



01173

10

2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

T E S I S  
APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE VIBRACIONES  
PARA LA REDUCCIÓN DE RUIDO EN FRENOS

PRESENTADA POR:

CARLOS TORRES GARCÍA VILLALOBOS

PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA  
(DISEÑO Y MANUFACTURA)

DIRIGIDA POR:

DR. JOSÉ LUIS URRUTIA GALICIA

TESIS CON  
VALIA DE ORIGEN

Ciudad Universitaria

1998

265201



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Agradezco de forma especial la colaboración y paciencia del Dr. José Luis Urrutia Galicia en la elaboración de este trabajo, sin la cual no hubiera sido posible.

Gracias al Dr. Jorge Carrera Bolaños y al Dr. Luis Ferrer Argote por su apoyo en todo momento.

Al Dr. Orlando Díaz López, gracias por sus valiosas aportaciones. .

Gracias a mi mamá por realizar todo el trabajo rudo.

## Indice

1. Introducción	1
2. Antecedentes históricos	5
3. Revisión de teorías existentes	7
3.1 Wilhelm Flügge . Ecuaciones de equilibrio	7
3.2 Deformaciones	9
3.3 Equilibrio dinámico	16
3.4 Simplificaciones de Love	18
3.5 Aproximación de la membrana. Lord Rayleigh	20
3.6 Simplificación de Donnell	20
4. Ecuaciones para tambores y zapatas	26
4.1 Galerkin	26
4.2 Análisis de frecuencias	29
4.3 Panel cilíndrico circular	40
4.4 Densidad de frecuencias	42
5. Conclusiones	46
Referencias	49
Apéndice	50

## Nomenclatura

$x, y, z$	Coordenadas de posición
$t$	Tiempo
$\mu$	Relación de Poisson
$h$	Espesor del cascarón
$\rho$	Densidad del material
$E$	Módulo de elasticidad
$r$	Radio del cascarón
$L, l$	Longitud del cascarón
$m$	Modo longitudinal de vibración
$n$	Modo transversal de vibración
$\phi$	Coordenada angular
$\xi_\phi$	Deformación angular
$\varepsilon_x$	Deformación en dirección $x$
$\varepsilon_\phi$	Deformación en dirección $\phi$
$M$	Momento
$N$	Fuerza axial
$K$	Rigidez de membrana
$D$	Rigidez flexionante
$P_x, P_\phi, P_r$	Cargas de superficie
$\lambda$	Valor característico
$\Phi$	Función de Airy
$\omega$	Frecuencia natural
$\sigma$	Esfuerzo normal
$\tau$	Esfuerzo cortante
$u, v, w$	Desplazamientos en $x, y, z$
$k$	Relación de parámetros geométricos de un cilindro
$k^2$	Constante usada por Bernoulli en la ecuación de placas
$q$	Relación entre las rigideces $D$ y $K$
$Q$	Cortante
$L_1, L_2, L_3$	Funciones de $u, v, w$
$\eta$	Valor característico de la ecuación de vigas

La operación de los frenos de tambor se puede describir brevemente como sigue: el tambor gira junto con la rueda a la que está unido mediante tornillos. Las balatas están unidas a la zapata por medio de remaches, y este ensamble está fijo al eje por lo que no puede girar. Al aplicarse el freno el aire entra en el diafragma de la cámara de freno cuyo vástago impulsa el ajustador para hacer girar la leva misma que presiona las balatas contra el tambor que se encuentra girando. La fricción entre estos dos componentes obliga a la rueda a detenerse. La energía se disipa en forma de calor en las partes friccionantes.

El ruido asociado con los frenos se puede definir como vibración causada por la aplicación de la fuerza de fricción tangente a la superficie de los tambores. La respuesta de las zapata-balatas, los tambores o ambos es perceptible a bajas revoluciones, contrario a lo encontrado cuando un tambor está desbalanceado y vibra cuando la frecuencia de las ruedas es alta. Al frenar, cada conjunto de tambor - balata es una fuente de vibración que pudiera causar ruido. El resto del chasis y la carrocería pueden responder a ella en un gran número de formas. Es por eso que algunos vehículos son mas ruidosos que otros.

En la práctica la reducción del ruido se lleva a cabo empleando diversos métodos empíricos, frecuentemente sin fundamento teórico. En lugar de este último, la intuición es la base para dichos métodos por lo que varían ampliamente. Una de las soluciones más comúnmente empleadas es el cambio de material de fricción de las balatas. Los materiales de las balatas se clasifican según su coeficiente de fricción a diferentes temperaturas como se muestra en la tabla 1.1. Los materiales de fricción se definen por medio de dos letras. La primera se refiere al coeficiente de fricción a baja temperatura mientras que la segunda letra indica el coeficiente que se tendrá a alta temperatura. Lo que se persigue con esto es modificar la excitación del sistema.

Código de Clasificación	
Clase	Coefficiente de Fricción
D	0.249 pero no menor a 0.150
E	0.250 A 0.350 inclusive
F	0.351 A 0.450 inclusive
G	0.451 A 0.550 inclusive
H	mayor a 0.550
La primera letra hasta 400° F	
La segunda letra para más de 400° F	

Tabla 1.1

Determinar el material adecuado para cada aplicación puede ser laborioso y no siempre se obtienen los resultados esperados, ya que no existen patrones bien definidos de utilización, desgaste o durabilidad, y la gama de variables involucradas es muy amplia. Tales variables pueden incluir la temperatura del medio ambiente, temperatura de las partes de fricción, frecuencia e intensidad de frenado, calidad de las piezas de fricción, impurezas en el ambiente, humedad, tipo de cargamento, sensibilidad del operador, etc. Normalmente se efectúan pruebas con diferentes materiales de fricción en las que se registra la durabilidad y

la eficiencia de los frenos en frío y en caliente. La determinación del nivel de ruido durante las pruebas es simplemente perceptiva. Además los niveles de ruido tolerables por los diferentes usuarios es también variable, e incluso en la mayor parte de los casos imperceptible, por lo que la selección del tipo de material de fricción adecuado para cada aplicación requiere que se efectúen gran cantidad de pruebas.

Esta tesis intenta ofrecer una solución diferente al determinar los parámetros geométricos de los tambores y zapatas para modificar la respuesta de dichos componentes, sin importar la naturaleza de la carga, es decir, el material de fricción que se utilice no será determinante en la generación del ruido. Se propone un cascarón cilíndrico recto empotrado en uno de sus extremos para simular un tambor y un panel cilíndrico circular simplemente apoyado simulando una zapata.

El capítulo 2 presenta una revisión histórica de los diferentes desarrollos en torno a la vibración de cascarones cilíndricos<sup>1,2,12</sup>. En el capítulo 3 se mostrarán algunos de los métodos utilizados en la actualidad para describir el comportamiento de cascarones comparando los resultados y analizando la convergencia de los métodos<sup>4,5,8,12</sup>. En la literatura se presenta el método de Galerkin<sup>12</sup> aplicado a las ecuaciones de Donnell para un cascarón cilíndrico circular simplemente apoyado. En el capítulo 4, utilizando el método de Galerkin se obtendrá una solución aproximada para un cascarón cilíndrico circular con cualquier combinación de condiciones de frontera mediante la utilización de las funciones de viga y los valores característicos obtenidos en manuales de fórmulas para frecuencias naturales<sup>6</sup>. A partir de esta teoría general, se obtendrá una solución numérica, misma que mostrará que las frecuencias naturales críticas de los tambores (cilindros) y las zapatas (paneles cilíndricos) depende del valor adimensional<sup>9</sup>:

$$k = \sqrt{\frac{l}{r}} \sqrt{\frac{h}{r}}$$

donde  $l$  es la longitud del cilindro,  $h$  es el espesor y  $r$  el radio medio de curvatura. Posteriormente se presenta con varios ejemplos como para cada cascarón, existe una frecuencia natural mínima correspondiente a un valor de  $n$ , que se conoce como modo circunferencial de vibración. Se graficaron miles de estructuras cilíndricas en escala doble logarítmica y se confirma que para cada  $r/h$ , se forma una línea recta<sup>11</sup>. Por medio del cálculo de pendientes se demostró que las líneas para diferentes  $r/h$  son paralelas entre sí.

Con el fin de presentar una solución más completa, se modificaron los valores de  $m$ , modo longitudinal de vibración, encontrando que las líneas  $r/h$  se conservan paralelas para diferentes modos  $m$ , además de que la amplitud entre las líneas  $r/h$  de un modo  $m$  dado es igual para cualquier  $m$ . Lo único que cambia es el valor de la frecuencia natural, por lo que se preparó un nomograma incluyendo el eje de modos  $m$ .

Utilizando el razonamiento anterior se encontró que también para condiciones de frontera diferentes el paralelismo y la amplitud de las líneas  $r/h$  se mantiene constante, cambiando únicamente el valor de la frecuencia natural  $\omega$

Finalmente se presenta un nomograma de frecuencias naturales para cualquier cascarón cilíndrico circular a cualquier combinación de modos  $m$ ,  $n$  y para cualquier combinación de condiciones de frontera.

Con el fin de encontrar una relación más clara entre la geometría de los cilindros y su comportamiento dinámico, se analizó que los valores de  $k$  coinciden con los modos circunferenciales  $n$ , es decir, estructuras cilíndricas con un valor dado de  $k$  tendrán siempre un valor constante  $n$  de ondas circunferenciales<sup>13</sup>. Cascarones con valores más grandes de  $n$  son más propensos a hacer ruido. Se recomendará en primera instancia la utilización de tambores con valores de  $k$  altos, que correspondan a modos  $n$  bajos, menos sensibles a la excitación.

Comúnmente se presta poca, o ninguna atención a la densidad de frecuencias naturales mínimas en un rango determinado de frecuencias para una estructura también determinada<sup>11</sup>. Se mostrará mas adelante que se pueden elegir tambores que tengan baja densidad de frecuencias naturales mínimas en el rango de operación dado, para evitar coincidir con la frecuencia de excitación.

Finalmente en el capítulo 5 se presentarán las conclusiones y recomendaciones de diseño así como las oportunidades para futuras investigaciones.



## 2. Antecedentes Históricos.

El interés en el comportamiento de estructuras de pared delgada se puede encontrar a partir de 1788 cuando James Bernoulli intentó obtener la ecuación de una placa (análisis de vibración) considerando la superposición de un número infinito de curvas de curvatura simple. La ecuación estaba incompleta ya que faltaba un término.

$$k^2 \left( \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

En 1815, la academia francesa de ciencias otorgó un premio a Sophie Germaine al entregar una ecuación de placas casi correcta después de varios intentos. A pesar de haber obtenido el premio, esta ecuación tenía errores, no se habían definido las constantes de rigidez flexionante ni la densidad, aunado a que las condiciones de frontera no se habían planteado correctamente.

Fue Lagrange quien hizo importantes observaciones al trabajo de Germaine por lo que la ecuación de la placa se conoce frecuentemente como la ecuación Germaine - Lagrange. Dicha ecuación es la siguiente:

$$k^2 \left( \frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{2d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

Como se puede observar, James Bernoulli omitió el término

$$\frac{2d^4 z}{dx^2 dy^2}$$

Hoy se sabe que la constante  $k^2$  está definida como:

$$k^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\mu^2)}$$

El problema de vibraciones en cascarones fue atacado en primera instancia por Sophie Germaine antes de 1821 como ya se mencionó. Ella asumió que la deflexión en el plano de la superficie neutra de un cascarón cilíndrico era despreciable. Su resultado contenía errores. En 1874, Arón obtuvo un conjunto de 5 ecuaciones, las cuales se reducían a la ecuación de la placa cuando las curvaturas eran cero. Estas ecuaciones son complicadas debido a su resistencia a utilizar simplificaciones. Las simplificaciones que son extensiones lógicas de las ecuaciones de viga y placas para desplazamientos transversales y en el plano, fueron introducidas por Love en 1888.

En los años intermedios, Lord Rayleigh propuso varias simplificaciones que tomaban la superficie neutra como extensible e inextensible. Estas soluciones son casos especiales de la teoría general de Love.

Mucho después de que Love postuló la primer teoría general de cascarones, el interés en el análisis del pandeo de cascarones fue avivado en 1914 por el trabajo de von Mises. El análisis de estructuras relativamente simples, como cilindros circulares delgados, motivó la necesidad de teorías simples mas exactas. Una de las mas difundidas, debido a su simplicidad, es la teoría de Donnell para cascarones circulares, en la cual la fuerza cortante en la dirección cirunferencial se desprecia. Esta teoría fue generalizada para cualquier geometría por Vlasov. Se les conocen comúnmente como las ecuaciones de cascarones delgados (Thin shell equations) ya que Vlasov mostró que el método da particularmente buenos resultados en cascarones delgados.

Otras variaciones de la teoría de cascarones aparecieron en la literatura y teorías específicas para cilindros circulares y esferas se desarrollaron utilizando el método intuitivo o ingenieril. Timoshenko y Flügge se listan como los representantes mas populares de este método. Desafortunadamente el análisis de equilibrio para condiciones de frontera diferentes a libre y apoyo simple en ambos extremos, no se pueden obtener.

Como una alternativa a los métodos basados en las ecuaciones diferenciales de movimiento, el análisis del comportamiento de cascarones de pared delgada puede llevarse a cabo mediante el empleo de los métodos de la energía. Estos se basan en el hecho de que las ecuaciones que gobiernan una configuración de esfuerzos y deformaciones dada, son derivables considerando la minimización de la energía asociada a las deformaciones, esfuerzos o a ambos.

La aplicación de los métodos de la energía es efectiva en situaciones que involucran variedad de formas y secciones transversales variables y en problemas complejos que involucran estabilidad y estructuras multielemento. En particular, los métodos de energía de deformación ofrecen soluciones concisas y relativamente simples para el cálculo de desplazamientos de elementos delgados de máquinas y estructuras que estén sujetos a cargas combinadas.

Existen dos métodos de energía que se utilizan comúnmente. El primero que trata la deformación finita experimentada por un elemento bajo la acción de una carga. El segundo se basa en la variación hipotética o virtual en esfuerzo o deformación, y representa uno de los llamados métodos variacionales y se le llama ocasionalmente el método del trabajo virtual. El método de Rayleigh - Ritz es de este tipo.

Galerkin hace una presentación algorítmica del método variacional. En dicho algoritmo, Galerkin definió una serie de funciones  $f_j$  que satisfacen las condiciones de frontera y se sustituyen en las ecuaciones de movimiento. Las expresiones resultantes se multiplican por la función respectiva  $f_j$  como funciones de peso ( weighting functions). Finalmente el producto se integra sobre el dominio.

### 3. Revisión de teorías existentes

#### 3.1 Wilhelm Flügge. Ecuaciones de equilibrio

Un elemento diferencial de un cascarón cilíndrico delgado (espesor unitario) se observa en la figura 3.1 mostrando todas las fuerzas internas y externas que actúan sobre este elemento. En la segunda figura se muestran los momentos que actúan sobre el mismo. Dicho elemento tiene dimensiones  $dx$  y  $r d\phi$ , siendo las coordenadas utilizadas  $x$  y  $\phi$ , donde  $r$  es el radio de curvatura de nuestro elemento.

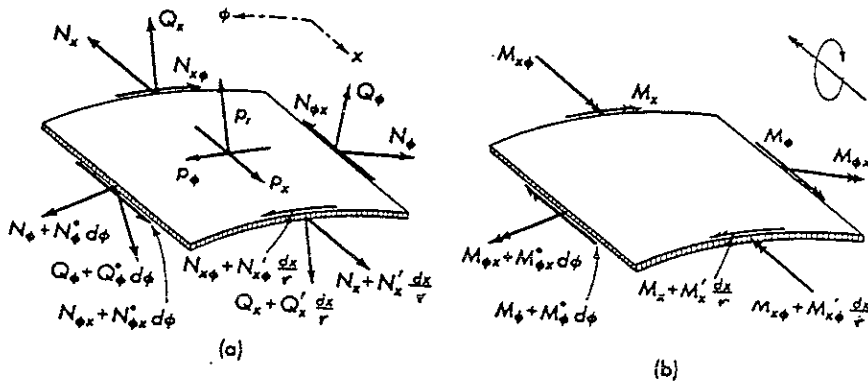


Figura 3.1

Las fuerzas y momentos deben satisfacer seis condiciones de equilibrio, tres de ellas concernientes a las fuerzas y las otras tres a los momentos.

La condición de equilibrio de las fuerzas en el sentido  $x$  es:

$$\begin{aligned}
 & N_x(r \cdot d\phi) - N_x(r \cdot d\phi) - \frac{\partial N_x}{\partial x} dx(r \cdot d\phi) + N_{\phi x} dx - N_{\phi x} dx - \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx \\
 & - P_x dx(r \cdot d\phi) = 0 \\
 & - \frac{\partial N_x}{\partial x} dx(r \cdot d\phi) - \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx - P_x dx(r \cdot d\phi) = 0 \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

La segunda condición involucra a las fuerzas en la dirección  $\phi$ . Debe considerarse la contribución de los esfuerzos cortantes  $Q_{\phi}$ .

Las dos fuerzas  $Q_{\phi} dx$  forman un ángulo  $d\phi$  entre ellos y tienen la resultante tangencial  $Q_{\phi} dx d\phi$  apuntando en la dirección en que disminuye  $\phi$ . Esta condición es:

$$\begin{aligned}
& N_{\phi} dx - N_{\phi} dx - \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx + N_{x\phi} r d\phi - N_{x\phi} r d\phi - \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} dx r d\phi \\
& + Q_{\phi} d\phi dx - P_{\phi} dx r d\phi = 0 \\
& - \frac{\partial N_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx - \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} dx r d\phi + Q_{\phi} d\phi dx - P_{\phi} dx r d\phi = 0 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

La tercer ecuación se refiere a las componentes de fuerzas radiales. Esta ecuación contiene la contribución de ambos esfuerzos cortantes, es decir, sus incrementos  $(dQ_{\phi} / d\phi) d\phi dx$  y  $(dQ_x / dx) dx r d\phi$ . Entonces tenemos la ecuación:

$$- \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx r d\phi - \frac{\partial Q_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx - N_{\phi} dx d\phi + P_{\phi} dx r d\phi = 0 \quad (3.3)$$

Para un eje de referencia que coincida con el vector  $Px$  tenemos los incrementos del momento flexionante  $M_{\phi}$  y momento torsional  $M_{x\phi}$  y el par formado por las dos fuerzas  $Q_{\phi} dx$ :

$$\begin{aligned}
& M_{\phi} dx - M_{\phi} dx - \frac{\partial M_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx + M_{x\phi} r d\phi - M_{x\phi} r d\phi - \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} dx r d\phi \\
& + Q_{\phi} r dx d\phi = 0 \\
& - \frac{\partial M_{\phi}}{\partial \phi} d\phi dx - \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} dx r d\phi + Q_{\phi} r dx d\phi = 0 \quad (3.4)
\end{aligned}$$

El equilibrio de momentos en la dirección circunferencial  $\phi$ :

$$\begin{aligned}
& M_x r d\phi - M_x r d\phi + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx r d\phi + M_{\phi x} dx - M_{\phi x} dx + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx \\
& - Q_x r d\phi dx = 0 \\
& \frac{\partial M_x}{\partial x} dx r d\phi + \frac{\partial M_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx - Q_x r d\phi dx = 0 \quad (3.5)
\end{aligned}$$

En forma similar se obtiene la ecuación para equilibrio de momentos en la dirección radial  $r$ :

$$- N_{x\phi} r d\phi dx + N_{\phi x} dx r d\phi + M_{\phi x} dx d\phi = 0 \quad (3.6)$$

Por simplicidad en la notación se representarán las derivadas como sigue:

$$\frac{r \partial ( )}{\partial x} = ( )' \quad \frac{\partial ( )}{\partial \phi} = ( \dot{ } )$$

Reescribiendo las ecuaciones de equilibrio y sustituyendo las ecuaciones 3.1 a 3.6 en las definiciones anteriores, tenemos:

$$N'_x + \dot{N}_{\phi x} + rP_x = 0 \quad (3.7 a)$$

$$\dot{N}_\phi + N'_{x\phi} - Q_\phi + rP_\phi = 0 \quad (3.7 b)$$

$$\dot{Q}_\phi + Q'_x + N_\phi - rP_r = 0 \quad (3.7 c)$$

$$\dot{M}_\phi + M'_{x\phi} - rQ_\phi = 0 \quad (3.7 d)$$

$$M'_x + \dot{M}_{\phi x} - rQ_x = 0 \quad (3.7 e)$$

$$rN_{x\phi} - rN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \quad (3.7 f)$$

De las ecuaciones anteriores se pueden eliminar las fuerzas de corte transversal  $Q_x$  y  $Q_\phi$ , sustituyendo las ecuaciones 3.7 d y 3.7 e en 3.7 b y 3.7 c respectivamente.

$$N'_x + \dot{N}_{\phi x} + rP_x = 0$$

$$r\dot{N}_\phi + rN'_{x\phi} - \dot{M}_\phi - M'_{x\phi} + r^2P_\phi = 0$$

$$\dot{M}_\phi + \dot{M}'_{x\phi} + \dot{M}'_{\phi x} + M''_x + rN_\phi - r^2Pr = 0$$

$$rN_{x\phi} - rN_{\phi x} + M_{\phi x} = 0 \quad (3.8)$$

Con esto se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones de equilibrio en función de las fuerzas normales, longitudinales y circunferenciales, de las fuerzas de corte y de momentos al igual que de las fuerzas de superficie. Ya que este grupo de ecuaciones contiene ocho esfuerzos resultantes desconocidos, el problema es estáticamente indeterminado, se requiere estudiar el cascarón deformado.

### 3.2 Deformaciones

La deformación de un cascarón cilíndrico se define como la variación de posición de un punto dado con respecto a un punto de referencia.

Llamamos  $u_A$ ,  $v_A$  y  $w_A$  a los desplazamientos de un punto arbitrario A colocado inicialmente a una distancia  $z$  sobre la normal a un punto  $A_0$  en la superficie media del cascarón y con las mismas coordenadas  $x$  que A.  $u_A$ ,  $v_A$  y  $w_A$  son funciones de  $x$ ,  $\phi$  y del tiempo  $t$ . Figura 3.2.

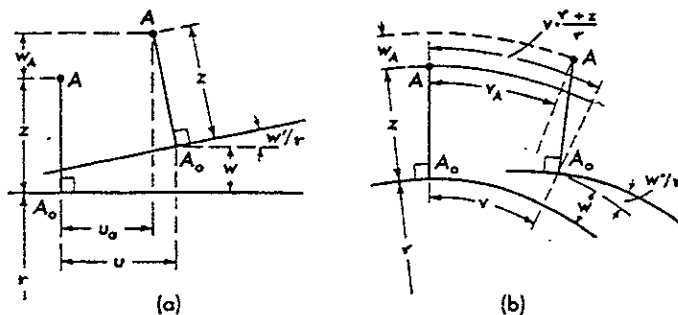


Figura 3.2

Ahora estableceremos las relaciones cinemáticas entre los desplazamientos  $u_A$ ,  $v_A$  y  $w_A$  del punto A y los correspondientes valores de  $u$ ,  $v$  y  $w$  del punto  $A_0$ . Es necesario aclarar que se han hecho las siguientes suposiciones:

1. Todos los puntos sobre una normal a la superficie media del cascarón permanecen en ella antes y después de la deformación del cilindro, por lo que se desprecia toda deformación debida a  $Q_\phi$  y  $Q_x$ .
2. La distancia  $z$  de un punto cualquiera a la superficie media, permanece constante antes y después de la deformación de la pared del cilindro, por lo que el esfuerzo  $\sigma_z$  es despreciable comparado con los esfuerzos normales  $\sigma_x$  y  $\sigma_\phi$ . En este caso las deformaciones y los esfuerzos en esta dirección carecen de significado siempre y cuando el cilindro sea delgado.
3. Todos los desplazamientos son muy pequeños comparados con el radio de curvatura  $r$  de la superficie media, por lo que su primera derivada es despreciable comparada con la unidad.

De la figura 3.2 a y b se obtiene que,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w'}{r}$$

$$u_A = u - z \frac{w'}{r} \quad (3.9 a)$$

$$v_A = v \frac{(r+z)}{r} - z \frac{\dot{w}}{r} \quad (3.9 b)$$

$$w_A = w \quad (3.9 c)$$

Encontraremos a continuación las deformaciones unitarias  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_\phi$  y  $\xi_{x\phi}$  en un punto A, fuera de la superficie media. Estas se pueden obtener de Flügge (1973) y está dada para la dirección en  $x$  por:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u_A}{\partial x} = \frac{u'_A}{r} \quad (3.10 a)$$

La deformación unitaria del punto A, en la dirección circunferencial, se establece según la figura 3.2 b en dos pasos:

a) Al incrementarse el radio  $r$  a  $(r+z)$ , el arco será:

$$\partial s_\phi(z) = (r+z)\partial\phi \quad \partial s_\phi(z) = (r+z)\partial\phi \quad \text{por lo tanto,}$$

$$\varepsilon_{\phi 1} = \frac{\partial v_A}{\partial s_\phi(z)} = \frac{\partial v_A}{(r+z)\partial\phi} = \frac{\dot{v}_A}{r+z}$$

b) Al aumentar el radio de curvatura a  $(r + z + w)$  y teniendo presente la hipótesis 1, el desplazamiento radial es paralelo en todos sus puntos, fuera de la superficie media, tal como se ilustra en la figura 3.2 b.

$$\delta_r = (r + z + w_A)\partial\phi - (r + z)\partial\phi = w_A\partial\phi$$

$$\varepsilon_{\phi 2} = \frac{\delta_a}{\partial s_\phi(z)} = \frac{w_A\partial\phi}{(r + z)\partial\phi} = \frac{w_A}{r + z}$$

Por lo tanto, las deformaciones circunferencial  $\varepsilon_\phi$  y angular  $\xi_\phi$  de un punto A son:

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_{\phi 1} + \varepsilon_{\phi 2} = \frac{\dot{v}_A + w_A}{r + z} \quad (3.10 \text{ b})$$

$$\xi_\phi = \frac{\partial v_A}{\partial x} + \frac{\partial u_A}{\partial s_\phi(z)} = \frac{v'_A}{r} + \frac{\dot{u}_A}{r + z} \quad (3.10 \text{ c})$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.9) en las expresiones (3.10) se llega a :

$$\varepsilon_x = \frac{u'}{r} - z \frac{w''}{r^2} \quad (3.11 \text{ a})$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\dot{v}}{r} + \frac{z}{r} \frac{\dot{w}}{r + z} + \frac{w}{r + z} \quad (3.11 \text{ b})$$

$$\xi_\phi = \frac{\dot{u}}{r + z} + \frac{(r + z)v'}{r^2} - \frac{\dot{w}'}{r} \left( \frac{z}{r} + \frac{z}{r + z} \right) \quad (3.11 \text{ c})$$

Considerando que la segunda suposición requiere despreciar los esfuerzos en z, de la teoría de la membrana se tienen las siguientes relaciones esfuerzo - deformación:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_x + \mu \varepsilon_\phi] \quad (3.12 \text{ a})$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1 - \mu^2} [\varepsilon_\phi + \mu \varepsilon_x] \quad (3.12 \text{ b})$$

$$\tau_{x\phi} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \xi_{x\phi} \quad (3.12 \text{ c})$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.11 en las anteriores se obtienen los esfuerzos en un punto A en función de los desplazamientos del punto A<sub>0</sub>, en la superficie media, y con las mismas coordenadas x, S<sub>φ</sub> de A.

Ahora es posible deducir las ecuaciones para obtener las fuerzas N y los momentos M<sup>8</sup> Para el caso de un cilindro circular

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left[ 1 + \frac{z}{r} \right] dz \quad (3.13 \text{ a})$$

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left[ 1 + \frac{z}{r} \right] z dz \quad (3.13 \text{ e})$$

$$N_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi dz \quad (3.13 \text{ b})$$

$$M_\phi = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\phi x} z dz \quad (3.13 \text{ f})$$

$$N_{x\phi} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\phi} \left[ 1 + \frac{z}{r} \right] dz \quad (3.13 \text{ c})$$

$$M_{x\phi} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\phi} \left[ 1 + \frac{z}{r} \right] z dz \quad (3.13 \text{ g})$$

$$N_{\phi x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\phi x} dz \quad (3.13 \text{ d})$$

$$M_{\phi x} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\phi x} z dz \quad (3.13 \text{ h})$$

Al sustituir las ecuaciones (3.11) en (3.12) y (3.13) se llega a :

$$N_x = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [\epsilon_x + \mu \epsilon_\phi] \left[ 1 + \frac{z}{r} \right] dz = \frac{E}{r(1-\mu^2)} \left[ [u' + \mu \dot{v} + \mu w] h - \frac{w'' h^3}{12r^2} \right]$$

Si

$$K = \frac{Eh}{1-\mu^2} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Entonces:

$$N_x = \frac{K}{r} [u' + \mu \dot{v} + \mu w] - \frac{D}{r^3} w'' \quad (3.14 \text{ a})$$

Análogamente, para N<sub>φ</sub> tenemos:

$$N_\phi = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [\epsilon_\phi + \mu \epsilon_x] dz$$

$$N_\phi = \frac{E}{r(1-\mu^2)} \left\{ [\dot{v} + \mu u'] h - \ddot{w} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{z}{r+z} dz + wr \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{r+z} dz \right\}$$



En donde,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{z}{r+z} dz = h - r \ln \frac{2r+h}{2r-h} = \frac{h^3}{12r^2}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{r+z} dz = \ln \frac{2r+h}{2r-h} = h + \frac{h^3}{12r^2}$$

Por lo tanto,

$$N_{\phi} = \frac{E}{r(1-\mu^2)} \left[ (\dot{v} + w + \mu u') h + (\ddot{w} + w) \frac{h^3}{12r^2} \right]$$

$$N_{\phi} = \frac{K}{r} [\dot{v} + w + \mu u'] + \frac{D}{r^3} [w + \ddot{w}] \quad (3.14 b)$$

Para la fuerza  $N_{\phi x}$ ,

$$N_{\phi x} = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \frac{\dot{u}}{r+z} + \frac{r+z}{r^2} v' - \frac{\dot{w}'}{r} \left[ \frac{z}{r} + \frac{z}{r+z} \right] \right] dz$$

$$N_{\phi x} = \frac{E}{2r(1+\mu)} \left[ \dot{u} r \ln \frac{2r+h}{2r-h} + h v' + h \dot{w}' - \dot{w}' \left[ h^3 + \frac{h}{12r^2} \right] \right]$$

$$N_{\phi x} = \frac{E}{2r(1+\mu)} \left[ \dot{u} \left[ h + \frac{h^3}{12r^2} \right] + h v' + h \dot{w}' + \dot{w}' \left[ h - \frac{h^3}{12r^2} \right] \right]$$

$$N_{\phi x} = \frac{K}{r} \frac{1-\mu}{2} [\dot{u} + v'] + \frac{D}{r^3} \frac{1-\mu}{2} [\dot{u} + \dot{w}'] \quad (3.14 c)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se llega al siguiente sistema de ecuaciones, el cual representa las leyes elásticas de un cascarón cilíndrico.

$$N_x = \frac{K}{r} [u' + \mu \dot{v} + \mu w] - \frac{D}{r^3} w'' \quad (3.14 a)$$

$$N_{\phi} = \frac{K}{r} [\dot{v} + w + \mu u'] + \frac{D}{r^3} [w + \ddot{w}] \quad (3.14 b)$$

$$N_{\phi x} = \frac{K}{r} \frac{1-\mu}{2} [\dot{u} + v'] + \frac{D}{r^3} \frac{1-\mu}{2} [\dot{u} + \dot{w}'] \quad (3.14 c)$$

$$N_{x\phi} = \frac{K}{r} \frac{1-\mu}{2} [\dot{u} + v'] + \frac{D}{r^3} \frac{1-\mu}{2} [v' - \dot{w}'] \quad (3.14 d)$$

$$M_{\phi} = \frac{D}{r^2} [w + \ddot{w} + \mu w''] \quad (3.14 e)$$

$$M_x = \frac{D}{r^2} [w'' + \mu \dot{w} - u' - \mu \dot{v}] \quad (3.14 f)$$

$$M_{\phi x} = \frac{D}{r^2} (1 - \mu) [\dot{w}' + \frac{1}{2} \ddot{u} - \frac{1}{2} v'] \quad (3.14 g)$$

$$M_{x \phi} = \frac{D}{r^2} (1 - \mu) [\dot{w}' - v'] \quad (3.14 h)$$

La sexta condición de equilibrio de las ecuaciones (3.7) es una consecuencia inmediata de la relación  $\tau_{x\phi} = \tau_{\phi x}$ , por lo que resulta una identidad en (3.14) al expresar los esfuerzos resultantes en función de los desplazamientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , de la superficie media del cascarón.

Con (3.7 a-c) se llega a 3 ecuaciones diferenciales para  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Sustituyendo (3.14) en (3.7 a-c) y si

$$q = \frac{D}{Kr^2},$$

tenemos, en (3.7 a):

$$\begin{aligned} & \frac{K}{r} [u'' + \mu \dot{v}' + \mu w'] - \frac{D}{r^3} w''' + \frac{K}{r} \frac{1-\mu}{2} [\ddot{u} + \dot{v}'] + \frac{D}{r^3} \frac{1-\mu}{2} [\ddot{u} + \dot{w}'] + P_x r = 0 \\ & \frac{K}{r^2} \left\{ u'' + \frac{1-\mu}{2} \ddot{u} + \frac{1+\mu}{2} \dot{v}' + \mu w' + q \left[ \frac{1-\mu}{2} \ddot{u} - w''' + \frac{1-\mu}{2} \dot{w}' \right] \right\} + P_x = 0 \end{aligned} \quad (3.15 a)$$

para (3.7 b):

$$\frac{K}{r^2} \left\{ \frac{1+\mu}{2} \dot{u}' + \dot{v} + \frac{1-\mu}{2} v'' + \dot{w} + q \left[ \frac{3}{2} (1-\mu) v'' - \frac{3-\mu}{2} \dot{w}'' \right] \right\} + P_\phi = 0 \quad (3.15 b)$$

de (3.7 c):

$$\frac{K}{r^2} \left\{ \mu u' + \dot{v} + w + q \left[ \frac{1-\mu}{2} \ddot{u}' - u''' - \frac{3-\mu}{2} \dot{v}'' + w^{iv} + 2\dot{w}'' + \ddot{w} + 2\dot{w} + w \right] \right\} + P_r = 0 \quad (3.15 c)$$

Las ecuaciones (3.15) son un sistema de ecuaciones diferenciales representando el equilibrio de un cascarón cilíndrico en flexión. Su solución será válida si las cargas de superficie  $P_x$ ,  $P_\phi$  y  $P_r$  son distribuidas de acuerdo con:

$$P_{xmn} = P_{xmn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi \quad (3.16 a)$$

$$P_{\phi mn} = P_{\phi mn} \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{r} \operatorname{sen} n \phi \quad (3.16 b)$$

$$P_{r mn} = P_{r mn} \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi \quad (3.16 c)$$

con

$$\lambda = \frac{m\pi r}{l}$$

La forma de  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , que satisface las condiciones de frontera de un cilindro simplemente apoyado (funciones coordenadas), se presenta a continuación:

$$u = u_{mn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi \quad (3.17 a)$$

$$v = v_{mn} \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{r} \operatorname{sen} n \phi \quad (3.17 b)$$

$$w = w_{mn} \operatorname{sen} \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi \quad (3.17 c)$$

Al sustituir (3.16) y (3.17) en (3.15) se eliminan los factores trigonométricos y se logra así un número infinito de sistemas de ecuaciones lineales, desacopladas, para  $u_{mn}$ ,  $v_{mn}$  y  $w_{mn}$ , como sigue:

$$\frac{K}{r^2} \left[ \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+q) \right] u_{mn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi + \frac{K}{r^2} \left[ -\frac{1-\mu}{2} \lambda n \right] v_{mn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi +$$

$$\frac{K}{r^2} \left\{ -\mu \lambda - q \left[ \lambda^3 - \frac{1-\mu}{2} \lambda n^2 \right] \right\} w_{mn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi = P_{xmn} \cos \frac{\lambda x}{r} \cos n \phi$$

$$\frac{K}{r^2} \left[ \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+q) \right] u_{mn} + \frac{K}{r^2} \left[ -\frac{1+\mu}{2} \lambda n \right] v_{mn} +$$

$$\frac{K}{r^2} \left\{ -\mu \lambda - q \left[ \lambda^3 - \frac{1-\mu}{2} \lambda n^2 \right] \right\} w_{mn} = P_{xmn} \quad (3.18 a)$$

Las otras ecuaciones se obtienen de forma similar:

$$\begin{aligned} \frac{K}{r^2} \left[ -\frac{1+\mu}{2} \lambda n \right] u_{mn} + \frac{K}{r^2} \left[ n^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 (1+3q) \right] v_{mn} + \\ \frac{K}{r^2} \left[ n + \frac{3-\mu}{2} q \lambda^2 n \right] w_{mn} = P_{\phi mn} \end{aligned} \quad (3.18 b)$$

$$\begin{aligned} \frac{K}{r^2} \left[ -\mu \lambda - q \left( \lambda^3 - \frac{1-\mu}{2} \lambda n^2 \right) \right] u_{mn} + \frac{K}{r^2} \left[ n + \frac{3-\mu}{2} q \lambda^2 n \right] v_{mn} + \\ \frac{K}{r^2} [1 + q(\lambda^4 + 2\lambda^2 n^2 + n^4 - 2n^2 + 1)] w_{mn} = P_{r mn} \end{aligned} \quad (3.18 c)$$

### 3.3 Equilibrio Dinámico

Comenzamos con las ecuaciones de equilibrio estático 3.18, después de sustituir las relaciones esfuerzo - deformación, podemos obtener las ecuaciones de equilibrio dinámico como sigue con  $P_x = P_\phi = P_r = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{K}{r^2} \left[ \lambda^2 + \frac{1-\mu}{2} n^2 (1+q) \right] u + \frac{K}{r^2} \left[ -\frac{1+\mu}{2} \lambda n \right] v + \\ \frac{K}{r^2} \left\{ -\mu \lambda - q \left[ \lambda^3 - \frac{1-\mu}{2} \lambda n^2 \right] \right\} w = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{K}{r^2} \left[ -\frac{1+\mu}{2} \lambda n \right] u + \frac{K}{r^2} \left[ n^2 + \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 (1+3q) \right] v + \\ \frac{K}{r^2} \left[ n + \frac{3-\mu}{2} q \lambda^2 n \right] w = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{K}{r^2} \left[ -\mu \lambda - q \left( \lambda^3 - \frac{1-\mu}{2} \lambda n^2 \right) \right] u + \frac{K}{r^2} \left[ n + \frac{3-\mu}{2} q \lambda^2 n \right] v + \\ \frac{K}{r^2} [1 + q(\lambda^4 + 2\lambda^2 n^2 + n^4 - 2n^2 + 1)] w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Las ecuaciones 3.20 a 3.22 pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$L_1 \{u, v, w\} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.23)$$

$$L_2 \{u, v, w\} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.24)$$

$$L_3 \{u, v, w\} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

donde  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  se definen como funciones de  $u$ ,  $v$  y  $w$ .

Para separar el tiempo, se propone lo siguiente:

$$u(x, \phi, t) = U(x, \phi)T(t) \quad (3.26)$$

$$v(x, \phi, t) = V(x, \phi)T(t) \quad (3.27)$$

$$w(x, \phi, t) = W(x, \phi)T(t) \quad (3.28)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.26 a 3.28 en las ecuaciones 3.23 a 3.25 tenemos

$$TL_1 \{U, V, W\} = \rho h U \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3.29)$$

$$TL_2 \{U, V, W\} = \rho h V \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3.30)$$

$$TL_3 \{U, V, W\} = \rho h W \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3.31)$$

Dividiendo la primera ecuación por  $\rho h U T$ , la segunda por  $\rho h V T$  y la tercera por  $\rho h W T$  obtenemos,

$$\frac{L_1 \{U, V, W\}}{\rho h U} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3.32)$$

$$\frac{L_2 \{U, V, W\}}{\rho h V} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3.33)$$

$$\frac{L_3 \{U, V, W\}}{\rho h W} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3.34)$$

Debido a que el lado izquierdo de estas ecuaciones es función del espacio y el lado derecho es función del tiempo, ambos lados de cada ecuación debe ser igual a la misma constante. La razón de lo anterior es que el lado derecho de las tres ecuaciones es el mismo. A simple vista, podemos nombrar a esta constante  $-\omega^2$ . Así, escribimos las siguientes ecuaciones

$$L_1 \{U, V, W\} + \rho h \omega^2 U = 0 \quad (3.35)$$

$$L_2 \{U, V, W\} + \rho h \omega^2 V = 0 \quad (3.36)$$

$$L_3 \{U, V, W\} + \rho h \omega^2 W = 0 \quad (3.37)$$

$$\text{y} \quad \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (3.38)$$

La ecuación 3.38 tiene soluciones de las formas siguientes:

$$T = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$\text{o} \quad T = C(\sin \omega t - \phi)$$

$$\text{o} \quad T = D e^{j\omega t}$$

El significado de la constante  $\omega$  es por tanto, que es una frecuencia en radianes por segundo, a la cual el sistema tiende a vibrar, es decir, una de las frecuencias naturales. A cada una de estas frecuencias naturales cada punto del sistema elástico se mueve armónicamente.

### 3.4 Simplificaciones de Love

Cuando el cascarón es delgado, podemos asumir que los desplazamientos en las direcciones  $x$  y  $\phi$  varían linealmente a través del espesor del cascarón, mientras que los desplazamientos en la dirección  $z$  son independientes de  $z$  así que los desplazamientos  $u$ ,  $v$  y  $w$  pueden ser divididos como se muestra:

$$u(x, \phi, z) = u(x, \phi) + z \beta_x(x, \phi) \quad (3.39)$$

$$v(x, \phi, z) = v(x, \phi) + z \beta_\phi(x, \phi) \quad (3.40)$$

$$w(x, \phi, z) = w(x, \phi) \quad (3.41)$$

donde  $\beta_x$  y  $\beta_\phi$  representan ángulos. Sustituyendo en las relaciones deformación-desplazamiento los valores de los desplazamientos anteriores, obtenemos los valores de  $\beta_x$  y  $\beta_\phi$ <sup>12</sup>.

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{y} \quad \beta_\phi = \frac{\mu}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \quad (3.42)$$

Love despreció el valor de  $z$  ya que consideró que,

$$\frac{z}{r} \ll 1$$

Así obtuvo las siguientes relaciones para deformaciones separando las deformaciones de membrana, independientes de  $z$ , de las deformaciones de flexión, proporcionales a  $z$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^\circ + z k_x \quad (3.43)$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi^\circ + z k_\phi \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{x\phi} = \varepsilon_{x\phi}^\circ + z k_{x\phi} \quad (3.45)$$

donde las deformaciones de membrana son:

$$\varepsilon_x^\circ = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_\phi^\circ = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{r} \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{x\phi}^\circ = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} \quad (3.48)$$

y donde las deformaciones de flexión son:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.49)$$

$$k_\phi = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right] \quad (3.50)$$

$$k_{x\phi} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \right] \quad (3.51)$$

con lo que se obtiene la ley elástica para un cascarón cilíndrico recto, según Love :

$$N_x = \frac{K}{r} [u' + \mu(\dot{v} + w)] \quad (3.52)$$

$$N_\phi = \frac{K}{r} [\dot{v} + w + \mu u'] \quad (3.53)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{K(1-\mu)}{r} \frac{1}{2} [v' + \dot{u}] \quad (3.54)$$

$$M_x = \frac{D}{r^2} [-w'' + \mu(\dot{v} - \dot{w})] \quad (3.55)$$

$$M_\phi = \frac{D}{r^2} [\dot{v} - \dot{w} - \mu w''] \quad (3.56)$$

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = \frac{D(1-\mu)}{r} \frac{1}{2} [v' - 2\dot{w}'] \quad (3.57)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de equilibrio (3.8), obtenemos:

$$\frac{u''}{r^2} + \frac{(1-\mu)}{2r^2} \ddot{u} + \frac{(1+\mu)}{r^2} \dot{v}' + \frac{\mu}{r^2} w' = 0 \quad (3.58)$$

$$\frac{(1+\mu)}{2r^2} \dot{u}' + \frac{(1-\mu)}{2r^2} v'' + \frac{\ddot{v}}{r^2} + \frac{\dot{w}}{r^2} + \frac{q}{r^2} [-\ddot{w} - \dot{w}'''] + \frac{q}{r^2} \left[ \frac{(1-\mu)}{2} v'' + \ddot{v} \right] = 0 \quad (3.59)$$

$$\mu \frac{u'}{r^2} + \frac{\dot{v}}{r^2} + \frac{w}{r^2} - \frac{q}{r^2} [(2-\mu) \dot{v}'' + \ddot{v}] - \frac{q}{r^2} [-w'''' - 2\ddot{w}'' - \ddot{w}] = 0 \quad (3.60)$$

Excepto para algunos casos especiales, no existen soluciones explícitas para las ecuaciones de Love lo que nos lleva a utilizar métodos aproximados.

### 3.5 Aproximación de la membrana. Lord Rayleigh <sup>12</sup>

Una aproximación utilizada comúnmente en la estática de cascarones, que se utiliza también en análisis de vibración de cascarones, es asumir que la rigidez flexionante  $D$  se puede despreciar en las ecuaciones de Love. La justificación de este método es que la tensión de la superficie neutra en cascarones y arcos contribuye predominantemente a la resistencia al movimiento.

### 3.6 Simplificación de Donnell

Como ya se mencionó, a menudo no es posible obtener una solución general válida para todas las condiciones de frontera. El problema reside en la imposibilidad de obtener ecuaciones características donde no estén presentes las coordenadas  $x$ ,  $\phi$  y  $t$ .

El caso de un cascarón cilíndrico recto empotrado en uno de sus extremos, con lo que simulamos el tambor de freno, y el de un panel cilíndrico circular simplemente apoyado, con lo que simulamos una zapata, no se pueden desacoplar. Para poder obtener una solución aproximada utilizaremos la simplificación de Donnell - Mushtari - Vlasov <sup>12</sup>. Con estas ecuaciones se obtienen particularmente buenos resultados en cascarones delgados cargados normal a su superficie, ya que se concentra en las deflexiones transversales. En este método no se desprecian los efectos de flexión ni los de membrana.

Primeramente asumimos que la contribución de deflexiones en el plano, pueden ser despreciadas en las expresiones de deformaciones de flexión, pero no en las de deformaciones de membrana. Las deformaciones de flexión son:

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.61)$$

$$k_\phi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \quad (3.62)$$



$$k_{x\phi} = -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \quad (3.63)$$

La siguiente consideración es que la influencia de la inercia en dirección dentro del plano, es despreciada. Finalmente despreciamos los términos cortantes  $Q_{z\theta}/r$

Para el caso de un cascarón cilíndrico recto obtenemos las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial \phi} = 0 \quad (3.64)$$

$$r \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.65)$$

$$-r \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial Q_{\phi z}}{\partial \phi} + N_\phi + r\rho h\ddot{w} = rq_z \quad (3.66)$$

donde

$$Q_{xz} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial \phi} \quad (3.67)$$

$$Q_{\phi z} = \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} \quad (3.68)$$

Las ecuaciones de equilibrio 3.6, 3.7 y 3.8 se satisfacen introduciendo la función de esfuerzo de Airy (1863)  $\Phi$ , definida así:

$$N_x = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad (3.69)$$

$$N_\phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.70)$$

$$N_{\phi x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \phi} \quad (3.71)$$

Sustituyendo 3.9 y 3.10 y 3.12 en 3.8 nos queda:

$$-r \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 M_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + r\rho h\ddot{w} = rq_z \quad (3.72)$$

y sustituyendo

$$M_x = D_x k_x + D_{x\phi} k_\phi \quad (3.73)$$

$$M_\phi = D_\phi k_\phi + D_{x\phi} k_x \quad (3.74)$$

$$M_{x\phi} = D_z k_{x\phi} \quad (3.75)$$

resulta en:

$$\begin{aligned} & -\left(D_x \frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} + D_{x\phi} \frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2}\right) - 2 \frac{D_z}{r} \frac{\partial^2 k_{x\phi}}{\partial x \partial \phi} \\ & - \frac{1}{r^2} \left(D_{x\phi} \frac{\partial^2 k_x}{\partial \phi^2} + D_\phi \frac{\partial^2 k_\phi}{\partial \phi^2}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \ddot{w} = q_z \end{aligned} \quad (3.76)$$

y con la última sustitución de las deformaciones de flexión resulta en :

$$\begin{aligned} & D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{x\phi} + 2D_z) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial \phi} + D_\phi \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \phi^4} \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \ddot{w} = q_z \end{aligned} \quad (3.77)$$

examinamos el caso de material homogéneo e isotrópico, donde

$$\begin{aligned} D_x &= D_\phi = D \\ D_{x\phi} &= \mu D \\ D_z &= \frac{(1-\mu)D}{2} \end{aligned}$$

y donde

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$$

obtenemos la primer ecuación de Donnell:

$$D \nabla^4 w + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho h \ddot{w} = q_z \quad (3.78)$$

Con esta ecuación eliminamos de hecho el efecto de  $u$  y  $v$  pero tenemos todavía a  $\phi$  y a  $w$ . Para obtener una segunda ecuación, se utiliza el mismo procedimiento con la función de esfuerzo de Airy, para generar la ecuación de compatibilidad. La manera de hacerlo es tomar seis relaciones de esfuerzo deformación y eliminar de ellas el desplazamiento mediante sustituciones, sumas y restas<sup>12</sup>.

Esta es la segunda ecuación de Donnell.

$$\frac{Eh}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nabla^4 \Phi = 0 \quad (3.79)$$

Encontremos la frecuencia natural para un cascarón cilíndrico circular cerrado simplemente apoyado en ambos extremos. Las condiciones de frontera son:

$$w(0, \phi, t) = w(L, \phi, t) = 0 \quad (3.80)$$

$$M_x(0, \phi, t) = M_x(L, \phi, t) = 0 \quad (3.81)$$

Se pueden satisfacer las condiciones de frontera y las ecuaciones 3.78 y 3.79 con:

$$w(x, \phi, t) = w(x, \phi) e^{j\omega t} \quad (3.82)$$

$$\Phi(x, \phi, t) = \Phi(x, \phi) e^{j\omega t} \quad (3.83)$$

donde la solución es:

$$w(x, \phi) = w_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{cos} n(\phi - \alpha) \quad (3.84)$$

$$\Phi(x, \phi) = \Phi_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \operatorname{cos} n(\phi - \alpha) \quad (3.85)$$

donde  $\alpha$  es un ángulo arbitrario considerando el hecho de que no existe dirección preferencial de la forma modal circunferencial.

Sustituyendo las ecuaciones 3.84 y 3.85 en 3.78 y con  $q_z=0$  obtenemos:

$$\left[ D \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + 2D \left( \frac{n}{r} \right)^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 + D \left( \frac{n}{r} \right)^4 - \rho h \omega^2 \right] w_{mn} - \frac{1}{r} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \Phi_{mn} = 0 \quad (3.86)$$

y en la ecuación 3.79,

$$K(1 - \mu^2) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 w_{mn} + \left[ \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 + (1 - \mu) \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left( \frac{n}{r} \right)^2 + \left( \frac{n}{r} \right)^4 \right] \Phi_{mn} = 0 \quad (3.87)$$

Para que las ecuaciones 3.86 y 3.87 sean satisfechas significativamente, el determinante debe ser cero. Así obtenemos las frecuencias naturales para aquellos modos donde las componentes transversales de la deflexión son dominantes<sup>14</sup>:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho r^2} \left[ \frac{(m\pi r/L)^4}{[(m\pi r/L)^2 + n^2]^2} + \frac{(h/r)^2}{12(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{m\pi r}{L} \right)^2 + n^2 \right]^2 \right] \quad (3.88)$$

Para el caso en el que el cilindro está empotrado en uno de sus extremos, las condiciones de frontera son :

$$\beta_x(0) = \frac{dw(0)}{dx} = 0 \quad (3.89)$$

$$w(0) = 0 \quad (3.90)$$

$$M_x(L) = 0 \quad (3.91)$$

$$V_{zx}(L) = 0 \quad (3.92)$$

Proponemos una solución según Tse <sup>7</sup> para  $w$  y  $\Phi$  multiplicados por  $e^{j\omega t}$ , es decir,

$$w = w_{mn} e^{j\omega t}$$

Una vez que se tengan las ecuaciones se deben eliminar los factores trigonométricos. Las dos ecuaciones resultantes tienen solución no trivial si su determinante es cero, con lo que se obtiene la ecuación de frecuencias.

La solución propuesta es la siguiente:

$$w = w_{mn} \left[ F \left( \cosh \eta_m \frac{x}{L} - \cos \eta_m \frac{x}{L} \right) - G \left( \sinh \eta_m \frac{x}{L} - \sen \eta_m \frac{x}{L} \right) \right] \cos n(\theta - \phi) e^{j\omega t} \quad (3.93)$$

$$\Phi = \Phi_{mn} \left[ F \left( \cosh \eta_m \frac{x}{L} - \cos \eta_m \frac{x}{L} \right) - G \left( \sinh \eta_m \frac{x}{L} - \sen \eta_m \frac{x}{L} \right) \right] \cos n(\theta - \phi) e^{j\omega t} \quad (3.94)$$

donde:

$$F = \sinh \eta_m + \sen \eta_m$$

$$G = \cosh \eta_m + \cos \eta_m$$

Sustituyendo estas soluciones en las condiciones de frontera, y posteriormente en las ecuaciones 3.46 a 3.51 obtenemos,

$$\left[ G\left(-\cos\frac{\eta x}{L} + \cosh\frac{\eta x}{L}\right) - F\left(\sin\frac{\eta x}{L} - \sinh\frac{\eta x}{L}\right) \right] \left[ De^{\omega t} \left(\frac{n}{r}\right)^4 + De^{\omega t} u_{mn} \left(\frac{\eta}{L}\right)^4 \right] + \cos(n\theta)$$

$$\left[ G\left(\cos\frac{\eta x}{L} + \cosh\frac{\eta x}{L}\right) - F\left(\sin\frac{\eta x}{L} + \sinh\frac{\eta x}{L}\right) \right] \left[ \frac{1}{r} e^{\omega t} f_{mn} \left(\frac{\eta}{L}\right)^2 - \frac{2}{L^2} D\left(\frac{1+\mu}{2}\right) e^{\omega t} u_{mn} \left(\frac{n}{r}\right)^2 \right] = 0$$

(3.95)

Como se puede observar en la ecuación 3.95, no se pueden desacoplar los factores  $\cosh \eta x/L$  y  $\sin \eta x/L$ , por lo que no se pueden hallar soluciones exactas a este problema, y sucede de la misma forma en la mayoría de los casos. Si se considera el gran número de configuraciones de cascarones y las pocas soluciones posibles, se confirma el porque las soluciones exactas son aún, poco comunes en los problemas de la vida real.

Las soluciones exactas, sin embargo, son muy valiosas ya que son la medida con la que se evalúa la exactitud de los métodos aproximados. Por otro lado, es importante para las aplicaciones de ingeniería contar con métodos disponibles que ofrezcan soluciones numéricas en los casos que no se pueden resolver exactamente. Los métodos aproximados se dividen básicamente en dos categorías. En la primera categoría se incluyen los métodos en los que se utilizan métodos de minimización de la energía. El método de la integral variacional, el método de Galerkin y el método de Raleigh - Ritz son de este tipo. En la segunda categoría encontramos los métodos de las diferencias finitas y de los elementos finitos.

#### 4. Ecuaciones para tambores y zapatas.

##### 4.1 Galerkin

Estudiaremos el caso de cascarón cilíndrico circular.

En este caso necesitamos considerar únicamente las deflexiones transversales. El algoritmo de Galerkin requiere que asumamos una función  $w_m(x)$  que satisfaga las condiciones de frontera, multiplicar la ecuación con la misma función como función de peso, e integrar a lo largo del cascarón. Comenzamos operando la ecuación 3.78 con  $\nabla^4$  e igualando  $q_z=0$  y operando 3.79 con  $\nabla_k^2$ , haciendo las sustituciones correspondientes y combinando ambas ecuaciones, tenemos una sola ecuación:

$$D\nabla^8 w + Eh\nabla_k^4 w - \rho h\omega^2 \nabla^4 w = 0 \quad (4.1)$$

Para cascarones cerrados en la dirección  $\phi$ , la solución será de la forma:

$$w(x, \phi) = w_n(x) \cos n(\phi - \alpha) \quad (4.2)$$

La ecuación de movimiento 4.1 se convierte en:

$$D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)^4 + \frac{Eh}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho h\omega^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}\right)^2 = 0$$

$$D\left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^4 w_n(x) + \frac{Eh}{r^2} \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - \rho h\omega^2 \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^2 w_n(x) = 0 \quad (4.3)$$

Utilizamos esta última ecuación como base para el método de Galerkin de la siguiente forma:

$$\int_0^L \left[ D\left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^4 w_n(x) + \frac{Eh}{r^2} \frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - \rho h\omega^2 \left(\frac{n^2}{r^2} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^2 w_n(x) \right] w_n(x) dx = 0 \quad (4.4)$$

Para las funciones viga se define en general:

$$\frac{d^4}{dx^4} w_m(x) = \lambda_m^4 w_m(x) \quad (4.5)$$

donde  $\lambda_m$  son las raíces del problema de eigenvalores de la viga. Haciendo uso de lo anterior obtenemos.

$$\omega_{mn}^2 = \frac{(Eh/r^2)\lambda_m^4 + D[(n/r)^8 - 4(n/r)^6 R_m + 6(n/r)^4 \lambda_m^4 - 4(n/r)^2 \lambda_m^4 R_m + \lambda_m^8]}{\rho h[(n/r)^4 - 2(n/r)^2 R_m + \lambda_m^4]} \quad (4.6)$$

donde,

$$R_m = \frac{\int_0^L (d^2 w_m / dx^2) w_m dx}{\int_0^L w_m^2 dx} \quad (4.7)$$

Este resultado puede ser aplicado a varias condiciones de frontera. Sin embargo, es posible hacer una simplificación más. Ya que,

$$w_m = w_m(\lambda_m x)$$

tenemos,

$$R_m = \lambda_m^2 \frac{\int_0^L (d^2 w_m / d(\lambda_m x)^2) w_m dx}{\int_0^L w_m^2 dx} \quad (4.8)$$

El cociente de las integrales es cercano a -1 para muchas combinaciones de condiciones de frontera. Para el caso de la función de viga simplemente apoyada y algunos otros, es exactamente igual a -1. Entonces como una aproximación, podemos igualar:

$$R_m \cong -\lambda_m^2$$

con lo que la ecuación 4.6 se convierte en:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{1}{\rho h} \left[ \frac{Eh\lambda_m^4}{r^2[(n/r)^2 + \lambda_m^2]^2} + D \left[ \left( \frac{n}{r} \right)^2 + \lambda_m^2 \right]^2 \right] \quad (4.9)$$

Para el caso simplemente apoyado,  $\lambda_m = m\pi / L$  y la ecuación 4.9 es exacta. En la figura 4.1 se compara la solución obtenida con el método de Flügge (líneas continuas), con la encontrada con el método de Galerkin (líneas punteadas).

Se observa que éste último ofrece una aproximación muy aceptable. Aunque el error es variable, para  $1/r$ 's pequeños tenemos 2, 3 y 4% para  $r/h=100, 50$  y  $25$  respectivamente. Los cascarones con  $1/r$  pequeño representan cilindros cortos como un anillo y a medida que  $1/r$  aumenta la estructura se asemeja a una tubería.

Así mismo, estructuras con  $r/h$  alto son cascarones delgados cuyo espesor crece cuando  $r/h$  disminuye hasta el límite de la barra sólida cuando  $r - (h / 2) = h$ . En este trabajo se quieren representar los casos de cascarones delgados y cortos, en los que la aproximación se apega a la solución exacta.

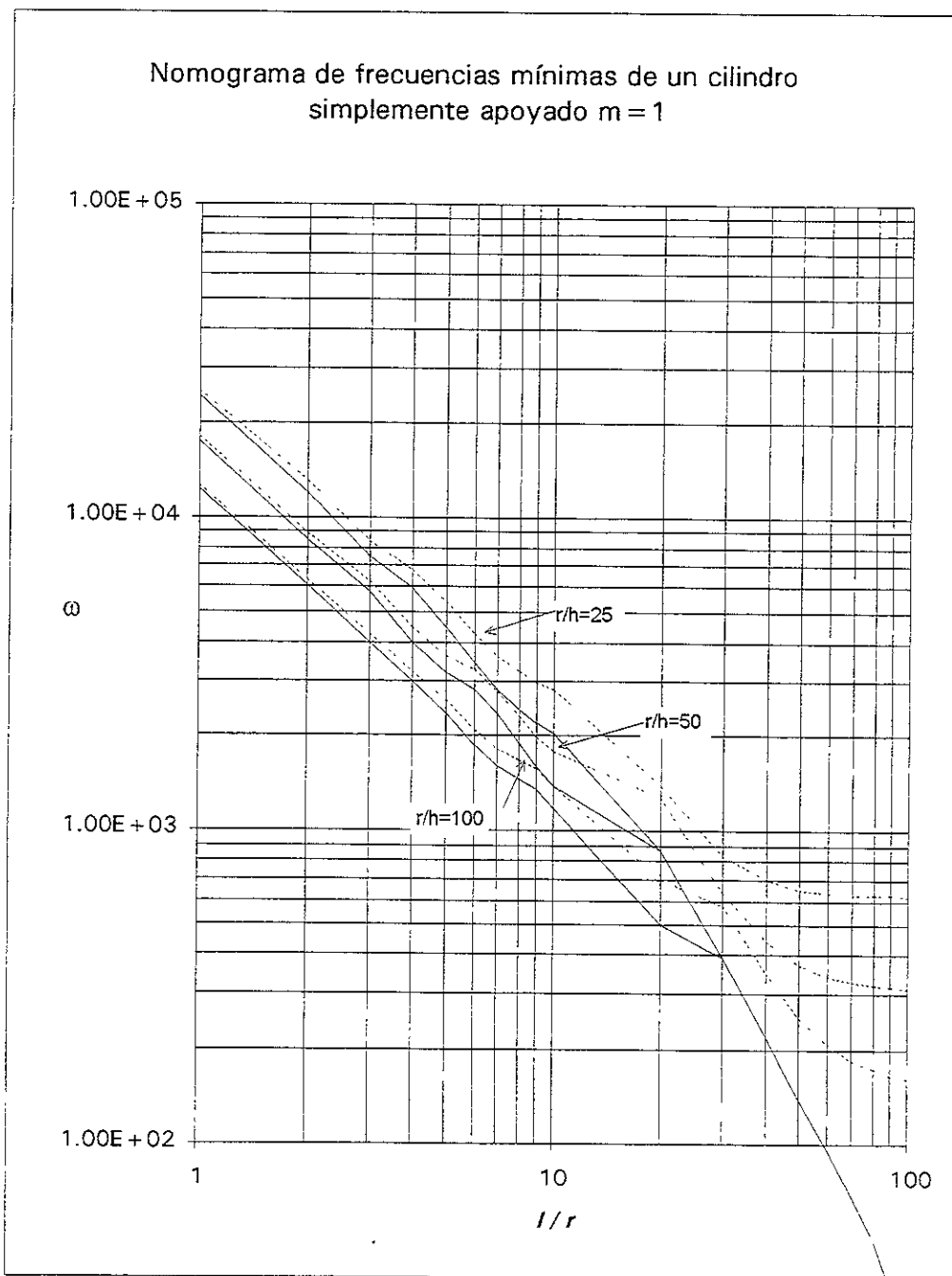


Figura 4.1



## 4.2 Análisis de frecuencias

En un cascarón cilíndrico recto con geometría dada, existe una frecuencia natural para cada combinación de  $m$  y  $n$  ( $m$  es el modo longitudinal y  $n$  el circunferencial).

Para ilustrar lo anterior, se propone el siguiente ejemplo:

$$L = 200 \text{ mm}$$

$$r = 100 \text{ mm}$$

$$h = 2 \text{ mm}$$

$$E = 2.06 \text{ E}+05 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0.3$$

$$\rho = 7.85 \text{ E-09 Ns}^2/\text{mm}^4$$

Utilizando la ecuación 4.9 se calcularon las frecuencias naturales para  $m = 1$  y con los datos anteriores. Los resultados se muestran en la tabla 4.1.

	n=1	2	3	4	5	6	7	8
m=1	23.9	9.35	5.49	5.87	8.21	11.4	15.4	20.1

Tabla 4.1 Frecuencias en  $1 \text{ E}+03 \text{ cps}$ .

Frecuencias naturales ejemplo 4.1

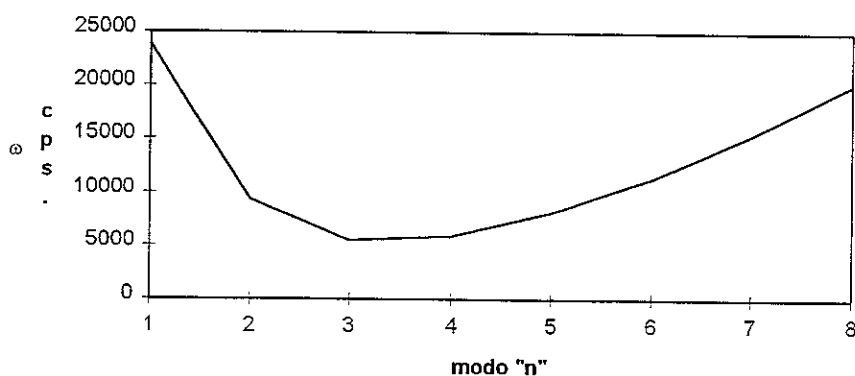


Figura 4.2

De la figura 4.2 se obtiene que la frecuencia natural mínima ocurre cuando  $n = 3$ . Si realizamos el mismo ejercicio para diferentes configuraciones de cascarones podemos concluir que para cada cascarón existe una frecuencia natural mínima correspondiente a un modo  $n$ . Este ejercicio se realizó con ocho cascarones con diferentes  $l/r$ . (Figura 4.3).

Frecuencias naturales cascarones cilíndricos simplemente apoyados.  $m=1$   $r=100$   $r/h=100$

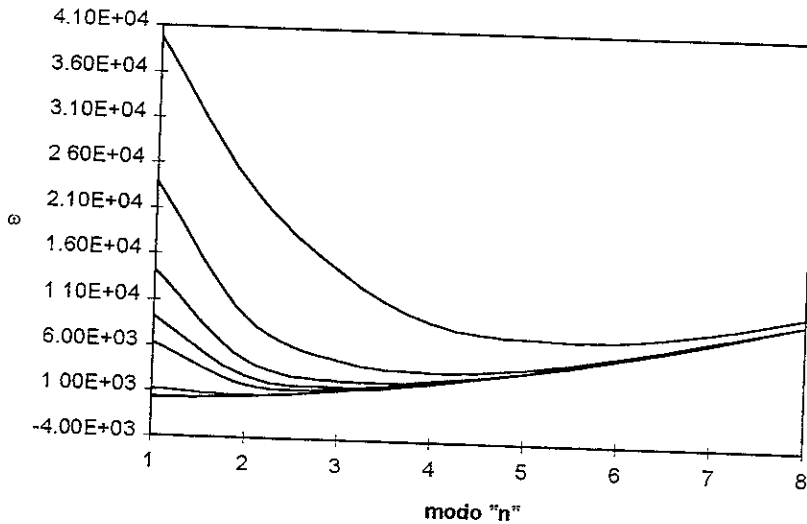


Figura 4.3

En términos generales, a cualquier cilindro con  $l/r$ ,  $r/h$ ,  $r$ ,  $m$  y  $n$  dados, le corresponde un valor único de frecuencia mínima.

Se sabe que existe una cantidad invariante  $(\omega r)^2$  para todas aquellas estructuras cilíndricas con idénticos valores de  $r/h$ ,  $l/r$  y  $m$  como se muestra en el siguiente ejemplo. Ver referencias<sup>15</sup>.

Para:

$$m = 2$$

$$E = 2.06 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu = 0.3$$

$$\rho = 7.85 \times 10^{-9} \text{ Ns}^2/\text{mm}^4$$

$r/h$	$l/r$	$r$	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	2	100	1806	1416	1045	774	604	508	486*	517	587	684
100	2	60	3010	2361	1743	1290	1000	848	810*	862	979	1140

\* Frecuencias naturales mínimas.

Tabla 4.2

Calculando el invariante  $(\omega r)^2$  para ambos casos:

$$(\omega r)^2 = (486 \times 100)^2 = (48600)^2 \text{ (cps} \cdot \text{mm)}^2$$

$$(\omega r)^2 = (810 \times 60)^2 = (48600)^2 \text{ (cps} \cdot \text{mm)}^2$$

En la figura 4.4 se representan en escala doble logarítmica los valores del parámetro de frecuencias  $(\omega r)^2$  para  $m=1$  y diferentes valores de  $l/r$  y  $r/h$ . De acuerdo a la gráfica, el método converge para cascarones delgados, es decir,  $r/h$  grande o para cascarones cortos, donde  $l/r < 5$ .

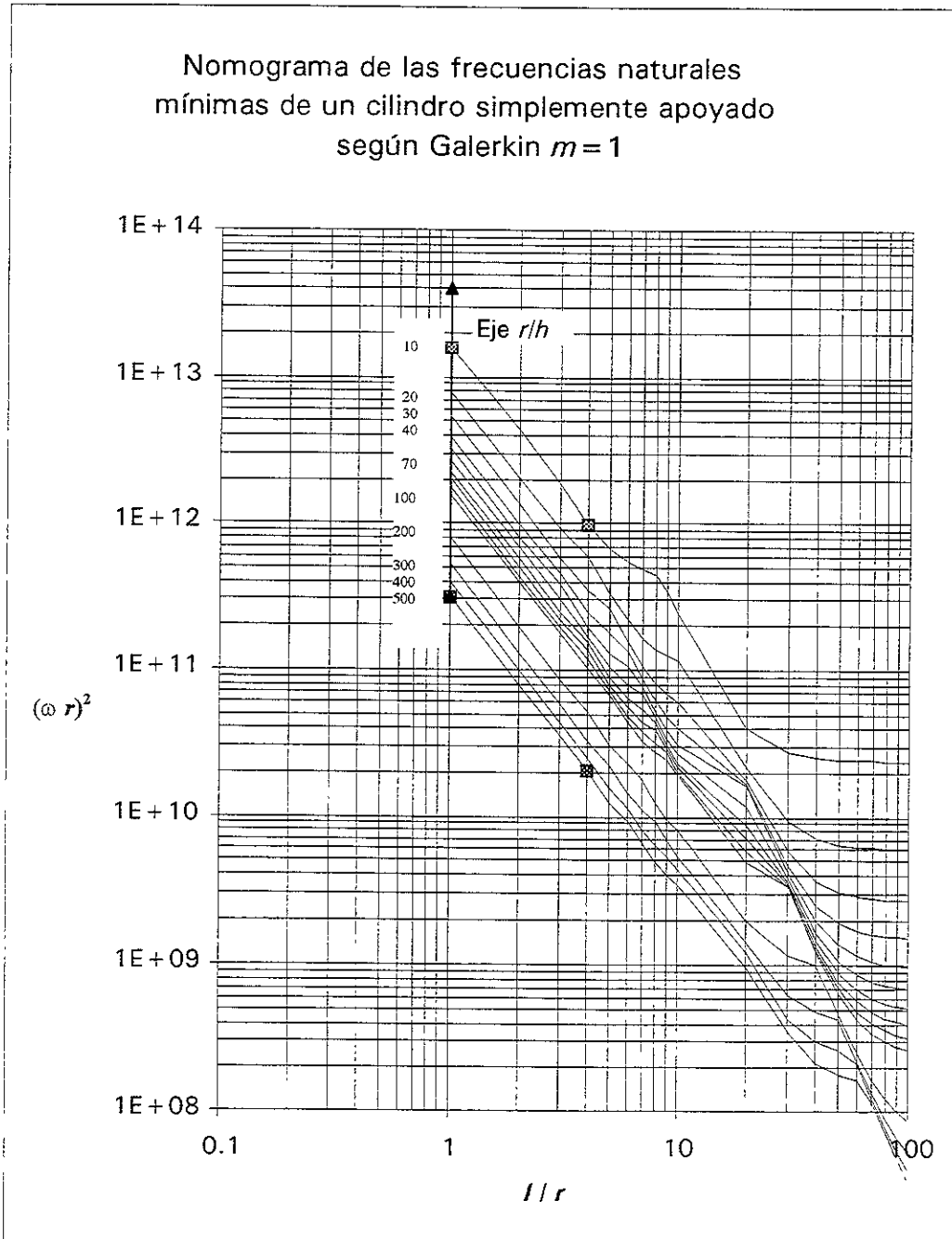


Figura 4.4

Se puede observar claramente que donde el método converge, las líneas de frecuencias mínimas son rectas y paralelas entre sí. Si consideramos la línea de  $r/h = 10$  y tomamos el punto en el que  $l/r = 1$  con  $\omega = 3.97E+4$  con  $(\omega r)^2 = 1.58E+13$  y el punto en el que  $l/r = 4$  con  $\omega = 9.90E+3$  con  $(\omega r)^2 = 9.8E+11$ , podemos obtener su pendiente mediante la siguiente fórmula:

$$m = \frac{\ln(y) - \ln(y_1)}{\ln(x) - \ln(x_1)} \quad (4.10)$$

donde  $(x, y)$  y  $(x_1, y_1)$  son dos puntos de la recta en escala doble logarítmica. Sustituyendo los puntos de la línea  $r/h = 10$  tenemos:

$$m = \frac{\ln(9.90E + 03) - \ln(3.97E + 04)}{\ln(4) - \ln(1)} = -1.00$$

Si queremos comparar con la pendiente de la línea  $r/h = 500$ , cuyos valores de  $\omega = 5.60E+03$  con  $(\omega r)^2 = 3.14E+11$  para  $l/r = 1$ , y  $\omega = 1.426E+03$  con  $(\omega r)^2 = 2.03E+10$  para  $l/r = 4$ , hacemos

$$m = \frac{\ln(1.426E + 03) - \ln(5.60E + 03)}{\ln(4) - \ln(1)} = -0.9897$$

Con lo anterior podemos asumir que las líneas son paralelas. Para obtener los valores corregidos de las frecuencias naturales mínimas, se pueden extender las líneas respetando su pendiente como se muestra en la figura 4.5 aplicando la ecuación 4.10 en la siguiente forma:

$$y = e^{m(\ln(x) - \ln(x_1)) + \ln(y_1)}$$

Con el mismo procedimiento, se comprueba que para diferentes valores de  $m$ , las líneas  $r/h$  son paralelas entre sí, tal cual se observa en la figura 4.6.

Nomograma de frecuencias naturales mínimas  
de cualquier cilindro según Galerkin  $m = 1$

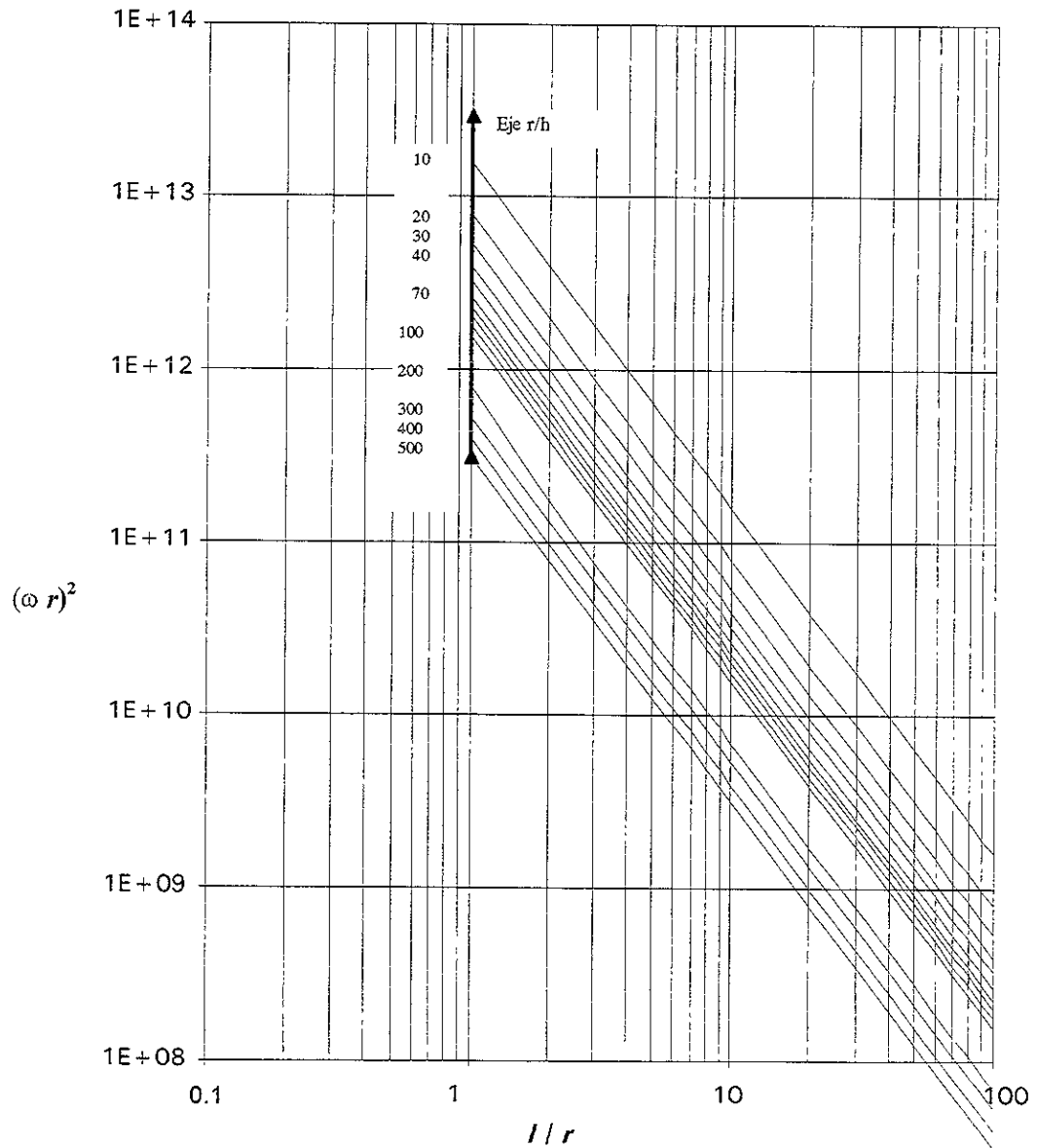


Figura 4 5

Frecuencias naturales mínimas de un cilindro simplemente apoyado  
Según Galerkin  $r/h = 100$

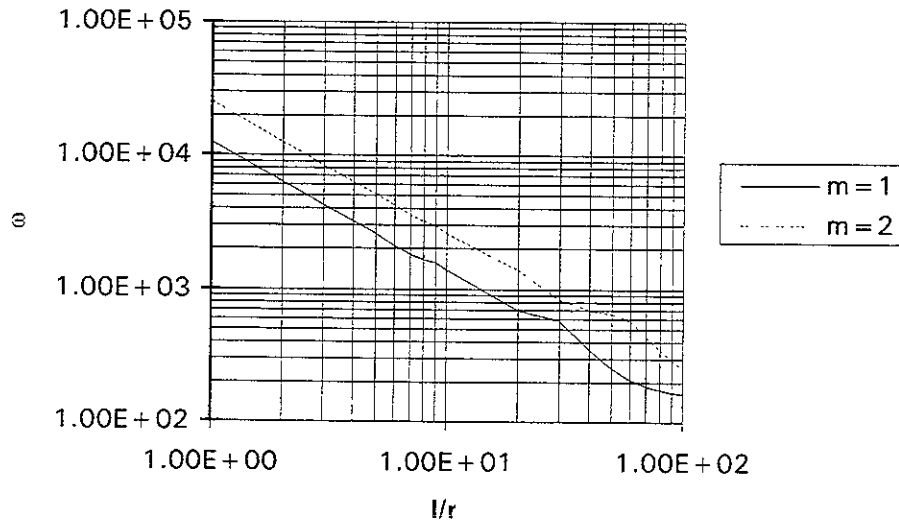


Figura 4.6

La figura 4.7 presenta un nomograma de frecuencias mínimas de cualquier cilindro simplemente apoyado y para cualquier modo longitudinal  $m$ , para  $m = i$  donde  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

Si queremos obtener fórmulas similares a la 4.9 para condiciones de frontera diferentes, cambiamos  $\lambda_m$  en 4.9 con los valores característicos  $\lambda_m$  de la solución del problema de vigas y que se encuentran en diversos manuales de fórmulas. En la tabla 4.3 se presentan algunos ejemplos:

Condición de frontera	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m > 5$
Libre - Libre	4.73004074	7.85320462	10.9956078	14.1371655	17.2787597	$(2m+1)\pi/2$
Empotrado - Libre	1.87510407	4.69409113	7.85475744	10.9955407	14.1371683	$(2m-1)\pi/2$
Libre - Simplemente apoyado	3.92660231	7.06858275	10.2101761	13.3517687	16.4933614	$(4m+1)\pi/4$
Simplemente apoyado - Simplemente apoyado	$m\pi$	$m\pi$	$m\pi$	$m\pi$	$m\pi$	$m\pi$
Empotrado - Simplemente apoyado	3.92660231	7.06858275	10.2101761	13.3517687	16.4933614	$(4m+1)\pi/4$
Empotrado - Empotrado	4.73004074	7.85320462	10.9956078	14.1371655	17.2787597	$(2m+1)\pi/2$

Tabla 4.3

Las frecuencias naturales mínimas cambian, no solo con el modo de vibrar, sino también con las condiciones de frontera. Así, encontramos que es más rígido un cascarón empotrado en ambos extremos que uno simplemente apoyado en sus dos extremos. En la figura 4.8 se graficaron 4 cascarones cilíndricos iguales con condiciones de frontera diferentes, mismas que se encuentran frecuentemente en problemas de ingeniería.

# Nomograma de frecuencias naturales mínimas de cualquier cilindro según Galerkin

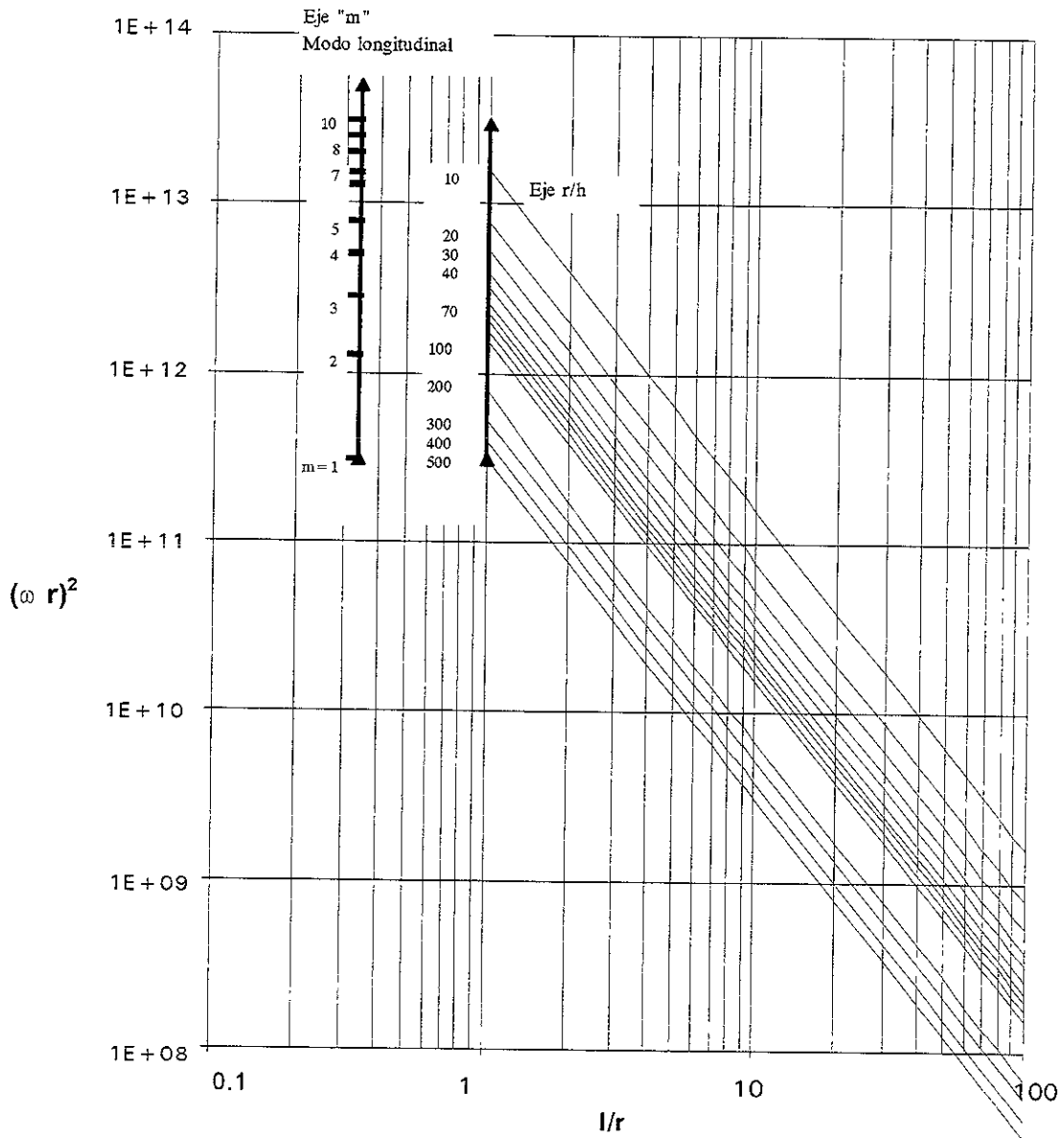


Figura 4.7

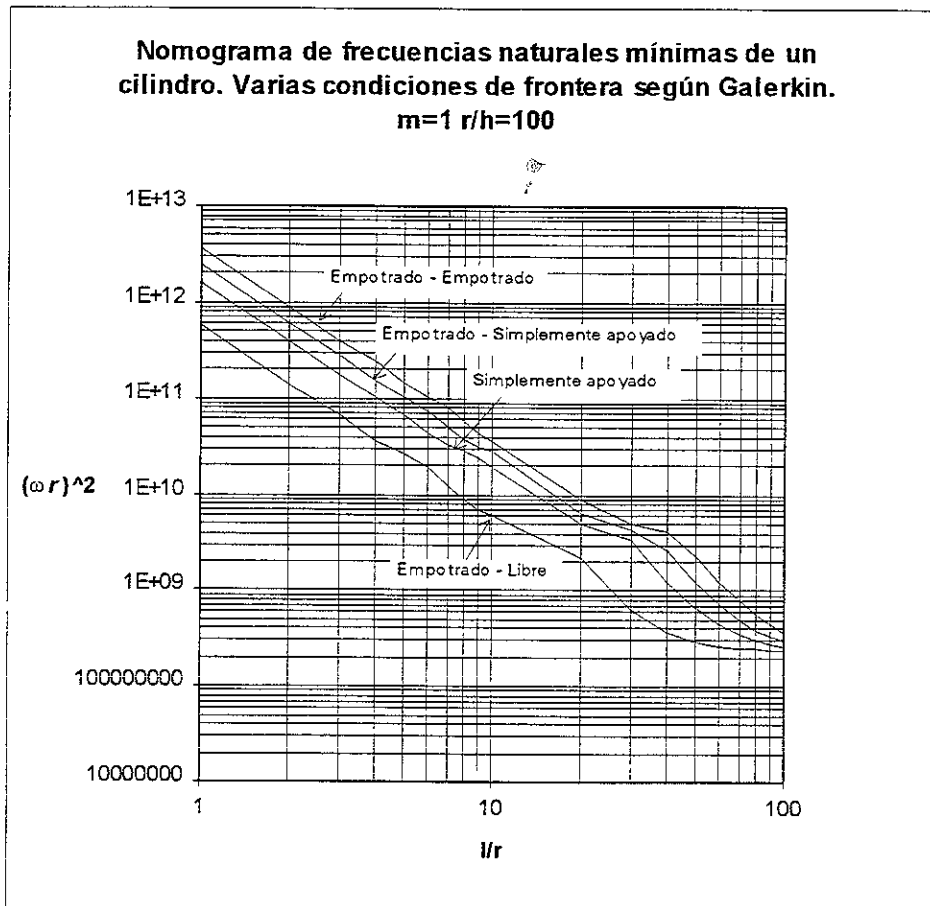


Figura 4.8

Es importante, que además de demostrar el paralelismo entre las líneas  $r/h$  para la misma condición de frontera, se compruebe que la amplitud de las líneas  $r/h$  se mantiene constante para las diferentes condiciones de frontera. La amplitud es la distancia  $y$  entre dos puntos y se define como:

$$a = \ln(y) - \ln(y_1) \quad (4.11)$$

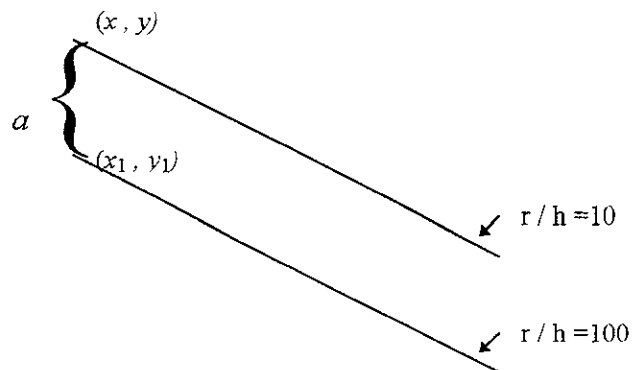


Figura 4.9



La amplitud entre las líneas  $r/h = 10$  y  $r/h = 500$  de las cuatro condiciones de frontera en cuestión, es:

$$\alpha_{SA} = \ln(3.97E + 04) - \ln(5.60E + 03) = 1.9585$$

$$\alpha_{EL} = \ln(1.24E + 04) - \ln(3.377E + 03) = 1.9672$$

$$\alpha_{ESA} = \ln(4.9790E + 04) - \ln(6.9982E + 03) = 1.9622$$

$$\alpha_{EE} = \ln(5.966E + 04) - \ln(8.4303E + 03) = 1.9568$$

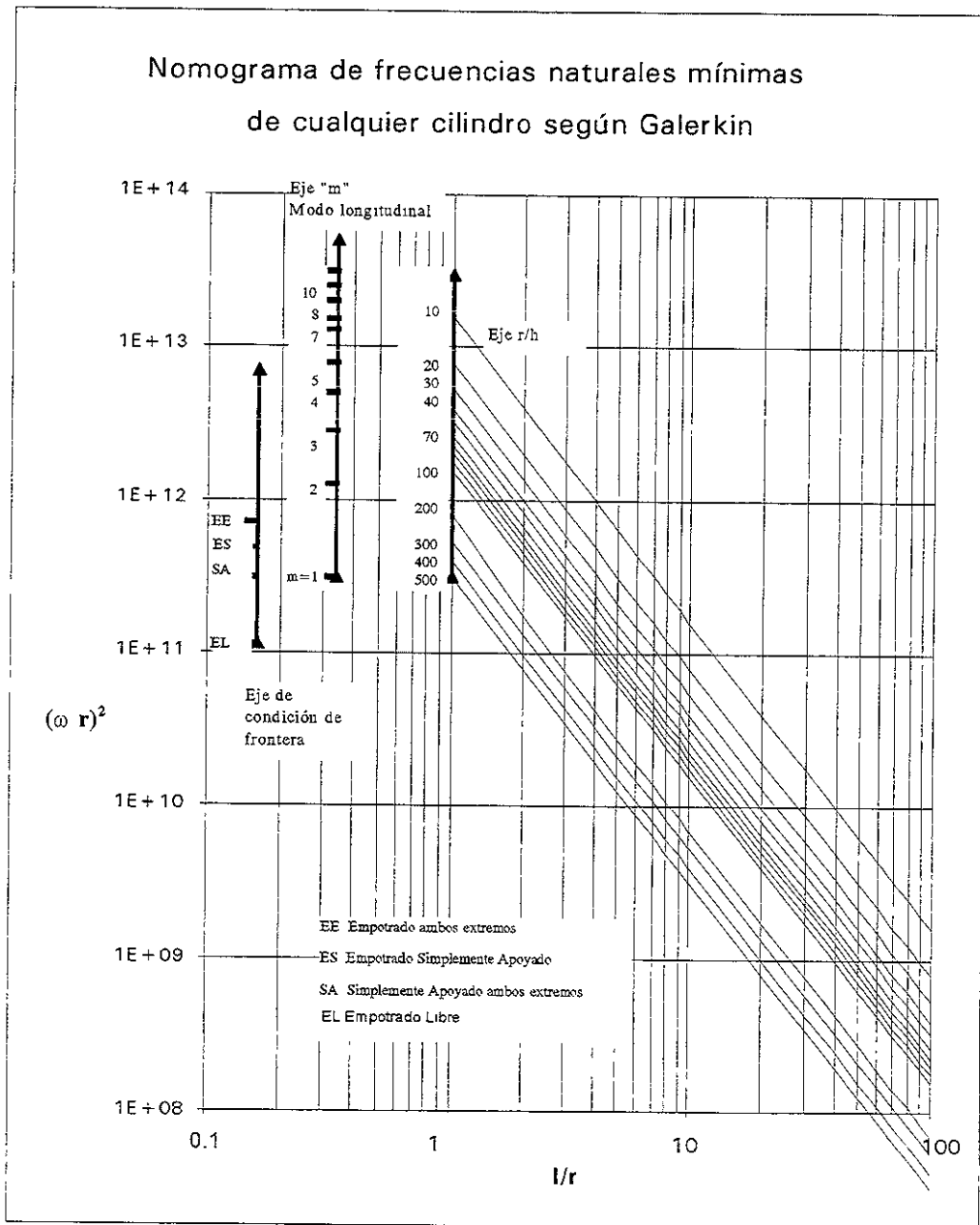


Figura 4.10

Entonces se puede incluir en la figura 4.10 un eje para las diferentes condiciones de frontera, como se muestra.

Es posible determinar el comportamiento de cualquier cascarón cilíndrico dado, a través del parámetro  $k$  definido de la siguiente forma:

$$k = \sqrt{\frac{l}{r}} \sqrt{\frac{h}{r}} \quad (4.12)$$

Este parámetro para cascarones cilíndricos rectos, involucra únicamente los valores geométricos de la estructura, mismos que la determinan. Manteniendo fijo el valor de  $k$ , se incrementa  $l/r$  y calcula  $h$  para cada caso utilizando la ecuación 4.12. Variando el número de onda  $n$  desde 1 hasta 25 para encontrar a cual de ellos le corresponde la menor frecuencia. Se encontró que para cada valor de  $k$ , el número  $n$  para el que la frecuencia es mínima, es siempre el mismo. De este mismo modo, cada número  $n$  corresponde a un valor de  $k$  dado. En la tabla siguiente se muestran los valores de  $k$  para  $n=1$  a 14 en cascarones cilíndricos simplemente apoyados.

$n$	$k$
14	0.165
13	0.178
12	0.192
11	0.209
10	0.228
9	0.252
8	0.282
7	0.320
6	0.369
5	0.437
4	0.535
3	0.690
2	0.976
1	1.690

Tabla 4.4

Los valores anteriores corresponden a  $m=1$ . Al igual que se hizo para la figura 4.10, se puede calcular un nomograma para diferentes valores enteros de  $k$ , y para diferentes valores de  $n$ . Los resultados no convergen para valores de  $h$  cercanos a  $r$ , y fueron ajustados utilizando la ecuación 4.10. El resultado final, para un cascarón simplemente apoyado se puede observar en la figura 4.11

Frecuencias naturales mínimas para cilindro  
 simplemente apoyado. Galerkin  $m = 1$

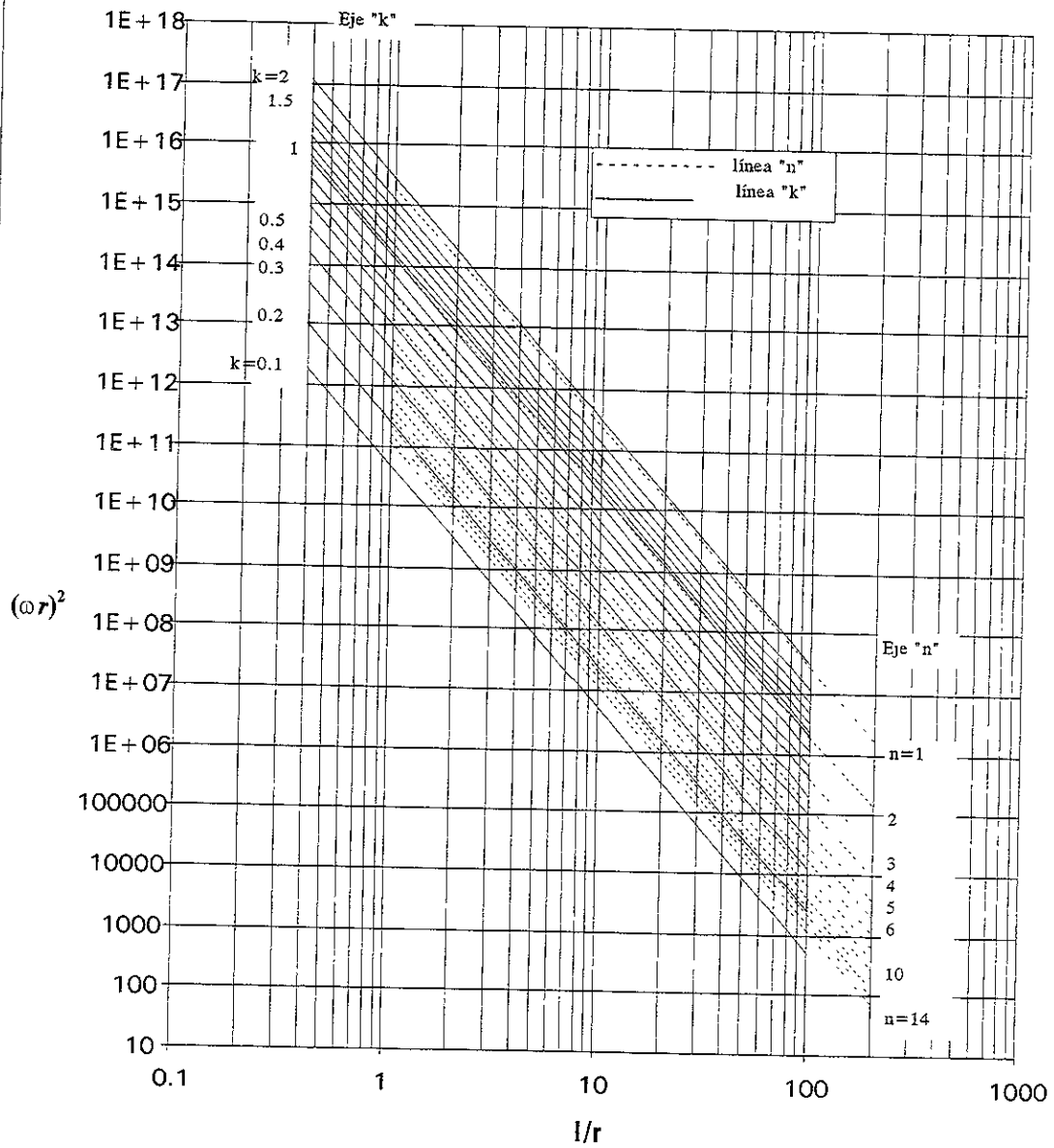


Figura 4.11

Para el caso de cascarones cilíndricos empotrados en uno de sus extremos tenemos:

Frecuencias naturales mínimas para un cilindro empotrado en un extremo. Galerkin  $m = 1$

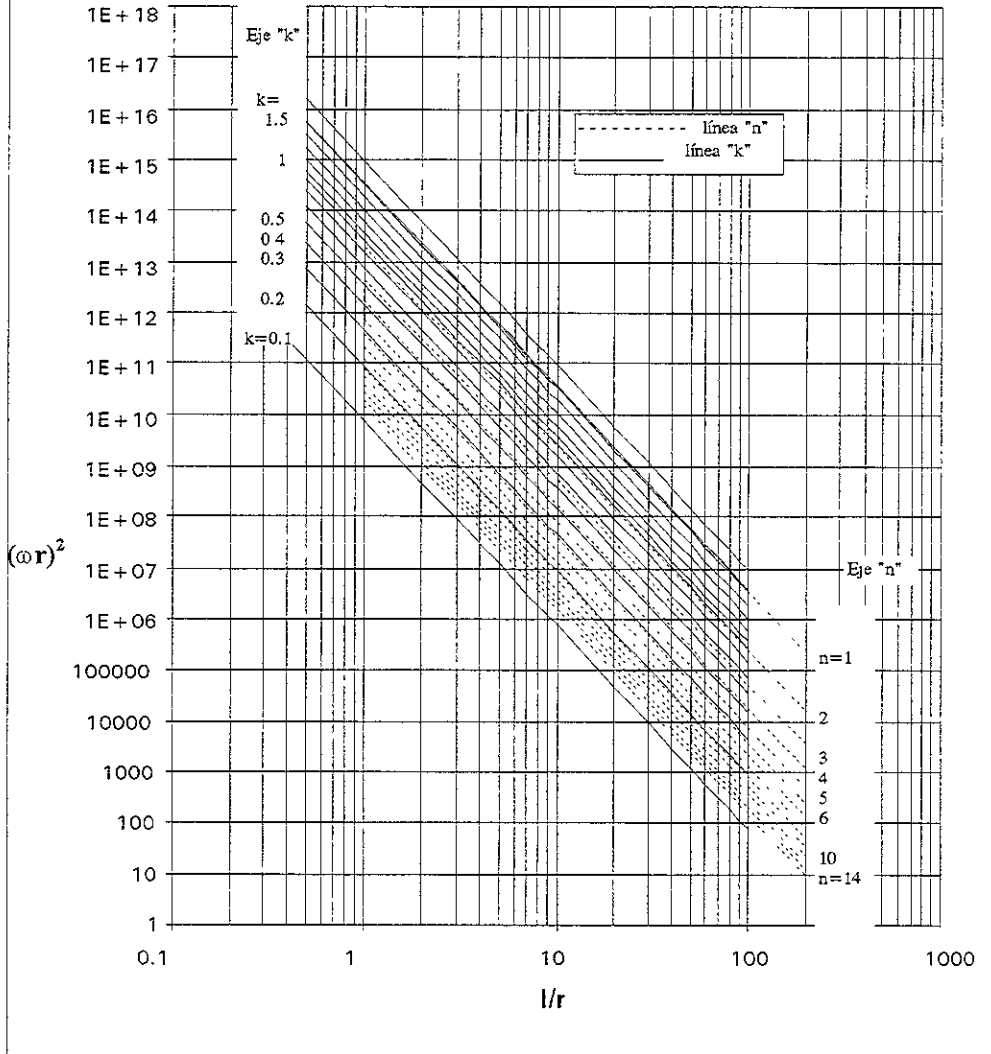


Figura 4.12

4.3 Panel cilíndrico circular.

Utilizando el método de Donnell, mismo que se concentra en la deflexión transversal, se obtiene una fórmula para el parámetro de frecuencias  $(\omega r)^2$  en un panel cilíndrico simplemente apoyado en sus cuatro extremos <sup>12</sup>:

$$(\omega r)^2 = \left[ \frac{(m\pi r/l)^4}{[(m\pi r/l)^2 + (m\pi/\alpha)^2]^2} + \frac{(h/r)^2}{12(1-\mu^2)} \left[ \left(\frac{m\pi r}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 \right]^2 \right] \times \left[ \frac{E}{\rho} \right] \quad (4.13)$$

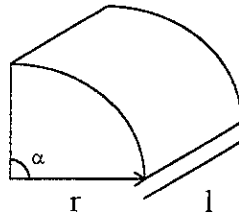


Figura 4.13

El valor de las frecuencias varía en función al ángulo  $\alpha$  (fig. 4.13), de hecho aumenta exponencialmente con respecto a  $\alpha$ . A partir de los  $60^\circ$ , la frecuencia natural alcanza el 88.9 % del valor del cilindro completo y a  $90^\circ$  se tiene el 95 %. Se construyó un nomograma similar al de la figura 4.12 para cascarones simplemente apoyados. Ver figura 4.14.

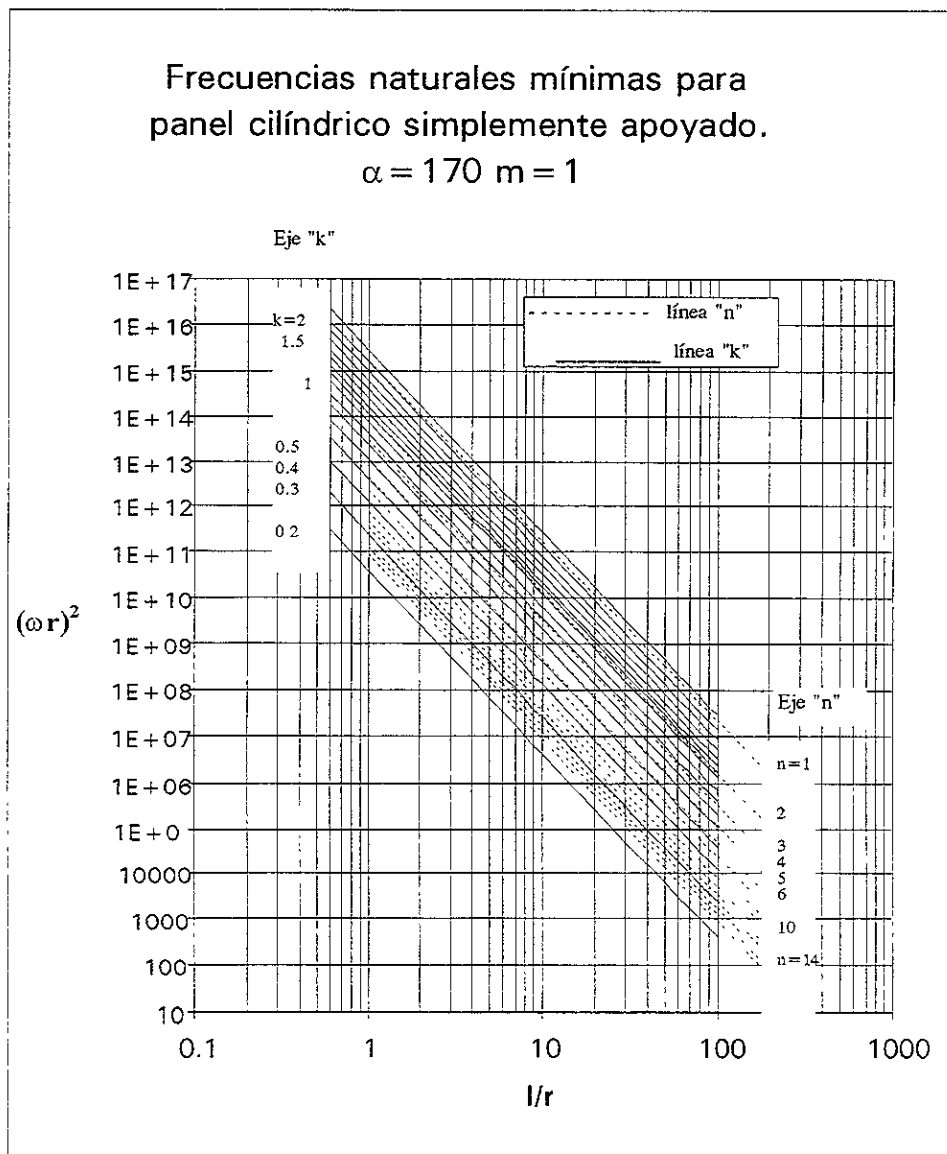


Figura 4.14

#### 4.4 Densidad de frecuencias.

La densidad de frecuencias se define como la cantidad de frecuencias naturales que tiene una estructura dada, dentro de un rango de frecuencias también dado. Es decir, si proponemos un rango de frecuencias de trabajo, existen cascarones que tienen menos frecuencias naturales dentro de ese rango. En términos generales, mientras  $l/r$  aumenta, más frecuencias naturales caen dentro del rango, y conforme disminuye  $l/r$ , la estructura tiene menos frecuencias dentro del rango, haciéndolas más elegibles en el diseño. Para un rango determinado de frecuencias, se graficaron las frecuencias naturales de cascarones con valores de  $l/r$  desde 1 hasta 10 y para valores de  $k$  fijos.

Las figuras 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18 presentan los resultados para  $k=0.1, 0.2, 0.4$  y  $0.6$  respectivamente.

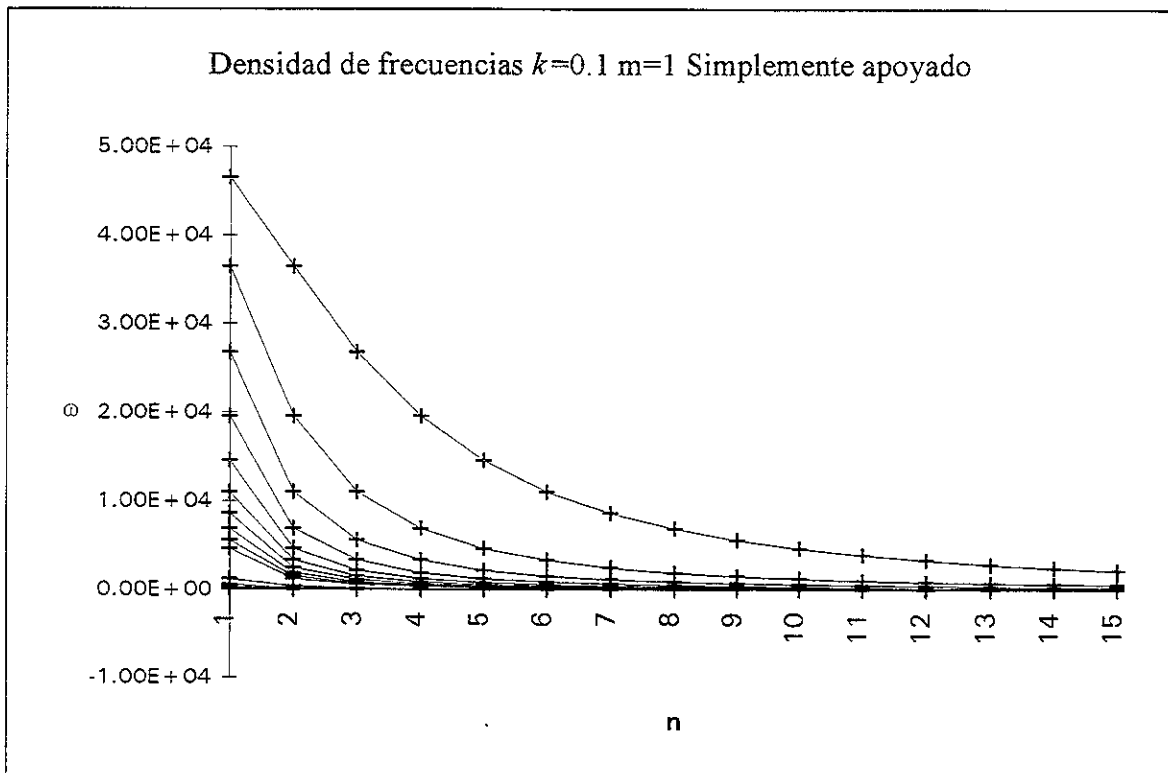


Figura 4.15

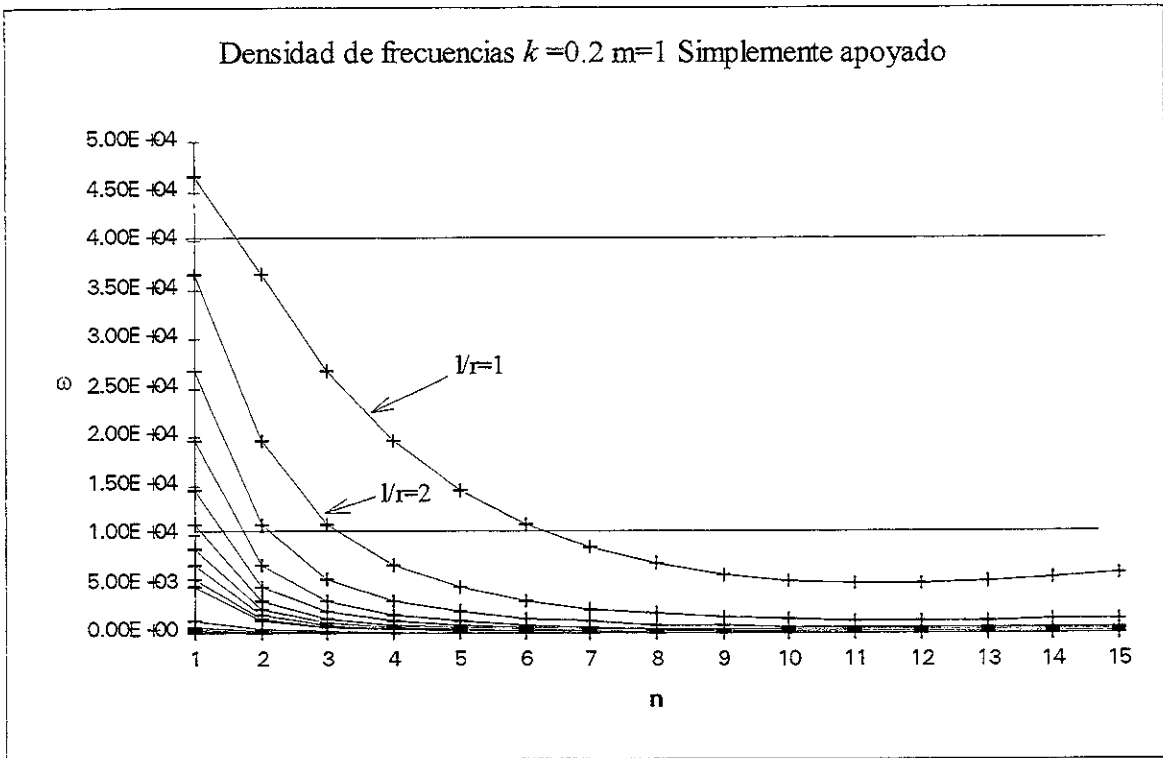


Figura 4.16

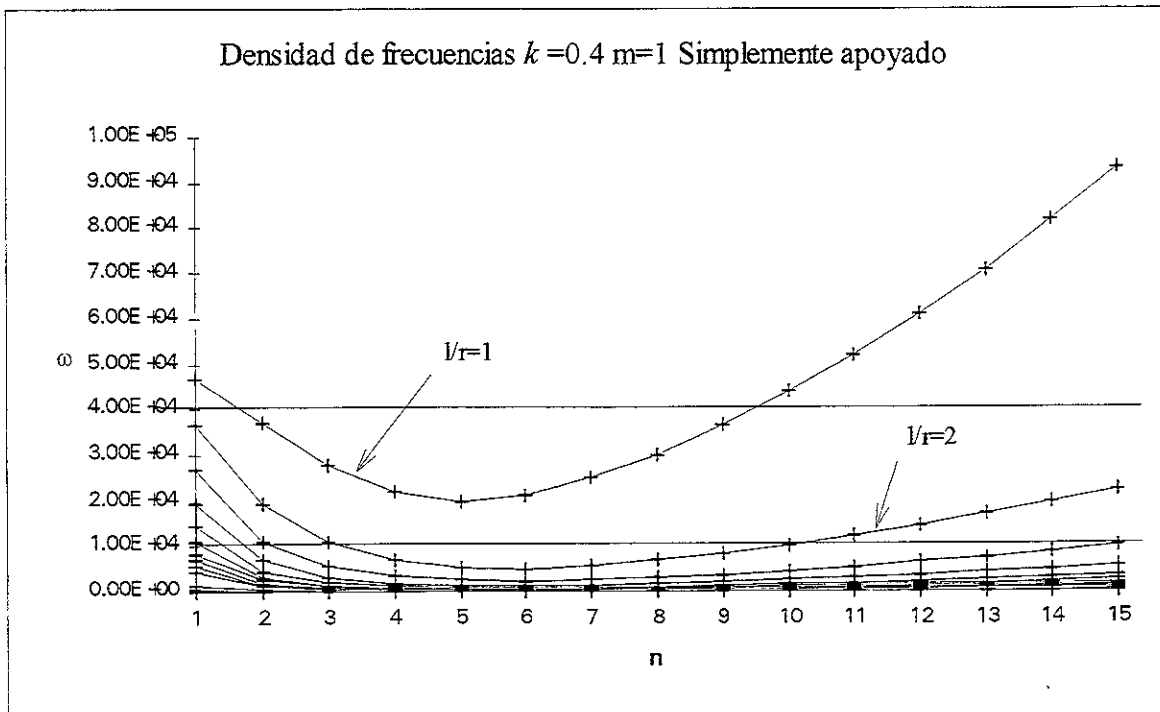


Figura 4.17

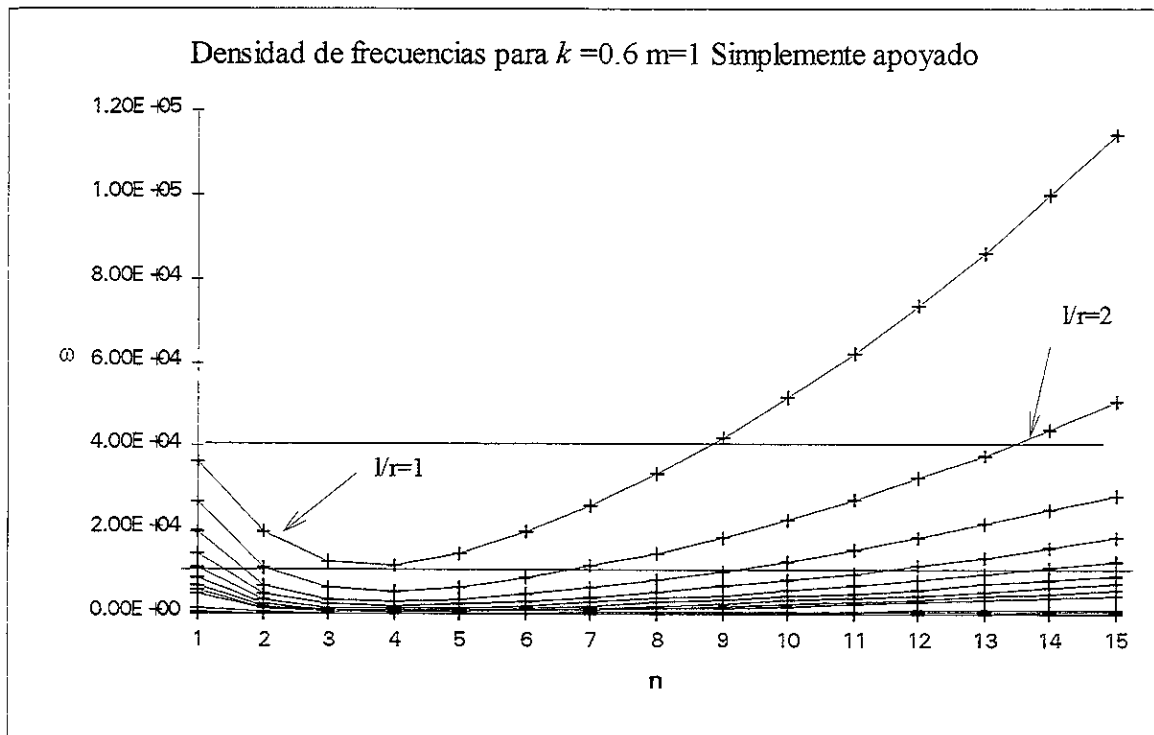


Figura 4.18

Los tambores que se utilizan en la actualidad se listan a continuación :

Tambor	Tipo	Dia. int	Dia. Ext	radio medio	$h$	$l$	$\omega$	$k$	$n$
3219X5822	15X7	15.01	16.34	7.84	0.665	10.47	8.22E+03	0.6	3
3219W5093	16.5X8	16.495	18	8.62	0.7525	10.94	8.15E+03	0.6	3
3219K5783	16.5X8	16.49	18.32	8.7	0.915	12.94	7.66E+03	0.7	2
3219 5784	16.5X8	16.49	18.32	8.7	0.915	12.94	7.66E+03	0.7	2
X32191948	15X8.62	14.49	16.36	7.71	0.935	12.4	8.27E+03	0.7	2
X32192713	16.5X7	16.33	17.86	8.55	0.765	10.8	8.41E+03	0.6	3
X32192937	16.5X7	16.495	17.62	8.53	0.5625	10.75	6.95E+03	0.6	3
X32192928	16.5X7	16.495	17.62	8.53	0.5625	10.75	6.95E+03	0.6	3
3219C3929	15X4	14.495	16.25	7.69	0.8775	8	1.29E+04	0.6	3
3219F3568	16.5X5	16.495	17.62	8.53	0.5625	9.157	8.13E+03	0.5	3

Tabla 4.5

La densidad de frecuencias de algunos de los tambores anteriores se muestra en la figura siguiente:



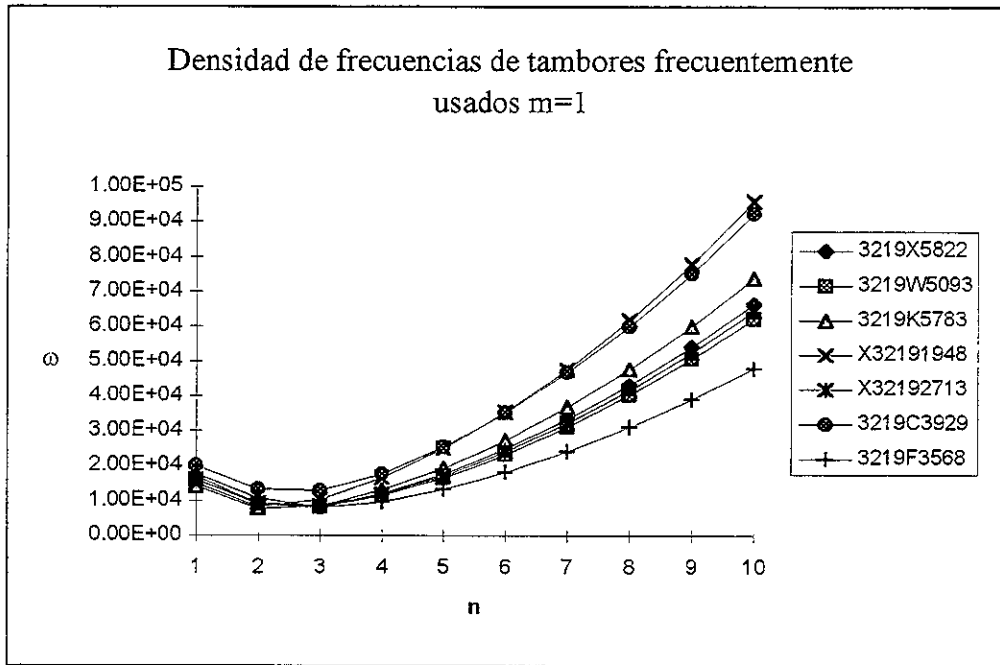
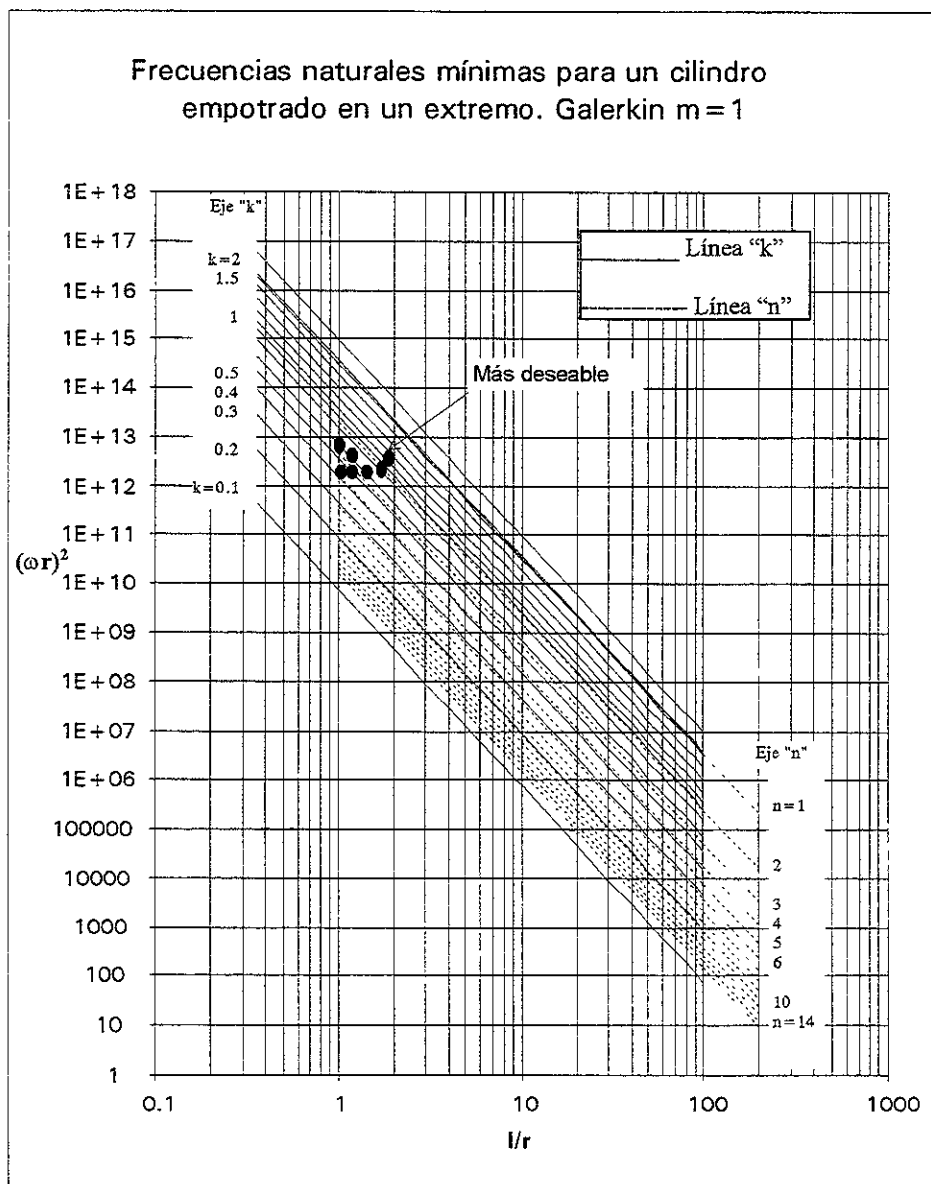


Figura 4.19

## 5. Conclusiones

Utilizando el método presentado por Galerkin, se obtuvieron algoritmos para la obtención de las frecuencias naturales de cascarones cilíndricos rectos con diferentes condiciones de frontera. En la literatura solamente se manejan este tipo de soluciones para cascarones simplemente apoyados<sup>12</sup>. Como se puede observar a lo largo del presente trabajo, las soluciones para diferentes condiciones de frontera no pueden ser obtenidas con los métodos exactos, pero aprovechando la formulación elaborada por Donnell y el uso de la analogía de las funciones de viga, en la que se utilizan las soluciones encontradas para vigas en todas sus condiciones de frontera, se puede llegar a una aproximación aceptable para problemas de ingeniería ya que el error es mínimo<sup>12</sup>. Los valores de las frecuencias calculados con métodos aproximados son generalmente superiores a los de los métodos llamados exactos.



Se calcularon los nomogramas para la obtención de dichas frecuencias, en escala doble logarítmica, encontrando líneas rectas para cada  $r/h$ . En la elaboración de éstos, se encontró que las líneas  $r/h$  son paralelas entre si.

La interpretación física de lo anterior es que una familia de cascarones con  $r/h$  grande siempre será menos rígida que una de  $r/h$  más pequeña. Se comprobó además que dicho paralelismo se mantiene aun cuando los valores de onda longitudinal  $m$  o las condiciones de frontera cambien, y que incluso la amplitud relativa entre líneas con el mismo  $r/h$  para diferentes números  $m$  y/o condición de frontera, se mantiene constante. Todo lo anterior permitió elaborar un nomograma para la obtención de las frecuencias mínimas, es decir críticas, de cualquier cascarón cilíndrico circular recto, con cualquier número de onda longitudinal  $m$  y con cualquier combinación de condiciones de frontera.

La importancia de conocer el valor de las frecuencias naturales de una estructura dada, reside no solo como un parámetro de diseño, para evitar resonancia etc., sino que se utiliza en el análisis de respuesta forzada. El nomograma presentado aquí, puede ser utilizado para la obtención de dichos valores en cilindros, y la metodología para la obtención de los algoritmos puede utilizarse en el desarrollo de éstos para otras estructuras.

Se comprobó que las frecuencias naturales mínimas de una familia de cilindros con igual valor de  $k$ , tienen su frecuencia natural mínima con el mismo valor de onda circunferencial  $n^{13}$ , donde

$$k = \sqrt{\frac{l}{r}} \sqrt{\frac{h}{r}}$$

Para valores de  $k$  pequeños, el número de onda  $n$  correspondiente a la frecuencia natural mínima es mayor, haciendo sus vibraciones más notorias. Se ha comprobado que los tambores de freno en los que se detecta mayor ruido, tienen números pequeños de  $k$ . De aquí que la primer recomendación de diseño sea la elección de tambores con valores de  $k$  altos.

Se verificó que la frecuencia natural de un panel cilíndrico circular es función del ángulo definido por su radio y longitud de arco,  $\alpha$ , encontrando que mientras  $\alpha$  aumenta el valor de la frecuencia natural mínima se acerca al del cilindro completamente cerrado. Cuando  $\alpha$  alcanza los  $60^\circ$  la frecuencia vale el 88.9% del valor que tiene cuando el cilindro está cerrado, el 95% a  $90^\circ$  y el 98.8% con  $170^\circ$ . Como los paneles que simulan las zapatas de los frenos tienen un valor de  $\alpha$  igual a  $48^\circ$  podemos utilizar prácticamente cualquier fórmula para un cascarón cerrado.

Por último se obtuvieron las densidades de frecuencias naturales mínimas para los tambores utilizados comúnmente. El cálculo de la densidad de frecuencias permite visualizar gráficamente la posibilidad de que las frecuencias de excitación coincidan con alguna de las frecuencias naturales del cilindro. Dicho de otra manera, mientras más denso sea el campo de frecuencias naturales de un cascarón dentro de un rango, más grande es la posibilidad de

ruido. Se ha encontrado que la densidad de frecuencias dentro de un rango de frecuencias definido, disminuye conforme el valor de  $k$  aumenta.

Las frecuencias de excitación de este tipo de componentes automotrices son variables debido a que la naturaleza de los frenos implica el cambio de velocidad de rotación de los componentes. Como segunda recomendación de diseño en este trabajo, se propone utilizar tambores con valor de  $k$  más alto posible, tratando de evitar que se alcance una frecuencia natural durante la operación.

Lo anterior es posible ya que el valor de  $k$  puede elevarse modificando alguna de las dimensiones de la pieza. Para tambores cuya geometría esté restringida por el radio y/o el largo, la manera más viable de elevar el valor de  $k$  es aumentando el espesor  $h$  del cascarón.

Las ecuaciones desarrolladas y los nomogramas de resultados son generales para cascarones cilíndricos, por lo que la solución propuesta es de fácil aplicación en cualquier tipo de vehículo con frenos de tambor a un costo bajo, ya que los incrementos de  $h$  para los cuales se obtiene un cambio significativo en la magnitud de la frecuencia natural son muy pequeños.

Es importante mencionar que el desarrollo de este trabajo se realizó en torno al análisis de la respuesta de los componentes básicos del freno de tambor sin tomar en cuenta la influencia de factores como la temperatura, la inercia y la resistencia a la rodadura, mismos que actúan determinantemente en el desempeño de los frenos. La evaluación de su participación en la respuesta de los tambores analizados aquí, podrá ser llevada a cabo en un trabajo futuro.

## Referencias

1. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials Vol II, Isaac Todhunter, Cambridge University Press, 1886
2. A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, AEH Love, 1888
3. A new theory for the buckling of thin elastic cylinders under axial compression and bending, L.H. Donnell, Trans. ASCE, 1934
4. The theory of thin shells, Novozhilov, P.Noordhoff Lts, 1959
5. Theory of plates and shells, S.P.Timoshenko, S.Woinowsky Krieger, McGraw Hill, 1959.
6. Formulas for natural frequencies and mode shape, Robert D. Blevins PhD., Robert E. Krieger Publishing, 1979.
7. Mechanical Vibrations, Francis S. TSE, Allyn and Bacon, Inc., 1963.
8. Stresses in Shells, Wilhelm Flügge, Springer Verlag, N.Y., 1973
9. Internally loaded cylindrical shells, A.N. Sherbourne and José L. Urrutia, Canadian journal of civil engineering, 1982
10. Advanced strength and applied elasticity, A.C. Ugural and S.K. Fenster, P T R Prentice Hall Englewood Cliffs New Jersey, 1987
11. Vibración libre en cascarones cilíndricos rigidizados, León Jairo Arango, DEPMI Unam, 1988.
12. Vibrations of plates and shells, Werner Soedel, Marcel Dekker, 1993
13. An assessment of stability analysis of axially compressed orthotropic circular cylindrical shells, J.L. Urrutia Galicia and H. Rothert, 1997
14. Simplified equations and solutions for the vibration of orthotropic cylindrical shells., Werner Soedel, J. Sound Vibration vol. 87 no. 4 1983 pp 555-566.
15. Vibración libre en conos y cilindros, José L. Urrutia ,Instituto de Ingeniería, Octubre 1987.

Programa para Cálculo de Frecuencias Naturales de Cascarones Cilíndricos Rectos.  
Método de Galerkin

```
program galerkin;
uses crt;
const Pi=3.141592;
type vector=array [1..20] of real;
var EE,nu,ro,L,r,h,w2,minima,lam,k:real;
lamda:vector;
i,j,ene,n,m:integer;
datos:text;
s,condi:string;
nomarch:string;

function {esta función es para elevar a una potencia}
pot(x:real;n:integer):real;
var
aux:real;
jj:integer;
begin {pot}
  aux:=x;
  for jj:=1 to n-1 do
  begin
    aux:= x*aux;
  end;
  pot:=aux;
end; {pot}

procedure lamdas (var opcion:string;var lamda:vector);
const
Pi=3.141692;
var
alfa1,alfa2:real;
i:integer;

begin {procedure lamdas}
if opcion='1' then {Para libre-libre;}
begin
writeln("Condición de frontera libre-libre");
alfa1:=0.5499;
alfa2:=2.2116;
lamda[1]:=4.73004074;
lamda[2]:=7.85320462;
lamda[3]:=10.9956078;
lamda[4]:=14.1371655;
lamda[5]:=17.2787597;
for i:=6 to 15 do
  lamda[i]:=(2*i+1)*Pi/2;
end;
```

```

if opcion='2' then {Para libre-simple}
begin
writeln("Condición de frontera libre-simple");
alfa1:=0.7467;
alfa2:=1.7662;
lamda[1]:=3.92660231;
lamda[2]:=7.06858275;
lamda[3]:=10.2101761;
lamda[4]:=13.35176878;
lamda[5]:=16.49336143;
for i:=6 to 15 do
    lamda[i]:=(4*i+1)*Pi/4;
end;

if opcion='3' then {Para empotrado-libre;}
begin
writeln("Condición de frontera empotrado-libre");
alfa1:=-0.2441;
alfa2:=1.33219;
lamda[1]:=1.87510407;
lamda[2]:=4.69409113;
lamda[3]:=7.85475744;
lamda[4]:=10.99554073;
lamda[5]:=14.13716839;
for i:=6 to 15 do
    lamda[i]:=(2*i-1)*Pi/2;
end;

if opcion='4' then {Para empotrado-simple}
begin
writeln("Condición de frontera empotrado-simple");
alfa1:=0.7467;
alfa2:=0.7467;
lamda[1]:=3.92660231;
lamda[2]:=7.06858275;
lamda[3]:=10.21017612;
lamda[4]:=13.35176878;
lamda[5]:=16.49336143;
for i:=6 to 15 do
    lamda[i]:=(4*i+1)*Pi/4;
end;

if opcion='5' then {Para empotrado-empotrado}
begin
writeln("Condición de frontera empotrado-empotrado");
alfa1:=0.5499;
alfa2:=0.5499;
lamda[1]:=4.73004074;
lamda[2]:=7.85320462;
lamda[3]:=10.9956078;
lamda[4]:=14.1371655;
lamda[5]:=17.2787597;
for i:=6 to 15 do
    lamda[i]:=(2*i+1)*Pi/2;
end;

```

```

if opcion='6' then {Para simple-simple }
begin

alfa1:=0.5;
alfa2:=0.5;
for i:=1 to 15 do
  lamda[i]:=i*Pi;
end;
end; {end lamdas}

procedure EntradaDatos (var EE,nu,ro,L,r,h:real;var n,m:integer;var nomarch,CF:string);
var
s :string;
inicio:text;
variable:real;
entero:integer;
condicion:string;
begin
assign (inicio,'a:garlek.ini');
reset (inicio);
readln (inicio,nomarch);
writeln ('0 Archivo para guardar los datos: ',nomarch);
readln (inicio,variable);
writeln ('1 E=',variable);
EE:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln ('2 nu=',variable);
nu:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln ('3 ro=',variable);
ro:=variable;
readln (inicio,entero);
writeln ('4 m=',entero);
m:=entero;
readln (inicio,entero);
writeln ('5 n=',entero);
n:=entero;
readln (inicio,variable);
writeln ('6 L=',variable);
L:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln ('7 r=',variable);
r:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln ('8 h=',variable);
h:=variable;
readln(inicio,condicion);
writeln('C Condición de frontera ',condicion);
readln (inicio,CF);
close (inicio);
writeln ('9 Ejecutar');
writeln ('Deseas cambiar algo? Presiona el número a cambiar');
s:=readkey;

```



```

while s <> '9' do

begin
if s='0' then
begin
write ('Nombre del archivo =');
readln (nomarch);
end;
if (s='1') or (s='e') then
begin
write ('Modulo de elasticidad E=');
readln (EE);
end;
if (s='2') or (s='p') then
begin
write ('Relaci3n de Poisson=');
readln (nu);
end;
if (s='3') or (s='d') then
begin
write ('Densidad del material=');
readln (ro);
end;
if (s='4') or (s='m') then
begin
write ('Numero de onda longitudinal m=');
readln (m);
end;
if (s='5') or (s='n') then
begin
write ('Numero de onda circunferencial n=');
readln (n);
end;
if (s='6') or (s='l') then
begin
write ('Longitud del cascar3n L=');
readln (L);
end;
if (s='7') or (s='r') then
begin
write ('Radio de curvatura r=');
readln (r);
end;
if (s='8') or (s='h') then
begin
write ('Espesor del cascar3n h=');
readln (h);
end;

```

```

if (s='c') or (s='C') then
  begin
    writeln('1 libre-libre');
    writeln('2 libre-simplemente apoyado');
    writeln('3 Empotrado-libre');
    writeln('4 Empotrado-simplemente apoyado');
    writeln('5 Empotrado-empotrado');
    writeln('6 Simplemente apoyado-simplemente apoyado');
    write('Para que condiçiøn de frontera? ');
    readln (CF);
    if CF='1' then condicion:='libre-libre' ;
    if CF='2' then condicion:='libre-simplemente apoyado' ;
    if CF='3' then condicion:='Empotrado-libre';
    if CF='4' then condicion:='Empotrado-simplemente apoyado';
    if CF='5' then condicion:='Empotrado-empotrado';
    if CF='6' then condicion:='Simplemente apoyado-simplemente apoyado';
    end;
    clrscr;
    writeln ('0 Archivo para guardar los datos: ',nomarch);
    writeln ('1 E=',EE);
    writeln ('2 nu=',nu);
    writeln ('3 ro=',ro);
    writeln ('4 m=',m);
    writeln ('5 n=',n);
    writeln ('6 L=',L);
    writeln ('7 r=',r);
    writeln ('8 h=',h);
    writeln ('C Condiçiøn de frontera ',condicion);
    writeln ('9 Ejecutar');
    writeln ("Deseas cambiar algo? Presiona el nũmero a cambiar");
    s:=readkey ;
end; {fin while s}
rewrite (inicio);
writeln (inicio,nomarch);
writeln (inicio,EE);
writeln (inicio,nu);
writeln (inicio,ro);
writeln (inicio,m);
writeln (inicio,n);
writeln (inicio,L);
writeln (inicio,r);
writeln (inicio,h);
writeln (inicio,condicion);
writeln (inicio,CF);
close (inicio);
end; {Entrada datos}

procedure galerkin (var EE,nu,ro,L,r,h,lamda:real;var n:integer;var w2:real);
var d:real;
begin
d := (EE * pot(h, 3)) / (12 * (1 - pot(nu, 2)));
w2:=1/(ro*h)*((EE*h*pot(lamda,4))/(pot(r,2)*pot((pot((n/r),2)+pot(lamda,2)),2))+
d*pot((pot((n/r),2)+pot(lamda,2)),2));
end. {end procedure garlekin}

```



```

        end; {end if}
        writeln (datos,k,',',n,',',L/r,',',w2);
        end; {end n}
    {writeln (datos,k,',',ene,',',L/r,',',minima);}

end; {end j}
for j:=2 to 10 do
begin
L:=j*1000;
h:=r*pot((pot(k,2)*r/L),2);
minima:=10E+25;
ene:=30;
    for n:=1 to 15 do
        begin
            lam:=lamda[m]/L;
            galerkin (EE,nu,ro,L,r,h,lam,n,w2);
            w2:=sqrt(w2);
            if w2<minima then
                begin
                    minima:=w2;
                    ene:=n;
                end; {end if}
            writeln (datos,k,',',n,',',L/r,',',w2);
            end; {end n}
        {writeln (datos,k,',',ene,',',L/r,',',minima);}
    end; {end j}
end; {end i}
close (datos);
writeln ('1 Calcular caso unico');
writeln ('2 Calcular para nomograma');
writeln ('3 Calcular caso unico frecuencia m;nima');
writeln ('q Salir del programa');
s:=readkey;
end; {end while 2}

while s='3' do
begin
ClrScr;
writeln ('** Calcular caso unico con frecuencia m;nima **');
EntradaDatos (EE,nu,ro,L,r,h,n,m,nomarch,condi);
lamdas (condi,lamda);
minima:=10E+25;
ene:=30;
for n:=1 to 25 do
begin
lam:=lamda[m]/L;
{k:=0.5
h:=r*pot((pot(k,2)*r/L),2);}
galerkin (EE,nu,ro,L,r,h,lam,n,w2);
w2:=sqrt(w2);

```

```

if w2<minima then
begin
  minima:=w2;
  ene:=n;
end; {end if}
end; {end for}
writeln ('frecuencia m;nima= ',minima);
writeln ('(wr)^2=',(minima*r)*(minima*r));
writeln ('Modo de frecuencia m;nima n=',ene);
writeln ('1 Calcular caso unico');
writeln ('2 Calcular para nomograma');
writeln ('3 Calcular caso unico frecuencia m;nima');
writeln ('q Salir del programa');
s:=readkey;
end; {end while 3}
end; {end while q}
end.

```

Datos de Archivo Garlek.ini

c:\carlos\garlek.dat

2.0600000000E+05

3.0000000000E-01

7.8500000000E-09

1

1

4.0000000000E+02

1.0000000000E+02

2.0000000000E-01

Simplemente apoyado-simplemente apoyado

6

**ESTA TESTS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Programa para el Cálculo de Frecuencias Naturales para Panel Cilíndrico Circular Recto  
Método de Galerkin

```
program zapata;
uses crt;
const Pi=3.141592;
var EE,nu,ro,L,r,h,w2,minima,lam,k,alfa:real;
lamda:array [0..15] of real;
i,j,ene,n,m:integer;
datos:text;
s,condi:string;
nomarch:string;

function {esta función es para elevar a una potencia}
pot(x:real;n:integer):real;
var
aux:real;
jj:integer;
begin {pot}
  aux:=x;
  for jj:=1 to n-1 do
  begin
    aux:= x*aux;
  end;
  pot:=aux;
end: {pot}

procedure EntradaDatos (var EE,nu,ro,L,r,h:real;var n,m:integer;var nomarch:string;var CF:real);
var
s :string;
inicio:text;
variable:real;
entero:integer;

begin
assign (inicio,'c:\carlos\panel.ini');
reset (inicio);
readln (inicio,nomarch);
writeln ('0 Archivo para guardar los datos: ',nomarch);
readln (inicio,variable);
writeln('1 E=',variable);
EE:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln('2 nu=',variable);
nu:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln('3 ro=',variable);
ro:=variable;
readln (inicio,entero);
writeln('4 m=',entero);
m:=entero;
readln (inicio,entero);
```

```

writeln('5 n=',entero);
n:=entero;
readln (inicio,variable);
writeln('6 L=',variable);
L:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln('7 r=',variable);
r:=variable;
readln (inicio,variable);
writeln('8 h=',variable);
h:=variable;
readln(inicio,CF);
writeln('A Angulo del panel=',CF);
close (inicio);
writeln ('9 Ejecutar');
writeln ("Deseas cambiar algo? Presiona el número a cambiar");
s:=readkey;
while s <> '9' do

begin
if s='0' then
begin
write ('Nombre del archivo =');
readln (nomarch);
end;
if (s='1') or (s='M') then
begin
write ('Modulo de elasticidad E=');
readln (EE);
end;
if (s='2') or (s='p') then
begin
write ('Relación de Poisson=');
readln (nu);
end;
if (s='3') or (s='d') then
begin
write ('Densidad del material=');
readln (ro);
end;
if (s='4') or (s='m') then
begin
write ('Numero de onda longitudinal m=');
readln (m);
end;
if (s='5') or (s='n') then
begin
write ('Numero de onda circunferencial n=');
readln (n);
end;
if (s='6') or (s='l') then
begin
write ('Longitud del cascarón L=');
readln (L);

```



```

end;
if (s='7') or (s='r') then
begin
write ('Radio de curvatura r=');
readln (r);
end;
if (s='8') or (s='h') then
begin
write ('Espesor del cascarón h=');
readln (h);
end;
if (s='A') or (s='a') then
begin
write ('Angulo del panel Alfa=');
readln (CF);
end;

clrscr;
writeln ('0 Archivo para guardar los datos: ',nomarch);
writeln ('1 E=',EE);
writeln ('2 nu=',nu);
writeln ('3 ro=',ro);
writeln ('4 m=',m);
writeln ('5 n=',n);
writeln ('6 L=',L);
writeln ('7 r=',r);
writeln ('8 h=',h);
writeln ('A Angulo del panel=',CF);
writeln ('9 Ejecutar');
writeln ("Deseas cambiar algo? Presiona el número a cambiar");
s:=readkey ;

end; {fin while s}
rewrite (inicio);
writeln (inicio,nomarch);
writeln (inicio,EE);
writeln (inicio,nu);
writeln (inicio,ro);
writeln (inicio,m);
writeln (inicio,n);
writeln (inicio,L);
writeln (inicio,r);
writeln (inicio,h);
writeln (inicio,CF);
close (inicio);
end; {Entrada datos}

procedure panel (var EE,nu,ro,L,a,h,alfa:real;var m,n:integer;var w2:real);
const Pi= 3.141592;
var w0,w1,lamda:real;
begin
lamda:=m*Pi*a/L;
w0:=pot(lamda,4)/pot((pot(lamda,2)+pot((n*Pi/alfa),2)),2);
w1:=pot((h/a),2)/(12*(1-pot(nu,2)))*pot((pot(lamda,2)+pot((n*Pi/alfa),2)),2);

```

```

w2:=(w0+w1)*(EE/ro);
end;

begin {programa}
clrscr;
writeln ('1 Calcular caso unico');
writeln ('2 Calcular para nomograma');
writeln ('3 Calcular caso unico frecuencia minima');

s:=readkey;
while s='1' do
begin
ClrScr;
EntradaDatos (EE,nu,ro,L,r,h,n,m,nomarch,alfa);
alfa:=alfa*3.141592/180;
panel (EE,nu,ro,L,r,h,alfa,m,n,w2);
writeln ('(wr)^2= ',w2);
writeln ('1 Calcular caso unico');
writeln ('2 Calcular para nomograma');
writeln ('3 Calcular caso unico frecuencia minima');
s:=readkey;
end;

while s='2' do
begin

clrscr;
EntradaDatos (EE,nu,ro,L,r,h,n,m,nomarch,alfa);
assign (datos,nomarch);
rewrite (datos);
alfa:=alfa*3.141592/180;
writeln (datos,'k',' ','n',' ','L/r',' ','w');
for i:=1 to 36 do
begin
alfa:=i*10;
k:=0.3;

for j:=1 to 10 do
begin
L:=j*100;
h:=r*pot((pot(k,2)*r/L),2);
minima:=10E+25;
ene:=30;
for n:=1 to 15 do
begin
panel (EE,nu,ro,L,r,h,alfa,m,n,w2);
if w2<minima then
begin
minima:=w2;
ene:=n;
end; {end if}

end; {end n}
writeln (datos,alfa,' ','ene',' ','L/r',' ','minima');

```

```

end; {end j}
for j:=2 to 10 do
begin
L:=j*1000;
h:=r*pot((pot(k,2)*r/L),2);
minima:=10E+25;
ene:=30;
for n:=1 to 15 do
begin
panel (EE,nu,ro,L,r,h,alfa,m,n,w2);
if w2<minima then
begin
minima:=w2;
ene:=n;
end; {end if}
end; {end n}
writeln (datos,alfa,',',ene,',',L/r,',',minima);
end; {end j}
end; {end i}
close (datos);
writeln ('Quieres volver a calcular presiona 2');
s:=readkey;
end; {end while 2}

while s='3' do
begin
ClrScr;
EntradaDatos (EE,nu,ro,L,r,h,n,m,nomarch,alfa);
alfa:=alfa*3.141592/180;
minima:=10E+25;
ene:=30;
for n:=1 to 25 do
begin

{k:=0.5;
h:=r*pot((pot(k,2)*r/L),2);}
panel (EE,nu,ro,L,r,h,alfa,m,n,w2);

if w2<minima then
begin
minima:=w2;
ene:=n;
end; {end if}
end; {end for}
writeln ('(wr)^2 minima=',minima);
writeln ('Modo de frecuencia m;nima n=',ene);
writeln ('3 Volver a calcular caso unico frcuencia m;nima');
s:=readkey;
end;
end

```

Datos para el Archivo Panel.ini

```
c:\carlos\panel.dat  
2.06000000000000E+0005  
3.00000000000182E-0001  
7.8499999999350E-0009  
1  
6  
1.7780000000047E+0002  
2.0319999999953E+0002  
4.8000000000291E+0000  
1.7000000000000E+0002
```