

8  
2es.



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

CAMPUS "ACATLAN"

**METODOLOGIA DE BOX Y JENKINS PARA LA  
CONSTRUCCION DE MODELOS BIVARIADOS CON  
FUNCION DE TRANSFERENCIA.**

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMATICAS  
APLICADAS Y COMPUTACION  
P R E S E N T A:  
ABDIAS CRUZ BARTOLO

ASESORA: ING. ELVIRA BEATRIZ CLAVEL



SANTA CRUZ ACATLAN, EDO. DE MEXICO



**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

265795



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis padres*

*Por todo el amor y apoyo que siempre me han brindado, va por ellos este trabajo.*

*También quiero dedicar este trabajo a mi hermano Adrián, para él un sincero agradecimiento por su incuestionable apoyo brindado a lo largo de mi carrera, gracias.*

*Abdias.*

## *A mis hermanos*

*Quienes también aportaron su granito arena a la realización de este trabajo.*

## *A mis amigos*

*Un sincero agradecimiento a ustedes que me han brindado su apoyo y amistad, en especial a Lorenzo, Ofir y Alejandro, los cuales han estado presentes en los momentos más difíciles de mi carrera.*

*Un agradecimiento especial a la profesora Ing. Elvira Beatriz Clavel Díaz, por haberme dedicado un espacio de su tiempo a la dirección de este trabajo.*

---

***Metodología de Box y  
Jenkins para la  
construcción de modelos  
bivariados con función de  
transferencia***

---

## Índice

INTRODUCCION	i
Capítulo 1. Modelos función de transferencia.	1
1.1 Metodología de Box y Jenkins.	1
1.2 Fundamentos y conceptos.	
1.2.1 Conceptos básicos.	7
1.2.2 Formulación de los modelos función de transferencia.	9
- Función de transferencia.	10
- Modelo función de transferencia.	12
1.3 Etapas en la construcción de modelos función de transferencia.	17
1.4 Algunas funciones de respuesta a impulsos típicos.	20
Capítulo 2. Identificación de los modelos función de transferencia.	24
2.1 Preparación y preblanqueo de las series entrada y salida.	24
2.1.1 Preparación.	24
2.1.2 Preblanqueo.	25
2.2 Cálculo de la función de correlación cruzada de las series preblanqueadas.	27
2.2.1 Función de covarianza y correlación cruzada.	27
- Estimación.	29
2.3 Estimación directa de la función de respuesta a impulsos y determinación de los órdenes (b,r,s) para el modelo función de transferencia.	31
2.3.1 Relación entre las funciones de covarianza y de respuesta a impulsos.	31
2.3.2 Características de la función de respuesta a impulsos.	35
2.4 Procedimiento para la identificación del proceso ruido.	36
Capítulo 3. Estimación de los parámetros del modelo.	41
3.1 Estimación de parámetros para el modelo función de transferencia.	41
3.2 Algoritmos de estimación no lineal.	48

Capítulo 4. Examen de adecuación del modelo función de transferencia y su uso en pronósticos.	51
4.1 Análisis de residuales.	51
4.2 Pronósticos usando modelos función de transferencia.	58
- Error cuadrático medio mínimo de pronóstico para series entrada y salida estacionarios.	58
- Cálculo de pronósticos.	60
Capítulo 5. Aplicación del modelo función de transferencia al estudio de la relación dinámica de los precios del petróleo crudo y la gasolina en Estados Unidos.	64
5.1 Introducción.	64
5.2 Construcción del modelo función de transferencia.	65
5.2.1. Identificación.	69
- Etapa 1: Preparación de las series entrada y salida.	70
- Etapa 2: Preblanqueo de la serie entrada.	71
- Etapa 3: Preblanqueo de la serie salida.	72
- Etapa 4: Cálculo de autocorrelación y correlación cruzada para las series preblanqueadas.	73
- Etapa 5: Estimación directa de los pesos de respuesta a impulsos.	76
- Etapa 6: Identificación de los órdenes (b,r,s) para el modelo función de transferencia.	78
- Etapa 7: Estimación preliminar de los parámetros de la función de transferencia.	78
- Etapa 8: Una mirada preliminar a la serie ruido.	79
- Etapa 9: Identificación del modelo ARIMA (p,d,q) para la serie ruido.	80
- Etapa 10: Estimación preliminar de los parámetros del modelo para la serie ruido.	81
5.2.2 Estimación final de los parámetros.	82
5.2.3 Diagnóstico del modelo.	83
- Análisis de residuales: autocorrelaciones.	85
- Análisis de residuales: correlaciones cruzadas	87
5.2.4 Pronósticos usando el modelo función de transferencia	90
- Comparación de pronósticos.	91



CONCLUSIONES	94
REFERENCIAS	96
APENDICES	98
A. Cronología de los eventos importantes en el mercado del petróleo	98
B. Cuadrados comparativos.	101
C. Lista de datos.	104
GLOSARIO	108

## Introducción

La literatura estadística de las dos últimas décadas ha discutido de una manera extensa la aplicación de los modelos ARIMA (Modelos Autorregresivos de Medias Móviles Integradas) en el pronóstico y control de sistemas estocásticos (Liu Lon-Mu, 1987). Estos modelos de series de tiempo tienen como estrategia principal el supuesto de continuidad, esto es, el patrón de comportamiento del sistema identificado continuará en el futuro, además de que todas las influencias externas que existan y que puedan afectar al sistema se resumen en un conjunto de perturbaciones que se comportan como *ruido blanco*.

Los modelos ARIMA fueron propuestos por Box y Jenkins en su libro *Times Series Analysis: Forecasting and Control* (1976), en éste libro también se propone un procedimiento sistemático para construir los modelos ARIMA, el cual consta de cuatro etapas: identificación, estimación, diagnóstico y pronóstico. A este procedimiento sistemático se le conoce como *metodología de Box y Jenkins*.

A los modelos ARIMA a menudo se les denomina "modelos univariantes", debido a que estos sólo consideran principalmente el análisis de una sola serie de tiempo. La mayoría de los métodos cuantitativos de pronóstico están basados en una sola serie de tiempo, sin embargo, se dan situaciones donde la serie de tiempo bajo estudio puede estar dinámicamente relacionada a otras series de tiempo externas, en esta situación es posible mejorar el rendimiento del modelo al incluir estas series de tiempo externas en nuestro modelo.

Existen modelos para el estudio de la situación anterior, algunos de éstos modelos son: *modelos función de transferencia* (desarrollado por Box y Jenkins, 1976), *modelos vector ARMA* (según Ledolter, 1978; Jenkins y Alvi, 1981) y *modelos de intervención* (propuestos por Box y Tiao, 1975). Estos modelos que toman en cuenta la característica dinámica del sistema son conocidos como "modelos de entradas múltiples" o *modelos función de transferencia*.

De los modelos función de transferencia anteriores el propuesto por Box y Jenkins (1976) es el que se aborda en el presente trabajo. Aunque dichos modelos

---

pueden usarse para el análisis de más de dos series de tiempo, se considera que estos modelos resultan más promisorios para la situación de dos series de tiempo, pues se dificulta el generalizarlo para las circunstancias de más de dos series de tiempo<sup>1</sup>. Así solamente se considera los modelos función de transferencia bivariados.

Los modelos función de transferencia bivariados consisten en el análisis de dos series de tiempo, una llamada serie entrada y la otra serie salida, en donde se asume que la serie entrada ejerce una influencia sobre la serie salida vía una función de transferencia que distribuye el impacto de la serie entrada sobre varios períodos de tiempos futuros de la serie salida.

La función de transferencia que relaciona a la serie entrada con la serie salida es obtenida a través del análisis de la función de correlación cruzada muestral entre las series entrada y salida preblanqueadas y del análisis de la función de respuesta a impulsos, la cual es un estimador de la propia función de transferencia.

La palabra preblanqueo hace referencia a una de las ideas básicas más importantes de estos modelos y parte del hecho de que si queremos juzgar si la serie entrada puede explicar el comportamiento de la serie salida debemos eliminar toda variación interna en cada una de las series de tal manera que sólo queden aquellos patrones necesarios para descubrir la verdadera forma en que estas series de tiempo se relacionan.

Entre las distintas fases del análisis de series de tiempo una de las más importantes es la construcción de un modelo matemático para la serie o series bajo estudio. Para construir los modelos función de transferencia haremos uso de la metodología de Box y Jenkins, con esto se plantea el primer objetivo del presente trabajo: el estudio de la metodología de Box y Jenkins aplicada a la construcción de modelos función de transferencia bivariados.

Como veremos en el presente trabajo, los modelos función de transferencia permiten incorporar más información en el modelo que simplemente los datos históricos de una sola serie de tiempo, con el beneficio de incrementar la información en el modelo, estos deben producir mejoras en los pronósticos. Probar lo anterior es el segundo objetivo que se plantea en el presente trabajo.

---

<sup>1</sup> LIU LON-MU. Ob. Cit. Pag. 4.

Eso se lleva a cabo a través de la aplicación del modelo función de transferencia al análisis de la relación dinámica de los precios del petróleo crudo y la gasolina en Estados Unidos.

El trabajo fue dividido en cinco capítulos que comprenden: las diferentes etapas para construir los modelos, el sustento teórico de los modelos función de transferencia bivariados y la aplicación de éstos a un caso práctico.

El capítulo uno da una visión general de la aplicación de la metodología de Box y Jenkins en la construcción de modelos de series de tiempo; se explican los conceptos necesarios para la comprensión y estudio de los modelos función de transferencia; se describen las etapas y subetapas del proceso para la construcción de los modelos función de transferencia y por último se analizan algunas funciones de respuesta a impulsos que se presentan con más frecuencia en la práctica.

Dentro del capítulo dos, se presenta el estudio del proceso para la identificación del modelo función de transferencia tentativo a través de los siguientes pasos: a) Preparación y preblanqueo de las series entrada y salida, b) Cálculo de la función de correlación cruzada de las series preblanqueadas y c) Estimación directa de la función de respuesta a impulsos y determinación de los órdenes (b,r,s).

En el capítulo tres, se describe el planteamiento en tres etapas de la estimación de parámetros para el modelo función de transferencia y los algoritmos de estimación no lineal relacionadas con el algoritmo de Marquardt, que es el que se utiliza en la estimación de los parámetros.

En este capítulo también se muestra como aprovechar la relación que existe entre los parámetros del modelo función de transferencia y los pesos de respuesta a impulsos para obtener valores iniciales para los parámetros del modelo.

El cuarto capítulo considera como verificar si el modelo función de transferencia es adecuado bajo los supuestos con que fue construido. Las herramientas que se estudian en este capítulo para comprobar lo adecuado del modelo son: *el análisis de residuales y la prueba pormanteau* (estadístico con

---

distribución ji-cuadrada).

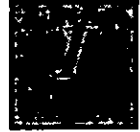
Es importante reiterar que los cuatro capítulos anteriores presentan el sustento teórico de los modelos función de transferencia. El enfoque que se pretende dar a este sustento teórico es el de que el lector encuentre en este trabajo los elementos necesarios que lo lleven a la aplicación práctica de los modelos función de transferencia. Con esto no se pretende de ninguna manera restar importancia a los fundamentos formales de estos modelos. En la bibliografía de éste trabajo se da un buen número de referencias para el lector interesado en los fundamentos formales de los modelos función de transferencia.

Una vez expuestos los cuatro capítulos anteriores, se presenta el capítulo cinco que muestra el proceso de construcción de un modelo función de transferencia en el estudio de la relación dinámica entre el precio del crudo y de la gasolina en Estados Unidos. El caso que estudia este capítulo está basado en el artículo de Lon Mu Liu : Dymanic Relationship Analysis of US Gasoline and Crude Oil Prices (1991).

Así también en este capítulo se realiza una comparación de los pronósticos generados por el modelo función de transferencia y el modelo univariante ARIMA, usando los estadísticos ECM (Error Cuadrático Medio) y el EPMA (Error Porcentual Medio Absoluto), con el propósito de evaluar las posibles mejoras que logra el modelo función de transferencia en los pronósticos.

Este capítulo fue fundamental para cubrir el segundo objetivo del presente trabajo, así como para las conclusiones que se obtuvieron.

# *Capítulo*

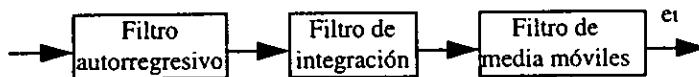


## *Modelos función de transferencia*

Los modelos función de transferencia con una sola serie entrada involucran el análisis por separado de éstas antes de encontrar la función de transferencia que relaciona la serie entrada con la serie salida. Es por ello que se presenta primero la metodología de Box y Jenkins para el análisis de una sola serie de tiempo antes de proseguir con el estudio de los modelos función de transferencia.

## 1.1. Metodología de Box y Jenkins.

En 1976 E. P. Box y Gwilym M. Jenkins<sup>2</sup> publican su libro *Time Series, Forecasting and Control*, en el cual se expone el desarrollo de un método para construir modelos lineales de series de tiempo haciendo uso de modelos matemáticos estocásticos. En el momento de su aparición el método recibió muchas críticas debido a lo laborioso que resultaba por lo que se le consideró como un método poco práctico. Sin embargo, con el desarrollo de lenguajes de programación y software para el análisis estadístico éste método se ha convertido, dentro de los métodos cuantitativos de pronósticos, uno de los más usados actualmente. El método desarrollado por Box y Jenkins consiste en extraer las fluctuaciones predecibles de las observaciones de una variable en el tiempo, en donde estas observaciones son dependientes entre sí y el patrón identificado en estas observaciones continuará en el futuro (supuesto de continuidad). De acuerdo a las fluctuaciones de las observaciones, la serie de tiempo se descompone en componentes determinísticos (fluctuaciones predecibles) y en un componente aleatorio, el cual agrupa aquellas fluctuaciones no predecibles, consideradas como aleatorias. El objetivo del método es separar aquellos componentes determinísticos que servirán para estimar la serie de tiempo, del componente aleatorio, conocido también como residuales, los cuales tendrán poca influencia en el resultado final. Box y Jenkins proponen una metodología para el análisis de series de tiempo haciendo uso de tres filtros lineales para separar los componentes determinísticos del componente aleatorio, estos filtros son : el autorregresivo, el de integración y el de media móviles (ver fig.1.1).



**Figura 1.1**  
Método de Box y Jenkins

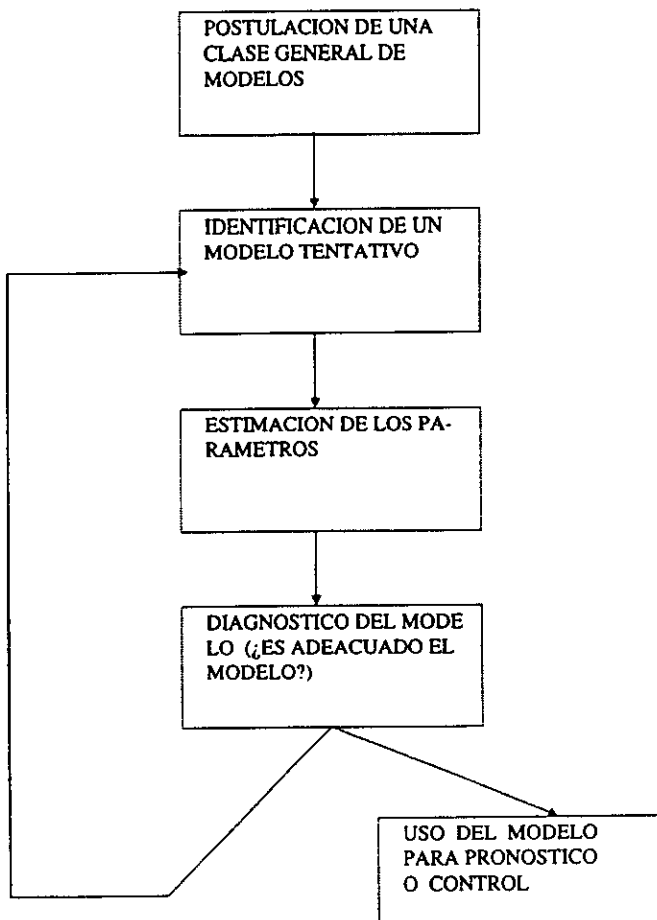
---

<sup>2</sup> BOX AND JENKINS. *TIME SERIES ANALYSIS. Forecasting and Control*. Holden Day, 1976.

Este método para construir modelos lineales de series de tiempo hace uso de un procedimiento sistemático que consiste de 4 etapas iterativas :

- 1.- Postulación de una clase general de modelos
- 2.- Identificación de un modelo tentativo
- 3.- Estimación de los parámetros
- 4.- Diagnostico del modelo

Esquemáticamente<sup>3</sup> :



<sup>3</sup> Ibid. Pag. 532.



A continuación describiremos de una manera general cada una de las cuatro etapas.

*1. Postulación de una clase general de modelos.* Una clase general de modelos propuestos es el ARMA(p,q) :

$$\phi(B) Z_t = \theta(B)a_t$$

donde:

B, es el operador retardo, definido como  $BZ_t = Z_{t-1}$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

El modelo ARMA(p,q) puede ajustarse a casi cualquier serie de tiempo que no presente tendencia, ni variación estacional y varianza inestable, esto es, a cualquier serie estacionaria. Sin embargo, en la práctica las series de tiempo que se presentan no son estacionarias y para hacer uso del modelo ARMA es necesario que la serie sea estacionaria. Así, para obtener una serie estacionaria es necesario estabilizar la varianza, eliminar la tendencia y la variación estacional lo que se puede lograr a través de transformaciones, diferencias ordinarias y estacionales.

Las transformaciones más usadas para estabilizar la varianza son las logarítmicas y las raíces cuadradas, la idea básica es transformar los datos de modo que la varianza sea constante. Las diferencias ordinarias consisten en restar los valores de las observaciones uno de otra en un orden preestablecido. La diferencia estacional es similar a la diferencia ordinaria sólo que en esta se toman diferencias entre observaciones separadas por un período estacional  $s$ .

Existen series de tiempo que presentan varianza no constante y tendencia pero no presentan variación estacional, en nuestro trabajo nos concentraremos en este tipo de series. Un modelo más general propuesto para este tipo de series es el siguiente :

$$\phi(B)\nabla^d z_t = \theta(B)a_t,$$

donde :

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d, \text{ operador diferencia ordinaria}$$

llamado modelo ARIMA(p,d,q).

Como puede verse el modelo queda establecido si los órdenes p,d,y q son determinados.

## 2. Identificación de un modelo tentativo.

En esta etapa se elige un modelo tentativo de la clase general ARIMA, esto es, se determinan el orden de las diferencias ordinarias, el orden de los polinomios autorregresivos  $\phi(B)$  y el orden de medias móviles  $\theta(B)$ . La manera en que se determinan los órdenes es analizando las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, que son estadísticos que describen la estructura de dependencia lineal entre las observaciones de la serie de tiempo.

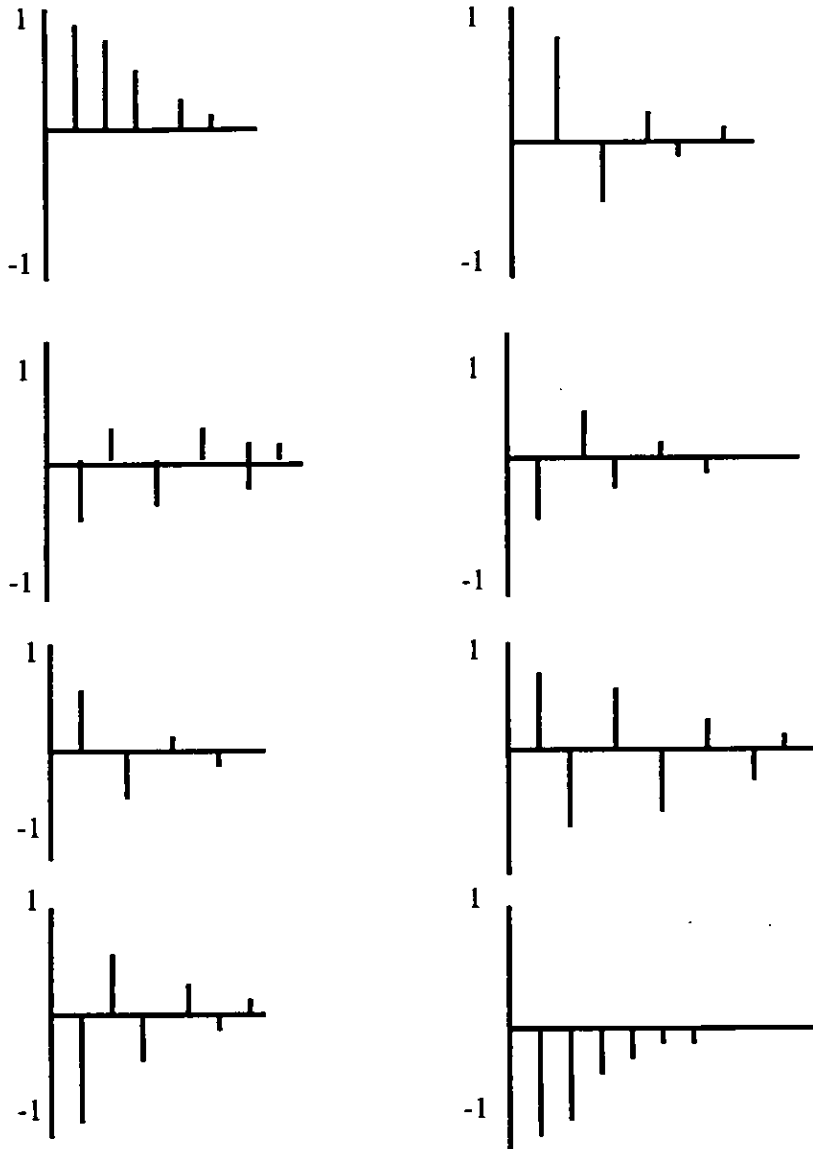
En la tabla 1.1<sup>4</sup> se resume el comportamiento teórico de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial del modelo ARMA, y que se presentan gráficamente en la figura 1.1.

**Tabla 1. 1.**

Resumen de la función de autocorrelación y autocorrelación parcial del modelo ARMA.

	FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN	FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL
AR(p)	Muchos coeficientes no nulos que decrecen con el retardo como mezcla de exponenciales y senoides.	p primeros coeficientes no nulos y el resto cero
MA(q)	q primeros coeficientes no nulos y el resto cero	Muchos coeficientes no nulos con el retardo como mezcla de exponenciales y senoides
ARMA(p,q)	Decrecimiento hacia cero	Decrecimiento hacia cero

<sup>4</sup> PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D. ESTADÍSTICA MODELOS Y METODO. VOL.2. Editorial Alianza, 1987. Pags. 531-532



---

**Figura 1. 2.**  
ACF's y PACF's del modelo ARMA (1,1)

En esta etapa deben calcularse primeramente las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial de la serie de tiempo. Las gráficas de estas deben ser cuidadosamente examinadas y comparadas con los patrones teóricos de la figura 1. Algunas veces el patrón de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales calculadas pueden ser fácilmente asociadas con las teóricas y de esta manera la identificación se facilita, cuando esto no sucede, el conocimiento del fenómeno por parte del pronosticador juega un papel importante para identificar el modelo.

### ***3. Estimación de los parámetros.***

Supongamos que el modelo tentativo es un ARIMA(1,0,1), su forma matemática es :

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

para poder usar este modelo deben ser estimados los parámetros  $\phi_1$  y  $\theta_1$ . Esta estimación se realiza a través de métodos de estimación estadística, como el método de máxima verosimilitud o métodos de estimación no lineal.

La estrategia es iniciar con valores aproximados para  $\phi_1$  y  $\theta_1$  y usarlos en los algoritmos de estimación como, el de Marquardt, para mejorarlos. Estos estimadores deben minimizar el error cuadrático medio.

### ***4. Diagnóstico del modelo.***

Si el modelo tentativo es adecuado, los residuales, que son las diferencias entre los valores de la serie y aquellos estimados por el modelo deben tener un comportamiento ruido blanco, es decir, deben distribuirse de manera normal con media igual a cero y varianza constante,  $N(0, \sigma^2)$ . Estos errores puede ser calculados usando :

$$e_t = Z_t - \hat{Z}_t$$

La existencia de un patrón en los residuales puede ser determinada a través de los coeficiente de autocorrelación. Si ninguno de ellos es significativamente diferente de cero, los errores se asumen aleatorios o ruido blanco, y en consecuencia el modelo es adecuado, de lo contrario se reinicia el procedimiento en la etapa 2.

Una vez que el modelo tentativo es adecuado éste es usado para propósitos de pronósticos o de control.

Esta misma estrategia será utilizada para construir los modelos función de transferencia.

## 1.2. Fundamentos y Conceptos

Dentro de los conceptos de los modelos univariante existen algunos que serán de utilidad en los modelos bivariados de series de tiempo o modelos función de transferencia, estos conceptos se presentan a continuación.

### 1.2.1 Conceptos básicos

#### ◆ Serie de tiempo

Una serie de tiempo es un conjunto de observaciones generadas secuencialmente a través del tiempo. Los datos se ordenan con respecto al tiempo y las observaciones son generalmente dependientes entre sí. La serie de tiempo observada es una realización de un cierto proceso. Una realización es toda una secuencia de observaciones .

#### ◆ Proceso estocástico

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias ordenadas en el tiempo y que se distribuyen de acuerdo a leyes probabilísticas.

#### ◆ Proceso estacionario<sup>5</sup>

Dada una serie de tiempo estocástica representada por un conjunto de variables aleatorias conjuntamente distribuidas  $\{Y_t\}$  con una función de distribución de probabilidad  $P[Y_1, \dots, Y_t]$  y una función de distribución condicional :

$$P[Y_{t+1} | Y_1, \dots, Y_t]$$

---

<sup>5</sup> PAZ GUTIERREZ, Bertha Eugenia. "Análisis de series de tiempo para pronósticos en el caso de un número reducido de datos". ESIME.IPN. Pags.15-17

se define un proceso estacionario como uno para el que la distribución conjunta y la distribución condicional son invariantes con respecto al desplazamiento de la variable en el tiempo. Es decir, la serie  $Y_t$  es estacionaria si :

$$P[Y_t, \dots, Y_{t+k}] = P[Y_{t+m}, \dots, Y_{t+m+k}]$$

para toda  $t, k$  y  $m$ .

Si la serie es estacionaria, el promedio de los valores de la variable aleatoria de la serie denotada por  $\mu_y$  y definido por :

$$\mu_y = E[y_t]$$

es también estacionaria, es decir :

$$E[y_t] = E[y_{t+m}]$$

La varianza de la serie,  $\sigma^2_y = E[(Y_t - \mu_y)^2]$ , es también estacionaria y

$$E[(Y_t - \mu_y)^2] = E[(Y_{t+m} - \mu_y)^2]$$

y la covarianza, definida por :

$$\gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$$

deberá ser también estacionaria.

Para propósitos de análisis, se define la función de autocorrelación como :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

la cual mide la relación entre  $Y_t$  y  $Y_{t+k}$  y tiene tres propiedades :

- ◆ 1) Es una función par  $\rho_{-k} = \rho_k$
- ◆ 2) El valor absoluto de  $\rho_k$  es menor igual a uno,  $|\rho_k| \leq 1$

- ◆ 3) No existe unicidad. Es decir pueden existir dos procesos estocásticos con la misma función de autocorrelación.

Se debe notar que  $\rho_{\alpha(k)} = 1$ . Para procesos estocásticos estacionarios la función de autocorrelación decae rápidamente al incrementarse  $k$ .

#### ◆ Proceso ruido blanco

Un proceso ruido blanco es un proceso estocástico estacionario, cuyas variables están normalmente distribuidas con esperanza igual a cero, varianza constante y donde la covarianza entre variables es definida por :

$$\rho_k = \text{Cov} (Y_t, Y_{t+k})$$

donde :

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

y

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

### 1.2.2. Formulación de los modelos función de transferencia.

Los modelos univariantes nos permiten hacer inferencia acerca del comportamiento futuro de una variable dado sus datos históricos en términos probabilísticos. Permittiéndonos además identificar y estimar los componentes llamados de no estacionaridad como tendencia, varianza inestable y variación estacional. Es decir, podemos determinar con las técnicas de Box y Jenkins para el análisis de series de tiempo univariante, si hay o no, por ejemplo, una tendencia creciente o decreciente en la evolución de las ventas de una empresa. Pero lo que no podemos hacer a partir de éstas, es identificar en un momento dado, que es lo que causa tal patrón de comportamiento en los datos. Si consideramos por ejemplo, una serie de tiempo  $\{Y_t\}$  (que llamaremos de salida) la cual presumimos que está influenciada por otra serie de tiempo  $\{x_t\}$  (llamada entrada) más otros componentes colectivamente agrupados y que llamaremos

*proceso inercia* (representado por  $N_t$ ) entonces tendremos un sistema dinámico o un modelo función de transferencia. Más específicamente, diremos que la serie  $\{X_t\}$  ejerce una influencia en la serie salida  $\{Y_t\}$ , vía una función de transferencia que distribuirá el impacto de  $\{X_t\}$  sobre varios tiempos futuros de la  $\{Y_t\}$ .

Box y Jenkins proponen un método para construir los modelos función de transferencia. El objetivo de éste método es determinar un modelo parsimonioso que relacione  $\{Y_t\}$  a  $\{X_t\}$  y  $\{N_t\}$ . Este propuesto es el que abordamos en nuestro trabajo.

#### ◆ Función de transferencia

Consideremos un ejemplo sencillo para entender el concepto función de transferencia<sup>6</sup>.

Supongamos que en una oficina postal se recibe un cierto lote de cartas que hay que entregar. Estas se recibirán en cada uno de los 20 días siguientes, pero debido a problemas tanto de personal como de tipo técnico, éstas no podrán ser entregadas el mismo día en que se reciban, sino en los subsecuentes. Así, sea  $X_t$  el número de cartas que se reciben en el día  $t$  y  $Y_t$  el número correspondiente a las entregadas en algún día  $t$ .

La cuestión esencial aquí, es determinar la relación entre  $X_t$  y  $Y_t$ . Es decir, la relación entre el número de cartas recibidas y el número de cartas entregadas. Podemos comprobar que si utilizáramos una gráfica  $Y_t$  contra  $X_t$ , figura 1.3, nos llevaría a considerar que tal cuestión no podría ser explicada mediante una análisis de regresión simple, por la razón de que los valores de  $X_t$  están dinámicamente distribuidas sobre futuros períodos de tiempo. Dicha distribución puede ser descrita por una función de transferencia.

Así por ejemplo, las 50 cartas que llegaron en el día 1 fueron entregadas como sigue :

0 (0%) el mismo día	10 (20%) en el día 4
5 (10%) en el día 2	5 (10%) en el día 5
25 (50%) en el día 3	5 (10%) en el día 6

<sup>6</sup> MAKRIDAKIS/WHEELWRIGTH/MCGEE. *Forecasting: Methods and Applications*. Wiley, 1983. Pags. 481-483.



es decir, según los datos, el número de cartas entregadas se distribuyo en el tiempo de acuerdo a los mismo porcentajes (llamados  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v$ ), para todo el proceso. Los valores de  $v_0$  a  $v_5$  son llamados *pesos de respuesta a impulsos* (o *pesos de la función de transferencia*).

Esta función se puede escribir como

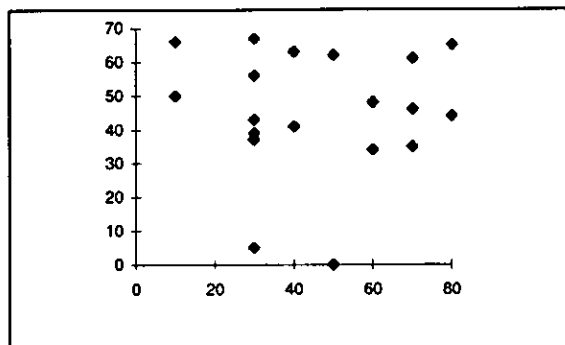
$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \dots + v_5 X_{t-5}$$

$$Y_t = (v_0 + v_1 B + \dots + v_5 B^5) X_t$$

$$Y_t = v(B) X_t$$

**Tabla 1.2.**  
Número de cartas recibidas y entregadas.

Dia	Xt																					Yt
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	50																					0
2	30	5																				5
3	90	25	3																			28
4	60	10	15	9																		34
5	50	5	6	45	6																	62
6	70	5	3	18	30	5																61
7	30		3	9	12	25	7															56
8	40			9	6	10	35	3														63
9	80				6	5	14	15	4													44
10	70					5	7	6	20	8												46
11	80						7	3	8	40	8											65
12	10							3	4	16	40	1										66
13	30								4	8	16	5	3									67
14	30									8	8	2	15	3								39
15	70										8	1	6	15	7							35
16	30											1	3	6	35	3						37
17	60												3	3	14	15	6					48
18	40													3	7	6	30	4				41
19	10														7	3	12	24	4			50
20	30																	12	24	1	7	43



**Figura 1.3.**

Serie salida (cartas entregadas) *versus* la serie entrada (cartas recibidas)

#### ◆ Modelo función de transferencia

Un modelo función de transferencia para una serie  $Y_t$  puede interpretarse como una representación matemática que descompone la historia de la serie de tiempo en dos componentes. El primero describe como la serie entrada  $X_t$  (variable explicativa) influye a la serie salida  $Y_t$  (variable respuesta). El segundo recoge el efecto de todas las demás influencias excluidas del modelo. Esquemáticamente podemos escribir :

$$Y_t = Y_t^* + N_t \quad \dots(1.1)$$

donde  $Y_t^*$  es la parte de la serie salida  $Y_t$  explicada por la serie entrada  $X_t$  y  $N_t$  la parte no explicada.

Los principios básicos para la construcción de un modelo función de transferencia son los siguientes :

- 1. La serie entrada  $X_t$  influye sobre  $Y_{t+k}$ , para  $k \geq 0$ , pero no al contrario; no existe relación entre  $Y_t$  y  $X_{t+k}$ , para  $k > 0$ . Esta condición exige una relación de causalidad unidireccional (sin retroalimentación) entre las series.
- 2. La relación entre la serie  $X_t$  y la serie salida  $Y_t$  es constante en el período muestra analizado.

➤3. La serie entrada  $.X_t$  y la serie  $N_t$  son independientes.

➤4. La respuesta de  $Y_t$  a las observaciones de  $.X_t$  pueden aproximarse de forma lineal. Por lo tanto:

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots \quad \dots(1.2)$$

donde los coeficientes  $\{v_i\}$  son constantes desconocidas a determinar. La representación de los coeficientes  $\{v_i\}$  en función del retardo se denomina *función de respuesta a impulsos* o *función de transferencia*.

➤5. La parte de  $Y_t$  no explicada por  $.X_t$  contendrá el efecto de otras variables relevantes excluidas del modelo. Este componente que llamaremos *proceso inercia*, podrá descomponerse análogamente al caso univariante en dos partes:

$$N_t = f_t + a_t \quad \dots(1.3)$$

donde  $f_t$  representa su parte predecible y  $a_t$  es un proceso ruido blanco. Si todas las variables que afectan de modo sistemático a  $Y_t$  están incluidas en el modelo, la componente  $f_t$  puede ser nula. En general es deseable que  $N_t$  sea estacionaria de manera que  $.X_t$  recoja la tendencia de la serie  $Y_t$ .

La unión de (1.3) y (1.1) permiten escribir

$$Y_t = Y_t^* + f_t + a_t \quad \dots(1.4)$$

que descompone a  $Y_t$  en tres términos independientes. El primero es el efecto de las variables explicativas  $X_t$  incluidas explícitamente en el modelo; el segundo,  $f_t$  es el efecto sistemático debido a la estructura temporal de las variables excluidas y el tercero,  $a_t$ , engloba una multitud de pequeñas causas sin estructura temporal y que se denomina el término de perturbación.

Llamaremos función de transferencia a la ecuación que representa el efecto agregado lineal de toda la historia de  $X_t$  sobre la variable  $Y_t$ . Escribiremos:

$$Y_t^* = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + \dots \quad \dots(1.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 \dots) X_t \\
 &= v(B) X_t
 \end{aligned}$$

donde B es el *operador retardo* definido por  $BX_t = X_{t-1}$ . Diremos que la función de transferencia es estable si un aumento finito en  $X_t$  produce un aumento finito en  $Y_t$ . En consecuencia el sistema será estable si

$$\sum_0^{\infty} v_i < \infty$$

Lo que exige que la serie  $v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots$ , sea convergente para  $|B| \leq 1$ .

La representación general de  $v(B)$  contiene un número infinito de parámetros y no es operativa, ya que para estimar un número infinito de parámetros necesitamos un número infinito de observaciones.

Como el objetivo es obtener un modelo parsimonioso, Box y Jenkins proponen usar una representación alternativa de la función de transferencia que es la siguiente:

$$v(B) = \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \omega_r(B) &= \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_r B^r \\
 \delta_r(B) &= 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r
 \end{aligned}$$

Para que el sistema sea estable, es decir, para que un incremento finito de  $X_t$ , no conduzca a un incremento infinito en  $Y_t$ , las raíces del polinomio  $\delta_r(B) = 0$ , tienen que estar fuera del círculo unitario. Esta condición es equivalente a la del operador AR(p) de un proceso ARMA. No existe, sin embargo restricción alguna para  $\omega_r(B)$ .

Muchos sistemas responden a un impulso en  $t$ , después de cierto período de retardo que denotaremos por  $b$ , es decir, los primeros  $b$  coeficientes de  $v_t$  son cero. Tomaremos en cuenta este efecto introduciendo un tercer parámetro,  $b$ , y escribiendo :

$$v(B) = \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)} B^b \quad \dots(1.6)$$

Así el filtro lineal  $v(B)$  queda caracterizado por los órdenes  $(b,r,s)$ .

Ahora supongamos que la parte de  $Y_t$  no explicada por  $X_t$ ,  $N_t$ , sigue un proceso ARIMA(p,d,q) (Notar que este supuesto es más general que el de los modelos univariantes, donde se supone que  $N_t$  sigue un proceso ruido blanco), y escribiremos :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d N_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t,$$

6

$$\phi_p(B) \nabla^d N_t = \theta_q(B) a_t,$$

$$N_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B) \nabla^d} a_t,$$

con lo cual el modelo función de transferencia completo se expresa :

$$Y_t = Y_t^* + N_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} X_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B) \nabla^d} a_t,$$

$$Y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b X_t + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B) \nabla^d} a_t, \quad \dots(1.7)$$

donde

$$\omega_s(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_s B^s$$

$$\delta_r(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$$

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\nabla^d = (1 - B)^d, \text{ operador diferencia ordinaria}$$

Debe notarse que en (1.7)  $Y_t$  y  $X_t$  presentan a las series de tiempo originales que pueden ser o no estacionarias. Sin embargo es buena práctica construir modelos función de transferencia usando series estacionarias. Así trabajando con series estacionarias, es bastante posible que  $N_t$  siga un proceso ARMA(p,q).

Reescribiendo el modelo función de transferencia (1.7), tenemos :

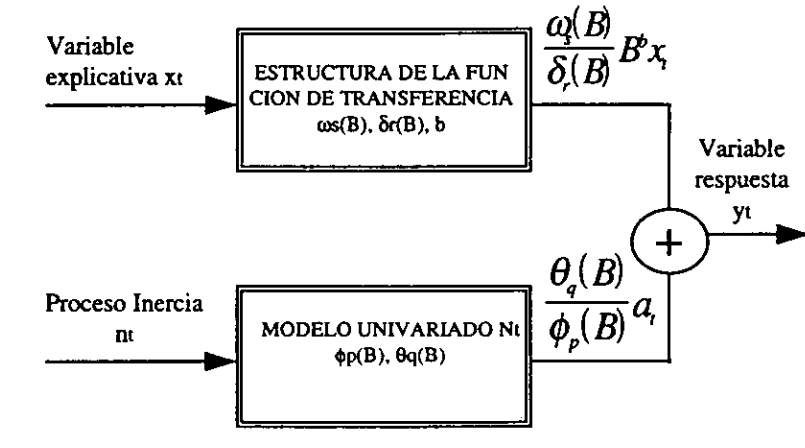
$$y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b x_t + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t \quad \dots(1.8)$$

con

$$y_t = \nabla^d Y_t \text{ y } x_t = \nabla^d X_t$$

donde  $d$  y  $d'$  se refieren al orden de diferencias ordinarias que se deben aplicar a ambas series y que no son necesariamente del mismo orden.

El modelo función de transferencia (1.8) está representado en la siguiente figura 1.4<sup>7</sup>. En la parte superior de la figura tenemos la estructura de la función de transferencia determinando la naturaleza de la influencia de la variable explicativa sobre la variable respuesta. En la parte inferior tenemos el proceso inercia representado por un modelo ARMA(p,q). Finalmente éstas dos partes se unen para formar el modelo función de transferencia completo.



**Figura 1.4.**  
Modelo función de transferencia.

<sup>7</sup> VANDAELE, Walter. APPLIED TIME SERIES AND BOX Y JENKINS MODELS. Academic Press, 1965. Pag 262.

### 1.3. Etapas en la construcción de modelos función de transferencia

Para construir los modelos función de transferencia haremos uso de la metodología de Box y Jenkins, que originalmente consta, como ya vimos de cuatro etapas. En nuestro trabajo la metodología es planteada a través de las siguientes cuatro etapas:

- Identificación de los modelos función de transferencia
- Estimación de los parámetros del modelo
- Diagnóstico del modelo
- Uso del modelo en pronósticos

Estas cuatro etapas así como sus subetapas serán vistas en los siguientes tres capítulos. Sin embargo en esta sección presentamos estas etapas de una manera más detallada, dando las subetapas y presentándolas en un diagrama de flujo. Cabe aclarar que el propósito de esta sección no es presentar un estudio de las etapas y subetapas, sino bosquejar el algoritmo de éstas. Así, las etapas y subetapas para construir los modelos función de transferencia son las siguientes :

#### *1. Identificación de la forma del modelo*

- \*Preparación de la serie entrada y salida
- \*Preblanqueo de la serie entrada
- \*Preblanqueo de la serie salida
- \*Cálculo de autocorrelación y correlación cruzada para las series preblanqueadas
- \*Estimación directa de los pesos de respuesta a impulsos
- \*Especificación de (b,r,s) para el modelo función de transferencia
- \*Estimación preliminar de la serie ruido  $n_t$  y cálculo de las autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales
- \*Especificación de (p,q) para el modelo ARMA de la serie ruido  $n_t$

*2. Estimación de los parámetros del modelo*

- \*Estimación preliminar de los parámetros
- \*Estimación final de los parámetros

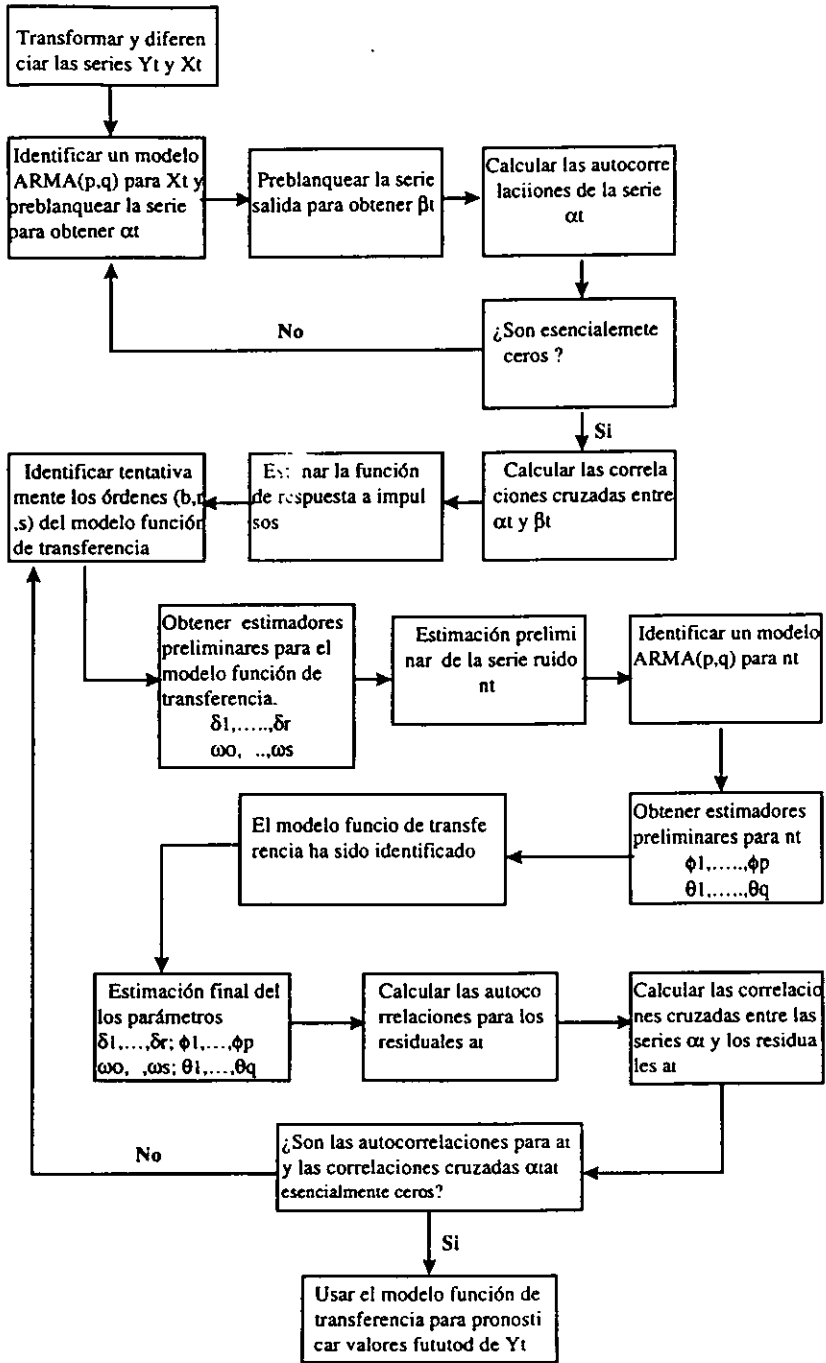
*3. Diagnóstico del modelo*

- \*Cálculo de las autocorrelaciones para los residuales  $a_t$
- \*Cálculo de las correlaciones cruzadas entre la serie entrada preblanqueada y los residuales  $a_t$

*4. Uso del modelo para pronósticos*

- \*Pronósticos de valores futuros usando el modelo función de transferencia





## 1.4. Algunas funciones de respuesta a impulsos típicas

Como vimos en la sección 1.2, el modelo función de transferencia completo es :

$$y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b x_t + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

el cual queda especificado si los ordenes (b,r,s) y (p,q) están determinados. Hasta aquí debe ser claro que nuestro propósito al modelar los modelos función de transferencia es identificar y estimar la función de transferencia o función de respuesta a impulsos, esto es, identificar y estimar la función :

$$v(B) = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} B^b x_t$$

de ahí, es que debemos tener una guía teórica de  $v(B)$  para poder lograr nuestro propósito.

De igual manera que en la construcción de los modelos univariantes ARIMA se propusieron las gráficas teóricas de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial como guías para la identificación de algún modelo ARIMA, en éste trabajo se proponen las gráficas teóricas de algunas funciones de respuesta a impulsos<sup>8</sup> como guías para identificar la función de transferencia  $v(B)$ .

En la práctica, los valores de r,s en el modelo función de transferencia no exceden de 2. A continuación presentamos algunas funciones de respuesta a impulsos que se presentan comúnmente en la práctica<sup>9</sup>.

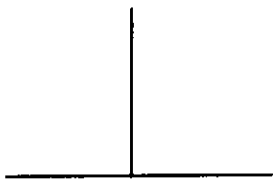
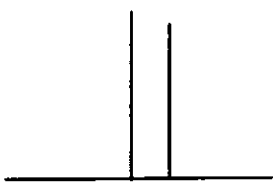
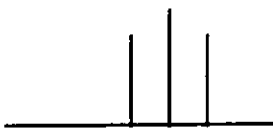
**Tipo1.  $r = 0$ .** Si  $r=s=0$ ; entonces el único peso de respuesta a impulso que no es cero es  $v_b = \omega$ . Esto es, la salida es proporcional a la entrada pero retardada por b períodos de tiempo. Para  $s>0$ , hay  $s+1$  pesos de respuesta a impulsos diferentes de cero, y son igual a  $v_b = \omega, v_{b+1} = -\omega, \dots, v_{b+s} = -\omega$ .

Las siguientes figuras muestran este caso.

<sup>8</sup> La función de respuesta a impulsos es una de las herramientas básicas en la identificación de los modelos función de transferencia. dicha función se estudia en el capítulo 2.

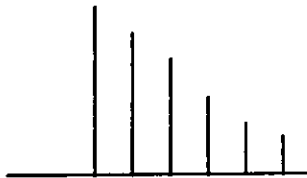
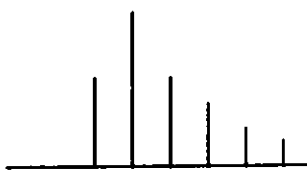
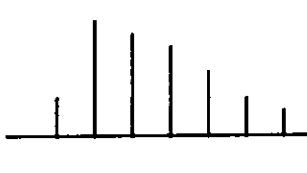
<sup>9</sup> WEI, William. TIME SERIES ANALYSIS. Univariate and Multivariate Methods. Addison Wesley, 1990. Pags. 292-293

FUNCION DE TRANSFERENCIA PARA  $r = 0$

(b,r,s)	Función de transferencia	Pesos de respuesta a impulsos
(2,0,0)	$v(B)x_t = \omega_0 x_{t-2}$	
(2,0,1)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B)x_{t-2}$	
(2,0,2)	$v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$	

**Tipo 2.  $r=1$ .** Si  $s=0$ , la función de respuesta a impulso exhibe un decaimiento exponencial a partir del valor inicial  $v_b = \omega_0$ . Si  $s=1$ , entonces un valor  $v_b$  no sigue un patrón. El decaimiento exponencial es proporcionado por la ecuación  $v_j = \delta_1 v_{j-1}$ , inicia con  $v_b = \delta_1 \omega_0 - \omega_1$ . Si  $s=2$ , entonces hay dos valores  $v_b$  y  $v_{b+1}$  los cuales no siguen un patrón, con el decaimiento exponencial inducido por  $v_j = \delta_1 v_{j-1}$ , iniciando con  $v_{b+2}$ . Este caso se muestra en las figuras siguientes.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA  $r = 1$ 

(b,r,s)	Función de transferencia	Pesos de respuesta a impulsos
(2,1,0)	$v(B)x_t = \frac{\omega_0 x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B)}$	
(2,1,1)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B) x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B)}$	
(2,1,2)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B)}$	

**Tipo 3.  $r=2$ .** En este caso, la función de respuesta a impulsos presentará un comportamiento con decaimiento exponencial o senoidal, o ambos, dependiendo de la naturaleza de las raíces del polinomio  $\delta_2 = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)$ .

Las gráficas tendrán un decaimiento exponencial si las raíces son reales, es decir, si  $\delta_1^2 - 4\delta_2 \geq 0$ ; seguirán un decaimiento senoidal si las raíces son complejas, es decir, si  $\delta_1^2 - 4\delta_2 < 0$ . El valor de  $s$  puede encontrarse fácilmente notando que el patrón de decaimiento empieza con  $v_{b+s+1}$ . Una vez que hemos encontrado el punto  $v_{b+s+1}$  de decaimiento, lo podemos determinar dando un valor para  $b$ . Las figuras siguientes ilustran este caso.

FUNCION DE TRANSFERENCIA PARA  $r = 2$

(b,r,s)	Función de transferencia	Pesos de respuesta a impulsos
(2,1,0)	$v(B)x_t = \frac{\omega_0 x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)}$	
(2,1,1)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B) x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)}$	
(2,1,2)	$v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2) x_{t-2}}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)}$	

Aunque la utilidad de estas funciones y sus representaciones gráficas no sean claras, en el próximo capítulo veremos y comprenderemos la utilidad de estas.

# Capítulo



## *Identificación de los modelos función de transferencia*

En este capítulo nos ocuparemos de la forma en que los modelos función de transferencia son identificados, es decir nos ocuparemos en determinar los órdenes (b,r,s) y (p,q) para la función de transferencia y el proceso ruido (o proceso inercia) respectivamente.

## 2.1. Preparación y preblanqueo de la series entrada y salida.

### 2.1.1. Preparación.

En el modelo función de transferencia

$$y_t = \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)} B^b x_t + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

establecimos que  $y_t = \nabla^d Y$  y  $x_t = \nabla^d X$ , son series estacionarias, esto como una buena práctica en el proceso de construcción de los modelos función de transferencia. Sin embargo en la práctica las series que se encuentran son generalmente series no estacionarias. Esta dificultad que encontramos en la práctica se resuelve, como ya vimos, a través de los métodos: de transformación, de diferencias ordinarias y diferencias estacionales. Así, el primer paso en la identificación de los modelos función de transferencia es obtener de las series entrada y salida originales series estacionarias si éstas no lo son. De acuerdo a los métodos mencionados anteriormente, podemos decir que obtener una serie estacionaria consiste en

- ⇒ determinar si es necesario transformar la serie para que esta tenga varianza constante.
- ⇒ determinar el número de diferencias ordinarias que deben aplicarse para que la media sea constante.
- ⇒ identificar si la serie puede ser estacional con período  $s$ , y en caso afirmativo aplicar una diferencia estacional  $(1-B^s)$  para obtener una serie estacionaria.

### 2.1.2. Preblanqueo.

Los modelos función de transferencia que abordamos, como ya vimos, consta de una serie llamada entrada y otra serie llamada salida, en donde se supone que la serie entrada ejerce una influencia en la serie salida vía una función de transferencia que distribuye el impacto de la serie entrada en períodos futuros de la serie salida. De lo anterior se desprende que nuestro interés es descubrir la estructura de la correlación que existe o que puede existir entre la serie entrada y la serie salida. Sin embargo, debe ser claro que tanto la serie entrada como la serie salida tienen su propia estructura de correlación interna que puede ocultarnos o encubrir la verdadera estructura de la correlación entre ambas series. En otras palabras si queremos juzgar si una variable (serie entrada) puede explicar el comportamiento de la serie salida, debemos eliminar toda variación en cada una de las series, que pueden ser explicadas por sus propios datos históricos, de tal manera que sólo queden aquellos patrones necesarios para descubrir la posible estructura de la correlación entre ellas. Es pues necesario disponer de algún método que nos permita obtener datos transformados con correlación interna menor. Box y Jenkins<sup>10</sup> proponen el método del preblanqueo para este propósito.

El método del preblanqueo consiste primero en obtener un modelo univariante ARMA(p,q) para la serie entrada estacionaria  $x_t$ , y así obtener un modelo ruido blanco  $\alpha_t$ . Segundo, aplicar el mismo modelo ARMA(p,q) de la serie estacionaria  $x_t$  a la serie salida estacionaria  $y_t$ , y obtener una serie preblanqueada  $\beta_t$ . Estas dos series preblanqueadas  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ , serán utilizadas para evaluar la naturaleza de la verdadera relación que puede existir entre la serie entrada y la serie salida.

La forma en que se realiza el preblanqueo es la siguiente:

1) Supongamos que la serie entrada  $x_t$  sigue el proceso ARMA(p,q), escribimos

$$\phi_{px}(B)x_t = \theta_{qx}(B)\alpha_t \quad \dots(2.1)$$

donde

<sup>10</sup> BOX AND JENKINS. *Op. cit.* Page.379-380.



$$\phi_{px}(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_{px}(B)^{px}$$

$$\theta_{qx}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{qx}(B)^{qx}$$

$\alpha_t$  = es el termino de choque aleatorio o ruido blanco

reagrupando términos para obtener la serie  $x_t$  en términos de  $\alpha_t$ , tenemos

$$\alpha_t = \frac{\phi_{px}(B)}{\theta_{qx}(B)} x_t \quad \dots(2.2)$$

de esta manera hemos obtenido la serie incorrelada  $\alpha_t$  de la serie correlada  $x_t$ .

2) Aplicando la transformación (2.1) a la serie salida  $y_t$  estacionaria

$$\phi_{py}(B) y_t = \theta_{qy}(B) \beta_t$$

donde

$$\phi_{py}(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_{py}(B)^{py}$$

$$\theta_{qy}(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_{qy}(B)^{qy}$$

reagrupando términos para obtener la serie  $y_t$  en términos de  $\beta_t$ , tenemos

$$\beta_t = \frac{\phi_{py}(B)}{\theta_{qy}(B)} y_t \quad \dots(2.3)$$

La transformación aplicada a  $y_t$  no necesariamente la convierte en un proceso ruido blanco, por ello que al método se la llama preblanqueo.

Es, de alguna manera intuitivo que la utilidad del método del preblanqueo es facilitarnos la identificación de la forma de la función de transferencia, como veremos posteriormente.

## 2.2. Cálculo de la función de correlación cruzada de la series preblanqueadas.

En la sección anterior mencionamos que en los modelos función de transferencia estamos interesados en describir la estructura de la correlación que puede existir entre la serie entrada y la serie salida, así pues es necesario disponer de una herramienta estadística que nos permita descubrir la estructura de la correlación entre estas series.

Así como en el proceso de la identificación de los modelos univariantes ARIMA(p,d,q) las herramientas estadísticas que se utilizan son las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial muestrales; en el proceso de la identificación de los modelos función de transferencia usaremos la función de correlación cruzada y la función de respuesta a impulsos, está última es vista en la sección 2.3.

### 2.2.1. Función de covarianza y correlación cruzada.

Supongamos que disponemos de N observaciones de dos series  $X_t$  y  $Y_t$ , en intervalos de tiempos iguales sobre un mismo período. Las observaciones se denotan por  $(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$ . Estas observaciones pueden ser consideradas como una realización finita de un proceso estocástico bivariado  $(X_t, Y_t)$ . Para describir un proceso bivariado es necesario conocer los momentos de segundo orden. Para un proceso univariado los momentos de segundo orden son la media y la función de autocovarianza. Para un proceso bivariado los momentos de segundo orden consisten en la media y la función de autocovarianza para cada componente más una función llamada función de covarianza cruzada, que está definida por

$$\gamma_{xy}(k) = \text{Cov}(X_t, Y_{t+k}) = E[(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y)]$$

Solamente consideraremos procesos bivariados estacionarios de segundo orden tales que los momentos hasta el segundo orden no cambian con el tiempo. Así usaremos la siguiente notación

$$E(x_t) = \mu_x, \quad E(y_t) = \mu_y$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_{i+k}) &= \gamma_x(k) \\ \text{Cov}(y_i, y_{i+k}) &= \gamma_y(k) \\ \text{Cov}(x_i, y_{i+k}) &= \gamma_{xy}(k) \end{aligned} \quad \dots(2.4)$$

La función de covarianza cruzada difiere de la función de autocovarianza en que ésta no es una función par ya que

$$\gamma_{xy}(k) \neq \gamma_{xy}(-k)$$

en cambio tenemos la relación

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(k) &= E[(x_i - \mu_x)(y_{i+k} - \mu_y)] = E[(y_{i+k} - \mu_y)(x_i - \mu_x)] = \gamma_{yx}(-k) \\ \gamma_{yx}(k) &= \gamma_{xy}(-k) \end{aligned}$$

El tamaño de los coeficientes de covarianzas cruzadas dependen de las unidades en las cuales  $x_i$  y  $y_i$  son medidas. Para propósitos de análisis es útil estandarizar la función de covarianza cruzada para obtener una función de correlación cruzada  $\rho_{xy}(k)$ , definida por

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}} \quad \dots(2.5)$$

Esta función mide la correlación entre  $x_i$  y  $y_i$  y tiene las siguientes propiedades

- a)  $\rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k)$
- b)  $|\rho_{xy}(k)| \leq 1$

Antes de ver la estimación de las funciones de covarianza y correlación cruzada, obtendremos las funciones teóricas para un ejemplo de procesos bivariados.

**Ejemplo.** Supongamos que  $\{x_i\}$  y  $\{y_i\}$  son generados por el proceso aleatorio  $\{z_i\}$ , que tiene media cero, varianza  $\sigma_z^2$ , donde

$$x_i = z_i$$

$$y_t = 0.5z_{t-1} + 0.5z_{t-2}$$

usando (2.4)

$$\gamma_{yy}(k) = \begin{cases} 0.5\sigma_z^2, & k = 1, 2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Ahora la varianza de los componentes están dados por

$$\begin{aligned} \gamma_{xx}(0) &= \sigma_z^2 \\ \gamma_{yy}(0) &= \frac{1}{2}\sigma_z^2 \end{aligned}$$

así, usando (2.5) tenemos

$$\rho_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{0.5}{\sqrt{2}}, & k = 1, 2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

#### ◆ Estimación.

La manera en que se estiman las funciones de covarianza y de correlación cruzada es por medio de sus correspondientes funciones muestrales. Con  $N$  observaciones  $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N\}$  la función de covarianza muestral es

$$C_{xy}(k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(y_{i+k} - \bar{y}) / N, & k = 0, 1, 2, \dots \\ \sum_{i=1-k}^N (x_i - \bar{x})(y_{i+k} - \bar{y}) / N, & k = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad \dots(2.6)$$

y la función de correlación cruzada muestral es

$$r_{xy} = \frac{C_{xy}(k)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots(2.7)$$

donde

$$S_x = \sqrt{C_{xx}(0)}, \quad \text{para } \sigma_x$$

$$S_y = \sqrt{C_{yy}(0)}, \quad \text{para } \sigma_y$$

y

$$S_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad S_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

reescribiendo (2.7)

$$r_{xy}(k) = \frac{C_{xy}(k)}{S_x S_y}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \dots(2.8)$$

Anteriormente cuando hablamos del método del preblanqueo se mencionó que la estructura de la correlación interna de cada serie puede encubrir la verdadera relación que puede existir entre las series. Aquí agregamos que como las varianzas de los estimadores dependen de la función de autocorrelación de cada serie, para valores grandes de N (alrededor de 100), es posible que para las dos series en estudio, las cuales pueden estar incorreladas o ser independientes, presenten o den lugar a valores de coeficientes de correlación cruzada grandes que serían falsos. Además cuando se requiere probar qué coeficientes de correlación son significativamente diferentes de cero, las estructuras internas de cada serie dificultan esta prueba.

Las dificultades anteriores se reducen si ambas series son preblanqueadas, es decir, convertirlas a "ruido blanco", antes de calcular la función de correlación cruzada. El método del preblanqueo se realiza en la forma ya vista en la sección 2.1.2. Así para dos series que estén incorreladas y una de ellas es ruido blanco (para nuestro caso la serie entrada  $x_t$ ), según Bartlett (1955)

$$E(r_{xy}(k)) = 0$$

$$Var(r_{xy}(k)) \cong \frac{1}{N}$$

$$SE[r_{xy}(k)] \cong \frac{1}{\sqrt{N}}$$

tal que los valores fuera del intervalo  $\pm \frac{2}{\sqrt{N}}$  son significativamente diferentes de cero.

### 2.3. Estimación directa de la función de respuesta a impulsos y determinación de los órdenes (b,r,s) para el modelo función de transferencia.

#### 2.3.1. Relación entre las funciones de covarianza y de respuesta a impulsos.

Supongamos que dos procesos estocásticos estacionarios  $y_t = \nabla^d Y_t, x_t = \nabla^d X_t$ , con media cero, están relacionados por

$$y_t = v(B)x_t + n_t \quad \dots(2.9)$$

donde  $n_t$  es también un proceso estacionario. Específicamente el objetivo en esta sección es obtener una herramienta que nos permita darnos una idea de los órdenes (b,r,s). Es, de alguna forma, intuitivo que las covarianzas cruzadas entre ambas variables deben estar relacionadas con la función de  $v(B)$ . Para encontrar esta relación escribamos (2.9) en su forma de diferencias

$$y_t = v_0 x_t + v_1 x_{t-1} + \dots + n_t \quad \dots(2.10)$$

Entonces multiplicando (2.10) por  $x_{t-k}$ , para  $k \geq 0$

$$x_{t-k} y_t = v_0 x_{t-k} x_t + v_1 x_{t-k} x_{t-1} + \dots + x_{t-k} n_t \quad \dots(2.11)$$

asumiendo que entre  $x_{t-k}$  y  $n_t$  no existe correlación cruzada, es decir son independientes, para toda  $k$  y tomando esperanzas en (2.11)

$$\begin{aligned} E[x_{t-k} y_t] &= v_0 E[x_{t-k} x_t] + v_1 E[x_{t-k} x_{t-1}] + \dots + E[x_{t-k} n_t] \quad \dots(2.12) \\ \gamma_{xy}(k) &= v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En consecuencia las covarianzas cruzadas están "contaminadas" por la dinámica

de la serie entrada  $x_t$ . Supongamos ahora que los pesos  $v_i$  son efectivamente cero más allá de  $k=K$ . Entonces las primeras  $K+1$  ecuaciones de (2.12) son

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(0) &= v_0 \gamma_{xx}(0) + v_1 \gamma_{xx}(1) + \dots + v_k(K) \\ \gamma_{xy}(1) &= v_0 \gamma_{xx}(1) + v_1 \gamma_{xx}(0) + \dots + v_k(K-1) \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma_{xy}(k) &= v_0 \gamma_{xx}(k) + v_1 \gamma_{xx}(k-1) + \dots + v_k(0) \end{aligned} \quad \dots(2.13)$$

que puede escribirse matricialmente

$$\gamma_{xy} = \Gamma_{xx} V \quad \dots(2.14)$$

donde

$$\gamma_{xy} = \begin{bmatrix} \gamma_{xy}(0) \\ \gamma_{xy}(1) \\ \vdots \\ \gamma_{xy}(k) \end{bmatrix} \quad \Gamma_{xx} = \begin{bmatrix} \gamma_{xx}(0) & \gamma_{xx}(1) & \dots & \gamma_{xx}(k) \\ \gamma_{xx}(1) & \gamma_{xx}(0) & \dots & \gamma_{xx}(k-1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{xx}(k) & \gamma_{xx}(k-1) & \dots & \gamma_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

Donde podemos sustituir los estimadores  $r_{xx}(k)$  de la función de autocorrelación de la serie entrada y los estimadores de la función de correlación cruzada entre las series entrada y salida, así (2.14) nos provee de  $k+1$  ecuaciones lineales para los primeros  $k+1$  pesos de respuesta a impulsos. Sin embargo estas ecuaciones que en general no proveen estimadores eficientes, son engorrosas para resolver y además para cualquier caso se requiere el conocimiento del punto  $K$  más allá donde los  $v_i$  son ceros.

Para evitar la situación anterior supondremos que la serie entrada sigue un proceso ruido blanco. Cuando la serie entrada sigue algún otro proceso estocástico es posible convertirlo o transformarlo a ruido blanco a través del método del preblanqueo.

Nuevamente tenemos

$$y_t = v(B)x_t + n_t \quad \dots(2.15)$$

preblanqueando la serie entrada tenemos

$$\begin{aligned}\phi_x(B)x_t &= \theta_x(B)\alpha_t \\ \alpha_t &= \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}x_t\end{aligned}$$

y aplicando la misma transformación a la serie salida tenemos

$$\begin{aligned}\phi_y(B)y_t &= \theta_y(B)\beta_t \\ \beta_t &= \frac{\phi_y(B)}{\theta_y(B)}y_t\end{aligned}$$

entonces el modelo (2.15) puede escribirse como

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + \epsilon_t \quad \dots(2.16)$$

donde  $\epsilon_t$  es la serie ruido transformado, definido por

$$\epsilon_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}n_t$$

resultando que existe la misma función de transferencia entre  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  que entre  $x_t$  y  $y_t$ . La diferencia principal entre (2.15) y (2.16) es que en este último la serie entrada  $\alpha_t$  es ruido blanco. En consecuencia, multiplicando ambos miembros de (2.16) por  $\alpha_{t-k}$  y tomando esperanza

$$\begin{aligned}\alpha_{t-k}\beta_t &= v(B)\alpha_{t-k}\alpha_t + \alpha_{t-k}\epsilon_t \\ E[\alpha_{t-k}\beta_t] &= v(B)E[\alpha_{t-k}\alpha_t] + E[\alpha_{t-k}\epsilon_t] \\ \gamma_{\alpha\beta}(k) &= v_k\sigma_\alpha^2\end{aligned} \quad \dots(2.17)$$

donde  $\gamma_{\alpha\beta}(k) = E[\alpha_{t-k}\beta_t]$ , es la covarianza cruzada en el retraso  $k$  entre  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ . Por lo tanto



$$v_k = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(k)}{\sigma_\alpha^2}$$

o en términos de la correlación cruzada

$$\rho_{\alpha\beta}(k) = \frac{\gamma_{\alpha\beta}(k)}{\sigma_\alpha \sigma_\beta}$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta$$

entonces

$$v_k = \frac{\rho_{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta}{\sigma_\alpha^2} = \frac{\rho_{\alpha\beta} \sigma_\beta}{\sigma_\alpha}$$

$$v_k = \rho_{\alpha\beta}(k) \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha}, \quad k=0,1,2,\dots \quad \dots(2.18)$$

De aquí, después de preblanquear las series entrada y salida, la función de respuesta a impulsos  $v_k$  es directamente proporcional a la función de correlación cruzada  $\rho_{\alpha\beta}(k)$ . Notemos que el efecto del método del preblanqueo es la convertir al conjunto no ortogonal de ecuaciones (2.14) a un conjunto ortogonal (2.18).

Para obtener una estimación preliminar de  $v_k$  se sustituyen los coeficientes de correlación cruzada teóricas  $\rho_{\alpha\beta}(k)$  por las muestrales  $r_{\alpha\beta}(k)$  y las varianzas teóricas por las estimadas. Así resulta

$$\hat{v}_k = r_{\alpha\beta}(k) \frac{S_\beta}{S_\alpha} \quad \dots(2.19)$$

donde

$$r_{\alpha\beta}(k) = \frac{C_{\alpha\beta}(k)}{S_\alpha S_\beta} \quad y$$

$$S_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \bar{\alpha})^2, \quad S_\beta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2$$

y aunque este estimador de respuesta a impulsos  $\hat{v}_t$  no es eficiente, la representación del mismo en función de  $k$  nos proporciona una herramienta básica, además de la función de correlación cruzada muestral, para identificar de una manera adecuada los órdenes  $(b,r,s)$  de la función de transferencia.

La forma en que se identifican los órdenes  $(b,r,s)$  para la función de transferencia es similar a la identificación de los órdenes  $p$  y  $q$  para los modelos ARMA, esto es, primero obtenemos la representación gráfica del estimador  $\hat{v}_t$  en función de retardo  $k$ ; segundo, se compara la gráfica del estimador  $\hat{v}_t$  con las funciones de respuesta a impulsos  $v(B)$  teóricas presentadas en el capítulo 1, y de esta manera identificar los órdenes  $(b,r,s)$  para la función de transferencia. A la hora de comparar la función de respuesta a impulsos  $\hat{v}_t$  estimada con las teóricas es muy necesario tomar en cuenta las características de los diferentes casos teóricos dados en el capítulo 1.

### 2.3.2. Características de la función de respuesta a impulsos.

Una vez que los órdenes  $(b,r,s)$  para  $\delta_r(B)$  y  $\omega_s(B)$  han sido encontrados podemos obtener los pesos de respuesta a impulsos  $v_t$  a partir de la relación de los pesos  $v_t$  con los parámetros de  $\delta_r(B)$  y  $\omega_s(B)$ .

Empleando la siguiente representación del modelo función de transferencia

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) y_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_s B^s) x_{t-s}$$

$$\delta_r(B) y_t = \omega_s(B) B^s x_t \quad \dots(2.20)$$

entonces sustituyendo

$$y_t = v(B) x_t$$

en (2.20), obtenemos la siguiente identidad

$$(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r) (v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2 - \dots - \omega_s B^s) B^s$$

igualando coeficientes en  $B$  se obtienen la siguiente solución general

$$\left. \begin{aligned} v_j &= 0 & , j < b \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0 & , j = b \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b} & , j = b+1, b+2, \dots, b+s \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} & , j > b+s \end{aligned} \right\} \dots(2.21)$$

Los  $r$ 's pesos de respuesta impulsos  $v_{b+s}, v_{b+s-1}, \dots, v_{b+s-r+1}$  sirven de valores iniciales para la ecuación diferencia

$$\delta_r(B)v_j(B) = 0, \quad j > b+s \quad \dots(2.22)$$

En general los pesos de respuesta a impulsos forman cuatro grupos

1.  $b$  pesos ceros  $v_0, v_1, \dots, v_{b-1}$ .
2.  $s-r+1$  pesos  $v_b, v_{b+1}, \dots, v_{b+s-r}$ , que no siguen un patrón fijo.  
Estos pesos no aparecen si  $s < r$ .
3.  $r$  pesos de respuesta a impulsos iniciales  $v_{b+s-r+1}, \dots$ , y  $v_{b+s-r}$ .
4.  $v_j$ , para  $j > b+s$ , que siguen el patrón fijo dado por (2.22).

En resumen  $b$  es determinado por hecho de que  $v_j = 0$  para  $j < b$  y  $v_b \neq 0$ . El valor de  $r$  es determinado por el patrón de los pesos de respuesta a impulsos de una manera similar a la identificación del orden  $p$  para un modelo ARMA univariado a través de la función de autocorrelación. Para un valor dado de  $b$ , si  $r=0$ , el valor de  $s$  puede ser fácilmente encontrado usando el hecho que  $v_j = 0$  para  $j > b+s$ ; si  $r \neq 0$ , el valor  $s$  es encontrado por verificar donde comienza el patrón de comportamiento a decaer para los pesos de respuesta a impulsos. Puede verse que el sistema de ecuaciones (2.21) además de proporcionarnos las características de comportamiento de la función de respuesta a impulsos nos proveen también de estimadores iniciales para los parámetros del modelo función de transferencia.

## 2.4. Procedimiento para la identificación del proceso ruido.

Después de que la forma del modelo función de transferencia ha sido tentativamente identificado, es decir, los órdenes  $(b,r,s)$  fueron determinados, podemos considerar ahora la identificación de algún modelo univariante ARMA para el procesos ruido (inercia).

Volviendo una vez más al caso general, supongamos que el modelo función de transferencia puede escribirse como

$$y_t = v(B)x_t + n_t \quad \dots(2.23)$$

donde  $y_t, x_t, y_t, n_t$  son series estacionarios.

Dado que un estimador preliminar de la función de transferencia ha sido obtenido en la etapa de la identificación, entonces un estimador del proceso ruido (serie ruido) esta dado por

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}(B)x_t \quad \dots(2.24)$$

esto es

$$\hat{n}_t = y_t - \hat{v}_0 x_t - \hat{v}_1 x_{t-1} - \hat{v}_2 x_{t-2} - \dots$$

Alternativamente  $\hat{v}(B)$  puede ser reemplazado por el modelo función de transferencia tentativo  $\frac{\hat{\omega}_v(B)B^b}{\hat{\delta}_r(B)}$  obtenido en la identificación preliminar. Así<sup>11</sup>

$$n_t = y_t - \frac{\hat{\omega}_v(B)}{\hat{\delta}_r(B)} B^b x_t \quad \dots(2.25)$$

y  $\hat{n}_t$  puede ser obtenido calculado expandiendo (2.25) en su forma de diferencias

$$\hat{n}_t = y_t + \hat{\delta}_1(\hat{n}_{t-1} - y_{t-1}) + \dots + \hat{\delta}_r(\hat{n}_{t-r} - y_{t-r}) - \hat{\omega}_0 x_{t-b} + \hat{\omega}_1 x_{t-b-1} + \dots + \hat{\omega}_s x_{t-b-s}$$

En cualquiera de los dos casos, (2.24) y (2.25), el estudio de la función de autocorrelación estimada de  $\hat{n}_t$ , debe llevarnos a la identificación de algún modelo ARMA para el proceso ruido.

Es también posible identificar el modelo ARMA para el proceso ruido usando la función de correlación cruzada para la series entrada y salida, después de

<sup>11</sup> La ecuación (2.25) es la que utilizaremos en el capítulo 5, para la obtención práctica del proceso ruido

que éstas fueron preblanqueadas . Entonces escribiendo (2.23) en su forma de preblanqueo

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + \epsilon_t \quad \dots(2.26)$$

donde  $\epsilon_t$  esta dado por la ya conocida relación

$$\epsilon_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)}n_t \quad \dots(2.27)$$

Si un modelo estocástico puede ser encontrado para  $\epsilon_t$  , entonces usando (2.27), un modelo puede ser deducido para  $n_t$  y por lo tanto también para  $N_t$ .

Si ahora escribimos  $v(B)\alpha_t = u_t$ , tal que  $\beta_t = u_t + \epsilon_t$ , y nuevamente suponemos que  $x_t$  y  $n_t$  son independientes, y como consecuencia también lo son  $u_t$  y  $\epsilon_t$ . Entonces podemos escribir

$$\beta_t = u_t + \epsilon_t \quad \dots(2.28)$$

$$\gamma_{\beta\beta}(k) = \gamma_{uu}(k) + \gamma_{\epsilon\epsilon}(k) \quad \dots(2.29)$$

ya que  $\alpha_t$  es ruido blanco,  $\gamma_{uu}$  puede obtenerse usando

$$\gamma_{uu}(k) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

que es la función de autocorrelación de un proceso lineal con entrada ruido blanco.

Así obtenemos la función de autocorrelación de un proceso lineal

$$\gamma_{\beta\beta}(k) = \gamma_{uu}(k) + \gamma_{\epsilon\epsilon}(k)$$

$$\gamma_{uu}(k) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

usando

$$\gamma_{\alpha\beta} = v_t \sigma_a^2$$

$$\gamma_{nn}(k) = \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^n \gamma_{\alpha\beta}(j) \gamma_{\alpha\beta}(j+k)$$

Por lo tanto

$$\gamma_{\epsilon\epsilon}(k) = \gamma_{\beta\beta}(k) - \gamma_{nn}(k)$$

$$\gamma_{\epsilon\epsilon}(k) = \gamma_{\beta\beta}(k) - \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^n \gamma_{\alpha\beta}(j) \gamma_{\alpha\beta}(j+k)$$

$$\gamma_{\epsilon\epsilon}(0) = \gamma_{\beta\beta}(0) - \frac{1}{\sigma_a^2} \sum_{j=0}^n \gamma_{\alpha\beta}^2(j)$$

$$\rho_{\epsilon\epsilon}(k) = \frac{\rho_{\beta\beta}(k) - \sum_{j=0}^n \rho_{\alpha\beta}(j) \rho_{\alpha\beta}(j+k)}{1 - \sum_{j=0}^n \gamma_{\alpha\beta}^2(j)} \quad \dots(2.30)$$

Ahora en la práctica es necesario estimar la transformación preblanqueada. Una vez que hemos realizado la transformación de preblanqueo, los valores para  $\rho_{\epsilon\epsilon}(k)$  puede obtenerse de la expresión (2.30) sustituyendo los estimadores de las correlaciones cruzadas  $r_{\alpha\beta}(j)$  de la serie entrada y salida preblanqueadas, así como las autocorrelaciones estimadas  $r_{\beta\beta}(k)$  de las serie salida.

Antes de finalizar éste capítulo haremos hincapié en un aspecto muy importante del proceso de identificación. En la parte inicial de este capítulo, específicamente en la sección 2.1.2, expusimos el método del preblanqueo como un método que nos permitiría el análisis de la estructura de la correlación entre la serie entrada y la serie salida de una manera más clara que si usáramos las series originales, esto debido a que el método del preblanqueo elimina las posibles estructuras de la correlación interna en cada una de las series (entrada y salida) bajo estudio, dejándonos solamente aquellos patrones que nos son necesarios para el análisis de la estructura de la correlación entre ambas series. Posteriormente en la sección 2.3.1 nos enfrentamos al problema de obtener un estimador para la función de respuesta a impulsos, que como recordaremos es una de las herramientas básicas para la identificación de los modelos función de transferencia. Establecimos de manera intuitiva que la covarianza cruzada entre la serie entrada y la serie salida debía estar relacionada con la función de transferencia  $v(B)$ , donde después de aplicar algunos artificios estadísticos y matemáticos obtuvimos que

dicha relación estaba dada por un sistema de  $k+1$  ecuaciones para los  $k+1$  primeros pesos de respuesta a impulsos. Resultando que estas ecuaciones son engorrosas para solucionar y además de que necesitamos el conocimiento del punto  $k$  más allá donde las  $v_t$ 's son efectivamente cero. Todo esto nos llevó nuevamente a la utilización del método del preblanqueo, al establecer que la serie entrada fuera ruido blanco, para obtener una simplificación en el proceso de la identificación de los modelos función de transferencia. El estimador de los pesos de respuesta a impulsos que se obtuvo al aplicar el método del preblanqueo fue bastante sencillo aunque no eficiente, sin embargo, es una herramienta útil para la identificación de los órdenes  $(b,r,s)$  de la función de transferencia. En la sección 2.3.2, como consecuencia de obtener los órdenes  $(b,r,s)$  de la función de transferencia al utilizar el estimador de los pesos de respuesta a impulsos, obtuvimos las características de los patrones de comportamiento de los pesos de respuesta a impulsos expresadas en un sistema de ecuaciones (ver sección 2.3.2).

A su vez éste sistema de ecuaciones nos proporciona estimadores iniciales para los parámetros del modelo, debido a la relación que tienen los pesos de respuesta a impulsos con estos.

Es pues notable la importancia del método del preblanqueo en el proceso de la identificación de los modelos función de transferencia en la metodología de Box y Jenkins. Lo notable del método del preblanqueo puede expresarse a través de los propósitos para los cuales se utiliza, que a la luz de lo expresado anteriormente son los siguientes :

➤ facilitar la identificación de la función de transferencia

$$\nu(B) = \frac{\omega(B)B^s}{\delta_r(B)},$$

➤ obtener estimadores iniciales para los parámetros del modelo y

➤ facilitar la identificación del modelo ARMA(p,q) para el proceso ruido.

**Capítulo**



***Estimación de los  
parámetros del modelo***



### 3.1. Estimación de parámetros para el modelo función de transferencia.

Una vez que hemos realizado una especificación tentativa del modelo, es decir, una vez que hemos elegido los valores b,r,s,p y q para el modelo función de transferencia

$$\begin{aligned}
 y_t &= \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r} x_{t-b} + \frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p} a_t \\
 &= \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)} x_{t-b} + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t \\
 &= \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)} x_{t-b} + n_t \qquad \dots(3.1)
 \end{aligned}$$

donde

$$n_t = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t$$

el siguiente paso es estimar los parámetros

$$\begin{aligned}
 \omega &= (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s) \\
 \delta &= (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) \\
 \theta &= (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q) \\
 \phi &= (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)
 \end{aligned}$$

De igual manera que para la estimación de parámetros del modelo ARIMA, se eligen los valores de los parámetros que minimicen la suma de cuadrados de las diferencias entre la serie real y la serie ajustada. Así el objetivo en la estimación es encontrar los vectores de parámetros  $\omega, \delta, \theta$  y  $\phi$  que minimicen la suma de los errores al cuadrado. Para realizar esto supongamos que contamos con  $n=N-d$  observaciones, donde  $N$  es el número de observaciones reales y  $d$  el número de diferencias ordinarias aplicadas, y disponemos de los valores  $x_0, y_0$  y  $a_0$ , entonces reescribiendo (3.1)

$$\delta(B)\phi(pB)y_t = \phi(B)\omega(B)x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t \quad \dots(3.2)$$

o equivalentemente

$$c(B)y_t = d(B)x_{t-b} + e(B)a_t \quad \dots(3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} c(B) &= \delta(B)\phi(B)y_t = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_p B^p)(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \\ &= (1 - c_1 B - c_2 B^2 - \dots - c_{p+r} B^{p+r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B) &= \phi(B)\omega(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_r B^r) \\ &= (d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - \dots - d_{p+r} B^{p+r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(B) &= \delta(B)\theta(B) = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_p B^p)(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \\ &= (1 - e_1 B - e_2 B^2 - \dots - e_{r+q} B^{r+q}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando  $a_t$

$$\begin{aligned} a_t &= y_t - c_1 y_{t-1} - \dots - c_{p+r} y_{t-p-r} - d_0 x_{t-b} + d_1 x_{t-b-1} \\ &\quad + \dots + d_{p+r} x_{t-b-p-r} + e_1 a_{t-1} + \dots + e_{r+q} a_{t-r-q} \end{aligned} \quad \dots(3.4)$$

$a_t$  está en su forma de diferencias y  $c_i$ ,  $d_j$  y  $e_k$  están en función de  $\delta_i$ ,  $\omega_j$ ,  $\phi_k$  y  $\theta_l$ .

Asumiendo que las variables aleatorias  $a_t$  son independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal, con media cero y varianza  $\sigma_a^2$ , es decir, ruido blanco. Entonces la función condicional de verosimilitud asociada con los parámetros  $(\omega, \delta, \theta, \phi)$  está dada por

$$L(\delta, \omega, \phi, \theta, \sigma_a^2 | b, x, y, x_0, y_0, a_0) = \left[ (2\pi\sigma_a^2)^{-1} \right]^n \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{r=1}^n a_r^2 \right]$$

$$= (2\pi\sigma_a^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{r=1}^n a_r^2\right] \quad \dots(3.5)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de  $\delta, \omega, \phi$ , y  $\theta$  están dados por la minimización de la suma de residuales al cuadrado

$$S(\delta, \omega, \phi, \theta, |b) = \sum_{r=1}^n a_r^2(\delta, \omega, \phi, \theta, |b, x_0, y_0, a_0) \quad \dots(3.6)$$

Entonces, bajo la suposición de normalidad el estimador de máxima verosimilitud es igual al de mínimos cuadrados.

Así, la minimización de  $\sum a_r^2$  puede plantearse como un problema de mínimos cuadrados en la siguientes etapas.

1) *Obtener los valores iniciales para los parámetros de la función de transferencia.*

Los valores iniciales para los parámetros se obtienen haciendo uso de la relación que une los pesos de respuesta a impulsos y los parámetros del modelo. Esta relación como ya vimos está dada por

$$\begin{aligned} v_j &= 0, & j < b \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \dots + \delta_r v_{j-r} + w_0, & j = b \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, & j = b+1, \dots, b+s \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, & j > b+s \end{aligned} \quad \dots(3.7)$$

Recordar que en (3.7) el polinomio  $\delta(B)v_k$ , con  $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r$  tiene un comportamiento similar al del un proceso autorregresivo pero de orden  $r$ .

Por ejemplo, supongamos que el modelo tentativo identificado es

$$y_t = \frac{\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} x_{t-b} + n_t$$

con  $b=3$ ,  $r=2$  y  $s=2$ .

Entonces la relación (3.7) está dada por

$$\begin{aligned}
 v_0 &= 0 \\
 v_1 &= 0 \\
 v_2 &= 0 \\
 v_3 &= \delta_1 v_2 + \delta_2 v_1 + \omega_0 = 0 \\
 v_4 &= \delta_1 v_3 + \delta_2 v_2 - \omega_1 = \delta_1 v_3 - \omega_1 \\
 v_5 &= \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3 - \omega_2 \\
 v_6 &= \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4 - \omega_3 = \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4 \\
 v_7 &= \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5
 \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
 v_j &= 0 & j < 3 \\
 v_3 &= \omega_0 & (3.7.1.a) \\
 v_4 &= \delta_1 v_3 - \omega_1 & (3.7.1.b) \\
 v_5 &= \delta_1 v_4 + \delta_2 v_3 - \omega_2 & (3.7.1.c) \\
 v_6 &= \delta_1 v_5 + \delta_2 v_4 & (3.7.1.d) \\
 v_7 &= \delta_1 v_6 + \delta_2 v_5 & (3.7.1.e)
 \end{aligned}$$

Dado los estimadores de los pesos de respuesta a impulsos  $v_k$ , podemos usar (3.7.1.d) y (3.7.1.e) para obtener los valores de  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Estos valores de los parámetros se sustituyen en (3.7.1.b) y (3.7.1.c) para obtener los valores de  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Finalmente,  $\omega$  se obtiene directamente de (3.7.1.a). De esta manera hemos obtenido los valores iniciales para los parámetros de la función de transferencia.

2) *Calcular el ruido blanco  $a_t$  o residuales del modelo, obteniendo primero el proceso ruido y a continuación sus residuales.*

Llamando  $y_t$  a la parte de  $y_t$  explicada por la función de transferencia, tendremos

$$y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} x_{t-b}$$

esto es

$$\delta_r(B) y_t = \omega_s(B) x_{t-b}$$

o en su forma de diferencias

$$y_t - \delta_1 y_{t-1} - \dots - \delta_r y_{t-r} = \omega_0 x_{t-b} - \omega_1 x_{t-b-1} - \dots - \omega_s x_{t-b-s}$$

$$y_t = \delta_1 y_{t-1} + \dots + \delta_r y_{t-r} + \omega_0 x_{t-b} - \omega_1 x_{t-b-1} - \dots - \omega_s x_{t-b-s} \quad \dots(3.8)$$

Una vez que hemos calculado  $y_t$ , usando (3.1), la serie ruido (o proceso ruido) se calcula por

$$n_t = y_t - \hat{y}_t \quad \dots(3.9)$$

y si  $n_t$  sigue un proceso (ARMA), donde los valores iniciales para los parámetros del proceso ruido son obtenidos exactamente igual a como se obtienen para los modelos univariantes ARIMA, al analizar las autocorrelaciones residuales muestrales; a se obtendrá por

$$a_t = \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} n_t$$

esto es, en su forma de diferencias

$$a_t = \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} + n_t - \phi_1 n_{t-1} - \dots - \phi_p n_{t-p} \quad \dots(3.10)$$

Para la estimación de modelos estocásticos, el efecto de la temporalidad puede ser minimizado si las ecuaciones diferencias son inicializadas a partir de un valor  $t$  para el cual todos los valores de  $x$  e  $y$  son conocidos.

Así  $y_t$  en (3.8) es calculado de  $t=u+1$  hacia adelante, donde  $u$  es el  $\max(r,s+b)$ . Esto significa que  $n_t$  debe estar disponible de  $n_{u+1}$  hacia adelante.

Por ejemplo si  $r=1$ ,  $b=0$  y  $s=2$ , entonces  $u=2$  y condicionando a  $y_2 = \bar{y}$

$$y_3 = \delta_1 \bar{y} + \omega_0 x_3 - \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1$$

$$y_4 = \delta_1 y_3 + \omega_0 x_4 + \omega_1 x_3 + \omega_2 x_2$$

.....

$$y_n = \hat{\delta}_1 y_{n-1} + \hat{\omega}_0 x_n + \hat{\omega}_1 x_{n-1} + \hat{\omega}_2 x_{n-2}$$

Las  $a_t$  pueden ser calculadas de  $a_{t+p+1}$  hacia adelante. Por lo tanto la función condicional suma de cuadrados es

$$S(\delta, \omega, \phi, \theta | b) = \sum_{t=u+p+1}^n a_t^2 (\delta, \omega, \phi, \theta | b x_t, y_t, a_t) \quad \dots(3.11)$$

3) Suponiendo  $b$  conocido y sea  $\beta = (\delta, \omega, \phi, \theta)$  el vector de parámetros del modelo y  $\beta_0$  el valor inicial utilizados en los cálculos anteriores. Sea

$$s(\hat{\beta}) = \sum a_t^2 (\hat{\beta}) \quad \dots(3.12)$$

y  $S(\hat{\beta}_0)$  el valor inicial. Calcularemos otro valor  $\hat{\beta}_1$  que disminuya la suma de cuadrados  $S(\hat{\beta}_1)$ , mediante un algoritmo de estimación no lineal.

El hecho de que utilizemos un algoritmo de estimación no lineal para obtener un nuevo valor  $\hat{\beta}_1$  que disminuya la suma de cuadrados  $S(\hat{\beta}_1)$  es que generalmente la función condicional suma de cuadrados (3.12) es no lineal en los parámetros desconocidos<sup>12</sup>.

El algoritmo de estimación no lineal más frecuentemente usado es una modificación del algoritmo de Gauss-Newton debido a Marquardt. Este algoritmo se halla implementado en varios paquetes estadísticos como el SPSS, Statgraphics y el ITSM (Interactive Time Series Modelling) que es el que se utiliza en este trabajo.

Estos paquetes computacionales hacen que el problema de la estimación sea de alguna manera más fácilmente resuelto. No obstante a continuación daremos de una manera general una descripción de los algoritmos de estimación no lineal relacionados con el algoritmo de Marquardt.

<sup>12</sup> MONTGOMERY C. Douglas. Forecasting and Time Series Analysis. McGrawill, 1990. Pag. 306

### 3.2. Algoritmos de Estimación no lineal<sup>13</sup>.

Supongamos una función  $f(\underline{\theta})$  con primera y segundas derivadas continuas cuyo mínimo se requiere calcular. La condición necesaria y suficiente para que  $\underline{\theta}$  sea un mínimo local es que el vector de primeras derivadas, que llamaremos gradiente, sea  $\underline{\dot{\theta}}$  nulo y que la matriz de segundas derivadas (hessiano) sean en  $\underline{\dot{\theta}}$  sea definida positiva. Llamando

$$g(\theta) = \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta_i}$$

al vector gradiente y

$$H(\theta) = \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

a la matriz hessiana, las condiciones de mínimo local son

$$\begin{aligned} g(\underline{\theta}^*) &= 0 \\ H(\underline{\theta}^*) &= 0, \text{ definida positiva} \end{aligned}$$

Los algoritmos de optimización no lineal son procedimientos iterativos para pasar de un valor  $\theta_i$  a otro  $\theta_{i+1}$  más próximo al mínimo según la relación

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \lambda d_i \quad \dots(3.13)$$

siendo  $d_i$  un vector dirección y  $\lambda$  la "la amplitud" de paso. El valor final de  $\theta_{i+1}$  se convierte en el inicial de la iteración siguiente, y el proceso continua hasta obtener una convergencia definida por  $|\theta_{i+1} - \theta| < \varepsilon_1$ ,  $|f(\theta_{i+1}) - f(\theta_i)| < \varepsilon_2$  y

<sup>13</sup> PEÑA SANCHEZ DE RIVERA, D. Ob. cit. Pags. 309-312.

$|g(\theta_{-i+1})| < \varepsilon_3$ , siendo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  valores pequeños fijados previamente, que dependen de la precisión deseada.

Los algoritmos difieren entre sí principalmente por su elección de  $d_i$  ya que  $\lambda_i$  puede determinarse siempre por una búsqueda en dicha dirección. Una posible elección de  $d_i$  es

$$d_i = -g(\theta)$$

ya que una función disminuye siempre con un pequeño movimiento en la dirección del gradiente negativo. Este es el método del gradiente que consiste en calcular este vector y desplazarse en la dirección asociada a sus valores negativos, determinando  $\lambda_i$  de manera que la función disminuya lo máximo posible en cada iteración.

Cuando partimos de un valor próximo al mínimo un mejor método es el de Newton - Rapshon, que se basa en que cerca del óptimo la función debe ser aproximadamente cuadrática y, en consecuencia, ésta en el punto de llegada de la iteración  $\theta_{-i+1}$  por una función cuadrática

$$f(\theta_{-i+1}) = f(\theta_{-i}) + (\theta_{-i+1} - \theta_{-i}) g(\theta_{-i}) + \frac{1}{2} (\theta_{-i+1} - \theta_{-i})^2 H(\theta_{-i}) \quad \dots(3.14)$$

derivando esta expresión respecto a  $\theta_{-i+1}$  se comprueba que esta aproximación equivale a aproximar el gradiente linealmente en un entorno de  $\theta_{-i}$

$$g(\theta_{-i+1}) = g(\theta_{-i}) + H(\theta_{-i})(\theta_{-i+1} - \theta_{-i}) \quad \dots(3.15)$$

Imponiendo la condición de que  $\theta_{-i+1}$  sea un mínimo local  $g(\theta_{-i+1}) = 0$  y despejando en (3.15) resulta el algoritmo

$$\theta_{-i+1} = \theta_{-i} - H^{-1}(\theta_{-i})g(\theta_{-i}) \quad \dots(3.16)$$

El algoritmo de Newton - Rapshon puede presentar problemas cuando se comienza con un valor inicial lejos del mínimo. Por ejemplo, si la función es



aproximadamente lineal la matriz  $H(\underline{\theta})$  será nula y el método fallará. Además aunque  $H(\underline{\theta})$  no sea singular, es posible que lejos del mínimo no sea positiva definida, con lo que el valor de  $\theta_{i+1}$  puede ser mayor que  $\theta_i$  y el método puede no converger.

Un caso particular importante muy frecuente en estadística - por ejemplo en la estimación de modelos ARMA - es que la función a minimizar se escriba

$$L(\underline{\theta}) = \sum a_i^2(\theta)$$

y equivale por tanto a minimizar una suma de cuadrados. Para aplicar el procedimiento de Newton - Rapshon a esta función es necesario calcular su gradiente, que en este caso será

$$g(\theta) = \sum 2a_i(\theta) \frac{\partial a_i(\theta)}{\partial \theta_i} = \sum 2a_i g(a_i) \quad \dots(3.17)$$

llamando  $g(a_i)$  al vector de primera derivadas de  $a_i$  respecto a cada componente del vector  $\underline{\theta}$ . El hessiano será, derivando de nuevo en (3.17)

$$H(\theta) = 2 \sum g(a_i) g(a_i) + 2 \sum a_i(\theta) H(a_i)$$

siendo  $H(a_i)$  la matriz hessiana de segundas derivadas de  $a_i$  respecto a los términos de  $\underline{\theta}$ .

Supongamos ahora que  $H(a_i)$  es despreciable en cada iteración frente al término de primeras derivadas. Esto equivale a una aproximación lineal para los residuos del tipo

$$a_{i,j+1} = a_i(\theta_{i+1}) = a_i(\theta_i) + \left( \theta_{-i+1} - \theta_i \right) g_i(a_i) \quad \dots(3.18)$$

ya que suponemos  $H(a_i)$  despreciable frente a  $g(a_i)$ . Entonces la expresión general (3.16) se reduce a

---

$$\theta_{i+1} = \theta_i - [\sum x_{ii} x_{ii}]^{-1} \sum x_{ii} a_{ii} \quad \dots(3.19)$$

donde  $x_{ii} = g(a_i)$  es el vector de derivadas de los residuales respecto a los parámetros  $\theta_i$  y  $a_{ii}$  los residuos calculados con ellos. Esta ecuación indica que pasaremos de un punto al siguiente añadiendo al valor inicial el vector de parámetros resultante de realizar una regresión con variable dependiente  $a_{ii} = (i = 1, \dots, n)$  y el vector de regresión  $x_{ii}$ . Este mismo resultado se deduce de (3.19). Escribiendo

$$a_{ii} = a_i(\theta) = x_{ii}' \beta + a_{i,i+1} \quad \dots(3.20)$$

siendo  $\beta = -\left(\theta_{i+1} - \theta_i\right)$ , es clara que  $\beta$  se obtiene por regresión y que los nuevos residuos resultantes,  $a_{i,i+1}$ , tendrán siempre menor varianza que la variable dependiente ( $a_{ii}$ ) con lo que avanzaremos hacia el mínimo de la suma de cuadrado. Este método se conoce como algoritmo de Gauss - Newton.

El algoritmo (3.19) puede mejorarse en dos aspectos : cuando estamos lejos del óptimo el avance a través de aproximaciones cuadráticas es muy lento, mientras que el método del gradiente proporciona una dirección de avance más rápida. Prescindiendo de subíndices un esquema del tipo

$$\theta^* = \theta - [X'X + \delta I]^{-1} X'Y \quad \dots(3.21)$$

donde  $\delta$  se determina en función del avance de la función y es muy grande al principio (para que  $X'X$  sea despreciable frente a  $\delta$  veces , la matriz unidad  $I$ , y la dirección sea la del gradiente  $g(\theta)$  , (3.17)) y muy pequeña cerca del mínimo, con lo que (3.21) equivale a Gauss - Newton. Este algoritmo es debido a Marquardt.

# Capítulo



## *Examen de adecuación del modelo función de transferencia y su uso en pronósticos*

Después que el modelo ha sido identificado y sus parámetros estimados es necesario examinar lo adecuado del modelo antes de que lo usemos para pronósticos, control u otros propósitos. Como en la modelización de los modelos univariante ARIMA, el análisis de los residuales juega un papel muy importante en el diagnóstico del modelo función de transferencia.

#### 4.1. Análisis de residuales.

En el modelo función de transferencia asumimos que  $a_t$  es ruido blanco y que además es independiente de la serie entrada  $x_t$  y por lo tanto también de la serie entrada preblanqueada  $\alpha_t$ . Así en el examen de un modelo función de transferencia tenemos que examinar los residuales  $\hat{a}_t$  del modelo ruido como también los residuales  $\alpha_t$  del modelo preblanqueado para asegurar si la suposición se mantiene.

Por consiguiente lo inadecuado o adecuado del modelo puede ser evaluado al examinar<sup>14</sup> :

- la gráfica de los residuales
- la función de autocorrelación de los residuales y
- la función de correlación cruzada entre la variable explicativa y los residuales.

Debe ser claro que una gráfica de residuales contiene información valiosa. En particular, una secuencia de residuales puede presentar salidas falsas las cuales pueden ser fácilmente reconocidas por un análisis cuidadoso de la gráfica de los residuales.

Para ver que información está contenida en estas funciones de autocorrelación y correlación cruzada retornemos al modelo función de transferencia especificado por

$$y_t = \frac{\omega_s(B)}{\delta_r(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad \dots(4.1)$$

---

<sup>14</sup> VANDAELE, Walter. Ob. cit. Pags. 306-314

$$= v(B)x_t + \psi(B)a_t$$

Ahora supongamos que elegimos un modelo incorrecto definido como

$$y_t = v_0(B)x_t + \psi_0(B)a_{0t} \quad \dots(4.2)$$

donde

$$v_0(B) = \frac{\omega_0(B)}{\delta_0(B)}, \quad \psi_0(B) = \frac{\theta_0(B)}{\phi_0(B)}$$

entonces podemos representar los residuales del modelo incorrecto como sigue :

$$a_{0t} = \psi^{-1}(B)[y_t - v_0(B)x_t] \quad \dots(4.3)$$

Sustituyendo (4.1) en (4.3), para  $y_t$ , tenemos

$$a_{0t} = \frac{v(B) - v_0(B)}{\psi_0(B)} x_t + \frac{\psi(B)}{\psi_0(B)} a_t \quad \dots(4.4)$$

De (4.4) puede verse que si un modelo incorrecto es seleccionado,  $a_{0t}$  no sólo podría estar correlacionado con  $x_t$  sino que también con  $a_t$ , pero también podría estar autocorrelacionado.

Así la expresión (4.4) indica que podemos encontrarlos con los siguientes casos

1. solamente la estructura ruido es incorrecta
2. solamente la función de transferencia es incorrecta.

◆ **Caso1.** Si la función de transferencia es correcta pero la estructura ruido es incorrecta, tenemos  $v(B) = v_0(B)$  y  $\psi_0(B) \neq \psi(B)$ . Así de (4.4) se sigue

$$a_{0t} = \frac{\psi(B)}{\psi_0(B)} a_t \quad \dots(4.5)$$

resultando que la  $a_{0t}$  puede no estar correlacionada cruzada con  $x_t$  y  $a_t$ , pero

puede estar autocorrelada. La forma de la función de autocorrelación de los residuales debe indicar los cambios necesarios que deben especificarse en la estructura ruido del modelo función de transferencia.

**Ejemplo.** Supongamos que el término error en el modelo función de transferencia fue especificado como ruido blanco,  $\psi_0(B)=1$ , pero las autocorrelaciones  $a_{0t}$  sugieren que sigue el modelo autorregresivo

$$a_{0t} = \phi_1 a_{0,t-1} + a_t$$

$$a_{0t} = \frac{1}{1 - \phi_1 B} a_t \quad \dots(4.6)$$

con  $\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ , tenemos  $\theta(B)=1$  y  $\phi(B)=1 - \phi_1 B$ .

Entonces la modificación obvia del modelo es especificar un modelo ARMA(1,0) para el modelo ruido.

♦ **Caso2.** Si solamente la función de transferencia es incorrecta (4.4) se simplifica a :

$$a_{0t} = \psi^{-1}(B)[v(B) - v_0(B)]x_t + a_t \quad \dots(4.7)$$

Por lo tanto  $a_{0t}$  tiene una correlación cruzada con  $x_t$ , pero también puede estar autocorrelada. Así la solución en este caso, es primero reidentificar la función de transferencia y entonces se modifica el modelo ruido.

Sin embargo para evaluar posibles modificaciones es importante calcular la correlación cruzada entre  $a_{0t}$  y la variable explicativa  $x_t$ . Es claro que si  $x_t$  está autocorrelada y el residual es ruido blanco, entonces la correlación cruzada entre  $a_{0t}$  y  $x_t$  será aproximadamente la misma función de autocorrelación de la variable explicativa  $x_t$ . Entonces, cuando  $x_t$  está autocorrelada una función de transferencia adecuada puede dar correlaciones cruzadas  $rx\hat{a}(k)$ , que aunque pequeñas en magnitud, pueden mostrar patrones pronunciados. De ahí que para usar los resultados de las correlaciones cruzadas que sugieren modelos inadecuados, debemos primero preblanquear la serie  $x_t$ .

Para indicar los posibles cambios que deben ser hechos para mejorar el modelo, reescribiremos el modelo función de transferencia en su forma preblanqueada

$$\beta_t = v(B)\alpha_t + u_t \quad \dots(4.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_t &= \psi_z^{-1}(B)y_t \\ \alpha_t &= \psi_x^{-1}(B)y_t \\ u_t &= \psi_z^{-1}(B)\psi(B)a_t \end{aligned}$$

con

$$\psi_z(B) = \frac{\theta_z(B)}{\phi_z(B)} \quad y \quad \psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)}$$

El error en el modelo preblanqueado especificado incorrectamente es definido como

$$u_{\alpha} = \beta_t - v_0(B)\alpha_t \quad \dots(4.9)$$

sustituyendo (4.8) para  $\beta_t$  en (4.9), tenemos

$$u_{\alpha} = [v(B) - v_0(B)]\alpha_t + a_t \quad \dots(4.10)$$

Similarmente a la interpretación de la correlación cruzada entre la variable dependiente y la explicatoria preblanqueadas, dado por

$$v_k = \frac{\rho_{\alpha\beta}(k)}{\sigma_{\alpha}} \sigma_{\beta} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

la correlación cruzada entre  $u_{\alpha t}$  y  $\alpha_t$  es proporcional a la diferencia entre los coeficientes de los polinomios de respuesta a impulsos, alternativamente la diferencia puede ser expresada como

$$v_k - v_{\alpha k} = \frac{\rho_{\alpha u_{\alpha}}(k)}{\sigma_{\alpha}} \sigma_{u_{\alpha}}, \quad \dots(4.11)$$

Por consiguiente, la correlación cruzada entre la variable explicatoria preblanqueada y el residual puede usarse para evaluar los cambios que deben hacerse en el polinomio  $v(B)$  y por lo tanto en los polinomios  $\omega(B)$  y  $\delta(B)$ , para mejorar el modelo especificado.

Por supuesto, para el análisis de especificación falsa debemos contar con las correlaciones cruzadas muestrales  $r_a u_0(k)$ . Por ejemplo, si el modelo función de transferencia es especificado como

$$y_t = \omega_0 x_t + a_t \quad \dots(4.12)$$

y un análisis de la correlación cruzada entre los residuales y la variable explicatoria preblanqueada muestra que

$$r_a u_0(k) \neq 0, \text{ para } k=0, k=1$$

esto implica que el orden del polinomio numerador debe incrementarse del orden  $s=0$  a  $s=1$ . Similarmente, si las  $r_a u_0(k)$  se comportan como las autocorrelaciones de un proceso AR(1), el modelo (4.12) deber ser modificado para incluir un polinomio de primer orden en le denominador, resultando

$$v(B) = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B}$$

Desde un punto de vista práctico las correlaciones cruzadas de residuales diferentes de cero son una indicación de que los polinomios de la función de transferencia  $\omega(B)$  y  $\delta(B)$  están incorrectamente especificados.

En la práctica es muy útil evaluar las correlaciones individualmente, así como las autocorrelaciones en grupo y similarmente para las correlaciones cruzadas. También debemos hacer la gráfica de los residuales antes de abordar el análisis de correlación más detalladamente.

#### ◆ Autocorrelaciones individuales.

Si el modelo función de transferencia fue correctamente especificado y los verdaderos valores de los parámetros fueron sustituidos, los residuales deben ser ruido blanco y las autocorrelaciones estimadas deben estar independientemente



distribuidas con media cero y varianza  $\frac{1}{m}$ . El valor  $m$  corresponde al número de valores  $a_i$  disponibles y que es igual a  $n-u-p$  con  $u$  el más grande de  $r$  y  $s+b$ .

#### ◆ Grupos de Autocorrelaciones.

Para formar un diagnóstico global sobre las autocorrelaciones es nuevamente útil calcular el siguiente estadístico *pormanteau*  $Q$ , basado sobre los residuales  $\hat{a}_i$ , de la función de transferencia

$$Q(k) = m(m+2) \sum_{i=1}^k \frac{1}{m-k} r_{aa}^2(k) \quad \dots(4.13)$$

el valor de  $m$  es definido como el número de residuales usados en

$$s(\hat{\omega}, \hat{\delta}, \hat{\phi}, \hat{\theta}) = \sum_{i=u+p+1}^n a_i^2,$$

y el valor de  $k$  es seleccionado de tal manera que podamos asumir razonablemente que  $r_{aa}(k)$  para  $k > K$  son insignificativos.

Si la función de transferencia es apropiada (es decir los errores son ruido blanco) el estadístico  $Q$  se distribuye aproximadamente como una ji-cuadrada  $\chi^2$  con  $k-p-q$  grados de libertad. Notar que el número de parámetros en  $\omega$  y  $\delta$  no influyen en los grados de libertad de las autocorrelaciones de la residuales del estadístico  $Q$ .

#### ◆ Correlaciones cruzadas individuales.

El error estándar de las correlaciones cruzadas individuales es

$$SE[r_{a_i}(k)] = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

donde  $m=n-u-p$  con el número de  $a_i$  estimados.

#### ◆ Grupo de correlaciones cruzadas.

El grupo de correlaciones cruzadas se utiliza para diagnosticar si la serie ruido  $a_i$  y la serie  $x_i$  son independientes.

Para un modelo adecuado, la función de correlación cruzada muestral  $\hat{\rho}_{\alpha_a}(k)$  entre  $a_t$  y  $\alpha_t$  no debe mostrar un patrón y deben residir dentro de sus errores estándar  $2(n-k)^{-1/2}$ .

El estadístico Q análogo es

$$Q(k) = m(m+2) \sum_{i=0}^k \frac{1}{m-k} r_{\alpha_a}^2(k) \quad \dots(4.14)$$

se distribuye aproximadamente como  $\chi^2$  con  $k+1-(r+s+1)=k-r-s$  grados de libertad.

Nuevamente  $k$  es seleccionado de tal manera que par  $k > K$ ,  $v_k$  y  $\psi_k$  en (4.1) puedan ser razonablemente asumidos como insignificativos.

Hay que notar que  $r+s-1$  representa el número de parámetros ajustados en el modelo. Así, el número de parámetros en la estructura ruido del modelo función de transferencia no tiene influencia sobre los grados de libertad en el estadístico  $\chi^2$  basado en la correlación cruzada.

En resumen para que el modelo función de transferencia sea adecuado  $r_a(k)$  y  $r_{\alpha_a}(k)$  deben ser estadísticamente no significativos y no mostrar patrón alguno, ya que el modelo ruido puede ser contaminado por una función de transferencia incorrecta, en el examen del modelo función de transferencia, es prudente llevar a cabo primero el diagnóstico de la correlación cruzada. Si la prueba de correlación falla, no hay necesidad de probar las autocorrelaciones para  $a_t$ . Se debe reidentificar la función de transferencia  $v(B)$  y repetir los paso del método hasta que se obtenga un modelo satisfactorio.

## 4.2. Pronósticos usando modelos función de transferencia.

Finalmente, el modelo función de transferencia identificado, después que se le han aplicado las pruebas de adecuación, esta listo para ser usado de acuerdo a las razones o motivos que el investigador tuvo para realizar el estudio del modelo función de transferencia. Así, los objetivos del estudio del modelo función de transferencia puede clasificarse de la siguiente manera :

- \* Descripción
- \* Explicación
- \* Simulación
- \* Pronóstico
- \* Control

De acuerdo al segundo objetivo de nuestro trabajo, mostraremos el uso del modelo función de transferencia en los pronósticos.

Frecuentemente los pronósticos de una serie de tiempo  $Y_t, Y_{t-1}, \dots$ , pueden ser mejorados al usar la información que proviene de otra serie de tiempo  $X_t, X_{t-1}, \dots$ , asociada. Esto es particularmente cierto, si los cambios en  $Y$  tienden a ser anticipados por los cambios en  $X$ , es decir,  $X$  es un indicador avanzado de  $Y$ .

Por consiguiente, nuestro objetivo será, obtener pronósticos, tales que las desviaciones de sus media cuadradas  $y_t - \hat{y}_t(l)$ , entre los valores actuales y los pronosticados sean tan pequeñas como sea posible para  $l$  avanzada, esto es, minimizar el error cuadrático medio mínimo de pronóstico.

### ◆ Error cuadrático medio mínimo de pronóstico para series entrada y salida estacionarios<sup>15</sup>.

Supongamos que  $y_t = \nabla^d Y$  y  $x_t = \nabla^d X_t$ , son estacionarios y están relacionados por el modelo función de transferencia estable

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad \dots(4.15)$$

y

<sup>15</sup> WEI, William. Ob. cit. Pags. 309-312

$$\phi_x(B)x_t = \phi_x(B)\alpha_t, \quad \alpha_t = \frac{\theta_x(B)}{\phi_x(B)}a_t \quad (4.16)$$

donde  $\omega(B), \delta(B), \phi(B), \theta(B), \phi_x(B), \theta_x(B)$ , son polinomios de orden finito de  $B$ ; las raíces de  $\delta(B) = 0, \phi(B) = 0, \theta(B) = 0, \phi_x(B) = 0$  y  $\theta_x(B) = 0$ , todos están fuera del círculo unitario; y  $a_t$  y  $\alpha_t$  son procesos ruido blanco independientes, con media cero y varianzas  $\sigma_a^2$  y  $\sigma_\alpha^2$ , respectivamente.

Sea

$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \quad \dots(4.17)$$

Podemos reescribir (4.15) como

$$y_t = v(B)\alpha_t + \psi(B)a_t \quad \dots(4.18)$$

con  $a_t$  y  $\alpha_t$  estadísticamente independientes, y  $\psi_0 = 1$ . Así

$$y_{t+i} = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \alpha_{t+i-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t+i-j}$$

y sea

$$\hat{y}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j^0 \alpha_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^0 a_{t+l-j}$$

el pronóstico óptimo avanzado  $\hat{y}_t(l)$  de  $y_{t+l}$ .

Entonces el error del pronóstico es

$$y_t - \hat{y}_t(l) = \sum_{i=0}^{l-1} [v_i \alpha_{t+l-i} + \psi_i a_{t+l-i}] \\ + \sum_{j=0}^{\infty} \{ (v_{t+j} - v_{t+j}^0) \alpha_{t-j} + (\psi_{t+j} - \psi_{t+j}^0) a_{t-j} \}$$

y el error cuadrático medio de los pronósticos  $E\{y_t - \hat{y}_t(l)\}^2$ , está dado por

$$E\{y_t - \hat{y}_t(l)\}^2 = \{v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{l-1}\} \sigma_a^2 + \{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{l-1}^2\} \sigma_a^2 \\ + \sum_{j=0}^{l-1} \left\{ (v_{l+j} - v_{l+j}^0) \sigma_a^2 + (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^0) \sigma_a^2 \right\}$$

mismo que es minimizado solamente si  $v_{l+j}^0 = v_{l+j}$  y  $\psi_{l+j}^0 = \psi_{l+j}$ . En otras palabras el error cuadrático medio mínimo del pronóstico  $\hat{y}_t(l)$  de  $y_{t+l}$ , al intervalo  $l$ , está dado por la esperanza condicional de  $y_{t+l}$ , al intervalo  $l$ .

Ya que  $\alpha_t$  y  $a_s$  son ruido blanco, se sigue que

$$E\{y_{t+l} - \hat{y}_t(l)\} = 0$$

y el pronóstico es insesgado y la varianza de los pronósticos está dada por

$$V(l) = E\{y_{t+l} - \hat{y}_t(l)\}^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} v_j^2 + \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 \quad \dots(4.19)$$

Utilizando los resultados anteriores, podemos construir intervalos de pronósticos,  $100(1-\alpha)$ , de la manera usual

$$y_{t+l} \pm z_{\alpha/2} [v(l)]^{1/2} \quad \dots(4.20)$$

para el intervalo de confianza de 95% tenemos

$$y_{t+l} \pm 1.96 [v(l)]^{1/2} \quad \dots(4.21)$$

#### ◆ Cálculo de pronósticos.

Para el cálculo concreto de pronósticos usando el modelo función de transferencia, consideremos el modelo

$$y_t = \frac{\omega_r(B)}{\delta_r(B)} x_{t-r} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad \dots(4.22)$$

reescribiendo (4.22) en forma de diferencias

$$\delta(B)\phi(B)y_t = \phi(B)\omega(B)x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t$$

o equivalentemente

$$c(B)y_t = d(B)x_{t-b} + e(B)a_t \quad \dots(4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} c(B) &= \delta(B)\phi(B) = (1 - \delta_1(B) - \dots - \delta_r B^r)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \\ &= (1 - c_1 B - c_2 B^2 - \dots - c_{p+r} B^{p+r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(B) &= \phi(B)\omega(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) \\ &= (d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - \dots - d_{p+s} B^{p+s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(B) &= \delta(B)\theta(B) = (1 - \delta_1(B) - \dots - \delta_r B^r)(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \\ &= (1 - e_1 B - e_2 B^2 - \dots - e_{r+q} B^{r+q}) \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de pronóstico es

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(l) &= E(y_{t+l}) \\ &= c_1 \hat{y}_t(l-1) + \dots + c_{p+r} \hat{y}_t(l-p-r) \\ &\quad + d_0 \hat{x}_t(l-b) + \dots + d_{p+s} \hat{x}_t(l-b-p-s) \\ &\quad + \hat{a}_t(l) - e_1 \hat{a}_t(l-1) - \dots - e_{r+q} \hat{a}_t(l-q-r) \end{aligned} \quad \dots(4.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(l) &= \begin{cases} y_{t+j} & , j \leq 0 \\ \hat{y}_t(l) & , j > 0 \end{cases} \\ \hat{x}_t(l) &= \begin{cases} \hat{x}_{t+j} & , j \leq 0 \\ \hat{x}_t(l) & , j > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \dots(4.25)$$

$$\hat{a}_i(l) = \begin{cases} \hat{a}_{i+j} & , j \leq 0 \\ 0 & , j > 0 \end{cases}$$

y  $\hat{a}_i$ , es calculado por

$$\begin{aligned} \hat{a}_i = & y_i - c_1 y_{i-1} - \dots - c_{p+r} \\ & - d_0 x_{i-b} + d_1 x_{i-b-1} + \dots + d_{p+r} x_{i-b-p-r} \\ & + e_1 a_{i-1} + \dots + e_{r+d} a_{i-r} \end{aligned} \quad \dots (4.26)$$

o por  $y_i - \hat{y}_{i+l}(l)$ . Es claro que para  $l > (q+r)$ , el pronóstico  $\hat{y}_i(l)$  de  $y_{i+l}$ , depende solamente de la historia pasada de  $y_t$  y de la historia presente y pasada de  $x_t$ . El pronóstico requerido de la serie  $x_t$  puede obtenerse de

$$\phi_x(B)(1-B)^d x_t = \theta_x(B) \alpha_t$$

como se obtiene para los modelos univariantes ARIMA.

**Ejemplo.** Generar los pronósticos para  $t=21,22,23$  del modelo

$$y_t = \frac{(\omega_0 + \omega_1 B)}{(1 - \delta_1 B)} x_{t-1} + \frac{1}{1 - \phi_1 B}$$

donde

$$(1 - 0.5B)x_{t-1} = 1 + \delta,$$

dados

$$\begin{array}{ll} \omega_0=2 & \delta_1=0.6 \\ \omega_1=1 & \phi_1=0.8 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} y_{20}=12 & y_{19}=15 & a_{20}=1 \\ x_{20}=4 & x_{19}=3 & x_{18}=2 \end{array}$$

primero de (4.23) tenemos

$$(1 - \delta_1 B)(1 - \phi_1 B) = (\omega_0 + \omega_1 B)(1 - \phi_1 B)x_{t-1} + (1 - \delta_1 B)a_t$$

$$c(B)y_t = d(B)x_{t-1} + e(B)a_t$$

sustituyendo valores

$$(1 - 0.6B)(1 - 0.8)y_t = (2 + B)(1 - 0.8B)x_{t-1} + (1 - 0.6)a_t$$

$$y_t = 1.4y_{t-1} - 0.48y_{t-2} + 2x_{t-1} - 0.6x_{t-2} - 0.8x_{t-3} + a_t - 0.6a_{t-1}$$

Para  $t=21$

$$\begin{aligned} y_{20}(1) &= 1.4(7) - 0.48(15) + 2(4) - 0.6(3) - 0.8(2) + 0 - 0.6(1) \\ &= 20.6 \end{aligned}$$

para obtener  $y_{20}(2)$ , necesitamos primero

$$x_{20}(1) = 1 + 0.5x_{20} = 1 + 0.5(4) = 3$$

y similarmente para  $x_{20}(2) = 1 + x_{20}(1) = 2.5$ , y así sucesivamente.

Entonces

$$\begin{aligned} y_{20}(2) &= 1.4(20.6) - 0.48(17) + 2(3) - 0.6(4) - 0.8(3) \\ &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{20}(3) &= 1.4(23) - 0.48(20.6) + 2(2.5) - 0.6(3) - 0.8(4) \\ &= 23.048 \end{aligned}$$

Así hemos calculado los valores de los pronósticos para  $t=21, 22$  y  $23$ .



## Capítulo

*Aplicación del modelo  
función de transferencia  
al estudio de la relación  
dinámica de los precios  
del petróleo crudo y la  
gasolina en Estados  
Unidos*

## 5.1. Introducción.

La civilización moderna sería inconcebible sin los incontables productos que se obtienen del petróleo : combustibles, lubricantes, plásticos, etc; éste producto de la naturaleza constituye la principal fuente de energía mundial. Es pues innegable que el petróleo, por todo los beneficios que se obtienen de él, juega un papel muy importante en el desarrollo económico e industrial de muchos países. Dentro los múltiples derivados que se obtienen del petróleo, la gasolina ha llegado a convertirse en uno de los combustibles de vital importancia para muchos medios de transporte. Debido a ésta importancia el conocer el precio de petróleo y de la gasolina es de gran interés no sólo para los productores de estos energéticos, sino también para el público en general. Mientras que el precio del petróleo crudo está fuertemente influenciado por los aspectos políticos, el precio de la gasolina está determinado principalmente por el precio del crudo. Así, nuestro interés se centra en el estudio de la influencia que tiene el precio del crudo sobre el precio de la gasolina.

Durante las últimas dos décadas la estructura de mercado de la industria petrolera sufrió cambios importantes. Un período en el que los precios estaban en un nivel bajo finalizó para la industria petrolera en los años cercanos a los 70's, cuando trece países importantes en la producción del petróleo, miembros de la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP), organización que se integra en septiembre de 1960 para formar un frente unido ante las compañías petroleras con el propósito de coordinar la política exportadora de los países miembros y la defensa de los intereses de los mismos, obtienen el control sobre precios y producción de las compañías petroleras. A partir del fin de este periodo el mercado del petróleo empezó a tener un comportamiento inestable. De 1973 a 1974, el precio nominal del petróleo crudo se cuadruplicó, estos incrementos dispuestos por la OPEP hacen estallar la primera crisis mundial de energía. Esta crisis mundial de energía no fue la única que sacudió al mercado del petróleo. En 1978 una segunda crisis de energía estalla debido a que Irán, uno de los principales países productores de petróleo fue forzado por una serie de eventos a suspender sus exportaciones de petróleo hacia Occidente, durante cuatro meses<sup>16</sup>. A partir de 1978 o de la segunda crisis de energía, el mercado de petróleo y el precio del mismo empieza a tener un comportamiento mucho más inestable que los años anteriores. Tan sólo en marzo de 1979 en California y otros estados de

---

<sup>16</sup> En septiembre de 1978 priva un ambiente de intranquilidad política en Irán, y en diciembre se da el golpe de estado contra el Sha de Irán.

Estados Unidos la gasolina es racionada y en diciembre el precio del crudo llega a \$35 dólares por barril; en septiembre de 1980 estalla la guerra Irán-Iraq y en diciembre del mismo año México llega a ser el cuarto más grande productor de crudo con alrededor de dos millones de barriles por día. Así de 1979 a 1980 el precio del petróleo crudo se triplicó. En conjunto, el precio del petróleo se incremento alrededor de diez veces en ocho años, de \$3.30 dólares por barril en 1973, a \$34.28 dólares en 1981. Estos altos precios tuvieron como consecuencia el aumento de la producción del petróleo crudo, mientras que al mismo tiempo el petróleo crudo y sus derivados empezaron a ser usados de una manera mas eficiente, provocando a su vez, la disminución de su demanda. Por 1986, una sobreproducción de petróleo crudo da como resultado un excedente que hizo que el precio de éste cayera. Sin embargo la intensificación de la guerra entre Irán-Iraq, interrumpió el suministro de petróleo y que tuvo como consecuencia el aumento del precio del crudo en 1987 y 1988.

Una cronología más completa de los eventos importantes en el mercado del petróleo entre 1956 y 1988 se da en el apéndice A.

## 5.2. Construcción del modelo función de transferencia.

En la cronología del mercado del petróleo que presentamos en la sección anterior podemos ver los períodos de estabilidad e inestabilidad por las que el precio del crudo, y como consecuencia el precio de la gasolina, han pasado en los años de 1973 a 1988. Crisis energéticas, producidas sobre todo por problemas políticos internos y externos de la países productores del crudo, incrementos de precios, suspensión de exportaciones, cambios en la demanda de crudo, bajas de precios, etc. Todos estos problemas en el mercado del petróleo afectan de manera clara a los precios de sus derivados, y en particular a el precio de la gasolina. Debido a lo anterior debe notarse que la relación que puede existir entre el precio del crudo y de la gasolina cambia a través del tiempo, por ejemplo, podemos esperar que las relaciones entre el precio del crudo y de la gasolina sean diferentes antes y después de la segunda crisis de energéticos, dándole así un carácter dinámico a estas relaciones.

Debe ser intuitivo que el problema de estudiar el comportamiento del precio de la gasolina y la influencia que tiene el precio del crudo sobre éste, presenta varios aspectos interesante en el análisis de *series de tiempo*, debido a lo

inestable del mercado del petróleo. Algunos de estos aspectos se plantean en las siguientes preguntas :

- ⇒ (a) ¿ en qué forma influye el precio del crudo en los pronósticos del precio de la gasolina ?
- ⇒ (b) ¿ en qué magnitud el precio del crudo impacta al precio de la gasolina ?
- ⇒ (c) ¿ cómo serán las relaciones entre el precio del crudo y de la gasolina antes y después de la segunda crisis de energía, y cómo impactan estos posibles cambios sobre los pronósticos ?
- ⇒ (d) ¿ cómo estas relaciones dinámicas son influenciadas por sucesos importantes del mercado del petróleo y de la gasolina ?

Es claro que las respuestas a cada de las preguntas anteriores esconden una problemática. Para dar respuesta a la pregunta del inciso c), es necesario hacer un análisis por secciones, es decir, analizar primero el comportamiento de los precios de la gasolina y del crudo en el período anterior a la segunda crisis de energéticos, y después analizar el período posterior a esta. El responder la pregunta d), seguimos, precisaría analizar los *resultados atípicos (Outliers)* provocados por los sucesos importantes e incorporar estos *resultados atípicos* en los modelos. Esto implicaría, además, utilizar algún proceso iterativo de estimación conjunta de parámetros y efectos de los resultados atípicos. Puede verse pues, que esta dos preguntas presentan aspectos bastantes interesantes del análisis de *series de tiempo*, que sin embargo están fuera de los objetivos de esta investigación<sup>17</sup>.

La preguntas a) y b), que son también de gran interés, son a las que daremos respuesta, y de esta manera cubriremos dos objetivos de este capítulo: ilustrar el proceso completo de la construcción de los *modelos función de transferencia*, utilizando las etapas vistas en el capítulo 1; comparar los pronósticos generados por los *modelos función de transferencia* y los *modelos univariantes ARIMA*, para evaluar la precisión de cada uno. Así, en esta parte abordaremos la pregunta del inciso (a).

---

<sup>17</sup> No obstante para los interesados en las respuestas a las preguntas de los incisos c) y d) puede consultar el artículo de Lon Mu Liu (1991), donde se realiza un análisis más completo de ésta problema.

Es importante que notemos que el problema del precio de la gasolina puede verse como un problema de interpretación clásica del *modelo de regresión* donde el precio de la gasolina sería la *variable explicada* y el precio del crudo la *variable explicativa*. Sin embargo este modelo presenta dos limitaciones importantes: suponer que la relación es instantánea y estática, la segunda, que la parte no explicada por la *variable* (o variables) *independiente es ruido blanco*. Estas dos restricciones, razonables en situaciones estáticas en las que por hipótesis prescindimos de la posible dimensión temporal de las observaciones, son frecuentemente erróneas cuando las variables se observan a lo largo del tiempo y es de esperarse una *estructura dinámica*. Los *modelos función de transferencia*, que combinan los conceptos de *regresión múltiple* con los de los *modelos univariantes de series de tiempo*, resuelven estas dos limitaciones, al considerar la dimensión temporal de las observaciones y permitir que el ruido siga un *modelo ARMA(p,q)*. Recordemos que además los *modelos función de transferencia* nos permiten medir cómo se transmiten los efectos entre variables, y por consiguiente, es un instrumento para evaluar *respuestas dinámicas*.

Así el modelo función de transferencia que trataremos de estudiar para este problema es :

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad ..(5.1)$$

donde como ya se señaló  $\omega_s(B)$  y  $\delta_r(B)$  son los polinomios pertenecientes a la función de transferencia y  $\theta(B)$  y  $\phi(B)$  son los polinomios de media móviles y de autorregresión, respectivamente, de la serie ruido (o proceso inercia).

Para ello haremos uso de dos series de tiempo: (a) el precio promedio mensual de la gasolina en Estados Unidos, (b) el precio promedio mensual del petróleo crudo. Aunque existe una tendencia decreciente en el uso de la gasolina primaria<sup>18</sup>, sus precios son representativos para otros tipos de gasolina. Los precios del petróleo crudo y de la gasolina fueron ajustados por la inflación y están basados en el precio índice de enero de 1973. Estas series de tiempo comienzan en enero de 1973 y finalizan en diciembre de 1987, con esto tenemos 180 observaciones para cada serie, de las cuales para nuestro análisis haremos

<sup>18</sup> Se llama gasolina primaria a la que se obtiene del primer proceso de refinación del crudo.

uso de 168 observaciones, abarcando el período de 1973 a 1986. Las observaciones restantes serán utilizadas en la comparación de los pronósticos.

Para una representación más apropiada de nuestras variables, utilizaremos la siguiente notación :

PGAS = Precio promedio mensual de la gasolina de venta al por mayor en Estados Unidos.

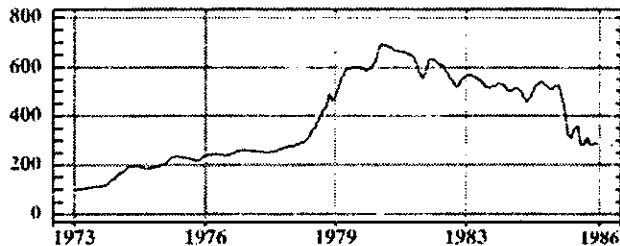
PCRUDO = Precio promedio mensual del petróleo crudo.

con lo cual nuestro modelo función de transferencia a considerar es el siguiente

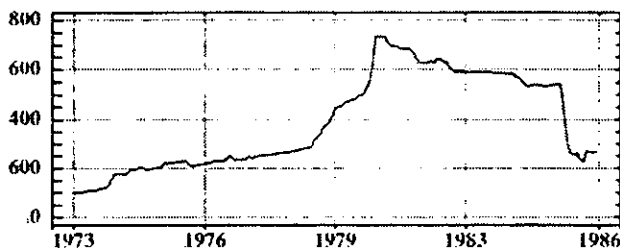
$$PGAS_t = \frac{\omega(B)}{\delta(b)} PCRUDO_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad \dots(5.2)$$

### 5.2.1. Identificación

La figura 5.1, muestra como las series PCRUDO (*serie entrada*) y PGAS (*series salida*) fluctúan en el tiempo, y podemos notar que los cambios en el tiempo en ambas gráficas suceden aproximadamente en los mismos períodos. Después de la primera crisis de energéticos (1973-74), el precio del crudo empezó a incrementarse, de igual manera se comporta el precio de la gasolina. Sin embargo después de la segunda crisis de energéticos, el precio del crudo decayó considerablemente, particularmente en 1986. Durante este período, el precio de la gasolina también tuvo un comportamiento decreciente pero empezó a tener más variación que el petróleo crudo.



(a)



(b)

**Figura 5.1.**

(a) Precio promedio mensual de la gasolina de venta en los Estados Unidos; (b) Precio promedio mensual del petróleo crudo

◆ Etapa 1: Preparación de las series entrada y salida

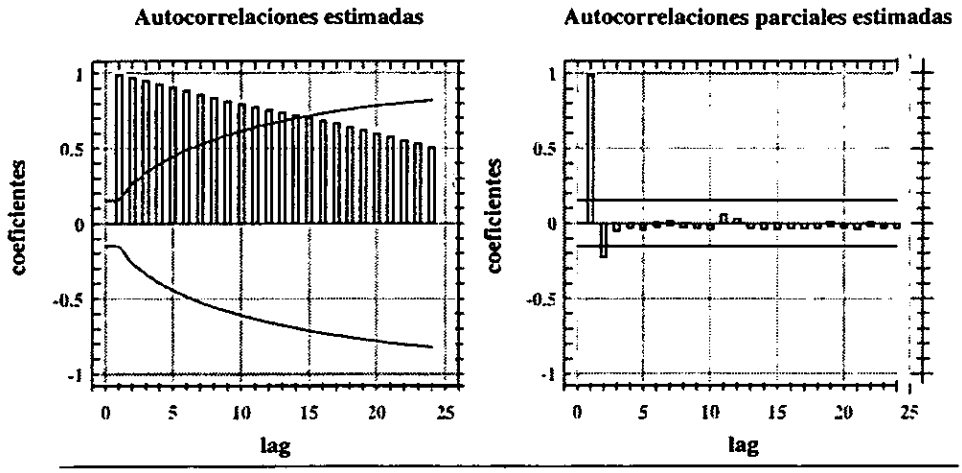


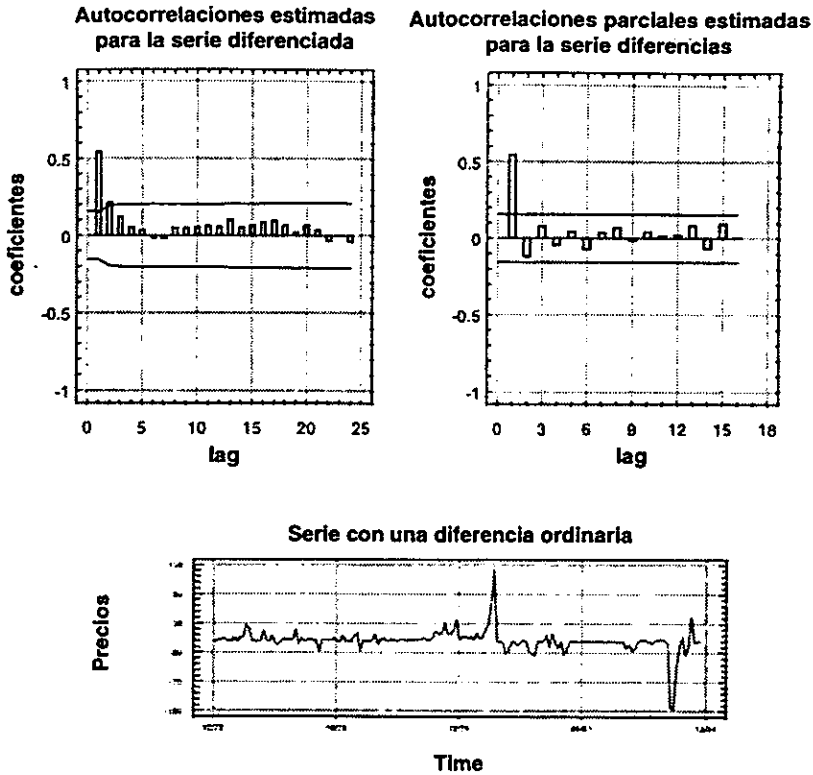
Figura 5.2.  
Análisis univariado de la serie entrada PCRUDO

De las gráficas en la figura 5.1, observamos que ambas son claramente *series no estacionarias* y parecen no tener algún patrón estacional, así pues, debemos convertir las series PGAS y PCRUDO a *series estacionarias*. Consideremos primero la serie entrada PCRUDO. Un análisis univariado de esta serie se presenta en la figura 5.2. Las *autocorrelaciones* tienden muy lentamente a cero, la primera *autocorrelación parcial* es muy grande, todo parece indicar que es necesario aplicar una diferencia ordinaria para que esta serie sea estacionaria.

La figura 5.3, muestra los resultados al aplicar la primera *diferencia ordinaria* a la serie entrada PCRUDO, vemos que esta tiene ya un *comportamiento estacionario*, además se confirma que la serie no tiene un *comportamiento estacional*. De manera similar se procede para la serie salida PGAS.

En resumen, solo ha sido necesario aplicar una *diferencia estacionaria* a cada serie, esto es,  $(1-B)PCRUDO_t$  y  $(1-B)PGAS_t$ , para que estas series sean estacionarias.





**Figura 5.3.**  
Análisis univariado de la serie entrada PCRUDO  
con una diferencia ordinaria

◆ **Etapla 2: Preblanqueo de la serie entrada.**

Después de un análisis de las figuras 5.2 y 5.3, se encontró que la serie entrada  $PCRUDO_t$  puede ser modelado por un *modelo ARIMA(1,1,1)*<sup>19</sup>. Ya que  $PCRUDO_t$  tiene una diferencia ordinaria, podemos decir que  $PCRUDO_t$  sigue un proceso  $ARMA(1,1)$ :

$$(1 - \phi B) PCRUDO_t = (1 - \theta B) \alpha_t,$$

<sup>19</sup> En el apéndice 2 se muestra un cuadro comparativo que contiene la información correspondiente de cada modelo ARIMA tentativo para la serie PCRUDO.

con los siguientes estimadores para  $\phi_1$  y  $\theta_1$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 0.35168 \\ \theta_1 &= -0.28563\end{aligned}$$

Así, el  $PCRUDO_t$  es representado por el modelo

$$(1 - 0.35168B)PCRUDO_t = (1 + 0.28563B)\alpha_t$$

y para convertir la serie  $PCRUDO_t$  a "ruido blanco", despejamos  $\alpha_t$

$$\frac{(1 - 0.35168B)}{(1 + 0.28563B)}PCRUDO_t = \alpha_t$$

para obtener los valores de  $\alpha_t$ , reescribiremos la ecuación en su forma de diferencias

$$PCRUDO_t - 0.35168PCRUDO_{t-1} = \alpha_t + 0.28563\alpha_{t-1}$$

$$\alpha_t = PCRUDO_t - 0.35168PCRUDO_{t-1} - 0.28563\alpha_{t-1}$$

como ejemplo, obtendremos el primer valor para  $\alpha_t$

sea

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = PCRUDO_2 - 0.35168PCRUDO_1 - 0.28563\alpha_1$$

$$\alpha_2 = 0.174 - 0.35168(0) - 0.28563(0)$$

$$\alpha_2 = 0.174$$

los demás valores se calculan de igual forma.

### ◆ Etapa 3 : Preblanqueo de la serie salida.

Ahora, como ya vimos, debemos aplicar la misma *transformación de preblanqueo* a la serie salida  $PGAS_t$ . Así usando la misma transformación tenemos:

$$(1 - \phi B) = (1 - \theta B) \beta_t$$

donde despejando  $\beta_t$

$$\frac{(1 - \phi B)}{(1 - \theta B)} PGAS_t = \beta_t$$

$$\frac{(1 - 0.35168B)}{(1 + 0.28563B)} PGAS_t = \beta_t$$

Nuevamente, para obtener los valores de  $\beta_t$ , reescribimos la ecuación en su forma de diferencias

$$PGAS_t - 0.35168 PGAS_{t-1} = \beta_t + 0.28563 \beta_{t-1}$$

$$\alpha_t = PGAS_t - 0.35168 PGAS_{t-1} - 0.28563 \beta_{t-1}$$

para obtener los valores de  $\beta_t$  se procede de igual forma que se procedió para  $\alpha_t$ .

Después de haber *preblanqueado las series entrada y salida*, y haber obtenido todos los valores para  $\alpha_t$  y  $\beta_t$ , podemos usar estos valores para identificar la forma de la *función de transferencia*.

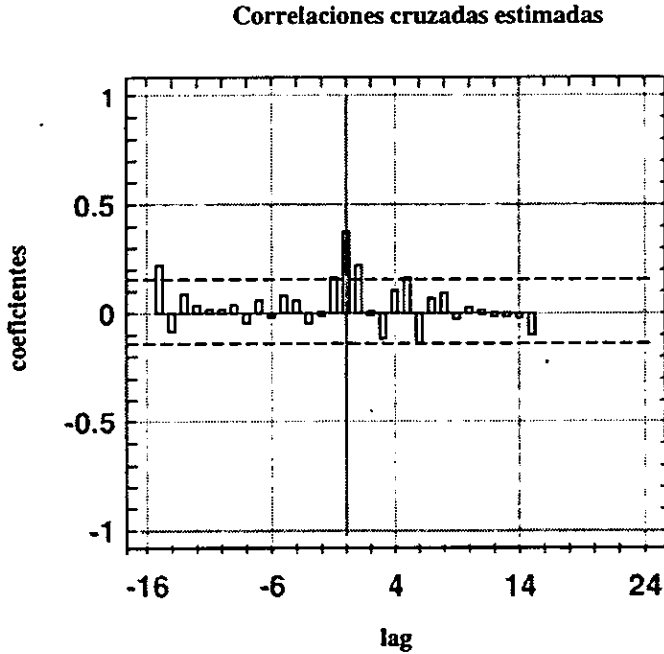
◆ **Etapa 4 : Cálculo de autocorrelación y correlación cruzada para las series preblanqueadas.**

Hasta aquí, tenemos esencialmente 167 valores de  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  y sus estadísticos básicos son

	Media	Varianza
$\alpha_t$	0.50951	253.412
$\beta_t$	0.57858	243.640

Como hemos mencionado anteriormente una de las herramientas principales para estudiar la relación entre  $\alpha_t$  y  $\beta_t$  es la *correlación cruzada* entre estas dos

series. Así, usando las ecuaciones (2.3) y (2.4), vistas en el capítulo 2, calculamos las correlaciones cruzadas, con  $k = \pm 1, \dots, \pm 15$ , estas *correlaciones cruzadas* se muestran en la figura 5.4.

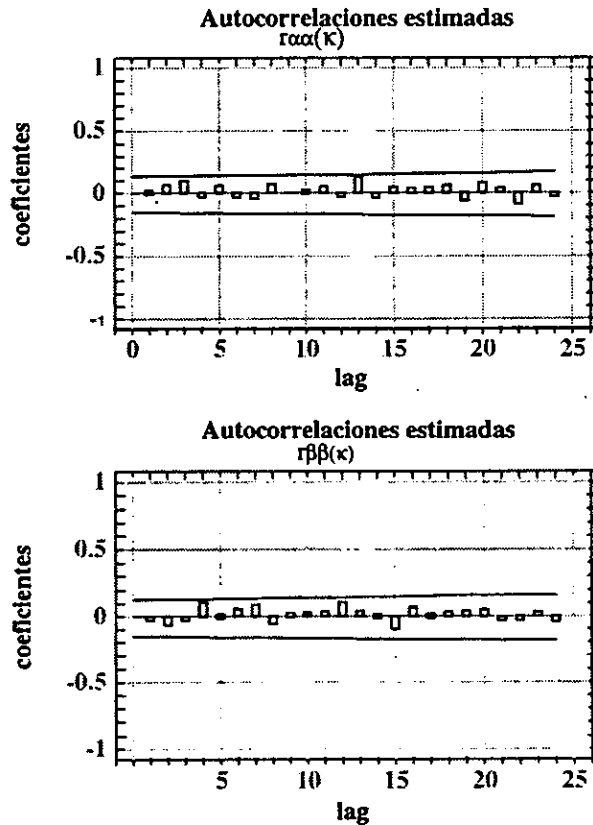


**Figura 5.4**

Correlación cruzada entre las series entrada y salida preblanqueadas

De la figura 5.4, podemos ver que la correlación cruzada para  $r(-15)=0.22176$ , es significativo, esto parece indicarnos que existe una retroalimentación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, puede existir un efecto de retroalimentación del precio de la gasolina sobre el precio del petróleo crudo. Sin embargo, debe notarse también, que después de valor  $r(-15)$ , las demás *correlaciones cruzadas* son esencialmente ceros, además de que no existe algún patrón de comportamiento para estas *correlaciones cruzadas*. Esto nos lleva a pensar que este valor para  $r(-15)$ , puede considerarse como un *valor atípico* (*Outliers*), debido a lo inestable del mercado del petróleo. Aunque este dato o observación atípico puede deberse a que por 1973-1974 en Estados Unidos se introduce la gasolina sin plomo, provocando un aumento del precio de la gasolina. Así considerando a  $r(-15)$  como un valor atípico, y los valores  $r(-14), \dots$ ,

$r(-1)$  esencialmente ceros, sólo analizaremos los valores para  $r(0), \dots, r(15)$ . También observamos que la influencia de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  inicia en  $r(0)$ , con esto el retardo de la influencia es cero, esta influencia se mantiene por un período más, para  $r(1)$ . Para calcular las *autocorrelaciones* de  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ , respectivamente, se procede de igual manera que para los modelos univariantes. En la figura 5.5 podemos ver las gráficas de éstas autocorrelaciones. Observemos que en la gráfica de las autocorrelaciones de  $\alpha_i$  los valores de éstas son pequeñas, como ya se esperaba, ya que, cómo hemos señalado el preblanquear  $x_t$  significa transformar la serie  $x_t$  en esencialmente ruido blanco, y teóricamente las autocorrelaciones deben ser ceros.



**Figura 5.5.**  
Autocorrelaciones para las series entrada y salida preblanqueadas

Es claro que las autocorrelaciones para  $\alpha$  son pequeñas como se esperaba, debido que preblanquear la serie PCRUDO<sub>t</sub> significa transformar la serie en esencialmente, ruido blanco. En este caso las autocorrelaciones para  $\beta$  también se comportan como ruido blanco.

◆ **Etapa 5: Estimación directa de los pesos de respuesta a impulsos.**

En el proceso de la identificación de los *modelos función de transferencia* contamos con otra herramienta, muy importante, a parte de la correlación cruzada, para identificar la forma de la función de transferencia, esta herramienta es la *función de respuesta a impulsos*. Recordemos que el propósito de estimar los pesos de respuesta a impulsos es obtener una gráfica de éstas, para poder determinar los *órdenes (b,r,s)* de la *función de transferencia*, al comparar la gráfica de los pesos estimados con las gráficas teóricas dadas en el capítulo 1.

Usando la ecuación

$$v(k) = r_{\alpha\beta}(k) \frac{S_{\beta}}{S_{\alpha}}$$

para convertir las *correlaciones cruzadas* entre  $\alpha$  y  $\beta$  en pesos de respuesta a impulsos, de la siguiente manera

$$v_0 = r_{\alpha\beta}(0) \frac{S_{\beta}}{S_{\alpha}} = (0.3689) \sqrt{\frac{243.640}{253.412}} = 0.36192$$

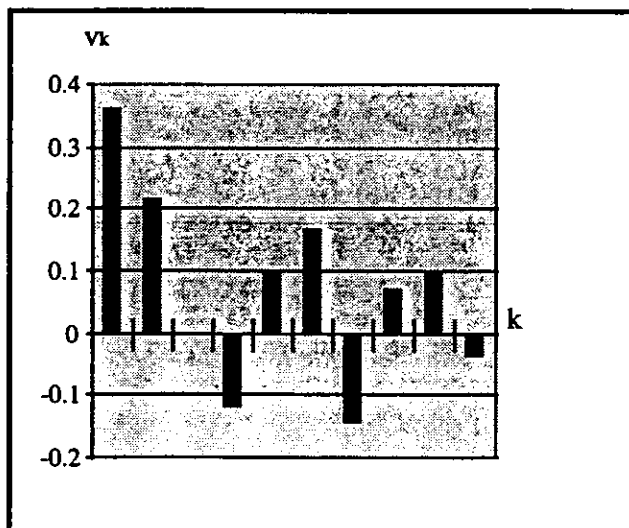
$$v_1 = r_{\alpha\beta}(1) \frac{S_{\beta}}{S_{\alpha}} = (0.2202)(0.98108) = 0.21601$$

$$v_2 = r_{\alpha\beta}(2) \frac{S_{\beta}}{S_{\alpha}} = (-0.0036)(0.98108) = -0.0351$$

**Tabla 5.1.**  
Función de correlación cruzada y función de respuestas a impulsos  
de las series preblanqueadas

lag	Función de Correlación cruzada	Función de respuesta a impulsos
0	0.3689	0.36192
1	0.2202	0.21601
3	-0.0036	-0.00351
4	0.0999	0.0981
5	0.1703	0.16707
6	-0.1471	-0.14431
7	0.0702	0.06887
8	0.0965	0.0946
9	-0.03617	-0.03540

La tabla 5.1 presenta los diez primeros valores de las *correlaciones cruzadas* y los *pesos de respuesta a impulsos* de la *series preblanqueadas*. El patrón de la *función de respuesta a impulsos*, se muestra en la figura 5.6. Notar que sólo hemos considerado  $k=0,1,2,\dots,9$ .



**Figura 5.6.**  
Función de respuesta a impulsos

◆ **Etapa 6: Identificación de los órdenes (b,r,s) para el modelo función de transferencia.**

Primero determinaremos el valor  $b$ , es decir, el valor del retardo absoluto antes que la serie entrada empieza a influenciar a la serie salida. Usando la figura 5.4 de las *correlaciones cruzadas* o directamente de la figura 5.6 de los pesos de respuesta a impulsos, puede verse fácilmente que el valor para  $b$  es cero. Así  $b=0$ .

Para determinar los valores  $r$  y  $s$  necesitamos analizar con más detalle la gráfica de los pesos de respuesta a impulsos (figura 5.6). Puede verse que la función de respuesta a impulsos tiene un decaimiento aproximadamente sinoidal, lo cual es consistente con  $r=2$ . Comparando la figura 5.6 con las gráficas para el caso cuando  $r=2$ , dadas en el capítulo 1, observamos que la figura 5.6 es similar a la primera gráfica cuando  $r=2$  y  $s=0$ . Aunque ya obtuvimos el valor  $s$  a partir de las guías teóricas, podemos verificar, que cuando  $r=2$ , el valor  $s$  puede obtener notando que el patrón de decaimiento empieza en  $v_{b+s+1}$ , para nuestro caso el patrón decaimiento inicia en  $v_1$ , entonces  $v_{b+s+1}=v_1$ , por lo tanto  $s=0$ .

El modelo tentativo que hemos encontrado es el siguiente

$$PGAS_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} PCRUDO_t + (\text{modelo ruido})$$

con  $(b,r,s)=(0,2,0)$ .

◆ **Etapa 7 : Estimación preliminar de los parámetros de la función de transferencia.**

La ecuación (2.21) dada en el capítulo 2, expresa explícitamente la relación que existe entre los *pesos de respuesta a impulsos* y los parámetros del modelo. Usando la ecuación (2.21) y asumiendo que  $b=0, r=2$  y  $s=0$ , obtenemos las siguientes ecuaciones :

$$v_j < 0 \quad (5.3)$$

$$v_0 = \omega_0 \quad (5.4)$$

$$v_1 = \delta_1 v_0 \quad (5.5)$$

$$v_2 = \delta_1 v_1 + \delta_2 v_0 \quad (5.6)$$



sustituyendo los estimadores  $\hat{v}_j$  de la tabla 5.1, tenemos

$$v_j < 0 \quad (5.3.a)$$

$$\hat{\omega}_0 = 0.36192 \quad (5.4.b)$$

$$\hat{\delta}_1(0.36192) = 0.21601 \quad (5.5.c)$$

$$\hat{\delta}_1(0.21601) + \hat{\delta}_2(0.36192) = -0.0351 \quad (5.6.d)$$

resolviendo las ecuaciones anteriores,  $\hat{\omega}_0 = 0.36192$ ,  $\hat{\delta}_1 = 0.59866$ , y  $\hat{\delta}_2 = -0.36619$ .

Por lo tanto la identificación del modelo tentativo es

$$PGAS_t = \frac{0.36196}{1 - 0.59686B + 0.366198B^2} PCRUDO_t + n_t$$

Como ya hemos señalado estos estimadores no son estadísticamente eficientes, pero estos son buenos estimadores iniciales para los algoritmos de estimación no lineal.

#### ◆ Etapa 8 : Una mirada preliminar a la serie ruido.

Para obtener la serie ruido haremos uso de la ecuación (2.25), así

$$n_t = PGAS_t - \frac{\omega_0(B)}{\delta_2(B)} PCRUDO_t$$

donde

$$\omega_0(B) = \omega_0$$

$$\delta_2(B) = 1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2$$

con

$$\hat{\omega}_0 = 0.361196$$

$$\hat{\delta}_1 = 0.596866$$

$$\hat{\delta}_2 = -0.366198$$

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

de la ecuación para  $n_t$ , tenemos

$$n_t = PGAS_t + \delta_1(n_{t-1} - PGAS_{t-1}) + \delta_2(n_{t-2} - PGAS_{t-2}) - \omega_0 PCRUDO_t$$

sustituyendo valores

$$n_t = PGAS_t + 0.596866(n_{t-1} - PGAS_{t-1}) - 0.366198(n_{t-2} - PGAS_{t-2}) - 0.361916 PCRUDO_t$$

la ecuación anterior nos genera los valores de la *serie ruido*. Los valores de la *serie ruido* son generados por el paquete ITSM\* (Interactive Time Series Modelling).

◆ **Etap 9 : Identificación del modelo ARIMA(p,d,q) para la serie ruido.**

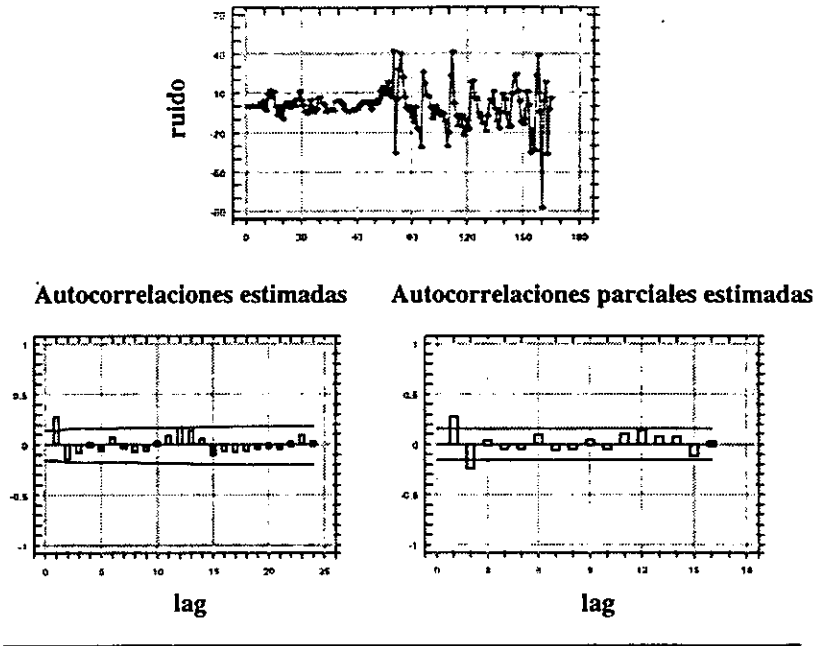
A fin de obtener el modelo completo de *función de transferencia* es ahora necesario elegir un *modelo ARIMA(p,d,q)* para la *serie ruido*. La figura 5.7 muestra el análisis básico para los datos de la *serie ruido*. Podemos observar que existe *varianza constante* y *media constante*, no existe *fluctuaciones estacionales*. Las *autocorrelaciones* muestran la presencia de un valor significativo en 1, se trunca en 1. En las *autocorrelaciones parciales* existen dos valores significativos en 1 y 2, se trunca en 2. El modelo que elegimos para la *serie ruido* es un ARIMA(2,0,0).

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)n_t = a_t$$

$$n_t = \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t$$

Así en el *modelo función de transferencia*

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + n_t$$



**Figura 5.7.**  
Análisis univariado para la serie ruido (inercia)

podemos reemplazar  $n_t$  por

$$\frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t$$

donde  $a_t$  es un proceso *ruido blanco*.

◆ **Etapa 10 : Estimación preliminar de los parámetros del modelo de la serie ruido.**

En la etapa anterior hemos obtenido un modelo tentativo para la *serie ruido*, el cual es un modelo ARMA(2,0). Ahora necesitamos estimar los parámetros preliminares  $\phi_1$  y  $\phi_2$ ; utilizaremos las ya conocidas ecuaciones de *Yule - Walker*, que son las siguientes

$$\begin{aligned} r_1 &= \phi_1 + \phi_2 r_1 + \dots + \phi_p r_{p-1} \\ r_2 &= \phi_1 r_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p r_{p-2} \\ &\dots \\ r_p &= \phi_1 r_{p-1} + \phi_2 r_{p-2} + \dots + \phi_p \end{aligned}$$

donde las  $r$ 's son las autocorrelaciones estimadas.

Así las ecuaciones para los dos parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son

$$\begin{aligned} r_1 &= \phi_1 + \phi_2 r_1 \\ r_2 &= \phi_1 r_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones anterior

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}, \quad \hat{\phi}_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}$$

sustituyendo los valores de las dos primeras *autocorrelaciones*, obtenemos los siguientes dos estimadores preliminares

$$\hat{\phi}_1 = 0.34422$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.24120$$

con lo que el modelo para la *serie ruido*  $n_t$  viene a ser

$$n_t = \frac{1}{1 - 0.34422B + 0.24120B^2} a_t$$

### 5.2.2. Estimación final de los parámetros.

En la etapa de la identificación obtuvimos el siguiente modelo *función de transferencia* tentativo

$$PGAS_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} PCRUDO_t + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t$$

con los siguientes estimadores preliminares

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_0 &= 0.36191 \\ \hat{\delta}_1 &= 0.59686 \\ \hat{\delta}_2 &= -0.366198 \\ \hat{\phi}_1 &= 0.34422 \\ \hat{\phi}_2 &= -0.24120\end{aligned}$$

así nuestro modelo completo es

$$PGAS_t = \frac{0.36191}{1 - 0.59686B + 0.66198B^2} + \frac{1}{1 - 0.34422B + 0.24120B^2} a_t$$

Para obtener los estimadores finales del modelo función de transferencia de arriba, utilizamos nuevamente el paquete computacional ITSM. El paquete nos proporcionó los resultados siguientes

$$\begin{aligned}\hat{\omega}_0 &= 0.425916 \\ \hat{\delta}_1 &= 0.475866 \\ \hat{\delta}_2 &= -0.236198 \\ \hat{\phi}_1 &= 0.319227 \\ \hat{\phi}_2 &= -0.23610\end{aligned}$$

Por lo tanto, ya hemos identificado el modelo *función de transferencia* y estimado los parámetros del mismo, así que nuestro modelo final es<sup>20</sup>

$$PGAS_t = \frac{0.425916}{1 - 0.475866B + 0.236198B^2} + \frac{1}{1 - 0.319227B + 0.23610B^2} a_t$$

<sup>20</sup> En el apéndice B se muestra un cuadro comparativo que contiene la información correspondiente de cada modelo función de transferencia tentativo.

### 5.2.3. Diagnóstico del modelo.

Como mencionamos en el capítulo 4, antes de usar nuestro *modelo función de transferencia* final para propósitos de control o pronóstico, es necesario probar las suposiciones bajo las cuales se construyó el modelo. Por lo tanto nuestro interés se enfoca en dos puntos : (i) analizar los residuales  $a_t$ , esto es para verificar que los residuales  $a_t$  del modelo función de transferencia final tengan un comportamiento aproximadamente ruido blanco, (ii) analizar la relación entre la serie  $a_t$  y la *serie entrada preblanqueada*, obtenida en la etapa 4,  $\alpha_t$ , para probar la independencia entre ellas.

Los residuales  $a_t$  nos los proporciona el paquete ITSM. No obstante la forma abreviada para obtenerlos es la siguiente :

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-3} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

multiplicando toda la ecuación por  $\delta(B)\phi(B)$ , obtenemos

$$\delta(B)\phi(B)y_t = \phi(B)\omega(B)x_{t-3} + \delta(B)\theta(B)a_t$$

donde expandiendo y reagrupando términos, podemos expresar  $a_t$  en función de los valores de  $y_t$ ,  $x_t$  y  $a_t$ . En particular, para nuestro modelo la expresión de  $a_t$  es

$$\begin{aligned} a_t = & c_1 PGAS_{t-1} + c_2 PGAS_{t-2} - c_3 PGAS_{t-3} + c_4 PGAS_{t-4} \\ & - d_1 PCRUDO_t + d_2 PCRUDO_{t-1} + d_3 PCRUDO_{t-2} \\ & + e_1 a_{t-1} + e_2 a_{t-2} \end{aligned}$$

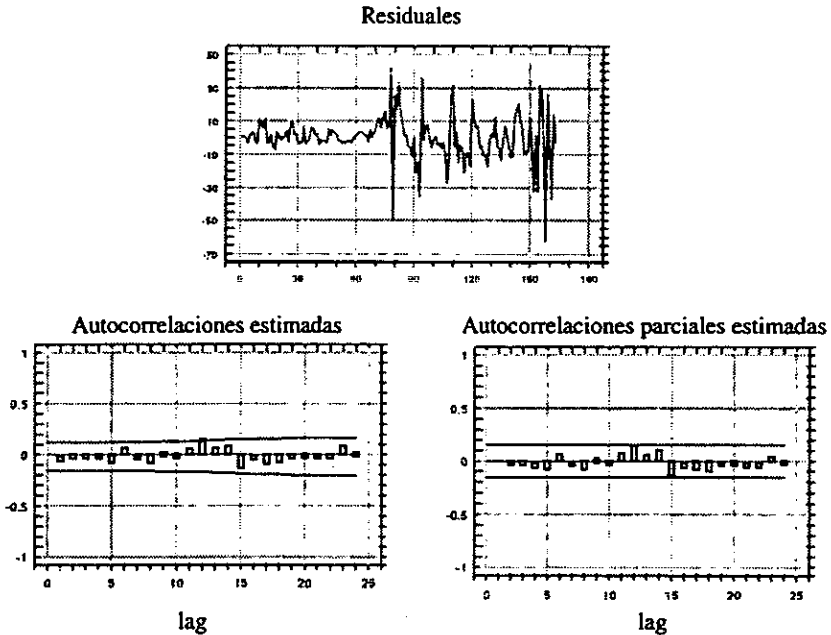
donde

$$\begin{array}{lll} c_1 = \phi_1 + \delta_1 & d_1 = \omega_0 & e_1 = \delta_1 \\ c_2 = \phi_2 - \delta_1 \phi_1 + \delta_2 & d_2 = \omega_0 \phi_1 & e_2 = \delta_2 \\ c_3 = -\delta_1 \phi_2 - \delta_2 \phi_1 & d_3 = \omega_0 \phi_2 & \\ c_4 = \delta_2 \phi_2 & & \end{array}$$

sustituyendo los valores convenientes podemos generar los valores para  $a_t$ .

• Análisis de residuales: autocorrelaciones.

Los valores generados para  $a_t$  se muestran en la figura 5.8. La gráfica de los *residuales* tienen un comportamiento estacionario. Las *autocorrelaciones* no muestran ningún valor significativo y tampoco se percibe un patrón de *comportamiento estacional* en estas. Igualmente las *autocorrelaciones parciales*, apoyan el argumento de que la serie  $a_t$  es esencialmente *ruido blanco*.



**Figura 5.8.**  
Análisis univariado de los residuales para el modelo función de transferencia

De manera análoga al proceso de diagnóstico para los modelos univariantes, podemos aplicar a los residuales  $a_t$  del modelo función de transferencia la prueba *pormanteu*  $Q$ . En otras palabra podemos calcular

$$Q(K) = m(m+2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{m-k} r_{aa}^2(k)$$

recordemos que el estadístico  $Q$  sigue aproximadamente una *distribución*  $\chi^2$  con  $k-p-q$  grados de libertad, dependiendo solamente del número de parámetros en el *modelo ruido*. El valor de  $m$  es el número de observaciones, ya sea que a éstas se les halla aplicado alguna transformación o alguna diferencia ordinaria o estacional. En nuestro caso el número de observaciones disponibles es de 167, debido a que aplicamos una diferencia ordinaria, y con esto perdimos una observación. El valor para  $k$  será de 15, esto es, sólo utilizaremos las primeras 15 *autocorrelaciones* para realizar la prueba; estas correlaciones se dan en la tabla 5.2.

Tabla 5.2.  
Autocorrelaciones de los residuales at

k	Autocorrelaciones
1	0.006
2	-0.016
3	0.019
4	0.0
5	-0.087
6	0.061
7	-0.013
8	-0.081
9	0.16
10	0.030
11	0.065
12	0.149
13	0.071
14	0.080
15	-0.133

Así

$$Q = 167(167 + 2) \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{m-k} r_{aa}^2(k)$$

$$Q = 28223 \left\{ \frac{1}{166} (0.006)^2 + \frac{1}{165} (-0.016)^2 + \dots + \frac{1}{152} (-0.133)^2 \right\}$$

$$Q = 28223(0.000474) = 13.680$$



Con  $p=2$  y  $q=0$ , tenemos  $k-p-q=13$  grados de libertad, entonces el valor para  $\chi^2$  dado en la tablas, es  $\chi_{0.1,13}^2 = 19.8119$ . Comparando el valor de  $Q$  con  $\chi^2$ , vemos que  $Q$  es menor. Por lo tanto concluimos que los residuales  $a_i$  son esencialmente ruido blanco.

- **Análisis de residuales : correlaciones cruzadas.**

La segunda suposición que debemos probar es la de que la *serie entrada preblanqueada*  $\alpha_i$  es independiente del componente *ruido aleatorio*  $a_i$ . Por lo tanto una parte importante de la etapa del diagnóstico es vindicar esta suposición. Nuevamente la gráfica de la correlación cruzada entre  $\alpha_i$  y  $a_i$  nos es de gran utilidad, en esta gráfica lo que esperamos es que no exista algún patrón de comportamiento y que residan dentro de sus errores estándar  $2(n-k)^{-\frac{1}{2}}$ .

La figura 5.9 muestra la gráfica de las correlaciones cruzadas entre la *serie entrada preblanqueada*  $\alpha_i$  y los residuales  $a_i$  del modelo función de transferencia; en ella podemos observar que aunque existen correlaciones cruzadas significativas éstas no muestran un patrón de comportamiento. Ahora, es preciso recordar que en la gráfica de las correlaciones cruzadas entre la serie entradas y la *serie salida preblanqueadas*  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  respectivamente, encontramos un valor atípico el cual dijimos fue provocado por la introducción de la gasolina sin plomo en los Estados Unidos, además si vemos la cronología del mercado del petróleo, nos daremos cuenta de lo inestable del comportamiento de este. Entonces estas correlaciones pueden considerarse también como *valores atípicos (Outliers)* que están fuera de nuestro control. En consecuencia, ignorando estos valores atípicos, podemos decir que las correlaciones cruzadas entre  $\alpha_i$  y  $a_i$  son esencialmente ceros, vindicando así la suposición de que  $\alpha_i$  y  $a_i$  son independientes.

Correlaciones cruzadas estimadas

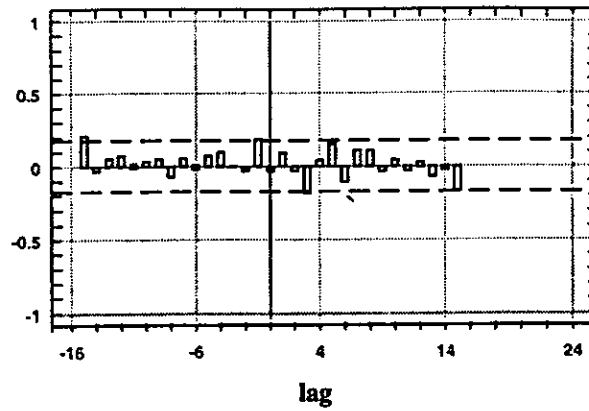


Figura 5.9.

Correlación cruzada entre las series entrada preblanqueada y los residuales del modelo función de transferencia

También podemos usar la *prueba portamanteu Q*, para sostener nuestra suposición. Similarmente como para el caso de las autocorrelaciones, el estadístico *Q* es

$$Q(K) = m(m+2) \sum_{k=1}^K \frac{1}{m-k} r_{\hat{a}}^2(k)$$

y este se distribuye aproximadamente como una  $\chi^2$  con  $k-r-s$  grados de libertad. Las primeras 15 correlaciones cruzadas se muestran en la tabla 5.3.

**Tabla 5.3.**  
Correlaciones cruzadas

k	Correlaciones cruzadas
0	-0.0245
1	0.1845
2	-0.0378
3	-0.0027
4	0.0837
5	0.0949
6	0.0210
7	0.0657
8	-0.0774
9	0.0551
10	0.0336
11	0.0213
12	0.0749
13	0.0592
14	0.0209

nuestro *estadístico Q* es

$$Q = 167(167 + 2) \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{m-k} r_{\alpha_i}^2(k) = 13.473$$

con  $r=2$  y  $s=0$ , tenemos  $k-r-s=13$  grados de libertad. Entonces el valor para  $\chi^2$  dado en tablas es nuevamente  $\chi_{0.1,13}^2 = 19.8119$ , comparando ambos valores vemos que el *estadístico Q* es menor, y con esto nuestra suposición se mantiene, entonces podemos decir que las correlaciones cruzadas entre  $\alpha_i$  y  $a_i$  son esencialmente ceros. Por lo tanto podemos concluir que nuestro modelo es adecuado.

### 5.2.4. Pronósticos usando el modelo función de transferencia.

Hasta aquí hemos obtenido finalmente nuestro *modelo función de transferencia*

$$PGAS_t = \frac{\omega_0}{1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2} PCRUDO_t + \frac{1}{1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2} a_t \quad \dots(5.3)$$

con sus parámetros

$$\hat{\omega}_0 = 0.425916$$

$$\hat{\delta}_1 = 0.475866$$

$$\hat{\delta}_2 = -0.236198$$

$$\hat{\phi}_1 = 0.319227$$

$$\hat{\phi}_2 = -0.2362$$

Ahora ya estamos en la posibilidad de usarlo para generar pronósticos. En el capítulo 4 vimos a través de un ejemplo la forma operativa en que se pueden generar pronósticos usando un modelo función de transferencia, así que no abundaremos más en el asunto. Nos concentraremos en un aspecto de gran interés, esto es, nos concentraremos en la precisión de los pronósticos que generan los *modelos función de transferencia* comparándolos con los que generan los *modelos univariantes ARIMA*.

Dentro de la modelización de series de tiempo, es posible usar un subconjunto de datos conocidos para pronosticar los restantes datos conocidos, facilitándonos estudiar la precisión de los pronósticos de diferentes modelos de una manera más directa y objetiva<sup>21</sup>. Las herramientas en las cuales basaremos nuestro criterio son los estadísticos : *ECM (error cuadrático medio)* y *el EPMA (el error porcentual medio absoluto)*, cuyas fórmulas son

$$ECM = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (Y_j - \hat{Y}_j)^2 \quad \dots(5.4)$$

<sup>21</sup> WHEELWRIGHT AND MAKRIDAKIS. *Forecasting Methods for Management*. Wiley & Sons, 1987. Pags. 125- 131.

$$EPMA = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| \frac{Y_j - \hat{Y}_j}{Y_j} \right| \quad \dots(5.5)$$

donde  $m$  es el número de pronósticos considerados.

- **Comparación de pronósticos.**

En la introducción de este capítulo mencionamos que disponemos de 180 observaciones y que sólo usamos 168 observaciones para nuestro análisis. Las doce observaciones restantes las usamos en la comparación de pronósticos. Para realizar la comparación de los pronósticos, fue necesario obtener un *modelo ARIMA* para la series  $PGAS_t$ , donde también utilizamos 168 observaciones. El modelo que se obtuvo para esta serie es un modelo  $MA(1)$ <sup>22</sup>

$$PGAS_t = (1 - \theta_1 B)e_t,$$

donde el valor para su parámetro es

$$\theta_1 = -0.54256$$

así el modelo para la series  $PGAS_t$  es

$$PGAS_t = (1 + 0.54256B)e_t, \quad \dots(5.6)$$

Los resultados usando los modelos (5.3) y (5.6), y las fórmulas (5.4) y (5.5) se muestran en la tabla 5.4.

<sup>22</sup> En el apéndice 2 se muestra un cuadro comparativo que contiene la información correspondiente de cada modelo ARIMA tentativo para la serie PGAS

**Tabla 5.4.**  
Comparación de pronósticos.

t	Valor real	Modelo ARIMA (4)	Modelo Función de transferencia (1)
169	263.5	261.878	260.148
170	249.7	248.231	245.147
171	221.3	224.092	219.371
172	218.4	218.285	217.787
173	278.6	277.403	274.287
174	280.2	283.818	279.446
175	282.4	284.182	281.567
176	292.9	290.279	291.676
177	295.1	287.967	295.808
178	297.8	292.967	297.946
179	302.6	298.727	302.081
180	304.7	307.700	304.962
<b>ECM</b>		11.274	4.88
<b>EPMA</b>		0.12055	0.00917

Analizando la tabla 5.4 podemos observar que el *modelo univariante ARIMA funciona bastante bien* en los primeros cinco valores, en cambio el *modelo función de transferencia* presenta desviaciones mayores que el modelo ARIMA, sin embargo notemos que a partir del valor  $t=174$ , el modelo función de transferencia empieza a ser más preciso, debido a que las desviaciones entre los valores reales y los pronosticados se reducen considerablemente, como puede verse en la tabla 5.4. Así hasta  $t=180$  la precisión del modelo función de transferencia es mayor que la del *modelo univariante ARIMA*, esto significa que el modelo función de transferencia funciona mejor cuando ocurre cambios mayores en  $t$ .

También podemos ver que el *estadístico ECM* para el modelo función de transferencia es menor que el *ECM* para el *modelo univariante ARIMA*, lo mismo sucede en el EPMA.

De lo anterior podemos concluir que el *modelo función de transferencia* genera mejores pronósticos que el *modelo univariante ARIMA*, cuando el período de previsión es de medio a largo plazo debido a que el modelo función de

transferencia tomó en cuenta la evolución de otra variable (o variables), en nuestro caso esta variables es  $PCRUDO_t$  que afecta a nuestra variable de interés  $PGAS_t$ . Así al agregar más información a nuestro modelo el funcionamiento del mismo es mejor.

---

# *Conclusiones*

---



---

## Conclusiones

El trabajo que aquí concluye intitulado "Metodología de Box y Jenkins para la construcción de modelos bivariados con función de transferencia", pretende darle al lector los elementos necesarios que lo lleven a la aplicación práctica de ésta metodología para construir modelos matemáticos estocásticos que involucran el análisis de dos series de tiempo los cuales están relacionados de manera unidireccional a través de una función llamada de transferencia.

Para construir un modelo función de transferencia tienen que observarse los siguientes cuatro principios básicos: a) debe existir una relación unidireccional entre las dos series bajo estudio, esto es, una serie de tiempo entrada ejerce una influencia sobre una serie de tiempo salida, pero no viceversa, b) la relación entre la serie entrada y la serie salida es constante en el período muestral analizado, c) la serie entrada y la serie ruido (o proceso inercia) son independientes entre si y d) la serie ruido puede seguir algún proceso autorregresivo de medias móviles (ARMA).

Puede verse a través del presente trabajo que la metodología de Box y Jenkins aplicada a la construcción de modelos función de transferencia bivariados resulta una herramienta ventajosa para identificar modelos parsimoniosos y apropiados, elegidos de una variedad de modelos propuestos.

En forma resumida, identificar un modelo función de transferencia utilizando el proceso iterativo de Box y Jenkins consiste en lo siguiente. Primero, se postula una clase general de modelos de pronósticos, entonces cuatro etapas son propuestas. En la primera etapa, como parte fundamental del proceso de la identificación, el método del preblanqueo se les aplica a las series entrada y salida, con el propósito de que ambas series presenten una correlación interna menor y con esto analizar de una manera más clara la estructura de correlación que puede existir entre las dos series. Posteriormente, comparando la función de respuesta a impulsos muestral obtenida con las funciones teóricas presentadas en el capítulo 1, se elige un modelo específico, que puede ser considerado tentativamente como el mejor modelo de pronóstico para las series en estudio. La segunda etapa consiste en el ajuste del modelo sobre la información histórica disponible en ambas

series. En la tercera etapa se desarrolla un diagnóstico para determinar si el modelo es adecuado bajo los principios básicos con que fue construido. Si no, se debe regresar a la primera etapa y un modelo alternativo se identifica de aquellos disponibles de la clase general. Cuando un modelo es aceptado, la cuarta etapa se desarrolla y consiste en la obtención de pronósticos para algún período futuro de tiempo.

Utilizando la metodología de Box y Jenkins se construyó un modelo función de transferencia bivariado para la relación dinámica entre los precios del petróleo crudo y de la gasolina en Estados Unidos. Similarmente, también se obtuvo un modelo univariante ARIMA para los precios de la gasolina.

Posteriormente, éstos modelos se utilizaron para generar los pronósticos del precio de la gasolina para los doce meses restantes correspondientes al año de 1986.

La precisión en los pronósticos que generaron ambos modelos (ARIMA y función de transferencia), fue evaluada a través de los estadísticos ECM (Error Cuadrático Medio) y EPMA (Error Porcentual Medio Absoluto). Encontrándose que los pronósticos generados por el modelo función de transferencia fueron los que presentaron menores desviaciones con respecto a los valores reales.

Con lo que se puede concluir que el modelo función de transferencia al incorporar más información que tan solo los datos históricos de una sola serie de tiempo, nos mejora la precisión de los pronósticos, en comparación con los pronósticos generados por el modelo univariante ARIMA.

Como egresado de la preespecialidad de Simulación y Análisis de Decisiones de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación, espero que este trabajo sirva para motivar a los lectores, en especial a los alumnos de la carrera de MAC, al uso en casos prácticos de los modelos función de transferencia bivariados, y de esta manera aportar un grano de arena más al mejoramiento de nuestra sociedad. Así también, que los motive a la investigación de otros modelos y métodos que vayan más allá del análisis de dos series de tiempo.

---

# *Bibliografía*

---

1. Box G.E.P. and G.M. Jenkins. Time Series Analysis: Forecasting and Control. San Francisco, Holden - Day. 1976. 520 pp.
2. González Videgaray, M. C.. Modelos de Decisión con procesos estocásticos II. UNAM ENEP ACATLAN. México Méx. 1990. 113 pp.
3. Liu Lon - Mu. "Identification of Transfer Function models via least squares". University of Angeles. 1982. 21 pp.
4. Liu Lon - Mu. "Sales Forecasting using multi-equation Transfer Function models". Journal of Forecasting. Vol. 6. 1987. 223-238 pp.
5. Liu Lon - Mu. Dynamic Relationship Analysis Of US Gasoline and Crude Oil Prices. Journal of Forecasting. Vol. 10. 1991. 521-547 pp.
6. Mendenhall W, Scheaffer R. , Wackerly D. Estadística Matemática con Aplicaciones. Grupo editorial Iberoamérica. México D. F. 1992
7. Makridakis Spyros. Interactive Forecasting: Univariate and Multivariate Methods. Wiley & Sons. 1978. 665 pp.
8. Makridakis/Wheelwright/Mcgee. Forecasting: Methods and Applications. New York. Wiley & Sons. 1987. 836 pp.
9. Montgomery C. Douglas. Forecasting and Time Series Analysis. McGraw-Hill. 1990. 340 pp.
10. Paz Gutierrez, Bertha Eugenia. Análisis de series de tiempo para pronósticos en el caso de un numero reducido de datos. ESIME. I.P.N. México D.F. 1995. 115 pp.
11. Peña Sanchez de Rivera, D. Estadística: Modelos y Métodos. Vol. 2. México. Alianza. 1987. 645 pp.
12. Vandaele, Walter. Applied Time Series and Box-Jenkins Models. Academic Press. 1983. 302 pp.

13. Walpole R, Myers R. Probabilidad y Estadística. McGraw - Hill. México D. F. 1984.

14. Wei, Williams, W. S. Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods. Addison Wesley. 1990. p. p. 386.

15. Wheelwrioth and Makridakis. Forecasting Methods for Managament. Wiley & Sons. 1987. p. p. 350

## ***APENDICES***

---

## ***Apéndice***



# ***Cronología de los eventos importantes en el mercado del petróleo.***

*Cronología de los eventos más importantes en el mercado del petróleo (1956 - 1988).*

Año	Mes	Evento
1956	Julio	Se nacionaliza el canal Suez.
1960	Septiembre	Se integra la OPEP.
1967	Junio	La tercer guerra Arabe- Israelí provoca el cierre del Canal Suez.
1971	Febrero	Los gobiernos imponen un impuesto del 50 a 55% a las compañías petroleras, además de fijar un incremento de 38 centavos en el precio del crudo, bajo el acuerdo de Teherán. Iniciándose así una nueva era en que los gobiernos toman importancia en la determinación del precio del crudo.
1972	Junio	Varios gobiernos exigen el 25% de impuesto en las operaciones petroleras, esto se hace efectivo en 1973 bajo el Acuerdo de Participación General (APG).
1973	Enero	El gobierno de Arabia Saudita exige el 25% de impuesto en las propiedades de producción.
	Septiembre	Libia nacionaliza el 51% de todas sus propiedades petroleras.
	Octubre	Con la cuarta guerra Arabe-Israelí los gobiernos Arabes reducen su nivel de producción. Los Estados Unidos y Holanda realizan un embargo petrolero contra los Arabes.
1974	Diciembre	Se introduce la gasolina sin plomo en EUA. El precio de la gasolina en EUA es de 38 centavos por galón.
	Marzo-Junio	Varios gobiernos adquieren el 60% de impuesto en la producción del petróleo.
1975	Enero	La OPEP congela por nueve meses el precio fijado.
	Marzo	Kuwait nacionaliza compañías petroleras.
	Junio	Se reabre el canal Suez. Primera extracción de petróleo crudo en el mar del norte.
1976	Octubre	La OPEP aumenta los precios en un 10%.
1977	Enero	Estados Unidos se recupera de la recesión.
	Julio	Con dos precios del crudo Arabia Saudita suspende su producción tope.
1978	Julio	La OPEP reunifica los precios a \$12.70 dólares, con esta reunificación de precios Arabia Saudita vuelve a su producción tope de 8.5 MB/D.
	Marzo	La OPEP en el primer cuarto de 1978 introduce un incremento de 14.5% aumentando el precio a \$14.56 dólares.
	Sept-Dic	Intranquilidad política en Irán. Los iraníes suspenden sus exportaciones debido al golpe de estado en contra del Sha de Irán.



*Cronología de los eventos más importantes en el mercado del petróleo (1956 - 1988).(cont)*

Año	Mes	Evento
1979	Enero	Al saber de la perdida del crudo Iraní, Arabia Saudita accede aumentar temporalmente su producción tope a 9.5 MB/D. El Sha huye de Irán.
	Marzo	Irán con un nuevo gobierno reinicia en bajos niveles sus exportaciones.
	Mayo	En varias parte de EUA se hacen largas colas para la compra de gasolina durante varios meses. En California y otros estados la gasolina es racionada.
	Junio	El banco calificador de la OPEP aumenta el precio a \$18 dólares por barril. El tipo de crudo Premium aumenta a \$23.50 dólares.
	Noviembre	El crudo Árabe Light aumenta a \$24 dólares después de la ruptura de precios por la OPEP y del incremento por parte de algunos de sus miembros. La producción de crudo en el mar del Norte Británico aumenta a 1.5 MB/D. La inflación de precios del consumo anual en EUA aumenta en 13%, desde las altas tasas de 1946. El precio de la gasolina y del petróleo para calefacción aumenta más del 50%.
1980	Enero	El precio del crudo Saudi Ligth aumenta a \$26 dólares
	Mayo	Arabia Saudita fija el precio del crudo Saudi Ligth en \$28 dólares.
	Septiembre	Estalla la guerra Irán-Iraq.
	Diciembre	El crudo Saudi Light aumenta a \$32 dólares; el famoso crudo Premium rebasa los \$40 dólares. La producción de la OPEP cae a 26.8 MB/D. México llega a ser el cuarto más grande productor de crudo con alrededor de dos millones de barriles por día.
1981	Octubre	Asesinan a Anward Sadat. Arabia Saudita fija el precio del crudo Árabe Light en \$34 dólares.
	Diciembre	El precio de la gasolina en EUA llega a su máximo con un precio de \$1.35 dólares por galón.
1982	Julio-Diciembre	Ante la variación constante del precio del petróleo crudo la OPEP se reúne para negociar y estructurar el precio y la producción del crudo, sin que esta reunión logre algún acuerdo.
1983	Febrero	Inglaterra y Noruega bajan el precio del crudo del mar del Norte a \$30.50 dólares por barril.
	Marzo	El banco calificador de la OPEP reduce el precio del crudo Saudita cerca del 15%, reduciendo el precio a \$29 dólares. La OPEP asigna a sus miembros una cuota de

*Cronología de los eventos más importantes en el mercado del petróleo (1956 - 1988). (cont)*

Año	Mes	Evento
1984	Octubre	producción de 16 MB/D. Inglaterra y Noruega bajan el precio de sus crudos en \$38 dolares, esta es la reducción de precio más importante en 19 meses.
	Diciembre	Una OPEP dividida acuerda pequeños cambios en los precios e intenta monitorear la adherencia a las cuotas, las cuales son rotas frecuentemente.
1985	Enero	El precio del crudo Saudi Ligth es reducido a \$28 dolares por el banco calificador de la OPEP.
	Octubre	Los sauditas confirman el incremento en su producción y la venta del crudo a precios por debajo de los oficialmente fijados.
	Noviembre	Los precios de contratos futuros para el crudo West Texas Intermediate (WTI), un crudo estadounidense, caén de \$31.72 a \$28 dolares en el Cambio Mercantil de Nueva York.
	Diciembre	La OPEP abandona la política oficial de precios, dice que no existe un mercado de acciones justas.
1986	Enero	El mercantil de Nueva York predice precios por debajo de los \$20 dolares.
	Febrero	Inglaterra rechaza el llamdo de la OPEP a reducir la producción en el mar del Norte.
	Abril	El precio del crudo Brent y del WTI caen por debajo de \$10 dolares, son los niveles de precios más bajos en nueve y doce años respectivamente.
	Diciembre	Miembros de la OPEP acuerdan reducir la producción de crudo en un millon de barriles por día, reduciendose la producción a 15.6 MB/D.
1987	Enero	Irán inicia un nuevo ataque en Iraq.
	Septiembre	La guerra en el Golfo Pérsico continua. El consejo de seguridad de ONU aprueba una misión de paz, en un intento por poner fin al conflicto Iran-Iraq.
	Oct-Nov	Continua la participación de EU en la guerra del Golfo; helicopteros de los EU hunden tres barcos patrullas iraníes en el Golfo Pérsico y hacen estallar una línea e petroleo. Lideres arabes se reunen para apoyar a Irán en la guerra contra Iraq.
1988	Marzo-Julio	Se intensifica la guerra Irán-Iraq. EU e Irán pelean en el Golfo Pérsico. Irán acepta el plan de la ONU para detener la guerra.
	Agosto	Cesa el fuego entre Irán-Iraq.

# *Apéndice*



## *Cuadros comparativos*

MODELOS ARIMA (p,q)

SERIE : CRUDO	1	2	3	4
TRANSFORMACION	0	0	0	0
# DIF. ORDINARIAS	1	1	1	1
# PARAMETROS	2	1	2	2
$\phi_1$ (est.t)	-	-	0.60715 (7.82936)	0.35168 (2.71724)
$\phi_2$ (est. t)	-	-	-0.11740 (-1.51393)	-
$\theta_1$ (est.t)	-0.60501 (-7.85615)	-0.55897 (-8.29546)	-	-0.28563 (-2.8677)
$\theta_2$ (est.t.)	-0.13375 (-1.72847)	-	-	-
BOX - PIERCE (g.l)	14.5131 (22)	17.1042 (22)	12.695 (22)	12.5032 (22)
ACF SIGNIFICATIVAS	-	1	-	-
PACF SIGNIFICATIVAS	-	-	-	-
$S^2$	266.88	270.235	265.62	264.263
S	16.3365	16.4388	16.2978	16.2562
ITERACION	3	1	1	4

MODELOS ARIMA (p,q)

SERIE : GAS	1	2	3
TRANSFORMACION	0	0	0
# DIF. ORDINARIAS	1	1	1
# PARAMETROS	1	2	2
$\phi_1$ (est.t)	-	0.57402 (7.57561)	-
$\phi_2$ (est. t)	-	-0.24276 (-1.9681)	-
$\theta_1$ (est.t)	-0.54256 (-8.07647)	-	-0.60037 (6.0664)
$\theta_2$ (est.t.)	-	-	-0.09846 (-1.467)
BOX - PIERCE (g.l)	12.5809 (20)	12.5832 (20)	10.4537 (20)
ACF SIGNIFICATIVAS	-	-	-
PACF SIGNIFICATIVAS	-	-	-
$S^2$	242.09	242.966	241.145
S	15.5592	15.5874	15.5288
ITERACION	2	1	3

MODELOS

MODELOS FUNCION DE TRANSFERENCIA.	1	2	3
TRANSFORMACION	-	-	-
# DIF. ORDINARIAS	1	1	1
# PARAMETROS	5	6	4
$\omega_0$	0.425916	0.428416	0.411416
$\delta_1$	0.475866	0.469366	0.357866
$\delta_2$	-0.236198	-0.246198	-
$\phi_1$	0.319227	0.179815	0.317727
$\phi_2$	0.23610	-0.197554	-0.25320
$\theta_1$	-	0.147316	-
$\theta_2$	-	-	-
BOX - PIERCE $\hat{F}_{\alpha\alpha}$ (g.l)	13.630 (13)	12.37 (12)	14.792 (14)
BOX - PIERCE $\hat{F}_{\alpha\alpha}$ (g.l)	13.473 (13)	12.648 (13)	14.879 (14)
ACF SIGNIFICATIVAS $\hat{F}_{\alpha\alpha}$	-	1	2
PACF SIGNIFICATIVAS $\hat{F}_{\alpha\alpha}$	-	1	1
CC SIGNIFICATIVAS $\hat{F}_{\alpha\alpha}$	3	4	4
ITERACION	3	5	2

# *Apéndice*



## *Lista de datos*

*Lista de datos para los precios de la gasolina. ((1/73 hasta 12/86).*

DATO	PGAS	DATO	PGAS	DATO	PGAS	DATO	PGAS
1	100	46	244.7	91	601.1	136	520.5
2	100	47	243.8	92	602.9	137	532.6
3	101.1	48	242.2	93	599.6	138	531
4	103.4	49	239.9	94	591.5	139	520.9
5	105.7	50	240.4	95	590.8	140	504.6
6	108.6	51	245.6	96	596.1	141	500.3
7	110.4	52	249.5	97	607.5	142	509.8
8	111.1	53	254.5	98	632.9	143	511.3
9	110.9	54	258.9	99	683.2	144	502
10	112.9	55	261.1	100	694.7	145	480.5
11	118.5	56	260.5	101	690.4	146	458.4
12	126.1	57	259.6	102	685.6	147	467.2
13	136.7	58	257.5	103	677.4	148	493.9
14	147	59	256.3	104	668.4	149	522.5
15	161.4	60	255.8	105	666.4	150	535.7
16	172.1	61	255.1	106	666.1	151	539.3
17	177.3	62	252.8	107	661.7	152	527.7
18	188.5	63	252	108	657.7	153	513.6
19	196.6	64	253	109	651.7	154	506.1
20	196.1	65	255.5	110	642.3	155	520.1
21	197.4	66	260.5	111	621.1	156	523
22	196.2	67	266.4	112	578.6	157	486.5
23	186.7	68	271.3	113	555.7	158	427.7
24	184.9	69	275.1	114	582.7	159	327.8
25	187	70	278.1	115	628.8	160	310.4
26	189.1	71	277.5	116	636.3	161	348.4
27	191.1	72	282.7	117	628.4	162	361.4
28	193.3	73	287	118	617.2	163	286.6
29	199	74	292.3	119	611	164	282.5
30	206.8	75	299.9	120	600.7	165	311.9
31	215.5	76	313	121	576.7	166	284.5
32	228.9	77	331.6	122	551.4	167	283.9
33	233.7	78	349.3	123	533.5	168	289.1
34	235.1	79	371	124	515.3		
35	233	80	397.7	125	537.2		
36	229.5	81	422.1	126	559.5		
37	227.3	82	439.2	127	566.6		
38	226.4	83	488.3	128	571.2		
39	221.7	84	459.6	129	566.3		
40	219.1	85	481.1	130	559.2		
41	220.6	86	517.5	131	548.2		
42	229.2	87	560.4	132	535.8		
43	239.4	88	585.4	133	518.3		
44	243.2	89	595.5	134	512.4		
45	245	90	598.6	135	517.9		



*Lista de datos para los precio del crudo (1/73 hasta 12/86).*

DATO	PCRUDO	DATO	PCRUDO	DATO	PCRUDO	DATO	PCRUDO
1	100	46	230.514	91	480.732	136	587.533
2	100	47	230.514	92	494.159	137	587.533
3	100.174	48	230.514	93	498.082	138	587.01
4	102.092	49	229.207	94	505.318	139	586.399
5	106.364	50	239.058	95	523.627	140	585.092
6	109.242	51	253.397	96	551.7	141	584.656
7	109.677	52	236.269	97	614.124	142	583.958
8	109.677	53	236.269	98	734.699	143	571.752
9	116.216	54	236.966	99	734.786	144	566.173
10	116.216	55	236.094	100	734.525	145	550.305
11	121.447	56	238.274	101	732.258	146	536.268
12	127.463	57	249.715	102	711.334	147	536.617
13	155.536	58	242.895	103	696.513	148	538.448
14	175.85	59	246.643	104	694.682	149	541.325
15	175.85	60	251.177	105	694.682	150	540.628
16	175.85	61	251.787	106	687.184	151	539.582
17	175.85	62	252.572	107	685.179	152	535.397
18	175.85	63	255.798	108	686.312	153	536.617
19	195.641	64	256.582	109	686.312	154	539.233
20	196.338	65	257.629	110	671.578	155	541.761
21	196.513	66	260.593	111	649.436	156	544.289
22	205.929	67	263.208	112	625.894	157	538.884
23	201.395	68	263.906	113	625.806	158	426.33
24	194.42	69	266.521	114	626.155	159	307.847
25	194.507	70	268.091	115	626.33	160	262.162
26	199.303	71	270.706	116	636.33	161	255.449
27	200.697	72	272.363	117	626.678	162	262.249
28	202.441	73	275.85	118	641.064	163	237.663
29	204.185	74	280.994	119	640.017	164	228.335
30	223.191	75	282.65	120	628.073	165	270.881
31	218.309	76	284.394	121	627.463	166	268.788
32	223.278	77	292.677	122	604.098	167	267.916
33	223.278	78	310.724	123	591.107	168	268.788
34	224.76	79	323.104	124	591.107		
35	227.55	80	336.269	125	591.107		
36	228.945	81	368.003	126	591.107		
37	229.555	82	380.732	127	589.102		
38	211.247	83	392.677	128	588.579		
39	211.421	84	410.462	129	589.102		
40	213.601	85	447.777	130	589.102		
41	214.473	86	449.085	131	589.015		
42	216.303	87	455.798	132	587.969		
43	221.709	88	465.475	133	589.015		
44	221.709	89	470.881	134	589.015		
45	221.709	90	478.64	135	589.015		

*Lista de datos para la serie PCRUDO preblanqueada.*

DATO	$\alpha$	DATO	$\alpha$	DATO	$\alpha$	DATO	$\alpha$
1	0	46	-5.40802	91	13.8101	136	0.915098
2	0.170025	47	2.1525	92	-4.32037	137	-0.870825
3	1.80938	48	-1.87834	93	7.96773	138	-0.201156
4	3.12875	49	10.71	94	13.9898	139	-1.06037
5	0.689979	50	-10.0184	95	18.3053	140	0.247817
6	-0.430871	51	5.56173	96	49.1427	141	-0.702308
7	0.169489	52	-2.03161	97	87.6232	142	-11.8066
8	6.49472	53	1.17202	98	-60.9845	143	1.81872
9	-4.039	54	-1.3113	99	25.1371	144	-15.3345
10	6.81602	55	2.82611	100	-9.24392	145	-4.81221
11	2.36932	56	0.877954	101	-18.7389	146	5.47731
12	25.6511	57	1.24039	102	-1.93805	147	-0.879485
13	4.12313	58	2.85788	103	1.99849	148	2.65161
14	-6.15098	59	2.59301	104	-0.963378	149	-2.21281
15	3.22372	60	-1.39437	105	-7.18303	150	-0.0503427
16	-1.12926	61	1.28293	106	2.57101	151	-3.84315
17	0.24546	62	2.62866	107	0.55218	152	3.60303
18	19.7978	63	-1.02126	108	-0.702395	153	0.928137
19	-11.577	64	1.30925	109	-14.3773	154	1.44828
20	4.55217	65	2.29799	110	-13.2449	155	1.50232
21	8.22738	66	1.0105	111	-13.2448	156	-6.53717
22	-10.2596	67	-0.947403	112	9.96018	157	-108.723
23	-1.78756	68	3.7568	113	-3	158	-50.3494
24	2.63278	69	-0.619508	114	1.21762	159	0.709331
25	3.41935	70	2.47045	115	9.80173	160	-0.0814061
26	-1.08961	71	0.216707	116	-15.8827	161	6.75071
27	1.93747	72	3.00612	117	22.8288	162	-28.778
28	0.699216	73	3.25509	118	-12.9301	163	7.54538
29	18.3017	74	-0.778496	119	-7.15597	164	41.9223
30	-16.2947	75	1.76822	120	5.62967	165	-29.07
31	12.4729	76	7.29915	121	-25.8405	166	11.213
32	-5.42293	77	13.2862	122	2.19374	167	-1.97815
33	3.08314	78	3.1412	123	2.27233		
34	1.64543	79	9.35738	124	-1.71286		
35	-0.055177	80	25.5079	125	0.652875		
36	0.413045	81	-4.35461	126	-2.08113		
37	-18.5556	82	11.0553	127	0.671922		
38	11.5876	83	11.5618	128	0.399845		
39	-2.37814	84	28.6148	129	-0.341546		
40	0.715102	85	-180.059	130	0.068031		
41	1.72183	86	13.8266	131	-1.04012		
42	4.24111	87	3.65743	132	1.6795		
43	-2.86374	88	1.0334	133	-0.892253		
44	1.1749	89	6.50149	134	0.315777		
45	8.48078	90	-2.09638	135	-1.55193		

*Lista de datos para la serie PGAS preblanqueda.*

DATO	$\beta$	DATO	$\beta$	DATO	$\beta$	DATO	$\beta$
1	0	46	-0.427128	91	0.643438	136	12.0729
2	1.07484	47	-1.18423	92	-3.93766	137	-8.89042
3	1.63079	48	-1.5079	93	-5.75597	138	-6.29898
4	1.14321	49	1.59852	94	11.4114	139	-11.1574
5	1.96458	50	4.42351	95	-8.94658	140	3.4823
6	0.424938	51	0.9408	96	15.3286	141	8.91389
7	0.161425	52	3.79722	97	17.1798	142	-4.49979
8	-0.359464	53	1.92035	98	37.5266	143	-7.7698
9	2.19956	54	0.579601	99	-14.1123	144	-16.0646
10	4.29065	55	-1.32799	100	-0.844916	145	-11.0774
11	4.63854	56	-0.160382	101	-2.29604	146	17.9042
12	7.12983	57	-1.81438	102	-6.66184	147	17.1867
13	5.24081	58	-0.0557969	103	-4.55907	148	15.4606
14	10.1588	59	-0.210713	104	1.754	149	1.22847
15	3.68365	60	-0.561894	105	-0.744226	150	0.669504
16	1.49616	61	-1.92304	106	-4.18616	151	-13.1864
17	9.75777	62	0.46777	107	-1.3075	152	-5.04188
18	1.85741	63	0.980847	108	-4.60384	153	-2.5313
19	-3.01849	64	1.82793	109	-6.37021	154	16.2729
20	2.90528	65	3.73219	110	-16.6153	155	-6.80484
21	-2.57226	66	3.33597	111	-31.3335	156	-34.5781
22	-8.31773	67	2.31353	112	-11.9566	157	-36.4674
23	3.70343	68	1.90129	113	32.1391	158	-72.4995
24	0.978432	69	1.4997	114	26.3987	159	32.5419
25	0.975075	70	-1.79414	115	-13.3333	160	28.0622
26	1.25979	71	6.09861	116	-3.36387	161	-8.91836
27	1.28424	72	0.781605	117	-7.2481	162	-73.227
28	4.72915	73	3.96041	118	-1.24669	163	42.4231
29	4.69599	74	5.04183	119	-8.51147	164	13.4555
30	5.13274	75	9.4269	120	-18.5629	165	-41.6756
31	9.56738	76	12.0641	121	-12.6287	166	23.2755
32	-1.83555	77	8.91792	122	-7.486	167	-3.33739
33	1.19133	78	14.4927	123	-11.7986		
34	-2.57877	79	16.488	124	30.2454		
35	-2.07303	80	12.1716	125	5.25825		
36	-0.556285	81	7.25994	126	-0.397903		
37	-0.265003	82	42.9025	127	4.10766		
38	-4.45805	83	-56.2429	128	-7.38362		
39	0.193305	84	50.2464	129	-3.11203		
40	2.0065	85	13.234	130	-8.03924		
41	7.33238	86	27.6627	131	-6.99296		
42	5.38518	87	6.03983	132	-12.0479		
43	-0.558872	88	2.48156	133	2.53032		
44	1.38932	89	0.717689	134	5.62747		
45	-1.08044	90	1.70784	135	-1.23438		

# **GLOSARIO**

---

**ACF Función de autocorrelación.**

Es llamada función de autocorrelación al coeficiente de correlación  $X_t$  y  $X_{t+k}$  para el mismo proceso separado sólo por una longitud de tiempo  $k$ . De modo que en un modelo  $MA(q)$  las ACF'S determinan el valor de  $q$

**AR(p) Modelo autorregresivo.**

Modelo autorregresivo de orden  $p$ .

**ARMA(p,q) Modelo autorregresivo de media móviles.**

Modelo autorregresivo de medias móviles compuesto por un modelo autorregresivo de orden  $p$  [AR(p)], y uno de medias móviles de orden  $q$  [MA(q)].

**ARIMA(p,d,q).**

Modelo autorregresivo integrado de medias móviles compuesto por un modelo autorregresivo de orden  $p$  [AR(p)] ,  $d$  diferencias lineales y un modelo de medias móviles [MA(q)].

**CCF Función de correlación cruzada.**

Es llamada función de correlación cruzada al coeficiente de correlación entre  $X_t$  y  $Y_{t+k}$  para dos procesos separados sólo por una longitud de tiempo  $k$ .

**Función de transferencia.**

Llamamos función de transferencia a la ecuación que representa el efecto agregado lineal de todo la historia de  $X_t$  sobre la variable  $Y_t$ .

**Metodología de Box y Jenkins.**

Metodología desarrollada por Box y Jenkins en 1976 cuyo objetivo es ajustar un modelo tipo ARMA a una serie de tiempo dada.

**PACF Función de autocorrelación parcial.**

Es llamada función de autocorrelación parcial a la gráfica de los coeficientes de autocorrelación parcial. De modo que, en un modelo AR(p), las PAC'S determinan el valor de  $p$ .

**Preblanqueo.**

Método propuesto por Box y Jenkins el cual permite obtener datos transformados con correlación interna menor.

---

**Proceso inercia.**

Se llama proceso inercia al que contiene el efecto de otras variables excluidas del modelo función de transferencia.

**Proceso estacionario.**

Un proceso  $Y_t$  es estacionario en sentido estricto si sus propiedades no se ven afectados al cambiar el origen del tiempo.

**Residuales.**

Se llama residuales a la diferencia entre valor real y el valor generado por el modelo.

**Ruido blanco.**

Variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida con una función de distribución normal con media cero y varianza constante.

**Tendencia.**

Se dice que existe tendencia cuando se presenta un movimiento sistemático prolongado, que bien puede ser creciente, decreciente o ambos ó cuando se presentan cambios prolongados en la media.

**Variación estacional.**

Es un cambio o variación sistemático que se repite cada  $s$  período de tiempo.