

64
20/10/11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

POSIBILIDADES FENOMENOLÓGICAS DE LAS TEORÍAS FINITAS DE GRAN UNIFICACIÓN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
FÍSICA

PRESENTA:

LILIANA ESTHER VELASCO SEVILLA

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. MYRIAM MONDRAGÓN CEBALLOS

265523



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

TESIS CON

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Posibilidades Fenomenológicas de las Teorías Finitas de Gran Unificación"

realizado por VELASCO SEVILLA LILIANA ESTHER

con número de cuenta 9033390-1 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DRA. MYRIAM MONDRAGON CEBALLOS

Propietario

DR. JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

Propietario

DR. PIOTR KIELANOWSKI CHOMICZ

Suplente

DR. MIGUEL ANGEL PEREZ ANGON

Suplente

DR. AXEL WEBER

Myriam Mondragón Ceballos

Jose Alejandro Ayala Mercado

Piotr Kielanowski Chomicz

Miguel Angel Perez Angon

Axel Weber

Consejo Departamental de Física

Roberto Alejandro Ruelas Mayorga

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

A María Eugenia, mi hermana.
Fortaleza de honestidad y sinceridad.

Me siento feliz y protegida por un cúmulo de estrellas que iluminan mi camino: mis tías Maura y Emilia, Frida, luz cálida y oasis de júbilo, mis amigos... a quienes suelo hacerles el tierno regalo de mis desesperaciones cotidianas y excepcionales: Marianne Roux, Eduardo Trejo, Diana Barragán, Iris Ascencio, Catalina Espinoza, Erica Zavala, Ezequiel Rodríguez, Benjamín Pablo, Cuauhtémoc García y Javier Beltrán... más estrellas brillan en el firmamento.

Debo decir que sigo soñando sin haberme precipitado a un abismo gracias a Ramón de J. Martínez,... el maravilloso sueño continúa y aunque la esperanza va y viene como ola que se estrella en las rocas, siempre regresa.

Agradezco a Myriam Mondragón por su amistad, paciencia y conocimiento compartido, al Dr. Alfonso Mondragón por la amistad y el apoyo ofrecidos, por sus explicaciones claras y sus consejos certeros; a la Dra. Enriqueta Hernández por las sonrisas y las pláticas catárticas, al Dr. Lukas Nellen por la sonrisa agradable y las respuestas imprescindibles a todas mis preguntas, al Dr. Fernando Quevedo cuya presencia tanto académica como personal me han fortalecido y apoyado en ciertos momentos de claro-oscuro. También agradezco las sonrisas de todas las personas que habitan el Instituto de Física de la UNAM.

Seguiré defendiendo la alegría, *sin reservar del mundo sólo un rincón tranquilo.*

Cenca nianmetlazohcamati,
Ciudad Universitaria, Mexico Altepetl 1998.

Posibilidades fenomenológicas de las Teorías Finitas de Gran Unificación

L. E. Velasco Sevilla

26 de agosto de 1998

Introducción

Los intentos por describir las interacciones entre las componentes fundamentales de la materia han sido particularmente ambiciosos durante las últimas décadas. Se han construido aceleradores de partículas con energías del orden de TeV, en donde se han podido comprobar la validez y la precisión de la descripción del Modelo Estándar de las Interacciones Fundamentales (ME) para procesos a bajas energías, a pesar de que aún no se ha detectado al bosón de Higgs.

Al mismo tiempo el ME deja muchas preguntas e inquietudes abiertas que han sido abordadas en otros esquemas. En particular la posible Unificación de los Acoplamientos de Norma del grupo del ME, i.e. $G_{ME} = SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$, representa la posibilidad de que las interacciones fuerte, débil y electromagnética provengan de una teoría única. Esta unificación se ha hecho posible en modelos supersimétricos (en particular en la extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar MESM), sin embargo en estos modelos también se tienen muchos parámetros libres, que plantean más preguntas que respuestas, además de que aún no se han detectado las partículas supersimétricas.

En la construcción de teorías más predictivas que el ME y los modelos supersimétricos, se han propuesto muchas alternativas. Algunas de las más interesantes, tanto teórica como fenomenológicamente, son tanto la unificación de los acoplamientos de norma, con la unificación de los acoplamientos de Yukawa, y la finitud de las funciones β de las ecuaciones del grupo de renormalización del modelo de unificación supersimétrico en cuestión. Si embargo, debido a que la supersimetría no es una simetría exacta, debe encontrarse un mecanismo por el cual se rompa y se genere un espectro supersimétrico fenomenológicamente aceptable. Se ha encontrado que la forma de romperla con mayores posibilidades fenomenológicas, es mediante la introducción de términos suaves, que no alteran la renormalizabilidad de la teoría. Si se pide también que estos términos sean finitos, entonces el MESM tiene una reducción significativa de parámetros libres.

En este trabajo se presentan predicciones para los parámetros del MESM y los parámetros a la escala electrodébil del ME, obtenidas a partir de dos modelos $SU(5)$ completamente finitos, es decir finitos a todos los órdenes tanto en los acoplamientos de norma y de Yukawa como en los términos de rompimiento suave.

Para el MESM se presenta el espectro supersimétrico de masas, en particular de los cuatro bosones de Higgs del MESM, el más ligero con correcciones radiativas. Así mismo se presentan predicciones para el valor de α_s a la escala de M_Z , el valor de la escala de gran unificación y del cociente de los dos valores esperados sobre estados del vacío de los dobletes de Higgs del MESM: $\tan \beta$, además de la tercera familia de quarks (el top y el bottom).

Estas predicciones se comparan con las cotas experimentales más recientes.

Índice General

1	Física de las partículas elementales	5
1.1	El Modelo Estándar	5
1.1.1	¿Por qué hay tres familias de leptones y cuarks?	6
1.1.2	Acoplamientos de Norma y Gran Unificación	6
1.1.3	Decaimientos débiles y Matriz de acoplamientos	8
1.1.4	Simetría electrodébil	9
1.2	Más allá del Modelo Estándar	10
1.2.1	El problema de la jerarquía de norma	12
1.2.2	Condensación de cuarks y tecnicolor.	12
1.2.3	Supersimetría	13
1.2.4	Teorías Finitas de Gran Unificación	13
1.2.5	Unificación de los acoplamientos de norma y de Yukawa	14
1.2.6	Supercuerdas	14
1.2.7	Conclusiones	15
2	Teoría de la Renormalización y Evolución de las ecuaciones de renormalización del ME	18
2.1	Teoría de la Renormalización	18
2.2	Evolución de las ecuaciones de renormalización del ME	20
2.2.1	Obtención de los parámetros del Modelo Estándar	21
2.2.2	Evolución numérica de las ecuaciones del GR del ME	25
3	Teorías de Gran Unificación	28
3.1	Generalidades de las Teorías de Gran Unificación (TGU)	28
3.1.1	Elección del grupo de norma	28
3.1.2	Predicciones fenomenológicas de las TGU	30
3.2	TGU con $SU(5)$ como grupo de norma	32
3.2.1	Generadores de los bosones de norma de $SU(5)$	32
3.2.2	Elección de las representaciones fermiónicas	33
3.3	TGU con $SO(10)$ como grupo de norma	36
3.4	Modelos basados en otros grupos de norma	37
3.5	Teorías Supersimétricas de Gran Unificación (TSGU)	37
3.6	Modelo Mínimo Supersimétrico $SU(5)$	38

4	Extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar	43
4.1	Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo: MESM	43
4.2	Fenomenología del MESM	46
4.2.1	Ecuaciones de renormalización del MESM	46
5	Teorías Finitas de Gran Unificación: TFU	52
5.1	Motivación	52
5.2	Unificación de los acoplamientos de norma y de Yukawa	52
5.2.1	Unificación de acoplamientos por el método IGR	53
5.3	Teorías de Norma Finitas Supersimétricas $N=1$	54
5.4	Propiedades generales de las TFU	54
5.4.1	UNY en teorías finitas de norma supersimétricas $N=1$	55
5.4.2	Modelos Finitos de Gran Unificación Basados en $SU(5)$	56
5.4.3	Teorías Finitas basadas en otros grupos de norma	59
5.5	Rompimiento de la Supersimetría y Correcciones radiativas	60
5.6	Términos a RSS finitos a segundo orden y regla de suma para las masas escalares suaves	60
6	Fenomenología de las TFU basadas en $SU(5)$	66
6.1	Modelos	66
6.1.1	Condiciones de finitud para los modelos	69
6.1.2	Regla de suma para los modelos	69
6.2	Predicciones de Parámetros a bajas energías	71
6.3	Predicciones de parámetros en el sector RSS	72
6.4	Correcciones en el espectro de la masa del Higgs en el MESM	73
6.4.1	Dependencia de las masas de los bosones de Higgs en la masa m_t del cuark top	73
6.4.2	Correcciones radiativas para las masas y los acoplamientos de los bosones de Higgs	77
6.4.3	Validéz de las expresiones analíticas	79
6.5	Comparación con los datos experimentales	81
6.5.1	Límites experimentales para el bosón de Higgs	81
6.6	Comentarios	83
6.6.1	Límites experimentales para los auto-estados de masa del MESM	83
6.6.2	Datos experimentales a bajas energías	85
A	Ecuaciones del Grupo de Renormalización	90
A.1	Expresiones para las ecuaciones del GR del ME	90
A.2	Expresiones para las ecuaciones del GR del MESM	92
A.3	Funciones β de los parámetros suaves	94
B	Relaciones de Teoría de Grupos	96

C	Supersimetría N=1	98
C.1	Propiedades generales	98
C.2	Rompimiento de la Supersimetría	100
C.2.1	Rompimiento de la Supersimetría	101
C.2.2	Reglas de Feynman supersimétricas	101
D	Teorías Finitas de Norma SUSI N=1	103
D.1	Transformaciones Invariantes de la Teoría	103
D.2	Teorema de No Renormalización	106
D.3	Criterios de Finitud	107
D.3.1	Anomalía de la Supercorriente	108
D.3.2	Criterios para la anulación de las funciones β	109

Capítulo 1

Física de las partículas elementales

1.1 El Modelo Estándar

La investigación contemporánea en la física de partículas elementales representa la mayor y mejor organizada empresa del hombre para entender de qué está hecha y cómo se conforma la materia en nuestro universo. El Modelo Estándar de las interacciones entre partículas elementales (ME) es en realidad un marco teórico que tiene dos componentes. La primera es un conjunto de reglas para calcular las probabilidades de que ocurran varios procesos, utilizando teorías cuánticas del campo: la *Teoría Unificada de las Interacciones Electrodébiles* y la *Cromodinámica Cuántica*. La segunda componente la constituyen entre 15 y 20 parámetros (según como se parametricen) experimentales que necesitan ser introducidos en los cálculos en momentos apropiados.

Los *cuarks* (u, c, t, d, s y b) y *leptones* ($e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau$ y ν_τ) son los objetos fundamentales de la materia, e interactúan debido al intercambio de bosones de norma. Las fuerzas que los afectan significativamente son la interacción electrodébil, cuyos bosones de norma son el *fotón* y los bosones W^+ , W^- y Z^0 ; y la interacción fuerte, cuyos bosones de norma son los *gluones*, descritos por la Cromodinámica Cuántica.

Las teorías cuánticas del campo que se utilizan en el ME están basadas en la idea de *invariancia local de norma*, es decir el Lagrangiano es invariante ante transformaciones que son funciones de las coordenadas de cada punto del espacio-tiempo.

El grupo de simetría de norma del ME es $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$, en donde $SU(3)_C$ y $SU(2)_I \times U(1)_Y$ describen a las interacciones fuertes y electrodébiles, respectivamente.

La invariancia local de norma requiere la introducción de bosones de norma sin masa, para el caso de los bosones de norma de $SU(3)_C$ y $U(1)_{em}$ ¹ esto se cumple fenomenológicamente, no así para los bosones de norma de $SU(2)_I$, que para poder describir la fuerza débil en forma correcta tienen que adquirir masa. Los valores de estas masas son generadas por el *Rompimiento Espontáneo de la Simetría* del grupo $SU(2)_I \times U(1)_Y$ a través del *Mecanismo de Higgs*, el cual consiste en la introducción de campos escalares complejos, permitiendo que éstos adquieran valores esperados entre estados del vacío distintos de cero. Entonces tres de los cuatro bosones

¹El grupo $U(1)_{em}$ es el grupo bajo el cual el Lagrangiano efectivo, que queda de la simetría rota $SU(2)_I \times U(1)_Y$, es invariante y describe los procesos electrodébiles a bajas energías.

de norma adquieren masa: W^+ , W^- y Z^0 . Sin embargo un campo escalar neutro queda de la simetría rota, el llamado *bosón de Higgs*, que aún no ha sido observado.

Los parámetros experimentales del ME pueden ponerse en términos de los siguientes 18 parámetros: la constante de acoplamiento de las interacciones electromagnéticas: $\alpha_{em} = \alpha_1$, la constante de acoplamiento de las interacciones débiles: $\alpha_{débil} = \alpha_2$ y la constante de acoplamiento de las interacciones fuertes: $\alpha_{fuerte} = \alpha_3$. En el sector de Yukawa: los valores de las masas de los seis cuarks, los valores de las masas de los tres leptones cargados, los tres ángulos de mezcla de los decaimientos débiles y una fase que describe la violación de CP en estos decaimientos (lo cual es equivalente a considerar cuatro de los parámetros de la matriz CKM de las interacciones débiles). En el sector de Higgs se encuentra el valor que el campo de Higgs, H (valor esperado entre estados del vacío) debe adquirir para dar masa a los cuarks y bosones de norma de las interacciones débiles, y por último el valor de la masa del Higgs.

El Modelo Estándar no es una teoría acabada, aparte de la falta de justificación del mecanismo de Higgs y los valores de los parámetros libres, la teoría de la cromodinámica cuántica no puede utilizarse a bajas energías y los cálculos en teoría de perturbaciones presentan varias dificultades.

Los logros experimentales, y el éxito de las predicciones fenomenológicas del ME, pueden consultarse en las recientes revisiones publicadas [1, 2, 3, 4, 5, 6].

1.1.1 ¿Por qué hay tres familias de leptones y cuarks?

La fuerza débil transmitida por W^+ ó W^- , cambia el sabor del cuark o del leptón, pero debe conservar la carga eléctrica, en cambio la fuerza débil transmitida por Z^0 no cambia el sabor de los cuarks y leptones durante el proceso de interacción, por lo cual proporciona una fuente experimental para sondear el número de familias de leptones.

La anchura de decaimiento del bosón intermediario de la interacción es proporcional al número de familias de posibles decaimientos. Para el bosón Z , $\Gamma = 2.49 \text{ GeV}$, lo que indica que sólo pueden existir tres familias de leptones. Por otra parte el modelo de partones indica que sólo hay tres familias de cuarks, así mismo existen observaciones experimentales para tres y sólo tres familias de cuarks. Sin embargo el ME no proporciona un principio teórico que postule la existencia de tres generaciones de fermiones.

1.1.2 Acoplamientos de Norma y Gran Unificación

Las interacciones entre los fermiones están regidas por constantes de acoplamiento, la mejor conocida de todas es la carga del electrón: e . Sin embargo estas “constantes” de acoplamiento no son en realidad constantes, pues dependen de la escala de energía a la cual se les considere.

Alrededor de una carga eléctrica estática se forman pares de electrón-positrón, debidos a la *polarización del vacío*. Si la carga estática es positiva, parte de la nube alrededor de ella es negativa, atenúandola parcialmente. Si se penetra a menores distancias, la carga estática revela un valor mayor. Distancias cortas corresponden a momentos grandes o a escalas altas de energía. De esta forma vemos que el acoplamiento que describa la interacción electromagnética, α_1 , debe ser tratado como una función dependiente de la escala de energía: $\alpha_1(M)$.

La polarización del vacío es una propiedad general del vacío que se presenta en todo tipo de pares partícula-partícula de signo opuesto. Los pares cuark-anticuark pueden ser creados también. Estos efectos reales de las partículas virtuales, también tienen consecuencias reales, tales como la modificación del potencial de Coulomb.

Como se dijo anteriormente, cada grupo de norma tiene asociado un acoplamiento adimensional, α_i , que describe la "intensidad" de la interacción descrita por el grupo de norma correspondiente.

Si fijamos α_1 a cierta escala alta de energía, entonces podemos calcular como evoluciona a escalas de energía más bajas. Esta evolución es el resultado de la polarización del vacío. Cada fermión cargado contribuye a la evolución a través de:

$$\frac{\partial \alpha_1(m)}{\partial \ln m^2} = \frac{1}{3\pi} \alpha_1^2 Q^2. \quad (1.1)$$

Aquí Q es la carga de algún fermión suficientemente ligero para contribuir a la polarización del vacío a la escala de masa m . Por ejemplo para el cuark t , $Q = 2/3$ y necesitamos multiplicar por tres, ya que hay tres colores de cuark t . Así para $m \geq m_t$, el cuark t contribuye a la evolución de α_1 mediante:

$$\frac{\partial(1/\alpha_1(m))}{\partial \ln m^2} = -\frac{4}{9\pi}. \quad (1.2)$$

Si los acoplamientos se fijan a escalas de energía muy grandes y se hacen evolucionar a escalas de energía menor, reflejando las variaciones en las masas de los cuarks, y si la masa del cuark t fuera menor, entonces la constante de estructura familiar tendría otro valor.

El acoplamiento de las interacciones fuertes α_3 , evoluciona en forma similar mediante la ecuación:

$$\frac{\partial 1/\alpha_3(m)}{\partial \ln m^2} = \frac{11 - \frac{2}{3}n_f}{4\pi}. \quad (1.3)$$

Aquí n_f es el número de los sabores de cuark (u, d, s, c, b y t) con masas menores que la escala m . El número 11 viene de la interacción entre los gluones consigo mismos. Como α_3 decrece a una escala de masa grande, si hay 16 ó menos sabores, se produce el fenómeno que es conocido como *libertad asintótica*, que se da a energías y momentos transferidos muy grandes.

Es fácil resolver la ecuación (1.3), sin tomar en cuenta los términos de orden mayor, la ecuación resultante es:

$$\alpha_3(m^2) = \frac{4\pi}{11 - \frac{2}{3}n_f} \frac{1}{\ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (1.4)$$

En donde Λ es una constante de integración que se obtiene una vez conocido el valor de α_3 a la escala de energía m . El valor de α_3 a la escala de energía de $m = M_Z$ [7] es $\alpha_3(m_Z^2) \approx 0.122$. A la escala de masa M_Z todos los cuarks, excepto el top, son accesibles, entonces $n_f = 5$. A partir de esto podemos decidir que $\Lambda_5 \approx 200$ MeV (el subíndice indica el número de cuarks que se tomaron en cuenta para calcular el valor).

Para garantizar que α_3 sea continua a la escala de masa m_t , de la ecuación (1.4) se tiene que:

$$\left(\frac{m_t^2}{\Lambda_5^2}\right)^{11-(2 \times 5)/3} = \left(\frac{m_t^2}{\Lambda_6^2}\right)^{11-(2 \times 6)/3} \quad (1.5)$$

Condiciones de la misma forma conectan a las masa del cuark u , que va de 2 a 8 MeV, a la del cuark d , que va de 5 a 15 MeV y a la masa del cuark s , que va de 100 a 300 MeV [7]. Así Λ_3 es apropiada dentro del protón. De hecho como los protones están constituidos por cuarks u y d , cuyas masas son mucho más pequeñas que Λ_3 , la única escala posible para la masa del protón es $m_p = C\Lambda_3$, en donde C es una constante que puede, en principio, ser calculada de forma no perturbativa, por ejemplo mediante una simulación de Monte Carlo de QCD.

En forma análoga el acoplamiento débil cambia con la energía. Para extrapolar estos acoplamientos a energías más altas, se utilizan las ecuaciones del *Grupo de Renormalización*, que describen el cambio de los parámetros relevantes del ME con respecto a la escala de energía, como se verá en el siguiente capítulo. Mediante esta extrapolación se ha determinado que los acoplamientos de la hipercarga y el Isoespín débil convergen a la escala de $M_X \approx 10^{13}$ GeV, con un valor de $\alpha_x^{-1} \approx 43$. Sin embargo α_3 tiene un valor de $\alpha_3^{-1} \approx 38$ a la misma escala. Entonces surge la pregunta de que si en una teoría con mayor simetría, los tres acoplamientos pudieran unificarse a una energía determinada, la escala de *Gran Unificación*, generando relaciones que permitan eliminar parámetros libres del ME, dando así un carácter predictivo a dicha teoría, por ejemplo al fijar el valor de α_3 a la escala de M_Z .

1.1.3 Decaimientos débiles y Matriz de acoplamientos

El decaimiento β es universal. Un cuark con carga $2e/3$ puede dar lugar a un cuark con carga $-e/3$, emitiendo una partícula W^+ , la cual puede transformarse en un par leptón-antileptón ó un par cuark-anticuark.

Los auto-estados de las masas de los cuarks no son los mismos que los auto-estados de las interacciones débiles, de tal forma que hay una matriz que relaciona las dos bases: la matriz V , que fue definida para seis cuarks por Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM). Por convención los cuarks de carga $2e/3$ (u, c, t) no están mezclados y toda la mezcla se expresa en una matriz de 3×3 que relaciona a los cuarks de carga $-e/3$ (d, s, b):

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}.$$

De esta forma la matriz V de los decaimientos débiles expresa la predilección de los cuarks para decaer en otros cuarks de la misma columna, ó si no es posible, en otros cuarks de la siguiente columna. Por ejemplo, la amplitud de decaimiento del cuark b en el c tiene un factor V_{cb} .

Si V fuera real podría representar solamente un matriz de rotación 3×3 , y podría ser parametrizada por tres ángulos de Euler. Sin embargo el cuarto parámetro libre la hace compleja. Kobayashi y Maskawa señalaron que esto significa que CP, la combinación de las invariancias de conjugación de carga y paridad, es violada en los decaimientos débiles.

La violación de CP fue descubierta experimentalmente en 1964 (Christenson et al. 1964) y en 1967 Andrei Sakharov (Sakharov, 1967) explicó que la asimetría barión-antibarión en el universo, puede ser explicada en términos de la violación de CP.

Sin embargo la violación de CP sólo ocurre cuando se toman en cuenta tres ó más familias de cuarks, entonces la violación de CP tiene que ver con la pregunta ¿por qué hay tres familias de cuarks?

¿Pueden haber fuentes de violación de CP más allá de la matriz CKM? Este es el objetivo de la fábrica de resonancias B en el SLAC y en el KEK en Tsukuba, Japón, ambos en construcción.

1.1.4 Simetría electrodébil

La física de las partículas elementales ha ido evolucionando a través de proposiciones de simetrías y rompimientos de las mismas. Primero se escoge una simetría aproximada y después se trata de explicar por qué falla para ser una simetría exacta.

Por ejemplo la simetría del Isospín es aproximada, primero reconocida como una similitud entre el neutrón y el protón, los cuales forman un doblete de isospín; después como una simetría no exacta, ya que las masas del protón y el neutrón no son iguales. Esto es consecuencia de la diferencia de masa entre el cuark u y el cuark d , diferencia que no es resultado del electromagnetismo, aunque claramente la simetría se rompe por fuerzas electromagnéticas que tratan al neutrón y al protón en forma muy distinta.

El cuark u izquierdo (con espín antiparalelo a la dirección del movimiento) y el cuark d izquierdo forman un *isodoublete débil*, como el electrón izquierdo y el neutrino. Sólo las partes izquierdas son consideradas ya que estas son las partes que interactúan con los bosones W^\pm en el decaimiento β , los electrones emitidos son izquierdos (en el límite en el que los electrones son ultrarrelativistas). La simetría se rompe, ya que el electrón y el neutrino son bastante diferentes, de hecho si la simetría no se rompiera todos los cuarks, los leptones, W^\pm y Z tampoco tendrían masa.

Por lo general una simetría puede romperse introduciendo una interacción que la contradiga directamente. Sin embargo un rompimiento explícito destruye todos los elementos de la teoría, dejándola incapaz de hacer predicciones. La simetría debe romperse, pero sin destruir la teoría. Por ejemplo mediante un *Rompimiento Espontáneo*, en el cual la simetría de norma es oculta, por que el Lagrangiano sigue siendo invariante bajo tal simetría, pero las soluciones de las ecuaciones del campo ya no tienen la simetría original.

El ferromagnetismo es una analogía útil. La interacción entre espines de electrones i y j en un material ferromagnético está hecha de términos $\sigma_i \cdot \sigma_j$ (los cuales representan los estados de espín correspondientes a los electrones i y j) sin ninguna dirección espacial privilegiada. Sin embargo dentro de un dominio en particular, los espines participan en una sola dirección para producir una magnetización M .

Para disminuir la energía libre de Helmholtz del material ferromagnético, por abajo de la energía correspondiente a la temperatura de Néel, la magnetización, M , debe escoger una dirección cualquiera en la cual apuntar.

Para romper la simetría electrodébil, alguna variable debe escoger una dirección en el espacio de la simetría interna. Una forma de hacerlo es introduciendo el campo escalar H con varias componentes, en cierta forma análogas a las componentes de M . El campo H sirve entonces

como una especie de brújula.

Una componente de H escoge un valor distinto de cero en cualquier punto del espacio, tal como las componentes de M lo hacen. El valor v , valor esperado sobre estados del vacío que H toma, está relacionado con la constante de Fermi, mediante:

$$\sqrt{2}G_F = \frac{1}{v^2}, \quad (1.6)$$

lo cual significa que $v = 246.22$ GeV.

En el modelo más simple de rompimiento espontáneo de la simetría, H tiene cuatro componentes, cada una representando un grado físico de libertad. Antes del rompimiento espontáneo de la simetría, el fotón, W^+ , W^- y Z no tienen masa, y tienen dos polarizaciones independientes. Después del rompimiento W^+ , W^- y Z adquieren masa y tres estados independientes de polarización. Los grados de libertad extra vienen de H y de una nueva partícula llamada *Bosón de Higgs*.

Los valores de v y la masa del bosón de Higgs son los últimos dos parámetros del Modelo Estándar que no han podido medirse experimentalmente. La masa del bosón de Higgs aparece en muy pocas cantidades observables por lo cual su detección se ha dificultado.

1.2 Más allá del Modelo Estándar

Uno de los retos actuales de la física de partículas es entender el rompimiento de la simetría, por lo que hace al mundo como es.

¿Por qué el electrón y el neutrino son distintos?, ¿por qué hay dos cuarks muy ligeros y un leptón cargado muy ligero?, ¿por qué el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil deja una simetría sin romperse, dejando al protón como es?

¿Qué fijó el rompimiento de la gran simetría unificada, suponiendo que hay una, y dió lugar a la existencia de una interacción muy fuerte y otra débil?

El que el cuark u sea un poco más ligero que el cuark d , hace posible un protón estable. El que la masa del electrón sea menor que la diferencia de masa entre el neutrón y el protón, garantiza que el átomo de hidrógeno sea estable ante la captura de un electrón.

Todas estas inquietudes han sido encausadas hacia la construcción de teorías que recuperen los éxitos del ME, eliminen los problemas descritos anteriormente y al mismo tiempo sean más predictivas.

Cualquiera que sea esta teoría, hay muchos números que explicar, principalmente en el sector de Yukawa de la teoría. Las masas de los cuarks y los leptones cargados rompen la simetría electrodébil con $\Delta I_W = 1/2$, y $|\Delta Y| = 1$, los mismos números cuánticos que el parámetro de orden electrodébil, el cual también proporciona masa al bosón W . En este sentido las masas de los fermiones cargados deben ser del mismo orden que la masa del W . Esto es verdad sólo para la masa del cuark t , los otros son pequeños de forma no natural:

$$\frac{m_{u,d}}{M_W} \sim \mathcal{O}(10^{-4}) \quad \frac{m_s}{M_W} \sim \mathcal{O}(10^{-3}) \quad \frac{m_c}{M_W} \sim \mathcal{O}(10^{-2}) \quad \frac{m_b}{M_W} \sim 0.5.$$

En forma análoga para los leptones cargados, se tiene:

$$\frac{m_e}{M_W} \sim \mathcal{O}(10^{-5}) \quad \frac{m_\mu}{M_W} \sim \mathcal{O}(10^{-3}) \quad \frac{m_\tau}{M_W} \sim 0.2.$$

La masas de los neutrinos son exactamente cero según el ME, debido a las simetrías del número leptónico global. Sin embargo si las masas de los neutrinos no fueran cero, podrían romper el isoespín débil por una unidad, esto es, tener valores $\Delta I_W = 1$. Los límites experimentales indican que en todo caso las masas de los neutrinos son extremadamente pequeñas, por ejemplo: $\frac{m_{\nu_e}}{M_W} < 10^{-17}$.

Para poder sondear el parámetro de corte y los demás parámetros del ME que no han sido bien explicados, se necesitan realizar experimentos a mayores energías. Una herramienta para este viaje teórico a través de las escalas, como se ha mencionado antes, son las ecuaciones del grupo de renormalización, con las cuales podemos continuar el ME a energías mayores. Si sus parámetros extrapolados muestran un comportamiento no razonable a cierta energía, significaría entonces que hemos alcanzado el parámetro de corte del ME y que se requiere de nueva física a partir de esa energía.

En el sector de Higgs, el comportamiento de las ecuaciones del grupo de renormalización del auto-acoplamiento del Higgs resulta bastante peculiar. Se pueden considerar dos casos, dependiendo del valor de la masa del Higgs.

a) Si la masa del Higgs es menor que 150 GeV, el auto-acoplamiento se vuelve negativo a distancias más cortas. Esto tiene como resultado un potencial ilimitado por abajo y la inestabilidad del ME más allá de la escala a la cual cambia de signo. Por ejemplo utilizando el valor medido recientemente de la masa del cuark t, se puede encontrar un valor de la masa del Higgs de aproximadamente 120 GeV el cual significaría inestabilidad a 1 TeV. En tal caso, partículas nuevas con masas conmensurables en tal escala deben aparecer para estabilizar la teoría. Esto es exactamente lo que pasa en la extensión supersimétrica del ME. Aunque se pueden considerar otros sistemas de estabilización sin supersimetría, la supersimetría es lo más viable.

b) Si la masa del Higgs es mayor que 200 GeV, el auto-acoplamiento crece dramáticamente hacia su polo de Landau, a una escala de energía relativamente baja. Esto significa que se pierde el control perturbativo de la teoría, pero al mismo tiempo, fija una cota superior a la escala del Higgs ², ya que no hay evidencia de acoplamiento fuerte a la escala del laboratorio. Esto es llamado el "límite trivial", ya que por otro lado nos da el auto-acoplamiento cero en el infrarrojo. Sin embargo sabemos que el acoplamiento no es cero para el ME.

Dentro de un intervalo pequeño de valores intermedios para la masa del Higgs, los límites de la inestabilidad y trivialidad, mencionada en los párrafos anteriores, son empujados a escalas más allá de la longitud de Planck. En este caso no hay una predicción del ME de nueva física, excepto por las pistas asociadas a la gravedad cuántica.

La renormalización de la masa del Higgs es proporcional a la escala de corte, lo que no hace natural el poder ver un Higgs ligero a una escala enorme de renormalización. Así, aún si la masa del Higgs no requiere de nueva física por debajo de la masa de Planck, M_P , lo hace para una teoría *ad hoc*. Podemos contrastar la situación en el caso de la masa de los fermiones. Su dependencia en el parámetro de corte es sólo logarítmica. La razón es que la masa de los fermiones es natural, en el sentido de que haciéndolas cero se gana la simetría quiral que es respetada por las correcciones cuánticas.

Las fluctuaciones cuánticas renormalizan aditivamente la masa del Higgs con un término linealmente proporcional al corte. Así, aún cuando la masa del Higgs está en una región que

² $m_H \lesssim 500 - 800 \text{ GeV}$.

técnicamente no requiere de nueva física por debajo de M_P , si se escoge M_P como la escala de corte, el valor pequeño de la masa del bosón de Higgs no es natural, es decir sólo para un parámetro de corte pequeño lo es.

1.2.1 El problema de la jerarquía de norma

El hecho de que no se entienda porqué M_W (masa del bosón W), que determina la escala electrodébil sea tan pequeña con respecto a la posible escala de unificación M_X , y de que haya que depender de un ajuste que imponga un valor del orden de cientos de GeV a la masa del doblete de Higgs, se denomina problema de *jerarquía de norma*.

Aunque el problema existe en el ME, como se mencionó en la sección anterior, en una teoría más completa se espera entender el valor de M_W en términos de parámetros más fundamentales, como la escala de la masa de Planck $M_P \sim 10^{19}$ GeV, pero esa teoría más completa necesita una estructura mucho más robusta que la del ME, en particular se necesita que ocurra nueva física a la escala de unos cuantos TeV³.

Existen varias posibilidades para resolver el problema de la jerarquía, una de ellas es considerar que los escalares de Higgs sean sistemas compuestos, sin necesidad de tener partículas escalares fundamentales, ya que éstas originan la presencia de divergencias cuadráticas. Otra forma de resolver el problema es la introducción de la *supersimetría*, que también resuelve los problemas teóricos asociados a las partículas con espín semientero, debido a que no tienen una simetría de norma asociada.

Cualesquiera que sean las posibles extensiones del ME deben arrojar luz sobre el origen de estas jerarquías, por lo cual ninguna de ellas debe contradecir las predicciones exitosas del ME para los fenómenos de bajas energías.

1.2.2 Condensación de cuarks y tecnicolor.

Una clase de teorías, genéricamente llamadas *tecnicolor*, que se basan en la idea de la *condensación bosónica de cuarks*, han propuesto la existencia de nuevas interacciones fuertes (de *tecnicuarks*) justo más allá de la escala electrodébil, lo cual permite una explicación natural del valor de este parámetro, pero falla en explicar los valores de las masas de los fermiones.

En el condensado de cuarks la idea básica es que una interacción fuerte de confinamiento entre los cuarks t (debida a nueva física a una escala alta Λ_c) pueda producir un rompimiento dinámico de la simetría electrodébil a través de la formación de un condensado de cuarks top. Sin embargo en este condensado un acoplamiento grande de Yukawa inicial es necesario para que el punto fijo efectivo gobierne la masa del cuark t .

¿Es el condensado de cuarks un esquema razonable como extensión del ME? La masa del cuark t predicha mediante este esquema, $m_t = 230 \pm 30$ GeV, es demasiado grande en comparación con las mediciones recientes [7], pero es posible reducir este valor mediante la introducción de una cuarta generación, dos dobletes de Higgs ó mediante supersimetría. No obstante el esquema así implementado tiene un problema de ajuste del parámetro de corte, ya que el valor

³Esto debido a que el valor de M_W se obtiene del cálculo en teoría de perturbaciones a una escala de corte del orden de TeV, en el desarrollo de la divergencia cuadrática.

esperado entre estados del vacío a la escala del rompimiento electrodébil en un modelo compuesto del Higgs, es naturalmente del orden de la escala de composición Λ . Para poder hacerla menor que Λ_c es necesario un ajuste fino de los parámetros de la teoría. Los trabajos recientes en la condensación, han sido enfocados hacia la reducción del problema de ajuste fino, reduciendo Λ_c . Sin embargo se pierde el poder predictivo para las correcciones de las ecuaciones del grupo de renormalización, en este caso la masa del cuark t y la masa del bosón de Higgs están determinadas por la dinámica de la interacción fuerte, que todavía no es calculable.

1.2.3 Supersimetría

Otro tipo de teorías postula la existencia de la *supersimetría* (SUSI), que supone que para toda partícula fundamental hay otra partícula relacionada a ella cuyo espín sólo difiere en $1/2$ de la unidad con respecto a la original. Por ejemplo para un electrón hay un s-electrón con espín cero, para un cuark hay un s-cuark con espín cero, para W^\pm , Z y el fotón hay un *wino*, *zino* y un *fofino*, respectivamente, con $s = 1/2$. El número de cargas de la supersimetría, N , determina las supersimetrías de la teoría.

Adicionalmente la supersimetría requiere que haya varios bosones de Higgs, por lo menos tres que sean neutrales y dos cargados.

Ninguno de estos objetos ha sido detectado, pero la búsqueda continúa en el Tevatrón de Fermilab y el LEP (colisionador electrón-positrón) en el CERN.

En las teorías supersimétricas el parámetro de orden electrodébil está relacionado a otro parámetro: el del orden de rompimiento de la supersimetría, que debe romperse a una escala consistente con el valor de la constante de Fermi, es decir $M_S/M_P \sim 10^{-15}$, donde M_S es el valor de la escala de rompimiento de la supersimetría. El rompimiento de la supersimetría automáticamente genera el rompimiento electrodébil en una amplia clase de teorías. Las ideas de tecnicolor pueden ser exitosamente aplicadas al rompimiento de la supersimetría, por medio de la condensación del gaugino⁴, sin el problema de las masas de los fermiones. Por lo anterior, se considera que la supersimetría provee la mejor explicación tanto de la escala del rompimiento electrodébil, como del valor de las masas de los fermiones.

1.2.4 Teorías Finitas de Gran Unificación

Las teorías de gran unificación TGU, postulan la unificación de los tres acoplamientos de norma a un escala determinada de energía, en donde se supone que la teoría unificada está descrita por un sólo acoplamiento. Esta idea ha dado pie a muchos avances en la descripción de las interacciones fundamentales. Sin embargo si en las TGU se considera un ajuste fino entre las escalas de rompimiento, se predice el decaimiento del protón a un valor mayor que el valor experimental. Esta característica está ausente en modelos supersimétricos, en los cuales se puede controlar el valor de la vida media del protón. Si a las TGU supersimétricas se les añade la idea de finitud de las funciones β (de hecho para algunos casos la supersimetría implica la finitud) del grupo de renormalización de los acoplamientos del grupo de unificación, se da lugar a la posibilidad de una teoría de unificación más general. Esto debido a que dicha teoría está libre

⁴Fermión de norma (λ), supercompañero fermiónico del bosón de norma.

de infinitos y a su vez puede producir relaciones entre los parámetros libres del ME o MESM a energías altas, que hereden ciertas características a la escala electrodébil. Esta es la idea básica de la Teoría Finita de Gran Unificación (TFGU), las cuales han hecho posible la exploración de las predicciones fenomenológicas, que hacen tanto a la escala de Gran Unificación, como a la escala electrodébil. Las TFGU más estudiadas han sido las que se basan en grupos simples de norma, por ejemplo $SU(5)$ y $SO(10)$. La conexión a bajas energías se da primero mediante el rompimiento de la TFGU al MESM, a la escala M_X y después mediante la introducción de términos de rompimiento suave de la supersimetría a la escala M_S , que induzcan el rompimiento de la simetría electrodébil a la escala M_W .

1.2.5 Unificación de los acoplamientos de norma y de Yukawa

Una extensión natural de la idea de TGU es encontrar una forma de relacionar los sectores de norma y de Yukawa de la teoría, es decir obtener una Unificación de Norma y Yukawa (UNY). La supersimetría relaciona naturalmente estos dos sectores, en particular para $N = 2$. Sin embargo las teorías supersimétricas $N = 2$ tienen serios problemas fenomenológicos. También en las teorías de supercuerdas y los modelos compuestos existen relaciones entre los acoplamientos de Yukawa y los de norma, pero también tienen problemas fenomenológicos.

Ha habido intentos de relacionar los sectores de norma y Yukawa, por ejemplo en el ME, suponiendo la ausencia de divergencias cuadráticas ó la aparición de puntos fijos del acoplamiento de Yukawa del t en el ME y el MESM ⁵, sin mucho éxito en las predicciones a bajas energías. Sin embargo si se relacionan estos sectores dentro de una teoría de campo renormalizable, se pueden encontrar relaciones invariantes del grupo de renormalización entre los parámetros que pueden mejorar la obtención de cálculos y predicciones fenomenológicas de la teoría.

La UNY resulta natural en las Teorías Finitas de Gran Unificación, porque se tiene una relación intrínseca entre los dos sectores ⁶, mejorando considerablemente la predictibilidad de la teoría.

De esta forma las Teorías Finitas de Unificación de los acoplamientos de Norma y Yukawa, representan esquemas bastante atractivos, y como se verá en el capítulo 6, con posibilidades fenomenológicas muy viables, debido a las predicciones a bajas energías en la tercera familia, así como en el espectro supersimétrico.

1.2.6 Supercuerdas

Las supercuerdas no son entendidas todavía con profundidad, pero algunas de sus características aplicadas a bajas energías son bastante atractivas [8]. La idea fundamental en la teoría de cuerdas es reemplazar a las partículas puntuales de las teorías cuánticas de campo por objetos unidimensionales, *cuerdas*, que pueden ser abiertas o cerradas. La auto-consistencia en las teorías de cuerdas es bastante estricta, dejando sólo 5 teorías supersimétricas posibles 10D (en 10 dimensiones): Cuerdas cerradas tipo 1 con simetría de norma $SO(32)$, cuerdas cerradas tipo 2A y 2B, dependiendo de que orientación se adopte para los grados de libertad fermiónicos, cuerdas hetéroticas cerradas con teoría de norma $SO(32)$ ó $E_8 \times E_8$. Estas teorías tienen un

⁵Ver Capítulo 3

⁶ibid

número infinito de estados masivos correspondientes a los modos de oscilación de la cuerda después de la cuantización, las masas están cuantizadas en términos de una escala fundamental que se indentifica con la masa de Planck, M_P . En cada una de los cinco tipos de cuerdas mencionadas anteriormente se tiene una partícula sin masa con espín 2, que puede asociarse al gravitón, por lo cual estas teorías implican la existencia de la gravedad. Las teorías tipo 1 y las heteróticas tienen también partículas sin masa de espín 1. Como el sector observable está en 4D, debe buscarse un mecanismo por el cual se pueda asociar el espacio 10D con el 4D. Este mecanismo es la compactificación topológica. La fenomenología de las cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ es la que más se ha estudiado. En este esquema se puede hacer una compactificación al grupo $E_6 \times E_8$, en donde el sector observable se puede asociar a E_6 en 4D y el sector oculto E_8 , de tal manera que están comunicados sólo por la gravedad.

En general las supercuerdas dan lugar a teorías efectivas de norma a bajas energías, válidas por debajo de la escala de M_P , relacionada con el acoplamiento de norma mediante:

$$M_P \approx 2.5\sqrt{\alpha_U} \times 10^{18} \text{ GeV}$$

Con $M_X = 10^{16} \text{ GeV}$ y $\alpha_U^{-1} < \alpha_X^{-1} \approx 25$, esto implica que el contacto con las supercuerdas puede ser hecho si $M_U/M_X > 50$, por lo cual hay una pequeña discrepancia con la escala aparente de gran unificación.

Las representaciones $\mathbf{27}$ y $\overline{\mathbf{27}}$ del grupo E_6 de cuerdas heteróticas, a energías de $10^{19} - 10^{17} \text{ GeV}$, reducen la teoría efectiva a las tres familias quirales conocidas y a muchas partículas vectoriales, con números cuánticos similares. Estas partículas pueden ser utilizadas en mecanismos tipo Sube y Baja⁷ para generar números pequeños entre la escala de la supersimetría y la escala de unificación, lo cual se espera, ya que el grupo efectivo de norma es usualmente más grande que el del ME.

Para la unificación de los acoplamientos de norma se supone que el acoplamiento de la hipercarga débil se unifica con los otros dos acoplamientos, en un grupo de Lie de rango más grande, tal como el $SU(5)$, el $SO(10)$ ó el E_6 . Así mismo se supone la ausencia de umbrales intermedios entre 1 TeV y 10^{16} GeV , con materia que tenga números cuánticos fuertes o electrodébiles. Los acoplamientos de norma podrían no unificarse exactamente en M_X , y en teoría de cuerdas se puede introducir por lo menos un umbral intermedio entre la escala de unificación en M_X para obtener unificación a la escala de cuerdas M_P .

En modelos realistas de supercuerdas, la suposición de una escala intermedia probablemente es injustificada. Pudiera parecer más sorprendente que en el MESM los acoplamientos de norma deberían estar precedidos por una unificación en M_X , sólo para ser redirigidos a un nuevo punto de encuentro en M_P , pero no hay constricciones esenciales en este escenario.

1.2.7 Conclusiones

Los primeros intentos para ir más allá del ME se concentraron en resolver el problema de la jerarquía. Los modelos de *Compuestos* ofrecen una solución, pero los ejemplos concretos no proveen un esquema convincente. Se ha mostrado que la extensión de la simetría del ME para incluir SUSI ha sido capaz de resolver el problema de la jerarquía de las masas de una manera

⁷Ver Capítulo 3.

natural y algún modelo subyacente, por ejemplo una teoría de cuerdas, de generar la magnitud de la jerarquía.

Las predicciones exitosas de los acoplamientos de norma a bajas escalas de energía han dado apoyo substancial para este esquema, favoreciendo una teoría de unificación a escalas altas de energía. Estas predicciones requieren una escala baja de rompimiento de SUSY con los nuevos estados de SUSY a masas del orden de TeVs y accesibles a la nueva generación de aceleradores.

Las masas de los cuarks b y de τ concuerdan bien con la hipótesis de que son iguales o del mismo orden a la escala de unificación, dando por hecho que la teoría es supersimétrica, y sugiere que las masas de los demás fermiones y los ángulos de mezcla puedan también tener relaciones simples a energías altas.

El hecho de que una elección apropiada de simetría más una estructura de multiplete sea suficiente para fijar un patrón fenomenológicamente realista de masas y ángulos de mezcla, demuestra como el problema de entendimiento de éste patrón pueda ser transformado en el problema de determinar la simetría apropiada y la estructura de multiplete.

En cuanto a las Teorías Finitas de Gran Unificación, en el último Capítulo se podrá observar que las predicciones fenomenológicas están de acuerdo con las cotas experimentales más recientes, de los parámetros supersimétricos del MESM y los valores de los parámetros del ME, por lo cual resultan bastante estimulantes. El siguiente paso sería ver si la finitud de estas teorías se puede heredar de una teoría o principio más fundamental.

Bibliografía

- [1] F. Reines. The neutrino: from poltergeist to particle. *Reviews of Modern physics*, 68(2):317, April 1996.
- [2] I.J.R. Aitchison and A.J. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics*. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 1989.
- [3] R. Hofstadter. *Annual Review of Nuclear Sciences*, 7:231, 1958.
- [4] Richard E. Taylor. Deep inelastic scattering: The early years. *Reviews of Modern Physics*, 63(3):573, July 1991.
- [5] Henry W. Kendall. Deep inelastic scattering: experiments on the proton and the observation of scaling. *Reviews of Modern Physics*, 63(3):597, July 1991.
- [6] Jerome I. Friedman. Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model. *Reviews of Modern Physics*, 63(3):615, July 1991.
- [7] Barnett et. al. Particle data group. *Physical Review*, D54(1), 1996. <http://pdg.lbl.gov>.
- [8] F. Quevedo. ?'supercuerdas y física? In H. Rago, editor, *III Escuela Venezolana de Relatividad, Campos y Astrofísica*, pages 87–170, 1997.

Capítulo 2

Teoría de la Renormalización y Evolución de las ecuaciones de renormalización del ME

2.1 Teoría de la Renormalización

A partir de cualquier teoría cuántica de campo se pueden construir las reglas de Feynman correspondientes para calcular las funciones de Green y los elementos de la matriz S en teoría de perturbaciones. Para una teoría relativista la integración sobre el momento se considera desde cero a infinito, es decir no existe un corte intrínseco en la variable de momento, lo cual puede conducir a la divergencia de las integrales.

La teoría de la renormalización permite, en forma consistente, aislar y remover los infinitos de las cantidades físicas medibles. Sin embargo, aún en teorías completamente finitas se necesita renormalizar (en forma finita) cantidades físicas.

El programa de renormalización, básicamente consiste en:

a) Identificar (aislar) las singularidades de la teoría. Este proceso se lleva a cabo dependiendo del formalismo elegido, ya que se introduce un regulador que permite identificar los infinitos en las definiciones de las cantidades no regularizadas, moviendo todas las divergencias a las cantidades desnudas.

b) En otras palabras las cantidades no renormalizadas se suponen propiamente divergentes y la renormalización debida a la interacción se debe considerar infinita para que cancele estas divergencias y así producir cantidades renormalizadas que sean finitas.

De esta forma las cantidades renormalizadas son físicamente medibles, en tanto que las cantidades desnudas no lo son.

c) Encontrar relaciones entre las variables desnudas y las renormalizadas.

d) Las diferentes elecciones de los puntos de referencia, es decir de los distintos puntos de substracción, conducen a definiciones distintas de los parámetros físicos. Como la física debe ser invariante ante las distintas transformaciones que solamente cambian las condiciones de renormalización, se deben encontrar ecuaciones que establezcan esta invariancia.

Estas ecuaciones son las ecuaciones del “grupo de renormalización” (en realidad no constituyen un grupo, como se verá a continuación) y expresan entonces el efecto del cambio de

escala en la teoría.

Sean R y R' dos esquemas de renormalización distintos, con Lagrangianos renormalizados:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_R \quad (\text{cantidades renormalizadas en } R) \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{R'} \quad (\text{cantidades renormalizadas en } R'),\end{aligned}\tag{2.1}$$

respectivamente.

Si Φ denota el campo (otras cantidades que pueden renormalizarse son los acoplamientos, las masas y las funciones de Green) y Φ_0 su correspondiente expresión desnuda, entonces:

$$\Phi_R = Z_\Phi(R)\Phi_0\tag{2.2}$$

representa la forma en que la función renormalizadora $Z_\Phi(R)$ relaciona a Φ con Φ_0 . Análogamente en el esquema de renormalización R' se tiene:

$$\Phi_{R'} = Z_\Phi(R')\Phi_0.\tag{2.3}$$

De esta forma existe una función f tal que $\Phi_{R'} = f(Z_\Phi(R'), Z_\Phi(R))\Phi_R$. Como $\Phi_{R'}$ y Φ_R son finitas entonces $f(Z_\Phi(R'), Z_\Phi(R))$ también debe ser finita. Se tiene entonces de (2.2) y (2.3) que:

$$f(Z_\Phi(R'), Z_\Phi(R)) = \frac{Z_\Phi(R')}{Z_\Phi(R)}.\tag{2.4}$$

Ecuaciones similares pueden derivarse para el caso de los acoplamientos, las masas y las funciones de Green.

La operación que toma las cantidades de un esquema R de renormalización a otro R' puede considerarse una transformación de R en R' . Si se tiene la transformación del campo, i.e. $f(Z_\Phi(R'), Z_\Phi(R))$, y como elementos de un conjunto a las funciones Z_Φ ¹, se puede decir entonces que bajo la transformación definida por f se cumplen las siguientes propiedades entre las funciones renormalizadoras:

Cerradura, asociatividad, existencia del elemento neutro, i.e. $Z_\Phi(R) = Z_\Phi(R')$, en el caso en que los esquemas sean idénticos. Sin embargo no necesariamente existe un elemento inverso, ya que las funciones Z_Φ son divergentes y en general cuando existe un elemento inverso, éste no es único.

Por lo anterior las ecuaciones de renormalización no constituyen propiamente un "grupo", sino un "semi-grupo", sin embargo se les conoce como *ecuaciones del grupo de renormalización* (GR).

Una elección particular de los parámetros de renormalización define un esquema específico de renormalización. Por supuesto, la física es independiente de la elección de estos parámetros. Una forma común de relacionar al parámetro desnudo con el parámetro renormalizado es:

$$g_0 = g - \delta g,\tag{2.5}$$

donde g_0 es el parámetro desnudo, g es el renormalizado y δg es el contratérmino. El fijar los contratérminos de tal forma que consistan sólo de los términos infinitos necesarios para

¹El conjunto es infinito, ya que hay un número infinito de esquemas de renormalización.

volver la teoría finita define el esquema de substracción mínima (SM). Una característica de este esquema es la escala de masa μ , la cual entra en el proceso de regularización de integrales divergentes, utilizando regularización dimensional. Más aún, la unidad de masa se utiliza para mantener las constantes de acoplamiento adimensionales cuando se continúa a d dimensiones en el procedimiento de regularización dimensional.

Por ejemplo, para d dimensiones:

$$g_o (\rho\mu)^{\frac{(4-d)}{2}} = g - \delta g \quad (2.6)$$

donde ρ es una constante de parametrización de las partes infinitas de las integrales divergentes en la regularización dimensional. Entonces la ecuación (2.6) define una familia de esquemas SM: $\rho = 1$ es el caso más simple, el caso de $\rho^2 = e^{\gamma_E}/4\pi$, donde $\gamma_E = 0.5722\dots$ es la constante de Euler-Mascheroni, define el *esquema de substracción mínima modificado* (\overline{SM}). Este esquema es comunmente empleado en los cálculos de QCD.

Las masas del ME en el \overline{SM} son dependientes de μ . Su evolución se encuentra descrita por las funciones β de las ecuaciones del grupo de renormalización, pero en general estas masas no son iguales a sus valores físicos, de la masa en el polo, correspondientes a la escala de energía apropiada. En cambio en el esquema de renormalización *sobre la capa de masa* (on-shell), las masas renormalizadas son iguales a sus valores físicos y el acoplamiento electromagnético renormalizado es igual a la constante de estructura fina. Sin embargo los esquemas SM tienen la ventaja de que las funciones β son independientes de μ y por lo tanto es particularmente simple integrar cantidades físicas $P[\{g_i(\mu)\}, \mu]$ de la teoría expresadas en términos de μ y los parámetros que van cambiando conforme a la energía $\{g_i(\mu)\}$, independientes de μ :

$$\mu \frac{d}{d\mu} P[\{g_i(\mu)\}, \mu] = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_i \frac{\partial}{\partial g_i} \right) P = 0, \quad (2.7)$$

en donde las funciones β_i son las funciones β de cada parámetro que se esté considerando.

Como se ha mencionado, las cantidades físicas son independientes del esquema de renormalización, lo que supone que los cálculos pueden ser hechos sin aproximaciones, pero en la práctica los cálculos son aproximaciones perturbativas, las cuales sí dependen del esquema de renormalización.

2.2 Evolución de las ecuaciones de renormalización del ME

En el capítulo anterior mencioné que las ecuaciones de renormalización permiten hacer evolucionar los acoplamientos de norma de cualquier teoría renormalizable. También mencioné que en el caso del ME, la unificación de los acoplamientos no ocurre. Sin embargo es importante señalar la forma en la que las ecuaciones se hacen evolucionar y se escogen los valores de los parámetros iniciales. Para tal propósito se presenta a continuación el procedimiento de evolución de las ecuaciones de renormalización del ME.

El Lagrangiano del ME en el sector de Yukawa es el siguiente:

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_L \tilde{H} Y_u^\dagger u_R + \bar{Q}_L H Y_d^\dagger d_R + \bar{\ell}_L H Y_e^\dagger e_R + H.C. - \frac{1}{2} \lambda (H^\dagger H)^2, \quad (2.8)$$

en donde los índices de sabor han sido suprimidos y Q_L y ℓ_L son los dobletes de cuarks y leptones de $SU(2)$, respectivamente:

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad \ell_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

H y \tilde{H} son el doblete escalar de Higgs y su conjugado en $SU(2)$, respectivamente:

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} \quad \tilde{H} = i\tau_2 H, \quad (2.10)$$

los singletes de los cuarks u y d son u_R , d_R , respectivamente y e_R es el singlete leptónico. Aquí $Y_{u,d,e}$ son las matrices del tipo u , d y leptónico respectivamente, que definen los acoplamientos de Yukawa. Las funciones β para los acoplamientos de *norma* son:

$$\frac{dg_l}{dt} = -b_l \frac{g_l^3}{16\pi^2} - \sum_k b_{kl} \frac{g_k^3 g_l^3}{(16\pi^2)^2} - \frac{g_l^3}{(16\pi^2)^2} \text{Tr}\{C_{lu} Y_u^\dagger Y_u + C_{ld} Y_d^\dagger Y_d + C_{le} Y_e^\dagger Y_e\}, \quad (2.11)$$

en donde $t = \ln \mu$, donde μ representa la escala de energía, y $l = 3, 2, 1$, corresponden al grupo de norma del ME $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, respectivamente. Los coeficientes que aparecen en la expresión (2.11) están dados en el Apéndice A.1.

La evolución de los acoplamientos de *Yukawa* está descrita por:

$$\frac{dY_{u,d,e}}{dt} = Y_{u,d,e} \left(\frac{1}{16\pi^2} \beta_{u,d,e}^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_{u,d,e}^{(2)} \right), \quad (2.12)$$

Las expresiones para las contribuciones a un rizo y a dos rizo, así como todos los términos que aparecen en la expresión están dadas en el Apéndice A.1.

La función β para el valor esperado sobre estados del vacío del campo escalar de Higgs, v , es:

$$\frac{d(\ln v)}{dt} = \frac{1}{16\pi^2} \gamma^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \gamma^{(2)}. \quad (2.13)$$

Las expresiones de las contribuciones de las funciones γ también se encuentran en el Apéndice A.1.

Como se puede observar, las ecuaciones anteriores son ecuaciones diferenciales acopladas que pueden integrarse mediante un proceso numérico eficiente.

2.2.1 Obtención de los parámetros del Modelo Estándar

Determinación de $\alpha_1(M_Z)$ y $\alpha_2(M_Z)$

Para poder hacer evolucionar (integrar) el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas descrito en la sección anterior, se debe elegir una escala a la cual se inicie la integración. Para que la integración sea confiable se debe empezar a una escala en la cual se conozcan con precisión la

mayoría de los parámetros. Basándonos en experimentos a bajas energías, podemos tener una buena relación entre los valores experimentales y las extrapolaciones a altas energías. Por lo anterior la escala de M_Z (masa física de Z) se escoge como punto de partida a bajas energías.

La determinación de los acoplamientos de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se lleva a cabo utilizando las relaciones del ME [1]:

$$\alpha_1(\mu) \equiv \frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} = C^2 \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W(\mu)} \quad \text{para } U(1)_Y \quad (2.14)$$

$$\alpha_2(\mu) \equiv \frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} = \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W(\mu)} \quad \text{para } SU(2)_L \quad (2.15)$$

en donde $\alpha(\mu) = \frac{e^2(\mu)}{4\pi}$ y C^2 es una constante de renormalización:

$$C^2 = \begin{cases} 1 & ME, \\ \frac{5}{3} & ME \text{ en } TGU \text{ con } G = SU(N) \text{ ó } SO(N) \end{cases} \quad (2.16)$$

Lo que se requiere para especificar el valor de estas constantes son los valores de $\alpha(\mu)$ y $\sin^2 \theta_W(\mu)$ en el esquema de renormalización que se emplee. La constante electromagnética de estructura fina $\alpha_{em} \approx 137.036$ se extrapola desde cero hasta la escala de M_Z . En el ME hay distintas especies de fermiones cargados y bosones de norma cargados, por lo cual la constante de estructura fina esta dada por:

$$\alpha^{-1}(\mu) = \alpha_{em}^{-1} - \frac{2}{3\pi} \sum_f Q_f^2 \ln \frac{\mu}{m_f} \theta(\mu - m_f) + \frac{1}{6\pi}. \quad (2.17)$$

Los efectos de la interacción fuerte, que entran como contribuciones hadrónicas a la función de polarización del vacío también deben ser incluidos. Los datos que aquí se presentan corresponden a los datos más recientes publicados en la referencia [2].

El ángulo de mezclas renormalizado de las interacciones débiles (independiente del proceso) está dado por:

$$\sin^2 \theta_W \equiv 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}, \quad (2.18)$$

donde M_Z y M_W son las masas físicas de los bosones de norma, es decir las masas que corresponden a los propagadores de los bosones, Z y W respectivamente. En forma alternativa, el valor de θ_W puede obtenerse a través de la relación que involucra la constante de Fermi a bajas energías en el decaimiento muónico y la masa de W :

$$\frac{G_{\mu_0}}{\sqrt{2}} = \frac{e_0^2}{8 \sin^2 \theta_{W_0} M_{W_0}^2}, \quad (2.19)$$

esta expresión puede estar corregida al orden de α y escrita en la forma:

$$M_W = M_Z \cos \theta_W = \left(\frac{\pi \alpha_{em}}{\sqrt{2}} G_\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sin \theta_W (1 - \Delta r)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.20)$$

aquí Δr es un parámetro de orden α y representa las correcciones radiativas, que dependen de la masa del cuark top y el bosón de Higgs. Los efectos radiativos se pueden absorber utilizando el grupo de renormalización, reemplazando G_μ y α_{em} con sus correspondientes parámetros a la escala de M_Z .

En el esquema \overline{SM} de renormalización, las siguientes relaciones definen la función de $\sin^2 \theta_W(\mu)$:

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = 1 - \frac{m_W^2(\mu)}{m_Z^2(\mu)}. \quad (2.21)$$

La función de masa del bosón W , es decir la expresión para la masa del W que depende de la energía, $m_W(\mu)$, y su correspondiente masa física, M_W , que corresponde al polo simple cuando $q^2 = M_W^2(\mu)$ del propagador de W , están relacionadas mediante:

$$M_W^2 = m_W^2(\mu) + A_{WW}^T(M_W^2, \mu) \quad (2.22)$$

en donde A_{WW}^T es la parte transversa de la auto-energía del W . Una relación similar se establece para la masa del bosón Z .

La ecuación (2.22) y su análogo para Z pueden combinarse con la ecuación (2.21) para dar:

$$\frac{\sin^2 \theta_W(\mu)}{\sin^2 \theta_W} = 1 - \frac{\cos^2 \theta_W}{\sin^2 \theta_W} \left(\frac{A_{ZZ}^T(M_Z^2, \mu)}{M_Z^2} - \frac{A_{WW}^T(M_W^2, \mu)}{M_W^2} \right). \quad (2.23)$$

Un ajuste para incluir todos los datos de corrientes neutras da el valor que se presenta en la referencia [2]. De esta forma se obtienen los valores para $\alpha_1(\mu)$ y $\alpha_2(\mu)$ para $\mu = M_Z$.

Tabla 2.1: Valores empleados de los parámetros libres del ME, relacionados con los acoplamientos de norma

Parámetro	Valor experimental
$\alpha^{-1}(M_Z)$	127.90 ± 0.09
$\sin^2 \theta_W$	0.221 ± 0.0034
M_Z	$91.187 \pm 0.007 \text{ GeV}$
M_W	$80.33 \pm 0.15 \text{ GeV}$
$\sin^2 \theta_W(M_Z)(\overline{SM})$	$0.2315(4) \pm 0.00022$
$\alpha_1(M_Z)$	0.010174 ± 0.000010
$\alpha_2(M_Z)$	0.033774 ± 0.000056
$\alpha_3(M_Z)$	$0.123 \pm 0.004 \pm 0.002$

Determinación de $\alpha_3(M_Z)$

El valor de α_3 se conoce con menos precisión que la mayoría de los parámetros del ME, debido a las grandes incertidumbres teóricas que se derivan de la naturaleza no perturbativa de QCD a bajas energías y la lenta convergencia de las series perturbativas en QCD a altas energías.

Típicamente la misma cantidad física calculada en dos esquemas distintos de renormalización al orden n -ésimo de α_3 , diferirá por términos del orden α_3^{n+1} . Debido a que α_3 es grande

esta diferencia puede ser considerable, por lo que puede conducir a problemas de dependencia del esquema de renormalización. Estos problemas se manifiestan en la dificultad en escoger el esquema de renormalización a la escala μ , que sea el óptimo de acuerdo al experimento del que se extraiga el valor de α_3 . La escala que se elige en forma más frecuente es $\mu = E$, en donde E es la energía característica del experimento. Esta elección es plausible, ya que minimiza los términos típicos que involucran $\ln\left(\frac{E}{\mu}\right)$.

Determinación de los acoplamientos de Yukawa

Para incluir el sector de Yukawa en la evolución de los parámetros del ME, deben tomarse en cuenta valores iniciales de los acoplamientos de Yukawa. Estos valores son extraídos de datos experimentales tales como las masas de los cuarks y los ángulos de mezcla de CKM.

Utilizando la convención de Machacek y Vaughn [3, 4, 5], en donde el Lagrangiano para el sector de Yukawa es:

$$\mathcal{L} = \overline{Q}_L \tilde{H} Y_u^\dagger u_R + \overline{Q}_L H Y_d^\dagger d_R + \overline{l}_L H Y_e^\dagger e_R + H.C., \quad (2.24)$$

los acoplamientos de Yukawa están dados en forma de matrices de 3×3 , después del rompimiento de la simetría electrodébil se tiene:

$$Y_e = \frac{\sqrt{2}}{v} \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}, \quad Y_d = \frac{\sqrt{2}}{v} \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} V, \quad (2.25)$$

$$Y_u = \frac{\sqrt{2}}{v} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix},$$

en donde V es la matriz CKM (ver Apéndice A.1).

Tabla 2.2: Valores empleados de los parámetros libres del ME, en el sector de Yukawa

Parámetro	Valor experimental	Parámetro	Val. exp. de la masa en el polo
m_e	$0.51099907 \pm 1.5 \times 10^{-7} \text{ MeV}$	m_b	4.1 a 4.5 GeV
m_μ	$105.658389 \pm 3.4 \times 10^{-5} \text{ MeV}$	m_u	2 a 8 MeV
m_τ	$1777.00_{0.27}^{0.30} \text{ MeV}$	m_c	1 a 1.6 GeV
m_d	5 a 15 MeV	m_t	$176.6 \pm 6 \text{ GeV}$ (Observ. directa)
m_s	100 a 300 MeV	v	246.22 GeV

Se ha observado que todo el rango de valores iniciales de las funciones de los ángulos de mezcla es bastante plano, con un incremento perceptible en θ_2 entre M_W y la escala de Planck.

Obtención del valor esperado sobre estados del vacío del campo escalar

El valor esperado sobre estados del vacío (vev), v , del campo escalar puede ser obtenido a partir de la relación:

$$v(M_Z) = (\sqrt{2}G_\mu)^{-1/2} = 246.22 \text{ GeV}. \quad (2.26)$$

La forma en que se relacionan las masas de los parámetros con este valor es la siguiente:
Para la masa del Higgs:

$$m_h = \sqrt{2\lambda}/v, \quad (2.27)$$

donde λ es el acoplamiento del Higgs.

Para los fermiones:

$$m_f = y_f v / \sqrt{2}, \quad (2.28)$$

en donde y_t es el acoplamiento de Yukawa asociado al fermión f .

Los valores de y_f se obtienen de las relaciones (2.25). Debido a que $m_t \gg m_c \gg m_u$, los valores de m_c y m_u se pueden hacer cero en la matriz para Y_u (2.25). Análogamente m_d y m_s se pueden considerar igual a cero, ya que los valores de las masas de la tercera familia son considerablemente mayores, dejando solo a m_b como entrada distinta de cero en la matriz para Y_d . Lo mismo sucede para Y_e , en donde $m_e = m_u = 0$.

2.2.2 Evolución numérica de las ecuaciones del GR del ME

Para integrar las ecuaciones del grupo de renormalización utilicé una subrutina de integración de ecuaciones diferenciales acopladas: "DDEQMR", de las librerías del CERN ([6]), basada en el algoritmo de Runge-Kutta-Merson, y un algoritmo escrito en *FORTRAN*, que contiene la información de las funciones β de los parámetros del ME.

Para iniciar la integración, escogí la escala de M_Z , como se hace usualmente. A esta escala se necesita hacer una suposición del valor de la constante de acoplamiento del Higgs, basada en los límites experimentales (Ver Tablas (2.2) y (2.1)).

Los valores iniciales que tomé en cuenta son los que aparecen en la Tabla (2.1) y los acoplamientos de Yukawa a la escala M_Z , obtenidos mediante la relación (2.25), tomando en cuenta los valores de las masas de los fermiones (Tabla 2.2). Debido a que estos valores están medidos a la escala de energía de cada fermión, se debe hacer evolucionar a la escala de energía de M_Z , para esto, realicé una integración a un rizo desde la energía apropiada de cada fermión a la energía de M_Z .

Una vez obtenidos los valores iniciales, integré las ecuaciones hasta distintos valores del orden de la escala de 10^{16} GeV, para reproducir el triángulo GUT.

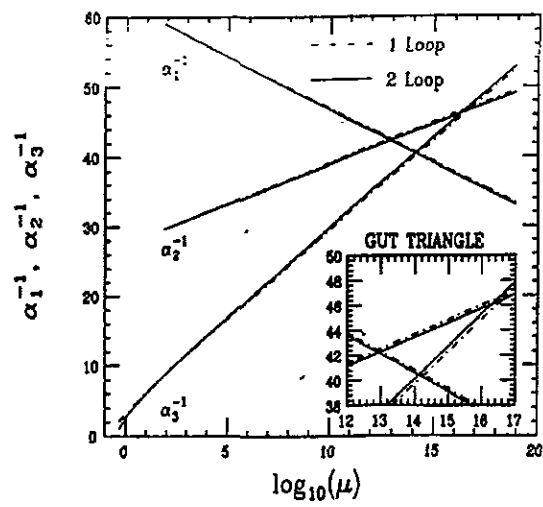


Figura 2.1: Evolución del inverso de los acoplamiento de norma y triángulo GUT, sin SUSY.

Bibliografía

- [1] H. Arason and et. al. Renormalization-group study of the standard model and its extensions: The standard model. *Physical Review D*, 46(9):3945–3965, 1992.
- [2] Barnett et. al. Particle data group. *Physical Review*, D54(1), 1996. <http://pdg.lbl.gov>.
- [3] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: wave function renormalization. *Nuclear Physics B*, 222:83–103, 1983.
- [4] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: Yukawa couplings. *Nuclear Physics B*, 236:221–232, 1984.
- [5] Marie E. Machacek and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: Scalar quartic couplings. *Nuclear Physics B*, 249:70–92, 1985.
- [6] *CERN Program Library: CERLIB*. CERN Geneva, Switzerland, May 1993.

Capítulo 3

Teorías de Gran Unificación

En el capítulo anterior comenté la forma en la que evolucionan los acoplamientos de norma, conforme a la escala de energía, dando lugar al triángulo de unificación. Las teorías de gran unificación (TGU), tienen como objetivo unificar los acoplamientos de las interacciones fuerte, débil y electromagnética a una escala alta de energía, al tiempo que describen los procesos a bajas energías, recuperando los éxitos del ME, y hacen predicciones sobre los parámetros libres del ME. Para ello se elige un grupo simple o semi-simple de norma, G , con un único acoplamiento g_G a la escala de TGU, que después se rompa al grupo del ME, $G_{ME} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Como se ha visto a lo largo de las tres últimas décadas [1, 2], las TGU sin supersimetría no son fenomenológicamente realistas, debido principalmente a la predicción que hacen sobre el decaimiento del protón y a las predicciones de valores incorrectos para los parámetros del ME a bajas energías. Sin embargo es útil revisar el formalismo de las TGU no supersimétricas, para después compararlas con las TGU supersimétricas.

3.1 Generalidades de las Teorías de Gran Unificación (TGU)

3.1.1 Elección del grupo de norma

En la elección del grupo de norma G se deben considerar los siguientes puntos:

1. Para tener un acoplamiento único a la escala de gran unificación, se necesita un grupo de norma simple ó semi-simple. El Lagrangiano del modelo debe incluir a los bosones de norma del ME y por supuesto debe tener invariancia local de norma bajo G .

2. Se deben escoger representaciones fermiónicas de tal forma que se recupere la estructura del G_{ME} a bajas energías. El acoplamiento de estos fermiones a los bosones de norma se especifica de acuerdo a la invariancia local de norma.

3. Las representaciones escalares y los acoplamientos escalares que se elijan deben dar un patrón fenomenológicamente aceptable del rompimiento de la simetría de G hacia G_{ME} .

4. Los acoplamientos de Yukawa de la teoría deben escogerse de tal forma que las masas de los fermiones que resulten después de rompimiento espontáneo de la simetría, estén de acuerdo con sus valores experimentales.

5. Las representaciones que se elijan de G deben ser complejas, debido a la quiralidad del espectro fermiónico, al tiempo que se debe asegurar la cancelación de anomalías.

El grupo G_{ME} tiene cuatro generadores diagonales correspondientes a t_3 y T_8 de color, T_3 de isoespín débil e Y de hipercarga. Cualquier grupo $G \supset G_{ME}$ debe ser lo suficientemente grande para contener estos cuatro generadores diagonales, es decir debe ser al menos de rango 4.

Las álgebras de Lie simples que se pueden elegir, de acuerdo a la clasificación de Cartan, son las basadas en los grupos [3]:

$$SU(n+1), \quad SO(2n+1), \quad Sp(2n) \quad \text{y} \quad SO(2n),$$

donde n es un número entero positivo; y los grupos excepcionales:

$$G_2, \quad F_4, \quad E_6, \quad E_7 \quad \text{y} \quad E_8 = SO(8), \quad (3.1)$$

en donde el subíndice representa el rango.

De la lista anterior se deben elegir los de rango mayor o igual a 4. Los grupos con rango igual a 4 son:

$$[SU(2)]^4, \quad [O(5)]^2, \quad [SU(3)]^2, \quad [G_2]^2, \quad O(8), \quad O(9), \quad Sp(8), \quad F_4 \quad \text{y} \quad SU(5). \quad (3.2)$$

Los dos primeros de la lista anterior no contienen a $SU(3)$, así que quedan descartados. El producto $SU(3) \times SU(3)$ contiene naturalmente a $SU(3)$, sin embargo el subgrupo $SU(2) \times U(1)$ de G_{ME} tendría que incorporarse en el $SU(3)$ restante, pero entonces el operador de carga ($Q = eT_3 + Y/2$) sería un generador de $SU(3)$ con traza nula, lo cual implicaría que la suma de las cargas de los cuarks sería cero.

De los grupos restantes solo $SU(5)$ tiene las representaciones complejas necesarias para acomodar el triplete complejo de $SU(3)$ y el doblete complejo de $SU(2)$ de las representaciones fermiónicas de G_{ME} . Por lo cual $SU(5)$ es el único grupo simple de rango 4 que es candidato a una teoría de gran unificación.

Por supuesto se pueden elegir grupos con rango mayor que 4, de la lista de posibles candidatos los más viables son los grupos:

a) $SU(2n+1)$, para los cuales se deben escoger conjuntos de representaciones tensoriales antisimétricas libres de anomalías.

b) $SO(4n+2)$, para los cuales se debe escoger una representación espinorial, y

c) E_6 (álgebra especial de rango 6) con la representación fundamental 27 dimensional.

En las TGU, leptones y cuarks se acomodan en el mismo multiplete y por lo tanto necesariamente se obtiene violación del número bariónico. Lo anterior implica que M_X debe tener un valor muy grande, mayor que 10^{15} GeV, para evitar un decaimiento rápido del protón. En todos los modelos, excepto en el modelo $SU(5)$, se tiene un neutrino derecho y la posibilidad de un término de masa de Dirac, por ejemplo en $SO(10)$ se obtendría $m_\nu \sim m_u$.

En las TGU no supersimétricas, lo que se puede hacer es tratar de extender el grupo de norma a un grupo de rango mayor que 4, así como tratar de asignar un valor mayor a 10^{15} GeV a la escala de gran unificación, sin embargo surgen las complicaciones técnicas de teoría de grupos.

3.1.2 Predicciones fenomenológicas de las TGU

En la construcción de modelos fenomenológicamente viables, un factor importante es el orden de la escala de gran unificación M_X , ya que con ésta se pueden controlar las contribuciones para los procesos de bajas energías. Cuando el grupo G se rompe al grupo del ME, a una escala M_X , los tres acoplamientos g_1, g_2 y g_3 deben coincidir o ser muy parecidos cerca de M_X . Entonces se tienen dos determinaciones de M_X independientes, basadas en los cocientes experimentales α_3/α_{em} y $\sin^2\theta_W = \alpha_1/\alpha_G$ a bajas energías. El hecho de que estas dos determinaciones den la misma M_X , puede ser considerada como una prueba de consistencia de la teoría. Otras constricciones para el valor M_X son la vida media de decaimiento del protón y el cociente m_b/m_τ .

El Lagrangiano efectivo a bajas energías se puede expandir en términos de los operadores O^d de dimensión dinámica d . Para los campos fermiónicos $d = 3/2$ y para los campos bosónicos $d = 1$.

Como la densidad Lagrangiana tiene dimensión 4, se tiene:

$$\mathcal{L}_{\text{efectivo}} = \sum_{i,d} C_i \left(\frac{1}{M_{X_i}} \right)^{d-4} O_i^d. \quad (3.3)$$

Los operadores O_i^d son los operadores del G_{ME} y los operadores invariantes de Lorentz, los cuales pueden formarse a partir de los campos ligeros de la teoría, junto con las derivadas covariantes D que actúan sobre estos campos. Los campos ligeros incluyen a los campos de los fermiones ligeros, a los campos de los bosones de norma del ME y los escalares ligeros de Higgs, H . La masa M_{X_i} corresponde a la de un escalar superpesado ó a la de una partícula de Fermi, que medie la interacción, responsable de la generación de las masas de las partículas, mediante el operador particular O_i^d .

Decaimiento del protón

La estabilidad de los protones se atribuye a la conservación exacta ó aproximada del número bariónico. Éste no parece estar asociado con una simetría de norma, sin embargo si así fuera, la interacción asociada sería de largo alcance y debería acoplarse al número bariónico y no a la masa ¹. De los límites experimentales actuales, se puede concluir que el límite superior en el acoplamiento de ese supuesto bosón de norma bariónico sería $\alpha_B \lesssim 10^{-9} G_N M_P^2 \sim 6 \times 10^{-48}$, con G_N la constante gravitacional y M_P la masa de Planck. Por lo cual es bastante probable que el número bariónico no esté asociado con una simetría no rota.

Entonces si el número bariónico se conserva exactamente, se debería a una simetría global no rota. A diferencia de las simetrías de norma, es fácil escribir las interacciones que violen el número cuántico en una pequeña cantidad sin causar otras dificultades. Las interacciones conocidas no parecen violar la conservación del número leptónico a una rapidez observable. Por lo que es bastante probable que si el protón decae a una rapidez observable, entonces se debe a una nueva interacción. Eso puede explicarse en las TGU, ya que en la mayoría de estas teorías el número bariónico se viola explícitamente debido a los acoplamientos de norma y de

¹Esta interacción podría generar una diferencia aparente entre la masa gravitacional y la masa inercial [4].

Yukawa de los fermiones, a nuevos bosones de la teoría. Entonces el tiempo de decaimiento del protón se atribuye a que los bosones de Higgs y los lepto-cuarks son superpesados.

Los bosones ligeros ordinarios que aparecen en la teoría efectiva tienen números bariónico (B) y leptónico (L) iguales a cero, de tal manera que los operadores construidos enteramente a partir de campos bosónicos, automáticamente conservan el número leptónico. Los operadores responsables de ésta violación deben involucrar al menos tres campos de cuarks, para formar un singlete de color, y al menos cuatro campos fermiónicos para ser un escalar de Lorentz. De esta forma los operadores involucrados con dimensión menor son los cuatro operadores fermiónicos con $d = 6$. Estos operadores pueden generarse por el intercambio de bosones escalares o vectoriales. Para $C \sim e^2$ (en la ecuación (3.3)), los operadores del tipo ($cccl$, c cuark y l leptón sin índices de familia y e la carga electromagnética) producen vidas de decaimiento del nucleón en el intervalo $10^{30} - 10^{35}$ años, si M_X está entre 4×10^{14} y 2×10^{15} GeV.

Entre más grande sea la dimensión del operador, más baja es la escala de energía para producir un efecto observable. Así, la violación del operador $B - L$ y la conservación del operador $B + L$ de dimensión 7, serían significativos fenomenológicamente solo si los bosones mediadores tuvieran masa del orden de 10^{16} GeV.

La conservación de $B - L$ en los operadores relevantes de (3.3), no implica necesariamente que $B - L$ sea una simetría exacta de toda la teoría. La observación de procesos de violación de $B - L$ indicaría la existencia de nuevos umbrales entre M_W y M_X , que pueden asociarse a partículas coloreadas de Higgs, por ejemplo.

Muchos de los modelos basados en grupos de norma semi-simples tienen número fermiónico $F = 3B + L$ como una simetría global. El operador $B - L$ es una combinación lineal del generador de norma y un generador global que involucra sólo campos de Higgs. En algunos casos de rompimiento de la simetría electrodébil (SE) (que da lugar a los cuarks cargados) B y L permanecen como generadores de la simetría global no rota. Para modelos tales como $SU(5)$, $SO(10)$, E_6 , etc., en los cuales los cuarks, anti-cuarks, leptones y antileptones están combinados con representaciones irreducibles, las simetrías generadas por F , B y L están usualmente rotas en forma explícita en el Lagrangiano.

Existen entonces muchas formas de evitar el decaimiento rápido del protón. Por ejemplo modificar las matrices de mezclas, de tal forma que las amplitudes mayores pudieran provenir de procesos tales como $p \rightarrow \tau^+ \pi_0$ ó $p \rightarrow e^+ b^c d$, que están prohibidos por conservación de energía. Sin embargo la razón de decaimiento sólo podría atenuarse un poco más que $\sin^2 \theta_C$ (θ_C ángulo de Cabibbo). En una TGU no supersimétrica, el decaimiento del protón ocurre a un tiempo del orden de $1/M_x^2$ en amplitud.

De esta forma se tiene que el tiempo de decaimiento del protón ($\sim 10^{32}$ años) requiere de una escala alta de energía: $M_X > 10^{15}$ GeV. En muchos modelos M_X se aproxima a la masa de Planck y entonces se deben considerar los efectos de las interacciones gravitacionales.

Predicciones para $\sin^2 \theta_W$, M_X y las masas de los cuarks

Los operadores de dimensión $d = 4$, corresponden a los acoplamientos de norma, de Yukawa y al acoplamiento escalar cuártico del bosón de Higgs. Su dependencia en las escalas grandes ocurre sólo a través de las correcciones logarítmicas de origen radiativo.

En un grupo simple o semi-simple arbitrario, α_3 , α_{em} y $\sin^2 \theta_W$ pueden ser obtenidas (antes

que las correcciones radiativas sean incluidas) a partir de la condición de que todos los acoplamientos de subgrupos distintos son iguales en la teoría no rota, y vienen de sus generadores T_i , esto es que:

$$g_i^2 \text{Tr} (T_i^2) = \text{constante} \quad (3.4)$$

Si se calculan los cocientes de $g_i^2 \text{Tr} (T_i^2)$ para varios acoplamientos, se obtiene que:

$$\sin^2 \theta_W = \frac{e^2}{g^2} = \frac{\text{Tr} (T_3^2)}{\text{Tr} (Q^2)} \quad (3.5)$$

y

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_{em}} = \frac{\text{Tr} (Q^2)}{\text{Tr} (T_1^c)^2}, \quad (3.6)$$

donde T_3 es la tercera componente del operador de isoespín y T^c es el generador de $SU(3)_c$, escogido de tal forma que sea una representación diagonal, y Q es el operador de carga. La suma, implicada en la traza, es sobre los miembros de cualquier representación de la TGU.

Si los estados de una sola familia son asignados a una ó más representaciones irreducibles completas de la TGU (aparte de los posibles nuevos estados, que deben ser neutrales bajo Q , $SU(3)_c$ y $SU(2)$), se tiene que:

$$\sin^2 \theta_W = \frac{\alpha_3}{\alpha_{em}} = \frac{3}{8}. \quad (3.7)$$

La ecuación 3.7 se cumple para $SU(5)$ y $SO(10)$, ya que ambos son grupos simples. Sin embargo, las correcciones radiativas a los acoplamientos y masas en diferentes TGU's pueden diferir considerablemente, ya que dependen del patrón de rompimiento de simetría del grupo G hacia el grupo efectivo del ME, $SU(3)_c \times U(1)_{em}$.

Los modelos con más de una escala de rompimiento de la simetría dan predicciones para la escala de unificación M_X y para $\sin^2 \theta_W$, que pueden diferir significativamente de las ecuaciones (3.5) y (3.6).

3.2 TGU con $SU(5)$ como grupo de norma

El atractivo de esta teoría surgió de la posibilidad de acomodar una familia de quarks y leptones en las representaciones $\bar{5}$ y 10 de $SU(5)$ [5, 6].

3.2.1 Generadores de los bosones de norma de $SU(5)$

$SU(5)$ está definida por su representación adjunta, que es el grupo de matrices de 5×5 complejas con determinante 1, por lo cual hay 50 matrices reales independientes de U .

La condición de unitaridad, $UU^\dagger = 1$, y la condición de unimodularidad, $\det U = 1$, producen 25+1 constricciones, dejando como resultado 24 matrices independientes que definen $SU(5)$:

$$U = \exp \left(-i \sum_{i=1}^{24} \beta^i L^i \right) \quad (3.8)$$

en donde los 24 generadores L_i son hermíticos y con traza nula.

La transformación de una representación arbitraria de $SU(5)$ puede ser descrita en términos de L_i , de tal forma que se puede elegir una base conveniente para L , permitiendo identificar los 24 bosones vectoriales asociados a $V_\mu^{a=1, \dots, 24}$ de $SU(5)$.

3.2.2 Elección de las representaciones fermiónicas

Los fermiones en una representación de un grupo de gran unificación son todos de una sola helicidad, por lo cual es conveniente trabajar en la base que representa a los fermiones con una helicidad definida. Para la representación compleja de la representación fundamental se tiene:

$$\bar{\mathbf{5}}_\alpha = (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3; e, \nu) \quad (3.9)$$

y para la representación antisimétrica de dos índices:

$$\mathbf{10}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}^3 & \bar{u}^2 & u^1 & d \\ & 0 & \bar{u}^1 & u^2 & d \\ & & 0 & u^3 & d^3 \\ & & & 0 & \bar{e} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

El operador de hipercarga esta dado por:

$$Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Si $SU(5)$ es una simetría de norma entonces g_1, g_2 y g_3 deberían poder describirse mediante un solo acoplamiento g_5 , que describiera a una energía determinada las tres fuerzas involucradas.

La evolución de los acoplamientos de norma depende en forma crucial del espectro de fermiones. Como se vió en el capítulo anterior, a un rizo:

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(M_X)} + \frac{b_i}{2\pi} \log \left(\frac{M_X}{\mu} \right) \quad (3.12)$$

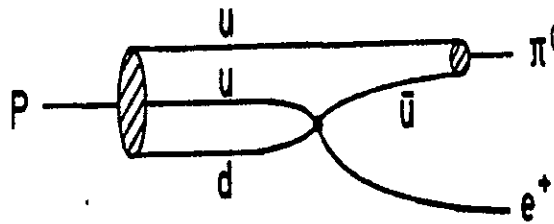


Figura 3.1: $p \rightarrow \pi^0 e^+$ en el modelo mínimo $SU(5)$.

($\alpha_i = g_i^2/4\pi$) y para el modelo mínimo de $SU(5)$:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{3}n_g + \frac{1}{10}H, \\ b_2 &= -\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_g + \frac{1}{6}H, \\ b_3 &= -11 + \frac{4}{3}n_g, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde n_g es el número de familias y H el número de dobletes de Higgs ligeros. Así para $n_g = 3$ y $H=1$ a la escala de aproximadamente $M_X \sim 10^{15}\text{GeV}$, los tres acoplamientos de norma se unifican, con $\alpha_5^{-1} \approx 45$. Por abajo de ese valor la simetría se rompe a $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. El grupo $SU(5)$ produce 24 bosones de norma, doce de los cuales reciben masa del orden de M_X :

$$(24)_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} \text{gluones}(8, 1) & (3, 2) \\ (\bar{3}, \bar{2}) & (W, Z, \gamma) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

y se transforman como $(3, 2) + (\bar{3}, \bar{2})$ de $SU(3) \times SU(2)$. Los nuevos bosones X y Y pueden causar transiciones entre los cuarks y los leptones, ya que estos se encuentran en la misma representación de $SU(5)$. Estas transiciones dan lugar a la violación de los números B y L y al decaimiento del protón (ver Figuras 3.2.2 y 3.2.2).

La reacción $ud \rightarrow \bar{u}e^+$ (Figura 3.2.2) conduce al decaimiento del protón via el operador de dimensión 6. La rapidez de decaimiento del protón se encuentra suprimida por un factor M_X^{-4} , lo cual dá lugar a un tiempo de decaimiento del protón de 10^{30} años. Como esta cota es menor que los límites experimentales, el modelo $SU(5)$ resulta no ser viable. También se ha observado que los datos a la escala electrodébil son incompatibles con el modelo mínimo $SU(5)$.

Sin embargo $B - L$ es conservado en $SU(5)$, esto viene del hecho de que una familia de cuarks y leptones puede ser acomodada en las representaciones irreducibles de $SU(5)$, así se tiene un grupo global $U(1)$ no anómalo con carga $S(\bar{5}) = -3$ y $S(10) = 1$, que implica que

$$B - L = \frac{1}{5}(S + 4Y) = \text{cantidad conservada.} \tag{3.15}$$

Particularmente en $SU(5)$ esto significa que siempre hay un antileptón en el estado final del decaimiento del protón.

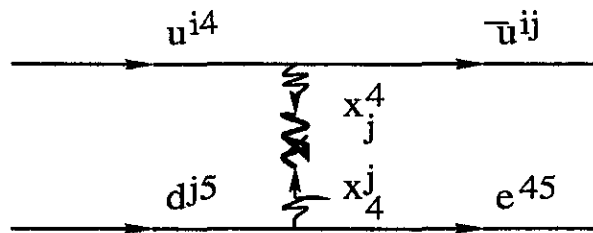
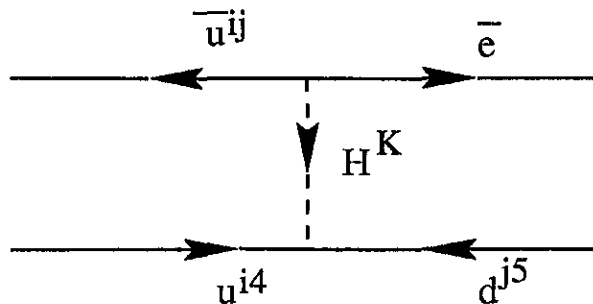

 Figura 3.2: Proceso de violación mediado por bosones de norma $SU(5)$.


Figura 3.3: Decaimiento del protón via el intercambio de bosones Higgs.

El rompimiento a la escala electrodébil, de los grupos de gran unificación, también se puede inducir mediante la introducción de valores esperados entre estados del vacío, $vevs$ de los campos escalares de Higgs. En $SU(5)$ el rompimiento hacia $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ puede lograrse con un escalar ϕ en la representación adjunta, de tal forma que el vev tenga el siguiente patrón:

$$\phi_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Un segundo paso de rompimiento es a $SU(3) \times U(1)_{em}$ del ME, que requiere un $SU(2)$, lo que en un modelo de gran unificación, se generaliza a una componente de doblete en la representación $\mathbf{5}$ de $SU(5)$. Entonces se tendrían los siguientes acoplamientos de Yukawa:

$$g_{ab} \mathbf{H}_5 \times (\mathbf{10})_a \times (\mathbf{10})_b, \quad (3.17)$$

que dá masa a los quarks tipo u , en tanto que

$$g'_{ab} \mathbf{H}_5^* \times (\bar{\mathbf{5}})_a \times (\mathbf{10})_b, \quad (3.18)$$

da masa a los cuarks tipo d y a los leptones.

Así las masas de los leptones y cuarks d provienen del mismo acoplamiento, de tal forma que se puede pensar en relaciones del tipo $m_{bottom} = C m_{\tau}$, en donde C es una constante que depende del modelo. Relaciones similares se presentan también para las masas de las dos

primeras familias, y las TGU pueden dar predicciones que ayuden a entender el origen de las masas de los cuarks y los leptones.

En todas las TGU también se presenta el problema del ajuste fino concerniente a la relación de las dos escalas de rompimiento de la simetría (problema de jerarquía). En el modelo $SU(5)$ en particular, en el potencial de Higgs se tiene un término del tipo:

$$m^2 \mathbf{H}_5 \mathbf{H}_5^* + m' \mathbf{H}_5 \phi_{24} \mathbf{H}_5^*, \quad (3.19)$$

y ϕ debe tomar un vev consistente con (3.16), con $v \sim 10^{15}$ GeV. Con respecto a $SU(3) \times SU(2)$, \mathbf{H} se despliega en $(3, 1) + (1, 2)$ con masas al cuadrado $m^2 + m'v$ y $m^2 - m'v$, respectivamente. El triplete $SU(3)$ de \mathbf{H} debe ser pesado ($M \geq 10^{11}$ GeV), debido al peligro de un decaimiento rápido del protón a través del proceso mostrado en la Figura 3.2.2.

El límite moderado de 10^{11} GeV viene del hecho de que aquí los vértices son de la intensidad de los acoplamientos de Yukawa, que son más pequeños que los acoplamientos de norma que aparecen en la Figura 3.2.2. No hay problema en tener estas masas grandes para el triplete, ya que v se supone del orden de 10^{15} GeV. El problema está en el hecho del que el doblete de Higgs (como parte del ME) debe ser ligero, es decir no exceder la escala de TeV, 13 ordenes de magnitud menor que m , m' y v . Esto puede, en principio, lograrse mediante un ajuste fino de parámetros, de tal forma que $m^2 - 3/2 m'v$ sea pequeño, con lo cual no hay un problema *a priori*, de tal forma que:

$$m^2 - \frac{3}{2} m'v \ll m^2, m'^2, v^2. \quad (3.20)$$

3.3 TGU con $SO(10)$ como grupo de norma

Los grupos $SO(N)$ son convenientes para gran unificación, por que admiten representaciones complejas para $n = 2m$, con m impar y están libres de anomalías para $n \neq 6$.

De esta forma el candidato a grupo de gran unificación más simple, después de $SU(5)$, es $SO(10)$ [7, 8, 3]. A diferencia de $SU(5)$, $SO(10)$ es un grupo de rango 5 con un generador diagonal extra.

Las ventajas con respecto a $SU(5)$ son:

a) La representación espinorial irreducible 16, tiene los números cuánticos adecuados para acomodar todos los fermiones (incluyendo el neutrino derecho) de una generación. Esta representación tiene la descomposición $SU(5)$: $\bar{5} + 10 + 1$. El singlete $SU(5)$ adicional tiene todas las propiedades de un neutrino derecho.

b) Las interacciones de norma conservan paridad, haciendo de ésta parte de una simetría continua.

c) Es el grupo con el cual se puede construir un modelo de unificación mínimo simétrico izquierdo-derecho que incorpore la simetría B-L y es el único grupo simple de gran unificación que no necesita fermiones de espejo. El modelo no tiene simetrías globales.

La representación adjunta es 45-dimensional y se descompone con $24 + 10 + 10 + 1$ con respecto a $SU(5)$. De los 45 generadores de $SO(10)$, 24 son los del subgrupo $SU(5)$. Los otros 21 generadores relacionan a las representaciones $\bar{5}$, 10 y 1.

El Higgs del ME puede ser introducido en la representación fundamental de dimensión 10 de $SO(10)$ y hay un solo acoplamiento de Yukawa $10 \times 16 \times 16$.

El campo de Higgs 10, sin embargo, contiene 2 dobletes de Higgs $SU(2)$: uno se acopla a los cuarks de tipo u y otro a los cuarks de tipo d . Ya que los dos podrían tener diferentes $vevs$, no puede esperarse que el valor de m_t/m_b se encuentre fijo.

Para desarrollar el rompimiento espontáneo de $SO(10)$ se necesitan representaciones de dimensión 45, 16 y/ó 54 y 126.

Los subgrupos máximos de $SO(10)$ son:

$$SO(10) \rightarrow \begin{cases} i) & SU(5) \times U(1) \\ ii) & SO(6) \times SO(4) \quad \text{ó} \\ & SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times D \end{cases} \quad (3.21)$$

donde D es una simetría discreta que genera la transformación: $q_L \rightarrow q_L^c$.

Las constricciones a bajas energías sobre $\sin^2\theta_W$ y α_s son impuestas para aislar los valores de las escalas intermedias correspondientes a varias cadenas de rompimiento de simetrías. Existen dos posibilidades distintas para el caso $ii)$, dependiendo de que D y la simetría local $SU(2)_R$ se rompan a la misma ó a distintas escalas de energía. Para el caso $i)$ el valor que se obtiene para el decaimiento del protón es menor que en el caso $SU(5)$, por lo cual la simetría intermedia $SU(5) \times U(1)$ esta excluída experimentalmente.

Si se ocupa la representación espinorial para romper $SO(10)$, aparecen los campos bosónicos X_μ y Y_μ de $SU(5)$ y aparte dos nuevos campos bosónicos X'_μ y Y'_μ , que pueden ocuparse para mediar el decaimiento del protón.

3.4 Modelos basados en otros grupos de norma

El siguiente paso en la construcción de modelos de gran unificación es E_6 , que ha recibido bastante atención en los estudios de teorías de gran unificación, ya que si fuera parte de la teoría, entonces se tendría oportunidad de ir más allá de la construcción del formalismo de Yang-Mills y poder así explicar por qué es correcta la elección de un grupo determinado.

El grupo E_6 tiene representaciones irreducibles con representaciones conjugadas distintas a sí mismas, por lo cual es el único grupo excepcional para el cual una teoría de sabor quiral es posible. Más aún contiene como subgrupo a $SO(10) \times U(1)$ y 78 bosones de norma que se descomponen mediante las representaciones $45 + 16 + \overline{16} + 1$ de $SO(10)$. El acoplamiento de Yukawa $(27)^3$ es único, sin embargo se generan muchos fermiones adicionales, y el rompimiento requiere al menos una representación 351-dimensional.

3.5 Teorías Supersimétricas de Gran Unificación (TSGU)

Las TGU están basadas en grupos de Lie que asignan las partículas a representaciones de un espín determinado, pero no establecen una relaciones entre partículas de diferente espín.

En las TGU no supersimétricas, en particular, no se entiende por qué hay tantas interacciones escalares y de Yukawa, ya que sólo las interacciones vectoriales están especificadas por

el principio de norma local. Precisamente la supersimetría (SUSI), está definida mediante el álgebra de generadores anticonmutantes de una simetría que se transforman en las representaciones espinoriales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz. Ya que estos nuevos generadores de simetría son espinores y no escalares, la SUSI no es una simetría interna, es por tanto una extensión del álgebra de simetría de Poincaré.

Por lo anterior la SUSI se ha incorporado a las Teorías de Gran Unificación, dando como resultado las TSGU, que han tenido los siguientes logros:

- a) Poder resolver el problema de la jerarquía.
- b) Fijar la escala de Gran Unificación de tal forma que $M_X > 10^{15}$ GeV.
- c) Explicación de la diferencia de masas entre el triplete y el doblete de Higgs.
- d) Poder evitar el decaimiento rápido del protón, asignando operadores de dimensión 5 a los procesos de decaimiento del protón.

Como las TSGU serían efectivas a escalas altas de energía, la supersimetría se puede incorporar a escalas más bajas de energías, por arriba de la escala electrodébil. Se tendrían ahora tres escalas de energías: la escala en la cual la TSGU deje de ser exacta (por abajo de M_X o del orden) y pueda ser descrita por un modelo supersimétrico hasta que la SUSI se rompa a la escala M_S , dando lugar al grupo del ME, que después se rompe al grupo efectivo a bajas energías $SU(3)_c \times U(1)_{em}$.

Los modelos supersimétricos que describan el comportamiento de los parámetros medibles, desde M_S hasta M_X , pueden ser distintos, dependiendo de el número N de generadores del álgebra supersimétrica.

Las TSGU se construyen a partir del grupo de norma, G y el grupo del álgebra supersimétrica N . El modelo más simple ocurre para $N=1$ y la introducción de dos dobletes de Higgs. Este modelo ha dado predicciones correctas cuando se extrapolan sus resultados por debajo de M_S , por lo cual se piensa que puede ser el más viable fenomenológicamente, aún cuando el espectro de partículas que predice no se ha detectado experimentalmente. En el Apéndice C se presentan las propiedades generales de la supersimetría $N=1$, incluyendo el rompimiento de la supersimetría.

En el siguiente Capítulo se presenta el MESM, y a continuación las propiedades generales de los modelos supersimétricos basdos en $SU(5)$.

3.6 Modelo Mínimo Supersimétrico SU(5)

En este modelo también se utilizan las representaciones $\bar{5} + 10$ para acomodar una familia de leptones y cuarks. Los supercampos quirales $\bar{5}$ y los supercampos quirales 10 se escogen para describir los campos de materia. En este modelo se tienen partículas más ligeras que en el modelo $SU(5)$ no supersimétrico y por lo tanto la evolución de los acoplamientos de norma cambia. Aquí se incorporan dos juegos de supercampos de Higgs para generar la masa de los fermiones: $H_u \in 5$ y $H_d \in \bar{5}$. Se escoge el supercampo de Higgs $\Phi \in 24$ para romper $SU(5)$ hacia G_{ME} . La contribución más importante viene de los gauginos. Como resultado $M_X \sim 2 \times 10^{16}$ GeV. Más aún este modelo da una predicción correcta para $\sin^2 \theta_W(M_Z)$.

Para que el modelo sea supersimétrico, se deben añadir fermiones de norma en la representación adjuta del grupo $SU(5)$ para completar el supermultiplete vectorial. Las tres familias de

cuarks y leptones reciben compañeros complejos escalares que forman supermultipletes quirales $Y_i(\bar{5})$ y $X_i(10)$ con $i = 1, 2, 3$. También se tienen los tres multipletes de Higgs (que aparecieron en el modelo no supersimétrico $SU(5)$): $H(\bar{5})$, $\bar{5}$ y $\phi(24)$. La acción de este modelo está dada por los términos cinéticos y de norma usuales, y por el superpotencial:

$$W = Y^{ij} X_i X_j H + Y^{ij} X_i Y_j \bar{H} + \lambda_1 H \phi H + \lambda_2 \phi^2 + M' H \bar{H}, \quad (3.22)$$

sin índices de $SU(5)$. Como en el caso del ME un solo doblete de Higgs no puede dar masa a todos los cuarks y leptones, debido tanto a las anomalías como a la necesidad de dar masa a todos los cuarks y leptones a través de los acoplamientos de Yukawa Y^{ij} y Y'^{ij} . Los demás términos en (3.22) definen el potencial de Higgs, en donde M y M' son del orden de magnitud de la escala de gran unificación M_X .

El grupo $SU(5)$ debe romperse a G_{ME} en M_X y se supone que la supersimetría debe de romperse a una escala pequeña comparada con M_X para tener implicaciones en el sector de bajas energías. El potencial de Higgs está dado por:

$$V_H = \left| \frac{\partial W}{\partial \phi} \right|^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial H} \right|^2 + \left| \frac{\partial W}{\partial \bar{H}} \right|^2, \quad (3.23)$$

y los mínimos supersimétricos están dados por:

$$\lambda_1 h \bar{h} + 3\lambda_2 \phi^2 + 2M_\phi = 0, \quad \lambda_1 \phi \bar{h} + M' \bar{h} = 0, \quad \lambda_1 \phi h + M' h = 0, \quad (3.24)$$

donde h , \bar{h} y ϕ son las componentes escalares de H , los índices de \bar{H} y ϕ no se muestran. Existen varios mínimos degenerados para este potencial, pero sólo uno debe corresponder al rompimiento apropiado de $SU(5)$ a G_{ME} , con $\langle h \rangle = \langle \bar{h} \rangle = 0$ y a la validez de:

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & & & -3/2 \\ & 0 & & & -3/2 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

en donde v debe ser proporcional a M/λ_2 (existen modificaciones de este modelo en los cuales es posible tener a (3.25) como el mínimo más bajo no degenerado). Con este rompimiento de $SU(5)$, las componentes de H y \bar{H} , tendrán en general masa del orden de la escala de gran unificación. Sin embargo los dobletes $SU(2)$ en H y \bar{H} no deben ser demasiado pesados, por que constituyen un ingrediente vital del sector a bajas energías del ME. Como en el modelo $SU(5)$ no supersimétrico, se debe hacer un ajuste fino de los parámetros en el superpotencial, por lo tanto para asegurar que los dobletes de Higgs no tengan masa, se puede imponer que:

$$M' = \frac{3}{2} \lambda_1 v, \quad (3.26)$$

esta relación es válida a todos los órdenes en teoría de perturbaciones, por lo que no tiene que refrendarse para cada orden, como en el modelo no supersimétrico. Lo más importante es que (3.26) es una relación exacta, que se puede obtener insertando las condiciones (3.24) en

(3.25), y las masas del doblete de Higgs se “ajustan finamente” para ser exactamente cero, en forma contraria al caso del $SU(5)$ no supersimétrico, donde los términos pesados en (3.20), producen una escala de magnitud 13 veces más pequeña, lo cual es significativo, ya que se tiene el prejuicio de que sería más fácil explicar el valor $m/M_X = 0$ que el valor $m/M_X = 10^{-13}$. La relación (3.26) puede ser consecuencia de los coeficientes de Clebsch-Gordan de los grupos que se estudien, pero es difícil imaginar como se puede producir un número como 10^{-13} .

Por otra parte el contenido de materia del modelo $SU(5)$ supersimétrico del sector a bajas energías cambia con respecto al no supersimétrico. La forma general para la evolución de las constantes de acoplamiento está dada en (3.12), y para el caso supersimétrico se tiene:

$$b_3 = -9 + 2n_g, \quad b_2 = -6 + 2n_g + H/2, \quad b_y = 2n_g + 3H/10, \quad (3.27)$$

donde n_g es el número de familias (3) y H es el número de dobletes de Higgs. Para determinar la escala de gran unificación se pueden utilizar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &= \frac{1}{d} [(b_2 - b_3) + (b_y - b_2) \frac{5\alpha}{3\alpha_3}] \quad , \quad \frac{1}{2\pi} \log(M/\mu) = \frac{1}{d} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{8}{3\alpha_3} \right], \\ \frac{1}{\alpha_5} &= \frac{1}{d} \left[\frac{1}{\alpha_3} (b_2 + \frac{5}{3} b_y) - \frac{b_3}{\alpha} \right] \quad , \quad d = b_2 - b_3 + \frac{5}{3} (b_y - b_3). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para $\alpha_3(M_Z) \approx 0.123$, $\alpha^{-1}(M_Z) \approx 128$ y $\sin^2 \theta_W \approx 0.23$ se obtiene que: $M_X \approx 2 \times 10^{16} \text{ GeV}$ y $g_5 \approx \frac{1}{25}$. Debido a que el tiempo de decaimiento del protón se atenúa por un factor M_X^{-4} , se obtiene un tiempo de decaimiento de $10^{33} - 10^{34}$ años, más allá de los límites experimentales presentes. La introducción de nuevas partículas con masas comparadas a M_X modificaría el valor de M_X , pero en general un modelo supersimétrico tendrá un valor mayor de M_X que su contraparte no supersimétrica. Sin embargo hasta ahora se ha considerado el decaimiento del protón mediado por bosones de norma, pero también puede ocurrir via los bosones de Higgs. Pero en el contexto de las TSGU, surge un nuevo mecanismo: el *decaimiento del protón via los operadores de dimensión (dinámica) 5*. Este proceso involucra cuatro fermiones, es decir un operador de dimensión 6, y por consideraciones dimensionales se puede ver que la amplitud de decaimiento es proporcional a $1/M_X^2$. Con supersimetría, también se puede tener un proceso en el cual dos cuarks aniquilen a los compañeros escalares de los anti-cuarks y los anti-leptones (Figura 3.6), esto es un proceso que involucra dos fermiones y dos bosones: un operador de dimensión 5. En consecuencia su amplitud es proporcional a $1/M_X$. Los escalares $\varphi_{\bar{q}}$ y $\varphi_{\bar{l}}$ tienen un segundo paso de decaimiento para producir sus compañeros \bar{q} y \bar{l} , pero esto puede pasar a través del intercambio de un gaugino $SU(2)$ sin involucrar un propagador de masa M_X . Como resultado, el decaimiento del protón via los operadores de dimensión 5 se encuentra atenuado solo por una potencia en M_X .

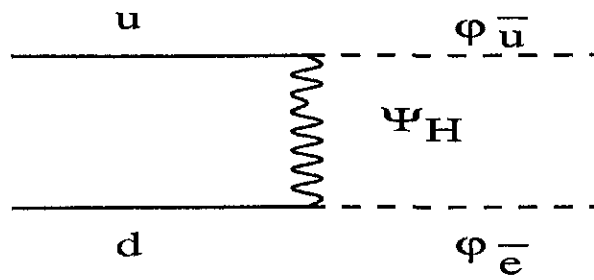


Figura 3.4: Decaimiento del protón a través de los operadores de dimensión 5.

Bibliografía

- [1] P. Langacker. Grand unified theories and proton decay. *Physics Reports*, 72(4):185–385, 1981.
- [2] G. Ross. *Grand Unified Theories*. Addison Wesley, 1982.
- [3] R. Slansky. Group theory for unified model building. *Physics Reports*, 79(1):1–128, 1981.
- [4] T.D. Lee and C.N. Yang. *Physics Review*, 98, 1955.
- [5] H. Georgi and S.L. Glashow. *Physics Review Letters*, 32:438, 1974.
- [6] H. Georgi, H.F. Quinn, and S. Weinberg. *Physics Review Letters*, 33:451, 1974.
- [7] H. Georgi. *Particles and Fields*. AIP, 1975.
- [8] R. Mohapatra. *Unification and Supersymmetry*. Springer-Verlag, 1992.

Capítulo 4

Extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar

4.1 Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo: MESM

Mientras en el ME los acoplamientos de norma se unifican de dos en dos, formando el triángulo de gran unificación, en la extensión Mínima Supersimétrica del Modelo Estándar (MESM), los tres acoplamientos de norma se unifican en un punto ¹ alrededor de 10^{16} GeV. Para introducir este modelo en las TSGU es necesario conocer la evolución de los parámetros que se conserven del ME, acoplamientos de norma y de Yukawa, así como los parámetros puramente supersimétricos. A continuación se presenta una breve descripción del modelo, así como de la evolución numérica de las ecuaciones del grupo de renormalización del MESM.

El modelo supersimétrico más simple que puede ser construido es el que se obtiene a partir del producto directo del grupo interno de simetría con un grupo supersimétrico $N = 1$, el cual corresponde a la introducción de dos campos de Higgs, que son necesarios para la cancelación de las anomalías quiral y $SU(2)$ global, que después de la ruptura de la supersimetría se acoplan a los cuarks tipo d y u para darles masa. Los bloques básicos de construcción son multipletes supersimétricos sin masa, ya sea quirales o vectoriales, que puedan acomodar al grupo del ME: $G_{ME} = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ².

En la representación adjunta del grupo del ME no hay fermiones, por lo cual, sin agrandar G_{ME} , se deben añadir los fermiones de norma (gauginos λ), que junto con los bosones de norma V_μ forman el supercampo vectorial sin masa $V = (V_\mu, \lambda, D)$, donde D es un campo auxiliar.

Sin embargo todavía se tiene el problema de asignar los fermiones conocidos a los supermultipletes. Para que la teoría sea renormalizable, todos los campos vectoriales de la teoría deben ser campos de norma vectoriales. Sin agrandar G_{ME} , los fermiones no pueden ser asignados a los supermultipletes vectoriales con los supercompañeros vectoriales, por lo que deben pertenecer a los supermultipletes quirales con supercompañeros escalares.

De esta forma debe duplicarse el número de estados introduciendo campos escalares complejos para acompañar a los fermiones conocidos en los supermultipletes quirales. Estos cam-

¹Dentro del error producido por los valores experimentales de los parámetros medidos a bajas energías.

²El Apéndice C contiene una breve descripción del álgebra supersimétrica, el Lagrangiano supersimétrico y el Rompimiento Suave de la Supersimetría (RSS).

pos están en la misma representación del G_{ME} tal como sus compañeros fermiónicos y son conocidos como *s-fermiones* (de “scalar fermions”). El supercampo quiral que los describe es $\bar{\phi} = (\bar{\varphi}, \bar{\psi}, F)$, en donde φ es un campo escalar con números cuánticos asociados al espinor de Weyl ψ y F es un campo auxiliar³.

Así se tienen los supercampos de los dobletes izquierdos de cuarks \bar{Q} , los supercampos de los dobletes leptónicos \bar{L} , los supercampos izquierdos de los singletes de anti-cuarks \bar{q} , y los supercampos izquierdos de los singletes antileptónicos \bar{l} . En la Tabla (4.1) se muestran los supermultipletes del MESM y las partículas asociadas.

Los acoplamientos de los bosones de norma y los acoplamientos a los campos de los leptones y los cuarks corresponden a los del ME.

Por último, se deben asignar los escalares de Higgs del contenido de materia del ME a supermultipletes quirales. En este esquema, se esperaba que el sector de Higgs fuera simplificado si los escalares de Higgs se asignaran a los mismos supermultipletes que los fermiones conocidos. Una posibilidad obvia es identificar los dobletes de Higgs correspondientes a $SU(2)$ como los compañeros de un doblete leptónico. Sin embargo esto no es posible, ya que no se obtiene un espectro aceptable de masas. La razón es que la supersimetría restringe las formas posibles de los acoplamientos de Yukawa, y los acoplamientos necesarios para dar masa a los cuarks y a los leptones cargados no están presentes.

El superpotencial W (polinomio de grado tres en los campos⁴) debe estar formado sólo con el producto de los supermultipletes (quirales izquierdos) y no con sus conjugados (quirales derechos). Así en la ecuación para el superpotencial, el doblete de Higgs H_1 debe contener nuevos fermiones cargados de Weyl y deben añadirse más fermiones cargados para permitir la construcción de las masas de Dirac, asegurando de esta manera que la teoría final no tenga estados cargados sin masa (ya que no se puede dar masa de Majorana a los fermiones cargados sin violar la conservación de la carga). La solución más simple es introducir otro supercampo de doblete quiral $SU(2)$, que sea identificado con H_2 . En la construcción de generalizaciones de modelos simples de gran unificación del ME, de hecho esta es la única posibilidad. Esto debido a que si H_2 se identifica con un doblete leptónico, el decaimiento del protón ocurre en forma rápida debido a que las componentes del triplete de color (que median el decaimiento del protón) deben ser necesariamente ligeras.

De esta forma se tienen dos nuevos supermultipletes quirales, cuyos compañeros escalares son identificados con los escalares de Higgs, necesarios para romper el grupo G_{ME} al grupo del lagrangiano efectivo $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ y dar así masa a todos los fermiones cargados.

Los campos de Higgs son:

$$H_1 = H_u = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = H_d = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Ahora la cantidad que tiene sentido en los cálculos de las masas de los fermiones es $\tan\beta = v_{H_1}/v_{H_2} = v_1/v_2$.

³ibid.

⁴ibid.

Tabla 4.1: Contenido de Materia del MESM

Supercampo	Supermultiplete	Partícula	Nombre	Espín
Vectorial de norma V	V_G	$g_\mu^{a=1,\dots,8}$	Gluones	1
	V_W	W_μ^\pm, Z_μ	Bosones W, Z	1
		$\widetilde{W}_\mu^\pm, \widetilde{Z}_\mu$	Wino, Zino	1/2
	V_γ	γ_μ	Fotón	1
Quirales ϕ		γ	Fotino	1/2
	Doblete Q		Doblete de cuarks de $SU(2)_L$	
	Doblete L		Doblete de leptones de $SU(2)_L$	
	Singletes			
	$q_R = u, c, t$	u, c, t	cuarks tipo u	1/2
	$q_L = d, s, b$	d, s, b	cuarks tipo d	1/2
	$\widetilde{q}_L = \widetilde{u}, \widetilde{c}, \widetilde{t}$	$\widetilde{u}, \widetilde{c}, \widetilde{t}$	s-cuarks tipo u	0
	$\widetilde{q}_L = \widetilde{d}, \widetilde{s}, \widetilde{b}$	$\widetilde{d}, \widetilde{s}, \widetilde{b}$	s-cuarks tipo d	0
	$l_L = e, \mu, \tau, \nu$	e, μ, τ, ν	leptones	1/2
	$\widetilde{l}_L = \widetilde{e}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\nu}$	$\widetilde{e}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\tau}, \widetilde{\nu}$	s-leptones	0
	Dobletes			
H_1, H_2		Dobletes de Higgs		
$\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2$		Dobletes fermionicos de Higgs		

Por lo anterior expuesto, el superpotencial puede escribirse de la siguiente forma:

$$W = W_1 + W_2, \quad (4.2)$$

donde

$$W_1 = \bar{u}Y_u H_u Q + \bar{d}Y_d H_d Q + \bar{e}Y_e H_d L + \mu H_u H_d + h.c., \quad (4.3)$$

Y_u, Y_d y Y_e son las matrices de Yukawa 3×3 , sin tomar en cuenta índices de color, μ es un acoplamiento asociado a los campos de Higgs, que son los responsables de la generación de masas al romperse la supersimetría.

A diferencia del ME, en donde la simetría de norma y la renormalizabilidad conducen a la conservación de los números leptónico y bariónico, en el MESM no se tiene esa situación conveniente, ya que el doblete leptónico y el del Higgs tienen los mismos número cuánticos bajo G_{ME} , de tal forma que aparecen términos no deseados en el superpotencial:

$$W_2 = Q^\alpha L^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \bar{d} + L^\alpha \bar{e} L^\beta \epsilon_{\alpha\beta} + \bar{u} \bar{d} \bar{d}, \quad (4.4)$$

α y β son índices de sabor y ϵ . Estos términos violan explícitamente B y L y conducen al decaimiento rápido del protón (suponiendo que el compañero supersimétrico del cuark d sea más ligero a la escala de gran unificación). La cancelación de los términos de W_2 puede lograrse mediante la introducción de una simetría global (simetría R)⁵.

⁵Ver Apéndice.

4.2 Fenomenología del MESM

La supersimetría exacta implicaría la existencia de estados fermiónicos y bosónicos degenerados en el valor de la masa, situación que no se presenta en la naturaleza, por lo cual si la supersimetría existe debe romperse a una escala de energía determinada M_S . Sin embargo, un rompimiento espontáneo de la supersimetría es muy restrictivo [1] para la construcción de modelos. Ante esto la solución más viable parece ser la introducción de términos de rompimiento suave en el Lagrangiano. Las escalas a las que se introducen dependen de prejuicios teóricos. En vista de la unificación de los acoplamientos de norma con la supersimetría, parece natural introducir las tres masas de los gauginos a la escala de gran unificación. Entonces se puede notar que las escalas a las que las partículas s , las masas de los bosones Higgs y los acoplamientos trilineales que entran en el Lagrangiano pueden estar, es en principio en algún lugar intermedio entre la escala de Planck y la escala electrodébil.

4.2.1 Ecuaciones de renormalización del MESM

Se espera que en un modelo de Gran Unificación se tengan relaciones entre los acoplamientos de Yukawa y las interacciones trilineales del superpotencial ⁶, en la escala de unificación, para que a partir de esto se puedan correr las ecuaciones del Grupo de Renormalización del MESM hasta que la supersimetría se rompa y después se puedan hacer evolucionar los parámetros del ME a la escala de las interacciones electrodébiles.

Las funciones β a dos rizados para los acoplamientos supersimétricos, tanto las de los acoplamientos de norma como las de los parámetros del superpotencial, se conocen desde hace tiempo [2, 3, 4]. Después las funciones β a dos rizados para los parámetros de masa del gaugino fueron presentadas, y actualmente se dispone de las ecuaciones del grupo de renormalización a dos rizados para los términos del rompimiento suave de la supersimetría, para cualquier modelo y en particular para el MESM [5].

Entonces si el superpotencial (4.3) es el correcto para describir el MESM, la evolución de los acoplamientos de norma esta descrita por la misma ecuación que la del ME (ver ecuación 2.11), ya que la teoría supersimétrica no añade nuevos acoplamientos de este tipo.

En el sector de Yukawa la ecuación (2.12) también describe la evolución de las funciones β , pero las funciones β cambian para el modelo supersimétrico (ver Apéndice A.2).

La evolución de los valores esperados sobre estados del vacío de los Higgs está dado por:

$$\frac{d \ln v_{H_u, H_d}}{dt} = \frac{1}{16\pi^2} \gamma_{H_u, H_d}^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \gamma_{H_u, H_d}^{(2)}. \quad (4.5)$$

El Lagrangiano de RSS, que contiene acoplamientos escalares, para la familia más pesada puede escribirse como:

$$\mathcal{L} = \hat{u} \mathbf{h}_u \hat{Q} \hat{H}_u + \hat{d} \mathbf{h}_d \hat{Q} \hat{H}_d + \hat{e} \mathbf{h}_e \hat{Q} \hat{H}_u + B \hat{H}_u \hat{H}_d + h.c., \quad (4.6)$$

donde \mathbf{h}_u , \mathbf{h}_d , \mathbf{h}_e son matrices de 3×3 en el espacio de familias, y el acento circunflejo denota la componente escalar de cada supercampo quiral. Las masas escalares son del tipo $(m^2)_i^j$:

$$\mathcal{L} = m_{H_u}^2 \hat{H}_u^\dagger \hat{H}_u + m_{H_d}^2 \hat{H}_d^\dagger \hat{H}_d + \hat{Q}^\dagger \mathbf{m}_Q^2 \hat{Q} + \hat{L}^\dagger \mathbf{m}_L^2 \hat{L} + \hat{u} \mathbf{m}_u^2 \hat{u}^\dagger + \hat{d} \mathbf{m}_d^2 \hat{d}^\dagger + \hat{e} \mathbf{e}_e^2 \hat{e}^\dagger. \quad (4.7)$$

⁶Aunque no siempre las haya.

aquí también m_Q^2 , m_L^2 , m_u^2 , m_d^2 , m_e^2 son matrices de 3×3 en el espacio de familias.

Por último la masa de los gauginos para los subgrupos $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ tienen masas M_3 , M_2 y M_1 respectivamente.

Las ecuaciones del GR para las masas de los gauginos son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} M_a = \frac{2g_a^2}{16\pi^2} B_a^{(1)} M_a + \frac{2g_a^2}{(16\pi^2)^2} \left[\sum_{b=1}^3 B_{ab}^{(2)} g_{ab}^2 (M_a + M_b) \right. \\ \left. + \sum_{x=u,d,e} C_a^x (\text{Tr}[Y_x^\dagger h_x] - M_a \text{Tr}[Y_x^\dagger Y_x]) \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La función β del término μ del superpotencial es:

$$\frac{d}{dt} \mu = \frac{1}{16\pi^2} B_\mu^{(1)} + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \beta_\mu^{(2)}, \quad (4.9)$$

donde $B_\mu^{(1)}$ y $B_\mu^{(2)}$ están dadas en el Apéndice A.3.

Obtención de los parámetros del Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo

Para empezar la integración de las funciones β en un punto determinado se necesitan conocer los valores de los parámetros supersimétricos esa escala. Debido a que sólo se conocen los valores experimentales de los parámetros a bajas energías, se puede hacer una evolución de las ecuaciones del grupo de renormalización del ME hasta la escala de la supersimetría, donde se hacen evolucionar las ecuaciones del grupo de renormalización del MESM. Sin embargo para un modelo en particular, es deseable tener relaciones entre los parámetros del MESM a una escala de energía (por ejemplo la de gran unificación), que permitan empezar a integrar a esa escala las ecuaciones, y de esa forma hacer predicciones a bajas energías.

Evolución numérica de las ecuaciones del GR del MESM

En el esquema de renormalización \overline{SM} , las masas físicas de las partículas, M se determinan a partir de la relación:

$$M = m(\Lambda)|_{\Lambda=M}, \quad (4.10)$$

excepto para la masas del bottom y el top. Esta ecuación se resuelve fácilmente mediante la integración de las ecuaciones del GR para diferentes masas, tomando en cuenta la escala de validéz. Debido a que los parámetros asociados a la supersimetría adquieren significado a escalas altas de energía, se puede empezar la evolución a la escala de gran unificación: $M_X \sim 10^{16} \text{GeV}$. En algunos casos se espera que las masas de los gauginos sean iguales a un valor común. El potencial de Higgs debe ser analizado a una escala baja de energía, la cual puede ser M_Z .

Es posible establecer relaciones entre las masas de las partículas supersimétricas (a la escala en la cual se empiezen a evolucionar) para simplificar los valores de los parámetros supersimétricos. Por ejemplo, la condición de *universalidad* (que no siempre es válida), requiere

que a la escala M_X todos los escalares deban tener una masa común, m_o :

$$\begin{aligned} m_{\tilde{Q}_i}(M_X) &= m_{\tilde{u}_i}(M_X) = m_{\tilde{d}_i}(M_X) = m_{\tilde{L}_i}(M_X) \\ &= m_{\tilde{e}_i}(M_X) = m_{H_u}(M_X) = m_{H_d}(M_X) \\ &= m_o, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Los gauginos también tendrían una masa común:

$$M_1(M_X) = M_2(M_X) = M_3(M_X) \equiv m_{1/2} \quad (4.12)$$

Los coeficientes de los términos suaves trilineales deben de ser iguales a A_0 en M_X .

La restricción en el espacio de parámetros implica que:

$$m_b = (M_X) = m_\tau(M_X) \quad (4.13)$$

Estas relaciones dependen del modelo de TSGU que se escoja, como se verá en el siguiente capítulo, las condiciones de finitud imponen reglas de sumas sobre las masas de los escalares suaves, reduciendo el número de parámetros libres.

Integración de las ecuaciones del GR sin introducción de términos suaves

La evolución de los acoplamientos de Yukawa y de norma, así como del valor de $\tan\beta$ puede llevarse a cabo sin la introducción de términos suaves, para buscar un valor en el cual las constantes de norma se unifiquen.

El problema de la integración es análogo al caso del ME:

1. Se tiene que escoger una escala a la que se inicie la evolución. Si esta es la escala electrodébil (EW), las ecuaciones del GR del ME se deben evolucionar sólo hasta la escala del rompimiento de la SUSI, en donde se imponen las condiciones de supersimetría, y después se evolucionan las ecuaciones del GR del MESM hasta la escala en la cual se unifiquen, M_X . Si se inicia desde una escala de unificación, entonces el proceso se invierte.

Para cada caso se tienen diferentes ventajas. Si se empieza en EW, se pueden elegir los valores experimentales más precisos de los parámetros del ME, y al llegar a la escala de TSGU, se predice el valor de E_{GUT} y α_x , que esten de acuerdo con los datos experimentales. Por otro lado, si se empieza a la escala de TSGU, se tienen las condiciones heredadas de las TSGU y se pueden hacer predicciones a bajas energías, al mismo tiempo que corroborar que los valores obtenidos así sean compatibles con los valores experimentales.

En este caso para integrar las ecuaciones del GR utilicé una subrutina de integración de ecuaciones diferenciales acopladas: *DDEQMR*, de las librerías del CERN, como en el caso del ME, y una subrutina escrita en *FORTTRAN*, que contiene la información de las funciones β de los parámetros del MESM sin la inclusión de términos suaves. La escala que escogí para iniciar la evolución fue la escala EW: M_Z , y la escala final M_X . Los valores obtenidos en M_X fueron comparados con los impuestos por las restricciones de gran unificación. Después, estos parámetros se integraron hasta la escala de M_S y finalmente a la escala de M_Z . Este proceso debió repetirse hasta encontrar una convergencia en los valores obtenidos.

En este caso el valor de gran unificación encontrado fue de $\ln(M_X/\mu) \sim 40$.

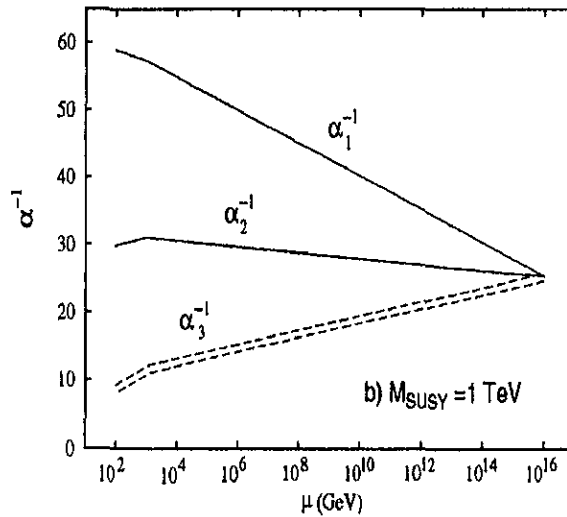


Figura 4.1: Evolución del inverso de los acoplamientos de norma y triángulo GUT en un ejemplo con SUSI.

Integración de las ecuaciones del GR con la introducción de términos suaves

Si se quieren introducir los términos suaves de rompimiento, éstos se hacen evolucionar desde M_S , con las condiciones de frontera en la escala M_X , hasta donde la supersimetría se rompa a la escala M_S . Para los modelos finitos que se exponen en el siguiente capítulo, se utiliza la evolución de los términos de rompimiento suave.

Auto-estados de masa de las partículas supersimétricas

Las partículas supersimétricas que pueden ser detectadas en el laboratorio (en caso de que existan) son los auto-estados de masa producidos por los campos supersimétricos, de esta forma se tienen:

Los winos y los bosones de Higgs cargados, se mezclan para formar dos auto-estados de fermiones cargados:

$$\text{los } \textit{Charginos}: \tilde{\chi}_{1,2}^{\pm}.$$

Los zinos, γ y los bosones de Higgs neutrales, forman cuatro auto-estados de fermiones neutrales:

$$\text{los } \textit{Neutralinos}: \tilde{\chi}_{1,2,3,4}^0.$$

Los auto-estados de masa escalares están dados por la mezcla de los super-compañeros de los fermiones derechos e izquierdos. Se supone que la mezcla es proporcional al acoplamiento de Yukawa correspondiente a cada fermion:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1 &= \tilde{t}_L \cos \theta_{LR} + \tilde{t}_R \operatorname{sen} \theta_{LR} \\ \tilde{t}_2 &= -\tilde{t}_L \operatorname{sen} \theta_{LR} + \tilde{t}_R \cos \theta_{LR}\end{aligned}$$

Los auto-estados de masa de las partículas de Higgs se presentan en el Capítulo 6.

Las partículas supersimétricas no se desacoplan necesariamente a una escala, aunque esta suposición es válida y puede reducirse así el número de parámetros en las ecuaciones del grupo de renormalización. La masa de las partículas supersimétricas adquiere sentido cuando estas están desacopladas, pero si se supone una sola escala de rompimiento de la supersimetría, entonces las masas de las superpartículas estarán dadas a esa escala (M_S).

Las matrices de auto-estados de masa para las partículas supersimétricas pueden encontrarse en [6]. Las cotas experimentales de estos valores se presentan en el Capítulo 6, en donde se comparan con los valores obtenidos a partir de los modelos finitos que se presentan.

Bibliografía

- [1] L. O’Raifeartaigh. *Nuclear Physics B*, 331, 1975.
- [2] D.R.T. Jones and L. Mezincescu. *Physics Letters*, B(136):242, 1984.
- [3] P. West. *Physics Letters*, B:371, 1984.
- [4] D.R.T. Jones and L. Mezincescu. *Physics Letters*, B138:293, 1984.
- [5] Stephen P. Martin and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations for soft supersymmetry-breaking couplings. *Physical Review*, D(50):2282, 1994.
- [6] V. Barger, M.S. Berger, and P. Ohmann. The supersymmetric particle spectrum. *Physics Review*, D(49), 1994.

Capítulo 5

Teorías Finitas de Gran Unificación: TFU

5.1 Motivación

Como mencioné en el capítulo anterior, las teorías de Gran Unificación (*TGU*) pueden hacer predicciones para parámetros tales como $\sin^2\theta_W$ y los cocientes de las masas de los fermiones, los cuales son parámetros libres en el Modelo Estándar (ME). Sin embargo, no son fenomenológicamente viables, ya que como comenté, el modelo TGU $SU(5)$ no supersimétrico predice el decaimiento del protón, además del ajuste fino de parámetros. Las Teorías Supersimétricas de Gran Unificación (TSGU) resuelven el problema del decaimiento del protón y también pueden hacer predicciones para parámetros a bajas energías, sin embargo siguen teniendo muchos parámetros libres.

Existe otro principio que apunta en la dirección de una reducción mayor de parámetros libres de una teoría de norma: la finitud de las funciones β del grupo de renormalización a todos los órdenes ¹. Este principio se basa en la idea teórica de que no se necesite de renormalizaciones infinitas a cierta escala de energía y que la teoría unificada de las interacciones sea más predictiva.

Precisamente el poder predictivo de la teoría es la motivación fenomenológica más importante para la finitud. Así mismo se puede pensar que los infinitos sean manifestaciones de física desconocida a energías más altas.

Se ha demostrado que las teorías globales $N = 4$ son finitas a todos los órdenes en teoría de perturbaciones [1–7]. En general para teorías SUSI globales $N = 2$ se tienen divergencias a un rizo, sin embargo, para representaciones particulares se pueden hacer finitas a primer orden. En este caso se tiene la finitud a todos los órdenes en teoría de perturbaciones [8–10].

5.2 Unificación de los acoplamientos de norma y de Yukawa

Las relaciones entre los acoplamientos de Yukawa y de norma, ausentes en teorías no supersimétricas de gran unificación, pueden ser el resultado de una unificación mayor a la escala de Planck.

¹Ver Apéndice (D)

Como comenté en el primer capítulo, los intentos de relacionar los acoplamientos de norma y los de Yukawa, se han hecho desde varias perspectivas [11, 12, 13], sin embargo si se relacionan estos sectores, dentro de una teoría del campo renormalizable, se pueden encontrar relaciones invariantes del grupo de renormalización entre los parámetros que pueden facilitar los cálculos y mejorar las predicciones fenomenológicas de la teoría.

Los principios de reducción de acoplamientos [14, 15, 16, 17, 18] y los de finitud [19, 2, 3, 4, 6, 20] se han unido [11] para encontrar relaciones invariantes del grupo de renormalización (RIG) entre los acoplamientos, que preserven la renormalizabilidad perturbativa, de tal forma que se preserve la finitud en teoría de perturbaciones, a todos los órdenes.

Al aplicar estos principios se pueden relacionar los acoplamientos de norma y de Yukawa, sin introducir necesariamente una simetría, al mismo tiempo que se mejora el poder predictivo del modelo. La búsqueda de IGR entre varios acoplamientos corresponde a la búsqueda de *puntos fijos* de las ecuaciones diferenciales acopladas que obedecen los acoplamientos de una teoría.

5.2.1 Unificación de acoplamientos por el método IGR

Cualquier relación IGR entre los acoplamientos, de tal forma que no dependa explícitamente de la escala de renormalización μ , puede ser expresada en la forma implícita $\Phi(g_1, g_2, \dots, g_A) = \text{constante}$, que debe satisfacer la ecuación diferencial parcial (EDP):

$$\mu \frac{d\Phi}{d\mu} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\beta} = \sum_{a=1}^A \beta_a \frac{\partial \Phi}{\partial g_a}, \quad (5.1)$$

donde β_a es la función β de g_a . La EDP es equivalente a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinario, llamadas ecuaciones de reducción (ER):

$$\beta_g \frac{dg_a}{dg} = \beta_a, \quad a = 1, \dots, A, \quad (5.2)$$

donde g y β_g son el acoplamiento *primario* y su función β . Debido a que el número máximo de constricciones IGR, $(A-1)$, en un espacio A -dimensional de acoplamientos, puede ser impuesta a las Φ_a 's, todos los acoplamientos se pueden expresar en términos de un solo acoplamiento g ². El requerimiento más fuerte es que haya una solución a las ER que sea una serie de potencias en g :

$$g_a = \sum_{n=0} \rho_a^{(n)} g^{2n+1}, \quad (5.3)$$

que además preserve la renormalizabilidad perturbativa. La unicidad de las soluciones de este tipo (5.3) puede obtenerse a primer orden³. Se puede determinar que los acoplamientos en teorías supersimétricas tienen el mismo comportamiento asintótico, por lo cual la búsqueda

²Ver Apéndice 1

³ibid

de soluciones del tipo (5.3) a las ER está justificado, no así para el caso de las teorías no supersimétricas.

Sin embargo esta reducción total puede no ser realista, por lo cual se puede intentar introducir menos constricciones IGR, y hacer una reducción parcial de acoplamientos.

5.3 Teorías de Norma Finitas Supersimétricas N=1

La supersimetría (SUSI) juega un papel determinante dentro de las Teorías Finitas de Gran Unificación (TFU), debido a sus poderosos enunciados. Por ejemplo, dentro de los modelos supersimétricos la ausencia de divergencias cuadráticas es en sí algo natural en la teoría. Además en una teoría N=1 supersimétrica, la finitud a un rizo implica la finitud a dos rizos.

Este resultado se dió a conocer por primera vez en la referencia [19], y posteriormente se hizo un análisis más amplio en [22], [23]. También se ha encontrado que la finitud a dos rizos asegura que la función beta de norma a tres rizos sea igual a cero [19]. Así mismo la supersimetría impone restricciones derivadas de la renormalizabilidad de la teoría, ya que el *Teorema de no renormalización* $N = 1$ asegura que no hay infinitos en los términos de masa o en el término cúbico de las interacciones de los supercampos quirales de alguna representación del grupo de norma ⁴. De manera que el requerimiento de finitud restringe la elección de las representaciones del grupo de gran unificación.

Ha habido varios intentos de clasificar las teorías SUSI, que satisfagan condiciones de finitud a un rizo [24, 25, 26] y hay también un teorema que enuncia que las condiciones de finitud a todos los órdenes puede ser alcanzada, en el sentido de que las funciones $\beta^{(n)}$ sean iguales a cero [20]⁵. A continuación comento en forma breve las propiedades generales de las Teorías Finitas de Gran Unificación.

5.4 Propiedades generales de las TFU

Las Teorías Finitas de Norma SUSI N=1 son los modelos supersimétricos de las teorías finitas de norma más simples, así como los más viables fenomenológicamente. Los modelos deben ser quirales y libres de anomalías. Supongamos que la expresión para el superpotencial es la siguiente:

$$W = a^i \phi_i + \frac{1}{2} m^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{6} C^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \quad (5.4)$$

donde a^{ij} , m^{ij} y C^{ij} son tensores invariantes y ϕ_i son campos de materia que se transforman bajo representaciones irreducibles (irrep.) R_i del grupo de norma G .

Las condiciones necesarias y suficientes de la finitud al primer orden en teoría de perturbaciones, son las siguientes (ver Apéndice (D)):

- a) La condición de finitud de la auto-energía de los campos de norma, la cual requiere que:

$$\sum_i l(R_i) = 3C_2(G) \quad (5.5)$$

⁴Ver Apéndice (D).

⁵ibid.

donde $l_i(R_i)$ es el índice de Dynkin de R_i y $C_2(G)$ es el Casimir de segundo orden del operador de la representación adjunta del grupo de norma G .

b) La condición de finitud a un rizo de la auto-energía de los supercampos quirales. En términos de los acoplamientos cúbicos C_{ijk} (acoplamientos de Yukawa) que aparecen en el superpotencial dado en (5.4), esta condición requiere que:

$$C^{ikl}C_{jkl} = 2\delta_j^i g^2 C_2(R_i), \quad (5.6)$$

donde g es el acoplamiento de norma, $C_2(R_i)$ es el Casimir de segundo orden de la representación R_i , y $C^{ijk} = (C_{ijk})^*$.

La condición (5.6) prohíbe la presencia de singletes con acoplamientos diferentes de cero. Más aún, requiere que $C^{ikl}C_{jkl}$ sea diagonal en sus dos índices libres. De manera que un grupo $U(1)$ está excluido por la condición a), por lo tanto un modelo con $U(1)$ no puede ser finito.

Las condiciones de finitud (5.6) y (5.5), que expresan la anulación de las dimensiones anómalas y de las funciones β de los acoplamientos de norma a primer orden, respectivamente, restringen considerablemente las elecciones de las representaciones R para un grupo de norma determinado, así como sus acoplamientos de Yukawa, que aparecen en el superpotencial (5.4). Por otra parte, debido al *Teorema de No Renormalización*⁶, que relaciona los coeficientes de renormalización de a^i , m^{ij} y C^{ijk} a aquellos de ϕ_i , las condiciones de finitud no restringen la forma de a^i y m^{ij} .

Las condiciones de finitud a primer orden (5.6) y (5.5) son necesarias y suficientes para la finitud a segundo orden [1–7]. El *Teorema de Finitud*⁷ enuncia que si una teoría supersimétrica con un grupo de norma simple, está libre de anomalías de norma, satisface (5.6) y existen soluciones a la ecuación (5.5) de la forma:

$$C_{ijk} = \rho_{ijk} g \quad (5.7)$$

donde ρ_{ijk} es un número complejo, entonces, si ésta solución está aislada y es no degenerada, cada una de estas soluciones puede ser extendida únicamente en una serie de potencias de g , dando como resultado una teoría que depende de un solo acoplamiento g , con una función β que se anula a todos los órdenes.

5.4.1 UNY en teorías finitas de norma supersimétricas $N=1$

En caso de que la supersimetría se rompa por términos suaves, las condiciones de finitud a primer orden del sector suave, imponen constricciones adicionales [21].

Las condiciones a primer y segundo orden restringen considerablemente las posibles elecciones de las representaciones irreducibles R_i para un grupo dado, así como los acoplamientos de Yukawa en el superpotencial. En particular, las condiciones de finitud no pueden aplicarse ni al ME ni al MESM.

Las condiciones de finitud imponen relaciones entre los acoplamientos de norma y de Yukawa, lo que da como resultado una dependencia mutua entre los acoplamientos a determinado punto de renormalización, sin embargo es sorprendente que estas relaciones conduzcan a que la

⁶ibid

⁷ibid

reducción de acoplamientos sea válida en cualquier punto de renormalización. Las condiciones necesarias y suficientes para que esto pase, son las ecuaciones de reducción del tipo ⁸:

$$\beta_g \frac{dC_{ijk}}{dg} = \beta_{ijk}, \quad (5.8)$$

donde C_{ijk} son los acoplamientos de Yukawa y g el de norma.

5.4.2 Modelos Finitos de Gran Unificación Basados en SU(5)

De las referencias [24, 25 y 26], las dificultades en construir Teorías Finitas de Gran Unificación (TFGU) fenomenológicamente viables pueden ser estudiadas.

Utilizando $SU(5)$ como grupo de norma se ha encontrado que [24, 25 y 26], solo hay dos modelos TFGU que pueden acomodar tres familias de fermiones. Estos modelos contienen multipletes quirales $\mathbf{5}$, $\bar{\mathbf{5}}$, $\mathbf{10}$, $\bar{\mathbf{10}}$, $\mathbf{24}$ que tienen las siguientes multiplicidades: (4,7,3,0,1), la cual contiene un 24-plete que puede ser utilizado para el rompimiento espontáneo de la simetría de $SU(5)$ hacia $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, y (6,9,4,1,0) en la cual un 24-plete no existe, por lo cual un mecanismo distinto, como el mecanismo de la *Línea de Wilson* debe ser incorporado.

Las condiciones de finitud no restringen los términos de masa, por lo cual se tiene libertad en este sector de mezclar los cuatro campos de Higgs y escoger sus valores esperados sobre estados del vacío (*vev's*), evitando problemas con un decaimiento rápido del protón.

I. Modelo SUSI N=1, $SU(5)$ con tres familias de fermiones y sin un Higgs en la adjunta

El contenido de materia de este modelo lo conforman los siguientes supermultipletes, representados por las propiedades de transformación bajo $SU(5)$:

- Tres ($\bar{\mathbf{5}} + \mathbf{10}$), que están identificados con los tres supermultipletes que describen a las familias de fermiones,
- Seis ($\mathbf{5}, \bar{\mathbf{5}}$), que están considerados supermultipletes de Higgs, y
- Un ($\mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}$), que también representa a supermultipletes escalares.

Verificación de las condiciones de Finitud

Para la primera condición (5.6), se tiene (Ver tabla (B.3)):

$$\sum_{3(\bar{\mathbf{5}}+\mathbf{10}), 6(\mathbf{5}+\bar{\mathbf{5}}), (\mathbf{10}+\bar{\mathbf{10}})} l(R) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 15 = 3C_2(G), \quad (5.9)$$

por lo cual (5.6) queda verificada.

Para la segunda condición (5.6) se debe considerar la forma explícita del superpotencial. El superpotencial N=1, invariante $SU(5)$ más general, con el contenido de partículas arriba

⁸Ver Apéndice D, section D.3.2

mencionado, tiene la forma:

$$W = \frac{1}{2}g^{ija}10_i10_jH_a + g^{ia}10_iNH_a + \bar{g}^{ija}10_i\bar{5}_j\bar{H}_a + \frac{1}{2}g^{ijk}10_i\bar{5}_j\bar{5}_k \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2}f^{ab}N\bar{H}_a\bar{H}_b + \frac{1}{2}\bar{f}^{ab}\bar{N}H_aH_b + \frac{1}{2}h^aNNH_a + \frac{1}{2}\bar{h}^a\bar{N}\bar{N}\bar{H}_a \\ &+ \frac{1}{2}q^{iab}10_i\bar{H}_a\bar{H}_b + p^{ia}N\bar{5}_i\bar{H}_a + \frac{1}{2}t^{ij}N\bar{5}_i\bar{5}_j, \end{aligned} \quad (5.11)$$

sin poner explícitamente los índices $SU(5)$; $i, j, k = 1, \dots, 3$ y $a, b = 1, \dots, 6$. En tanto que 10_i y $\bar{5}_i$ son las tres generaciones usuales. Los seis $(5 + \bar{5})$ Higgses están denotados mediante H_a y \bar{H}_a , en tanto que el campo escalar que corresponde a la representación $(10 + \bar{10})$ esta denotado por $N + \bar{N}$.

Entonces la ecuación (5.6) impone las siguientes relaciones entre los acoplamientos de Yukawa y los de norma:

$$\begin{aligned} H &: 3g^{ija}g_{ijb} + 6g^{ia}g_{ib} + 4f^{ca}f_{cb} + 3h^ah_b = \delta_b^a \frac{24}{5}g^2, \\ \bar{5} &: 3\bar{g}^{ila}\bar{g}_{ima} + 4g^{ilk}\bar{g}_{imk} + 4t^{lj}t_{mj} + p^{la}p_{ma} = \delta_m^l \frac{24}{5}g^2, \\ \bar{H} &: 4\bar{g}^{ija}\bar{g}_{ijb} + 4f^{ca}f_{cb} + 3\bar{h}^a\bar{h}_b + 4q_{icb}^{ica} + 4p^{ia}p_{ib} = \delta_b^a \frac{24}{5}g^2, \\ N &: 3g^{ia}g_{ia} + f_{cb}^{cb} + 3h^ah_a + 2p^{ia}p_{ia} + t^{ij}t_{ij} = \frac{24}{5}g^2, \\ \bar{N} &: \bar{f}^{ab}\bar{f}_{ab} + 3\bar{h}^a\bar{h}_a = \delta_b^a \frac{36}{5}g^2, \\ 10 &: 3g^{lki}g_{mki} + 2\bar{g}^{lki}\bar{g}_{mki} + 3g^{ljk}g_{mjk}^{prime} + g^{lab}g_{mab} = \delta_m^l \frac{36}{5}g^2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

Las condiciones (5.5) y (5.6) son necesarias y suficientes para garantizar la finitud a primer y segundo orden, sin embargo para garantizar la finitud a todos los órdenes, se tiene que encontrar una solución aislada y no degenerada a la ecuación (5.6). El problema no es trivial, ya que la ecuación (5.6) tiene una infinidad de soluciones que pueden ser parametrizadas por parámetros continuos [27].

Para encontrar una solución única y fenomenológicamente interesante a la ecuación (5.6), se pueden imponer nuevas simetrías al modelo aparte de la invarianza de norma $SU(5)$ y la supersimetría global $N=1$. Sin embargo se tiene la libertad de escoger los términos de masa para hacer la teoría fenomenológicamente viable.

Primero se pueden obtener soluciones diagonales a las ecuaciones (5.12), es decir, sin mezclas interdiagonales, como primera aproximación a las matrices de Yukawa. Para lograr eso, se puede añadir la simetría discreta $Z_7 \times Z_3$ (ver tabla (5.1)), junto con la paridad multiplicativa Q bajo la cual los supermultipletes fermiónicos (10_i y $\bar{5}_i$) son impares⁹, en tanto que los demás supercampos son pares. De esta forma el número de términos permitidos en el superpotencial esta restringido, ya que solo los términos de los acoplamientos de Yukawas $g_{iii}, \bar{g}_{iii}, f_{44}, f_{56}, f_{65}, \bar{f}_{56}, \bar{f}_{65}, h_4$ y \bar{h}_4 sobreviven.

⁹Lo cual equivale a una simetría Z_2

Tabla 5.1: Cargas de la simetría $Z_7 \times Z_3$

	10_1	10_2	10_3	$\bar{5}_1$	$\bar{5}_2$	$\bar{5}_3$	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	N
Z_7	1	2	4	1	2	5	3	6	0	0	0	0	0
Z_3	1	2	0	0	0	0	1	2	0	0	1	2	0

Entonces la única condición a las ecuaciones (5.12) es:

$$\begin{aligned}
 g_{111}^2 &= g_{222}^2 = g_{333}^2 = \frac{8}{5}g^2, \\
 \bar{g}_{111}^2 &= \bar{g}_{222}^2 = \bar{g}_{333}^2 = \frac{6}{5}g^2, \\
 f_{44}^2 &= 0; \quad f_{56}^2 = f_{65}^2 = \frac{6}{5}g^2, \\
 \bar{f}_{44}^2 &= \bar{f}_{56}^2 = \bar{f}_{65}^2 = \frac{6}{5}g^2, \\
 h_4^2 &= \frac{8}{5}g^2; \quad \bar{h}_4^2 = \frac{8}{5}g^2.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

La unitariedad de la solución garantiza la finitud a todos los órdenes. La arbitrariedad de la fase en las ecuaciones (5.14) no es crucial, ya que puede ser absorbida utilizando un esquema de renormalización específico. Aunque los acoplamientos de Yukawa son los mismos para las tres familias, la libertad en el sector de Higgs permite acoplar uno de los campos maximalmente a la tercera familia evitando problemas en el decaimiento del protón y desacoplando las dos primeras familias.

Existen indicaciones de que éste modelo puede provenir de una clase de modelos obtenidos de compactificaciones no estándares de supercuerdas sobre ciertas variedades de Calabi-Yau (CY). Estas construcciones CY tienen supersimetría $N=1$ en cuatro dimensiones, con $SU(5)$ ó $SO(10)$ como grupo de norma, y un grupo E'_8 como una simetría oculta.

II. Modelo SUSI $N=1$, $SU(5)$ con tres familias de fermiones y un Higgs en la adjunta

El contenido de partículas de este modelo consiste en los siguientes supermultipletes:

- Tres $(\bar{5} + 10)$, identificados con los tres supermultipletes que describen a las tres familias de fermiones.
- Cuatro $(5 + \bar{5})$, identificados con supermultiplete de Higgs, y
- Un 24, también identificado con un supermultiplete de Higgs.

Verificación de las condiciones de Finitud

Para la primera condición (5.6), se tiene (Ver tabla (B.3)):

$$\sum_{3(\bar{5}+10), 4(5+\bar{5}), (24)} l(R) = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + 5 = 15 = 3C_2(G), \tag{5.15}$$

por lo cual (5.6) queda verificada.

Para satisfacer la segunda condición (5.5) se debe examinar el superpotencial de este modelo. El superpotencial cúbico $N=1$, invariante $SU(5)$ más general, con el contenido de partículas citado, es:

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2}g^{ija}10_i10_jH_a + \bar{g}^{ija}10_i\bar{5}_j\bar{H}_a + \frac{1}{2}g^{ijk}10_i\bar{5}_j\bar{5}_k \\
 & + \frac{1}{2}q^{iab}10_i\bar{H}_a\bar{H}_b + f^{ab}\bar{H}_a24H_b + h^{ia}\bar{5}_i24H_a + p(24)^3
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Los índices de $SU(5)$ se han suprimido, $i, j, k = 1, \dots, 3$ y $a, b = \dots, 4$. Los 10_i y los $\bar{5}_i$ son las tres generaciones usuales, y el 24 es el supercampo escalar en la adjunta. Los cuatro Higgses ($5 + \bar{5}$), están denotados por H_a y \bar{H}_a .

Entonces la ecuación (5.6) impone las siguientes condiciones entre los acoplamientos de Yukawa y los acoplamientos de norma:

$$\begin{aligned}
 \bar{H} : & \quad 4\bar{g}_{ija}\bar{g}^{jib} + \frac{24}{5}f_{ac}f^{bc} + 4q_{iac}q^{ibc} = \delta_b^a \frac{24}{5}g^2, \\
 H : & \quad 3g_{ija}g^{jib} + \frac{24}{5}f_{ca}f^{cb} + \frac{24}{5}h_{ia}h^{ib} = \delta_a^b \frac{24}{5}g^2 \\
 \bar{5} : & \quad 4\bar{g}_{kia}\bar{g}_{kja} + \frac{24}{5}h_{ia}h^{ja} + 4g'_{ikl}g'^{jkl} = \delta_i^j \frac{24}{5}g^2, \\
 10 : & \quad 2\bar{g}_{ika}\bar{g}^{jka} + 3g_{ika}g^{jka} + q_{iab}q^{jab} + g'_{kli}g'^{klj} = \delta_i^j \frac{36}{5}g^2, \\
 24 : & \quad f_{ab}f^{ab} + \frac{21}{5}pp^* + h_{ia}h^{ia} = 10g^2
 \end{aligned} \quad (5.17)$$

En analogía con el modelo anterior, se pueden imponer simetrías adicionales, para este modelo también se imponen la simetría $Z_7 \times Z_3 \times Z_2$ (ver Tabla (5.1)) para 10_i , $\bar{5}_i$ y H_a para $a = 1, \dots, 4$. Los términos en el superpotencial, que son invariantes bajo las simetrías del modelo son los términos con acoplamientos de Yukawa: g_{iii} , \bar{g}_{iii} , f_{ii} y p .

De esta forma se teine la siguiente solución a las ecuaciones (5.17):

$$\begin{aligned}
 g_{111}^2 = g_{222}^2 = g_{333}^2 &= \frac{8}{5}g^2 \\
 \bar{g}_{111}^2 = \bar{g}_{222}^2 = \bar{g}_{333}^2 &= \frac{6}{5}g^2, \\
 f_{11}^2 = f^222 = f^233 &= 0 \\
 f_{44}^2 = g^2; \quad p^2 &= \frac{15}{7}g^2.
 \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.4.3 Teorías Finitas basadas en otros grupos de norma

TFU con $SO(10)$ como grupo de norma

El modelo más promisorio basado en el grupo $SO(10)$ debería tener el siguiente contenido de materia:

- 8 representaciones 10 ,

- n representaciones 16 y
- $(8-n)$ representaciones $\overline{16}$

con $5 \leq n \leq 8$, sin embargo debido a la ausencia de una representación más grande, que pueda romper el grupo de norma al grupo del ME , otro mecanismo, como el de la Línea de Wilson, debe ser introducido. Este mecanismo implicaría que el modelo proviene de una compactificación de Supercuerdas. Los modelos $SO(10)$ cuyo contenido de materia incluye la representación 126 han sido estudiados extensivamente, sin embargo su índice de Dynkin es mayor que el valor impuesto por las condiciones de finitud a un rizo para la auto-energía de los campos de norma (5.5).

TFU con otros grupos de norma

Han habido varias proposiciones de modelos finitos basados en otros grupos y sus representaciones para construir teorías finitas de gran unificación.

También hay otro modelo basado en E_6 con el contenido de materia 27 y $(12-n)\overline{27}$ ($7 \leq n \leq 12$), estos multipletes pueden acomodar un número par de familias de fermiones.

5.5 Rompimiento de la Supersimetría y Correcciones radiativas

En las TFGU también debe encontrarse un mecanismo por el cual se rompa la simetría del grupo de norma. Dentro del modelo también se debe especificar la forma del rompimiento de la supersimetría y el mecanismo de rompimiento a la escala electrodébil, de tal manera que se puedan generar las masas de los fermiones. En el proceso de rompimiento, el mínimo del potencial que se encuentre también debería pertenecer a las correcciones radiativas de la teoría para evitar problemas con el rompimiento de la carga de color y el límite inferior del potencial.

Se ha encontrado que también es posible tener finitud en los parámetros de rompimiento suave supersimétrico [28]. Para poder encontrar un espectro supersimétrico correcto, dentro de estos esquemas, se debe estudiar el potencial efectivo a bajas energías. El problema central en este análisis es cómo encontrar el mínimo del superpotencial, incluyendo correcciones radiativas, que también corresponda a un mínimo físico. Hay dos direcciones peligrosas en el espacio de campos del MESM [29]: el que está asociado a la existencia de los mínimos generados por el rompimiento de las cargas eléctrica y de color, y el que se encuentra asociado a la dirección en el espacio de los campos a lo largo del cual el potencial se encuentra ilimitado por debajo. Un estudio completo dentro de las teorías finitas aún falta por realizarse, debido a la complejidad del potencial.

5.6 Términos a RSS finitos a segundo orden y regla de suma para las masas escalares suaves

La supersimetría parece ser esencial para una teoría de unificación de los acoplamientos de Yukawa (UNY), pero también se espera que la forma de rompimiento de la supersimetría imponga

constricciones que puedan reducir más parámetros. Por ejemplo, si el modelo proviniera de supergravedad, se podrían entonces, en principio, calcular los términos de Rompimiento Suave de la Supersimetría (RSS), en donde la condición de *universalidad*¹⁰, que es una forma bastante atractiva de reducir la arbitrariedad de los términos RSS, permite que la masa del gravitino defina la escala de RSS.

Para tratar de extender la idea de gran unificación finita y de UNY al sector RSS, se buscan relaciones invariantes de las ecuaciones del grupo de renormalización (IGR) entre los parámetros RSS, que sean consistentes con la renormalización perturbativa¹¹. Así mismo se pueden encontrar otros criterios de finitud que den lugar también a teorías finitas $N = 1$ a todos los órdenes [33].

Los parámetros RSS tienen dimensiones mayores o iguales a uno y es posible tratar acoplamientos dimensionales a lo largo de la línea de UNY, lo que da como resultado que el sector RSS de un modelo UNY esté controlado por la masa unificada del gaugino, M . Para los términos RSS finitos a primer y segundo orden sólo la solución universal para los términos RSS era conocida [3, 34], actualmente se ha encontrado que ésta solución se puede hacer finita a todos los órdenes, si se satisfacen la regla de sumas a primer y segundo orden además de otras condiciones [35].

La finitud a segundo orden de los términos RSS lleva a que las masas de los escalares suaves satisfagan reglas de sumas, que pueden ser utilizados directamente en los cálculos numéricos de los modelos. A continuación se presenta la forma en la que las reglas de suma son obtenidas.

El Lagrangiano para los términos RSS está dado por:

$$-\mathcal{L}_{RSS} = \frac{1}{6}h^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \frac{1}{2}b^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{2}(m^2)_j^i\phi^{*i}\phi_j + \frac{1}{2}M\lambda\lambda + H.c. \quad (5.19)$$

Las condiciones de finitud del Teorema (1) y la forma de las funciones γ (D.25):

$$\gamma_j^i = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{2g^2} C^{jkl} C_{jkl}^* - C_2(G)\delta_j^i \right) = 0, \quad (5.20)$$

y la solución en serie de potencias (D.44) del Teorema (2):

$$C^{ijk} = g \sum_{n=0} \rho_{(n)}^{ijk} g^{2n}, \quad (5.21)$$

nos lleva a que:

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q} \rho_{ipq}(0) \rho^{jpq}(0) - 2\delta_i^j C(i) = 0. \quad (5.22)$$

Si las condiciones de finitud (5.5) y (5.6) se satisfacen, los coeficientes $\rho_{(1)}^{ijk}$ de (5.22) se anulan.

¹⁰La cual requiere que las masas de todas las partículas supersimétricas sean iguales en M_{GUT} y proporcionales a la masa del gravitino.

¹¹Una idea similar, pero distinta a la expuesta aquí, se encuentra propuesta en [30, 31, 32].

La finitud a primer orden de h^{ijk} ¹² puede escribirse como:

$$h^{ijk} = -MY^{ijk} + \dots = -M_{\rho_{(0)}^i}{}_{jk}g + \mathcal{O}(g^5) \quad (5.23)$$

Para obtener la *Regla de Suma* para las masas de los escalares suaves, se supone que los coeficientes de $\rho_{(0)}^{ijk}$ y de $(m^2)_j^i$ al más bajo orden, satisfacen las relaciones de diagonalidad:

$$\rho_{ipq(0)}\rho_{(0)}^{j pq} \propto \delta_i^j \quad \forall p \text{ y } q \text{ y para } (m^2)_j^i = \delta_i^j, \quad (5.24)$$

respectivamente. Entonces

$$[\beta_{m^2}^{(1)}]_i^j = \rho_{ipq(0)}\rho_{(0)}^{j pq} \left(\frac{m_i^2}{2} + \frac{m_j^2}{2} + m_p^2 + m_q^2 \right) g^2 + (\rho_{ipq(0)}\rho_{(0)}^{j pq} - 8\delta_i^j C(i)) MM^\dagger g^2 + \iota(g^6), \quad (5.25)$$

con $\rho_{(1)}^{j pq} = 0$.

Utilizando la condición (5.22), las relaciones de diagonalidad (5.24) y la regla de suma para la masa de los escalares suaves, se tiene:

$$(m_i^2 + m_j^2 + m_k^2)/MM^\dagger = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \Delta^{(1)} + \mathcal{O}(g^4) \quad (5.26)$$

$\forall i, j, k$ con $\rho_{(0)}^{ijk} \neq 0$. Entonces, la ecuación (5.25), puede escribirse como:

$$[\beta_{m^2}^{(1)}]_i^j = 4\delta_i^j MM^\dagger C(i) \Delta^{(1)} \frac{g^4}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^6). \quad (5.27)$$

La corrección a primer orden del término Δ , está dada por:

$$\Delta^{(1)} = -2 \sum_j [(m_j^2/MM^\dagger) - \frac{1}{3}] l(R_j), \quad (5.28)$$

La expresión para $\Delta^{(1)}$ (5.28) se anula para la elección (que es la condición de universalidad):

$$m_i^2 = \kappa_i MM^\dagger \quad (5.29)$$

con $\kappa_i = 1/3$, $\forall i$. Si $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 1$ se satisface, entonces se obtiene:

$$\Delta^{(1)}(N=4) = -2 \sum_{l=1}^3 [\kappa_l - \frac{1}{3}] C(G) = 0. \quad (5.30)$$

La ecuación (5.28) es válida para la finitud de m_i^2 a segundo orden, ya que se tiene:

$$\begin{aligned} [\beta_{m^2}^{(2)}]_i^j &= (A_{(\gamma)in}^{jp} \gamma^{(1)} n_p + A_{(m^2)in}^{jp} [\beta_{m^2}^{(1)}]_p^n + A_{(g)i}^j \beta_g^{(1)}) \\ &+ A_{(h)in}^{jp} [h^{nrq} C_{lrq} + 4M \delta_p^n g^2 C(n)] + 4g^4 C(i) S' MM^\dagger \delta_i^j + H.C., \end{aligned} \quad (5.31)$$

¹²Esta forma de los términos trilineales h^{ijk} también es común en el sector RSS en teorías de supergravedad.

donde

$$\begin{aligned} S' &= \sum_l (m_l^2 / MM^\dagger) T(R_l) - C(G), \\ &= \sum_l [(m_l^2 / MM^\dagger) - \frac{1}{3}] T(R_l) \quad \text{para} \quad \sum_l T(R_l) = 3C(G). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Si se utilizan las condiciones de finitud a primer orden (5.5 y 5.6), se obtiene:

$$[\beta_{m^2}^{(2)}]_i^j = 8g^4 C(i) M M^\dagger S' \delta_i^j, \quad (5.33)$$

se puede ver entonces que este término puede ser cancelado por la contribución de $\mathcal{O}(g^4)$ a $[\beta_{m^2}^{(1)}]_i^j$ si $\Delta^{(1)}$ esta dada exactamente por la ecuación (5.28).

Por último la regla de suma (5.26) es solución a:

$$\rho_{ipq}(0) \rho(0)^{jpq} [(m_i^2 + m_p^2 + m_q^2) / |M|^2 - 1] = -8S' \delta_i^j C(i), \quad (5.34)$$

La pregunta de si esta regla de suma (5.26) es la única solución a (5.34), depende del modelo en particular.

Si S' es de orden $\mathcal{O}(C(G))$, la corrección a segundo orden en la regla de suma, puede ser estimada mediante:

$$\frac{g^2}{16\pi^2} \Delta^{(1)} \sim \frac{\alpha_{GUT}}{\pi} C(G). \quad (5.35)$$

Sin embargo, si las masas de los escalares suaves son cercanas a la universal (5.29), entonces la corrección es pequeña.

Se ha demostrado que es posible también tener una regla de sumas que satisfaga la condición de finitud a todos los órdenes [35].

$$m_i^2 + m_j^2 + m_k^2 = |M|^2 F_{ijk}^M(g) + \sum_l m_l^2 F_{ijk}^l(g), \quad (5.36)$$

con

$$F_{ijk}^M(g) = \left(1 + \tilde{X}^m(g)\right) (\ln Y^{ijk})' + \frac{1}{2} (\ln Y^{ijk})'', \quad F_{ijk}^l(g) = \tilde{X}^l(g) (\ln Y^{ijk})' \quad (5.37)$$

y

$$|M|^2 g \tilde{X}^M(g) + \sum_l m_l^2 g \tilde{X}^l(g) = X(g, Y(g), Y^*(g), h(M, g), h^*(M, g), m^2). \quad (5.38)$$

De la forma de la regla de suma en general se deducen las reglas de suma correspondientes a cada modelo, como veremos en el siguiente capítulo.

Bibliografía

- [1] S. Mandelstam. In *Proc. of the XXI Interantional Conference on High Energy Physics*. Paris.
- [2] A. Parkes and P. West. *Physics Letters*, B122:365, 1983.
- [3] A. Parkes and P. West. *Nuclear Physics*, B222:269, 1983.
- [4] A.Ñamazie, A. Salam, and J. Strathdee. *Physics Review*, D28:1481, 1983.
- [5] J.G. Taylor. *Physics Letters*, 121B:386, 1983.
- [6] J.J. van der Bij and Y. P. Yao. *Physics Letters*, 125B:171, 1983.
- [7] S. Rajpoot, J. G. Taylor, and M. Zaimi. *Physics Letters*, 127B:347, 1983.
- [8] A. Parkes and P. West. *Physics Letters*, 138B:99, 1984.
- [9] L. Mezincescu and D.T.R. Jones. *Physics Letters*, 136B:293, 1984.
- [10] A. Parkes and P. West. *Physics Letters*, 136B:371, 1984.
- [11] J. Kubo, M. Mondragón, and G. Zoupanos. Unification beyond guts: Gauge-yukawa unification. *Acta Phys.Polon.*, B27:3911, 1997. hep-ph/9703289.
- [12] S.Ferrara, L. Girardello, and F. Palumbo. *Physics Review*, D20:403, 1979.
- [13] B. Pendleton and G.G. Ross. *Physics Letters*, B98:291.
- [14] W. Zimmermann. *Com. Mathematical Physics*, 97:211, 1985.
- [15] R. Oehme and W. Zimmermann. *Com. Mathematical Physics*, 97:569, 1985.
- [16] R. Oehme, K. Sibold, and W. Zimmermann. *Physics Letters*, B147:117, 1984.
- [17] J.Kubo K. Sibold and W. Zimmerman. *Nuclear Physics*, B259:331, (1985).
- [18] J.Kubo, K. Sibold, and W. Zimmerman. *Physics Letters*, B200:185, (1989).
- [19] A. Parkes and P. West. Three-loop results in two-loop finite supersymmetric gauge theories. *Nuclear Physics B*, 256:340, 1985.

- [20] C. Lucchesi, O. Piguet, and K. Sibold. *Helvetic Physics Acta*, 61:321–344, 1988.
- [21] D.R.T. Jones, L. Mezincescu, and Y. P. Yao. *Physics Letters*, B148:317, 1984.
- [22] I. Jack and D.R.T. Jones. *Physics Letters B*, 349:294–299, 1995.
- [23] I. Jack and D.R.T. Jones. hep-ph/9707278, 1997.
- [24] X.D. Jiang and X. Zhou. *Physics Letters B*, B197:156, 1987.
- [25] X.D. Jiang and X. J. Zhou. Finite $n=1$ supersymmetric theories of classical groups. *Physics Letters B*, B216:160, 1989.
- [26] Hamidi, J.Patera, and J.H. Schwarz. *Physics Letters B*, B141:349, 1984.
- [27] S. Hamidi and J.H. Schwarz. *Physics Letters*, B147:301, 1984.
- [28] T. Kobayashi, J. Kubo, M. Mondragón, and G. Zoupanos. hep-ph/9707425, 1997.
- [29] J.A. Casas, A. Lleyda, and C. Muñoz. Strong constraints on the parameter space of the mssm from charge and color breaking minima. hep-ph/9507294, 1985.
- [30] I. Jack and D.R.T. Jones. *Physics Letters*, B349:294, 1995.
- [31] I. Jack, D.R.T. Jones, and K.L. Roberts. *Nuclear Physics*, B445:83, 1995.
- [32] D.I. Kazakov, M. Yu. Kalmykov, I.N. Kondrashuk, and A.V. Gladyshev. *Nuclear Physics*, B471:387, 1996.
- [33] D.I. Kazakov. Finiteness of soft terms in finite $n=1$ susy gauge theories. *Physics Letters*, B(421), 1998. hep-ph/9709465.
- [34] I. Jack and D.R.T. Jones. *Physics Letters*, B33:372, 1994.
- [35] T. Kobayashi, J. Kubo, and G. Zoupanos. Further all loop results in softly broken supersymmetric theories. hep-ph/9802267.

Capítulo 6

Fenomenología de las TFU basadas en $SU(5)$

6.1 Modelos

En las Teorías Finitas de Gran Unificación, hay indicaciones de que las relaciones entre los acoplamientos de Yukawa y los de norma, ausentes en teorías no supersimétricas de gran unificación, puedan ser consecuencia de una unificación mayor, heredada de una teoría más fundamental a la escala de Planck. Más aún, puede ser posible que algunas de estas relaciones sean invariantes del grupo de renormalización por abajo de la escala de Planck, de tal manera que sean preservadas exactamente hasta la escala de gran unificación $M_{GUT} = M_X$.

De los modelos finitos mencionados en el capítulo anterior (**I** y **II**), sólo el modelo **II** tiene un 24-plete que puede ser usado para proveer el rompimiento espontáneo de la simetría de $SU(5)$ hacia $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Para una discusión auto-consistente en teoría de campo, solo se analiza aquí esa posibilidad [1].

En general el poder predictivo de un modelo finito $SU(5)$ depende de la estructura del superpotencial y en la forma en que los cuatro pares de quintetos y anti-quintetos de Higgs se mezclen para producir los dos dobletes de Higgs para el MESM. Dado que las condiciones de finitud no restringen los términos de masas, hay libertad en este sector de la teoría para mezclar los cuatro pares de campos de Higgs. Como resultado, fue posible:

(a) que en los primeros estudios se construyera una diferencia adecuada entre las masas del doblete y del triplete de Higgs en el par de 5 y $\bar{5}$, que se acoplan a los fermiones ordinarios, de manera que se evitó el decaimiento del protón inducido por los tripletes coloreados y también

(b) se introdujeron ángulos en las relaciones de los acoplamientos de norma y Yukawa, eliminando en esta forma la intensidad de los acoplamientos de Yukawa. Si se utiliza la libertad ofrecida por el espacio de parámetros de la masa del Higgs para (b), se disminuye considerablemente la belleza de una teoría finita, ya que se introduce un parámetro extra. Por lo cual ésta libertad se ha abandonado en los estudios recientes de modelos $SU(5)$ finitos a todos los órdenes y solo la condición (a) se ha mantenido como condición necesaria.

Un modelo de unificación $SU(5)$, de los acoplamientos de Yukawa y los acoplamientos de norma, finito a todos los órdenes, aparte de las condiciones mencionadas en el capítulo anterior, debe tener las siguientes propiedades:

1. Que las funciones γ , es decir las dimensiones anómalas, sean diagonales, i.e., $\gamma_i^{(i)j} \propto \delta_i^j$, de acuerdo a (5.24).

2. Que las tres generaciones de fermiones, $\bar{5}_i$ ($i = 1, 2, 3$), no se acoplen a la representación 24. Esto puede lograrse por ejemplo, imponiendo la conservación de $B - L$.

3. Que los dos dobletes de Higgs del MESM estén hechos, en su mayoría, de un par de quintetos y anti-quintetos de Higgs, los cuales se acoplen a la tercera generación. Esta condición prácticamente desacopla a la tercera familia.

Los modelos a estudiar son el modelo **II** del capítulo anterior, al que se denominará **A** y el modelo **B**, que es una pequeña variación del **A**, y puede también ser obtenido de la clase de modelos sugeridos por Kazakov *et al.* [2] con la modificación de suprimir las dimensiones anómalas no diagonales.

La mezcla de cuarks puede ser acomodada en estos modelos, pero por simplicidad se pueden despreciar las mezclas interdiagonales.

El superpotencial que describe a los dos modelos, tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} g_i^u 10_i 10_i H_i + g_i^d 10_i \bar{5}_i \bar{H}_i \right] + g_{23}^u 10_2 10_3 H_4 \\
 & + g_{23}^d 10_2 \bar{5}_3 \bar{H}_4 + g_{32}^d 10_3 \bar{5}_2 \bar{H}_4 + \sum_{a=1}^4 g_a^f H_a 24 \bar{H}_a + \frac{g^\lambda}{3} (24)^3, \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

donde H_a y \bar{H}_a con $a = 1, \dots, 4$, representan a los quintetos y anti-quintetos de Higgs. Dado el superpotencial W , se pueden calcular las funciones γ del modelo, de las cuales a su vez se pueden calcular las funciones β . Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{10_1}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{36}{5}g^2 + 3(g_1^u)^2 + 2(g_1^d)^2 \right], \\
 \gamma_{10_2}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{36}{5}g^2 + 3(g_2^u)^2 + 2(g_2^d)^2 + 3(g_{23}^u)^2 + 2(g_{23}^d)^2 \right], \\
 \gamma_{10_3}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{36}{5}g^2 + 3(g_3^u)^2 + 2(g_3^d)^2 + 3(g_{23}^u)^2 + 2(g_{32}^d)^2 \right], \\
 \gamma_{\bar{5}_1}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 4(g_1^d)^2 \right], \\
 \gamma_{\bar{5}_2}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 4(g_2^d)^2 + 4(g_{32}^d)^2 \right], \\
 \gamma_{\bar{5}_3}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 4(g_3^d)^2 + 4(g_{23}^d)^2 \right], \\
 \gamma_{H_i}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 4(g_i^d)^2 + 3(g_i^u)^2 + \frac{24}{5}(g_i^f)^2 \right] \quad i = 1, 2, 3, \\
 \gamma_{\bar{H}_i}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 6(g_i^d)^2 + 3(g_i^u)^2 + \frac{24}{5}(g_i^f)^2 \right] \quad i = 1, 2, 3, \\
 \gamma_{H_4}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 6(g_{23}^u)^2 + \frac{24}{5}(g_4^f)^2 \right], \\
 \gamma_{\bar{H}_4}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{24}{5}g^2 + 4(g_{23}^d)^2 + 4(g_{32}^d)^2 + \frac{24}{5}(g_4^f)^2 \right], \\
 \gamma_{24}^{(1)} &= \frac{1}{16\pi^2} \left[-10g^2 + \sum_{a=1}^4 (g_a^f)^2 + \frac{21}{5}(g^\lambda)^2 \right]. \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

Las soluciones aisladas y no degeneradas para las $\gamma_i^{(1)} = 0$ para los modelos {A, B}, son:

$$\begin{aligned}
 (g_1^u)^2 &= \left\{ \frac{8}{5}, \frac{8}{5} \right\} g^2, \quad (g_1^d)^2 = \left\{ \frac{6}{5}, \frac{6}{5} \right\} g^2, \quad (g_2^u)^2 = (g_3^u)^2 = \left\{ \frac{8}{5}, \frac{4}{5} \right\} g^2, \\
 (g_2^d)^2 &= (g_3^d)^2 = \left\{ \frac{6}{5}, \frac{3}{5} \right\} g^2, \quad (g_{23}^u)^2 = \left\{ 0, \frac{4}{5} \right\} g^2, \quad (g_{23}^d)^2 = (g_{32}^d)^2 = \left\{ 0, \frac{3}{5} \right\} g^2, \\
 (g^\lambda)^2 &= \frac{15}{7} g^2, \quad (g_2^f)^2 = (g_3^f)^2 = \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} g^2, \quad (g_1^f)^2 = 0, \quad (g_4^f)^2 = \{1, 0\} g^2. \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

Estas soluciones (6.3) son también soluciones de las ecuaciones de reducción (D.42), y pueden ser expandidas en forma única a las soluciones en series de potencias correspondientes. Por lo tanto estos modelos son finitos a todos los órdenes, de acuerdo a las condiciones mencionadas en el Apéndice D.

Después de la reducción de acoplamientos (6.3), el superpotencial adquiere más simetría. En particular para el modelo A, se encuentra que el superpotencial tiene la simetría discreta $Z_7 \times Z_3 \times Z_2$, con las cargas de la Tabla (6.1), en tanto que para el modelo B se tiene la simetría discreta $(Z_4)^3$ (Ver Tabla (6.2)).

Tabla 6.1: Cargas de la simetría $Z_7 \times Z_3 \times Z_2$ para A

	10_1	10_2	10_3	$\bar{5}_1$	$\bar{5}_2$	$\bar{5}_3$	H_1	H_2	H_3	H_4	\bar{H}_1	\bar{H}_2	\bar{H}_3	\bar{H}_4	24
Z_7	1	2	4	4	1	2	5	3	6	0	-5	-3	-6	0	0
Z_3	1	2	0	0	0	0	1	2	0	0	-1	-2	0	0	0
Z_2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

 Tabla 6.2: Cargas de la simetría $(Z_4)^3$ para B

	10_1	10_2	10_3	$\bar{5}_1$	$\bar{5}_2$	$\bar{5}_3$	H_1	H_2	H_3	H_4	\bar{H}_1	\bar{H}_2	\bar{H}_3	\bar{H}_4	24
Z_4	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0
Z_4	0	1	0	0	1	0	0	2	0	3	0	-2	0	-3	0
Z_4	0	0	1	0	0	1	0	0	2	3	0	0	-2	-3	0

La diferencia principal entre los modelos A y B, es que los tres pares de quintetos y anti-quintetos de Higgs, se acoplan a 24 de B, de tal manera que no es necesario mezclarlos [2] con H_4 y \bar{H}_4 para reproducir el desdoblamiento del triplete-doblete después del rompimiento de $SU(5)$. Esto aumenta la predictividad, porque entonces la mezcla de los tres pares de quintetos y anti-quintetos de Higgs está sujeta a la fenomenología de las dos primeras generaciones.

6.1.1 Condiciones de finitud para los modelos

Como los $vevs$ de los bosones de Higgs supersimétricos no están constreñidos por la finitud, el acoplamiento a la tercera generación es maximal para los dos modelos, esto significa que el vev del Higgs que se acopla a las dos primeras generaciones es prácticamente cero, y la tercera generación está desacoplada de las otras dos. De tal forma que sólo las siguientes condiciones para la tercera generación se imponen a la escala GUT :

Modelo A:

$$g_{top}^2 = \frac{8}{5}g^2 \quad g_{bot}^2 = g_\tau^2 = \frac{6}{5}g^2 \quad (6.4)$$

Modelo B:

$$g_{top}^2 = \frac{4}{5}g^2 \quad g_{bot}^2 = g_\tau^2 = \frac{3}{5}g^2 \quad (6.5)$$

las relaciones son válidas a la escala de unificación M_{GUT} , en donde g es el valor de unificación del acoplamiento de norma.

6.1.2 Regla de suma para los modelos

A partir de la finitud a primer orden para las masas de los escalares suaves, se obtienen 15 ecuaciones para 15 $\kappa^{(0)}$'s desconocidas:

$$\begin{aligned} \kappa_{H_i}^{(0)} &= 1 - 2\kappa_{10_i}^{(0)} \quad , \quad \kappa_{\bar{H}_i}^{(0)} = 1 - \kappa_{10_i}^{(0)} - \kappa_{\bar{5}_{-i}}^{(0)} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \kappa_{H_4}^{(0)} &= \frac{2}{3} - \kappa_{\bar{H}_4}^{(0)} \quad , \quad \kappa_{24}^{(0)} = \frac{1}{3} \quad \text{para A} \end{aligned} \quad (6.6)$$

y

$$\begin{aligned} \kappa_{H_1}^{(0)} &= 1 - 2\kappa_{10_1}^{(0)}, & \kappa_{H_2}^{(0)} &= \kappa_{H_3}^{(0)} = \kappa_{H_4}^{(0)} = 1 - 2\kappa_{10_3}^{(0)}, \\ \kappa_{\bar{H}_1}^{(0)} &= 1 - 2\kappa_{\bar{5}_1}^{(0)}, & \kappa_{\bar{H}_2}^{(0)} &= \kappa_{\bar{H}_3}^{(0)} = \kappa_{\bar{H}_4}^{(0)} = -\frac{1}{3} + 2\kappa_{10_3}^{(0)}, \\ \kappa_{\bar{5}_2}^{(0)} &= \kappa_{\bar{5}_3}^{(0)} = \frac{4}{3} - 3\kappa_{10_3}^{(0)}, & \kappa_{10_2}^{(0)} &= \kappa_{10_3}^{(0)}, & \kappa_{24}^{(0)} &= \frac{1}{3} \quad \text{para } \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde se han definido:

$$\frac{m_i^2}{|M|^2} = \kappa_i^{(0)} + \frac{g^2}{16\pi^2} \kappa_i^{(1)} + \dots, \quad i = 10_1, 10_2, \dots, 24. \quad (6.8)$$

Si la solución (6.3) es usada para calcular el valor de S' , utilizando la ecuación (5.32), la cual proporciona la corrección a segundo orden a la regla de suma para ambos modelos, se encuentra que:

$$S' = 0, \quad (6.9)$$

es decir la regla de suma a primer orden de nuestros modelos no tiene correcciones a segundo orden.

Después debe verificarse si la regla de suma (5.26) es la solución única a la finitud a segundo orden. La finitud a segundo orden para las masas de escalares suaves se sigue de la ecuación (5.34), es decir si:

$$\rho_{ipq(0)} \rho_{(0)}^{j pq} (\kappa_i^{(1)} + \kappa_p^{(1)} + \kappa_q^{(1)}) = -8C(i) \sum_l [\kappa_p^{(0)} - \frac{1}{3}] T(R_l) = -8C(i) S' \quad (6.10)$$

se satisface. Hay 15 ecuaciones para 15 $\kappa^{(1)}$'s desconocidas. La solución en general no es única, pero puede parametrizarse [3, 4, 5] para una S' dada, que es cero para estos modelos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \kappa_{H_i}^{(0)} &= -2S' - 2\kappa_{10_i}^{(1)}, & \kappa_{\bar{H}_i}^{(0)} &= -2S' - \kappa_{\bar{5}_i}^{(1)} - \kappa_{10_i}^{(1)} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \kappa_{H_4}^{(1)} &= -\frac{4S'}{3} - \kappa_{\bar{H}_4}^{(1)}, & \kappa_{24}^{(1)} &= -\frac{2S'}{3} \quad \text{para } \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

y

$$\begin{aligned} \kappa_{H_1}^{(1)} &= -2S' - 2\kappa_{10_1}^{(1)}, & \kappa_{24}^{(1)} &= -\frac{2S'}{3}, & \kappa_{10_2}^{(1)} &= \kappa_{10_3}^{(1)}, \\ \kappa_{H_2}^{(1)} &= \kappa_{H_3}^{(1)} = \kappa_{H_4}^{(1)} = -2S' - 2\kappa_{10_3}^{(1)}, & \kappa_{\bar{H}_2}^{(1)} &= \kappa_{\bar{H}_3}^{(1)} = \kappa_{\bar{H}_4}^{(1)} = \frac{2S'}{3} + 2\kappa_{10_3}^{(1)}, \\ \kappa_{\bar{H}_1}^{(1)} &= -2S' - \kappa_{\bar{5}_1}^{(1)} - \kappa_{10_1}^{(1)}, & \kappa_{\bar{5}_2}^{(1)} &= \kappa_{\bar{5}_3}^{(1)} = -\frac{8S'}{3} - 3\kappa_{10_3}^{(1)}, \quad \text{para } \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Estas $\kappa^{(1)}$'s satisfacen la condición:

$$\kappa_i^{(1)} + \kappa_j^{(1)} + \kappa_k^{(1)} = -2S' = 0, \quad (6.13)$$

lo que demuestra que la regla de suma (5.26) en los presentes modelos es la única solución a la finitud a segundo orden.

6.2 Predicciones de Parámetros a bajas energías

Debido a que la simetría de norma se rompe espontáneamente por abajo de M_{GUT} , las condiciones de finitud no restringen la propiedad de renormalización a bajas energías, y solo quedan condiciones iniciales sobre los acoplamientos de Yukawa (6.3), la relación $h = -MY$ y la regla de suma para las masas suaves de escalares (5.26) en M_{GUT} . Entonces se puede examinar la evolución de los parámetros de acuerdo a sus ecuaciones del GR a segundo orden para los parámetros adimensionales y a primer orden para los dimensionales, con estas condiciones iniciales.

Por abajo de M_{GUT} , su evolución se realiza mediante el MESM. Después de la escala de rompimiento de la supersimetría M_S , el ME es la teoría efectiva correcta.

Para obtener un valor de la escala de gran unificación M_{GUT} consistente con el valor experimental de los parámetros a la escala electrodébil, se corren las ecuaciones del GR del MESM, primero desde la escala $M_{GUT-fin}$, impuesta por las condiciones de finitud (de cada modelo) hasta la escala única de ruptura de la supersimetría, en donde se desacoplan los dobletes de Higgs.

El parámetro $\tan \beta$ se determina en el sector de Higgs, sin embargo, en modelos UNY, es conveniente definir $\tan \beta$, usando las condiciones de correspondencia en M_s :

$$\begin{aligned}\alpha_t^{(ME)} &= \alpha_t^{(SUSI)} \sin^2 \beta, \\ \alpha_b^{(ME)} &= \alpha_b^{(SUSI)} \cos^2 \beta, \\ \alpha_\tau^{(ME)} &= \alpha_\tau^{(SUSI)} \cos^2 \beta, \\ \alpha_\lambda^{(ME)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{5} \alpha_1 + \alpha_2 \right) \cos^2 2\beta,\end{aligned}\tag{6.14}$$

donde α_i^{ME} ($i = t, b, \tau$) son los acoplamientos de Yukawa del MS, α_i^{SUSI} ($i = t, b, \tau$) son los acoplamientos de Yukawa del MESM y α_λ es el acoplamiento del Higgs.

Las condiciones (6.14) y la condición de las UNY a M_{GUT} , pueden ser satisfechas solo para un valor específico de la $\tan \beta$. Bajo las suposiciones especificadas arriba, sin conocer los detalles del sector escalar del MESM, es posible predecir varios parámetros, como la masa del top.

Los valores iniciales a la escala electrodébil que se toman en cuenta son:

$$M_\tau = 1.777 \text{ GeV}, \quad M_Z = 91.188 \text{ GeV},\tag{6.15}$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_{EM}^{-1}(M_Z) &= 127.9 + \frac{8}{9\pi} \log \frac{M_t}{M_Z}, \\ \sin^2 \theta_W(M_Z) &= 0.2319 - 3.03 \times 10^{-5} T - 8.4 \times 10^{-8} T^2, \\ T &= M_t / [\text{GeV}] - 165.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Los acoplamientos de norma y de Yukawa obtenidos de los valores experimentales, se hacen evolucionar desde la escala electrodébil M_Z hasta la escala M_S para poder incorporar las

constricciones experimentales en (6.14). También los acoplamientos de norma y Yukawa, con los valores impuestos a la escala de M_{GUT} por las condiciones de finitud, se hacen evolucionar a la escala de M_S . De tal forma que en M_S se comparan los valores de los acoplamientos y se redefinen los valores de $\tan \beta$ y α_3 que estén de acuerdo tanto con las condiciones experimentales como con las condiciones de finitud. El acoplamiento α_3 se hace evolucionar a M_Z , dando como resultado una predicción del valor de α_3 a bajas energías, que se ajusta a las condiciones de frontera.

El proceso descrito anteriormente se repite hasta lograr un valor óptimo de $\tan \beta(M_S)$, de M_{GUT} y de $\alpha_3(EW) = \alpha_{3(5f)}$. De esta forma se obtienen predicciones a bajas energías para las masas físicas (en el polo) de los cuarks M_b y M_t , respectivamente, ya que sólo se fija el valor de M_τ a través de (6.15). Los resultados obtenidos se muestran en las Tablas (6.3 y 6.4).

Una vez encontrados los parámetros $\tan \beta(M_S)$, M_{GUT} , $\alpha_{3(5f)}(EW)$, y α_{GUT} , se pueden hacer evolucionar las ecuaciones de GR con los términos de RSS del MESM, desde la escala M_{GUT} , hasta la escala M_S y después se pueden correr las ecuaciones GR del MESM desde M_S , hasta una escala M , $M < M_S$ y obtener así los valores de los parámetros a bajas energías para el espectro supersimétrico.

Tabla 6.3: Predicciones a bajas energías para el modelo A

M_S [GeV]	$\alpha_{3(5f)}(M_Z)$	$\tan \beta$	M_{GUT} [GeV]	M_{bot} [GeV]	M_t [GeV]
300	0.123	54.2	2.2×10^{16}	5.4	183
500	0.122	54.2	1.9×10^{16}	5.4	183
10^3	0.120	54.3	1.5×10^{16} GeV	5.2	184

Tabla 6.4: Predicciones a bajas energías para el modelo B

M_S [GeV]	$\alpha_{3(5f)}(M_Z)$	$\tan \beta$	M_{GUT} [GeV]	M_{bot} [GeV]	M_t [GeV]
800	0.120	48.6	1.5×10^{16} GeV	5.4	174
10^3	0.119	48.6	1.4×10^{16}	5.4	174
1.2×10^3	0.118	48.6	1.3×10^{16}	5.4	174

6.3 Predicciones de parámetros en el sector RSS

Para obtener predicciones en los parámetros del sector RSS, se imponen las condiciones (5.23) ($h = -MY$) y la regla de suma para las masas escalares suaves, i.e. (6.6) y (6.11) para A y (6.7) y (6.12) para B, y se calculan sus valores a bajas energías. Se puede suponer que hay una sola escala de rompimiento de la supersimetría, que coincida con la masa unificada del gaugino M a la escala de M_{GUT} . Esto es, se calculan los parámetros RSS a $M_S = M$, de donde se obtiene el espectro de supercompañeros, utilizando las fórmulas a nivel árbol¹.

Debido a que la $\tan \beta$ está en el sector de dimensión cero de las UNY, se deberían examinar si las UNY y las reglas de suma son consistentes con el rompimiento radiativo de la simetría electrodébil. La consistencia puede lograrse, aunque no siempre, usando la libertad que dá el hecho de que el término supersimétrico de masa μ no está constreñido por la finitud.

¹Se incluyen las correcciones radiativas a primer orden, de la masa del Higgs más ligero.

De las ecuaciones (6.6) y (6.7), se puede observar que la regla de suma para los dos modelos es diferente. Los dobletes de Higgs del MESM, H_d y H_u son \overline{H}_3 y H_3 respectivamente. Las masas escalares m_i^2 , con $i = H_1, H_2, \overline{H}_1, \overline{H}_2$ no entran en el sector de bajas energías, por lo que $m_{10_1}^2, m_{\overline{5}_1}^2, m_{10}^2$ y $m_{\overline{5}_2}^2$, para el modelo A, y $m_{10_1}^2$ y $m_{\overline{5}_1}^2$, para el modelo B, son parámetros libres que están desacoplados de la tercera familia. Por eso nos concentramos en la predicción para la tercera familia. Entonces para las masas escalares de la tercera generación las reglas de suma a M_{GUT} , están dadas por:

$$\begin{aligned} m_{H_u}^2 + 2m_{H_{10}}^2 &= m_{H_d}^2 + m_{\overline{5}}^2 + m_{H_{10}}^2 = M^2 \quad \text{para A,} \\ m_{H_d}^2 + m_{H_{10}}^2 &= M^2, \quad m_{H_d}^2 - 2m_{H_{10}}^2 = -\frac{M^2}{3}, \\ m_{\overline{5}}^2 + 3m_{H_{10}}^2 &= \frac{4M^2}{3} \quad \text{para B} \end{aligned} \quad (6.17)$$

con $m_{\overline{5}} = m_{\overline{5}_3}$ y $m_{10} = m_{10_3}$ para el modelo A, y $m_{10} = m_{10_3}$ para el modelo B. Como vemos en el modelo A hay tres parámetros libres y en el B dos.

6.4 Correcciones en el espectro de la masa del Higgs en el MESM

6.4.1 Dependencia de las masas de los bosones de Higgs en la masa m_t del cuark top

El sector de Higgs del MESM predice la existencia de un estado par CP, h^0 , con una masa que no puede exceder a 150 GeV, a diferencia del Higgs del ME, cuya masa puede ser mucho mayor (~ 1 TeV). Los límites precisos en el espectro de masas de los bosones de Higgs del MESM dependen del valor de la masa del cuark-top (m_t) [6], debido a que la producción y el decaimiento de los bosones de Higgs está controlado por los acoplamientos de los bosones físicos de Higgs con los pares de bosones y fermiones, de tal forma que siendo m_t un valor relativamente grande ² con respecto a las masas de los fermiones se tiene una contribución considerable hasta el cuarto orden.

El bosón escalar más ligero del MESM, h^0 , debe satisfacer la relación a nivel árbol:

$$m_h^0 \leq m_Z |\cos 2\beta| \leq m_z, \quad (6.18)$$

sin embargo el límite a nivel árbol no necesariamente debe ser respetado cuando se incluyen correcciones radiativas.

Las contribuciones al corrimiento de la masa del bosón de higgs ligero, con respecto a su valor a nivel árbol, vienen de las contribuciones de rizados de los cuarks y los s-cuarks. Los parámetros del sector de s-cuarks incluyen masas de RSS comunes: $M_{\tilde{Q}}, M_{\tilde{U}} y M_{\tilde{D}}$, correspondientes a $\tilde{q}_L \equiv (\tilde{u}_L, \tilde{d}_L), \tilde{u}_R$ y \tilde{d}_R , respectivamente (sin índices de generación). Para los

²Ver Tabla

Tabla 6.5: Predicciones en el sector RSS para el modelo A. En el primer renglón se especifican los valores de la escala SUSI supuestos. Los datos que se encuentran debajo de cada valor de SUSI corresponden al valor de los parámetros libres, así como a las predicciones del modelo.

M_S [GeV]	300	500	1000
$\tan \beta$	54.2	54.2	54.3
$M_{GUT} 10^{16}$ [GeV]	2.2	1.9	1.5
α_{GUT}	.0412	.04235	.0397
μ_{GUT} [TeV]	1	1	1
B_{GUT} [TeV] ²	-1	-1	-1
Auto-estados de masa RSS [TeV]			
$s - t_1 m_{\tilde{t}_1}$	0.95	0.95	0.94
$s - t_2 m_{\tilde{t}_2}$	1.10	1.10	1.09
$s - b_1 m_{\tilde{b}_1}$	0.91	0.87	0.86
$s - b_2 m_{\tilde{b}_2}$	1.07	1.07	1.06
$s - \tau_1 m_{\tilde{\tau}_1}$.35	0.34	0.34
$s - \tau_2 m_{\tilde{\tau}_2}$	0.56	0.55	0.54
M_A	.27	.39	0.44
M_{H^\pm}	0.28	0.41	0.45
M_H	0.27	.36	0.44
M_h	0.12	0.12	.12
$neutralino_1 m_{\chi_1}$	0.23	0.23	0.22
$neutralino_2 m_{\chi_2}$	0.39	0.39	0.40
$neutralino_3 m_{\chi_3}$	0.91	0.92	0.93
$neutralino_4 m_{\chi_4}$	0.92	0.93	0.94
$chargino_1 m_{\chi_1^\pm}$	0.43	0.42	0.41
$chargino_2 m_{\chi_2^\pm}$	0.95	0.95	0.94

Tabla 6.6: **Predicciones en el sector RSS para el modelo B.** En el primer renglón se especifican los valores de la escala SUSI supuestos. Los datos que se encuentran debajo de cada valor de SUSI corresponden al valor de los parámetros libres, así como a las predicciones del modelo.

M_S [GeV]	800	10^3	1.2×10^3
$\tan \beta$	48.6	48.6	48.6
$M_{GUT} 10^{16}$ [GeV]	1.5	1.4	1.6
α_{GUT}	.0410	.0405	.0398
μ_{GUT} [TeV]	1	1	1
B_{GUT} [TeV] ²	-1	-1	-1
Auto-estados de masa RSS [TeV]			
$s - t_1 m_{\tilde{t}_1}$	1.62	1.62	1.61
$s - t_2 m_{\tilde{t}_2}$	1.82	1.82	1.83
$s - b_1 m_{\tilde{b}_1}$	1.58	1.58	1.57
$s - b_2 m_{\tilde{b}_2}$	1.70	1.70	1.69
$s - \tau_1 m_{\tilde{\tau}_1}$	0.49	0.49	0.48
$s - \tau_2 m_{\tilde{\tau}_1}$	0.70	0.70	0.69
M_A	0.75	0.75	0.74
M_{H^\pm}	0.76	0.76	0.75
M_H	0.75	0.75	0.74
M_h	0.12	0.12	.12
neutralino ₁ m_{χ_1}	0.45	0.45	0.45
neutralino ₂ m_{χ_2}	0.87	0.86	0.85
neutralino ₃ m_{χ_3}	1.41	1.40	1.39
neutralino ₄ m_{χ_4}	1.42	1.41	1.40
chargino ₁ $m_{\chi_1^\pm}$	0.87	0.86	0.85
chargino ₂ $m_{\chi_2^\pm}$	1.42	1.41	1.40

s-leptones, las definiciones son similares, excepto que no hay $\tilde{\nu}_R$. El parámetro de mezcla $\tilde{q}_L - \tilde{q}_R$ se define como A .

Para encontrar un valor límite al corrimiento Δm_h^2 se supone la condición a nivel árbol (6.18) está saturada, con lo que $m_A \geq m_Z$ y $\tan\beta = \pi/2$, i.e. $v_1 = 0$ ó $v_2 = 0$, y entonces los cuarks con carga $-1/3$ (ó $2/3$) no tendrían masa. Debido a que la masa del cuark top es considerablemente mayor que la de los demás fermiones puede tomarse el caso $v_1 = 0$. En este modelo, el espectro de masas a nivel árbol, de los bosones de Higgs consiste en $m_{h^0} = m_Z$, $m_{H^0} = m_{A^0} \geq m_Z$ y $m_{H^\pm} = (m_W^2 + m_{A^0}^2)^{1/2}$. Para calcular las correcciones, con respecto al nivel árbol, se define $\Delta m_h^2 \equiv m_{h^0}^2 - m_Z^2$.

En el límite en el que $m_Z < m_t \ll M_{\tilde{Q}} = M_S$, si se suma sobre los seis sabores de cuarks y s-cuarks, leptones y s-leptones y se supone que hay una sola escala de rompimiento de la supersimetría M_S , de manera que la mezcla $\tilde{q}_L - \tilde{q}_R$ se puede despreciar, se tiene que [6]:

$$(\Delta m_h^2)_{\beta=\pi/2} = \frac{3g^2 m_Z^4}{16\pi^2 m_W^2} \left\{ \ln \left[\frac{M_S^2}{m_t^2} \right] \left[\frac{2m_t^4 - m_t^2 m_Z^2}{m_Z^4} + \frac{(1 - \frac{8}{3}s_W^2 + \frac{32}{9}s_W^4)}{6} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{M_S^2}{m_Z^2} \right] \left[\frac{(1 - \frac{8}{3}s_W^2 + \frac{32}{9}s_W^4)}{3} + \frac{(1 - \frac{4}{3}s_W^2 + \frac{8}{9}s_W^4)}{2} + (1 - 2s_W^2 + 4s_W^4) \right] + \frac{m_t^2}{3m_Z^2} \right\} \quad (6.19)$$

en donde $s_W = \sin\theta_W$. La característica más importante es la contribución de m_t^4 , que proviene de los rizos de cuarks y s-cuarks. Para encontrar la región de validez de la expansión perturbativa se debe determinar el parámetro relevante en la expansión. Examinando las contribuciones mayores posibles a los digramas de Feynman a dos rizos, se tiene que el criterio necesario para la validez de la expansión perturbativa es:

$$\frac{3g^2 m_t^4}{16\pi^2 m_W^2} \ln \left[\frac{M_S^2}{m_t^2} \right], \quad (6.20)$$

que puede verse como $m_t \lesssim 6m_W$ para $M_S = 1$ TeV, lo cual satisface el valor medido del cuark top³. Es claro a partir de (6.19) que la dependencia de (Δm_h^2) en M_S es logarítmica, así, aún si M_S fuera apreciablemente menor que 1 TeV, la masa del bosón de Higgs tendría un corrimiento apreciable con el valor medido de m_t .

Para un modelo realista, es decir $\tan\beta \neq \pi/2$, se tiene que:

$$(\Delta m_h^2) = (\Delta m_h^2)_{\beta=\pi/2} - \frac{1}{2} \{ [m_{A^0}^2 - m_Z^2]^2 + 4m_{A^0}^2 m_{\tan^2\beta}^2 \}^{1/2} - (m_{A^0}^2 - m_Z^2) \} \quad (6.21)$$

Siempre y cuando $\tan\beta$ no este cerca de 1, la corrección debida al segundo término es pequeña.

También se pueden incluir correcciones a (Δm_h^2) debidas a los bosones de norma y de Higgs y a sus compañeros supersimétricos (los charginos y neutralinos), que resultan ser negativas, en tanto que la de los otros bosones de Higgs (H^0 , A^0 y H^\pm) es positiva y un poco menor en magnitud. Si se varían los parámetros supersimétricos, de tal manera que las masas supersimétricas sean menores que 1 TeV, se encuentra que la contribución a (Δm_h^2) es estable y cae dentro de 0 y $(-5\text{GeV})^2$.

³Ver Tabla y referencias [7, 8, 9 y 10]

Con respecto a los s-top, la aproximación con término líder logarítmico a un rizo, está dada por [11]:

$$m^2 h^0 \lesssim m_Z^2 \cos^2 \beta + \frac{3g^2 m_t^4}{8\pi^2 m_W^2} \ln \left(\frac{M_{\tilde{t}_1} M_{\tilde{t}_2}}{m_t^2} \right), \quad (6.22)$$

donde m_t^4 es la masa del cuark top y $M_{\tilde{t}_1}$ y $M_{\tilde{t}_2}$ son las masas de los s-top. La ecuación (6.22) indica que el límite superior a la masa del bosón de Higgs es muy sensible con respecto a la masa del cuark top y depende logarítmicamente de las masas de los s-top. Las correcciones radiativas a la masa del bosón de Higgs han sido calculadas por aproximaciones tales como el uso del potencial efectivo [12, 13, 14, 15, 16] y métodos de diagramas [17]. Algunas de las expresiones resultan bastante complicadas y dependen de todos los parámetros del MESM, sin embargo no pueden ser despreciadas debido a la dependencia en m_t^4 y el logaritmo de las masas de los s-tops. Las técnicas de “resumación” de las ecuaciones del grupo de renormalización GR han sido desarrolladas por varios autores [18, 11]. El cálculo de las correcciones mediante las ecuaciones del GR a un rizo requiere de integración numérica de ecuaciones acopladas RG [11]. Sin embargo este procedimiento no es general y tampoco es fácil de llevar a cabo. Recientemente dos grupos [11, 15] de trabajo han presentado un procedimiento analítico simple para calcular el valor de m_{h^0} . Estos métodos pueden ser utilizados con facilidad, y ambos incorporan las correcciones de uno y dos rizos y un mejoramiento mediante las ecuaciones del grupo de renormalización. A continuación se describe el proceso.

6.4.2 Correcciones radiativas para las masas y los acoplamientos de los bosones de Higgs

Una vez que se tienen los parámetros del MESM a la escala única de rompimiento de la supersimetría, se pueden correr las ecuaciones del GR de los parámetros del MESM a la escala de la masa física (en el polo) del cuark top y poder calcular el valor de las partículas del Higgs en el MESM, como función de las condiciones heredadas e impuestas por el requerimiento de finitud a la escala de gran unificación. La validez de este procedimiento se explica a continuación y ha sido justificada en la referencia [15].

Gracias a la medición precisa de la masa del cuark-top [7, 8, 9, 10], se pueden encontrar límites superiores precisos de la masa m_h del bosón de Higgs más ligero. Para ello se necesita que $M_W \ll M_S \lesssim \mathcal{O}(\text{pocos TeV})$, donde se supone que M_S es la escala única de rompimiento de la supersimetría, de tal forma que sea menor que o del orden de pocos TeV, si M_S está determinada por argumentos de naturalidad. En este caso el límite superior de m_h se obtiene cuando la masa del bosón de Higgs impar CP, m_A , es del orden de M_S y la teoría efectiva por abajo de M_S es el ME con las condiciones de correspondencia en M_S ⁴.

Para valores de $m_A < M_S$, la teoría por debajo de M_S es el modelo efectivo de dos dobletes de Higgs, en donde aparecen 2 bosones de Higgs pares CP, 1 bosón de Higgs neutro impar CP y dos bosones de Higgs cargados a escalas por debajo del rompimiento de la supersimetría.

Si se tiene que $m_A \sim M_S$, entonces debajo de M_S , el modelo efectivo es el ME, en donde

⁴Condiciones de correspondencia de la sección anterior.

el acoplamiento cuártico del bosón de Higgs es:

$$\lambda = \frac{1}{4}(g_2^2 \pm g_1^2) \cos^2(2\beta). \quad (6.23)$$

En este caso la masa del bosón de Higgs puede determinarse a partir de una resumación de las ecuaciones del grupo de renormalización a todos los órdenes logarítmicos principales y secundarios.

Para los valores de los parámetros del espectro supersimétrico obtenidos (6.5) y (6.6) se puede considerar que $m_A \sim M_S$, sin embargo, para incluir correcciones radiativas a mayor orden se debe considerar el modelo general de dos dobletes de Higgs. Aquí se utilizan las expresiones para el caso $m_A \sim M_S$, faltaría por hacer el caso $m_A < M_S$, obteniendo las ecuaciones del grupo de renormalización apropiadas para evaluar los parámetros desde la escala de rompimiento de la supersimetría hasta la escala de m_{top} .

El Modelo general de dos dobletes de Higgs, campos escalares $Y = 1, SU(2)_L$, se basa en obtener los dos dobletes de Higgs a partir del potencial escalar invariante de norma más general de la teoría que se emplee, ya sea supersimétrica ó no. Para encontrar el mínimo se impone invariancia CP y simetría $U(1)_{em}$ y de esta forma tres de los ocho grados de libertad de los dobletes originales de Higgs son absorbidos por W^\pm y Z . Los 5 grados de libertad restantes son las cinco partículas físicas de Higgs: 2 escalares pares CP: H^0 y h^0 con ($m_{h^0} \leq m_{H^0}$), un escalar impar CP, (A^0) y un par de bosones de Higgs cargados (H^\pm).

Comportamiento de los bosones de Higgs, cuando $m_A \leq M_S$

Las correcciones radiativas a los parámetros adimensionales λ_i ($i = 1, \dots, 7$), se expresan con funciones de la masa de Higgs μ supersimétrica y de los parámetros de rompimiento suave de la supersimetría, A_t, A_b y m_A . Las cantidades en las fórmulas aproximadas están definidas a la escala M_t , en particular $\alpha(M_t)$:

$$\alpha_3(M_t) = \frac{\alpha_3(M_Z)}{1 + \frac{11-2n_f}{4\pi} \alpha_3(M_Z) \ln(M_t^2/M_Z^2)} \quad (6.24)$$

con n_f igual al número de sabores de cuark por abajo de M_t ($n_f = 5$). Los acoplamientos de Yukawa del cuark b y del cuark top en el modelo de dos dobletes de Higgs, están dados por:

$$\begin{aligned} y_t &= m_t(M_t)/(v \sin\beta) \\ y_b &= m_b(M_t)/(v \cos\beta). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Para $m_a \leq M_t$, $\tan\beta$ se fija a la escala de m_A y si $m_A \geq M_t$, $\tan\beta$, está dada por:

$$\tan\beta(M_t) = \tan\beta(m_A) \left[1 + \frac{3}{32\pi^2} (y_t^2 - y_b^2) \log \frac{m_A^2}{M_t^2} \right] \quad (6.26)$$

en los cálculos numéricos, no se ha tomado esto en cuenta, ya que se tiene que $y_t \sim y_b$ por las condiciones heredadas de finitud en M_{GUT} , de manera que $\tan\beta$ cambia imperceptiblemente con la energía.

En el caso en que $m_t < m_a < M_s$, se desacopla en los cálculos numéricos el doblete pesado de Higgs y se define el acoplamiento cuártico efectivo para el Higgs ligero, el cual está relacionado a la masa de m_h , que cambia con la escala, a la escala m_A , a través de:

$$\lambda(m_A) = \frac{m_h(m_A)}{2v^2}. \quad (6.27)$$

El valor a bajas energías del acoplamiento cuártico es entonces obtenido, corriendo las ecuaciones del GR desde la escala m_A , hasta la escala M_t . En la aproximación analítica, por simplicidad, se puede ignorar el efecto del desacoplamiento del doblete pesado de Higgs a una escala intermedia. Este efecto se puede compensar relacionando el valor de la $\tan \beta$ a la escala M_t con su correspondiente valor a la escala m_A , a través de (6.26).

6.4.3 Validez de las expresiones analíticas

La escala de M_s , debe estar asociada a una escala característica de la escala de la masa de los s-cuarks. El análisis de las ecuaciones de renormalización, considerado en la sección anterior está basado en la suposición de que sólo hay una etapa de desacoplamiento de los campos de s-cuarks, lo cual es válido, si y solo si la diferencia de masas entre los auto-estados de masa de los s-cuarks es pequeña, es decir:

$$\frac{m_{\tilde{t}_1}^2 - m_{\tilde{t}_2}^2}{m_{\tilde{t}_1}^2 + m_{\tilde{t}_2}^2} \lesssim 0.5, \quad (6.28)$$

donde $m_{\tilde{t}_1}^2$ y $m_{\tilde{t}_2}^2$ son los auto-estados de masa al cuadrado del stop. Esta restricción también se aplica a todos los análisis existentes de la masa de Higgs, al segundo orden más importante. Entonces si se quieren utilizar estas expresiones se deben primero obtener los valores de las partículas supersimétricas con una M_S inicial y después verificar si se cumple la condición (6.28). La ecuación (6.28) asegura automáticamente la ausencia de taquiones en el sector del stop. Más aún, bajo la validez de la ecuación (6.28), la escala de masa M_S^2 pueda estar definida en forma segura de acuerdo al promedio aritmético de los auto-estados de masa al cuadrado:

$$M_S^2 = \frac{m_{\tilde{t}_1}^2 + m_{\tilde{t}_2}^2}{2}. \quad (6.29)$$

Las correcciones radiativas en el espectro de masas de los bosones de Higgs están basadas en la expansión del potencial efectivo de Higgs hasta operadores de dimensión cuatro. La contribución de operadores de dimensión mayor puede ser despreciada en forma segura solo si $2|M_t A_t| < M_S^2$ y $2|M_t \mu| < M_S^2$.

Estrictamente hablando, la expansión empleada se efectuó en la fase simétrica, en donde la escala de energía al cuadrado, a la cual el stop se desacopla, no es el promedio de las masas de los stops al cuadrado, M_S , sino el promedio de los parámetros de RSS de los stop al cuadrado, es decir: $m^2 \equiv (m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{U}}^2)/2$. Los operadores de dimensión mayor en la fase simétrica pueden despreciarse, solo si $M_S^2 \gg m_t^2$. En este intervalo de parámetros, la distinción entre M_S y la escala real de desacoplamiento no afecta la aproximación hecha. En general, las expresiones

obtenidas producen una aproximación confiable para las masas de los bosones de Higgs, siempre y cuando la restricción en la mezcla de los parámetros stop (6.28) se mantenga y $M_S \gtrsim 2m_t$. Más aún, para el caso de $\tan \beta$ grande, para el cual la contribución del acoplamiento de Yukawa del bottom se vuelve relevante, se ha supuesto que las masas de los sbottoms son del orden de las de los stops y que se cumplen límites similares en los parámetros de mezclas de masas.

Físicamente es claro que en la región donde los operadores de dimensión > 4 no están ausentes, $M_S \lesssim 2M_t$, la expansión, cuyo término más importante es el logarítmico, de las masas de los bosones de Higgs debería contener potencias de $\log(M_S^2/M_t^2)$, en vez de $\log(m^2/M_t^2)$. Este debería de ser el caso, ya que el límite supersimétrico para el sector *top/stop*, $M_S = M_t$, y una mezcla nula, se deberían recuperar los valores a nivel árbol de las masas. No se puede considerar el potencial efectivo del MESM a escalas menores que las masas de los s-cuarks, por que éstos se encuentran ya desacoplados, dejando correcciones en el umbral que correspondan al potencial efectivo más allá del umbral supersimétrico.

Una vez que se reconoce que el potencial efectivo del MESM es válido a la escala definida por las masas de los s-cuarks, se puede tratar de mejorar su funcionamiento mediante las ecuaciones GR. Ya que el potencial efectivo mejorado por GR es independiente de la escala, se pueden definir los parámetros que cambian con la energía, sobre los cuales el potencial efectivo depende también a esa escala, y escribirlos como funciones de los parámetros correspondientes, definidos a la escala de M_t . Entonces, aprovechando la independencia de escala del potencial efectivo, se pueden evolucionar las masas de los bosones de Higgs, desde la escala alta hasta la escala M_t , utilizando las dimensiones anómalas de los campos de Higgs. Sin embargo el potencial efectivo GR a primer orden no es exactamente independiente de la escala, y así, cuando se minimiza a la escala M_S , se puede simplemente incluir un error en la determinación del bosón de Higgs más ligero. Este error es muy pequeño para valores de M_S del orden de la escala electrodébil, pero es significativo para escalas del orden de $M_S \gtrsim 500$ Ge V.

Entonces se puede utilizar el potencial efectivo del MESM corregido mediante las ecuaciones GR, minimizado a la escala M_S , a la cual se determina la matriz de masa al cuadrado del bosón neutral de Higgs. Todos los parámetros en la matriz de masas son parámetros que cambian con la energía, definidos a la escala M_S (incluyendo v_1 y v_2). Están relacionados con los parámetros definidos a la escala M_t , mediante la evolución correspondiente de las funciones β y γ , manteniendo sólo los acoplamientos de Yukawa y el acoplamiento de la interacción fuerte en las expresiones analíticas de la sección anterior. Entonces se puede hacer evolucionar la matriz de masas al cuadrado, con la matriz correspondiente de las γ , desde M_S hasta M_t .

Para calcular las masas en el polo de los bosones de Higgs las contribuciones a la polarización del vacío del Higgs deben añadirse a los cálculos.

El fijar la escala de renormalización a la escala de la masa en el polo del cuark top hace que las contribuciones que dependen de la polarización del vacío del top sean pequeñas y entonces, en general, aún para masas s-top del orden de la masa del top, las expresiones analíticas presentadas aquí, dan una buena aproximación al valor de la masa del Higgs. Debido a que solo hay una fase de desacoplamiento de los stops, la restricción sobre la diferencia de las masas stop (6.28), debe cumplirse siempre.

Las expresiones analíticas para el caso general $m_A \lesssim M_S$ determinan el espectro de masas del sector de Higgs, con un error menor a 3 GeV con respecto a los valores obtenidos usando la aproximación mejorada de las expresiones GR a un rizo. El análisis sólo toma en cuenta

en el sector de Yukawa al top y al bottom, en el sector de norma a α_3 , suponiendo una escala supersimétrica característica M_S e incluye efectos de mezcla de los s-cuarks. Los charginos y neutralinos tienen un efecto pequeño y negativo en m_{h^0} , del orden de 2 a 3 GeV. Un cálculo de las masas de Higgs, más allá de ésta aproximación, requeriría una derivación del potencial efectivo a dos rizos en las GR y las correcciones de polarización a la masas que corren del Higgs, incluyendo las contribuciones de los s-cuarks y del Higgs pesado.

6.5 Comparación con los datos experimentales

6.5.1 Límites experimentales para el bosón de Higgs

A pesar del esfuerzo experimental realizado durante las últimas décadas, el bosón de Higgs del ME no ha sido aún detectado. Sin embargo se han podido encontrar límites experimentales para su masa, obtenidos principalmente a partir de decaimientos de bosones Z^0 . A continuación se presentan los límites experimentales hasta la fecha y los basados en las simulaciones de las colaboraciones de LEP, principalmente las de la colaboración OPAL [19].

El límite inferior para el bosón de Higgs del ME con $11.4 \pm 0.3(stat.) \pm 1.4(syst)$ eventos es:

$$m_{h^0} = 84.2 \text{ GeV}$$

al 95% de confianza, derivado de colisiones e^+e^- con energías del centro de masa en la vecindad de 183 GeV.

Para el MESM, los bosones de Higgs neutrales pueden ser producidos por los procesos $e^+e^- \rightarrow z^0 h^0$ y $e^+e^- \rightarrow A^0 h^0$. La colaboración OPAL del LEP utiliza algoritmos de Monte Carlo, que reproducen todas las características del detector, y el generador *HZHA* para simular los procesos de producción de los bosones de Higgs. Así mismo se generan señales de prueba para el proceso $h^0 A^0 \rightarrow b\bar{b}b\bar{b}$ en el espacio de masas (m_{h^0}, m_{A^0}) que cubren todo el intervalo cinemáticamente accesible para:

$$m_{h^0} > 20 \text{ GeV} \quad \text{y} \quad m_{A^0} > 20 \text{ GeV}. \quad (6.30)$$

La masa hipotética (para el bosón de Higgs más ligero) de los eventos seleccionados se calcula a partir del momento medido del chorro de partículas, después de que se hace un ajuste cinemático de la energía y el momento. Los eventos de los cuatro chorros considerados en el proceso no pueden distinguirse, por lo cual para cada evento candidato a bosón de Higgs se tienen varios puntos en el plano (m_{A^0}, m_{h^0}) . La información obtenida se utiliza para calcular los límites de la masa del bosón de Higgs.

La colaboración OPAL consideró para sus simulaciones un espacio de parámetros MESM constreñido con sólo cinco parámetros libres, aparte de los del ME. También se supone la unificación de las masas de los fermiones escalares (m_0) a la escala GUT, y la unificación de las masas de los gauginos (parametrizadas utilizando el término de masa del gaugino $SU(2)$ a la escala electrodébil: M_2) y los acoplamientos trilineales de los fermiones escalares (h^{ijk}) a la escala electrodébil. Estas simplificaciones no tienen un impacto grande en la fenomenología

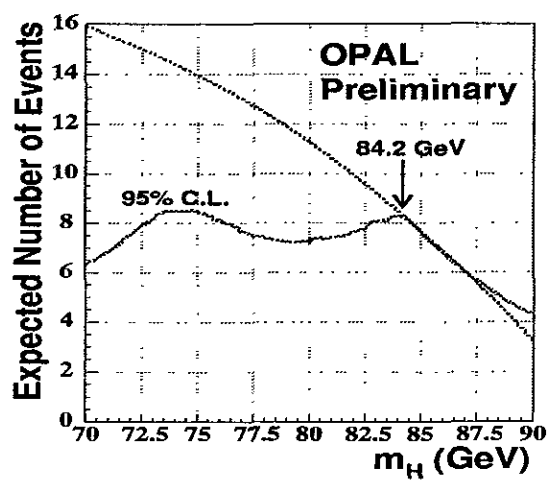


Figura 6.1: Límites de confianza medidos (línea continua) y esperados (línea punteada) como función de la masa del bosón de Higgs del ME.

del bosón de Higgs del MESM. Otros parámetros libres del modelo son el parámetro μ , $\tan\beta$ y m_{A^0} .

De esta forma los espacios de parámetros del MESM analizados por OPAL fueron los siguientes:

A) Se considera que los parámetros de rompimiento suave de la supersimetría (RSS) se fijan para ser del orden de unos pocos TeV.

B) Se permite que los parámetros RSS varíen dentro de un intervalo amplio.

Para ambos casos μ se escoge de tal forma que $\mu = -0.1m_0$. Para el caso **A** los parámetros m_0 y M_2 se fijan a 1 TeV y $m_{top} = 175$ GeV. Los parámetros m_{A^0} y $\tan\beta$ se varían en los intervalos $5 < m_{A^0} < 160$ GeV y $0.7 < \tan\beta < 50$, respectivamente.

Sólo se seleccionan los eventos generados que dan lugar a un s-top con una masa mayor a la del neutralino más ligero. Los límites experimentales de exclusión se obtienen para este análisis a 183 GeV, combinados con análisis a energías menores (Ver Figura (6.5.1)).

También se presentan las regiones de exclusión, obtenidas por la colaboración DELPHI del LEP, con un análisis similar al de OPAL [20].

6.6 Comentarios

Como se puede ver en la sección anterior, las condiciones para el MESM impuestas por las colaboraciones del LEP, no son las mismas que las de los modelos finitos presentados. En particular la condición de universalidad. Sin embargo si la fenomenología del sector de Higgs no se ve grandemente afectada por esto, entonces se pueden comparar los datos obtenidos con los límites experimentales de exclusión presentados. Además la condición de universalidad es un caso especial en el espacio de parámetros, por lo que necesariamente al relajar esta condición los límites se amplían.

6.6.1 Límites experimentales para los auto-estados de masa del MESM

A continuación se presentan los resultados de la colaboración L3 de las búsquedas de las partículas del MESM [21], en $\sqrt{s} = 161$ y $\sqrt{s} = 172$ GeV.

Tabla 6.7: Resultados de SUSI en el LEP

Partícula	Intervalo para el límite inferior
$m_{\chi^0} \sim$	40 GeV
$m_{\chi^\pm} \sim$	(70,85) GeV
$m_{\tilde{\tau}} \sim$	(70,85) GeV

Para obtener estos límites, también se supuso la condición de universalidad de las masas de los escalares suaves. Sólo se seleccionaron los eventos en los cuales el neutralino más ligero es la partícula supersimétrica más ligera (PSL). En las referencias consultadas no se han hecho aún los análisis para los límites inferiores de las demás partículas supersimétricas, aunque los experimentos y simulaciones para $\sqrt{s} \sim 180$ GeV ya se han llevado a cabo.

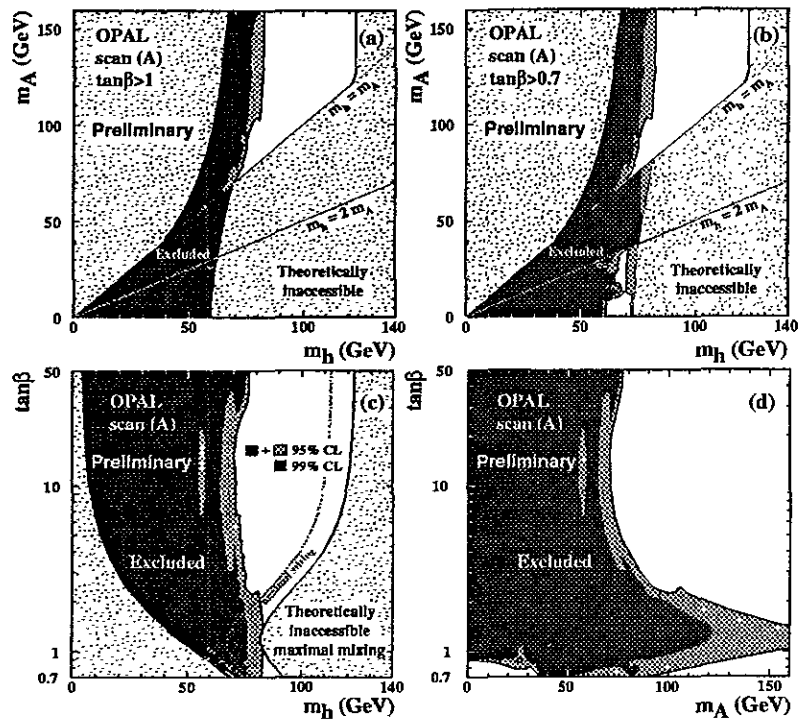


Figura 6.2: Regiones de exclusión del MESM para A. (a) Plano (m_{h^0}, m_{A^0}) para $\tan\beta > 1$, (b) Plano (m_{h^0}, m_{A^0}) para $\tan\beta > 0.7$, (c) Plano $(m_{h^0}, \tan\beta)$, (d) Plano $(m_{A^0}, \tan\beta)$. Las áreas negras están excluidas al 99% CL. Las áreas negras con las áreas grises están excluidas al 95%. Las áreas punteadas en (a),(b) y (c) son teóricamente inaccesibles.

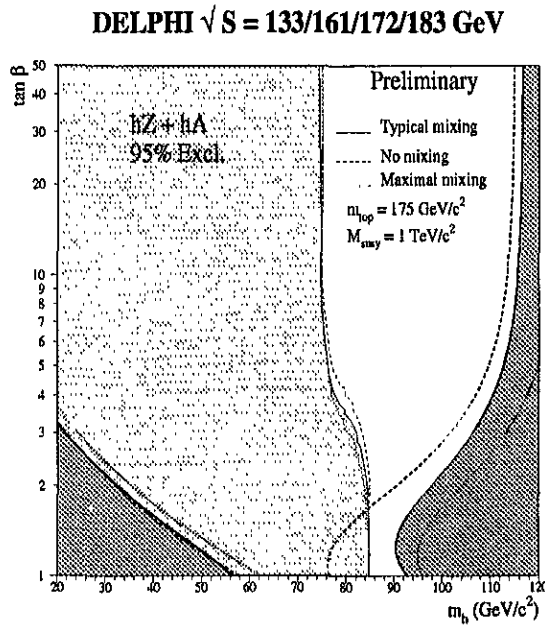


Figura 6.3: Límite preliminar de la Colaboración DELPHI para la masa m_h .

Como se puede apreciar los valores obtenidos a partir de los modelos finitos están de acuerdo con estos límites experimentales.

6.6.2 Datos experimentales a bajas energías

Tabla 6.8: Datos a bajas energías

Parámetro	Valor experimental
$1/\alpha$	128.905 ± 0.090
α_3	0.120 ± 0.003
m_W [GeV]	80.352 ± 0.033
m_t [GeV]	175 ± 6

Los valores obtenidos para bajas energías, a partir de los modelos finitos presentados, dan valores muy cercanos a los presentados experimentalmente, por lo cual los modelos resultan bastante alentadores.

Bibliografía

- [1] T. Kobayashi, J. Kubo, M. Mondragón, and G. Zoupanos. Constraints on finite soft supersymmetry-breaking terms. *Nuclear Physics*, B(511):45–68, 1998.
- [2] D.I. Kazakov, M.Yu. Kalmykov, I.N. Kondrashuk, and A.V. Gladyshev. *Nuclear Physics*, B471:387, 1996.
- [3] R. Oehme and W. Zimmermann. *Com. Mathematical Physics*, 97:569, 1985.
- [4] R. Oehme, K. Sibold, and W. Zimmermann. *Physics Letters*, B147:117, 1984.
- [5] W. Zimmermann. *Com. Mathematical Physics*, 97:211, 1985.
- [6] Howard E. Haber and R. Hempfling. Can the mass of the lightest higgs boson of the minimal supersymmetric model be larger than m_z ? *Physics Review Letters*, 66(14):1815, 1991.
- [7] CDF Collaboration F. Abe et al. *Physics Review*, D50, 1994.
- [8] CDF Collaboration F. Abe et al. *Physics Review Letters*, (73):225, 1994. preprint FERMILAB-PUB-95/022-E (2 March 1995).
- [9] D0 Collaboration S. Abachi et al. *Physics Review Letters*, (72):2138, 1994.
- [10] D0 Collaboration S. Abachi et al. *in Physics Review Letters*, (74):2422, 1995.
- [11] H.E. Haber and R. Hempfling. *Physics Review*, D(48):4280, 1993.
- [12] M. Yamaguchi Y. Okada and T. Yanagida. *Prog. Theoretical Physics*, page 1, 1991.
- [13] J. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner. *Physics Letters*, B(257):83, 1991.
- [14] M. Drees and M. M. Nojiri. *Physics Review*, D(45), 1992.
- [15] M. Carena, J.R. Espinosa, M. Quirós, and C.E.M. Wagner. Analytical expressions for radiatively corrected higgs masses and couplings in the mssm. *Physics Letters*, B355:209–221, 1995.
- [16] A. Brignole, J. Ellis, G. Ridolfi, and F. Zwirner. *Physics Letters*, B(271):123, 1991.
- [17] J.F. Gunion and A. Turski. *Physics Review Letters*, D(39):2701, 1989.

- [18] J.R. Espinosa and M. Quiros. *Physics Letters*, B(266):389, 1991.
- [19] The Opal Collaboration. Search for neutral higgs bosons in e^+e^- collisions at $\sqrt{s} \approx 183$ gev. Technical report, CERN, March 1988. OPAL PN 340.
- [20] M. Pepe. Past, present and future experiments at lep. AIP, 1998.
- [21] G. Carlino. Susy searches at lep2 with the l3 experiment. Technical report, INFN, Napoli, 1997. Talk presented at Particle and the Universe.

Conclusiones

El requerimiento de la finitud en teorías supersimétricas de gran unificación, además de ser teóricamente muy atractivo, ayuda a reducir ampliamente el número de parámetros libres. De esta manera se obtiene una teoría más predictiva.

Los teorías finitas basadas en el grupo de norma $SU(5)$ supersimétrico, [1, 2] y [3] pueden dar buenas predicciones fenomenológicas. A partir de los estudios en otros grupos de norma como posibles candidatos a modelos de $TFGU$, citados anteriormente, parece ser que el grupo $SU(5)$ podría ser el más indicado para construir un modelo finito fenomenológicamente confiable.

Si además de las constricciones provenientes de finitud, como las reglas de suma entre las masas de los escalares suaves y la forma de los acoplamientos de Yukawa, se agregan constricciones fenomenológicas, como la ausencia del decaimiento del protón, el rompimiento de la simetría electrodébil por correcciones radiativas y el hecho de que la partícula más ligera supersimétrica sea neutra; la teoría resultante tiene menos parámetros libres, lo que da como resultado predicciones muy definidas.

De los modelos estudiados, el modelo A da lugar a partículas supersimétricas relativamente ligeras, en tanto que el modelo B da lugar a un espectro de partículas un poco más pesado (como 0.5 TeV más). Sin embargo, para ambos casos los valores obtenidos se encuentran en la región no excluida por los límites experimentales. El valor de la $\tan \beta$ está altamente constreñido por las condiciones de finitud, y se considera como un valor grande, ya que los valores estudiados preferentemente en las cotas experimentales consideran $\tan \beta$ del orden de 1, sin embargo esto no representa ningún problema para los valores obtenidos de los parámetros a bajas energías. El valor que se predice para la masa del Higgs ($M_h = 120$ GeV) es prácticamente el mismo, tanto para ambos modelos, como para las diferentes energías consideradas, de manera que la predicción es muy estable. Así mismo los valores obtenidos para los otros parámetros del MESM están de acuerdo con las cotas experimentales más recientes.

El siguiente paso en el estudio de estas teorías finitas, será el cálculo detallado del potencial efectivo de Higgs y las condiciones de minimización del mismo. El mínimo del potencial debe incluir correcciones radiativas al tiempo que corresponder a un mínimo físico, es decir que no rompa las cargas eléctricas y de color y que se encuentre limitado por abajo.

Debido a la complejidad del potencial, aún no se ha podido hacer un análisis con detalle de su rompimiento, en este sentido falta considerar las correcciones radiativas a órdenes mayores para todos los parámetros supersimétricos. Un análisis con detalle de estos parámetros permitirá conocer con mayor precisión las predicciones fenomenológicas de estos modelos para todo el espectro supersimétrico.

Bibliografía

- [1] D. Kapetanakis, M. Mondragón, and G. Zoupanos. Finite unified models. *Z. Phys.*, CG0:181–186, 1993.
- [2] M. Mondragón and G. Zoupanos. *Nuclear Physics B (Proceedings Supplement)*, 37C:98–105, 1995.
- [3] T. Kobayashi, J. Kubo, M. Mondragón, and G. Zoupanos. hep-ph/9707425, 1997.

Apéndice A

Ecuaciones del Grupo de Renormalización

A.1 Expresiones para las ecuaciones del GR del ME

Coefficientes de la ecuación (2.11)

$$b_1 = -\frac{4}{3}n_g - \frac{1}{10}, \quad b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3}n_g - \frac{1}{6}, \quad b_3 = 11 - \frac{4}{3}n_g, \quad (\text{A.1})$$

$$(b_{kl}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{136}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 102 \end{pmatrix} - n_g \begin{pmatrix} \frac{19}{15} & \frac{1}{5} & \frac{11}{30} \\ \frac{3}{5} & \frac{49}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{44}{15} & 4 & \frac{76}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{9}{50} & \frac{3}{10} & 0 \\ \frac{9}{10} & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

y finalmente

$$(C_{lf}) = \begin{pmatrix} \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad f = u, d, e, \quad (\text{A.3})$$

con $n_g = \frac{1}{2}n_f$, f el índice de sabor y n_f el número de sabores.
Contribuciones a un rizo para las ecuaciones β .

$$\begin{aligned} \beta_u^{(1)} &= \frac{3}{2} \left(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right) + Y_2(S) - \left(\frac{17}{20}g_1^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + 8g_3^2 \right) \\ \beta_d^{(1)} &= \frac{3}{2} \left(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \right) + Y_2(S) - \left(\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 + 8g_3^2 \right) \\ \beta_e^{(1)} &= \frac{3}{2} \mathbf{Y}_e^\dagger + Y_2(S) - \frac{9}{4}(g_1^2 + g_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

con

$$Y_2(S) = \text{Tr}\{3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\}. \quad (\text{A.5})$$

Las contribuciones a dos rizados están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \beta_u^{(2)} &= \frac{3}{2}(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \frac{1}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{11}{4} (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 \\
 &+ Y_2(S) \left(\frac{5}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \frac{9}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \frac{9}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \right) - \chi_4(S) + \frac{3}{2} \lambda^2 - 2\lambda(3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d) \\
 &+ \left(\frac{223}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \left(\frac{43}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{5}{2} Y_4(S) \\
 &+ \left(\frac{9}{200} + \frac{29}{45} n_g \right) g_1^4 - \frac{9}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{19}{15} g_1^2 g_3^2 - \left(\frac{35}{4} - n_g \right) g_2^4 + 9g_2^2 g_3^2 \\
 &- \left(\frac{404}{3} - \frac{80}{9} n_g \right) g_3^4,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_d^{(2)} &= \frac{3}{2}(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 - \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \frac{1}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \frac{11}{4} (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 \\
 &+ Y_2(S) \left(\frac{5}{4} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - \frac{9}{4} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right) - \chi_4(S) + \frac{3}{2} \lambda^2 - 2\lambda(3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u) \\
 &+ \left(\frac{187}{80} g_1^2 + \frac{135}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - \left(\frac{79}{80} g_1^2 - \frac{9}{16} g_2^2 + 16g_3^2 \right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \frac{5}{2} Y_4(S) \\
 &+ \left(\frac{29}{200} + \frac{1}{45} n_g \right) g_1^4 - \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{31}{15} g_1^2 g_3^2 - \left(\frac{35}{4} - n_g \right) g_2^4 + 9g_2^2 g_3^2 \\
 &- \left(\frac{404}{3} - \frac{80}{9} n_g \right) g_3^4,
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_e^{(2)} &= \frac{3}{2}(\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 - \frac{9}{4} Y_2(S) \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e - \chi_4(S) + \frac{3}{2} \lambda^2 - 6\lambda \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \\
 &+ \left(\frac{387}{80} g_1^2 + \frac{135}{15} g_2^2 \right) + \frac{5}{2} Y_4(S) + \left(\frac{51}{200} + \frac{11}{5} n_g \right) g_1^4 \\
 &+ \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 - \left(\frac{35}{4} - n_g \right) g_2^4,
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

con

$$\begin{aligned}
 Y_4(S) &= \frac{17}{20}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 \\
 &+ 8g_3^2 \text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \\
 &+ \left(\frac{1}{4}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2\right. \\
 &+ 8g_3^2) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} \\
 &+ \frac{3}{4}(g_1^2 + g_2^2) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\},
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

y

$$\chi_4(S) = \frac{9}{4} \text{Tr} \left(3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + 3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 - \frac{2}{3} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \right). \tag{A.10}$$

Contribución a un rizo de las funciones γ :

$$\gamma^{(1)} = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{5}g_1^2 + g_2^2 \right) - Y_2(S) \tag{A.11}$$

Contribución a dos rizos:

$$\gamma^{(2)} = -\frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{5}{2}Y_4(S) + \chi_4(S) - \frac{27}{80}g_1^2g_2^2 - \left(\frac{93}{800} + \frac{1}{2}n_g\right)g_1^4 + \left(\frac{511}{32} - \frac{5}{2}n_g\right)g_2^4. \tag{A.12}$$

(En la norma de Landau).

A.2 Expresiones para las ecuaciones del GR del MESM

Coefficientes para las expresiones a un rizo:

$$b_1 = -\frac{3}{5} - 2n_g, \quad b_2 = 5 - 2n_g, \quad b_3 = 9 - 2n_g, \tag{A.13}$$

con $n_g = \frac{1}{2}n_f$, ($f = \text{sabor}$).

Contribuciones a un rizo para los parámetros del superpotencial:

$$\frac{d \ln \mu}{dt} = \frac{1}{16\pi^2} [\text{Tr}\{3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + 3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} - 3\left(\frac{1}{5}g_1^2 + g_2^2\right)]. \tag{A.14}$$

Las contribuciones a un rizo para los acoplamientos de Yukawa están dados por:

$$\beta_u^{(1)} = 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + 3\text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} - \left(\frac{13}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2\right), \tag{A.15}$$

$$\beta_d^{(1)} = 3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \text{Tr}\{3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} - \left(\frac{7}{15}g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3}g_3^2 \right), \quad (\text{A.16})$$

$$\beta_e^{(1)} = 3\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e + \text{Tr}\{3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} - \left(\frac{9}{5}g_1^2 + 3g_2^2 \right). \quad (\text{A.17})$$

Las contribuciones a un rizo para los v_{evs} están dados por:

$$\gamma_{H_u}^{(1)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}g_1^2 + g_2^2 \right) - 3\text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\}, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma_{H_d}^{(1)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{5}g_1^2 + g_2^2 \right) - 3\text{Tr}\{\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} - \text{Tr}\{\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\}, \quad (\text{A.19})$$

Las masas de los gauginos evolucionan de la siguiente forma:

$$\frac{d \ln M_l}{dt} = -\frac{1}{8\pi^2} b_l g_l^2. \quad (\text{A.20})$$

Las funciones β a dos rizos.

$$(b_{kl}) = \begin{pmatrix} \frac{38}{15} & \frac{6}{5} & \frac{88}{15} \\ \frac{2}{5} & 14 & 8 \\ \frac{11}{15} & 3 & \frac{68}{3} \end{pmatrix} - n_g \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & \frac{9}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -54 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

$$(C_{lf}) = \begin{pmatrix} \frac{26}{5} & \frac{14}{5} & \frac{18}{5} \\ 6 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad f = u, d, e. \quad (\text{A.22})$$

Las contribuciones a dos rizos para las funciones β de los acoplamientos de Yukawa están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \beta_u^{(2)} &= -4(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - 2(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 - 2\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u - 9\text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \\ &- \text{Tr}\{3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - 3\text{Tr}\{3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \\ &+ \left(\frac{2}{5}g_1^2 + 6g_2^2 \right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \left(\frac{2}{5}g_1^2 \right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \left(\frac{4}{5}g_1^2 + 16g_3^2 \right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \\ &+ \left(\frac{26}{5}n_g + \frac{403}{450} \right) g_1^4 + \left(6n_g - \frac{21}{2} \right) g_2^4 + \left(\frac{32}{3}n_g - \frac{304}{9} \right) g_3^4 \\ &+ g_1^2 g_2^2 + \frac{136}{15} g_1^2 g_3^2, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned}
 \beta_d^{(2)} &= -4(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 - 2(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - 2\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - 3\text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \\
 &- 3\text{Tr}\{3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d - 3\text{Tr}\{3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e) + \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \\
 &+ \left(\frac{4}{5}g_1^2\right) \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + \left(\frac{4}{5}g_1^2 + 6g_2^2\right) \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \left(-\frac{2}{5}g_1^2 + 16g_3^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} + \left(\frac{6}{5}g_1^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} \\
 &+ \left(\frac{14}{15}n_g + \frac{7}{18}\right) g_1^4 + \left(6n_g - \frac{21}{2}\right) g_2^4 + \left(\frac{32}{3}n_g - \frac{304}{9}\right) g_3^4 + g_1^2 g_2^2 + \frac{8}{9}g_1^2 g_3^2 + 8g_2^2 g_3^2, \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_e^{(2)} &= -4(\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 - 3\text{Tr}\{3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e - 3\text{Tr}\{3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 \\
 &+ \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} + (6g_2^2) \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e + \left(\frac{6}{5}g_1^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} + \left(-\frac{2}{5}g_1^2 + 16g_3^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} \\
 &+ \left(\frac{18}{5}n_g + \frac{27}{10}\right) g_1^4 + \left(6n_g - \frac{21}{2}\right) g_2^4 + \frac{9}{5}g_1^2 g_2^2. \quad (\text{A.25})
 \end{aligned}$$

Las contribuciones a dos rizados para las dimensiones anómalas de los campos escalares están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\Phi_u}^{(2)} &= \frac{3}{4}\text{Tr}\{3(\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 + 3\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} - \left(\frac{19}{10}g_1^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + 20g_3^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u\} \\
 &- \left(\frac{279}{800} + \frac{1803}{1600}n_g\right) g_1^4 - \left(\frac{207}{32} + \frac{357}{64}n_g\right) g_2^4 - \left(\frac{27}{80} + \frac{9}{80}n_g\right) g_1^2 g_2^2, \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\Phi_d}^{(2)} &= \frac{3}{4}\text{Tr}\{3(\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 + 3\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u + (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2\} - \left(\frac{2}{5}g_1^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + 20g_3^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d\} \\
 &- \left(\frac{9}{5}g_1^2 + \frac{3}{2}g_2^2\right) \text{Tr}\{\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e\} - \left(\frac{279}{800} + \frac{1803}{1600}n_g\right) g_1^4 - \left(\frac{207}{32} + \frac{357}{64}n_g\right) g_2^4 \\
 &- \left(\frac{27}{80} + \frac{9}{80}n_g\right) g_1^2 g_2^2. \quad (\text{A.27})
 \end{aligned}$$

A.3 Funciones β de los parámetros suaves

$$\beta_\mu^{(1)} = \mu \left\{ \text{Tr}(3\mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_u^\dagger + 3\mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger + \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_e^\dagger) - 3g_2^2 - \frac{3}{5}g_1^2 \right\} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned}
 \beta_\mu^{(2)} &= \mu \left\{ -\text{Tr}(3\mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_u^\dagger + 3\mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger + 2\mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger + \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_e^\dagger) \right. \\
 &+ \left[16g_3^2 + \frac{4}{5}g_1^2 \right] \text{Tr}(\mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_u^\dagger) + \left[16g_3^2 - \frac{2}{5}g_1^2 \right] \text{Tr}(\mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger) + \frac{6}{5}g_1^2 \text{Tr}(\mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_e^\dagger) \\
 &+ \frac{15}{2}g_2^4 + \frac{9}{5}g_1^2 g_2^2 + \frac{207}{50}g_1^4.
 \end{aligned}$$

Apéndice B

Relaciones de Teoría de Grupos

Representaciones La *representación básica irreducible* de un grupo $SU(N)$, denotada mediante N , es un vector complejo N -dimensional. La *representación compleja de la representación básica irreducible* se representa mediante \bar{N} . La representación adjunta, denotada mediante G , es aquella a la cual los generadores del álgebra pertenecen y es siempre real. En la representación matricial está dada por las constantes de estructura:

$$(t_G^j)_{ik} = if^{ijk}. \quad (\text{B.1})$$

Las demás representaciones pueden construirse mediante el producto directo de las representaciones irreducibles.

Tabla B.1: **Dimensión de la representación adjunta, $d(G)$**

$d(G)$	Grupo
$N^2 - 1$	$SU(N)$
$N(N - 1)/2$	$SO(N)$
$N(N + 1)/2$	$S_p(N)$

El Operador de Casimir Para cualquier álgebra de Lie simple, el operador $T^2 = T^a T^a$ (la suma está implícita en los índices repetidos) conmuta con todos los generadores del grupo, por lo cual es un invariante que toma un valor constante para cada representación del álgebra. La representación matricial de T^a es proporcional a la matriz unidad:

$$t_R^i t_R^i = C_2(R) \mathbf{1}, \quad (\text{B.2})$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unidad de dimensión $d(R) \times d(R)$ y $C_2(R)$ es el operador de Casimir de orden dos de la representación R .

Para la representación adjunta se tiene $f^{ikl} f^{jkl} = C_2(R) \delta^{ij}$.

El índice de Dynkin El índice de Dynkin de la representación R , $l(R)$ está definido mediante

$$\text{Tr}[t_R^i t_R^j] = l(R) \delta^{ij} \quad (\text{B.3})$$

De las ecuaciones (B.2) y (B.3) se obtiene:

$$l(R) d(G) = C_2(R) d(R). \quad (\text{B.4})$$

Índice de Dynkin y Casimir cuadrático para $SU(N)$ Para $SU(2)$ la representación fundamental (de dimensión 2) es la representación espinorial, dada en términos de las matrices de Pauli, $t_2^i = \sigma^i/2$, de tal forma que $Tr[t_2^i t_2^j] = \delta^{ij}/2$.

Si se toma la convención de que 3 de los generadores de $SU(N)$ sean t_2^i , actuando sobre las 2 primeras componentes del vector N -dimensional, entonces para cualquier matriz de la representación fundamental se tiene que $Tr[t_N^i t_N^j] = \delta^{ij}/2$. Esta convención fija los valores de $C(R)$ y $C_2(R)$ para todas las representaciones irreducibles de $SU(N)$. Para las demás representaciones, $C_2(R)$ y $l(R)$ pueden construirse mediante la relación (B.4).

Tabla B.2: Valores del índice de Dynkin y el operador de Casimir para $SU(N)$

Representación R	$l(R)$	$C_2(R)$
N y \bar{N}	$\frac{1}{2}$	$\frac{N^2-1}{2N}$
G	N	N

Tabla B.3: Valores del índice de Dynkin y el operador de Casimir para $SU(5)$

Representación	$l(R)$	$C_2(R)$
24	5	5
5 y $\bar{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{5}$
10 y $\bar{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{18}{5}$
45	12	$\frac{32}{5}$
50	$\frac{32}{5}$	$\frac{42}{5}$
75	25	8

Apéndice C

Supersimetría N=1

C.1 Propiedades generales

El generador de las transformaciones entre bosones y fermiones, es la *supercarga* Q_α , ($\alpha = 1, 2$) para $N = 1$, que se transforma como un espinor izquierdo de Weyl, y transforma el álgebra de generadores anticonmutantes a las representaciones espinoriales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ de las transformaciones de Lorentz. El adjunto hermítico de Q_α se denota mediante \bar{Q}_β y es un espinor de Weyl derecho. El álgebra asociada está definida mediante:

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\sigma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu \quad (\text{C.2})$$

donde σ^μ denotan a las matrices de Pauli y P_μ es el operador de energía-momento.

De (C.1) se puede ver que para $\mu = 0$, Q conmuta con el Hamiltoniano y los estados de energía distintos de cero están descritos por la acción Q . Debido a que Q es fermiónico, se tiene un número igual de estados fermiónicos y bosónicos con energía degenerada.

La supersimetría se rompe si y solo si la energía del vacío es distinta de cero. Si la supersimetría se rompiera en forma espontánea, habría un fermión sin masa en la teoría, análogo al bosón de Goldstone de las simetrías bosónicas.

Las representaciones del álgebra supersimétrica están convenientemente dadas en el *superespacio*, que consiste de un espacio ordinario x^μ con variables anticonmutantes de Grassman, θ_α y $\bar{\theta}_\beta$. En este superespacio el álgebra puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [\theta Q, \bar{Q}\theta] &= 2\theta\sigma_\mu\bar{\theta}P^\mu \\ [\theta Q, \theta Q] &= [\bar{Q}\theta, \bar{Q}\theta] = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Una transformación supersimétrica puede ser definida mediante:

$$S(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(\theta Q + \bar{Q}\theta - x_\mu P^\mu) \quad (\text{C.4})$$

Un *supercampo* $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$ es una función que se transforma mediante la transformación supersimétrica:

$$S(y_\mu, \alpha, \bar{\alpha})[\phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta})] = \phi(x_\mu + y_\mu - i\alpha\sigma_\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma_\mu\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) \quad (\text{C.5})$$

Representaciones un poco distintas (derechas e izquierdas) pueden ser definidas mediante:

$$\phi(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) = \phi_I(x_\mu + i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) = \phi_D(x_\mu - i\theta\sigma_\mu\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \quad (\text{C.6})$$

Si $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$ es un supercampo complejo en general, un supercampo quiral se define mediante $\bar{D}\phi = 0$, donde D es la derivada covariante asociada a $\bar{\theta}$. Si se cumple esta condición, se tiene que ϕ en la representación I es independiente de θ . En términos de θ , $\phi(x, \theta)$ puede expandirse como:

$$\phi(x, \theta) = \varphi(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha + \theta^\alpha\theta_\alpha F(x). \quad (\text{C.7})$$

El campo φ es un campo escalar complejo y $\psi(x)$ es un fermión de Weyl. El campo escalar complejo $F(x)$ es auxiliar, por que no constituye grados dinámicos de libertad. Un supercampo quiral describe por tanto, un multiplete $(0, 1)$ de espín. Las transformaciones de supersimetría transforman las componentes $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow F$, de la siguiente manera:

$$\delta\varphi = \alpha^\beta\psi_\beta \quad (\text{C.8})$$

$$\delta\psi_\beta = 2\alpha_\beta F(x) + 2i\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{\alpha}}(\partial_\mu\varphi) \quad (\text{C.9})$$

$$\delta F = -i(\partial_\mu\psi^\beta)\sigma_{\beta\dot{\alpha}}^\mu\bar{\alpha}^{\dot{\alpha}}, \quad (\text{C.10})$$

en donde la variación de F es la derivada total.

Para un supercampo vectorial general, los estados físicos pueden describirse en la norma de Wess Zumino:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = -\theta\sigma_\mu V^\mu + i\theta\theta\bar{\theta}\lambda - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D \quad (\text{C.11})$$

en donde V^μ es un campo de espín 1 y λ es un espinor de dos componentes: el fermión de norma (gaugino), D es un campo auxiliar. De esta forma se tiene un supermultiplete $(1, 1/2)$ de espín. Las transformaciones de supersimetría están dadas por:

$$\delta V_\mu = i\alpha\sigma_\mu\bar{\lambda} + i\bar{\alpha}\sigma_\mu\lambda \quad (\text{C.12})$$

$$\delta\lambda = \alpha\sigma^{\mu\nu}(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu) + \bar{\alpha}D \quad (\text{C.13})$$

$$\delta D = -\alpha\sigma^\mu\partial_\mu + \bar{\alpha}\sigma^\mu\partial_\mu\lambda, \quad (\text{C.14})$$

aquí también la variación de D es la derivada total. Si tomamos la componente $F(D)$ de un supercampo quiral como la densidad Lagrangiana, la acción $A = \int d^4x L$ será invariante bajo transformaciones de supersimetría. Entonces en general la densidad Lagrangiana puede ser escrita como una suma de términos F y D :

$$L = L_F + L_D. \quad (\text{C.15})$$

Los términos en F constituyen el superpotencial W . En una teoría renormalizable, el superpotencial no puede ser de grado mayor que 3 en los campos, de modo que la forma más general del superpotencial para una teoría supersimétrica $N = 1$ es:

$$W = g^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \mu^{ij} \phi_i \phi_j, \quad (\text{C.16})$$

y el campo auxiliar F está dado mediante:

$$F = F^* = -\frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad (\text{C.17})$$

entonces el potencial escalar puede ser escrito mediante:

$$V = FF^* = \left| \frac{\partial W}{\partial \varphi_a} \right|^2. \quad (\text{C.18})$$

C.2 Rompimiento de la Supersimetría

Para que una teoría supersimétrica sea realista la supersimetría debe romperse, sin embargo, en un caso análogo al rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil, la fenomenología de la teoría estaría muy restringida. Una de las formas exitosas en que se puede romper la supersimetría, dando lugar a una descripción fenomenológica viable, es mediante la introducción de *términos suaves*, que se explica a continuación.

En una teoría supersimétrica $N=1$, la acción que describe la teoría de campo interactuante de un supercampo quiral es:

$$\begin{aligned} A = & \int d^4x d^4\theta [\bar{\phi}_i (e^{gV})^i_j \phi^j] + \frac{Tr}{64g^2} \int d^4x d^2\theta W^R W_R \\ & + \left[\int d^4x d^2\theta \left(\frac{m_{ij}}{2!} \phi^i \phi^j + \frac{1}{3} C_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k \right) + h.c. \right] \\ & + \text{términos que fijan la norma} + \text{fantasmas}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

donde V es el supercampo escalar de norma, los ϕ son los supercampos quirales, g el acoplamiento, W el superpotencial, m un término de masa y C_{ijk} los acoplamientos de Yukawa.

El término

$$\int d^4x d^4\theta [\bar{\phi}_i (e^{gV})^i_j \phi^j], \quad (\text{C.20})$$

del cual debe obtenerse el término de energía cinética de la teoría, el la acción tipo D , en tanto que el término:

$$\frac{Tr}{64g^2} \int d^4x d^2\theta W^R W_R \left[\int d^4x d^2\theta \left(\frac{m_{ij}}{2!} \phi^i \phi^j + \frac{1}{3} C_{ijk} \phi^i \phi^j \phi^k \right) + h.c. \right], \quad (\text{C.21})$$

del cual debe obtenerse la energía cinética invariante de norma para el campo de materia ϕ , es la acción tipo F .

La parte del potencial escalar que no involucra derivadas fermiónicas puede escribirse como $\frac{1}{2}D^2$, así en una teoría con campos de materia y de norma, acoplados entre sí, el potencial escalar puede escribirse como:

$$V = |F|^2 + \frac{1}{2}D^2, \quad (\text{C.22})$$

$$\text{con } |F|^2 = \left| \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \right|^2.$$

C.2.1 Rompimiento de la Supersimetría

Las dos formas de romper simetrías del Lagrangiano de una teoría de campo son:

- a) Añadir términos extras al Lagrangiano, que no sean invariantes bajo la simetría, y
- b) Dejar el Lagrangiano invariante, en tanto que construir el estado de vacío de tal forma que no sea invariante bajo la simetría original.

El método a) es arbitrario, por lo cual reduce la efectividad de la teoría, sin embargo para una teoría supersimétrica se pueden encontrar términos que no alteren la renormalizabilidad de la teoría y que conduzcan a un espectro aceptable de partículas, tal es el caso del Rompimiento Suave de la Supersimetría (RSS). El segundo método (b) (de Nambu-Goldstone) es una forma más predictiva de estudiar las consecuencias de las alteraciones en las invariabilidades de la teoría, por lo cual este método se denomina Rompimiento Espontáneo de la Simetría (RES).

Se puede elegir que:

$$\begin{aligned} \text{i)} & \quad \langle F \rangle \neq 0 \quad \text{ó} \\ \text{ii)} & \quad \langle D \rangle \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

el caso *i*) es el rompimiento tipo *F* ó *Mecanismo de O'Raifeartaigh*, en tanto que el caso *ii*) es el rompimiento tipo *D* ó *Mecanismo de Fayet-Illiopoulos*, para este caso la idea básica es que si la teoría contiene una simetría $U(1)$, entonces el Lagrangiano puede incluir un término lineal en el supercampo de norma V . En ambos casos, en un análogo exacto del rompimiento espontáneo de la simetrías bosónicas, aparecen estados fermiónicos sin masa, los *Goldstinos*. El *gaugino* adquiere masa de Dirac, absorbiendo al supercompañero del campo bosónico de Goldstone, y su masa sería la misma que la del bosón de norma, después del mecanismo de Higgs. Este proceso es independiente de la ruptura de la supersimetría.

C.2.2 Reglas de Feynman supersimétricas

Las Reglas de Feynman supersimétricas son las siguientes:

- a) cada vértice debe tener un factor D^4 , el cual es $\sim p^2$,
- b) los propagadores deben ser de la forma: $\Delta_{\phi\bar{\phi}} \sim 1/p^2$ y $\Delta_{\phi\phi} \sim 1/p^3$,
- c) las líneas externas deben tener un factor $1/D^4 \sim 1/p$,
- d) las integrales de rizo deben ser $\sim d^4p/p^2$, debido a que hay una integración $d^4\theta$ ó debido a que las cuatro D 's se necesitan para cancelar $\delta^4(\theta)$ en el rizo, dejando así el factor $\int d^4\theta$ al final.

De las reglas anteriores se puede ver que:

a) un término proporcional a ϕ^n con $n > 3$, implicaría tener más de un factor D^4 en cada vértice, haciendo la teoría no renormalizable,

b) los términos *suaves* permitidos para el rompimiento de la supersimetría deben ser tales que escritos manifiestamente en forma supersimétrica no contengan factores D en sus vértices.

Una consecuencia del inciso anterior es que si se quieren introducir términos de masa que rompan supersimetría, se podrían escribir como $\int d^4\theta U D^a \phi_1 D_a \phi_2$ con $U = \theta^2 \bar{\theta}^2$ y donde $D\phi$ no debe ser un campo quiral, i.e. $\bar{D}\phi \neq 0$. De tal forma que no se puede tener un término $d^2\theta$ y tener supersimetría manifiesta para el Lagrangiano, por eso se introduce $d^4\theta$. Esto añade un término $\mu\psi_1\psi_2$ con $\psi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$, sin el término de supercompañero correspondiente. Sin embargo esto no está permitido, ya que cada vértice introduce un término D^6 (2 potencias de D de cada ϕ y 2 D explícitas), haciendo la teoría no renormalizable.

En cambio los términos de rompimiento suave tales como:

$$\int d^4\theta U' \phi^\dagger \phi \quad (\text{C.24})$$

producen términos del tipo $\mu^2 \phi^\dagger \phi$.

La masa del gaugino, λ , también está permitida, ya que es de la forma $\int U d^4\theta W^\alpha W_\alpha$.

Condiciones de Rompimiento Suave

Los rompimientos tipo D y F son muy restrictivos, ya que no conducen a un espectro de partículas aceptable. De esta forma, la renormalizabilidad justifica la introducción del Rompimiento Suave de la Supersimetría (RES), y los siguientes términos son suficientes para la construcción de modelos realistas:

- i) términos escalares de masa del tipo $\mu^2 \varphi^* \varphi$,
- ii) interacciones escalares del tipo $W(\phi)|_{\theta=0}$,
- iii) términos de masa para el gaugino.

Entonces el Lagrangiano de rompimiento suave de la supersimetría (RSS) puede escribirse como:

$$-\mathcal{L}_{RSS} = \frac{1}{6} h^{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k + \frac{1}{2} b^{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{2} (m^2)_j^i \phi^{*i} \phi_j + \frac{1}{2} M \lambda \lambda + H.c., \quad (\text{C.25})$$

donde las h^{ijk} están definidas en el espacio de familias, relacionadas con los acoplamientos de Yukawa, los términos m son las masas de los escalares suaves y M es la masa del gaugino.

Apéndice D

Teorías Finitas de Norma SUSI N=1

El término *Finitud*, que se define de manera formal en la sección (D.3), se refiere aquí al hecho de que las funciones β del grupo de renormalización se anulen a todos los órdenes en teoría de perturbaciones, pero no necesariamente que las dimensiones anómalas γ se anulen a cualquier orden [2, 3, 4]. Lo anterior permite abandonar cualquier restricción *a priori* en el número de campos y acoplamientos de la teoría.

D.1 Transformaciones Invariantes de la Teoría

El contenido físico de una teoría SUSI N=1 consiste en:

a) Un supercampo real de norma de dimensión 0: $V = V_j t^j$, en donde los t^j son los generadores del grupo de norma G y los V_j son campos de Yang-Mills, SUSI N=1.

b) Supercampos quirales de materia ϕ_r de dimensión 1, r se refiere a (R, ρ) , en donde R es la representación irreducible, irrep, y ρ se refiere a sus componentes ¹.

La acción clásica invariante más general es:

$$\begin{aligned} A = & \int d^4x d^4\theta [\bar{\phi}_r (e^{gV})_s^r \phi^s] + \frac{\text{Tr}}{64g^2} \int d^4x d^2\theta W^R W_R \\ & + \left[\int d^4x d^2\theta \left(\frac{m_{rs}}{2!} \phi^r \phi^s + \frac{1}{3} C_{rst} \phi^r \phi^s \phi^t \right) + h.c. \right] \\ & + \int d^4x d^2\theta U(\phi) + \int d^4\bar{x} d^2\bar{\theta} \bar{U}(\bar{\phi}) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

donde $d^4x d^2\theta = d^4\chi DD$ y $d^4x d^4\theta = d^4\chi DD\bar{D}\bar{D}$, W_R es la intensidad de campo SUSI: $W_R = \bar{D}\bar{D}B_R/\sqrt{2}$ con $B_R = e^{-V}D_R e^V$ y g es la constante de norma del grupo G. Los dos últimos términos describen la auto-interacción de los campos de materia en términos del superpotencial quiral:

$$U(\phi) = \frac{1}{6} C_{(rst)} \phi^r \phi^s \phi^t \quad (\text{D.2})$$

¹Dentro del Apéndice se utilizan los índices r, s, t , para evitar confusión entre la representación y sus componentes, en las otras secciones de la tesis, se utilizan los índices i, j, k , que también denotan a la representación y a las componentes de esta, siempre y cuando no haya confusión

donde C_{rst} son los acoplamientos de Yukawa, que son tensores simétricos invariantes de G . La acción es invariante ante SUSI, la simetría BRS y las transformaciones R .

Simetría BRST La simetría BRST es la simetría *Becchi, Rouvet, Stora, Tyutin*, que es la simetría necesaria que introduce los campos *fantasmas* que cancelan exactamente la contribución no física de las polarizaciones de los bosones de norma en los cortes de Cutkosky (los campos fantasmas son necesarios para la verificación del Teorema Óptico).

Las transformaciones BRST se expresan mediante:

$$\begin{aligned} se^V &= e^V c_+ - \bar{c}_+ e^V \\ s\phi^{(\rho,R)} &= -c_{+i} (T_R^i)^\rho_\sigma \phi^{(\sigma,R)} \\ sc_+ &= -\frac{1}{2} \{c_+, c_+\}, \end{aligned} \quad (D.3)$$

y son nilpotentes, i.e. $s^2 = 0$; $c_+ = c_{+i} t^i$ son los fantasmas quirales de Faddeev-Popov. Las matrices hermíticas T_R^i son generadores de G en la irrep. R (se omite el multiplicador de Lagrange y los campos de anti-fantasmas involucrados en la fijación de la norma).

Transformaciones R Más allá de la SUSI y la invariancia BRST, la teoría es invariante ante las transformaciones R :

$$\delta_R \psi = i(n_\psi + \theta^\alpha \partial_{\theta\alpha} - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\bar{\theta}\dot{\alpha}}) \psi \quad (D.4)$$

los índices de peso son:

$$n_\psi = 0, -\frac{2}{3}(\frac{2}{3}), 0(0) \text{ para } \psi = V, \phi(\bar{\phi}), c_+(\bar{c}_+).$$

Transformaciones quirales La teoría es también invariante ante un conjunto (posiblemente vacío) de transformaciones quirales:

$$\begin{aligned} \delta_a V &= \delta_a c_+ = 0, \\ \delta_a \phi^R &= i e_a^R S \phi^S, \\ \delta_a \bar{\phi}_R &= -i \bar{\phi}_S e_a^S \end{aligned} \quad (D.5)$$

con $r, s, t = (\rho, R), (\sigma, S), (\tau, T)$. Las matrices quirales de carga e_a son hermíticas.

Las transformaciones quirales conmutan con SUSI y las transformaciones BRST, de tal forma que $e_a^R = 0$ si irrep. $R \neq$ irrep. S .

La acción clásica es invariante ante (D.5) si y sólo si los acoplamientos de Yukawa obedecen las constricciones:

$$\forall a, C_{rsu} e_a^u + \text{permutaciones cíclicas}(rst) = 0 \quad (D.6)$$

con la notación $M_i^u = \delta_\tau^\mu M_T^U$.

La teoría cuántica a un rizo, descrita por la funcional de vértice:

$$\Gamma(V, \phi, \dots) = \Gamma_{\text{clásica}} + \mathcal{O}(\hbar) \quad (D.7)$$

preserva las invariancias citadas anteriormente (D.4, D.3 y D.5) después del rompimiento suave de las SUSI, inducido por las masas SUSI.

La invariancia R (D.4) y las invariancias quirales (D.5) están expresadas en las identidades de Ward:

$$\begin{aligned} W_R \Gamma &= -i \sum_{\psi=V,\phi,c_+} \int \delta_R \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \sim 0 \\ W_a \Gamma &= -i \sum_{\psi} \int \delta_a \psi \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} \sim 0, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

válidas a todos los órdenes en teoría de perturbaciones y después del rompimiento suave.

Los operadores W_a generan el álgebra de Lie \mathcal{C} asociada a las transformaciones quirales infinitesimales (D.5) con las relaciones de conmutación:

$$[W_a, W_b] = W_c \quad (\text{D.9})$$

W_c tiene la matriz de carga $e_c = -[e_a, e_b]$, aquí M_{0a} denota una base del centro de carga \mathcal{C} , del álgebra \mathcal{C} :

$$[W_{0a}, W_b] = 0, \quad \forall W_b \in \mathcal{C} \quad (\text{D.10})$$

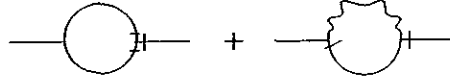
La ecuación de Callan-Symanzik que cumple con la funcional de vértice Γ después de la introducción de los términos de masa, es:

$$\begin{aligned} C\Gamma &= [m\partial_m + \beta_g\partial_g + \beta_{rst}\partial_{C_{rst}} + \overline{\beta}^{rst}\partial_{\overline{C}^{rst}} \\ &- \gamma_V \mathcal{N}_V - \gamma_R^S \mathcal{N}_S^R - \gamma_k \partial_{ak}] \Gamma \sim 0, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

$m\partial_m$ (sobre todos los parámetros de la teoría) es el operador de escalamiento. Los operadores de conteo (sin campos externos, campos antifantasma, etc.) \mathcal{N} son:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \text{Tr} \int d^4x d^4\theta V \delta_V \\ \mathcal{N}_S^R &= \text{Tr} \int d^4x d^2\theta \delta_{\phi^S} + d^4\overline{x} d^2\overline{\theta} \overline{\delta}_{\overline{\phi}_S} \delta_{\overline{\phi}_R} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Γ es real, entonces la función β del acoplamiento de norma β_g , la dimensión anómala γ_v y los coeficientes γ_k (que describen la amplitud de renormalización generalizada) son reales. Las funciones β de los acoplamientos de Yukawa, β_C y $\beta_{\overline{C}}$ son las complejas conjugadas una de otra y la matriz γ_S^R de las dimensiones anómalas de los campos de materia, es hermítica. La ausencia de un término de dimensión anómala para los fantasmas c_+ se debe a la elección de un esquema particular de renormalización con el efecto de que la dimensión anómala se anula.


 Figura D.1: Correcciones al propagador de $\phi^s \bar{\phi}_r$ a un rizo.

D.2 Teorema de No Renormalización

Las posibles constantes de renormalización de la acción (D.1), suponiendo que la supersimetría se preserve, son:

$$\begin{aligned} \phi_0^r &= Z_s^{\frac{1}{2}r} \phi^s & V_0 &= Z_V^{\frac{1}{2}} V \\ g_0 &= Z_g g & C_{rst}^0 &= Z_{rst} \quad r's't' C_{r's't'} \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$m_{rs}^0 = Z_{rs}^{r's'} m_{r's'} \quad (D.14)$$

Z es la constante de renormalización de los campos, Z_V la del supercampo, Z_g la de del acoplamiento de norma y $Z_{rst} \quad r's't'$ la constante de renormalización de los acoplamientos de Yukawa, C^{rst} .

El teorema $N=1$ de No Renormalización asegura que no hay términos infinitos de masa ó de interacción ϕ^3 y por lo tanto:

$$Z_{rst}^{r's't'} Z_r^{\frac{1}{2}r''} Z_s^{\frac{1}{2}s''} Z_t^{\frac{1}{2}t''} = \delta_{(r}^{r''} \delta_s^{s''} \delta_t^{t'')} \quad (D.15)$$

y

$$Z_{rs}^{r's'} Z_r^{\frac{1}{2}r''} Z_s^{\frac{1}{2}s''} = \delta_{(r}^{r''} \delta_s^{s'')} \quad (D.16)$$

$$Z_g Z_V^{1/2} = f(\text{infinitos dependientes de la norma}) \quad (D.17)$$

De la ecuación (D.13) puede verse que los únicos infinitos posibles, son: Z_r^{rs} y Z_V , una para cada campo. Para evaluar esto, se tienen las correcciones del propagador de $\phi^s \bar{\phi}_r$ a un rizo:

$$g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d^4 \theta A(p) \phi^s(-p, \theta) (S_s^r - C_2(R) \delta_s^r) \bar{\phi}_s(p, \theta) \quad (D.18)$$

donde S_s^r está definida mediante:

$$C^{rtu} \bar{C}_{stu} = 2S_s^r g^2. \quad (D.19)$$

Entonces la ecuación (D.18) es finita si y sólo si:

$$C^{rtu} \bar{C}_{stu} = 2g^2 C_2(R) \delta_s^r \quad (D.20)$$

Las correcciones a un rizo del propagador VV están dadas por


 Figura D.2: Correcciones a un rizo del propagador VV .

$$\frac{1}{2}g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} V^3 \Pi_{1/2} P^2 V^3 [-3C_2(G) + \sum_t l(R_t)] A(p) \quad (D.21)$$

donde l es el índice de Dynkin de la representación R_k , definido como $\sum_k l(R_k) \delta^{rs} = (t^r)_r^s (t^s)_s^r$ y $C_2(G)$ es el Casimir de orden dos de la representación adjunta del grupo. La ecuación (D.21) es finita si y sólo si

$$\sum_k l(R_k) = 3C_2(G). \quad (D.22)$$

Si los propagadores son finitos a un rizo, entonces sus partes finitas a un rizo también se anulan. De tal forma que se obtienen las funciones β del campo de norma y la dimensión anómala γ de los supercampos quirales de la representación de G :

$$\beta(g) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g = -\frac{1}{16\pi} (3C_2(G) - \sum_k l(R_k)) = 0 \quad (D.23)$$

$$\beta_{ist} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} C_{ist} = C^{isu} \gamma_u^t + C^{tsu} \gamma_u^i + C^{itu} \gamma_u^s \quad (D.24)$$

$$\gamma_s^i = \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1}{2g^2} C^{stl} \bar{C}_{stl} - C_2(G) \delta_s^i \right) = 0 \quad (D.25)$$

Entonces las ecuaciones (D.20) y (D.22) expresan las condiciones requeridas de finitud.

D.3 Criterios de Finitud

Para que las funciones β se anulen a todos los órdenes, se requiere que las dimensiones anómalas a primer orden (D.25) se anulen. Sin embargo esta última condición es en general más fuerte que la anulación de las funciones β , ya que puede haber un mayor número de funciones γ que de funciones β . Así, las ecuaciones:

$$\gamma_s^{(1)R}(C, g) = 0 \quad (D.26)$$

pueden sobredeterminar la solución $C = C(g)$

Lema 1 Las ecuaciones (D.26) son compatibles si y sólo si las condiciones:

$$x_{0a} = \sum_R e_{0aR}^R l(R) = 0, \quad (D.27)$$

se cumplen. Aquí e_{0a} corresponden a los operadores de la identidad de Ward, W_{0a} que generan el centro del álgebra de las simetrías quirales (D.10). Las cantidades x_{0a} son los coeficientes de las anomalías de las corrientes axiales conservadas clásicamente, asociadas con las simetrías W_{0a} , no necesitan renormalizarse.

Corolario 1 La anulación de las dimensiones anómalas de los campos de materia, a primer orden, implican las condiciones (D.27) del Lema (1).

D.3.1 Anomalía de la Supercorriente

La supercorriente es un supermultiplete invariante BRST que contiene la corriente espinorial conservada y el tensor de energía-momento asociado a la SUSI y la invariancia de traslación, así como a la corriente axial anómala asociada a la invariancia R (D.4). Las anomalías de la corriente R -axial de la “traza” de la corriente espinorial y de la traza del tensor de energía-momento pertenecen a un supermultiplete quiral, cuya representación de supercampo se denota por S . Esta inserción² quiral tiene dimensión 3, peso R -2 y es invariante ante las transformaciones BRST (D.3) y las transformaciones quirales (D.5). Puede ser expresado en términos de:

$$S = \beta_g L_g + \beta_{rst} L^{rst} - \gamma_\phi L_\phi - \gamma_k L_k - \gamma_S^R L_R^S, \quad (D.28)$$

los coeficientes β y γ son los coeficientes de la ecuación de Callan-Symanzik (D.11). El conjunto de inserciones L , forma una base para las inserciones quirales con dimensión 3, peso R e invariancias de \mathcal{L} , y se encuentran definida a través del principio cuántico de acción. Cualquier inserción quiral invariante BRST, T , de dimensión 3 y peso R -2, admite la representación:

$$T \sim \overline{DD}(r_T K^0 + J_T^{mn}) + T_c, \quad (D.29)$$

donde K^0 es la inserción SUSI de Chern-Simons³. El operador r_T es independiente de la norma y está definido en forma única, J_T^{mn} es un invariante de BRST y T_c , éste último también invariante BRST, es una inserción “genuinamente quiral”, es decir que no puede ser descrita mediante una doble derivada \overline{DD} . La base de las inserciones genuinamente quirales, con la dimensión apropiada y el peso R es una extensión cuántica de los polinomios del campo independiente, que constituyen el superpotencial (D.2). Se puede escoger la base:

$$\{L_{1k}, U_{0L}\} \quad (D.30)$$

²Una inserción I es la funcional generatriz de las funciones de Green irreducibles de una partícula con un operador de campo compuesto con I insertado.

³Las inserciones SUSI Chern-Simons, K^q , $q = 0, \dots, 3$, son soluciones de la extensión cuántica de las ecuaciones clásicas de descenso [3].

con $L_{1k} = f_{1kS}^R L_R^S$, $L_R^S = \phi^S \delta_{\phi^R}$, $L_{0a} = e_{0aS}^R L_R^S$ y con algunas inserciones U_{0L} que completen la base, si es necesario.

Para la representación anómala (D.29) de la supercorriente, y para cada una de las L_i de (D.28), se tiene:

$$\begin{aligned}
 S &\sim \overline{DD}[rK^0 + J^{inv}] \\
 L_g &\sim \left[\left(\frac{1}{128g^3} + r_g \right) K^0 + J_g^{inv} \right] + L_g^c \\
 L^{rst} &\sim \left[r^{rst} K^0 + J^{rst,inv} \right] + L^{rst,c} \\
 L_K &\sim \left[r_k K^0 + J_K^{inv} \right] + L_K^c \\
 L_S^R &\sim \left[r_S^R K^0 + J_S^{R,inv} \right] + L_S^{R,c} \\
 L_{0a} &\sim \left[r_{0a} K^0 + J_{0a}^{inv} \right].
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

Los coeficientes r , r_g , etc, son al menos de orden \hbar .

La anomalía de la corriente axial R, r , y las anomalías de las corrientes axiales asociadas a las simetrías quirales, W_{0a} , r_{0a} , es decir con el centro del álgebra de todas las simetrías quirales, no están renormalizadas, sino que están exactamente dadas por las contribuciones a primer orden, y están expresadas en términos de las funciones β :

$$r = \frac{1}{128g^3} \beta_g^{(1)} \tag{D.32}$$

$$r_{0a} = -\frac{1}{256(4\pi)^2} x_{0a}. \tag{D.33}$$

Los coeficientes r_K en la representación (D.31) para L_K son de orden \hbar^2 y están descritos por los coeficientes no renormalizados r_{0a} :

$$r_k = \sum_a t_{ka} r_{0a}, \tag{D.34}$$

t_{ka} es al menos de orden \hbar . Si las ecuaciones (D.31) se incorporan a las ecuaciones (D.28) y se identifican los coeficientes del término K^0 , se tiene:

$$r = \beta_g \left(\frac{1}{128g^3} + r_g \right) + \beta_{rst} r^{rst} - \gamma_k r_k - \gamma_{0a} r_{0a}. \tag{D.35}$$

D.3.2 Criterios para la anulación de las funciones β

Lema 2 Si la función β_g se anula por arriba del segundo orden y las funciones β de Yukawa se anulan a un orden, i.e.:

$$\beta_g = \mathcal{O}(\hbar), \quad \beta_{rst} = \mathcal{O}(\hbar), \tag{D.36}$$

entonces las siguientes condiciones se satisfacen:

1. La corriente axial de la invariancia R está libre de anomalías:

$$r = \frac{1}{128g^3} \beta_g^{(1)} = 0 \quad (D.37)$$

2. Las dimensiones anómalas a primer orden (D.25), de los campos de materia, se anulan:

$$\gamma_S^{(1)R} = 0 \quad (D.38)$$

3. Las corrientes axiales de las simetrías W_{0a} , pertenecientes al centro del álgebra de las simetrías quirales (D.9), están libres de anomalías:

$$r_{0a} = 0 \quad (D.39)$$

La tercera condición asegura la compatibilidad del sistema de ecuaciones (D.38), debido al Lema (1) y a la relación (D.33).

Este Lema (2) implica que los acoplamientos de Yukawa y los acoplamientos de norma no son independientes, i.e.:

$$C_{rst} = C_{rst}(g) \quad (D.40)$$

que deben ser solución de (D.38), así como de:

$$\beta_{rst}^{(1)} = 0, \quad (D.41)$$

debido a (D.22). Si se extiende ésta relación a todos los órdenes en teoría de perturbaciones, las funciones (D.40), se establecen como series de potencias en g . Es bien sabido que estas funciones deben ser entonces soluciones de las ecuaciones de reducción:

$$\beta_{rst} = \beta_g \frac{dC_{rst}}{dg} \quad (D.42)$$

Por el Lema (2), la condición aún más fuerte, (D.38), se debe satisfacer a este orden.

Teorema 1 (de Finitud) *Las tres condiciones necesarias y suficientes para la anulación a todos los órdenes, de las funciones β de los acoplamientos de norma y de Yukawa, son:*

1. $\beta_g^{(1)} = 0$

2. $\gamma_S^{(1)R} = 0$

3. *Que las ecuaciones de reducción (D.42) admitan una solución formal en series de potencias, que al más bajo orden, también tenga que ser una solución de la condición 2.*

Las primeras dos condiciones del teorema (1), son criterios simples a primer orden, sin embargo las últimas condiciones exigen que las ecuaciones de reducción tengan solución a todos los órdenes. La solución existe a todos los órdenes y es única, si la solución al más bajo orden, i.e., la solución a (2) es aislada y no degenerada.

Teorema 2 (Criterio para la anulación de las funciones β) *Si una teoría SUSI $N=1$, con grupo simple de norma, obedece las condiciones:*

1. *Está libre de anomalías de norma (D.32)*
2. *La función β de norma a primer orden, se anula: $\beta_g^{(1)} = 0$.*
3. *Existen soluciones de la forma:*

$$C_{rst} = \rho_{rst} g, \tag{D.43}$$

(ρ_{rst} es un número complejo), las cuales son soluciones de la condición de anulación de las funciones γ de los campos de materia a primer orden (D.38).

4. *Las soluciones (D.43) de (D.38) están aisladas y son no-degeneradas, cuando son consideradas como soluciones de la condición de anulación de las funciones de β de los acoplamientos de Yukawa, a primer orden.*

Entonces cada una de las soluciones (D.43) puede ser extendida en una serie de potencias en g :

$$C^{rst} = g \sum_{n=0} \rho_{(n)}^{rst} g^{2n}, \tag{D.44}$$

generando una teoría que depende de un solo acoplamiento, el acoplamiento de norma g , con una función β que se anula a todos los órdenes.

Bibliografía

- [1] Stephen P. Martin and Michael T. Vaughn. Two-loop renormalization group equations for soft supersymmetry-breaking couplings. *Physical Review*, D(50):2282, 1994.
- [2] C. Lucchesi, O. Piguet, and K. Sibold. *Helvetic Physics Acta*, 61:321–344, 1988.
- [3] O.Piguet and K. Sibold. *Physics Letters*, B177:373, 1986.
- [4] C. Lucchesi and G. Zoupanos. All order finiteness in $n=1$ sym theories: criteria and applications. *Fortsch. Phys.*, 45:129–143, 1997.