



01149
11
2ef

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA
FACULTAD DE INGENIERÍA**

**MODELADO ELECTRÓNICO DE DOS NEURONAS
INTEGRADORAS BORROSAS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRA EN INGENIERÍA
P R E S E N T A:**

ABIGAÍL MARÍA ELENA RAMÍREZ MENDOZA

**DIRECTOR DE TESIS:
M. en C. JOSÉ LUIS PÉREZ SILVA**

**LABORATORIO DE ELECTRÓNICA
CENTRO DE INSTRUMENTOS
CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F. 1998**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

01149



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedico esta tesis con todo mi afecto a:

Mi abuelita Alfonsina García, quién con sus enseñanzas, cariño, comprensión y apoyo siempre estuvo a mi lado para darme ánimo y seguir adelante. Su vida ejemplar fue una guía para todos los que la amábamos y aún su muerte dejó un mensaje de paz, amor, fe y esperanza el cual quienes lo comprendimos nos sentimos dichosos.

Mi mamá María Elena Mendoza, quién siempre me ha apoyado e impulsado en cada instante de mi vida y me ha brindado todo su cariño y confianza.

Mi papá Mario Ramírez, quién siempre me ha guiado por el camino de la vida con afecto y entusiasmo.

Mi abuelo José Mendoza, quién con su experiencia, cariño y comprensión siempre me ha apoyado en todas mis decisiones.

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente al M. en C. José Luis Pérez Silva por su apoyo, asesoría, orientación y conocimientos brindados para la realización de este trabajo.

De igual forma también agradezco al Dr. Boris Escalante Ramírez quién siempre me ha apoyado durante mis estudios de posgrado. Agradezco a los profesores M. en C. Alberto Arturo Herrera Becerra, Dr. Felipe Lara Rosano, M. en C. Luis Marcial Hernández y M. en I. José Cohen Sak por el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo.

También quiero agradecer a los profesores de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería por los conocimientos transmitidos y el apoyo que me brindaron durante la realización de mis estudios de maestría.

ÍNDICE

Introducción	1
Capítulo 1	
Antecedentes teóricos	3
1.1 Lógica borrosa	3
1.2 Neuronas	14
1.2.1 Neuronas biológicas	14
1.2.2 Neuronas artificiales	17
Capítulo 2	
Modelo electrónico de Max, Min e Inv	19
2.1 Modelo electrónico del operador Max	19
2.2 Modelo electrónico del operador Min	21
2.3 Modelo electrónico del operador Inv	23
Capítulo 3	
Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois	25
3.1 Teoría del Cálculo Integral Borroso de Dubois	25
3.2 Modelo de neurona para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois	38
3.3 Modelo electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois	39
Capítulo 4	
Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta	49
4.1 Teoría de Gupta sobre el modelo de una neurona borrosa	49
4.2 Modelo electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta	56
Capítulo 5	
Comparación entre los resultados obtenidos en el modelado electrónico de neuronas integradoras borrosas tipo Dubois y Gupta	64
Capítulo 6	
Conclusiones y Comentarios	75
Bibliografía	81

INTRODUCCIÓN

La lógica borrosa es una nueva teoría que a diferencia de la lógica clásica propone utilizar como valores de verdad una función de membresía [2]. De hecho se puede decir que la lógica clásica es un subconjunto de la lógica borrosa ya que ésta en vez de ser una lógica bivaluada (verdadero o falso, 0 ó 1), utiliza una función de membresía cuyo valor puede ser cualquier número entre 0 y 1; adaptándose de esta forma a las imprecisiones asociadas al lenguaje humano. Dichas imprecisiones se ilustran en los siguientes enunciados, con letras cursivas: "Abre la válvula un *poco más*," "el café está *muy caliente*", "el gato aún es *pequeño*". La lógica borrosa se ha empleado en diversas áreas como el control y las redes neuronales entre otras [7, 8, 9]. En el área de las redes neuronales, la lógica borrosa se ha utilizado para obtener modelos de neuronas artificiales que funcionen de acuerdo con la teoría de la lógica borrosa.

Las neuronas que constituyen a las redes neuronales se inspiran en las neuronas biológicas y tratan de simular su funcionamiento y no así su proceso biológico, por lo que las neuronas artificiales [1, 7, 11, 12] tienen como propósito procesar señales y realizar operaciones de aprendizaje mediante complejos cálculos matemáticos y mapeos [2] (mismos que podrían ser borrosos).

Tanto la lógica borrosa como las redes neuronales han tenido un gran auge en las últimas décadas, sin embargo, aún no existen modelos con diseños electrónicos que conjunten ambas teorías, tan sólo se pueden encontrar publicaciones [4] en donde se proponen neuronas borrosas a manera de diagrama de bloques sin llegar a proponer algún diseño electrónico.

El objetivo de esta tesis es obtener el modelo electrónico de dos neuronas integradoras borrosas (neuronas que utilizan un integrador borroso para llevar a cabo un proceso neuronal borroso), con base tanto en la teoría de la lógica borrosa como de las neuronas artificiales. A diferencia del proceso neuronal que realizan las neuronas artificiales clásicas [12], las neuronas integradoras borrosas que se presentan en este trabajo realizan un proceso neuronal borroso y aunque las señales de entrada a estas neuronas integradoras borrosas, en este caso son señales clásicas, a la salida de estas neuronas se obtiene un resultado borroso, resultado que no se podría obtener a la salida de una neurona artificial clásica para las mismas señales de entrada. Para cumplir con el objetivo anterior, esta tesis se organiza de la siguiente forma:

- 1) Inicialmente se presentan los conceptos teóricos fundamentales de la lógica borrosa y de las neuronas artificiales. Se da una breve explicación de la estructura y funcionamiento de las neuronas biológicas así como de las neuronas artificiales.

2) Con base en la teoría de la lógica borrosa se proponen y analizan los modelos electrónicos de tres operadores básicos como son: el operador Máximo (O, en inglés OR), Mínimo (Y, en inglés AND) y Complemento (en inglés se denota como INV), a partir de los cuales se pueden implantar todos los demás operadores lógicos (No -Y, en inglés NAND, O - exclusiva, en inglés XOR, etc.). Para analizar todos los modelos electrónicos que se presentan en este trabajo y obtener sus respuestas, se utilizó el simulador PSpice V. 7.1.

3) Se presenta la teoría del cálculo integral borroso propuesto por Dubois [3] a partir del cuál se obtiene el primer modelo electrónico de una neurona con un integrador borroso tipo Dubois. También se expone el circuito electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois así como el análisis de su comportamiento, ya que se presentan los resultados obtenidos de la simulación de dicha neurona. Se analiza la respuesta y el funcionamiento general de la Neurona Borrosa.

4) Se expone el segundo modelo electrónico de una Neurona Integradora Borrosa, bajo la teoría propuesta por Madan M. Gupta que también se explica brevemente. Se presenta el circuito electrónico y los resultados obtenidos en un simulador. De igual forma, se obtiene y analiza su respuesta.

5) Posteriormente, se hace una comparación entre la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y la tipo Gupta, analizando ambos resultados.

6) Finalmente, se presentan las conclusiones y comentarios acerca de los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES TEÓRICOS

1.1 Lógica borrosa [2,4]

Teoría de los conjuntos borrosos

La teoría de los conjuntos borrosos se puede ver como un intento de desarrollar un grupo de conceptos y técnicas para tratar en una forma sistemática con un tipo de imprecisión el cual se origina cuando los límites de una clase de objetos no están bien definidos. Entre los ejemplos más comunes de tales clases se encuentran las clases de "*mujeres jóvenes*", "*autos pequeños*", "*bromas graciosas*", etc. La membresía en tales clases o como se les ha llamado sugestivamente "*conjuntos borrosos*" es una especie de grado en vez de una proposición todo o nada. Por lo tanto, informalmente, un conjunto borroso puede verse como una clase en la cual hay una progresión gradual de membresía a no membresía o, más precisamente en la cual un objeto puede tener un grado de membresía intermedio entre la unidad (toda la membresía) y cero (no membresía). Desde este punto de vista, un conjunto en el sentido matemático convencional se puede ver como un caso degenerado de un conjunto borroso, esto es, un conjunto no borroso el cual admite únicamente dos grados de membresía: cero y la unidad.

A groso modo, la lógica difusa o borrosa es la lógica del razonamiento aproximado, esto es, sostiene la misma relación a un razonamiento aproximado que la lógica bivaluada a un razonamiento preciso.

Teoría del razonamiento aproximado

Informalmente, el *razonamiento aproximado* o equivalentemente *razonamiento borroso* se define como el proceso o procesos mediante los cuales una conclusión posible e imprecisa se deduce de una colección de premisas imprecisas. Tal razonamiento es en parte de naturaleza cualitativo en vez de cuantitativo y la mayoría de éste cae fuera del dominio de aplicabilidad de la lógica clásica.

La teoría del razonamiento aproximado se basa en la lógica borrosa, en la cual los valores de verdad son lingüísticos de la forma *verdadero*, *no verdadero*, *muy verdadero*, *más o menos verdadero*, *falso*, *no muy falso*, etc. y las reglas de inferencia son aproximadas en vez de exactas. Además, las premisas se asumen que tienen la forma de proposiciones borrosas, es decir, "(X es más pequeño que Y) es muy verdadero", "Si X es pequeño es posible, entonces Y es muy grande es muy probable", etc. También se debe tomar en cuenta que para que algo sea probable necesariamente primero tiene que ser posible. Usando el concepto de

una distribución de posibilidad en vez de una de probabilidad, tales proposiciones se trasladan en expresiones de Posibilidad Relacional Universal Borrosa, la cual es una representación significativa del lenguaje para lenguajes naturales.

En la teoría del razonamiento aproximado hay cuatro puntos importantes a considerar:

- La posibilidad no es una propiedad de todo o nada sino que se puede presentar como un grado.
- Los grados de posibilidad no son los mismos que los de probabilidad.
- La información posibilística es más elemental y menos dependiente que la información probabilística.
- El razonamiento humano se basa en la información de naturaleza posibilística y no probabilística.

El razonamiento aproximado es la base fundamental de la extraordinaria habilidad humana para entender el lenguaje natural, decifrar una mala escritura, realizar actividades que requieran destreza física y/o mental y de manera general tomar decisiones en ambientes complejos y/o inciertos. De hecho, es ésta capacidad de razonar en forma cualitativa y en términos imprecisos la que distingue la inteligencia humana de la inteligencia de las máquinas.

Zadeh define a la **lógica borrosa** como un tipo de lógica imprecisa en la que los valores de verdad son subconjuntos borrosos del intervalo unitario $[0,1]$ y son de naturaleza lingüística.

Variable lingüística

Para describir el comportamiento y características humanas generalmente se usan palabras en vez de números para caracterizar los valores de las variables así como de las relaciones entre ellas. Por ejemplo, la edad de una persona se puede describir como *muy joven*, inteligencia como *muy alta*, la relación con otra persona como *no muy amigable*, y la apariencia como *muy atractivo*.

El uso de palabras en lugar de números implica un grado menor de precisión en la caracterización de los valores de una variable. En algunas ocasiones, preferimos ser imprecisos porque no es necesario un mayor grado de precisión. En la mayoría de los casos, sin embargo, se requiere usar la imprecisión porque no hay unidades de medida para describir los atributos de un objeto y tampoco hay criterios cuantitativos para representar los valores de tales atributos como puntos en una escala fija.

Visto desde esta perspectiva, el concepto de **variable lingüística** puede verse como un dispositivo para sistematizar el uso de palabras o sentencias en un lenguaje natural o sintético con el propósito de caracterizar valores de variables y

describir sus interrelaciones. De este modo el concepto de variable lingüística sirve como una función básica de un razonamiento aproximado tanto en la representación de valores de variables como en la caracterización de valores de verdad, valores de probabilidad y valores de posibilidad de proposiciones difusas.

Notación, terminología y operaciones básicas de los conjuntos borrosos

Un **conjunto borroso** es una clase en donde existe una progresión gradual de no-membresía a membresía de sus objetos. Las variedades de imprecisión son:

- Borrosidad : ausencia de un criterio "*precisamente*" definido de la membresía de clase (tiene asignada una posibilidad).
- Vaguedad : es borrosa y ambigua en el sentido de poca información para un propósito particular ej. Daniel es *bastante alto*.

Ésta aseveración es borrosa en virtud del conjunto borroso *bastante alto*.

La aseveración es vaga si se ubica en ciertos contextos (comprar ropa).

- Aleatoriedad : dependiente de algún suceso furtivo (tiene asignada una probabilidad y depende del contexto).

La posibilidad no es una propiedad de todo o nada ($p \vee \bar{p}$).

El grado de posibilidad es distinto al grado de probabilidad.

La información posibilista es menos dependiente del contexto.

Generalmente se asume que un conjunto borroso pertenece a un **universo del discurso** no borroso, el cual puede ser cualquier colección de objetos, conceptos o construcciones matemáticas. Los universos del discurso usualmente se denotan con los símbolos U, V, W, \dots , con o sin subíndices y/o superíndices.

Un conjunto borroso en U o, equivalentemente, un **subconjunto borroso** de U , se denota con los símbolos en mayúscula $A, B, C, D, E, F, G, H, \dots$, con o sin subíndice y/o superíndice.

Un subconjunto borroso A de un universo del discurso U se caracteriza por una **función de membresía** $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$ la cual asocia a cada elemento u de U un número $\mu_A(u)$ en el intervalo $[0,1]$, donde $\mu_A(u)$ representa el grado de membresía de u en A .

Grado de membresía: es el grado de compatibilidad de $u \in U$ con el concepto representado por A . El grado de membresía en un conjunto borroso debe ser visto como grado de posibilidad y no de probabilidad. El concepto de pertenencia en la teoría de conjuntos borrosos es distinto al tradicional (todo o nada).

El **soporte** de A es el conjunto de puntos en U para los cuales $\mu_A(u)$ es no nula. La **altura** de A es el supremo de $\mu_A(u)$ sobre A. El **punto de cruce** de A es un punto en U cuyo grado de membresía en A es 0.5. A es **normal** si su altura es la unidad y **subnormal** si no lo es.

Un **subconjunto borroso** finito A del universo del discurso U se expresa en la forma lineal siguiente:

$$A = \mu_1 / u_1 + \dots + \mu_n / u_n$$

donde

μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, es el grado de membresía del elemento u_i en A.

μ_i / u_i , $i = 1, 2, \dots, n$, representa al elemento u_i con un grado de membresía μ_i en A.

/ se emplea como un símbolo separador para evitar ambigüedades en caso de que los elementos u_i sean números.

+ representa la unión de los elementos u_i .

Consistente con la representación de un conjunto borroso finito como una forma lineal de los u_i , un subconjunto borroso A de U se puede expresar de la siguiente forma:

$$A \triangleq \int_U \mu_A(u) / u$$

en donde $\mu_A(u)$ es el grado de membresía de u en A, y el símbolo \int_U denota la unión de los elementos borrosos $\mu_A(u)/u$, $u \in U$. El símbolo \triangleq significa "se define como".

Definición. Un subconjunto borroso A de U es del **Tipo 1** si su función de membresía, μ_A , es un mapeo de U al intervalo [0,1]; y A es del **Tipo n**, $n = 2, 3, \dots$, si μ_A es un mapeo de U a el conjunto de subconjuntos borrosos de Tipo n-1.

Contención. Un subconjunto borroso de U puede ser un subconjunto de otro subconjunto difuso o no difuso de U. Más específicamente, A es un *subconjunto* de B o *está contenido en B* si y sólo si $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ para toda u en U, su símbolo es:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(u) \leq \mu_B(u), \quad u \in U.$$

Conjuntos de nivel de un conjunto borroso

Si A es un subconjunto borroso de U , entonces un conjunto de nivel (del inglés level-set) α de A es un conjunto borroso denotado por A_α el cual comprende todos los elementos de U cuyo grado de membresía en A sea mayor o igual a α .

$$A_\alpha = \{ u \mid \mu_A(u) \geq \alpha \}$$

Un conjunto borroso A puede descomponerse en sus conjuntos de nivel mediante la **identidad resolución**:

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha$$

donde αA_α es el producto de un escalar α con el conjunto A_α (en el sentido de (1.4), que aparece en la siguiente página), y \int_0^1 representa la unión de los productos, α toma valores de 0 a 1.

Si U es un espacio vectorial lineal, entonces A es **convexo** si y sólo si para toda $\lambda \in [0, 1]$ y para toda u_1, u_2 en U ,

$$\mu_A(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) \geq \min(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2))$$

En términos de los conjuntos de nivel de A , A es convexo si y sólo si los A_α son convexos para toda $\alpha \in [0, 1]$. De manera similar, A es **concavo** si y sólo si

$$\mu_A(\lambda u_1 + (1 - \lambda) u_2) \leq \max(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2))$$

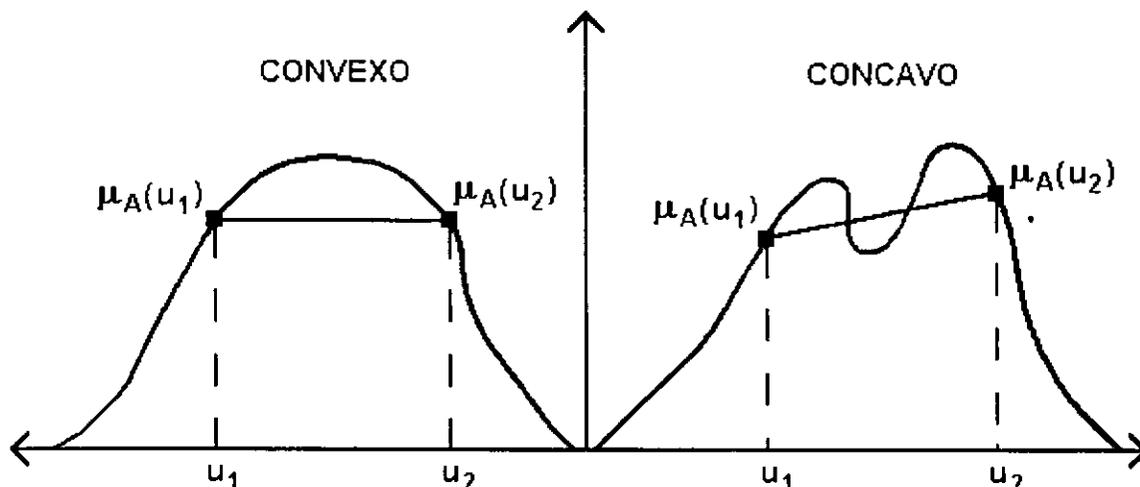


Figura 1.1

Operaciones con conjuntos borrosos

Las operaciones básicas que se pueden realizar con conjuntos borrosos se describen a continuación. (A, B son subconjuntos borrosos de U, $\forall u \in U$).

El **complemento** (negación o inverso) de A se denota como A' y se define:

$$\begin{aligned} A' &\triangleq \int_U (1 - \mu_A(u)) / u \\ \mu_{A'}(u) &= 1 - \mu_A(u) \end{aligned} \quad (1.1)$$

La **unión** de los conjuntos borrosos A y B se denota como A+B (o como $A \cup B$) y se define:

$$\begin{aligned} A + B &\triangleq \int_U (\mu_A(u) \vee \mu_B(u)) / u \\ \mu_{A \cup B}(u) &= \text{Max}[\mu_A(u), \mu_B(u)] \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde \vee es el símbolo para el operador Max.

La **intersección** de A y B se denota como $A \cap B$ y se define:

$$\begin{aligned} A \cap B &\triangleq \int_U (\mu_A(u) \wedge \mu_B(u)) / u \\ \mu_{A \cap B}(u) &= \text{Min}[\mu_A(u), \mu_B(u)] \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde \wedge es el símbolo para el operador Min.

El **producto** de A y B se denota como AB y se define:

$$AB \triangleq \int_U \mu_A(u) \mu_B(u) / u$$

Por lo tanto, A^α , donde α es cualquier número positivo, se debe interpretar como:

$$A^\alpha \triangleq \int_U (\mu_A(u))^\alpha / u$$

Similarmente, si α es cualquier número real positivo tal que $\alpha \sup_u \mu_A(u) \leq 1$, (\sup_u representa al supremo con respecto al elemento u), entonces:

$$\alpha A \triangleq \int_U \alpha \mu_A(u) / u \quad (1.4)$$

La operación de **concentración** se define como:

$$\text{CON}(A) \triangleq A^2$$

mientras que la **dilatación** se expresa como:

$$\text{DIL}(A) \triangleq A^{0.5}$$

La **suma acotada** de A y B se denota como $A \oplus B$ y se define:

$$A \oplus B \triangleq \int_U 1 \wedge (\mu_A(u) + \mu_B(u)) / u$$

donde + es la suma aritmética.

La **diferencia acotada** de A y B se define como $A \ominus B$ y se define:

$$A \ominus B \triangleq \int_U 0 \vee (\mu_A(u) - \mu_B(u)) / u$$

donde - es la diferencia aritmética.

La operación **cuadrado a la izquierda** (del inglés left-square) de A se denota como 2A y se define:

$${}^2A \triangleq \int_U \mu_A(u) / u^2$$

donde $\vee \triangleq \{u^2 \mid u \in U\}$. De manera general:

$${}^{\alpha}A \triangleq \int_U \mu_A(u) / u^{\alpha}$$

donde $\vee \triangleq \{u^{\alpha} \mid u \in U\}$.

Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos borrosos de U, y w_1, \dots, w_n son números reales no negativos sumados a la unidad, entonces una **combinación convexa** de A_1, \dots, A_n es un conjunto borroso A cuya función de membresía se expresa como:

$$\mu_A = w_1 \mu_{A_1} + \dots + w_n \mu_{A_n}$$

donde + denota la suma aritmética.

Si A_1, \dots, A_n son subconjuntos borrosos de U_1, \dots, U_n , respectivamente, el **producto cartesiano** de A_1, \dots, A_n se denota como $A_1 \times \dots \times A_n$ y se define como un subconjunto borroso de $U_1 \times \dots \times U_n$ cuya función de membresía se expresa como:

$$\mu_{A_1 \times \dots \times A_n}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(u_n)$$

Similarmente,

$$A_1 \times \dots \times A_n = \int_{U_1 \times \dots \times U_n} (\mu_{A_1}(u_1) \wedge \dots \wedge \mu_{A_n}(u_n)) / (u_1, \dots, u_n)$$

Relaciones borrosas

Si U es el producto cartesiano de n universos del discurso U_1, \dots, U_n , entonces una **relación borrosa n-aria**, R , en U es un subconjunto borroso de U . La relación R se puede expresar como la unión de sus elementos borrosos $\mu_R(u_1, \dots, u_n) / (u_1, \dots, u_n)$, es decir,

$$R = \int_{U_1 \times \dots \times U_n} \mu_R(u_1, \dots, u_n) / (u_1, \dots, u_n)$$

donde μ_R es la función de membresía de R .

Si R es una relación borrosa de U a V (o equivalentemente, una relación en $U \times V$) y S es una relación de V a W , entonces la **composición** de R y S es una relación borrosa de U a W denotada por $R \circ S$ y definida como:

$$R \circ S = \int_{U, W} \bigvee_V (\mu_R(u, v) \wedge \mu_S(v, w)) / (u, w)$$

donde \bigvee_V representa la operación máximo con respecto a V .

Conjuntos borrosos cilíndricos y proyecciones

Si R es una relación borrosa n-aria en $U_1 \times \dots \times U_n$, entonces su **proyección** (denotada como Proj) en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ es una relación borrosa k-aria R_q en U la cual está definida por:

$$R_q \stackrel{\Delta}{=} \text{Proj } R \text{ en } U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k} \stackrel{\Delta}{=} P_q R \\ \stackrel{\Delta}{=} \int_{U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}} (\bigvee_{u_{j_1}, \dots, u_{j_{n-k}}} \mu_R(u_1, \dots, u_n)) / (u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$$

donde q es el índice de la secuencia (i_1, \dots, i_k) ; $u_{(q)} \triangleq (u_{i_1} \times \dots \times u_{i_k})$; q' es el complemento de q ; y $\bigvee_{u_{(q)'}}$ es el supremo de $\mu_R(u_1, \dots, u_n)$ sobre las u 's que están en $u_{(q)'}$.

Diferentes relaciones borrosas en $U_1 \times \dots \times U_n$ pueden tener proyecciones idénticas en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$. Sin embargo, dada una relación borrosa R_q en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$, existe una relación única *la más grande* \bar{R}_q en $U_1 \times \dots \times U_n$ cuya proyección en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ es R_q . La función de membresía de \bar{R}_q está dada por:

$$\mu_{\bar{R}_q}(u_1, \dots, u_n) = \mu_{R_q}(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$$

entendiéndose que la ecuación anterior permanece para toda u_1, \dots, u_n tal que los argumentos i_1, \dots, i_k en $\mu_{\bar{R}_q}$ son iguales, respectivamente, a los primero, segundo, ..., k argumentos en μ_{R_q} . Esto implica que el valor de $\mu_{\bar{R}_q}$ en el punto (u_1, \dots, u_n) es el mismo que en el punto (u'_1, \dots, u'_n) siempre y cuando $u_{i_1} = u'_{i_1}, \dots, u_{i_k} = u'_{i_k}$. Por ésta razón, a \bar{R}_q se le llama la **extensión cilíndrica** de R_q , y ésta constituye la **base** de \bar{R}_q .

Suponiendo que R es una relación n -aria en $U_1 \times \dots \times U_n$, R_q es su proyección en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$, y \bar{R}_q es la extensión cilíndrica de R_q . Debido a que \bar{R}_q es la relación más grande en $U_1 \times \dots \times U_n$ cuya proyección en $U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$ es R_q , entonces R_q satisface la **relación de contención**

$$R \subset \bar{R}_q \quad \forall q$$

$$\therefore R \subset \bar{R}_{q_1} \cap \bar{R}_{q_2} \cap \dots \cap \bar{R}_{q_r}$$

para una secuencia q_1, \dots, q_r arbitraria (subsecuencias indexadas de $1, 2, \dots, n$).

En particular, si el conjunto $q_1 = 1, \dots, q_r = n$, entonces la ecuación anterior se reduce a:

$$R \subset \bar{R}_1 \cap \bar{R}_2 \cap \dots \cap \bar{R}_n$$

donde R_1, \dots, R_n son las proyecciones de R en $U_1 \times \dots \times U_1$, respectivamente, y $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n$ son sus extensiones cilíndricas. Sin embargo, de la definición del producto cartesiano se tiene lo siguiente:

$$\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_n = R_1 \times \dots \times R_n$$

lo cual lleva a la siguiente relación de contención:

$$R \subset R_1 \times \cdots \times R_n$$

El concepto de una extensión cilíndrica también se puede usar para dar una interpretación intuitiva de la composición de relaciones borrosas. Por lo tanto, suponga que R y S son relaciones borrosas binarias en $U_1 \times U_2$ y $U_2 \times U_3$, respectivamente. Sean \bar{R} y \bar{S} las extensiones cilíndricas de R y S en $U_1 \times U_2 \times U_3$. Entonces, de la definición de $R \circ S$ se tiene que:

$$R \circ S = \text{Proj } \bar{R} \cap \bar{S} \text{ en } U_1 \times U_3$$

Principio de extensión

El **principio de extensión** para conjuntos borrosos es en esencia una identidad básica la cual permite que el dominio de la definición de un mapeo o una relación sea extendido de puntos en U a subconjuntos borrosos de U . Más específicamente, suponga que f es un mapeo de U a V y A es un subconjunto borroso de U expresado como:

$$A = \mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n$$

Entonces, el principio de extensión afirma que:

$$f(A) = f(\mu_1 u_1 + \cdots + \mu_n u_n) \equiv \mu_1 f(u_1) + \cdots + \mu_n f(u_n)$$

Por lo tanto, la imagen de A bajo f se puede deducir a partir del conocimiento de las imágenes de u_1, \dots, u_n bajo f . Cuando es necesario que el significado de $f(A)$ sea evaluado de acuerdo a la ecuación anterior, $f(A)$ se encierra entre corchetes angulares, esto es:

$$\langle f(A) \rangle \triangleq f(A) \triangleq \mu_1 f(u_1) + \cdots + \mu_n f(u_n)$$

Si el soporte de A es continuo, es decir

$$A = \int_U \mu_A(u) / u$$

entonces el principio de extensión asume la siguiente forma:

$$f(A) \triangleq f\left(\int_U \mu_A(u) / u\right) \triangleq \int_V \mu_A(u) / f(u)$$

tomando en cuenta que $f(u)$ es un punto en V y $\mu_A(u)$ es su grado de membresía en $f(A)$, la cual es un subconjunto borroso de V .

Una forma modificada del principio de extensión es en la que se descompone al subconjunto borroso A en sus conjuntos de nivel (del inglés level-sets) constituyentes en vez de sus elementos borrosos. De ésta forma:

$$A = \int_0^1 \alpha A_\alpha$$

donde A_α es un conjunto de nivel α (del inglés α -level-set) de A , por lo tanto el principio de extensión se puede escribir de la siguiente manera:

$$f(A) = f\left(\int_0^1 \alpha A_\alpha\right) \equiv \int_0^1 \alpha f(A_\alpha)$$

Operadores - T

Las operaciones lógicas (unión, intersección, negación, etc.), tratadas anteriormente en este capítulo también pueden realizarse utilizando conectores tales como **OR**, **AND** (o sus formas generalizadas basadas en una norma triangular u operadores - T) y la **negación**.

Sean x_1 y x_2 expresadas en el intervalo $[0,1]$, entonces la operación **AND** (operador - T) se define como un **mapeo T** tal que:

$$T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ dada por} \\ y_1 = [x_1 \text{ AND } x_2] \triangleq [x_1 \text{ T } x_2] = T[x_1, x_2]$$

Similarmente, la operación **OR** generalizada (conorma - T) se puede definir como un **mapeo S** tal que:

$$S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ dada por} \\ y_2 = [x_1 \text{ OR } x_2] \triangleq [x_1 \text{ S } x_2] = S[x_1, x_2]$$

La negación **N** en $x_i \in [0,1]$ se define como un mapeo:

$$N: [0,1] \rightarrow [0,1] \text{ con las siguientes propiedades} \\ y_3 = N[x_1] = 1 - x_1 \\ \text{Por lo tanto, } N(0) = 1, N(1) = 0, \\ \text{y } N(N(x)) = x.$$

Ahora, se darán algunas propiedades importantes de los operadores T y S.

$$T(0,0) = 0, \quad T(1,1) = 1, \quad T(1,x) = x, \quad T(x,y) = T(y,x)$$

$$S(0,0) = 0, \quad S(1,1) = 1, \quad S(0,x) = x, \quad S(x,y) = S(y,x)$$

También, los teoremas de De Morgan se enuncian como sigue:

$$T(x_1, x_2) = 1 - S(1 - x_1, 1 - x_2) \text{ y } S(x_1, x_2) = 1 - T(1 - x_1, 1 - x_2)$$

1.2 Neuronas

1.2.1 Neuronas Biológicas [1, 10]

Una neurona biológica morfológicamente tiene cuatro regiones definidas (figura 1.2): el cuerpo de la célula (también llamado soma, que consiste en el núcleo y el citoplasma), dendritas, axón y las terminales presinápticas. Cada una de estas regiones tiene una función distinta en la generación de señales.

El **cuerpo de la célula** es el centro metabólico de la neurona y usualmente da origen a dos tipos de prolongaciones llamadas las dendritas y el axón. Las neuronas comúnmente tienen varias **dendritas**, con forma de ramas de árbol, y sirven como los principales aparatos de recepción de señales a la neurona provenientes de otras células nerviosas.

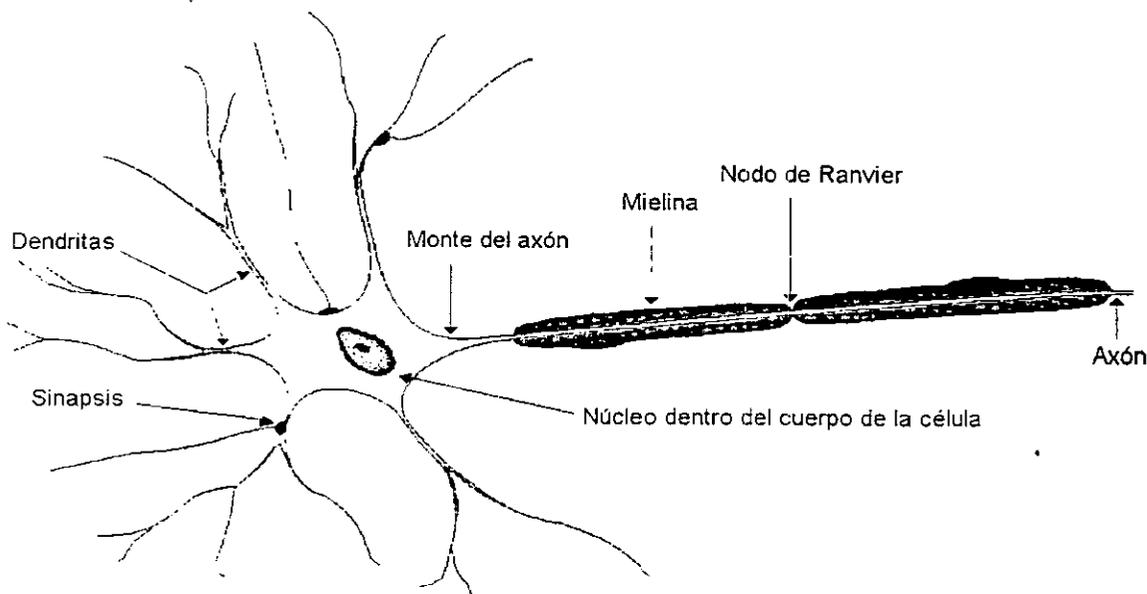


Figura 1.2

El **axón** es una prolongación tubular muy delgada, con un diámetro de 0.2 a 20 micrómetros, a comparación con el cuerpo de la célula de más de 50 micrómetros de diámetro, y se puede ramificar y extender a más de un metro. Esta prolongación es la principal unidad de conducción de la neurona y es capaz de transmitir señales a grandes distancias propagando de la manera "todo o nada", una señal eléctrica transitoria llamada potencial de acción. El axón surge de una región especial del cuerpo de la célula llamada el monte del axón, donde el potencial de acción se inicia una vez que se alcanza un umbral crítico.

La mayoría de los axones están envueltos por una o dos cubiertas, mielina y/o neurilema. El neurilema está formado por la membrana celular de las células de Schwann la cual rodea a los axones grandes de los nervios periféricos para formar capas múltiples de mielina. La mielina, un fosfolípido, aísla los axones y aumenta la velocidad de conducción de los potenciales de acción. Las muescas periódicas a lo largo de los nervios desnudos se llaman **nodos de Ranvier** y también aumentan la velocidad de conducción de los impulsos nerviosos.

Cerca de la parte final del axón, éste se divide en finas ramificaciones llamadas **terminales presinápticas** las cuales son los elementos transmisores de la neurona. A través de éstas terminales la neurona transmite señales acerca de su propia actividad a las superficies receptoras (las dendritas y cuerpos celulares) de otras neuronas. Al punto de contacto se le conoce como **sinapsis**. A la célula que envía las señales se le llama célula presináptica y a la que recibe las señales célula postsináptica, y al espacio entre ellas espacio sináptico.

Las neuronas se caracterizan por su capacidad para generar y conducir formas de energía electroquímica (señales) llamadas impulsos nerviosos. El **impulso nervioso** se crea por la difusión de átomos cargados eléctricamente (iones) a través de la membrana de la célula nerviosa. Al igual que otras células del cuerpo, las neuronas mantienen una diferencia de potencial de aproximadamente 65 mV a través de su membrana externa llamado potencial de membrana de reposo. Este resulta de una distribución desigual de Na^+ , K^+ , Cl^- , y aniones orgánicos en la membrana celular, la cual deja al interior de la membrana con una polaridad negativa con respecto a su exterior. Como al exterior de la membrana se le define arbitrariamente como 0 V, entonces el potencial de membrana de reposo es de -65 mV.

Un incremento en el potencial de la membrana (por ej. de -65 a -75 mV) se llama hiperpolarización. Una reducción en el potencial de membrana (por ej. de -65 a -55 mV) se le llama depolarización. La **hiperpolarización** decrece la habilidad de la célula para generar un potencial de acción (la conducción de la señal transmitida a lo largo del axón) y por lo tanto es **inhibitoria**. La **depolarización** incrementa la habilidad de la célula para generar una señal transmitible y por esto es **excitatoria**.

Las señales se organizan del mismo modo en todas las células nerviosas. Para producir un comportamiento, cada célula nerviosa participante ya sea sensora o motora genera de manera secuencial cuatro tipos de señales en cuatro regiones dentro de la neurona: una señal de entrada (llamada potencial receptor en las neuronas sensoras y potencial sináptico en las neuronas motoras), una señal de integración, una señal de conducción, y una señal de salida.

Casi todas las neuronas se pueden describir mediante el modelo generalizado de una neurona que tiene cuatro componentes:

- a) Entrada o componente receptor.- constituido por las dendritas o por el cuerpo de la célula.
- b) Componente integrador.- corresponde a el segmento inicial del axón (monte del axón) donde éste emerge del cuerpo de la célula.
- c) Componente conductor de señal de largo alcance.- comprende toda la longitud del axón desde su segmento inicial hasta la terminal de la neurona.
- d) Salida o componente secretor.- son las terminales presinápticas.

Las señales se transforman dentro de la neurona donde cada componente localizado en una región particular de la célula produce una señal característica.

La **señal de entrada** o potencial receptor se clasifica en amplitud y duración de manera proporcional a la amplitud y duración de los estímulos de entrada.

La **señal de integración** es la señal de entrada transformada por una acción integradora en potenciales de acción que se propagan activamente a través del axón. Un potencial de acción se genera sólo si el potencial receptor (o sináptico) es mayor que un cierto valor de umbral. Una vez que el potencial receptor excede este umbral, cualquier incremento adicional en la amplitud de la señal incrementará la frecuencia con la cual se generan los potenciales de acción. Las características de las señales de entrada se transforman en un código de frecuencia de potenciales de acción (impulsos) en la zona de disparo. La duración de la señal de entrada determina la duración del tren de potenciales de acción. La frecuencia del tren de impulsos es proporcional a la amplitud de la señal de entrada.

Los **potenciales de acción** tienen valores de "todo o nada": cada potencial tiene la misma forma, amplitud y duración. Estos potenciales de acción se conducen a lo largo de todo el axón, que puede tener una longitud de uno a dos metros. La frecuencia de los impulsos es proporcional a la amplitud de los estímulos, y la duración de la generación de potenciales de acción es proporcional a la duración de los estímulos.

La **señal de salida**, la liberación de sustancias transmisoras en la célula postsináptica, se produce cuando los potenciales de acción alcanzan o llegan a la terminal sináptica. El número total de potenciales por unidad de tiempo determina exactamente que cantidad de sustancia transmissora será liberada.

1.2.2 Neuronas artificiales [4]

Tanto desde el punto de vista neuro-biológico como neuro-matemático, se pueden identificar dos elementos clave en una neurona biológica los cuales son los responsables de dar a la neurona atributos tales como el aprendizaje, adaptación, conocimiento (almacenamiento de experiencias pasadas o memoria), agregación y operaciones de mapeo no lineales con señales neuronales:

- a) *Sinápsis*: es un elemento almacenador de experiencias pasadas (conocimiento); aprende del medio ambiente neuronal y continuamente se adapta. Una experiencia pasada aparece en forma de un valor sináptico, al cual se llamará peso sináptico. Existen más de cien billones de neuronas en el sistema nervioso central humano y, en promedio, hay más de mil sinápsis por neurona. Matemáticamente, una sinápsis proporciona una operación de confluencia entre las nuevas entradas neuronales y las experiencias pasadas, y envía señales a la dendrita (entrada al cuerpo principal (soma) de la neurona). En adelante se referirá a la operación matemática en la sinápsis como *operación sináptica* u *operación de confluencia sináptica*.
- b) *Soma*: se refiere al cuerpo principal de la neurona. Recibe señales a través de sus dendritas y proporciona una operación de agregación. Si el valor en conjunto de las entradas de las dendritas excede cierto valor de umbral, ésta dispara, produciendo una señal (salida) axonal la cual es una clase de función no lineal del valor en conjunto. A las operaciones matemáticas en el soma se les llamará *operación somática*. En la operación somática se pueden distinguir tres operaciones matemáticas distintas: b.1) agregación, b.2) Umbral, y b.3) transformación no lineal.

Teniendo en mente las operaciones sináptica y somática descritas anteriormente, se puede describir a una neurona como un procesador matemático el cual recibe como señal de entrada un vector n-dimensional $x(t) \in R^n$ y produce una salida axónica escalar $y(t) \in R^1$. Matemáticamente, el proceso neuronal Ne se puede describir como una operación de mapeo del vector neuronal de entrada $x(t) \in R^n$ a la salida neuronal escalar $y(t) \in R^1$ como:

$$Ne: x(t) \in R^n \rightarrow y(t) \in R^1 \quad (1.5)$$

donde $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$.

De manera similar,

$$y(t) = Ne[x(t) \in R^n] \in R^1 \quad (1.6)$$

La figura 1.3 muestra una neurona típica con las operaciones matemáticas de las ecuaciones (1.5) y (1.6).

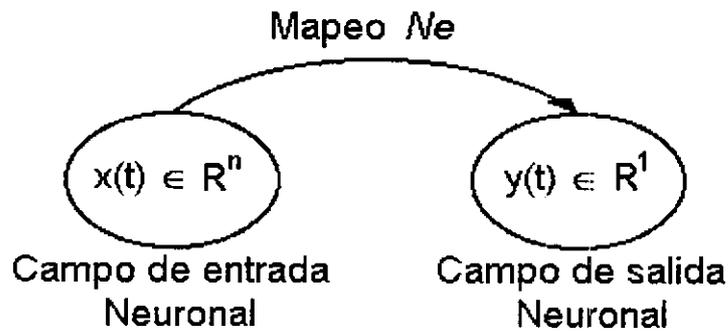
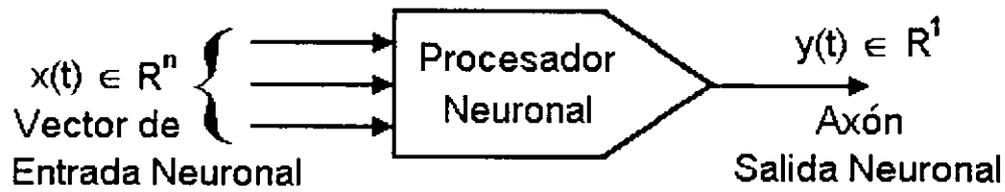


Figura 1.3

Una neurona, como la descrita anteriormente, proporciona dos operaciones matemáticas distintas distribuidas sobre la sinápsis y el soma. Estas dos operaciones matemáticas neuronales se llaman i) operación sináptica y ii) operación somática, estas operaciones se describen en capítulos posteriores.

CAPÍTULO 2

MODELO ELECTRÓNICO DE MAX, MIN E INV

Así como en la lógica binaria todas las operaciones lógicas (O - exclusiva, en inglés XOR, No -Y, en inglés NAND, etc.) se derivan de las operaciones básicas Y (en inglés AND), O (en inglés OR) y Complemento, en la lógica borrosa ocurre lo mismo sólo que en este caso los conjuntos son borrosos y los valores de verdad son funciones de membresía.

En este capítulo se presenta el modelo electrónico de las operaciones lógicas borrosas unión (O), intersección (Y) y complemento, definidas en el capítulo anterior, por ser las operaciones fundamentales para el modelado electrónico de las dos neuronas integradoras borrosas que se presentan en este trabajo.

De aquí en adelante, todas las señales utilizadas en este trabajo son señales **unipolares** por ser las más comúnmente empleadas. Las señales unipolares son señales definidas sobre el intervalo unitario positivo [0,1]. En el caso de señales de voltaje se dice que son señales unipolares aquellas que toman valores de cero a un valor n positivo de voltaje, en este caso corresponde a valores comprendidos en el intervalo de [0,5] volts.

2.1 Modelo electrónico del operador Max

De acuerdo con lo visto anteriormente, para realizar la operación borrosa unión comúnmente se utiliza la operación máximo (Max) definida por la ecuación (1.2).

El circuito electrónico del operador Max (figura 2.1) obtiene como señal de salida el valor máximo de voltaje de dos señales de entrada y se compone de un comparador (LM311), un inversor (7404) y dos interruptores analógicos (ADG411/AD). Para obtener el máximo de dos señales de entrada o funciones V_{in1} y V_{in2} , ambas señales se aplican a la entrada del circuito electrónico del operador Max, a el comparador y dependiendo de cual señal es mayor (ya sea la señal de la entrada inversora o de la no inversora del comparador), como respuesta se obtiene un valor de 0 o 5 V que es la señal de entrada a la terminal de control (tabla 2.1) de un interruptor analógico, su valor inverso que se obtiene mediante un circuito integrado (C.I.) 7404, es la señal de entrada a la terminal de control del segundo interruptor analógico, en general sólo un interruptor va a estar cerrado en cualquier instante, de manera tal que ya sea el primer o segundo interruptor analógico se cerrará para conducir a la mayor de las dos señales de entrada y así obtener como señal de salida del circuito electrónico el máximo de las dos señales de entrada:

$$V_{out} = \text{Max}[V_{in1}, V_{in2}]$$

Tabla 2.1

Entrada de control	Interruptor
0 V	Abierto (apagado)
+5 V	Cerrado (encendido)

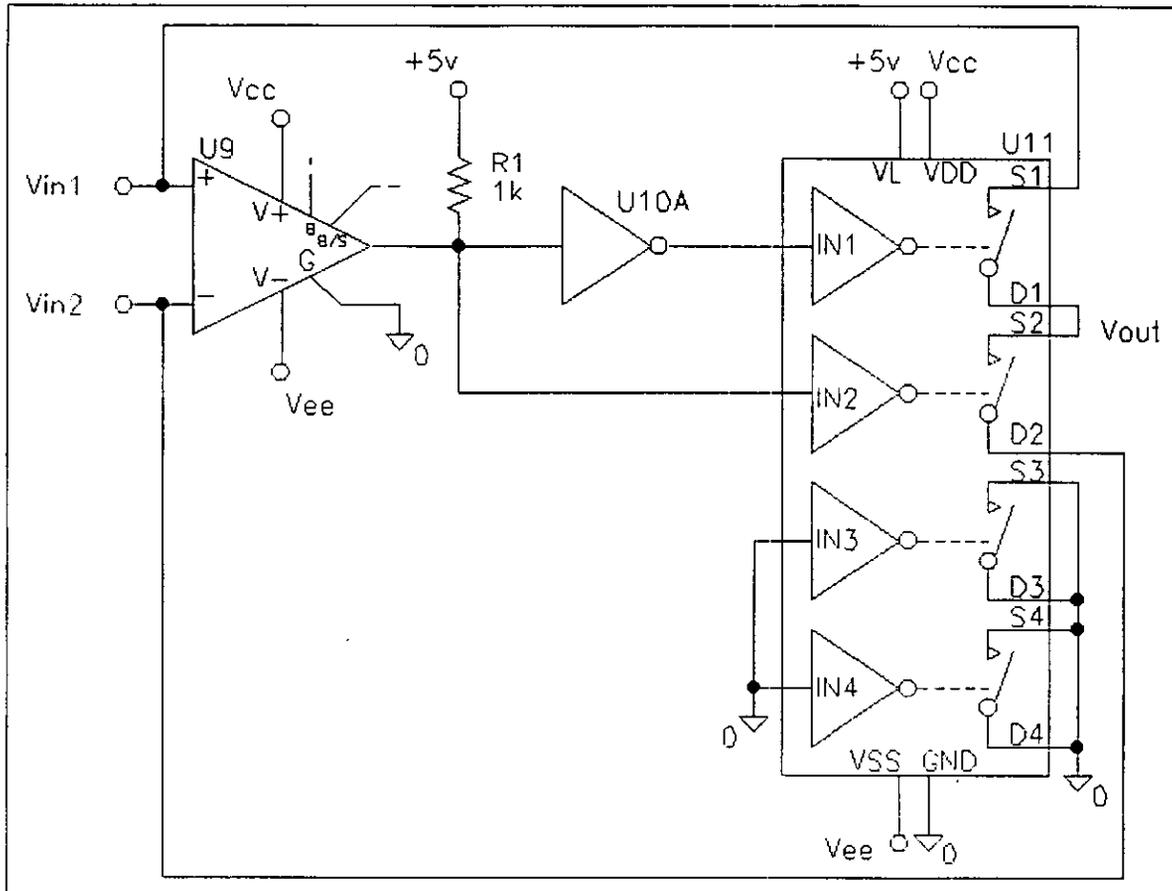


Figura 2.1

El modelo electrónico del operador Max se muestra en la figura 2.1 donde V_{cc} y V_{ee} pueden tomar valores hasta de +15 V y -15 V respectivamente. Las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} son cualesquiera señales clásicas con valores comprendidos en un intervalo de ± 15 V. Las terminales del C.I. ADG411/AD que no se ocupan, se conectan a tierra porque así lo exige el simulador (PSpice V. 7.1).

En la figura 2.2 (c) se muestra la respuesta del operador Max para dos señales senoidales unipolares de entrada (fig. 2.2 (a) y (b)) defasadas 180° y con una amplitud pico a pico de 5 V. La frecuencia máxima de todas las señales utilizadas en los circuitos de este trabajo es de 1 KHz debido a que no se requiere manejar señales de mayor frecuencia a ésta. Como se puede observar el voltaje de salida (V_{out}) es el máximo de las dos señales de entrada.

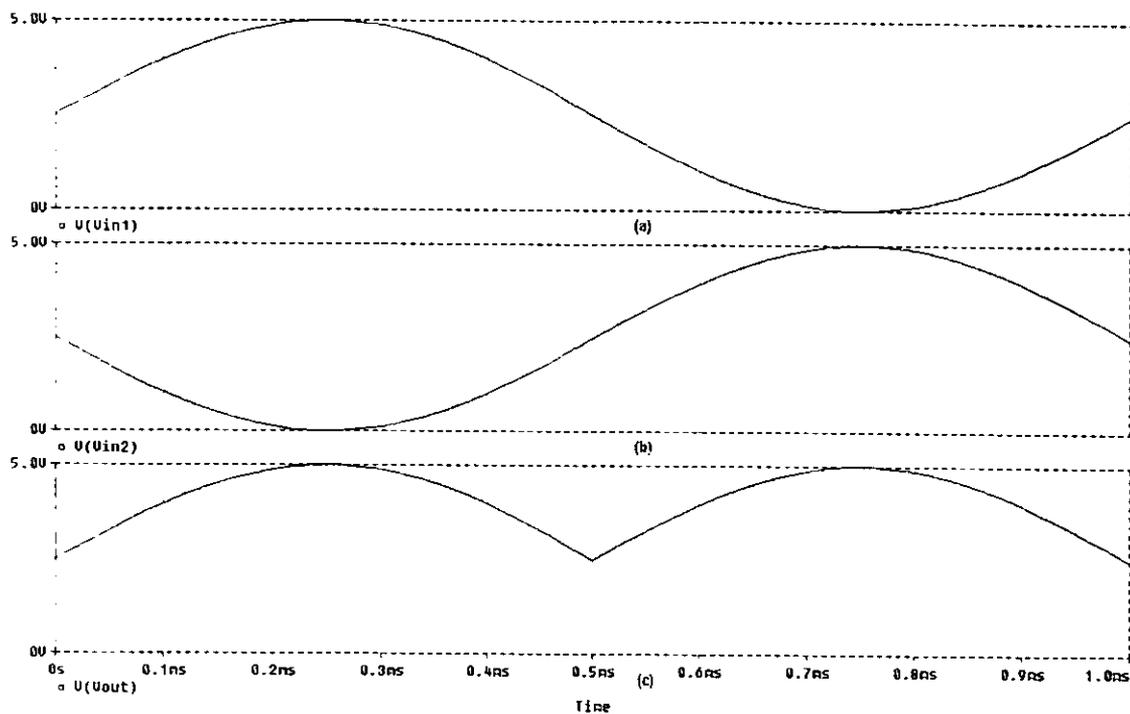


Figura 2.2 (a) Señal de entrada (V_{in1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° . (b) Señal de entrada (V_{in2}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 180° . (c) Señal de salida (V_{out}) del operador Max.

El circuito electrónico del operador Max presentado en esta sección es la forma más sencilla que se pudo encontrar para obtener el máximo de dos señales eléctricas cualesquiera.

2.2 Modelo electrónico del operador Min

De acuerdo con lo visto anteriormente, para realizar la operación borrosa intersección comúnmente se utiliza la operación mínimo (Min) definida por la ecuación (1.3).

El circuito electrónico del operador Min (figura 2.3) obtiene como señal de salida el valor mínimo de voltaje de dos señales de entrada y se compone de un comparador (LM311), un inversor (7404) y dos interruptores analógicos (ADG411/AD). Para obtener el mínimo de dos señales de entrada o funciones V_{in1} y V_{in2} , ambas señales se aplican a la entrada del circuito electrónico del operador Min, a el comparador y dependiendo de cual señal es menor (ya sea la señal de la entrada inversora o de la no inversora del comparador), como respuesta se obtiene un valor de 0 o 5 V que es la señal de entrada a la terminal de control (tabla 2.1) de un interruptor analógico, su valor inverso que se obtiene mediante un C.I. 7404, es la señal de entrada a la terminal de control del segundo interruptor analógico, en general sólo un interruptor va a estar cerrado en cualquier instante, de manera tal que ya sea el primer o segundo interruptor se cerrará para conducir a la menor de

las dos señales de entrada y así obtener como señal de salida del circuito electrónico el mínimo de las dos señales de entrada:

$$V_{out} = \text{Min}[V_{in1}, V_{in2}]$$

El modelo electrónico del operador Min se muestra en la figura 2.3 donde Vcc y Vee pueden tomar valores hasta de +15 V y -15 V respectivamente. Las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} son cualesquiera señales clásicas con valores comprendidos en un intervalo de ± 15 V. Las terminales del C.I. ADG411/AD que no se ocupan, se conectan a tierra porque así lo exige el simulador (Pspice V. 7.1).

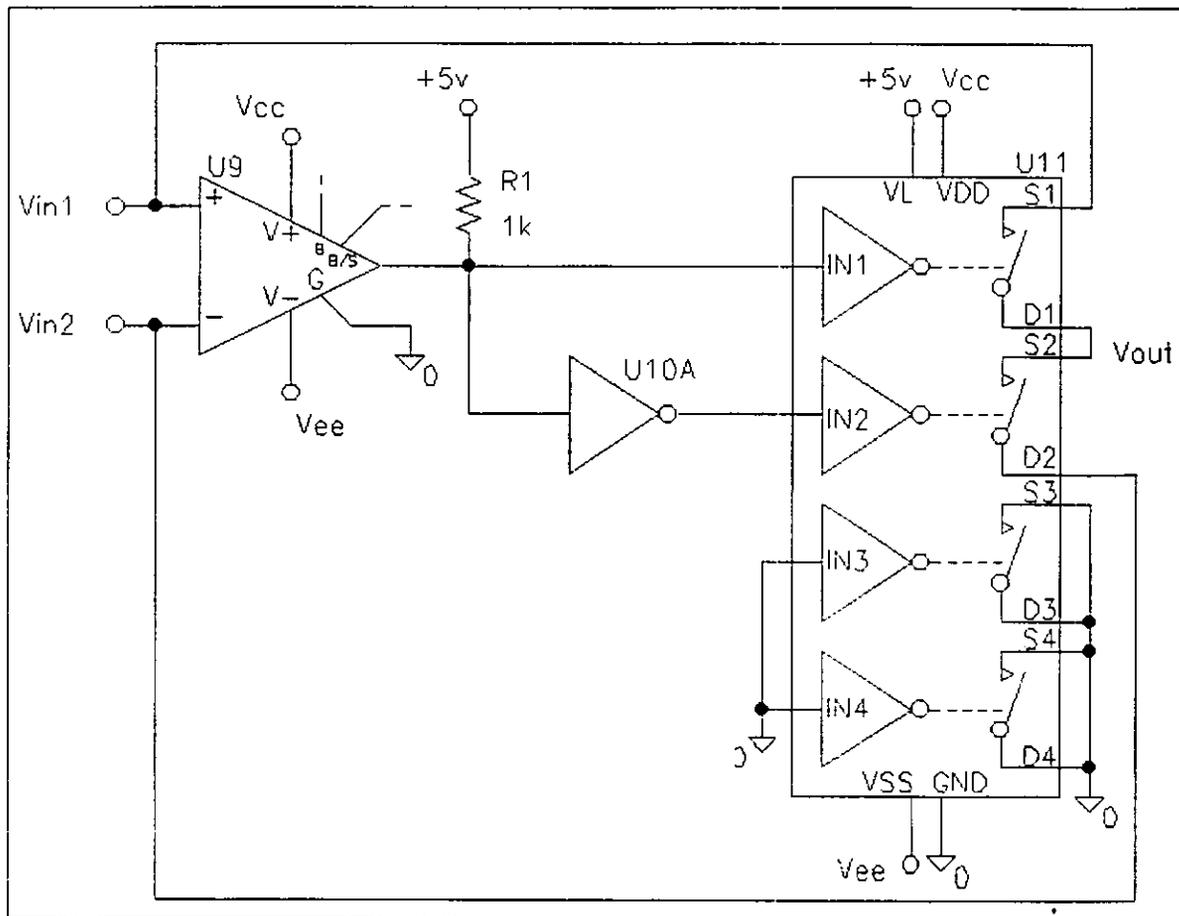


Figura 2.3

En la figura 2.4 (c) se muestra la respuesta del operador Min para dos señales senoidales unipolares de entrada (fig. 2.4 (a) y (b)) defasadas 180° , con una amplitud pico a pico de 5 V y con una frecuencia de 1 KHz. Como se puede observar el voltaje de salida (V_{out}) es el mínimo de las dos señales de entrada.

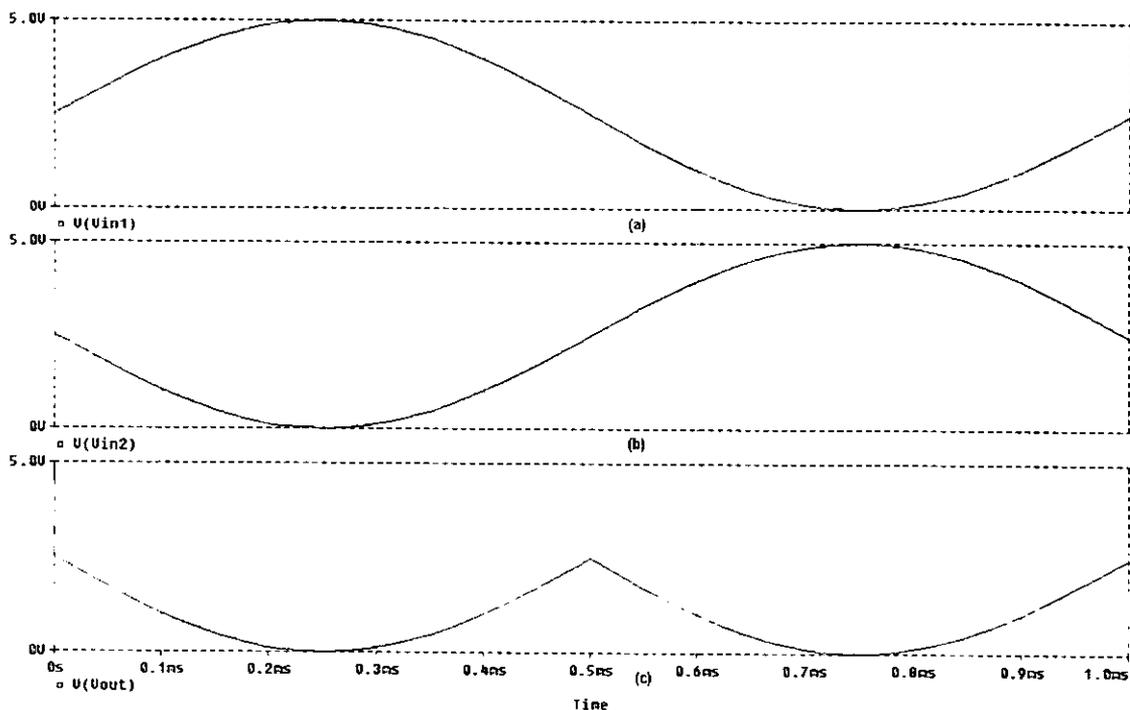


Figura 2.4 (a) Señal de entrada (V_{n1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° . (b) Señal de entrada (V_{n2}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 180° . (c) Señal de salida (V_{out}) del operador Min.

El circuito electrónico del operador Min presentado en esta sección es la forma más sencilla que se encontró para obtener el mínimo de dos señales eléctricas cualesquiera.

2.3 Modelo electrónico del operador Inv

De acuerdo con lo visto previamente, para realizar la operación borrosa complemento comúnmente se utiliza la operación inverso (Inv) definida por la ecuación (1.1).

Operador Inv para señales unipolares

En la figura 2.5 se muestra el circuito del operador Inv para señales unipolares, el modelo electrónico consta de un amplificador operacional LF353 en configuración de un restador con ganancia unitaria. Por lo que el complemento de una señal de entrada unipolar V_{in} es:

$$V_{out} = \text{Inv}[V_{in}] = 1 - V_{in}$$

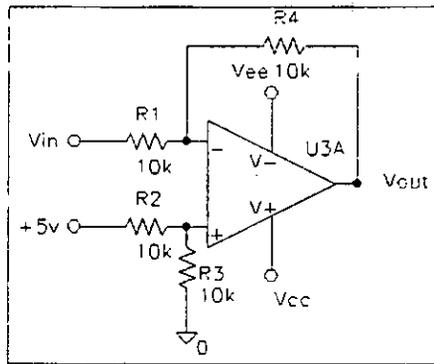


Figura 2.5

La figura 2.6 (c) muestra la respuesta del operador Inv para una señal de entrada unipolar (es decir, con valores de verdad en el intervalo $[0,1]$ que en este caso corresponde a $[0,5]$ volts), de forma triangular con una frecuencia de 1 KHz. En dicha gráfica se observa que V_{out} es 5 V menos la señal de entrada V_{in} .

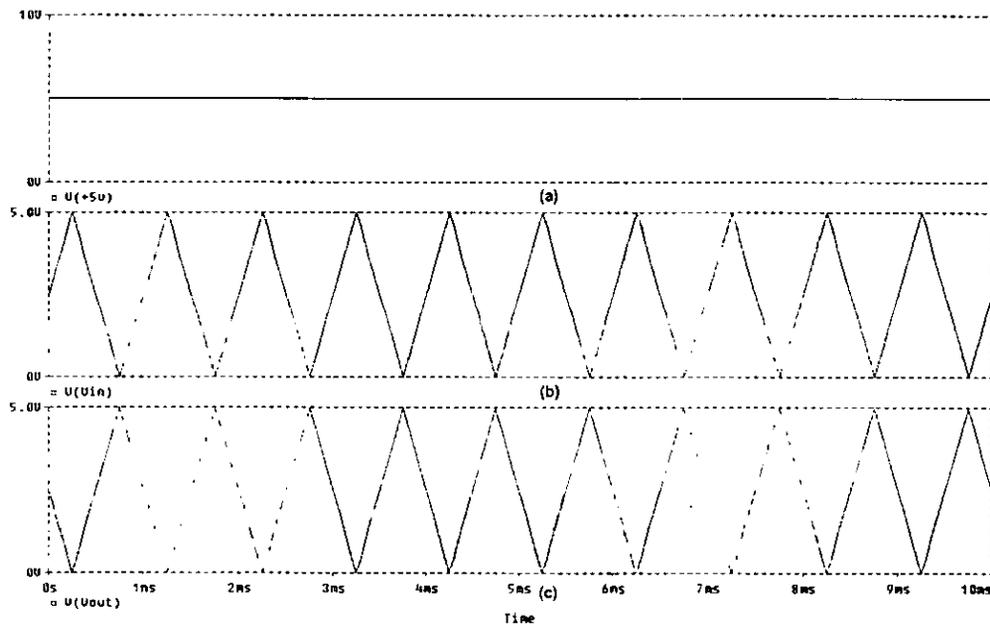


Figura 2.6 (a) + 5 V que corresponden, en este caso, a un valor de verdad de 1 para señales unipolares. (b) Señal de entrada (V_{in}) unipolar, de forma triangular y con una frecuencia de 1 KHz. (c) Señal de salida (V_{out}) del operador Inv para señales unipolares.

CAPÍTULO 3

NEURONA INTEGRADORA BORROSA TIPO DUBOIS

3.1 Teoría del Cálculo Integral Borroso de Dubois

Integración de mapeos borrosos

En esta parte se tratará con mapeos de conjuntos borrosos valuados de la línea real y particularmente se enfocará en mapeos de la línea real a el conjunto de los conjuntos borrosos convexos normales de la línea real. Estos mapeos se pueden ver también como relaciones borrosas. Usando el principio de extensión de Zadeh, se puede definir la integral de tales mapeos borrosos sobre un intervalo bien definido (no borroso). Prácticamente hablando, esta integral produce una superficie borrosa de un área borrosamente limitada.

Mediante el principio de extensión de Zadeh, es posible realizar operaciones aritméticas en conjuntos borrosos reales. En particular, la adición clásica se extiende a los números borrosos (por ej. conjuntos borrosos convexos normales de la línea real). El cálculo práctico de la adición extendida mostró ser fácil a través del uso de números borrosos representados analíticamente por una función de membresía dada y tres parámetros.

Ya que las sumas finitas de números borrosos son factibles, se puede considerar el problema de sumas infinitas de números borrosos, como es la integración. La interpretación es muy clara: Una **integración** puede usarse para evaluar, refiriéndose a un número borroso, la superficie de un área delimitada por una frontera (límite) mal definida. Se generalizará la *integral de Riemann sobre un intervalo cerrado (no borroso) de mapeos borrosos*.

Los subtemas que se abordarán en esta sección son: el concepto de mapeo borroso, la definición de la integral en sí, y sus propiedades.

Mapeos borrosos

Definición 1. Un **mapeo borroso** \tilde{f} de un conjunto U a un conjunto V es un mapeo de U al conjunto no vacío de conjuntos borrosos de V , es decir, $\tilde{P}(V) - \{\emptyset\}$.

En otras palabras a cada elemento de $u \in U$ corresponde un conjunto borroso $\tilde{f}(u)$ definido en V , cuya función de membresía es $\mu_{\tilde{f}(u)}$, y $\tilde{f}(u)$ es no vacío.

Otras definiciones equivalentes que existen en la literatura son:

- Un mapeo ordinario f_1 de U a V con un dominio borroso A y un intervalo borroso B , tal que

$$\mu_A \leq \mu_B \circ f_1 \quad (3.1)$$

- Un mapeo ordinario f_2 de $\tilde{\mathcal{P}}(U)$ a $\tilde{\mathcal{P}}(V)$. En otras palabras, es un mapeo con argumentos borrosos, el cual mapea en subconjuntos borrosos de V .
- Es un conjunto borroso F de V^U , es decir, es un conjunto borroso de mapeos ordinarios de U a V . Cada mapeo $f: U \rightarrow V$ tiene asignado un grado de membresía $\mu_F(f)$.

Aquí se considerará un mapeo mal-definido, en el sentido de que dado un preciso elemento $u \in U$, le corresponden más o menos varias posibles imágenes. Este es un multimapeo pesado (diferentes pesos).

Proposición 1. Un mapeo borroso es estrictamente equivalente a una relación borrosa R tal que

$$\forall u \in U, \exists v \in V, \mu_R(u, v) > 0$$

La **proyección** de \tilde{f} en U es $proj_U(\tilde{f}): \mu_{proj_U(\tilde{f})}(u) = \sup_{v \in V} \mu_{\tilde{f}(u)}(v)$. La proyección de \tilde{f} en V , $proj_V(\tilde{f})$, se define de manera similar. Nótese que el mapeo borroso y la relación borrosa son diferentes puntos de vista en la misma notación matemática.

Otra interesante observación viene del estudio de los conjuntos borrosos de mapeos: FSM's (por sus siglas en inglés Fuzzy sets of mappings). Estos conjuntos no son equivalentes a los mapeos borrosos.

Desde luego, una forma natural de asignar grados de membresía $\mu(u, v)$ a posibles imágenes $v \in V$ de $u \in U$, dado un FSM F , es definir $\mu(u, v) = \mu_F(f)$ siempre que $v = f(u)$. Note que $\mu(u, v)$ no es una definición única desde que pueden existir $f, g: U \rightarrow V$, $f \neq g$, tal que $v = f(u) = g(u)$ y un $\mu_F(f) \neq \mu_F(g)$.

Ejemplo: $U = V = \mathbb{R}$. F está definido como:

$u \rightarrow u$ con grado de membresía 0.7

$u \rightarrow u^2$ con grado de membresía 0.4

$\mu(1, 1)$ no está definido; ¿Es 0.7 o 0.4 o algún otro?

Consecuentemente, se necesita una regla combinatorial para calcular $\mu(u, v)$ fuera del conjunto: $\{\mu_F(f) \mid v = f(u)\}$. En un contexto posibilístico, es natural usar la operación supremo:

$$\mu(u, v) = Pos(v = f(u)) = \sup_{f: v = f(u)} \mu_F(f) \quad (3.2)$$

Sin embargo, en otros contextos se podrían usar otras reglas diferentes a esta. Ahora podríamos dirigirnos hacia el problema inverso, es decir, ¿Es posible

representar un mapeo borroso en términos de un FSM? Existe al menos una forma natural de derivar un FSM de un mapeo borroso.

Partiendo del mapeo borroso \tilde{f} de U a V para cualquier $\alpha \in]0,1]$ se puede definir un multimapeo ordinario \tilde{f}_α como sigue:

$$\forall u \in U \quad \tilde{f}_\alpha(u) = \left\{ v \mid \mu_{\tilde{f}(u)}(v) \geq \alpha \right\} \subseteq V$$

\tilde{f}_α es el corte - α de \tilde{f} , esto es,

$$\forall u, v, \mu_{\tilde{f}(u)}(v) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha \mu_{\tilde{f}_\alpha(u)}(v)$$

\tilde{f}_α puede verse como un preciso subconjunto de V^U , es decir, un conjunto de mapeos

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\alpha &= \left\{ f: U \rightarrow V \mid \forall u \in U, f(u) \in \tilde{f}_\alpha(u) \right\} \\ &= \left\{ f: U \rightarrow V \mid \inf_{u \in U} \mu_{\tilde{f}(u)}(f(u)) \geq \alpha \right\} \end{aligned}$$

\tilde{f}_α es el corte - α de un FSM generado por \tilde{f} , denotado $\gamma(\tilde{f})$, tal que

$$\forall f, \mu_{\gamma(\tilde{f})}(f) = \inf_{u \in U} \mu_{\tilde{f}(u)}(f(u)) \quad (3.3)$$

$\gamma(\tilde{f})$ puede verse como el conjunto borroso de mapeos los cuales son buenas y claras representaciones de $\tilde{f}: f$, es una buena representación de \tilde{f} siempre que para toda $u \in U$ $f(u)$ corresponda una $\tilde{f}(u)$ suficientemente.

Obviamente, si una relación borrosa no puede verse como un mapeo borroso ($\exists u. \mu_R(u, \cdot) = 0$), $\gamma(R) = \emptyset$.

Si se denota $ht(A)$ como la altura de un conjunto borroso A , $ht(A) = \sup \mu_A$, el mayor valor de membresía de un elemento en A , es fácil de ver que:

$$\begin{aligned} \forall \alpha > 0 \quad \text{Si } \forall u \in U \quad ht(\tilde{f}(u)) \geq \alpha, \text{ entonces } ht(\gamma(\tilde{f})) \geq \alpha, \\ \text{Si } \exists u \in U \quad ht(\tilde{f}(u)) < \alpha, \text{ entonces } ht(\gamma(\tilde{f})) < \alpha \end{aligned}$$

En otras palabras, $\gamma(\tilde{f})$ será un conjunto borroso normalizado ($\exists f: \mu_{\gamma(\tilde{f})}(f) = 1$) sólo si $\tilde{f}(u)$ es normalizado para toda u . Como una consecuencia, si se trata de recuperar a \tilde{f} conociendo a $\gamma(\tilde{f})$, mediante una regla combinacional, esto no siempre será posible. Sin embargo, con el fin de obtener esto, se debe definir una condición adicional la cual restrinja la Definición 1. Más específicamente, un mapeo f de U a V está definido para todos los elementos en U ; la definición de un mapeo borroso puede adaptarse para acercarse más al concepto de un conjunto borroso de mapeos, es decir mapeos *genuinos*. Estos mapeos serán conseguidos a través de las secciones de la relación borrosa original:

Definición 2. Una sección - α de una relación borrosa R es

$$s_\alpha R = \{ (u,v) \in U \times V \mid \mu_R(u,v) = \alpha \}$$

Definición 3. Un mapeo borroso fuerte \tilde{f} es una relación borrosa R no vacía tal que $\forall \alpha > 0$, $s_\alpha R$ es ya sea vacía o contiene un mapeo. "s $_\alpha R$ contiene un mapeo" puede expresarse como:

$$\exists f_\alpha : U \rightarrow V, \quad \forall u, \quad (u, f_\alpha(u)) \in s_\alpha R$$

Note que un mapeo borroso fuerte es un mapeo borroso: desde que $R \neq \emptyset$, $\exists \alpha > 0$ $s_\alpha R \neq \emptyset$ y así $\forall u$, $\tilde{f}(u)$ cuya función de membresía es $\mu_R(u, \cdot)$ es no vacía porque $\mu_R(u, f_\alpha(u)) = \alpha > 0$.

Proposición 2. Si \tilde{f} es un mapeo borroso fuerte, entonces

$$\forall u, v, \quad \mu_{\tilde{f}(u)}(v) = \sup_{f: v=f(u)} \mu_{\gamma(\tilde{f})}(f) = \sup_{f: v=f(u)} \inf_{\omega} \mu_{\tilde{f}(\omega)}(f(\omega)) \quad (3.4)$$

El concepto de mapeos borrosos fuertes es muy importante para la integración de mapeos borrosos continuos como se comprobará en las secciones posteriores.

Integral de un mapeo borroso real sobre un intervalo cerrado

Sea \tilde{f} un mapeo borroso real de un intervalo cerrado $I = [a,b]$

$$I \ni u \rightarrow \tilde{f}(u) \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$$

Para cualquier $u \in [a,b]$ el soporte de $\tilde{f}(u)$ denotado como $S(\tilde{f}(u))$, y definido como $\{v \mid \mu_{\tilde{f}(u)}(v) > 0\}$, se asume que está limitado. Denote J el conjunto de los mapeos integrables cuyo dominio es I . Para cualquier mapeo integrable $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_I f$ significa $\int_I f(s) ds$ (Integral de Riemann).

Definición 4. La **integral** del soporte limitado del mapeo borroso \tilde{f} sobre el intervalo cerrado I es un conjunto borroso (del tipo 1) de \mathbb{R} , denotado como $\int_I \tilde{f}$ y tal que

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad \mu_{\int_I \tilde{f}}(v) = \sup_{g \in J} \inf_{u \in I} \mu_{\tilde{f}(u)}(g(u)) \quad \text{bajo la restricción } v = \int_I g \quad (3.5)$$

Note que esta definición canónicamente extiende el mapeo $J \rightarrow \mathbb{R}$,

$$J \ni g \rightarrow \int_I g \in \mathbb{R},$$

en el sentido del principio de extensión de Zadeh el cual establece, en este caso, para un FSM $F \in \tilde{\mathcal{P}}(J)$:

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad \mu_{\int_I F}(v) = \sup_{g \in J} \mu_F(g) \quad \text{con } \int_I g = v$$

No es sino en la ecuación (3.5) donde el mapeo borroso se cambia por un FSM, de acuerdo con las secciones previas, esto es, $F = \gamma(\tilde{f})$.

Es claro que si \tilde{f} es un mapeo $I \rightarrow |\mathbb{R}$ en el sentido usual, entonces $\tilde{f} = f \in J$, entonces (3.5) da la integral usual $\int_I f$, esto es,

$$\mu_{\int_I \tilde{f}}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = \int_I f, \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Aumann [3] primero introdujo la integral de un mapeo de un conjunto valuado $\tilde{f}: |\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(|\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ (es decir, $\tilde{f}(u)$ es un subconjunto de la línea real) como:

$$\int_I \tilde{f} = \left\{ \int_I f \mid f \in \tilde{f} \cap J \right\} \quad (3.6)$$

Es fácil ver que si \tilde{f} es un preciso mapeo de un conjunto valuado, entonces (3.5) no es sino (3.6) en términos de funciones características. Es decir,

$$\inf_{u \in I} \mu_{\tilde{f}(u)}(g(u)) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } "\forall u, g(u) \in \tilde{f}(u)", \text{ esto es } g \in \tilde{f} \\ 0 & \text{de cualquier otra forma.} \end{cases}$$

y $v \in \int_I \tilde{f}$ si y sólo si $\exists g \in J \cap \tilde{f}, \int_I g = v$.

Note que la última equivalencia permanece sólo para mapeos de conjuntos valuados. Desde luego, en (3.5) el supremo no es necesariamente explícitamente obtenido por un mapeo $g \in J$. Cuando éste se obtiene para toda $v \in |\mathbb{R}$, puede comprobarse que, en términos de los cortes α ,

$$\forall \alpha \in]0,1] \left(\int_I \tilde{f}^\alpha = \int_I \tilde{f}_\alpha \right) \quad (3.7)$$

Definición 5. $\int_I \tilde{f}$ satisface la condición de conmutatividad siempre que (3.7) permanezca o sea válida.

De todos modos si esta condición permanece o no, siempre se tendrá que:

$$\int_I \tilde{f} = \bigcup_u \alpha \left(\int_I \tilde{f} \right)_\alpha = \bigcup_u \alpha \left(\int_I \tilde{f}_\alpha \right)$$

Algunas propiedades de la integral de mapeos borrosos

Linealidad

Primero se demostrará que la integral de un mapeo borroso es a menudo en alguna forma un operador lineal. Con el fin de hacer esto, debemos recordar que dado un conjunto U equipado con una operación $*$ bajo la cual U es cerrado, esta operación puede extenderse canónicamente a los conjuntos borrosos de U

mediante el principio de extensión. Sean A y B elementos de $\tilde{\mathcal{P}}(U)$, el $*$ extendido, denotado por \odot , aplicado en A y B produce $A \odot B = C$, $C \in \tilde{\mathcal{P}}(U)$, tal que

$$\mu_C(\omega) = \sup_{u,v:\omega=u*v} \min(\mu_A(u), \mu_B(v))$$

Más específicamente, la adición en $|\mathbb{R}$, $+$, puede extenderse como \oplus de la misma forma, así que se podrían sumar conjuntos borrosos de $|\mathbb{R}$. Es decir $(\tilde{\mathcal{P}}(|\mathbb{R}), \oplus)$ es un semigrupo conmutativo con identidad 0. Sin embargo, un conjunto borroso real A no tiene un opuesto, en el sentido de que $-A \oplus A \neq 0$, donde $\mu_{-A}(u) = \mu_A(-u)$, $\forall u \in |\mathbb{R}$.

Si \tilde{f} y \tilde{g} son mapeos borrosos: $U \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(|\mathbb{R})$ entonces $\tilde{f} \oplus \tilde{g}$ está definida como:

$$\forall u, (\tilde{f} \oplus \tilde{g})[u] = \tilde{f}(u) \oplus \tilde{g}(u)$$

Denotando a F, G, H como los conjuntos borrosos de mapeos asociados con \tilde{f} , \tilde{g} , $\tilde{f} \oplus \tilde{g}$, usando (3.3). $F \oplus G$ se define como:

$$\forall h \in |\mathbb{R}^{[a,b]}, \mu_{F \oplus G}(h) = \sup_{f,g:h=f+g} \min(\mu_F(f), \mu_G(g)) \quad (3.8)$$

Se tiene la siguiente propiedad:

Lema 1. $\gamma(\tilde{f} \oplus \tilde{g}) \supseteq \gamma(\tilde{f}) \oplus \gamma(\tilde{g})$ en el sentido de inclusión de Zadeh de conjuntos borrosos, donde \tilde{f} y \tilde{g} son mapeos borrosos: $U \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(|\mathbb{R})$.

Ahora se verá una propiedad de *quasilinealidad*.

Proposición 3. $\int_I (\tilde{f} \oplus \tilde{g}) \supseteq \left(\int_I \tilde{f} \right) \oplus \left(\int_I \tilde{g} \right)$ donde \tilde{f} y \tilde{g} son mapeos borrosos reales del intervalo cerrado I a $|\mathbb{R}$, con un soporte delimitado.

Esta proposición se puede mejorar bajo la condición de conmutatividad:

Proposición 4. Bajo la condición de conmutatividad para \int_I y \oplus ,

$$\int_I (\tilde{f} \oplus \tilde{g}) = \left(\int_I \tilde{f} \right) \oplus \left(\int_I \tilde{g} \right)$$

Aditividad con respecto a intervalos adyacentes.

Proposición 5. Sean I e I' dos intervalos adyacentes, digamos $I = [a,b]$, $I' = [b,c]$, y sea \tilde{f} un mapeo borroso real de $I \cup I'$ a $\tilde{\mathcal{P}}(|\mathbb{R})$. Entonces.

$$\int_I \tilde{f} \oplus \int_{I'} \tilde{f} = \int_{I \cup I'} \tilde{f}$$

Por lo tanto la integral de mapeos borrosos tiene propiedades de linealidad las cuales se extendieron de la linealidad de la integración de mapeos ordinarios. Este hecho hace pensar que la Definición 4 es conveniente.

Sin ninguna duda, otras propiedades de la integral de mapeo ordinario se pueden revisar para la integración de mapeos borrosos. Sin embargo, después de extender una propiedad debido a Aumann, se prefiere proceder con las consideraciones relacionadas con el cálculo práctico de una integral.

Convexidad

En su trabajo de funciones de conjuntos valuados, Aumann notó que si \bar{f} es un mapeo de un conjunto valuado : $I \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, (más generalmente, $\bar{f}(u)$ puede ser un subconjunto de un espacio Euclidiano), entonces $\int_I \bar{f}$ es convexa. Este resultado será extendido a mapeos borroso.

Definición 6. Un conjunto borroso A de un universo U el cual es un espacio Euclidiano (ej. \mathbb{R}^n) se dice que es convexo si y sólo si

$$\forall x, \forall y, \forall \lambda \in [0,1], \mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

A es convexo si y sólo si sus cortes α son convexos.

Proposición 6. Para cualquier mapeo borroso \tilde{f} , $\int_I \tilde{f}$ es un conjunto borroso convexo de \mathbb{R} , bajo la condición conmutativa.

Mapeos borrosos continuos

Ahora se verá una clase más restringida de los mapeos borrosos reales los cuales son de mayor interés para el punto de vista del cálculo, por ejemplo para determinar la medida o el tamaño borroso de áreas borrosamente limitadas.

Por ahora, podríamos llamar una *curva λ de un mapeo borroso* $\tilde{f} : I [a,b] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, a cualquier mapeo contenido en una sección λ de \tilde{f} . $\lambda > 0$.

Más específicamente, si \tilde{f} es un mapeo borroso fuerte, y si $s_\lambda \tilde{f}$ es una sección de \tilde{f} no vacía, entonces \tilde{f} tiene curvas λ ; si \tilde{f} es no fuerte, este podría no tener curvas λ . Un mapeo borroso que tenga 1 curva será llamado *mapeo borroso normalizado*.

Definición 7. Un mapeo borroso continuo es un mapeo borroso \tilde{f} tal que $\mu_{\tilde{f}(u)}(v)$ es continua para toda $u \in I \subset \mathbb{R}$ y para toda $v \in \mathbb{R}$.

Un mapeo borroso normalizado continuo es un mapeo borroso fuerte de acuerdo con la Definición 3. Es necesario adelantar el concepto de un intervalo borroso el cual es un conjunto borroso normalizado convexo de \mathbb{R} cuya función de membresía es continua. Un intervalo borroso cuyo corte 1 se reduce a un solo

número m el cual será llamado *número borroso* \tilde{m} cuando $\mu_{\tilde{m}}$ sea estrictamente incrementado (respectivamente decrementado) en $(-\infty, m] \cap S(\tilde{m})$ (resp. $[m, +\infty) \cap S(\tilde{m})$).

Existe una clase especial de mapeos borrosos continuos, aquellos tales que $\forall u \in I$, $\tilde{f}(u)$ es un intervalo borroso. Tales mapeos son un buen modelo para la representación de correspondencias mal-definidas las cuales mapean de cualquier $u \in I$ a un punto difícilmente conocido dentro de un particular grupo de números reales. Estos serán llamados FIVM's (Fuzzy interval valued mappings o mapeos valuados en un intervalo borroso).

Un FIVM \tilde{f} que tiene al menos una curva f_1 . Obviamente, para $\omega = \int_I f_1$ se tiene $\mu_{\int_I \tilde{f}}(\omega) = 1$, usando la definición de $\int_I \tilde{f}$. De manera más general, para $\lambda < 1$ se tiene:

Proposición 7. Sea f_λ una curva λ continua de un FIVM \tilde{f} , entonces

$$\mu_{\int_I \tilde{f}}\left(\int_I f_\lambda\right) = \lambda$$

Ahora se puede demostrar que si \tilde{f} es un FIVM, $\int_I \tilde{f}$ se puede caracterizar mediante la integración de las curvas λ continuas sobre I , de acuerdo con la proposición anterior.

Proposición 8. Si \tilde{f} es un FIVM, entonces $\forall \omega \in S(\int_I \tilde{f})$, $\exists f_\lambda \in s_\lambda \tilde{f}$, f_λ es continua y $\int_I f_\lambda = \omega$.

En el resto de esta sección se mostrará que dado un mapeo borroso continuo de un intervalo I a $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, su integral sobre I es igual a la integral sobre I de un (posiblemente no-normalizado) FIVM.

Proposición 9. Sea \tilde{f} un mapeo borroso: $I \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$. Denote

$$h(\tilde{f}) = \inf_{u \in I} \sup_{v \in \mathbb{R}} \mu_{\tilde{f}(u)}(v)$$

Sea \hat{f} definido como:

$$\mu_{\hat{f}(u)} = \min(h(\tilde{f}), \mu_{\tilde{f}(u)});$$

entonces $\int_I \hat{f} = \int_I \tilde{f}$.

La proposición 9 dice que si $ht(\tilde{f}(u))$ no es constante, entonces el mapeo \hat{f} obtenido por el truncamiento de todas las $\tilde{f}(u)$ tales que $ht(\tilde{f}(u)) > b(\tilde{f})$ es equivalente a \tilde{f} para propósitos de integración sobre I (ver figura 3.1). \hat{f} es un mapeo borroso fuerte.

Hasta ahora, se puede restringir este estudio a mapeos borrosos tales que $Proj_{[a,b]}(\tilde{f})$ es una constante de mapeo $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$; por convención, $\forall u \text{ ht}(\tilde{f}(u)) = 1$ es decir, \tilde{f} es normalizado.

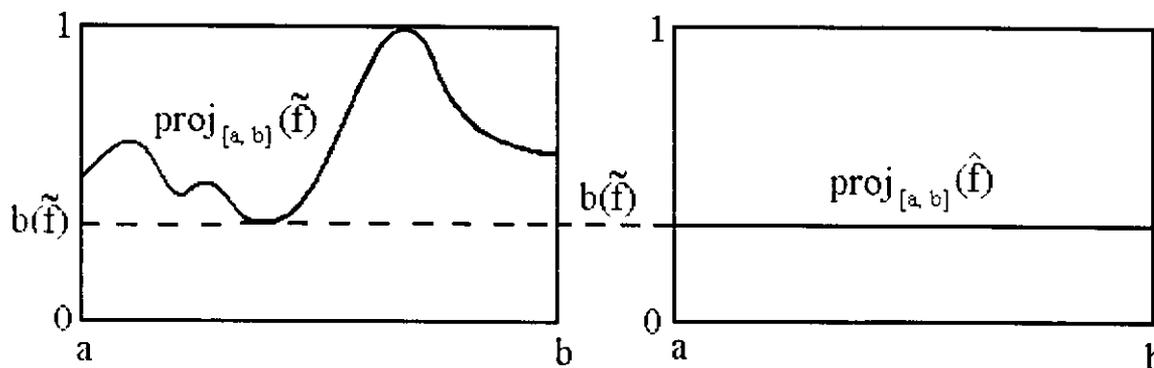


Figura 3.1

Proposición 10. Sea \tilde{f} un mapeo borroso continuo normalizado y f_α, f_β dos curvas de nivel de \tilde{f} tales que $\omega_\alpha = \int_I f_\alpha \leq \omega_\beta = \int_I f_\beta$. Entonces

$$\forall \omega \in [\omega_\alpha, \omega_\beta], \quad \mu_{\int_I \tilde{f}}(\omega) \geq \min(\alpha, \beta)$$

La proposición 10 sostiene que siempre que dos curvas αf_u y βg_u sean tales que $f_u < g_u$. Si $\forall u, \mu_{\tilde{f}(u)}(v) \leq \alpha$ para toda $v \in [f_u(u), g_u(u)]$ (hay un "canal" entre f_u y g_u), entonces el mapeo borroso \tilde{g} se define como:

$$\mu_{\tilde{g}(u)}(v) = \begin{cases} \alpha & \forall (u,v) \text{ tal que } v \in [f_u(u), g_u(u)] \\ \mu_{\tilde{f}(u)}(v) & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}$$

y se tiene que $\int_I \tilde{f} = \int_I \tilde{g}$.

En efecto, desde que $\forall \omega \in [\int_I f_u, \int_I g_u], \mu_{\int_I \tilde{f}}(\omega) \geq \alpha$, ningún mapeo f tal que $f_u < f < g_u$ es útil para el cálculo de $\int_I \tilde{f}$.

Así de esta forma, si hay un canal a través de \tilde{f} , este se puede "llenar" sin alterar $\int_I \tilde{f}$. Además si hay un mínimo local (\bar{u}, \bar{v}) en \tilde{f} , entonces hay un subsegmento I' tal que \tilde{f} restringido a I' tiene un canal en éste, el cual se puede llenar para calcular $\int_{I'} \tilde{f}$. Sin embargo debido a la propiedad de aditividad (Proposición 5), éste se puede llenar en la misma forma que para calcular $\int_I \tilde{f}$.

Definición 8. Sea A un conjunto borroso de \mathbb{R} . Su envoltura convexa $c(A)$ se define equivalentemente como sigue:

- $c(A)$ es el menor conjunto borroso convexo que contiene a A (en el sentido de inclusión de Zadeh),
- $\mu_{c(A)}(\omega) = \sup_{u,v:\omega \in [u,v]} \min(\mu_A(u), \mu_A(v)) = \min(\sup_{u \leq \omega} \mu_A(u), \sup_{u \geq \omega} \mu_A(u))$,
- $c(A)$ es el conjunto borroso cuyos cortes α son las envolventes convexas de los cortes α de A .

$c(A)$ se construye simplemente llenando los espacios en A hacia un valor de membresía deseable, como se muestra en la figura 3.2. Más específicamente, un conjunto borroso continuo normalizado A es modificado en un intervalo borroso.

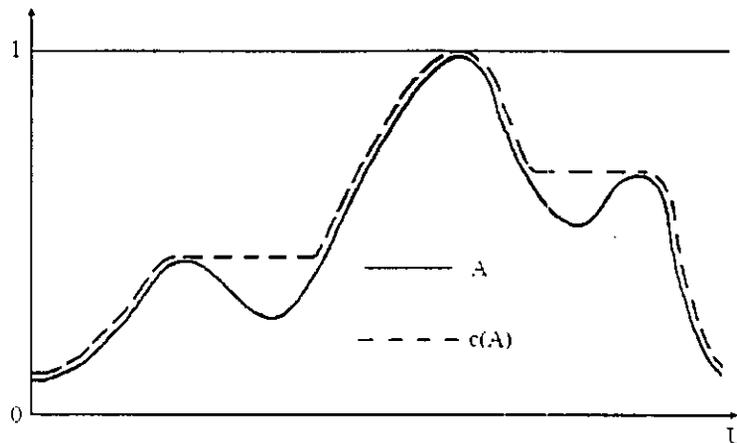


Figura 3.2

La consecuencia de la proposición 10 para el cálculo de $\int_I \tilde{f}$ es que \tilde{f} puede cambiarse por \tilde{g} tal que $\forall u, \tilde{g}(u) = c(\tilde{f}(u))$ mientras que se mantiene que:

$$\int_I \tilde{g} = \int_I \tilde{f}.$$

cuando \tilde{f} es un mapeo borroso continuo.

Uniendo las proposiciones 9 y 10, cualquier mapeo borroso continuo puede cambiarse a través de los procesos de truncamiento y convexificación por un FIVM fuerte equivalente para propósitos de integración.

Nota: Puesto que muchos resultados válidos para mapeos continuos, permanecen válidos para secciones continuas para la integración, no hay que dudar que se puede llevar el presente estudio a secciones continuas de mapeos borrosos.

Antiderivada de un mapeo valuado de un intervalo borroso

Establecimiento del concepto.

Definición 9. Una antiderivada de un FIVM \tilde{f} definido en un intervalo I es un mapeo borroso \tilde{F} definido en I , y es tal que

$$\forall u \in I, \tilde{F}(u) = \int_a^u \tilde{f} \text{ para alguna } a \in I$$

Esta definición tiene sentido para \tilde{f} si es cualquier mapeo borroso; sin embargo, en este caso la atención se enfocará en mapeos borrosos continuos y consecuentemente en FIVM's de acuerdo con la sección anterior.

\tilde{F} puede obtenerse de la siguiente forma:

- Si la sección λ superior $s_\lambda^+ \tilde{f}$ contiene sólo una curva λ , f_λ^+ entonces $\int_a^u f_\lambda^+ = \tilde{F}_\lambda(u)$, $\forall u \in I$ define la curva λ superior de \tilde{F} ,
- Si $s_\lambda^+ \tilde{f}$ contiene varias curvas λ , entonces se define:

$$\forall u \in I \quad n_\lambda(u) = \int_a^u m_\lambda \text{ donde } m_\lambda = \inf \{ f \in \mathbb{R}^1, f \subset s_\lambda^+ \tilde{f} \},$$

$$N_\lambda(u) = \int_a^u M_\lambda \text{ donde } M_\lambda = \sup \{ f \in \mathbb{R}^1, f \subset s_\lambda^+ \tilde{f} \}$$

La sección λ superior de \tilde{F} se define entonces como:

$$s_\lambda^+ \tilde{F} = \{ f \in \mathbb{R}^1 \mid n_\lambda \leq f \leq N_\lambda \}$$

y de manera similar para las secciones λ inferiores. Esta construcción de la antiderivada de \tilde{f} fuera de sus secciones λ se basa en las proposiciones 7 y 8.

Es fácil ver que cuando \tilde{f} es continuo, $\tilde{F}(u)$ es convexo y continuo para toda $u \in I$, y (n_λ, N_λ) (posiblemente mapeos iguales) son también continuos para toda $\lambda \in]0,1[$. Por lo tanto, \tilde{F} es un FIVM siempre que \tilde{f} sea continua.

Mapeos borrosos LR para el cálculo fácil de integrales.

Definición 10. Un mapeo borroso LR es un mapeo borroso tal que $\forall u, \tilde{f}(u)$ es un número borroso tipo LR. es decir, $\exists L, R: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0,1], \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, a, b$ mapean de I a \mathbb{R}^+ tales que:

$$\forall u, \mu_{\tilde{f}(u)}(v) = \begin{cases} L\left(\frac{\varphi(u) - v}{a(u)}\right) & \forall v \leq \varphi(u), \\ R\left(\frac{v - \varphi(u)}{b(u)}\right) & \forall v \geq \varphi(u), \end{cases}$$

donde L y R son tales que $L(0) = R(0) = 1, L(1) = R(1) = 0$ y decrecen, a y b son mapeos positivos.

L y R son llamados mapeos de referencia, a y b mapeos de extensión, φ es el mapeo fuerte de \tilde{f} ; es una curva 1. \tilde{f} también se denota como :

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= (\varphi, a, b)_{LR} \\ \tilde{f}(u) &= (\varphi(u), a(u), b(u))_{LR} \end{aligned}$$

Se asume que \tilde{f} es continuo, es decir, L, R, φ, a, b también lo son.

La curva λ superior de \tilde{f} es $f_{\lambda}^+(u) = \varphi(u) + R^{-1}(\lambda)b(u)$.

La curva λ inferior de \tilde{f} es $f_{\lambda}^-(u) = \varphi(u) - L^{-1}(\lambda)a(u)$. (ver fig. 3.3)

Muchos mapeos que involucran parámetros borrosos pueden escribirse con una representación semejante a la anterior. Por ejemplo:

$$\tilde{f}(u) = Mu \oplus N$$

donde M y N son números borrosos LR y $u > 0$, denotando a $M = (m, \underline{m}, \bar{m})_{LR}, N = (n, \underline{n}, \bar{n})_{LR},$

$$\tilde{f}(u) = (mu + n, \underline{m}u + \underline{n}, \bar{m}u + \bar{n})_{LR}$$

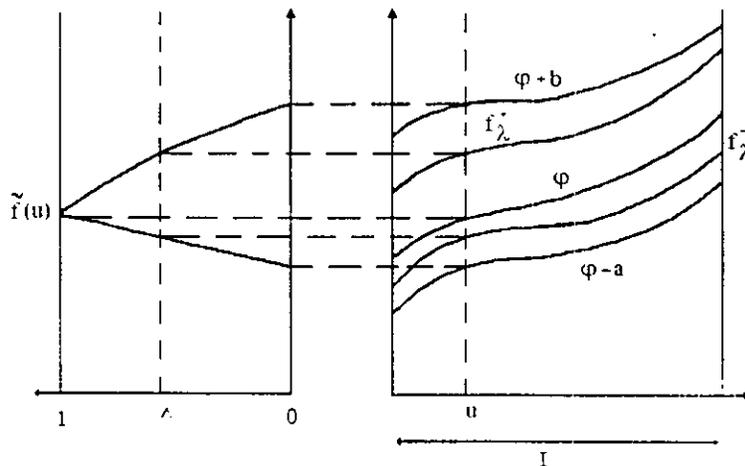


Figura 3.3

La representación LR hace el cálculo de las integrales de FIVM's muy fácil. Es decir, integrando las curvas λ en I de acuerdo con las proposiciones 7 y 8 se obtiene:

$$\int_I f_{\lambda}^- = \int_I \varphi - L^{-1}(\lambda) \int_I a = \omega$$

de donde

$$\lambda = L \left(\frac{\omega - \int_I \varphi}{\int_I a} \right)$$

Así de esta forma es fácil comprobar que

$$\int_I \tilde{f} = \left(\int_I \varphi, \int_I a, \int_I b \right)_{LR}$$

Una antiderivada de \tilde{f} se obtiene directamente para $x \geq u$ mediante :

$$\forall u, x \in I \quad \int_u^x \tilde{f} = (\Phi(x) - \Phi(u), A(x) - A(u), B(x) - B(u))_{LR} \quad (3.9)$$

que es aún un mapeo borroso LR; A, B, Φ son las antiderivadas de a, b y φ respectivamente.

Proposición 11. Sea \tilde{F} una antiderivada de \tilde{f} , entonces la usual identidad $\int_u^v \tilde{f} = \tilde{F}(v) \ominus \tilde{F}(u)$, generalmente no se mantiene.

A pesar de la Proposición 11, (3.9) hace el cálculo de $\int_I \tilde{f}$, donde \tilde{f} es del tipo LR, posible a partir del conocimiento de la antiderivada de tres mapeos ordinarios. Este punto es crucial para la aplicación práctica de la integración de mapeos borrosos.

Otra identidad importante es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\Sigma}_n)_\lambda = \left[\int_u^v f_{\lambda}^-, \int_u^v f_{\lambda}^- \right] = \int_u^v (\tilde{f})_\lambda = \left(\int_u^v \tilde{f} \right) \quad (3.10)$$

En otras palabras, los cortes λ de la suma de Riemann converge a los cortes- λ de $\int_I \tilde{f}$; más simplifcadamente se puede escribir $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Sigma}_n = \int_I \tilde{f}$, definiendo la convergencia de una secuencia de números borrosos $\tilde{\Sigma}_n$ por la convergencia de sus cortes λ .

3.2 Modelo de neurona para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois [1,11,12]

Una neurona se puede considerar como una unidad de proceso de señales. En la figura 3.4 se muestra un modelo de una neurona donde se identifican cuatro elementos básicos:

- 1) Un **conjunto de sinapsis**, cada una de las cuales se caracteriza mediante un peso propio. Específicamente, una señal x_j a la entrada de la sinapsis j conectada a la neurona k se multiplica por el peso sináptico w_{kj} . El primer subíndice se refiere a la neurona en cuestión y el segundo subíndice a la terminal de entrada de la sinapsis a la cual se refiere el peso; la notación inversa de los subíndices también se utiliza en la literatura. El peso w_{kj} es positivo si la sinapsis asociada es excitatoria, es negativo si la sinapsis es inhibitoria.
- 2) Un **sumador** para adicionar las señales de entrada, previamente multiplicadas por los respectivos pesos de las sinapsis de la neurona. Dichas operaciones constituyen combinaciones lineales.
- 3) Un **integrador** para obtener la integral de la suma de las señales de entrada con respecto al tiempo.
- 4) Una **función de activación** para limitar la amplitud de la salida de la neurona. En la literatura a la función de activación también se le conoce como función aplastante ya que aplasta (limita) el intervalo de amplitud permisible de la señal de salida a algún valor finito. Típicamente, el intervalo de la amplitud de la señal de salida de una neurona se normaliza a un intervalo cerrado unitario (unipolar) $[0,1]$.

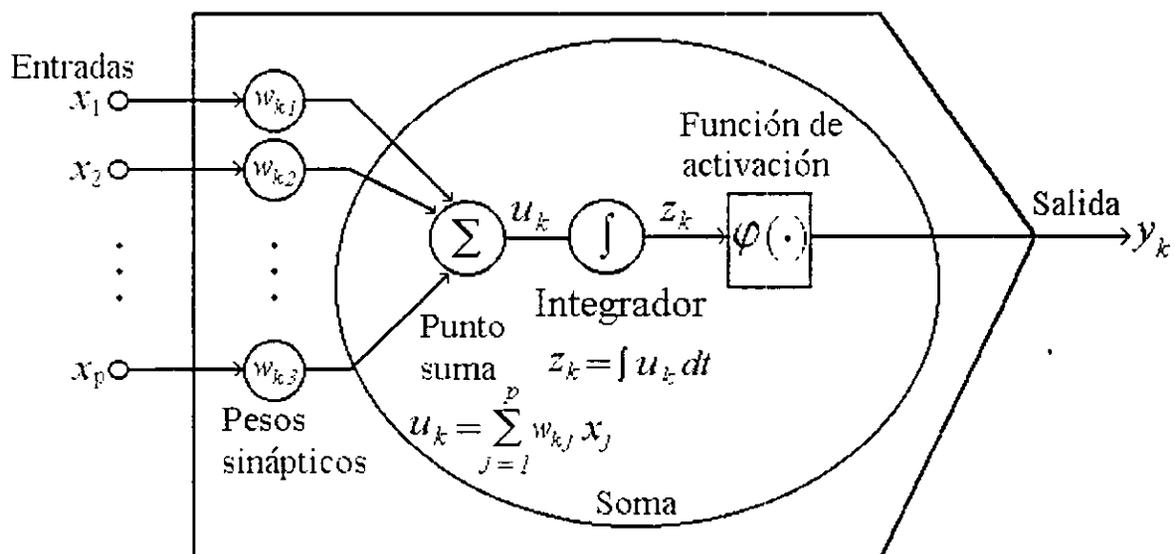


Figura 3.4

3.3 Modelo electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois

De acuerdo con lo visto en la sección 3.2 y con el diagrama de una neurona de la figura 3.4, lo que se requiere para modelar una neurona es un sumador, un integrador y una función de activación que producirá la respuesta de la neurona.

Para obtener el modelo electrónico de la neurona borrosa, se considerará que las entradas son señales clásicas y que ya están multiplicadas por los respectivos pesos ($V_{in}(t) = w(t) \cdot x(t)$).

Una neurona integradora borrosa realiza procesos neuronales borrosos y su respuesta es borrosa a diferencia de las neuronas artificiales convencionales [12]. Para obtener un procesador neuronal borroso y una respuesta borrosa, los elementos que llevan a cabo el proceso neuronal dentro de la neurona deben ser borrosos, en este caso el sumador y el integrador.

Para obtener el modelo electrónico de un sumador borroso, se partirá de la definición de una suma extendida (XOR):

$$X \oplus Y = \overline{(X \cdot Y)} \cdot (Y + X) \quad (3.11)$$
$$\text{CARRY} = X \cdot Y$$

en donde se puede observar que una suma extendida se puede expresar en función de tres operaciones lógicas básicas como son la conjunción, la intersección y el complemento. Expresando la suma con carry mediante compuertas lógicas se tiene el diagrama de la figura 3.5.

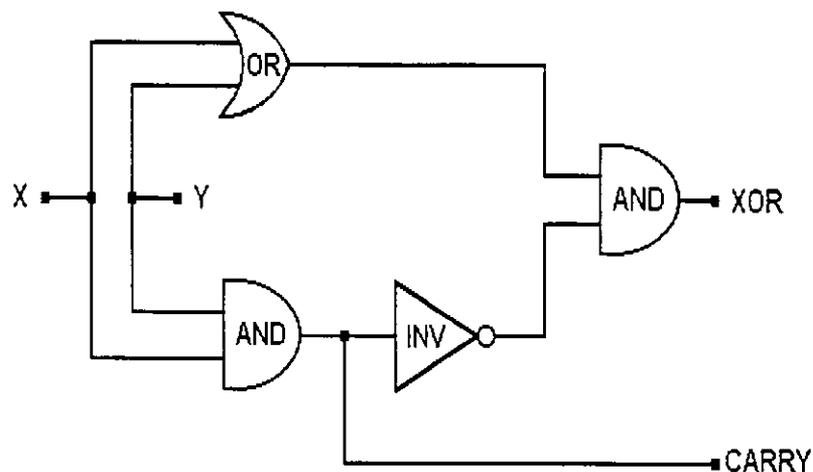


Figura 3.5

En la lógica borrosa la ecuación (3.11) se expresaría como:

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min(1 - \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \max(\mu_A(x), \mu_B(x))) \quad \forall x \in U \quad (3.12)$$

donde A y B son conjuntos borrosos del universo del discurso U.

En la ecuación (3.12) no se define el carry debido a que las señales de entrada a esta neurona integradora borrosa son señales analógicas y no señales binarias y por lo tanto no es necesario obtener el carry de la suma borrosa extendida.

De acuerdo con lo anterior y utilizando los operadores Max, Min e Inv, es como se diseñó el circuito electrónico de un sumador borroso extendido (XOR borrosa) el cual se muestra en la figura 3.6 denominado como bloque SBE (Sumador borroso extendido).

Cabe señalar que para acoplar impedancias entre los circuitos Max, Min e Inv y entre los demás bloques se emplea una resistencia de 10 MΩ en cada caso.

Posteriormente, basándose en la teoría del cálculo integral borroso de Dubois para obtener el modelo electrónico de un integrador borroso, se tiene la definición 4 de la integral de un mapeo borroso sobre un intervalo cerrado, sin embargo como no se puede obtener el modelo electrónico directamente de esta definición, se tiene que hacer uso de las herramientas matemáticas que propone Dubois para el cálculo fácil de integrales como son las curvas λ . Lo que propone Dubois es obtener primero los cortes λ del mapeo borroso \tilde{f} (que en este caso es el resultado de la suma borrosa extendida de las señales de entrada de la neurona) y de acuerdo con la ecuación (3.10), la suma infinita de las integrales de cada corte λ del mapeo borroso \tilde{f} converge a la integral del mapeo borroso \tilde{f} en un intervalo cerrado I . Es decir, primero se obtienen las curvas λ del mapeo borroso \tilde{f} y luego se integra cada una de estas curvas para así obtener la integral borrosa del mapeo borroso \tilde{f} .

Para obtener las curvas λ se diseñó un circuito electrónico que realiza esta función utilizando un comparador LM311 el cual compara la salida del sumador borroso extendido con un valor de umbral, que en este caso, es una señal triangular (TRIANG1) cuya frecuencia es diez veces la frecuencia de la señal de salida de la XOR borrosa (es decir, 10 KHz) y su amplitud es de 0 a 1 (para señales unipolares), en este caso de 0 a 5 Volts, como se muestra en la primera etapa del bloque IBD (Integrador borroso tipo Dubois) de la figura 3.6.

Cuando la señal de salida de la XOR borrosa (entrada no inversora) es mayor que el valor de la señal triangular (entrada inversora) en un instante dado, a la salida del comparador, donde se tiene un transistor que funciona como un interruptor, el interruptor se abre y la salida del comparador se eleva hasta +5 V, cuando la señal de salida de la XOR borrosa es menor que la señal triangular, el interruptor se cierra y a la salida del comparador se obtienen 0 V, de esta forma se generan los cortes λ que posteriormente se integran mediante un amplificador operacional LF353 en configuración de un integrador de ganancia unitaria y con una $\tau = RC$, como la salida de este integrador se define con la siguiente ecuación:

$$V_{int}(t) = -\frac{1}{RC} \int V_{in}(t) dt \quad (3.13)$$

Después del integrador se conecta un amplificador operacional LF353 en configuración de un inversor de ganancia unitaria como se puede observar en la última etapa del bloque IBD de la figura 3.6.

Una vez diseñado el Integrador borroso tipo Dubois, se tiene que generar la respuesta de la neurona borrosa mediante una función de activación y un valor de umbral determinado. Para obtener la respuesta de la neurona borrosa, la cual debido a la función de activación (tipo escalón), son pulsos de una misma amplitud y proporcionales en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del Integrador borroso tipo Dubois, se diseñó un circuito electrónico que realiza esta función utilizando un comparador LM311 el cual compara la salida del integrador borroso con una señal triangular (TRIANG2) cuya frecuencia es diez veces la frecuencia de la señal de salida del Integrador borroso tipo Dubois (es decir, 10 KHz) y su amplitud es de 0 a 5 Volts, como se muestra en el bloque FA (Función de Activación) de la figura 3.6.

Cuando la señal de salida del integrador borroso (entrada no inversora) es mayor que el valor de la señal triangular (entrada inversora) en un instante dado, a la salida del comparador, donde se tiene un transistor que funciona como un interruptor, éste se abre y la salida del comparador se eleva hasta +5 V, cuando la señal de salida del integrador borroso es menor que la señal triangular, el interruptor se cierra y a la salida del comparador se obtienen 0 V, de esta forma se genera la respuesta de la neurona borrosa. Esta respuesta de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois (en este caso constituida por pulsos), se analiza y compara con la respuesta de la neurona borrosa que se presenta en el siguiente capítulo.

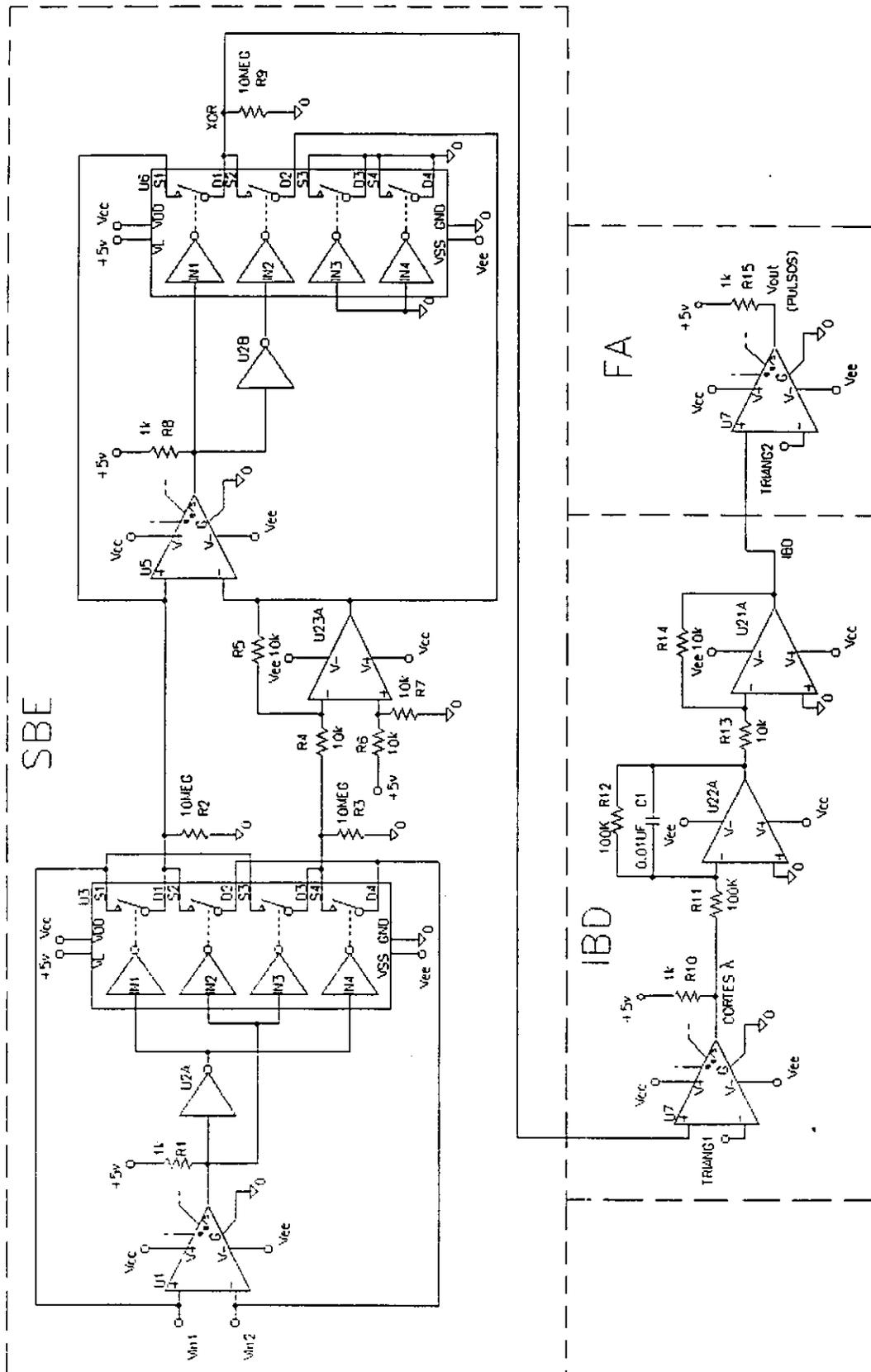


Figura 3.6 Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois

En las figuras 3.7 a 3.10 se muestran las gráficas obtenidas en cada bloque de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois para dos simulaciones distintas.

En las gráficas (a) y (b) de la figura 3.7 se observan las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} para la primera simulación, son señales senoidales, defasadas 180° con una amplitud pico a pico de 5 V y una frecuencia de 1 KHz. En la figura 3.8 aparecen las siguientes gráficas : (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Señal triangular (TRIANG1), que es el valor de umbral para generar los cortes λ , (c) Cortes λ (CL), (d) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (e) Señal triangular (TRIANG2), que es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa, y (f) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) que es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

En la gráfica (a) de la figura 3.8 de la suma borrosa extendida (XOR) se puede apreciar claramente la diferencia entre realizar una suma borrosa y una no borrosa, es decir, la suma no borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} es cinco volts para todo tiempo t , en cambio la suma borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} no es cinco volts para todo tiempo t , como se muestra en la figura 3.8 (a). Por lo tanto se puede decir que en la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se llevan a cabo procesos neuronales borrosos, mismos que producen un resultado borroso.

En la figura 3.8 (b) se muestra una señal triangular que se utiliza como valor de umbral para generar los cortes λ (fig. 3.8 (c)) correspondientes a la suma borrosa de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.7 (a) y (b). Como se puede observar en la figura 3.8 (c) los cortes λ son todos de una misma amplitud (normalizados a un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$, que en este caso corresponde a $[0,5]$ Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso (XOR). Analizando la gráfica (c) de la figura 3.8 en el intervalo de 0.1 a 0.4 ms, se puede observar que los cortes λ son de mayor duración y frecuencia que en el intervalo de 0.4 a 0.6 ms, esto se debe a que en el intervalo de 0.1 a 0.4 ms la amplitud de la señal de salida de la suma borrosa (XOR) es mayor que la amplitud en el intervalo de 0.4 a 0.6 ms, por lo tanto los cortes λ son proporcionales en duración y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso extendido (fig. 3.8 (a)) como se había mencionado anteriormente.

Una vez obtenidos los cortes λ , estos se integraron para obtener la señal de salida del IBD (fig. 3.8 (d)). La integral borrosa tipo Dubois de la señal de salida del sumador borroso, tiene una forma ascendente al inicio de la gráfica debido al capacitor C1 del circuito electrónico de la figura 3.6. Esta integral borrosa (fig. 3.8 (d)), es proporcional en amplitud a los cortes λ .

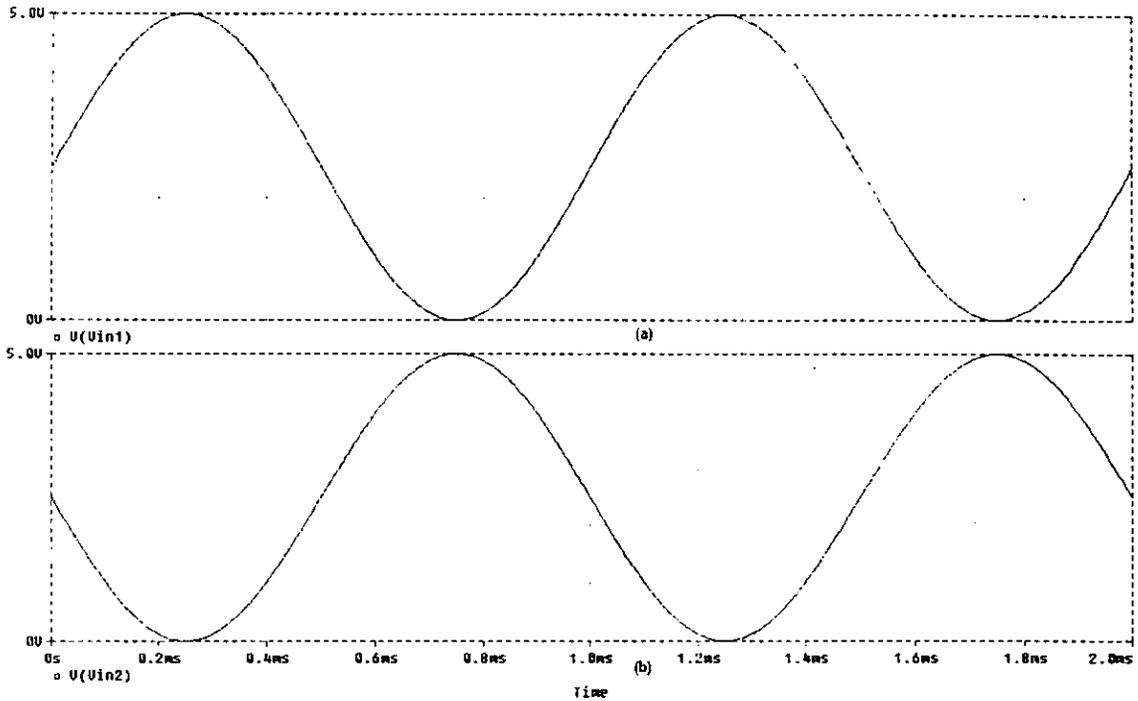


Figura 3.7 (a) Señal de entrada (V_{in1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° . (b) Señal de entrada (V_{in2}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 180° .

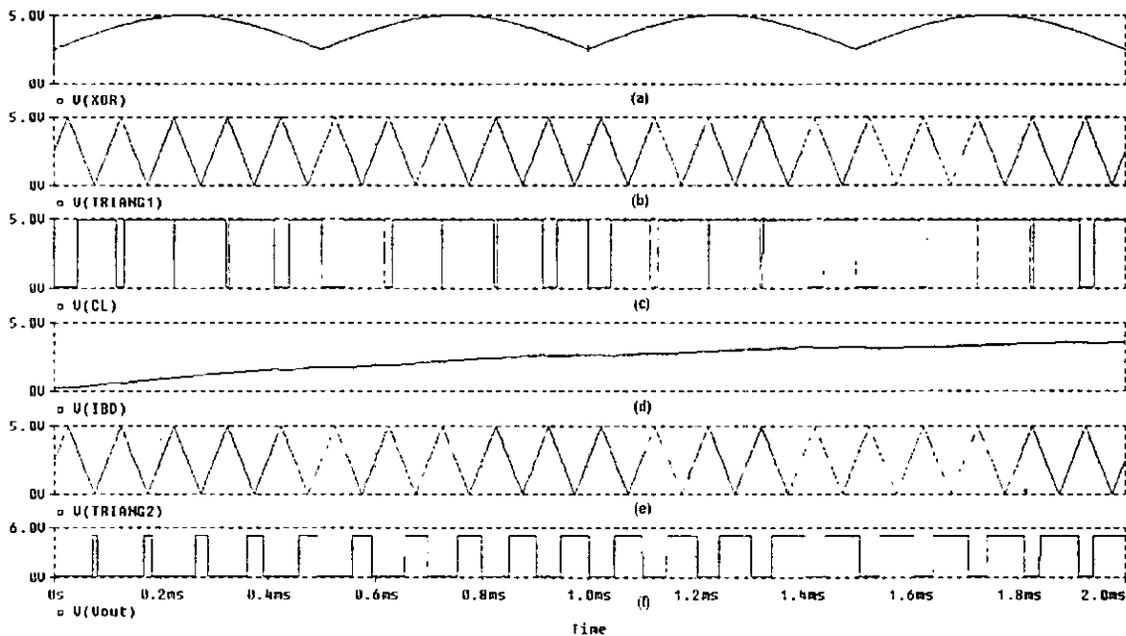


Figura 3.8 (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Señal triangular (TRIANG1) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, es el valor de umbral para generar los cortes λ , (c) Cortes λ (CL), (d) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (e) Señal triangular (TRIANG2) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa, (f) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

La gráfica (e) de la figura 3.8 muestra una señal triangular que es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) de la figura 3.8 (f), a partir de la integral borrosa (IBD) de la figura 3.8 (d). En la figura 3.8 (f) se muestra la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois, donde se puede observar que la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) son pulsos de la misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso es de [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Dubois (IBD). En el intervalo de 0 a 0.4 ms de la figura 3.8 (f) se observa que los pulsos (respuesta de la neurona borrosa) son de menor frecuencia y duración que los pulsos en el intervalo de 1.6 a 2 ms, estos pulsos corresponden de manera proporcional en duración y frecuencia a la amplitud de la integral borrosa de la figura 3.8 (d), en el intervalo de 0 a 0.4 ms la amplitud de la integral borrosa es menor que en el intervalo de 1.6 a 2 ms.

Los pulsos (V_{out}) de la figura 3.8 (f) son la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois a los estímulos externos (señales de entrada) V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.7 (a) y (b).

En la segunda simulación (figuras 3.9 y 3.10), la señal de entrada V_{in1} (figura 3.9 (a)) es una señal triangular con una amplitud pico a pico de 5 V y una frecuencia de 1 KHz, y la señal de entrada V_{in2} (figura 3.9 (b)) es una señal cuadrada con una amplitud de 5 V, una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1 ms. Las señales obtenidas en cada bloque de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois para las señales de entrada anteriores se muestran en la figura 3.10 donde se pueden observar las siguientes gráficas : (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Señal triangular (TRIANG1), que es el valor de umbral para generar los cortes λ , (c) Cortes λ (CL), (d) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (e) Señal triangular (TRIANG2), que es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa, y (f) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) que es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

En la gráfica (a) de la figura 3.10 se puede apreciar la suma borrosa extendida (XOR) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.9 (a) y (b). En 0.5 ms la amplitud de V_{in1} es de 2.5 V y de V_{in2} es de 5 V, por lo tanto la suma no borrosa de estas dos señales en 0.5 ms es 7.5 volts, en cambio la suma borrosa es 2.5 V como se puede observar en la fig. 3.10 (a). Por lo tanto se puede decir que el primer proceso neuronal borroso que se lleva a cabo en la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois es la suma borrosa extendida, misma que produce un resultado borroso.

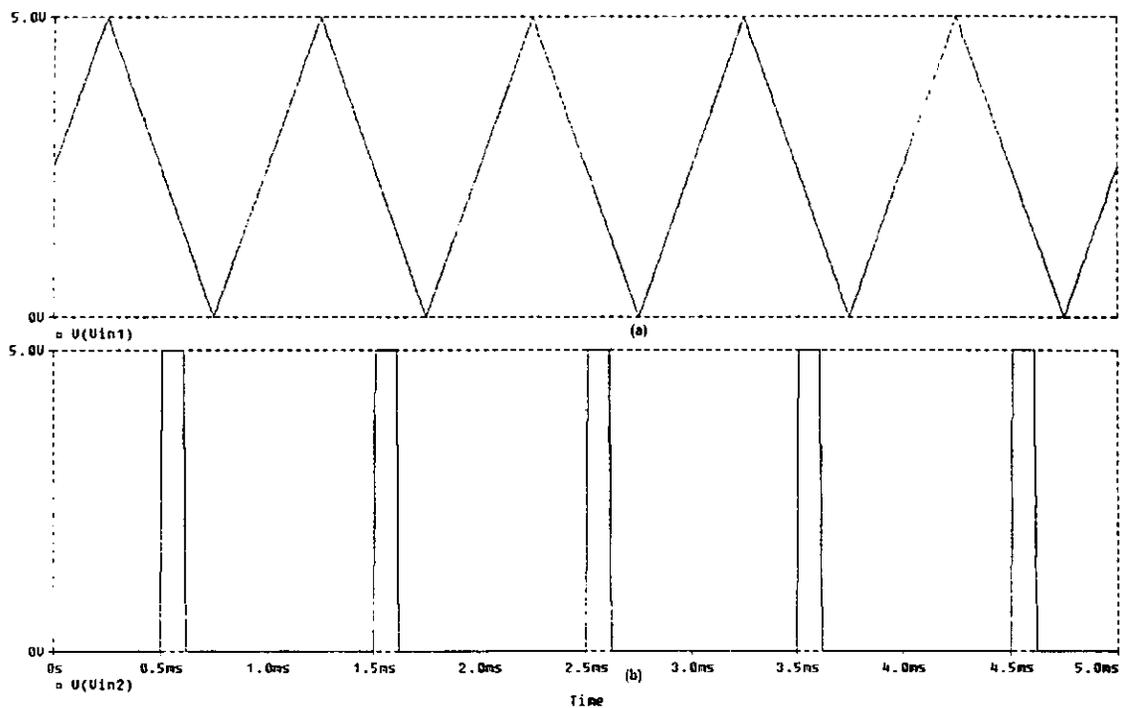


Figura 3.9 (a) Señal de entrada (V_{in1}) triangular, con una frecuencia de 1 KHz. (b) Señal de entrada (V_{in2}) cuadrada, con una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1 ms.

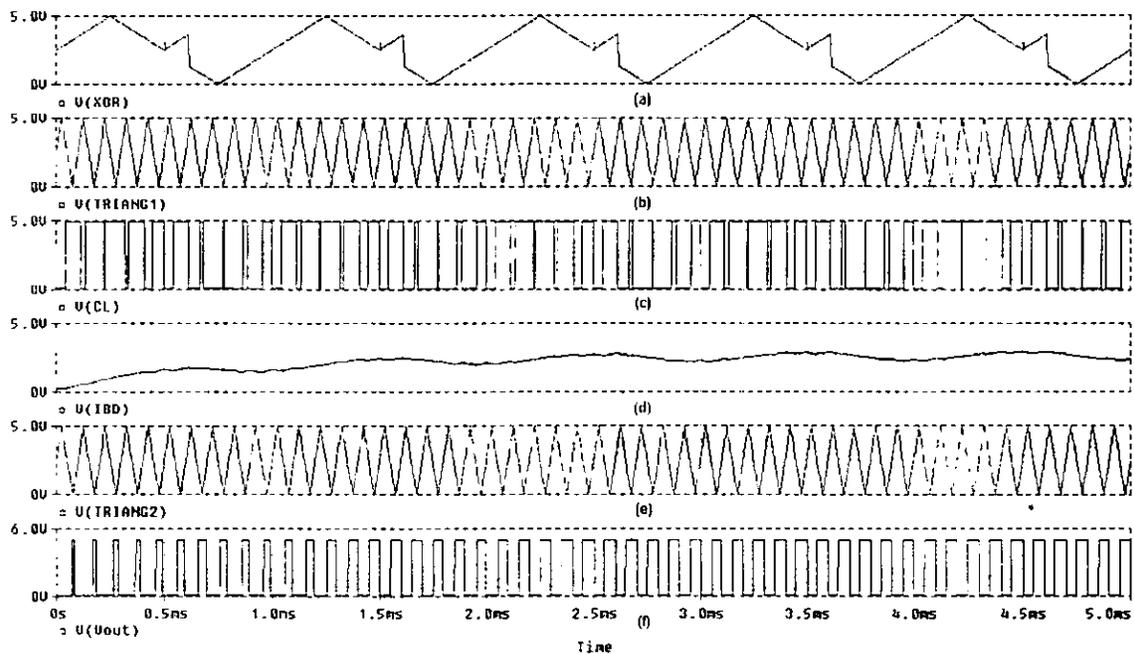


Figura 3.10 (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Señal triangular (TRIANG1) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, es el valor de umbral para generar los cortes λ , (c) Cortes λ (CL), (d) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (e) Señal triangular (TRIANG2) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa, (f) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

En la figura 3.10 (b) se muestra una señal triangular que se utiliza como valor de umbral para generar los cortes λ (fig. 3.10 (c)) correspondientes a la suma borrosa de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.9 (a) y (b). Como se puede observar en la figura 3.10 (c) los cortes λ son todos de una misma amplitud (normalizados a un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$, que en este caso corresponde a $[0,5]$ Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso (XOR). Analizando la gráfica (c) de la figura 3.10 en el intervalo de 1.1 a 1.4 ms se observa que los cortes λ son de mayor duración y frecuencia que en el intervalo de 1.6 a 1.9 ms, esto se debe a que en el intervalo de 1.1 a 1.4 ms la amplitud de la suma borrosa (XOR) es mayor que en el intervalo de 1.6 a 1.9 ms. Por lo tanto, los cortes λ son proporcionales en duración y frecuencia a la amplitud de la suma borrosa extendida (fig. 3.10 (a)) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.9 (a) y (b).

Una vez obtenidos los cortes λ , estos se integraron para obtener la señal de salida del IBD (fig. 3.10 (d)). La integral borrosa tipo Dubois de la señal de salida del sumador borroso, tiene una forma ascendente al inicio de la gráfica debido al capacitor C1 del circuito electrónico de la figura 3.6. Esta integral borrosa (fig. 3.10 (d)), es proporcional en amplitud a los cortes λ .

En la figura 3.10 (d) en el intervalo de 3 a 3.6 ms la amplitud de la integral borrosa se incrementa y en el intervalo de 3.6 a 4ms se decrementa, correspondiendo de manera proporcional a la duración (ancho de pulso) y frecuencia de los cortes λ de la figura 3.10 (c).

La gráfica (e) de la figura 3.10 muestra una señal triangular que es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) de la figura 3.10 (f), a partir de la integral borrosa (IBD) de la figura 3.10 (d). En la figura 3.10 (f) se muestra la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois, donde se puede observar que la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) son pulsos de la misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$, que en este caso es de $[0,5]$ Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Dubois (IBD).

En el intervalo de 3.3 a 3.6 ms (fig. 3.10 (f)), los pulsos (respuesta de la neurona borrosa) tienen una mayor duración (ancho de pulso aproximadamente de 0.7 ms) y una mayor frecuencia que en el intervalo de 3.8 a 4.1 ms (ancho de pulso aproximadamente de 0.5 ms), los pulsos corresponden de manera proporcional en duración y frecuencia a la amplitud de la integral borrosa de la fig. 3.10 (d), en el intervalo de 3.3 a 3.6 ms la amplitud de la integral borrosa es mayor que en el intervalo de 3.8 a 4.1 ms.

Los pulsos (V_{out}) de la figura 3.10 (f) son la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois a los estímulos externos (señales de entrada) V_{in1} y V_{in2} de la figura 3.9 (a) y (b).

De las gráficas del voltaje de salida (V_{out} de ambas simulaciones) de la neurona borrosa se puede decir que es el resultado borroso esperado, es decir, los pulsos de la señal de salida de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois como se puede apreciar en las figuras 3.8 (f) y 3.10 (f) son proporcionales a la integral de los cortes λ , que a su vez son proporcionales a la suma borrosa de las señales de entrada a la neurona. Los pulsos son la respuesta borrosa (señal de salida) de la neurona a los diversos estímulos externos o señales de entrada que se han procesado en la neurona bajo la filosofía de Dubois.

CAPÍTULO 4

NEURONA INTEGRADORA BORROSA TIPO GUPTA

4.1 Teoría de Gupta sobre el modelo de una neurona borrosa

En esta sección se dan los principios básicos en los que se basa el modelo de una neurona borrosa que utiliza las operaciones sináptica y somática.

Operaciones neuronales sináptica y somática.

En esta parte se describen las operaciones matemáticas neuronales llamadas: i) operación sináptica (confluencia) y ii) operación somática (agregación y mapeo no lineal), estas operaciones se muestran en la figura 4.1 y se describen a continuación:

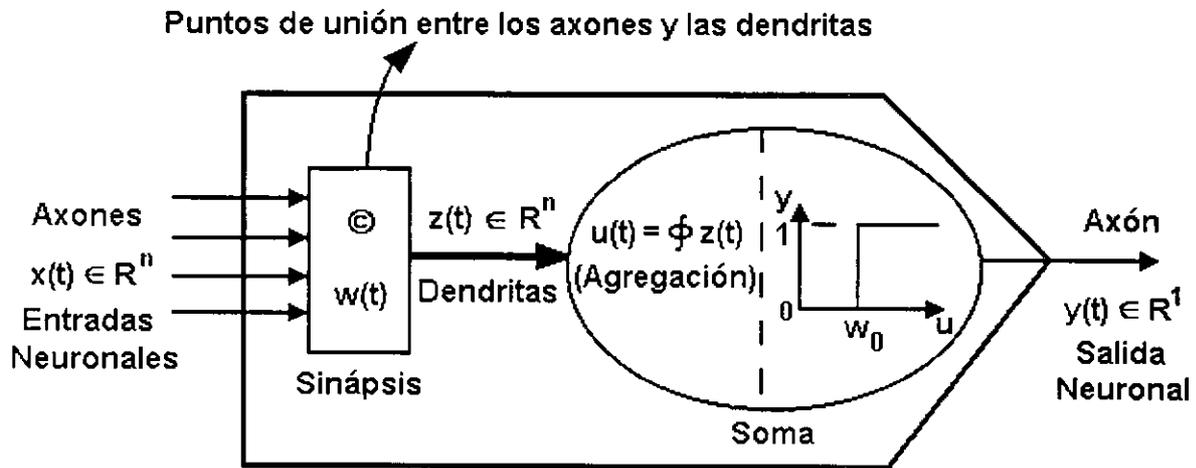


Figura 4.1

i) Operación sináptica.

El *vector de pesos sinápticos* $w(t) \in \mathbb{R}^n$ en el punto de unión entre la entrada neuronal y la dendrita almacena (memoriza) las experiencias pasadas (conocimiento-base). Por lo tanto, el *peso sináptico* $w_i(t)$, puede verse como una representación de la experiencia pasada pero que tiene la habilidad de adaptarse a una nueva experiencia (atributo de aprendizaje). La operación sináptica proporciona una operación de *confluencia* entre las experiencias pasadas $w(t) \in \mathbb{R}^n$ y las entradas neuronales $x(t) \in \mathbb{R}^n$: Por lo tanto, la *operación de confluencia sináptica*, o justamente la *operación sináptica*, asigna un peso relativo (trascendencia) a cada componente de la señal neuronal entrante $x_i(t)$ de acuerdo

con la experiencia pasada (conocimiento) almacenado en $w_i(t)$. La señal de salida de pesos sinápticos (señal de la dendrita) se puede escribir como:

$$z_i(t) = w_i(t) \odot x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

donde la operación \odot es la confluencia sináptica.

El operador confluencia \odot , como se explicará en las siguientes secciones, se puede modelar mediante operaciones matemáticas tales como el **producto** y la operación lógica **AND** generalizada. La operación sináptica para señales no borrosas y borrosas se define como sigue.

1) Para señales no borrosas, sean $x_i(t), w_i(t) \in (-\infty, \infty)$, y si se define a la operación confluencia \odot como la operación producto. Entonces,

$$z_i(t) = w_i(t) \cdot x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

2) Para señales (borrosas) limitadas por un grado de membresía que está sobre el intervalo unitario $[0,1]$, la operación confluencia se puede definir como la operación **AND** generalizada. La operación **AND** generalizada se puede expresar mediante la notación de normas triangulares (normas T). Por lo tanto, la operación lógica de confluencia sináptica se define como:

$$z_i(t) = w_i(t) \text{ AND } x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \in [0,1] \quad (4.3)$$

Para tales señales (binarias o borrosas), el vector de señales $x(t) \in R^n$ así como el vector de pesos $w(t) \in R^n$ están definidos sobre $[0,1]^n$.

ii) Operación somática.

La operación somática (figura 4.1) se lleva a cabo en el cuerpo principal de la neurona, sobre las señales de entrada de pesos neuronales $z_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, y consta de dos procesos que se explican a continuación.

a) Operación somática de agregación.

La primera operación somática es la operación de agregación en las señales de entrada dendríticas $z_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, la cual esencialmente mapea un vector de orden n $z(t) \in R^n$ a una señal escalar $u(t) \in R^n$.

Para esta operación somática se introduce la operación de agregación generalizada \int . Por lo tanto se tiene:

$$u(t) = \int_{i=1}^n z_i(t) \quad (4.4a)$$

$$o \quad u(t) = \bigoplus_{i=1}^n w_i(t) \odot x_i(t) \quad (4.4b)$$

La operación de agregación $\bigoplus[\cdot]$ se puede modelar mediante operaciones matemáticas tales como una sumatoria y una operación lógica **OR** generalizada. Esta operación se define para señales borrosas y no borrosas de la siguiente forma:

1) Para señales no borrosas

$x_i(t), w_i(t) \in (-\infty, \infty)$, la operación de agregación se define como:

$$u(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t) \in R^1 \quad (4.5a)$$

o

$$u(t) = \sum_{i=1}^n w_i(t) \cdot x_i(t) \in R^1 \quad (4.5b)$$

Esta operación de agregación se puede ver como un mapeo lineal de las entradas dendríticas n-dimensionales $\{z_i(t)\}$ a un espacio unidimensional, ecuación (4.5a). Esta operación de mapeo lineal somática se puede combinar con la operación de confluencia sináptica produciendo un mapeo de pesos lineal de una entrada neuronal n-dimensional $x(t) \in R^n$ a un espacio unidimensional $u(t) \in R^1$, ec. (4.5b). Alternativamente, expresando esta operación neuronal como el producto escalar de dos vectores, se tiene:

$$u(t) = w^T(t) \cdot x(t) \in R^1 \quad (4.5c)$$

donde

$$w(t) = [w_1(t), w_2(t) \dots w_n(t)]^T \in R^n$$

= vector de pesos sinápticos

y

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)]^T \in R^n$$

= vector de entradas neuronales

Por lo tanto, la combinación de las operaciones de pesos sinápticos y agregación somática produce un mapeo lineal de entradas neuronales $x(t) \in R^n$ a $u(t) \in R^1$.

2) Para señales borrosas limitadas por el grado de membresía sobre el intervalo unitario $[0,1]$, la operación de agregación se define como la operación **OR** generalizada. La operación **OR** generalizada se puede expresar utilizando la conorma triangular (conorma T). De esta forma, la operación lógica somática de agregación se define como:

$$u(t) = \text{OR}_{i=1}^n [z_i(t)] \in [0,1] \quad (4.6a)$$

$$= \text{OR}_{i=1}^n [w_i(t) \text{ AND } x_i(t)] \in [0,1] \quad (4.6b)$$

De nuevo, la operación de agregación se puede ver como un mapeo lógico de una entrada neuronal n-dimensional $x(t) \in [0,1]^n$, a un espacio unidimensional $u(t) \in [0,1]$ como se muestra en la ec. (4.6b).

Expresando esta operación neuronal como una **AND** lógica escalar de dos vectores, el vector de entrada neuronal y el vector de pesos sinápticos, sería:

$$u(t) = w^T(t) \text{ AND } x(t) \quad (4.6c)$$

donde $w(t), x(t) \in [0,1]^n$, y el vector que produce la operación **AND** se combina con la operación **OR** individual para $i = 1, 2, \dots, n$.

b) Operación somática no lineal con umbral.

Los procesos neuronales biológicos generan algunas propiedades de mapeo matemático debido a sus operaciones no lineales combinadas con un valor de umbral en el soma. El propósito de esta sección es explorar rápidamente estas propiedades para su posterior aplicación.

Se considerará esta importante operación somática para dos diferentes situaciones, señales borrosas y no borrosas.

1) Para señales no borrosas, $u(t) \in (-\infty, \infty)$, la operación no lineal somática en $u(t)$ produce una salida neuronal $y(t)$:

$$y(t) = f[u(t), w_0] \in R \quad (4.7)$$

donde la función no lineal $f[\cdot]$ con umbral w_0 se muestra en la figura 4.2. Se debe notar, figura 4.2, que la salida neuronal $y(t)$ es cero si el vector de pesos agregados $u(t)$ de la señal de entrada neuronal $x(t) \in R^n$ es menor que el valor de umbral w_0 . Esto es, la neurona disparará (producirá una salida) sólo si el valor de los pesos agregados de $x(t) \in R^n$ excede el umbral w_0 . Si $u(t)$ excede w_0 ; la salida neuronal $y(t)$ se incrementará monótonicamente al incrementar a $u(t)$ a un valor de saturación, en este caso 1. Dependiendo de las propiedades de mapeo (forma) de la función no lineal $f[\cdot]$, el valor de $y(t)$ se distribuye sobre el intervalo $[0,1]$.

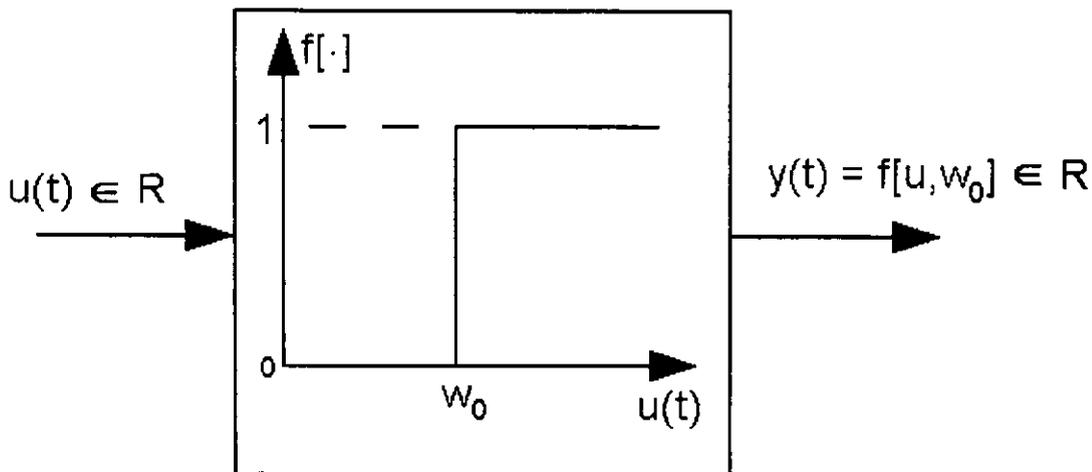


Figura 4.2

2) Para señales borrosas un grado de membresía $u(t)$ limitado sobre el intervalo unitario $[0,1]$, el mapeo no lineal con umbral $w_0 \in [0,1]$ se define como:

$$v(t) = u(t) \text{ OR } w_0, \quad v(t) \in [0,1] \quad (4.8a)$$

$$y, \quad y(t) = v^\alpha(t) \quad (4.8b)$$

donde α es una constante positiva. Para $0 < \alpha \leq 1$, la operación (4.8b) muestra una dilatación para la membresía $v(t)$, mientras que para $\alpha > 1$ produce una operación de concentración.

La dilatación, tiene la propiedad de incrementar el valor de membresía, mientras que la concentración, la decreta. La intensificación decreta el valor de membresía para $0 < v \leq 0.5$, y lo incrementa para $0.5 < v \leq 1$. Por el contrario, la operación borrosa incrementa el valor de membresía para $0 < v \leq 0.5$ y lo decreta para $0.5 < v \leq 1$.

Modelo matemático generalizado de una neurona

En esta sección se generalizará el modelo matemático con las operaciones sinápticas y somáticas, visto anteriormente, para entradas neuronales clásicas no borrosas y la siguiente sección se dedicará a señales borrosas.

De la ecuación (4.7) y la figura 4.2 se define una nueva variable $v(t)$ como:

$$v(t) = u(t) - w_0 \quad (4.9)$$

donde $u(t)$ es el valor de los pesos agregados de las entradas neuronales definida en (4.5), y w_0 es el valor de umbral (bias). Por lo tanto, si el vector de salida de los

pesos $u(t)$ es menor que w_0 , la salida neuronal $y(t)$ es cero. Esto implica que la neurona disparará solo cuando el valor de los pesos agregados exceda el valor de umbral w_0 . Entonces, redefiniendo a $y(t)$ como:

$$y(t) = f[u(t), w_0] = \phi[v(t)] \quad (4.10)$$

y usando la ecuación (4.5) y (4.9) se tiene:

$$v(t) = \underset{i=0}{\overset{n}{\oint}} w_i(t) \odot x_i(t) \quad (4.11a)$$

$$y(t) = \phi[v(t)] \quad (4.11b)$$

donde $\phi[v(t)]$ se muestra en la figura 4.3 con el valor de umbral desplazado hacia el origen, y \odot y $\underset{i=0}{\overset{n}{\oint}}$ representan a las operaciones generalizadas de confluencia y agregación definidas en (4.4).

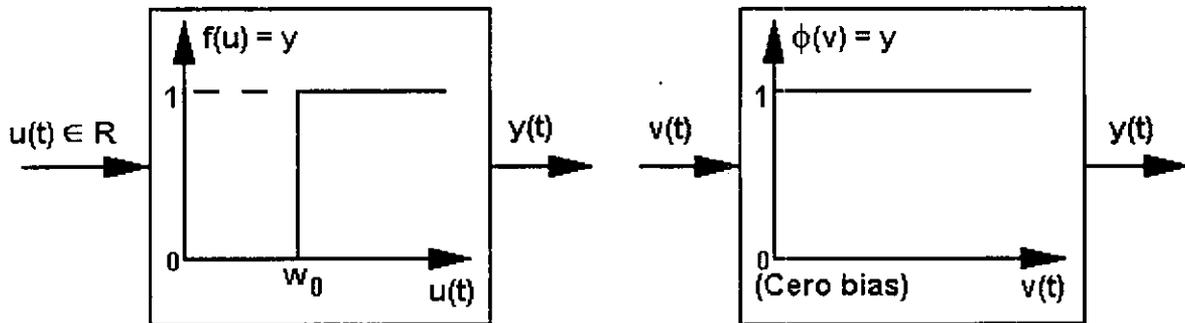


Figura 4.3

Como un caso especial, se puede representar a la operación confluencia mediante el producto, y a la operación agregación mediante una sumatoria, sustituyendo en (4.10) y (4.11):

$$v(t) = \sum_{i=0}^n w_i(t) \cdot x_i(t) \quad (4.11c)$$

$$= w_a^T(t) \cdot x_a(t) \in \mathbb{R}^1 \quad (4.11c)$$

$$y(t) = \phi[v(t)] \in \mathbb{R}^1 \quad (4.11d)$$

donde $\phi[\cdot]$ es una función de mapeo no lineal escalón, y $x_a(t)$ es el vector aumentado definido como:

$$w_a(t) = [w_0, w_1, w_2, \dots, w_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$$

= vector aumentado de pesos sinápticos incluyendo a w_0

$x_a(t) = [x_0, x_1, x_2 \dots x_n]^T \in R^{n+1}, x_0 = 1$
 = vector aumentado de las entradas neuronales,
 donde $x_0 = 1$ cuenta para el termino de umbral (bias)

En la figura 4.4 se muestra el modelo de una neurona generalizado con el valor de umbral desplazado hacia el origen.

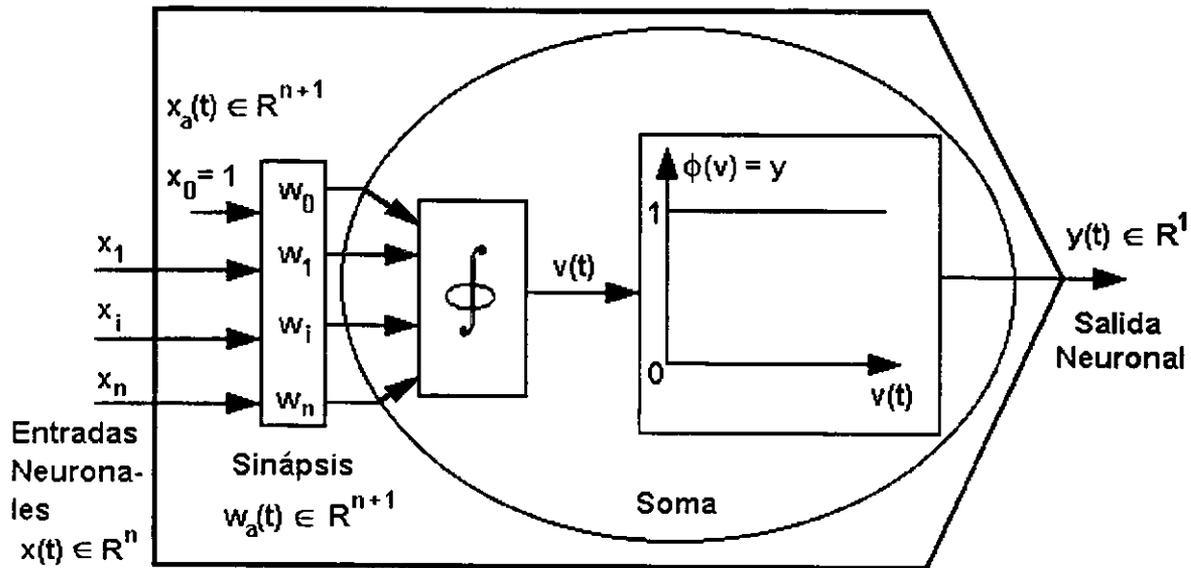


Figura 4.4

Neuronas Borrosas

En el desarrollo de una neurona borrosa basada en la morfología neuronal, se utilizarán las operaciones sináptica y somática combinadas.

Sea el vector aumentado de entradas neuronales y pesos sinápticos representado por:

$$x_a(t) \in [0,1]^{n+1}, y w_a(t) \in [0,1]^{n+1}$$

respectivamente, entonces, en (4.11a), reemplazando el operador \odot por el operador T, y la operación \oint por la operación S, se tiene:

$$v(t) = \underset{i=1}{\overset{n}{S}} [w_i(t) T x_i(t)] \in [0,1] \tag{4.12a}$$

y

$$y(t) = \phi[v(t)] \in [0,1] \tag{4.12b}$$

donde el mapeo no lineal $\phi[\cdot]$ puede ser una de las funciones definidas en (4.8b), o alguna otra función equivalente.

4.2 Modelo electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta

Análogamente con el capítulo anterior en esta sección se presenta el modelo electrónico de una neurona integradora borrosa sólo que basada en la teoría de Gupta.

De acuerdo con Gupta las operaciones neuronales básicas son: una operación sináptica, una operación somática de agregación y una operación somática no lineal con umbral. Con estas tres operaciones se puede conjuntar una neurona la cual puede ser borrosa.

En este caso también se considera que a las señales de entrada (señales clásicas) del circuito de la Neurona Borrosa ya se les ha efectuado la operación sináptica, es decir, $u_i(t) = w_i(t) \cdot x_i(t)$ por lo tanto las señales de entrada $V_{in}(t)$ al circuito electrónico son equivalentes a las $u(t)$.

La operación somática de agregación se puede ver como una integral definida por Gupta como una OR borrosa generalizada y la operación somática no lineal con umbral como una función que produce la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

Comparando el modelo de neurona de la figura 3.4 con el de la figura 4.4 propuesto por Gupta, se puede observar que en el de la figura 4.4 sólo aparecen una operación somática de agregación y una operación somática no lineal con umbral y no aparece el sumador de la figura 3.4, esto se debe a que en el modelo de neurona de Gupta, el sumador y el integrador de la fig. 3.4 son uno solo y los modela como un integrador borroso, es decir, una OR borrosa generalizada y a la función de activación con umbral, Gupta la define como una operación somática no lineal con umbral.

El circuito de la operación somática no lineal con umbral es igual al circuito FA de la figura 3.6 diseñado para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois. En el diagrama de bloques de la figura 4.5 se muestran las etapas de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

Al circuito electrónico de la OR borrosa generalizada lo constituyen varias OR borrosas (Operadores Max) conectadas en cascada para así obtener una OR borrosa generalizada de N entradas y con N-1 compuertas OR borrosas como se puede apreciar en el bloque IBG (Integrador Borroso tipo Gupta) de la figura 4.6.

Para acoplar impedancias entre cada circuito electrónico de los operadores Max y entre éste y otros bloques de la neurona borrosa, se utilizó una resistencia de 10 MΩ. En la figura 4.6 se muestra el circuito electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

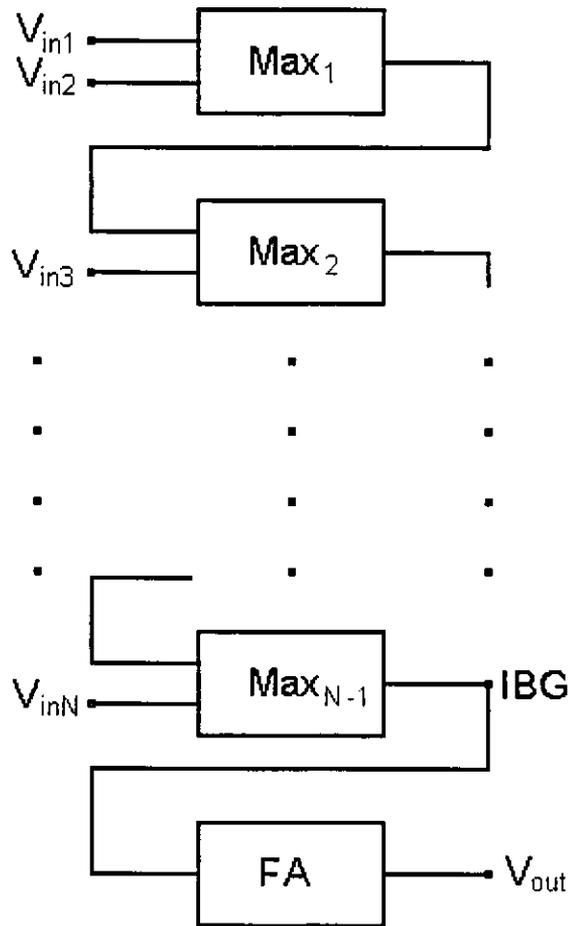


Figura 4.5

En las figuras 4.7 a 4.10 se presentan las gráficas obtenidas en cada bloque de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta para dos simulaciones distintas. Para la primera simulación las señales de entrada se muestran en las gráficas de la figura 4.7, donde V_{in1} y V_{in2} son señales senoidales, defasadas 180° con una amplitud pico a pico de 5 V y una frecuencia de 1 KHz.

Las señales de salida correspondientes a cada bloque de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se observan en la figura 4.8 : (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG), (b) Señal triangular (Triang) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, y (c) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

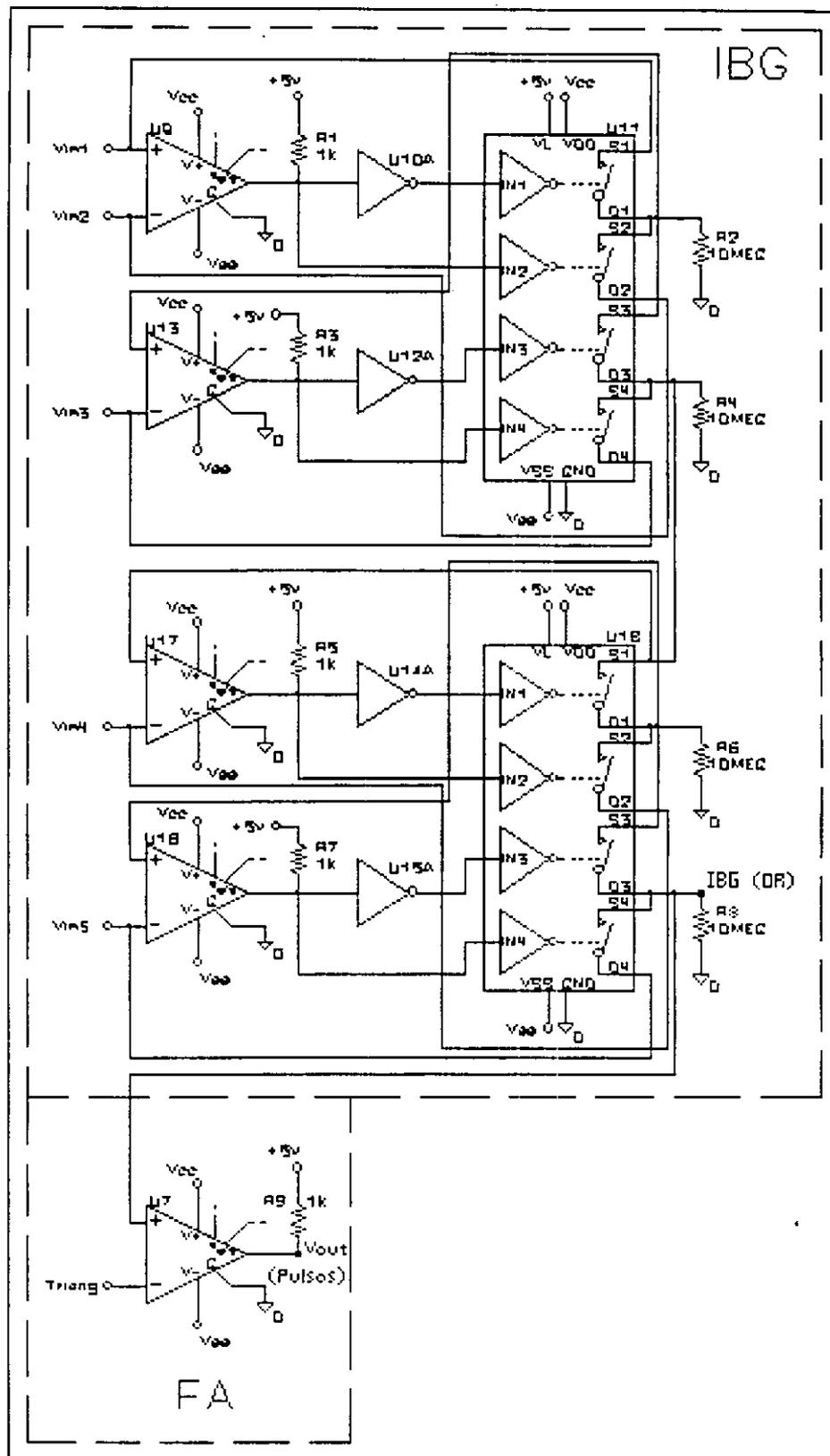


Figura 4.6 Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta

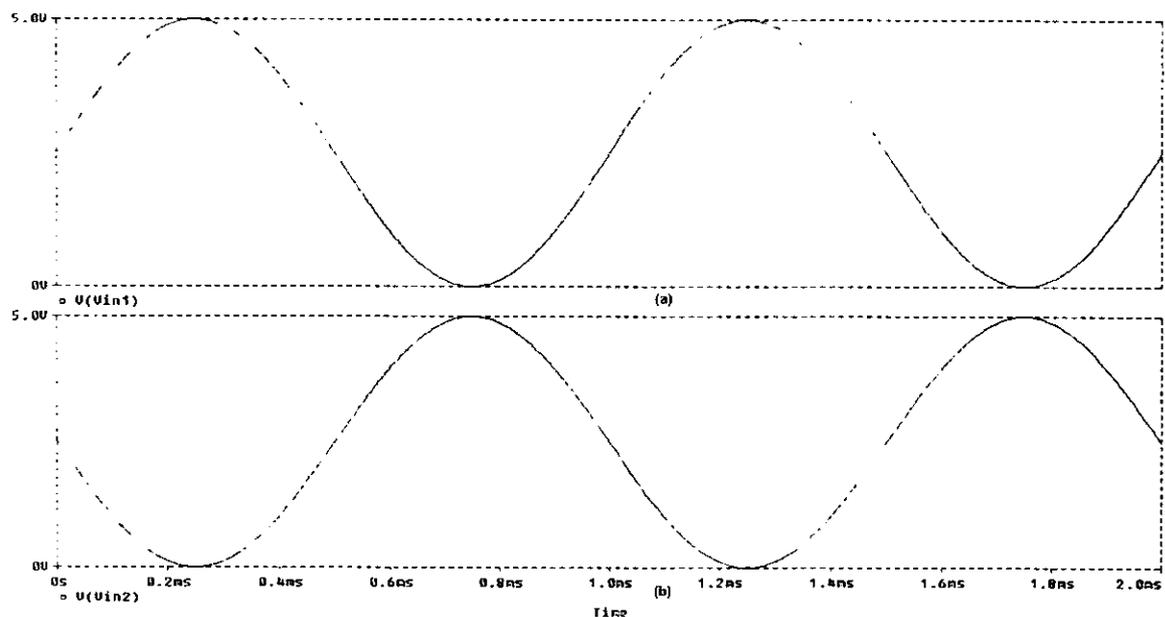


Figura 4.7 (a) Señal de entrada (V_{in1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° . (b) Señal de entrada (V_{in2}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 180° .

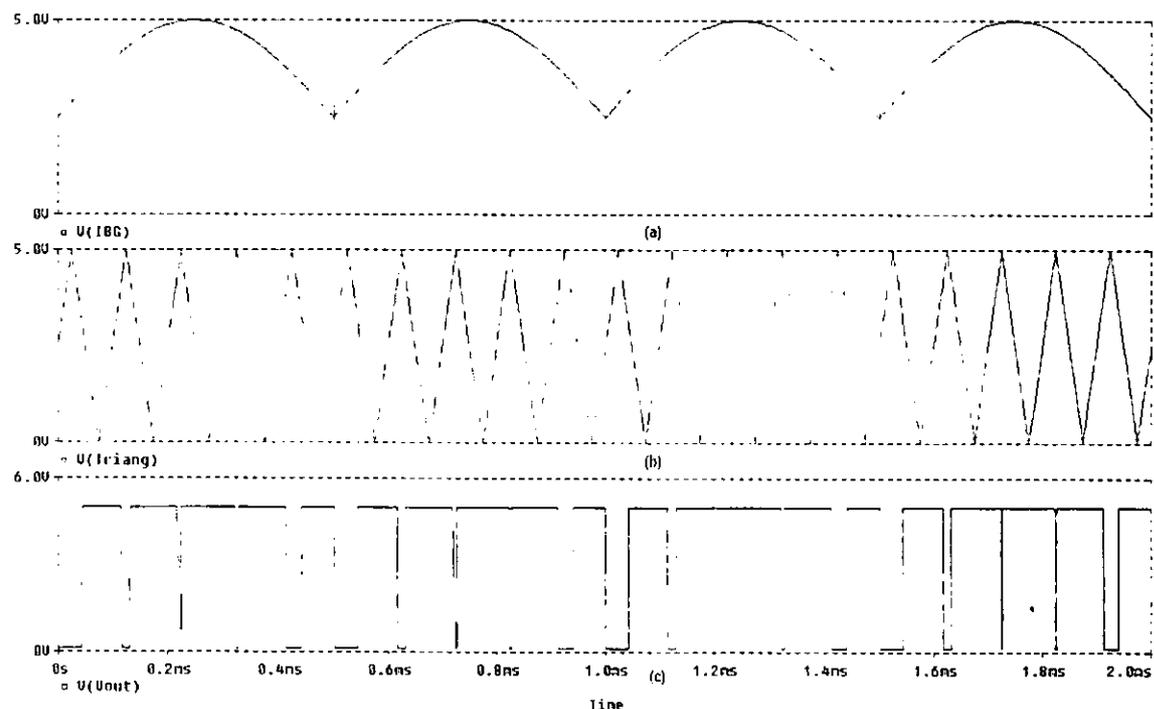


Figura 4.8 (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG). (b) Señal triangular (Triang) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz. (c) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 4.8 se observa la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada de la fig. 4.7. Recordando que obtener una OR borrosa de varias señales es obtener el máximo de esas señales, en la fig. 4.8 (a) se puede apreciar claramente que la integral borrosa (suma borrosa) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} (que son señales unipolares), es en cada instante el valor máximo de las dos señales de entrada. En el intervalo de 0.5 a 1 ms de la fig. 4.8 (a) se puede observar que la amplitud de la integral borrosa corresponde al valor máximo de las dos señales de entrada, en este caso, a el valor de la señal de entrada V_{in2} (fig. 4.7(b)). En el intervalo de 1 a 1.5 ms el valor máximo de las dos señales de entrada corresponde a V_{in1} (fig. 4.7(a)) y por lo tanto es el valor que aparece en la gráfica (a) de la fig. 4.8.

Como se mencionó anteriormente, en la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta el sumador y el integrador de la fig. 3.4 son el mismo y por lo tanto el Integrador Borroso tipo Gupta también se puede ver como un sumador borroso (OR borrosa generalizada), en la fig. 4.8 (a) se puede apreciar claramente la diferencia entre realizar la suma borrosa y la suma no borrosa de las señales de entrada de la fig. 4.7. La suma no borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} es cinco volts para todo tiempo t , en cambio la suma borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} no es cinco volts para todo tiempo t , como se muestra en la figura 4.8 (a). Por lo tanto se puede decir que en la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se llevan a cabo procesos neuronales borrosos, mismos que producen un resultado borroso.

La señal triangular que se muestra en la fig. 4.8 (b) es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) de la fig. 4.8 (c) a partir de la integral borrosa de las señales de entrada. La respuesta de la neurona borrosa es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, y debido a la función de activación (tipo escalón) empleada en este caso, esta respuesta son pulsos de una misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$, que en este caso corresponde a $[0,5]$ Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Gupta (fig. 4.8 (a)).

En el intervalo de 0.4 a 0.6 ms de la fig. 4.8 (c) se observa que los pulsos (respuesta de la neurona borrosa) son de menor frecuencia y duración (ancho de pulso) que los del intervalo de 1.7 a 1.9 ms, esto se debe a que la amplitud de la integral borrosa (fig. 4.8 (a)) de las señales de entrada (fig. 4.7) es mayor en el intervalo de 1.7 a 1.9 ms que en el intervalo de 0.4 a 0.6 ms.

Los pulsos (V_{out}) de la figura 4.8 (c) son la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta a los estímulos externos (señales de entrada) de la figura 4.7.

En la segunda simulación las señales de entrada (fig. 4.9) son : (a) Señal de entrada (V_{in1}) triangular, con una amplitud pico a pico de 5 V y con una frecuencia de 1 KHz, y (b) Señal de entrada (V_{in2}) cuadrada, con una amplitud de 5 V, una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1ms.

Las respuestas borrosas obtenidas para las señales de entrada anteriores se muestran en la fig. 4.10 : (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG), (b) Señal triangular (Triang) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz, y (c) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 4.10 se observa la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada de la fig. 4.9. Recordando que obtener una OR borrosa de varias señales es obtener el máximo de esas señales, en la fig. 4.10 (a) se puede apreciar claramente que la integral borrosa (suma borrosa) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} (que son señales unipolares), es en cada instante el valor máximo de las dos señales de entrada. En el intervalo de 1 a 1.5 ms de la fig. 4.10 (a), se puede observar que la amplitud de la integral borrosa corresponde a la amplitud de la señal de entrada V_{in1} (fig. 4.9 (a)) con forma triangular que es el máximo de las señales de entrada en ese intervalo. De igual forma el máximo de las señales de entrada en el intervalo 3.5 a 3.6 ms corresponde a la señal de entrada V_{in2} .

Como se ha mencionado anteriormente, en la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta el sumador y el integrador de la fig. 3.4 son el mismo y por lo tanto el Integrador Borroso tipo Gupta también se puede ver como un sumador borroso (OR borrosa generalizada), en la fig. 4.10 (a) se puede apreciar claramente la diferencia entre realizar la suma borrosa y la suma no borrosa de las señales de entrada de la fig. 4.9. En el tiempo $t = 2.5$ ms la suma no borrosa de las dos señales de entrada es : $V_{in1} + V_{in2} = 2.5 + 5 = 7.5$ V en cambio la suma borrosa de estas señales de entrada es el máximo, o sea, 5 V como se puede observar en la fig. 4.10 (a).

La señal triangular que se muestra en la fig. 4.10 (b) es el valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) de la fig. 4.10 (c) a partir de la integral borrosa de las señales de entrada. La respuesta de la neurona borrosa es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, y debido a la función de activación empleada en este caso, esta respuesta son pulsos de una misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso corresponde a [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Gupta (fig. 4.10 (a)).

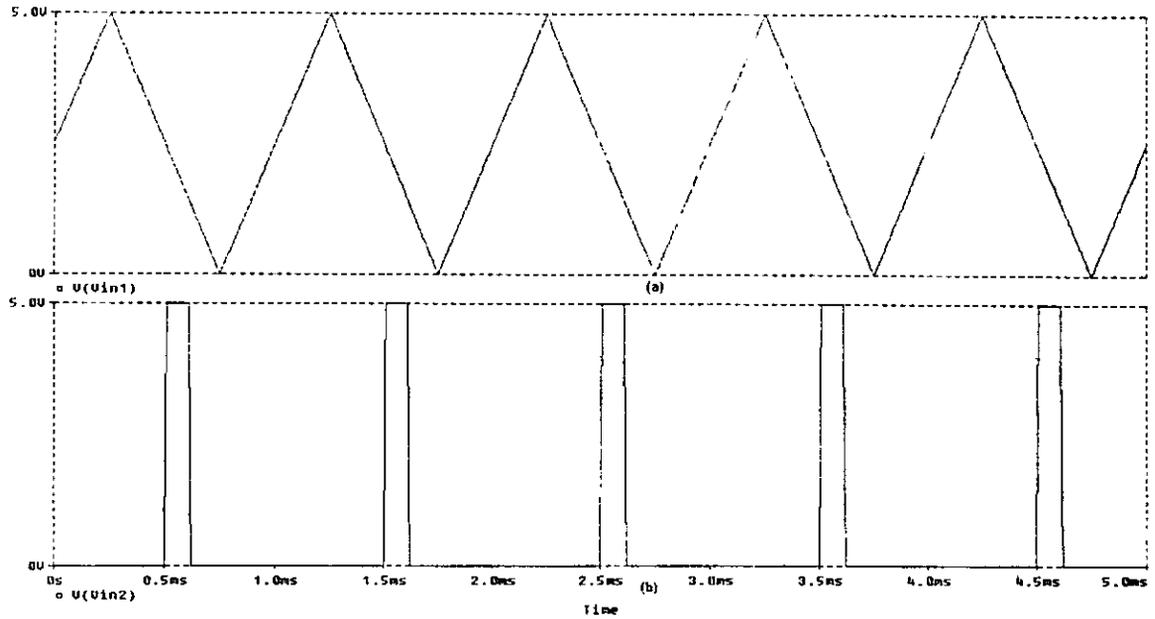


Figura 4.9 (a) Señal de entrada (V_{in1}) triangular y con una frecuencia de 1 KHz. (b) Señal de entrada (V_{in2}) cuadrada, con una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1 ms.

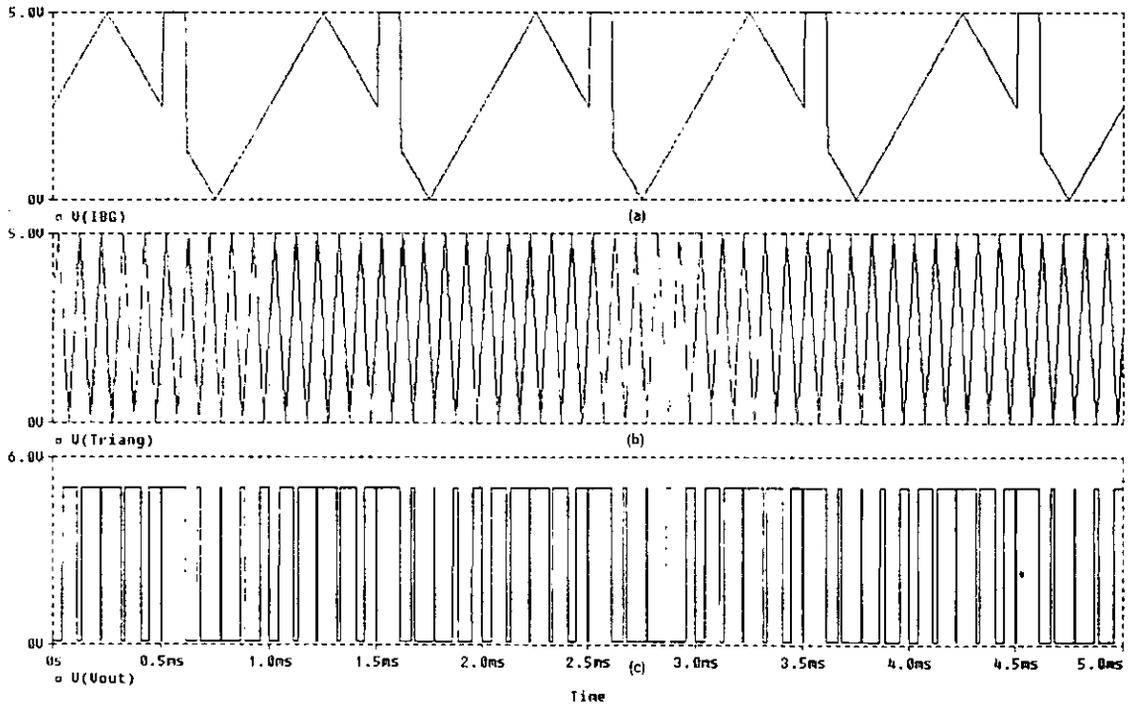


Figura 4.10 (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG). (b) Señal triangular (Triang) con una amplitud de 0 a 5 V y una frecuencia de 10 KHz. (c) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En el intervalo de 1.1 a 1.3 ms de la fig. 4.10 (c) se observa que los pulsos (respuesta de la neurona borrosa) son de mayor duración (ancho de pulso) y frecuencia que los pulsos en el intervalo de 1.7 a 1.9 ms, esto se debe a que la amplitud de la integral borrosa (fig. 4.10 (a)) de las señales de entrada (fig. 4.9) es mayor en el intervalo de 1.1 a 1.3 ms que en el intervalo de 1.7 a 1.9 ms.

Los pulsos (V_{out}) de la figura 4.10 (c) son la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta a los estímulos externos (señales de entrada) de la figura 4.9.

Como se puede observar en la gráfica de V_{out} (de ambas simulaciones), esta señal de salida es la respuesta de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta a los diferentes estímulos externos (señales de entrada) que recibe la neurona borrosa, tales señales se procesan mediante un integrador borroso tipo Gupta y un circuito que obtiene los pulsos proporcionales a la amplitud de la integral borrosa de las entradas, dichos pulsos constituyen la respuesta final de la neurona borrosa.

CAPÍTULO 5

COMPARACIÓN ENTRE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL MODELADO ELECTRÓNICO DE NEURONAS INTEGRADORAS BORROSAS TIPO DUBOIS Y GUPTA

Como los modelos de neurona (figuras 3.4 y 4.4) en los que se basan la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y la tipo Gupta son diferentes, se esperaba obtener también resultados borrosos diferentes de cada neurona para las mismas señales de entrada.

Para comprobar lo anterior, se realizaron tres simulaciones para hacer una comparación entre la respuesta de ambas neuronas integradoras borrosas tipo Dubois y Gupta utilizando las mismas señales de entrada para las dos neuronas en cada caso.

Para la primera simulación la señal de entrada V_{in1} (fig. 5.1 (a)) es una señal senoidal con una amplitud pico a pico de 5 V, una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° , esta señal se comparó con tierra (0 V) que es la referencia de los comparadores. Las señales de salida se muestran en la fig. 5.2 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y en la fig. 5.3 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

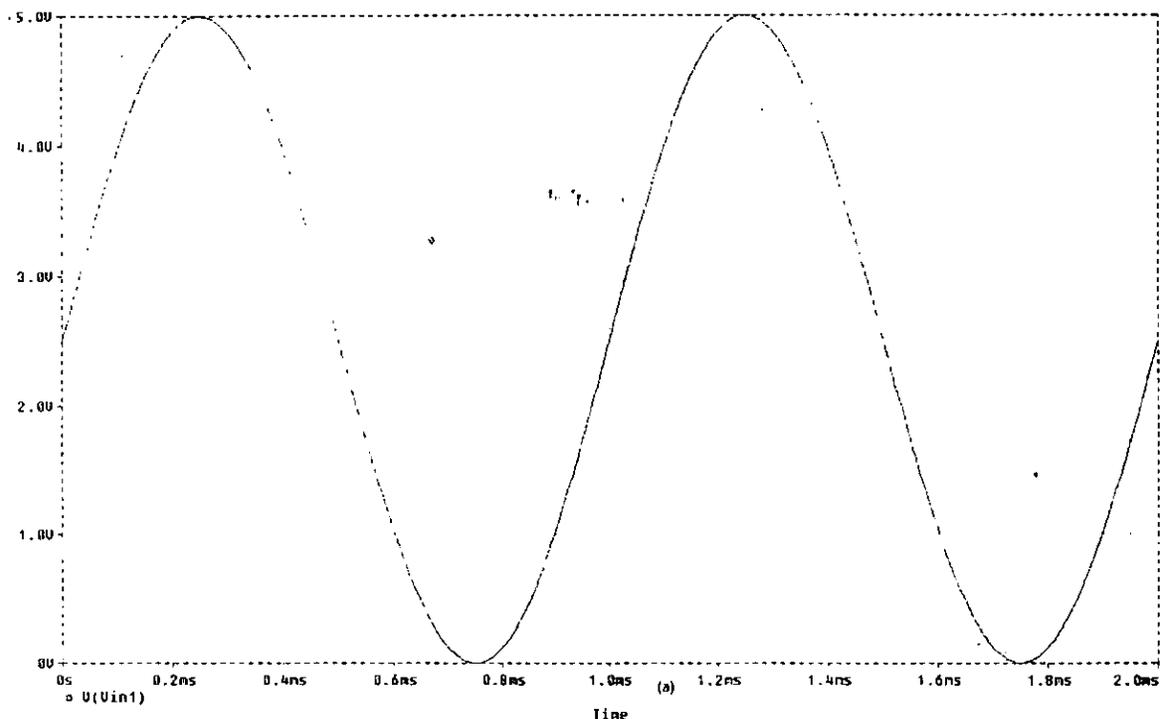


Figura 5.1 (a) Señal de entrada (V_{in1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° .

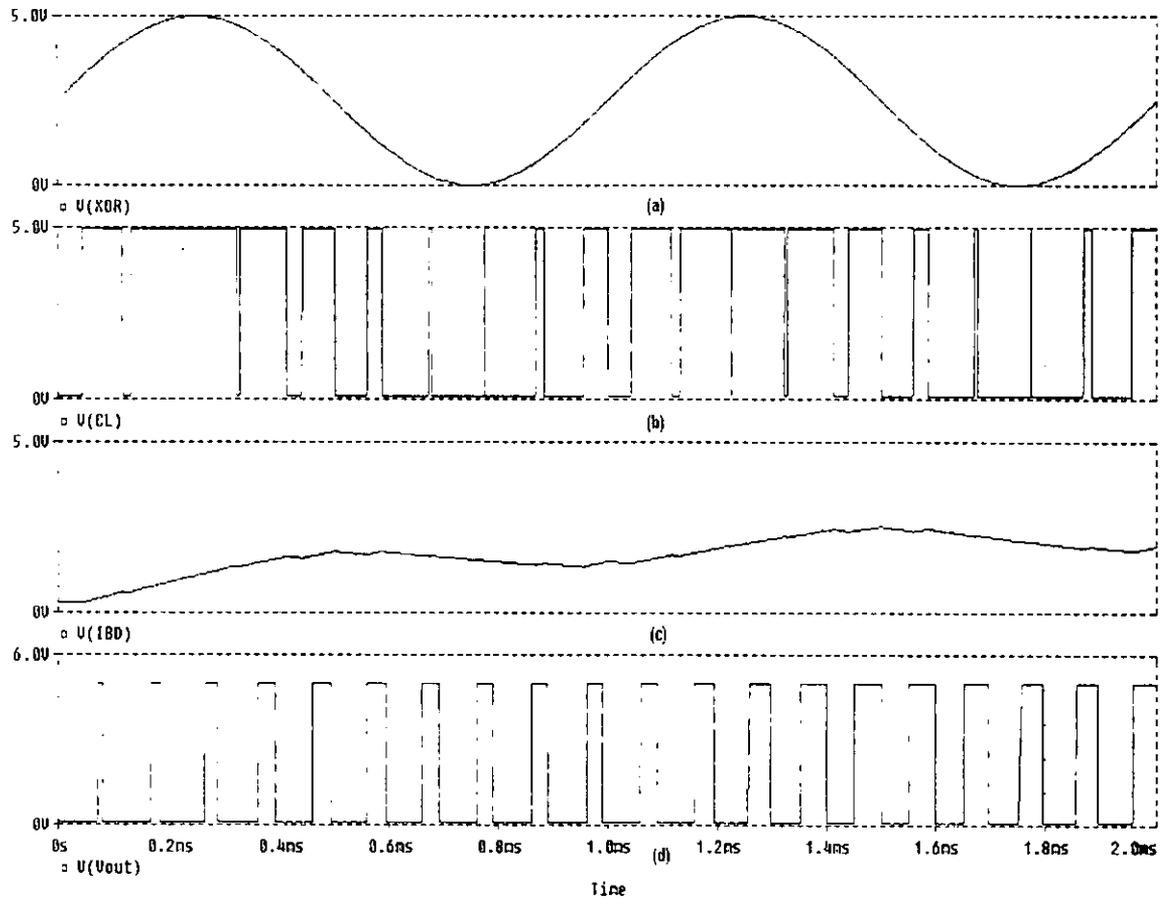


Figura 5.2 (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR). (b) Cortes λ (CL). (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

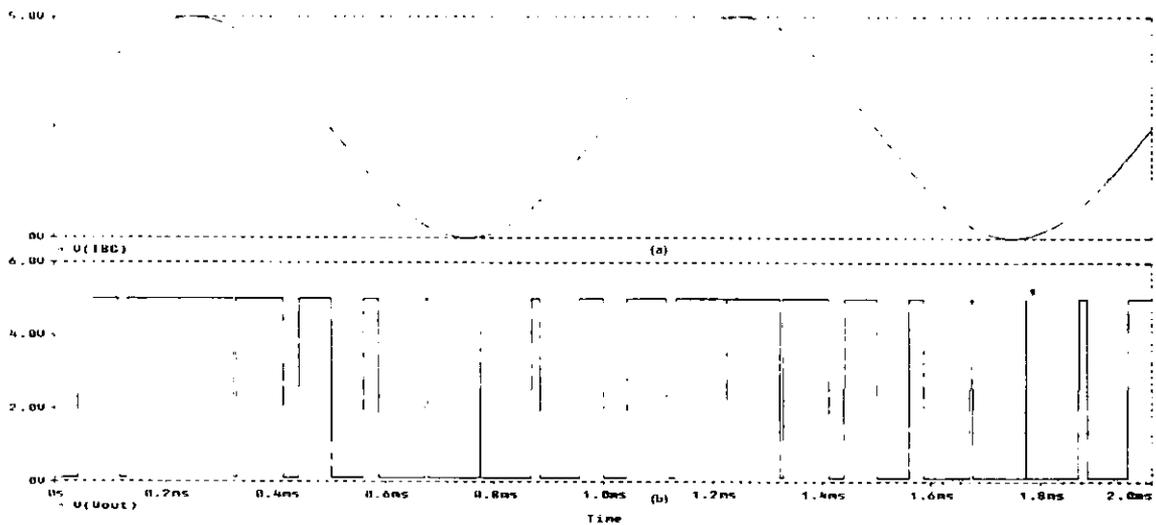


Figura 5.3 (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG). (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la figura 5.2 se muestran los resultados obtenidos para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois : (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Cortes λ (CL), (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), y (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) que es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

En la gráfica (a) de la fig. 5.2 se observa que la suma borrosa extendida (XOR borrosa) es la misma señal de entrada V_{in1} . Los cortes λ proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso (XOR), se muestran en la fig. 5.2 (b).

La integral borrosa tipo Dubois de la señal de salida del sumador borroso, tiene una forma ascendente al inicio de la gráfica debido al capacitor C1 del circuito electrónico de la figura 3.6. Esta integral borrosa (fig. 5.2 (c)), es proporcional en amplitud a los cortes λ .

En la figura 5.2 (d) se muestra la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois, donde se puede observar que los pulsos (V_{out}) son de la misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso es de [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Dubois (IBD).

En la figura 5.3 se muestran las gráficas obtenidas para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta : (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG), y (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

Como obtener la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada es obtener el máximo de esas señales, en la fig. 5.3 (a) se aprecia claramente que la integral borrosa (suma borrosa) de la señal de entrada V_{in1} , es en cada instante el valor máximo de esta señal, o sea, es la misma señal de entrada V_{in1} .

La respuesta de la neurona borrosa es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta (fig. 5.3 (b)), y debido a la función de activación (tipo escalón) empleada en este caso, esta respuesta son pulsos de una misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso corresponde a [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Gupta (fig. 5.3 (a)).

Al comparar las respuestas borrosas de las dos neuronas borrosas, fig. 5.2 (d) para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y fig. 5.3 (b) para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, se observan que son diferentes y, por lo tanto, si

para una componente armónica como es la señal de entrada V_{in1} , la respuesta borrosa en las dos neuronas borrosas es diferente, entonces, no existe alguna composición armónica tal que aplicada como señal de entrada a ambas neuronas borrosas produzca la misma señal de salida (respuesta borrosa) en las dos neuronas integradoras borrosas. También se observa que en la respuesta de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se presenta un transitorio al inicio de la respuesta aproximadamente en el intervalo de 0 a 1 ms (fig. 5.2 (d)) y posteriormente se estabiliza. En cambio en la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta (fig. 5.3 (b)), no se presenta ningún transitorio, esta señal de salida es estable desde el inicio (0 s).

En la segunda simulación las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} , son señales senoidales con una amplitud pico a pico de 5 V, una frecuencia de 1 KHz y defasadas 180° entre sí (figura 5.4 (a) y (b)). Las señales de salida se muestran en la fig. 5.5 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y en la fig. 5.6 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la figura 5.5 se muestran los resultados obtenidos para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois : (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Cortes λ (CL), (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), y (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) que es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

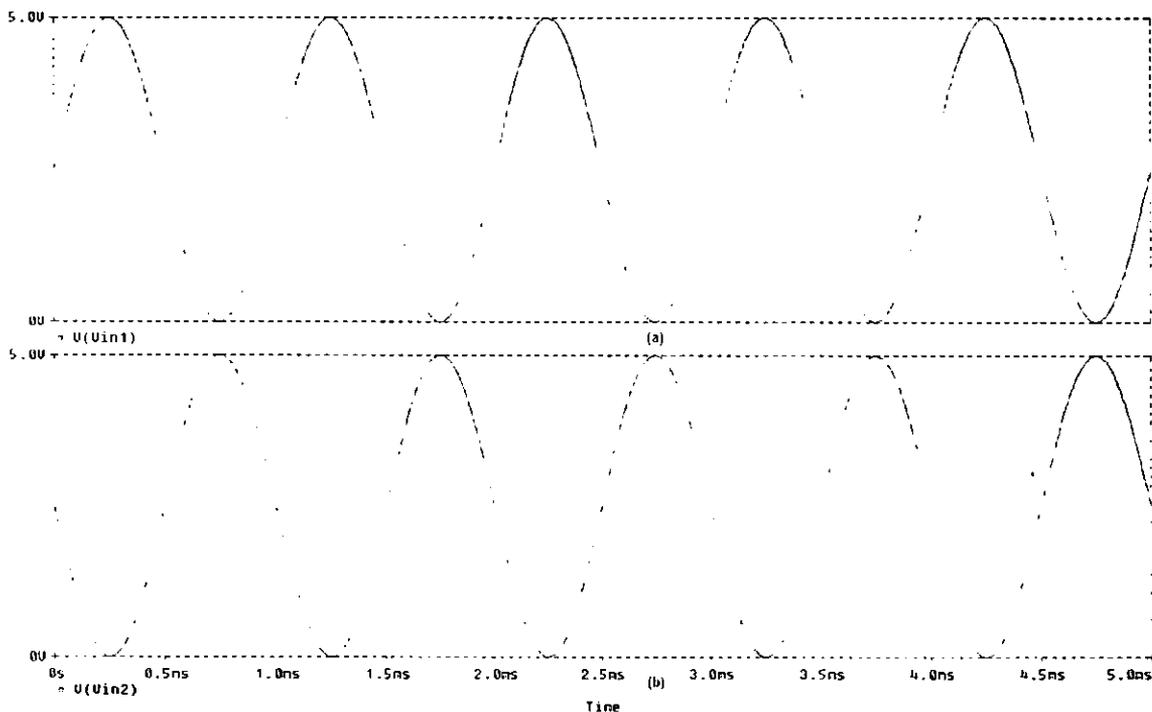


Figura 5.4 (a) Señal de entrada (V_{in1}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 0° . (b) Señal de entrada (V_{in2}) senoidal, con una frecuencia de 1 KHz y defasada 180° .

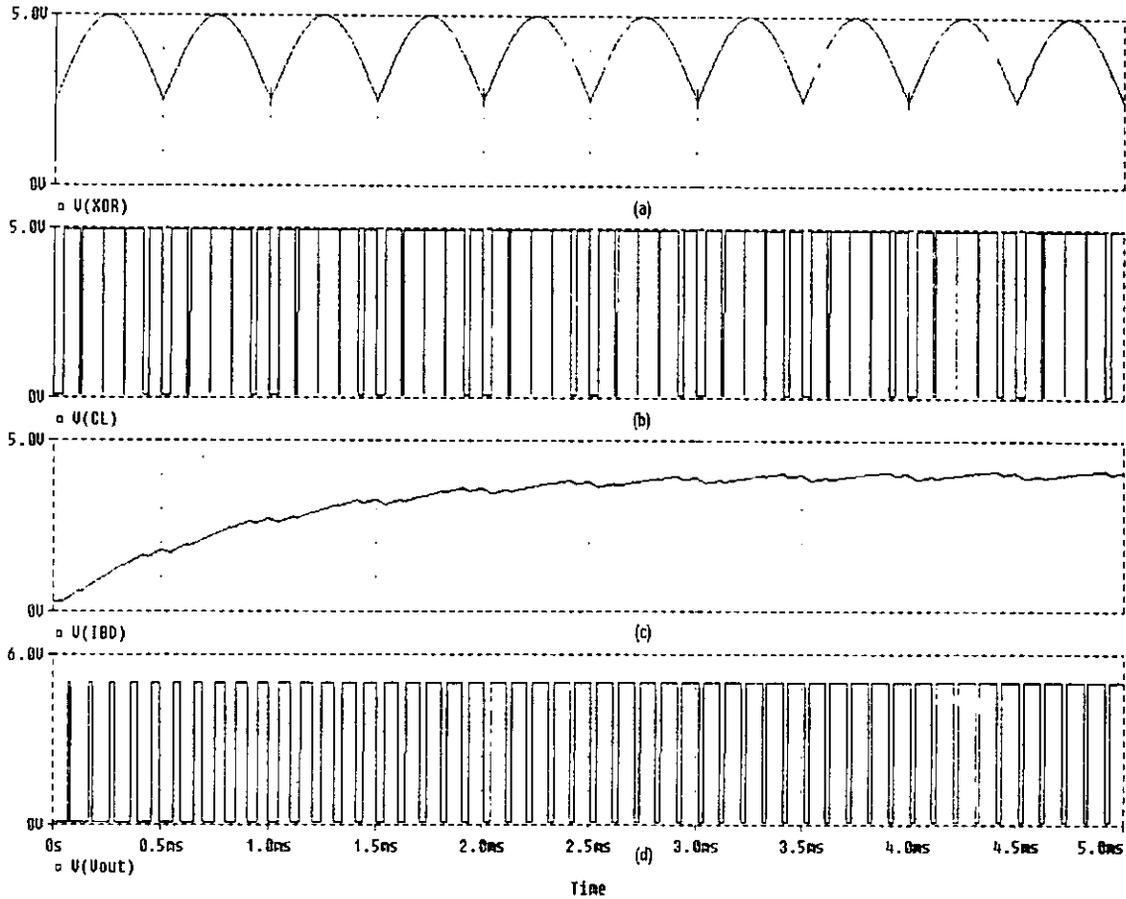


Figura 5.5 (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR). (b) Cortes λ (CL). (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

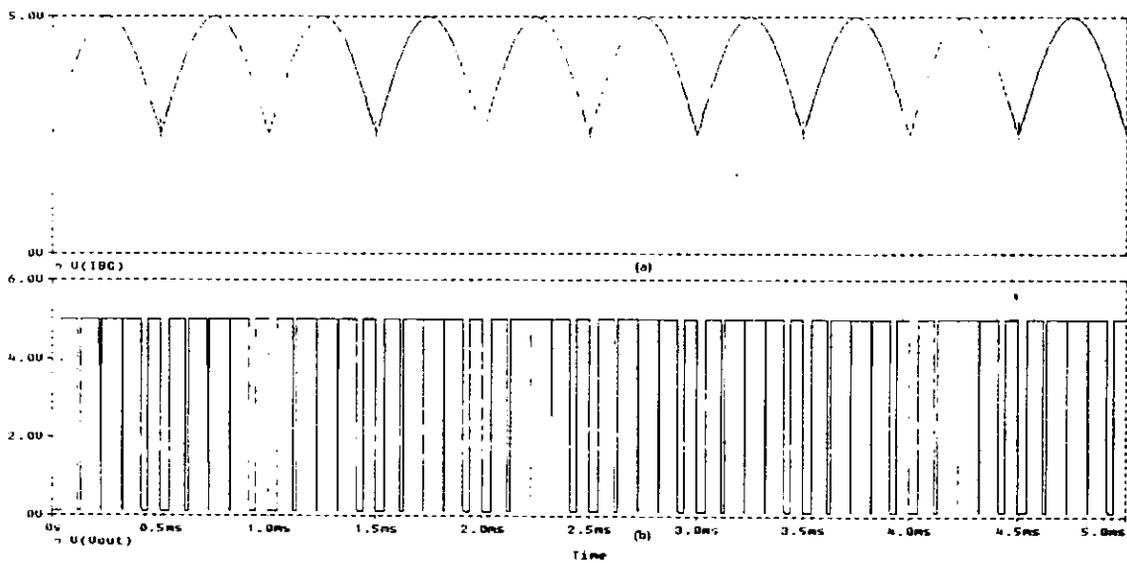


Figura 5.6 (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IGG). (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 5.5 de la suma borrosa extendida (XOR) se puede apreciar claramente la diferencia entre realizar una suma borrosa y una no borrosa, es decir, la suma no borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} es cinco volts para todo tiempo t , en cambio la suma borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} no es cinco volts para todo tiempo t , como se muestra en la figura 5.5 (a). Por lo tanto se puede decir que en la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se llevan a cabo procesos neuronales borrosos, mismos que producen un resultado borroso.

Los cortes λ son proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso (XOR), se muestran en la fig. 5.5 (b). La integral borrosa tipo Dubois de la señal de salida del sumador borroso, tiene una forma ascendente al inicio de la gráfica debido al capacitor C1 del circuito electrónico de la figura 3.6. Esta integral borrosa (fig. 5.5 (c)), es proporcional en amplitud a los cortes λ .

En la figura 5.5 (d) se muestra la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois, donde se puede observar que los pulsos (V_{out}) son de la misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso es de [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Dubois (IBD).

En la figura 5.6 se muestran las gráficas obtenidas para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta : (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG), y (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 5.6 (recordando que en el modelo de neurona de Gupta el sumador y el integrador borroso de la fig. 3.4 son uno solo), se puede observar claramente que la integral borrosa de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} no es la suma no borrosa de V_{in1} y V_{in2} (cinco volts), sino un resultado borroso producido por una OR borrosa generalizada. La integral borrosa (suma borrosa) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} , es en cada instante el valor máximo de las dos señales de entrada.

La respuesta de la neurona borrosa es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta (fig. 5.6 (b)), y debido a la función de activación (tipo escalón) empleada en este caso, esta respuesta son pulsos de una misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso corresponde a [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Gupta (fig. 5.6 (a)).

Comparando el primer resultado que se obtuvo en las dos neuronas borrosas (fig. 5.5 (a) y 5.6 (a)), se puede observar claramente que a partir de dos señales de entrada (señales clásicas) V_{in1} y V_{in2} , se obtuvo un resultado borroso, ya que la suma no borrosa de V_{in1} y V_{in2} es cinco volts para todo tiempo t , en cambio, tanto la suma borrosa para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois como la integral borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, no fue cinco volts sino un resultado borroso, por lo tanto, en las dos neuronas borrosas se llevan a cabo procesos neuronales borrosos, mismos que producen un resultado borroso.

En la tercera simulación las señales de entrada (fig. 5.7) son : (a) Señal de entrada (V_{in1}) triangular, con una amplitud pico a pico de 5 V y con una frecuencia de 1 KHz, y (b) Señal de entrada (V_{in2}) cuadrada, con una amplitud de 5 V, una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1ms. Las señales de salida se muestran en la fig. 5.8 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y en la fig. 5.9 para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la figura 5.8 se muestran los resultados obtenidos para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois : (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR), (b) Cortes λ (CL), (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), y (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}) que es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

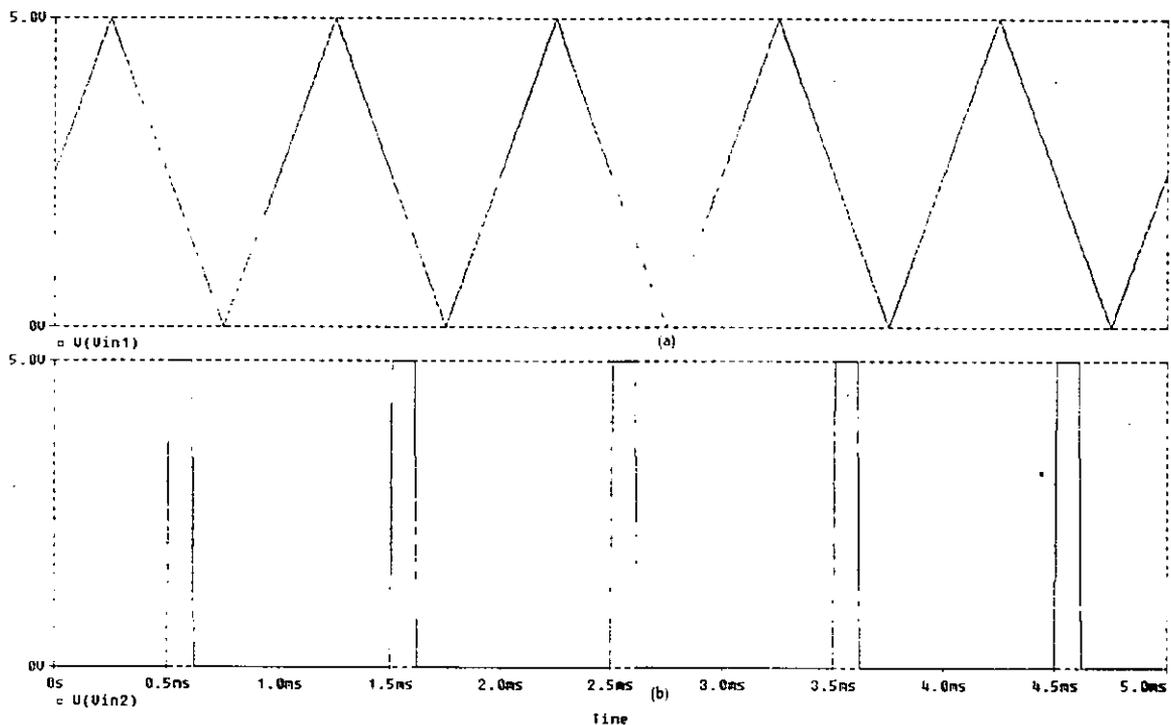


Figura 5.7 (a) Señal de entrada (V_{in1}) triangular y con una frecuencia de 1 KHz. (b) Señal de entrada (V_{in2}) cuadrada, con una frecuencia de 1 KHz y un ancho de pulso de 0.1ms.

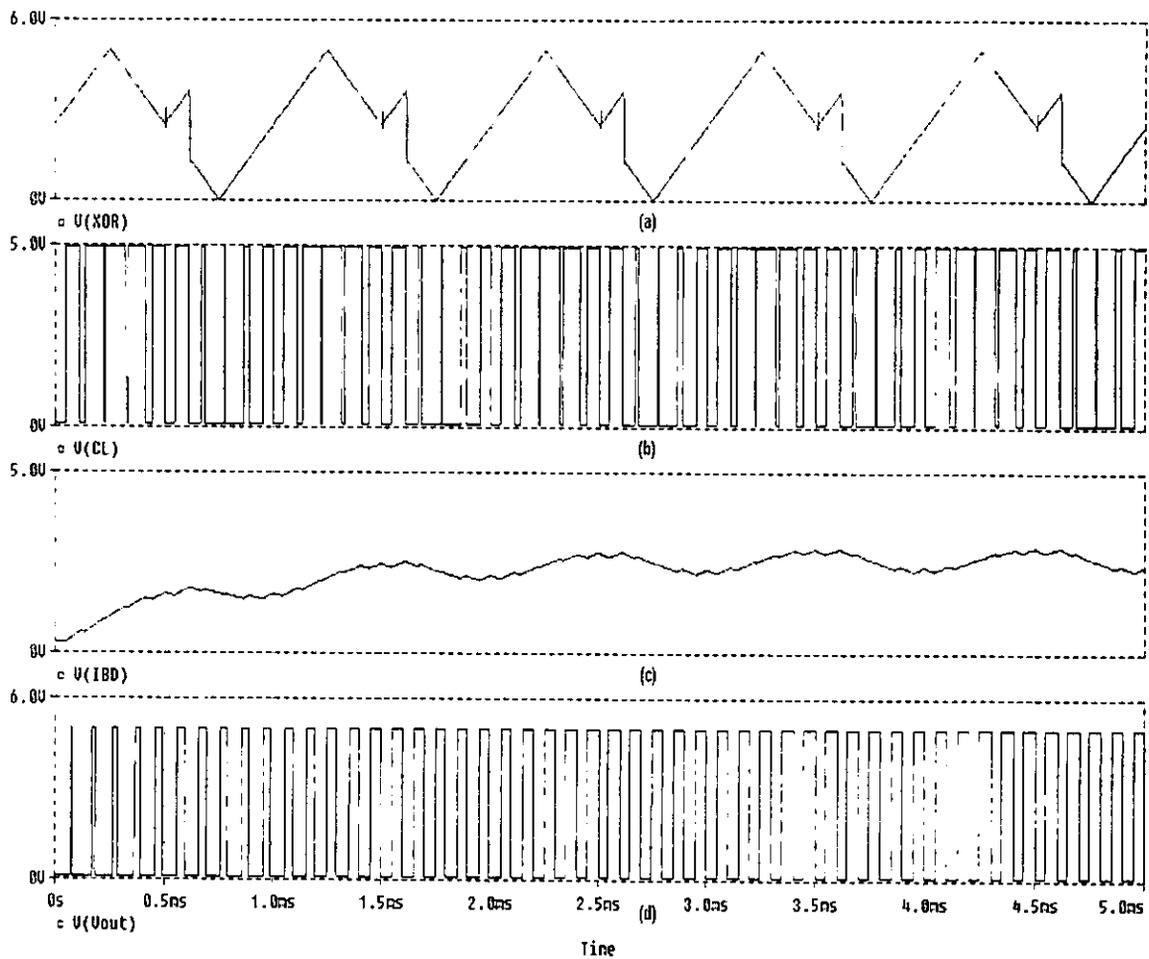


Figura 5.8 (a) Señal de salida del sumador borroso (XOR). (b) Cortes λ (CL). (c) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Dubois (IBD), (d) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

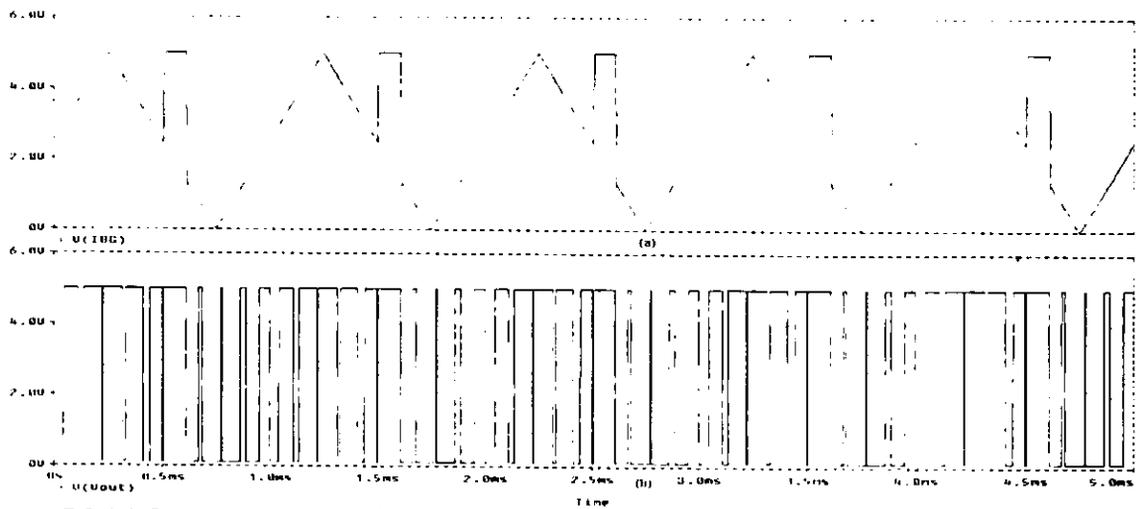


Figura 5.9 (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG). (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 5.8 se puede apreciar la suma borrosa extendida (XOR) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} de la figura 5.7 (a) y (b). En 0.5 ms la amplitud de V_{in1} es de 2.5 V y de V_{in2} es de 5 V, por lo tanto la suma no borrosa de estas dos señales en 0.5 ms es 7.5 volts, en cambio la suma borrosa es 2.5 V como se puede observar en la fig. 5.8 (a). Por lo tanto se puede decir que el primer proceso neuronal borroso que se lleva a cabo en la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois es la suma borrosa extendida, misma que produce un resultado borroso.

Los cortes λ , proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del sumador borroso (XOR), se muestran en la fig. 5.8 (b). La integral borrosa tipo Dubois de la señal de salida del sumador borroso, tiene una forma ascendente al inicio de la gráfica debido al capacitor C1 del circuito electrónico de la figura 3.6. Esta integral borrosa (fig. 5.8 (c)), es proporcional en amplitud a los cortes λ .

En la figura 5.8 (d) se muestra la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois, donde se puede observar que los pulsos (V_{out}) son de la misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso es de [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y en frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Dubois (IBD).

En la figura 5.9 se muestran las gráficas obtenidas para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta : (a) Señal de salida del Integrador Borroso tipo Gupta (IBG), y (b) Respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En la gráfica (a) de la figura 5.9 se observa la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada de la fig. 5.7. Recordando que obtener una OR borrosa de varias señales es obtener el máximo de esas señales, en la fig. 5.9 (a) se puede apreciar claramente que la integral borrosa (suma borrosa) de las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} (que son señales unipolares), es en cada instante el valor máximo de las dos señales de entrada.

La respuesta de la neurona borrosa es la señal de salida (respuesta borrosa) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta (fig. 5.9 (b)), y debido a la función de activación (tipo escalón) empleada en este caso, esta respuesta son pulsos de una misma amplitud (pulsos normalizados en un intervalo cerrado unipolar [0,1], que en este caso corresponde a [0,5] Volts), y proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la señal de salida del integrador borroso tipo Gupta (fig. 5.9 (a)).

Al comparar las gráficas de las señales de salida de las neuronas integradoras borrosas tipo Dubois y Gupta (figuras 5.2(d) y 5.3 (b) para la primera simulación, 5.5 (d) y 5.6 (b) para la segunda simulación y, 5.8 (d) y 5.9 (b) para la tercera simulación), se puede observar que como se esperaba las respuestas borrosas obtenidas para las dos neuronas borrosas, en cada caso, son diferentes para las mismas señales de entrada, también se observa que para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se tienen cuatro señales de salida (fig. 5.2, 5.5 y 5.8) : del sumador borroso extendido (XOR borrosa), de los cortes λ (CL), del integrador borroso tipo Dubois (IBD) y de la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}), y para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se tienen únicamente dos señales de salida (fig. 5.3, 5.6 y 5.9) : del integrador borroso tipo Gupta (IBG) y de la respuesta de la neurona borrosa (V_{out}).

En la gráfica (a) de las figuras 5.2 y 5.3 para la primera simulación, 5.5 y 5.6 para la segunda simulación y, 5.8 y 5.9 para la tercera simulación, para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se obtuvo la suma borrosa de las señales de entrada (fig. 5.1 para la primera simulación, 5.4 para la segunda simulación y 5.7 para la tercera simulación), y para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se obtuvo la integral borrosa de las mismas señales de entrada. En ambos casos se obtuvo un resultado borroso a partir de señales de entrada clásicas, esto quiere decir que en las dos neuronas borrosas se realizó un proceso neuronal borroso.

Comparando la respuesta borrosa de ambos integradores borrosos (tipo Dubois y Gupta) para las tres simulaciones realizadas, se puede observar que en la señal de salida del IBD (fig. 5.2 (c), 5.5 (c) y 5.8 (c)) se obtuvo en las tres simulaciones una curva que es la integral no borrosa de los cortes λ y a su vez es la integral borrosa de la suma borrosa de las señales de entrada, esta curva no presenta cambios notables en su amplitud (debido a la constante de tiempo τ del integrador no borroso del bloque IBD de la fig. 3.6), en cambio, en la gráfica de la señal de salida del IBG (fig. 5.3 (a), 5.6 (a) y 5.9 (a)) se observa que los cambios en la amplitud de la integral borrosa de las señales de entrada son más notables y varían de acuerdo a la OR borrosa de las señales de entrada.

Dado que las señales de salida de los integradores borrosos IBD e IBG son diferentes, entonces los pulsos (señal de salida V_{out}) de cada neurona borrosa son también diferentes como se puede observar en las gráficas de las figuras 5.2 (d) y 5.3 (b) para la primera simulación, 5.5 (d) y 5.6 (b) para la segunda simulación y, 5.8 (d) y 5.9 (b) para la tercera simulación. Aunque las dos respuestas borrosas (V_{out}) de ambas neuronas borrosas son diferentes entre sí (para cada simulación), las dos respuestas borrosas (en este caso, pulsos), varían de manera proporcional en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de las integrales borrosas de cada neurona integradora borrosa.

Otra observación importante es que en la respuesta borrosa (V_{out}) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se presenta un transitorio al inicio de la respuesta aproximadamente en el intervalo de 0 a 1 ms y posteriormente se estabiliza. En cambio en la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, no se presenta ningún transitorio, esta señal de salida es estable desde el inicio (0 s).

En cuanto al Modelo Electrónico de las Neuronas Integradoras Borrosas de las figuras 3.6 y 4.6, se puede observar que el circuito electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois consta de tres bloques y la tipo Gupta de dos. El último bloque (FA) es el mismo para cada neurona y el integrador borroso en el primer modelo electrónico es tipo Dubois y en el segundo es tipo Gupta.

En la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se tiene un sumador borroso extendido en el primer bloque, en cambio en la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta el sumador y el integrador borrosos son uno solo.

Ambos modelos electrónicos de una neurona integradora borrosa realizan un proceso neuronal borroso y producen una respuesta borrosa, esta respuesta no se podría obtener con una neurona artificial clásica [12]. También, los dos modelos electrónicos permiten realizar en un simulador el análisis del comportamiento de ambas neuronas integradoras borrosas.

Los dos modelos electrónicos de neuronas integradoras borrosas tipo Dubois y Gupta, proporcionan una opción alternativa a otros modelos de neuronas borrosas publicados [7], además de utilizar un menor número de componentes electrónicos.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Se obtuvieron los modelos electrónicos de dos neuronas integradoras borrosas que combinan tanto la teoría de la lógica borrosa como la de las neuronas artificiales. Ambas neuronas borrosas son otra opción con respecto a otros modelos electrónicos propuestos [7]. El primer modelo electrónico con base en la neurona de la figura 3.4, y consta de un sumador borroso extendido (XOR borrosa), un integrador borroso tipo Dubois y una función de activación con umbral (para generar la respuesta de la neurona borrosa). El integrador borroso parte de la Teoría del Cálculo Integral Borroso de Dubois, utilizando los cortes λ y la ecuación (3.10), de ahí el nombre de Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois.

El segundo modelo electrónico se basa en el modelo de neurona de la figura 4.4 y lo forman dos bloques, un integrador borroso (OR borrosa generalizada) y una operación somática no lineal con umbral (donde se genera la respuesta de la neurona borrosa). El integrador borroso se fundamenta en la Teoría de neuronas borrosas de Gupta, por lo que este modelo se denomina Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.

En los capítulos tres y cuatro se presentaron los modelos electrónicos correspondientes a cada neurona, al igual que las gráficas obtenidas para dos simulaciones distintas, en donde se puede apreciar que los resultados de ambas neuronas son resultados borrosos como se esperaba, debido a que ambas neuronas tienen funciones y operaciones borrosas que dan origen a un proceso neuronal borroso y por tanto conducen a un resultado borroso.

El modelo electrónico de neurona integradora borrosa desarrollado tanto para la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois como para la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta utiliza principalmente los operadores Max, Min e Inv o alguno de ellos, con lo que se obtiene un diseño sencillo en cuanto a los componentes electrónicos empleados.

El Integrador Borroso basado en la teoría del cálculo integral borroso propuesta por Dubois parte de la integral de Riemann de igual forma que el cálculo integral clásico y además de la definición de la integral borrosa, Dubois presenta algunas propiedades y herramientas matemáticas como las curvas λ que facilitan el cálculo de integrales de mapeos borrosos en intervalos borrosos y no borrosos.

En el caso del Integrador Borroso propuesto por Gupta se fundamenta en una suma borrosa no finita llamada operación de agregación y definida como la operación OR generalizada (operador Max de N entradas) para realizar la integral borrosa.

En el capítulo cinco se compararon los resultados obtenidos de ambas neuronas integradoras borrosas y se puede observar en las gráficas presentadas que para las mismas señales de entrada se obtuvieron resultados borrosos distintos, esto se debe a que las dos Neuronas Integradoras Borrosas parten de dos modelos de neurona diferentes y el integrador borroso de cada neurona se fundamenta en dos teorías distintas una desarrollada por Dubois y la otra por Gupta.

Durante el desarrollo de esta tesis se obtuvieron los siguientes resultados:

- * En la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se obtuvo:
 - Como primer resultado borroso, la suma borrosa (XOR borrosa) de las señales de entrada (en este caso, señales clásicas y unipolares).
 - Los cortes λ proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la suma borrosa de las señales de entrada. Estos cortes λ se normalizaron a un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$.
 - La integral borrosa de la suma borrosa de las señales de entrada. Esta integral borrosa no presentó cambios de amplitud notables debido a la τ del integrador no borroso (ordinario) del bloque IBD de la fig. 3.6, sin embargo, si se requiere aumentar la velocidad de respuesta del integrador no borroso, entonces se puede disminuir el valor de la constante de tiempo τ y el valor del capacitor C1 para que tarde un menor tiempo en cargarse y descargarse este capacitor. La señal de salida del IBD es también la integral no borrosa (clásica) de los cortes λ .
 - La respuesta borrosa (señal de salida) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois a los estímulos externos (señales de entrada). Los pulsos que constituyen a la respuesta borrosa de la neurona integradora borrosa, son proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la integral borrosa de las señales de entrada, y se normalizaron a un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$. Si se requiere obtener una mejor apreciación de las variaciones de la integral borrosa y por lo tanto de la respuesta borrosa de la neurona integradora borrosa mediante los pulsos. entonces se puede aumentar la frecuencia de la señal triangular (TRIANG2) que se utilizó como valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa.
- * En la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se obtuvieron los siguientes resultados:
 - El primer resultado borroso obtenido en esta neurona borrosa fue la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada (en este caso, señales clásicas y unipolares). En la gráfica de la señal de salida del IBG se

observó que la integral borrosa de las señales de entrada era el máximo (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada para todo tiempo t .

- La respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta a los estímulos externos (señales de entrada). Los pulsos obtenidos, fueron proporcionales en duración (ancho de pulso) y frecuencia a la amplitud de la integral borrosa de las señales de entrada y se normalizaron a un intervalo cerrado unipolar $[0,1]$. Si se requiere obtener una mejor apreciación de las variaciones de la integral borrosa y por lo tanto de la respuesta borrosa de la neurona integradora borrosa mediante los pulsos, entonces se puede aumentar la frecuencia de la señal triangular (Triang) que se utilizó como valor de umbral para generar la respuesta de la neurona borrosa.
- * También se comprobó que aunque a la entrada de ambas neuronas integradoras borrosas, en este caso se tienen señales clásicas, a la salida de cada neurona integradora borrosa se obtuvieron resultados borrosos, resultados que no se podrían obtener con las neuronas artificiales clásicas [12]. El primer resultado borroso que se obtuvo en la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois fue la suma borrosa (XOR borrosa) de las señales de entrada y en la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta la integral borrosa (OR borrosa generalizada) de las señales de entrada, el caso en el que se observa más claramente que a partir de señales de entrada clásicas se obtiene un primer resultado borroso es cuando las señales de entrada V_{in1} y V_{in2} son dos señales senoidales con una amplitud pico a pico de 0 a 5 V, una frecuencia de 1 KHz y defasadas 180° entre sí, ya que en este caso la suma no borrosa de las señales V_{in1} y V_{in2} es cinco volts para todo tiempo t , en cambio la suma borrosa de V_{in1} y V_{in2} en las dos neuronas integradoras borrosas no fue cinco volts, sino un resultado borroso.
- * Al obtener en las dos neuronas integradoras borrosas un resultado borroso a partir de señales de entrada clásicas, quiere decir que en las dos neuronas integradoras borrosas se realizó un proceso neuronal borroso.
- * Otra conclusión que se obtuvo a partir de la comparación de las señales de salida (V_{out}) de las dos neuronas integradoras borrosas, es que no existe una composición armónica tal que aplicada como señal de entrada a las dos neuronas borrosas produzca el mismo resultado borroso en ambas neuronas.
- * En la respuesta borrosa (V_{out}) de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois se presenta un transitorio al inicio de la respuesta aproximadamente en el intervalo de 0 a 1 ms y posteriormente se estabiliza. En cambio en la respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta, no se presenta ningún transitorio, esta señal de salida es estable desde el inicio (0 s).

- * En base a los resultados obtenidos en ambas neuronas integradoras borrosas y dependiendo de la respuesta borrosa que se desee obtener a partir del proceso neuronal borroso de las señales de entrada, se puede concluir que si se requiere obtener los valores medios o de agregación de las señales de entrada, mediante un sumador borroso y un integrador borroso tipo Dubois, para obtener la respuesta borrosa de la neurona integradora borrosa, será conveniente utilizar el modelo electrónico de la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois. De otra forma, si se requiere obtener los valores máximos de las señales de entrada, mediante un integrador borroso tipo Gupta, para obtener la respuesta borrosa de la neurona integradora borrosa, entonces el modelo electrónico a utilizar será el de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta.
- * Si se requiere de un modelo electrónico que realice un proceso en el que se obtenga como respuesta borrosa los valores medios de los valores máximos de las señales de entrada, entonces se utilizará primero la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta para obtener los valores máximos de las señales de entrada y después la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois para obtener los valores medios de los valores máximos de las señales de entrada. De otro modo, si se requiere de un modelo electrónico que realice un proceso en el que se obtenga como resultado borroso los valores máximos de los valores medios o de agregación de las señales de entrada, entonces se utilizará primero la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois para obtener los valores medios o de agregación de las señales de entrada y después la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta para obtener los valores máximos de los valores medios de las señales de entrada.
- * Las conclusiones anteriores sugieren proponer varias simulaciones a realizar a partir de los modelos electrónicos de las neuronas integradoras borrosas que se presentan en este trabajo, la primer simulación propuesta es conectar dos neuronas integradoras borrosas para observar y analizar su comportamiento en el simulador (Pspice V. 7.1), estas dos neuronas borrosas pueden ser dos Neuronas Integradora Borrosas tipo Dubois o dos Neuronas Integradoras Borrosas tipo Gupta o una tipo Dubois y la otra tipo Gupta. Otras simulaciones propuestas son para analizar el comportamiento de ambas neuronas integradoras borrosas al variar algunos de sus parámetros como son la forma y frecuencia de las señales que se utilizan como valor de umbral en las funciones de activación y en los cortes λ . En el caso de los cortes λ se pueden obtener más cortes λ de la suma borrosa de las señales de entrada agregando más comparadores con diferentes señales como valor de umbral y después realizar una suma no borrosa de todos los cortes λ para después obtener la integral borrosa de la suma de todos los cortes λ de la suma borrosa de las señales de entrada. Otro parámetro que se puede variar es el tipo de función de activación, en este trabajo se utilizó una función de activación tipo escalón, sin embargo, también puede ser por ejemplo sigmoideal. También se puede realizar un análisis

mediante el simulador con relación a la señal de salida (respuesta borrosa) y al número de señales de entrada en las neuronas integradoras borrosas.

◆ Aplicaciones:

- * Procesamiento de señales.- en el caso de procesamiento de imágenes, si se tiene una imagen con diferentes tonalidades de gris desde el blanco hasta el negro, y se requiere obtener los valores medios (valores borrosos con grado de membresía en 0.5 o en el caso de señales de imagen, señales que sean tonos de gris entre el blanco y el negro) de la imagen, entonces se pueden procesar las señales que constituyen la imagen mediante la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y obtener a la salida los valores medios de la imagen, o sea, señales con tonos de gris intermedios entre el blanco y el negro. Por otra parte si lo que se requiere obtener es una imagen en blanco y negro sin tonalidades de gris a partir de una imagen como la que se mencionó anteriormente (con tonalidades de gris desde el blanco hasta el negro), entonces esta imagen se puede procesar mediante la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta para obtener los valores máximos (valores con grado de membresía o pertenencia de 1, o señales ya sea en blanco o en negro pero no de tonos de gris). Como señal de salida o respuesta borrosa de la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se obtendrían los valores máximos de la imagen, o dicho de otra forma, las señales en blanco y negro de la imagen (sin las señales de tonalidades de gris de la imagen).
- * Sistemas aproximadores.- Si se requiere de un sistema que aproxime las señales de entrada a valores medios o borrosos (con un grado de membresía de 0.5), y que la señal de salida sea precisamente estos valores medios, entonces el sistema aproximador que se requiere es la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois para procesar las señales de entrada y obtener como señal de salida los valores medios de las señales de entrada que tiendan a un grado de membresía o pertenencia de 0.5. En cambio si se requiere de un sistema que aproxime las señales de entrada a los valores máximos o con grado de membresía o pertenencia de 1, entonces el sistema aproximador requerido es la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta para procesar las señales de entrada de modo tal que a la salida del sistema se obtenga una respuesta borrosa constituida por los valores máximos de las señales de entrada.
- * Fusificadores para redes neuronales.- Sea un proceso tal que si se le aplican como señales de entrada señales clásicas, a la salida del proceso se obtiene como señal de salida una respuesta borrosa, a este proceso se le llamará fusificación. Tanto la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois como la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta presentadas en esta tesis, reciben como señales de entrada señales clásicas y como señal de salida se obtiene una respuesta borrosa, por lo tanto, la Neurona Integradora Borrosa tipo Dubois y la Neurona Integradora Borrosa tipo Gupta se pueden utilizar como fusificadores en redes neuronales.

ESTÁ TRABAJO NO DEBE SER COPIADO SIN EL CONSENTIMIENTO DEL AUTOR

- * La principal aportación de este trabajo es la obtención de dos modelos electrónicos de una neurona integradora borrosa que realizan un proceso neuronal borroso y producen una respuesta borrosa, esta respuesta no se podría obtener con una neurona artificial clásica [12]. Además, los dos modelos electrónicos permiten realizar en un simulador el análisis del comportamiento de ambas neuronas integradoras borrosas.

- * En conclusión se puede decir que se cumplió con el objetivo de esta tesis debido a que se obtuvieron dos modelos electrónicos de una Neurona Integradora Borrosa bajo dos filosofías distintas una propuesta por Dubois y la otra por Gupta.

BIBLIOGRAFÍA

1. Carver Mead, Analog VLSI and Neural Systems, Addison-Wesley Publishing Company, E:U.A., Agosto, 1989, pp. 43-47.
2. L.A. Zadeh, Theory of Fuzzy Sets, Encyclopedia of Computer Science and Technology, Marcel Dekker, Nueva York, E.U.A., 1977.
3. Didier Dubois y Henri Prade, Fuzzy Sets and Systems, North-Holland Publishing Company, 1982, pp. 1-17.
4. Madan M. Gupta, Fuzzy Logic and Neural Networks, Proceedings of the Tenth International Conference on Multiple Criteria Decision Making (TAIPEI'92), vol. 3, Japón, Julio 19-24, 1992, pp. 281-294.
5. Howard M. Berlin y Frank C. Getz, Fundamentals of Operational Amplifiers and Linear Integrated Circuits, Merrill Publishing Company, E.U.A., 1990, pp.190-193 y 207-208.
6. Ronald J. Tocci, Sistemas Digitales, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1993, pp. 459-461.
7. J. L. Pérez S., F. Lara, A. Herrera, etal, Electronic Model of a Extended Fuzzy Neuron, Proceedings of The Second Join México - E.U.A. International Conference on Neural Networks and Neurocontrol (Sian Ka'an 97), Playa del Carmen, Quintana Roo, México, Agosto 19-29, 1997, pp. 189-199.
8. J. Castillo, J. L. Pérez S., Design of a Fuzzy Controller based on analog electronics, Proceedings of The Second Join México - E.U.A. International Conference on Neural Networks and Neurocontrol (Sian Ka'an 97), Playa del Carmen, Quintana Roo, México, Agosto 19-29, 1997, pp. 142-155.
9. R. A. Flores, P. Sotelo, Fuzzy Logic Controller for an Adaptive Optic System (applied to astronomy), Proceedings of The Second Join México - E.U.A. International Conference on Neural Networks and Neurocontrol (Sian Ka'an 97), Playa del Carmen, Quintana Roo, México, Agosto 19-29, 1997, pp. 209-216.
10. Eric R. Kandel, James H. Schwartz, Thomas M. Jessell, Principles of Neural Science, Elsevier Science Publishing Co. Inc., New York, E.U.A., 1991 pp.18-32.
11. Simon Haykin, Neural Networks, Macmillan College Publishing Company, Nueva York, E.U.A., 1994, pp. 1-15.
12. S. Quintana, A. Herrera, J. L. Pérez S., A comparative study of two elementary Neural Processors, Proceedings of The Second Join México - E.U.A. International Conference on Neural Networks and Neurocontrol (Sian Ka'an 97), Playa del Carmen, Quintana Roo, México, Agosto 19-29, 1997, pp. 1-12.