14
2 gm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TOPOLOGIAS CONJUNTO-ABIERTAS EN ESPACIOS DE FUNCIONES Y METRIZABILIDAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RICARDO ARMANDO GONZALEZ SILVA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
Topologías conjunto-abiertas en Espacios de Funciones y Metrizabilidad

realizado por el Sr. Ricardo Armando González Silva

con número de cuenta 9150830-6 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Angel Tamaríz Mascarúa	
Propietario	Dr. Salvador García Ferreira	
Propietario	Dr. Okunev Oleg	
Suplente	Dr. Mikhail Tkachenko	
Suplente	Dr. Miguel A. Xicoténcatl Merino	

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Guevara Bravo

Topologías conjunto-abiertas en Espacios de Funciones y Metrizabilidad

Ricardo Armando González Silva

Director de Tesis: Dr. Angel Tamariz Mascarúa

*

a mi Familia, a mi Tio Armando y su Familia

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todas las personas que he podido conocer, ya que cada una, de alguna manera han contribuido a mi formación personal. Pero muy en particular al Dr. Angel Tamariz Mascarúa, ya que siempre tuvo ese ánimo que innova las aspiraciones matemáticas de uno, por su atención y empeño en cada uno de los pasos en esta tesis lo cual ha sido trascendentalmente importante.

Agradezco también a los Doctores Oleg Okunev, Salvador Garcia F., Mikhail Tkačenko, y Miguel Xicotencatl, por la revisión de la tesis y sus observaciones.

También tengo mucho que agradecer al CINVESTAV por el amparo y apoyo técnico en mi formación.

Pero sobre todo, agradezco a mis padres y hermanos quienes me brindaron su apoyo y afecto. Tengo el agradecimento más especial que pudiera dar, a mi tio Armando, a quien no tengo forma de devolver todo su apoyo.

Tambien agradezco a mis grandes amigos Armando F. Mendoza Pérez, Isaias López Morales, Raquiel López Mtz. y Josué Ramírez O., por su valiosa amistad.

CONTENIDO

Prefacio

En esta tesis, se tratará de dotar de estructuras topológicas y uniformes al conjunto de las funciones continuas $C(X,Y)$ y de estudiar las propiedades topológicas y uniformes que les surgen a partir de las propiedades de los espacios X y Y. Trataremos las nociones clásicas de convergencia puntual, convergencia uniforme en los compactos y convergencia uniforme, y procederemos a diversas generalizaciones. Analizaremos la metrizabilidad y la completez de $C(X,Y)$ considerado con estas topologías y uniformidades. También se estudian las propiedades de las funciones naturales que se definen de manera natural con respecto a $C(X,Y)$.

El material que se presenta en esta tesis está basado en las obras [McNt], [Ark] y [MOP]. Las partes dedicadas a la topología gráfica en $C(X,Y)$, y que están propuestas en [McNt], son propias del autor, así como la proposición 1.1.4, el teorema 1.3.2, la observación 2.1.2.(a), el corolario 3.1.4.(c) y la observación 3.2.17.(b).

En el primer capítulo, definimos en $C(X,Y)$ las topologías conjunto-abiertas, la topología uniforme y la topología de la gráfica, y estudiamos sus relaciones.

En el segundo capítulo, estudiamos algunas funciones que surgen de manera natural entre los espacios de funciones continuas. Vemos qué propiedades cumplen en determinadas condiciones de los espacios base y en las topologías definidas en el capítulo 1. Estas propiedades juegan un papel muy importante en el estudio de las propiedades topológicas de los espacios de funciones. Los resultados que se plantean en este capítulo se aplican frecuentemente en capítulos posteriores.

El tercer capítulo esta dedicado al estudio de propiedades básicas en los espacios topológicos de las funciones continuas; se analizan condiciones necesarias y suficientes para que se satisfagan los axiomas de separación y numerabilidad en los espacios de funciones continuas. Este capítulo no pretende ser exhaustivo, se dejó fuera de la discusión la normalidad en $C_k(X,Y)$ y la regularidad, normalidad, el peso y el carácter de $C_G(X,Y)$.

El estudio de la metrizabilidad de $C(X,Y)$ se lleva a cabo en el capítulo 4; tratamos en especial el caso cuando $Y = \mathbb{R}$ y α es la red de los compactos. En este capítulo el teorema 4.3.1 es el más general. En la última sección estudiamos la metrizabilidad de la topología de la gráfica en $C(X,\mathbb{R})$.

El capítulo 5 está dedicado al estudio de la completez de $C(X,Y)$; se trabaja con el concepto de la Čech-completez. Este concepto es más general que la completez métrica, y coincide con ella en los espacios métricos. También trabajamos con la completez uniforme, la cual, como se puede ver en el apéndice, no es una propiedad topológica. Los ultimos corolarios de este capítulo de equivalencias son muy "elegantes".

En la parte del apéndice hay un estudio general de estructuras uniformes diagonales que cubren todas las afirmaciones que se usan en el libro, tambien se escriben resultados importantes sin demostración ya que su demostración involucra demasiado material, las demostraciones se encuentran en la bibliografía indicada.

TERMINOLOGÍA Y NOTACIÓN

Para un subconjunto A de un espacio topológico X, denotaremos por $\overline{A}$ su cerradura, por $int(A)$ su interior, y el complemento de A lo denotamos por $X - A$.

Definimos el conjunto potencia de un conjunto X como $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. El conjunto de los reales lo denotamos como $\mathbb{R}$, y el de los números naturales por $\mathbb{N}$.

La cardinalidad de un conjunto A es denotado por $|A|$. Un conjunto A se dice que es numerable si $|A| \leq \aleph_0$, en donde $\aleph_0$ es el cardinal infinito mas pequeño.

Denotamos por Y^X al conjunto de las funciones con dominio X y contradominio Y. Al conjunto de las funciones en Y^X que son continuas lo denotamos por $C(X, Y)$.

Axiomas de separación.

Axioma T_0: Para cualesquiera $a, b \in X$ diferentes, existe un conjunto abierto O en X tal que o $a \in O$ y $b \notin O$, o $b \in O$ y $a \notin O$.

Axioma T_1: Para cualesquiera $a, b \in X$ diferentes, existe O_a, $O_b \in \tau$ vecindades abierta de a y b respectivamente tales que $b \notin O_a$ y $a \notin O_b$.

Axioma T_2: Para cualesquiera $a, b \in X$ diferentes, existen $O_a, O_b \in \tau$ vecindades abiertas de a y b respectivamente disjuntas.

Un espacio X es *Hausdorff* si es T_2.

Un espacio X es *completamente Hausdorff* si cumple que para a y b puntos distintos de X, existen abiertos A, B que continen a a y b respectivamente, tal que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Un espacio topológico X, se dice que es *regular* si para todo $y \in Y$ y para cualquier vecindad abierta V de y existe un abierto U tal que $y \in U \subset \overline{U} \subset V$.

Axioma T_3: X es un espacio regular y T_0.

Un espacio X es *completamente regular* si cumple que para F subconjunto cerrado de X y $x \in X \setminus F$ existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ para todo $y \in F$.
Un espacio es *Tychonoff* si es completamente regular y es T_1

Un espacio X se dice que es *normal* si para A y B subconjuntos cerrados y disjuntos en X, existen conjuntos abiertos y disjuntos O_A, y O_B que contienen a A y B respectivamente.

Axioma T_4. X es un espacio normal y T_1.

Todos los espacios X considerados en esta tesis son espacios Tychonoff (no triviales), salvo que se haga mención explícita del axioma de separación que cumple X, ya sea por que es necesaria una condición más fuerte que Tychonoff, o en el caso de que se quiera llamar la atención en resultados válidos aún con axiomas más débiles que Tychonoff. Tambien, cada vez que se mencione una uniformidad en un espacio es en el sentido de uniformidad compatible.

Capítulo 1

TOPOLOGÍAS EN $C(X,Y)$

Para espacios topologicos X y Y denotamos al conjunto de todas las funciones con dominio X y contradominio Y como Y^X, y al subconjunto de las funciones continuas como $C(X,Y)$.

En este capítulo asociaremos a los conjuntos Y^X y $C(X,Y)$ algunas topologías relacionadas convenientemente con las topologías de X y Y. Veremos la topología conjunto-abierta, uniforme y gráfica y analizaremos sus relaciones.

1.1 Topologías conjunto-abiertas.

Definicion 1.1.1. Sean $\alpha, \beta \subset \mathcal{P}(X)$.

1.- Decimos que α es una *β-red* si cumple:

(i) $\alpha \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \alpha$;

(ii) para toda $B \in \beta$ y para toda vecindad abierta U de B existe $A \in \alpha$ tal que $B \subseteq A \subseteq U$.

2.- Una *red* en X es una β-red en X donde $\beta = \{\{x\} : x \in X\}$.

3.- Una β-red en X es llamada *red cerrada* (resp., *compacta)* si todos sus elementos son cerrados (resp., compactos)

Denotaremos por $[A, V]$ al conjunto $\{f \in Y^X : f(A) \subset V\}$. Cuando no haya posibilidad de confusión denotaremos al conjunto $[A, V] \cap C(X,Y)$ simplemente como $[A, V]$

Observación 1.1.2. Para $A, A_1, A_2 \subset X$ y $B, B_1, B_2 \subset Y$ se cumple:

$$[A, B_1 \cap B_2] = [A, B_1] \cap [A, B_2]$$
$$[A_1 \cup A_2, B] = [A_1, B] \cap [A_2, B]$$

Definición 1.1.3. Sea α una colección de subconjuntos de X. Una topología en $C(X,Y)$ es llamada *topología conjunto-abierta* si tiene como subbase a la colección

$$\delta = \{[A, V] \ : \ A \in \alpha \ y \ V \subseteq Y \ abierto\}$$

El conjunto $C(X,Y)$ con esta topología es denotado como $C_\alpha(X,Y)$. Si Z es un subespacio de X, entonces $C_\alpha(Z,Y)$ denota al espacio $C_\varrho(Z,Y)$ donde $\varrho = \{A \cap Z : \ A \in \alpha\}$.

Para espacios topologicos X y Y, la notación $X \preceq Y$ significa que las topologías de los espacios estan definidas en el mismo conjunto, pero la topología en Y es más fina o igual que la de X.

Decimos que una función $p : [0,1] \to Y$ es una *trayectoria no trivial* en Y si p es continua y $p(0) \neq p(1)$.

Proposicion 1.1.4. Si β es una α-red, entonces $C_\alpha(X,Y) \preceq C_\beta(X,Y)$.

Demostración. Sea $A \in \alpha$, V un abierto en Y y $h \in [A, V]$. Entonces $h(A) \subset V$, es decir $A \subset h^{-1}(V)$. Como β es una α-red y h es continua, existe $B \in \beta$ tal que $A \subset B \subset h^{-1}(V)$. Por lo tanto, $h(B) \subset V$, es decir $h \in [B, V]$, lo cual concluye la demostración. ♯

Una red cerrada α se dice que es *hereditariamente cerrada* si cumple que cada subconjunto cerrado de un miembro de la red α es un miembro de α.

Teorema 1.1.5. Si α y β son redes cerradas en X, entonces se cumple lo siguiente:

(a) Si cada miembro de α está contenido en una unión finita de elementos de β y β es hereditariamente cerrada, entonces $C_\alpha(X,Y) \preceq C_\beta(X,Y)$

(b) Si X y Y son espacios Tychonoff, Y tiene una trayectoria no trivial y $C_\alpha(X,Y) \preceq C_\beta(X,Y)$, entonces cada miembro de α esta contenido en una union finita de elementos de β.

Demostración.(a) Sea $A \in \alpha$, V un subconjunto abierto en Y y $f \in [A,V]$. Por hipótesis, existen $B_1,...,B_n \in \beta$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Sea $C_i = A \cap B_i$, el cual está en β por ser β hereditariamente cerrada. Entonces $f \in [C_1,V] \cap \cdots \cap [C_n,V] \subset [A,V]$.

(b). Sea $p : [0,1] \to Y$ una trayectoria en Y tal que $p(0) \neq p(1)$, sea f_0 la función constante que manda cada punto de X en $p(0)$, y sea $V = Z \setminus \{p(1)\}$. Sea $A \in \alpha$. Entonces $[A,V]$ es una vecindad de f_0 en $C_\alpha(X,Y)$, así que existe un abierto básico $W = [B_1,V_1] \cap \cdots \cap [B_n,V_n]$ de f_0 en $C_\beta(X,Y)$ que está contenido en $[A,V]$. Sea $B = B_1 \cup ... \cup B_n$. Se va a demostrar que $A \subset B$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $x \in A \setminus B$. Como X es completamente regular, existe $\phi \in C(X,[0,1])$ tal que $\phi^{-1}(0) \supseteq B$ y $\phi(x) = 1$. Entonces $p \circ \phi \in W$ pero $p \circ \phi \notin [A,V]$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $A \subset B$. $\sharp$.

Observacion 1.1.6. De las definiciones se obtiene directamente que si las uniones finitas de elementos de β forman una α-red entonces $C_\alpha(X,Y) \preceq C_\beta(X,Y)$.

Hay dos ejemplos de topologías conjunto-abiertas de particular importancia. Una es la *topología puntual-abierta* , o *la topología de la convergencia puntual,* donde la red cerrada α en X es la familia de todos los subconjuntos finitos de X. Este espacio de funciones es denotado como $C_p(X,Y)$. Otra topología muy estudiada es la *topología compacto-abierta,* o *la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos,* donde la red cerrada α es la familia de todos los subconjuntos compactos no vacios de X. Este espacio de funciones es denotado como $C_k(X,Y)$.

Teorema 1.1.7. Si X es T_1 y α es una red cerrada en X, entonces $C_p(X,Y) \preceq C_\alpha(X,Y)$.

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 1.1.4 ya que en espacios T_1, los conjuntos finitos son cerrados. $\sharp$

Por lo tanto, cuando X es T_1, la topología de la convergencia puntual es la topología conjunto-abierta mas chica de entre aquellas generadas por redes cerradas. La topología conjunto-abierta más grande definida por una red cerrada, se obtiene al tomar como red la familia de todos los subconjuntos de X cerrados y no vacíos. El espacio de funciones con esta topología es denotado como $C_w(X,Z)$. Tenemos entonces las siguientes contencines (cuando X satisface cuando menos el axioma T_1):

$$C_p(X,Y) \preceq C_k(X,Y) \preceq C_w(X,Y).$$

Estas desigualdades se convierten en igualdades para casos especiales de X y Y, como veremos a continuación.

Teorema 1.1.8. Si X, Y son Tychonoff y Y tiene una trayectoria no trivial, entonces:

(a) $C_p(X,Y) = C_k(X,Y)$ si y sólo si todo subconjunto compacto de X es finito.

(b) $C_k(X,Y) = C_w(X,Y)$ si y sólo si X es compacto.

Demostración. (a) Necesidad: En particular estamos suponiendo que $C_k(X,Y) \preceq C_p(X,Y)$, con lo cual, por el Teorema 1.1.5.(b), tenemos que cada compacto está contenido en una unión finita de puntos. Por lo tanto los subconjuntos compactos de X son finitos.

(a) Suficiencia: Es inmediata

(b) Necesidad: En particular $C_w(X,Y) \preceq C_k(X,Y)$, y como $X \in w$, entonces por el Teorema 1.1.5.(b) se tiene que existen compactos $K_1, ..., K_n$ en X tales que $X = K_1 \cup \cdots \cup K_n$. Por lo tanto X es compacto.

(b) Suficiencia: Como X es compacto, la red de los subconjuntos cerrados y la red de los subconjuntos compactos coinciden, por lo tanto es inmediata la igualdad deseada. ♯

Algunas veces es mejor trabajar con abiertos básicos en el espacio rango en vez de hacerlo con abiertos arbitrarios. Si agregamos algunas condiciones a la red cerrada α de X, entonces es suficiente con usar abiertos básicos en Y para generar la topología en $C_\alpha(X,Y)$.

Teorema 1.1.9. Si α es una red compacta y hereditariamente cerrada en X, y σ es una subbase de Y, entonces $\{[A,S] : A \in \alpha \text{ y } S \in \sigma\}$ es una subbase de $C_\alpha(X,Y)$.

Demostración. Sean $A \in \alpha$, V un abierto de Y y $f \in [A,V]$. Para cada $a \in A$, existe un subconjunto finito $\sigma_a \subset \sigma$ tal que $f(a) \in \bigcap\{S : S \in \sigma_a\} \subset V$, y existe una vecindad U_a de a en X tal que $\overline{U}_a \subset f^{-1}(\bigcap\{S : S \in \sigma_a\})$. Ya que A es compacto, existe un subconjunto finito A' de A tal que $A \subset \bigcup\{U_a : a \in A'\}$. Entonces definimos

$$W = \bigcap\{[A \cap \overline{U}_a, S] \ : \ a \in A' \text{ y } S \in \sigma_a\},$$

el cual claramente contiene a f. Para mostrar que $W \subset [A,V]$, sea $g \in W$ y sea $x \in A$. Entonces para algún $a \in A'$, $x \in U_a$, de aqui se tiene que $g(x) \in \bigcap\{S : S \in \sigma_a\} \subset V$. ♯

1.2 Topologías uniformes

Sea α una red cerrada en X y sea μ una uniformidad (diagonal) en Y (véase el apéndice). Definimos la estructura uniforme $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$ en $C(X,Y)$ asociada a α y μ de la siguiente manera:

Para cada $A \in \alpha$ y $M \in \mu$, definimos

$$\begin{aligned}\widehat{M}(A) \ = \ & \{(f,g) \in C(X,Y) \times C(X,Y) : (f(x),g(x)) \in M \\ & \textit{para todo } x \in A\ \}.\end{aligned}$$

En el caso en que $A = X$, escribimos $\widehat{M} = \widehat{M}(X)$. Es directo verificar que la familia $\mu_{\alpha,\mu} = \{\widehat{M}(A) : A \in \alpha, M \in \mu\}$ es una subbase para una uniformidad $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$ en $C(X,Y)$. De hecho si α es una red cerrada bajo uniones finitas, entonces $\mu_{\alpha,\mu}$ es una base para la uniformidad $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$ en $C(X,Y)$. El espacio con la topología inducida por la uniformidad $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$ generada por $\{\widehat{M}(A) : A \in \alpha, M \in \mu\}$ es denotado por $C_{\alpha,\mu}(X,Y)$. La topología inducida de esta manera es llamada la *topología uniforme en* α (con respecto a μ) o la *topología de la convergencia uniforme en* α (con respecto a μ). Los conjuntos abiertos en $C_{\alpha,\mu}(X,Y)$ pueden ser descritos como la familia de todos los subconjuntos W de $C(X,Y)$ tal que para cada $f \in W$, existen $A_1,...,A_n \in \alpha$ y $M_1,...,M_n \in \mu$ con

$$\widehat{M}_1(A_1)[f] \cap ... \cap \widehat{M}_n(A_n)[f] \subset W$$

en donde para cada $A \in \alpha$ y $M \in \mu$, $\widehat{M}(A)[f]$ es definido como

$$\widehat{M}(A)[f] = \{g \in C(X,Y) : (f,g) \in \widehat{M}(A)\}$$

En el caso $\alpha = \{X\}$ (aunque en este caso α no es una red), denotaremos con $C_\mu(X,Y)$ a $C_{\alpha,\mu}(X,Y)$. La topología en $C_\mu(X,Y)$ es llamada la *topología uniforme* (con respecto a μ) o la *topología de la convergencia uniforme* (con respecto a μ). En este caso, $\hat{\mu} = \{\widehat{M} : M \in \mu\}$ es una base para la uniformidad $\mathcal{U}_\mu$, y un subconjunto W de $C_\mu(X,Y)$ es abierto si para cada $f \in W$ existe un $M \in \mu$ tal que $\widehat{M}[f] \subset W$.

Observe que así como acabamos de definir una estructura uniforme $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$ en $C(X,Y)$ cuando Y es considerado con una estructura uniforme y α es una red en X, podemos definir de manera análoga una estructura uniforme en Y^X, que es posible seguir llamando $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$

Proposicion 1.2.1. Si Y es un espacio con una uniformidad compatible μ, y si consideramos en Y^X la topología de la convergencia uniforme, entonces $C(X,Y)$ es un subconjunto cerrado de Y^X.

Demostración. Sea $f \in Y^X$ tal que para todo $M \in \mu$, $\widehat{M}[f] \cap C(X,Y) \neq \emptyset$. Probaremos que f es continua. Fijemos $N \in \mu$, un elemento simétrico tal que $N \circ N \subset M$. Sea $g \in C(X,Y)$ tal que $g \in \widehat{N}[f]$ (la cual existe por hipótesis). Si $x \in X$, entonces $g(x) \in N[f(x)]$. Como g es continua, existe una vecindad abierta U de x tal que $g(U) \subset N[f(x)]$; es decir $(f(x), g(u)) \in N$ para toda $u \in U$. Usando el hecho de que N es simétrico y que $(f(u), g(u)) \in N$ para toda $u \in U$, tenemos que $(f(x), f(u)) \in N \circ N \subset M$ para toda $u \in U$. Por lo tanto $f(U) \subset M[f(x)]$ lo que significa que f es continua, y concluimos que $C(X,Y) = \overline{C(X,Y)}$ ♯

Teorema 1.2.2. Si α y β son redes cerradas en X, y μ es una uniformidad separante (ver el apéndice) en Y, entonces:

(a) Si cada miembro de α está contenido en una unión finita de elementos de β, entonces $C_{\alpha,\mu}(X,Y) \preceq C_{\beta,\mu}(X,Y)$.

(b) El recíproco es cierto si X y Y son Tychonoff y Y contiene una trayectoria no trivial.

Demostración. (a). Sea $A \in \alpha$, $M \in \mu$, $f \in C(X,Y)$. Entonces existen $B_1, ..., B_n \in \beta$ tales que $A \subset B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Pero $\widehat{M}(B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \widehat{M}(B_1) \cap \cdots \cap \widehat{M}(B_n)$, asi que $\widehat{M}(B_1)[f] \cap ... \cap \widehat{M}(B_n)[f] = (\widehat{M}(B_1) \cap \cdots \cap \widehat{M}(B_n))[f] = \widehat{M}(B_1 \cup \cdots \cup B_n)[f] \subset \widehat{M}(A)[f]$.

(b). Sea $A \in \alpha$, $p : [0,1] \to Y$ una trayectoria tal que $p(0) \neq p(1)$. Sea $f_0 : X \to Y$ la función constante $p(0)$. Como μ es una uniformidad separante, entonces existe $E \in \mu$ tal que $E[p(0)] \cap E[p(1)] = \emptyset$. Consideremos el abierto subbásico $\widehat{E}(A)[f_0]$ Tenemos que $f_0 \in \widehat{E}(A)[f_0]$, y como $C_{\alpha,\mu}(X,Y) \preceq C_{\beta,\mu}(X,Y)$, existen $M_1, ..., M_n \in \mu$, $f_1, ..., f_n \in C(X,Y)$ y $B_1, \cdots, B_n \in \beta$ tales que, $f_0 \in V = \widehat{M_1}(B_1)[f_1] \cap \cdots \cap \widehat{M_n}(B_n)[f_n]$ y $V \subset \widehat{M}(A)[f_0]$. Sea $B = B_1 \cup, \cdots, \cup B_n$. Afirmamos que $A \subset B$. Supongamos lo contrario, sea $x \in A \setminus B$. Por ser X un espacio Tychonoff entonces existe $g : X \to [0,1]$ tal que $g(B) = \{0\}$ y $g(x) = 1$. Si $y \in B$ entonces $(p \circ g)(y) = p(0) = f_0(y)$. Por lo tanto, $p \circ g \in V$ pero $p \circ g \notin \widehat{M}(A)[f_0]$ lo cual es una contradicción. De aquí se concluye $A \subset B$ $\sharp$

Teorema 1.2.3. Si α es una red cerrada en X y μ es una uniformidad compatible en Y, entonces $C_{\alpha,\mu}(X,Y) \preceq C_{\mu}(X,Y)$.

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 1.2.2.(a). $\sharp$

Teorema 1.2.4. Si α es una red compacta en X y μ es una uniformidad compatible en Y, entonces $C_{\alpha}(X,Y) \preceq C_{\alpha,\mu}(X,Y)$. Si además α es hereditariamente cerrada, entonces $C_{\alpha}(X,Y) = C_{\alpha,\mu}(X,Y)$.

Demostración. Sean $A \in \alpha$, V un subconjunto abierto en Y, y $f \in [A,V]$. Para cada $a \in A$, existe un $M_a \in \mu$ tal que $M_a[f(a)] \subset V$; consideremos $N_a \in \mu$ tal que $N_a \circ N_a \subset M_a$. Como $f(A)$ es compacto, existe un subconjuto finito A' de A tal que $f(A) \subset \bigcup\{N_a[f(a)] : a \in A'\}$. Entonces definimos $N = \bigcap\{N_a : a \in A'\}$. Veamos que $\widehat{N}(A)[f] \subset [A,V]$: sea $g \in \widehat{N}(A)[f]$ y sea $x \in A$.

Entonces existe $a \in A'$ con $f(x) \in N_a[f(a)]$, asi que $(f(a), f(x)) \in N_a$. Ya que $(f(x), g(x)) \in N \subset N_a$, entonces $(f(a), g(x)) \in N_a \circ N_a \subset M_a$. Por lo tanto $g(x) \in M_a[f(a)] \subset V$, así que $g \in [A, V]$.

Para obtener la desigualdad inversa, sea $A \in \alpha$, $M \in \mu$ y sea $f \in C(X)$. Sea N un elemento cerrado y simétrico de μ tal que $N \circ N \circ N \subset M$. Como $f(A)$ es compacto, existe un subconjunto finito A' de A tal que $f(A) \subset \bigcup\{N[f(a)] : a \in A'\}$. Para cada $a \in A'$ definimos $A_a = A \bigcap f^{-1}(N[f(a)])$, el cual es un elemento en α ya que α es hereditariamente cerrado; también definimos V_a como el interior de $(N \circ N)[f(a)]$ para cada $a \in A'$. Finalmente definimos $W = \bigcap\{[A_a, V_a] : a \in A'\}$, el cual es abierto en $C_\alpha(X,Y)$. Ya que V_a contiene a $N[f(a)]$ para cada $a \in A'$, entonces $f \in W$. Para ver que $W \subset \hat{M}(A)[f]$, sea $g \in W$ y sea $x \in A$. Existe algún $a \in A'$, con $f(x) \in N[f(a)]$, así que $(f(a), f(x)) \in N$. También, $g(x) \in V_a \subset (N \circ N)[f(a)]$, asi que $(f(a), f(x)) \in N \circ N$. Entonces, ya que N es simétrico, $(f(x), g(x)) \in N \circ N \circ N \subset M$, por lo tanto $g \in \hat{M}(A)[f]$. ♯

En particular se sigue que la topología compacto-abierta es la misma que la la topología de la convergencia uniforme en conjuntos compactos (independientemente de la uniformidad usada). De los Teoremas 1.2.3. y 1.2.4 tenemos

Teorema 1.2.5. Si α es una red compacta en X y μ es una uniformidad compatible en Y, entonces $C_\alpha(X,Y) \preceq C_\mu(X.Y)$.

Es interesante saber cuándo se da la igualdad en el Teorema anterior. Una respuesta está dada por el siguiente Teorema.

Teorema 1.2.6. (a). Sea X compacto y T_2. Entonces $C_\mu(X,Y) = C_k(X,Y)$ para toda uniformidad compatible μ en Y.

(b). Si Y tiene una trayectoria no trivial y μ es separante, entonces X es compacto si y sólo si $C_\mu(X,Y) = C_k(X,Y)$

Demostración. (a). Si X es compacto y $\alpha = \{X\}$, entonces, por el Teorema 1.2.2.(a), $C_\mu(X,Y) = C_{\alpha,\mu}(X,Y) \preceq C_{k,\mu}(X,Y)$. También $C_{k,\mu}(X,Y) \preceq C_\mu(X,Y)$ por el Teorema 1.2.3; así que $C_\mu(X,Y) = C_{k,\mu}(X,Y)$. Por el Teorema 1.2.4 se tiene que $C_{k,\mu}(X,Y) = C_k(X,Y)$. Por lo tanto $C_\mu(X,Y) = C_k(X,Y)$.

(b). Se obtiene del Teorema 1.2.2.(b) y la definición de $C_\mu(X,Y)$.
♯

1.3 Topología de la Gráfica.

Para $f \in Y^X$, la gráfica de f, denotada por Γ_f, es el conjunto

$$\{(x, f(x)) \ : \ x \in X\} \subset X \times Y$$

Al conjunto $X \times Y$ lo consideramos con la topología producto.

Una función $f \in Y^X$ es llamada *casi continua* si y sólo si para cada conjunto abierto U en $X \times Y$ que contiene Γ_f existe $g \in C(X,Y)$ tal que $\Gamma_g \subset U$. Denotamos por $A(X,Y)$ al conjunto formado por todas las funciones casi continuas de Y^X.

Para cada conjunto abierto U en $X \times Y$, sea $F_U = \{f \in Y^X : \Gamma_f \subset U\}$. Como $Y^X \subset F_{X\times Y}$ y $F_U \cap F_V = F_{U\cap V}$ para U, V abiertos en $X \times Y$ entonces, el conjunto $\{F_U : U \subset X \times Y \ \textit{abierto}\}$ es una base para una topología en Y^X. La topología inducida en Y^X por esta base, es llamada la *topología de la gráfica* de Y^X.

Cuando no haya posibilidad de confusión denotaremos al conjunto $F_U \cap C(X,Y)$ simplemente como F_U. Al subconjunto $C(X,Y)$ con la topología gráfica heredada de Y^X lo denotamos por $C_G(X,Y)$.

Teorema 1.3.1. Si Y^X tiene la topología de la gráfica, entonces la familia de las funciones casi continuas de X en Y es cerrada; de hecho, es la cerradura de la familia de las funciones continuas, i.e. $\overline{C_G(X,Y)} = A(X,Y)$.

Demostración. Para la primera parte considere $f \in Y^X \setminus A(X,Y)$. Entonces existe $U \subset X \times Y$ abierto tal que $f \in F_U$ y $F_U \cap C(X,Y) = \emptyset$; por lo tanto $F_U \cap A(X,Y) = \emptyset$. Entonces $Y^X \setminus A(X,Y)$ es abierto, por lo tanto $A(X,Y)$ es cerrado.

Por definición de $A(X,Y)$ y de la topología de la gráfica se tiene que $C(X,Y) \subset A(X,Y)$ y $A(X,Y) \subset \overline{C(X,Y)}$, por ser $A(X,Y)$ cerrado entonces se da la igualdad. ♯

Teorema 1.3.2. Si X es un espacio T_1, entonces la topología de la convergencia puntual en Y^X es menos fina que la topología gráfica en Y^X; es decir $C_p(X,Y) \preceq C_G(X,Y)$.

Demostración. Para $a \in X$ y U subconjunto abierto de Y, sea $[a,U] = \{f \in C(X,Y) : f(a) \in U\}$ un elemento subbásico en la topología de la convergencia puntual. Como X es T_1, el conjunto $V = (X \times U) \cup ((X \setminus \{a\}) \times Y)$ es abierto en $X \times Y$ y claramente $F_V = [a,U]$. Por lo tanto $[a,U]$ es abierto en la topología gráfica. $\sharp$

Teorema 1.3.3. Si X es un espacio T_2, entonces la topología gráfica contiene la k-topología, es decir $C_k(X,Y) \preceq C_G(X,Y)$. Si además X es compacto, entonces $C_k(X,Y) = C_G(X,Y)$.

Demostración. Sea $[K,U]$ en elemento subbásico en $C_k(X,Y)$, donde K es un subconjunto compacto en X y U es un abierto en Y. Como X es un espacio T_2, el conjunto $V = (X \times U) \cup ((X \setminus K) \times Y)$ es abierto en $X \times Y$ y claramente $F_V = [K,U]$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Para la segunda parte del teorema, sea $U \subset X \times Y$ abierto y $f \in F_U$. Sea V_x una vecidad abierta de x en X y W_x un abierto que contiene a $f(x)$ tal que $f(V_x) \subset W_x$ y $V_x \times W_x \subset U$. Como X es compacto y T_2, tiene una base de vecindades cerradas, así que podemos considerar a V_x como un cerrado (y por lo tanto compacto). Por la compacidad de X, existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $X \subset V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}$. Sea $A = [V_{x_1}, W_{x_1}] \cap ... \cap [V_{x_n}, W_{x_n}]$. Claramente $f \in A$ y $A \subset F_U$. Por lo tanto $C_G(X,Y) \preceq C_k(X,Y)$. Así concluimos que $C_G(X,Y) = C_k(X,Y)$. $\sharp$

Observación 1.3.4. Si suponemos que X y Y son espacios Tychonoff y Y tiene una trayectoria no trivial, se tiene que si $C_k(X,Y) = C_G(X,Y)$ entonces X es compacto; la demostración es análoga a la dada para el Teorema 1.1.5.(b)

Teorema 1.3.5. Si μ es una uniformidad compatible en Y, entonces $C_\mu(X,Y) \preceq C_G(X,Y)$.

Demostración Sea $f \in C(X,Y)$ y $M \in \mu$ abierto. Consideremos a $U = \bigcup_{x\in X}(\{x\} \times M[f(x)])$. Afirmamos que U es un abierto en $X \times Y$. En efecto, sea $(x,y) \in U$. Entonces $y \in M[f(x)]$, es decir $(f(x), y) \in M$. Como M es abierto en $Y \times Y$, existen A, B abiertos en Y tales que $(f(x), y) \in A \times B \subset M$. Veamos que $f^{-1}(A) \times B \subset U$. Sea $(a, b) \in f^{-1}(A) \times B$. Por lo cual se tiene que $(f(a), b) \in M$ y esto implica que $b \in M[f(a)]$, entonces $(a, b) \in \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times M[f(x)]) = U$. Por lo tanto U es abierto. Veamos ahora que $F_U \subset \widehat{M}[f]$. Sea $g \in F_U$, entonces $\Gamma_g \subset U$ y por lo tanto $g(x) \in M[f(x)]$ para toda $x \in X$. Por lo que tenemos que $g \in \widehat{M}[f]$, lo cual implica que $F_U \subset \widehat{M}[f]$. Esto prueba que, $\widehat{M}[f]$ es abierto en $C_G(X, Y)$. ♯

Capítulo 2

FUNCIONES NATURALES

En este capítulo estudiaremos algunas funciones que surgen de una manera natural entre los espacios de funciones continuas. Estas funciones naturales juegan un papel importante en el estudio de propiedades de los espacios de funciones.

2.1 Función inclusión y función diagonal

Sean X y Y dos espacios topológicos. Para cada $t \in Y$, sea c_t la función constante t de X en Y. La *función inclusión* de Y en $C(X,Y)$ es la función $i : Y \to C(X,Y)$ definida por $i(t) = c_t$ para cada $t \in Y$. Es claro que i es uno-a-uno. De hecho para topologías apropiadas en $C(X,Y)$ la función i es un encaje.

Teorema 2.1.1. Sean X, Y espacios topológicos.

(a) Si α es cualquier red cerrada, entonces $i : Y \to C_\alpha(X,Y)$ es un encaje. Además si X es T_1 y Y es T_2, entonces $i(Y)$ es cerrado en $C_\alpha(X,Y)$.

(b) Si μ es una uniformidad compatible en Y, entonces la función $i : Y \to C_\mu(X,Y)$ es un encaje. Si μ es separante entonces $i(Y)$ es cerrado en $C_\mu(X,Y)$.

Demostración. (a) Si $A \in \alpha$ y $V \subset Y$, $i^{-1}([A,V]) = V$, porque $t \in V$ si y sólo si $c_t \in [A,V]$, lo cual es cierto si y sólo si $t \in i^{-1}([A,V])$. Por lo tanto i es continua. Que i es abierta sobre su imagen es consecuencia del hecho de que para $V \subset Y$ se tiene que $i(V) = i(Y) \cap [A,V]$ para cualquier $A \in \alpha$.

(b) La continuidad se obtiene al constatar que para $t \in Y$ y cada $\widehat{M} \in \hat{\mu}$, se tiene que $i^{-1}(\widehat{M}[i(t)]) = M[t]$: Esto es cierto ya que $s \in M[t]$ si y sólo si $(s,t) \in M$, lo cual es cierto si y sólo si $(i(t), i(s)) \in \widehat{M}$; y esto es cierto si y sólo si $s \in i^{-1}(\widehat{M}[i(t)])$. Por otro lado, para $t \in Y$ y $M \in \mu$ tenemos que $i(M[t]) = i(Y) \cap \widehat{M}[i(t)]$, es decir, i es abierta.

Para demostrar que $i(Y)$ es cerrado, en los casos (a) y (b), es suficiente con demostrar que $i(Y)$ es cerrado en $C_p(X,Y)$ (Teoremas 1.1.7 y 1.2.5). Sea $f \in C(X,Y) \setminus i(Y)$. Entonces, existen $x, y \in X$ con $f(x) \neq f(y)$. Sean V y W subconjuntos abiertos disjuntos de Y que contienen a $f(x)$ y $f(y)$ respectivamente. Entonces $[x,V] \cap [y,W]$ es una vencindad de f contenida en $C(X,Y) \setminus i(Y)$. $\sharp$

Observación 2.1.2.(a) Los resultados del Teorema 2.1.1, no se pueden generalizar a la topología gráfica. Si tomamos $X = Y = \mathbb{R}$ la función $i : Y \to C_G(X,Y)$ no es continua, ya que el conjunto $V = i(Y) \cap F_A = \{c_0\}$ (la funcion constante 0) es abierto, donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-1}{x} < y < \frac{1}{x} \; si \; x > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$, pero $i^{-1}(V) = \{0\}$ no es abierto en Y.

Observación 2.1.2.(b) Sea P una propiedad topológica hereditariamente cerrada. Del teorema anterior tenemos que si Y no satisface P entonces $C_\alpha(X,Y)$ y $C_\mu(X,Y)$ no satisfacen la propiedad P. Por ejemplo si μ es la uniformidad en $\mathbb{R}$ definida por la métrica usual, entonces $C_p(X,\mathbb{R})$ y $C_\mu(X,\mathbb{R})$ no son numerablemente compactos.

Por otro lado, generalmente, no hay un encaje de X en $C(X,Y)$, pero en ocasiones existe un encaje de X en un producto de copias de Y. Si F es un subconjunto de $C(X,Y)$, definimos la *función diagonal*

$$\Delta_F : X \to Y^F$$

por $\Delta(x)(f) = f(x)$ para cada $f \in F$. Es inmediato que Δ_F es continua. Cuando consideramos la topología producto en Y^F, ya que la composición de Δ_F con cada una de las proyecciones es justo un elemento de F.

Decimos que el subconjunto F de $C(X,Y)$ *separa puntos de cerrados* en X si para cualquier subconjunto cerrado A de X y $x \in X \setminus A$, existe $f \in F$ tal que $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

Definición 2.1.3. Sea X un conjunto y X_i un espacio topológico con $f_i : X \to X_i$ para cada $i \in I$ (un conjunto de indices). La *topología débil* inducida en X por la colección $\{f_i : i \in I\}$ es la más chica en X que hace continuas a las funciones f_i, es decir, la topología débil en X tiene como subbase el conjunto $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \textit{ es abierto en } X_i\}$.

Teorema 2.1.4. Un conjunto de funciones $F \subset C(X,Y)$ separa puntos de cerrados si y sólo si el conjunto $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \textit{ es abierto en } X_i\}$ es una base para la topología en X

Demostración. Necesidad: Sea $U \subset X$ ($U \neq X$) abierto, y sea $p \in U$. Entonces $p \notin X \setminus U$ el cual es cerrado. Por hipótesis, existe $f \in F$ tal que $f(p) \notin \overline{f(X \setminus U)}$. Por lo tanto existe un abierto V en Y que contiene a $f(p)$ y $V \cap f(X \setminus U) = \emptyset$; así pues $p \in f^{-1}(V)$ y $f^{-1}(V) \cap X \setminus U = \emptyset$. Por lo tanto $f^{-1}(V) \subset U$, con lo que concluimos que la topología de X esta contenida en la topología débil, pero la topología débil es la más chica que hace continuas a los elementos de F, con esto inferimos que son iguales.

Suficiencia: Sea $p \in X$, y sea $C \subset X$ cerrado tal que $p \notin C$. Entonces existen $f \in F$ y $U \subset Y$ abierto tales que $p \in f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(U) \cap C = \emptyset$. Por lo tanto $U \cap f(C) = \emptyset$, de donde se obtiene que $f(p) \notin \overline{f(C)}$. ♯

Teorema 2.1.5. Si X es T_1, entonces $F \subset C(X,Y)$ separa puntos de cerrados, si y sólo si $\Delta_F : X \to Y^F$ es un encaje.

Demostración. Necesidad: Como X es T_1 y F separa puntos de cerrados, entonces Δ_F es inyectiva, ya que los puntos son conjuntos cerrados. Para probar que Δ_F es abierta en $\Delta_F(X)$, basta con considerar los abiertos de la forma $U = f^{-1}(V)$, donde $f \in F$ y V es un abierto en Y (véase la Definición 2.1.3). Como $\pi_f \circ \Delta_F = f$

(donde π_f es la f-ésima proyección de Y^F en Y), entonces

$$U = f^{-1}(V) = ((\pi_f \mid_{\Delta_F(X)}) \circ \Delta_F)^{-1}(V) = \Delta_F^{-1}((\pi_f \mid_{\Delta_F(X)})^{-1}(V)).$$

Por lo tanto $\Delta_F(U) = (\pi_f \mid_{\Delta_F(X)})^{-1}(V) = \pi_f^{-1}(V) \cap \Delta_F(X)$; de aquí resulta que Δ_F es abierta en su imagen.

Suficiencia: Una base para el espacio Y^F es el conjunto

$$\{\pi_f^{-1}(V) : V \subset Y \text{ abierto y } f \in F\}$$

entonces $\Delta_F(X)$ tiene la topología inducida por la restricciones de la proyecciones, y por se Δ_F un homeomorfismo sobre su imagen, claramente X tiene como base topológica

$$\{\Delta_F^{-1}(\pi_f^{-1}(V)) : V \subset Y \textit{ abierto} \text{ y } f \in F\}$$

i.e.

$$\{f^{-1}(V) : V \subset Y \text{ abierto y } f \in F\}.$$

Pero por el Teorema 2.1.4 esto se cumple si y sólo si Fsepara puntos de cerrados. ♯

Observación 2.1.6.(a) Si Δ_F es abierta, entonces $\pi_f \circ \Delta_F = f$ es abierta para cada $f \in F$.

Observación 2.1.6.(b) Usando el Teorema 2.1.6, se puede demostrar que: *(i)* el cubo de Tychonoff I^m es universal con respecto a los espacios Tychonoff de peso $m \geq \aleph_0$ (véase [Eng]), *(ii)* el cubo de Cantor D^m es universal con respecto a los espacios cero dimensionales de peso $m \geq \aleph_0$ (véase [Eng]), y *(iii)* el cubo de Alexandroff F^m es universal con respecto a los espacios T_0 de peso $m \geq \aleph_0$ (véase [Eng]).

2.2 Función Composición y Funciones Inducidas.

Sean X, Y y Z espacios topológicos. Definimos la *función composición*

$$\Phi : C(X,Y) \times C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

como $\Phi(f,g) = g \circ f$ para cada $f \in C(X,Y)$ y $g \in C(Y,Z)$. Cuando los espacios X, Y y Z cumplen ciertas propidedades, obtendremos la continuidad de Φ en los espacios de funciones continuas, con las topologías consideradas en el Capítulo 1.

Teorema 2.2.1. Sean X ,Y y Z espacios topológicos.

(a) Si α es una red compacta en X y β es una red que contiene una base de vecindades cerradas en Y, entonces $\Phi : C_\alpha(X,Y) \times C_\beta(Y,Z) \to C_\alpha(X,Z)$ es continua.

(b) Si X es compacto, μ es una uniformidad en Y y ν es una uniformidad en Z, entonces $\Phi : C_\mu(X,Y) \times C_\nu(Y,Z) \to C_\mu(X,Z)$ es continua.

(c) Si X es compacto y Z es regular, entonces la función $\Phi : C_G(X,Y) \times C_G(Y,Z) \to C_G(X,Z)$ es continua.

Demostración. (a) Supongase que $\Phi(f,g) \in [A,W]$ donde $A \in \alpha$ y W es un abierto en Z. Entonces $f(A) \subset g^{-1}(W)$. Para cada $y \in f(A)$, existe una vecindad B_y de y en β que está contenida en $g^{-1}(W)$. Como $f(A)$ es compacto, existen $y_1, ..., y_n \in f(A)$ tal que $f(A)$ está contenido en la unión de los interiores de los conjuntos $B_{y_1}, ..., B_{y_n}$. Sea V esta unión. Si $S = [A,V] \times ([B_{y_1}, W] \cap \cdots \cap [B_{y_n}, W])$, entonces $(f,g) \in S$ y $\Phi(S) \subset [A,W]$.

(b) Consideremos $\widehat{N}[\Phi(f,g)]$, donde $N \in \mu$. Sea N' un elemento simetrico de ν tal que $N' \circ N' \circ N' \subset N$. Par cada $x \in X$, $f(x) \in g^{-1}(N'[g(f(x))])$. Así que existe $M_x \in \mu$ tal que $(M_x \circ M_x)[f(x)] \subset g^{-1}(N'[g(f(x))])$. Ya que $f(X)$ es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$f(X) \subset M_{x_1}[f(x_1)] \cup \cdots \cup M_{x_n}[f(x_n)]$$

Sea $M \in \mu$ tal que $M \circ M \subset M_{x_1} \cap \cdots \cap M_{x_n}$. Es rutina verificar que $\Phi(\widehat{M}[f] \times \widehat{N'}[g]) \subset \widehat{N}[\Phi(f,g)]$.

(c) Por el Teorema 1.3.3 basta demostrar que

$$\Phi : C_k(X,Y) \times C_G(Y,Z) \to C_k(X,Z)$$

es continua. Sea $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,Z)$ y $V = \bigcap_{i=1}^n [A_i, V_i]$ tal que A_i es compacto en X y V_i es abierto en Z para toda $i \in \{1, ..., n\}$, y además $g \circ f \in V$; entonces $g(f(A_i))$ es un compacto contenido en V_i. Como Z es regular, existe $W_i \subset Z$ abierto tal que

$$g(f(A_i)) \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i.$$

Por lo tanto, $f(A_i) \subset g^{-1}(W_i)$. De esto se sigue que

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} [A_i, g^{-1}(W_i)] = B$$

Sea $U_i = (Y \times V_i) \cup \big((Y \times Z) \setminus (g^{-1}(\overline{W}_i) \times (Z \setminus V_i))\big)$. Por la forma en que se construyo U_i se tiene que la gráfica de g está contenida en U_i con $i \in \{1, ...n\}$, así pues $\Gamma_g \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$, i.e. $g \in F_U$.
Sea $h \in B$, $l \in F_U$ y $x \in A_i$. Tenemos que $h(x) \in g^{-1}(W_i)$. En particular, como $\Gamma_l \subset U_i$, entonces $l(h(x)) \in V_i$. De esto se sigue que $\Phi(B \times F_U) \subset V$ (i.e., Φ es continua).

♯

Corolario 2.2.2. Si Y es localmente compacto, entonces la composición $\Phi : C_k(X,Y) \times C_k(Y,Z) \to C_k(X,Z)$ y la composición $\Phi : C_p(X,Y) \times C_k(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ son continuas.
Demostración. Son casos especiales de 2.2.1.(a). ♯

Al fijar una de las componentes del dominio de la función composición resultan las *funciónes inducidas.* En particular, si $g \in C(Y,Z)$, definimos la función inducida

$$g_* : C(X,Y) \to C(X,Z)$$

por $g_*(f) = \Phi(f,g) = g \circ f$ para cada $f \in C(X,Y)$. También, si $f \in C(X,Y)$, definimos la función inducida

$$f^* : C(Y,Z) \to C(X,Z)$$

por $f^*(g) = \Phi(f,g) = g \circ f$ para cada $g \in C(Y,Z)$. Las funciones inducidas preservan composición en el sentido que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ y $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. La primera igualdad sale del hecho de que si $f \in C(Z,X)$ y $g \in C(X,R)$, al considerar $h \in C(W,Z)$ se tiene que $(g \circ f)_*(h) = g \circ f \circ h$ y $(g_* \circ f_*) = g_*(f_*(h)) = g_*(f \circ h) = g \circ f \circ h$; por lo tanto se da la igualdad. La segunda igualdad se obtiene de manera semejante.

Teorema 2.2.3. Sea $g \in C(Y,Z)$.
(a) $g_* : C(X,Y) \to C(X,Z)$ es uno-a-uno si y sólo si g es uno-a-uno.

(b) Si $g_* : C(X,Y) \to C(X,Z)$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva. El inverso es en general falso, pero es cierto en el caso especial cuando g es una retracción del espacio Y en un subespacio Z de Y.

Demostración. (a) (suficiencia). Sean $l, h \in C(X,Y)$ con $l \neq h$. Entonces existe $x \in X$ tal que $l(x) \neq h(x)$. Como g es uno-a-uno, $g(l(x)) \neq g(h(x))$. Por lo tanto $g_*(l) \neq g_*(h)$.

(necesidad) Si g no es uno-a-uno, entonces existen $y_1, y_2 \in Y$ tales que $g(y_1) = g(y_2)$. Para las funciones constantes c_{y_1} y $c_{y_2} \in C(X,Y)$, se tiene que $g_*(c_{y_1}) = g_*(c_{y_2})$. Por lo tanto g_* no es uno-a-uno.

(b) Sea $z \in Z$. Consideremos la función $c_z \in C(X,Z)$. Entonces, por hipótesis, existe $l \in C(X,Y)$ tal que $g_*(l) = c_z$. Por lo tanto, para $y = l(x)$ se tiene que, $g(y) = z$, i.e., g es suprayectiva.

Para la segunda parte de (b) tomemos una retracción $g : Y \to Z$, i.e., g es una función continua tal que, para la función inclusión $incl : Z \to Y$ y la función identidad $id : Z \to Z$, se tiene que $g \circ incl = id$. Si consideramos $f \in C(X,Z)$ y tomamos $h = incl \circ f \in C(X,Y)$, entonces tenemos que $g_*(h) = g \circ (incl \circ f) = (g \circ incl) \circ f = id \circ f = f$. Por lo tanto g_* es suprayectiva. ♯

Teorema 2.2.4. Sea $g \in C(Y,Z)$.

(a) Si α es una red cerrada en X entonces $g_* : C_\alpha(X,Y) \to C_\alpha(X,Z)$ es continua.

(b) Si μ es una uniformidad en Y, ν es una uniformidad en Z y g es uniformemente continua, entonces $g_* : C_\mu(X,Y) \to C_\nu(X,Z)$ es uniformemente continua.

(c) La función $g_* : C_G(X,Y) \to C_G(X,Z)$ es continua.

Demostración.(a) Es suficiente con mostrar que $g_*^{-1}([A,W]) = [A, g^{-1}(W)]$ para cada $A \in \alpha$ y $W \subset Z$ abierto. Tenemos que $f \in g_*^{-1}([A,W])$ si y sólo si $g(f(A)) \subset W$, lo cual es cierto si y sólo si $f \in [A, g^{-1}(W)]$.

(b) Sea $N \in \nu$. Como g es uniformemente continua, existe $M \in \mu$ tal que $(g(y_1), g(y_2)) \in N$ siempre que $(y_1, y_2) \in M$. Sean $f_1, f_2 \in C_\mu(X,Y)$ con $(f_1, f_2) \in \widehat{M}$. Entonces, para cada $x \in X$, $(f_1(x), f_2(x)) \in M$. Por lo cual tenemos que $(g(f_1(x)), g(f_2(x)) \in N$. Por lo tanto $(g_*(f_1), g_*(f_2)) \in \widehat{N}$, lo cual muestra que g_* es uniformemente continua.

(c) Sean $f \in C(X,Y)$ y F_U un abierto canónico en $C_G(X,Z)$ tal que $g_*(f) = g \circ f \in F_U$, i.e., $\Gamma_{g \circ f} \subset U$, donde U es un abierto en $X \times Z$. Por lo tanto, para cada $x \in X$ existen abiertos $A_x \subset X$ y $B_x \subset Z$ abiertos tales que $(x, g(f(x))) \in A_x \times B_x \subset U$. Consideremos el siguiente abierto en $X \times Y$: $V = \bigcup\{A_x \times g^{-1}(B_x) : x \in X\}$. $f \in F_V$ por el hecho de que $f(x) \in g^{-1}(B_x)$. Veamos que $g_*(F_V) \subset F_U$. Sea $l \in F_V$, i.e., $\Gamma_l \subset V$; entonces para cada $a \in X$ existe $x_a \in X$ tal que $(a, l(a)) \in A_{x_a} \times g^{-1}(B_{x_a})$; lo cual implica que $g(l(a)) \in B_{x_a}$. Entonces $(a, g(l(a))) \in A_{x_a} \times B_{x_a}$. Por lo tanto $\Gamma_{g \circ l} \subset U$, i.e., $g \circ l \in F_U$. ♯

La continuidad uniforme en el Teorema 2.2.4 no puede ser reemplazada por la continuidad simple. Por ejemplo, si $X = Y = Z = \mathbb{R}$, μ es la uniformidad inducida por la métrica usual en $\mathbb{R}$, y si $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ está definida por $g(r) = r^2$, entonces $g_* : C_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C_\mu(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ no es uniformemente continua. Para ver esto considere la función identidad $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $id(r) = r$. Para $\epsilon > 0$, sea $M_\epsilon = \{(x,y) : |x - y| < \epsilon\} \in \mu$. Para que g_* sea continua en el punto id necesitamos encontrar $\delta > 0$ tal que para $M_\delta \in \mu$ se tenga que $g_*(\widehat{M_\delta}[id]) \subset \widehat{M_\epsilon}[g_*(id)] = \widehat{M_\epsilon}[g]$. Pero al considerar cualquier $\delta > 0$ tenemos que, para $h \in \widehat{M_\delta}[id]$ con $h(x) = x + \frac{\delta}{2}$ para toda $x \in X$. Si $x > \frac{\epsilon}{\delta}$, entonces

$$|g_*(id)(x) - g_*(h(x))| = |x\delta + \delta^2| > \epsilon.$$

Por lo tanto $g_*(\widehat{M_\delta}[id]) \not\subset \widehat{M_\epsilon}[g_*(id)]$ para cualquier $\delta > 0$ i.e. g_* no es continua.

Teorema 2.2.5. Sea $g \in C(Y,Z)$ un encaje.

(a) Si α es una red cerrada en X, entonces $g_* : C_\alpha(X,Y) \to C_\alpha(X,Z)$ es un encaje.

(b) Si μ es una uniformidad en Y, ν es una uniformidad en Z y si g es un encaje uniforme (i.e. g y g^{-1} son uniformemente continuas), entonces $g_* : C_\mu(X,Y) \to C_\nu(X,Z)$ es un encaje uniforme.

(c) Si $g \in C(Y,Z)$ un encaje abierto. Entonces la función $g_* : C_G(X,Y) \to C_G(X,Z)$ es un encaje.

Demostración. En virtud de los dos teoremas anteriores, para la parte (a) sólo nos resta demostrar que g_* es abierta en su imagen.

Por ser inyectiva es suficiente considerar un abierto subbásico $[A,V]$ de $C_\alpha(X,Y)$. Ya que g es un encaje, existe un subconjunto abierto W en Z con $W \cap g(X) = g(V)$. Por la prueba del Teorema 2.2.4.(a), $g_*^{-1}([A,W]) = [A, g^{-1}(W)] = [A,V]$. Pero entonces $g_*([A,V]) = [A,W] \cap g_*(C_\alpha(X,Y))$, el cual es un abierto en la imagen de g_*.

(b). Por el Teorema 2.2.3.(a) g_* es uno-a-uno. Por el Teorema 2.2.4.(b) g_* es uniformemente continua; la demostración de que g_*^{-1} es uniformemente continua es analoga a la demostración del Teorema 2.2.4.(b). ♯

(c) Usando los Teoremas 2.2.3.(a) y 2.2.4.(c) tenemos que g_* es uno-a-uno y continua. Solo falta probar que g_* es abierta sobre su imagen.

Sea $F_U \subset C_G(X,Y)$ un abierto básico, donde U es un subconjunto de $X \times Y$ abierto.

Al considerar la topología producto en los espacios $X \times Y$ y $X \times Z$, por las condiciones de g, tenemos que la función

$$1 \times g : X \times Y \to X \times Z$$

definida por $(1 \times g)(x,y) = (x, g(y))$ para cada $(x,y) \in X \times Y$, es abierta. Así tenemos que $V = (1 \times g)(U)$ es abierto en $X \times Z$. Veamos que $g_*(F_U) = F_V \cap g_*(C(X,Y))$. Tenemos que $g_*(h) \in F_V \cap g_*(C(X,Y))$ si y sólo si $\Gamma_{goh} \subset V$, esto es que $\{(x, g(h(x))) : x \in X\} \subset V$, es decir $(1 \times g)^{-1}\{(x, g(h(x))) : x \in X\} \subset (1 \times g)^{-1}(V) = U$, lo cual es equivalente a que $\{(x, h(x)) : x \in X\} \subset U$, i.e., $\Gamma_h \subset U$ (ya que g es uno a uno) y de aqui $g_*(h) \in g_*(F_U)$. Concluimos que g_* es abierta sobre su imagen. ♯

Decimos que una función es *casi suprayectiva* si la imagen de su dominio es un conjunto denso del rango.

Teorema 2.2.6. Sea $f \in C(X,Y)$.

(a) Si Y es T_2 y f es casi suprayectiva, entonces $f^* : C(Y,Z) \to C(X,Z)$ es uno-a-uno. El recíproco es cierto si Z tiene una trayectoria no trivial y Y es Tychonoff.

(b) Si α es una red cerrada en X, X es Tychonoff, Z tiene una trayectoria no trivial y $f^* : C(Y,Z) \to C_\alpha(X,Z)$ es casi suprayectiva, entonces f es uno-a-uno.

(c) Si α es una red compacta en X, Y es un espacio Tychonoff y f es una función uno-a-uno, entonces $f^* : C(Y,\mathbb{R}) \to C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es casi suprayectiva.

Demostración. (a). Sean $g_1, g_2 \in C(Y,Z)$ con $f^*(g_1) = f^*(g_2)$. Sea $x \in X$ y $y = f(x)$. Entonces $g_1(y) = g_1(f(x)) = f^*(g_1)(x) = f^*(g_2)(x) = g_2(f(x)) = g_2(y)$. Resulta entonces que g_1 y g_2 son iguales en el conjunto denso $f(X)$ de Y. Como g_1 y g_2 son continuas, entonces son iguales en todo Y.

Para el recíproco de la parte (a), supongase que existe $y \in Y \setminus \overline{f(X)}$. Sea $p \in C([0,1],Z)$ una trayectoria en Z tal que $p(0) \neq p(1)$. Sea $\phi \in C(Y,[0,1])$ tal que $\phi(\overline{f(X)}) = \{0\}$ y $f(y) = 1$. Si $g = p \circ \phi$ y c es la función constante que manda a Y en $\{p(0)\}$, entonces para cada $x \in X$, $g(f(x)) = p(0) = c(f(x))$. Pero entonces $f^*(g) = f^*(c)$. Por lo tanto f^* no es uno-a-uno.

(b). Sean x_1 y x_2 distintos elementos en X. Entonces existe $h \in C(X,Z)$ con $h(x_1) \neq h(x_2)$, y existen vecindades disjuntas V y W de $h(x_1)$ y $h(x_2)$ en Z. Como α es una red, existen $A, B \in \alpha$ tales que $h(x_1) \in A \subset h^{-1}(V)$ y $h(x_2) \in B \subset h^{-1}(W)$. Sea $S = [A,V] \cap [B,W]$ una vecidad de h en $C_\alpha(X,Z)$. Ya que f^* es casi sobre, entonces existe algún $g \in C(Y,Z)$ con $f^*(g) \in S$. Esto significa que $g(f(x_1)) \in V$ y $g(f(x_2)) \in W$. Por lo tanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(c). Sea $S = [A_1, W_1] \cap \cdots \cap [A_n, W_n]$ un abierto canónico en $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ que contiene algún elemento h. Definimos $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, y sea $B = f(A)$. Tenemos que $f|_A$ es un homeomorfismo ya que f es uno a uno y continua, A es compacto y B es T_2. Entonces $h \circ (f\ |_A)^{-1} : B \to \mathbb{R}$ tiene una extension $g \in C(Y,\mathbb{R})$ (véase [GJ] pags. 42,43). Para cada $x \in A$, $f^*(g)(x) = g(f(x)) = h(x)$, entonces $f^*(g) \in S$. ♯

Si α es una red cerrada en X y si $f : X \to Y$ es una función, definimos $f(\alpha) = \{f(A) : A \in \alpha\}$.

Teorema 2.2.7. Sea $f \in C(X,Y)$, sea α una red cerrada en X, y sea β una red cerrada en Y.

(a) Si β es una $f(\alpha)$-red, entonces $f^* : C_\beta(Y,Z) \to C_\alpha(X,Z)$ es continua.

(b) Si f es casi suprayectiva y $f(\alpha)$ es una β-red, entonces $f^* : C_\beta(Y,Z) \to C_\alpha(X,Z)$ es abierta sobre su imagen.

(c) Si f es suprayectiva y $f(\alpha)$ es una β-red y β es una $f(\alpha)$-red, entonces $f^* : C_\beta(Y,Z) \to C_\alpha(X,Z)$ es un encaje.

Demostración. (a). Supongase que $f^*(g) \in [A,V]$, donde $g \in C_\beta(Y,Z)$, $A \in \alpha$ y V abierto en Z. Entonces por hipótesis existe $B \in \beta$ tal que $f(A) \subset B \subset g^{-1}(V)$. Así $S = [B,V]$ es una vecindad de g en $C_\beta(Y,Z)$ tal que $f^*(S) \subset [A,V]$.

(b). Ya que f^* es uno-a-uno, por el Teorema 2.2.6.(a), es suficiente con usar un elemento abierto subbásico en $C_\beta(Y,Z)$ para llevar acabo la demostración. Sea $g \in [B,V]$ donde $B \in \beta$ y V es un abierto en Z. Existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset f(A) \subset g^{-1}(V)$. Definimos $T = [A,V]$ que es una vecindad de $f^*(g)$ en $C_\alpha(X,Z)$. Para ver que $T \cap f^*(C_\beta(Y,Z)) \subset f^*([B,V])$, sea $f^*(g') \in T$ para algun $g' \in C_\beta(Y,Z)$. Entonces $g'(B) \subset g'(f(A)) \subset V$.

(c) Se sigue de (a), (b) y del Teorema 2.2.6.(a). ♯

Decimos que $f \in C(X,Y)$ es un *mapeo k-cubriente* si cada subconjunto compacto de Y se encuentra contenido en la imagen de un subconjunto compacto de X. Como consecuencia del Teorema 2.2.7 tenemos:

Corolario 2.2.8. Sea $f \in C(X,Y)$.

(a) $f^* : C_p(Y,Z) \to C_p(X,Z)$ es siempre continua, y f^* es un encaje si f es suprayectiva.

(b) $f^* : C_k(Y,Z) \to C_k(X,Z)$ es siempre continua, y f^* es un encaje si f es un mapeo k-cubriente

Observación 2.2.9. Si el espacio Y es Tychonoff, tenemos que: si $f^* : C_p(Y,\mathbb{R}) \to C_p(X,\mathbb{R})$ es un encaje, entonces f tiene que ser suprayectiva, y si $f^* : C_k(Y,\mathbb{R}) \to C_k(X,\mathbb{R})$ es un encaje, entonces f tiene que ser una función k-cubriente.

Teorema 2.2.10. Sea $f \in C(X,Y)$ y sea μ una uniformidad en Z. Entonces $f^* : C_\mu(Y,Z) \to C_\mu(X,Z)$ es uniformente continua. Además, si f es casi suprayectiva, entonces f^* es un encaje.

Demostración. Sea $g \in C_\mu(Y,Z)$, y $M \in \mu$. Es directo constatar que $f^*(M[g]) \subset \widehat{M}[f^*(g)]$, lo cual establece la continuidad de f^*. Para ver que f^* es abierta sobre su imagen, es suficiente encontrar $N \in \mu$ tal que $\widehat{N}[f^*(g)] \cap f^*(C_\mu(Y,Z)) \subset f^*(\widehat{M}[g])$. Tal N puede ser encontrada tomando un elemento simétrico de μ tal que $N \circ N \circ N \subset M$. Para ver que esto funciona considere $h \in C_\mu(Y,Z)$ tal que $f^*(h) \in \widehat{N}[f^*(g)]$, y sea $y \in Y$. Existen vecindades V, W de y en Y tales que $V \subset g^{-1}(N[g(y)])$ y $W \subset h^{-1}(N[h(y)])$. Ya que f es casi suprayectiva, existe un $x \in X$ tal que $f(x) \in V \cap W$. Entonces $(f^*(g)(x), f^*(h)(x)) \in N$, ademas $(g(f(x)), g(y)) \in N$ y $(h(y), h(f(x))) \in N$. Entonces $(g(y), h(y)) \in N \circ N \circ N \subset M$ por lo tanto $h \in \widehat{M}[g]$. ∎

Observacion 2.2.11. Este resultado no se puede extender a la topología gráfica, aún en el caso de que la función f sea biyectiva y continua, la función inducida f^* no es continua. En efecto, sea S la linea de Sorgenfrey (el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos de la forma $[a,b)$). Sea $f : S \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x$ (la cual es continua). Veamos que la función inducida $f^* : C_G(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C_G(S,\mathbb{R})$ no es continua. Denotemos por $1_{\mathbf{R}}$ a la función identidad en $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$; se tiene que $f^*(1_{\mathbf{R}}) = f$. Para el abierto $U = \bigcup_{n\in Z}([n,n+1)\times(n-\frac{1}{2},n+1))$ de $S\times\mathbb{R}$, consideremos la vecindad F_U en $C_G(S,\mathbb{R})$ de $f^*(1_{\mathbf{R}}) = f$. Al considerar un abierto arbitrario $V \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tal que $1_{\mathbf{R}} \in F_V$. Se tiene en particular que el punto $(2,2)$ está contenido en el interior de V, i.e., existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola, $B_r(2)$ en $\mathbb{R}$ es tal que

$$(2,2) \in B_r(2) \times B_r(2) \subset V,$$

por lo tanto la función

$$g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 2-r \\ 2(x-1)+r & si \quad 2-r \leq x \leq 2-\frac{r}{2} \\ 2 & si \quad 2-\frac{r}{2} \leq x \leq 2 \\ x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

es continua y su gráfica está contenida en F_V, pero $f^*(g) = g$ no es elemento de F_U por la forma como se difinio U. Por lo tanto f^* no es continua.

Teorema 2.2.12. Si Z es T_2 y $f \in C(X,Y)$ es una función cociente, entonces $f^*(C(Y,Z))$ es un subconjunto cerrado en $C_p(X,Z)$.

Demostración. Sea $g \in C(X,Z) \setminus f^*C(Y,Z)$. Primeramente vamos a probar que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $g(x_1) \neq g(x_2)$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Supongase lo contrario, i.e., para todo par $x_1, x_2 \in X$ se tiene que si $g(x_1) \neq g(x_2)$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, o lo que es lo mismo que, para todo par $x_1, x_2 \in X$ si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $g(x_1) = g(x_2)$. Si pasa ésto tenemos que para cada $y \in Y$ el conjunto $g(f^{-1}(y))$ tiene un solo elenento. Para $h : Y \to Z$ definida como $h(y) \in g(f^{-1}(y))$ se tiene que h es una función, y cumple que $h \circ f = g$. Además si $W \subset Z$ es abierto se tiene que $f^{-1}(h^{-1}(W)) = g^{-1}(W)$. Como f es una función cociente, se tiene que $h^{-1}(W)$ es abierto en Y. Por lo tanto h es continua. Pero esto implica que g está en $f^*(C(Y,Z))$, lo cual contradice la hipótesis inicial. Por lo tanto existe $x_1, x_2 \in X$ tales que $g(x_1) \neq g(x_2)$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Sean U y V abiertos en Z disjuntos que contienen a $g(x_1)$ y $g(x_2)$ respectivamente. Se tiene que g está en el abierto $[x_1, U] \cap [x_2, V]$ y este es tal que $f^*(C(Y,Z)) \cap ([x_1, U] \cap [x_2, V]) = \emptyset$. Por lo tanto $f^*(C(Y,Z))$ es cerrado en $C_p(X,Z)$. ♯

La topología usada en el Teorema 2.2.12 puede ser reemplazada por cualquier otra topología más grande, para obtener los demás encajes cerrados

2.3 Función evaluación

Sean X, Y espacios topológicos. La *función evaluación*

$$e : C(X,Y) \times X \to Y$$

está definida por $e(x,f) = f(x)$

La función evaluación puede ser expresada como una composición de funciones.

Denotemos por 1 al espacio topológico que consiste de un solo elemento. Sean

$$i_X : X \to C(1,X) \text{ y } i_Y : Y \to C(1,Y)$$

las inyecciones naturales. Si id denota a la función identidad, entonces

$$i_X \times id : X \times C(X,Y) \to C(1,X) \times C(X,Y)$$

está definida por $(i_X \times id)(x,f) = (i_X(x), f)$ para cada $x \in X$ y $f \in C(X,Y)$. Sea también

$$\Phi : C(1,X) \times C(X,Y) \to C(1,Y)$$

la función composición. Entonces

$$e = i_Y^{-1} \circ \Phi \circ (i_X \times id)$$

Teorema 2.3.1. Sean X y Y espacios topológicos.

(a) Si α contiene una base cerrada de X, entonces $e : C_\alpha(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

(b) Si μ es una uniformidad en Y, entonces $e : C_\mu(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

Demostración. Se obtiene de los Teoremas 2.1.1, 2.2.1 y de considerar a e como la composición de arriba.

Corolario 2.3.2.(a) Si X es localmente compacto, entonces $e : C_k(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

(b) Si X es discreto, entonces $e : C_p(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

Si X y Y son espacios topológicos y si $x \in X$, definimos la *función evaluación* en x

$$e_x : C(X,Y) \to Y$$

por $e_x(f) = e(f,x) = f(x)$.

Observación 2.3.3.(a). Si se tienen topologías τ y τ' en $C(X,Y)$ tales que $C_\tau(X,Y) \preceq C_{\tau'}(X,Y)$, entonces la continuidad de $e_x : C_\tau(X,Y) \to Y$ implica que $e_x : C_{\tau'}(X,Y) \to Y$ es continua.

Observacion 2.3.3.(b). Para cada $x \in X$ y V abierto en Y, se tiene que $e_x^{-1}(V) = [x, V]$, entonces e_x es continua cuando consideramos en $C(X,Y)$ alguna de las topologías que hemos analizado hasta aquí (véase la observación anterior, los Teoremas 1.1.7, 1.2.5 y 1.3.5).

La función $e_x : C(X,Y) \to Y$ tiene una función inversa por la derecha $i : Y \to C(X,Y)$. En el siguiente teorema obtenemos una relación entre ellas.

Teorema 2.3.4 Sea $i : Y \to C(X,Y)$ la función inclusión y sea $e_x : C(X,Y) \to Y$ la función evaluación en el punto x. Entonces $e_x \circ i$ es la función identidad en Y. Además si α es cualquier red cerrada en X, entonces $i \circ e_x$ es una retracción de $C_\alpha(X,Y)$ en $i(Y)$.

Demostración. Si $y \in Y$ entonces $e_x \circ i(y) = e_x(c_y) = c_y(x) = y$. Para la segunda parte, si $f \in i(Y)$ entonces $i \circ e_x(f) = i(f(x)) = c_{f(x)} = f$. ♯

Por lo tanto, si α es una red cerrada en X o μ es una uniformidad en Y, entonces Y puede ser pensado como un retracto de $C_\alpha(X,Y)$ o $C_\mu(X,Y)$. En particular, para cualquier propiedad P que se preserva bajo retracciones, si $C_\alpha(X,Y)$ o $C_\mu(X,Y)$ tienen P entonces Y tiene P.

2.4 Función Producto y Función Suma.

Sea $\mathcal{Y}$ una familia de espacios, y $\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y$ el producto cartesiano de los espacios en $\mathcal{Y}$ con la topología producto. Para cada $Y \in \mathcal{Y}$, sea $\pi_Y : \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y \to Y$ la proyeccion natural.

Definimos la *función producto*

$$P : (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X$$

por $\pi_{Y^X}(P(f)) = \pi_Y \circ f$ para cada $f \in (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X$ y $Y \in \mathcal{Y}$, i.e., la función P es definida de tal forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\pi_{Y*}"'] & & \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X \arrow[dl, "\pi_{Y^X}"] \\
& Y^X &
\end{tikzcd}$$

donde π_{Y*} es la función inducida por la proyección

$$\pi_Y : \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y \to Y.$$

Teorema 2.4.1. La función producto $P : (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X$ es una biyección.

Demostración. Definimos la inversa de la función producto

$$P' : \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X \to (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}})^X$$

por $\pi_Y \circ P'(g) = \pi_{Y^X}(g)$ para cada $g \in \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X$ y $Y \in \mathcal{Y}$. En efecto, sea $f \in (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X$. Para cada $Y \in \mathcal{Y}$, $\pi_Y \circ P' \circ P(f) = \pi_{Y^X}(P(f)) = \pi \circ f$, así que $P' \circ P(f) = f$. Un argumento similar muestra que $P \circ P'(g) = g$ para $g \in \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X$. ♯

El siguiente teorema se sigue del hecho de que una función $f \in (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X$ es continua si y sólo si $\pi_Y \circ f$ es continua para cada $Y \in \mathcal{Y}$

Teorema 2.4.2. Si $P : (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)^X \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y^X$ es la función producto, entonces $P(C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y)) = \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}C(X,Y)$.

Observación 2.4.3. En este caso la función producto restringida a las funciones continuas es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\pi_{Y*}"'] & & \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} C(X,Y) \arrow[dl, "\pi_{C(X,Y)}"] \\
& C(X,Y) &
\end{tikzcd}$$

Teorema 2.4.4. Sea X un espacio y $\mathcal{Y}$ una familia de espacios.

(a). Si α es una red cerrada en X, entonces $P : C_\alpha(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} C_\alpha(X,Y)$ es continua, y si α es red hereditariamente cerrada y compacta en X entonces P es un homeomorfismo.

(b). Si para cada $Y \in \mathcal{Y}$, μ_Y es una uniformidad en Y y si μ es la uniformidad producto en $\Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y$ formada por las μ_Y entonces $P : C_\mu(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \to \Pi\{C_{\mu_Y}(X,Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$ es un homeomorfismo uniforme.

(c) $P : C_G(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \to \Pi\{C_G(X,Y) : Y \in \mathcal{Y}\}$ es continua. Si la familia $\mathcal{Y}$ es finita entonces P es un homeomorfismo.

Demostracion. (a) Por el Teorema 2.4.1. tenemos que P es biyectiva. Observe que para cada $Y \in \mathcal{Y}$, $A \in \alpha$ y V en Y abierto,

$$P^{-1}(\pi^{-1}_{YX}([A,V])) = \pi_Y^{-1}([A,V]) = [A, \pi_Y^{-1}(V)]$$

Por lo tanto P es continua. También:

$$P([A, \pi_Y^{-1}(V)]) = \pi^{-1}_{YX}([A,V]),$$

y usando el Teorema 1.1.5, se tiene que P es abierta y por lo tanto P es un homeomorfismo.

(b) Recuerde que una subbase para μ esta dada por $\{M_Y^* : Y \in \mathcal{Y} \ y \ M_Y \in \mu_Y\}$ donde

$$M_Y^* = \{(s,t) \in (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \times (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : (\pi_Y(s), \pi_Y(t)) \in M_Y\}.$$

Tenemos que para cada $f \in C_\mu(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y)$, $Y \in \mathcal{Y}$ y $M_Y \in \mu_Y$

$$\widehat{M}_Y[f] \ = \ \{g \in C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : (f(x), g(x)) \in M_Y^* \text{ para}$$

$$\begin{aligned}
&\text{todo } x \in X\} \\
= \; & \{g \in C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : (\pi_Y(f(x)), \pi_Y(g(x))) \in M_Y \text{ para} \\
&\text{todo } x \in X\} \\
= \; & \{g \in C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : \pi_Y(g) \in \widehat{M}[\pi_Y \circ f]\} \\
= \; & \{g \in C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : \pi_{C(X,Y)}(P(g)) \in \widehat{M}[\pi_Y \circ f]\} \\
= \; & \{g \in C(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) : P(g) \in \pi^{-1}_{C(X,Y)} \widehat{M}[\pi_Y \circ f]\} \\
= \; & P^{-1}(\pi_Y^{-1}(\widehat{M}_Y[\pi_Y \circ f])).
\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que P es un homeomorfismo.

(c) Definimos la función $1 \times \pi_Y : X \times (\Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y) \to X \times Y$, como la identidad en el primer factor y la Y-esima proyección en el segundo factor.

Sea $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$ un subconjunto finito. Para cada $Y \in \mathcal{Y}'$ sea $U_Y \subset X \times Y$ un abierto tal que $F_{U_Y} \neq \emptyset$. Un abierto básico en $\Pi_{Y\in\mathcal{Y}} C_G(X,Y)$ es de la forma

$$U = \bigcap_{Y\in\mathcal{Y}'} \pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_Y}).$$

Observe que

$$\begin{aligned}
P^{-1}(U) &= P^{-1}\Big(\bigcap_{Y\in\mathcal{Y}'} \pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_Y})\Big) \\
&= \bigcap_{Y\in\mathcal{Y}'} P^{-1}(\pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_Y})) \\
&= \bigcap_{Y\in\mathcal{Y}'} (\pi_Y)_*^{-1}(F_{U_Y}) \\
&= \bigcap_{Y\in\mathcal{Y}'} (F_{(1\times\pi_Y)^{-1}(U_Y)})
\end{aligned}$$

el cual es un abierto en $C_G(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}} Y)$. La penúltima igualdad se obtiene de la conmutatividad del diagrama que resulta del Teorema 2.4.2, y la última igualdad se obtiene porque $f \in \pi_Y^{-1}(F_{U_Y})$ *sii* $\pi_Y \circ f \in F_{U_Y}$, i.e., $\Gamma_{\pi_Y \circ f} \subset U_Y$, es decir que para todo $x \in X$ $(x, \pi(f(x))) \in U_Y$. Visto de otra manera, para todo $x \in X$, $(1 \times \pi_Y)(x, f(x)) \in U_Y$. Esto es, para toda $x \in X$ $(x, f(x)) \in (1 \times \pi_Y)^{-1}(U_Y)$, esto es cierto si y sólo si $\Gamma_f \subset (1 \times \pi_Y)^{-1}(U_Y)$, i.e., $f \in F_{(1\times\pi_Y)^{-1}}(U_Y)$.

La segunda afirmación se obtiene del hecho de que la familia $\bigcap_{Y\in\mathcal{Y}} F_{(1\times\pi_Y)^{-1}(U_Y)}$ con $U_Y \subset X \times Y$ abierto, es una base.$\sharp$

La demostracion del siguiente corolario se obtiene directamente del Teorema 2.4.4.(a)

Corolario 2.4.5. Son homeomorfismos las funciones siguientes $P : C_k(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y) \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}C_k(X,Y)$ y $P : C_p(X, \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}Y) \to \Pi_{Y\in\mathcal{Y}}C_p(X,Y)$.

Sea $\mathcal{X}$ una familia de espacios, y sea $\Sigma\mathcal{X}$ la suma topológica disjunta de los espacios en $\mathcal{X}$. Para cada $X \in \mathcal{X}$, sea $\sigma_X : X \to \Sigma\mathcal{X}$ la inyección natural. Para un espacio Y, sea $Y^{\mathcal{X}}$ la familia $\{Y^X : X \in \mathcal{X}\}$. Definimos la *función suma*

$$S : Y^{\Sigma\mathcal{X}} \to \Pi_{X\in\mathcal{X}}Y^X$$

por $\pi_{Y^X}(S(f)) = f \circ \sigma_X$ para cada $f \in Y^{\Sigma\mathcal{X}}$ y $X \in \mathcal{X}$

Teorema 2.4.6. La función suma $S : Y^{\Sigma\mathcal{X}} \to \Pi_{X\in\mathcal{X}}Y^X$ es una biyección.

Demostración. Veamos que la inversa de S es la función

$$S' : \Pi_{X\in\mathcal{X}}Y^X \to Y^{\Sigma\mathcal{X}}$$

definida por $S'(g) \circ \sigma_X = \pi_{Y^X}(g)$ para cada $g \in \Pi Y^{\mathcal{X}}$ y $X \in \mathcal{X}$. Sea $f \in Y^{\Sigma\mathcal{X}}$. Tenemos que para cada $X \in \mathcal{X}$, $S'(S(f)) \circ \sigma_X = \pi_{Y^X}(S(f)) = f \circ \sigma_X$ así que $S' \circ S(f) = S'(S(f)) = f$. Por otro lado, sea $g \in \Pi_{X\in\mathcal{X}}Y^X$. Entonces para cada $X \in \mathcal{X}$, $\pi_{Y^X}(S(S'(g)) = S'(g) \circ \sigma_X = \pi_{Y^X}(g)$, por lo tanto $S \circ S'(g) = S(S'(g)) = g$. ♯

Así, como la función producto, la función suma también puede ser restringida naturalmente a las funciones continuas. Si $\mathcal{X}$ es una familia de espacios, $C(\mathcal{X}, Y)$ denota la familia $\{C(X,Y) : X \in \mathcal{X}\}$.

El siguiente teorema se sigue del hecho de que una función $f \in Y^{\Sigma\mathcal{X}}$ es continua si y sólo si $f \circ \sigma_X$ es continua para cada $X \in \mathcal{X}$.

Teorema 2.4.7. Si $S : Y^{\Sigma\mathcal{X}} \to \Pi_{X\in\mathcal{X}}Y^X$ es la función suma entonces $S(C(\Sigma\mathcal{X}, Y)) = \Pi_{X\in\mathcal{X}}C(X,Y)$.

Por lo tanto la función suma está considerada como una biyección de $C(\Sigma\mathcal{X}, Y)$ en $\Pi_{X\in\mathcal{X}}C(X,Y)$.

Observación 2.4.8. En este caso la función suma restringida a las funciones continuas es tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C(\Sigma\mathcal{X},Y) \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "\sigma_X{}^*"'] & & \Pi_{X\in\mathcal{X}}C(X,Y) \arrow[dl, "\pi_{C(X,Y)}"] \\ & C(X,Y) & \end{tikzcd}$$

donde $\sigma_X{}^*$ es la función inducida de la inyección $\sigma_X : X \to \Sigma\mathcal{X}$.

Teorema 2.4.9. Sea $\mathcal{X}$ una familia de espacios.

(a). Si para cada $X \in \mathcal{X}$, α_X es una red cerrada en X y si $\beta = \cup\{\sigma_X(\alpha_X) : X \in \mathcal{X}\}$ es una red, entonces $S : C_\beta(\Sigma\mathcal{X}, Y) \to \Pi\{C_{\alpha_X}(X,Y) : X \in \mathcal{X}\}$ es un homeomorfismo.

(b). Si μ es una uniformidad compatible en Y, entonces $S : C_\mu(\sum\mathcal{X}, Y) \to \Pi_{X\in\mathcal{X}}C_\mu(X,Y)$ es continua. Y si $\mathcal{X}$ tiene una cantidad finita de elementos, entonces S es un homeomorfismo.

(c) $S : C_G(\sum\mathcal{X}, Y) \to \Pi\{C_G(X,Y) : X \in \mathcal{X}\}$ es continua. Si además $\mathcal{X}$ es finita, entonces S es un homeomorfismo.

Demostracion. (a) Observe que para $X \in \mathcal{X}$, $A \in \alpha_X$ y V abierto en Y,

$$S^{-1}(\pi_{Y^X}^{-1}([A,V])) = \sigma_X^{-1}([A,V]) = [\sigma_X(A), V].$$

Por lo tanto, S es un homeomorfismo.

(b) Sea $X \in \mathcal{X}$ y $M \in \mu$. Definimos $(\widehat{M})_X^* = \{(f,g) \in (\Pi_{X\in\mathcal{X}}C_\mu(X,Y)) \times (\Pi_{X\in\mathcal{X}}C_\mu(X,Y)) : (\pi_{C(X,Y)}(f), \pi_{C(X,Y)}(g)) \in \widehat{M}\}$, entonces $(\widehat{M})_X^*$ es un miembro de la subbase de la uniformidad producto en $\Pi_{X\in\mathcal{X}}C_\mu(X,Y)$. Veamos que para cada $f \in C_\mu(\Sigma\mathcal{X}, Y)$ se cumple que

$$S(\widehat{M}[f]) \subset (\widehat{M})_X^*[S(f)].$$

Sea $S(h) \in S(\widehat{M}[f])$, entonces $(f,h) \in \widehat{M}$; por lo tanto, para cada $X \in \mathcal{X}$, $(f \circ \sigma_X, h \circ \sigma_X) \in \widehat{M}$, i.e. para cada $X \in \mathcal{X}$

$$(\pi_{C(X,Y)}(S(f)), \pi_{C(X,Y)}(S(h)) \in \widehat{M}.$$

Por lo tanto $S(h) \in (\widehat{M})^*_X(S(f))$. Esto establece la continuidad de S. Si $\mathcal{X}$ es finito, entonces la intersección de los conjuntos de la forma $(\widehat{M})^*_X[S(f)]$, con $X \in \mathcal{X}$, es una base de vecindades de $S(f)$, la cual está contenida en $S(\widehat{M}[f])$. Por lo tanto, en este caso, S es un homeomorfismo.

(c) Definimos la función $\sigma_X \times 1 : X \times Y \to (\Sigma\mathcal{X}) \times Y$ como la inyección natural en el primer factor y la identidad en el segundo factor (esta función es abierta). Sea $U_X \subset X \times Y$ abierto tal que $F_{U_X} \neq \emptyset$ y $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ finito. El conjunto

$$U = \bigcap_{X \in \mathcal{X}'} \pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_X})$$

es un abierto básico en $\Pi_{X\in\mathcal{X}} C_G(X,Y)$ y

$$\begin{aligned} S^{-1}(U) &= S^{-1}(\bigcap_{X \in \mathcal{X}'} \pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_X}) \\ &= \bigcap_{X \in \mathcal{X}'} S^{-1}(\pi^{-1}_{C(X,Y)}(F_{U_X}) \\ &= \bigcap_{X \in \mathcal{X}'} (\sigma_X{}^*)^{-1}(F_{U_X}) \\ &= \bigcap_{X \in \mathcal{X}'} F_{(\sigma_X \times 1)(U_X)}. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se obtiene de la conmutatividad del diagrama del Teorema 2.4.7. La última desigualdad se obtiene por las desigualdades $(\sigma_X{}^*)^{-1}(F_{U_X}) = \{h \in C(\Sigma\mathcal{X}, Y) : \Gamma_{h\circ\sigma_X} \subset F_{U_X}\} = \{h \in C(\Sigma\mathcal{X}, Y)$: para todo $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ $(\mathrm{x}, \mathrm{h} \circ \sigma_\mathrm{X}(\mathrm{x})) \in \mathrm{U_X}\} = \{\mathrm{h} \in \mathrm{C}(\Sigma\mathcal{X}, \mathrm{Y}) : \Gamma_\mathrm{h} \subset (\sigma_\mathrm{X} \times 1)(\mathrm{U_X})\} = \mathrm{F}_{(\sigma_\mathrm{X}\times 1)(\mathrm{U_X})}$.

La segunda parte se obtiene ya que la familia de los conjuntos de la forma $\bigcap_{X\in\mathcal{X}} F_{(\sigma_X\times 1)(U_X)}$ con U_X abierto en $X \times Y$, forman una base. ♯

Corolario 2.4.10. Sea $\mathcal{X}$ una familia de espacios, entonces $S : C_k(\sum \mathcal{X}, Y) \to \Pi_{X\in\mathcal{X}} C_k(X,Y)$ y $S : C_p(\sum \mathcal{X}, Y) \to \Pi_{X\in\mathcal{X}} C_p(X,Y)$ son homeomorfismos

Demostración. Por el Teorema 2.4.9.(a) basta con demostrar que para $\beta = \bigcup\{\sigma_X(\alpha_X) : X \in \mathcal{X}\}$ y $k = \{C \subset \Sigma\mathcal{X} : C$ *es subconjunto compacto de* $\Sigma\mathcal{X}\}$ se tiene que las topologías satisfacen

$$C_\beta(\sum \mathcal{X}, Y) \preceq C_k(\sum \mathcal{X}, Y)$$

y

$$C_k(\sum \mathcal{X}, Y) \preceq C_\beta(\sum \mathcal{X}, Y)$$

i.e., son iguales las topologías generadas por estas redes.

Como $\beta \subset k$, k es una β-red y entonces, por la Proposición 1.1.4, tenemos que $C_\beta(\sum \mathcal{X}, Y) \preceq C_k(\sum \mathcal{X}, Y)$. Por otro lado, si $A \in k$, entonces existe $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ finito tal que $A \subset \Sigma\mathcal{X}'$; como para cada $X \in \mathcal{X}$ X es cerrado en $\Sigma\mathcal{X}$, entonces $A_X = A \cap X \in \beta$ es compacto, por lo tanto $A = \bigcup_{X \in \mathcal{X}'} A_X$. Entonces las uniones finitas de los elementos de β forman una β-red. Aplicando la Observación 1.1.6 tenemos que $C_k(\sum \mathcal{X}, Y) \preceq C_\beta(\sum \mathcal{X}, Y)$. Por lo tanto la igualdad de las topologías.

La demostración para el caso C_p es análoga. ♯

2.5 Función Exponencial

Si X, Y y Z son cualesquiera tres espacios, la *función exponencial*

$$E : Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^X$$

se define como $E(f)(x)(y) = f(x, y)$ para cada $f \in X^{X \times Y}$, $x \in X$ y $y \in Y$.

Teorema 2.5.1. La función exponencial $E : Z^{X \times Y} \to (Z^Y)^Z$ es una biyección.

Demostración. Consideremos la siguiente función:

$$E' : (Z^Y)^X \to Z^{X \times Y}$$

definida como $E'(g)(x, y) = g(x)(y)$ para cada $g \in (Z^Y)^X$ y $(x, y) \in X \times Y$. Es directo verificar que E y E' son inversas la una de la otra. ♯

Si $f \in C(X \times Y, Z)$, entonces $E(f)(x) \in C(Y, Z)$ para cada $x \in X$. Por lo tanto

$$E(C(X \times Y, Z)) \subset (C(Y, Z))^X.$$

Si τ es alguna topología en $C(Y, Z)$, entonces $C_\tau(Y, Z)$ denota el espacio topológico con esta topología. Una topología τ en $C(Y, Z)$ es llamada *topología escindible* si para cada espacio topológico X se tiene que

$$E(C(X \times Y, Z)) \subset C(X, C_\tau(Y, Z)).$$

Observación 2.5.2. Cualquier topología más chica que una topología escindible es escindible.

Teorema 2.5.3. La topología compacto-abierta es una topología escindible.

Demostración. Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f \in C(X \times Y, Z)$. Para ver que $E(f)$ es continua, tomemos $x \in X$ y $[B, W]$ un abierto subbásico que contiene a $E(f)(x)$ en $C_k(Y, Z)$. Para cada $y \in B$ existe una vecindad abierta U_y de x en X y una vecindad V_y de y en Y tal que $f(U_y \times V_y) \subset W$. Como B es compacto, existen $y_1, ...y_n \in B$ tales que $B \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Si $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$, entonces U es una vecindad de x tal que $E(f)(U) \subset [B, W]$. $\sharp$

Una topología τ en $C(Y, Z)$ es llamada *topología conjunta, o admisible* si para todo espacio Xse cumple que

$$C(X, C_\tau(Y, Z)) \subset E(C(X \times Y, Z)).$$

Observación 2.5.4. Cualquier topología más fina que una topología admisible es admisible.

Teorema 2.5.5. Una topología τ en $C(Y, Z)$ es admisible si y sólo si la función evaluación $e : C_\tau(Y, Z) \times Y \to Z$ es continua.

Demostración. Suficiencia: Supongamos que e es continua. Sea X un espacio y sea $g \in C(X, C_\tau(Y, Z))$. Es suficiente ver que

$$E^{-1}(g) = e \circ (g \times id),$$

donde id es la función identidad en Y. Si $(x,y) \in X \times Y$, entonces $e \circ (g \times id))(x,y) = e(g(x),y) = g(x)(y) = E^{-1}(g)(x,y)$.

Necesidad: Por el otro lado, supongase que τ es una topología admisible. Consideremos a $X = C(Y,Z)$, y sea $id : C_\tau(Y,Z) \to C_\tau(Y,Z)$ la función identidad. Entonces $id \in E(C(C_\tau(Y,Z) \times Y, Z))$. Sean $f \in C(Y,Z)$ y $y \in Y$. Se tiene entonces $E^{-1}(id)(f,y) = (id(f))(y) = f(y) = e(f,y)$. Por lo tanto $e = e\circ(id \times id) = E^{-1}(id)$. Concluimos que e es continua. ♯

Corolario 2.5.6. Sean Y, Z dos espacios topológicos.

(a). Si Y es localmente compacto, entonces la topología compacto-abierta en $C(Y,Z)$ es admisible.

(b). Si μ es una uniformidad en Z, entonces la topología de la convergenica uniforme en $C(Y,Z)$ es admisible.

(c). Si Y es localmente compacto y T_2, entonces la topología gráfica en $C(Y,Z)$ es admisible.

Demostración. (a) Se obtiene del Teorema 2.5.5 y del Corolario 2.3.2.

(b) Se obtiene del Teorema 2.5.5 y del Teorema 2.3.1.(b).

(c) Se sigue del inciso (a), del Teorema 1.3.3 y de la Observación 2.3.3(a). ♯

Proposición 2.5.7. Si σ es una topología escindible en $C(Y,Z)$ y τ es una topología admisible en $C(Y,Z)$, entonces $C_\sigma(Y,Z) \preceq C_\tau(Y,Z)$.

Demostración. Al usar las definiciones de escindibilidad y admisibilidad para el espacio $X = C_\tau(Y,Z)$ tenemos las contenciones

$$\begin{aligned} C(C_\tau(Y,Z), C_\tau(Y,Z)) \subset\ & E(C(C_\tau(Y,Z) \times Y, Z) \subset \\ & C(C_\tau(Y,Z), C_\sigma(Y,Z)) \end{aligned}$$

Como la función identidad está en $C(C_\tau(Y,Z), C_\tau(Y,Z))$ entonces está en $C(C_\tau(Y,Z), C_\sigma(Y,Z))$. Por lo tanto $C_\tau(Y,Z) \preceq C_\sigma(Y,Z)$. ♯

El siguiente corolario se obtiene de los Teoremas 2.5.3 y 2.5.6.(a).

Corolario 2.5.8. Si Y es localmente compacto, entonces para cualquier espacio X, la función exponencial E es una biyección de $C(X \times Y, Z)$ en $C(X, C_k(Y,Z))$.

El siguiente teorema establece las propiedades de continuidad de E. Si α es una red cerrada es X y β es una red cerrada en Y, definimos

$$\alpha \times \beta = \{A \times B : A \in \alpha \text{ y } B \in \beta\},$$

la cual resulta ser una red cerrada en $X \times Y$. También $\alpha \times k$ denota $\{A \times B : A \in \alpha \text{ y } B \text{ es compacto en } Y\}$.

Teorema 2.5.9. Sea Y un espacio localmente compacto y sea X cualquier espacio topológico.

(a). Si α es red hereditariamente cerrada y compacta en X, entonces $E : C_{\alpha \times k}(X \times Y, Z) \to C_\alpha(X, C_k(Y, Z))$ es un homeomorfismo.

(b). Si Y es compacto, μ es una uniformidad en Z y ν es la uniformidad en $C_\mu(Y, Z)$ inducida por μ, entonces $E : C_\mu(X \times Y, Z) \to C_\nu(X, C_\mu(Y, Z))$ es un homeomorfismo.

Demostración. La proposición en (a) se obtiene del Teorema 1.1.5, Corolario 2.2.5 y del hecho que

$$E([A \times B, W]) = [A, [B, W]]$$

para cada $A \in \alpha$, $B \in Y$ y W abierto en Z.

(b) Por ser Y compacto, entonces, por el Teorema 1.2.6.(a), $C_k(X, Y) = C_\mu(X, Y)$. Por el Corolario 2.5.6.(a), E es biyectiva. Veamos que, para cada $f \in C_\mu(X \times Y, Z)$ y cada $M \in \mu$ se tiene que

$$E(\widehat{M}[f]) = \widehat{\widehat{M}}[E(f)].$$

Sean $g \in \widehat{M}[f]$, $x \in X$ y $y \in Y$. Entoces $(f(x, y), g(x, y)) \in M$. Así que $(E(f)(x)(y), E(g)(x)(y)) \in M$. Como y es arbitrario, $(E(f)(x), E(g)(x)) \in \widehat{M}$. Como también x es arbitrario, $(E(f), E(g)) \in \widehat{\widehat{M}}$; así que $E(g) \in \widehat{\widehat{M}}[E(f)]$. Para demostrar la otra contención, sea $g \in \widehat{\widehat{M}}[E(f)]$ y sea $(x, y) \in X \times Y$. Entonces $(E(f)(x), g(x)) \in \widehat{M}$, así que

$$(f(x, y), E^{-1}(g)(x, y)) = (E(f)(x)(y), E(g)(x)(y)) \in M.$$

Por lo tanto, $E^{-1}(g) \in \widehat{M}[f]$; de lo cual se tiene que $g \in E(\widehat{M}[f])$. Entonces E es continua y abierta. ♯

Corolario 2.5.10. Si Y es localmente compacto, entonces para cada espacio T_2 X, $E : C_k(X \times Y, Z) \to C_k(X, C_k(Y, Z))$ es un homeomorfismo

Demostración. Sea $\beta = \{A \times B : A \text{ es compacto en } X \text{ y } B \text{ es compacto en } Y\}$. Por el Teorema 2.2.7.(c), es suficiente con mostrar que β es una κ-red donde κ es la familia de todos los subconjuntos compactos de $X \times Y$. Sea C un subconjunto compacto de $X \times Y$ y sea W un abierto en $X \times Y$ que contiene a C. Sean A y B las proyecciones de C en X y Y, respectivamente. Para cada $z \in C$, existen U_z en X y V_z en Y tal que $z \in U_z \times V_z$ y $(\overline{U}_z \cap A) \times (\overline{V}_z \cap B) \subset W$. Entonces para cada $z \in C$ definimos $A_z = \overline{U}_z \cap A$ y $B_z = \overline{V}_z \cap B$. Ya que C es compacto, entonces existen $z_1, ..., z_n \in C$ tales que $C \subset (U_{z_1} \times V_{z_1}) \cup \cdots \cup (U_{z_n} \times V_{z_n})$. Por lo tanto, $C \subset (A_{z_1} \times B_{z_1}) \cup \cdots \cup (A_{z_n} \times B_{z_n}) \subset W$. ♯

La compacidad local en el Teorema 2.5.9.(a) y en el Corolario 2.5.10 es solo para asegurar que E (restringida a las fuciones continuas) sea suprayectiva. Esto tambien puede ser obtenido si pedimos que $X \times Y$ sea un k-espacio.

Corolario 2.5.11. Si $X \times Y$ es un k-espacio, entonces la función $E : C_k(X \times Y, Z) \to C_k(X, C_k(Y, Z))$ es un homeomorfismo.

Demostración La inyectividad sale de la definición de E . Veamos que E es suprayectiva, sea $g \in C_k(X, C_k(Y, Z))$. Ya que $X \times Y$ es un k-espacio, es suficiente mostrar que $E^{-1}(g)|_{A\times B}$ es continua donde A y B son subconjuntos compactos en X y Y respectivamente. Sea $j : B \to Y$ la función inclusión. Resulta que la función inducida $j^* : C_k(Y, Z) \to C_k(B, Z)$ es continua por el Teorema 2.2.7.(a). También, la función evaluación $e : C_k(B, Z) \times B \to Z$ es continua, ya que B es compacto. Verifiquemos que $E^{-1}(g)|_{A\times B} = e \circ (j^* \times id) \circ (g|_A \times id)$, donde $id : B \to B$ es la función identidad. Sea $(a, b) \in A \times B$, $e \circ (j^* \times id) \circ (g|_A \times id)(a, b) = e \circ (j^* \times id) \circ (g|_A(a), b) = e(j^*(g|_A(a), b) = e(g|_A(a) \circ j, b) = g|_A(a)(j(b)) = g|_A(a)(j(b)) = g|_A(a)(b) = E^{-1}(g)(a)(b)$. Por lo tanto $E^{-1}(g)$ es continua, ya que es una composicion de funciones continuas, y por el Corolario anterior E es continua y abierta. Por lo tanto E es un homeomorfismo. ♯

Veamos algunos resultados en los que se aplicarán los resultados que hemos visto hasta aquí con respecto a la función exponencial.

La siguiente caracterizacion de funciones cocientes es bien conocida y su demostracion se puede encontrar en [Dug] o [Eng].

Lema 2.5.12. Si $f : X \to Y$ es una función suprayectiva y continua, entonces f es una función cociente si y sólo si para todo espacio topológico Z y toda función $g : Y \to Z$, la continuidad de $g \circ f$ implica la continuidad de g.

Teorema 2.5.13. Si Y es localmente compacto y $q : X \to Z$ es una función cociente, entonces $q \times id : X \times Y \to Z \times Y$ es una función cociente.

Demostración. Por el Lema 2.5.12 es suficiente mostrar que si R es un espacio topologico y $g : Z \times Y \to R$ es una función tal que $g \circ (q \times id)$ es continua, entonces g es continua. Sea $f = g \circ (q \times id)$, y sean $E : C_k(X \times Y, R) \to C_k(X, C_k(Y, R))$ y $E' : C_k(Z \times Y, R) \to C_k(Z, C_k(Y, R))$ funciones exponenciales, las cuales son continuas por el Corolario 2.5.11. Tenemos que E' está definida en $R^{Z \times Y}$, así que $E'(g)$ es una función de Z en R^Y. Veamos que $E'(g) \circ q = E(f)$. En efecto, tomamos $x \in X$ y $y \in Y$. Entonces $(E'(g) \circ q)(x)(y) = E'(g)(q(x))(y) = g(q(x), y) = (g \circ (q \times id)(x, y) = f(x, y) = E(f)(x)(y)$. Por ser $E(f)$ continua, se tiene que $E'(g) \circ q$ es continua, y al ser q una función cociente, entonces $E'(g)$ es continua, por tanto $E'(g) \in C_k(Z, C_k(Y, R))$, y por el Corolario 2.5.11 se tiene que $g \in C(Z \times Y, R)$ i.e. g es continua. ♯

Lema 2.5.14. Un espacio Hausdorff es un k-espacio si y sólo si es la imagen de un espacio localmente compacto bajo una función cociente.

Corolario 2.5.15. El producto de un k-espacio y un espacio localmente compacto es un k-espacio.

Demostración. Sea X un k-espacio. Consideremos un espacio Y localmente compacto y una función cociente tal que

$$q : Y \to X.$$

Sea Z un espacio localmemente compacto. Por el Teorema 2.5.13 se tiene que

$$q \times 1 : Y \times Z \to X \times Z$$

es una función cociente y por ser $Y \times Z$ locamente compacto, entonces $X \times Z$ es un k-espacio. $\sharp$

Capítulo 3

ALGUNAS PROPIEDADES BÁSICAS DE $C_\alpha(X,Y)$

Una de las principales direcciones de análisis respecto a los espacios de funciones $C(X,Y)$ es determinar las propiedades topológicas de $C(X,Y)$ a través de las propiedades topológicas de los espacios X y Y. Veremos en este capítulo, bajo que condiciones en los espacios X y Y se satisfacen los axiomas de separación o numerabilidad en $C_\alpha(X,Y)$.

3.1 Los Axiomas de Separación en $C_\alpha(X,Y)$

Teorema 3.1.1. Sean X, Y espacios topológicos, y sea α una red cerrada en X. Entonces, $C_\alpha(X,Y)$ es T_i si y sólo si Y es T_i, para $i = 0, 1$ *y* 2.

Demostración. Demostraremos el caso de $i = 2$, los demás casos se demuestran analogamente.

Necesidad: La propiedad de ser T_2 es una propiedad hereditaria, por lo tanto por el Teorema 2.1.1, Y es T_2 si $C_\alpha(X,Y)$ lo es.

Suficiencia: Sean $f,g \in C(X,Y)$, con $f \neq g$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Como el espacio Y es T_2, existen abiertos disjuntos U,V en Y tales que $f(x) \in U$ y $g(x) \in V$. Como α es una red, existen $A,B \in \alpha$ tales que $x \in A \subset f^{-1}(U)$ y $x \in B \subset g^{-1}(V)$. Por lo tanto tenemos que $f \in [A,U]$, $g \in [B,V]$ y $[A,U] \cap [B,V] = \emptyset$, i.e., $C_\alpha(X,Y)$ es T_2. ♯

Lema 3.1.2. Sean X, Y espacios topológicos, $i = 0, 1$ *o* 2 y sea $f : X \to Y$ una función biyectiva y cerrada, no necesariamente continua. Si X es T_i (resp., completamente Hausdorff) entonces Y es T_i (resp., completamente Hausdorff).

Demostración. Demostraremos el caso de $i = 2$, los demás casos se demuestran analogamente. Sean $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$. Como f es biyectiva, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como X es T_2, existen abiertos ajenos U y V en X tales que $x_1 \in U$ y $x_2 \in V$. Por ser f cerrada, son cerrados los conjuntos $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ y $f(X \setminus V) = Y \setminus f(V)$. Por lo tanto $f(U)$ y $f(V)$ son abiertos. Además $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$ y $f(U) \cap f(V) = \emptyset$. Lo que significa que Y es T_2. ♯

Observación 3.1.3. En particular, si τ_1 y τ_2 son topologías en X tales que $\tau_1 \preceq \tau_2$, entonces la identidad de (X, τ_1) a (X, τ_2) es cerrada. Por lo tanto si (X, τ_1) es T_i o completamente Hausdorff entonces (X, τ_2) también lo es.

Corolario 3.1.4. Para $i = 0, 1$ *y* 2 se tiene que

(a) $C_p(X,Y)$ es T_i si y sólo si Y es T_i

(b) $C_k(X,Y)$ es T_i si y sólo si Y es T_i

(c) $C_G(X,Y)$ es T_i si y sólo si Y es T_i

Demostración. Las afirmaciones en (a) y (b) son consecuencias del Teorema 3.1.1. La demostración de (c) se obtiene aplicando el Teorema 3.1.1, la Observación 3.1.3 y el Teorema 1.3.3 ♯

Observación 3.1.5. Sea α una red en X, entonces en $C_\alpha(X,Y)$ se obtiene que $\overline{[A,B]} \subset [A,\overline{B}]$ para cualquier $A \in \alpha$ y cualquier subconjunto abierto B en Y. Esto es porque si $f \notin [A,\overline{B}]$, entonces existe $x \in A$ tal que $f(x) \notin \overline{B}$, como α es una red existe $C \in \alpha$ tal que $x \in C \subset f^{-1}(Y \setminus \overline{B})$, de lo cual se tiene que $f \in [C, Y \setminus \overline{B}]$ y además $[C, Y \setminus \overline{B}] \cap [A,B] = \emptyset$, por lo tanto $f \notin \overline{[A,B]}$.

Teorema 3.1.6. Sea α una red compacta en X. Entonces $C_\alpha(X,Y)$ es regular si y sólo si Y es regular.

Demostracion. Necesidad: Usando el hecho de que la propiedad de ser regular es hereditaria, se obtiene que Y es regular si $C_\alpha(X,Y)$ lo es, por el Teorema 2.1.1.

Suficiencia: Supongamos que Y es regular. Sea $f \in C_\alpha(X,Y)$ y sea W una vecindad abierta de f, entonces existen $A_1, ..., A_n \in \alpha$ y abiertos $V_1, ..., V_n$ en Y tales que

$$f \in [A_1, V_1] \cap \cdots \cap [A_n, V_n] \subset W.$$

Para cada $i \in \{1, ...n\}$, $f(A_i)$ es un subconjunto compacto de Y que está contenido en el abierto V_i. Como Y es regular existe un abierto B_i en Y tal que

$$f(K_i) \subset B_i \subset \overline{B}_i \subset V_i.$$

Por la Observación 3.1.5, tenemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$\overline{[A_i, B_i]} \subset [A_i, \overline{B}_i].$$

Así tenemos que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$f \in [A_i, B_i] \subset \overline{[A_i, B_i]} \subset [A_i, \overline{B}_i] \subset [A_i, V_i].$$

Entonces, $\bigcap_{i=1}^n [A_i, B_i]$ es una vecindad de f en $C_\alpha(X,Y)$ tal que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n [A_i, B_i]} \subset \bigcap_{i=1}^n \overline{[A_i, B_i]} \subset \bigcap_{i=1}^n [A_i, V_i] \subset W,$$

luego $C_\alpha(X,Y)$ es regular. ♯

Corolario 3.1.7. (a) $C_k(X,Y)$ es regular si y sólo si Y es regular.

(b) $C_p(X,Y)$ es regular si y sólo si Y es regular.

Demostración. Es una consecuencia del Teorema anterior. ♯

Teorema 3.1.8.

(a) $C_\alpha(X,Y)$ es T_3 si y sólo si Y es T_3, donde α es una red compacta en X

(b) $C_k(X,Y)$ es T_3 si y sólo si Y es T_3
(c) $C_p(X,Y)$ es T_3 si y sólo si Y es T_3
Demostración. (a) Se obtiene de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.4
(b) Se obtiene de la parte (a).
(c) Se obtiene de la parte (a). ♯

Lema 3.1.9. Si X es un espacio completamente regular, C es un subconjunto cerrado y K es un subconjunto compacto en X, tales que $C \cap K = \emptyset$. Entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(C) = \{1\}$ y $f(K) = \{0\}$.

Demostración. Para todo $x \in K$ existe $f_x : X \to [0,1]$ tal que $f_x(C) = \{1\}$ y $f_x(x) = 0$. Sea $V_x = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$. Se tiene que $V_x \cap C = \emptyset$. Como K es compacto, existen $x_1, ..., x_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. Definimos $g : X \to [0,1]$ como

$$g(x) = máx\{f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)\}.$$

La función g es continua, $g(C) = \{1\}$, y para todo $x \in K$ $g(x) < \frac{1}{2}$. Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ continua tal que $h([0, \frac{1}{2}]) = \{0\}$ y $h(1) = 1$. Si $f = h \circ g$, entonces se tiene que $f(C) = \{1\}$ y $f(K) = \{0\}$ y f es continua. ♯

Teorema 3.1.10. Sea α una red compacta en X. Entonces $C_\alpha(X,Y)$ es completamente regular si y sólo si Y es completamente regular.

Demostración. Necesidad: Usando que la propiedad de ser completamente regular es una propiedad hereditaria y aplicando el Teorema 2.1.1.(a) concluimos que Y es completamente regular si $C_\alpha(X,Y)$ lo es.

Suficiencia: Sea F un subconjunto cerrado de $C_\alpha(X,Y)$, $f \in C_\alpha(X,Y)$ tal que $f \notin F$. Por lo tanto existen compactos $K_1, ..., K_n$ en X y abiertos $V_1, ... V_n$ en Y tales que $f \in \bigcap_{i=1}^n [K_i, V_i] \subset C(X,Y) \setminus F$. Para cada $i \in \{1, ..., n\}$, $f(K_i)$ es un compacto tal que $f(K_i) \cap (Y \setminus V_i) = \emptyset$. Por la proposición anterior, tenemos que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe una función continua $\varphi_i : Y \to [0,1]$ tal que $\varphi_i(f(K_i)) = \{0\}$ y $\varphi_i(Y \setminus V_i) = \{1\}$.

Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ se define

$$\psi_i : C(X,Y) \to [0,1]$$

como $\psi_i(g) = máx\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\}$.

Se tiene que:

(1) $\psi_i(f) = máx\{\varphi_i(y) : y \in f(K_i)\} = 0$ para todo $i \in \{1,...,n\}$

(2) Para todo $g \in C(X,Y) \setminus [K_i, V_i]$ y todo $i \in \{1,...,n\}$, $\psi_i(g) = 1$.

(3) ψ_i es continua para todo $i \in \{1,...,n\}$. En efecto, sea $i \in \{1,...,n\}$ y $g_0 \in C(X,Y)$. Como $g_0(K_i)$ es compacto, existe $y_0 \in g_0(K_i)$ tal que $\psi_i(g_0) = \varphi_i(y_0)$.

Sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad de φ_i en y_0 existe una vecindad abierta V que contiene a y_0 tal que $|\varphi_i(y) - \varphi_i(y_0)| < \epsilon$ para toda $y \in V$. Sea $x_0 \in K_i$ tal que $g_0(x_0) = y_0$. Consideremos el siguiente abierto en Y:

$$\begin{aligned} W &= \{y \in Y : \varphi_i(y) < \varphi(y_0) + \frac{\epsilon}{2}\} \\ &= \varphi_i^{-1}\left([0, \varphi_i(y_0) + \frac{\epsilon}{2}) \cap [0,1]\right) \end{aligned}$$

Para todo $x \in K_i$, $g_0(x) \in g_0(K_i)$ y por lo tanto, $\varphi_i(g_0(x)) \leq \varphi_i(y_0) < \varphi_i(y_0) + \frac{\epsilon}{2}$. Es decir $g_0(K_i) \subset W$.

Por ser α una red, existe $A \in \alpha$ tal que $x_0 \in A \subset g_0^{-1}(V)$. De esta forma $[A,V] \cap [K_i, W]$ es un abierto en $C_\alpha(X,Y)$ que contiene a g_0.

Para todo $g \in [A,V] \cap [K_i, W]$, $g(x_0) \in V$. Por lo tanto

$$\psi_i(g) = máx\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\} > \varphi_i(y_0) - \epsilon$$

Además, puesto que se tienen las siguientes relaciones

$$\psi_i(g) = máx\{\varphi_i(y) : y \in g(K_i)\} \leq \varphi_i(y_0) + \frac{\epsilon}{2} < \varphi_i(y_0) + \epsilon, y$$

entonces, para todo $g \in [A,V] \cap [K_i, W]$, se tiene que $|\psi_i(g) - \psi_i(g_0)| < \epsilon$. Por lo tanto ψ_i es continua en g_0. De esta forma la función

$$\psi : C_k(X,Y) \to [0,1]$$

definida por $\psi = máx\{\psi_1, ..., \psi_n\}$ es continua.

De (1) se deduce que $\psi(f) = 0$. Por otra parte, para todo $g \notin F$, existe $i \in \{1,...,n\}$ tal que $g \neq [K_i, V_i]$; por (2), $\psi(g) = 1$. Por lo tanto $C_\alpha(X,Y)$ es completamente regular, si Y lo es. ♯

Corolario 3.1.11. (a) $C_k(X,Y)$ es completamente regular si y sólo si Y es completamente regular.

(b) $C_p(X,Y)$ es completamente regular si y sólo si Y es completamente regular.

Corolario 3.1.12.

(a) $C_\alpha(X,Y)$ es Tychonoff si y sólo si Y es Tychonoff, donde α es una red compacta

(b) $C_k(X,Y)$ es Tychonoff si y sólo si Y es Tychonoff.

(c) $C_p(X,Y)$ es Tychonoff si y sólo si Y es Tychonoff.

Demostración. (a) Se obtiene de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.8.

(b) se obtiene de la parte (a).

(c) se obtiene de la parte (a). ♯

El siguiente es un ejemplo donde la normalidad no se cumple en los espacios de funciones continuas, con la topología compacto-abierta, a pesar de que los espacios X y Y sean normales. Necesitamos introducir la siguiente definición.

Definición 3.1.13. Sea X un espacio topológico. Se llama el *peso* de X (y se denotara por $w(X)$) al cardinal

$$\omega + min\{|\beta| : \beta \text{ es base de X}\}.$$

Sea $\mathfrak{m}$ un numero cardinal mayor o igual que $\aleph_0$, *el cubo de Tychonoff de peso* $\mathfrak{m}$ es el producto cartesiano $\Pi_{s\in S} I_s$ donde $I_s = I = [0,1]$ para cada $s \in S$ y $|S| = \mathfrak{m}$, es decir, al producto I^m

Denotamos por $\mathfrak{c}$ la cardinalidad del continuo. Consideremos el cubo de Tychonoff de peso $\mathfrak{c}$, i.e., $I^\mathfrak{c}$. Por el Teorema de Tychonoff $I^\mathfrak{c}$ es compacto, y por el Teorema 3.1.1 es Hausdorff. Con estos resultados tenemos que $I^\mathfrak{c}$ es normal.

Para demostrar que el espacio $C_k(I, I^\mathfrak{c})$ no es normal, usaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1.14. Sea S un conjunto tal que $|S| > \aleph_0$. Consideremos el conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ con la topología discreta. Sea $T = \mathbb{N}^S$ le damos la topología del producto de Tychonoff. Entonces T no es normal. La demostración se obtiene al mostrar que los conjuntos

$$A_1 = \{f \in \mathbb{N}^S : para\ n \neq 1,\ |f^{-1}(n)| \leq 1\}$$

$$A_2 = \{f \in \mathbb{N}^S : para\ n \neq 2,\ |f^{-1}(n)| \leq 1\}$$

son cerrados y disjuntos, pero no pueden existir abiertos disjuntos U, V en $\mathbb{N}^S$ tales que $A_1 \subset U$ y $A_2 \subset V$ (Véase demostración detallada en A.H. Stone [1948]).

Corolario. 3.1.15. Si un producto de espacios T_1 es normal, entonces, el conjunto de los factores que no son numerablemente compactos es a lo más numerable .

Demostración. Sea $X = \Pi_{a\in A}X_a$ un producto de espacios T_1 tal que X es normal. Supongamos que el conjunto $S = \{a \in A : X_a\ \textit{no es numerablemente compacto}\}$ es no numerable. Para cada $a \in S$ existe una copia cerrada y discreta de $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_a$ en X_a. Para cada $a \in A \setminus S$ tomemos $x_a \in X_a$. Sea $T = \Pi_{a\in A}Y_a$ en donde $Y_a = \mathbb{N}_a$ si $a \in S$ y $Y_a = x_a$ si $a \in A\setminus S$. Resulta entonces que T no es normal como se mostro en el Teorema 3.1.14 y es un subconjunto cerrado de X. Esto contradice la normalidad de X. Por lo tanto S es numerable. ♯

Observación 3.1.16. $C_k(I,I)$ no es numerablemente compacto. La prueba consiste en observar que el conjuto numerable de funciones $\{f_n(t) = t^n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene punto de acumulación en $C_k(I,I)$, ya que converge uniformemente a la función que vale 0 en el intervalo $[0,1)$ y toma el valor de 1 en el punto 1; y por el Teorema 1.2.6.(a) la topología compacto abierta coincide con la topología de la convergencia uniforme en el espacio compacto I.

Proposición 3.1.17 El espacio $C_k(I,I^{\mathfrak{c}})$ no es normal.

Demostración. Por el Teorema 2.4.4.(a), se tiene que $C_k(I,I^{\mathfrak{c}})$ es homeomorfo a $\Pi_{s\in S}C_k(I,I_s)$ donde $I_s = I$ para toda $s \in S$ y $|S| = \mathfrak{c}$. Pero este producto no es normal por la Observación 3.1.16 y el Corolario 3.1.12

Observación 3.1.18. También es cierto que $C_\mu(I,I^{\mathfrak{c}})$ no es normal, donde μ es la uniformidad producto en $I^{\mathfrak{c}}$, en donde I tiene la uniformidad asociada de la métrica usual. Esto se obtiene por los Teoremas 1.2.6.(a) y 2.4.4.(b). Usando los Teoremas 1.3.3 y 2.4.3.(c) también tenemos que el espacio $C_G(I, I^c)$ no es normal.

Observación 3.1.19. El espacio $C_p(I, I)$ no es numerablemente compacto, ya que el conjunto $\{f_n(t) = t^n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado y discreto en $C_p(I, I)$. Por lo tanto, usando el Teorema 2.4.4.(a) y el Corolario 3.1.12 $C_p(I, I^c)$ no es normal

3.2 Los Axiomas de Numerabilidad en $C_\alpha(X,Y)$

En esta sección veremos como el caracter y el peso de $C_\alpha(X,Y)$ se obtienen tanto de $|X|$ y $w(Y)$ como de otras propiedades topológicas de los espacios X y Y.

Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. El *caracter* de x se define como

$$\chi(x, X) = \omega + min\{|\beta| : \beta \text{ } es \text{ } base \text{ } local \text{ } de \text{ } x\}$$

y el *caracter* de X se define como

$$\chi(X) = sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Un espacio X es 1° *numerable* si $\chi(X) \leq \aleph_0$.

Un espacio X es 2° *numerable* si $w(X) \leq \aleph_0$.

Observacion 3.2.1. (a) La imagen continua y abierta de un espacio 1° (resp. 2°) numerable, es 1° (resp. 2°) numerable.

(b) Cualquier subespacio de un espacio 1° (resp. 2°) numerable es 1° (resp. 2°) numerable.

(c) Si $f : X \to Y$ es continua y abierta entonces $w(Y) \leq w(X)$ y para cada $y = f(x)$; $\chi(y, Y) \leq \chi(x, X)$. Además, si Y es un subconjunto de X y $y \in Y$ entonces $\chi(y, Y) \leq \chi(y, X)$ y $w(Y) \leq w(X)$.

Definimos el *soporte* de un conjunto $A \subset \Pi_{a\in J} X_a$ como $sop(A) = \{a \in J : \pi_a(A) \neq X_a\}$. También denotamos por $[J]^{<\omega}$ al conjunto $\{A \subset J : A \text{ } es \text{ } finito\}$.

Teorema 3.2.2. Sea $\mathcal{X} = \{(X_i, \tau_i) : i \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Sea (x_i) un elemento del espacio producto $\Pi_{i\in J}X_i$. Entonces

$$\chi((x_i), \Pi X_i) = |J| \cdot sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}$$

y

$$\chi(\Pi X_i) = |J| \cdot sup\{\chi(X_i) : i \in J\}.$$

Demostración. Como X_i es una imagen continua y abierta de ΠX_i entonces

$$\chi((x_i), \Pi X_i) \geq sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}.$$

Veamos que $\chi((x_i), \Pi X_i) \geq |J|$. Sea β una colección de abiertos canónicos de (x_i) y de cardinalidad $< |J|$. Vamos a demostrar que β no es una base local de (x_i). Para cada $B \in \beta$ consideremos su soporte, $sop(B)$, que es un subconjunto finito de J. Resulta que $|\bigcup\{sop(B) : b \in \beta\}| < |J|$. Sea $i_0 \in J \setminus \bigcup\{sop(B) : b \in \beta\}$ y sea $A \subset X_{i_0}$ un abierto que contiene a x_{i_0} y diferente de X_{i_0}. Resulta que $\pi_{i_0}^{-1}(A)$ es un abierto en ΠX_i que contiene a (x_i) y no contiene a ningún elemento de β. Por lo tanto β no es base local de (x_i) en ΠX_i; es decir

$$\chi((x_i), \Pi X_i) \geq |J|.$$

Con lo cual concluimos que

$$\begin{aligned} \chi((x_i), \Pi X_i) &\geq max\{|J|, sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}\} \\ &= |J| \cdot sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}. \end{aligned}$$

Demostraremos ahora que $\chi((x_i), \Pi X_i) \leq |J| \cdot sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}$.

Para cada $i \in J$ sea β_i una base local de x_i en X_i de cardinalidad $\leq \chi(x_i, X_i)$. Entonces la colección

$$\begin{aligned} \beta \;=\; &\{\pi_{i_1}^{-1}(B_1) \cap ... \cap \pi_{i_n}^{-1}(B_n) : \{i_1, ..., i_n\} \in [J]^{<\omega} \text{ } y \text{ } B_k \in \beta_{i_k} \\ &\textit{para todo } 1 \leq k \leq n\} \end{aligned}$$

es una base local de (x_i) en ΠX_i y tiene cardinalidad menor o igual que $|J| \cdot sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\}$.

La segunda afirmación se sigue usando las definiciones de caracter y la primera parte

$$\begin{aligned}
\chi(\Pi X_i) &= sup\{\chi((x_i),\Pi X_i) : (x_i) \in \Pi X_i\} \\
&= sup\{|J| \cdot sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\} : (x_i) \in \Pi X_i\} \\
&= |J| \cdot sup\{sup\{\chi(x_i, X_i) : i \in J\} : (x_i) \in \Pi X_i\} \\
&= |J| \cdot sup\{\chi(X_i) : i \in J\}. \qquad \sharp
\end{aligned}$$

Corolario 3.2.3. Sea $\mathcal{X} = \{(X_i, \tau_i) : i \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. El espacio producto ΠX_i es 1° numerable si y sólo si:
(a) Cada (X_i, τ_i) es 1° numerable
(b) $J' = \{i \in J : |\tau_i| \geq 3\}$ es numerable.

Corolario 3.2.4. Si $|Y| \geq 2$, entonces
(a) $\chi(Y^X) = |X| \cdot \chi(Y)$.
(b) $\chi(C_p(X,Y)) = |X| \cdot \chi(Y)$

Demostracion. (a) Se obtiene del homeomorfismo de los espacios Y^X y $\Pi\{\ Y_x : s \in X \ y \ Y_x = Y \ para \ toda \ x \in X\}$ y del Teorema 3.2.2.

(b) De la Observación 3.2.1.(c) se obtiene que $\chi(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot \chi(Y)$. Para demostrar que $\chi(C_p(X,Y) \geq |X| \cdot \chi(Y)$ se procede como en la primera parte de la demostración del Teorema 3.2.2. $\sharp$

Teorema 3.2.5. Sea $\mathcal{Y} = \{(Y_i, \tau_i) : i \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces el espacio producto $\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ cumple que

$$w(\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y) = |J| \cdot sup\{w(Y_i) : i \in J'\}.$$

Demostración. Se tiene que $w(\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y) \geq max\{w(Y_i) : i \in J\}$ por la Observacion 3.2.1.(c). La demostración de $w(\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y) \geq |J|$ es análoga a la demostración del Teorema 3.2.2, lo mismo la parte que $w(\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y) \leq |J| \cdot sup\{w(Y_i) : i \in J\}$. $\sharp$

Corolario 3.2.6. Sea $\mathcal{Y} = \{(Y_i, \tau_i) : i \in J\}$ una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos. Entonces el espacio producto $\Pi_{Y \in \mathcal{Y}} Y$ es 2° numerable si y sólo si:

(a) Cada elemento $Y \in \mathcal{Y}$ es 2° numerable
(b) $J' = \{i \in J : |\tau_i| \geq 3\}$ es numerable.

Corolario 3.2.7. Si $|Y| \geq 2$, entonces
(a) $w(Y^X) = |X| \cdot w(Y)$
(b) $w(C_p(X,Y)) = |X| \cdot w(Y)$
Demostración. (a) Es directa del Teorema 3.2.5

(b) La desigualdad $w(C_p(X,Y)) \leq |X| \cdot w(Y)$ se obtiene de la parte (a) y de la Observación 3.2.1.(c). La otra desigualdad $w(C_p(X,Y)) \geq |X| \cdot w(Y)$ se obtiene de manera semejante a la del Teorema 3.2.5. ♯

Una consecuencia directa de este Corolario es:

Corolario 3.2.8. (a) El espacio Y^X con la topología producto es 2° numerable si y sólo si X es numerable y Y es 2° numerable.

(b) $C_p(X,Y)$ es 2° numerable si y sólo si X es numerable y Y es 2° numerable.

Proposición 3.2.9. Sea X un espacio topológico localmente compacto y regular de peso m, y sea Y un espacio topológico de peso m'. Si al menos uno de los cardinales m o m' es infinito, entonces el peso de $C_k(X,Y)$ es menor o igual que $m \cdot m'$.

Demostración. Como el peso de X es m, existe una base $\beta = \{B_i : i \in I\}$ en X tal que $|\beta| = m$. De la misma forma, puesto que el peso de Y es m', existe una base $\beta' = \{B'_j : j \in J\}$ en Y tal que $|\beta'| = m'$.

Sea $\mathcal{C} = \{\overline{B}_i : B_i \in \beta \text{ y } \overline{B}_i \textit{ es compacto}\}$. Entonces, para todo compacto K en X y todo abierto U en X tal que $K \subset U$, por la regularidad y la compacidad local de X, se deduce que existen $\overline{B}_{i_1}, ..., \overline{B}_{i_n} \in \mathcal{C}$ tales que

$$K \subset \overline{B}_{i_1} \cup \cdots \cup \overline{B}_{i_n} \subset U.$$

Por lo tanto el conjunto

$$\mathcal{B} = \{[\overline{B}_i, B'_j] : \overline{B}_i \in \mathcal{C}, j \in J\}$$

es una subbase para la topología compacto-abierta (por el Teorema 1.1.9). Como $m \cdot m' \geq \aleph_0$ se tiene que el conjunto de las partes finitas de $\mathcal{B}$ es menor o igual que $m \cdot m'$. Así el peso de $C_k(X,Y)$ es menor o igual que $m \cdot m'$. $\sharp$

Corolario 3.2.10. Sea X un espacio topológico localmente compacto regular y 2° numerable, y sea Y un espacio 2° numerable. Entonces $C_k(X,Y)$ es 2° numerable.

Corolario 3.2.11. Sea X un espacio metrizable separable y sea Y un espacio metrizable. Entonces, $C_k(X,Y)$ es metrizable separable si y sólo si Y es separable.

Observación 3.2.12. La condición en la Proposición 3.2.9 de que al menos uno de los cardinales sea infinito es esencial. Esto se ve claramente si consideramos el espacio discreto X con m elementos y el espacio discreto Y con n (m y n finitos) elementos, el espacio $C_k(X,Y)$ es un espacio discreto 2° numerable con n^m elementos. por lo tanto si $n > 2$ y $m > 2$ el peso de $C_k(X,Y)$ es n^m, que es estrictamente mayor que $m \cdot n$.

Con el objeto de estudiar en la topología compacto-abierta el primer axioma de numerabilidad se introducen los espacios hemicompactos:

Un espacio topológico X es *hemicompacto* si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ donde K_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo compacto K de X, existén $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ tales que $K \subset K_{n_1} \cup \cdots \cup K_{n_r}$.

Proposición 3.2.13. Sea X un espacio topológico. Entonces:

(a). X es σ-compacto (i.e. X se puede representar como una unión contable de compactos) si X es hemicompacto.

(b). X es hemicompacto si X es localmente compacto y σ-compacto.

(c). Si X es localmente compacto y de Lindelöf (i.e. toda cubierta abierta tiene una subcubierta abierta contable), entonces X es hemicompacto.

(d). Sea X hemicompacto y 1° numerable. Si X es T_2 o regular, entonces X es localmente compacto.

Demostracion. (a) Es evidente.

(b) Como X es σ-compacto, existe una familia numerable de compactos en X, $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$,tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

Como K_1 es compacto y X es localmente compacto, existe un subconjunto V_1 compacto en X, tal que $K_1 \subset int(V_1)$.

Puesto que $V_1 \cup K_2$ es compacto y X es localmente compacto, existe un subconjunto compacto V_2 en X, tal que $V_1 \cup K_2 \subset int(V_2)$.

Procediendo por induccion, existe una familia numerable $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ de compactos en X, tal que $V_n \cup K_{n+1} \subset int(V_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} int(V_n)$, y para cualquier K, subconjunto compacto de X, existen $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset int(V_{n_1}) \cup \cdots \cup int(V_{n_r}) \subset V_{n_1} \cup \cdots \cup V_{n_r}.$$

Así X es hemicompacto.

(c) Es consecuencia de que todo espacio localmente compacto y de Lidelöf es σ-compacto.

(d) Por hipótesis, existe una familia numerable de compactos $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, y para cualquier K, compacto en X, $K \subset K_1 \cup \cdots \cup K_n$ para algún n.

Sin pérdida de generalidad suponemos que $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que X es T_2. Sea $x \in X$ y $V^x = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base del sistema de vecindades de x en X, tal que $V_{n+1} \subset V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{V}_n$ no es compacto. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $V_n \not\subset K_n$, y, por lo tanto existe $x_n \in V_n \setminus K_n$, Así $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge a x en X, y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset K_{n_0}$, lo cual es absurdo. Así, en todo punto de X existe una vecindad compacta, por lo tanto X es localmente compacto.

Si X es regular, para $x \in X$ se toma una base de vecindades $W_x = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ de x, en X, tal que $W_{n+1} \subset W_n$ y W_n es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, W_n no es compacto. Entonces $W_n \not\subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto, existe $y_n \in W_n \setminus K_n$. Así $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en X, y $\{x\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ es compacto. Luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x\} \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset K_{n_0}$$

lo cual es absurdo. Luego X es localmente compacto. ♯

Observación 3.2.14. Los racionales $\mathbb{Q}$ es σ-compacto, 1° numerable, T_2, y, por lo tanto, no es hemicompacto, ya que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

Observación 3.2.15. Si X es 2° numerable, T_2 o regular, entonces X es localmente compacto si y sólamente si X es hemicompacto.

Teorema 3.2.16. Sea X un espacio topológico Tychonoff. Entonces:

(a) Si $C_k(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable, entonces X es hemicompacto

(b) Si $C_k(X,\mathbb{R})$ y X son 1° numerables, entonces X es localmente compacto.

Demostración. Sea c_0 la función continua de X en $\mathbb{R}$ definida por $c_0(x)=0$ para toda $x\in X$.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{V}_{c_0}=\{[K,(-\epsilon,\epsilon)]: K \text{ es compacto en X, } \epsilon>0\}.$$

Afirmamos que este conjunto es un sistema básico de vecindades de c_0 en $C_k(X,\mathbb{R})$. En efecto:

Para toda vecindad V^{c_0} de c_0, se tiene que existen $K_1,\ldots,K_n$ compactos en X y $U_1,\ldots,U_n$ abiertos en $\mathbb{R}$ tales que

$$c_0\in\bigcap_{i=1}^{n}[K_i,U_i]\subset V^{c_0}$$

Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, se tiene que $c_0(K_i)\subset U_i$ y, por tanto, existe $\epsilon>0$ tal que $(-\epsilon,\epsilon)\subset U_1\cap\cdots\cap U_n$. Así

$$c_0\in[K_1\cup\cdots\cup K_n,(-\epsilon,\epsilon)]\subset\bigcap_{i=1}^{n}[K_i,U_i]\subset V^{c_0}.$$

Como $C_k(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable, existe una base del sistema de vecindades de c_0 en $C_k(X,\mathbb{R})$, $\mathcal{W}^{c_0}$, de la forma:

$$\mathcal{W}^{c_0}=\{[K_n,(-\epsilon_n,\epsilon_n)]: K_n \text{ compacto en X, } \epsilon_n>0 \text{ n}\in\mathbb{N}\}.$$

Vamos a demostrar que la colección $\{K_n : n\in\mathbb{N}\}$ satisface la condición de hemicompacidad para X. Sea K un subconjunto compacto de X. Entonces $[K,(-1,1)]$ es una vecindad abierta de c_0 en $C_k(X,\mathbb{R})$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$c_0 \in [K_{n_0},(-\epsilon_{n_0},\epsilon_{n_0})] \subset [K,(-1,1)].$$

Esto implica que $(-\epsilon_{n_0},\epsilon_{n_0}) \subset (-1,1)$ y $K \subset K_{n_0}$, ya que si $r \in (-\epsilon_{n_0},\epsilon_{n_0})$, la función constante c_r de valor r, es un elemento de $[K_{n_0},(-\epsilon_{n_0},\epsilon_{n_0})]$ y por lo tanto $r \in (-1,1)$.

Supongase que existe $x \in K \setminus K_{n_0}$. Como K_{n_0} es cerrado en X y X es Tychonoff, existe una función continua f de X en $[0,1]$ tal que $f(K_{n_0}) = \{0\}$ y $f(x) = 1$. Entonces,

$$f \in [K_{n_0},(-\epsilon_{n_0},\epsilon_{n_0})] \ y \ f \notin [K,(-1,1)]$$

lo cual es absurdo. Así, $K \subset K_{n_0}$. Como los puntos de X son compactos, el mismo razonamiento prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$. Luego X es un espacio hemicompacto.

(b). Se sigue de (a) y del inciso (d) de la proposición anterior.

♯

Observación 3.2.17.(a) Las conclusiones de la proposición anterior son válidas si se sustituye "X es un espacio Tychonoff " por " $C(X,\mathbb{R})$ separa puntos ". Ya que con esta última hipótesis se demuestra fácilmente que dados un compacto K en X y $x \in X \setminus K$ existe una función continua de X en $[0,1]$ tal que $f(K) = \{0\}$ y $f(x) = 1$.

Observación 3.2.17.(b) Sea X un espacio Tychonoff, y (Y,d) un espacio métrico con una trayectoria no trivial. Si $C_k(X,Y)$ es 1° numerable, entonces X es hemicompacto. La demostración se obtiene cambiando en la demostración anterior la función constante $\bar{c}_0(x) = p(0)$ donde $p(0)$ es la evaluación de la trayectoria no trivial p, de Y en el punto 0. También cambiamos las vecindades de $\bar{c}_0$ a la forma $[K_n, B_{\epsilon_n}(p(0))]$ donde $B_{\epsilon_n}(p(0))$ es la bola en Y con centro en $p(0)$ y radio $\epsilon_n > 0$. Para $r = d(p(0),p(1))$ se demuestra como antes que si $K \subset X$ es compacto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[K_{n_0}, B_{\epsilon_{n_0}}(p(0))] \subset [K, B_r(p(0))]$ de lo cual se obtiene $K \subset K_{n_0}$, i.e., X es hemicompacto.

Proposición 3.2.18. Sea X un espacio topológico metrizable, tal que $C_k(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable. Entonces:

(a) X es localmente compacto y 2° numerable.

(b) $C_k(X,\mathbb{R})$ es 2° numerable.

Demostración. (a) Como $C_k(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable, entonces X es hemicompacto (ver Teorema 3.2.16.(a)). Y como X es metrizable entonces X es localmente compacto por el Teorema 3.2.13.(d).

Por ser X hemicompacto y metrizable entonces es Lindelöf, por lo tanto es 2° numerable.

(b) Es consecuencia de (a) y del Corolario 3.2.10. $\sharp$

Corolario 3.2.19. Sea X un espacio topológico metrizable localmente compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a). $C_k(X,\mathbb{R})$ es 2° numerable.

(b). X es 2° numerable.

Capítulo 4

METRIZACIÓN DE $C_\alpha(X, Y)$

En este capítulo, excepto donde esté indicado explicitamente, α será siempre una red compacta y hereditariamente cerrada (no hay perdida de generalidad si además suponemos que α es cerrada bajo uniones finitas).

Recordemos algunas implicaciones de la metrización de espacios topológicos (las demostraciones se pueden encontrar en los libros calsicos citados en la bibliografía):

(1) La metrizabilidad es un invariante topológico

(2) Todo subespacio de un espacio metrizable es un espacio metrizable.

(3) Todo espacio métrico es perfectamente normal.

(4) Todo espacio métrico es paracompacto.

(5) Todo espacio métrico es 1° numerable.

(6) En espacios métricos los conceptos de 2° numerable, separable y Lindelöf son equivalentes.

Teorema (J. Nagata y Yu. M. Smirnov) Un espacio topológico es metrizable si y sólo si es regular y tiene una base que puede ser descompuesta en una colección a lo más numerable de familias localmente finitas.

Corolario (Teorema de P. Urysohn) En espacios 2° numerables la regularidad es equivalente a la metrizabilidad.

4.1 Metrización de $C_\alpha(X,\mathbb{R})$

Usando la estructura algebraica que tiene el espacio $C_\alpha(X,\mathbb{R})$, la metrizabilidad de este espacio es equivalente a otras propiedades que en general son más débiles. La metrizabilidad de $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ también esta relacionada con cierto número asociado a la red α.

Observación 4.1.1. Si X es un espacio compacto, y (Y,d) es un espacio métrico, entonces exíste una manera obvia de metrizar el espacio $C_k(X,Y)$: para $f,g \in C(X,Y)$ definimos la distancia de f a g por $max\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}$. Si el espacio X no es compacto podemos usar la misma construcción, primero dando a Y una métrica equivalente y acotada. Pero en general esta topología no es la compacto-abierta (o una topología conjunto-abierta).

Decimos que un espacio Z es un espacio *homogéneo* si cumple que para cualesquiera $x,y \in Z$ existe un homeomorfismo de Z en Z que manda a x en y. Como el espacio $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es un espacio vectorial topológico. En particualar, se tiene que $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es un espacio homogeneo.

Una α-cubierta de un espacio X es una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X tal que cada miembro de α está contenido en algún miembro de $\mathcal{U}$. El número α-Arens de X es definido por

$$\alpha a(X) = \omega + min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \alpha \ y \ \mathcal{U} \ es \ una \ \alpha - cubierta \ de \ X\}.$$

Definimos el *pseudocaracter* de un espacio X por

$$\psi(X) = sup\{\psi(X,x) : x \in X\}$$

donde

$$\begin{aligned}\psi(X,x) &= \omega + min\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G} \ es \ una \ familia \ de \\ &\quad conjuntos \ abiertos \ de \ X \ con \ \bigcap \mathcal{G} = \{x\}\}.\end{aligned}$$

Y definimos el *número débil α-cubriente* de X por

$$w\alpha c(X) = \omega + min\{|\beta| : \beta \subset \alpha \ y \ \bigcup \beta \ es \ denso \ en \ X\}.$$

Teorema 4.1.2. Para cada X y cada α, $\psi(C_\alpha(X,\mathbb{R})) = w\alpha c(X)$.

Demostración. Si f_0 es la función constante con valor 0, entonces $\{f_0\} = \bigcap\{[A_s, V_s] : s \in S\}$ para algún conjunto S con $|S| = \psi(C_\alpha(X,\mathbb{R}))$, y con $A_s \in \alpha$ y $V_s \subset \mathbb{R}$ abierto, para cada $s \in S$. Observe que $0 \in V_s$ para toda $s \in S$. Definamos $\beta = \{A_s : s \in S\}$, y supongamos que existe $x \in X \setminus \overline{\bigcup\beta}$. Cosinderemos $f \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $f(x) = 1$ y $f(\overline{\bigcup\beta}) = \{0\}$. Pero entonces cada $[A_s, V_s]$ contiene a f, así que $f = f_0$; lo cual es imposible ya que $f(x) = 1$. Por lo tanto $\overline{\bigcup\beta} = X$, y de aqui $w\alpha c(X) \leq \psi(C_\alpha(X,\mathbb{R}))$.

Para demostrar la desigualdad inversa, tomemos $\beta \subset \alpha$ tal que $\overline{\bigcup\beta} = X$ y $|\beta| = w\alpha c(X)$. Si $Y = \Sigma\{A : A \in \beta\}$ es la suma topológica libre de la familia β, y $p : Y \to X$ es la función natural ($p(y) = y$), entonces p es continua y casi suprayectiva. Por lo tanto la función inducida $p^* : C_\alpha(X,\mathbb{R}) \to C_\alpha(Y,\mathbb{R})$ es una inyección continua (véase Teorema 2.2.6.(a)). De lo cual se sigue que $\psi(C_\alpha(X,\mathbb{R})) \leq \psi(C_\alpha(Y,\mathbb{R})) = \psi(\Pi\{C_\alpha(A,\mathbb{R}) : A \in \beta\})$. Resulta que $\psi(\Pi\{C_\alpha(A,\mathbb{R}) : A \in \beta\}) = |\beta| \cdot sup\{\psi(C_\alpha(A,\mathbb{R})) : A \in \beta\}$. Pero $C_\alpha(A,\mathbb{R}) = C_k(A,\mathbb{R})$ porque α es hereditariamente cerrada, $A \in \alpha$ y A es compacto (véase el Teorema 1.1.5). Además, $C_k(A,\mathbb{R}) = C_\mu(A,\mathbb{R})$ por el Teorema 1.2.6.(a). Por lo tanto $C_\alpha(A,\mathbb{R})$ es 1° numerable (Vease apéndice Toerema A.1.15). Por lo tanto

$$\psi(C_\alpha(X,\mathbb{R})) \leq \psi(\Pi\{C_\alpha(A,\mathbb{R}) : A \in \beta\}) = |\beta| \cdot \omega \leq w\alpha c(X). \quad \sharp$$

El siguiente teorema establece algunas de las propiedades que son equivalentes a la metrizabilidad de $C_\alpha(X,\mathbb{R})$. Una de estas propiedades es la de ser un *q-espacio*. Este es un espacio tal que para cada punto de él existe una sucesión $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades del punto tal que si $x_n \in U_n$ para cada n entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene un punto de acumulación.

Teorema 4.1.3. Son equivalentes.

(a) $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es metrizable,

(b) $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable,

(c) $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es un q-espacio,

(d) $\alpha a(X) = \omega$.

Demostración. El caso (a) implica (b) es directo de las definiciones, lo mismo la implicación de (b) a (c).

Veamos que (c) implica (d). Sea $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ un q-espacio. Entonces la función cero, f_0, tiene una sucesión $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades básicas $B_n = \bigcap_{i=1}^{k_n}[A_i^n, V_i^n]$ de f_0 que satisface la definición de q-espacio en f_0. Sea $A = \{A_i^n : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq k_n\}$, veamos que $\bigcup A$ es una cubierta de X. Supongamos que existe un $x \in X \setminus \bigcup A$. Entonces para cada n, existe un $g_n \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $g_n(\bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^n) = \{0\}$ y $g_n(x) = n$. Así cada $g_n \in B_n$, mientras que el conjunto $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene punto de acumulación en $C_\alpha(X,\mathbb{R})$. Con esta contradicción se sigue que $X = A$, así que $\psi(C_\alpha(X,\mathbb{R})) = \omega$ por el Teorema 4.1.2. Por esto no hay perdida de generalidad en suponer que $\bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\} = \{f_0\}$

Para mostrar que A es una α-cubierta de X, supongamos lo contrario, esto es, existe $C \in \alpha$ tal que C no está contenida en A_i^n para todo $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{1,...,k_n\}$. Sea $x_i^n \in C \setminus A_i^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $i \in \{1,...,k_n\}$. Consideremos $g_i^n \in C(X,\mathbb{R})$ tal que $g_i^n(A_i^n) = \{0\}$ y $g_i^n(x_i^n) = n$. Tenemos que cada $g_i^n \in B_n$. Pero esto significa que no tiene punto de acumulación $\{g_i^n : i \in \{i,...k_n\}, n \in \mathbb{N}\}$. Con esta contradicción se sigue que A es una α-cubierta de X y que $\alpha a(X) = \omega$ como se quería demostrar.

Veamos finalmente que (d) implica (a). Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \alpha$ una α-cubierta de X. Para mostrar que $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es metrizable basta con encajarlo en un espacio metrizable. Para esto consideremos el espacio $Y = \Sigma_{n\in\mathbb{N}}A_n$, y sea $p : Y \to X$ la proyección natural. Entonces $p^* : C_\alpha(X,\mathbb{R}) \to C_\alpha(Y,\mathbb{R})$ es un encaje por el Teorema 2.2.7.(c). Como cada $C_\alpha(A_n,\mathbb{R})$ es metrizable (ver Teoremas 1.1.5, 1.2.6.(a) y 4.3.4) y $C_\alpha(Y,\mathbb{R})$ es homeomorfo a $\Pi\{C_\alpha(A_n,\mathbb{R}) : n \in \mathbb{N}\}$ (por el Teorema 2.4.7), entonces $C_\alpha(Y,\mathbb{R})$ es metrizable. ♯

4.2 Metrización de $C_k(X,\mathbb{R})$

En el caso particular en que la red α este formada por todos los compactos, podemos obtener algunos resultados adicionales.

Si G es una familia de conjuntos abiertos en X, $A \subset X$ y para toda vecindad V del conjunto A, existe un conjunto $U \in G$ tal que $A \subset U \subset V$ y si también $A \subset \bigcap G$, entonces G es llamada una *base de* A. El cardinal mínimo de tales familias G es llamado el *caracter de* A *en* X, y es denotado por $\chi(A,X)$.

Un espacio es de *tipo punto contable* si cada punto está contenido en un conjunto compacto que tiene caracter numerable en X. Una propiedad más fuerte que ser q-espacio, es ser un $M-espacio$, esto es un espacio que se mapea en un espacio métrico por una función casi-perfecta (es decir existe una función continua, cerrada y tal que la imagen inversa de cada punto es contablemente compacta).

El siguiente teorema establece algunas de las propiedades que son equivalentes a la metrizabilidad de $C_k(X,\mathbb{R})$

Teorema 4.2.1. Son equivalentes
(a) $C_k(X,\mathbb{R})$ es metrizable
(b) $C_k(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable
(c) $C_k(X,\mathbb{R})$ es de tipo punto contable
(d) $C_k(X,\mathbb{R})$ tiene un subespacio denso de tipo punto contable
(e) $C_k(X,\mathbb{R})$ es un M-espacio
(f) $C_k(X,\mathbb{R})$ es un q-espacio
(g) X es hemicompacto

Demostracion. Las implicaciones (a) $\to$(b) $\to$ (c) $\to$(f), (a) $\to$(e) $\to$ (f) y (c) $\to$(d) son inmediatos de las definiciones. Usando el Teorema 4.1.3 obtenemos (f) $\to$(g) y (g) $\to$(a). Por lo tanto para completar la demostración solo falta probar (d) $\to$ (c):

(d) $\to$ (c). Como el espacio $C_k(X,\mathbb{R})$ es homogéneo, suficiente con mostrar que para una función fija se cumple la condición de ser tipo punto contable. Al considerar Z un subespacio denso de $C_k(X,\mathbb{R})$ que cumpla la condición de ser tipo punto contable en Z, tenemos que Z contiene un compacto K con una base numerable $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ en Z; veamos que K también tiene una base numerable en $C_k(X,\mathbb{R})$.

Cada U_n puede ser extendido a un abierto W_n en $C_k(X,\mathbb{R})$. Sea W una vecindad abierta de K en $C_k(X,\mathbb{R})$. Entonces existe un abierto V en $C_k(X,\mathbb{R})$ que contiene a K y cuya cerradura, $\overline{V}$, en $C_k(X,\mathbb{R})$ esta contenida en W (por el Corolario 3.1.7). Pero por otro lado, existe un U_n tal que $U_n \subset V \cap Z$. Pero entonces $\overline{W_n} = \overline{W_n \cap Z} = \overline{U_n} \subseteq \overline{V \cap Z} = \overline{V} \subset W$. Con esto se tiene que $W_n \subset \overline{V} \subset W$. ♯

4.3 Metrización de $C_k(X,Y)$

Recordemos que un conjunto parcialmente ordenado $(\Delta, \leq)$ es *dirigido* si para cada par de puntos $a, b \in \Delta$, existe $c \in \Delta$ tal que $c \leq a$ y $c \leq b$. Una *red de puntos* (con respecto a Δ) en un espacio topológico X es una función $s : \Delta \to X$. Es usual escribir a la red de puntos s como $(x_d)_{d\in\Delta}$ en donde $x_d = s(d)$.

Teorema 4.3.1. Sea X un espacio topológico hemicompacto regular o T_2, y sea Y un espacio topológico seudometrizable (metrizable). Entonces $C_k(X,Y)$ es seudometrizable (metrizable).

Demostración. Como X es hemicompacto, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos en X, tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$, $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y para todo compacto K en X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $K \subset K_{n_0}$.

Sea d una seudométrica (métrica)en Y tal que τ_d coincide con la topología de Y.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y todo $f, g \in C(X,Y)$ se define

$$d_n(f,g) = mín\{\frac{1}{2^n}, sup\{d(f(x), g(x)) : x \in K_n\}\}$$

$$d^*(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(f,g).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} d_n(f,g)$ es convergente por ser una serie de numeros reales no negativos menor que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Además,

$$d^*(f,g) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Es facil probar que d^* es una seudométrica (métrica) en $C(X,Y)$ acotada por 1.

Veamos que la topología asociada a esta seudométrica es la misma que la topología compacto-abierta. Es suficiente probar que si

$$S = \{f_t : t \in (D, \leq)\}$$

es una red de puntos en $C(X,Y)$ y $f \in C(X,Y)$, se verifica que S converge a f en $C_k(X,Y)$ si, y solamente si S converge a f en $C(X,Y)$ con la topología asociada por la seudométrica d^*.

(1) Supongamos que S converge a f en $C_k(X,Y)$. Sea $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Por lo tanto, existe $t_0 \in D$ tal que para todo $t \in D$ con $t \geq t_0$ y todo $y \in K_n$, se verifica que

$$d(f_t(y), f(y)) < \frac{1}{n}\left(\epsilon - \frac{1}{2^n}\right).$$

Para todo $t \geq d_0$,

$$d^*(f_t, f) = \sum_{i=1}^{n} d_i(f_t, f) + \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i(f_t, f) < n \cdot \frac{1}{n}\left(\epsilon - \frac{1}{2^n}\right) +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon.$$

Así S converge a f en $C(X,Y)$ con la topología asociada a por la métrica.

(2) Supongamos que S converge a f en $C(X,Y)$ con la topología asociada a la métrica. Sea K un compacto en X y $\epsilon > 0$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$ y $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.

Como S converge a f, existe $t_0 \in D$ tal que para todo $t \geq t_0$,

$$d^*(f_t, f) < \frac{1}{2^n}.$$

Entonces, para todo $t \geq t_0$,

$$d_n(f_t, f) \leq d^*(f_t, f) < \frac{1}{2^n}.$$

Por tanto,

$$d_n(f_t, f) = sup\{d(f_t(y), f(y)) : y \in K_n\} < \frac{1}{2}.$$

Luego para todo $t \geq t_0$ y todo $y \in K$,

$$d(f_t(y), f(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Con lo cual concluimos que, S converge a f en $C_k(X,Y)$. ♯

Proposición 4.3.2. Sea X un espacio Tychonoff y sea Y un espacio metrizable con una trayectoria no trivial, entonces $C_k(X,Y)$ es metrizable si y sólo si X es hemicompacto y Y es metrizable.

Demostración. Suficiencia: Es el Teorema 4.3.1.

Necesidad: Por el Teorema 2.1.1 Y es homeomorfo a un subespacio de $C_k(X,Y)$. Por lo tanto Y es metrizable. La hemicompacidad de X se obtiene de la Observación 3.2.17.(b). ♯

Proposición 4.3.3. Sea X un espacio localmente compacto, regular y 2° numerable, y sea Y un espacio métrico 2° numerable. Entonces, $C_k(X,Y)$ es metrizable.

Demostración. Usando el Corolario 3.2.9 obtenemos que $C_k(X,Y)$ es 2° numerable y por el Teorema 3.1.4, $C_k(X,Y)$ es regular; así pues, del Teorema de Urysohn, $C_k(X,Y)$ es metrizable. ♯

Terminamos esta sección obteniendo condiciones necesarias y suficientes que garantizan la metrizabilidad de $C_\mu(X,Y)$.

Proposicion 4.3.4. Sea μ una uniformidad en Y. El espacio $C_\mu(X,Y)$ es metrizable si y sólo si Y es metrizable.

Demostracion. Necesidad: Y es homeomorfo a un subespacio de $C_\mu(X,Y)$, por el Teorema 2.1.1.(b). Por lo tanto Y es metrizable si $C_\mu(X,Y)$ lo es.

Suficiencia: Por ser Y metrizable entonces $w(\mu) = \aleph_0$, (véase en el apéndice A.1.15) por lo tanto el peso de la uniformidad de $C_\mu(X,Y)$ es $\aleph_0$, lo cual implica que $C_\mu(X,Y)$ es metrizable (ver apéndice). ♯

4.4 Metrización de $C_G(X,\mathbb{R})$

Teorema 4.4.1 Sea X un espacio Tychonoff y μ la uniformidad generada por la métrica usual de $\mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $C_G(X,\mathbb{R})$ es metrizable.

(b) $C_G(X,\mathbb{R}) = C_\mu(X,\mathbb{R})$.

(c) $C_G(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable.

(d) X es numerablemente compacto.

Demostración. Las implicaciones (b) $\to$ (a) y (a) $\to$ (c) son directas de las definiciones. Sólo faltan los casos (c) $\to$ (d) y (d) $\to$ (b).

(c) $\to$ (d). Supongamos que X no es numerablemente compacto. Entonces existe $S = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset X$ cerrado y discreto. Sea $f \in C(X,\mathbb{R})$ y $\beta = \{F_{U_n} : n \in \mathbb{N}\}$ una base local de f en $C_G(X,\mathbb{R})$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $\Gamma_f \subset U_i$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existen abiertos $A_{x_i} \subset X$ y $B_{x_i} = B_{r_i}(f(x_i)) \subset \mathbb{R}$ (donde $B_{r_i}(f(x_i))$ es la bola en $\mathbb{R}$ con centro $f(x_i)$ y radio r_i) tales que

$$(x_i, f(x_i)) \in A_{x_i} \times B_{r_i}(f(x_i)) \subset U_i.$$

Sea $U = X \times \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\} \times (\mathbb{R} \setminus B_{\frac{r_i}{2}}(f(x_i)))\right)$. U es un abierto en $X \times \mathbb{R}$ y $f \in F_U$. Afirmamos que $F_{U_i} \not\subset F_U$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos definir $g_i : X \to [0, \frac{2r_i}{3}]$ tal que $g_i(X \setminus A_{x_i}) = \{0\}$ y $g_i(x_i) = \frac{2r_i}{3}$. Así pues $f + g_i \in C(X,\mathbb{R})$ y cumple que $\Gamma_{f+g_i} \subset U_i$, i.e., $f + g_i \in F_{U_i}$, pero $f + g_i \notin F_U$. Lo cual contradice que $C_G(X,\mathbb{R})$ es 1° numerable.

(d) $\to$ (b). De las definiciones de topología gráfica y de topología generada por la uniformidad μ tenemos que $C_\mu(X,\mathbb{R}) \preceq C_G(X,\mathbb{R})$ (véase el Teorema 1.3.5). Sólo falta demostrar la otra contención. Para esto es suficiente con ver que para una $f \in C(X,\mathbb{R})$, el conjunto $\beta = \{B_\rho(f, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base local de f en el espacio $C_G(X,\mathbb{R})$. Supongamos que existe $U \subset X \times \mathbb{R}$ abierto, tal que $f \in F_U$ y $B_\rho(f, \frac{1}{n}) \not\subset F_U$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in B_\rho(f, \frac{1}{n})$ tal que $g_n \notin F_U$, i.e., existe $x_n \in X$ tal que $(x_n, g_n(x_n)) \notin U$ y $|g_n(x_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$.

Como X es numerablemente compacto y $\mathbb{R}$ es 2° numerable entonces $f(X)$ es compacto, por lo tanto es acotado. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| < m$ para toda $x \in X$. Por lo tanto el conjunto $S = \{s_n = g_n(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está contenido en el intervalo $[-m-1, m+1]$. De lo cual se tiene que existe una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ tal que la subsucesión (s_{n_k}) de S converge a un punto $r \in [-m-1, m+1]$.

La sucesión (s_{n_k}) tiene un punto de acumulación, por ser X un espacio numerablemente compacto. Sin perdida de generalidad supongamos que elegimos esta sucesión como una subsucesion convergente a un punto $x \in X$. Veamos que $f(x) = r$.

Sea $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{1}{2^{n_k}} < \frac{\epsilon}{3}$ si $n_k > n_0$. Tenemos que

$$|r - f(x)| \leq |r - r_{n_k}| + |r_{n_k} - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Por lo tanto $r = f(x)$. Pero este hecho contradice la forma en que se eligieron los (x_n, r_n), ya que, por ser U un abierto en $X \times \mathbb{R}$, existen abiertos $A_x \subset X$ y $B_r \subset \mathbb{R}$ tales que

$$(x, r) \in A_x \times B_x \subset U.$$

Así tenemos que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_i, g_i(x_i)) \in A_x \times B_r \subset U$. Por lo tanto es falso el supuesto que el conjunto β no es una base, i.e., β es una base para $C_G(X, \mathbb{R})$. ♯

Capítulo 5

COMPLETEZ DE $C(X,Y)$

Los espacios de funciones que hemos analizado en este trabajo son espacios Tychonoff (véase el Corolario 3.1.12). Con respecto a la topología de la convergencia uniforme, el espacio $C(X,\mathbb{R})$ es siempre completo (este es una resultado básico de Análisis Funcional). La siguiente pregunta surge naturalmente: ¿Cuando el espacio $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ posee una uniformidad compatible completa ?.

Un concepto más general que la completez métrica es el siguiente

Definición. Un espacio Tychonoff X que es un subconjunto G_δ (i.e. se puede escribir como una intersección numerable de abiertos) en βX (compactificacion de Stone-Čech), es llamado un espacio *Čech-completo.*

Para espacio métricos, la Čech completez es equivalente a la metrizabilidad por una metrica completa. Veremos en este capítulo cuándo el espacio $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es Čech completo.

En este capítulo sólo consideraremos espacios Tychonoff X y redes α en X hereditariamente cerradas y compactas.

5.1 Completez Uniforme

Un espacio X es un $\alpha_{\mathbb{R}}$-*espacio* si para cualquier función f definida en X y con valores reales, se cumple que: f es continua si y sólo si $f|_A$ es continua para cada $A \in \alpha$. Si α es la familia de los subconjuntos compactos de X, entonces un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio es llamado un $k_{\mathbb{R}}$-espacio; y si α es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de X, entonces X es un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio si y sólo si X es un espacio discreto.

Del Teorema 1.2.4, se tiene que $C_{\alpha\mu}(X,\mathbb{R}) = C_\alpha(X,\mathbb{R})$ (μ es la uniformidad usual en $\mathbb{R}$). Por lo tanto la topología en $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ esta definida por la uniformidad $\mathcal{U}_{\alpha,\mu}$.

Teorema 5.1.1. El espacio uniforme $(C_\alpha(X,\mathbb{R}),\mathcal{U}_{\alpha,\mu})$ es completo si y sólo si X es un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio.

Demostración. Supongamos que $(C_\alpha(X,\mathbb{R}),\mathcal{U}_{\alpha,\mu})$ es completo, sea $f \in \mathbb{R}^X$ tal que $f|_A$ es continua para cada $A \in \alpha$. Sea $f_A \in C(X,\mathbb{R})$ una extension de $f|_A$ para cada $A \in \alpha$. Entonces la red de puntos $(f_A)_{A\in\alpha}$ es de Cauchy; en efecto, consideremos el orden parcial en α definido por la contención, i.e., $A \geq B$ sii $A \supseteq B$; si $M[B] \in \mathcal{U}_{\alpha,\mu}$, se tiene que para cualesquiera $D, E \in \alpha$ tales que $D, E \geq B$, $f_D(x) = f_E(x) = f(x)$ para todo $x \in B$, por lo tanto $(f_D, f_E) \in M[B]$. Ahora bien, por hipótesis, $(f_A)_{A\in\alpha}$ converge a una función $g \in (C_\alpha(X,\mathbb{R}),\mathcal{U}_{\alpha,\mu})$. Demostrar que $g = f$ se obtiene del hecho de que α es una red, y de que f y g coinciden en los elementos de α.

Inversamente sea X un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio, y sea (f_i) una red de Cauchy en $C(X,\mathbb{R})$. Si $A \in \alpha$, entonces la red $(f_i|_A)$ es de Cauchy en $C_\alpha(A,\mathbb{R}) = C_k(A,\mathbb{R})$. Ya que $C_k(A,\mathbb{R})$ es un espacio metrico completo, entonces $(f_i|_A)$ converge a alguna $f|_A \in C_k(A,\mathbb{R})$. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = f_A(x)$ si $x \in A$. Entonces f está bien definida y $f|_A = f_A$ para cada $A \in \alpha$. Como X es un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio f es continua en todo X. Claramente (f_i) converge a f. ♯

Corolario 5.1.2. Sea X un espacio topológico.

(a) $C_k(X,\mathbb{R})$ es uniformemente completo si y sólo si X es un $k_{\mathbb{R}}$-espacio

(b) $C_p(X,\mathbb{R})$ es uniformemente completo si y sólo si X es discreto.

La demostración del siguiente corolario es directa del Teorema 5.1.1.

Corolario 5.1.3. $(C_\mu(X,\mathbb{R}),\mathcal{U}_\mu)$ es completo.

5.2 Čech-completez y metrizabilidad completa.

Las demostraciones de los siguientes tres proposiciones pueden encontrarse en el libro [Eng]

Proposición 5.2.1. Todo espacio Čech-completo es un k-espacio.

Proposición 5.2.2. La propiedad de ser Čech-completo es hereditaria con respecto a subconjuntos cerrados y subconjuntos G_δ.

Proposición 5.2.3. Todo espacio completamente metrizable es Čech-completo e inversamente todo espacio Čech-completo metrizable es completamente metrizable.

Proposición 5.2.4. Si Y es Čech-completo, entonces es un q-espacio.

Teorema 5.2.5. Son equivalentes:
(a) $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es Čech-completo.
(b) $C_\alpha(X,\mathbb{R})$ es completamente metrizable.
(c) $\alpha a(X)=\omega$ y X es un $\alpha_{\mathbf{R}}$-espacio.

Demostracion. (a) $\rightarrow$ (b) es consecuencia de la Proposición 5.2.4, el Teorema 4.1.3 y la Proposición 5.2.3. (b) $\rightarrow$ (a) resulta de la Proposición 5.2.3. La implicacion de (b) $\rightarrow$ (c) se sigue de los Teoremas 4.1.3 y 5.1.1.

Sólo nos falta probar que (c) implica (b). Sea X un $\alpha_{\mathbf{R}}$-espacio tal que $\alpha a(X)=\omega$. Sea $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\alpha$ una α-cubierta para X, donde $A_n\subset A_{n+1}$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Lo primero que vamos a demostrar es que un subcojunto S de X es cerrado si y sólo si $S\cap A_n$ es cerrado en A_n para cada n. Sea S un subconjunto de X tal que $S\cap A_n$ es cerrado para cada n. Supongamos (por contradicción), que S no es cerrado. Entonces

S tiene un punto de acumulación x que no está en S. Como x pertenece a algún A_n, no hay perdida de generalidad si suponemos que $x \in A_1$. Existe una función continua $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(S \cap A_1) = \{0\}$ y $f_1(x) = 1$. f_1 puede ser extendida a una función continua $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_2(S \cap A_2) = \{0\}$, y f_2 puede ser extendida a f_3, etc. Definimos la función $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(y) = f_n(y)$ para cada $y \in A_n$. Como cada f_n es extención de f_{n-1}y el conjunto de las A_n's es una α-cubierta, entonces f está bien definida. Además f es continua por ser X un $\alpha_{\mathbb{R}}$-espacio. Pero como $f(x) = 1$ mientras que $f(S) = \{0\}$, entonces f no puede ser continua. Esto contradice la hipótesis de que S es cerrado.

Sea Z la suma topológica libre de los A_n y sea $p : Z \to X$ la proyección natural. La propiedad en el párrafo anterior muestra que p es una función cociente. Por lo tanto, la funcion inducida $p^* : C_\alpha(X, \mathbb{R}) \to C_\beta(Z, \mathbb{R})$ (donde $\beta = \{A_n \cap A : A \in \alpha \ y \ n \in \mathbb{N}\}$) es un encaje cerrado. Ya que $C_\alpha(A_n, \mathbb{R})$ es completamente metrizable (dentro de la demostración del Teorema 4.1.2 se muestra que $C_\alpha(A_n, \mathbb{R})$ es primero numerable, aplicando esto en el Teorema 4.1.3 se obtiene que $C_\alpha(A_n, \mathbb{R})$ es metrizable y por el Teorema 5.1.3 es completo ya que $C_\alpha(A_n, \mathbb{R}) = C_\mu(A_n, \mathbb{R})$ por el Teorema 1.2.6.(a)) y por ser $C_\beta(Z, \mathbb{R})$ homeomorfo al producto de los $C_\alpha(A_n, \mathbb{R})$, entonces $C_\alpha(X, \mathbb{R})$ es completamente metrizable. ♯

La prueba del Teorema anterior muestra que en especial todo espacio hemicompacto $k_{\mathbb{R}}$ es un k-espacio.

Corolario 5.2.6. Son equivalentes
(a) $C_k(X, \mathbb{R})$ es Čech-completo.
(b) $C_k(X, \mathbb{R})$ es completamente metrizable.
(c) X es hemicompacto y k-espacio.

Del siguiente corolario se desprende que $C_p(X, \mathbb{R})$ es Čech completo si y solamente si $C_p(X, \mathbb{R})$ es una potencia contable de $\mathbb{R}$.

Corolario 5.2.7. Son equivalentes
(a) $C_p(X, \mathbb{R})$ es Čech-completo.
(b) $C_p(X, \mathbb{R})$ es completamente metrizable.
(c) X es contable y discreto.

Apéndice A

ESTRUCTURAS UNIFORMES

A.1 Estructuras Uniformes Diagonales

Definición A.1.1. Sea X es un conjunto. Denotamos por Δ a la diagonal $\{(x,x) : x \in X\}$ de X. Cuando pueda haber confusión especificaremos la diagonal del conjunto X por $\Delta(X)$.

Si M, N son subconjuntos de $X \times X$ entonces $M \circ N$ es el conjunto $\{(x,y) : \textit{para algún } z \in X,\ (x,z) \in N \textit{ y } (z,y) \in M\}$. Para $M \subset X \times X$, se denota por M^{-1} al conjunto $\{(x,y) : (y,x) \in M\}$.

Definición A.1.2. Una *uniformidad diagonal* en el conjunto X es una colección μ de subconjuntos de $X \times X$ (llamados *entornos)*, que satisfacen:

(u1). si $M \in \mu$ entonces $\Delta \subset M$;
(u2). si $M_1, M_2 \in \mu$ entonces $M_1 \cap M_2 \in \mu$;
(u3). si $M \in \mu$ entonces existe $N \in \mu$ tal que $N \circ N \subset M$;
(u4). si $M \in \mu$ entonces existe $N \in \mu$ tal que $N^{-1} \subset M$;
(u5). si $M \in \mu$ y $M \subset N$ entonces $N \in \mu$.

Cuando X tiene una estructura uniforme μ, decimos que (X,μ) es un *espacio uniforme*. Una uniformidad en X se dice que es *separante* si $\bigcap\{M : M \in \mu\} = \Delta$.

Una familia $\beta \subset \mu$ es *base* para la uniformidad μ, si μ se puede recuperar aplicando la condición (u5). Por lo tanto β es una base para la uniformidad μ si y sólo si $\beta \subset \mu$ y para $M \in \mu$ dada, existe $N \in \beta$ tal que $N \subset M$. Así pués una colección β de subconjuntos de $X \times X$ es base para una uniformidad, si cumple (u1), (u3), (u4) y la siguiente modificacion de (u2)

(u2'). Si $M_1, M_2 \in \beta$ entonces existe $M_3 \in \beta$ tal que $M_3 \subset M_1 \cap M_2$.

Una *subbase* de μ es una subcolección G tal que todas las intersecciones finitas de G forman una base.

Observación A.1.3 (a). Si $M \in \mu$ entonces $M^{-1} \in \mu$. Esto es por (u4) y (u5).

Observación A.1.3 (b). Las condiciones (u3) y (u4) en la definición de uniformidad son equivalentes a:

(u6) Si $M \in \mu$, entonces existe $N \in \mu$ tal que $N \circ N^{-1} \subset M$.

En efecto, si suponemos (u3) y (u4), entonces, para $M \in \mu$, existe $N_1 \in \mu$ tal que $N_1 \circ N_1 \subset M$ y $N_2 \in \mu$ tal que $N_2^{-1} \subset N_1$. Sea $N = N_1 \cap N_2$ $(\in \mu)$; se tiene que $N \circ N^{-1} \subset N_1 \circ N_2^{-1} \subset N_1 \circ N_1 \subset M$. Por lo tanto la condición (u6) es cierta. Por otro lado, si la condición (u6) es cierta, entonces, dado $M \in \mu$, existe $N \in \mu$ tal que $N \circ N^{-1} \subset M$. Como $\Delta \subset M$, si $(x, y) \in N^{-1}$ entonces se tiene que $(x, y) \in N \circ N^{-1} \subset M$, i.e., $N^{-1} \subset M$. Para el elemento $F = N \cap N^{-1}$ de μ se tiene que $F \circ F \subset M$. Por lo tanto se cumplen (u3) y (u4).

Observación A.1.3 (c). Si $M \in \mu$, entonces existe $F \in \mu$ tal que $F \circ F \circ F \subset M$. En efecto, por ser M un elemento de μ se tiene que existe $N \in \mu$ tal que $N \circ N \subset M$. Como $N \in \mu$. Existe $H \in \mu$ tal que $H \circ H \subset N$. Para $F = N \cap H$ se tiene que $F \circ F \circ F \subset H \circ H \circ N \subset N \circ N \subset N \circ N \subset M$.

Observación A.1.3 (d). Decimos que un elemento $M \in \mu$ es *simétrico* si $M = M^{-1}$. Los elementos simétricos de μ forman una base para μ. Esto se obtiene de la observación A.1.3(a) y del hecho de que, para $M \in \mu$, $M \cap M^{-1}$ es simétrico.

Veamos cómo una uniformidad en X genera una topología en X.

Definición A.1.4. Para $x \in X$ y $M \in \mu$ definimos

$$M[x] = \{y \in X : (x, y) \in M\}.$$

Esto lo extendemos a subconjuntos A de X de la siguiente manera:

$$M[A] = \bigcup_{x \in A} M[x]$$

Teorema A.1.5 (a). Para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{U}_x = \{M[x] : M \in \mu\}$ es una base de vecindades de x, para una topología en X. Si consideramos una base de la uniformidad μ, generamos la misma topología.

(b). La topología τ_μ generada por la base de vecindades del inciso (a) es Hausdorff si y sólo si μ es separante.

Demostración. Por la condición (u1) de uniformidad se obtiene que $x \in M[x]$. Como $M_1[x] \cap M_2[x] = (M_1 \cap M_2)[x]$, entonces la intersección de vecindades de x es vecindad de x. Finalmente, si $M[x] \in \mathcal{U}_x$, sea $N \in \mu$ tal que $N \circ N \subset M$. Entonces para cualquier $y \in N[x]$, $N[y] \subset M[x]$ i. e. $M[x] \in \mathcal{U}_y$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x$ es una base de vecindades.

Sea β una base para μ, y sea

$$\mathcal{U}'_x = \{M[x] : M \in \beta\}$$

Ver que $\mathcal{U}'_x$ es una base de vecindades de x es consecuencia directa de que β cumple las condiciones de ser una base de una uniformidad.

Claramente la topología generada por la base $\{\mathcal{U}'_x : x \in X\}$ es menos fina que la generada por la base $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$. Consideremos un abierto A en la topología generada por $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$. Entonces para cada $x \in A$ existe $M \in \mu$ tal que $M[x] \subset A$. Como β es una base de μ, existe $N \in \beta$ tal que $N \subset M$. Por lo tanto

$N[x] \subset A$, lo que significa que A es abierto en la topología generada por $\{\mathcal{U}'_x : x \in X\}$. Con esto concluimos la segunda parte de (a).

(b) Supongamos que μ es separante. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces para algún $M \in \mu$, $(x, y) \notin M$. Consideremos $N \in \mu$ un elemento simétrico tal que $N \circ N \subset M$. Si $z \in N[x] \cap N[y]$, entonces $(x, z) \in N$ y $(y, z) \in N$. Como N es simétrico se tiene que $(z, y) \in N$ con lo cual tenemos que $(x, y) \in N \circ N \subset M$, lo cual contradice la hipótesis inicial. Por lo tanto $N[x] \cap N[y] = \emptyset$

Inversamente supongamos que la topología τ_μ es Hausdorff. Si $(x, y) \notin \Delta$, entonces $x \neq y$. Así que existen N, M en μ tales que $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Por lo cual, para el elemento $N \cap M$ de μ se tiene que $(x, y) \notin N \cap M$. ♯

Teorema A.1.6. Los elementos abiertos y simétricos de μ forman una base.

Demostración. Un elemento de μ abierto y simétrico, puede ser obtenido intersectando un elemento abierto con su inverso. Así es suficiente con mostrar que los elementos abiertos de μ forman una base. Para lo cual es suficiente con mostrar que si $M \in \mu$ entonces $int(M) \in \mu$. Sea N un elemento simétrico de μ tal que $N \circ N \circ N \subset M$. Habremos terminado si probamos que $N \subset int(M)$ (por la parte (u5) de la definición de uniformidad). Pero si $(x, y) \in N$, entonces $N[x] \times N[y] \subset M$, porque si $(w, z) \in N[x] \times N[y]$, entonces $(x, w) \in N$ y $(y, Z) \in N$. Como $(x, y) \in N$, entonces $(w, z) \in N \circ N \circ N \subset M$. Con esto tenemos que para cada $(x, y) \in N$ existe una vecindad contenida en M, por lo tanto $N \subset int(M)$. ♯

Teorema A.1.7. Sea $\mathcal{X}$ una familia de espacios uniformes y sea μ_X una uniformidad del elemento X de $\mathcal{X}$. Entonces

$$G = \{M_X^* : X \in \mathcal{X} \ y \ M_X \in \mu_X\}$$

donde

$$M_X^* = \{(s, t) \in (\Pi_{X \in \mathcal{X}} X) \times (\Pi_{X \in \mathcal{X}} X) : (\pi_X(s), \pi_X(t)) \in M_X\}$$

es una subbase para una uniformidad en $\Pi\mathcal{X}$. Además, la topología generada por esta uniformidad coincide con la topología producto en $\Pi\mathcal{X}$

Demostración. Veamos que la familia β de las intersecciones finitas de elementos de G generan una base de una uniformidad en $\Pi\mathcal{X}$.

(u1) Claramente $\Delta(\Pi_{X\in\mathcal{X}}X) \subset M_X^*$ para todo $X \in \mathcal{X}$.

(u2') La intersección de dos elementos de la forma $\bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^*$ es también un elemento de esta forma, por lo tanto está en β.

(u3) Sea $\bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^* \in \beta$. Para cada $i \in \{1,...,n\}$ sea $N_{X_{\alpha_i}} \in \mu_{X_{\alpha_i}}$ tal que $N_{X_{\alpha_i}} \circ N_{X_{\alpha_i}} \subset M_{X_{\alpha_i}}$, entonces $N_{X_{\alpha_i}}^* \circ N_{X_{\alpha_i}}^* \subset M_{X_{\alpha_i}}^*$ para cada $i \in \{1,...,n\}$, por lo tanto, para $i = 1,...,n$

$$(\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*) \circ (\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*) \subset M_{X_{\alpha_i}}^*$$

de lo cual se tiene que

$$(\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*) \circ (\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*) \subset \bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^*$$

(u4) Sea $\bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^* \in \beta$. Para cada $i \in \{1,...n\}$ existe $N_{X_{\alpha_i}} \in \mu_{X_{\alpha_i}}$ tal que $N_{X_{\alpha_i}}^{-1} \subset M_{X_{\alpha_i}}$. Entonces $N_{X_{\alpha_i}}^{-1\,*} \subset M_{X_{\alpha_i}}^*$. Como se tiene que $(\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*)^{-1} \subset N_{X_{\alpha_i}}^{-1\,*}$ para toda $i \in \{1,...,n\}$, entonces

$$(\bigcap_{i=1}^n N_{X_{\alpha_i}}^*)^{-1} \subset \bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^*.$$

Por lo tanto β es una base.

Finalmente, para probar que la topología generada por la base β en $\Pi\mathcal{X}$ es la misma que la topología producto, observe que si $M = \bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^* \in \beta$, entonces, para $x \in \Pi\mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} M[x] &= \{y \in \Pi\mathcal{X} : (x,y) \in M\} \\ &= \{y \in \Pi\mathcal{X} : (\pi_{X_{\alpha_i}}(x), \pi_{X_{\alpha_i}}(y)) \in M_{X_{\alpha_i}} \textit{ para } i = 1,...,n\} \\ &= \{y \in \Pi\mathcal{X} : \pi_{X_{\alpha_i}}(y) \in M_{X_{\alpha_i}}[\pi_{X_{\alpha_i}}(x)] \textit{ para } i = 1,..,n\} \\ &= \bigcap_{i=1}^n M_{X_{\alpha_i}}^*[x]. \end{aligned}$$

♯

Definición A.1.8. La uniformidad construida en el teorema anterior, es la *uniformidad producto* en $\Pi_{X\in\mathcal{X}}X$

Teorema A.1.9. Si μ es una uniformidad en Y, el conjunto

$$\beta = \{\widehat{M} : M \in \mu\}.$$

donde

$$\widehat{M} = \{(f,g) \in (Y^X) \times (Y^X) : (f(x), g(x)) \in M \textit{ para todo } x \in X\}$$

es una base de una uniformidad en Y^X

Demostración. La condición $\Delta(Y^X) \subset \widehat{M}$ se obtiene puesto que $\Delta(Y) \subset M$.

(u2') Sean $f, g \in Y^X$ y $\widehat{M}, \widehat{N} \in \beta$. Se tiene que $(f,g) \in \widehat{M} \cap \widehat{N}$, si y sólo si para todo $x \in X$ $(f(x), g(x)) \in M$ y $(f(x), g(x)) \in N$, i.e., si y sólo si para todo $x \in X$, $(f(x), g(x)) \in M \cap N$, equivalentemente: $(f,g) \in \widehat{M \cap N}$. Por lo tanto $\widehat{M} \cap \widehat{N} = \widehat{M \cap N}$, con lo cual se tiene que $\widehat{M} \cap \widehat{N} \in \beta$

(u3) Sea $\widehat{M} \in \beta$, entonces existe $N \in \mu$ tal que $N \circ N \subset M$. Afirmamos que $\widehat{N} \circ \widehat{N} \subset \widehat{M}$. En efecto, sea $(f,g) \in \widehat{N} \circ \widehat{N}$. Entonces, existe $h \in Y^X$ tal que $(f,h) \in N$ y $(h,g) \in N$. Por lo tanto, para toda $x \in X$ $(f(x), h(x)) \in N$ y $(h(x), g(x)) \in N$. Entonces, para todo $x \in X$ $(f(x), g(x)) \in N \circ N \subset M$, de donde $(f,g) \in \widehat{M}$. De lo anterior concluimos que $\widehat{N} \circ \widehat{N} \subset \widehat{M}$.

(u4) Para $\widehat{M} \in \mu$, consideremos $N \in \mu$ tal que $N^{-1} \subset M$. Veamos que $\widehat{N^{-1}} \subset \widehat{M}$. Sea $(f,g) \in \widehat{N^{-1}}$. Entonces $(g, f) \in \widehat{N}$, i.e., para todo $x \in X$ $(g(x), f(x)) \in N$. Por lo tanto, para todo $x \in X$ se tiene que $(f(x), g(x)) \in N^{-1} \subset M$. Esto implica que $(f,g) \in M$, con lo cual concluimos que $\widehat{N^{-1}} \subset \widehat{M}$ ♯

Definición A.1.10. La topología generada por la uniformida definidad en el teorema anterior le llamamos la *topología de la convergencia uniforme en* Y^X

Veamos ahora la convergencia en uniformidades, recordemos que:

Una *red de puntos* en un espacio topológico X es una función arbitraria de un conjunto dirigido no vacío Σ al espacio X. Las redes de puntos las denotaremos por $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ donde x_σ es el punto de X asignado al elemento σ del conjunto dirigido Σ.

Un punto x es llamado *punto límite* de la red de puntos $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ si para toda vecindad U de x existe un $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que $x_\sigma \in U$ para todo $\sigma \leq \sigma_0$; decimos entonces que la red $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ *converge* a x.

Sean (X, μ) un espacio uniforme y $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ una red de puntos en (X, μ). Decimos que $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ es una *red de Cauchy* en (X, μ) si para cada $M \in \mu$ existe $\sigma_0 \in \Sigma$ tal que $(x_\sigma, x_{\sigma'}) \in M$ para cualesquiera $\sigma, \sigma' \geq \sigma_0$.

Observacion A.1.11. La completez en uniformidades no es una propiedad topológica. Observe que el espacio de los reales con la uniformidad generada por la métrica usual es completo. Este espacio es homeomorfo al subespacio $(0, 1)$ el cual con la uniformidad restringida no es completo.

Definición A.1.12. 1.- Un espacio topológico (X, τ) es *uniformizable* si existe una uniformidad μ en X tal que $\tau_\mu = \tau$.

2.- Una uniformidad μ en X es *compatible* si $\tau_\mu = \tau$.

La demostración de los siguientes teoremas puede encotrarse en el libro [Eng].

Teorema A.1.13. (X, τ) es uniformizable si y sólo si (X, τ) es completamente regular.

Sea (X, d) un espacio métrico. Para cada $\epsilon > 0$, sea $M_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$. La colección $\{M_\epsilon : \epsilon > 0\}$ es base de una uniformidad $\mathcal{U}_d$ compatible, es decir la topología en X inducida por $\mathcal{U}_d$ coincide con la topología en X inducida por d.

Definicion A.1.14. Un espacio uniforme (X, μ) es *metrizable* si y sólo si (X, τ_μ) es metrizable.

Dada una uniformidad μ en X podemos encontrar varios subconjuntos de μ que son bases para μ. Definimos definimos el peso uniforme de μ por

$$u(\mu) = min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \ es \ base \ de \ \mu\}$$

Teorema A.1.15. Un espacio uniforme (X, μ) es metrizable si y sólo si $u(\mu) \leq \aleph_0$.

BIBLIOGRAFÍA

[Arens] Arens, Richard F. *A Topology for Spaces of Transformations,* Annals of Mathematics 47, 1946, 480-495.

[Ark] Arkhangel'skii, A. V. *Topological Function Spaces,* Kluwer Academic Plublishers, 1989.

[Dug] Dugundji, James, *Topology,* Ally and Bacon, inc., Boston., [1966].

[Eng] Engelking, Ryszard, *General Topology,* Helderman Verlag Berlin, 1989.

[GaTa] García-Maynez, Adalberto y Tamariz Marcarúa, Angel *Topología general,* Ed. Porrua, México 1988.

[GT] Gillman L. and Jerison M., *Rings of Continuous Functions,* Springer Verlag, 1976.

[McNt] McCoy Robert A. and Ntantu Ibula, *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions, Lectures Notes in Mathematics 1315,* Springer-Verlag, 1980.

[McNt 1986] McCoy R. A. and Ntantu Ibula, *Completeness Properties of Function Spaces,* Topology and its Applications 22, North-Holland, 1986, 191-206.

[MOP] J. Margalef Roig, E. Outerelo Dominguez, J. L. Pinilla Fernando, *Topología, Vol. 5,* Ed. Alambra, 1982.

[Stone 1963] Stone, A. H., *A Note on Paracompactness and Normality of Mapping Spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 14, 1963, 81-83.

[Stone 1948] Stone, A. H., *Paracompactness and Product Spaces,* Bull. Amer. Math. Soc. 54, 1948 977-982.

[Will 1948] Willard, S., *General Topology,* Addison-Wesley Publishing Company, 1970.