23
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

APOSINDESIS EN HIPERESPACIOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JORGE MARCOS MARTINEZ MONTEJANO

DIRECTOR DE TESIS: ALEJANDRO ILLANES MEJIA

MEXICO, D.F. 1998.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

APOSINDESIS EN HIPERESPACIOS

realizado por Jorge Marcos Martínez Montejano

con número de cuenta 9136806-3 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía
Propietario	Dra. Isabel Puga Espinosa
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez
Suplente	Dr. Włodzimierz Jan Charatonik
Suplente	Dr. Javier Páez Cárdenas

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. Cesar Guevara Bravo

A Manuel y Martha.

Índice General

Introducción

Esta tesis nació con la idea de hacer una monografía de las propiedades de aposindesis de los hiperespacios.

Como puede usted ver en el primer capítulo, varios de los conceptos de aposindesis, tienen un paralelismo con los axiomas de separación. De esta manera, semi-aposindesis es parecido a T_0, aposindesis a T_1, aposindesis mutua a T_2 y conexidad en pequeño (que se puede pensar como una forma de aposindesis) es parecido a T_3. Además están los conceptos de aposindesis finita, aposindesis numerable y aposindesis 0-dimensional.

A lo largo de esta tesis se apreciará que todos los conceptos de aposindesis pueden ser tratados de buena manera en los hiperespacios excepto el concepto de aposindesis 0-dimensional. Todavía no se sabe si los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son 0-dimensional aposindéticos. Y tampoco se sabe si la propiedad de ser 0-dimensional aposindético es una propiedad de Whitney. Varios autores han tratado de resolver estos problemas. Hasta el momento nadie ha podido resolverlos. Una idea que flota en el ambiente es que las ideas contenidas en la prueba del famoso teorema de Krasinkiewicz que dice que el hiperespacio $C(X)$ no puede ser separado por ninguno de sus subconjuntos 0-dimensionales, podría servir para resolver dichos problemas.

Como casi todos los artículos de matemáticas, el artículo donde Krasinkiewicz presenta su resultado, es difícil de seguir en un primer intento. Viendo la necesidad de hacer accesible este artículo, en esta tesis nos dimos a la tarea de desarrollarlo, incluyendo la mayor parte de los resultados previos que son necesarios para entenderlo.

De manera que en este trabajo hemos incluido las propiedades conocidas de aposindesis en hiperespacios y la prueba detallada del resultado de Krasinkiewicz. De modo que la mesa queda puesta para que usted mismo decida si con estos elementos se pueden resolver los problemas relacionados con la aposindesis 0-dimensional de los hiperespacios.

Capítulo 1

Definiciones y ejemplos

En este capítulo introducimos las nociones de aposindesis que usaremos en este trabajo. Hacemos las comparaciones pertinentes entre ellas, viendo cuáles de ellas implican a las demás y ofreciendo ejemplos para casi todos los casos en los que las implicaciones no son verdaderas. Un ejemplo que no desarrollamos es el de un continuo que es 0-dimensional aposindético pero que no es mutuamente aposindético. Para tal fin sirve el cilindro sobre la curva del seno de $\frac{1}{x}$. Sin embargo la prueba formal de que este continuo no es mutuamente aposindético requiere de un teorema fuerte de topología del plano y es más elaborada de lo que es nuestra intención incluir en este capítulo introductorio. A modo de ejemplo de como se trabajan algunos conceptos de aposindesis, al final del capítulo, incluimos las pruebas de que el producto de dos continuos no degenerados siempre es aposindético y que el producto de tres de estos continuos siempre es mutuamente aposindético.

Definición 1.1 *Un continuo es un espacio métrico compacto y conexo.*

Definición 1.2 *Sea X un continuo. Decimos que X es:*

(a) semiaposindético, si para cada $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un subcontinuo M de X tal que $intM$ contiene a uno de los puntos p, q y $X - M$ contiene al otro.

(b) aposindético, si para cada $p, q \in X$, $p \neq q$, existe un subcontinuo M de X tal que $p \in intM$ y $q \notin M$.

(c) mutuamente aposindético, si para cada $p, q \in X$, $p \neq q$, existen subcontinuos M y N de X tal que $p \in intM$, $q \in intN$ y $M \cap N = \emptyset$.

(d) finitamente aposindético, si para cada $p \in X$ y para cada subconjunto finito F de X tal que $p \notin F$ existe un subcontinuo M de X tal que $p \in intM$ y $M \cap F = \emptyset$.

(e) numerablemente aposindético, si para cada $p \in X$ y para cada subconjunto numerable y cerrado F de X tal que $p \notin F$ existe un subcontinuo M de X tal que $p \in intM$ y $M \cap F = \emptyset$.

(f) 0-dimensional aposindético, si para cada $p \in X$ y para cada subconjunto 0-dimensional (Definición 2.1) y cerrado F de X tal que $p \notin F$ existe un subcontinuo M de X tal que $p \in intM$ y $M \cap F = \emptyset$.

El concepto de aposindesis fue introducido por F. Burton Jones ([Jo], pag. 546) en 1941. La conexidad local de un continuo implica que el continuo satisface todos los tipos de aposindesis. El siguiente lema ilustra cómo se puede concluir esto.

Lema 1.3 *Sean X un continuo y $p \in X$. Si X es localmente conexo en p entonces X es 0-dimensional aposindético en p.*

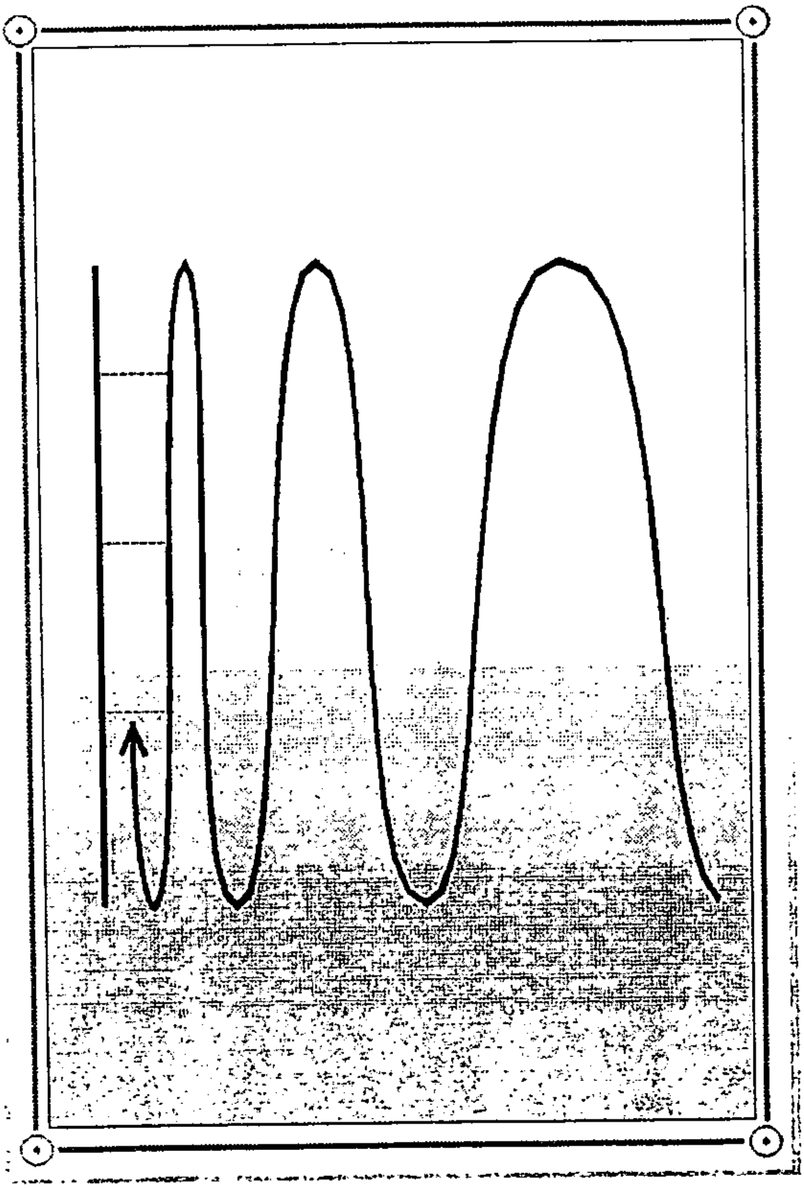
Demostración. Sea F un conjunto 0-dimensional cerrado de X tal que $p \notin F$. Como X es métrico existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U$ y $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Debido a que X es localmente conexo en p existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Definimos $M = \overline{V}$. Ya que V es conexo tenemos que M es un subcontinuo de X. Además $p \in intM$ y $M \cap F \subset \overline{U} \cap F = \emptyset$. Por tanto X es 0-dimensional aposindético en p.

La forma más pobre de aposindesis es la semi-aposindesis y aún así hay continuos que no la tienen como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4 *El continuo $X = \overline{\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, \pi]\}}$ (Figura 1-1) no es semi-aposindético.*

Consideramos los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$. Debido a que la sucesión $\{(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0,1)$ entonces para todo abierto U de X tal que $(0,1) \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X tal que $(0,1) \in intK$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1) \in K$.

Y debido a que K es conexo y $(0,1), (\frac{2}{(4n+1)\pi}, 1) \in K$ tenemos que todos los puntos de la forma $(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x})$ con $0 < x \leq \frac{2}{(4n+1)\pi}$ pertenecen



Figura~1-1

a K (pues ellos separan a X). Y como K es cerrado concluimos que $(0,-1) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(0,1) \in intK$ y $(0,-1) \notin K$.

De igual manera como la sucesión $\{(\frac{2}{(4n+3)\pi}, -1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(0,-1)$ entonces para todo abierto U de X tal que $(0,-1) \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{2}{(4n+3)\pi}, -1) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X tal que $(0,-1) \in intK$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{2}{(4n+3)\pi}, 1) \in K$. Y debido a que K es conexo y $(0,-1), (\frac{2}{(4n+3)\pi}, -1) \in K$ tenemos que todos los puntos de la forma $(x, \operatorname{sen}\frac{1}{x})$ con $0 < x \leq \frac{2}{(4n+3)\pi}$ pertenecen a K (pues ellos separan a X). Y como K es cerrado concluimos que $(0,1) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(0,-1) \in intK$ y $(0,1) \notin K$. Por tanto X no es semi-aposindético.

Ejemplo 1.5 *Ser semiaposindético no implica ser aposindético.*

Para cada par de puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\langle p, q\rangle$ el segmento en $\mathbb{R}^2$ que une a p y a q. Definimos:

$$X = \langle (0,0),(1,0)\rangle \cup (\cup\{\langle (0,0),(1,\tfrac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}).\text{(Figura 1-2)}$$

Mostraremos que X es semiaposindético.

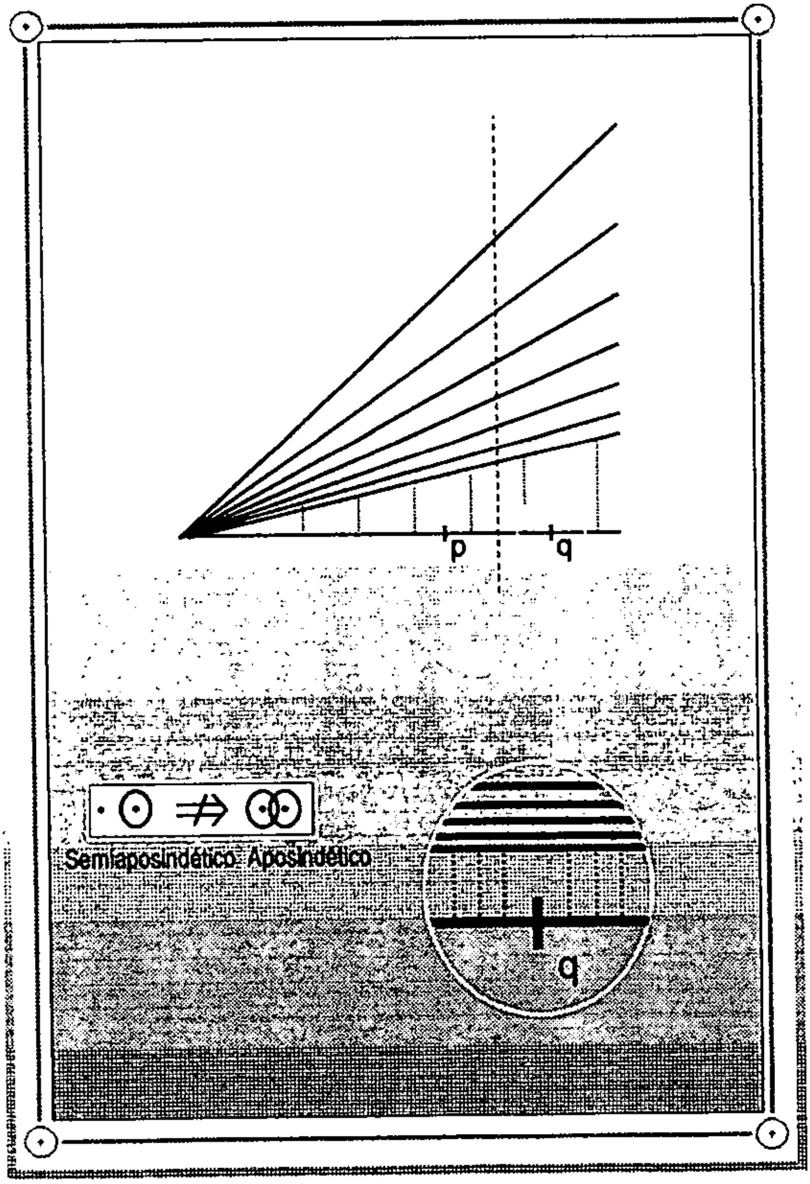
Debido a que X es localmente conexo todos los puntos de $X - \langle (0,0),(1,0)\rangle$, por el Lema 1.3, para mostrar que el continuo X es semiaposindético sólo tenemos que considerar los puntos en el segmento $\langle (0,0),(1,0)\rangle$. Sean $(p,0),(q,0) \in \langle (0,0),(1,0)\rangle$, $(p,0) \neq (q,0)$ y supongamos que $p < q$. Definimos $M = \{(x,y) \in X : x \leq \frac{p+q}{2}\}$. Entonces tenemos que M es un subcontinuo de X tal que $(p,0) \in intM$ y $(q,0) \notin M$. Por tanto X es semiaposindético.

Ahora mostraremos que X no es aposindético.

Consideramos los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$. Como la sucesión $\{(1,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(1,0)$ entonces para todo abierto U de X tal que $(1,0) \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1,\frac{1}{n}) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X tal que $(1,0) \in intK$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(1,\frac{1}{n}) \in K$. Y debido a que K es conexo y $(1,1),(1,\frac{1}{n}) \in K$ concluimos que $(0,0) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(1,0) \in intK$ y $(0,0) \notin K$. Por tanto X no es aposindético.

Ejemplo 1.6 *Ser aposindético no implica ser mutuamente aposindético.*

Definimos $S_0 = \{e(2\pi x) : x \in [0,1]\}$, donde $e : \mathbb{R} \to S^1$ es la función exponencial definida como $e(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Sea $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de $[0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:



Figura~1-2

$$\begin{aligned} S_n &= \{(1+\tfrac{1}{n})e(2\pi x) : x \in [0,1]\} \text{ y} \\ L_n &= \{re(2\pi x_n) : 1+\tfrac{1}{n+1} \leq r \leq 1+\tfrac{1}{n}\} \cup \\ &\quad \{-re(2\pi x_n) : 1+\tfrac{1}{n+1} \leq r \leq 1+\tfrac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Definimos:

$$X = S_0 \cup (\cup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup (\cup\{L_n : n \in \mathbb{N}\}).\text{(Figura 1-3)}$$

Mostraremos que X es aposindético.

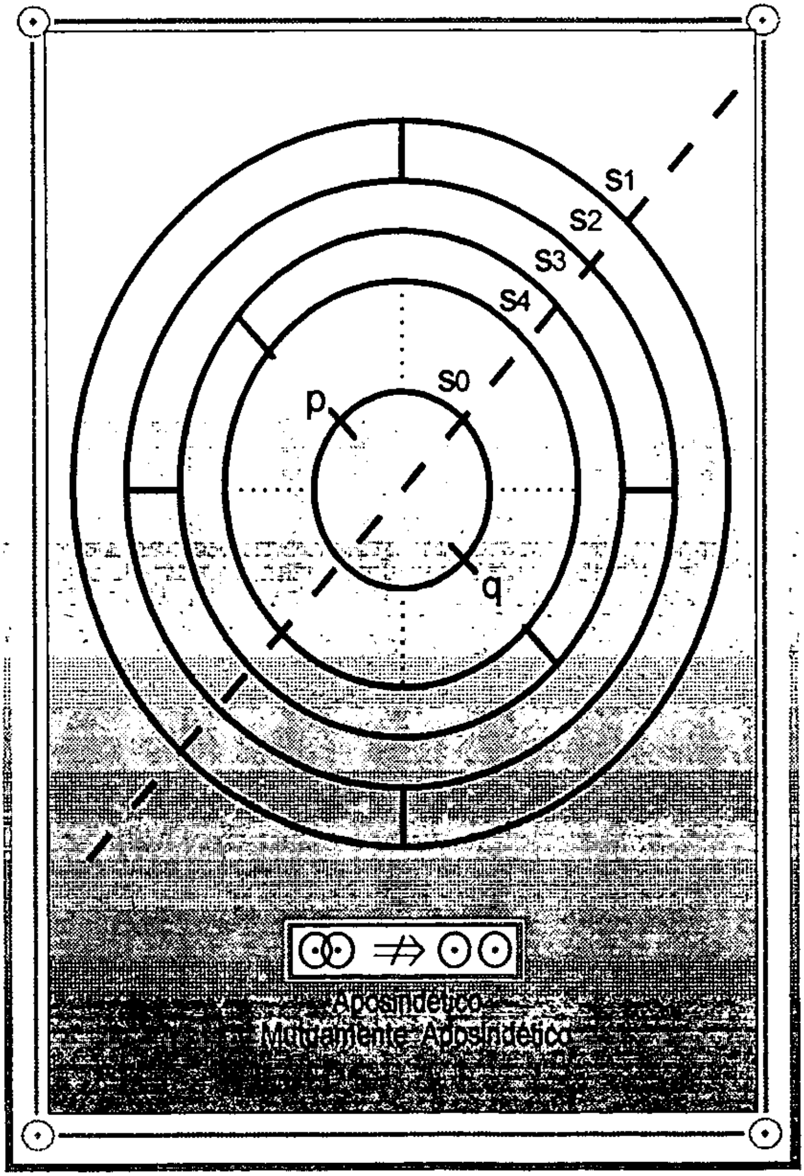
Debido a que X es localmente conexo en todos los puntos de $X - S_0$ por el Lema 1.3, para mostrar que el continuo X es aposindético sólo tenemos que considerar los puntos en S_0. Sean $p, q \in S_0$ tales que $p \neq q$. Sea L la bisectriz de p y q. Entonces L divide el plano complejo en dos semiplanos cerrados. Sea K el semiplano correspondiente que contiene a p. Aseguramos que $M = X \cap K$ es un subcontinuo de X. Observemos que $X \cap K$ es cerrado y que $(\cup\{S_n : n \in \mathbb{N}\}) \cap K$ es una unión numerable de semicírculos. Dada $n \in \mathbb{N}$, al menos una de las dos componentes de L_n está contenida en K. Por tanto en $X \cap K$ queda unido el semicírculo $S_n \cap X$ con el semicírculo $S_{n+1} \cap X$. De manera que $X \cap K$ también es conexo. Claramente $p \in intM$ y $q \notin M$. Por tanto X es aposindético.

Ahora mostraremos que X no es mutuamente aposindético.

Supongamos lo contrario, es decir, que X es mutuamente aposindético. Tomamos $1, -1 \in X$ (los números complejos 1 y -1) entonces existen subcontinuos M y N de X tales que $1 \in intM$, $-1 \in intN$ y que $M \cap N = \emptyset$. Como la sucesión $\{(1+\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 1, entonces para todo abierto U de X tal que $1 \in U$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $(1+\frac{1}{n}) \in U$. Debido a que $1 \in intM$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $(1+\frac{1}{n}) \in M$. De igual manera, como la sucesión $\{-(1+\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a -1 y $-1 \in intN$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $-(1+\frac{1}{n}) \in N$.

Sea $N_3 = máx\{N_1, N_2\}$. Para cada $n \geq N_3$ tenemos que $(1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n+1}) \in M$. Como M es conexo y la única manera de conectar a lo que está afuera de S_n (incluyendo a S_n) con lo que está dentro de S_{n+1} (incluyendo a S_{n+1}) en X es usando a L_n, concluimos que $(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in M$ o $-(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in M$. Supongamos primero que $(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in M$. De igual manera tenemos que $-(1+\frac{1}{n}), -(1+\frac{1}{n+1}) \in N$. Y, como N es conexo, concluimos que $(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in N$ o $-(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in N$. Pero como $(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in M$ y $M \cap N = \emptyset$ concluimos que $-(1+\frac{1}{n})e(2\pi ix_n) \in N$.

Sea $z \in S_0$, entonces existe una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \in D$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $e(2\pi ix_{n_k}) \to z$. Para cada $n_k \geq N$ tenemos que $(1+\frac{1}{n_k})e(2\pi ix_{n_k}) \in M \cup N$. Y, como $M \cup N$ es compacto y $(1+\frac{1}{n_k})e(2\pi ix_{n_k}) \to z$ tenemos que $z \in M \cup N$. Por tanto $S_0 \subset M \cup N$.



Figura~1-3

Entonces tenemos que $S_0 = (S_0 \cap M) \cup (S_0 \cap N)$, $1 \in S_0 \cap M$, $-1 \in S_0 \cap N$ y $(S_0 \cap M) \cap (S_0 \cap N) \subset M \cap N = \emptyset$. Lo que nos dice que S_0 es disconexo. Lo cual es una contradicción que es consecuencia de suponer que X es mutuamente aposindético. Por tanto X no es mutuamente aposindético.

Ejemplo 1.7 *Ser mutuamente aposindético no implica ser finitamente aposindético.*

Para cada par de puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\langle p, q\rangle$ el segmento en $\mathbb{R}^2$ que los une. Definimos:

$$\begin{aligned} X &= \langle(0,0),(1,0)\rangle \cup \langle(0,0),(0,1)\rangle \cup \\ &\quad \langle(1,0),(1,1)\rangle \cup (\cup\{\langle(0,\tfrac{1}{n}),(1,\tfrac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}). \end{aligned} \quad \text{(Figura 1-4)}$$

Mostraremos que X es mutuamente aposindético.

Sean $(a,b),(c,d) \in X$ tales que $(a,b) \neq (c,d)$. Consideramos dos casos:

1. En el caso en que $a \neq c$. Supongamos por ejemplo que $a < c$. Definimos $M = \{(x,y) \in X : x \leq a + \frac{c-a}{4}\}$ y $N = \{(x,y) \in X : x \geq c - \frac{c-a}{4}\}$. Entonces tenemos M y N son subcontinuos de X tales que $(a,b) \in intM$, $(c,d) \in intN$ y $M \cap N = \emptyset$.

2. En el caso en que $b \neq d$. Supongamos por ejemplo que $b < d$. Definimos $M = \{(x,y) \in X : y \leq b + \frac{d-b}{4}\}$ y $N = \{(x,y) \in X : y \geq d - \frac{d-b}{4}\}$. Entonces tenemos que M y N son subcontinuos de X tales que $(a,b) \in intM$, $(c,d) \in intN$ y $M \cap N = \emptyset$.

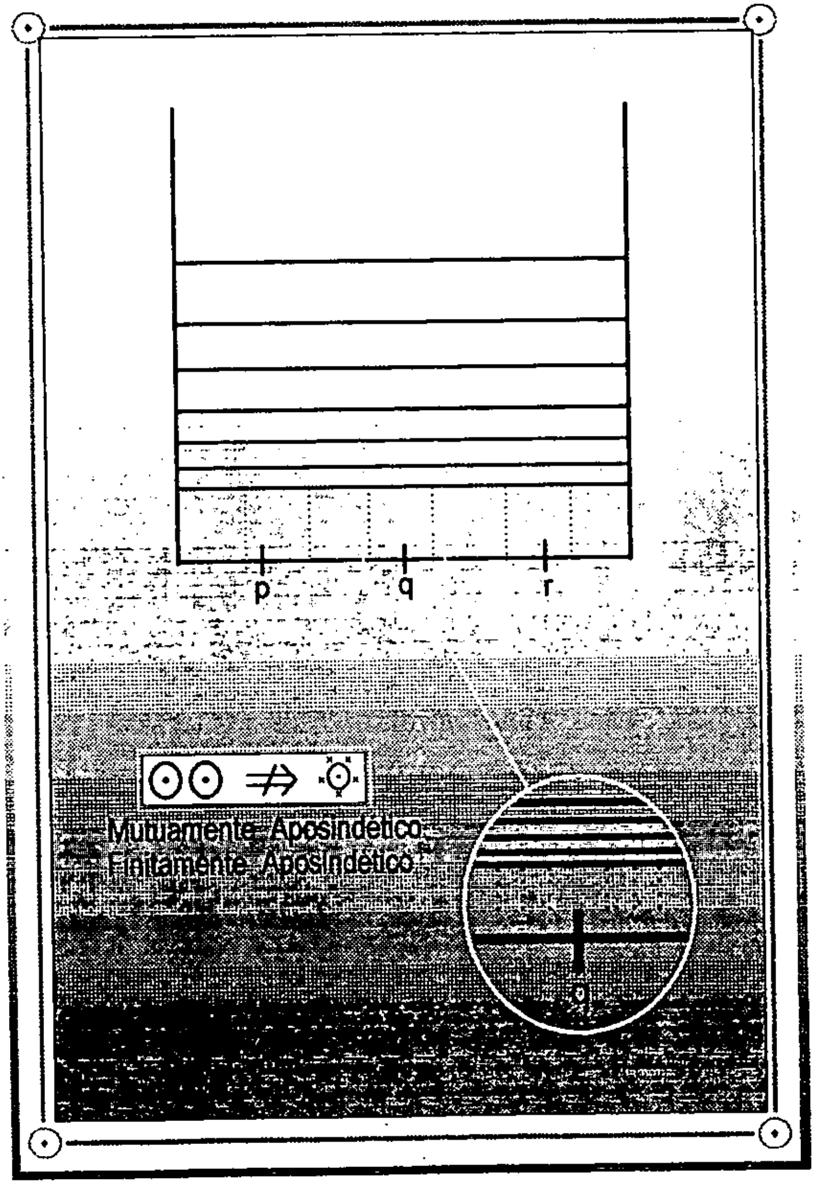
Por tanto X es mutuamente aposindético.

Ahora mostraremos que X no es finitamente aposindético.

Consideramos el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ y el conjunto finito $\{(0,0),(1,0)\}$. Como la sucesión $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(\frac{1}{2}, 0)$ entonces para todo abierto U de X tal que $(\frac{1}{2}, 0) \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X tal que $(\frac{1}{2}, 0) \in intK$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}) \in K$. Si ocurriera que $(0,0) \notin K$ y $(1,0) \notin K$, como K es cerrado, habría dos vecindades una de $(0,0)$ y otra de $(1,0)$, que no intersectarían a K y entonces K estaría contenido en el complemento de la unión de las vecindades, así que K no podría conectar a $(\frac{1}{2}, 0)$ con $(\frac{1}{2}, \frac{1}{n})$. Esta contradicción muestra que $(0,0) \in K$ o $(1,0) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(\frac{1}{2}, 0) \in intK$ y $\{(0,0),(1,0)\} \cap K = \emptyset$. Por tanto X no es finitamente aposindético.

Definición 1.8 *Sea X un espacio topológico y sean $a, b \in X$. Una trayectoria de a a b en X es una función continua $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = a$ y $\alpha(1) = b$.*

Definición 1.9 *Sea X un espacio topológico. Entonces decimos que X es conexo por trayectorias si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una trayectoria de a a b en X.*



Figura~1-4

Definición 1.10 *Sea X un espacio topológico. Entonces decimos que X es localmente conexo por trayectorias si para todo subconjunto abierto U de X existe un subconjunto abierto V de X tal que V es conexo por trayectorias.*

Lema 1.11 *Sea X un continuo localmente conexo por trayectorias y sea U un subconjunto abierto, conexo y no vacío de X. Entonces U es conexo por trayectorias.*

Demostración. Tomamos $u \in U$. Consideremos $L = \{x \in U :$ existe una trayectoria en U de u a $x\}$ y $M = \{x \in U :$ no existe una trayectoria en U de u a $x\}$. Sea $l \in L$, como X es localmente conexo por trayectorias existe un subconjunto abierto V de X tal que $l \in V$, $V \subset U$ y V es conexo por trayectorias. De modo que para toda $x \in V$, existe una trayectoria de x a l en V. Y, como $l \in L$ tenemos que existe una trayectoria de l a u en U. Con lo que concluimos que existe una trayectoria de x a u en U. Por tanto $V \subset L$. De donde se sigue que L es abierto.

Ahora sea $m \in M$, como X es localmente conexo por trayectorias existe un subconjunto abierto V de X tal que $m \in V$, $V \subset U$ y V es conexo por trayectorias. De modo que para toda $x \in V$, existe una trayectoria de x a m en V. Si para alguna $x \in V$ existiera una trayectoria de x a u en U. Entonces tendríamos una trayectoria de m a u en U. Lo cual es absurdo. Por tanto $V \subset M$. Con lo que concluimos que M es abierto.

Tenemos que L y M son abiertos de U que cumplen que $U = L \cup M$ y $L \cap M = \emptyset$. Además $u \in L$. Si $M \neq \emptyset$ entonces U sería disconexo. De modo que $M = \emptyset$. Por tanto $U = L$. Lo que nos dice que U es conexo por trayectorias.

Lema 1.12 *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua tal que $f(x) < 1$ para toda $x \in [0,1]$. Entonces el conjunto $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : f(x) \leq y\}$ es homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$.*

Demostración. Definimos $h : A \to [0,1] \times [0,1]$ como $h(x,y) = \left(x, \frac{y-f(x)}{1-f(x)}\right)$. Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en A tal que $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Como $x_n \to x$, $y_n \to y$ y f es continua tenemos que $\left(x_n, \frac{y_n - f(x_n)}{1-f(x_n)}\right) \to \left(x, \frac{y-f(x)}{1-f(x)}\right)$. Por tanto h es continua.

Ahora si $h(x,y) = h(x_1, y_1)$ entonces $\left(x, \frac{y-f(x)}{1-f(x)}\right) = \left(x_1, \frac{y-f(x_1)}{1-f(x_1)}\right)$. De modo que $x = x_1$. Lo que nos dice que $\frac{y-f(x)}{1-f(x)} = \frac{y_1-f(x)}{1-f(x)}$. De donde se sigue que $y = y_1$. Con lo que obtenemos que $(x,y) = (x_1, y_1)$. Por tanto h es inyectiva.

Finalmente si $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ como $0 \leq f(x) < 1$ tenemos que $f(x)y \leq y$. Entonces $-f(x)y \geq -y$. Lo que nos dice que $f(x)-f(x)y \geq f(x) - y$. Lo cual implica que $y + (1-y)f(x) \geq f(x)$. De modo que $(x, y + (1-y)f(x)) \in A$. Además se tiene:

$$\begin{aligned} h(x, y + (1-y)f(x)) &= \left(x, \tfrac{y+(1-y)f(x)-f(x)}{1-f(x)}\right) \\ &= \left(x, \tfrac{y(1-f(x))}{1-f(x)}\right) \\ &= (x,y). \end{aligned}$$

Por tanto h es suprayectiva. Debido a que A es compacto y $[0,1] \times [0,1]$ es un espacio de Hausdorff concluimos que h es un homeomorfismo. Lo que nos dice que A es homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$.

Ejemplo 1.13 *Ser finitamente aposindético no implica ser numerablemente aposindético.*

Sea $S = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se tiene que $S \subset [0,1]$. Definimos $f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = d(x, S)$. Tenemos que f es continua y cumple que $f(x) < 1$ para toda $x \in [0,1]$. Definimos:

$$\begin{gathered} A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : f(x) \leq y\} \text{ y} \\ X_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ y } z = 0\}. \end{gathered}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$X_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ y } z = \tfrac{1}{n}y\}.$$

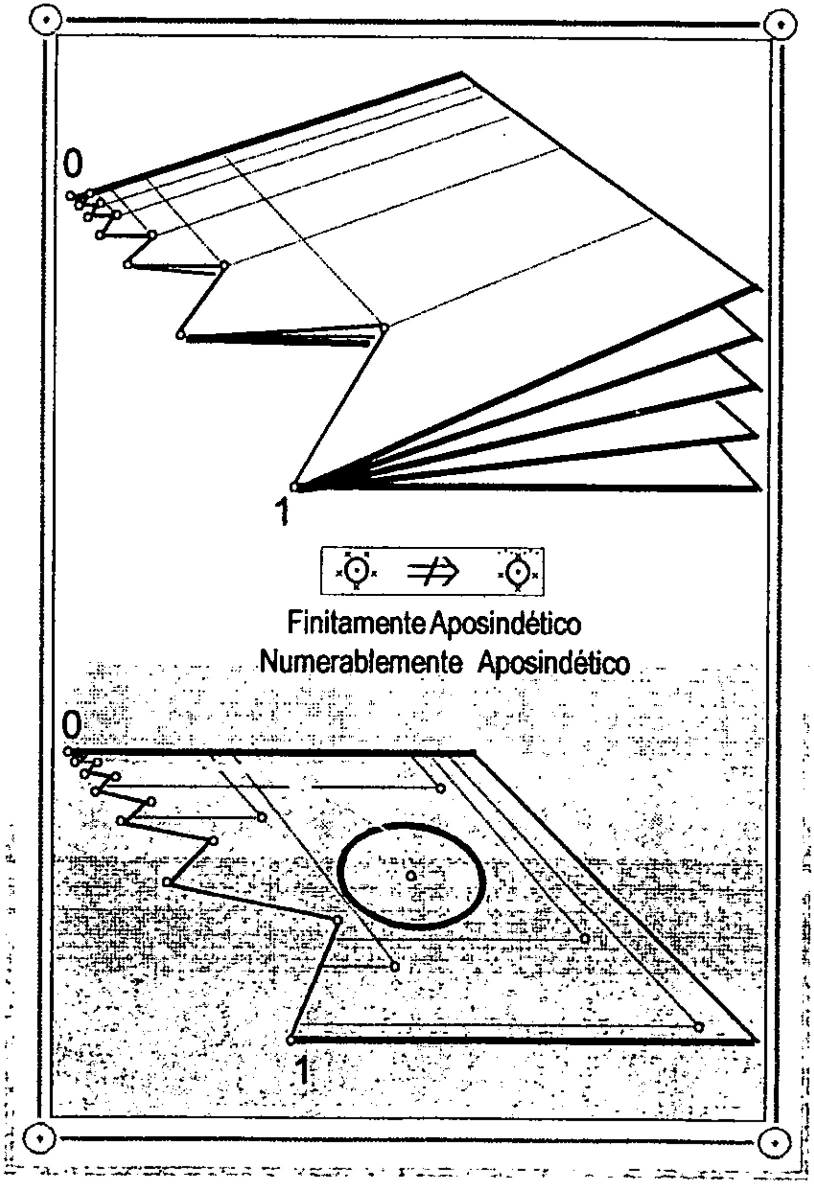
Finalmente definimos:

$$X = X_0 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n).\text{(Figura 1-5)}$$

Mostraremos que X es finitamente aposindético.

Definimos $\pi_n : X_n \to X_0$ como $\pi_n(x,y,z) = (x,y,0)$. Ya que X es localmente conexo en todos los puntos de $X - (X_0 - S \times \{(0,0)\}$ por el Lema 1.3, para mostrar que X es finitamente aposindético sólo tenemos que considerar los puntos en $X_0 - (S \times \{(0,0)\})$. Sean $x \in X_0$ y F un subconjunto finito de X tal que $x \notin F$. Como F es finito existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $F \cap X_n - (S \times \{(0,0)\}) = \emptyset$. También como F es finito existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{k}, 0, 0) \notin F$. Definimos $F' = F \cap X_0$. Como X_0 es un espacio métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x)}$ y $F' \cap \overline{B_\varepsilon(x)} = \emptyset$ ($B_\varepsilon(x)$ se refiere a la bola en X_0).

Debido a que F' es un subconjunto de F tenemos que F' es finito. De donde concluimos que F' es 0-dimensional. Por el Lema 1.12 tenemos que X_0 es homeomorfo a $[0,1] \times [0,1]$. De donde se sigue que X_0 es localmente conexo por trayectorias. Ahora sabemos que $X_0 - F'$ es abierto y, además, conexo ([En], Teorema 1.8.13). Entonces por el Lema 1.11 tenemos que $X_0 - F'$ es conexo por trayectorias. Sea $\alpha : [0,1] \to X_0$ una trayectoria de x a $(\frac{1}{k}, 0, 0)$. Definimos:


0
1
Finitamente Aposindético
Numerablemente Aposindético
0
1

Figura~1-5

$$M = (\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \alpha([0,1])) \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} \pi_n^{-1}(\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \alpha([0,1]))).$$

Entonces tenemos que M es un subcontinuo de X tal que $x \in intM$ y $M \cap F = \emptyset$.

Ahora mostraremos que X no es numerablemente aposindético.

Consideramos el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ y el conjunto cerrado numerable $\{(\frac{1}{n}, 0, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0)\}$. Como la sucesión $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ entonces para todo abierto U de X tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in U$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{k}) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X para el cual $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in intK$, resulta que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{k}) \in K$. Debido a que K es conexo y a que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{k}) \in K$ concluimos que $(0,0,0) \in K$ o existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{j}, 0, 0) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in intK$ y $(\{(\frac{1}{n}, 0, 0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0,0)\}) \cap K = \emptyset$. Por tanto X no es numerablemente aposindético.

Ejemplo 1.14 *Ser numerablemente aposindético no implica ser 0-dimensional aposindético.*

Sea $C \subset [0,1]$ el conjunto de Cantor. Definimos $f : [0,1] \to [0,1]$ como $f(x) = d(x, C)$. Tenemos que f es continua y cumple que $f(x) < 1$ para toda $x \in [0,1]$. Definimos:

$$A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : f(x) \leq y\} \text{ y}$$
$$X_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ y } z = 0\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

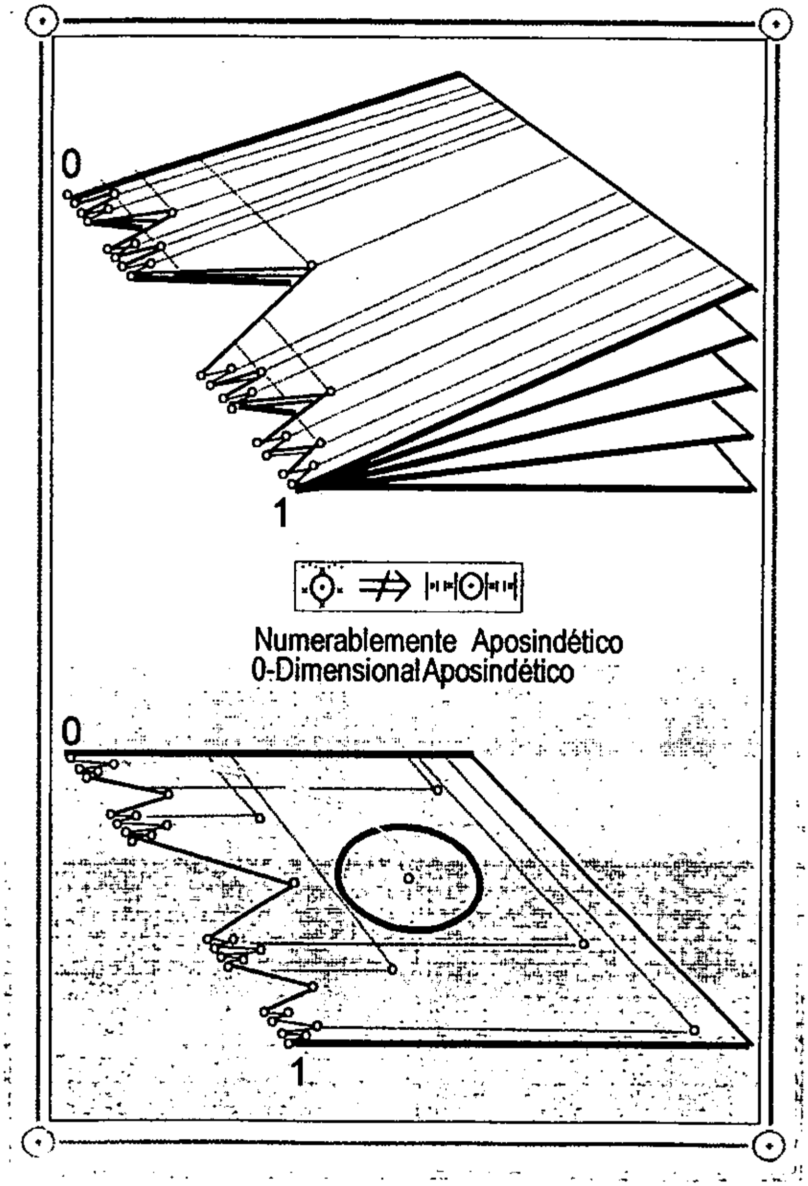
$$X_n = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ y } z = \tfrac{1}{n}y\}.$$

Finalmente definimos:

$$X = X_0 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n).\text{(Figura 1-6)}$$

Mostraremos que X es numerablemente aposindético.

Definimos $\pi_n : X_n \to X_0$ como $\pi_n(x,y,z) = (x,y,0)$. Ya que X es localmente conexo en todos los puntos de $X - (C \times \{(0,0)\}$ por el Lema 1.3, para mostrar que X es numerablemente aposindético sólo tenemos que considerar los puntos en $X_0 - (C \times \{(0,0)\})$. Sean $x \in X_0$ y F un subconjunto cerrado numerable de X tal que $x \notin F$. Si existiera una infinidad de puntos x_n en F que satisficieran que $x_n \in X_n$ y que $\pi_n(x_n) = x$ entonces x sería un punto de acumulación de F y, como F es cerrado entonces $x \in F$. Lo cual es absurdo. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \pi_n(X_n \cap F)$ si $n \geq N$. Ahora como F es numerable existe $c_0 \in C$ tal que $(c_0, 0, 0) \notin F$.


0
1
Numerablemente Aposindético
0-Dimensional Aposindético
0
1

Figura~1-6

Definimos $F' = (F \cap X_0) \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} \pi_n(X_n \cap F))$. Ya que $F' = \pi(F \cap (X_0 \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} X_n)))$, donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ está dada por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ y $F \cap (X_0 \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} X_n))$ es compacto, tenemos que F' es un subconjunto compacto de X_0 que no tiene a x. Como X_0 es un espacio métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que $x \in B_\varepsilon(x) \subset \overline{B_\varepsilon(x)}$ y $F' \cap \overline{B_\varepsilon(x)} = \emptyset$. Debido a que $F \cap X_0 \subset F$ tenemos que $F \cap X_0$ es un conjunto 0-dimensional. De igual manera para toda $n \geq N$, $F \cap X_n$ es un conjunto 0-dimensional. Entonces por el Lema 2.5 concluimos que F' es 0-dimensional. Por el Lema 1.12 tenemos que X_0 es homeomorfo a $[0, 1] \times [0, 1]$. De donde se sigue que X_0 es localmente conexo por trayectorias. Ahora sabemos que $X_0 - F'$ es abierto y, además, es conexo ([En], Teorema 1.8.13.). Entonces por el Lema 1.11 tenemos que $X_0 - F'$ es conexo por trayectorias. Sea $\alpha : [0, 1] \to X_0 - F'$ una trayectoria de x a $(c, 0, 0)$. Definimos:

$$M = (\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \alpha([0,1])) \cup (\bigcup_{n=N}^{\infty} \pi_n^{-1}(\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \alpha([0,1]))).$$

Entonces tenemos que M es un subcontinuo de X tal que $x \in intM$ y $M \cap F = \emptyset$.

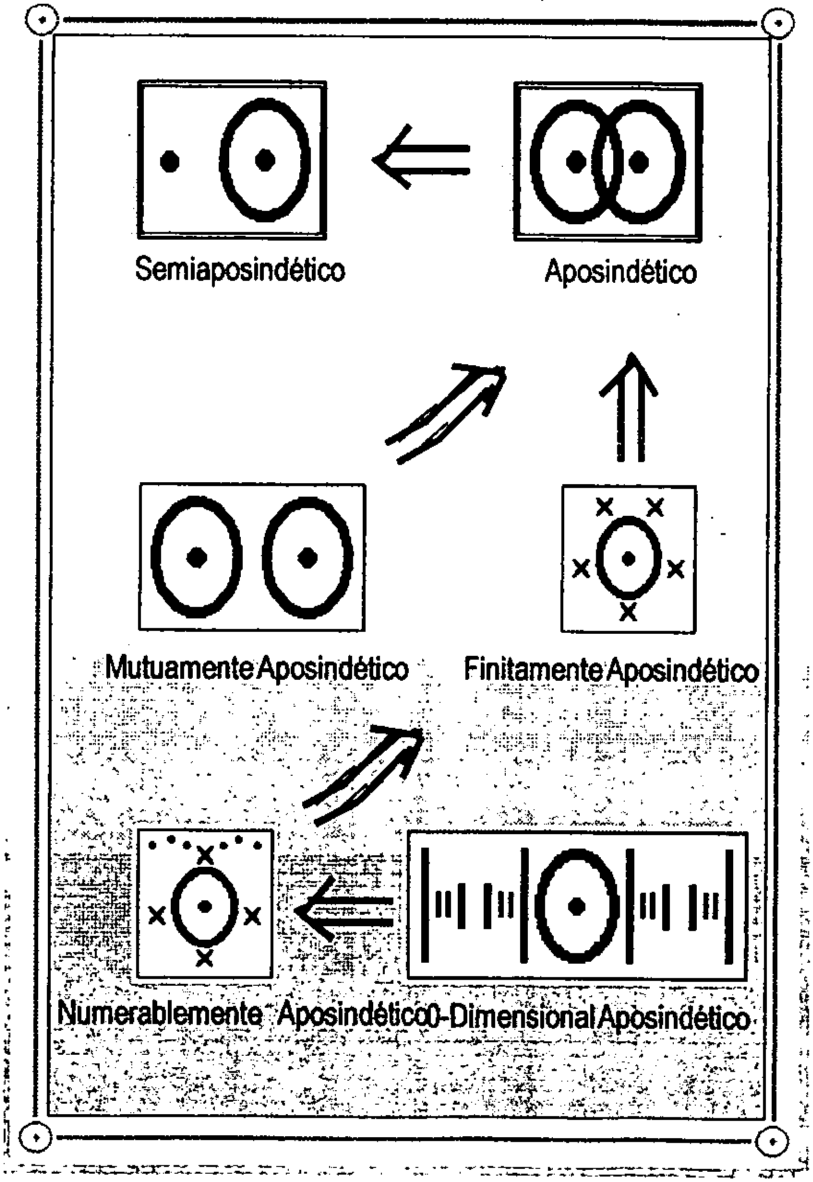
Ahora mostraremos que X no es 0-dimensional aposindético.

Consideramos el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ y el conjunto 0-dimensional cerrado $\{(c, 0, 0) : c \in C\}$. Como la sucesión $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ entonces para todo abierto U de X que cumple con que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}) \in U$. De modo que si K es un subcontinuo de X tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in intK$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}) \in K$. Debido a que K es conexo y a que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}) \in K$ concluimos que existe $c \in C$ tal que $(c, 0, 0) \in K$. Lo cual nos dice que no existe un subcontinuo K de X tal que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \in intK$ y $\{(c, 0, 0) : c \in C\} \cap K = \emptyset$. Por tanto X no es 0-dimensional aposindético.

Finalmente para terminar las comparaciones entre los diferentes conceptos de aposindesis, la Figura 1-7 nos muestra una tabla de las implicaciones que las relacionan. Estas son consecuencia inmediata de las definiciones de los diferentes tipos de aposindesis.

Teorema 1.15 *Sean X y Y continuos con más de un punto. Entonces $X \times Y$ es aposindético.*

Demostración. Sean (a, b) y (c, d) dos puntos distintos de $X \times Y$. Sin perdida de generalidad supongamos que $a \neq c$. Como X es un espacio de Hausdorff, existe un abierto U de X tal que $a \in U \subset \overline{U}$ y $c \notin \overline{U}$. Sea $K = \overline{U} \times Y$. Tomamos $y \in Y$ tal que $y \neq d$. Sea $L = X \times \{y\}$. Definimos $C = K \cup L$. Por tanto se tiene que $U \times Y$ es un abierto de $X \times Y$ que cumple con que $(a, b) \in U \times Y$ y $U \times Y \subset K \subset C$.


Semiaposindético
Aposindético
Mutuamente Aposindético
Finitamente Aposindético
Numerablemente Aposindético
0-Dimensional Aposindético

Figura~1-7

Además $(c,d) \notin K$ porque $c \notin \overline{U}$ y $(c,d) \notin L$ ya que $y \neq d$, lo cual dice que $(c,d) \notin C$. Sean D una componente de $\overline{U}$ y $x \in D$, entonces se tiene que $D \times Y$ es conexo y $(D \times Y) \cap L \neq \emptyset$ ya que $(x,y) \in (D \times Y) \cap L$. Debido a que $\overline{U} \times Y = \cup\{D \times Y : D$ es una componente de $\overline{U}\}$, se tiene que C es la unión de subconjuntos conexos que intersectan a un conexo fijo L, por tanto C es conexo. De modo que C es un continuo tal que $(a,b) \in intC \subset C$ y $(c,d) \notin C$.

Teorema 1.16 *([Ha], Theorem 2) Sean X, Y y Z continuos con más de un punto. Entonces $X \times Y \times Z$ es mutuamente aposindético.*

Demostración. Sea $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por $\pi_1(x,y) = x$. Sean (a,b,c) y (d,e,f) dos puntos distintos de $X \times Y \times Z$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \neq d$. Como X es un espacio de Hausdorff, existe un abierto W de X tal que $a \in W \subset \overline{W}$ y $d \notin \overline{W}$. Sea $A = \overline{W} \times Y$. Tomamos $y_1 \in Y$ tal que $y_1 \neq e$. Sea $J = X \times \{y_1\}$. Definimos $K = A \cup J$. En la demostración del Teorema 1.15 se prueba que K es un subcontinuo de $X \times Y$ tal que $(a,b) \in intK \subset K$ y $(d,e) \notin K$. Además, como $(d,e) \notin K$ y $X \times Y$ es regular, existe un abierto U de $X \times Y$ tal que $(d,e) \in U \subset \overline{U}$ y que $K \cap \overline{U} = \emptyset$. Observemos que, por la construcción de K, se tiene que $a \notin \pi_1(\overline{U})$. Sea $z \in Z$ tal que $z \neq c$. Como Z es un espacio de Hausdorff, existe un abierto V de Z tal que $c \in V \subset \overline{V}$ y $z \notin \overline{V}$. Sea $y_2 \in Y$ tal que $y_2 \neq b$. Definimos $L = X \times \{y_2\} \times \{z\}$. Sean $M = \{a\} \times \{b\} \times Z$ y $N = (\pi_1(\overline{U}) \times Y \times \{z\}) \cup L$. Definimos $C = (K \times \overline{V}) \cup M$ y $D = (\overline{U} \times Z) \cup N$. Por tanto se tiene que $(intK) \times V$ es un abierto de $X \times Y \times Z$ que cumple con que $(a,b,c) \in (intK) \times V \subset K \times \overline{V} \subset C$. Además $U \times Z$ es un abierto de $X \times Y \times Z$ tal que $(d,e,f) \in U \times Z \subset \overline{U} \times Z \subset D$. Sean P una componente de $\overline{V}$ y $p \in P$, entonces se tiene que $K \times P$ es conexo y cumple con que $(K \times P) \cap M \neq \emptyset$, ya que $(a,b,p) \in (K \times P) \cap M$. Debido a que $K \times \overline{V} = \cup\{K \times P : P$ es una componente de $\overline{V}\}$, se tiene que C es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo M, por tanto C es conexo. Similarmente, si Q es una componente de $\pi_1(\overline{U})$ y $u \in \pi_1(\overline{U})$, entonces $Q \times Y \times \{z\}$ es conexo y $(Q \times Y \times \{z\}) \cap L \neq \emptyset$ ya que $(u, y_2, z) \in (Q \times Y \times \{z\}) \cap L$. Debido a que $\pi_1(\overline{U}) \times Y \times \{z\} = \cup\{Q \times Y \times \{z\} : Q$ es una componente de $\pi_1(\overline{U})\}$, se tiene que N es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo L, por tanto N es conexo. También, si R es una componente de $\overline{U}$ y $(u,v) \in R$, entonces $R \times Z$ es conexo y $(R \times Z) \cap N \neq \emptyset$ ya que $(u,v,z) \in (R \times Z) \cap N$. Debido a que $\overline{U} \times Z = \cup\{R \times Z : R$ es una componente de $\overline{U}\}$, se tiene que D es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo N, por tanto D es conexo. Tomemos $(r,s,t) \in C$. Si $(r,s,t) \in (K \times \overline{V})$ entonces $(r,s) \notin \overline{U}$ y $t \neq z$, de modo que $(r,s,t) \notin D$. Ahora, si $(r,s,t) \in M$ entonces $(r,s) = (a,b)$ por tanto $(r,s) \notin \overline{U}$ y $y \neq s$ lo cual implica que $(r,s,t) \notin D$. Por tanto tenemos que C y D son continuos que cumplen que $(a, b, c) \in intC \subset C$, $(d, e, f) \in intD \subset D$ y $C \cap D = \emptyset$.

Capítulo 2

Dimensión

En este capítulo damos las herramientas básicas de la teoría de dimensión necesarias para el desarrollo de este trabajo. Incluimos el teorema que dice la unión numerable de cerrados 0-dimensionales es también 0-dimensional. Aunque este resultado tiene generalizaciones a otras dimensiones, incluimos sólo la dimensión cero porque nada más esta necesitamos. Al final incluimos también el útil Teorema de Reducción de Brouwer que permite probar la existencia de elementos maximales y minimales sin recurrir al aplastante Lema de Zorn.

A continuación daremos la definición más simple y más usada de dimensión para espacios topológicos.

Definición 2.1 *Sea X un espacio topológico.*

El conjunto vacío tiene dimensión igual a -1.

Inductivamente, X tiene dimensión menor o igual que n en un punto p, si p tiene una base de abiertos cuyas fronteras tienen dimensión menor o igual que $n-1$.

El espacio X tiene dimensión menor o igual que n, si X tiene dimensión menor o igual que n en todos sus puntos.

Se dice que X tiene dimensión n en un punto p, si X tiene dimensión menor o igual que n en p y no tiene dimensión menor o igual que $n-1$ en p.

El espacio X tiene dimensión n, si X tiene dimensión menor o igual que n y no tiene dimensión menor o igual que $n-1$.

Un espacio topológico X tiene dimensión infinita, si X no tiene dimensión menor o igual que n para ninguna $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos el heho de que un espacio topológico X tiene dimensión menor o igual que n escribiendo $\dim X \leq n$. Obsevemos que si el espacio X tiene dimensión igual a cero entonces X tiene una base de abiertos que tienen frontera vacía. Por tanto X tiene una base de subconjuntos que son abiertos y cerrados.

Definición 2.2 *Si A_1, A_2 y B son subconjuntos ajenos dos a dos de un espacio topológico X, decimos que A_1 y A_2 están separados en X por B, si existen A_1' y A_2' abiertos en $X - B$ tales que*

$$X - B = A_1' \cup A_2',$$
$$A_1 \subset A_1',\ A_2 \subset A_2',$$
$$A_1' \cap A_2' = \emptyset.$$

Lema 2.3 *Un espacio topológico X tiene dimensión igual a 0 si y sólo si para todo $p \in X$ y para todo subconjunto cerrado C de X tal que $p \notin C$, $\{p\}$ y C están separados en X por el conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que X tiene dimensión 0. Sean $p \in X$ y C un subconjunto cerrado de X tal que $p \notin C$. Dado que $p \in X - C$ y $X - C$ es abierto, como X es 0-dimensional existe un abierto y cerrado V de X tal que $p \in V \subset X - C$. Por tanto se tiene que V y $X - V$ son abiertos de X que cumplen que $X = V \cup (X - V)$, $\{p\} \subset V$, $C \subset (X - V)$ y $V \cap (X - V) = \emptyset$. Lo cual muestra que $\{p\}$ y C están separados en X por el conjunto vacío.

Ahora supongamos que para todo $p \in X$ y para todo subconjunto cerrado C tal que $p \notin C$, $\{p\}$ y C están separados en X por el conjunto vacío. Sean $p \in X$ y U un abierto de X que tiene a p. Entonces se tiene que $X - U$ es un subconjunto cerrado de X que no tiene a p. Por hipótesis $\{p\}$ y $X - U$ están separados. Es decir, existen subconjuntos abiertos A_1 y A_2 de X tales que $X = A_1 \cup A_2$, $\{p\} \subset A_1$, $(X - U) \subset A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Por tanto A_1 es un subconjunto abierto y cerrado de X que cumple que $p \in A_1 \subset U$. De donde, X tiene dimensión 0 en p. Como p era un punto arbitrario se tiene que X es 0-dimensional.

Lema 2.4 *Un espacio topológico separable X tiene dimensión 0 si y sólo si cualesquiera dos subconjuntos cerrados ajenos de X están separados en X por el conjunto vacío.*

Demostración. Supongamos que cualesquiera dos conjuntos cerrados ajenos de X están separados en X por el conjunto vacío. Entonces para todo punto p y para todo subconjunto cerrado C de X tal que $p \notin C$, $\{p\}$ y C están separados. Entonces por el lema 2.3, X tiene dimensión igual a cero.

Ahora supongamos que X tiene dimensión igual a 0. Por el lema 2.3 sabemos que todo punto p de X está separado por el conjunto vacío de todo subconjunto cerrado de X que no contenga a p.

Sean C y K dos subconjuntos cerrados de X. Construiremos una separación de C y K en X.

Para todo punto p de X se tiene que $\{p\} \cap C = \emptyset$ o $\{p\} \cap K = \emptyset$. Por tanto para todo punto $p \in X$ existe un abierto y cerrado U_p de X tal que $p \in U_p$ y $U_p \cap C = \emptyset$ o $U_p \cap K = \emptyset$. Tomamos la colección $\{U_p\}_{p \in X}$ y sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de X. Sea $J = \{n \in \mathbb{N} : B_n \subset U_p$ para algún $p \in X\}$. Para cada $n \in J$, elegimos $p \in P$ tal que $B_n \subset U_p$ y definimos $B'_n = U_p$. Entonces se tiene que $X = \bigcup_{n \in J} B'_n$. Por tanto existe una sucesión $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de estos U_p cuya unión es X. Definimos por inducción una sucesión de conjuntos V_i como sigue:

$$V_1 = U_1,$$
$$V_i = U_i - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k = U_i \cap (X - \bigcup_{k=1}^{i-1} U_k), \text{ para } i \in \{2, 3, ...\}.$$

Entonces tenemos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i,$$
$$V_i \cap V_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$
$$V_i \text{ es abierto y}$$
$$V_i \cap C = \emptyset \text{ o } V_i \cap K = \emptyset.$$

Sean $C' = \cup\{V_i : V_i \cap K = \emptyset\}$ y $K' = \cup\{V_i : V_i \cap K \neq \emptyset\}$. De lo cual obtenemos que

$$X = C' \cup K',$$
$$C' \text{ y } K' \text{ son abiertos},$$
$$C \subset C' \text{ y } K \subset K',$$
$$C' \cap K' = \emptyset.$$

Por tanto C' y K' es la separación deseada de C y K.

Lema 2.5 *Sea X un espacio métrico separable. Si X es la unión numerable de subconjuntos cerrados 0-dimensionales. Entonces X es 0-dimensional.*

Demostración. Supongamos que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$ donde cada C_i es cerrado y 0-dimensional en X. Sean K y L dos subconjuntos ajenos y cerrados de X. Vamos a demostrar que K y L están separados por el conjunto vacío.

Por inducción, construiremos sucesiones $\{G_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de X, que cumplan las siguientes propiedades:

$$\begin{gathered} K \subset G_1,\ L \subset H_1, \\ C_i \subset G_i \cup H_i, \\ \overline{G_{i-1}} \subset G_i,\ \overline{H_{i-1}} \subset H_i, \\ \overline{G_i} \cap \overline{H_i} = \emptyset. \end{gathered}$$

Para la base de inducción, tomemos $K \cap C_1$ y $L \cap C_1$, los cuales son subconjuntos cerrados y ajenos del espacio 0-dimensional C_1. Por el Lema 2.4 existen subconjuntos cerrados A_1, B_1 de C_1 y, por tanto de X, tales que:

$$\begin{gathered} K \cap C_1 \subset A_1,\ L \cap C_1 \subset B_1, \\ A_1 \cup B_1 = C_1,\ A_1 \cap B_1 = \emptyset. \end{gathered}$$

Los conjuntos $K \cup A_1$ y $L \cup B_1$ son cerrados ajenos de X. Debido a la normalidad de X, existen conjuntos abiertos G_1 y H_1 de X tales que:

$$\begin{gathered} K \cup A_1 \subset G_1,\ L \cup B_1 \subset H_1, \\ \overline{G_1} \cap \overline{H_1} = \emptyset. \end{gathered}$$

Por tanto se tiene que:

$$\begin{gathered} C_1 \subset G_1 \cup H_1, \\ K \subset G_1,\ L \subset H_1, \\ \overline{G_1} \cap \overline{H_1} = \emptyset. \end{gathered}$$

Ahora suponemos que G_n y H_n ya han sido construidos y, repitiendo el proceso anterior sustituyendo K por $\overline{G_n}$, L por $\overline{H_n}$ y C_1 por C_n, obtenemos subconjuntos abiertos G_{n+1} y H_{n+1} de X, que cumplen con las propiedades deseadas.

Definimos $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} G_i$, $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$. Entonces G y H son dos subconjuntos abiertos ajenos de X que cumplen que $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \subset G \cup H$, $K \subset G$ y que $L \subset H$; lo cual muestra la separación deseada. De modo que, por el Lema 2.4, X es 0-dimensional.

Lema 2.6 *Sean X un espacio métrico, 0-dimensional y compacto y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abiertos y cerrados de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y diám$A_i < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Demostración. Para cada $x \in X$, consideremos $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Como X es 0-dimensional existe un abierto y cerrado U_x de X tal que $x \in U_x \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Sea $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$, se tiene que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X. Debido a que X es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Definimos:

$$\begin{aligned} A_1 &= U_{x_1} \\ A_2 &= U_{x_2} - A_1 \\ A_3 &= U_{x_3} - (A_1 \cup A_2) \\ &\vdots \\ A_n &= U_{x_n} - (A_1 \cup ... \cup A_{n-1}). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $A_1, A_2, ..., A_n$ son abiertos y cerrados de X que cumplen que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Además $A_i \subset U_{x_i} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Por tanto *diám*$A_i < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definición 2.7 *Sea X un espacio métrico y sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ cubiertas de X. Entonces decimos que $\mathcal{C}_2$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_1$ si para todo $C \in \mathcal{C}_2$ existe $D \in \mathcal{C}_1$ tal que $C \subset D$.*

Lema 2.8 *Sea X un espacio 0-dimensional, compacto y no vacío y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una sucesión de cubiertas $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$:*

(1) la cubierta $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$.

(2) los elementos de $\mathcal{C}_n$ son abiertos y cerrados de X, ajenos entre sí, no vacíos y de diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2^n}$.

Demostración. Construiremos la sucesión de cubiertas inductivamente.

Para $n = 1$. Como X es métrico, 0-dimensional y compacto por el Lema 2.6 sabemos que existen subconjuntos abiertos y cerrados $A_1, ..., A_m$ de X tales que $X = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y *diám*$A_i < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Si algún A_i es vacío, simplemente lo quitamos de la familia y el resto de ellos tiene las propiedades mencionadas. Por tanto podemos suponer que cada A_i es no vacío. Entonces definimos $\mathcal{C}_1 = \{A_1, ..., A_m\}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{C}_1, ..., \mathcal{C}_n$ han sido construidas.. Para cada $C \in \mathcal{C}_n$, como C es un subconjunto cerrado y no vacío de X, tenemos que C es compacto y 0-dimensional. Por el Lema 2.6 existen $A_1^C, ..., A_{n_C}^C$ abiertos y cerrados de C y, por tanto de X, tales que $C = \bigcup_{i=1}^{n_C} A_i^C$ y *diám*$A_i^C < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. También aquí podemos suponer que cada A_i^C es no vacío. Definimos $\mathcal{C}_C = \{A_1^C, ..., A_{n_C}^C\}$.

Sea $\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{C\in\mathcal{C}_n} \mathcal{C}_C$. Entonces tenemos que

$$\bigcup\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup\Big(\bigcup_{C\in\mathcal{C}_n} \{A_1^C, ..., A_{n_C}^C\}\Big) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}_n} C = X.$$

Si $C, D \in \mathcal{C}_{n+1}$ con $C \neq D$ entonces tenemos que $C \subset C'$ y $D \subset D'$ con $C', D' \in \mathcal{C}_n$. Si $C' \neq D'$ entonces $C \cap D \subset C' \cap D' = \emptyset$. Si $C' = D'$ entonces C y D son elementos de $\{A_1^{C'}, ..., A_{n_{C'}}^{C'}\}$, de donde $C \cap D = \emptyset$

Por último para todo $C \in \mathcal{C}_{n+1}$ tenemos que $\operatorname{diam} C < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Por tanto tenemos que $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$ que cumple con la condición (2). Lo cual termina la construcción inductiva.

Por tanto la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ construida anteriormente cumple con las condiciones (1) y (2).

Lema 2.9 *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Si la dimensión de A es igual a cero y $\varepsilon > 0$. Entonces existen subconjuntos abiertos $U_1, U_2, ..., U_n$ de X tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ si $i \neq j$ y, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $FrU_i \cap A = \emptyset$ y diám$\overline{U_i} < \varepsilon$.*

Demostración. Como A es un subconjunto cerrado de X entonces es compacto y, además, tiene dimensión igual a cero. Asi por el Lema 2.6 existen subconjuntos cerrados $A_1, A_2, ..., A_n$ de A y, por tanto subconjuntos cerrados de X, tales que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, y *diám*$A_i < \frac{\varepsilon}{4}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Debido a que X es métrico existen subconjuntos abiertos $V_1, V_2, ..., V_n$ de X tales que $A_i \subset V_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y $\overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $i \neq j$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tomamos $x_i \in A_i$. Se tiene que $A_i \subset B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)$. Definimos $U_i = V_i \cap B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces se tiene que $A_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} \subset \overline{V_i} \cap \overline{V_j} = \emptyset$ si $i \neq j$. Además, $\overline{U_i} \subset \overline{V_i} \cap \overline{B_{\frac{\varepsilon}{4}}(x_i)} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ para toda $i \in \{1, 2, .., n\}$. Por tanto *diám*$\overline{U_i} < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Finalmente para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $A \cap FrU_i \subset (\bigcup_{j=1}^{n} U_j) \cap FrU_i = \emptyset$.

Lema 2.10 *(Teorema de Reducción de Brouwer). Sea X un espacio topológico con una base numerable. Sea $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de que si $K_1, K_2, ...$, es una sucesión de miembros de $\mathcal{K}$ tal que $K_1 \supset K_2 \supset ...$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es un miembro de $\mathcal{K}$. Entonces existe un conjunto minimal en $\mathcal{K}$, es decir, un conjunto $K \in \mathcal{K}$ que cumple que para todo subconjunto propio K' de K, $K' \notin \mathcal{K}$.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de X. Vamos a definir por inducción una familia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $\mathcal{K}$, tal que $K_1 \supset K_2 \supset ...$, como sigue: elegimos $K_0 \in \mathcal{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset K_{n-1} \cap (X - U_n)$ entonces elegimos un conjunto K con esta propiedad y definimos $K_n = K$, si no, definimos $K_n = K_{n-1}$.

Ahora consideramos $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Por hipótesis $K \in \mathcal{K}$. Mostraremos que K es minimal.

Si K no es minimal entonces existe un subconjunto propio K' de K tal que $K' \in \mathcal{K}$ y existe un punto $x \in K - K'$. Ya que K' es un subconjunto cerrado de X y $x \notin K'$, existe un abierto básico U_m tal que $x \in U_m$ y $U_m \cap K' = \emptyset$, por lo tanto se tiene que $U_m \cap K \neq \emptyset$ y que $U_m \cap K' = \emptyset$.

Como se tiene que $K' \subset K = \cap_{n \in \mathbf{N}} K_n$ en particular $K' \subset K_{m-1}$ y además $K' \subset (X - U_m)$. Por tanto, como indica la construcción de los K_n, K_m fue escogido de tal manera que $K_m \subset K_{m-1} \cap (X - U_m)$. De modo que $U_m \cap K_m = \emptyset$ y, como $K \subset K_m$, se tiene que $U_m \cap K = \emptyset$. Esto es una contradicción y por tanto K es minimal.

Lema 2.11 *(Teorema de Reducción de Brouwer). Sea X un espacio topológico con una base numerable. Sea $\mathcal{K}$ una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de que si $K_1, K_2, \ldots$ es una sucesión de miembros de $\mathcal{K}$ tal que $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, entonces $\overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n}$ es un miembro de $\mathcal{K}$. Entonces existe un conjunto maximal en $\mathcal{K}$, es decir, un conjunto $K \in \mathcal{K}$ que cumple que para todo subconjunto K' de X tal que $K \subsetneq K'$, $K' \notin \mathcal{K}$.*

Demostración. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ una base numerable de X. Vamos a definir por inducción una familia $\{K_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ contenida en $\mathcal{K}$, tal que $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$, como sigue: elegimos $K_0 \in \mathcal{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K_{n-1} \subset K$ y $K \cap U_n \neq \emptyset$ entonces elegimos un conjunto K con esta propiedad y definimos $K_n = K$, si no, definimos $K_n = K_{n-1}$.

Ahora consideramos $K = \overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n}$. Por hipótesis $K \in \mathcal{K}$. Mostraremos que K es maximal.

Si K no es maximal entonces existe un subconjunto K' de X tal que $K \subsetneq K'$ y $K' \in \mathcal{K}$. Por tanto existe un punto $x \in K' - K$. Ya que K es un subconjunto cerrado de X y $x \notin K$, existe un abierto básico U_m de X tal que $x \in U_m$ y $U_m \cap K = \emptyset$, por lo tanto se tiene que $U_m \cap K' \neq \emptyset$ y que $U_m \cap K = \emptyset$.

Como se tiene que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n} = K \subset K'$ en particular $K_{m-1} \subset K'$ y, además, $K' \cap U_m \neq \emptyset$. Por tanto, como indica la construcción de los K_n, K_m fue escogido de tal manera que $K_{m-1} \subset K_m$ y $K_m \cap U_m \neq \emptyset$. De modo que $U_m \cap K_m \neq \emptyset$ y como $K_m \subset K$ se tiene que $U_m \cap K \neq \emptyset$. Esto es una contradicción y por tanto K es maximal.

Capítulo 3

Hiperespacios

En este capitulo todos nuestros espacios serán continuos

Este capítulo está dedicado al estudio de las propiedades básicas de aposindesis en los hiperespacios. En la primera sección presentamos una miscelánea de herramientas que van desde la definición de hiperespacios hasta algunas propiedades de funciones de Whitney, pasando por la continuidad de la unión, algunos teoremas de hiperespacios (sin prueba), etc.

Los niveles de Whitney tienen muchas similitudes con el continuo correspondiente. Muchos autores han estudiado similitudes y diferencias entre los niveles y su espacio base. En la segunda sección de este capítulo vemos que la mayoría de las propiedades de aposindesis son heredadas del espacio a sus niveles de Whitney. Hasta ahora nadie sabe si la propiedad de ser 0-dimensional aposindético es heredada por un continuo a sus niveles de Whitney.

En este capítulo también vemos que los hiperespacios $C(X)$ y 2^X tienen casi todas las propiedades de aposindesis. Todavía no se sabe si son 0-dimensional aposindéticos y, en general, no se ha estudiado bajo qué condiciones resultan mutuamente aposindéticos.

Una pregunta interesante que no ha sido resuelta es si el hiperespacio $F_3(X)$ siempre es mutuamente aposindético.

Herramientas básicas.

En topología se llaman hiperespacios a los espacios constituidos por una clase específica de subconjuntos de un espacio dado. Se supone que el lector está familiarizado con la teoría básica de hiperespacios (ver [I1]), a continuación se presentan algunos preliminares dentro de los cuales hay algunos resultados clásicos los cuales supondremos de antemano ciertos.

Los hiperespacios más comunes de un continuo X son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \text{ para } n \in \mathbb{N},$$
$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \text{ y}$$
$$F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X).$$

A estos espacios se les da una métrica de la siguiente manera:

Dados $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$ definimos: $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A$ tal que $d(a, x) < \varepsilon\}$. Donde d es la métrica de X.

La métrica de Hausdorff para 2^X se define entonces por
$H(A, B) = inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}$.

En [I1] (pág. 3), se muestra que H es una métrica para 2^X. Además con esta métrica 2^X y $C(X)$ son compactos ([I1], pág. 23-24) y conexos ([I1], pág. 47), por tanto continuos.

Una función de Whitney es una función continua $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ tal que:

(a) $\mu(\{x\}) = 0$ para toda $x \in X$ y,
(b) Si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

En [I1] (pág. 31), se muestra que existen funciones de Whitney para 2^X.

Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Un arco ordenado de A a B en 2^X es una función continua $\alpha : [0, 1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y si $s < t$ entonces $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$.

En [I1] (pág. 48), se muestra que si $A, B \in 2^X$ y son tales que $A \subsetneq B$ entonces existe un arco ordenado de A a B si y sólo si toda componente de B intersecta a A.

Por ultimo en [I1] (pág. 13-16), se muestra que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en 2^X tal que $A_n \to A$ con $A \in 2^X$, entonces $a \in A$ si y sólo si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $a_n \to a$.

En este capítulo, nuestro objetivo es demostrar algunas propiedades de aposindesis en los hiperespacios de un continuo X. Para lo cual necesitamos los siguientes lemas que son parte de la teoría general de hiperespacios.

Lema 3.1 *Sean X un continuo y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Si $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $a \in A$ entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $a_n \in A_n$ y $a_n \to a$. Como $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $a_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y, además, $a_n \to a$. Lo cual nos dice que $a \in B$. Por tanto $A \subset B$.

Lema 3.2 *Sean X un continuo y $C \in 2^X$. Entonces los siguientes conjuntos son cerrados en 2^X:*

(a) $\{A \in 2^X : A \subset C\}$
(b) $\{A \in 2^X : C \subset A\}$
(c) $\{A \in 2^X : A \cap C \neq \emptyset\}$.

Demostración. (a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $A_n \to A$ y tal que $A_n \subset C$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Lema 3.1 a la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y a la sucesión constante $\{C\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos que $A \subset C$. Por tanto el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset C\}$ es cerrado en 2^X.

(b) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $A_n \to A$ y tal que $C \subset A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Aplicando el Lema 3.1 a la sucesión constante $\{C\}_{n\in\mathbb{N}}$ y a la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ obtenemos que $C \subset A$. Por tanto el conjunto $\{A \in 2^X : C \subset A\}$ es cerrado en 2^X.

(c) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $A_n \to A$ y tal que $A_n \cap C \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n \in A_n \cap C$. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como X es compacto existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$ para alguna $x \in X$. Además, como sabemos que $A_{n_k} \to A$ entonces $x \in A$ y, como $x_{n_k} \in C$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y C es cerrado entonces $x \in C$. De modo que $x \in A \cap C$. Esto muestra que $A \cap C \neq \emptyset$. Por tanto el conjunto $\{A \in 2^X : A \cap C \neq \emptyset\}$ es cerrado en 2^X.

Como una consecuencia inmediata del lema anterior tenemos que si U es un subconjunto abierto de X entonces los conjuntos $\{A \in 2^X : A \subset U\}$ y $\{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\}$ son abiertos en 2^X (ya que sus respectivos complementos en 2^X son el conjunto $\{A \in 2^X : A \cap (X - U) \neq \emptyset\}$ y el conjunto $\{A \in 2^X : A \subset X - U\}$)

Definición 3.3 *Sean X un continuo y $a, b \in X$. Decimos que X es irreducible entre a y b si no existe un subcontinuo propio A de X tal que $\{a, b\} \subset A$.*

Lema 3.4 *Sean X un continuo y $a, b \in X$. Entonces existe un subcontinuo, A, de X irreducible entre a y b.*

Demostración. Sea X un continuo y sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Definimos $\mathcal{A} = \{A \in C(X) : \{a, b\} \subset A\}$. Por el Lema 3.2 sabemos que $\mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$, por tanto compacto. Como μ es continua entonces alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$. Sea $t = \min \mu(\mathcal{A})$ y sea $B \in \mu^{-1}(t) \cap \mathcal{A}$. Mostraremos que B es un subcontinuo de X irreducible entre a y b.

Supongamos que existe un subcontinuo propio C de B tal que $\{a, b\} \subset C$. Sabemos que $C \in \mathcal{A}$. Y además como $C \subsetneq B$ tenemos que $\mu(C) < \mu(B) = t$. Contradiciendo el hecho de que t es mínimo. Por tanto B es un subcontinuo de X irreducible entre a y b.

Lema 3.5 *Sea X un continuo. Entonces la función $U : 2^{2^X} \to 2^X$ definida como $U(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$ es continua.*

Demostración. Primero mostraremos que U está bien definida. Es decir, veremos que $U(\mathcal{A}) \in 2^X$ para toda $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$. Claramente $U(\mathcal{A})$ es no vacío. Tomamos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cup\mathcal{A}$ tal que $x_n \to x$ con $x \in X$. Como $x_n \in \cup\mathcal{A}$, existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es compacto existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_{n_k} \to A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Sabemos que $x_n \to x$, lo cual nos dice que $x_{n_k} \to x$. De donde obtenemos que $x \in A$. Por tanto tenemos que $x \in \cup\mathcal{A}$. Por tanto U está bien definida.

Ahora demostraremos que U es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$ tales que $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$ (donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff para 2^{2^X}). Probaremos que $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \varepsilon$. Tomamos $a \in \cup\mathcal{A}$, entonces $a \in A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Y como $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \varepsilon$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \varepsilon$. De modo que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \varepsilon$. Por tanto $\cup\mathcal{A} \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{B})$. Similarmente se prueba que $\cup\mathcal{B} \subset N(\varepsilon, \cup\mathcal{A})$. Lo cual implica que $H(\cup\mathcal{A}, \cup\mathcal{B}) < \varepsilon$. Por tanto U es continua.

Lema 3.6 *Sean X un continuo no degenerado y $x \in X$. Entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{A \in F_n(X) : \{x\} \subset A\}$ es conexo para toda $n \in \{2, 3, \ldots\}$.*

Demostración. Definimos $f : X^{n-1} \to \mathcal{A}$ como $f(x_1, ..., x_{n-1}) = \{x, x_1, ..., x_{n-1}\}$. Demostraremos que f es continua y suprayectiva.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos un punto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$ en X^{n-1} y nos fijamos en $B_\varepsilon^H(f(\mathbf{x}))$. En el producto X^{n-1} consideramos el subconjunto abierto $U = B_\varepsilon(x_1) \times ... \times B_\varepsilon(x_{n-1})$. De modo que si $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_{n-1})$ es un punto en X^{n-1} tal que $\mathbf{y} \in U$ tenemos que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Lo cual nos dice que $f(\mathbf{x}) \subset N(\varepsilon, f(\mathbf{y}))$ y que $f(\mathbf{y}) \subset N(\varepsilon, f(\mathbf{x}))$. Lo que implica que $H(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon$. Por tanto f es continua.

Ahora si tomamos un punto $\{x, x_1, ..., x_m\}$ en $\mathcal{A}$ tenemos que:

$$f(x_1, ..., x_m, x_m, ..., x_m) = \{x, x_1, ..., x_m\} \text{ si } m < n-1 \text{ y,}$$
$$f(x_1, ..., x_m) = \{x, x_1, ..., x_m\} \text{ si } m = n-1.$$

Lo cual nos dice que f es suprayectiva. De lo que obtenemos que $\mathcal{A}$ es la imagen continua de un conjunto conexo. Por tanto $\mathcal{A}$ es conexo.

Lema 3.7 *Sea X un continuo y sean $C_1, ..., C_n$ subconjuntos conexos de X. Entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{\{x_1, ..., x_n\} \in F_n(X) : x_i \in C_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}\}$ es conexo.*

Demostración. Definimos $f : C_1 \times ... \times C_n \to \mathcal{A}$ como $f(x_1, ...x_n) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Mostraremos que f es continua y suprayectiva.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos un punto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ en $C_1 \times ... \times C_n$ y nos fijamos en $B_\varepsilon^H(f(\mathbf{x}))$. En el producto $C_1 \times ... \times C_n$ consideramos el subconjunto abierto $U = (B_\varepsilon(x_1) \times ... \times B_\varepsilon(x_n)) \cap (C_1 \times ... \times C_n)$. De modo que si $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ es un punto en $C_1 \times ... \times C_n$ tal que $\mathbf{y} \in U$ tenemos que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Lo cual nos dice que $f(\mathbf{x}) \subset N(\varepsilon, f(\mathbf{y}))$ y que $f(\mathbf{y}) \subset N(\varepsilon, f(\mathbf{x}))$. Lo que implica que $H(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon$. Por tanto f es continua.

Ahora si tomamos un elemento A en $\mathcal{A}$ tenemos que se puede representar como $A = \{x_1, ..., x_n\}$ con $x_i \in C_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces tenemos que:

$$f(x_1, ..., x_n) = \{x_1, ..., x_n\}.$$

Lo cual nos dice que f es suprayectiva. De lo que obtenemos que $\mathcal{A}$ es la imagen continua de un conjunto conexo. Por tanto $\mathcal{A}$ es conexo.

Lema 3.8 *Sea X un continuo. Si $A \in 2^X$ y $\mathcal{B}$ es un subconjunto conexo de 2^X. Entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{A \cup B : B \in \mathcal{B}\}$ es conexo.*

Demostración. Definimos $f : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ como $f(B) = A \cup B$ para cada $B \in \mathcal{B}$.

Mostraremos que f es continua y suprayectiva. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $B \in \mathcal{B}$ y nos fijamos en $B_\varepsilon^H(f(B))$. Consideramos el subconjunto abierto $\mathcal{U} = B_\varepsilon^H(B)$. De modo que si C es un punto en $\mathcal{B}$ tal que $C \in \mathcal{U}$ tenemos que $C \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, C)$. Lo cual implica que $A \cup C \subset N(\varepsilon, A \cup B)$ y que $A \cup B \subset N(\varepsilon, A \cup C)$. Por tanto $H(f(C), f(B)) < \varepsilon$. Lo cual nos dice que f es continua.

Ahora, si tomamos un punto $A \cup B \in \mathcal{A}$ tenemos que $f(B) = A \cup B$. Por tanto f es suprayectiva. De lo que obtenemos que $\mathcal{A}$ es la imagen continua de un conjunto conexo. Por tanto $\mathcal{A}$ es conexo.

Lema 3.9 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t_0 \in (0, \mu(X))$. Si $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$, $A \cap B \neq \emptyset$ y C es una componente de $A \cap B$. Entonces existe una función continua $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\eta(0) = A$, $\eta(1) = B$ y $C \subset \eta(s) \subset A \cup B$ para toda $s \in [0,1]$.*

Demostración. Sean $A, B \in \mu^{-1}(t_0)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$ y sea C una componente de $A \cap B$. Sabemos que existen arcos ordenados $\alpha, \beta : [0,1] \to C(X)$ tales que $\alpha(0) = \beta(0) = C$, $\alpha(1) = A$ y $\beta(1) = B$. Observemos que para cada $t \in [0,1]$ tenemos que $\alpha(0) \cup \beta(t) = C \cup \beta(t) = \beta(t) \subset \beta(1) = B$ y que $A = \alpha(1) \subset \alpha(1) \cup \beta(t)$. De modo que $\mu(\alpha(0) \cup \beta(t)) \leq t_0 \leq \mu(\alpha(1) \cup \beta(t))$. Como la función $f : [0,1] \to C(X)$ definida por $f(s) = \alpha(s) \cup \beta(t)$ es continua tenemos que $\mu \circ f : [0,1] \to [0, \mu(X)]$ es continua y $\mu(f(0)) \leq t_0 \leq \mu(f(1))$. Por tanto existe $s \in [0,1]$ tal que $\mu(f(s)) = t_0$. Lo cual nos dice que para cada $t \in [0,1]$, existe $s \in [0,1]$ tal que $\alpha(s) \cup \beta(t) \in \mu^{-1}(t_0)$.

Definimos $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ como $\eta(t) = \alpha(s_t) \cup \beta(t)$ donde $s_t \in [0,1]$ y cumple con que $\mu(\alpha(s_t) \cup \beta(t)) = t_0$. Veamos que η está bien definida. Sea $t \in [0,1]$ y sean $s_t, s_t' \in [0,1]$ tales que $\alpha(s_t) \cup \beta(t), \alpha(s_t') \cup \beta(t) \in \mu^{-1}(t_0)$. Supongamos que $s_t < s_t'$ entonces $\alpha(s_t) \subset \alpha(s_t')$. Lo cual implica que $\alpha(s_t) \cup \beta(t) \subset \alpha(s_t') \cup \beta(t)$. Como ambos pertenecen a $\mu^{-1}(t_0)$ concluimos que $\alpha(s_t) \cup \beta(t) = \alpha(s_t') \cup \beta(t)$. Por tanto η está bien definida.

Ahora veamos que η es continua. Sean $t \in [0,1]$ y $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0,1]$ una sucesión tal que $t_n \to t$. Supongamos que η no es continua, es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ y $H(\eta(t_m), \eta(t)) \geq \varepsilon$. Entonces existe una sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $H(\eta(t_{n_k}), \eta(t)) \geq \varepsilon$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomamos $s_{t_{n_k}} \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s_{t_{n_k}}) \cup \beta(t_{n_k})) = t_0$. Sea $\{s_{t_{n_{k_j}}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión $\{s_{t_{n_k}}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $s_{t_{n_{k_j}}} \to s$ para algún $s \in [0,1]$. Como α y β son continuas tenemos que $\alpha(s_{t_{n_{k_j}}}) \to \alpha(s)$ y que $\beta(t_{n_{k_j}}) \to \beta(t)$. De modo que $\alpha(s_{t_{n_{k_j}}}) \cup \beta(t_{n_{k_j}}) \to \alpha(s) \cup \beta(t)$.

Además, como $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto y $\alpha(s_{t_{n_{k_j}}}) \cup \beta(t_{n_{k_j}}) \in \mu^{-1}(t_0)$ para toda $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha(s) \cup \beta(t) \in \mu^{-1}(t_0)$. Lo cual nos dice que $\eta(t_{n_{k_j}}) \to \eta(t)$. Lo cual es una contradicción que vino de suponer que η no era continua. Por tanto η es continua.

Sabemos que $\eta(0) = \alpha(s_0) \cup \beta(0)$ donde $s_0 \in [0,1]$ y cumple con que $\alpha(s_0) \cup \beta(0) \in \mu^{-1}(t_0)$. Debido a que $\alpha(s_0) \subset A$ y que $\beta(0) = C \subset A$ tenemos que $\alpha(s_0) \cup \beta(0) \subset A$. Como $A \in \mu^{-1}(t_0)$ concluimos que $\eta(0) = A$. También sabemos que $\eta(1) = \alpha(s_1) \cup \beta(1)$ donde $s_1 \in [0,1]$ y cumple con que $\alpha(s_1) \cup \beta(1) \in \mu^{-1}(t_0)$. Como $B \subset \alpha(s_1) \cup \beta(1)$ y $B \in \mu^{-1}(t_0)$ concluimos que $\eta(1) = B$. Finalmente notemos que para toda $t \in [0,1]$, $C = \beta(0) \subset \alpha(s_t) \cup \beta(t) = \eta(t) \subset A \cup B$.

Lema 3.10 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in (0, \mu(X))$. Entonces:*

(1) si $a \in X$ entonces existe $A \in \mu^{-1}(t)$ tal que $a \in A$

(2) si $A \subset B$, $\mu(A) \leq t$ y $\mu(B) \geq t$ entonces existe $C \in \mu^{-1}(t)$ tal que $A \subset C \subset B$.

Demostración. (1) Sabemos que existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a\}$ y $\alpha(1) = X$. De modo que la función $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [0, \mu(X)]$ es una función continua. Además $\mu(\alpha(0)) = \mu(\{a\}) = 0$ y $\mu(\alpha(1)) = \mu(X)$. Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in (0,1)$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Definimos $A = \alpha(s)$. Por tanto tenemos que $a \in A$ y $\mu(A) = t$.

(2) Si $\mu(A) = \mu(B) = t$, como $A \subset B$ concluimos que $A = B$. Definimos $C = A$.

Ahora, si $\mu(A) < t$ o $\mu(B) > t$, como $A \subset B$ sabemos que existe un arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. De modo que la función $\mu \circ \alpha : [0,1] \to [\mu(A), \mu(B)]$ es una función continua. Además $\mu(\alpha(0)) = \mu(A)$ y $\mu(\alpha(1)) = \mu(B)$. Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in (0,1)$ tal que $\mu(\alpha(s)) = t$. Definimos $C = \alpha(s)$. Por tanto tenemos que $A \subset C \subset B$ y $\mu(C) = t$.

Lema 3.11 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in (0, \mu(X))$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.*

Demostración. Como μ es continua entonces $\mu^{-1}(t)$ es un subconjunto cerrado de $C(X)$ y, como $C(X)$ es un continuo, concluimos que $\mu^{-1}(t)$ es compacto.

Ahora mostraremos que $\mu^{-1}(t)$ es conexo. Supongamos lo contrario, es decir, que existen dos subconjuntos cerrados $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ de $\mu^{-1}(t)$ y, por tanto cerrados de $C(X)$, tales que $\mathcal{H} \neq \emptyset \neq \mathcal{K}$, $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mu^{-1}(t)$ y $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Definimos $H = \cup\mathcal{H}$ y $K = \cup\mathcal{K}$. Sabemos por el Lema 3.5 que H y K son subconjuntos cerrados de X. Como $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son no vacíos, tenemos que H y K son no vacíos. Además, como consecuencia del Lema 3.10, tenemos que $H \cup K = X$. Si $H \cap K = \emptyset$ entonces X seria disconexo. Lo cual es absurdo. Por tanto $H \cap K \neq \emptyset$. Tomamos $x \in H \cap K$, entonces existen $A \in \mathcal{H}$ y $B \in \mathcal{K}$ tales que $x \in A \cap B$. Por el Lema 3.9, existe una existe una función continua $\eta : [0,1] \to \mu^{-1}(t_0)$ tal que $\eta(0) = A$, $\eta(1) = B$ y $x \in \eta(s) \subset A \cup B$ para toda $s \in [0,1]$. Definimos $\mathcal{L} = \mathcal{H} \cap \eta([0,1])$ y $\mathcal{M} = \mathcal{K} \cap \eta([0,1])$. Entonces tenemos que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son subconjuntos cerrados de $\eta([0,1])$ y cumplen que $A \in \mathcal{L}$, $B \in \mathcal{M}$, $\mathcal{L} \cup \mathcal{M} = \eta([0,1])$ y $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Con lo que concluimos que $\eta([0,1])$ es disconexo. Lo cual es una contradicción que es consecuencia de suponer que $\mu^{-1}(t)$ es disconexo. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es conexo.

Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es un continuo.

Lema 3.12 *Sean X un continuo, $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in (0, \mu(X))$. Entonces para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mu^{-1}(t)$ y $B \subset N(\delta, A)$ se tiene que $H(A,B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto, es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, existen $A, B \in \mu^{-1}(t)$ tales que $B \subset N(\delta, A)$ y $H(A,B) \geq \varepsilon$.

En particular para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $A_n, B_n \in \mu^{-1}(t)$ tales que $B_n \subset N(\frac{1}{n}, A_n)$ y $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$. Consideremos las sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\mu^{-1}(t)$ es compacto existen $A_0, B_0 \in \mu^{-1}(t)$ y subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{B_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tales que $A_{n_k} \to A_0$ y $B_{n_k} \to B_0$. Tomamos un punto $x \in B_0$ entonces existe una sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_{n_k} \in B_{n_k}$ y $x_{n_k} \to x$. Además, como $B_{n_k} \subset N(\frac{1}{n_k}, A_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $a_{n_k} \in A_{n_k}$ tal que $d(a_{n_k}, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$. Lo cual implica que $a_{n_k} \to x$. Por tanto $x \in A_0$. De modo que $A_0 \subset B_0$. Ya que $\mu(B_0) = \mu(A_0)$, concluimos que $A_0 = B_0$. Por otro lado para toda $k \in \mathbb{N}$ sabemos que $H(A_{n_k}, B_{n_k}) \geq \varepsilon$ y, debido a que H es continua (todas las funciones distancia son continuas), obtenemos que $H(A_0, B_0) \geq \varepsilon$. Lo cual es una contradicción. Esto concluye la prueba del lema.

Lema 3.13 *Sean X un continuo y $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Entonces para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in 2^X$, $A \subset B$ y $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ entonces se tiene que $H(A,B) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es verdadero, es decir, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$, $\mu(B) - \mu(A) < \delta$ y $H(A,B) \geq \varepsilon$.

En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $A_n, B_n \in 2^X$ tales que $A_n \subset B_n$, $\mu(B_n) - \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ y $H(A_n, B_n) \geq \varepsilon$. Consideremos las sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como 2^X es compacto existen $A_0, B_0 \in 2^X$

y subsucesiones $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{B_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente tales que $A_{n_k} \to A_0$ y $B_{n_k} \to B_0$. Ahora, como μ es continua y, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq \mu(B_{n_k}) - \mu(A_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$, tenemos que $\mu(B_0) = \mu(A_0)$. Además como $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por el Lema 3.1, $A_0 \subset B_0$. Por tanto $A_0 = B_0$. Por otro lado para toda $k \in \mathbb{N}$, sabemos que $H(A_{n_k}, B_{n_k}) \geq \varepsilon$ y, debido a que H es continua obtenemos que $H(A_0, B_0) \geq \varepsilon$. Lo cual es una contradicción. Por tanto el lema es cierto.

Lema 3.14 *Sean X un continuo y $\mathcal{A} \in C(C(X))$. Entonces $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$ para algún arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$ si y sólo si para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.*

Demostración. Primero supongamos que $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$ para algún arco ordenado $\alpha : [0,1] \to C(X)$. Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$, entonces existen $s, t \in [0,1]$ tales que $\alpha(s) = A$ y $\alpha(t) = B$. Supongamos que $s \leq t$,entonces debido a que α es un arco ordenado tenemos que $A = \alpha(s) \subset \alpha(t) = B$. Por tanto para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

Ahora, supongamos que para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Sean $s = mín\{\mu(K) : K \in \mathcal{A}\}$ y $t = máx\{\mu(K) : K \in \mathcal{A}\}$. Como $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado del continuo $C(X)$, tenemos que $\mathcal{A}$ es compacto. De modo que existen $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(A) = s$ y $\mu(B) = t$. Consideremos $\mu|\mathcal{A} : \mathcal{A} \to [s,t]$. Como $\mathcal{A}$ es conexo y $\mu|\mathcal{A}$ es continua tenemos que $(\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A})$ es conexo. Y debido a que $s, t \in (\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A})$, concluimos que $(\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A}) = [s,t]$. Por tanto $\mu|\mathcal{A}$ es suprayectiva. Ahora tomamos $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(A) = \mu(B)$. Por hipótesis sabemos que $A \subset B$ o que $B \subset A$. Supongamos por ejemplo que $A \subset B$. Entonces tenemos que $A \subset B$ y $\mu(A) = \mu(B)$. Lo cual implica que $A = B$. Por tanto $\mu|\mathcal{A}$ es inyectiva. Con lo que concluimos que $\mu|\mathcal{A}$ es un homeomorfismo.

Definimos $l : [0,1] \to [s,t]$ como $l(x) = xt + (1-x)s$. Claramente l es un homeomorfismo. Definimos $\alpha : [0,1] \to C(X)$ como $\alpha(x) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l(x))$. Como α está definida como composición de funciones continuas, tenemos que α es continua. Además, $\alpha(0) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l(0)) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(s) = A$ y $\alpha(1) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l(1)) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(t) = B$. Ahora sean $p, q \in [0,1]$ tales que $p < q$. Entonces tenemos que $l(p) < l(q)$. Como $\alpha(p) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l(p)) \in \mathcal{A}$ y $\alpha(q) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l(q)) \in \mathcal{A}$, por hipótesis, tenemos que $\alpha(p) \subset \alpha(q)$ o que $\alpha(q) \subset \alpha(p)$. Pero como $\mu(\alpha(p)) = l(p) < l(q) = \mu(\alpha(q))$ concluimos que $\alpha(p) \subsetneq \alpha(q)$. Por tanto α es un arco ordenado de A a B. Finalmente como $\mu|\mathcal{A}$ y l son homeomorfismos tenemos que:

$$\alpha([0,1]) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}(l([0,1])) = (\mu|\mathcal{A})^{-1}([s,t]) = \mathcal{A}.$$

Lo cual completa la prueba.

Lema 3.15 *Sean X un continuo, $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado. Entonces $\mu|\alpha([0,1]) : \alpha([0,1]) \to [\mu(\alpha(0)), \mu(\alpha(1))]$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Definimos $\mathcal{A} = \alpha([0,1])$. Como $\mathcal{A}$ es conexo y $\mu|\mathcal{A}$ es continua, tenemos que $(\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A})$ es conexo. Debido a que $\mu(\alpha(0))$ y $\mu(\alpha(1))$ son elementos de $(\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A})$, concluimos que $(\mu|\mathcal{A})(\mathcal{A}) = [\mu(\alpha(0)), \mu(\alpha(1))]$.

Por tanto $\mu|\mathcal{A}$ es suprayectiva. Ahora tomamos $\alpha(s), \alpha(t) \in \mathcal{A}$ tales que $\mu(\alpha(s)) = \mu(\alpha(t))$. Como α es un arco ordenado, sabemos que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ o que $\alpha(t) \subset \alpha(s)$. Supongamos, por ejemplo, que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$. Entonces tenemos que $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ y $\mu(\alpha(s)) = \mu(\alpha(t))$. Lo cual implica que $\alpha(s) = \alpha(t)$. Por tanto $\mu|\mathcal{A}$ es inyectiva. Con lo que concluimos que $\mu|\mathcal{A}$ es un homeomorfismo.

Lema 3.16 *Sean X un continuo y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $B_n \to B$ para algún B en $C(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de B_n a X. Entonces existe una subsucesión $\{\beta_{n_k}([0,1])\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\beta_n([0,1])\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta_{n_k}([0,1]) \to \beta([0,1])$ donde $\beta : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado de B a X.*

Demostración. Como $C(C(X))$ es compacto, existe una subsucesión $\{\beta_{n_k}([0,1])\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\beta_n([0,1])\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta_{n_k}([0,1]) \to \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in C(C(X))$. Tomamos $K, L \in \mathcal{A}$ entonces existen sucesiones $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{L_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ tales que $K_k, L_k \in \beta_{n_k}([0,1])$, $K_k \to K$ y que $L_k \to L$. Como $K_k, L_k \in \beta_{n_k}([0,1])$ se tiene que para una infinidad de números naturales, $K_k \subset L_k$ o que $L_k \subset K_k$. Supongamos, por ejemplo, que existe una subsucesión $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $K_{k_j} \subset L_{k_j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Como $K_{k_j} \to K$, $L_{k_j} \to L$ y $K_{k_j} \subset L_{k_j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$, por el Lema 3.1 tenemos que $K \subset L$. Por tanto, para cada par de elementos $K, L \in \mathcal{A}$, se tiene que $K \subset L$ o $K \subset L$. Por el Lema 3.14, tenemos que $\mathcal{A}$ es de la forma $\mathcal{A} = \beta([0,1])$, donde $\beta : [0,1] \to C(X)$ es un arco ordenado. Además, en la demostración de ese lema, se prueba que β es un arco ordenado de M a N donde $\mu(M) = mín\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ y $\mu(N) = máx\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Vamos a mostrar que $M = B$ y $N = X$.

Debido a que cada par de elementos en $\mathcal{A}$ se pueden comparar, concluimos que $M \subset A \subset N$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Ahora, sabemos que $A \subset X$ para toda $A \in \mathcal{A}$. En particular $N \subset X$. Como $\beta_{n_k}(1) = X$ para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $X \in \mathcal{A}$. De modo que $X \subset N$. Por tanto $N = X$. Por otro lado, sabemos que $\beta_{n_k}(0) = B_{n_k} \to B$ lo que nos dice que $B \in \mathcal{A}$. De modo que $M \subset B$. Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces existe una sucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $C(X)$ tal que $A_{n_k} \in \beta_{n_k}([0,1])$ y que $A_{n_k} \to A$.

Debido a que $A_{n_k} \in \beta_{n_k}([0,1])$ tenemos que $\beta_{n_k}(0) \subset A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como $A_{n_k} \to A$, $\beta_{n_k}(0) = B_{n_k} \to B$ y $\beta_{n_k}(0) \subset A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por el Lema 3.1, tenemos que $B \subset A$. Por tanto $B \subset A$ para toda $A \in \mathcal{A}$. En particular $B \subset M$. Lo que nos dice que $B = M$.

Por tanto β es un arco ordenado de B a X.

Propiedades de Aposindesis de hiperespacios.

Ha sido demostrado en [Ma] (Theorem 8) que si X es un continuo entonces $F_n(X)$ es numerablemente aposindético para toda $n \in \{2, 3, ...\}$, el siguiente teorema es un resultado más débil en este respecto pero consideramos incluirlo en este trabajo ya que la prueba de este incluye ideas y resultados muy básicos de la teoría de hiperespacios, contrastando con la demostración en [Ma] que usa varios teoremas fuertes.

Teorema 3.17 *Sea X un continuo no degenerado. Entonces $F_n(X)$ es aposindético para toda $n \in \{2, 3, ...\}$.*

Demostración. Sean A y B dos elementos distintos de $F_n(X)$. Entonces se tiene que $A - B \neq \emptyset$ o $B - A \neq \emptyset$.

Tenemos que encontrar un subcontinuo, $\mathcal{D}$, de $F_n(X)$ que tenga a A en su interior y que no tenga a B. Analicemos primero el caso en que existe $x \in A - B$. Como X es métrico, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset \overline{U}$ y $B \cap \overline{U} = \emptyset$. Sean $\mathcal{A} = \{K \in F_n(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{B} = \{K \in F_n(X) : K \cap \overline{U} \neq \emptyset\}$. Tenemos que $A \in \mathcal{A}$, $B \notin \mathcal{B}$ y que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Además, por el Lema 3.2, sabemos que $\mathcal{A}$ es abierto y $\mathcal{B}$ es cerrado.

Sea $c \in X$ tal que $c \notin A \cup B$ y sea $\mathcal{C} = \{K \in F_n(X) : \{c\} \subset K\}$, sabemos, también por el Lema 3.2 y por el Lema 3.6, que $\mathcal{C}$ es cerrado y conexo.

Definimos $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Sea $C \in \mathcal{B}$ entonces $C \cap \overline{U} \neq \emptyset$. Tomamos $u \in C \cap \overline{U}$, definimos $\mathcal{K} = \{K \in F_n(X) : \{u\} \subset K\}$. Sabemos, por el Lema 3.6, que $\mathcal{K}$ es conexo. Además, $C \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{K} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ ya que $\{u, c\} \in \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$. Lo cual nos dice que todo elemento, C, en $\mathcal{B}$ puede ser conectado por un conexo, $\mathcal{K}$, dentro de $\mathcal{B}$, con el conexo $\mathcal{C}$. Por tanto $\mathcal{D}$ es la unión de conjuntos conexos que intersectan a un conexo fijo. Por tanto $\mathcal{D}$ es conexo. Además se tiene que $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$. Como $c \notin B$ y $B \cap \overline{U} = \emptyset$, tenemos que $B \notin \mathcal{D}$.

De modo que $\mathcal{D}$ es un subcontinuo de $F_n(X)$ tal que $A \in int\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ y $B \notin \mathcal{D}$.

Ahora analicemos el caso en que existe $x \in B - A$. Sea $E = B - A$. Entonces E es finito y no vacío. Como X es métrico, existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U \subset \overline{U}$ y $E \cap \overline{U} = \emptyset$. Observemos que $B \cap FrU = \emptyset$. Sean $\mathcal{A} = \{K \in F_n(X) : K \subset U\}$ y $\mathcal{B} = \{K \in F_n(X) : K \subset \overline{U}\}$. Tenemos que $A \in \mathcal{A}$, $B \notin \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Además, por el Lema 3.2 sabemos que $\mathcal{A}$ es abierto y $\mathcal{B}$ es cerrado.

Para cada $z \in FrU$, definimos $\mathcal{U}_z = \{K \in F_n(X) : \{z\} \subset K\}$. Sea $\mathcal{C} = \bigcup_{z \in FrU} \mathcal{U}_z$. Notemos que $\mathcal{C} = \{K \in F_n(X) : K \cap FrU \neq \emptyset\}$. Sabemos por los Lemas 3.2 y 3.6, que $\mathcal{U}_z$ es cerrado y conexo para toda $z \in FrU$. Además si $u, v \in FrU$ tenemos que $\mathcal{U}_u \cap \mathcal{U}_v \neq \emptyset$ ya que $\{u, v\} \in \mathcal{U}_u \cap \mathcal{U}_v$. Por tanto $\mathcal{C}$ es cerrado y conexo.

Definimos $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Sea $C = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{B}$ entonces $\{x_1, ..., x_n\} \subset \overline{U}$. Tomamos las componentes $C_1, ..., C_n$ de $\overline{U}$ tales que $x_i \in C_i$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Definimos $\mathcal{K} = \{\{y_1, ..., y_n\} \in F_n(X) : y_i \in C_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., n\}\}$. Sabemos, por el lema 3.7, que $\mathcal{K}$ es conexo. Además sabemos, por el Teorema de los Golpes en la Frontera ([Na], pág. 73), que las componentes de $\overline{U}$ intersectan a la FrU. Por tanto tenemos que $\mathcal{K} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ y que $C \in \mathcal{K}$. Lo cual nos dice que $\mathcal{D}$ es la unión de conjuntos conexos que intersectan a un conexo fijo. Por tanto $\mathcal{D}$ es conexo. Además, se tiene que $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ y, como $x \notin \overline{U}$ y $B \cap FrU = \emptyset$, tenemos que $B \notin \mathcal{D}$.

De modo que $\mathcal{D}$ es un subcontinuo de $F_n(X)$ tal que $A \in int\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ y $B \notin \mathcal{D}$. Por tanto $F_n(X)$ es aposindético.

Teorema 3.18 *([Go], Theorem 3) Sea X un continuo no degenerado. Entonces $C(X)$ es numerablemente aposindético.*

Demostración. Sean $A \in C(X)$ y $\mathcal{B}$ un conjunto cerrado y numerable de $C(X)$ tal que $A \notin \mathcal{B}$. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Como $C(X)$ es un espacio métrico, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B^H_\varepsilon(A)} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Además por el Lema 3.13 existe $\delta > 0$ tal que si $K, L \in 2^X$, $K \subset L$ y $\mu(K) - \mu(L) < \delta$ entonces $H(K, L) < \frac{\varepsilon}{4}$. Definimos $\mathcal{U} = B^H_{\frac{\varepsilon}{4}}(A) \cap \mu^{-1}((\mu(A) - \frac{\delta}{4}, \mu(A) + \frac{\delta}{4}))$. Sea $T = \{\mu(B) : B \in \mathcal{B}\}$. Como $\mathcal{B}$ es numerable, T es numerable, así que existe un número $s \in [\mu(A) - \frac{\delta}{4}, \mu(A) + \frac{\delta}{4}] - T$. Ahora para cada $C \in \overline{\mathcal{U}}$, vamos a construir un arco ordenado de C a un elemento de $\mu^{-1}(s)$.

Si $\mu(C) < s$ entonces tomamos un arco ordenado de C a X, nos fijamos en el elemento D_C del arco tal que $\mu(D_C) = s$ y reparametrizamos linealmente de tal manera que obtengamos un arco ordenado $\alpha_C : [0, 1] \to C(X)$ tal que $\alpha_C(0) = C$ y $\alpha_C(1) = D_C$. Entonces para toda $t \in [0, 1]$ tenemos que:

$$\mu(\alpha_C(t)) - \mu(C) \text{ [illegible] } \mu(C) \leq |s - \mu(A)| + |\mu(A) - \mu(C)| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta.$$

Por tanto $H(C,\alpha_C(t)) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Si $s \leq \mu(C)$ entonces tomamos un punto $x \in C$ y un arco ordenado de $\{x\}$ a C, similarmente obtenemos un arco ordenado $\alpha_C : [0,1] \to C(X)$ tal que $\alpha_C(0) = D_C$ y $\alpha_C(1) = C$ con $\mu(D_C) = s$. Entonces para toda $t \in [0,1]$ tenemos que:

$$\mu(C) - \mu(\alpha_C(t)) \leq \mu(C) - s \leq |\mu(C) - \mu(A)| - |\mu(A) - s| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} < \delta.$$

Por tanto $H(C,\alpha_C(t)) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Definimos $\mathcal{K}' = \overline{\mathcal{U}} \cup (\bigcup_{C \in \overline{\mathcal{U}}} \alpha_C([0,1])) \cup \mu^{-1}(s)$. Sabemos, por el Lema 3.11, que $\mu^{-1}(s)$ es conexo. Por tanto $\mathcal{K}'$ es la unión de un conexo con arcos que lo intersectan a un conexo. Por tanto $\mathcal{K}'$ es conexo.

Por otro lado, para toda $C \in \overline{\mathcal{U}}$ y para toda $t \in [0,1]$, tenemos que $H(A,\alpha_C(t)) \leq H(A,C) + H(C,\alpha_C(t)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$. Por tanto $(\overline{\mathcal{U}} \cup (\bigcup_{C \in \overline{\mathcal{U}}} \alpha_C([0,1]))) \subset B_\varepsilon^H(A)$.

Definimos $\mathcal{K} = \overline{(\overline{\mathcal{U}} \cup (\bigcup_{C \in \overline{\mathcal{U}}} \alpha_C([0,1])))} \cup \mu^{-1}(s)$. Como sabemos que $\mathcal{K}'$ es conexo y que $\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}'}$, obtenemos que $\mathcal{K}$ es conexo. Además tenemos que $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{K}$. Por último tenemos que:

$$\overline{(\overline{\mathcal{U}} \cup (\bigcup_{C \in \overline{\mathcal{U}}} \alpha_C([0,1])))} \cap \mathcal{B} \subset \overline{B_\varepsilon^H(A)} \cap \mathcal{B} = \emptyset \text{ y que}$$
$$\mu^{-1}(s) \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

Lo que nos dice que $\mathcal{K} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Por tanto $\mathcal{K}$ en un subcontinuo de $C(X)$ que cumple que $A \in int\mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Por tanto $C(X)$ es numerablemente aposindético.

Teorema 3.19 *([I2], Theorem B) Sea X un continuo no degenerado. Entonces 2^X es numerablemente aposindético.*

Demostración. Sean $\mathcal{B}$ un subconjunto numerable cerrado de 2^X, $A^\bullet \in 2^X - \mathcal{B}$ y $\mu : 2^X \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Como 2^X es un espacio métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_{2\varepsilon}^H(A^\bullet)} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Definimos $\mathcal{A} = \overline{B_\varepsilon^H(A^\bullet)}$ y $A_0 = \overline{N(\varepsilon, A^\bullet)}$. Sea δ como en el Lema 3.13 aplicado a $\frac{\varepsilon}{2}$. Dada $B \in C(X)$ con $\mu(B) < \delta$, tomamos $x \in B$, entonces $\{x\} \subset B$ y $\mu(B) - \mu(\{x\}) = \mu(B) < \delta$. De manera que $H(\{x\}, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Esto implica que *diám*$B < \varepsilon$. Por tanto si $B \in C(X)$ y $\mu(B) < \delta$ implica que *diám*$B < \varepsilon$. Para cada $t \in [0,\delta]$, definimos $\mathcal{D} = (\mu|C(X))^{-1}(t)$, $\mathcal{E} = (\mu|C(X))^{-1}([0,t])$ y $\mathcal{A}_t = \{A \cup D : A \in \mathcal{A} \text{ y } D \in \mathcal{D}\} \cup \{A \cup E : A \in \mathcal{A},\ E \in \mathcal{E} \text{ y } A \cap E \neq \emptyset\}$. Sabemos, por los Lemas 3.2 y 3.5, que $\mathcal{A}_t$ es un cerrado en 2^X. Además, si $A \in B_\varepsilon^H(A^\bullet)$ y tomamos $p \in A$ entonces tenemos que $A \in \mathcal{A}$, $\{p\} \in \mathcal{E}$ y $A \cap \{p\} \neq \emptyset$. Por tanto $B_\varepsilon^H(A^\bullet) \subset \mathcal{A}_t$.

Ahora mostraremos que $\mathcal{A}_t$ es conexo. Sean $F \in \mathcal{A}_t$ y $\mathcal{F}$ la componente de $\mathcal{A}_t$ tal que $F \in \mathcal{F}$. Para mostrar que $\mathcal{A}_t$ es conexo, basta ver que $A_0 \in \mathcal{F}$ y, para demostrar esto usaremos y probaremos las siguientes cinco afirmaciones.

(1) La componente $\mathcal{F}$ contiene un elemento F_1 tal que $F_1 = A \cup E$ con $A \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{E}$ y $A \cap E \neq \emptyset$.

Si F no es de esta forma entonces $F = A \cup D$ con $A \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathcal{D}$. Sabemos, por el Lema 3.8, que el conjunto $\mathcal{G} = \{A \cup G : G \in \mathcal{D}\}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{A}_t$. Además, $\mathcal{G}$ tiene a F. De modo que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Tomamos un punto $a \in A$, por el Lema 3.10, existe $E \in \mathcal{D}$ tal que $a \in E$. Por tanto $F_1 = A \cup E \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

(2) Sea $A \cup E \in \mathcal{F}$ tal que $A \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{E}$ y $A \cap E \neq \emptyset$. Entonces $A \in \mathcal{F}$.

Tomamos un punto $a_0 \in A \cap E$. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ una arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{a_0\}$ y $\alpha(1) = E$. Sabemos, por el Lema 3.8, que el conjunto $\mathcal{I} = \{A \cup \alpha(s) : s \in [0,1]\}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{A}_t$. Además, $\mathcal{I}$ tiene a $A \cup E$. De modo que $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}$. Por tanto $A = A \cup \{a_0\} \in \mathcal{F}$.

(3) Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Si $p \in \overline{N(\varepsilon, A^\bullet)}$ entonces $A \cup \{p\} \in \mathcal{F}$.

Tomamos $a_0 \in A$, por el Lema 3.10, existe $G \in \mathcal{D}$ tal que $a_0 \in G$. Sea $\alpha : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha(0) = \{a_0\}$ y $\alpha(1) = G$. Sabemos, por el Lema 3.8, que $\mathcal{J} = \{A \cup \alpha(s) : s \in [0,1]\}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{A}_t$. Además, $\mathcal{J}$ tiene a $A = A \cup \alpha(0)$. De modo que $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$. Por tanto $A \cup G = A \cup \alpha(1) \in \mathcal{F}$. De tal forma que el subconjunto conexo, $\{A \cup K : K \in \mathcal{D}\}$, de $\mathcal{A}_t$ está contenido en $\mathcal{F}$. Por el Lema 3.10, sabemos que existe $H \in \mathcal{D}$ tal que $p \in H$. Entonces tenemos que $A \cup H \in \mathcal{F}$. Sea $\beta : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\beta(0) = \{p\}$ y $\beta(1) = G$. Sabemos, por el Lema 3.8, que $\mathcal{K} = \{A \cup \beta(s) : s \in [0,1]\}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{A}_t$. Además, $\mathcal{K}$ contiene a $A \cup H = A \cup \beta(1)$. De modo que $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$. Por tanto $A \cup \{p\} = A \cup \alpha(0) \in \mathcal{F}$.

(4) Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{F}$. Si L es un subconjunto finito de $\overline{N(\varepsilon, A^\bullet)}$ entonces $A \cup L \in \mathcal{F}$.

Supongamos que $L = \{x_1, ..., x_n\} \subset \overline{N(\varepsilon, A^\bullet)}$. Por la afirmación 3, $A \cup \{x_1\} \in \mathcal{F}$ y, como $A \cup \{x_1\} \in \mathcal{A}$, podemos aplicar otra vez la afirmación 3 para obtener que $A \cup \{x_1\} \cup \{x_2\} \in \mathcal{F}$. Procediendo de esta manera, se muestra que $A \cup F \in \mathcal{F}$.

(5) El conjunto A_0 está en $\mathcal{F}$.

Sean $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$ y $\eta > 0$. Como A_0 es compacto existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_n \in A_0$ tales que $A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\eta(a_i)$. Definimos $L = \{a_1, ..., a_n\}$. Entonces tenemos que $A \cup L \subset N(\varepsilon, A^\bullet) \cup A_0 \subset A_0 \subset N(\eta, A_0)$ y que $A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_\eta(a_i) \subset N(\eta, A \cup L)$. De modo que $H(A_0 \cup (A \cup L)) < \eta$. Lo cual implica que:

$$A_0 \in \overline{\{A \cup L : L \text{ es un subconjunto finito de } N(\varepsilon, A^*)\}} \subset \mathcal{F}.$$

Por tanto $\mathcal{A}_t$ es conexo.

Ahora probaremos que si $s,t \in [0,1]$ y $s \neq t$ entonces $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_s = \emptyset$. Supongamos lo contrario, es decir, que existe un elemento $F = A \cup D = A_1 \cup D_1 \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_s$, con $A, A_1 \in \mathcal{A}$, $D, D_1 \in C(X)$, $\mu(D) = t$ o ($\mu(D) \leq t$ y $A \cap D \neq \emptyset$) y $\mu(D_1) = s$ o ($\mu(D_1) \leq s$ y $A_1 \cap D_1 \neq \emptyset$). Si $D \cap A_0 = \emptyset$ entonces $D \cap (A \cup A_1) \subset D \cap A_0 = \emptyset$. Lo cual nos dice que $D \subset D_1$. Como D_1 es un subconjunto conexo de $A \cup D$ concluimos que $D = D_1$. Pero $\mu(D) = t$, $\mu(D_1) = s$ y $s \neq t$. Lo cual es absurdo. Por tanto $D \cap A_0 \neq \emptyset$. Como $\mu(D) \leq \delta$, entonces $diám D < \varepsilon$. Lo cual nos dice que $A \cup D \subset N(\varepsilon, A_0) \subset N(2\varepsilon, A^*)$. Lo que implica que $\mathcal{H}(A \cup D, A^*) < 2\varepsilon$ (Donde $\mathcal{H}$ es la métrica de Hausdorff para 2^X). Por tanto $A \cup D \notin \mathcal{B}$. Lo cual es una contradicción que es consecuencia de suponer que $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_s \neq \emptyset$. Por tanto $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_t \cap \mathcal{A}_s = \emptyset$.

Entonces, tenemos que los elementos de la familia $\{\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_t : t \in [0,\delta]\}$ son ajenos dos a dos. Como $\mathcal{B}$ es numerable, existe $t^* \in [0,\delta]$ tal que $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{t^*} = \emptyset$. Lo cual nos dice que $\mathcal{A}_{t^*}$ es un subcontinuo de 2^X que contiene a A^* en su interior y $\mathcal{A}_{t^*} \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por tanto 2^X es numerablemente aposindético.

Las siguientes preguntas son problemas abiertos.

1. ¿Es $C(X)$ 0-dimensional aposindético?
2. ¿Es 2^X 0-dimensional aposindético?

Una respuesta afirmativa a la siguiente pregunta podría ayudar a resolver las dos preguntas anteriores.

3. ¿Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado 0-dimensional de $C(X)$ y A es un elemento de $C(X) - F_1(X)$ tal que $A \notin \mathcal{B}$, entonces existen $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in (0, \mu(X))$ tales que $A \in \mu^{-1}(t)$ y $\mathcal{B} \cap \mu^{-1}(t) = \emptyset$?

Definición 3.20 *Sea P una propiedad topológica. Entonces decimos que P es una propiedad de Whitney si se cumple que si un continuo X tiene la propiedad P entonces $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad P para toda función de Whitney μ para $C(X)$ y para toda t tal que $0 < t < \mu(X)$.*

Teorema 3.21 *([Pe], Proposition 9) Ser aposindético es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Supongamos que el continuo X es aposindético. Sean $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney, $A, B \in \mu^{-1}(t)$ con $t \in (0, \mu(X))$ y tales que $A \neq B$. Como $\mu(A) = \mu(B)$, tenemos que $A - B \neq \emptyset \neq B - A$. De modo que existe $y \in B - A$. Como X es aposindético, para toda $x \in A$, existe un subcontinuo M_x de X tal que $x \in int M_x$ y $y \notin M_x$. Tenemos que $\{int M_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto. Por tanto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{x_i}$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_{x_i}$. El conjunto M es cerrado y, además, es conexo ya que es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo A. Por tanto M es un subcontinuo de X. Sea $\mathcal{M} = (\mu|C(M))^{-1}(t)$. Por el Lema 3.11, sabemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Sea $\mathcal{U} = \{K \in \mu^{-1}(t) : K \subset intM\}$. Por el Lema 3.2, tenemos que $\mathcal{U}$ es abierto en $\mu^{-1}(t)$. Sabemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{x_i} \subset int \bigcup_{i=1}^{n} M_{x_i} = intM$. Por tanto $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Además ya que $y \notin M_x$ para ninguna $x \in A$, tenemos que $B \not\subset M$. Por tanto $B \notin \mathcal{M}$. De modo que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in int\mathcal{M}$ y $B \notin \mathcal{M}$. Lo cual nos dice que $\mu^{-1}(t)$ es aposindético.

Teorema 3.22 *([Pe], Proposition 10) Ser finitamente aposindético es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Supongamos que el continuo X es finitamente aposindético. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney. Tomamos el conjunto $\{A_1, ..., A_n, A\} \subset \mu^{-1}(t)$ para alguna $t \in (0, \mu(X))$ tal que $A \neq A_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Entonces para cada $i \in \{1, ..., n\}$, existe $a_i \in A_i - A$. Como X es finitamente aposindético para toda $x \in A$, existe un subcontinuo M_x de X tal que $x \in intM_x$ y $M_x \cap \{a_1, ..., a_n\} = \emptyset$. Tenemos que $\{intM_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A y que A es compacto. Por tanto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{x_i}$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_{x_i}$. El conjunto M es cerrado y, además, es conexo ya que es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo A. Por tanto M es un subcontinuo de X. Sea $\mathcal{M} = (\mu|C(M))^{-1}(t)$. Por el Lema 3.11, sabemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Sea $\mathcal{U} = \{K \in \mu^{-1}(t) : K \subset intM\}$. Por el Lema 3.2 tenemos que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mu^{-1}(t)$. Ahora sabemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{x_i} \subset int \bigcup_{i=1}^{n} M_{x_i} = intM$. Por tanto $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$. Además, ya que $M_x \cap \{a_1, ..., a_n\} = \emptyset$ para toda $x \in A$, tenemos que $A_i \not\subset M$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por tanto $\mathcal{M} \cap \{A_1, ..., A_n\} = \emptyset$. De modo que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in int\mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \cap \{A_1, ..., A_n\} = \emptyset$. Con lo cual concluimos que $\mu^{-1}(t)$ es finitamente aposindético.

Teorema 3.23 *([Pe], Proposition 11) Ser mutuamente aposindético es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Supongamos que el continuo X es mutuamente aposindético. Sean $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $A_1, A_2 \in \mu^{-1}(t)$, con $t \in (0, \mu(X))$, tales que $A_1 \neq A_2$. Entonces, tenemos que existen $a_1 \in A_1 - A_2$ y $a_2 \in A_2 - A_1$. Como X es mutuamente aposindético, existen subcontinuos ajenos M_1 y M_2 de X tales que, para alguna $\eta > 0$, $B_\eta(a_1) \subset M_1$ y $B_\eta(a_2) \subset M_2$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < mín\{\eta, d(a_1, M_2), d(a_2, M_1), \frac{1}{3}d(a_2, A_1)\}$. Vamos a construir subcontinuos ajenos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de $\mu^{-1}(t)$ tales que $B_\delta^H(A_1) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_1$ y $B_\delta^H(A_2) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_2$. Sea $i \in \{1, 2\}$.

Distinguimos dos casos:

(1) El caso en el que $\mu(M_i) < t$. Por el Lema 3.10, existe $A_i' \in \mu^{-1}(t)$ tal que $M_i \subset A_i' \subset M_i \cup A_i$. Definimos $\mathcal{C}_i = \{A_i'\}$. Tomamos $D \in B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t)$ debido a que $A_i \subset N(\delta, D)$ y a que $B_\delta(a_i) \subset M_i$, existe $d \in D \cap B_\delta(a_i) \subset D \cap A_i'$. Entonces, por el Lema 3.9, existe una función continua $\alpha_D : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha_D(0) = D$, $\alpha_D(1) = A_i'$ y $d \in \alpha_D(s) \subset D \cup A_i'$ para toda $s \in [0,1]$. Definimos $\mathcal{D}_i = \cup\{\alpha_D([0,1]) : D \in B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t)\}$. Sea $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cup \overline{\mathcal{D}_i}$. Tenemos que $B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_i$. Además, como $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ es la unión de conjuntos conexos con el punto en común A_i', obtenemos que $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ es conexo. Lo cual implica que $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cup \overline{\mathcal{D}_i}$ es conexo. Por tanto $\mathcal{A}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(X)$ tal que $B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_i$.

(2) En el caso en el que $\mu(M_i) \geq t$. Definimos $\mathcal{C}_i = (\mu|C(M_i))^{-1}(t)$. Tomamos $D \in B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t)$, debido a que $A_i \subset N(\delta, D)$, existe $d \in D \cap B_\delta(a_i) \subset D \cap M_i$. Por el Lema 3.10, existe $D' \in \mu^{-1}(t)$ tal que $d \in D' \subset M_i$. Entonces, por el Lema 3.9, existe una función continua $\alpha_D : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha_D(0) = D$, $\alpha_D(1) = D'$ y $d \in \alpha_D(s) \subset D \cup D'$ para toda $s \in [0,1]$. Definimos $\mathcal{D}_i = \cup\{\alpha_D([0,1]) : D \in B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t)\}$. Sea $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cup \overline{\mathcal{D}_i}$. Tenemos que $B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_i$. Además, por el Lema 3.11, sabemos que $\mathcal{C}_i$ es conexo. De modo que $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ es la unión de conjuntos conexos que intersectan al conexo fijo $\mathcal{C}_i$. De lo cual obtenemos que $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{D}_i$ es conexo. Lo cual implica que $\mathcal{A}_i = \mathcal{C}_i \cup \overline{\mathcal{D}_i}$ es conexo. Por tanto $\mathcal{A}_i$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(X)$ tal que $B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}_i$.

Con esto terminamos la construcción de $\mathcal{A}_i$.

Tomamos $F \in \mathcal{A}_i$. Si $F \in \mathcal{C}_i$ tenemos dos opciones. Si $\mathcal{A}_i$ se escogió como en el primer caso, $F = A_i'$ entonces $M_i \subset F$. De modo que $B_\delta(a_i) \subset F$. Por tanto $F \cap \overline{B_\delta(a_i)} \neq \emptyset$. Si $\mathcal{A}_i$ se eligió como en el segundo caso entonces $F \subset M_i$. Si $F \in \overline{\mathcal{D}_i}$ entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_i$ tal que $F_n \to F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha_{D_n}(t_n)$ para algún $D_n \in B_\delta^H(A_i) \cap \mu^{-1}(t)$ y para algún $t_n \in [0,1]$. Debido a la forma en que construimos el conjunto $\mathcal{D}_i$, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $d_n \in \alpha_{D_n}(t_n) \cap B_\delta(a_i)$. Consideremos la sucesión $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B_\delta(a_i) \subset \overline{B_\delta(a_i)}$. Como $\overline{B_\delta(a_i)}$ es un conjunto compacto, existen una subsucesión $\{d_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y un punto $d \in \overline{B_\delta(a_i)}$ tales que $d_{n_k} \to d$. Como $d_{n_k} \in F_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $d_{n_k} \to d$ entonces $d \in F$. Por tanto $F \cap \overline{B_\delta(a_i)} \neq \emptyset$.

Con lo que concluimos que si $F \in \mathcal{A}_i$ entonces $F \subset M_i$ o $F \cap \overline{B_\delta(a_i)} \neq \emptyset$.

A continuación mostraremos que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Tomamos $F \in \mathcal{A}_1$. Si $F \in \mathcal{C}_1$ entonces analizamos dos posibilidades.

Si $\mathcal{A}_i$ se escogió como en el primer caso, $F = A_1'$, entonces $M_1 \subset F \subset M_1 \cup A_1$. Como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ entonces $F \not\subset M_2$. Además debido a que $\delta < d(a_2, A_1), d(a_2, M_1)$ obtenemos que $F \cap \overline{B_\delta(a_2)} = \emptyset$. Por tanto $F \notin \mathcal{A}_2$.

Si $\mathcal{A}_i$ se eligió como en el segundo caso, $F \subset M_1$, como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ entonces $F \not\subset M_2$. Además ya que $\delta < d(a_2, M_1)$ entonces $F \cap \overline{B_\delta(a_2)} = \emptyset$. Por tanto $F \notin \mathcal{A}_2$.

Ahora, si $F \in \overline{\mathcal{D}_1}$ entonces $F \subset M_1 \cup \overline{N(\delta, A_1)}$ y $F \cap \overline{B_\delta(a_1)} \neq \emptyset$. Como $\delta < d(a_1, M_2)$, entonces $F \not\subset M_2$. Además, debido a que $\delta < d(a_2, M_1)$, obtenemos que $M_1 \cap \overline{B_\delta(a_2)} = \emptyset$. Como $\delta < \frac{1}{3}d(a_2, A_1)$ tenemos que $\overline{N(\delta, A_1)} \cap \overline{B_\delta(a_2)} = \emptyset$. Lo cual implica que $F \cap \overline{B_\delta(a_2)} = \emptyset$. Por tanto $F \notin \mathcal{A}_2$.

Por tanto $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Esto termina la prueba de que $\mu^{-1}(t)$ es mutuamente aposindético.

Teorema 3.24 *([Pe], Proposition 12) Ser semiaposindético es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Supongamos que el continuo X es semiaposindético. Sea $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney, $A, B \in \mu^{-1}(t)$, con $t \in (0, \mu(X))$, tales que $A \neq B$. Entonces tenemos que existen $a \in A - B$ y $b \in B - A$. Como X es semiaposindético, existe un subcontinuo M de X tal que para uno de a y b, digamos a, $a \in intM$ y $b \notin M$. Sea $\eta > 0$ tal que $B_\eta(a) \subset M$. Sea $\delta > 0$ tal que $\delta < mín\{\eta, \frac{1}{3}d(a, B)\}$. Vamos a construir un subcontinuo $\mathcal{A}$ de $\mu^{-1}(t)$ tal que $B_\delta^H(A) \cap \mu^{-}(t) \subset \mathcal{A}$ y $B \notin \mathcal{A}$. Consideramos dos casos:

Primer caso $\mu(M) < t$. Por el Lema 3.10, existe $A' \in \mu^{-1}(t)$ tal que $M \subset A' \subset M \cup A$. Definimos $\mathcal{C} = \{A'\}$. Tomamos $D \in B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t)$, debido a que $A \subset N(\delta, D)$, existe $d \in D \cap B_\delta(a) \subset D \cap A'$. Entonces, por el Lema 3.9, existe una función continua $\alpha_D : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha_D(0) = D$, $\alpha_D(1) = A'$ y $d \in \alpha_D(s) \subset D \cup A'$ para toda $s \in [0,1]$. Definimos $\mathcal{D} = \cup\{\alpha_D([0,1]) : D \in B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t)\}$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{D}}$. Tenemos que $B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}$. Además, como $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es la unión de conjuntos conexos con el elemento en común, A', obtenemos que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es conexo. Lo cual implica que $\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{D}}$ es conexo. Por tanto $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(X)$ tal que $B_\delta^H(A) \cap \mu^{-}(t) \subset \mathcal{A}$.

Segundo caso $\mu(M) \geq t$. Definimos $\mathcal{C} = (\mu|C(M))^{-1}(t)$. Tomamos $D \in B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t)$, debido a que $A \subset N(\delta, D)$, existe $d \in D \cap B_\delta(a) \subset D \cap M$. Por el Lema 3.10, existe $D' \in \mu^{-1}(t)$ tal que $d \in D' \subset M_i$. Entonces por el Lema 3.9, existe una función continua $\alpha_D : [0,1] \to \mu^{-1}(t)$ tal que $\alpha_D(0) = D$, $\alpha_D(1) = D'$ y $d \in \alpha_D(s) \subset D \cup D'$ para toda $s \in [0,1]$. Definimos $\mathcal{D} = \cup\{\alpha_D([0,1]) : D \in B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t)\}$. Sea $\mathcal{A} =$

$\mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{D}}$. Tenemos que $B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}$. Además, por el Lema 3.11, sabemos que $\mathcal{C}$ es conexo. De modo que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es la unión de conjuntos conexos que intersectan al conexo fijo $\mathcal{C}$. De lo cual obtenemos que $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es conexo. De donde se tiene que $\mathcal{A} = \mathcal{C} \cup \overline{\mathcal{D}}$ es conexo. Por tanto $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(X)$ tal que $B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{A}$.

Con esto terminamos la construcción de $\mathcal{A}$.

Tomamos $F \in \mathcal{A}$. Si $F \in \mathcal{C}$ tenemos dos opciones. Si $\mathcal{A}$ se escogió como en el primer caso, $F = A'$, entonces $M \subset F$. De modo que $B_\delta(a) \subset F$. Por tanto $F \cap \overline{B_\delta(a)} \neq \emptyset$. Si $\mathcal{A}$ se eligió como en el segundo caso entonces $F \subset M$. Si $F \in \overline{\mathcal{D}}$ entonces existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ tal que $F_n \to F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha_{D_n}(t_n)$ para algún $D_n \in B_\delta^H(A) \cap \mu^{-1}(t)$ y para algún $t_n \in [0,1]$. Debido a la forma en que construimos el conjunto $\mathcal{D}$, sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $d_n \in \alpha_{D_n}(t_n) \cap B_\delta(a)$. Consideremos la sucesión $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_\delta(a) \subset \overline{B_\delta(a)}$. Como $\overline{B_\delta(a)}$ es un conjunto compacto, existen una subsucesión $\{d_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un punto $d \in \overline{B_\delta(a)}$ tales que $d_{n_k} \to d$. Como $d_{n_k} \in F_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $d_{n_k} \to d$ entonces $d \in F$. Por tanto $F \cap \overline{B_\delta(a)} \neq \emptyset$.

Con lo que concluimos que si $F \in \mathcal{A}$ entonces $F \subset M$ o $F \cap \overline{B_\delta(a)} \neq \emptyset$.

A continuación mostraremos que $B \notin \mathcal{A}$. Como $b \in B$ y $b \notin M$, entonces $B \not\subset M$. Además, debido a que $\delta < \frac{1}{3}d(a, B)$, obtenemos que $B \cap \overline{B_\delta(a)} = \emptyset$. Por tanto $B \notin \mathcal{A}$.

Lo que nos dice que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $B_\delta^H(A) \subset \mathcal{A}$ y $B \notin \mathcal{A}$. Por tanto $\mu^{-1}(t)$ es semiaposindético.

El siguiente lema nos será útil para probar que la propiedad de ser numerablemente aposindético es una propiedad de Whitney.

Lema 3.25 *Sea X un continuo. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto 0-dimensional, compacto y no vacío de $C(X)$. Sean W y U subconjuntos abiertos de X tales que $\overline{W} \subset U$ y $B - U \neq \emptyset$ para toda $B \in \mathcal{B}$. Entonces existe una función continua $s : \mathcal{B} \to X$ tal que $s(B) \in B - W$ para toda $B \in \mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}mín(\{d(w, x) : w \in \overline{W} \text{ y } x \notin U\} \cup \{1\})$. Por el Lema 2.8 existe una sucesión de cubiertas $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$:

(1) la cubierta $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$

(2) los elementos de $\mathcal{C}_n$ son abiertos y cerrados de $\mathcal{B}$, ajenos entre sí, no vacíos y de diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2^n}$.

Vamos a definir, inductivamente, una sucesión de funciones continuas $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n : \mathcal{B} \to X$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y, que cumple con las siguientes propiedades:

(a) $s_1(B) \notin U$ para toda $B \in \mathcal{B}$.

(b) para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_n$, $s_n|\mathcal{A}$ es una constante k para alguna $k \in \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$.

(c) para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(s_n(A), s_{n+1}(A)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ para toda $A \in \mathcal{B}$.

Para $n = 1$. Dada $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_1$, elegimos $A_0 \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, tenemos que $A_0 \in \mathcal{B}$. De modo que podemos tomar un punto $p_{\mathcal{A}} \in A_0 - U \subset \cup\{A : A \in \mathcal{A}\} - U$. Definimos $s_1(A) = p_{\mathcal{A}}$ para toda $A \in \mathcal{A}$. Haciendo esto para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_1$, tenemos definida $s_1 : \mathcal{B} \to X$. Además, como s_1 es constante en subconjuntos cerrados y ajenos de una cubierta finita de $\mathcal{B}$, tenemos que s_1 es continua.

Ahora supongamos que han sido definidas $s_1, ..., s_n$. Vamos a definir s_{n+1}. Tomamos $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_{n+1}$. Como $\mathcal{C}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{C}_n$, existe $\mathcal{D} \in \mathcal{C}_n$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Elegimos $A_0 \in \mathcal{A}$. Sabemos que $s_n|\mathcal{D}$ es una constante p_0 para alguna $p_0 \in \cup\{D : D \in \mathcal{D}\}$. Sea $D_0 \in \mathcal{D}$ tal que $p_0 \in D_0$. Como $A_0, D_0 \in \mathcal{D}$ tenemos que $H(A_0, D_0) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Entonces, existe $p_{\mathcal{A}} \in A_0 \subset \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$ tal que $d(p_{\mathcal{A}}, p_0) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Definimos $s_{n+1}(A) = p_{\mathcal{A}}$ para toda $A \in \mathcal{A}$. Tenemos que para toda $A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, $d(s_n(A), s_{n+1}(A)) = d(p_0, p_{\mathcal{A}}) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Haciendo esto para cada $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_{n+1}$ tenemos definida $s_{n+1} : \mathcal{B} \to X$. Además, como s_{n+1} es constante en subconjuntos cerrados y ajenos de una cubierta finita de $\mathcal{B}$, tenemos que s_{n+1} es continua. Esto concluye la construcción inductiva de la sucesión de funciones $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por tanto, existe una sucesión de funciones continuas $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n : \mathcal{B} \to X$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y cumple con las propiedades (a), (b) y (c).

Mostraremos que la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n < m$. Entonces para toda $A \in \mathcal{B}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
d(s_n(A), s_m(A)) &\leq d(s_n(A), s_{n+1}(A)) + ... + d(s_{m-1}(A), s_m(A)) \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2^n} + ... + \tfrac{\varepsilon}{2^{m-1}} \\
&= \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{m-n} \tfrac{\varepsilon}{2^i}\right) \\
&< \tfrac{1}{2^n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^i}\right) \\
&= \tfrac{2\varepsilon}{2^n} \\
&= \tfrac{\varepsilon}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Por tanto $\sup\{d(s_n(A), s_m(A)) : A \in \mathcal{B}\} \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Lo cual implica que la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy.

Como s_n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$, y X es completo concluimos que existe una función continua $s : \mathcal{B} \to X$ tal que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a s.

Tomamos $A \in \mathcal{B}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \in \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in \mathcal{C}_n$. Además, sabemos que $diám\mathcal{A} < \frac{\varepsilon}{2^n}$ y que $s_n|\mathcal{A}$ es una constante k para alguna $k \in \cup\{B : B \in \mathcal{A}\}$. Sea $B \in \mathcal{A}$ tal que $k \in B$. Como

$A, B \in \mathcal{A}$, entonces $H(A,B) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. De modo que $B \subset N(\frac{\varepsilon}{2^n}, A)$. Por tanto $k = s_n(A) \in N(\frac{\varepsilon}{2^n}, A) \subset N(\frac{\varepsilon}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}, A) \subset N(\frac{\varepsilon}{2^{n-2}}, A) \subset \overline{N(\frac{\varepsilon}{2^{n-2}}, A)}$. Ahora, como la sucesión $\{\{s_n(A)\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\{s(A)\}$ y la sucesión $\{\overline{N(\frac{\varepsilon}{2^{n-2}}, A)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, por el Lema 3.1, tenemos que $s(A) \in A$.

Supongamos existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $s(A) \in W$. Ya mostramos que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$ entonces la $d(s_n(A), s_m(A)) < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Haciendo tender m a ∞, obtenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(s_n(A), s(A)) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. En particular $d(s_1(A), s(A)) \leq \varepsilon$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq d(s_1(A), s(A)) \\
&\geq mín(\{d(w,x) : w \in \overline{W} y x \notin U\} \cup \{1\}) \\
&> \tfrac{1}{2} mín(\{d(w,x) : w \in \overline{W} y x \notin U\} \cup \{1\}) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lo cual es absurdo. Por tanto $s(A) \notin W$ para ninguna $A \in \mathcal{B}$.

Teorema 3.26 *([12], Theorem A) Ser numerablemente aposindético es una propiedad de Whitney.*

Demostración. Supongamos que el continuo X es numerablemente aposindético. Sean $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ una función de Whitney y $t \in (0, \mu(X))$. Sean $\mathcal{B}$ un subconjunto numerable cerrado de $\mu^{-1}(t)$ y $A \in \mu^{-1}(t) - \mathcal{B}$. Como $\mu^{-1}(t)$ es un espacio métrico existe $\varepsilon > 0$ tal que $\left(\overline{B_\varepsilon^H(A)} \cap \mu^{-1}(t)\right) \cap \mathcal{B} = \emptyset$. Por el Lema 3.12, existe $\delta > 0$ tal que si $C \in \mu^{-1}(t)$ y $C \subset N(\delta, A)$ entonces $H(A, C) < \varepsilon$. Sean $W = N(\frac{\delta}{2}, A)$ y $U = N(\delta, A)$ entonces $\overline{W} \subset U$. Sea $B \in \mathcal{B}$. Si $B \subset U$ entonces $H(A, B) < \varepsilon$. Lo cual es absurdo. Por tanto $B - U \neq \emptyset$ para toda $B \in \mathcal{B}$. Por el Lema 3.25, existe una función continua $s : \mathcal{B} \to X$ tal que $s(B) \in B - W$ para toda $B \in \mathcal{B}$. Observemos que, como $\mathcal{B}$ es un subconjunto numerable y cerrado de $\mu^{-1}(t)$, tenemos que $s(\mathcal{B})$ es un subconjunto numerable y cerrado de X. Además tenemos que $A \cap s(\mathcal{B}) = \emptyset$. Como X es numerablemente aposindético, para toda $a \in A$, existe un subcontinuo M_a de X tal que $a \in intM_a$ y $M_a \cap s(\mathcal{B}) = \emptyset$. Tenemos que $\{intM_a : a \in A\}$ es una cubierta abierta de A y A es compacto. Por tanto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{a_i}$. Sea $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i}$. El conjunto M es cerrado, además, es conexo ya que es la unión de subconjuntos conexos que intersectan al conexo fijo A. Por tanto M es un subcontinuo de X. Sea $\mathcal{M} = (\mu|C(M))^{-1}(t)$. Por el Lema 3.11, sabemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$. Sea $\mathcal{U} = \{K \in \mu^{-1}(t) : K \subset intM\}$. Por el lema 3.2, tenemos que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mu^{-1}(t)$. Ahora sabemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} intM_{a_i} \subset int \bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i} = intM$. Por tanto $A \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

Supongamos existe $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{M}$, entonces $B \in C(M) \cap \mu^{-1}(t)$. De modo que $B \subset M$. Lo cual implica que $s(B) \in M$. Lo que es una contradicción. Por tanto $\mathcal{B} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Entonces tenemos que $\mathcal{M}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in int\mathcal{M}$ y $\mathcal{B} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. Lo cual nos dice que $\mu^{-1}(t)$ es numerablemente aposindético.

Capítulo 4

Funciones a las Esferas

En este capítulo desarrollamos propiedades de funciones que entran a las esferas S^n. En general este tipo de funciones ayudan a determinar si un espacio tiene ciertas características relacionadas con la dimensión o con los tipos de agujeros que posee. Entre otras cosas, probamos que una función continua de un espacio métrico compacto a S^1 se puede levantar continuamente a la recta real si y sólo si es homotópica a una constante. Este resultado es cierto para cualquier espacio topológico pero su prueba es bastante más elaborada que la que presentamos aquí para los espacios métricos compactos. Otra herramienta útil que se muestra en este capítulo es que toda esfera S^n es un retracto absoluto de vecindad (ANR). Finalmente, probamos que toda función continua de $C(X)$ a S^1 es homotópica a una constante. En la literatura, este último resultado aparece como consecuencia de la unicoherencia de $C(X)$. Sin embargo, la manera de llegar a dicha unicoherencia es usando un camino muy largo que incluye representar a $C(X)$ como límite inverso de poliedros contraíbles.

Lema 4.1 *Sean X y Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \to x$ para algún $x \in X$ existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(x_{n_k}) \to f(x)$ entonces f es continua.*

Demostración. Supongamos que el resultado no es cierto, es decir, que f no es continua en x para algún $x \in X$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n \to x$ y $f(x_n) \not\to f(x)$. Asi que existe un abierto U de Y tal que $f(x) \in U$ y, para toda $N \in \mathbb{N}$, existe

$n \geq N$ tal que $f(x_n) \notin U$. Entonces, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_{n_1}) \notin U$. También existe $n_2 \geq n_1 + 1$ tal que $f(x_{n_2}) \notin U$. Procediendo de esta manera, existe una sucesión $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tal que $f(x_{n_k}) \notin U$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por hipótesis existe una subsucesión de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (para no escribir más subíndices podemos suponer que es ella misma) tal que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Esto es imposible pues $f(x) \in U$ y $f(x_{n_k}) \notin U$ para ninguna $k \in \mathbb{N}$. Esto concluye la prueba del lema.

Lema 4.2 *Sea C un subconjunto cerrado de un espacio métrico separable X y sea $f : C \to S^n$ una función continua. Entonces existe un subconjunto abierto U de X que contiene a C tal que f se puede extender a una función continua definida en U (es decir, S^n es un ANR).*

Demostración. Consideremos a S^n como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces se tiene que $f : C \to \mathbb{R}^{n+1}$, sean $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1} : C \to \mathbb{R}$ las funciones coordenadas de f. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, por el Teorema de Extensión de Tietze ([Du], pág. 149), existe una función continua $F_i : X \to \mathbb{R}$ la cual es una extensión de f_i.

Sea $U = \{x \in X : \sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2 > 0\}$. El conjunto U es abierto ya que $U = \bigcup_{i=1}^{n+1} (X - (F_i^{-1}(0)))$. Además, dada $x \in C$, como $f(x) \in S^n$ y $F_i|C = f_i$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)^2 = 1$, por tanto $C \subset U$.

Definimos $F : U \to S^n$ como $F(x) = \left(\frac{F_1(x)}{|\sum_{i=1}^{n-1} F_i(x)^2|^{1/2}}, \ldots, \frac{F_{n+1}(x)}{|\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2|^{1/2}} \right)$.
La función F está bien definida y es continua porque, si tomamos $x \in U$ entonces $\|F(x)\| = 1$, lo cual implica que $F(x) \in S^n$.

Ahora, si $x \in C$ entonces sabemos que $f(x) \in S^n$, $F_i|C = f_i$ y $\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(x)^2 = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} F(x) &= \left(\frac{F_1(x)}{|\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2|^{1/2}}, \ldots, \frac{F_{n+1}(x)}{|\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x)^2|^{1/2}} \right) \\ &= (F_1(x), \ldots, F_{n+1}(x)) \\ &= (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $F|C = f$. Por tanto F es la extensión deseada de f.

Definición 4.3 *Sean X y Y dos espacios topológicos. Decimos que una función $f : X \to Y$ es homotópica a una función $g : X \to Y$ (y lo denotamos como $f \sim g$), si existe una función continua $h : X \times [0, 1] \to Y$ la cual satisface que $h(x, 0) = f(x)$ y que $h(x, 1) = g(x)$ para toda $x \in X$.*

Lema 4.4 *(Lema del Tubo) Sean C un subconjunto de un espacio topológico X y U un abierto de $X \times [0,1]$ que contiene a $C \times [0,1]$. Entonces existe un abierto V de X que contiene a C tal que $V \times [0,1]$ está contenido en U.*

Demostración. Primero vamos a probar que, para todo punto c de C, existe un abierto V de X que tiene a c y que $V \times [0,1] \subset U$. Consideremos el segmento $\{c\} \times [0,1]$ el cual esta contenido en U. Sea $(c,t) \in \{c\} \times [0,1]$. Como $(c,t) \in U$, existen un abierto W_t de X y un intervalo abierto J_t de $[0,1]$ tal que $(c,t) \in W_t \times J_t \subset U$. Como $[0,1]$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $t_1, ..., t_n$ tales que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} J_{t_i}$. Sea $V_c = \bigcap_{i=1}^{n} W_{t_i}$. Entonces V_c es un abierto de X que cumple con que $\{c\} \times [0,1] \subset V_c \times [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} (W_{t_i} \times J_{t_i}) \subset U$. Si hacemos $V = \bigcup_{c \in C} V_c$ entonces obtenemos un abierto de X que contiene C y satisface que $V \times [0,1] \subset U$.

Lema 4.5 *(Teorema de Extensión de Borsuk). Sean C un subconjunto cerrado de un espacio métrico separable X y $f : C \to S^n$ y $g : C \to S^n$ dos funciones continuas y homotópicas. Entonces si existe una función continua $F : X \to S^n$ que es una extensión de f entonces se tiene que existe una función continua $G : X \to S^n$ la cual es una extensión de g, con F y G homotópicas.*

Demostración. Como f y g son homotópicas existe una función continua $h : C \times [0,1] \to S^n$ que cumple que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = g(x)$ para toda $x \in C$. También por hipótesis existe una función continua $F : X \to S^n$ que toma los mismos valores que f en C. Sea $W = (X \times \{0\}) \cup (C \times [0,1])$. Entonces W es un subconjunto cerrado de $X \times [0,1]$. Definimos una función $H' : W \to S^n$ como

$$H'(x,t) = \begin{cases} F(x) & \text{si } t = 0 \\ h(x,t) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Si $t = 0$ y $x \in C$ entonces $F(x) = f(x) = h(x,0)$. Esto muestra que H' está bien definida. Además, H' es continua pues está definida por funciones continuas en dos subconjuntos cerrados de W.

Por el Lema 4.2, existen un abierto U de $X \times [0,1]$ que contiene a W y una función continua $H : U \to S^n$ que es una extensión de H'. Por el Lema 4.4, existe un abierto V de X que contiene a C, el cual cumple con que $V \times [0,1] \subset U$. Notemos que H está definida para cualquier $(x,t) \in V \times [0,1]$, más aún, también está definida para todos los puntos de la forma $(x,0)$ con $x \in X$.

Ya que C y $X - V$ son dos subconjuntos cerrados ajenos de X, por el Lema de Urysohn ([Du], pág. 146), existe una función continua

$\rho : X \to [0,1]$ tal que $\rho(x) = 1$ para toda $x \in C$, y $\rho(x) = 0$ para toda $x \in X - V$.

Ahora consideremos la función $G' : X \times [0,1] \to S^n$ definida como $G'(x,t) = H(x, t\rho(x))$. Si $x \notin V$ entonces $\rho(x) = 0$, por tanto $(x, t\rho(x)) = (x, 0)$ para toda $t \in [0,1]$, lo cual muestra que G' está bien definida. La función G' es continua ya que las funciones, ρ, H, $\varphi : X \times [0,1] \to X \times [0,1]^2$ definida como $\varphi(x,t) = (x,(t,\rho(x)))$ y $\psi : X \times [0,1]^2 \to X \times [0,1]$ definida por $\psi(x,(t,s)) = (x, ts)$, son continuas y $G' = H\psi\varphi$.

Definimos $G : X \to S^n$ por $G(x) = G'(x,1)$. Sea $x \in C$, entonces $\rho(x) = 1$, por tanto se tiene que $G(x) = G'(x,1) = H(x,1) = H'(x,1) = h(x,1) = g(x)$. La función G es continua ya que $G = G'|X \times \{1\}$. Por tanto, G es la extensión deseada de g.

Además, $G'(x,0) = H(x,0) = H'(x,0) = F(x)$ para toda $x \in X$, y $G'(x,1) = G(x)$ para toda $x \in X$, por definición, por tanto se tiene que F y G son homotópicas lo cual completa la prueba.

Para la demostración de los siguientes resultados consideraremos la función exponencial $e : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $e(x) = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Sabemos que e es continua. Además tiene como imagen el círculo unitario pues $|e(x)| = 1$ para toda $x \in X$.

Definición 4.6 *Sean X un continuo y $f : X \to S^1$ una función continua. Decimos que f se puede levantar si existe una función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ \varphi = f$.*

Lema 4.7 *(Teorema del levantamiento único). Si Z es un espacio topológico conexo y $f, g : Z \to \mathbb{R}$ son funciones continuas tales que $e \circ f = e \circ g$ y existe $z \in Z$ tal que $f(z) = g(z)$. Entonces $f = g$.*

Demostración. Sabemos que la función $f - g : Z \to \mathbb{R}$ definida por $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ es continua. Ahora para toda $x \in Z$ tenemos que:

$$e((f-g)(x)) = e(f(x) - g(x)) = e(f(x))e(-g(x)) = \frac{e(f(x))}{e(g(x))} = 1.$$

De modo que $(f-g)(Z) \subset e^{-1}(1) = \{2\pi m : m \in \mathbb{Z}\}$. Debido a que X es conexo y $(f-g)(z) = 0$ tenemos que $(f-g)(Z) = \{0\}$. Lo cual nos dice que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in Z$. Por tanto $f = g$.

Lema 4.8 *Sean X un espacio topológico y $f, g : X \to S^1$ funciones continuas. Si f se puede levantar y $|f(x) - g(x)| < 2$ para toda $x \in X$ entonces g se puede levantar.*

Demostración. Ya que $|f(x) - g(x)| < 2$ para toda $x \in X$, tenemos que la función $\frac{g}{f} : X \to S^1$ definida como $\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ nunca toma el valor -1. Definimos $e' = e|(-\pi,\pi) : (-\pi,\pi) \to S^1 - \{-1\}$. Notemos que e' es un homeomorfismo de $(-\pi,\pi)$ sobre $S^1 - \{-1\}$. Ahora, como f se puede levantar, existe una función continua $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $e o \varphi = f$. Definimos una función $\alpha : X \to \mathbb{R}$ como $\alpha(x) = (e')^{-1}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) + \varphi(x)$. Tenemos que α es continua, ya que e' es un homeomorfismo, $\frac{g}{f}$ nunca toma el valor -1 y que φ es continua. Además se tiene que:

$$
\begin{aligned}
e(\alpha(x)) &= e\left((e')^{-1}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right) + \varphi(x)) \\
&= e\left((e')^{-1}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right) e(\varphi(x)) \\
&= \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) f(x) \\
&= g(x).
\end{aligned}
$$

Por tanto g se puede levantar.

Lema 4.9 *Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to S^1$ una función continua. Entonces $f \sim 1$ si y sólo si f se puede levantar.*

Demostración. Supongamos que $f \sim 1$. Entonces, existen una función continua $h : X \times [0,1] \to S^1$ y $z \in S^1$ tales que $h(x,0) = f(x)$ y $h(x,1) = z$ para toda $x \in X$. Para cada $t \in [0,1]$, definimos $h_t = h|X \times \{t\} : X \times \{t\} \to S^1$. Como h es continua y X es compacto, tenemos que h es uniformemente continua. Lo cual implica que existen $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = 1$ tales que $|h(x,t_i) - h(x,t_{i-1})| < 2$ para toda $x \in X$ y para $i \in \{2,3,...,n\}$. Tenemos que $h_{t_n} = h_1$ es una función constante, de modo que se puede levantar. Debido a que $|h_{t_n}(x) - h_{t_{n-1}}(x)| < 2$ por el lema 4.8 tenemos que $h_{t_{n-1}}$ se puede levantar. Siguiendo este proceso podemos concluir que h_{t_1} se puede levantar. Y como $h_{t_1} = h_0 = f$ tenemos que f se puede levantar.

Ahora, supongamos que f se puede levantar. Entonces, existe una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ \varphi = f$. Definimos $h : X \times I \to S^1$ por $h(x,t) = e(t\varphi(x))$. Tenemos que h es continua, ya que es la composición de funciones continuas. Ahora, para toda $x \in X$, se tiene que $h(x,0) = e(0) = 1$ y $h(x,1) = e(\varphi(x)) = f(x)$. Por tanto $f \sim 1$.

Lema 4.10 *Sean X un espacio métrico, a y b dos puntos distintos de X y A y B subcontinuos de X irreducibles entre a y b tales que $A \cap B = \{a,b\}$. Entonces existe una función continua $f : A \cup B \to S^1$ tal que $f \not\sim 1$ pero, $f|F \sim 1$ para todo subconjunto cerrado y propio F de $A \cup B$.*

Demostración. Definimos $g : A \to [0,1]$ como $g(x) = \frac{d(x,a)}{d(x,b)+d(x,a)}$. Como g está definida por operaciones continuas de la métrica de X, tenemos que g está bien definida y es continua. Ahora, si $g(x) = 0$ entonces $d(x,a) = 0$. Por tanto $x = a$. Además $g(a) = 0$. De modo que $g(x) = 0$ si y sólo si $x = a$. De igual manera si $g(x) = 1$ entonces $d(x,a) = d(x,a) + d(x,b)$. Lo que nos dice que $d(x,b) = 0$. Por tanto $x = b$ y, como $g(b) = 1$, concluimos que $g(x) = 1$ si y sólo si $x = b$. Similarmente, se prueba que la función $h : B \to [0,1]$ definida como $h(x) = \frac{d(x,a)}{d(x,b)+d(x,a)}$, está bien definida, es continua y cumple con que $h(x) = 0$ si y sólo si $x = a$ y que $h(x) = 1$ si y sólo si $x = b$.

Definimos $f : A \cup B \to S^1$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} e(\pi g(x)) & \text{si } x \in A. \\ e(-\pi h(x)) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Como $e(\pi g(a)) = e(0) = e(-\pi h(a))$ y $e(\pi g(b)) = e(\pi) = e(-\pi) = e(-\pi h(b))$, tenemos que f está definida como composición de funciones continuas en subconjuntos cerrados de $A \cup B$ que coinciden en su intersección. Por tanto f está bien definida y es continua.

Mostraremos que $f \not\sim 1$. Supongamos lo contrario, es decir, que $f \sim 1$. Entonces, por el Lema 4.9, existe una función continua $\varphi_1 : A \cup B \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ \varphi_1 = f$. Sea $\varphi : A \cup B \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_1(a)$. Entonces, φ es continua, $e(\varphi(x)) = e(\varphi_1(x) - \varphi_1(a)) = \frac{e(\varphi_1(x))}{e(\varphi_1(a))} = \frac{f(x)}{e(0)} = f(x)$. De manera que $e \circ \varphi = f$ y $\varphi(a) = 1$. Por el Lema 4.7, φ es la única función continua con estas características. Definimos $e_1 : [0,1] \to \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ como $e_1(x) = e(\pi x)$. Como la función que a cada $x \in [0,1]$ le asigna $\cos(\pi x)$ es inyectiva, concluimos que e_1 es un homeomorfismo. Similarmente, se muestra que la función $e_2 : [-1,0] \to \{z \in S^1 : \operatorname{Im} z \leq 0\}$ definida como $e_2(x) = e(\pi x)$, es un homeomorfismo. De modo que las funciones $\varphi|A, e_1^{-1} \circ f|A : A \to \mathbb{R}$ cumplen con que $e \circ \varphi|A = f|A = e \circ e_1^{-1} \circ f|A$ y con que $(\varphi|A)(a) = 0 = e_1^{-1}(1) = e_1^{-1}((f|A)(a))$. Entonces, por el Lema 4.7, tenemos que $\varphi|A = e_1^{-1} \circ f|A$. Similarmente, se prueba que $\varphi|B = e_2^{-1} \circ f|B$. Lo que nos dice que $\varphi(b) = (\varphi|A)(b) = e_1^{-1}((f|A)(b)) = e_1^{-1}(\pi) = 1$ y que $\varphi(b) = (\varphi|B)(b) = e_2^{-1}((f|B)(b)) = e_2^{-1}(-\pi) = -1$. Lo cual es una contradicción, que es consecuencia de suponer que $f \sim 1$. Por tanto $f \not\sim 1$.

Ahora mostraremos que $f|F \sim 1$ para todo subconjunto cerrado y propio F de $A \cup B$. Consideremos dos casos:

(1) El caso en que $b \notin F$. Definimos $\psi : F \to \mathbb{R}$ como:

$$\psi(x) = \begin{cases} e_1^{-1}(f(x)) & \text{si } x \in F \cap A. \\ e_2^{-1}(f(x)) & \text{si } x \in F \cap B. \end{cases}$$

Tenemos que $(F\cap A)\cap(F\cap B)\subset\{a\}$. Ahora, $e_1^{-1}(f(a))=e_1^{-1}(1)=0=e_2^{-1}(1)=e_2^{-1}(f(a))$. De modo que ψ está definida como la composición de funciones continuas en subconjuntos cerrados de F que coinciden en su intersección. Por tanto ψ está bien definida y es continua. Además, $e(\psi(x))=e\circ(e_1^{-1}(f(x)))=f(x)$ si $x\in F\cap A$ y $e(\psi(x))=e\circ(e_2^{-1}(f(x)))=f(x)$ si $x\in F\cap B$. Por tanto $f|F$ se puede levantar. Entonces, por el Lema 4.9, obtenemos que $f|F\sim 1$.

Similiarmente se prueba que el caso en que $a\notin F$.

(2) El caso en que $a\in F$ y $b\in F$. Si existe una componente C de $F\cap A$ tal que $\{a,b\}\subset C$, como A es irreducible entre a y b, entonces $C=A$. Lo que nos dice que $A\subset F$. Similarmente podemos concluir que, si existe una componente C' de $B\cap F$ tal que $\{a,b\}\subset C'$ entonces $B\subset F$. De modo que, si existieran componentes de C y C' $A\cap F$ y $B\cap F$, respectivamente tales que $\{a,b\}\subset C$ y $\{a,b\}\subset C'$ entonces $F=A\cup B$. Lo cual es absurdo. Por tanto podemos suponer, por ejemplo, que para ninguna componente C de $A\cap F$ se cumple que $\{a,b\}\not\subseteq C$. Aplicando el Teorema del Cable Cortado ([Na], pág. 72) a $A\cap F$ y a $\{a\}$ y $\{b\}$, obtenemos que existen subconjuntos cerrados K y L de $A\cap F$ tales que $K\cup L=A\cap F$, $a\in K$, $b\in L$ y $K\cap L=\emptyset$. Definimos $e_3:[-2,-1]\to\{z\in S^1:\operatorname{Im}z\geq 0\}$ como $e_3(x)=e(-\pi x)$. Como la función que a cada $x\in[-2,-1]$ le asigna $\cos(-\pi x)$ es inyectiva, concluimos que e_3 es un homeomorfismo. Definimos $\psi:F\to\mathbb{R}$ como:

$$\psi(x)=\begin{cases} e_1^{-1}(f(x)) & \text{si } x\in F\cap K.\\ e_2^{-1}(f(x)) & \text{si } x\in F\cap B.\\ e_3^{-1}(f(x)) & \text{si } x\in F\cap L.\end{cases}$$

Tenemos que $(F\cap K)\cap(F\cap B)=\{a\}$, $(F\cap L)\cap(F\cap B)=\{b\}$ y que $(F\cap K)\cap(F\cap L)=\emptyset$. Ahora, $e_1^{-1}(f(a))=e_1^{-1}(0)=0=e_2^{-1}(0)=e_2^{-1}(f(a))$ y $e_2^{-1}(f(b))=e_2^{-1}(-1)=-1=e_3^{-1}(-1)=e_3^{-1}(f(b))$. De modo que ψ está definida como la composición de funciones continuas en subconjuntos cerrados de F que coinciden en su intersección. Por tanto ψ está bien definida y es continua. Además, $e(\psi(x))=e\circ(e_1^{-1}(f(x)))=f(x)$ si $x\in F\cap K$, $e(\psi(x))=e\circ(e_2^{-1}(f(x)))=f(x)$ si $x\in F\cap B$ y $e(\psi(x))=e\circ(e_3^{-1}(f(x)))=f(x)$ si $x\in F\cap L$. Por tanto $f|F$ se puede levantar. Entonces, por el Lema 4.9, obtenemos que $f|F\sim 1$.

Con esto tenemos que $f|F\sim 1$ para todo subconjunto cerrado y propio F de $A\cup B$.

Por tanto f es una función continua que cumple que $f\not\sim 1$ pero $f|F\sim 1$ para todo subconjunto cerrado y propio F de $A\cup B$.

Definición 4.11 *Sea X un espacio topológico. Entonces decimos que X es contraíble si existen $p\in X$ y una función continua $F:X\times[0,1]\to X$ tal que $F(x,0)=x$ y $F(x,1)=p$ para toda $x\in X$.*

Lema 4.12 *Sea X un continuo. Si X es contraíble entonces $f \sim 1$ para toda $f : X \to S^1$.*

Demostración. Sea $f : X \to S^1$ una función continua. Como X es contraible existen $p \in X$ y una función continua $F : X \times [0,1] \to X$ tales que $F(x,0) = x$ y $F(x,1) = p$ para toda $x \in X$. Definimos $h = f \circ F : X \times [0,1] \to S^1$. Entonces, tenemos que h es continua, ya que es la composición de funciones continuas. Ahora, para toda $x \in X$, se tiene que $h(x,0) = f(F(x,0)) = f(x)$ y $h(x,1) = f(F(x,1)) = f(p)$. Por tanto $f \sim 1$.

Teorema 4.13 *Sea X un continuo. Entonces $f \sim 1$ para toda función $f : C(X) \to S^1$.*

Demostración. Sean $f : C(X) \to S^1$ una función continua y $z_0 = f(X)$ y fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $e(t_0) = z_0$. Para todo $A \in C(X) - \{X\}$, sea $\alpha_A : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado tal que $\alpha_A(0) = A$ y $\alpha_A(1) = X$. Como $\alpha_A([0,1])$ es contraíble, por el Lema 4.12, tenemos que $f|\alpha_A([0,1]) \sim 1$. De modo que, por los Lemas 4.9 y 4.7, existe una única función continua $h_{\alpha_A} : \alpha_A([0,1]) \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ h_{\alpha_A} = f|\alpha_A([0,1])$ y que $h_{\alpha_A}(X) = t_0$. Definimos $h : C(X) \to \mathbb{R}$ como $h(X) = t_0$ y $h(A) = h_{\alpha_A}(A)$ para toda $A \in C(X) - \{X\}$.

Demostraremos que h está bien definida. Sean $A \in C(X) - \{X\}$ y $\alpha_A^1, \alpha_A^2 : [0,1] \to C(X)$ arcos ordenados tales que $\alpha_A^i(0) = A$ y $\alpha_A^i(1) = X$ para $i \in \{1,2\}$. Definimos $\Phi : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ como $\Phi(s,t) = f(\alpha_A^1(s) \cup \alpha_A^2(t))$. Como $[0,1] \times [0,1]$ es contraíble, por el Lema 4.12, tenemos que $\Phi \sim 1$ y, dado que $\Phi(1,1) = f(X) = z_0$, por los Lemas 4.9 y 4.7, existe una única función continua $\Psi : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ \Psi = \Phi$ y $\Psi(1,1) = t_0$. Ahora, para toda $t \in [0,1]$ tenemos que $e(\Psi(1,t)) = f(X) = z_0$. Lo cual nos dice que $\Psi(\{1\} \times [0,1])$ es un subconjunto conexo del subespacio discreto de $\mathbb{R}$, $e^{-1}(z_0)$. Ya que $\Psi(1,1) = t_0$ se tiene que $\Psi(\{1\} \times [0,1]) = \{t_0\}$. En particular, $\Psi(1,0) = t_0$. Ahora, para toda $s \in [0,1]$, tenemos que:

$$e(h_{\alpha_A^1}(\alpha_A^1(s)) = f(\alpha_A^1(s)) = \Phi(s,0) = e(\Psi(s,0)) \text{ y}$$
$$h_{\alpha_A^1}(\alpha_A^1(1)) = h_{\alpha_A^1}(X) = t_0 = \Psi(1,0).$$

De donde se sigue, por el Lema 4.7, que las funciones que a $(s,0)$ le asigna $h_{\alpha_A^1}(\alpha_A^1(s))$ y que a $(s,0)$ le asigna $\Psi(s,0)$ son iguales. Por tanto $h_{\alpha_A^1}(A) = h_{\alpha_A^1}(\alpha_A^1(0)) = \Psi(0,0)$. Similarmente, se prueba que $h_{\alpha_A^2}(A) = \Psi(0,0)$. Lo cual nos dice que $h_{\alpha_A^1}(A) = h_{\alpha_A^2}(A)$. Por tanto h está bien definida.

Ahora probaremos que h es continua. Supongamos lo contrario, es decir, que existen $B \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ y una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(X)$ tales que $|h(B) - h(B_n)| \geq \varepsilon$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y que $B_n \to B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n : [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de B_n a X. Por el Lema 3.16, existe una subsucesión $\{\beta_{n_k}([0,1])\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{\beta_n([0,1])\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\beta_{n_k}([0,1]) \to \beta([0,1])$ para algún arco ordenado $\beta : [0,1] \to C(X)$ de B a X. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney normalizada.

Para cada par de puntos p, q en $\mathbb{R}^2$, denotamos $\langle p,q\rangle$ el segmento que une a p y a q. Definimos $\mathcal{P} = \langle(0,0),(1,0)\rangle \cup \langle(0,0),(0,1)\rangle \cup (\cup\{\langle(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\})$. Entonces $\mathcal{P}$ es un subcontinuo contraíble de $\mathbb{R}^2$. Consideremos las funciones:

(a) $g_1 : \langle(0,0),(0,1)\rangle \to C(X)$ dada por $g_1(0,t) = X$ para toda $t \in [0,1]$,

(b) $g_2 : \langle(0,0),(1,0)\rangle \to C(X)$ dada por $g_2(s,0)$ es el único elemento en $\beta([0,1])$ tal que $\mu(g_2(s,0)) = s\mu(B) + 1 - s$ para toda $s \in [0,1]$. Para ver que tal elemento de $\beta([0,1])$ existe, notemos que, como $(1-\mu(B))(1-s) \geq 0$, se tiene que $\mu(B) \leq s\mu(B)+1-s \leq 1 = \mu(X)$. Ya que $\beta([0,1])$ es un conexo que tiene a B y a X, tiene que haber un elemento de $\beta([0,1])$ cuya medida es $s\mu(B)+1-s$. Sólo puede haber un elemento de $\beta([0,1])$ con esta propiedad, porque no hay dos elementos diferentes de $\beta([0,1])$ con la misma medida pues los elementos de $\beta([0,1])$ se pueden comparar con la inclusión.

(c) $g_3 : (\cup\{\langle(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}) \to C(X)$ definida como sigue: para cada $n \in \mathbb{N}$, $g(s,\frac{1}{n})$ es el único elemento en $\beta_n([0,1])$ tal que $\mu(g_3(s,\frac{1}{n})) = s\mu(B_n) + 1 - s$ para toda $s \in [0,1]$. La justificación de que, efectivamente, existe un único elemento de $\beta_n([0,1])$ con estas propiedades es similar a la que hicimos para $\beta([0,1])$.

Definimos $g : \mathcal{P} \to C(X)$ como:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in \langle(0,0),(0,1)\rangle. \\ g_2(x) & \text{si } x \in \langle(0,0),(1,0)\rangle. \\ g_3(x) & \text{si } x \in (\cup\{\langle(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}). \end{cases}$$

Mostraremos que g está bien definida.

Primero tenemos que $\langle(0,0),(1,0)\rangle \cap \langle(0,0),(0,1)\rangle = \{(0,0)\}$. Debido a que $g_2(0,0)$ cumple que $\mu(g_2(0,0)) = 0\mu(B)+1-0 = 1$, concluimos que $g_2(0,0) = X$ y, como $g_1(0,0) = X$ tenemos que $g_1(0,0) = g_2(0,0)$.

Ahora, $\langle(0,0),(0,1)\rangle \cap (\cup\{\langle(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}) = \{(0,\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, debido a que $g_3(0,\frac{1}{n})$ cumple que $\mu(g_3(0,\frac{1}{n})) = 0\mu(B) + 1 - 0 = 1$, concluimos que $g_3(0,\frac{1}{n}) = X$. Y como $g_1(0,\frac{1}{n}) = X$ tenemos que $g_1(0,\frac{1}{n}) = g_3(0,\frac{1}{n})$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, tenemos que $\langle(0,0),(1,0)\rangle \cap (\cup\{\langle(0,\frac{1}{n}),(1,\frac{1}{n})\rangle : n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$. Con lo que concluimos que g está definida en subconjuntos cerrados de $\mathcal{P}$ que coinciden en su intersección. Por tanto g está bien definida.

Mostraremos que g es continua.

Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{P}$ tal que $(x_i, y_i) \to (x, y)$. Por el Lema 4.1, basta probar que existe una subsucesión $\{(x_{i_k}, y_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $g(x_{i_k}, y_{i_k}) \to g(x, y)$. Para mostrar esto distinguiremos cuatro casos:

(1) Para una infinidad de números naturales, $(x_i, y_i) \in \langle(0,0),(0,1)\rangle$. En este caso existe una subsucesión $\{(0, y_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_i, y_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(0, y_{i_k}) \in \langle(0,0),(0,1)\rangle$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $(x, y) = (0, y) \in \langle(0,0),(0,1)\rangle$. Por tanto $X = g(0, y_{i_k}) \to g(0, y) = X$

(2) Para una infinidad de números naturales $(x_i, y_i) \in \langle(0,0),(1,0)\rangle$. En esta situación existe una subsucesión $\{(x_{i_k}, 0)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{i_k}, 0) \in \langle(0,0),(1,0)\rangle$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $(x, y) = (x, 0) \in \langle(0,0),(1,0)\rangle$. Consideremos $\mu|\beta([0,1]) : \beta([0,1]) \to [\mu(B), 1]$. Por el Lema 3.15, sabemos que $\mu|\beta([0,1])$ es un homeomorfismo.. Debido a que μ es continua y a que $x_{i_k} \to x$ tenemos que:

$$\mu(g(x_{i_k}, 0)) = x_{i_k}\mu(B) + 1 - x_{i_k} \to x\mu(B) + 1 - x = \mu(g(x, 0)).$$

Como $\mu|\beta([0,1])$ es un homeomorfismo concluimos que $g(x_{i_k}, 0) \to g(x, 0)$.

(3) Para una infinidad de números naturales $(x_i, y_i) \in \left\langle(0, \frac{1}{n}), (1, \frac{1}{n})\right\rangle$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $\{(x_{i_k}, \frac{1}{n})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{i_k}, \frac{1}{n}) \in \left\langle(0, \frac{1}{n}), (1, \frac{1}{n})\right\rangle$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $(x, y) = (x, \frac{1}{n}) \in \left\langle(0, \frac{1}{n}), (1, \frac{1}{n})\right\rangle$. Consideremos $\mu|\beta_n([0,1]) : \beta_n([0,1]) \to [\mu(B_n), 1]$. Por el Lema 3.15, sabemos que $\mu|\beta_n([0,1])$ es un homeomorfismo. Debido a que μ es continua y a que $x_{i_k} \to x$ tenemos que:

$$\mu(g(x_{i_k}, \tfrac{1}{n})) = x_{i_k}\mu(B_n) + 1 - x_{i_k} \to x\mu(B_n) + 1 - x = \mu(g(x, \tfrac{1}{n})).$$

Como $\mu|\beta_n([0,1])$ es un homeomorfismo concluimos que $g(x_{i_k}, \frac{1}{n}) \to g(x, \frac{1}{n})$.

(4) No sucede ninguno de los 3 casos anteriores. Tomamos $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{i_1}, y_{i_1}) \in \left\langle(0, \frac{1}{n_1}), (1, \frac{1}{n_1})\right\rangle$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$. Escogemos $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que $i_2 > i_1$ y $(x_{i_2}, y_{i_2}) \in \left\langle(0, \frac{1}{n_2}), (1, \frac{1}{n_2})\right\rangle$ para algún $n_2 \in \mathbb{N}$ que cumple con que $n_2 > n_1$. Siguiendo este procedimiento podemos encontrar una subsucesión $\{(x_{i_k}, y_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_{i_k}, y_{i_k}) \in \left\langle(0, \frac{1}{n_k}), (1, \frac{1}{n_k})\right\rangle$ para algún $n_k \in \mathbb{N}$ y cumple con que $n_k < n_{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Como la sucesión $\left\{\left\langle(0, \frac{1}{n_k}), (1, \frac{1}{n_k})\right\rangle\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\langle(0,0),(1,0)\rangle$, tenemos que $(x, y) \in \langle(0,0),(1,0)\rangle$. Ahora consideremos la sucesión $\{g(x_{i_k}, y_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(X)$. Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión $\{g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{g(x_{i_k}, y_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}}) \to A$ para algún $A \in C(X)$. Como $\beta_{n_{k_j}}([0,1]) \to$

$\beta([0,1])$, $g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}}) \in \beta_{n_{k_j}}([0,1])$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y $g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}}) \to A$, concluimos que $A \in \beta([0,1])$. Además, debido a que $\mu(g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}})) = x_{i_{k_j}}\mu(B_{i_{k_j}}) + 1 - x_{i_{k_j}}$ y a que μ es continua, se tiene que $\mu(A) = x\mu(B) + 1 - x$. De modo que A es el único elemento de $\beta([0,1])$ tal que $\mu(A) = x\mu(B) + 1 - x$ y, como $g(x,y) \in \beta([0,1])$ cumple que $\mu(g(x,y)) = x\mu(B) + 1 - x$ tenemos que $A = g(x,y)$. Por tanto $g(x_{i_{k_j}}, y_{i_{k_j}}) \to A$.

Por tanto g es continua.

Consideremos la función continua $f \circ g : \mathcal{P} \to S^1$. Como $\mathcal{P}$ es contraíble, por el Lema 4.12, $f \circ g \sim 1$. Además, como $f(g(0,0)) = f(X) = z_0$, entonces, por los Lemas 4.9 y 4.7, existe una única función continua $G : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ tal que $e \circ G = f \circ g$ y $G(0,0) = t_0$.

Ahora, para toda $t \in [0,1]$, tenemos que $e(G(0,t)) = f(g(0,t)) = z_0$. Lo cual nos dice que $G(\{0\} \times [0,1])$ es un subconjunto conexo del subespacio discreto de $\mathbb{R}$, $e^{-1}(z_0)$. Ya que $G(0,0) = t_0$ se tiene que $G(\{0\} \times [0,1]) = \{t_0\}$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, para toda $s \in [0,1]$, tenemos que:

$$e(h_{\beta_n}(g(s,\tfrac{1}{n})) = f(g(s,\tfrac{1}{n})) = e(G(s,\tfrac{1}{n})) \text{ y}$$
$$h_{\beta_n}(g(0,\tfrac{1}{n})) = h_{\beta_n}(X) = t_0 = G(0,\tfrac{1}{n}).$$

De donde se sigue, por el Lema 4.7, que las funciones que a $(s,\frac{1}{n})$ le asigna $h_{\beta_n}(g(s,\frac{1}{n}))$ y que a $(s,\frac{1}{n})$ le asigna $G(s,\frac{1}{n})$ son iguales. Por tanto $h_{\beta_n}(B_n) = h_{\beta_n}(g(1,\frac{1}{n})) = G(1,\frac{1}{n})$. Similarmente se prueba que $h_\beta(B) = G(1,0)$. Debido a que $G(1,\frac{1}{n}) \to G(1,0)$, obtenemos que $h(B_n) = h_{\beta_n}(B_n) \to h_\beta(B) = h(B)$. Lo cual es una contradicción que es consecuencia del hecho de suponer que h no es continua. Por tanto h es continua.

Como $e \circ h = f$, concluimos que f se puede levantar. Entonces, por el Lema 4.9, tenemos que $f \sim 1$.

Capítulo 5

$C(X)$ no es separado por ninguno de sus subconjuntos 0-dimensionales

En este capítulo desarrollamos la prueba del resultado de J. Krasinkiewicz que dice que $C(X)$ no puede ser separado por ninguno de sus subconjuntos 0-dimensionales. Este echo es expresado por algunos autores diciendo que $C(X)$ es una variedad de Cantor de dimensión 2.

Para abreviar usaremos la siguiente notación: $\mathrm{dc}\,X > 1$ significará que un conjunto 0-dimensional no desconecta a X.

El círculo unitario se denotará como S^1.

Sea C un continuo. Si una función continua $f : C \to S^1$ es homotópica a una constante entonces escribiremos $f \sim 1$.

Si $f \nsim 1$, pero se tiene que $f|F \sim 1$ para todo subconjunto cerrado y propio F de C entonces escribiremos $f \in at(C)$.

Si existe una función continua $f : C \to S^1$ tal que $f \in at(C)$ entonces diremos que C es *circular*.

Finalmente, si tenemos que para toda función continua $f : C \to S^1$, $f \sim 1$ entonces diremos que C es *contraíble con respecto* a S^1, lo cual escribiremos abreviadamente así: C es *c.r.* S^1.

Lema 5.1 *Sea X un espacio métrico separable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) el espacio X puede ser desconectado por un subconjunto de dimensión menor o igual que n

(2) el espacio X contiene un conjunto abierto U el cual no es vacío ni denso, y cuya frontera tiene dimensión menor o igual que n

(3) el espacio se puede poner como $X = C_1 \cup C_2$ donde C_1, C_2 son subconjuntos propios cerrados de X y $\dim(C_1 \cap C_2) \leq n$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea D un subconjunto de X tal que $\dim D \leq n$ y que D desconecta a X.

Como D desconecta a X se tiene que

$$X - D = U_1 \cup U_2 \text{ con } U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset \text{ y}$$
$$(U_1 \cap \overline{U_2}) \cup (\overline{U_1} \cap U_2) = \emptyset.$$

Primero supongamos que $X \neq \overline{X - D}$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin \overline{X - D}$, de modo que, existe un abierto U de X tal que $x \in U \subset \overline{U}$ y $\overline{U} \cap \overline{X - D} = \emptyset$. Por tanto, U es abierto y no vacío y $\overline{U}$ está contenido en D. La frontera de U es un subconjunto de D, por lo que tiene dimensión menor o igual que n. Lo cual nos dice que X satisface la condición (2).

Ahora supongamos que $X = \overline{X - D} = \overline{U_1} \cup \overline{U_2}$. Sea $U = X - \overline{U_1}$. Como $\overline{U_1} \cap U_2 = \emptyset$ y $X = \overline{U_1} \cup \overline{U_2}$, tenemos que $U_2 \subset U \subset \overline{U_2}$. Lo cual muestra que U no es vacío, además, no es denso, ya que $X \neq \overline{U_2}$. Finalmente, $FrU \subset (\overline{U_2} - U_2) \subset X - (U_1 \cup U_2)$, por tanto $Fr\,U \subset D$. Esto implica que $Fr\,U$ tiene dimensión menor o igual que n. De modo que X satisface la condición (2).

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea U un subconjunto abierto de X el cual no es vacío ni denso y cuya frontera tiene dimensión menor o igual que n. Definimos $C_1 = \overline{U}$ y $C_2 = X - U$, entonces C_1 y C_2 son subconjuntos propios y cerrados de X que satisfacen que

$$X = C_1 \cup C_2 \text{ y } \dim(C_1 \cap C_2) = \dim Fr\,U \leq n.$$

Por tanto se tiene X satisface la condición (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Sean C_1 y C_2 subconjuntos propios cerrados de X tales que $X = C_1 \cup C_2$ y $\dim(C_1 \cap C_2) \leq n$. Definimos $D = C_1 \cap C_2$. Sean $U_1 = C_1 - (C_1 \cap C_2)$ y $U_2 = C_2 - (C_1 \cap C_2)$. De modo que $\overline{U_1} \subset C_1$ y $C_1 \cap U_2 = \emptyset$, lo cual implica que $\overline{U_1} \cap U_2 = \emptyset$. Con un argumento similar se prueba que $U_1 \cap \overline{U_2} = \emptyset$.

Entonces tenemos que

$$X - D = U_1 \cup U_2 \text{ con } U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset \text{ y}$$
$$(\overline{U_1} \cap U_2) \cup (U_1 \cap \overline{U_2}) = \emptyset.$$

Lo cual muestra que X satisface al condición (1).

Lema 5.2 *Sean X un continuo y C un subconjunto de X. Si* $\operatorname{dc} C > 1$ *entonces* $\operatorname{dc} \overline{C} > 1$.

Demostración. Supongamos que el lema no es cierto, esto es, Supongamos que existe $D \subset \overline{C}$ tal que $\dim D = 0$ y que $\overline{C} - D$ no es conexo. Por tanto, existen U y V tales que

$$\overline{C} - D = U \cup V \text{ con } U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset \text{ y}$$
$$(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = \emptyset.$$

De modo que

$$C - (C \cap D) = (U \cap C) \cup (V \cap C) \text{ y}$$
$$((\overline{U \cap C}) \cap (V \cap C)) \cup ((U \cap C) \cap (\overline{V \cap C})) = \emptyset.$$

Si $U \cap C \neq \emptyset$ y $V \cap C \neq \emptyset$ entonces C sería desconectado por un conjunto 0-dimensional lo cual seria una contradicción. Por tanto podemos suponer que $U \cap C = \emptyset$ o que $V \cap C = \emptyset$.

Supongamos, por ejemplo, que $V \cap C = \emptyset$. Como $V \neq \emptyset$, existe $v \in V \subset (\overline{C} - C)$. Sea $W = X - \overline{U}$, entonces se tiene que $v \in W \cap \overline{C}$. Como W es abierto y $v \in \overline{C}$, existe $c \in C$ tal que $c \in W$. Ahora, como $v \neq c$, existe un subconjunto abierto S de X tal que $v \in S \subset \overline{S} \subset W$ y $\overline{S} \cap (\{c\} \cup \overline{U}) = \emptyset$.

Sea $D' = (C \cap D) - S$. Probaremos que $C - D' = (C \cap U) \cup (C \cap S)$.

Sea $x \in C - D'$. Supongamos que $x \notin U$. Como $V \cap C = \emptyset$, $x \notin V$. Pero $x \in \overline{C} = D \cup V \cup U$, así que $x \in D$. Ya que $x \in D$ y $x \notin D'$, se tiene que $x \in C \cap S$. Por tanto $C - D' \subset (C \cap U) \cup (C \cap S)$. Notemos que $C \cap U \subset C - D \subset C - D'$. Ya que $C \cap S \subset C - D'$, podemos concluir que $C - D' = (C \cap U) \cup (C \cap S)$.

Ahora tenemos que $C \cap U \subset U$ y $C \cap S \subset S$ y sabemos que $\overline{U} \cap S = \emptyset$ y que $U \cap \overline{S} = \emptyset$, de donde se obtiene que $((\overline{C \cap U}) \cap (C \cap S)) \cup ((C \cap U) \cap (\overline{C \cap S})) = \emptyset$.

Como $C - (C \cap D) = C \cap U$, tenemos que $C \cap U \neq \emptyset$. Además, como $v \in S \cap \overline{C}$ y S es un subconjunto abierto de X, existe $p \in C \cap S$. Por tanto $C \cap S \neq \emptyset$.

Finalmente, ya que $c \in D'$ y $D' \subset D$, tenemos que $\dim D' = 0$. Por tanto C es desconectado por un conjunto 0-dimensional. Lo cual es una contradicción, que es consecuencia del hecho de suponer que $\overline{C}$ es desconectado por un subconjunto 0-dimensional. Por tanto $\operatorname{dc} \overline{C} > 1$.

Lema 5.3 *Sean X un continuo y R_0 y R_1 dos subcontinuos de X. Si* $\operatorname{dc} R_0 > 1$, $\operatorname{dc} R_1 > 1$ *y* $\dim(R_0 \cap R_1) > 0$, *entonces* $\operatorname{dc}(R_0 \cup R_1) > 0$.

Demostración. Supongamos que el resultado no es valido, es decir, supongaos que existe $D \subset (R_0 \cup R_1)$ tal que $\dim D = 0$ y que

$$(R_0 \cup R_1) - D = U \cup V \text{ con } U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset \text{ y}$$
$$(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = \emptyset.$$

Sabemos por hipótesis que el conjunto $R_0 - (D \cap R_0)$ es conexo entonces $R_0 - (D \cap R_0) \subset U$ o $R_0 - (D \cap R_0) \subset V$.

Supongamos, por ejemplo, que $R_0 - (D \cap R_0) \subset U$. Como la $\dim(R_0 \cap R_1) > 0$, se tiene que $(R_0 \cap R_1) - D \neq \emptyset$. Sea $x \in (R_0 \cap R_1) - D$. Ahora, también por hipótesis, sabemos que $R_1 - (D \cap R_1)$ es conexo lo cual implica que $R_1 - (D \cap R_1) \subset U$ o $R_1 - (D \cap R_1) \subset V$. Pero tenemos que $x \in R_1 - (D \cap R_1)$ y que $x \in U$. Por tanto $R_1 - (D \cap R_1) \subset U$. Lo cual muestra que $(R_0 \cup R_1) - D = U$. De modo que $V = \emptyset$. Lo cual es una contradicción que se sigue del hecho de suponer que $R_0 \cup R_1$ es desconectado por D. Por tanto $\mathrm{dc}(R_0 \cup R_1) > 1$.

Lema 5.4 *Sean X un continuo y $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subcontinuos de X tales que $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ y que $\mathrm{dc}\, R_n > 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathrm{dc} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n > 1$.*

Demostración. Supongamos que el lema no es verdadero, asi que existe $D \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ tal que $\dim D = 0$ y que

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\Big) - D = U \cup V, \text{ con } U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset \text{ y}$$
$$(\overline{U} \cap V) \cup (U \cap \overline{V}) = \emptyset.$$

Sabemos, por hipótesis, que $R_1 - (D \cap R_1)$ es conexo y no vacío, esto implica que $R_1 - (D \cap R_1) \subset U$ o $R_1 - (D \cap R_1) \subset V$.

Supongamos, por ejemplo, que $R_1 - (D \cap R_1) \subset U$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos, por hipótesis, que $R_n - (D \cap R_n)$ es conexo. De modo que $R_n - (D \cap R_n) \subset U$ o $R_n - (D \cap R_n) \subset V$. Pero sabemos que $R_1 \subset R_n$ y $R_1 - (D \cap R_1) \subset U$. Por tanto $R_n - (D \cap R_n) \subset U$. Lo cual nos dice que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n - D = U$. Entonces $V = \emptyset$. Lo cual es una contradicción que es producto de suponer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ es desconectado por D. Por tanto $\mathrm{dc} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n > 1$.

Lema 5.5 *Sean X un continuo y R_0 un subcontinuo de X tal que $\mathrm{dc}\, R_0 > 1$. Entonces existe un subcontinuo maximal R de X, con $\mathrm{dc}\, R > 1$ tal que $R_0 \subset R$.*

Demostración. Como X es un continuo, tiene una base numerable. Además, los Lemas 5.4 y 5.2 nos dicen que si $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión de subcontinuos de X tales que $R_1 \subset R_2 \subset \ldots$ y $\mathrm{dc}\, R_n > 1$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathrm{dc}\, \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n} > 1$. Por tanto se cumplen las hipótesis del lema 2.11 (Teorema de Reducción de Brouwer). Esto implica que existe un subcontinuo maximal R de X, con $\mathrm{dc}\, R > 1$ tal que $R_0 \subset R$.

Lema 5.6 *Sean X un continuo y P un subconjunto de X. Supóngase que para toda $p \in P$, existe un subcontinuo R_p de X tal que $p \in R_p$ y $\mathrm{dc}\, R_p > 1$ y que existe $p_0 \in P$ fija tal que $\dim(R_p \cap R_{p_0}) > 0$ para toda $p \in P$. Entonces existe un subcontinuo R de X tal que $\mathrm{dc}\, R > 1$ y $P \subset R$.*

Demostración. De acuerdo con el Lema 5.5, existe un subcontinuo maximal R de X, con $\mathrm{dc}\, R > 1$ y $R_{p_0} \subset R$. Ahora, para toda $p \in P$, $R_p \cap R_{p_0} \subset R_p \cap R$. Por tanto $\dim(R_p \cap R) > 0$. Entonces, por el Lema 5.3, tenemos que $\mathrm{dc}(R_p \cup R) > 1$. Como R es maximal con respecto a esta propiedad tenemos que $R_p \subset R$. Lo cual nos dice que $P \subset R$.

Lema 5.7 *Sean X un espacio métrico compacto, Q un subconjunto cerrado de X y $f : Q \to S^n$ una función continua la cual no puede ser extendida a X. Entonces existe un subconjunto cerrado R de X tal que:*

(1) la función f no puede ser extendida a $Q \cup R$ pero

(2) si R' es un subconjunto cerrado propio de R entonces f puede ser extendida a $Q \cup R'$.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{K} = \{K \subset X : K$ es cerrado y f no puede ser extendida a $Q \cup K\}$. La familia $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ya que $X \in \mathcal{K}$. Sean $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ tal que $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ y $K_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Demostraremos que $K_0 \in \mathcal{K}$.

Supongamos que $K_0 \notin \mathcal{K}$, es decir, supongamos que f se puede extender sobre $Q \cup K_0$. Entonces, por el Lema 4.2, existe un abierto U de X tal que $Q \cup K_0 \subset U$ y f se puede se puede extender sobre U. De modo que, existe $K_i \in \{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $K_i \subset U$ ya que, si todos los K_n intersectaran a $X - U$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podríamos tomar un punto $p_n \in K_n - U$. Sea $\{p_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión convergente a un punto $p \in X - U$. Dada $k \in \mathbb{N}$, $\{p_{n_k}, p_{n_{k+1}}, \ldots\} \subset K_{n_k}$, así que $p \in K_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces $p \in K_0 - U$. De modo que K_0 intersectaría a $X - U$ lo cual es absurdo. Pero $K_i \subset U$ implica que f puede ser extendida sobre $Q \cup K_i$ lo cual es una contradicción. Por tanto $K_0 \in \mathcal{K}$.

Entonces la familia $\mathcal{K}$ cumple las hipótesis de Teorema de Reducción de Brouwer (Lema 2.10). Por tanto, existe un cerrado minimal R de X tal que f no se puede extender a $Q \cup R$.

A continuación daremos algunas propiedades de los continuos contraíbles con respecto a S^1.

Proposición 5.8 *Sean X un continuo c.r. S^1, Q un subcontinuo de X y $f : Q \to S^1$ una función continua. Si $f \in at(Q)$ entonces existe un subcontinuo R de X tal que* $\operatorname{dc} R > 1$ *y f no se puede extender sobre $Q \cup R$.*

Demostración. Como X es c.r. S^1 y $f \in at(Q)$, se tiene que f no se puede extender sobre X. Por el Lema 5.7 existe un subconjunto cerrado R de X tal que f no se puede extender sobre $Q \cup R$ pero si R' es un subconjunto cerrado de R, entonces f se puede extender sobre $Q \cup R'$.

Ahora mostraremos que $\operatorname{dc} R > 1$. Supongamos lo contrario, es decir, que R puede sen desconectado por alguno de su subconjuntos 0-dimensionales. Entonces por el Lema 5.1 tenemos que $R = A \cup B$ con A y B subconjuntos propios y cerrados de R tales que $\dim(A \cap B) = 0$. De modo que, existen funciones $f_1 : A \cup Q \to S^1$ y $f_2 : B \cup Q \to S^1$, las cuales son extensiones continuas de f. Sea $\delta > 0$ tal que si u, $x \in A \cup Q$ y $d(u, x) < \delta$ entonces $\rho(f_1(u), f_1(x)) < \frac{1}{2}$ y si u, $x \in B \cup Q$ y $d(u, x) < \delta$ entonces $\rho(f_2(u), f_2(x)) < \frac{1}{2}$.

Como $A \cap B$ es 0-dimensional y compacto, por el Lema 2.9, existen subconjuntos abiertos $U_1, ..., U_n$ de X tales que $A \cap B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ si $i \neq j$ y, para cada $i \in \{1, 2, .., n\}$, $FrU_i \cap A \cap B = \emptyset$ y $diám\overline{U_i} < \delta$.

Ahora, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, como $diám\overline{U_i} < \delta$ se tiene que $diám f_1(\overline{U_i} \cap (A \cup Q)) < \frac{1}{2}$ y que $diám f_2(\overline{U_i} \cap (B \cup Q)) < \frac{1}{2}$. Por tanto, existe un arco J_i en S^1 que contiene a ambos conjuntos.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ definimos $g_i : (FrU_i \cap (A \cup B \cup Q)) \cup (Q \cap \overline{U_i}) \to J_i$ dada por

$$g_i(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in FrU_i \cap A \\ f_2(x) & \text{si } x \in FrU_i \cap B \\ f_1(x) & \text{si } x \in \overline{U_i} \cap Q \end{cases}$$

Tenemos que g_i está definida en subconjuntos cerrados de $\overline{U_i}$, por funciones continuas las cuales coinciden en su intersección. Por tanto g_i está bien definida y es continua. Entonces, por el Teorema de Extensión de Tietze ([Du], pág. 149), existe una función $h_i : \overline{U_i} \to J_i$ la cual es una extensión continua de g_i.

Definimos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y una función $h : Q \cup R \to S^1$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Q \\ h_i(x) & \text{si } x \in \overline{U_i} \cap (Q \cup R) \\ f_1(x) & \text{si } x \in A - U \\ f_2(x) & \text{si } x \in B - U \end{cases}$$

Se tiene que h está definida en subconjuntos cerrados de $Q \cup R$, por funciones continuas las cuales coinciden en su intersección. Por tanto h está bien definida y es continua. Además, $h|Q = f$, lo que nos dice que h es una extensión continua de f sobre $Q \cup R$. Lo cual es una contradicción que es consecuencia de suponer que R se desconecta por un subconjunto 0-dimensional. Por tanto $\operatorname{dc} R > 1$.

Proposición 5.9 *Sean X un continuo c.r. S^1 y Q un subcontinuo circular de X. Entonces existe un subcontinuo R de X tal que $Q \subset R \subset X$ y* $\operatorname{dc} R > 1$.

Demostración. Como Q es circular, existe una función continua $f : Q \to S^1$ tal que $f \in at(Q)$. Como X es c.r. S^1, de acuerdo con la Proposición 5.8, existe un subcontinuo R de X tal que $\operatorname{dc} R > 1$ y f no se puede extender sobre $Q \cup R$. Ahora mostraremos que $Q \subset R$.

Supongamos lo contrario, es decir, que $Q \not\subseteq R$. Definimos $F = Q \cap R$. Como $f \in at(Q)$ tenemos que $f|F \sim 1$. Como cualquier función constante definida sobre F se puede extender continuamente a X, entonces, por el Teorema de Extensión de Borsuk (Lema 4.5), existe una función $g : X \to S^1$ la cual es una extensión continua de $f|F$. Definimos una función $h : Q \cup R \to S^1$ como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in Q \\ g(x) & \text{si } x \in R \end{cases}$$

Tenemos que h está definida por funciones continuas en subconjuntos cerrados de $Q \cup R$. Además, como $Q \cap R \subset F$, se tiene que f y g coinciden en $Q \cap R$. Entonces, h es una extensión continua de f sobre $Q \cup R$. Lo cual es una contradicción que es consecuencia de suponer que $Q \not\subseteq R$. Por tanto $Q \subset R$.

Proposición 5.10 *Sean X un continuo no degenerado c.r. S^1, Z un subcontinuo no degenerado de X y $a \in X - Z$. Supongamos que:*

(1) para toda $z \in Z$, existe un arco az tal que $az \cap Z = \{z\}$,

(2) para toda $x \in (X - Z) - \{a\}$, existe un arco z_0z_1 tal que $x \in z_0z_1$ y $z_0z_1 \cap Z = \{z_0, z_1\}$.

Entonces $\operatorname{dc} X > 1$.

Demostración. Sea b un punto fijo de Z. Primero demostraremos que existe un subcontinuo R_b de X tal que $\operatorname{dc} R_b > 1$ y $Z \subset R_b \subset X$.

Sea ab un arco tal que $ab \cap Z = \{b\}$. Sean $z \in Z$ un punto fijo distinto de b y az un arco tal que $az \cap Z = \{z\}$. Sea y el último punto del arco az, caminando de a a z, que pertenece al arco ab, tenemos que $y \neq b$ y, el arco $A = zy \cup yb$ tiene solamente sus puntos finales en común con Z. Por el Lema 3.4, existe un subcontinuo $B \subset Z$ irreducible entre

z y b, entonces, por el Lema 4.10, $Q = A \cup B$ es circular. De modo que, por la Proposición 5.9, existe un subcontinuo R_z de X tal que $\mathrm{dc}\, R_z > 1$ y $Q \subset R_z \subset X$. De lo cual obtenemos que $zy \cup yb \subset R_z$.

Similarmente, si z' es cualquier otro punto de $Z - \{b\}$ entonces denotamos por y' al ultimo punto del arco az' que pertenece al arco ab. Tenemos que existe un subcontinuo $R_{z'}$ de X tal que $\mathrm{dc}\, R_{z'} > 1$ y $z'y' \cup y'b \subset R_{z'}$.

Como yb y $y'b$ son subarcos del arco ab, tenemos que su intersección es exactamente uno de ellos. De lo cual obtenemos que $\dim(R_z \cap R_{z'}) > 0$. Entonces, aplicando el Lema 5.6, (haciendo $P = Z$ y $R_{p_0} = R_z$) obtenemos que existe un subcontinuo R_b de X tal que $\mathrm{dc}\, R_b > 1$ y $Z \subset R_b \subset X$. De acuerdo al Lema 5.5, existe un subcontinuo maximal R de X tal que $\mathrm{dc}\, R > 1$ y que $R_b \subset R$.

Ahora, para cada $x \in (X - Z) - \{a\}$, tomamos un arco z_0z_1 tal que $x \in z_0z_1$ y que $z_0z_1 \cap Z = \{z_0, z_1\}$. Por el Lema 3.4, existe un subcontinuo $D \subset Z$ irreducible entre z_0 y z_1, entonces, por el Lema 4.10, $D \cup z_0z_1$ es circular. De modo que por la Proposición 5.9, existe un subcontinuo R_x de X tal que $\mathrm{dc}\, R_x > 1$ y $D \cup z_0z_1 \subset R_x \subset X$. De lo cual obtenemos que $x \in R_x$.

Ya que $D \subset R \cap R_x$, se tiene que $\dim(R \cap R_x) > 0$. Por el Lema 5.3, $R \cup R_x$ es un subcontinuo de X tal que $\mathrm{dc}(R \cup R_x) > 1$. Por la maximalidad de R, $R \cup R_x = R$. Esto muestra que $X - \{a\} \subset R$. Lo cual implica que $X \subset R$ (ya que R es cerrado). Por tanto $\mathrm{dc}\, X > 1$.

Teorema 5.11 *([Kr], Main Theorem) Sea X un continuo. Entonces* $\mathrm{dc}\, C(X) > 1$.

Demostración. Por el Teorema 4.13, sabemos que si X es un continuo entonces $C(X)$ es *c.r.* S^1. Mostraremos que $C(X)$ cumple las hipótesis de la Proposición 5.10.

Hacemos $Z = F_1(X)$ y $a = X$. Tenemos que para cada $\{z\} \in F_1(X)$ existe un arco ordenado $\{z\}X$ que va de $\{z\}$ a X. Entonces obtenemos que $\{z\}X \cap F_1(X) = \{z\}$. Por tanto $C(X)$ cumple (1) de la Proposición 10.

Ahora, para cada $M \in (C(X) - F_1(X)) - \{X\}$, tomamos un punto $z_0 \in M$ y un punto $z_1 \notin M$. Tomamos arcos ordenados $\{z_0\}M$, MX, y $X\{z_1\}$, que van de z_0 a M, de M a X y de X a $\{z_1\}$, respectivamente. Sea N el primer punto que tienen en común MX y $X\{z_1\}$. Sea $\mathcal{A} = \{z_0\}M \cup MN \cup N\{z_1\}$. Como N es el primer punto que tienen en común MX y $X\{z_1\}$ y $\{z_0\}M \cap X\{z_1\} = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{A}$ es un arco. Además, tenemos que $M \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \cap F_1(X) = \{\{z_0\}, \{z_1\}\}$. Por tanto $C(X)$ cumple (2) de la Proposición 5.10.

Entonces por la Proposición 5.10 obtenemos que $\mathrm{dc}\, C(X) > 1$.

Bibliografía

[Du] **Dugundji, James,** *Topology*. Allyn and Bacon, Inc. 1966.

[En] **Engelking, Ryszard,** *Dimension Theory*. North-Holland, Inc. 1978.

[Go] **Goodykoontz, Jack T. Jr.,** "Aposyndetic properties of hyperspaces". *Pacific Journal of Mathematics*, **47** (1973), 91-98.

[Ha] **Hagopian, Charles L.,** "Mutual aposyndesis". *Proceedings of the American Mathemical Society*, **23** (1969), 615-622.

[I1] **Illanes, Alejandro,** *Notas de Hiperespacios*. Notas no publicadas.

[I2] **Illanes, Alejandro,** "Countable closed set aposyndesis and hyperspaces". *Houston Journal of Mathematics*, **23** (1997), 57-64.

[Jo] **Jones, F. Burton,** "Aposyndetic continua and certain boundary problems". *American Journal of Mathematics*, ***63*** (1941), 545-553.

[Kr] **Krasinkiewicz, J.,** "No 0-dimensional set disconnects the hyperspace of a continuum". *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciencies, Série des sciences Mathematiques, Astronomie et Physiques*, **19** (1971), 755-758.

[Ma] **Macías, Sergio,** "Aposyndetic properties of symmetric products of continua". Por aparecer en *Topology Proceedings*.

[Na] **Nadler, Sam B. Jr.,** *Continuum Theory: An introduction*. Marcel Dekker, Inc. 1992.

[Pe] **Petrus, Ann,** "Whitney maps and Whitney properties of $C(X)$". *Topology Proceedings, 1* (1976), 147-172.