesiana, aunque, en ésta, ciertamente, sin el *espacio* preexistente. La creación divina, en el caso de Descartes, es *del espacio al crear la materia* y dotarla de movimiento. *V.* (33), capítulos correspondientes.

Considerando las cualidades que Bradwardine le atribuye, puede concluirse que este espacio vacío, infinito y extra-cósmico, es "coextensivo (en un sentido trascendental) con la inmensidad total (o "extensión") de Dios y, por tanto, eterno, porque es Dios mismo".[156] De aquí que ese espacio vacío de cuerpos esté *necesariamente* lleno de Diós, como se sostiene en el quinto corolario.[157]

3.3.5 Raíces seculares de la noción de espacio infinito

§1 Geometrización del cosmos aristotélico. Lo lógicamente posible.

Recapitulando: para el Estagirita, la extensión equivale a la extensión de los cuerpos, es decir, no hay espacio sin cuerpo. En otras palabras, todo el espacio es *espacio interno*. Por ello, donde no hay cuerpo no habrá espacio: más allá del universo no hay cuerpos y, por esto, no hay espacio; nada existe fuera del límite señalado por la última de las esferas, el cielo de las estrellas fijas. Antes de proseguir, debe advertirse lo siguiente. El espacio euclídeo no implica *necesariamente* infinitud. Si los cuerpos y las figuras geométricas poseen un espacio interno o dimensión inseparable que los acompaña en todos sus desplazamientos, de modo que, sin importar su colocación, tienen su propio espacio, entonces, resulta inútil postular un *espacio externo*, continente o lugar de cuerpos y figuras. E. Grant señala que nada sugiere, en la geometría de Euclides,

> ... que él supuso un espacio independiente, infinito, tridimensional, homogéneo en el cual estuviesen colocadas las figuras de su geometría. En un sentido puramente geométrico, tal espacio habría sido superfluo, porque toda figura geométrica tiene su propio espacio interno ...[158]

[156] En (34), p. 556, introducción al texto de Bradwardine. No es exacto del todo decir que "es Dios mismo" Debe aclararse siempre que se trata de Su inmensidad. Así hace Clarke: "El espacio no es un ser, un ser eterno e infinito, sino una propiedad o una consecuencia de la existencia de un ser infinito y eterno. El espacio infinito es la inmensidad, pero la inmensidad no es Dios y, por tanto, el espacio infinito no es Dios" (en (2), carta III, 3) Además, el espacio no es eterno *hors de Dieu*, pues tanto él como la duración son "causados por, y son consecuencias inmediatas y necesarias" de Su existencia (*ibid.*, carta IV, 10).

[157] Clarke afirmó lo mismo: "El espacio vacío no es un atributo sin sujeto porque, por espacio vacío, nunca queremos decir espacio vacío de toda cosa, sino vacío sólo de cuerpo. En todo espacio vacío está presente ciertamente Dios y, posiblemente, muchas otras sustancias que no son materia; no siendo ninguno de ellos tangible, ni objeto de ninguno de nuestros sentidos" (*ibid*, carta IV, 9). Una doctrina semejante se encuentra en el tratado hermético *Asclepio* (III, p. 33). Patrizi también habla de la creación de un espacio vacío, pero Dios (*lux*) lo llena de luminosidad (*lumen*).

[158] En (33), p. 16. *Cf.* además nn. 43 y 46 en p. 273.

De la geometría euclidiana no se infiere la infinitud del espacio, pero esto no quiere decir que los filósofos o los matemáticos no lo hayan creído así. Por ejemplo, la definición de las paralelas como líneas que, aun prolongadas indefinidamente, no se tocan, da cabida a ambas interpretaciones, sea suponiendo el espacio interno o el externo. Creo plausible decir que Bradwardine tenía en mente un espacio más bien externo, por lo que iremos considerando a continuación.

Aristóteles reconoce que los geómetras emplean un espacio infinito tridimensional y siempre puede pensarse que hay algo externo al cosmos. Con el fin de aliviar esta tensión entre su doctrina y las matemáticas, Aristóteles separa el plano matemático del físico.[159] De este modo, aunque no puede existir una magnitud mayor que los cielos, sí existe el infinito matemático: por ejemplo, la serie numérica es interminable y sería posible *concebir* una línea finita prolongable indefinidamente:

> ... sobre todo, la infinitud del número, de las magnitudes y de lo que está fuera de los cielos es inferida del hecho de que no hay límite para nuestra capacidad de pensar en ellas ...[160]

Preguntémosle ahora a Aristóteles si tal línea puede prolongarse, efectivamente, fuera del cielo. La respuesta tendrá que ser: no.

En mi opinión, esta postura es débil, si no es que incongruente. Debemos traer a cuento aquí lo dicho acerca del *status* de los objetos matemáticos: si en el mundo físico se encuentra, en potencia, el mundo de la geometría, entonces, la línea prolongable hasta el infinito debería tener, por lo menos, una existencia potencial. Valiéndonos de las premisas aristotélicas, bien podríamos afirmar que el mundo físico es potencialmente infinito. Con "potencialmente infinito", tal vez Aristóteles se refería al tipo de potencialidad que nunca se actualiza —*i.e.*, no es propio de la naturaleza del

---

[159] *Diversos autores medievales adoptaron esta postura. Distinguieron los cuerpos naturales de los cuerpos matemáticos* y lo que es verdadero *in re*, de lo verdadero *secundum imaginationem mathematicorum* (*cf.* (50), p. 137).
[160] *Física*, 203 b22-24.

mundo el ser mayor de lo que es.[161] En él está contenido *todo* lo que hay. ¿Por qué no puede pensarse que el espacio infinito está, de algún modo, *en* el mundo natural? Y, más aún, ¿por qué el cosmos ha de ser finito? Aristóteles diría: porque la infinitud potencial, como lo *nunca* acabado ni acabable, implica imperfección.

Sin embargo, escolásticos como Bradwardine, tuvieron una perspectiva diferente, gracias a la cual se atrevieron a dar un paso más: si el espacio infinito existe en acto en el pensamiento del geómetra, es porque *así es* el espacio físico —procedimiento que incurre, por otro lado, en la falacia descriptivista. Para apoyar lo anterior, podemos aducir que, según lo señala A.G. Molland, ciertas omisiones en la *Geometria speculativa* se explican por el hecho de que Bradwardine, en un principio, intentaba conciliar la geometría con el cosmos finito.[162] Tales omisiones son: a) la definición de las líneas paralelas (que no se tocan ni al prolongarlas *ad infinitum*) y b) el segundo postulado euclídeo: prolongar una línea finita continuamente, tanto como se desee. Bradwardine no olvida estas proposiciones; lo que sucede, según Molland, es que tiende a tomarlas al pie de la letra, les confiere realidad, y ambas contradicen la doctrina de la finitud del cosmos. En obras posteriores como el *TC* y el *De causa Dei*, en cambio, Bradwardine adoptará la noción de espacio infinito, más acorde con su realismo geométrico.

En el *TC*, por ejemplo, distingue entre lo que es imposible *per se* y lo imposible *de facto*, volviendo plausible la extensión más allá del cosmos:

> ... *de facto*, ningún cuerpo puede ser más sutil que el fuego, ni puede un círculo ser más grande que el mayor de los círculos celestes, pero estas cosas no son imposibles *per se*, como es manifiesto a cualquier intelecto...[163]

---

[161] Valdría pensar en un ejemplo matemático como el de límite y, en términos geométricos, la hipérbola, en la cual las prolongaciones de sus ramas *nunca* llegan a tocar las asíntotas. Así, el avance de las ramas hacia las asíntotas es infintesimal y se necesita una distancia infinita para poder cubrir un tramo finito.

[162] *Cf.* (50), p. 134.

[163] "*De facto nullum corpus potest esse subtilius igne, nec aliquis circulus potest esse maior maximo celestium circulorum, illa tamen non sunt impossibilia per se, sicud est omni intellectui manifestum*" Tomado de (53), pp. 464-465.

Lo que es imposible *per se* es lo autocontradictorio, es decir, lo imposible en términos lógicos. Y aquello que no infringe la legalidad lógica, aunque al Filósofo le parezca imposible, es posible para Dios. Citaré aquí a Nicole Oresme (*c.* 1325-1382) quien, pocos años después de Bradwardine, sugirió lo mismo:

> ... el entendimiento humano consiente, de manera natural, que fuera del cielo y fuera del mundo, que no es infinito, está algún espacio, el que sea, y no puede concebir fácilmente lo contrario. ... Así pues, fuera del cielo está un espacio diferente, vacío, incorpóreo, que no es *ningún espacio pleno y corpóreo ... este espacio del que acabamos de hablar, es infinito e* indivisible y es la inmensidad de Dios y es Dios mismo ...[164]

Como puede verse, el papel que juega la imaginación es crucial: si algo puede concebirse sin contradicción, ¿cómo afirmar que es irreal? Autores medievales como Simplicio, Robert Grosseteste y Enrique de Gante, atribuyeron a la imaginación (por ejemplo, la del geómetra) la producción del espacio infinito.[165] Por su parte, Leibniz criticó la reificación del espacio debida al influjo de tal facultad (v. nota 145, *supra*).

Otra tensión no resuelta, implícita en los planteamientos cosmológicos de Aristóteles —y que también conduce al espacio infinito—, tiene que ver con su noción misma de infinitud, como veremos a continuación.

§2 Lo infinitamente grande según Aristóteles

Presento aquí, siguiendo algunas indicaciones de Roger Ariew,[166] un esquema de la doctrina aristotélica acerca de uno de los dos sentidos del término "infinito" (el otro, es el infinito por división o lo infinitamente pequeño). ¿Qué es lo infinitamente grande o el infinito por adición?

[164] Tomado de (70), pp. 19-20. Oresme suele emplear la misma distinción *per se/de facto* para lanzar hipótesis como la existencia de mundos dentro de mundos: "...aun cuando esto no parezca verosímil supongo, sin embargo, que no es por razonamiento que se muestra que esto es evidentemente imposible ... Dios puede y podría hacer, por su omnipotencia, otro mundo además de éste o muchos similares o distintos a él y ni Aristóteles ni nigún otro serán capaces de probar completamente lo contrario; pero, claro está, nunca ha habido ni habrá más que un solo mundo corporal..." (*op. cit.*, p. 21).

[165] *Cf.* (50), p. 133.

Como el ser es siempre ser en acto o ser en potencia, tendremos que este infinito:

A) *en acto*: no existe o, mejor dicho, es una noción contradictoria, pues el "ser en acto" implica un todo terminado, limitado, no procesual. Parecería ser el resultado de una supuesta pero imposible adición final. En otras palabras, no existe una sustancia sensible infinitamente grande; algo así no sería indispensable para mantener "la continuidad del llegar a ser, pues la destrucción de una cosa puede ser la generación de otra".[167]

B) *en potencia* (entendida ésta en el sentido de "ser-procesual" que nunca se actualiza plenamente e implica el surgimiento de cosas siempre distintas):

a) respecto a los números, sí existe;

b) respecto a las magnitudes, no existe —no puede haber una infinita adición de partes iguales—, a menos que se vayan agregando a cierta magnitud partes determinadas por una razón —es decir, partes menores que la magnitud original, como en un acercamiento asintótico.

Muchos contemporáneos de Bradwardine —y, en algún sentido, él mismo, si nos atenemos a los corolarios del *De Causa Dei* y a lo asentado en el apartado inmediato anterior— le objetaban a Aristóteles: ¿por qué, si existe en los números el infinito potencial por adición, no puede decirse lo mismo para las magnitudes? ¿Por qué no ha de ser como en el caso del infinito potencial por división, en donde tanto la serie de números fraccionarios como las magnitudes son infinitas? ¿Por qué no se trata lo infinitamente grande en la misma forma que lo infinitamente pequeño?[168] Para Aristóteles no era incongruente negar la existencia de lo infinitamente grande en cuanto a la magnitud. Pierre Duhem nos dice la razón de ello:

> Aristóteles no admitió ningún poder creativo...El mundo contenía toda la materia existente...Pudo entonces sostener...la negación de lo infinitamente grande en potencia.

[166] *Cf.* (20), prefacio de R. Ariew, pp. XXV-XXVII.
[167] En (8), 208 a5-10.
[168] Cuestiones éstas que Duhem resume así: "cualquier problema con lo infinitamente pequeño es un problema con lo infinitamente grande —el estudio de un infinito no está separado del estudio del otro—, es ésta una verdad que los maestros del Escolasticismo percibieron claramente" (en (20), p. 73).

> Pero la Cristiandad Escolástica no pudo tolerar el absolutismo de esta proposición; quizá el poder de producir una infinidad potencial no le está dado al mundo, que no puede crear, pero seguramente no está más allá de la omnipotencia de Dios[169].

3.4 CONCLUSIONES DE 3.2 Y 3.3

En suma, el realismo geométrico, la noción de lo posible lógicamente y la omnipotencia divina, permiten ir abriendo el cosmos medieval, al volver concebible un espacio vacío fuera del cosmos. Hemos visto actuar el tercer factor con toda su fuerza en apartados anteriores. En el *De causa Dei,* se entrelaza ese tercer factor con los otros dos:

> Por esta fuerza y poder infinitos de Dios y con respecto a él mismo, junto con aquellas cosas arriba tocadas concernientes al poder, juzgo verdadero lo que los geómetras suponen, que una línea recta puede ser prolongada continuamente en una línea recta tan larga como se quiera y un círculo puede ser descrito con cualquier centro ocupando cualquier cantidad de espacio, como es claro a partir del libro primero de los *Elementos* de Euclides y [que] los filósofos naturales [suponen] que un medio puede ser rarificado tanto como se quiera, y cosas similares y, universalmente, todo lo que de acuerdo con los lógicos ... se dice que es posible *per se* y absolutamente, es decir, lo que formalmente no incluye una contradicción *per se*, aunque no sea posible por naturaleza, esto es, por poder natural.[170]

Podría señalarse que el conceder algún grado de realidad[171] al espacio vacío extra-cósmico no

---

[169] En (20), p. 73. Creo que una suerte de variante o derivación del argumento ontológico anselmiano, hizo posible esto que *Duhem* señala. Bradwardine, por ejemplo, suele seguir este camino: *define* a Dios como ser omnipotente y luego salta a que, *efectivamente*, Dios puede hacer cualquier cosa con Su creación (salvo lo abiertamente contradictorio) y que *hay* un más allá del cosmos finito —de la misma manera en que, de la definición de Dios, en tanto ser absolutamente perfecto, se derive Su existencia, tomada como una perfección. (Recuérdese que *De Causa Dei* tiene, entre sus axiomas, el argumento ontológico. V. la nota biográfica). Entonces, me parece, el argumento ontológico habría fungido como instrumento clave para estructurar el ataque a la cosmología aristotélica y dar cabida a lo infinitamente-grande-en potencia, *i.e.* al Universo infinito. Podría formularse esta hipótesis: la introducción de Dios, hecha por la filosofía cristiana, *empuja* hacia una *ontología abierta*, mientras que la filosofía pagana-aristotélica exige una *ontología cerrada*. El proceso de laicización o secularización de los atributos divinos y su aplicación al espacio por parte de la ciencia moderna tendría, entre sus causas, la misma aparición del Dios cristiano...

[170] Citado en (50), p. 135.

[171] Una cuestión estrechamente ligada a lo que he venido exponiendo, es el uso que Bradwardine hace del término "imaginario" al hablar del espacio. Los aristotélicos calificaban de imaginario el vacío, para negarle toda existencia en sí mismo y subrayar su *status* hipotético, mas Bradwardine no aclara qué quiere decir. Grant supone que el término es empleado o bien para referirse a la naturaleza incomprensible del espacio vacío, debida a su falta de dimensiones o para sugerir, como Nicole Oresme, que sólo es captado por la razón (en (34), 1974, p. 557n.). En otro lugar, Grant sugiere

equivale exactamente a destruir el cosmos aristotélico, a infinitizar el universo o geometrizar el espacio, factores considerados por Koyré como los que hicieron posible el nacimiento de la cosmología moderna. Koyré sugiere que la mentalidad oxoniense de Bradwardine influyó en su reificación del espacio vacío infinito pues, en Oxford, a diferencia de París, se enseñaba geometría y ella "forma espíritus esencialmente anti-aristotélicos. En particular, el geómetra es llevado naturalmente a creer en la realidad del espacio".[172] Sin embargo, es posible interpretar que, en tal reificación, tuvo mayor peso la defensa de la omnipotencia y de la omnipresencia divinas. Por ejemplo, Bradwardine no se refiere al espacio extra-cósmico en términos de extensión —o, al menos, de extensión como se aplica al mundo físico— y, conforme a esta línea de argumentación, su planteamiento no sale de los límites de las discusiones teológicas para avanzar en la geometrización del espacio.[173] Su misma afirmación acerca de que Dios "está infinitamente extendido sin extensión" parece confirmar esta tesis.[174]

No obstante, en pasajes como el citado al inicio de estas conclusiones, Bradwardine sí tiende a aceptar la posibilidad de una magnitud potencialmente infinita. Aristóteles no lo hubiera admitido;

---

que, para Bradwardine, "espacio imaginario" equivale a "vacío" o "espacio vacío". Es decir, se trataría de un espacio sin cuerpos, contrastado con el espacio físico que contiene cuerpos (en (33), p. 120). En ningún caso, pues, "imaginario" significa "irreal": no debe olvidarse que el espacio extra-cósmico de Bradwardine y el espacio lugar-del-mundo, por extensión, no pueden ser quimeras, porque se encuentran asociados con la inmensidad divina. Clarke adopta esta idea: "Los antiguos no llamaban 'espacio imaginario' a todo espacio vacío de cuerpos, sino solamente al espacio extramundano. Lo cual no significa que tal espacio no es real; sino sólo que ignoramos completamente qué clase de cosas hay en él" (en (2), carta III,2). Y Leibniz, obviamente, afirmará lo contrario: "Puesto que el espacio en sí mismo es una cosa ideal, como el tiempo; el espacio fuera del mundo debe necesariamente ser imaginario, como los mismos escolásticos han reconocido" (*op. cit*, carta V,33).

[172] En (41), p. 41.

[173] *Cf* (33), p. 262, en donde se habla de una *divinización* del espacio. Koyré atribuye tal divinización del espacio a Henry More (*cf.* (39), cap. VI). Me parece oportuno introducir aquí un matiz: aunque el planteamiento de Bradwardine no implicara geometrización del espacio, sí conllevaría un incipiente proceso de *laicización* en el seno de la teología, en tanto que el concepto de inmensidad se interpreta en términos de una "extensión" vacía e infinita, siendo que la noción de espacio extenso no forma parte del *corpus* teológico. Y puede leerse, en la misma divinización, todavía otro proceso en sentido inverso al anterior: la *teologización* de una noción geométrica o de filosofía natural, *i.e.* de la noción de espacio (*cf.* (13), pp. 4 y 11).

[174] Citado en (33), p. 260. Otra posible lectura de esta expresión o de la de *espacio adimensional* (que también llegó a usarse) se encuentra en autores como Jean de Ripa y Enrique de Gante, quienes se encontraban en tensión entre Aristóteles y la Condena de 1277. Ellos dirían que no podrían atribuirle al espacio vacío ("más bien una carencia que un ser", siguiendo a Aristóteles) dimensiones *per se*, sino sólo *per accidens*. *Cf* (87), p. 22 ss.

si pudieran agregarse magnitudes indefinidamente, existiría "algo mayor que el cielo". El cosmos de Bradwardine todavía es finito. Más allá, existe algo infinito, Dios, que no es extenso. Pero su caracterización del espacio vacío que contendría el cosmos resulta ambigua: en este espacio inextenso el mundo puede moverse —lo que implica un cambio de *locus*—, convivir con otros mundos y cambiar de tamaño, gracias a la omnipotencia divina, como si ese espacio vacío e "imaginario" tuviese verdaderamente *dimensiones*.[175] De esta ambivalencia podría seguirse que:

a) la *no extensión* —o extensión metafísica— de tal espacio vacío no es del todo clara, de modo que, si presionamos un poco a Bradwardine, estaría admitiendo un infinito en acto y extenso —no obtenido por adición (el espacio vacío infinito existe desde antes de la Creación) y quizá tampoco *idéntico* a Dios.[176]

b) ya que el cosmos puede *crecer* y que, por ende, sus límites podrían moverse indefinidamente, el cosmos es una magnitud infinita potencialmente.

Parecería, pues, que los elementos mezclados por Bradwardine no se llevan del todo bien: por un lado, tenemos el espacio-atributo *divino-inextenso*; por el otro, el espacio geométrico infinitamente prolongable. Aunque tal vez, en vista de los varios ejemplos de combinaciones semejantes que se han dado en la historia de la filosofía, no sean nociones radicalmente incompatibles. De esta manera piensa Molland, al comentar el segundo corolario del *De Causa*;

> Con esto nos acercamos a la posición de Newton, en la cual Dios, por su omnipresencia, constituía el espacio absoluto. En ambos casos, el mundo fue acondicionado para la geometría euclídea.[177]

Y, a fin de cuentas, las dos nociones tienen en común el romper con el aristotelismo ortodoxo.

---

[175] A menos que se trate de una suerte de telón de fondo inmutable y completamente separado de lo que ocurriera "encima" o "frente" a él y no de un lugar -pero esto no lo encuentro en Bradwardine; él, más bien, parece concebir el espacio vacío extra-cósmico como *lugar de lugares*.

[176] Esto podría ser explicado mediante el argumento de Clarke, citado en la nota 24 *supra*.

[177] En (50), p. 136. Tómese esta afirmación con las salvedades mencionadas *supra*, al comienzo de §1.

Por lo que se ha venido exponiendo, Bradwardine puede ser considerado como parte de la tradición que creyó indispensable vincular el espacio y el vacío con Dios y explicar la naturaleza de tal relación. Tal problemática —incluyendo la terminología y las argumentaciones empleadas— es rastreable, sin solución de continuidad, desde el escolasticismo hasta el siglo XVIII.[178] Pueden agruparse, en ella, lo mismo a Tomás de Aquino, Bradwardine, Oresme, Gassendi, Henry More, von Guericke, Newton-Clarke y Joseph Raphson. Estos autores abogaron por la omnipresencia de Dios en el espacio, para explicar cómo interactúa Dios con el mundo. Todos ellos (excepto Sto. Tomás) consideraron el espacio vacío infinito como una cualidad —por ejemplo, el sensorio— de la divinidad; atribuyeron extensión "metafísica" o "espiritual" a Dios (Bradwardine y More) para conservar su trascendencia respecto de la extensión material; encontraron en el espacio, finalmente, los atributos inefables de la divinidad (Raphson). Quienes se opusieron a esta "corriente" (Duns Escoto, Descartes, Leibniz, Berkeley), sostuvieron la posibilidad de la acción divina a distancia, pues bastaba la voluntad de Dios, no su presencia efectiva en el espacio vacío, para dar razón de la causación; Dios en ningún sentido es extenso (para Descartes, por ejemplo, toda extensión es material) y sí, en cambio, absolutamente trascendente a su Creación.

3.5 ¿QUÉ ES EL *TC*?

Esta obra, escrita entre 1328 y 1335, tiene un formato axiomático, constituido por 24 Definiciones, 10 Suposiciones y 151 Conclusiones, con algunos Corolarios (en adelante, emplearé abreviaturas como *D* y *C* al citar). La intención de Bradwardine es que las Conclusiones supongan las Definiciones y las Suposiciones, como en un tratado de geometría (y, especialmente, de manera similar a los *Elementos* de Euclides). Es posible, también, que de algunas Conclusiones se sigan otras inmediatas a ellas y que una Conclusión se base en otra anterior —aunque no sea inmediata. Las Definiciones no se cuestionan a lo largo del *Tratado* y de las Suposiciones se dice que son "evidentes para todos"; es decir, funcionan como principios o axiomas. Sin embargo, no ocurre lo

[178] *Cf* (33), pp. 259-264; (39), caps. V, VI y VIII. También: textos (13), (69) y (91).

mismo con las llamadas Conclusiones, pues muchas de ellas serán refutadas, llevadas al absurdo o simplemente desechadas, arguyendo lo que otras Conclusiones sostienen. Las Conclusiones finales, en cambio, representan las opiniones de Bradwardine, quien las considera verdaderas por ser resultado del largo proceso mediante el cual se muestra, de un modo u otro, la inconsistencia o la falsedad de otras opiniones.

Además de las enunciaciones de las Definiciones, Suposiciones y Conclusiones, existen fragmentos que o bien anteceden a algunas de éstas a modo de introducciones generales, o bien se encuentran después de ellas, ya sea como digresiones -en el caso de Definiciones y Suposiciones- o como pruebas y refutaciones —en el caso de las Conclusiones.

Se supone que, al final del *TC*, el lector no podría más que aceptar las opiniones de Bradwardine, por el rigor lógico con el cual han sido deducidas y vería con claridad por qué los interlocutores de Bradwardine están equivocados. El objetivo del *TC* es defender las opiniones de Aristóteles acerca de la composición del continuo y su infinita divisibilidad. Las opiniones erróneas atacadas pertenecen a quienes sostienen que el continuo está compuesto por indivisibles, sean corpóreos o no y, por ende, que el continuo no es infinitamente divisible. Bradwardine echa mano de las verdades establecidas por las "ciencias legítimas", para hacer ver que el indivisibilismo es una hipótesis que, de aceptarse, no permitiría corroborar tales verdades. Las ciencias a las cuales se refiere y de las que derivará conclusiones son: a) por parte de las "ciencias especulativas reales", las matemáticas (subdivididas en aritmética, música, geometría, perspectiva y astronomía), la natural (siendo la astrología una de sus partes) y la metafísica; b) del lado de las "ciencias especulativas discursivas", la gramática, la retórica y la dialéctica y c) la ciencia moral, que "no es puramente especulativa sino que fuerte e igualmente es práctica" (C57).[179]

[179] C 57, en (53), p.401 ss.

3.6 RECAPITULACIÓN

Después de esta sucinta exposición de la estructura del *TC* y de haber recorrido algunos de los contextos en los cuales está inscrito, examinaré, específicamente, la elección tomada por Bradwardine ante las controversias sobre el continuo. Considero que la información manejada hasta este momento, ayuda a comprender mejor el texto pues, sin las secciones precedentes, el acceso al *Tratado* se vería aún más obstaculizado por todos los factores que de él nos separan. Es decir, su interpretación y evaluación tendrían un mayor grado de dificultad si no hubiésemos efectuado una *salida* hacia la historia de la filosofía -salida que, en el caso del presente capítulo, ha sido de tipo *elucidatorio.*[180]

En contraste, el tono del capítulo cuarto es, más bien, el de una lectura argumentada o reconstrucción racional. Y para darle entrada, sólo resta recordar que el texto del cual se extraen las citas del *TC* es el manuscrito habilitado por John Murdoch en su tesis doctoral.

[180] V *supra*, cap. I, p. 7, donde se expone la propuesta historiográfica de Carlos Pereda. La salida efectuada en el capítulo II sería, en cambio, de tipo *articulante* la mayor parte del tiempo, combinada con algunos rasgos de salida *apoyadora* (puesto que uno de los objetivos es aportar elementos a favor de una perspectiva kantiana sobre el problema del continuo).

IV. EL CONTINUO SEGÚN BRADWARDINE

Bradwardine hará suya la opinión de Aristóteles respecto al continuo e irá refutando diversos tipos de atomismo con éxito variable. Con el fin de que sea más claro qué y cómo argumenta Bradwardine en su defensa de las tesis aristotélicas y cuáles partes de su procedimiento resultan novedosas, tendremos que revisar, aunque sea brevemente, lo que Aristóteles, en la *Física*, afirma acerca de los continuos y su composición.

4.1 EL CONTINUO EN ARISTÓTELES

En el capítulo anterior (*supra* 3.3.5 §2), mencioné el esquema que R. Ariew propone para explicar cómo entiende el Estagirita lo infinitamente grande o infinito por adición. Veamos, ahora, qué sucede con lo infinitamente pequeño o infinito por división:[181]

a) *en acto*: no existe. Mismo caso que lo infinitamente grande en acto: "en acto" implicaría que existe un límite de la división o algo que sería el resultado de la última división. Pero siempre se podrán encontrar partes más y más pequeñas; nunca *la* más pequeña de todas.

b) *en potencia*: existe respecto a los números y a las magnitudes. El continuo es infinitamente divisible, no hay átomos.

En el libro III-6 de la *Física*, Aristóteles declara que a la ciencia de la naturaleza le corresponde estudiar las magnitudes, el tiempo y el movimiento, los cuales tienen, como modalidad, el ser o finitos o infinitos. Al analizar el infinito potencial, o sea, el único sentido en el que se dice que existe el infinito,[182] pondrá ejemplos de cómo se da este tipo de infinitud en cada una de las nociones mencionadas —las cuales considera como continuos— y con los números —que son discretos o sucesivos. Veamos:

---

[181] *Cf* (20), pp.XXV-XXVII.

[182] La definición de infinito potencial es, recordemos, no "aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre existe aún algo", o también: "aquello en que, tomada una determinada cantidad, siempre es posible tomar algo más fuera de ella". El infinito actual es "aquello fuera de lo cual no existe nada", lo cual "es perfecto y es un todo aquello a lo que no le falta nada" (206 b-207 a). La versión de la *Física* que cito aquí es la de Samaranch, pero en

1) *En el número,* el infinito aparece como un proceso de aumento:

> ...siempre puede encontrarse un número mayor que cualquier número asignado. El número infinito no tiene existencia separada; la infinidad del número es algo que siempre está llegando a ser... (207b10)

En cambio, en el número se considera finito el proceso de disminución, pues la unidad (*monas*) no es divisible. En las magnitudes finitas, el infinito se da por procesos de división pero no de adición de sus partes, pues hay un límite al crecimiento de cualquier magnitud.

2) *Las magnitudes* son infinitamente divisibles en partes, pero, por adición de magnitudes finitas, no se llega nunca a una magnitud infinita potencial "mayor que la extensión posible más grande" pues, de aceptarse eso, tendría que existir *de hecho* "algo mayor que el universo sensible" (207b20). Las magnitudes sensibles, los continuos, subsisten *per se,* mientras que el infinito es privación y materia. El continuo es, entonces, lo que "puede ser dividido sin límite, pero no hay infinito en la dirección del aumento" (207b15). En otras palabras, el continuo no está compuesto de átomos. Si alguien afirmara que existen tales indivisibles y que el continuo está compuesto por ellos, Aristóteles argumentaría en su contra varias cosas:

2.1) Para que dos o más indivisibles conformen un continuo, tendrían que estar en contacto, es decir, sus extremos o límites deberían juntarse y estos límites en contacto deberían, además, ser *una sola cosa* para constituir el continuo. Pero esto último no es posible si las extremidades son dos o más: los indivisibles se tocarían, mas esto no equivale a formar un continuo, pues Aristóteles distingue entre el **estar en contacto** (o ser **contiguo**) y la **continuidad** propiamente dicha. Esta última implica al primero, pero no viceversa (v. libro V, cap. 3).

2.2) Por otra parte, un indivisible, como el punto, ni siquiera posee extremos distintos de alguna otra parte de él mismo: "pues los puntos no tienen extremidades que sean una o unidas, ya que lo que no tiene partes no tiene extremidades" (231a26). El contacto se da entre todos, entre partes o entre parte y todo. Y como el punto no tiene partes, entonces el contacto entre puntos sería entre el todo de un primer punto y el todo de un segundo. Sin embargo, este tipo de contacto

el texto empleo la de Ross. *Cf* (8).

no origina un continuo pues la continuidad "implica partes separadas localmente" (231a29).

2.3) Son cosas sucesivas o consecutivas aquellas "que no tienen nada homogéneo entre ellas" (231b6) aunque no se encuentren en contacto. Podría pensarse que los puntos y los instantes constituyen continuos de esta manera. Sin embargo, dice Aristóteles, los puntos son los límites de una línea y los instantes lo son de un tiempo. En consecuencia, si se supone que las líneas están compuestas por puntos y el tiempo por instantes, entre dos puntos habrá algo homogéneo —una línea— y entre dos instantes también habrá algo del mismo género —un lapso de tiempo—. Por eso, ni puntos ni instantes son sucesivos entre sí, de modo que pudieran producir, por su consecutividad, una longitud o un tiempo.

2.4) Si entre los puntos y entre los instantes existiera algo de distinto tipo para que sea posible la sucesión, pasaría lo siguiente: ese algo intermedio tendría que ser indivisible o divisible. Si fuera indivisible, ya vimos por qué razones no habría continuidad entre los puntos extremos y este intermediario. Si fuera divisible, podría serlo otra vez en indivisibles o en divisibles *ad infinitum*. Si es la primera, no hay continuo. Si es la segunda, entonces el intermedio es infinitamente divisible y el continuo no se compone de indivisibles.

3) *En el tiempo*, el infinito se manifiesta como algo que no tiene un ser determinado, que no es una sustancia:

> En general, el infinito existe por tomar una cosa después de otra, cada una siendo limitada pero estando siempre disponible una nueva; pero [en el caso de la división de magnitudes espaciales], lo que ha sido previamente tomado persiste, mientras que [en el caso del tiempo y las generaciones de la humanidad], cada miembro de la serie perece, aunque de modo que la serie no desaparezca. (206a25)

Como se dijo en el inciso anterior, el tiempo no puede estar compuesto de instantes.

4) Veamos por qué *el movimiento* también es un continuo. Ya que tanto las magnitudes como el tiempo son infinitamente divisibles, el movimiento, que es un tipo de cambio llevado a cabo en un tiempo y a través de una magnitud, también será divisible *ad infinitum* y no podrá llevarse a cabo en un instante.[183] Si supusiéramos que una magnitud está compuesta por indivisibles (A-B-C), el

[183] Occam probará la continuidad del movimiento afirmando que un cambio se describe mediante proposiciones

movimiento llevado a cabo a lo largo de ella estaría compuesto por un número igual de movimientos indivisibles (D-E-Z). *Pero, por lo anterior, en cada movimiento indivisible, el móvil (O) se habrá movido sobre un trecho indivisible de la magnitud total —o sea, tendremos movimiento instantáneo. Sin embargo, no es lo mismo "haberse movido" que "moverse": el móvil o bien recorre o bien recorrió el tramo indivisible.* Si el movimiento D era en acto cuando O se mueve sobre A y si forzosamente D cubrió A *después* de moverse, entonces hubo un momento en el cual D *recorría* o se hallaba en un punto intermedio entre el reposo inicial y el final del proceso. En consecuencia, el movimiento D es divisible. Y si D al mismo tiempo recorre y recorrió A, tendremos que decir que el movimiento está constituido de movimientos ya terminados o, en otras palabras, de reposos, lo cual es absurdo.

Para cerrar este apartado, creo conveniente citar a Düring, pues esto nos ayudará a entender la diferencia entre las aproximaciones de Aristóteles y de Bradwardine en torno al continuo:

> La teoría de Aristóteles sobre el continuo está fundada físicamente, no matemáticamente, pues él parte del hecho sencillo de que, en el mundo natural, hay movimiento y cambio...Una y otra vez se refiere a hechos generales de la experiencia.[184]

4.2 TESIS DE BRADWARDINE

4.2.1 Definición del continuo

Bradwardine reacciona contra varios atomistas contemporáneos suyos. Sostiene tesis aristotélicas, aunque de manera poco usual, pues el *TC* no sigue la tradicional estructura de las discusiones escolásticas, sino que imita la forma axiomática de los *Elementos* de Euclides. Además, el grueso de la argumentación se apoya en la verdad de la geometría y en la opinión de que la filosofía natural debe siempre tomar en cuenta esta ciencia, perspectiva que no es afín al espíritu de

contradictorias (por ejemplo A y no-A). Como las contradictorias no pueden ser verdaderas a la vez, es decir, en un mismo instante, el movimiento no puede efectuarse en un instante sino en un tiempo, (*Cf.* (58), pp. 180-181). Para lo que sigue, véase el pasaje 231 b18-232 a17 de la *Física*.

la física aristotélica.

¿Cuáles son esas tesis? En primer lugar, Bradwardine define lo que entenderá por "continuo":

D1: Un continuo es una cantidad (*quantum*) cuyas partes se unen mutuamente.[185]

Esto equivale a la definición que aparece en la *Física*: los límites entre las partes de una magnitud o todo continuo son, en realidad, uno y el mismo límite (v. 227a 11-12). Es decir, dos partes de un continuo no poseen sendos límites; entre las partes del continuo físico no hay hiatos o huecos, ni límites yuxtapuestos. El continuo no es un agregado de entidades discretas; en él, el todo antecede a las partes, que pueden distinguirse conceptualmente y que no están separadas en acto, aunque podrían estarlo si se divide físicamente el continuo.

Cito dos conclusiones de la última sección del *TC*:

> *C141*: Ningún continuo se integra de átomos. Todo continuo se compone de infinitos continuos de especie semejante a él.[186]
>
> *C151*: La superficie, la línea o el punto no existe de ningún modo. El continuo no se continúa ni se limita por medio de tales cosas, sino por medio de sí mismo.[187]

Los indivisibles y otras entidades geométricas, no son necesarios para explicar cómo está compuesto el continuo, ni para establecer sus límites. Entonces, el continuo está formado por infinitos continuos, como se sostiene en un fragmento posterior a C141:

> ... toda línea se compone de infinitas líneas y toda superficie de infinitas superficies y así también las otras cosas.[188]

---

[184] En (22), p. 510.
[185] En (53), p. 339. Recuérdese que *D* = definición, *S* = suposición y *C* = conclusión. *Corol.* es corolario e *Introd.* alude a un fragmento que introduce cierta sección.
[186] *Op. cit.*, p. 459.
[187] *Ibid.*, p. 470.
[188] *Ibid.*, p. 459.

Esta sorprendente afirmación había sido ya formulada por Aristóteles, aunque en otros términos. Lo que el Estagirita diría, es que nunca puede encontrarse, al dividir un continuo, un constituyente simple, atómico, sino siempre partes compuestas de otras partes. La infinita divisibilidad y el ser compuesto son, entonces, propiedades esenciales del continuo tal como es definido en D1. Este último atributo también puede entenderse como el hecho de que *siempre* existirá, entre dos puntos, un tercero (para desgracia de Aquiles). Y esto mismo garantiza la *conexión* entre las partes, pues no es posible encontrar cortes en el continuo.[189]

La última sección del *TC* trata, entre otras cosas, de si existen indivisibles distintos del continuo y cómo se relacionarían con él. Allí se afirma que, en caso de existir, los indivisibles serían accidentes del continuo que, en tanto sustancia, bien podría carecer de ellos.[190] Por lo tanto, "puede existir un continuo y finito [se entiende que finito por adición, no por división] sin otro indivisible que lo continúe y lo limite".[191] Si hubiera indivisibles independientes del continuo, resultaría que "algunos accidentes no tienen un sujeto primero (*subiectum primum*)".[192]

En fin, es innecesario postular entidades que permitan la continuidad o la limiten. Los continuos son sustancias que existen aunque no hayan indivisibles que los continúen o terminen. Los indivisibles, pues, no son nada real, ni substancias, ni accidentes y, seguramente, Bradwardine los considera ficciones útiles para la geometría.

Me parece pertinente incluir aquí una digresión sobre cuestiones mereológicas, que tan importantes resultan para el problema del continuo. Aristóteles no aceptaría que, de afirmar que el continuo está compuesto de continuos, se siga que la substancia está compuesta de substancias. Se considera como substancia el todo continuo, pero no cada una de sus partes pues, de lo contrario, podría señalarse un regreso *ad infinitum* no sólo en la división sino también a nivel ontológico. Si

---

[189] V. apartado 4.5 *infra*, para apreciar cómo se aplica esta misma concepción en el caso del tiempo.
[190] *Cf* C143 en: *ibid.*, p. 464.
[191] *Ibid.*, p. 466 (C145).
[192] *Ibid.*, p. 470 (C149).

preguntamos qué es un ser, podemos responder que o bien cae dentro de la categoría de substancia, o bien es accidente. La substancia es un principio de explicación que, a su vez, no puede ser explicado, *i.e.* funciona de manera semejante a un axioma -agrupa y sirve para definir multitud de entes y sólo es superada, en su carácter general, por el término "ser". En un organismo, por ejemplo, las partes no pueden tomarse como substancias independientes. Si un hombre pierde cabello, no por eso pierde su identidad o deja de ser substancia. El cabello entraría, más bien, en la categoría de accidente, que depende del todo al cual pertenecía, puede estar presente o dejar de ser sin que ello provoque la alteración radical del ser en el cual inhería.

Una concepción profundamente distinta se encuentra, por ejemplo, en Descartes quien, aunque acepta la indefinida divisibilidad del continuo, sostiene que la *res extensa* (sea un organismo o un trozo de materia) es una substancia compuesta de substancias.[193] Las partes son entidades que puedo concebir como separadas, por lo que son, de hecho, separables. Cada pedazo de materia puede existir independientemente de los otros y no perece si es separado del todo, a menos que Dios lo aniquilara. Si un cuerpo pierde una parte, ya no se puede decir que sea el mismo todo o que conserve su identidad, como en el caso aristotélico. Los cuerpos son agregados de un número indefinido de sustancias corpóreas realmente distintas entre sí.

El punto de vista cartesiano sería retomado y modificado por Leibniz, quien considera que, si los cuerpos son agregados, no son verdaderas substancias, pues la substancia se define como simple, nunca como algo compuesto.

Volviendo al asunto principal en este apartado, hay que señalar que la estrategia general de Bradwardine no es probar directamente C141 y C151, *i.e.* que el continuo está compuesto y limitado por continuos y no por átomos, sino ir refutando diversas versiones del atomismo, con el fin de hacer ver que sólo la opción divisibilista queda en pie. Al asumir que el continuo está formado por indivisibles, sostiene, se producen múltiples absurdos, contradicciones o "herejías" en la geometría y en las demás ciencias:

> *Introd. de C57 a 114*: La aseveración que expone que el continuo se compone de indivisibles finitos es enemiga de todas las ciencias, impugna todas y, de la misma manera, es impugnada por todas de acuerdo. En primer lugar, la matemática contra ella combate y vence.[194]

Por tanto, el atomismo tiene que ser falso, pues la matemática es "la reveladora de toda verdad sincera, conoce todo secreto escondido y da la clave de todas las letras sutiles".[195]

El resultado de la obra entera, expresado en C151, coincide con las propuestas de Occam, quien niega la existencia del punto, el instante, la línea y la superficie, siguiendo otras vías: ya que su ontología sólo acepta, como reales, las cosas individuales y permanentes, no los universales, bien pueden reformularse las proposiciones en las que aparecen los términos que refieren a indivisibles, de modo que nos quedemos siempre al nivel de los cuerpos tridimensionales. Por ejemplo, no es necesario que existan los puntos para dar cuenta de la terminación de las líneas, sino sólo líneas finitas de x o y longitud, pues la línea se termina por sí misma. Entonces, "punto" equivale a "línea de tal y tal longitud" y así podemos continuar transformando "línea" en una proposición donde sólo aparezca "superficie", etc.[196] Los indivisibles son privaciones puras, no representan nada positivo.[197]

4.2.2 Pruebas de la infinita divisibilidad del continuo

En seguida, expondremos algunas conclusiones en donde sí se defiende directamente el divisibilismo:

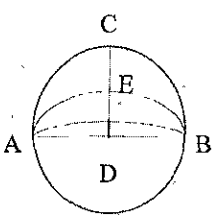
---

193 *Cf.* (27), pp. 2, 6, 11, *passim*.
194 En (53), pp. 400-401.
195 *Op. cit.*, p. 401.
196 *Cf.* (57), p. 175 ss. y (54), p. 573 ss.
197 Esta opinión occamista, respecto al *status* ontológico de los indivisibles, es compartida por Buridan y Gregorio de Rimini y fue rechazada por Duns Scoto y Walter Burley, para quienes los indivisibles no son meras abstracciones o privaciones sino cualidades, accidentes perceptibles. En el extremo de esta posición se encuentra el realismo geométrico radical, representado por Marsilio de Inghen, quien llegó a considerar los indivisibles como sustancias completas, con

C20: Corol. Toda recta puede dividirse en muchas líneas rectas.[198]

C66: Toda línea recta contiene (*habeat*) infinitas líneas particulares.[199]

La infinita divisibilidad de la línea, establecida en estas proposiciones, no es demostrada a partir de la posibilidad de efectuar innumerables bisecciones, como hacen Aristóteles y muchos otros. Las secciones obtenidas por bisección, pueden representarse con una fracción $\frac{m}{n}$, donde m<n y n es alguna potencia de 2.[200] Bradwardine, en cambio recurre, en su *C20*, al tercer postulado de los *Elementos*, según el cual es posible construir un círculo tomando cualquier punto como centro y con cualquier distancia como radio. De acuerdo con esto, puede trazarse un número infinito de arcos pertenecientes a círculos cada vez mayores, de modo que corten una recta dada. En la figura de la página siguiente,[201] la recta CD, inscrita en un círculo, es cortada en el punto E por el arco AEB, mismo que forma parte de un círculo de mayor tamaño. Y podríamos trazar arcos de círculos cada vez más amplios, de manera que cortasen CD en cualesquiera puntos entre E y D.



La gran ventaja de este procedimiento, consiste en que permite una distribución más homogénea o arbitraria de los cortes, que la que se obtiene empleando potencias de 2, lo cual da una idea

materia, forma y cualidades (*cf.* (20), p. 20 ss.).

[198] En (53), p.371.

[199] *Op. cit.*, p. 410.

[200] Este procedimiento apela a números racionales, que son densos, mas no continuos. La bisección también puede representarse así $\frac{1}{2i}$ donde i ≥ 0.

[201] Tomada de (56), p. 113.

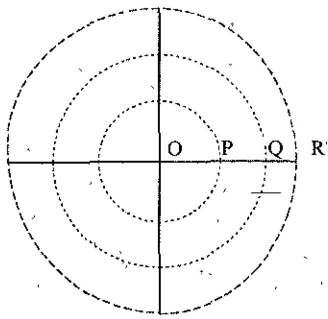
más exacta de la infinita divisibilidad del continuo.[202] Sería posible, incluso, representar $\sqrt{2}$, un punto irracional que no queda cubierto por la serie de potencias recíprocas de 2 y que pertenece a un orden ya no sólo denso, sino continuo en sentido técnico. Bradwardine, sin embargo, no abunda sobre tal cuestión.

Un segundo argumento a favor del divisibilismo tiene que ver con el movimiento:[203]

> *C22*: Estando fijo un solo extremo de cualquier línea recta finita, su otro extremo puede desplazarse circular, uniforme y continuamente, de modo que toda la recta y cualquier segmento suyo describan un círculo hasta llegar a su extremo fijo y que cualquier punto suyo que se mueva haga la circunferencia de un círculo.[204]
>
> *C23*: Si una recta finita es movida circularmente con uno de sus extremos fijos, entonces dos segmentos cualesquiera de línea, terminando por un extremo en el punto inmóvil y por el otro extremo en puntos móviles, se sabe certeramente que [sus dimensiones] son proporcionales a las velocidades de los puntos móviles.[205]
>
> *C24*: Dado cualquier movimiento local, puede ser encontrado un movimiento local uniforme y continuo que sea más rápido o más lento que el primero por cualquier razón [que pueda obtenerse] entre lineas rectas finitas.
> *Corol. Cualquier espacio finito puede ser recorrido en algún tiempo finito.*[206]

Bradwardine pide que se haga girar una recta (*OR*) en torno a un centro fijo —*uno de sus extremos*— de modo que realice un movimiento circular. Si se divide tal recta en varios segmentos (OP y OQ), a cada punto extremo de los segmentos le corresponderá cierta velocidad. Podrá verse, entonces, que, como la recta es infinitamente divisible, el movimiento también lo es, pues siempre podrán encontrarse grados de velocidad más y más pequeños, sin que haya un término de este proceso (v. figura siguiente).

[202] *Cf.* (53), pp. 320-321 (comentario de Murdoch).
[203] *Cf.* (56), pp. 113-114. Tanto la figura que ilustra este argumento, como las siguientes, fueron hechas por mí.
[204] En (53), pp. 374-375.
[205] *Op. cit.*, p. 375.
[206] *Ibid.*, p. 376.



Con estas Conclusiones serán probadas otras más, como la 26 y la 32, que se refieren, respectivamente, a la imposibilidad de que exista el movimiento instantáneo y de que haya un movimiento más lento (en el sentido de que no pueda encontrarse otro menor):

> *C26:* Si algo es movido local y continuamente, no adquiere múltiples posiciones en el mismo instante, ni puede estar en la misma posición en instantes diversos.[207]

> *C32:* Ninguna forma susceptible de [tener] mayor y menor asume el más lento de los grados.[208]

Nótese la diferencia del método empleado por Bradwardine en los casos anteriores y el método aristotélico: el primero aplica la geometría al problema del continuo, tiene fe en su absoluta certeza, de modo que todo lo que la contradiga será falso[209]. El segundo sólo esgrime razones de tipo físico. Aristóteles, como sabemos, no ve con buenos ojos la intervención de las matemáticas en filosofía natural.

---

[207] *Ibid.*, p. 377.

[208] *Ibid.*, p. 381.

[209] Antes de Bradwardine, Roger Bacon y Duns Scoto ya habían empleado la geometría con idénticos fines. Occam y Gregorio de Rimini también lo hicieron, así como Alberto de Sajonia y Marsilio de Inghen. El peso de la geometría, en la argumentación contra los indivisibles, se desplaza con Buridan: la verdad de la proposición "la magnitud continua no está compuesta de indivisibles" no está asegurada, como en los autores anteriores, por la necesidad de no contradecir a la geometría. El geómetra debe admitir su verdad a manera de postulado, sólo para construir su ciencia. Desde esta perspectiva, la verdad de la geometría "está subordinada a la corrección de la proposición y la corrección de ésta no es establecida por la geometría, sino por la física o la metafísica" (en (20), p. 20).

Ya que hemos establecido la meta a la cual desea llegar Bradwardine, tendremos que ir especificando de qué medios se vale para lograrlo. En el apartado siguiente, se analiza una noción fundamental para todo su plan: la de indivisible.

4.2.3 Definición de los indivisibles

Recordemos que Bradwardine organiza su escrito de manera geométrica; imitando los *Elementos* de Euclides. El *TC* está dividido en tres grandes secciones: la primera, consta de Definiciones (D), que establecen los significados de los términos a emplear y que funcionan a modo de axiomas de los cuales se deducen las Conclusiones (C). La segunda, de Suposiciones (S), contiene afirmaciones calificadas como "evidentes para todos". Estas Suposiciones provienen de varias ciencias verdaderas —a decir de Bradwardine— y de ellas también serán derivadas algunas de las Conclusiones de la tercera sección. Es importante notar que las Definiciones no son enunciados categóricos, sino bicondicionales. Cuando Bradwardine define el continuo como "una cantidad cuyas partes están mutuamente conectadas" (D1),[210] no está emitiendo una proposición existencial; no dice que *hay* un continuo que es de tal modo, sino que expresa lo que entenderá por "continuo". Otro ejemplo es la importante D7: "Un indivisible es algo que nunca puede ser dividido".[211] Esto no significa que Bradwardine admita la existencia de indivisibles. La definición debe tomarse como un bicondicional: "*x* es algo indivisible, si y sólo si *x* no puede ser dividido".

En la primera sección del *TC*, se establece, entre otras cuestiones, cuáles tipos de continuos y de indivisibles serán investigados. L as Definiciones retoman nociones aristotélicas, euclidianas y de la filosofía natural del siglo XIV. Por ejemplo, D1 es de corte aristotélico: de modo semejante a la *Física* (V 227a 11-12), se afirma que las partes de un continuo están conectadas o poseen límites comunes; es decir, pueden distinguirse partes del continuo, pero sus límites son, en realidad, uno solo. *Debe tenerse en cuenta que la existencia de las partes, en este caso, no es en acto ni independiente del continuo,* sino meramente potencial.

[210] *Ibid.*, p. 339.
[211] *Loc. cit.*

El tono continúa siendo aristotélico cuando se clasifican dos tipos de continuos:

1) *Permanentes*: en ellos, cada una de las partes se mantiene simultáneamente. Son las magnitudes (que, en *Categorías*, son definidas como *cantidades* continuas), es decir:

a) La línea: continuo permanente con longitud.
b) La superficie: posee longitud y anchura.
c) El cuerpo: posee longitud, anchura y profundidad.

2) *Sucesivos*: en ellos, cada parte antecede o sigue a otra en cierto orden. Se trata de:

a) El tiempo: continuo que mide la sucesión.
b) El movimiento: continuo medido por el tiempo.

Los tipos de indivisibles a investigar son:

a) El punto o indivisible "situado", es decir, con posición. Corresponde a los continuos permanentes;
b) El instante, o átomo de tiempo;
c) El *motum esse* o indivisible de movimiento.

A diferencia de Aristóteles y Euclides, Bradwardine no define el punto por la carencia de partes (*cf. Física* VI, 231b-3; Elementos I, 1) sino por su no-divisibilidad. Por otro lado, a partir de D7 no podemos saber si se refiere a indivisibles extensos o no extensos. Es casi al final del *TC*, en un fragmento que sigue a C141, cuando se entiende por qué D7 está formulada así: la estrategia consiste en que la definición sea lo más general posible para que pueda ser aplicada en las refutaciones de cada tipo de indivisibilismo, para que incluso los atomistas la aceptaran y no pudieran decir que se estaba suponiendo lo que debía probarse. No sólo se dará cuenta de los indivisibles carentes de extensión, sino también de los extensos y que, además, tienen partes, como es el caso de los átomos democríteos. Si se hubiera empezado con una noción de indivisibles como carentes de partes, la refutación de la postura de Demócrito sería una *petitio principii*. En una primera lectura, podría concluirse que Bradwardine salta, inadvertidamente, de un tipo de indivisibles a otro, pero quizá no sea ésta la mejor descripción de su proceder. Lo que podría parecer una posición no consciente de la diferencia entre puntos geométricos y corpúsculos es, más bien, una de las virtudes de su método geométrico.

4.2.4 Características de los indivisibles (Conclusiones 1-5)

§1 Sobre C1

De la D7 y la primera suposición (S1) se deriva, a decir de Bradwardine, la afirmación que abre la sección de Conclusiones o proposiciones (C1). Ésta señala una característica de los indivisibles: "ningún indivisible es mayor que otro".[212] No se olvide que esto no implica aceptar la existencia de tales entidades ni sostener que compongan el continuo, tesis que son precisamente las que habrán de ser refutadas. La primera suposición establece que:

> Todo lo mayor (que otra cosa) puede ser dividido en una cosa igual a (esta otra cosa) y la diferencia por la cual excede (a esta otra cosa).[213]

El argumento podría organizarse modificando las premisas, de este modo:

Premisa 1 (D7)- Si algo es indivisible, no puede ser dividido en una cosa menor a él mismo y en la diferencia existente entre él y la cosa menor.

Premisa 2 (S1)- Si algo es mayor que otra cosa, puede ser dividido en una cosa menor a él mismo y en la diferencia existente entre él y la cosa menor.

Conclusión (C1)- Si algo es indivisible, no es mayor que otra cosa.

O bien:

Ix $\neg Dx$
Premisa 1 - Algo es indivisible syss no es divisible.
Mxy Dx
Premisa 2 - Si algo es mayor que otra cosa, es divisible.

Conclusión - Si algo es indivisible, no es mayor que otra cosa.

[212] *Ibid.*, p. 350. Berkeley mantiene esta propuesta con respecto a los *minima sensibilia*. La razón es que la diferencia de tamaño implicaría la existencia de partes en los de mayor tamaño, con respecto a los menores. (*Cf.* (68), pp. 46 ss).
[213] *Ibid.*, p. 349.

$1)\ (x)\ [Ix \leftrightarrow \neg Dx]$
$2)\ (x)\ [(Ey)\ Mxy \rightarrow Dx]$

Por tanto, $(x)\ [Ix \rightarrow \neg(Ey)\ Mxy]$
$3)\ (x)\ (y)\ [\neg Dx \rightarrow \neg(Ey)\ Mxy]$
$4)\ (x)\ [Ix \rightarrow \neg(Ey)\ Mxy]$

Pero la conclusión original no queda expresada con exactitud, pues ella decía que un indivisible no es mayor que otro indivisible. Para obtener el consecuente original de C1, podríamos reformular el consecuente al cual llegamos en (4) del siguiente modo:[214]

$(5)\ (x)\ [(Ey)\ Mxy \rightarrow \neg Ix]$

$(6)\ (x)\ (y)\ (Mxy \rightarrow \neg Ix)$

$(7)\ (x)\ (y)\ [(Ix\ \&\ Iy) \rightarrow (\neg Mxy\ \&\ \neg Myx)]$

$(8)\ (x)\ (y)\ [(Ix\ \&\ Iy) \rightarrow (x = y)]$

De C1 también podemos deducir, suponiendo una lógica con identidad, que todos los indivisibles son iguales, pues *x* no es mayor que *y* y *y* tampoco puede ser mayor que *x*. Es decir, *x* no es ni mayor ni menor que *y*; por tanto, *x* y *y* son iguales.

Ya que Bradwardine intenta dar una definición de los indivisibles que comprenda todos los casos, esta derivación de D7 debería ser válida tanto para indivisibles extensos como para inextensos. En el caso de los indivisibles extensos se puede entender, sin dificultad, el que sean iguales entre sí (por ejemplo, se podría decir que son de igual magnitud o tamaño; que al superponerlos, uno no excede al otro). Sin embargo, ¿qué sentido tendría decir que los indivisibles *inextensos* son *iguales* o que un indivisible inextenso no es ni mayor ni menor que otro? ¿Cómo podría hablarse de las relaciones *mayor que*, *menor que* o *igual*, en donde no se admite ningún tipo de magnitud? Esto parece indicar que C1 únicamente puede ser aplicada a los indivisibles extensos.

[214] Agradezco al Dr. José Antonio Robles, quien me señaló la posibilidad de esta reformulación.

O, por lo menos, si acaso hay manera de que no excluya los inextensos,[215] conviene también a los extensos.

§2 Sobre C3

Puede decirse que la tercera proposición, al contrario de C1, supone solamente los indivisibles inextensos. Veamos por qué. La C3 afirma:

> Muchos indivisibles de un continuo no están situados en el mismo lugar indivisible. Esto es verdadero del continuo no curvo ni flexionado; pues, por la tercera suposición, si dos indivisibles de algún continuo no curvo pueden estar en el mismo sitio indivisible, por la misma razón un tercero y un cuarto y todos los indivisibles del continuo y, *así, algún continuo carece de cantidad*, contra la definición primera [D1].[216]

Es decir, a cada indivisible le corresponde *uno y sólo un lugar indivisible*. La tercera suposición en la cual se basa esta conclusión es la siguiente:

> Donde no existe causa de diversidad o disimilitud, se juzga similarmente.[217]

Podría entenderse esta S3 como una especie de principio de identidad de los indiscernibles. Esto querría decir que, si dos puntos estuvieran en el mismo sitio, serían indistinguibles pues, dada la definición de punto como indivisible con posición, no habría una característica extra que fuese la causa de *disimilitud entre* ellos.

Pero, por otro lado, la C3 también estaría afirmando que, si se superpusieran todos los puntos de un continuo, la magnitud del mismo desaparecería. Tal afirmación sólo puede ser cierta si los indivisibles superpuestos carecen de magnitud pues, como ya señalaba Aristóteles, es imposible

[215] Por ejemplo, si x y y son inextensos, podría considerarse que ambos poseen magnitud 0 y, por tanto, son iguales.
[216] *Ibid.*, p. 350.
[217] *Ibid.*, p. 349.

formar algo extenso a partir de lo inextenso.[218] Entonces, C3 no se aplica a indivisibles extensos porque, si los puntos superpuestos tuvieran extensión, no se podría decir que la magnitud del continuo desaparecería.

¿Qué consecuencias puede traer el que C1 y C3 no sean válidas para todo indivisible, sino sólo para los extensos o los inextensos, respectivamente? A continuación señalo algunas de ellas:
(1) Puede decirse que este hecho está contra la intención principal de Bradwardine de refutar cualquier indivisibilismo. La caracterización de los indivisibles tendría que ser tan amplia como su definición, para que la conclusión final sea exhaustiva y no se den huecos en el proceso deductivo.
(2) No será válido usar C1 y C3 simultáneamente, como premisas para inferir otras conclusiones, ya que son incompatibles.
(3) Murdoch considera que la mayoría de las conclusiones del *TC* están basadas en la propiedad genérica de no ser divisible (D7) y en las *relaciones geométricas* entre indivisibles, no en su carácter extenso o inextenso, así que, en realidad, no tendría tanta importancia el que C1 y C3 no sean suficientemente amplias.[219] No obstante, creo que sí puede reprochársele a Bradwardine lo mencionado en (1) y el hecho de que algunas proposiciones posteriores incluyen, entre sus premisas, ambas conclusiones.[220]

§3 Sobre C2

Esta conclusión dice:

> Si dos continuos de la misma especie están compuestos por indivisibles iguales en número, a su vez son iguales.[221]

Para que tal igualdad sea posible, es necesario suponer C1, pues si hubiese indivisibles mayores que otros, la magnitud de los continuos podría diferir aunque estuviesen formados por la

[218] Véase, por ejemplo, (9), p. 318 (*Sobre generación y corrupción*, 316 a-b).
[219] *Ibid.*, pp. 101 y 107.
[220] Por ejemplo, la C87, de la cual hablaremos en el apartado 4.3.2.
[221] *Ibid.*, p. 350.

misma cantidad de átomos.

Debe notarse que el llamado axioma de finitud se encuentra implícitamente en C2: sólo si los continuos comparados están formados por cierto número *finito* de átomos puede seguirse que son iguales. ¿Qué sucedería si la cantidad de átomos fuera *infinita*? Podría ser que una parte y el todo de un continuo estuviesen compuestos de infinitos indivisibles, mas no por ello poseerían igual extensión. Así, en este caso, aunque una parte y el todo estuviesen compuestos por igual número de indivisibles, no podrían ser iguales.

§4 Sobre C4 y C5

Estas conclusiones hacen referencia a relaciones que guardan entre sí los indivisibles *contenidos* en los continuos —lo cual no equivale a decir que *compongan* los continuos. El texto de C4 es:

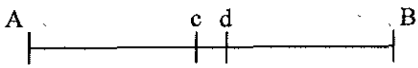
> Muchos puntos de una recta no pueden distar igualmente de alguno de sus términos.
> *Corol.* Cualesquiera dos átomos de cualquier continuo tienen distancias desiguales de cualquiera de sus términos.[222]

Y el de C5:

> En un continuo muchos de sus indivisibles no pueden estar inmediatos a uno solo de sus indivisibles según una misma parte.
> *Corol.* No más de dos puntos de una recta están unidos inmediatamente a uno solo de sus puntos por diversas partes.[223]

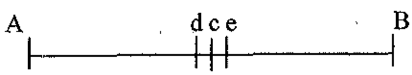
Según C4, cada punto se encuentra a cierta distancia de los puntos límite de la recta a la cual pertenece y ningún otro punto se encuentra a la misma distancia respecto a los límites. En otras palabras, cada punto posee una posición que no comparte con los demás (derivación de C3, v. figura siguiente).

[222] *Ibid.*, p. 351.
[223] *Ibid.*, p. 352.



El segmento Ac es distinto del Ad y de todos los que pueden establecerse teniendo como límites a A y a cualquier otro punto de la recta AB. Lo mismo vale para cB. Si superponemos un punto e al c para decir que Ac = Ae, tendríamos, en realidad, que c = e por S3 y C3.

De acuerdo con C5, cada punto en una recta puede tener inmediato un solo punto respecto a cada límite y solamente dos puntos considerando ambos términos de la recta.



Si existen indivisibles inmediatos en el continuo, entonces sólo pueden ser inmediatos en una dirección dada. El punto inmediato a *c* entre *c* y *B* sólo puede ser *e*; no hay más indivisibles ocupando los respectivos sitios de *c* o de *e*, según se desprende de C3. Lo mismo se dirá del punto inmediato a *c* ubicado entre ésta y A. Y, como se observa en la figura, *c* sólo tendrá dos puntos inmediatos.

No se supone aquí el axioma de finitud —*i.e.* AB consta de un número finito de átomos, de modo que entre dos puntos cualesquiera no puede existir un número infinito de otros puntos porque sólo se afirma de manera condicional, no categórica, la existencia de indivisibles inmediatos. Bradwardine diría que, de hecho, no puede haber átomos inmediatos: entre *c* y *e* podría existir un átomo *f* y *n* indivisibles, de modo que no exista ninguno inmediato a *c* (v. *supra* sección 4.5 como ejemplo en el caso de los instantes).

Ya que hemos expuesto la definición y los atributos de los indivisibles, además de algunas dificultades presentes en la caracterización de los mismos por parte de Bradwardine, podemos dar paso a la refutación de las diversas ramas del indivisibilismo, en cuanto al continuo espacial, así como a su concepción del continuo temporal.

4.3 GEOMETRÍA *VS* ATOMISMO

4.3.1 Clasificación de las opiniones sobre la composición del continuo

Una contribución notable del *TC*, al debate entre atomistas y divisibilistas o continuistas, es la identificación de diversas posturas que estaban en juego. Además de la doctrina de la infinita divisibilidad, Bradwardine menciona dos vertientes del indivisibilismo: 1) la que sostiene que está compuesto de indivisibles no extensos o puntos. Existen dos variantes de esta última opinión: a) el continuo se compone de un número finito de puntos (Pitágoras, Platón y Walter Chatton) y b) de un número infinito de puntos, tesis que, a su vez, se bifurca en: b.1) los puntos son inmediatos entre sí (Henry Harclay) y b.2) los puntos son mediatos (Robert Grosseteste); y 2) la que considera el continuo como formado por indivisibles extensos o corpóreos (los átomos democríteos). Esta clasificación se encuentra en C31 y un fragmento que la acompaña:

> Si un solo continuo se compone de indivisibles según cierto modo, entonces cualquiera está compuesto así y si un solo (continuo) no se compone de átomos, entonces ninguno (está compuesto de átomos).
>
> Para ayudar al entendimiento de esta conclusión debe saberse que, acerca de la composición del continuo, hay 5 opiniones famosas entre los filósofos antiguos y los modernos. En efecto, algunos exponen, como Aristóteles y Averroes y muchísimos de los modernos, que el continuo no se compone de átomos, sino de partes divisibles sin fin. Empero, otros dicen que el mismo (continuo) se compone de indivisibles con dos variantes, porque Demócrito expone que el continuo se compone de cuerpos indivisibles. Pero otros (dicen que se compone) de puntos y éstos (presentan opiniones) dobles, porque Pitágoras, padre de esta secta, y Platón y el moderno Walter exponen que el mismo (continuo) se compone de finitos indivisibles. Pero otros (dicen que) de infinitos y son de dos tendencias, porque algunos de ellos, como Henry el moderno dice que el mismo (continuo) se compone de infinitos indivisibles unidos de manera inmediata; pero otros, como el Lincol(niense) (dicen que se compone) de infinitos mutuamente mediatos. Y por ello la conclusión dice: "Si un solo continuo se compone de indivisibles según cierto modo", entendiendo por "modo" algunos de los modos mencionados antes, entonces se sigue: "cualquier continuo se compone así de indivisibles siguiendo un modo semejante de composición".[224]

[224] *Ibid.*, pp. 379-380.

En los primeros años del siglo XIV cobró importancia, por causas no conocidas del todo, una corriente de pensadores a favor del indivisibilismo. La mayoría de los indivisibilistas tenían en mente *indivisibles no extensos o no corpóreos*, es decir, hablaban de puntos geométricos y no de átomos estilo Demócrito. [225] En el fragmento arriba citado, Bradwardine menciona a algunos indivisibilistas contemporáneos suyos: "el moderno Walter" es el franciscano Walter Chatton (1285-1344); "Henry el moderno" es Henry Harclay (1270-1317), maestro de Oxford y "el Lincolniense" es Robert Grosseteste (1175-1253), otro maestro de Oxford quien parece no haber defendido lo que Bradwardine le atribuye[226].

Como ya se ha mencionado, Bradwardine pretende refutar todas y cada una de estas divisiones y subdivisiones del indivisibilismo, comenzando por la primera rama. Esta última ha sido esquematizada así por Edith Sylla:[227]

Indivisibles:	En número finito	En número infinito
inmediatos	Chatton (1)	Harclay (2)
mediatos	———	Grosseteste (3)

[225] *Cf.* (54), pp. 576-577. Entre los atomistas se encuentran Gerardo de Odon, Nicolás Bonet y Nicolas de Autrecourt, además de los que Bradwardine refuta. No parece que Bradwardine haya concedido a los atomistas la propuesta según la cual la sola *posición* de puntos adimensionales puede producir una extensión. Aunque se define el punto como un "indivisible situado", la argumentación contra Harclay (*supra* 3.1) hace ver que un continuo no puede estar formado por varios átomos que están en contacto y mantienen posiciones diferentes.

[226] La opinión de Grosseteste no es que el continuo se *compone* de indivisibles mediatos sino que los *contiene*, que no es lo mismo (*cf.* (56), 1987, pp. 105, 114 y 115). En el libro VI de su comentario a la *Física*, Grosseteste sostenía la existencia de *mínimos naturales*, las partículas más pequeñas en que se puede dividir a una sustancia sin que pierda su especificidad. Sólo en este sentido, dice, es posible asignarle un *minimum* al cuerpo natural "pues en tanto que es un volumen, un cuerpo natural es continuo y consecuentemente, infinitamente divisible" (citado en: (20), p. 36).

[227] Esquema propuesto en (85).

No se examina la posición según la cual el continuo está formado de indivisibles mediatos en número finito. Bradwardine parece considerar que:

a) la mediatez implica un número infinito de puntos, ya que siempre puede encontrarse entre dos indivisibles un tercero y, entonces, tal posición sería reductible a (3),[228]

y

b) la mediatez puede ser reducida a la inmediatez, como veremos en la siguiente sección (§3), por lo cual basta refutar (1) y (2).

En las secciones que siguen, se analizarán las propuestas según el número asignado y, posteriormente, se hablará sobre el atomismo democríteo.

4.3.2 Contra los indivisibles incorpóreos (puntos geométricos)

Como se mencionó más arriba, aquí se exponen y comentan varias proposiciones del *TC* cuyo fin es demostrar la imposibilidad de la composición del continuo a partir de puntos. Encontramos que:

a) algunos argumentos son mejores que otros y aportan elementos novedosos respecto a la tradición aristotélica;

b) a menudo, resulta ambiguo si Bradwardine y sus interlocutores están manejando puntos o átomos corpóreos;

c) algunos de los argumentos empleados son un arma de doble filo: aunque pensados para refutar el atomismo en versión infinitista, podrían ser usados contra el divisibilismo;

d) Bradwardine atribuye las mismas propiedades a colecciones finitas e infinitas y no acepta grados de infinitud (todos los infinitos son iguales).

[228] *Cf.* (53), p. 239, comentario de Murdoch. Según este especialista, la posibilidad de que una magnitud continua esté compuesta de puntos mediatos, en número finito, entre los cuales existiría espacio vacío —y no otros puntos—, no fue considerada seriamente por los escolásticos en general (*loc. cit.*, n. 19).

A medida que avancemos, se irá señalando lo que ha dado pie a estas conclusiones preliminares.

§1 Indivisibles en número finito

Es contra este tipo de atomismo que Bradwardine moviliza todas las ciencias (*Introd.* de C57):

> La aseveración que expone que el continuo se compone de indivisibles finitos es enemiga de todas las ciencias, las impugna todas y, de la misma manera, es impugnada por todas de acuerdo. En primer lugar, la matemática contra ella combate y vence.[229]

La hipótesis finitista conduce a "infinitas herejías geométricas" (C92),[230] que Bradwardine tratará de desterrar. Uno de los herejes en cuestión era Walter Chatton, oxoniense contemporáneo de Bradwardine, quien examinó el problema del continuo en el segundo libro de sus *Comentarios a las Sentencias* (1323). Este autor afirma que, tanto los puntos matemáticos, como los llamados *minima naturalia*,[231] existen de manera independiente del continuo. Para sostener su tesis de que el continuo está formado por un número finito de indivisibles, ataca la doctrina contraria. Si aceptamos la divisibilidad infinita, se seguiría el absurdo de que dos magnitudes continuas, desiguales, tendrían el mismo número de partes —es decir, infinito— o que la parte es igual al todo (absurdo —dentro de la tradición aristotélica— que, más tarde, sería propuesto como definición del infinito por Bolzano y Dedekind). Si el continuo fuese infinitamente divisible, no podría explicarse la diferencia de tamaño entre esas magnitudes, dado el principio según el cual no hay infinitos mayores que otros, mismo que pocas veces fue cuestionado en la época.[232]

Bradwardine replica, curiosamente, empleando los mismos ejemplos para ilustrar los inconvenientes del atomismo. Esto sucede en los siguientes casos:

---

[229] *Op. cit.*, pp. 400-401.
[230] *Ibid.*, p. 110.
[231] Los *minima naturalia* son las partículas más pequeñas en las que puede ser dividida una sustancia sin que pierda sus atributos esenciales. Por ejemplo, una mínima parte de un trozo de carne, que conserve las propiedades de la carne. *Cf. supra*, n. 225.
[232] *Cf.*(58), p. 215, n. 11.

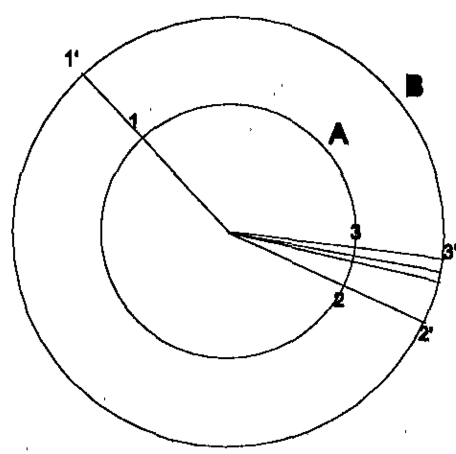
1) Argumento de proyección radial: Se expone en la proposición 74:

> *C74.* Si es así, todas las periferias de los círculos y todos los círculos son iguales.[233]

Esta conclusión remite a una anterior:

> *C15.* Ningunas rectas concurrentes en algún punto tienen otro punto intrínseco a ellas.
> *Corol.* Los semidiámetros del círculo no concurren antes del centro, ni las rectas conducidas desde la base del triángulo hasta el ángulo opuesto a ella se tocan fuera de él.[234]

Si el continuo está compuesto de un *número finito de indivisibles sucedería que, al trazar* los radios de dos círculos concéntricos (A y B), estos radios intersectarían igual número de puntos (indivisibles 1 y 1', 2 y 2', etc.). Esto llevaría a concluir que hay el mismo número de puntos en las dos circunferencias y, entonces, la *parte y el todo coinciden en el número de puntos. Si el finitista* argumenta que los radios del círculo mayor se cortan antes de alcanzar el centro para así sostener que el círculo mayor está compuesto de más indivisibles que el menor, pues en los indivisibles de éste último "cabría" más de un radio, Bradwardine replica que no es posible que los radios concurran *antes* del centro o en más de un punto —evitando así los supuestos puntos "gordos" (v. la figura siguiente).



233 En (53), p. 415.
234 *Op. cit.*, p. 362.

La tesis finitista, que reporta Bradwardine, parece confundir el punto inextenso con el extenso, al atribuirle la capacidad de contener varias líneas. Sin embargo, Bradwardine mismo, al refutar esta vertiente, está implícitamente manejando puntos con extensión: si los círculos están compuestos de igual número de puntos, nos había dicho en C2, tendrán igual tamaño. Pero esto sólo es posible si los puntos poseen magnitud, porque, si carecen de ella, por más puntos que se acumulen, nunca habrá extensión alguna.

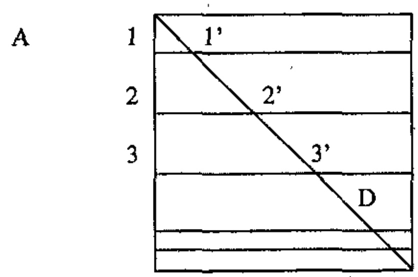
2) Argumento de proyección de paralelas, también contra Chatton:

> *C87.* Si es así, toda gran diagonal del cuadrado es igual a su lado.[235]

En esta conclusión se menciona, entre otras, la C14:

> *C14.* Cualquier línea recta que corta una recta, la corta en alguno de sus puntos y no en muchos más que uno solo.[236]

Si suponemos que el lado (A) de un cuadrado está compuesto de finitos indivisibles (puntos 1, 2, etc.) y, si trazamos líneas paralelas que vayan de cada uno de ellos a los indivisibles del lado opuesto, resultará que la diagonal (D), cortada por esas líneas, en tantos puntos como indivisibles tiene el lado, estará compuesta también por la misma cantidad de indivisibles (puntos 1', 2', etc.) y su magnitud será igual a la de éste. Chatton parece haber replicado que la diagonal cortaba el lado en más de un punto, de manera que ella estaría compuesta de un mayor número de puntos, lo cual bastaría para dar cuenta de su diferencia de tamaño respecto del lado. Ante esto, Bradwardine recuerda que las líneas rectas que se cortan sólo lo hacen en un punto (v. figura siguiente).



El defecto de esta prueba radica en la misma ambigüedad, puntos inextensos/puntos extensos, presente en la anterior, pues entre sus premisas se encuentran C2 y C14. Esta última se deriva de C3: dado que cada punto ocupa un solo lugar indivisible y las rectas que se cortan lo hacen en un solo lugar, las rectas no se cortan en varios puntos ni es posible que existan más puntos en esa intersección.

Tanto 1) como 2) eran pruebas geométricas bien conocidas en la época, pues Roger Bacon y Duns Scoto habían empleado variantes de las mismas con anterioridad.

Antes de pasar a la vertiente infinitista, comentaré algunas conclusiones relacionadas con las verdades de otras ciencias. En ellas, se muestran los absurdos no-geométricos a los cuales lleva la hipótesis finitista.

§2 Conclusiones no directamente geométricas

Muchas de las proposiciones de la sección dedicada a refutar el indivisibilismo finitista tienen que ver con disciplinas como la física aristotélica, astronomía, música, etc. A continuación, cito algunos ejemplos:[237]

---

[235] *Ibid.*, p. 423.
[236] *Ibid.*, p. 361.
[237] Para evitar remitir a múltiples notas, en la presente se indica la referencia de estas conclusiones. Todas aparecen en (53), en las siguientes páginas: C62, p. 409; C94, p. 427; C99, p. 432; C104, p. 435; C106-108, p. 436; C109-

C62: Si es así, la octava no está compuesta de intervalos de un cuarto más un quinto.

C94: Si es así, todas las esferas celestes y las estrellas y sus elevaciones desde la tierra son de igual tamaño y giran a velocidad igual.

C99: Si es así sobre la sustancia, la condensación y la rarefacción no son posibles.

C104: Si es así, un móvil al mismo tiempo está quieto y se mueve.

C106: Si es así, el movimiento no existe.

C107: Si es así, la salud humana no se conserva, ni perdida se restaura.

C108: Si es así, todas las sustancias separadas de la materia son iguales respectivamente en virtud.

C109: Si es así, ninguna sustancia separada de la materia es de virtud infinita.

C110: Si es así, no se puede hablar rectamente.

C111: Si es así, las cosas contradictorias son verdaderas, y lo mismo es verdadero y falso.

C112: Si es así, lo mismo es justo e injusto.

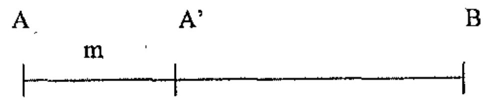
C113: Si es así, no es recto ni amar ni odiar y es congruente estar alegre y estar triste.

C114: Si es así, nadie puede ser virtuoso ni feliz.

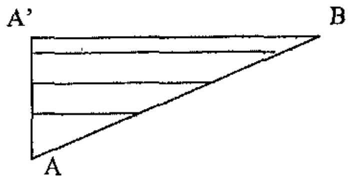
¿Cómo interpretar este tipo de afirmaciones? Algunas pueden ser reducidas a términos geométricos, método que se encuentra dentro del espíritu general de la filosofía natural en el siglo XIV, sobre todo, la que practicaban los *Calculatores*. Por ejemplo, se puede formular el siguiente argumento para apoyar C104 y C106. Partimos de C2: si dos líneas de diferente longitud tienen el mismo número de puntos, serán, en realidad, de igual longitud. Esta conclusión se aplica en terreno físico: un móvil **m** se desplaza de **A** a **B**, pero los segmentos **AA'** y **AB** (fig. i) tendrían la misma longitud. Eso se demuestra empleando el mismo procedimiento de las paralelas (fig. ii), por el cual se comprueba que **AA'** y **AB** tienen igual número de puntos.

110, p. 437; C111-113, p. 438; C114, p. 442.

(i)

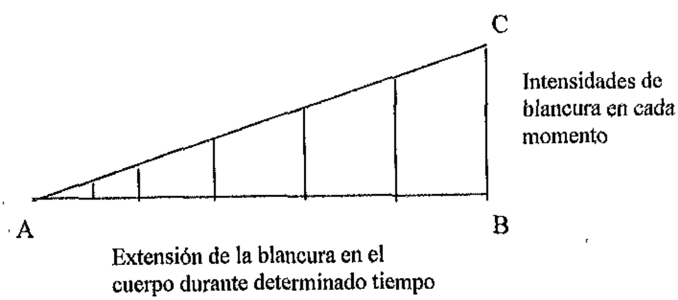


(ii)



Entonces, **m** nunca podrá avanzar realmente o está, a la vez, moviéndose e inmóvil.

En cuanto a otras de las conclusiones arriba citadas, es probable que Bradwardine estuviera tratando de aplicar la geometría al ámbito de las cualidades, no sólo de las cantidades. Oresme, en su *Tractatus de Configurationibus Qualitatum et Motuum* (1351), sistematiza una doctrina (presente ya en Roger Bacon, Buridan y Richard Swineshead -otro mertonense) según la cual, "toda cualidad puede ser imaginada o definida por medio de dos dimensiones, a saber, *longitud*, asociada a la extensión, y *latitud* o *altitud*, relacionada con su intensidad"[238]. Por ejemplo, la "gráfica" de un cuerpo que al principio era blanco en cierto grado y que termina sin tal cualidad, sería la figura ABC:



[238] En (3), p. 133.

Las cualidades se *cuantifican* a fin de medirlas y explicarlas; se representan gráficamente mediante figuras con las cuales Oresme buscaba dar razón de "la estructura y disposición interna de las cualidades en los cuerpos reales", lo que le permite sugerir "posibles explicaciones de numerosos fenómenos físicos y psicológicos"[239]. El modelo es aplicado a las acciones de animales, la explicación de la belleza, de la amistad y la hostilidad naturales, los efectos curativos de piedras preciosas, el magnetismo, la velocidad, fenómenos sonoros, diferencias de gusto, percepción e imaginación entre personas, etc. La virtud infinita, por ejemplo, podría representarse con una figura cuya altura e intensidad se prolongasen *ad infinitum*. De asumir el finitismo, no podría trazarse esa línea infinita a partir de un número limitado de puntos (y, de esto, se seguiría, quizá, C109). Tal vez podría explicarse que una cualidad, como la justicia, se identifique con su opuesto (C112) comparando sus respectivas figuras entre sí, de modo que, debido a la hipótesis finitista, ambas figuras quedaran igualadas en tanto al número de puntos que las constituyen.

§3 Indivisibles en número infinito

En este párrafo tercero de la segunda sección, se comentan los argumentos dirigidos contra las tesis de Harclay y, posteriormente, los que atacan la hipótesis infinitista en general, pues no hay una serie de pruebas dedicadas específicamente a la doctrina atribuida a Grosseteste. Se mencionarán las ventajas y desventajas de las propuestas de Bradwardine.

1) Indivisibles inmediatos entre sí (Henry Harclay)

En este caso, la argumentación no se ocupa de las paradojas surgidas de la admisión de un número infinito de átomos (como sería la igualdad entre todo y parte), sino del hecho de que *la inmediatez no genera continuidad.*

Aunque Bradwardine conserva la definición aristotélica del continuo, no repite tal cual la objeción contra la composición de éste a partir de indivisibles. Lo que sí hace es refutar a otro oxoniense, Henry Harclay, quien sostuvo que el continuo está compuesto por un número infinito de

239 *Op. cit.*, p. 137.

indivisibles, inmediatos entre sí.[240] Harclay intenta mostrar, contra Aristóteles, la posibilidad de que los puntos entren en contacto y conformen un verdadero continuo. Debido a que carecen de partes, el contacto entre puntos tendrá que darse con respecto al todo de cada uno de ellos. Y, para lograr que este tipo de contacto produzca un continuo, cuyas partes estén "separadas localmente", como exige Aristóteles, Harclay propone lo siguiente: todo el punto está en contacto con el otro "según distintos lugares" (*secundum distinctos situs*) y no "en uno y el mismo lugar" (*in eodem situ*).

Quizá podría entenderse así lo anterior: los puntos se tocarían, pero manteniendo cada uno determinada posición, para evitar, así, el "encimamiento" de todos ellos en un solo lugar y lograr que se formase una cadena en la cual fuera posible distinguir partes, de manera similar a como se encuentran reunidas las perlas en un collar.[241] Esta interpretación tiene un defecto que, tal vez, sea imputable a Harclay mismo: se asume que da igual hablar de puntos matemáticos y, por ello, inextensos, que de indivisibles extensos -en este caso, las perlas. Carezco de datos suficientes para establecer qué quiso decir exactamente Harclay, cuya opinión es contradicha en C5 y otros lugares. Lo que sí es seguro es que Bradwardine traducirá a términos geométricos la idea de su adversario: el contacto "según distintos lugares" será entendido como *superposición* de una línea a otra. Superponer es "adherir toda la línea o una parte de ella a la otra, sin que medie espacio entre ellas".[242] La relación que guardan entre sí los puntos de dos líneas superpuestas, también es entendida geométricamente: la superposición consiste en que la primera línea tenga, al menos, un indivisible *inmediato* a, por lo menos, un indivisible de la segunda línea. Los puntos contenidos en las cosas superpuestas son *distintos*.

Sin embargo, la superposición no produce continuos, sino figuras como las que se encuentran en seguida:[243]

---

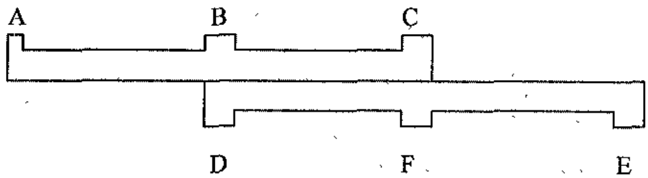
240 Cf. (54), pp. 577-578.

241 Bonaventura Cavalieri (1598-1647), discípulo de Galileo, propuso una tesis con la misma analogía puntos-perlas del collar. La lógica de su argumentación, como en este caso, no es perfecta. Su justificación era pragmática: si al suponer la tesis obtenía resultados correctos, entonces la tesis era válida. *Cf.* (68), pp. 234-237.

242 En (53), *D*15, p. 340.

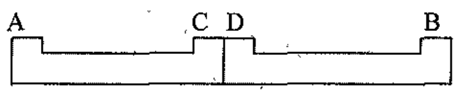
243 La idea de ejemplificar gráficamente la superposición y la imposición fue tomada de (53), p. 131, pero consideré

(i)



El segmento **CB**, que forma parte de la línea **ACB**, está superpuesto al segmento **DF** de la línea **DFE.**

(ii)



Los puntos **C** y **D** están superpuestos uno al otro, no impuestos. El segmento **AC** está superpuesto en su punto **C** al segmento **DB**. La línea superpuesta a otra no tiene, en realidad, ningún "punto intrínseco común con ella" (*C9*).[244]

Es, más bien, otro concepto, la *imposición*, el que puede dar cuenta de la continuidad:

> *D16*. Imponer total o parcialmente una línea a otra, es continuar tal línea hacia la otra siguiendo la longitud total o parcial de la misma.[245]

La imposición de dos líneas consiste en que la primera línea posee un indivisible que se encuentra *en el mismo lugar indivisible* que un indivisible de la segunda. Pero esto equivale a decir que las líneas impuestas comparten, al menos, un mismo punto. La línea **AC** de la siguiente figura

pertinente emplear figuras de dos dimensiones para representar líneas pues, con las líneas originales, no se aprecia claramente la superposición.

[244] *Ibid.*, p. 355.

está impuesta a **CB** en el punto **C**:

Asimismo, el segmento **AB** está impuesto en su totalidad al segmento **AB**: una misma línea continua puede considerarse como dos o más líneas continuas, iguales en longitud e impuestas entre sí. Por último, las líneas **AC** y **DB** están impuestas en una parte, **DC**.[246]

Lo importante es que Bradwardine: a) transita de la teoría aristotélica del continuo, que está fundada físicamente, a una aproximación matemática al tema y b) acepta la propuesta de Harclay, le concede que los puntos pueden tocarse, lo cual es de plano imposible según el Filósofo. Después deslinda este tipo de contacto de la verdadera continuidad introduciendo la distinción entre superposición e imposición. Considero que mejora las objeciones de Aristóteles, pues incluye un caso vedado por éste.

Además, la noción de imposición permite explicar cómo se *conectan* las partes del continuo —*i.e.* mediante los límites *comunes*—, cosa que no logra la hipótesis de la inmediatez o simple superposición. Ésta implica, más bien, que límites de los átomos o las partes inmediatas están juntos, pero conservan su identidad separada, sin fundirse en uno solo. *La inmediatez, por otro lado, conduce a negar que, entre dos partes cualesquiera del continuo, existe una tercera. Y esto, a su vez, hace imposible explicar la infinita divisibilidad del continuo*, rasgo del cual sí pueden dar cuenta tanto la hipótesis continuista como la de un número infinito de átomos mediatos.

245 *Ibid*, p. 340.

246 Esta noción de imposición, no parece ser otra que la contenida en el llamado axioma de congruencia de la geometría euclídea: "Dos figuras son *congruentes si pueden hacerse coincidir exactamente entre sí*, en cuyo caso se dice a veces que son iguales en todo respecto. El método para establecer esta coincidencia es, al menos en principio, el movimiento de una figura hasta que es situada exactamente sobre la otra..." [en (35), p. 26].

2) Indivisibles mediatos (refutación del infinitismo en general)

Ya se mencionó que, más que atacar directamente la segunda subdivisión del infinitismo, aquella para la cual los indivisibles que componen el continuo son mediatos entre sí, Bradwardine se preocupa por los absurdos a los cuales da lugar la hipótesis infinitista misma. La sección en la cual se trata el infinitismo en general comienza con C115, según la cual:

> Si todo continuo se compone de infinitos indivisibles, todo continuo del mismo género y los átomos propios son proporcionales en el mismo género...Y no hay otra vía para salvar la proporción de los continuos entre sí que según la proporción de los átomos que los componen.[247]

Bradwardine trae nuevamente a colación las pruebas para descalificar la hipótesis finitista, dirigiéndolas, esta vez, contra la infinitista. Si un continuo finito **A** está formado por infinitos indivisibles, será igual al continuo finito **B**, sin importar las medidas de A y B, entre otros resultados extraños:

> *C137.* Si es así [si es verdadera la hipótesis infinitista], toda línea circular es igual a cualquier línea circular y el lado del cuadrado al diámetro y, toda recta, necesariamente será igual a toda recta.[248]
>
> *C136.* Si es así, la cuarta parte del círculo o del triángulo y sus mitades son iguales.[249]

Esto es, la parte será igual al todo. Y no hay escape porque, para Bradwardine, no existen infinitos mayores o menores que otros, ni puede pensarse que el todo infinito sea, en algún sentido, más grande que su parte infinita:

> Cantidades iguales son las que, comparadas en relación a una sola cantidad, tienen proporciones iguales. Porque si tienen igual proporción a una tercera (cantidad), es igual el exceso de ellas sobre aquella tercera ... un solo infinito no es mayor que otro infinito, porque es

---

[247] *Ibid.*, p. 442.
[248] *Ibid.*, p. 458.
[249] *Ibid.*, p. 457

igual el exceso de todos los infinitos en relación a una sola magnitud o multitud finita ...[250]

El empleo del mismo conjunto de pruebas, tanto para la hipótesis finitista como para la infinitista, implica que Bradwardine acepta que la proporción entre átomos infinitos en número es como la proporción entre un número finito de átomos. Lo anterior, según Murdoch, muestra que Bradwardine

> a diferencia de algunos de sus contemporáneos...no comprendía adecuadamente las propiedades y relaciones de las series infinitas y es esto, principalmente, lo que hace ineficaz su crítica de la hipótesis infinitista[251].

El autor del *TC* cree que, de esta manera, ya ha despachado las dos subdivisiones del infinitismo. No obstante, sí existe una propuesta directamente relacionada con la hipótesis de indivisibles mediatos, según la cual, ésta puede ser reducida a la de los inmediatos:

> *C*120. Si es así, los átomos de cualquier continuo se unen de manera inmediata.[252]

De acuerdo con C120, si es cierto el indivisibilismo, después de dividir una y otra vez un cuerpo, únicamente quedan los indivisibles como *materia prima* y no existe *otra* materia primera *entre* ellos que se genere o corrompa. Esto es, los puntos son, originalmente, inmediatos entre sí, conclusión que fundamenta una posterior:

> *C*140. Si un continuo se compone de infinitos indivisibles mediatos, se compone de inmediatos.
> *Corol.* Ningún continuo se compone de indivisibles mediatos.[253]

Podría también alegarse lo siguiente: suponiendo que hay "mediatez" entre los átomos de un continuo finito, entonces, ésta ocupa un espacio intermedio, por pequeño que sea. Pero un infinito número de espacios producirán una magnitud infinita, lo cual contradice la hipótesis de que

[250] Fragmento de la *Geometria Speculativa*, citado en (56), p. 136, n. 58.
[251] En (56), p. 117.
[252] En (53), p. 443.

partimos de algo finito.

A mi juicio, esta reducción no es del todo justa. Bradwardine parece estar proponiendo que, si no hay otra cosa que indivisibles, al final estos resultan ser inmediatos. Pero tal conclusión no se sigue necesariamente, pues el atomista podría decir que la propuesta original —entre toda pareja de indivisibles existe un tercero— no se ve afectada: no podríamos señalar *el* indivisible inmediato a uno previamente escogido pues, si su número es infinito, siempre podremos hallar otro y otro más, como bien lo saben la tortuga y Aquiles.

Me parece conveniente detenerme aquí, antes de pasar a la sección dedicada a los indivisibles de Demócrito, con el fin de hacer algunas observaciones que se retomarán al término de esta tesis. Bradwardine nos quiere conducir, por lo visto, a una paradoja: el continuo no puede estar compuesto ni por un número finito ni por un número infinito de puntos, porque cualquiera de estas opciones trae como consecuencia la negación de la quinta de las llamadas "nociones comunes" de los *Elementos*, *i.e.* que el todo es mayor que la parte. Mucho depende, entonces, de este axioma inconmovible. Nuestro autor nunca cuestionará tal principio; no se separa del aristotelismo en este aspecto.

Sobre esta cuestión, cabe decir que Bradwardine olvida desvincular, de algún modo, el divisibilismo de la acusación del finitista Chatton (*supra*, §1 de esta sección). Las pruebas geométricas se aplican igualmente a su doctrina. El argumento *ad hominem* tendría que proceder más o menos así: si el continuo está formado por continuos y éstos son infinitamente divisibles, el todo continuo estará compuesto de un infinito número de partes y ellas, a su vez, de un sin fin de partes... No se entiende, pues, cómo se va a distinguir el todo de sus partes, ni cómo evitar que éstas sean consideradas iguales al todo.

[253] *Op cit.*, p. 458.

Esta situación se acentúa debido a la misma estrategia argumental del *TC*, ya que, como se trata de una prueba indirecta (una especie de prolija *reductio*), todo el tiempo se indica lo que el continuo geométrico *no* es, dejándose para el final una demasiado breve explicación de lo que sí es. En mi opinión, la argumentación de Bradwardine no cancela de manera definitiva la propuesta atribuida a Grosseteste: si aceptáramos que el continuo está compuesto por un número infinito de indivisibles *mediatos*, bien podríamos dar cuenta de proposiciones como C20.

4.3.3 Indivisibles corpóreos en número finito (átomos democríteos)

En relación con esta rama del indivisibilismo, encontramos lo siguiente en un fragmento que acompaña a C141:

> ...todas las opiniones erróneas se reprueban especialmente, excepto la opinión de Demócrito que expone que el continuo se compone de cuerpos indivisibles, la cual, sin embargo, es reprobada suficientemente por la conclusión y su corolario [se refiere a la Conclusión 141]. No obstante, no es verosímil lo que tan gran filósofo expuso, (es decir, que hay) algún cuerpo indivisible, tal como cuerpo es definido en principio, sino (que) quizá por cuerpos indivisibles entendió las partes indivisibles de la sustancia y quiso decir que la sustancia se compone de sustancias indivisibles...[254]

Aunque no se ocupó de este atomismo en conclusiones previas, Bradwardine sostiene que su rechazo de todos los otros tipos de indivisibles incluye el de Demócrito. Esto resulta cierto si tomamos en cuenta solamente D7, pero ya hemos visto las objeciones que podrían hacerse a partir de C1 y C3.

En el fragmento citado, Bradwardine duda de que Demócrito hubiese definido el cuerpo como "el continuo permanente largo, ancho y profundo" (D4),[255] lo cual seguramente implicaría divisibilidad. Pero parece que, si Demócrito hubiera entendido, por "cuerpos indivisibles", las sustancias indivisibles que componen la sustancia, tampoco se salvaría su opinión, pues C126 dice:

---

[254] *Ibid.*, pp. 459-460.
[255] *Ibid.*, p. 339.

"ninguna sustancia o la cualidad se compone de sustancias o cualidades".[256]

4.4 ¿COMETE EL *TC* UNA *PETITIO PRINCIPII*?

Es importante mencionar que el *Doctor Profundus* es consciente de la posibilidad de cuestionar sus procedimientos arguyendo que, todo intento por refutar el indivisibilismo valiéndose de la geometría, comete una petición de principio: en un fragmento que acompaña a C141, se cuestiona si la geometría podría estar suponiendo siempre, sin demostrarlo, que el continuo no está compuesto de indivisibles. Pero, a decir de él, la geometría no asume la tesis divisibilista, porque ésta no se halla entre las demostraciones de Euclides y porque sería posible probar todas las proposiciones euclidianas aceptando la composición del continuo a partir de un número infinito de puntos, mediatos entre sí.[257] No obstante, concederá que Euclides sí supone que el continuo no está compuesto de un número finito de indivisibles inmediatos, pues algunos teoremas no pueden probarse sin asumir tal tesis (*v.g. Elementos,* I 1). En otras palabras, Bradwardine se pregunta por la consistencia e independencia de los axiomas de la geometría respecto de las tesis que sostengamos sobre la continuidad. Citaré, *in extenso* el fragmento aludido, por tratarse de una de las partes más refinadas -en lo que a argumentación se refiere- del *TC*:

> Empero podría ser hecha sobre las cosas antes dichas [sobre la refutación de todo atomismo] una sola escritura falsa: Averroës, en su comentario sobre la *Física*, donde dice que la [ciencia] natural demuestra que el continuo es divisible hasta el infinito y no prueba esto geométricamente, pero lo supone como demostrado en la ciencia natural; luego podría impugnar las demostraciones geométricas antes hechas diciendo: que la geometría supone en todas partes que el continuo no se compone de indivisibles, mas no puede demostrarlo. Pero no vale, porque el supuesto es falso. Pues no expone entre las demostraciones geométricas que el continuo no se compone de indivisibles, ni es necesario dialécticamente en todas partes —aunque se asume en el V libro de los *Elementos*. Ni, de manera similar, se supone geométricamente en alguna demostración que el continuo no se compone de indivisibles infinitos mediatos, porque, aunque se supusiera lo contrario, procedería de igual modo cualquiera de las demostraciones, como es evidente al saber demostrar inductivamente las conclusiones geométricas. Sin embargo, Euclides en su geometría, supone que el continuo no se compone de átomos finitos e inmediatos, aunque no ponga esto entre sus suposiciones de

[256] *Ibid*, p. 451.

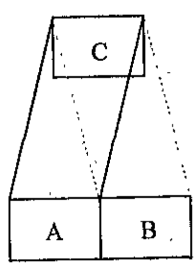
[257] Por ejemplo, C20 podría ser explicada recurriendo a un número infinito de puntos mediatos. V. *supra* 4.2.2.

una manera expresa.[258]

En seguida, Bradwardine se refiere a varios casos en los cuales la hipótesis de átomos finitos e inmediatos es inconsistente con la geometría. Mencionaré aquí solamente dos ejemplos. El primero alude a *Elementos* I, 1:

> Si el falsificador dice lo contrario y supone que alguna línea se compone de dos puntos, Euclides no puede demostrar su primera conclusión, porque sobre la línea de éste no podrá colocarse un triángulo equilátero, porque *no habría ángulo alguno*, como es evidente por su 16a (conclusión) y su comentario.[259]

Según esto, la primera proposición de Euclides ("construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada") no puede ser demostrada. Supongamos una línea, AB, compuesta de dos indivisibles inmediatos y un punto C, externo a ella. Entre las líneas AC y BC no hay espacio y, por ende, tales líneas no incluyen un ángulo. Entonces, sobre AB no puede construirse ningún triángulo, como puede verse en la siguiente figura:



Un segundo ejemplo, parte de C16 y C20:

> Pero aquello que es introducido por la omisión de un axioma, no debe imputarse a la insuficiencia de los argumentos. Pues la geometría de manera ostensiva es suficiente y es imposible demostrar a partir de sus propios principios que ningún continuo suyo se compone de

[258] En (53), p. 460.
[259] *Loc. cit.*

> indivisibles finitos inmediatos: ostensivamente, como es evidente en la 16ava precedente y por medio de la 20 y la primera parte de su corolario...[260]

Esto es, aunque no se trata de un axioma, debe negarse la composición a partir de átomos inmediatos en número finito, por ser inconsistente con proposiciones geométricas que son verdaderas. En cuanto a C20, que ya hemos revisado en 4.2.2, sería imposible la división de una recta en un número ilimitado de segmentos, si tal recta está conformada por cierto número finito de puntos. La C16 afirma esto:

> Por medio de una recta se divide en dos ángulos rectilíneos un ángulo rectilíneo dado, y en dos rectas se divide un lado del triángulo rectilíneo, y en triángulos rectilíneos todo un triángulo dado.[261]

Bradwardine no explica en qué radica la inconsistencia. Murdoch cree que, para que pueda lograr su propósito a partir de esta proposición, debe agregarse que la recta divide en dos rectas *iguales* el lado del triángulo.[262] Si, por ejemplo, la base de un triángulo rectilíneo está formada por un número par finito de puntos inmediatos, no podemos dar cumplimiento a C16, pues no existiría el punto impar a la mitad de la recta que requiere la bisección. Por otro lado, si la línea por dividir consta de una cantidad finita impar de puntos, a) los indivisibles que están a la mitad de cada segmento podrían ser divididos o b) después de cierto número de bisecciones llegaríamos a un segmento compuesto de un número impar de puntos, que no podría bisectarse.[263]

---

[260] *Ibid.*, p. 461.
[261] *Ibid.*, p. 362.
[262] *Cf.* (53), p. 237.
[263] Galileo, a través de Salviati, da cuenta de estos argumentos varios siglos después de Bradwardine: "Una de las primeras objeciones que se suelen adelantar contra aquellos que componen las magnitudes continuas de partes indivisibles, suele ser la de que un indivisible añadido a otro indivisible no produce otra cosa divisible, ya que, si así fuese, se seguiría que el indivisible habría de ser, sin embargo, divisible. Y es que si dos indivisibles...al unirse construyeran una magnitud extensa como es la línea divisible, con mucha más razón serían tales las líneas compuestas de tres, cinco, siete o de cualquier otro número impar de elementos. Tales líneas, siendo susceptibles de ser cortadas en dos partes iguales, darían por resultado que el indivisible situado en el medio podría ser cortado en dos. En esta y en otras objeciones parecidas se puede dar satisfacción a los que las ponen diciéndoles que no sólo dos indivisibles, sino ni siquiera diez, cien o mil podrían componer jamás una magnitud divisible y extensa, sino que se necesitarían infinitos" [en (26), p. 107). Galileo opta por la hipótesis de infinitos puntos inextensos, entre los cuales hay ¡infinitos espacios —o puntos— *vacíos inextensos*!: "si nos imaginamos una línea reducida a partes inextensas, es decir, a la infinitud de sus indivisibles, podemos concebirla como inmensamente extendida, sin la interposición de espacios extensos, pero sí con la de infinitos indivisibles vacíos (...) si lo que intentamos es la más profunda y última división de estos cuerpos en sus

En conclusión, Bradwardine tiene razón en que la geometría euclidiana no asume, de entrada, ni la tesis divisibilista ni la atomista.[264] El geómetra puede probar los diversos teoremas partiendo, indistintamente, de cualquiera de las dos suposiciones (siempre que los átomos sean infinitos numéricamente). Por tanto, no puede acusarse al *TC* de caer en un círculo vicioso. Asimismo, el rechazo de la tesis de finitos átomos inmediatos no está supuesta en los *Elementos*, como si se tratase de una noción común o una premisa aislada, sino que se llega a él combinando varias premisas. Concuerdo, pues, con Murdoch en que:

> lo que Bradwardine afirma de la geometría es esencialmente verdadero. Puede refutar o deducir de sus primeros principios, la negación de la posición del indivisibilismo finito e inmediato. Y ya que lo hace, no a partir de un sólo principio, sino de la conjunción de varios, tiene éxito en lograr esta refutación sin dar por sentada la cuestión a probar.[265]

Para finalizar esta incursión en el contenido del *TC*, veremos lo que en él se sostiene acerca de una magnitud continua no tratada hasta aquí: el tiempo. Este último apartado bien podría considerarse como un capítulo en sí mismo pero, dado que trata temas estrechamente ligados con lo anteriormente expuesto, consideré pertinente que perteneciera al cuarto capítulo.

4.5 EL CONTINUO TEMPORAL EN EL *TC*

Es necesario explicar la problemática a la cual intenta dar respuesta la doctrina sobre el continuo temporal que adoptó el malogrado obispo de Canterbury. En el primer apartado,

primeros componentes inextensos e infinitos, podremos concebir tales componentes desplegados en un espacio inmenso, sin la interposición de espacios vacíos extensos, sino solamente con una infinidad de vacíos inextensos. Así, no repugna que una pequeña bola de oro...se extienda en un espacio muy grande, sin tener que admitir espacios vacíos extensos, siempre y cuando admitamos que el oro está compuesto de indivisibles en número finito" (*op. cit.*, pp. 99-100). Galileo retoma aquí ideas como las de Demócrito y Arquímedes. Este último, en su *Método*, atribuía a Demócrito la demostración de la fórmula del volumen de un cono o de una pirámide empleando la idea de que las magnitudes se componían de infinitas partes infinitamente pequeñas. Javier Sádaba comenta que "gracias a esta hipótesis, [ambos griegos] obtuvieron importantes resultados matemáticos precursores del cálculo infinitesimal, a pesar de las dificultades lógicas a que estaba sometida" (*ibid.*, p. 98, n. 18). *Cf.* (68) para un detallado análisis de esta cuestión —véase especialmente el cap. IV.

[264] *Cf.* (53), p. 229.

[265] *Op. cit.*, p. 247.

abordaremos tal problemática y el punto de vista del Filósofo. En el segundo inciso, se expone y comenta el contenido del *TC* al respecto. Ya hemos afirmado que, las estrategias seguidas en el *TC* en cuanto al continuo espacial, son ejemplo de los métodos típicos de la filosofía natural del XIV (las *rationes mathematicae*). El caso del continuo temporal no constituye una excepción en este renglón: se efectúa un análisis lógico-semántico de los términos empleados para asignar límites a procesos de cambio, procedimiento ubicable dentro de las herramientas conceptuales de la escolástica tardía y la tradición de los *Calculatores*.[266] Veremos que algunas de las conclusiones acerca de la composición del continuo espacial, se presentan nuevamente en este terreno. En particular, me refiero al hecho de que Bradwardine advierte lo siguiente: a) la inmediatez no genera continuidad; b) el continuo es infinitamente divisible o denso, es decir, no hay ninguna parte inmediata a otra ni átomos inmediatos entre sí; c) las partes del continuo se unen porque comparten límites. Sin embargo, estas características son delineadas con *mayor claridad* cuando se trata el tema del tiempo que al abordar la continuidad de tipo espacial. Como veremos, algunas nociones que aparecen en el *TC* pueden compararse con las definidas por un matemático contemporáneo como Dedekind.

4.5.1 Cómo asignar límites temporales a los cambios continuos. La propuesta aristotélica

¿Cuándo muere Sócrates, en el último instante de su existencia o en el primer instante de su no-existencia? ¿Cuándo deja de ser el instante presente, mientras es o al siguiente instante? Si decimos "el barco parte a las seis", ¿cuál es el último instante de reposo y cuál el primero de movimiento? Preguntas como éstas pueden ser formuladas respecto de cualquier tipo de transición, en la cual se pase de un estado A a otro estado no-A. Se trata del problema de asignar límites temporales a un proceso de cambio. En general, la cuestión sería saber cuál es el último instante de un estado anterior y cuál el primer instante del nuevo estado. Veamos las opciones de respuesta:[267]

[266] *Cf. supra* cap. 3.1, §2 y §3.
[267] *Cf.* (81), pp. 9 ss. y 403 ss.

1) El último instante del primer estado y el primero del segundo estado coinciden. Pero, si son un sólo instante, el objeto que cambia permanecería en el estado anterior y, *a la vez*, se encontraría en el nuevo estado (contra la ley de contradicción).

2) El último instante del primer estado precede al primer instante del nuevo estado. En este caso, si hay un período intermedio entre ambos instantes, en tal intervalo el objeto no se encontraría en ninguno de los dos estados (contra la ley del tercero excluido). Por otro lado, los instantes mencionados no pueden ser adyacentes: no hay *un último* instante anterior a las 2:00 p.m., por ejemplo, pues siempre encontraremos fracciones de segundo más y más pequeñas, cada vez más cercanas al instante límite. Y si tomamos ya no el instante más próximo, sino cualquier otro anterior a las 2:00, sucederá que, entonces, el instante escogido habrá existido en todos los instantes intermedios, que son numéricamente infinitos.

3) Hay un último instante del primer estado, pero no un primer instante del segundo, o viceversa, suposición que parece injustificada, pues no habría razón por la cual preferir un instante u otro.

Esta última opción es la que Aristóteles defiende en la *Física*.[268] Para el Estagirita, existen 4 tipos de cambio genuino, es decir, continuo:[269]

1) *de lugar*: movimiento
2) *cuantitativo*: aumento y disminución
3) *cualitativo*: alteración
4) *alteración "radical"*: generación y destrucción

Pongamos, como ejemplo, un proceso de alteración: un objeto gris se vuelve blanco. Esto

[268] *Física*, 263b 9 ss.
[269] *Op. cit.*, 20a 9-18 y 234b10.

supone un primer estado en el cual la cosa es gris y un segundo estado donde ya es blanca. De acuerdo con Aristóteles, en este caso no hay un último instante en el proceso de dejar de ser blanco, pero sí un primer instante de ser blanco. (Y, visto desde la otra orilla, no hay un primer instante de perder el color gris, aunque sí un último instante de poseerlo). Esta solución aprovecha una característica de los cambios continuos: en ellos no puede determinarse un primer instante posterior al comienzo del proceso –ir del gris al blanco– ni un último instante anterior al final del mismo -el ser blanco.

El primer instante del segundo estado –*i.e.* cuando comienza a ser blanco– y el último instante del primer estado –cuando el objeto aún no comenzaba a perder su color gris– fungen como límites del período de tiempo en el cual se desarrolla la transición. Ambos instantes, como los puntos que limitan una línea, son indivisibles: no se trata de lapsos de tiempo. Pero el segmento o intervalo delimitado es infinitamente divisible o, mejor dicho, *denso*: entre cualesquiera dos instantes existe un tercero.

No podemos fijar un último instante de dejar de ser gris, pero sí un primer instante de ser blanco. De este modo, Aristóteles busca evitar la contradicción que entrañaría el que algo permaneciera en el estado anterior y, simultáneamente, se encontrara en el nuevo.[270]

4.5.2 *Incipit* y *desinit*

Estas distinciones entre primeros y últimos instantes fueron retomadas o modificadas por diversos autores de la Edad Media[271] quienes, en general, designan tales cuestiones con los términos '*incipit*' y '*desinit*', o 'comienza' y 'cesa'. Un ejemplo de ello es el *TC*, que contiene ideas corrientes en el siglo XIV acerca de los primeros y últimos instantes y trata el problema de asignar límites a un cambio cualitativo. El ejemplo que da Bradwardine es: A no es bueno, pero en un tiempo posterior lo será. Este cambio es enunciado en la conclusión o proposición 28:

---

[270] *Ibid*, 263b 9-15.
[271] *Cf. passim*: (38), (43), (44), (59), (81), (82) y (84).

*C*28. Todo lo que no es de algún modo y será tal, ahora comienza o alguna vez comenzará a ser tal.[272]

El comenzar a ser bueno no ocurre *durante* cierto tiempo, sino en un *instante*. La proposición 27 establece que:

*C*27. Todo comienzo o final no es medido por el tiempo, sino por el instante.[273]

Si no fuera así, en el lapso de tiempo durante el cual comienza a ser bueno, **A** no sería bueno ni *no bueno*.

Si preguntamos cuándo comienza **A** a ser bueno, será importante tener en cuenta que no se está buscando solamente un período posterior indefinido en el cual **A** ya es bueno, sino *el* momento situado *inmediatamente después* del período en el cual no lo era.[274] Bradwardine, de acuerdo con Aristóteles, considera que los instantes no pueden ser adyacentes (entre cualesquiera dos instantes, siempre hay un tercero), no pueden estar en contacto o poseer extremos consecutivos entre *sí* (ellos mismos son extremos y no tienen partes). Un estado P, que sigue inmediatamente en el tiempo al estado no-P, no tiene un límite consecutivo al límite de no-P. Es decir, no hay un primer instante de ser bueno que siga inmediatamente en el tiempo a un último instante de no serlo. Entonces, sólo queda la opción aristotélica: no hay último instante de no ser bueno pero sí primer instante de serlo.

Existen dos maneras de comenzar a ser o, si se prefiere, hay dos sentidos del verbo 'comenzar': el *incipit* puede ser o bien el *primer* instante del ser bueno o bien el *último* de no ser bueno. En el *Tratado*, al igual que en otras obras del medioevo,[275] estas variantes son definidas en los siguientes

[272] En (53), p. 378. Las traducciones de este apartado son mías, a menos que se indique otra cosa.

[273] *Loc. cit.*

[274] La noción de "estar inmediatamente después" es definida así: "El ser, el haber sido o el haber de ser de alguna cosa que [está] inmediatamente después de otra, es lo mismo que ser, haber sido o haber de ser sin un medio [entre esas cosas]" (*D*18, *ibid.*, p. 340).

[275] Por ejemplo, en el *Tractatus syncategorematicum* de Pedro Hispano [*cf.* (44), apéndice A, pp. 122-128]. Las proposiciones que ejemplifican las diversas acepciones de cada verbo fueron tomadas de un extracto de la obra mencionada.

términos:

a) *Comenzar a ser con un primer instante de ser*:

> *D*19. Comenzar a ser por la afirmación del presente y la negación del pasado es ser ahora y no haber sido inmediatamente antes de esto.[276]

De este modo, la proposición "Platón comienza a ser un hombre" significaría "Platón es un hombre ahora e inmediatamente antes no era un hombre".

b) *Comenzar a ser con un último instante de no ser*:

> *D*20. Comenzar a ser por la negación del presente y la afirmación del futuro es no ser ahora y haber de ser inmediatamente después de esto.[277]

Por ejemplo, "un movimiento comienza a ser" equivale a "un movimiento no es ahora e inmediatamente después de esto será".

También existen dos maneras de cesar o dos acepciones de ese verbo. El *desinit* puede ser un *primer* instante de no ser o bien un *último* instante de ser:

a) *Cesar con un primer instante de no ser*:

> *D*21. Dejar de ser por una negación del presente y una afirmación del pasado, es no ser ahora y haber sido inmediatamente antes de esto.[278]

"Un hombre cesa de ser" equivale a "un hombre no es ahora e inmediatamente antes de esto fue".

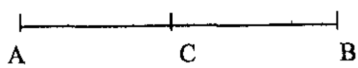
b) *Cesar con un último instante de ser*:

> *D*22. Dejar de ser por una afirmación del presente y una negación del futuro es ser ahora y no haber de ser inmediatamente después de esto[279].

[276] *Op. cit.*, p 340.
[277] *Loc cit.*
[278] *Loc. cit.*
[279] *Loc cit.*

Así, "Platón deja de no estar en movimiento" significa "Platón no está ahora en movimiento e inmediatamente después de esto no tendrá no ser en movimiento".

Varios especialistas[280] sugieren que definiciones como las anteriores se acercan a la distinción moderna entre los tipos de límites que puede tener una clase o agregado.[281] Un cambio continuo, digamos el paso del ser al no ser, podría ser representado con una línea, como se aprecia en la figura:



La clase AC corresponde al no ser y la CB al ser. Si se determina que existe un último momento de no ser, no habrá un primer momento de ser. Es decir, C pertenecerá a AC, la limita intrínsecamente y no pertenece a CB, a la cual limita extrínsecamente. Si no se asigna un último momento al no ser, se tendrá que asignar un primer momento de ser. Aquí, C limitará intrínsecamente y pertenecerá a CB, mientras que será límite extrínseco de AC.

Debe notarse que C no puede considerarse como perteneciente a ambas clases a la vez. De lo contrario, C sería un instante en el cual algo es y no es simultáneamente. Dentro de la doctrina medieval de los *maxima* y los *minima* o del primero y último instantes, el tiempo está dividido por uno de sus elementos, un instante, en dos períodos o clases mutuamente excluyentes: en lapsos de tiempo durante los cuales algún estado de cosas no es el caso y lapsos durante los cuales el mismo estado de cosas sí es el caso. Como Aristóteles mismo había sostenido, el instante pertenecerá solamente a uno de los dos períodos, pues éstos son definidos mediante la afirmación o la negación de una propiedad respecto de un solo sujeto.[282]

[280] V. *supra*, n. 271 y (53), cap. VII.

[281] Tómese en cuenta lo establecido en el apéndice técnico (v. *supra*, p. 60 ss.) para lo que se dirá en seguida.

[282] "Si uno no trata el momento que divide el antes y el después como perteneciente al tiempo posterior en tanto concierne a la cosa, la misma cosa será simultáneamente existente y no existente y será no-existente cuando ha llegado a

La clasificación de los dos tipos de *incipit* y de *desinit* se aplica a las siguientes entidades o continuos:[283]

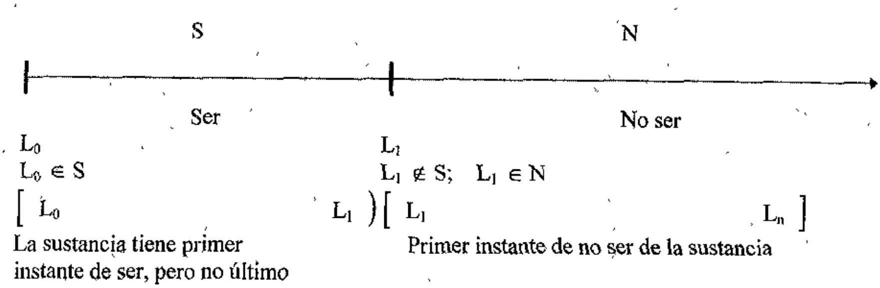
a) cosa o estado *permanente* (un hombre, una superficie, etc.) e independiente de algo sucesivo. Todas sus partes se mantienen simultáneamente (D2). Podríamos entenderla como una substancia;

b) cosa o estado *sucesivo* (el tiempo, el movimiento). Sus partes se suceden "según lo primero y lo posterior" (D3);

c) cosa o estado permanente que depende de una cosa sucesiva para existir (la altura total que alcanza un hombre). Este tipo de entes podría considerarse como perteneciente a la categoría de los accidentes.

La cosa permanente tiene primer instante de ser (límite intrínseco) y primer instante de no ser (límite extrínseco). En otras palabras, comienza a existir según la afirmación del presente y la negación del pasado (D19) y deja de ser por la negación del presente y la afirmación del futuro (D21).

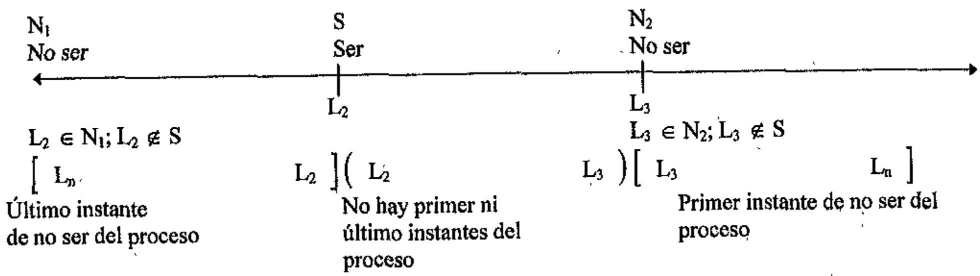
La siguiente figura corresponde al caso arriba mencionado:



ser" [en (8), 263b9-12].

[283] D2 y D3 se encuentran en (53), p. 339. De hecho, la significación de los verbos 'comenzar' y 'cesar' varía según el tipo de cosa con la cual estén conectados. Hispano los considera palabras sincategoremáticas por esta razón y, porque, al exponerlos, equivalen a una afirmación y una negación, respectivamente [*cf* (44), p. 122.]

En cambio, las cosas sucesivas y las permanentes dependientes de ellas, están *extrínsecamente* limitadas: tienen últimos instantes de no ser y primeros instantes de no ser. Es decir, comienzan a existir por la negación del presente y la afirmación del futuro (D20) y dejan de ser por la afirmación del presente y la negación del futuro (D22). La cosa sucesiva carece de primero y último instantes de ser, como se aprecia en la figura que sigue.



Retomaré este último ejemplo, considerando sólo el límite L_3, para destacar la aportación que hace la doctrina aristotélico-escolástica del límite del continuo temporal, respecto a la noción de límite en general. Esta doctrina no dice únicamente que L_3 es un elemento que sucede, de manera inmediata, a *todos* los elementos de S o que precede inmediatamente a *todos* los elementos de N_2. Lo que el aristotelismo enseña es, como se dijo más arriba, que no es posible determinar el primero ni el último instantes de ser del continuo sucesivo, lo cual significa que L_3 no sigue (ni precede) inmediatamente a *ningún* elemento de cualquiera de las clases[284]. Ésta es una característica más de las clases densas.

Antes de concluir, diremos algo sobre otra cuestión: la contribución específica del *TC* a la discusión sobre los límites. En la proposición 50 se lee:

> *C*50. Si esto es así [*i.e.* si los continuos están compuestos de indivisibles *inmediatos*], entonces todo lo que, en algún modo u otro, comenzará a ser o dejará de ser, comenzará o

[284] *Cf.* (53), pp. 38 ss. y 184.

dejará de ser de acuerdo con *cada* significación (del comenzar y del dejar de ser).[285]

El autor hace ver que, si se acepta que el continuo se compone de indivisibles inmediatos, lo intrínsecamente limitado tendrá también límites extrínsecos y viceversa. Si, dado un indivisible, hay un indivisible *siguiente*, por ejemplo, si el tiempo está compuesto de indivisibles inmediatos, habrá un primer instante de ser bueno (el primer indivisible del período en el cual se posee la virtud) y, a la vez, un último instante de no ser bueno (el último indivisible del período en que falta la virtud). El cambio, entonces, estaría tanto intrínseca como extrínsecamente limitado. Y, como esto último era considerado imposible,[286] Bradwardine piensa que ha añadido otro argumento contra la conformación del continuo a partir de indivisibles inmediatos.

En la Edad Media circularon, pues, elaboraciones más o menos precisas de la idea de límite. Sin embargo, éstas sólo llegaron a ser más claras en el caso del continuo sucesivo, no en el del permanente. A mi modo de ver, se puede hallar en el medioevo una noción de densidad tal como la definen las matemáticas contemporáneas. Como ya se observó, en los procesos de cambio puede efectuarse una partición tal que una clase corresponda al conjunto de instantes de ser y la otra al conjunto de instantes de no ser. En ambas clases, entre cada dos instantes existe un tercero.

El límite L_1, que pertenece sólo a una de las clases pero nunca a ambas simultáneamente, funciona como una cortadura: un límite extrínseco para una de las clases e intrínseco para la otra. Mientras L_2 es una cortadura entre N_1 y S, L_3 lo es para S y N_2.

Las líneas con las que hemos ilustrado los diversos límites posibles dentro de esta doctrina medieval sobre el tiempo y el cambio, son líneas densas que presentan cortaduras. Podríamos asimilarlas a la clase de los racionales. No hay señal de algún intento por incluir los irracionales, que conformarían una línea no sólo densa sino continua (correspondiente a los reales).

[285] *Op. cit.*, p. 395. La traducción es de Murdoch (*ibid.*, p. 179).

[286] Una opinión distinta puede encontrarse en la reformulación que R. Chisholm hace de las ideas de Brentano acerca del continuo [*cf.* (18)].

En conclusión, la densidad y las cortaduras típicas de los racionales están presentes en este tratamiento del tiempo y el cambio. Sin embargo, la continuidad, entendida como completitud y ausencia de saltos y brechas en el conjunto de los reales, no es algo que Bradwardine haya tenido en mente o haya querido expresar con la doctrina del *incipit* y el *desinit.*

Y, por otro lado, la doctrina aristotélica de la continuidad, que subyace a las tesis del *Doctor Profundus*, es distinta de la teoría matemática contemporánea de la continuidad, pues no distingue lo continuo de lo denso ni define un nivel superior al de la densidad.[287]

Ni la propuesta aristotélica ni la de un autor como Brentano –por citar una doctrina del continuo desarrollada a partir de la perspectiva del Filósofo– incluyen esta importante distinción:

> Aristóteles y Brentano rechazan el concepto de totalidad infinita y, por tanto, la idea de que una totalidad así puede ser 'mayor' o de un orden más alto que otra. En consecuencia, no reconocen la distinción entre densidad y continuidad –distinción que difícilmente puede ser llamada fenomenológica. Y pensar en ordenar conjuntos infinitos de acuerdo con su tamaño resulta completamente ajeno al método fenomenológico de Aristóteles y Brentano.[288]

El método con el cual Bradwardine aborda la cuestión del continuo no *es precisamente* "fenomenológico" sino, más bien, matemático. Sin embargo, debido a que su finalidad es apoyar el resultado aristotélico y a que las matemáticas de su tiempo no podían aún dar cuenta cabalmente del problema, no apunta, en el *Tratado*, hacia un concepto de continuidad diverso del de densidad. El

---

[287] La infinita divisibilidad que caracteriza el continuo según Aristóteles, puede entenderse como la noción actual de densidad. Cuando pone énfasis en que ser continuo implica la identidad de límites entre las partes de un todo, se acerca más a la noción contemporánea de continuidad: por ejemplo, en una línea, un límite que divide dos segmentos es uno y el mismo –los segmentos no poseen un límite distinto cada uno. Ya que lo mismo vale para cada punto del continuo, no pueden existir hiatos tales como la brecha (donde el límite es independiente de ambos segmentos) o el salto (donde los segmentos poseen sendos límites, no siendo éstos uno mismo). Esto podría interpretarse como una *suerte de completitud: cualquier* cota pertenece al continuo, no hay elementos ajenos a él limitándolo. No obstante, considero que esto no significa aún que se haya dado el paso decisivo para hablar de continuidad, *i.e.* incorporar racionales e irracionales.

[288] En (17), p. xi (comentario de Chisholm y Körner en la introducción).

TC es una *cruza*, por así decirlo, entre la perspectiva aristotélica y la perspectiva matemática (geométrica).

V. BRADWARDINE Y SUS CONTEMPORÁNEOS

5.0 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este último capítulo es comparar diversas tesis del *Doctor Profundus* con las sostenidas por algunos de sus contemporáneos, con el fin de evaluarlas también desde esa perspectiva. En el primer apartado, comentaré el problema del *status* ontológico de los indivisibles y se hará referencia a la postura occamista al respecto. El rechazo o la aceptación del infinito en acto durante el medievo, junto con las repercusiones que una u otra opción tienen en la cuestión del continuo, serán asuntos a tratar en el segundo apartado.

5.1 ¿EXISTEN LOS INDIVISIBLES? EL DEBATE EN EL SIGLO XIV

En las primeras décadas del siglo XIV tuvo lugar un intenso debate acerca de la existencia de los indivisibles y de cuestiones relacionadas con tal problema, como son la naturaleza del continuo y la del llamado infinito por división. Este debate dio lugar a una controversia ontológica que desembocó en terrenos de la filosofía del lenguaje. Intentaré mostrar cómo el desplazamiento hacia el plano semántico contribuyó a poner en ventaja a quienes negaban la existencia de entidades como el punto o los átomos y afirmaban la infinita divisibilidad del continuo.

Las preguntas acerca de la finita o infinita divisibilidad del continuo y sobre el *status* ontológico que debía concedérseles a los indivisibles –ya fuesen puntos matemáticos o átomos de materia, instantes, etc.– fueron planteadas no sólo por griegos y modernos, sino también durante el siglo XIV. En los primeros años de ese siglo, comenzó una polémica entre divisibilistas e indivisibilistas, tanto de la isla como del continente.[289] En el continente, la confrontación se estableció entre los atomistas Gerardo de Odo y Nicolás Boneto y el divisibilista Juan el Canon. En Inglaterra, los atomistas eran los ya mencionados Walter Chatton y Henry Harclay, mientras que Guillermo de Alnwick (†1332) representaba el partido divisibilista. La segunda fase de la

[289] *Cf.* (58), pp. 213-221.

discusión, se caracteriza por la ausencia de nuevas propuestas atomistas y por críticas más sofisticadas al atomismo. Bradwardine, Adam Woodham (†1358) y Occam fueron portavoces del divisibilismo en Inglaterra; Juan Buridán (c. 1300-1358) lo fue en el continente. Finalmente, la tercera etapa del debate –en la segunda mitad del XIV– marca su decadencia: el problema de la composición del continuo no aparece ya como una controversia importante, pues se repiten los *mismos* argumentos que habían sido usados 50 años antes. Personajes como Juan Wyclif (†1384), Marsilio de Inghen (c. 1340-1396) y Alberto de Sajonia (1316-1390) no contribuyeron con ideas novedosas al respecto, aunque sus textos parecen haber inspirado a algún poeta coetáneo, que comparaba la paciencia con un punto.[290]

Retomemos el problema central: si se divide una y otra vez un continuo, hasta que quede completamente dividido,[291] al final de la operación quedarán o bien puntos sin magnitud, o bien absolutamente nada.[292] No podría quedar algo con magnitud, porque se ha supuesto una división total, en acto y, si restara algo con magnitud, el proceso de división no habría terminado aún. Sin embargo, ¿cómo es que de los puntos no extensos surge algo extenso? O ¿cómo podría el ser estar constituido por nadas? Es por esta aporía que Demócrito postula átomos, corpúsculos con magnitud pero indivisibles. Aristóteles dirá, en cambio, que no hay tales átomos y que nunca se completa la división del continuo: se trata de un proceso infinito en potencia, de un *semper divisibile*.

Ahora bien, ¿bajo qué categoría caen los puntos si sólo son, según Aristóteles, límites de una línea? Parece que no podrían ser sustancias que existan independientemente del continuo al cual limitan. ¿Acaso se trata de accidentes de algún tipo?[293]

---

[290] *Cf.* (23), p. 109 ss.
[291] *Cf.* (9), I-2, 316a y ss.
[292] Una tercera posibilidad, que no exploraremos aquí, sería la de postular infinitesimales. *Cf.* n. 263.
[293] Considero que, si el límite de un cuerpo es parte del espacio que éste ocupa y si este espacio (según afirma Aristóteles en (6) 4b22) es una cantidad continua, entonces, el límite tendría que estar asociado a —o ser— un accidente de *cantidad*. También podría pensarse lo siguiente: ya que el instante presente es límite entre un tiempo pasado y el futuro, funge como una *relación*, pues une o separa —como quiera verse— dos términos. El instante sería, entonces, un accidente de relación cuya existencia depende del continuo temporal conformado por el pasado y el futuro. Así

Por su parte, los atomistas o indivisibilistas medievales sostuvieron que los continuos estaban compuestos por entidades –es decir, *res* con existencia independiente– no susceptibles de división ulterior. Los continuos, entonces, son divisibles pero sólo hasta cierto límite.

Los argumentos que estos atomistas esgrimieron son de varias clases y no siempre queda claro con qué finalidad se concedía plena realidad a los indivisibles, así como tampoco se sabe a ciencia cierta por qué (re)surgió la corriente atomista en esa época. Comentaré las opiniones del atomista oxoniense Walter Chatton, pues sus tesis estuvieron entre las que inauguraron la polémica en Inglaterra y porque es señalado como uno de los adversarios "modernos" a ser refutados en el *TC*.

Mencionamos, en el capítulo anterior (*supra*, 4.3.2), que Walter Chatton defendía la existencia de puntos matemáticos y de los *minima naturalia*. En ocasiones, puede detectarse, en las razones que presenta, una confusión entre el plano matemático y el físico. Ya se expuso uno de los argumentos de este oxoniense, que volveré a considerar como el número uno de una lista de tres, cuyo fin es sostener la tesis de que el continuo está formado por un número finito de indivisibles:

1) Si aceptamos la divisibilidad infinita, se seguiría el absurdo de que dos magnitudes continuas desiguales tendrían el mismo número de partes -es decir, infinito- o que la parte es igual al todo. Si el continuo es infinitamente divisible, no podría explicarse la diferencia de tamaño entre esas magnitudes, dado que no hay infinitos mayores que otros.
2) Los puntos son los límites de las líneas y, si no fueran cosas reales sino meros nombres que significan privación, falta de extensión o de divisibilidad, las líneas no podrían terminar. Pero, como de hecho hay líneas finitas, que sí terminan, entonces los puntos son entidades distintas del continuo.[294]

---

interpretaba Brentano la doctrina aristotélica del "ahora", que limita el tiempo, mas no forma parte de él (*cf.* (17), p. 116 ss.), propuesta en la *Física* (222a 10-30 *passim*).

[294] *Cf.* (23), pp. 97 y 98. Más adelante se verá cómo Occam contesta este argumento: no es necesario postular que el

3) Si fuese posible efectuar la división infinita de una cosa, por ejemplo, un trozo de carne, llegaría el momento en el cual la naturaleza de la cosa dividida sería destruida. Entonces, debe admitirse la existencia de mínimos naturales, las partículas más pequeñas en que se puede dividir una sustancia sin que pierda su esencia específica.[295]

Los argumentos 2) y 3) son ejemplo de la ambigüedad consistente en hablar de los puntos matemáticos como de algo físico –el límite real de una línea trazada– o en no hacer distinción entre los indivisibles no extensos (puntos) y los extensos, como parece que serían los mínimos naturales.

Como ya hemos visto, Bradwardine interpreta matemáticamente las ideas de Chatton y las refuta empleando las pruebas geométricas expuestas en el capítulo IV. Por ejemplo, respecto al primer argumento de aquél, hace ver que, si el continuo está formado por un número finito de indivisibles: a) figuras de tamaño desigual estarán compuestas por la misma cantidad de puntos y b) la diagonal y el lado del cuadrado medirán lo mismo. La acusación que Chatton hace al divisibilismo (*i.e.* si un número infinito de partes conforman el continuo, magnitudes desiguales tendrán igual cantidad de partes, o sea, un número infinito) es, por estos ejemplos, aplicada a su propia tesis. Se comentó anteriormente[296] que Bradwardine, como Chatton, aceptó que no había infinitos mayores que otros (axioma relacionado con aquel según el cual el todo es mayor que la parte), pero no hizo nada por defender el divisibilismo de la acusación hecha por aquél. Podría recurrir al expediente aristotélico, gracias al cual la infinita divisibilidad de una cosa no es una operación completada, sino una potencia que nunca se actualiza. Así, no sería exacto decir que, de hecho, magnitudes desiguales poseen un número infinito de partes. En otras palabras, no es lo mismo sostener que la divisibilidad es infinita a que las partes resultantes, luego de la división, son numéricamente infinitas. En este sentido, la acusación de Chatton le iría mejor a Henry Harclay, quien sí afirmaba que el continuo está formado por un infinito en acto de partes indivisibles.

punto tiene existencia separada para dar cuenta de la terminación de una línea.

[295] *Cf. Ibid.*, p. 108.

[296] V. *supra* 4.3.2.

Sin embargo, este recurso no basta, pues no salva el hecho de que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre las partes de las magnitudes desiguales. Hasta aquí, por lo que toca al primer argumento de Chatton, que parece referirse solamente a indivisibles inextensos.

Cuando se trata de los *minima naturalia* –*v.g.* los trozos de carne–, la argumentación de Bradwardine tendría que ser la misma que empleó para los átomos democríteos y estaría sujeta a las mismas objeciones.

Mi balance de la discusión es el siguiente: los divisibilistas (Bradwardine) podían superar a sus adversarios (Chatton) en claridad cuando empleaban la geometría para desacreditar la tesis atomista. Pero algunos argumentos de los atomistas, me refiero en especial al de los *minima naturalia*, se sitúan de lleno en un plano empírico: allí resulta más difícil aceptar la divisibilidad sin fin que parece tan clara a nivel geométrico, en donde es posible bisectar (en teoría) una y otra vez toda recta. Divisibilistas y atomistas negaban o afirmaban la existencia de indivisibles en función de finalidades distintas. Para los primeros, puntos y átomos son entes *non gratos* porque arruinan su marco conceptual: desde la perspectiva de una ciencia determinada –la geometría– es innecesario y hasta peligroso comprometerse con la existencia de tales objetos. De acuerdo con los segundos, la naturaleza de cosas físicas (la carne) se ve amenazada por la división *ad infinitum*, por lo que debe aceptarse un límite para la misma. Esta postura quizá puede ser leída como un temor a que, si se va más allá del límite, se pasa de lo que tiene forma a lo que no la tiene, o incluso del ser al no ser, con el consiguiente absurdo consistente en que algo está formado por nadas.

Podría decirse que, entonces, nos encontramos ante un empate, si no es que ante un diálogo de sordos. ¿Qué hacer para darle aire a esta discusión y evitar que siga enrareciéndose? Ya se ha sugerido un remedio para casos similares: ir del modo material al modo formal de hablar, del discurso sobre puntos, al discurso sobre 'punto', para distanciarse de los usos contrapuestos. Fue Guillermo de Occam (1285-1349) quien, en textos como *De corpore Christi* (c. 1324) y *Expositio* *physicorum* (1323/1329), aborda, desde una perspectiva semántica, la cuestión de los indivisibles. En la primera obra mencionada, este asunto surge dentro del contexto de sus argumentos a favor de sus teorías de la cantidad y de la transubstanciación.[297] Por el contrario, en el segundo tratado, el contexto era la problemática en torno al continuo, al movimiento y a cómo dar cuenta de los indivisibles mencionados en las diversas áreas de la filosofía natural, si se sostiene una ontología que los rechaza como reales.[298]

Es la doctrina de los indivisibles, que aparece en el primer tratado, la que se expone a continuación. Occam parte de la ontología aristotélica, según la cual el continuo es infinitamente divisible y el punto no es sustancia o *res absoluta*, para luego efectuar un análisis del término 'punto'. Ya que los indivisibles, en general, son solamente límites o cortes en un continuo y, por eso, no tienen existencia separada, el término 'punto' no se refiere a nada positivo, sino a cierto tipo de privación (que, además, no debemos hipostasiar[299]): indica que una línea deja de extenderse o que tiene cierta longitud y no más. Y, peor aún, no se trata de una privación respecto de una sustancia, sino respecto de una línea, que tampoco es *res absoluta*.

¿Qué puede significar ese término si, al igual que los usados para otros indivisibles, no se refiere a ninguna entidad? Occam expone dos métodos para tratar ese tipo de términos, aunque sólo se pronuncia por el segundo de ellos. De acuerdo con el primer método, cualquier término que signifique privación es solamente un modo abreviado de significar un sujeto privado de algo. Así, cada vez que aparezca el término 'privación', podremos reemplazarlo por 'sujeto privado', expresión con la cual equivale en significado. 'Punto', entonces, sería sustituible por 'línea no más extendida' o por 'línea de **x** longitud'. A su vez, 'línea', equivaldría a 'superficie no más extendida' y, 'superficie', a 'cuerpo no más extendido' o 'cuerpo de **x** y **z** dimensiones'. De este modo, con

[297] *Cf.* (83), pp. 210 y 216.
[298] *Cf.* (57), p. 175 y ss.
[299] La privación no es sustancia pero, sostiene Occam, tampoco puede ser accidente...Sobre esta cuestión, *cf.* (83), pp. 220, 221 y 230.

sólo hacer referencia a cuerpos tridimensionales, se preservaría el significado y evitaríamos entidades problemáticas. Las proposiciones así reformuladas serían "..espejo exacto de un mundo en el cual no [hay] cosas indivisibles existentes separadamente".[300]

Sin embargo, este método produce absurdos.[301] Al hacer las sustituciones pertinentes en las proposiciones verdaderas

1) Un punto es indivisible.

y

2) Una línea de **x** longitud es divisible.

obtendremos

1') Una línea de **x** longitud es indivisible.

y

2') Un punto es divisible.

en las cuales no se preserva el valor de verdad. Y, en última instancia, luego de efectuar varias sustituciones, la proposición

3) Un cuerpo de **x** y **z** dimensiones es una cosa absoluta.

se convertiría en

3') Un punto es una cosa absoluta.

Es necesario, pues, dar una explicación semántica que no contravenga la ontología ya aceptada o que nos obligue a aceptar ciertos objetos. Occam intentó lograr lo anterior aplicando el segundo método, según el cual 'punto' no será tomado como un nombre, o como equivalente a una frase sustantiva del tipo 'línea no más extendida'. Dentro de este nuevo análisis, 'punto' funciona, más bien, como toda una cláusula independiente: 'una línea no se extiende más'. Por tanto, *el término analizado no puede ser sujeto de una proposición* y las proposiciones que lo incluyan no estarán

[300] En (57), p. 179.

bien formadas. 'Un punto es algo' y 'un punto no es nada' no están bien formadas, por lo que no pueden considerarse verdaderas ni falsas y tampoco contradictorias entre sí. Frases como éstas sólo son metafóricas, maneras de hablar que no han de ser tomadas literalmente, sino que deben ser traducidas a proposiciones bien formadas y "no en base a una fórmula simple sino en base a una *ad hoc*, de acuerdo con las intenciones del autor".[302] Por ejemplo, cuando Aristóteles dice, "las partes de una línea están unidas en un punto como en un término común", Occam interpreta: "no hay nada intermedio entre las partes de la línea y éstas forman una línea por sí mismas".[303]

Considero que, de los protagonistas de este debate, es Occam quien elabora la doctrina de los indivisibles que aporta más elementos interesantes desde una perspectiva contemporánea. Se perfila, en tal doctrina, una distinción entre significar y nombrar: aunque 'punto' no nos remite a una entidad absoluta, las frases en las que aparece no carecen de significado. Las ciencias que, como la geometría, formulan proposiciones empleando tal término, no se ven afectadas por la inexistencia de indivisibles: no formulan sinsentidos porque, mediante una paráfrasis, es posible eliminar el término sin que la proposición resultante carezca de significado. Asimismo, Occam aplica una vez más su afilada navaja: no hay por qué multiplicar los entes sin razón; la ontología debe ser económica.[304]

Y, aunque la doctrina de los indivisibles de Occam no siempre tuvo la función de dar respuesta a problemas matemáticos o de filosofía natural, sino a cuestiones teológicas, el ascenso semántico que le era implícito, bien pudo haber servido para establecer un terreno común que permitiese continuar la discusión entre ambos bandos.

---

[301] *Cf.* (83), p. 221 y ss., para una crítica de Stump a la interpretación de Murdoch.
[302] *Op. cit.*, p. 277. Occam dice: "así muchas (cosas) dichas por causa de la brevedad no deben ser asumidas según las propiedades de la expresión, sino según la intención del autor" (*loc. cit.*, n. 54).
[303] Tomado de *ibid.*, p. 227, n. 55.
[304] Pueden encontrarse muchas similitudes entre esta postura y el tratamiento que de los puntos hace Quine, por ejemplo, para no comprometerse con su existencia (*cf.* (65), pp. 260-265). Este método también recuerda la propuesta russelliana de las descripciones definidas.

Dije más arriba[305] que la conclusión final (C151) del *TC* equivale a las propuestas de Occam, pues niega realidad a la superficie, la línea y el punto, además de afirmar que los continuos se limitan y continúan por sí mismos. No obstante, la manera en que se llegó a tal conclusión me ha parecido menos convincente que la de Occam.

5.2 EL CONTINUO Y LA POSIBILIDAD DEL INFINITO EN ACTO

En lo que sigue, confrontaremos dos vertientes acerca de este tema. La primera, apegada a la tradición aristotélica, será representada aquí por Pedro Hispano, Bradwardine y Occam. Por otro lado, encontramos las audaces propuestas de Henry Harclay, Gregorio de Rimini y, finalmente, Nicole Oresme, quienes, anticipando los resultados de la teoría cantoreana, abren la puerta al infinito categoremático.

5.2.1 Bradwardine, Hispano y Occam: infinitos categoremático y sincategoremático

Las definiciones 23 y 24 del *TC* indican qué debe entenderse por cada noción de infinito:

> *D23*: Un infinito tomado absolutamente (*simpliciter*) y categoremáticamente es una cantidad sin fin.
>
> *D24*: El infinito sincategoremática y relativamente (*secundum quid*) es una cantidad finita y un finito mayor que eso finito y un finito mayor que ese mayor, y así sin fin último terminante; y esto es una cantidad y no tan grande que no pueda ser mayor (*non tantum quin maius*).[306]

Inmediatamente después de ellas, sigue una digresión en donde se expone, con un poco más de detalle, el contenido de ambas definiciones. Por ejemplo, se agrega que el infinito categoremático es algo mayor que lo cual no existe nada (*non tot quin plura*).[307] Sin embargo, no se especifica cuál

[305] *Cf. supra*, p. 101, n. 197.
[306] Ambas en (53), p. 341.
[307] *Cf* (8), 206b 33-207a 14. "Lo ilimitado es...lo contrario de lo que se afirma: no es aquello, fuera de lo cual nada existe, sino aquello, fuera de lo cual siempre existe todavía algo... aquello, fuera de lo cual nada existe, es más bien

es la función de tales nociones en relación con el resto de la obra. No se aclara, por ejemplo, si las partes resultantes de la infinita divisibilidad del continuo son actual o potencialmente infinitas,[308] aunque lo más probable es que Bradwardine, como Aristóteles, no aceptara como válida mas que la noción sincategoremática de infinitud.

La digresión a la cual aludimos, es deudora de la clasificación hecha por Pedro Hispano (c.1205-1277) del término "infinito" y de la *expositio*[309] a la cual lo somete. Su *Tractatus* (o *Summule logicales*, c. 1230), resumen del saber lógico vigente en el siglo XIII, discurre en el capítulo XII sobre las *distribuciones*, signos universales y sincategoremáticos –es decir, carentes de significado *per se*–, que multiplican los *términos comunes* distribuyéndolos o haciendo que éstos sean tomados por cualquiera de los *términos singulares* agrupados bajo ellos. Por ejemplo, el signo universal "todo" distribuye el término común "hombre", de modo que éste se toma por todos los hombres –cosa que no podría suceder con un término singular como "Sócrates". Los signos distributivos son de dos tipos: los que distribuyen la substancia y los distributivos de los accidentes. De estos últimos hay algunos que distribuyen la cualidad y otros la cantidad. Entre los signos universales distributivos de la cantidad se encuentra el nombre "infinito". "Infinito" significa varias cosas, de acuerdo con Aristóteles:[310] a) lo que no puede abarcarse o transitarse por naturaleza; b) lo que puede transitarse pero aún no ha sido transitado por completo; c) lo susceptible de aumento y/o división sin fin. De acuerdo con este último sentido, se define lo infinito como "aquello a cuya cantidad, en los que la reciben, siempre se puede añadir algo más".[311] Este uso del término es también llamado "infinito en cuanto a nosotros" (o infinito potencial), uso que se opone al que toma

perfecto y entero, pues así definimos el todo".

308 Sobre este interesante tema, Occam diría que hay una infinidad de partes existentes en acto –aunque no una infinidad en acto de partes– porque el continuo al que pertenecen es en acto, porque nosotros no construimos las partes al efectuar la división sino que ya están *dadas* [*cf.* (57), p. 190]. La importante distinción entre el plano epistémico y el óntico surge también en este contexto: las partes *están*, aunque *nosotros no podamos conocerlas*.

309 El método de la *expositio* ha sido ejemplificado con el procedimiento de Occam mencionado en el apartado anterior (5.1). Consistía en analizar el significado que las proposiciones adquirían según se emplearan sus términos componentes. *Cf.* (45), pp. 215-216.

310 *Cf.* (8), 204a 2-7.

311 En (36), p. 204.

el término "simplemente y como término común", es decir, categoremáticamente (infinito en acto). Si en la proposición "las cosas infinitas son finitas" se toma "infinitas" como término común, de modo que funcione como adjetivo o modificador numérico, resultará que un conjunto de cosas infinito en acto será finito. Por ejemplo, se podría decir: "Dos cosas son finitas, tres son finitas y así *ad infinitum*; luego las cosas infinitas son finitas". Pero el infinito obtenido a través de la suma de partes sólo es infinito respecto a nosotros y de aquí no puede inferirse un infinito de manera simple. El razonamiento ejemplificado es falso, "predica lo opuesto de lo opuesto" y muestra que el uso sincategoremático de "infinito" —"una cantidad y no tan grande que no pueda ser mayor", como dice Bradwardine — es el único adecuado en estos casos.

Por su parte, Occam hizo ver que el lugar ocupado en una proposición por ciertos términos lógicos -los cuantificadores- determinaba la verdad o falsedad de la misma. Esta característica de tales términos fue empleada para probar lo que podía o no podía ser cierto acerca de la infinita divisibilidad de los continuos.[312] Por ejemplo, la proposición

Para *toda* magnitud hay *alguna* magnitud más pequeña

es verdadera, pues significa que, sin importar qué tan pequeña sea una magnitud, siempre existirá una menor que ella. En cambio, la afirmación

Alguna magnitud es más pequeña que *toda* magnitud

es falsa, porque el sentido es el siguiente: existe *la* magnitud más pequeña de todas -incluso, tendría que existir una magnitud más pequeña que ella misma (si x es la magnitud en cuestión, tiene que ser menor que cualquier magnitud, incluyéndose a sí misma). En otros términos, en cuanto a la división, no puede darse un infinito categoremático/en acto, sino sólo el sincategoremático/en

[312] *Cf.* (57), pp. 196-197. El texto de Occam es *Expositio Physicorum* III, t 61 (206b 27-33), citado en *op cit*, p. 198, n

potencia. Esto explica las siguientes palabras del *Venerabilis Inceptor*:

> En las cosas permanentes, divisibles al infinito, como son todos los continuos, ... no se puede asignar un mínimo ya que, por pequeña que sea la parte dada, la potencia divina podría realizar una que sea más pequeña y, del mismo modo, no se podría asignar un máximo pues, por grande que sea una cantidad dada, la potencia divina podría producir una mayor ... Por tanto, no se llega nunca ... a un infinito ni a una magnitud que sea, en acto, todo lo que ella es en potencia; nunca, en efecto, esta potencia puede ser agotada de tal suerte que no quede ya ninguna posibilidad de una creación nueva.[313]

Los tres autores citados en esta sección son representantes de la ortodoxia aristotélica acerca de estas cuestiones, aunque sus doctrinas poseen giros típicamente medievales, como el enfoque lógico-semántico o el recurso a la *potentia Dei absoluta.* Veamos qué otras propuestas produjo la Edad Media al respecto.

5.2.2 Harclay y Rimini *vs* varios siglos de tradición

Nos ocuparemos, en este apartado, de quienes se atrevieron a ir más allá de los precisos márgenes conceptuales establecidos por el aristotelismo para sujetar el infinito. Nos referimos al ya mencionado atomista Henry Harclay y al italiano Gregorio de Rimini (c. 1300-1358), que admitieron la posibilidad del infinito en acto y de infinitos de diversa magnitud y señalaron excepciones al quinto axioma euclídeo.

Hemos visto que Bradwardine elimina la hipótesis del número infinito de puntos –sostenida por Harclay– bajo la premisa de que, si se acepta, se viola el axioma según el cual el todo es mayor que la parte, lo cual es considerado absurdo. Parece seguro que ni él ni, en general, los autores medievales, podían haber cuestionado la validez universal de tal axioma y menos podían haber llegado a definir lo infinito como aquello que tiene, al menos, una parte propia que, en algún sentido, es igual al todo –definición que sí elaboraron, como se ha mencionado, Bolzano, Dedekind

81.

[313] Citado en (21), p. 105.

y Cantor ya en el siglo XIX.

No obstante, en el turbulento clima intelectual característico del siglo catorce, se dieron las condiciones para el surgimiento de casi cualquier heterodoxia. Es el caso de Harclay quien, en su *Questio de infinito et continuo*, aceptaba que el todo es mayor que la parte solamente en relación a cantidades finitas. A las colecciones infinitas no puede aplicárseles el axioma exactamente, aunque sí pueden distinguirse desigualdades entre los infinitos: si una colección infinita contiene otra también infinita "y algo más allá que ella o en adición a ella",[314] funcionará como un todo respecto a la segunda.

Harclay creía necesario postular la composición del continuo a partir de un número infinito de indivisibles, para hacer plausible la tesis de que existen infinitos "mayores" que otros, aunque no cuento con mucha información al respecto.[315]

Una doctrina más elaborada se encuentra en Rimini, quien sostuvo que sí existen infinitos más pequeños que otros.[316] Por "más pequeño" se entiende que un infinito está contenido en otro (en términos modernos, que es subconjunto propio de ese otro). Pero no debe entenderse que, "más pequeño", hace referencia al número de elementos de cada colección infinita, pues en este respecto son iguales. ¿Cómo llegó a este resultado? Para empezar, definió de manera distinta los conceptos de *infinito categoremático*, *todo* y *parte*.

[314] Citado en (54), p. 571.
[315] *Cf.* (58), p. 215, n. 11, donde se cita a Harclay: "Contra esto [la posibilidad de infinitos desiguales] están todos los argumentos que prueban que el continuo no puede estar compuesto de indivisibles; prueban realmente ... que en un continuo no existan más puntos que en otro" (*Utrum mundus poterit durare in eternum a parte post*). Quizá podría armarse la siguiente argumentación, empleando, para ilustrar la idea de Harclay, el clásico argumento contra la composición *ex atomi*: no es posible que un continuo se componga de puntos porque, de lo contrario, puede probarse que la diagonal tendría igual número de puntos que el lado del cuadrado y serían magnitudes iguales Y si, *per impossibile*, ambos constasen de un número infinito de puntos puestos en relación uno a uno, entonces no parecería haber razón para negar que las colecciones infinitas de puntos también lo fueran no habría manera de distinguir un infinito del otro, la diagonal no tendría más puntos que el lado. Chatton rechazaba que existieran infinitos más grandes que otros y precisamente eso lo llevó a aceptar que el continuo se componía de indivisibles, aunque en número finito. Nótese lo opuestas que pueden ser las razones que conducen al atomismo. Las tesis finitistas e infinitistas parecen independientes de que se tengan o no compromisos ontológicos con ciertos objetos [*cf.* (68), pp. 207-209].
[316] *Cf.* (54), pp. 571-573 y (51), pp. 52-54

La magnitud, *infinita categoremáticamente*, es más grande que toda cantidad finita (*majus quanto cunque finito*), por grande que ésta sea, no una magnitud tal que no exista otra mayor -como en Bradwardine, por ejemplo. Las objeciones lanzadas contra el infinito categoremático, definido según la manera tradicional, no afectan a esta nueva noción pues, adoptándola, resulta concebible que pueda agregarse algo al infinito, que pueda existir algo mayor que él, que un infinito pueda ser múltiplo de otro, etc.

Podríamos decir que la definición tradicional impide, de entrada, una jerarquía de infinitos: si **B** es una circunferencia compuesta por un infinito categoremático de puntos, no existirá otra mayor que ella. Entonces, es inexplicable por qué una circunferencia **A**, en la cual **B** está inscrita, tiene igual número de puntos y, sin embargo, es mayor que **B**, dado que no debería existir un infinito mayor que el representado por **B**. De esta situación se han deducido diversas consecuencias:

a) todos los infinitos son iguales, pero a riesgo de igualar parte y todo; como esto es absurdo, debe rechazarse el infinto categoremático;
b) **A** y **B** están compuestas por distinta cantidad *finita* de puntos;
c) ni **B** ni **A** pueden estar compuestas por puntos.

Todo esto desaparece si la serie de puntos en **B** es entendida como mayor que cualquier serie finita, lo cual no impide que la serie de puntos en **A** sea mayor todavía. Con la definición tradicional, sería inconcebible añadir algo al infinito categoremático pues, entonces, sería mayor que él mismo y se había supuesto que no existía nada mayor. La definición de Rimini permite agregar elementos al infinito categoremático. ¿Significa esto que Rimini acepta como válido decir que un infinito es *mayor* o *menor* que otro o que sí puede distinguirse entre todo y parte aun cuando se trate de magnitudes infinitas? La respuesta, en ambos casos, es afirmativa, gracias a la doctrina descrita por el llamado *Magister Cathedraticus*:

> Esos términos [todo y parte] ... pueden ser tomados en dos sentidos diferentes, en sentido común y en sentido propio. En el primer sentido, una cosa cualquiera que comprende una segunda cosa y, además, una tercera distinta de la segunda y de todo lo comprendido en la segunda, es un *todo* con relación a esta segunda cosa y toda cosa así comprendida en un todo es una *parte* del todo que la comprende.[317]

De manera similar a la propuesta de Harclay, mencionada más arriba, en *sensus communis*, el todo equivale a la parte y cualquier otra cosa no contenida en la parte. La parte será un subconjunto propio del conjunto total. En cuanto al sentido propio

> ... para que una cosa sea un *todo* con relación a otra cosa, es necesario, no solamente que ella comprenda esta otra cosa, como lo supone el primer sentido, sino que, más aún, es necesario que el todo comprenda un número determinado de cosas de magnitud determinada [*tot tanta*] que no comprende la cosa incluida; inversamente, una cosa incluida se considera *parte* de un todo, cuando no comprende cierto número determinado de cosas de magnitud determinada que sí comprende la cosa en la cual ella está contenida.[318]

En sentido propio, el todo equivale a la parte y, por añadidura, a una cantidad de objetos en magnitud bien determinada. La misma distinción será aplicada a las multidudes:

> En el primer sentido [sentido común], una multitud cualquiera es un todo con relación a otra multitud, cuando la primera contiene la segunda; cuando ella comprende, en consecuencia, todos los objetos que forman la segunda y cuando contiene, además, un objeto u objetos distintos de todos y cada uno de ellos. *En este sentido, una multitud infinita puede ser parte de otra multitud infinita.*[319]

Éste sería el caso considerado varios siglos después por Galileo: los cuadrados son parte de los naturales, son un subconjunto propio, lo cual implica que, aunque todo cuadrado pertenece a los naturales, la inversa no es cierta: existen miembros del conjunto de los naturales *diferentes* de *cualquier* miembro del conjunto de los cuadrados. Ahora bien, en sentido propio,

---

[317] Citado en (21), p 132.
[318] *Loc. cit.*
[319] *Ibid*, pp. 132-133. La nota y el subrayado son míos.

> ...para que una multitud sea un *todo* con relación a otra multitud, es necesario, en primer lugar, como en el primer sentido, que ella contenga esta segunda multitud; es necesario, además, que contenga un número determinado de cosas de magnitud determinada, es decir, un número determinado de grupos de objetos tales que la cantidad de cada grupo sea determinada [*v.g.*, un número determinado de grupos de dos o tres unidades], mismos que no estén comprendidos en la multitud contenida; inversamente, ésta es una *parte* de la multitud continente.[320]

De acuerdo con esto, una multitud infinita no puede ser ni todo ni parte respecto de otra multitud infinita, ya que en ellas:

> ...no existe, en efecto, un número determinado de grupos de tantas unidades que esté contenido en una de las multitudes y no en la otra, pues cada una de ellas contiene una infinidad de veces un grupo de tantas unidades [*infinites tantum*] o una infinidad de grupos, cada uno de los cuales cuenta con tantas unidades [*infinita tanta*].[321]

Esto es, una multitud infinita P contiene un número infinito de subconjuntos propios, lo mismo que cualquier otra multitud infinita.

Las relaciones *más grande que* y *más pequeño que* están sujetas también a la misma distinción:

1) *en sentido impropio o común*:

a) cuando una multitud contiene todas las unidades de una segunda y, además, ciertas unidades diferentes de aquéllas, es más grande que la última, aun cuando no contenga un número más grande de unidades (*plures unitates*) que la segunda multitud –como es el caso de las colecciones infinitas, en donde una está contenida en la otra. Es decir, la primera multitud comprende la segunda, siendo un todo en el primer sentido;

b) una multitud es más pequeña que otra si es una parte en el primer sentido del término;

[320] *Ibid*, p. 133 La nota es de Duhem.
[321] *Loc cit.*

2) *en sentido propio*:

a) una multitud es más grande que otra si contiene no sólo un número tan grande de unidades como ésta última, sino un número más grande todavía (*tantumdem et plures*);

b) una multitud será menor que otra si encierra un número menor de unidades (*pauciores*).

Según la definición propia, *más grande que* y *más pequeño que* no deben emplearse para comparar un infinito con otro, sino solamente al comparar magnitudes finitas entre sí o una magnitud finita con otra infinita. Gracias a la definición impropia, un infinito puede ser mayor que otro y ser considerado como un todo respecto del segundo.

¿Demasiado embrollo y pocas consecuencias importantes? En absoluto: sin negar que se expresa un tanto oscuramente, podemos asegurar que Rimini hace gala de una atinada intuición lógica. Citaré un diálogo de Raymond Smullyan, en el cual, un Brujo experto en lógica explica parte de la teoría cantoreana de los conjuntos transfinitos a sus dos víctimas-aprendices. Se podrá ver la semejanza con los pasajes del *Cathedraticus*:

> ***Brujo***: Supongan que A es un subconjunto propio de B. Entonces, en un sentido de la palabra 'mayor', B es mayor que A, esto es, en el sentido de que B contiene todos los elementos que A contiene y algunos elementos que A no contiene. Pero eso no significa que B sea *numéricamente* mayor que A. (...) ¿qué creen que significa que un conjunto A sea *del mismo tamaño* que otro conjunto B?
> ***Annabelle***: Supongo que significa que A puede ser puesto en una correspondencia 1 a 1 con B.
> ***Brujo***: ¡Correcto! ¿Y qué creen que significa decir que A es de tamaño *menor* que B, o que, numéricamente, A tiene menos elementos que B?
> ***Annabelle***: Supongo que quiere decir que A puede ser puesto en una correspondencia 1 a 1 con un subconjunto propio de B.
> ***Brujo***: Buen intento, pero no funcionará. Esa definición funcionaría para conjuntos finitos, pero no para conjuntos infinitos. El problema es que se podría poner A en una correspondencia 1 a 1 con un subconjunto propio de B y también podría ser posible poner B en una correspondencia 1 a 1 con un subconjunto propio de A. En cuyo caso, ¿querrías decir que cada uno es menor que el otro? (...)
> La definición correcta es ésta: Decimos que A *es menor en tamaño que B*, o que B *es*

> *mayor en tamaño que* A si se satisfacen las dos condiciones siguientes: (1) A puede ser puesto en una correspondencia 1 a 1 con un subconjunto propio de B; (2) A *no puede* ser puesto en una correspondencia 1 a 1 con la totalidad del conjunto B. (...)
> Decir que A es menor que B significa, ante todo, que A *puede ser puesto en una* correspondencia 1 a 1 con un subconjunto de B y, también, que *toda* correspondencia 1 a 1 entre A y un subconjunto de B debe dejar fuera algún elemento de B.[322]

Entonces, traduciendo a términos contemporáneos la propuesta de Rimini, el sentido propio apunta hacia la diferencia de cardinalidad entre conjuntos, mientras que el sentido impropio alude al hecho de ser subconjunto propio de otro. Si A es *numéricamente* menor que B –*i.e.* A se pone en correspondencia 1 a 1 con B, sobran elementos de B y, por ello, se dice que la cardinalidad de A es menor–, A será menor, en sentido propio, que B.

Si A es menor que B en sentido impropio, eso significa que es parte (subconjunto propio) de B, pero es posible que ambos posean *igual cardinalidad*, o bien una distinta. Cuando A es subconjunto propio de B, a lo que se hace referencia es a la definición del todo de manera *intensiva*, no *extensiva*.[323] Es decir, no interviene aquí la posibilidad o no de establecer una correspondencia biunívoca, sino el hecho de pertenecer o no a una clase que agrupa miembros con características comunes. Por ejemplo, "europeos" es un concepto-clase que conforma un todo mayor, en sentido impropio, que "ingleses", uno de sus subconjuntos propios, pues contiene también a "españoles", "italianos", etc.

"Europeos" también es un todo en sentido propio respecto a "ingleses", porque su cardinalidad es mayor. Mas no siempre sucede que un todo en sentido impropio lo sea también en sentido propio –*v.g.* el conjunto infinito de los naturales respecto del de los cuadrados.

Por otro lado, un todo en sentido propio no siempre es un todo en sentido impropio: una decena de hombres en París, dice Rimini, contiene más unidades que un sexteto o un cuarteto de

[322] En (79), pp. 206-208.
[323] *Cf. supra*, cap. II, pp. 31 ss.

caballos en Roma; sin embargo, tal decena no contiene esos caballos.

Rimini establece, pues, las siguientes relaciones entre ambas nociones:

a) en ocasiones, algo que es un todo o una parte de manera propia, lo es también de manera impropia;
b) lo que es más grande en sentido impropio, no es siempre más grande en sentido propio;
c) no es cierto que todo lo que es más grande en sentido propio lo sea también en sentido impropio.

De este modo, la cardinalidad (sentido propio) no es un concepto equivalente al de ser subconjunto propio (sentido impropio); no se implican necesariamente entre sí. Sólo podría decirse que existen casos que satisfacen tanto la proposición

P = "x es mayor que y en sentido propio"

como la proposición

Q = "x es mayor que y en sentido impropio"

aunque también se dan ejemplos que satisfacen a P o a Q exclusivamente.

Rimini ha librado, con esta doctrina, las paradojas que hacían ver el infinito categoremático o en acto como contradictorio. Hizo frente, además, a otro tipo de objeciones. Por ejemplo, aquella, según la cual, si aceptamos el infinito categoremático, contradecimos la definición misma de infinito, en tanto éste existe solamente *in fieri*, en potencia y nada más que en potencia. El *Cathedraticus* sostuvo que tal definición era demasiado estrecha:

> Afirmo que no está en la naturaleza del infinito, tomado simplemente (*simpliciter sumptum*), existir solamente en potencia.[324]

Rimini demostraba la posibilidad del infinito en acto (*in facto esse*), retomando un argumento empleado para atacar la tesis de la eternidad del mundo y haciendo ver que tal razonamiento era independiente de suponer un mundo existente *ab aeterno*. La tarea que planteaba ese argumento –la creación de una piedra infinita– podía ser llevada a cabo en una sola hora, sin necesidad de recurrir a una serie infinita de días:

> Dios habría podido, cada día, crear una piedra de un pie cúbico y unirla a la piedra anteriormente creada; es evidente que esta multitud infinita de piedras de un pie cúbico formaría una magnitud infinita. (...) Si es cierto que Dios habría podido, cada día, crear una piedra y obrar como se ha dicho, es cierto también que Él podría, en cada una de las partes proporcionales de igual razón que forman una hora, crear una piedra y continuar como se ha dicho más arriba; como la multitud de esas partes proporcionales es infinita, resulta que al final de la hora, habría una piedra infinita.[325]

Cuando se hablaba de "partes proporcionales", se hacía referencia a partes cuyas duraciones sucesivas iban decreciendo en progresión geométrica.[326] Esto es, la hora constaría de un número infinito de partes cada vez más pequeñas, lo cual haría posible que una magnitud finita estuviera compuesta de infinitas partes, sin que la reunión de éstas produjese una magnitud infinita.

La idea de que el infinito es una magnitud que no se puede franquear o recorrer por completo, sólo es cierta si, por ejemplo, se toman partes iguales de una magnitud infinita, en tiempos iguales. De esta manera, siempre restará algo y la magnitud infinita no podrá nunca ser tomada en su totalidad. Sin embargo,

> ... en cuanto las partes iguales del infinito no son recorridas o tomadas en tiempos iguales, sino en duraciones que decrecen en progresión geométrica, ... no hay inconveniente para que el infinito pueda ser tomado en su totalidad, a menos que exista algún obstáculo de otra

[324] En (21), p. 137.
[325] *Loc. cit.*
[326] *Cf. op. cit.*, p. 137.

> naturaleza; por la misma razón, no existe ningún inconveniente para que las infinitas partes del tiempo, en las cuales son tomadas ... las partes sucesivas del infinito, lleguen a ser completamente pasadas; no solamente no hay inconveniente en que esto sea, sino que es necesario que esto sea.[327]

Este planteamiento es semejante al procedimiento de paso al límite, desarrollado por matemáticos que intentaban sentar el cálculo sobre bases rigurosas. Entre ellos se cuenta a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien propuso definiciones para conceptos como el de límite, de función continua, de infinitésimos, de serie convergente, etc.[328] Esta última es la prefigurada por Rimini: en el núcleo de la serie que converge, se encuentra la idea de que la suma de un número infinito de cantidades puede ser finita. Por ejemplo, el resultado de la suma

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots + 1/2^n + \ldots$$

es 2. La serie va acercándose progresivamente –tanto como se quiera– a un límite, en este caso, el número 2. Esto permite dar una respuesta a las paradojas de Zenón: sí es posible recorrer un trayecto finito, formado por un número infinito de segmentos, en un tiempo finito.

Y, ¿qué se desprende de la doctrina de Rimini en lo tocante a la composición del continuo? Muchos escolásticos eran conscientes de que, si era posible el infinito categoremático, entonces el continuo podía ser dividido, en acto, al infinito.[329] Esos autores solían negar el consecuente, para negar también el antecedente de ese condicional. Rimini, en cambio, admitirá ambas proposiciones:

> No está en la naturaleza del infinito *simpliciter*, que algo de él permanezca siempre en potencia; esto es evidente en la multitud infinita de partes de un continuo; cada parte está en acto, tal como todas las demás; no es verdad que cierta parte del continuo esté en acto y otra solamente en potencia.[330]

La magnitud continua puede ser dividida en un infinito número de partes, ya sea en sentido

[327] *Ibid*, p. 139.
[328] *Cf.* (16), p. 647 ss.
[329] *Cf. op. cit*, p. 142.
[330] *Loc. cit.*

sincategoremático o categoremático:

> Toda magnitud tiene una infinidad de partes iguales, tomando el término 'infinito' en sentido sincategoremático (...). Toda magnitud tiene una infinidad de partes iguales, tomando el término 'infinito' en sentido categoremático.[331]

Las infinitas partes del continuo no existen, pues, solamente en potencia sino en acto, aunque no estén ya separadas. En sentido colectivo o categoremático, la magnitud es el conjunto de tales partes. Ni Bradwardine, ni nadie dentro de la tradición aristotélica, se habría atrevido a afirmar algo como esto.

5.2.3 Nicole Oresme (ca. 1325-1382)

Oresme es representante, según Murdoch, de la segunda actitud ante la posibilidad de infinitos desiguales y las relaciones parte/todo entre ellos. Unos treinta años después de Bradwardine, el autor de *Le livre du ciel et du monde*, sostuvo que no era legítimo aplicar relaciones como "igual a", "mayor que" o "menor que" a las colecciones infinitas pues, cuando una era parte de otra, los mismos infinitos resultarían iguales y desiguales simultáneamente. Como puede apreciarse, esta postura no efectúa un deslinde entre lo que son las diferencias en cuanto a cardinalidad y el hecho de ser un subconjunto propio. Oresme concluye que los infinitos son incomparables entre sí, pues carece de la distinción sentido propio/sentido impropio que aparece en Rimini. En el *Livre*, Oresme afirma cosas como las siguientes:[332]

> ... una cantidad infinita no es ni más grande ni más pequeña que otra infinita.

Y más adelante:

> Así pues, se muestra claramente que de muchas cantidades infinitas, por más que sean

[331] *Loc. cit.*
[332] Traducciones tomadas de (70), p. 25, n. 1 (continuación).

infinitas de manera diversa, una no es más grande ni más pequeña que la otra.

En otra obra, aparece esta conclusión: "Ningún infinito comparado con otro por la imaginación es, con el otro, menor, igual o mayor, sino que todo él con todo el otro es incomparable".[333]

Me parece justo ubicar su solución, entonces, como intermedia entre la que ofrece Bradwardine y la del italiano. Una versión muy parecida a la oresmiana, si no idéntica, será la adoptada por Galileo, como ya se ha mencionado anteriormente.[334]

5.3 RECAPITULACIÓN

Sobre el primer apartado de este capítulo, conviene agregar lo siguiente. Occam critica el atomismo de manera más efectiva que Bradwardine. ¿Entierra, para siempre, esta crítica al atomismo? Occam ha partido de lo que la ontología aristotélica sostiene acerca de los indivisibles y, desde su posición nominalista, la defiende. Pero resurge, a mi modo de ver, el problema de decidir si la ontología aristotélica dice o no la última palabra en torno al continuo.

Cabe aquí mencionar lo que Bayle, anticipando de algún modo las antinomias kantianas, pensaría de la polémica Chatton/Bradwardine-Occam.[335] Cada una de las "sectas" que proponen cierta composición del continuo,[336] cuando ataca a las demás, triunfa y destruye a sus oponentes.

Pero, a su vez, le tocará el turno de ser anulada por las otras. ¿Por qué sucede esto? La escéptica explicación de Bayle es la siguiente. Cualquier toma de posición sobre el continuo o el infinito, descansa sobre este principio: *si solamente hay tres maneras de explicar un hecho, la verdad de la tercera de ellas resulta necesariamente de la falsedad de las otras dos*. Así, quienes optan por la hipótesis aristotélica –o por cualquier otra– lo hacen porque es cómoda, porque se persuaden de que es la verdadera, dado que las otras hipótesis no lo son –y esto, a sabiendas o no de

[333] *Quest. Phys.*, III, Q. 12. Misma referencia que las anteriores
[334] V. *supra*, 2.2 2, p. 28.
[335] *Cf.* (11), pp. 540b ss.
[336] *Cf. supra*, 2.2.1, pp. 25 y 26.

que existen dificultades impenetrables en la doctrina de su preferencia.[337] El silogismo que fundamenta el principio antes citado es disyuntivo:

> El continuo está compuesto por puntos matemáticos, por átomos o por partes divisibles al infinito.
> No está compuesto ni por puntos ni por átomos.
> ___
> Por tanto, está compuesto por partes divisibles al infinito.

El error, cree Bayle, no se encuentra en la forma, sino en la materia del razonamiento. Aunque este autor no profundiza en tal aseveración, tal vez tenía en mente el hecho de que ese razonamiento asume que el continuo, lo extenso en general, sí existe. Suponemos lo anterior porque Bayle prefiere emplear un silogismo hipotético:

> Si la extensión existiera, estaría compuesta por puntos, por átomos o por partes divisibles al infinito.
> La extensión no está compuesta por puntos, por átomos ni por partes divisibles al infinito.
> ___
> Por tanto, la extensión no existe.

La premisa mayor, a decir de Bayle, no comete el sofisma de enumeración incompleta; esto es, agota todas las posibilidades de composición de lo extenso. La conclusión es necesaria si la menor es verdadera. Y, de esto, no le cabe duda a Bayle, dadas las siempre renovadas e indecidibles discusiones entre las tres sectas.

[337] Menciona Bayle a un "sutil Arriaga", quien se negaba a abandonar su parecer, a pesar de ser objetable, dado que los otros pareceres no resolvían mejor el problema. Con su usual ironía, comenta que los escolásticos han inventado múltiples distinciones en defensa de la hipótesis del Estagirita, pero que tales sutilezas sólo sirven para que los alumnos no enmudezcan en su examen público. El discípulo distingue infinitos categoremáticos y sincategoremáticos, partes comunicantes y no comunicantes, partes proporcionales y alícuotas... —arsenal de términos que dejan intacto el núcleo del problema.

Esto último es lo que aquí me interesa resaltar: considero certera la afirmación de Bayle en tanto que es posible hallar buenos argumentos para defender cualquiera de las hipótesis y, por otro lado, encontrar dificultades en cada una de ellas. Esto es, no estamos ante argumentos demostrativos, sino más o menos plausibles. Por ejemplo, la doctrina de Rimini, expuesta en el segundo apartado, es ideal para saltar los obstáculos que parecía imponer la noción de infinito. Pero, ¿vale también para decidir entre atomismo o continuismo? No, desafortunadamente. La aceptación del infinito categoremático es independiente de ambas hipótesis y se sostiene aceptando una u otra. Postúlese un continuo infinitamente divisible; una de sus partes podrá ponerse en correspondencia biunívoca con el todo. Supóngase un continuo conformado por un número infinito de átomos infinitesimales –para evitar un continuo de magnitud infinita– y se obtendrán consecuencias similares. Se ha abierto la puerta a las colecciones infinitas en acto,[338] mas no se ha finiquitado la cuestión del tipo de elementos que tales colecciones contienen en el caso del continuo.

Por otro lado, ¿qué podemos obtener en claro de las elucubraciones de las distintas sectas y de la encrucijada a la cual parecen conducir? Recordemos que, según Bayle, el beneficio no radica en la adquisición de nuevos conocimientos, sino en hacernos conscientes de los límites de nuestro entendimiento.[339] En esto, concuerdo con él –aunque no comparto la conclusión de su

[338] Resulta interesante constatar que la aceptación del infinito en acto no es el episodio final de esta historia. Las matemáticas post-Cantor han dado un nuevo giro, por el cual algunos especialistas se han visto llevados a las siguientes conclusiones: "el infinito (...) adquirió un nuevo estatuto en el trabajo matemático que permitió pensar en la posibilidad de superar de manera definitiva la aproximación aristotélica. (..) Sin embargo, el propio desarrollo de la teoría de los números transfinitos, que fundamentó la certeza en este nuevo infinito en acto, con la teoría de los *grandes cardinales* y los *cardinales inaccesibles*, ha llegado a un punto en el que nos encontramos ante un nuevo renacer de la idea original de Aristóteles acerca del infinito" [en (4), pp. 31-32]. Cantor sugirió que lo sujeto a investigación matemática, "incluso si es infinito en un sentido técnico adecuado, parece disfrutar, por ello mismo, de cierto *tipo* de finitud: el verdadero infinito es lo que resiste la investigación matemática" [en (51), p. 198]. Lo realmente infinito son las *totalidades inconsistentes*, con características como "ilimitación, carencia de término, inmensidad; ser mayor que cualquier cantidad asignable" (*loc. cit.*). Parecía, entonces, que el infinito había sido domeñado, pero "el patrón de la matemática griega temprana estaba siendo repetido", pues "las totalidades inconsistentes (son) el verdadero infinito, no los así llamados conjuntos infinitos que las conforman" (*ibid*, p. 199). V. *supra*, pp. 46 ss.
[339] V. *supra* p. 38, n. 77.

razonamiento.[340]

340 La discusión acerca del *status* ontológico de la extensión o del espacio es similar a la de la composición del continuo. Podría decirse que Bayle cae en un pozo sin fondo parecido a aquel del cual deseaba salir, pues su posición representa una "secta" opuesta a quienes afirman la existencia de *la extensión. Considero que* la filosofía kantiana dio cuenta claramente de esta situación, así como una alternativa plausible: el espacio es una categoría que aporta el sujeto para organizar fenómenos.

CONSIDERACIONES FINALES

Para cerrar esta investigación, se extraerán los resultados más importantes de cada capítulo. El orden será regresivo, pues el propósito es retornar al punto de partida y apreciar cómo intervinieron los criterios historiográficos, establecidos al comienzo, en el resto del trabajo. Prosiguiendo con la analogía sugerida en la Introducción, aquí termina el recorrido por la galería y observamos, desde cierta distancia, las correspondencias y relaciones establecidas entre cada sección y el conjunto de la exposición, entre los colores primarios y las combinaciones resultantes en cada cuadro. La tesis terminaría, entonces, como un juego capicúa.

Capítulo V

Como la mayoría de sus coetáneos, Bradwardine no trastocó las enseñanzas básicas del Filósofo respecto al continuo y al infinito. Nada hace pensar en la posibilidad del infinito en acto y se defiende, a capa y espada, la infinita divisibilidad como esencia de lo continuo.

Sin embargo, mucho de lo que Bradwardine *et alii* dicen, ilustra claramente las hipótesis de algunos medievalistas: durante el ocaso de la Edad Media se conjugaron la teología, la filosofía natural y la lógica para dar origen a un conjunto de saberes que no es posible encasillar simplemente como estéril "aristotelismo" , ni como "antecedentes de la nueva ciencia" que surgiría tiempo después. Véase, por ejemplo, el análisis semántico-ontológico de Occam o la manera en que Rimini recurre a la *potentia Dei absoluta* y rescata el infinito en acto.

Occam defiende la doctrina aristotélica del continuo desde una perspectiva ontológica, la cual no aparece explícitamente en el *TC*. Refuta el atomismo siguiendo una ruta más corta —y quizá más convincente— que la de Bradwardine.

En la doctrina de Rimini, a diferencia de la de Bradwardine, sí se distingue entre *densidad* y *continuidad*, lo cual constituye una de las principales características de la teoría matemática del continuo.

Tal vez el *Doctor Profundus* se quedó un tanto "corto" respecto a los resultados obtenidos por algunos contemporáneos suyos. Sin embargo, su intento por extirpar de raíz toda hierba atomista valiéndose de un método *axiomático*, es digno de examen y no carece de aportaciones importantes, como se verá en las conclusiones correspondientes a los capítulos IV y III.

Capítulo IV

Entre los puntos a favor que tiene el *TC* se cuentan los siguientes:

(1) Se define con bastante precisión lo que deberá entenderse por *continuo* y por *indivisible*. La definición de *punto* abarca tanto los puntos extensos como los inextensos, porque Bradwardine busca agotar todas las variantes del indivisibilismo para conseguir una refutación exhaustiva.

(2) Se clasifican varios tipos de indivisibilismo, con lo cual la estrategia se hace más elaborada y sutil.

(3) Bradwardine aprovecha el rigor que ofrece el método de la geometría: descarta fácilmente las poco matemáticas propuestas de Chatton y no se limita a repetir argumentos tradicionales. La conclusión 20 es un buen ejemplo de esto último, pues permite dividir un segmento en cualquier punto —serviría incluso si se tratara de un irracional. Asimismo, nuestro autor es consciente de las limitaciones que podría tener su empleo de la geometría, por lo que se plantea el problema de una posible *petitio* y, en mi opinión, lo resuelve satisfactoriamente.

(4) Se deslinda la inmediatez de la continuidad gracias a dos nociones geométricas: la *superposición* y la *imposición*. La inmediatez, que equivale a una superposición, impide la densidad y la infinita divisibilidad del continuo. La imposición, en cambio, representa la continuidad según la entiende Bradwardine. La imposición revela que las partes del continuo se conectan porque poseen *límites comunes*. Esto es, en el continuo no hay hiatos.

(5) Se estructura la argumentación de manera que se concede a Harclay la posibilidad de que existan indivisibles inmediatos y, aun así, se extraen conclusiones desfavorables para el indivisibilismo.

(6) La noción de límite tiene cierto grado de complejidad: se distinguen límites intrínsecos y extrínsecos. Cuando Bradwardine expone que, en un cambio de un estado a otro, el límite pertenece a uno de los estados pero no a ambos, está empleando el concepto que Dedekind llamó *cortadura*, mismo que es típico del conjunto de los racionales.

Ahora recordaré las limitaciones más importantes del *Tractatus*.

(i) En el *TC* hallamos en marcha un proceso de matematización del problema del continuo (una "cruza", dijimos en este capítulo). Esto no implica que las ideas sean, en esencia, radicalmente distintas de las vertidas por el Estagirita. Ni, tampoco, quiere esto decir que esa lectura en clave matemática (geométrica) sea parecida o anuncie la realizada por matemáticos posteriores, quienes siguieron una ruta "aritmética". Por ejemplo, la propuesta de Dedekind, expuesta en el apéndice técnico, desarrolla el concepto de límite independientemente de la geometría. Según el axioma de Cantor-Dedekind, los puntos de una recta pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los números reales. Entonces, la continuidad será explicada empleando este conjunto de números. Si se parte una serie de racionales, las particiones efectuadas definirán un número racional o bien uno irracional.[340]

(ii) Cuando Bradwardine describe los indivisibles, intenta seguir la misma estrategia que usa al definirlos: las características deben ser tan amplias que incluyan puntos extensos e inextensos. Sin embargo, algunas proposiciones no parecen cumplir con este requisito, pues son más fácilmente entendibles si se refieren solamente a puntos extensos (C1, C2) o a inextensos (C3, C4, C5). En varias ocasiones, esto "traba" el mecanismo montado por el autor: en conclusiones pos-

[340] *Cf.* (16), p. 695 ss.

teriores, se combinan los dos tipos de proposiciones y no es claro que se logre refutar cierto tipo de indivisibles empleando premisas que suponen, también, indivisibles de otro tipo.

(iii) Resultan discutibles varios de los movimientos efectuados a lo largo del *Tractatus*, así como algunos de sus supuestos:

a) la reducción de la postura según la cual los indivisibles son mediatos a aquella que sostiene su inmediatez y la decisión de refutar esta última solamente;

b) la suposición de que las propiedades de las colecciones finitas valen para las infinitas y el quinto axioma euclídeo;

c) el que no se revise con mayor profundidad la propuesta de Demócrito.

(iv) Algunos *puntos ciegos* de la obra son:

a) el hecho de que Bradwardine no reconoce que la continuidad, tal como él la acepta, *sí* puede ser explicada suponiendo indivisibles mediatos en número infinito;

b) el que algunos de sus argumentos geométricos habían sido empleados también *contra la doctrina aristotélica: si el* continuo está compuesto por infinidad de continuos, sus partes tendrán igual composición, lo cual contradice el quinto axioma euclídeo —consecuencia que se deseaba evitar.

(v) En el *TC* no hay distinción entre continuidad y densidad. En descargo de esta carencia, podemos agregar que sí se manejan interesantes nociones como éstas:

a) en los procesos de cambio existen límites intrínsecos o extrínsecos, es decir, que pertenecen o no a la clase que limitan;

b) se reconoce una importante propiedad que poseen las series densas: no pueden existir elementos inmediatos en la serie, pues siempre podrá encontrarse un tercer elemento entre cualesquiera otros dos;

c) en un proceso de cambio puede *no haber un primero* o un último instante de cierto estado, puesto que la serie de instantes que convergen hacia un límite abierto es infinita (en potencia).

Estos resultados se aprecian más claramente en el tratamiento del continuo temporal que en el del continuo espacial.

Capítulo III

Una idea subyacente a todo el *TC*, es la de que las propiedades del continuo geométrico *son* propiedades del continuo físico. El origen de este supuesto es la interpretación medieval de la doctrina aristotélica sobre las matemáticas: las propiedades geométricas, abstraídas del mundo sensible, existen en potencia en aquél y en acto en el pensamiento. Las pruebas geométricas de Bradwardine contra la composición del continuo a partir de indivisibles pretenden ser válidas para las magnitudes, el tiempo, el movimiento y, como se vio en el capítulo IV, para casi toda área del saber. Puede parecernos que esta propuesta omniabarcante es demasiado ambiciosa y comete la falacia descriptivista. Pero tiene a su favor el haber querido ser lógicamente rigurosa y el hecho de que, en la época, hacer un uso falazmente descriptivista de la geometría era una manera de acercarse a la realidad lo más *científicamente* posible.

Presenté, como una de las pruebas del realismo geométrico de Bradwardine, su propuesta acerca de la existencia de un espacio vacío infinito más allá del cosmos. No hay que olvidar que espacio-geométrico no equivale a espacio-infinito, dado que Euclides pudo hacer referencia solamente a un *espacio interno* o propio de los cuerpos geométricos, sin aludir a un *espacio externo*, independiente de todo cuerpo. Sin embargo, me parece muy probable que Bradwardine haya tomado la geometría euclidiana como postulando un espacio externo:

a) a decir de Molland, en la *Geometria*, omite la definición de las paralelas y el segundo postulado euclídeo porque les da una interpretación realista y, en consecuencia, chocan con el cosmos cerrado;

b) en obras posteriores aceptó, no sin ambigüedades, la posibilidad de una magnitud potencialmente infinita, pues plantea que ésta no es autocontradictoria sino posible *per se* y fácilmente realizable por Dios.

El contenido de estas tesis, a diferencia de la doctrina concerniente al continuo, no es aristotélico y presagia el advenimiento de un cosmos abierto.

Capítulo II

Dividiré las conclusiones derivadas de este capítulo en dos partes. En la primera, haré más explícita la relación entre los resultados allí obtenidos con las tesis de Bradwardine. En la segunda, haré un breve comentario final sobre la perspectiva kantiana acerca del problema del continuo.

Primera parte

Supuse, a manera de guía interpretativa, que pueden distinguirse dos nociones de continuo: la positiva y la negativa. Cada una delimita cierta área de problemas, la mayoría de las veces, interconectados. En torno a la noción positiva, según la cual el continuo es un todo o unidad cuyas partes está conectadas y no por mera yuxtaposición, agrupé preguntas como éstas: a) de qué manera, a partir de una multiplicidad de partes, surge la unidad, *i.e.* cómo se da la *conexión* entre partes y b) cómo, dentro de la unidad, es posible *distinguir* un elemento de otro. Alrededor de la noción negativa, que enfatiza la infinita divisibilidad del continuo y su densidad, podemos reunir las paradojas de Zenón y las del infinito, así como las respuestas de la matemática contemporánea al respecto.

El balance del *TC*, tomando como criterios estos conjuntos de problemas, sería el siguiente:

(i) *En cuanto a la noción positiva*. La respuesta a la cuestión sobre cómo se forma la unidad a partir de lo múltiple, está dada por el concepto de imposición, según el cual, las partes del continuo tienen límites comunes, los comparten. Esto quiere decir, finalmente, que las partes tienen existencia potencial, no en acto o ya separada, dentro del continuo. Este mismo concepto es el que esgrime Bradwardine para hacer ver que partes inmediatas no son partes continuas. Y, sobre la manera en que las partes se distinguen entre sí, podría decirse que tal distinción es, por lo antes dicho, potencial. La distinción entre partes no equivale, por otro lado, a la distinción entre puntos que es definida por sus respectivas posiciones.

(ii) *En cuanto a la noción negativa.* Bradwardine defiende la infinita divisibilidad, como ya vimos. Pero no hay una aceptación del infinito en acto, mucho menos de jerarquías de infinitud. No existe, como en Rimini, la distinción entre una definición extensiva y una intensiva de las colecciones infinitas.

Segunda parte

Mencioné tres temas enlazados en el laberinto del continuo. Respecto al *status* ontológico del tiempo y del espacio, el *TC* no nos da muchos detalles, pero es claro que nunca se plantea su imposibilidad. No se mencionan las paradojas de Zenón. Por lo que toca a las relaciones todo-parte, el quinto axioma euclídeo permanece intacto. Y, por último, Bradwardine no toca directamente el asunto de la limitación de nuestro entendimiento en cuanto a la comprensión de lo infinito, aunque podría decirse que también sigue al Estagirita en este aspecto: lo único que podemos asir es el infinito potencial.

El *Doctor Profundus* carece de la malicia de un Bayle y no considera que su tesis puede, de igual manera que las otras, conducir a absurdos. Russell estaría de acuerdo en que, ni los atomistas ni los defensores de la concepción del continuo como un fluido no formado por elementos discretos, encuentran razones suficientes para sentar, definitivamente, sus reales como explicación del mundo físico. Las afirmaciones de ambas teorías se refieren a lo que se encuentra más allá o más acá de nuestros poderes de discriminación.

Kant aconseja conservar la calma y el temperamento crítico para *desfacer* entuertos. Siempre que usted sea testigo de predicaciones sobre el oscuro corazón del ser, de la materia o el tiempo o, en fin, del continuo, recuerde que se encuentra ante un misterio, lo que no nos es dado. Pero, si tiene tendencias metafísicas, no se aplique una sangría: luego de detectar sus alcances y de constatar que sólo poseemos lo finito, repare en que esto no autoriza a declarar imposible lo infinito. Lo incondicionado (sea lo simple o un todo infinitamente dividido), en tanto ideal regulativo, da sentido a lo finito. Haga *como si...* y sus investigaciones científicas se verán potenciadas.

Para cerrar estas conclusiones, cito a dos personalidades del mundo científico. La ambición de Hawking representa esa irrefrenable tendencia a cazar lo real-en sí:

> Actualmente sabemos que ni los átomos, ni los protones y neutrones, dentro de ellos, son indivisibles. Así la cuestión es: ¿cuáles son *las verdaderas partículas elementales*, los ladrillos básicos con los que todas las cosas están hechas? (...) la mejor respuesta que se puede dar a nuestra pregunta depende de lo alta que sea la energía que podamos comunicar a las partículas, porque ésta determina lo pequeña que ha de ser la escala de longitudes a la que podemos mirar. (...) las partículas que se creían "elementales" hace veinte años, están, de hecho, constituidas por partículas más pequeñas. ¿Pueden ellas, conforme obtenemos energías todavía mayores, estar formadas por partículas aún más pequeñas? Esto es ciertamente posible, pero tenemos algunas razones teóricas para creer que poseemos, o *estamos muy cerca de poseer, un conocimiento de los ladrillos fundamentales de la naturaleza.*[341]

En cambio, Sagan se muestra más prudente:

> ¿Podemos cortar un protón? Si bombardeamos protones con otras partículas elementales a grandes energías -otros protones, por ejemplo- empezamos a vislumbrar unidades más fundamentales que se ocultan dentro del protón. Los físicos proponen actualmente que las llamadas partículas elementales como los protones y los neutrones están compuestos en realidad por partículas más elementales, llamadas *quarks* (...) ¿Son los quarks los elementos constitutivos últimos de la materia o también ellos están compuestos por partículas más pequeñas y más elementales? ¿Llegaremos alguna vez al final en nuestra comprensión de la naturaleza de la materia o hay una regresión infinita hacia partículas cada vez más fundamentales? Éste es uno de los grandes problemas sin resolver de la ciencia.[342]

[341] HAWKING, Stephen. *Historia del Tiempo*, pp. 96-97. (Los subrayados son míos).
[342] SAGAN, Carl. *Cosmos*, p. 220.

Capítulo I

Establecí, al comienzo, varios criterios historiográficos a seguir durante la investigación. En seguida, los enumero, para después considerar en qué manera se cumplieron:

1°. Para hacer historia de la filosofía debe tenerse constantemente a la vista el *pluralismo metodológico*. Si nuestra labor implicara solamente una clase de reconstrucción, sea racional o histórico-contextual, se vería empobrecida. Además, resulta dudosa la posibilidad de hallar puros ambos procedimientos, que son tipos ideales. Para mejor comprender a nuestro interlocutor medieval, debimos combinar una *lectura argumentada* con diversas *salidas* a la historia.

2°. Asimismo, ya que caracterizamos las funciones de la filosofía como *analítica*, *crítica* y *propositiva*, todas ellas deberían aparecer a lo largo de la investigación para que este ensayo de historia de la filosofía fuese filosófico.

3°. La reconstrucción histórica necesita una guía racional (perspectiva filosófica) para seleccionar, ordenar y, de hecho, constituir el objeto de estudio.

4°. Un requisito mínimo sería el de *arrojar luz* sobre el discurso estudiado, hacerlo inteligible. Otro sería dar cuenta de continuidades y rupturas, así como conectar el objeto con su contexto y con el presente.

Recurriré a una analogía planteada por Laura Benítez.[343] La perspectiva historiográfica que mira a su objeto como si fuera a través de un *telescopio*, nos aleja en el tiempo y el espacio para contemplar grandes panoramas. Eso pretendí realizar en el segundo capítulo. Por otra parte, espero haber conseguido una perspectiva desde el *microscopio* en el capítulo cuarto (y parte del tercero), al examinar los argumentos independientemente del contexto en que surgieron. Y en los ca-

[343] *Cf.* (14), p. 192 ss.

pítulos tercero y quinto se intenta una reconstrucción del *contexto cultural*, un acercamiento al medio oxoniense del XIV y a los pensadores de la época.

Pongamos un ejemplo de entrecruzamiento entre ambas reconstrucciones. La consideración de las herramientas conceptuales del XIV, permitió esclarecer temas como:

a) los pasajes no directamente geométricos del *TC*;
b) la incipiente ruptura del cosmos aristotélico por parte de Bradwardine;
c) las doctrinas de Rimini y Occam, entre otros.

Las *funciones analítica y crítica tendrían que estar representadas en los capítulos tercero,* cuarto y quinto. La función propositiva es, me parece, delineada en el segundo capítulo, en donde sale a relucir la interpretación kantiana sobre el laberinto del continuo, misma que adopto por considerarla la alternativa más viable para salir del *impasse*. Mi evaluación final de Bradwardine tiene que ver con ella: en mi opinión, el *TC* ilustra la tesis de la segunda antinomia. (Hasta podría existir, inclusive, un tratado atomista *more geometrico*).

La principal guía racional del trabajo es esa misma perspectiva kantiana. Otro hilo conductor relevante es la teoría matemática de la continuidad pues, al aplicarla, pude detectar que el concepto de continuo en Bradwardine equivaldría a nuestra noción de densidad.

Será el paciente lector(a) quien mejor evalúe los resultados respecto al último de los criterios enumerados.

BIBLIOGRAFÍA

(1) AL-AZM, Sadik. *The origins of Kant's arguments in the Antinomies.* Oxford, Clarendon Press, 1972.

(2) ALEXANDER, H. G. (ed.) *The Leibniz-Clarke Correspondence.* NY, Manchester University Press, 1956.

(3) ALBARES, Roberto. "Proporción y configuración en Nicolás de Oresme: el *Tractatus de Configurationibus Qualitatum et Motuum*". En: *Actas del Simposio "Filosofía y ciencia en el Renacimiento"*, Universidad de Santiago de Compostela, s/a, *separata*, pp. 131-140.

(4) ÁLVAREZ, Carlos. "De la determinación del infinito a la inaccesibilidad en los cardinales transfinitos". En:*CRITICA, Revista Hispanoamericana de Filosofía*. Vol. XXVI, no. 78 (diciembre, 1994), pp. 27-71.

(5) ARISTÓTELES. *Tratados de lógica. Organon.* Madrid, Gredos, 1982, vol. 2 (*Analíticos Posteriores*).

(6) ________. *Tratados de lógica. Organon.* Madrid, Gredos, 1982, vol. 1 (*Categorias*).

(7) ________. *Metafísica*. Edición trilingüe de Valentín García Yebra. Madrid, Gredos, 1970.

(8) ________. *Physics*. Tr., introd. y com. de D. Ross. Oxford, Clarendon Press, 1936.

(9) ________. *Sobre la generación y la corrupción* (fragmentos). En (46), apéndice A, pp. 318-321.

(10) ARNAULD, A. et NICOLE, P. *L'art de penser. La Logique de Port-Royal.* Pub. Bruno Baron von Freytag *et al.* Stuttgart, Friedrich Fromann Verlag, 1967, t. II (supplément).

(11) BAYLE, Pierre. "Zénon d'Elée" en *Dictionaire Historique et Critique*, quatrième édition, Leide, chez Samuel Luchtmans, 1730, tome quatrième, n. G, pp. 536a-546b.

(12) BENÍTEZ, Laura. "Consideraciones metodológicas en torno a la historia de la filosofía en el Renacimiento". En: BENÍTEZ, L. (coord.) *Historia de la filosofía*. México, UNAM-Porrúa, 1987, [Antologías para la actualización de los profesores de enseñanza media superior. Actualización en filosofía I], pp. 11-15.

(13) _________. "La polémica Descartes-More: ¿es Dios extenso o inextenso?". Versión mecanografiada, por publicarse como capítulo en: BENÍTEZ, L. y ROBLES, J.A. *Espacio e infinito desde la perspectiva de la modernidad.*. México, UNAM-IIF (en prensa).

(14) _________. "Reflexiones en torno a la metodología de la historia de la filosofía". En (89), pp. 181-194.

(15) BEUCHOT, Mauricio. "Filosofía e historia de la filosofía". En (89), pp. 206-213.

(16) BOYER, Carl B. *Historia de la matemática*. Madrid, Alianza Universidad, 1986.

(17) CHISHOLM, Roderick. "Beginnings and Endings". En: INWAGEN, P. van (ed.) *Time and Cause. Essays Presented to Richard Taylor*. Holland, D. Reidel Publishing Co., pp. 17-25.

(18) _________ y KÖRNER, S. "Editors' Introduction". En: BRENTANO, Franz. *Philosophical Investigations on Space, Time and the Continuum*. London, Croom Helm, 1988, pp. vii-xxiii.

(19) DESCARTES, R. y LEIBNIZ, G. *Sobre los principios de la filosofía*. T. y ns de E. López y M. Graña. Madrid, Gredos, 1989.

(20) DUHEM, Pierre. *Medieval Cosmology. Theories of Infinity, Place, Time, Void, and the Plurality of Worlds*. Tr. y ed. de Roger Ariew. Chicago & London, The University of Chicago Press., 1985.

(21) ________. *Le Système du Monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. Paris, Hermann, t. VII, 1956.

(22) DÜRING, Ingemar. *Aristóteles. Exposición e interpretación de su pensamiento*. Tr. y ed. de Bernabé Navarro. México, U.N.A.M.-Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1990.

(23) ELDREDGE, Lawrence. "Late Medieval Discussions of the Continuum and the Point of the Middle English Patience". En: *Vivarium*, XVII, 2, 1979, pp. 90-115.

(24) EUCLIDES. *Elementos. Libros I-IV*. T. María Luisa Puertos. Madrid, Gredos, 1991 [Biblioteca Clásica Gredos, 155].

(25) ________. *The Thirteen Books of the Elements*. Edición crítica a cargo de T.L. Heath. NY, Dover, 1956, vol. I (libros I y II).

(26) GALILEI, Galileo. *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Tr. Javier Sádaba. Madrid, Editora Nacional, 1976.

(27) GARCÍA, Claudia L. "Atomism and the individuation of bodies in Descartes". Texto manuscrito presentado en el Seminario de Investigadores del Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM.

(28) GILSON, Étienne: *La filosofía en la Edad Media*. Madrid, Gredos, 1989.

(29) GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro. *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid, Alianza Universidad, 1992.

(30) GRACIA, Jorge. *Philosophy and Its History. Issues in Philosophic Historiography*. NY, State University of New York Press, 1992.

(31) GRANT, Edward (ed). *A source book in medieval Science*. Cambridge, Harvard University Press, 1974.

(32) ________. *La ciencia física en la Edad Media*. México, F.C.E., [Breviarios, 352], 1983.

(33) ________. *Much Ado about Nothing*. Cambridge University Press, 1981.

(34) ________. "On a God-filled extramundane infinite void space". En (31), pp. 555-560.

(35) GRAY, Jeremy. *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean and Relativistic*. 2a. ed., Oxford, Clarendon Press, 1989.

(36) HISPANO, Pedro. *Tractatus (Summulae Logicales)*. Tr. Mauricio Beuchot. México, UNAM-IIF, 1986.

(37) KANT, Immanuel. *Crítica de la Razón Pura*. Barcelona, Alfaguara, 1994.

(38) KNUUTILA, S. y LEHTINEN, A. (1979): "Change and Contradiction: a Fourteenth-century controversy". En: *Synthese*, Holland, D. Reidel Publishing Co., 40 (1979), pp. 189-207.

(39) KOYRÉ, Alexandre. *Del mundo cerrado al universo infinito*. México, Siglo XXI, 1988.

(40) ________. *Études d'Histoire de la pensée philosophique*. Paris, Librairie Armand Colin, 1961.

(41) ________. "Le vide et l'espace infini au XIV siècle". En (40), pp. 33-84.

(42) ________. "Remarques sur les paradoxes de Zénon d'Elée". En (40), pp. 9-32.

(43) KRETZMANN, Norman. "Continuity, Contrariety, Contradiction, and Change". En (46), pp. 270-296.

(44) _________. "Incipit/Desinit". En: MACHAMER, P. y TURNBULL, G. (eds) *Motion, and Time. Space and Matter*. Ohio, Ohio State University Press, 1976, pp. 101-136.

(45) _________. "*Syncategoremata, exponibilia, sophismata*". En (47), pp. 211-245.

(46) _________. (ed). *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*. Ithaca & London, Cornell University Press, 1982.

(47) _________ *et al* (eds). *The Cambridge history of later medieval philosophy from the rediscovery of Aristotle to the disintegration of scholasticism, 1100-1600*. Cambridge, Cambridge University Press, 1982.

(48) LEFF, Gordon. *Medieval Thought. St. Augustine to Ockham*. G.B., Penguin Books, 1958.

(49) LIBERA, Alain de. "Le développement de nouveaux instruments conceptuels et leur utilisation dans la philosophie de la nature au XIVe siècle" En: ASZTATOS, Monika *et al* (ed). *Knowledge and the Sciences in Medieval Philosophy. Proceedings of the 8th International Congress of Medieval Philosophy (vol. I)*. Helsinki, Acta Philca. Fennica, 1990, vol. 48, pp. 158-197.

(50) MOLLAND, A.G. "An examination of Bradwardine's Geometry". En: *Archive for History of Exact Sciences*, 19, 1978, pp. 113-175.

(51) MOORE, A.W. *The Infinite*. London & N.Y., Routledge, 1990.

(52) MURDOCH, John. "Bradwardine, Thomas". En: *Dictionary of Scientific Biography*. NY, Scribners, 1980, vols. 1 & 2, pp. 380-387.

(53) _________. *Geometry and the continuum in the fourteenth century: a philosophical analysis*

of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo. Michigan, University of Wisconsin, 1957 (tesis doctoral impresa en facsímil por: UMI Dissertation Services, 1995).

(54) _________. "Infinity and continuity". En (43), pp. 364-591.

(55) _________. "Philosophy and the Enterprise of Science in the Later Middle Ages". En: ELKANA, Yehuda (ed). *The Interaction between Science and Philosophy*. N.J., Humanities Press, 1974, pp. 51-74.

(56) _________. "Thomas Bradwardine: Mathemathics and Continuity in the Fourteenth Century". En: GRANT y Murdoch (eds.), *Mathemathics and its Applications to Science and Natural Philosophy in the Middle Ages*. Cambridge, Cambridge University Press, 1987, pp. 103-137.

(57) _________. "William of Ockham and the Logic of Infinity and Continuity". En (46), pp. 165-206.

(58) _________ y SYNAN, E. "Two Questions on the Continuum: Walter Chatton (?), O. F. M. and Adam Wodeham, O. F. M.". En: NY, *Franciscan Studies*, 26, 1966, pp. 212-288.

(59) NORMORE, Calvin. "Walter Burley on Continuity". En (46) pp. 258-269.

(60) ORTEGA Y GASSET, José. "Ideas para una historia de la filosofía", prólogo a: BRÉHIER, Émile. *Historia de la filosofía*. Bs. As., Sudamericana, 1942, pp. 19-57.

(61) PASSMORE, John. "The Idea of a History of Philosophy". En (62), pp. 1-32.

(62) _________ (comp). *The Historiography of the History of Philosophy*. (*History and Theory. Studies in the Philosophy of History*, Beihefte 5). La Haya, Mouton & Co., 1965.

(63) PEREDA, Carlos. "Historia explicativa y lectura argumentada". En: *Diálogos* (El Colegio de

México), 128, 1985, pp. 19-24.

(64) POINCARÉ, Henri. *El Espacio y el Tiempo*. México, UNAM, 1964.

(65) QUINE, W. V.O. *Palabra y objeto*, tr. Manuel Sacristán, Barcelona, Ed. Labor, 1968.

(66) RÉE, Jonathan. "Philosophy and the History of Philosophy". En: RÉE, J. *et al* (eds). *Philosophy and Its Past*. Sussex, Harvester Press, 1978, pp. 1-39.

(67) ROBLES, José Antonio. *Estudios berkeleyanos*, México, UNAM-IIF, 1990.

(68) ________. *Las ideas matemáticas de George Berkeley, Obispo de Cloyne*, México, UNAM-IIF, 1993.

(69) ________."Joseph Raphson (1648-1715)". Texto manuscrito, por publicarse como capítulo en: BENÍTEZ, L. y ROBLES, J.A. *Espacio e infinito desde la perspectiva de la modernidad*. México, UNAM-IIF (en prensa).

(70) ________. "Oresme y la filosofía moderna". En: *MATHESIS*, vol. IX, no. 1, febrero 1993, pp. 1-31.

(71) RORTY, Richard. "La historiografía de la filosofía: cuatro géneros". En: RORTY, R. *et al* (eds). *La filosofía en la historia*. Barcelona, Paidós, 1990, pp. 69-98.

(72) RUBIN, Jean. *Set Theory for the Mathematician*. San Francisco Cal., Holden-Day, 1967.

(73) RUSSELL, Bertrand. "Las implicaciones filosóficas de la lógica matemática". En: ROBLES, J. A. (ed). *Bertrand Russell: Antología I*. Tr. Héctor de León, México, SEP-Setentas/Diana, 1982, pp. 67-81.

(74) ________. *Introducción a la filosofía matemática.* Barcelona, Paidós, 1988.

(75) ________. *Our Knowledge of the External World; as a field for scientific method in philosophy.* London, G. Allen & Unwin, 1961.

(76) ________. *Los Principios de la Matemática.* T. Juan Carlos Grimberg. Bs. As.-México, Espasa Calpe, 1948.

(77) SAMBURSKY, Shmuel. *El mundo físico a finales de la Antigüedad.* Madrid, Alianza Universidad, 1990.

(78) SLEIGH, R.C. "Leibniz, Gottfried Wilhelm" en HONDERICH, T. (ed.), *The Oxford Companion to Philosophy.* Oxford, Oxford University Press, 1995, pp. 477b-480a.

(79) SMULLYAN, Raymond. *Satán, Cantor y el infinito.* Barcelona, Gedisa, 1995.

(80) SOLAR, E. y SPEZIALE L. *Álgebra I.* México, UNAM, 1985.

(81) SORABJI, Richard. *Time, Creation and the Continuous.* Ithaça, Cornell University Press, 1983.

(82) SPADE, P.V. "Quasi-Aristotelianism". En (46), pp. 297-307.

(83) STUMP, Eleanor. "Theology and Physics in *De sacramento altaris*: Ockham's Theory of Indivisibles". En (46), pp. 207-230.

(84) SYLLA, Edith. "Infinite indivisibles and Continuity in Fourteenth-Century Theories of Alteration". En (46), pp. 231-257.

(85) ________. "Los calculadores de Oxford y el continuo". Texto leído durante el coloquio: *La continuidad en física y en matemáticas*, realizado en la Fac. de Ciencias, UNAM, del 27 al

29 de septiembre de 1995.

(86) THIJSSEN, J. M., (1984) "Roger Bacon (1214-1292/1297): A Neglected Source in the Medieval Continuum Debate", en *Archives de l'Academie Internationale D'Histoire des Sciences*, vol. 34: no. 112, junio 1984, pp. 25-34.

(87) TOLEDO, Leonel. *Scientia Imaginativa y Scientia Operativa: Desarrollo y Evolución de la Concepción de Espacio y Espacio Vacío durante el Medioevo y la Época Moderna hasta Blaise Pascal*. México, UNAM, 1997 (tesis de licenciatura).

(88) TOMASINI, Alejandro. "Historia de la filosofía: ¿para qué?". En (89), pp. 194-201.

(89) VARIOS. *DIANOIA, Anuario de filosofía*, Vol. XXXIV, no. 34, 1988 (número especial sobre historia de la filosofía).

(90) VEGAS, Serafín. "Filosofía e historia de la filosofía en el pensamiento de Richard Rorty". En: *Pensamiento*, 182 (46), 1990, 149-178.

(91) VELÁZQUEZ, Alejandra. "Eternidad, duración, infinito y mundo en Nicole Oresme". Por publicarse como capítulo en: BENÍTEZ, L. y ROBLES, J.A. *Espacio e infinito desde la perspectiva de la modernidad*. México, UNAM-IIF (en prensa).

(92) WALSH, W. H. "Hegel on the History of Philosophy". En (62), pp. 67-82.

(93) WILLIAMS, Bernard. *Descartes: the Project of Pure Enquiry*. Sussex, Harvester Press, 1978.

(94) ZIER, Mark. "Gregory of Rimini". En: STRAGER, J. (ed). *Dictionary of the Middle Ages*. NY, Charles Scribner's Sons, 1985, t. V, pp. 671-672.