01058
4
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

LÓGICA, LENGUAJE Y REALIDAD

Examen crítico del programa absolutista

Tesis que presenta para obtener el grado de

Maestría en Filosofía

Presenta:

Víctor Manuel Hernández Márquez

México, D.F. junio 1998

264675

ÍNDICE

Mi invención comprende el uso de la razón entera: un juicio para las controversias, un intérprete de las nociones, una balanza para las probabilidades, una brújula que nos guiará a través del océano de las experiencias, un inventario de las cosas, una tabla de los pensamientos, un microscopio para examinar las cosas presentes, un telescopio para adivinar las lejanas, un cálculo general, una magia inocente, una cábala no quimérica, una escritura que cada uno leerá en su propia lengua; y, finalmente, una lengua que se podrá aprender en pocas semanas, y que enseguida se extendaría por todo el mundo.

Leinbiz

Creo poder hacer muy clara la relación de mi conceptografía con el lenguaje común si la comparo con la que existe entre el microscopio y el ojo. Este último ... considerado como aparato óptico, muestra sin duda muchas imperfecciones, las cuales pasan desapercibidas, por lo común sólo como consecuencia de su estrecha relación con la vida mental. Pero tan pronto como los propósitos científicos establecen mayores exigencias en la precisión de las distinciones, el ojo resulta insuficiente. Por el contrario, el microscopio es de lo más adecuado para tales fines, aunque por ello, no es utilizable para otros.

Frege

La ciencia es esencialmente lógica. El nexo entre sus conceptos es un nexo lógico y los fundamentos de sus afirmacioes son lógicos. Dijo el rey Jacobo: "Si no hay obispos, no hay rey". Y nosotros podemos decir con confianza: "Si no hay lógica, no hay ciencia"

Whitehead

La tarea de la filosofía no es la creación de un lenguaje ideal, sino aclarar el uso del lenguaje existente .

Wittgenstein

No hay ejercicio intelectual que no sea finalmente inútil. Una doctrina filosófica es al principio una descripción verosímil del Universo; giran los años y es un mero capítulo -cuando no un párrafo o un nombre-, de la historia de la filosofía

J. L. Borges

¿Debo admirar, o siquiera tomar en serio, a los hombres que desean dominar toda una época o más, y que por ese motivo se convierten en filósofos? Se les puede reconocer porque empiezan declarando el fin de toda la filosofía precedente, de absoltamente toda la filosofía

E. Canetti

Prólogo

Hace ya diez años que me di a la tarea de escribir las ideas principales que priman en este trabajo. En aquella ocasión trabajé en un extenso artículo que tenía como propósito provocar la cólera de los fieles wittgensteinianos que rondaban por mi cabeza, a través de numerosas lecturas, y que mi amigo Esteban Gasson encarnaba (al menos para mi) en aquel momento. El ensayo decía de manera grosera que Wittgenstein no era para nada un genio pues en filosofía, para bien o para mal, no se dan ese tipo de personas. Argüía que la originalidad de la filosofía expuesta en el ***Tractatus*** descansaba en la forma de explotar las consecuencias de una venerable tradición que se remontaba a Leibniz y explicaba que las diferencias entre Russell (y Frege) y Wittgenstein, exageradas y malentendidas hasta el cansancio por la mayoría de sus seguidores, eran principalmente diferencias sobre la formulación "correcta" de una concepción absolutista de la lógica. Decía también que la ruptura entre esta primera obra y las ***Investigaciones Filosóficas*** era más débil de lo que sus admiradores pensaban, y que el *motto* de Nestroy al inicio de este último "libro" describía en cierta forma lo que había ocurrido con el resultado.

Pero como todo esto había sido escrito demasiado rápido y mal, decidí retomar tal empresa en mi trabajo de posgrado, limitándome a la primera parte del mismo; esto es, a mostrar que el ***Tractatus*** era el eslabón final, y no el principio, de una larga cadena intelectual. Entonces escribí una primera versión en forma de ensayos independientes que no lograban dar del todo la imagen que me proponía ofrecer y que tampoco salía bien librada ante los ojos críticos del Dr. Carlos Pereda, mi asesor, y del prof. Hugo Padilla, mi maestro de lógica. Además, tuve la mala idea de cambiar el acento en el planteamiento al darme cuenta de la complejidad de los nudos y eslabones que formaban esa cadena así como de los distintos ambientes por los cuales cruzaba. Fue así como me olvidé de mis fantasmas wittgensteinianos (y de pasada, del pragmatismo que requiere la titulación) y me di a la tarea de describir con cierto detalle ya no uno o dos eslabones sino la cadena misma.

Debo confesar, no obstante, que en realidad se trata aún del esqueleto de esa tradición y que falta mucho material por comentar. El lector podrá echar en falta demasiadas cosas (*i.e.* la metafísica y teología leibniziana versus las tesis russellianas sobre las mismas) pero debo decir también que, en principio, muchas de esas ramas discursivas pueden añadirse para dar más color a una área de la imagen general mientras que otras pueden omitirse sin problema del mismo modo como un fotógrafo decide limitar el margen en una impresión. Desde luego, se trata en esto último de una decisión hasta cierto punto de gusto pues, para seguir hablando de cadenas, el conocedor podría pedir al menos unas cuantas líneas sobre la manera cómo Leibniz adopta la concepción arcaica relativa a la cadena del ser. Podría incluso exigirme una detallada relación de cómo esa cadena aparece en ***Libro del Ascenso y Descenso del Entendimiento*** de Lulio y cómo determina ciertas formas de integrar la pretendida enciclopedia o la ciencia general leibniziana. ¿Determinaba también el orden lógico de los símbolos que representarían los pensamientos fundamentales? Ante semejante reclamo no tendría mucho que decir; quizá y para salir mal del paso, diría que Arthur Lovejoy ya había descrito con detalle esa otra tradición y que la manera cómo se juntaban ambas historias era hasta cierto punto un asunto aparte.[1]

Pero algo silimiar se podría decir con respecto a Frege, Russell y Wittgenstein. Del primero se me podría objetar que ni siquiera he retomado las grandes tesis de Dummett y que me he limitado a hacerle una crítica pueril y marginal. Sobre esto puedo decir, en primer lugar, que sería absurdo de mi parte intentar competir en inteligencia, tiempo y presupuesto con Dummett. Ciertamente no me han faltado ganas de comentar muchos de sus puntos de vista que tienen que ver con la manera como yo presento las cosas; pero dado el gran volumen de sus estudios y la brevedad de mi trabajo en comparación al suyo, tal empresa se antoja ridícula pues no aspiraría a ser más que una marginalia. Además, aquí se dan por sentado muchas de las brillantes tesis de Dummett aun y cuando ni siquiera se mencionen (*i.e.* el que el principio del contexto nunca fue explícitamente rechazado por Frege en sus escritos posteriores, el 'hecho' de que Frege usa distintos sentidos de *Bedeutung* y *bedeuten*, etc.,) pero hay puntos fundamentales de partida en los que es evidente nuestro desacuerdo. Por ejemplo, Dummett comete parcialmente el mismo error que cometen los fans de Wittgenstein al afirmar que Frege no tiene antecesores. Y digo parcialmente porque si bien es cierto, como señala Dummett, que no hay antecedentes técnicos

[1] Cf. ***The Great Chain of Being***. Especialmente capítulo V.

en cuanto a la teoría de la cuantificación fregeana, no estoy de acuerdo en sostener que "Frege's formal logic is the principal factor determining the subsecuent development of his philosophy, and ciertainly of his philosophy of language".[2] Desde otro ángulo, puedo decir que, en este sentido, los libros de Dummett sobre Frege se parecen al libro de Russell (y en cierta medida al de Couturat) sobre Leibniz, al intentar derivar su filosofía a partir de su lógica El mérito del presente trabajo, si es que en realidad lo tiene, consiste en mostrar la tesis inversa, a saber, que es la concepción absolutista de la lógica como lenguaje la que determina la teoría cuantificacional fregeana, el atomismo russelliano y la metafísica wittgensteiniana que establece lo que se puede o no decir.

Persiste, no obstante, un pecadillo menor de mi parte al continuar atribuyendo a Dummett la versión "ortodoxa" o "estandar" de la que tanto se queja. Esto obedece en parte al hecho de que a pesar de que existen distintas interpretaciones sobre Frege, la versión de Dummett es sin lugar a dudas la más amplia, documentada e influyente hasta la fecha y por lo tanto, merece considerarse, muy a su pesar, como la versión estandar (de hecho, pocas versiones 'ortodoxas' pueden presumir de la calidad de su análisis). Por último, lamento tanto como Dummett, el hecho de que no exista aún consenso sobre la importancia fundamental de las doctrinas filosóficas de Frege; no obstante, creo que será así en tanto no exista acuerdo sobre la tradición y objetivos que representa.

Por último, quiero hacer patente mi agradecimiento a todas las personas que de alguna manera me han ayudado en este trabajo. Como no es posible hacer una lista completa me limitaré a mencionar a aquellos a quienes debo más de lo que puedo decir aquí. En primer lugar, quiero expresar mi profunda gratitud a mi asesor y de alguna manera mentor, el Dr. Carlos Pereda F., quien me ha apoyado de manera desinteresada y generosa desde mi entrada a la UNAM y ha mostrado siempre paciencia y confianza en este trabajo. Doy igualmente las gracias al Prof. Hugo Padilla Chacón, quien además de ser una influencia importante para mi, se tomó la molestia de leer casi en su totalidad la primera versión de este trabajo, formulando numerosas críticas, sugerencias y comentarios alentadores. También estoy en deuda con la Maestra Martha Elena Venier, del Colegio de México, con quien tuve la oportunidad de trabajar sobre Wilkins y el problema de los lenguajes artificiales en el siglo XVII y ampliar así la visión de fondo que aparece

[2] *The Interpretation of Frege's Philosophy*. p. xvii.

en el primer capítulo. Mis amigos y compañeros de aula, Mtro. César Santiesteban y Mtro. Arturo Yañez, fueron de mucha ayuda para conseguir material bibligráfico, y este último ha discutido conmigo en distintos momentos muchos de los puntos de vista aquí expuestos, a ellos doy también las gracias. Durante dos años y medio disfruté de la beca para estudios de posgrado que otorga la Dirección de Intercambio Académico de la UNAM y desde luego estoy sinceramente agradecido con la institución y con esa instancia en particular. No me queda más que advertir que de cualquier manera los errores que puedan encontrarse en este trabajo son de mi entera responsabilidad y desear que la espera haya valido la pena.

Víctor M. Hernández Márquez

Mayo de 1998

INTRODUCCIÓN

> ***El pensamiento aún tiene demasiado espacio libre al expresarse. He señalado con el mango de un bastón lo que debía haber señalado con la punta de una aguja.***
>
> Lichtenberg

Las relaciones entre pensamiento, lenguaje y realidad han inquietado a los seres humanos de todos los tiempos y son fuente constante de problemas científicos y filosóficos muy diversos. ¿Nos expresamos tal y como pensamos?, ¿Son los nombres propios naturalmente correctos con respecto a sus portadores, como se discute en el Cratilo?, ¿Está *todo* el libro de la naturaleza escrito con caracteres matemáticos?, ¿Por qué el lenguaje natural es insuficiente para expresar correctamente nuestro conocimiento?, ¿Es realmente insuficiente?, ¿Es posible un lenguaje universal que pueda ser útil para la comunicación entre las naciones?, ¿Es en realidad el *lenguaje* literal más adecuado que el *lenguaje* figurativo para la expresión del conocimiento?, son sólo algunos problemas que surgen al momento de reflexionar sobre tales relaciones.

La presente historia es en el fondo sólo un fragmento de una historia esotérica mayor que puede describirse a grandes rasgos como los intentos de llevar a cabo una de las más ambiciosas aspiraciones de la humanidad: descubrir o crear un lenguaje lo suficientemente poderoso que permita garantizar el verdadero conocimiento de las cosas.

Los motivos para elegir únicamente un fragmento de esa historia mayor son muy diversos; aunque ciertamente, una de sus principales motivaciones consiste en el hecho de que este fragmento constituye en sí mismo una historia con vida propia.[1] Su característica particular radica en el hecho de tratarse, por decirlo de algún modo, de la versión profana de esa magna historia.

En sentido estricto, la historia-fragmento total va más allá de su impulso original en tanto que su problemática se ramifica y transforma a lo largo del tiempo a tal grado que sus últimos residuos no parecen tener, a simple vista, ninguna conexión con sus antecedentes.

El aspecto central de esta historia particular consiste en la pretensión de crear semejante lenguaje perfecto a partir de la invención o desarrollo de lenguajes lógico-matemáticos. Por consiguiente, bajo la presente interpretación, el conocido

[1] Además, a partir de la segunda mitad de este siglo se han realizado numerosos estudios sobre la mayoría de estos proyectos y sus temas afines, pero sin ocuparse, hasta donde yo sé, de la tradición particular que pretendo aquí exponer. De cualquier manera, algunos de estos estudios se citan en el primer capítulo del trabajo, y en muchas ocasiones han sido de mucha utilidad para la visión que he de sustentar.

renacimiento de la lógica a partir de Leibniz, se encuentra íntimamente asociado a esta problemática inicial.

Es de esperarse entonces, y en esto consiste la tesis principal de este estudio, que el renacimiento de la lógica se encuentre sumamente influido por una concepción acerca de la misma totalmente determinada por los rasgos que se supone debe poseer ese buscado lenguaje perfecto.

La presente interpretación debe mucho, como se prodrá apreciar en el cuerpo del trabajo, a los breves pero iluminadores estudios de Jan van Heijenoort sobre el desarrollo de la lógica.[2] Además, cuenta como telón de fondo con el clásico estudio de Luis Couturat sobre la lógica de Leibniz y otros estudios más recientes.[3] No obstante, es importante hacer algunas observaciones previas sobre estos autores en relación con el presente trabajo.

En primer lugar, aquí se sigue y desarrolla la interpretación de Heijenoort en una dirección diferente a la que Jaakko y Merriell Hintikka hacen en su conocido libro ***Investigating Wittgenstein.***[4] La razón principal de nuestra divergencia descansa en cuatro puntos importantes: a) la generalización que Jaakko Hintikka hace de la oposición enfatizada por Heijenoort-, entre "la lógica como cálculo" y "la lógica como lenguaje" en tanto formas de entender el lenguaje

[2] Cf. Heijenoort (1967a), (1976) y (1984).

[3] ***La Logique de Leibniz d'après des documents inédits.*** Paris: Alcan, 1901.

("language as universal medium" vs. "language as calculus")[5] es, desde mi punto de vista, artificial y ajena a la evolución histórica de esa tradición. Lo cual queda de manifiesto al observar que b) la generalización se asocia en varias ocasiones a una problemática kantiana ignorando que, en su origen, la oposición se debe a la interpretación fregeana del proyecto leibniziano. c) La consecuencia inmediata de este "cambio" de tradición y problemática es la identificación de una especie de relativismo lingüístico con la filosofía de Wittgenstein, algo que es en si mismo la negación del absolutismo. Por último, d) la oposición no es excluyente; es decir, desde el punto de vista de Frege, la lógica no es meramente un cálculo, sino que además y principalmente, es un lenguaje artificial con características muy específicas.

Por supuesto, la generalización de Jaakko Hintikka se encuentra en cierta forma justificada en virtud de que en Wittgenstein la problemática sobre el lenguaje ideal se desplaza al terreno de la reflexión filosófica en torno al lenguaje natural. Sin embargo, y como trataré de mostrar en el último capítulo, las tesis del primer Wittgenstein pueden explicarse muy bien apelando únicamente a la concepción absolutista de la lógica

---

[4] Oxford: Basil Blackwell, 1986. De hecho, esta generalización ya la había explorado Jaakko Hintikka en sus ensayos anteriores sobre la semántica de Frege [Cf. J. Hintikka (1979), (1981) y (1984)].

[5] Además, y en particular, Jaakko Hintikka se equivoca cuando señala que: " En la terminología tradicional, el contraste entre los dos puntos de vista es algunas veces señalado como el contraste entre *mathesis universalis* y *lingua characterica*" [Hintikka (1981, p. 59], pues el contraste, como Frege mismo señaló, es entre una *lingua characterica* y un mero *calculus ratiocinator*.

que éste hereda de Frege y Russell (que no es nada más que otra forma de referirse a la concepción de la lógica como lenguaje).

Por otra parte, la generalización de Hintikka ha sido invertida y transferida por su discípulo Martin Kush[6] a una problemática que tiene su desarrollo en el proyecto fenomenológico-hermenéutico. Lo cual no es sino una muestra de la elasticidad con que se puede manipular esta generalización.[7]

En contraste, la concepción de la lógica como lenguaje, tal y como aquí se entiende, es una concepción que surge de manera particular del proyecto leibniziano de una *lingua characterica* o characteristica y es sostenida y desarrollada en diferentes direcciones por Frege, Peano, Russell y Wittgenstein (entre sus miembros más destacados). En consecuencia, no se trata de una generalización más o menos adecuada para elaborar una reconstrucción de ciertas problemáticas filosóficas sino de un programa con una continuidad pocas veces advertida. De cualquier forma, es evidente que existen muchos puntos de acuerdo entre la interpretación de Jaakko y Merriell Hintikka y la que aquí se presenta.

En cuanto a Couturat, debe mencionarse de entrada que se trata de un pensador que juega un papel bastante peculiar en esta

---

[6] ***Language as Calculus vs Language as Universal Medium. A study in Husserl, Heidegger and Gadamer.*** Dordrecht: Kluwer, 1989.

[7] No está de más señalar que Kusch elabora de nuevo una interpretación totalmente paradójica desde nuestro punto de vista, ya que la tesis acerca del lenguaje como medium universal, tiene como corolario la aceptación del relativismo lingüístico; y por supuesto, Heidegger aparece como un pensador ligado a esta tesis. Desde luego, el autor anota que el relativismo lingüístico puede o no estar ligado a pensadores que sostienen la tesis del lenguaje como medium universal, pero este comentario muestra hasta que punto la generalización es ajena a las verdaderas tesis absolutistas [cf. Kusch (1989), p. 8].

historia, ya que se trata de alguien que es, por decirlo de algún modo, juez y parte; es decir, no solo es responsable de una interpretación de la filosofía de Leibniz que, en sus aspectos generales, es hasta el momento bastante aceptable[8] (y referencia obligada), sino que además fue un entusiasta interlocutor e interprete de los principales pensadores involucrados en el renacimiento de la lógica y, en especial, del programa leibniziano de una *característica universalis*. Por si fuera poco, Couturat fue también un impulsor de las lenguas universales y el logicista francés más reconocido de su época.[9]

Sin embargo, es notoria la ausencia de estudios en los cuales se tome en cuenta el papel que desempeñó Couturat en esta historia durante los últimos 15 años del siglo XIX y los primeros 10 del presente. En un principio este escrito no pretendía ser la excepción, pero a medida que avanzaba en su elaboración se me imponía cada vez más la necesidad de una evaluación general de su obra. Al final esto no ha sido posible del todo, como tampoco ha sido posible extenderme con otros pensadores igualmente pertinentes, pero al menos he intentado incluir y comentar algunos de sus escritos que se relacionan directamente con los puntos aquí tratados.

---

[8] Si bien hoy es ampliamente admitido que la tesis principal de Couturat (y Russell), según la cual la filosofía (metafísica) de Leibniz se debe a su lógica, se encuentra "superada"; debe decirse que Couturat va más allá de su tesis principal al describir con cierto detalle y en relación con la característica universal, por un lado, las ideas sobre la lógica y, por otro, los propios sistemas lógicos leibnizianos.

[9] No esta de más resaltar que los responsables de la revaloración de Leibniz eran todos leibnizianos declarados (Peano, Vacca, Couturat, Russell) y no historiadores "imparciales" y eruditos.

Por otra parte, existen otros estudios sobre Leibniz que tiene muchos puntos en común con la versión que aquí se presenta. Dos de estos escritos son ***Leibniz' Cosmological Synthesis*** de Anna Tresa Tymieniecka[10] y el conocido libro de Hidé Ishiguro sobre la lógica y la filosofía del lenguaje de Leibniz.[11] Por motivos de espacio y temáticas solo haré algunos comentarios sobre este último.

En primer lugar, la autora sostiene una visión muy insuficiente (por no decir nula) sobre las tesis de Leibniz sobre el lenguaje natural, la gramática filosófica, las lenguas artificiales versus la *lingua characterica*, etc., y por consiguiente, no existe en su estudio una unidad y relación estricta entre cada uno de los temas aquí tratados.

En consecuencia, la relevancia y pertinencia del proyecto de una *lingua characterica* de acuerdo con la configuración de las tesis leibnizianas en torno a la lógica y el lenguaje, recibe poca atención en el libro de Ishiguro. De hecho, es sorprendente encontrar que la autora dedica tan solo un capítulo a este proyecto, y únicamente como una interpretación de su primera versión, la que aparece en el ***Dissertatio de Arte Combinatoria***.

Sin embargo, la interpretación particular de Ishiguro que subyace en su afirmación de que "...only Leibniz's *Charactheristica Universalis* (system of universal signs) which expressed ***Ars Combinatoria*** (the art of combination of concepts) can rate as an expression of logical atomism";[12] es altamente

[10] Holanda: Royal VanGorcum, 1964.
[11] Cf. Ishiguro (1972).
[12] Ishiguro *op. cit.*, p. 12.

compatible con la interpretación del presente trabajo. Pero debe añadirse que el atomismo lógico visto como *lingua characterica* es posible sólo por mediación del programa conceptográfico de Frege que revive y da una nueva fisonomía al programa leibnitiano.[13]

Además, de acuerdo con mi interpretación, muchas de las ideas sobre la lógica y el lenguaje que Ishiguro comenta a lo largo de su libro tienen relación -directa o indirectamente- con los diversos intentos de Leibniz por construir esa *lingua universalis*. Y esto también es cierto para aquellos temas que Ishiguro ha ignorado o dejado de lado en su estudio (*i.e.*, la naturaleza de los caracteres chinos, la lengua natural y original común, su aritmética binaria, y la relación entre la Enciclopedia y la Ciencia General, etc.).

Por último, la justificación de Ishiguro según la cual su estudio remite más a problemas lógicos actuales que al contexto de los debates del siglo XVII debido a que muchas de las concepciones leibnizianas sólo han sido plenamente desarrolladas por lógicos y filósofos del siglo veinte, merece por lo menos dos observaciones.

En primer lugar, es evidente que muchas de esas concepciones sobre el lenguaje y la lógica han sido desarrolladas en diferentes direcciones por lógicos y filósofos como Frege y Russell; sin embargo, esto no es incompatible con el hecho de que tales ideas tengan su origen en ciertas problemáticas de su

---

[13] Dos artículos que confirman la presente continuidad del programa leibniziano son "Leibniz, Frege und die sogenannte 'lingua characteristica universalis'", de Gunther Patzing (*Studia Leibnitiana*, suplementa 3, 1968: 103-112) y "Frege, Leibniz and the notion of an ideal language" de Eike-Henner Kluge (*Studia Leibnitiana* 12, 1980: 140-154).

tiempo y, por consiguiente, la interpretación de Ishiguro se basa, por decirlo de alguna manera, más en los efectos que en las causas que dieron lugar a las ideas leibnizianas.

En segundo lugar, de acuerdo con mi punto de vista, el desarrollo de las ideas leibnizianas ha tenido dos direcciones fundamentales en lo que se refiere a la lógica. Estas dos tradiciones corresponden más o menos a las concepciones básicas sobre la lógica mencionadas más arriba. La primera de ellas, asociada a Boole, De Morgan y otros algebristas lógicos, corresponde a la concepción de la lógica como un mero cálculo. La segunda, asociada a Frege, Peano y Russell, corresponde a la imagen de la lógica como un lenguaje. Sin embargo, debido a que Boole y otros algebristas lógicos entienden el cálculo lógico como un lenguaje, en el capítulo III intentaré explicar las diferencias básicas entre estas dos filosofías de la lógica.

De cualquier forma, el tema central de este trabajo tiene que ver esencialmente con la evolución de la problemática leibniziana asociada a la creación de una *lingua characterica* por medio de un sistema lógico; y siguiendo a Lakatos, me referiré a esta problemática como un programa de investigación. No obstante, uso este término de manera muy informal (tal y como el mismo Lakatos lo usó al momento de referirse a problemáticas no estrictamente científicas) y a menudo de manera intercambiable con términos como "proyecto" y "tradición".

En resumen, el capítulo I se ocupa principalmente de las ideas leibnizianas que tienen que ver con la invención de la *lingua characteristica* como un sistema lógico. El capítulo II intenta explicar cómo este programa adquiere un nuevo impulso a partir de la obra de Frege. El capítulo III pretende situar el pensamiento de Frege en el marco del ambiente intelectual de su época, mientras que el capítulo IV busca reconstruir, en sus aspectos más generales, las líneas de pensamiento que llevaron a Russell (y Whitehead) a la adopción del programa y posteriormente, a la realización de la obra más acabada del mismo. Finalmente, el capítulo V se ocupa de la manera como la filosofía del ***Tractatus*** incorpora y asimila la concepción de la lógica como lenguaje.

EL PROYECTO LEIBNIZIANO EN TORNO A UNA *LINGUA CHARACTERICA*

La consideración de las ideas y las palabras, en cuanto que son los grandes instrumentos del conocimiento, constituye una parte nada despreciable de la contemplación de quienes pretendan ver en toda su extensión el conocimiento humano. Y si esos instrumentos fueran objeto de una esmerada ponderación y de un estudio cuidadoso, quizá nos ofrecerían otra clase de lógica y de crítica, distinta a las que nos han sido familiares hasta ahora.

John Locke

I. Introducción

La idea y proyecto de Leibniz de crear una *characteristica universalis* fue uno de los muchos intentos intelectuales del siglo XVII por crear un lenguaje universal.[1] Tales aspiraciones nacieron en gran parte bajo la convicción de que toda lengua es, por su propia naturaleza, imperfecta. Para teóricos del lenguaje universal como Wilkins, Dalgarno y Leibniz, la invención de un lenguaje universal se presentaba como un imperativo que tendría repercusiones importantes en lo epistemológico, lo religioso y lo político en tanto que el nuevo lenguaje no sólo sería capaz de salvar la impenetrable barrera entre las lenguas, sino que además, podría evitar las confusiones y equívocos a los que están sujetas las mismas.[2]

---

[1] No está de más tener presente que a pesar de la obra clásica de Couturat sobre Leibniz, fue opinión común entre algúnos lógicos atribuir únicamente a Leibniz el proyecto de una *caracteristica universal* [Cf. Cohen (1954)].

[2] La idea sobre la corrupción de las lenguas se debía principalmente a motivaciones teológicas relacionadas con la leyenda sobre la confusión de las lenguas en Babel. Se solía pensar que con el paso del tiempo las lenguas se distanciaban cada vez más de la lengua adánica original. Sin embargo, existían también ideas platónicas sobre la naturaleza del lenguaje, bajo las cuales los cambios ocurridos dentro de una lengua no eran otra cosa que indicios de su gradual corrupción.

Desde luego, las fuentes que dieron lugar a los proyectos sobre la lengua universal son diversos en cuanto a sus temas y propósitos. Por ejemplo, es indudable que muchas de esas fuentes tienen su origen en el contexto histórico particular en el cual surgen dichos proyectos y que este contexto, dicho rápidamente, tiene que ver con la ruptura de la hegemonía del latín como lengua culta, con la división de la iglesia cristiana, con el auge de las relaciones comerciales de Europa con pueblos con lenguas ignotas y, por supuesto, con el descubrimiento del nuevo mundo. Sin embargo, existen también otras fuentes menos prácticas y más especulativas pero que en buena medida determinan la naturaleza conceptual de esos proyectos.

Entre estas últimas fuentes podemos contar, por ejemplo, la idea de los neoplatónicos cristianos según la cual es imposible definir a Dios de manera unívoca debido a lo inadecuado del lenguaje. Otra idea parecida podemos encontrar en los magos, alquimistas, científicos naturales y cabalistas de distintas épocas del mundo antiguo, en cuanto a que el lenguaje natural es inadecuado para reflejar la verdadera estructura de la realidad, la cual sólo puede ser revelada por medio de un simbolismo especial.

Este "prejuicio teológico", como lo denominó el filólogo Fréret, sobrevivió bajo diversas formas hasta el siglo XIX; por ejemplo, el gran comparatista Franz Bopp había trabajado sobre la base de ideas similares al considerar que las lenguas indoeuropeas en su estado actual, representaban formas deterioradas de la lengua primitiva, de manera que el método comparativo debía de permitir la reconstrucción de esa lengua original, la lengua pre-aria original. Algo parecido encontramos también en el naturalismo de Schleicher, quien afirmaba que "la historia es la enemiga de la lengua".

En este sentido, la base filosófica sobre la que se construyen todos estos proyectos en torno a la invención de una lenguaje universal depende en buena medida, de las relaciones entre lenguaje y pensamiento por un lado, y entre lenguaje y hechos, por otro. En cierta forma, la primera de estas relaciones había sido investigada con relativa profundidad por los pensadores medievales y sus resultados habían derivado en la elaboración de gramáticas especulativas.

Aunque uno de los problemas filosóficos de la segunda relación se encuentran ya en la discusión platónica acerca de la rectitud de las denominaciones, no fue sino hasta el siglo XVI cuando surgió la problemática particular que daría vida a los intentos de crear lenguas artificiales cuyo objetivo era la representación "directa" la realidad.

Esto se debió en gran medida a Bacon, quien había hablado de lenguas con sistemas exóticos de escritura (como los jeroglíficos y los ideogramas chinos) que representaban directamente las cosas. Estas escrituras, afirmaba, estaban formadas por *caracteres reales*, y eran en virtud de ellos por lo cual podían representar directamente las cosas.[3] Los teóricos del lenguaje universal pensaron que un lenguaje artificial común debería estar formado por símbolos semejantes a los que Bacon había aludido en relación con los ideogramas chinos y los jeroglíficos. De hecho, Leibniz retoma y modifica la noción de *character* para hablar de

[3] Las ideas de Bacon en torno a los jeroglíficos y los caracteres chinos se alejaban considerablemente de la interpretación esotérica del renacimiento y que todavía en el siglo VII se encuentra presente, por ejemplo, en la obra del padre Kircher [sobre el punto de vista de Bacon véase Hernández (1995), y sobre la intepretación esotérica véase Eco (1993), caps. 7, 8 y 9; sobre ambas véase Elsky (1984)].

su propio programa como una *lingua characterica* o *characteristica*.

Si bien Leibniz aceptaba que tanto los ideogramas chinos y la escritura de los egipcios, así como los símbolos empleados por los químicos, constituyen ejemplos claros de *caracteres reales*, limitaba sus meditaciones a determinar hasta que punto los ideogramas chinos podían de hecho ser considerados como el núcleo de un auténtico *lenguaje filosófico*.[4]

Es decir, para Leibniz existía una diferencia muy importante entre una lengua formada por *caracteres reales* y una *lengua filosófica*. De hecho, una de sus constantes críticas a teóricos del lenguaje universal, como a Wilkins y a Dalgarno, consistía en señalar que los lenguajes inventados por estos autores eran sólo nominalmente filosóficos ya que en el fondo no pasaban de ser simples lenguas internacionales apropiadas para facilitar el comercio entre los pueblos pero incapaces de expresar las relaciones lógicas que se dan entre los pensamientos. En consecuencia, una verdadera *lengua filosófica* debería poseer algo más que *caracteres reales*.

Este programa tenía como objetivo dos propósitos principales y hasta cierto punto distintos: el de una *lengua característica* y el de una lengua universal. En el primer caso, se busca crear un simbolismo formado por signos agrupados de acuerdo a una sintaxis

[4] En el ***Dissertatio de Arte Combinatoria***, su primera obra, sostenía que "esta escritura universal será tan fácil como lo es de común y será capaz de leerse sin diccionario alguno; y al mismo tiempo, un conocimiento fundamental de todas las cosas se obtendrá a partir de ella. La totalidad de tal escritura se construirá por medio de figuras similares a las geométricas y de imágenes de cierto tipo -como los que los antiguos Egipcios hacían y los Chinos hacen aún" [en Leibniz (1966), p. 11].

fija que determina de antemano las agrupaciones de signos posibles, y cuyo objetivo final es la expresión fiel de los pensamientos pero al mismo tiempo, ser un mecanismo de descubrimiento; esto es, un *ars inveniendi*.[5] En el segundo caso, se intenta construir un lenguaje artificial y universal con las propiedades comunes a las lenguas naturales "cultas" (es decir, aquellas lenguas que además de contar con una representación fónica poseen una escritura), pero sin sus defectos y cuyo propósito inmediato es salvar la barrera impuesta por la diversidad de las lenguas.

He dicho que se trata de dos propuestas hasta cierto punto distintas porque la primera, en tanto lenguaje meramente simbólico, se aparta de las propiedades comunes a las lenguas naturales; y viceversa, en tanto lengua universal con una representación fónica y escritura independiente, se aleja de las propiedades de un lenguaje simbólico.

Sin embargo, Leibniz pensó en algunas ocasiones que una verdadera característica lograría cumplir satisfactoriamente ambos propósitos, y la prueba de ello ha quedado plasmada en su intento de construir un *calculus ratiocinator* como base de una *lingua rationalis universalis*.

La idea de un *calculus ratiocinator* no era del todo nueva, y de hecho, Leibniz había retomado del *Ars magna* de Lulio la idea

---

[5] Macelo Dascal ha resaltado correctamente, a propósito de la tesis (de Brekle) sobre las similitudes entre la filosofía del lenguaje leibniziana y la gramática generativa, que en este aspecto de la *lingua characteria*, Leibniz se encuentra más cerca de los estructuralistas criticados por Chomsky, que de los generativistas (i.e., contexto de descubrimiento vs contexto de justificación) [Dascal (1971), p. 103].

de un procedimiento mecánico de demostración por medio de letras del alfabeto que representaban ciertas ideas fundamentales, mientras que de Hobbes hereda la idea de que las operaciones de la mente no son sino un *computation* que puede ser entendido como la suma o sustracción de una diferencia.[6]

El cálculo leibniziano sería entonces un simbolismo con reglas mecánicas de razonamiento que se comportan de manera similar a los operadores de adición y sustracción del álgebra ordinaria. Desafortunadamente, Leibniz no lograría avanzar demasiado en la construcción de un cálculo semejante. Esta tarea sería en cierta forma completada más tarde por matemáticos y lógicos como Boole, De Morgan y sus continuadores.

De cualquier manera, es evidente que un lenguaje-cálculo como el anterior difícilmente puede poseer las propiedades de una lengua universal en tanto que lengua; y en este sentido, un lenguaje-cálculo con reglas combinatorias perdía de entrada la posibilidad de cumplir con algunos de los objetivos que debía satisfacer una perfecta *caracteristica universal*.

II. Los ideogramas chinos como *lengua filosófica*

Las dificultades mencionadas anteriormente fueron una de las motivaciones principales por las cuales Leibniz llegó a pensar en la lengua china como un prospecto interesante de *lengua*

[6] Leibniz (1966), p. 3.

filosófica. Otro motivo importante se debía a su visión del denominado "prejuicio teológico" mencionado antes,[7] y que consiste, a grandes rasgos, en identificar la *lengua filosófica* con la lengua original o adánica.

Como observa Oliver Roy, "para Leibniz, nosotros poseemos la misma lógica de Dios; y si la lengua original fue la lengua filosófica más perfecta, la nueva lengua filosófica no será también del todo perfecta (por ejemplo, la renuncia de Leibniz a constuir una fonética motivada). Sin embargo, su esencia será la misma, a saber, la expresión de la razón universal, común a Dios y los hombres".[8]

Sin embargo, en el fondo, Leibniz no se apartaba aquí lo suficiente de aquellos teóricos del lenguaje universal que pensaban que los *caracteres universales* terminarían con la maldición babélica. Wilkins, por ejemplo, años antes de elaborar su célebre lenguaje artificial, especulaba en su ***Mercurio*** -un manual de criptología-, sobre las ventajas de una lengua universal en los siguientes términos:

> Después de la caída de Adán, dos grandes maldiciones sufrió la humanidad: la primera fue en cuanto a sus *Obras*, y la otra, en cuanto a su *Lenguaje*... Contra este [último], la mejor ayuda que podemos tener es la lengua *Latina*, y las lenguas artificiales, las cuales en razón de su generalidad, hacen algo por restablecernos de la primera confusión; pero si ahora existiese una suerte de lengua de Caracteres Universal para expresar cosas y nociones, y que pudieran ser legibles para toda la gente y todos los países, de forma tal que los hombres de diversas naciones pudieran con la misma facilidad escribir y leerla, esta invención podría ser en particular un gran progreso al poder promover la difusión y promoción de todas las artes y ciencias; puesto que gran parte del tiempo que ahora se requiere para aprender las palabras, podría ser empleado en el estudio de las cosas. Entonces, la

---

[7] *Supra*. n. 2.
[8] Roy (1972), p. 124.

confusión de *Babel* podría de esta forma ser remediada, si cualquiera pudiera expresar su propio significado empleando la misma clase de caracteres...".[9]

En cierto sentido, puede decirse que en tanto que la lengua universal se presentaba como una restauración infalible ante la *confusio linguarum*, todos estos proyectos presuponen el "prejuicio teológico". De cualquier manera, esto no significa que para Leibniz, como para otros teóricos del lenguaje universal, la lengua china representara la lengua radical adánica.

Aparte de los motivos señalados por Bacon, Leibniz pensaba en la lengua china como una lengua filosófica debido a que creía, siguiendo al orientalista Jacques Golius (1596-1667), en su origen artificial (la cual atribuía al sabio Fo-hi). Además, sostenía que, a diferencia de los jeroglifos, los caracteres chinos "Son quizás más filosóficos y aparentemente se encuentran formados a partir de consideraciones más intelectuales, como las que se presentan en los números, el orden y las relaciones".[10]

Por otra parte, el interés de Leibniz por la escritura china como lengua filosófica tenía motivaciones más generales, dado que sostenía además, que el pensamiento chino era compatible con su propia filosofía.[11] Pero después de ocuparse del asunto por

[9] Wilkins (1641), pp. 55 y 56.
[10] "Sont peut-être plus philosophiques et paraissent bâtis sur des considérations plus intellectuelles, telles que donnant les nombres, l'ordre et les relations" [carta al padre Bouvent, citado por Roy *op. cit.*, p. 136]. Pero además es interesante notar que para Leibniz, en su origen, los caracteres chinos eran jeroglifos: "Je crois avec vous que les anciens caractères chinois étaient hyéroglyphiques. Apparemment c'était au commencement la peinture des choses"/"Creo, como usted, que los antiguos caracteres chinos eran jeroglifos. Aparentemente, se encontraban en un principio como pinturas de las cosas" [citado por Roy, *loc. cit.*].
[11] De hecho, las similitudes entre su filosofía y el pensamiento chino antiguo le fue sugerida por el padre Bouvert, quien después de su regreso de China, le escribió señalando que los antiguos orientales no diferían mucho de su pensamiento al suponer únicamente la existencia de materia y movimiento (esto es, la *res extensa* y la *vis* leibniziana) [Cf. Cook & Rosemont (1981), p. 259; Aiton (1985), p. 332]. Por otra parte, debe tenerse en cuenta ciertas fisuras

algunos años, llegó a dudar del estatus filosófico de la escritura china.

Entre las razones principales Leibniz encontraba que, como en el caso de otras lenguas, el uso a lo largo del tiempo había alterado lo suficiente la lengua original, perdiéndose con ello el método y la razón sobre la cual se rigen sus signos.[12] Otra razón importante era la certeza de que la escritura china no cumplía con aquel ideal de la *lengua característica* en tanto cálculo de los razonamientos; en palabras de Oliver Roy, "los símbolos chinos son, sin lugar a dudas, una nomenclatura pero no una combinatoria".[13]

Como la naturaleza de tal combinatoria fue una de las primeras y principales ideas de este proyecto que después pasaron a segundo plano, será conveniente retroceder un poco en el tiempo y comentar algunas premisas y contenidos relevantes bajo los cuales apareció por vez primera el proyecto de crear una *lingua characteristica universalis* como auténtica *lengua filosófica*.

---

en las afirmaciones de Leibniz sobre los jeroglíficos egipcios y los ideogramas chinos. Como se mencionó en la nota 4, en un principio, afirmaba, de acuerdo con la interpretación baconiana, que los signos de la escritura universal serían parecidos a las símbolos chinos y egipcios. Pero en su estudio preliminar a la obra de Nizolio, parece aceptar la interpretación esotética predominante durante el Renacimiento: "Era lícito a los filósofos esconder sus doctrinas con una especie de lenguaje críptico, como se dice que hacían los sacerdotes egipcios y etruscos o, al menos, por medio de su escritura, como hacen ahora los chinos" [Leibniz (1670), p. 60]. De cualquier forma, Leibniz pensó en la posibilidad de considerar los caracteres chinos como *lengua filosófica* años después de su edición de la obra de Nizolio.

12 "Mais dans la suite des temps ces caractéres (de Fo-hi) ont été altérés...par ceux qui, ne connaisant plus la raison ni la méthode des caractéres, les accommodaient à leurs caprices fondés souvent sur métaphores ou quelques autres rapports plus légers" / "Mas en el curso de los tiempos esos caracteres (de Fo-hi) han sido alterados...por lo que, no se conoce más la razón ni el método de los mismos ya que se han acomodado a caprichos que a menudo se basan en metáforas o en algunas otras similitudes más ligeras" [citado por Roy *op. cit.*, p. 143]. Por supuesto, aquí Leibniz parece entrar en contradicción con su creencia de que los símbolos chinos eran en un principio jeroglifos (es decir, ¡¡menos filosóficos!!

13 Roy (1972), p. 144.

III. El Arte Combinatoria

Como ya he mencionado, para Leibniz una lengua universal puede constituir una verdadera lengua filosófica sólo si es capaz de expresar directamente los pensamientos. En el ***Dissertatio de Arte Combinatoria***, Leibniz afimaba que semejante proyecto podría realizarse elaborando un "alfabeto de los pensamientos humanos" (*Alphabeto cogitationum humanarum*); es decir, una lista de símbolos o caracteres que representen nuestras ideas más fundamentales.

Aunque las fuentes de esta obra son muy diversas, en el fondo puede afirmarse que en sus ideas centrales se encuentra inspirada en el *Ars magna* de Ramón Lull y en el ***Computatio sive Logica*** de Hobbes.[14]

El Arte de Lulio consistía, a grandes rasgos, en un aparato mecánico compuesto de círculos giratorios que contenían un número pequeño de "categorías fundamentales" distribuidas dentro de los espacios vacíos de las figuras geométricas dibujadas en los

[14] De hecho, la influencia de Lulio (o Lull, Lully, o Liull) llega a Leibniz por medio del movimiento pansofístico y enciclopedista de los pensadores protestantes de la academia de Herborn, y en especial de John Henry Alsted (maestro, entre otros, de Comenius y fuente principal de sus proyectos sobre el lenguaje universal y la combinatoria) [sobre los enciclopedistas de Herborn véase Rossi (1983), cap. VI; y en relación directa con Leibniz, véase Loemker (1961)]. El Dr. Beuchot incluye también entre las influencias de Lulio la idea de una lengua universal pero es claro que esta idea ya estaba en el ambiente y no era exclusiva de él [Cfr. Beuchot (1985)]. Por otra parte, debe señalarse también que la idea del entendimiento como un cálculo no se debe únicamente a la influencia de Hobbes, pues John Bisterfeld parece haber influido profundamente en este punto y otros no menos importantes. Además, Couturat ha argumentado de manera convincente en contra del peso de la obra de Hobbes en el proyecto leibniziano. Pero de cualquier forma, es innegable el reconocimiento de Leibniz a Hobbes en cuanto a este punto [Cf. Loemker art. cit., pp. 330, 334 y 335; Couturat (1901), apéndice II].

círculos. De manera que al hacer girar los círculos se obtenían combinaciones de sus términos.[15] El arte luliano tenía como propósito principal ofrecer un instrumento infalible para convencer a los infieles de la verdad de los dogmas de la religión cristiana, pero también, habría de servir como un medio para descubrir nuevos conocimientos.[16]

Ambos objetivos eran posibles y compatibles para Lulio debido a que creía, como resumió Frances Yates, en que su Arte era "una lógica 'natural', una lógica fundamental basada en la realidad".[17] La tabla de categorías luliana estaba formada por seis series, cada una de las cuales correspondía a nueve absolutos, nueve relaciones, nueve preguntas, nueve sujetos, nueve virtudes y nueve vicios. Si bien Leibniz retomaba la idea general del arte luliano (esto es, la idea de un método o dispositivo de combinación mecánico por medio del cual sería posible descubrir nuevas verdades en todos los campos del conocimiento, evitar el error y convertir a los infieles), se daba perfectamente cuenta de sus limitaciones.

---

[15] Los estudiosos de la obra de Lulio adimten que no se cuenta con una idea suficientemente clara del Arte, el cual, por lo demás, se encuentra formulado de distintas maneras a lo largo de su amplia obra. Una descripción detallada del Arte tal y como aparece en el ***Tractatus novus de astronomia*** puede encontrarse en Yates (1990), I; y sobre el Arte como máquina lógica, véase Gardner (1973), cap. I.

[16] Por otra parte, Martin Gardner hace la siguiente evaluación del arte de Lull: "el *Ars Magna* constituye el primer intento, en la historia de la lógica formal, de emplear diagramas geométricos con el propósito de descubrir nuevas verdades no matemáticas y, también, la primera tentativa de utilizar un dispositivo mecánico -una especie de máquina lógica primitiva-, para facilitar la ejecución de operaciones en un sistema lógico" [*ibid.*, p. 12].

[17] "Por medio de ésta, y por medio de las analogías elementales, -continua Yates-, podía realizar todas las ciencias y artes a través del Arte; podía ascender la escala del ser y entender la naturaleza de Dios" [Yates *Op. cit.*, pp. 14-15].

En primer lugar, las combinaciones de las categorías no eran exhaustivas, y en segundo, la tabla de categorías le parecía demasiado arbitaria y artifical, dado que no había ninguna razón de peso para tomar nueve categorías por cada serie, ni había razón para sostener los vicios y las virtudes como ideas universales o primitivas.[18]

En cuanto a Hobbes, Leibniz retoma su concepción del razonamiento como un cálculo (*Per ratiocinationem autem intelligo computationem*), para llegar más tarde a su idea de una lógica como *calculus ratiocinator*. "Thomas Hobbes, escribe Leibniz en ***De Arte Combinatoria***-, un profundo conocedor de principios, ha afirmado correctamente que todo lo que realiza nuestra mente es un *cálculo*, por el cual se entiende tanto la adición de una suma como la sustración de una diferencia".[19]

El primer método de construcción de la *lengua filosófica* consistía, en sus rasgos generales, en una reducción de todos los conceptos a un conjunto mínimo de conceptos primitivos (no definidos), de tal suerte que este conjunto sería suficiente para construir un "alfabeto de los pensamientos". Este recuento de pensamientos fundamentales tenía para Leibniz el propósito de garantizar la verdad de sus resultados, ya que la simple manipulación mecánica de sus símbolos por medio de operaciones

[18] Cf. Rossi (1989), p. 211; y E. J. Aiton (1992), p. 42. Sin embargo, debe añadirse que en cuanto a esto último, la critica de Leibniz no es justa con Lulio, ya que el desacuerdo parece ser más bien teológico.

[19] En Leibniz (1966), p. 3.

combinatorias permitiría obtener como resultado todas las afirmaciones verdaderas.[20]

No obstante, y por extraño que pueda parecer, en el ***Arte Combinatoria*** no se ofrece ninguna lista, ni siquiera provisional, de los signos que deberían conformar el alfabeto de los pensamientos, ni de las ideas fundamentales que pretenden representar. De cualquier manera, el tratado presenta algunas de las tesis más relevantes que aparecen en sus posteriores intentos de construir un sistema lógico como *characteristica universalis*.

Entre estas tesis se encuentran: a) la idea de que toda oración contiene por lo menos un sujeto y un predicado; b) que todas las verdades necesarias son, o pueden ser reducidas a expresiones "idénticas"; y por último, c) que toda oración o concepto puede analizarse mejor en términos intensionales. Naturalmente, la primera tesis, y piedra angular de la interpretación russelliana de la filosofía de Leibniz, define el amplio vínculo entre la lógica tradicional y la leibniziana.

De hecho, en el apartado dedicado a la lógica del juicio, Leibniz se ocupa en demostrar que todos los modos de la segunda y tercera figura de la teoría del silogismo pueden deducirse a partir de la primera utilizando el principio de no-contradicción. Además, si bien reconocía la existencia de argumentos asilogísticos válidos, esto no le impedía sostener que "la invención de la forma de los silogismos es una de las más

[20] "Llegué a esta notable conclusión -escribió Leibniz tiempo después-, concretamente que podía formarse un *alfabeto de los pensamientos humanos*, y que de la combinación de las letras de este alfabeto y del análisis de las letras formadas por ellas, todo podía ser descubierto o comprobado" [Leibniz (1951), p. 20].

hermosas del espíritu humano, e incluso también una de las más considerables. Es una especie de *matemática universal* cuya importancia no es suficientemente conocida".[21]

Para Leibniz, era muy claro que la teoría del silogismo debía de cubrir todos los tipos de razonamiento validos, y por consiguiente, pensaba que esto sería posible llevando a cabo una reforma que cubriera los argumentos que la teoría del silogismo dejaba fuera. Esta reforma no sería otra cosa que una teoría de la deducción, pero tal teoría debía ser entendida más como una reformulación de la doctrina del silogismo que como una teoría en donde el silogismo es sólo una de las diferentes formas de deducción.

Dicho de otra manera, Leibniz pretendía construir una nueva teoría del silogismo que se diferenciaría de la anterior principalmente por su poder para explicar aquellos argumentos válidos que la antigua teoría no podía explicar. Es así como llega a sostener también que un silogismo adecuado ha de ser como el "hilo de Ariadna" del pensamiento, sin el cual "nuestro espíritu no podría recorrer un camino largo sin perderse".

Además, como arte del descubrimiento, la nueva teoría del silogismo podría encontrar todas las afirmaciones verdaderas por medio de su combinatoria, la cual permitiría a partir de un sujeto dado, encontrar todos sus predicados posibles y viceversa; dado un predicado, encontrar todos sus sujetos posibles.[22]

---

[21] Leibniz (N.E.) IV, 17, p. 579.

[22] Leibniz (1966), p. 3.

Como ya mencioné, en este tratado no se incluye ninguna lista de los signos fundamentales que se supone conformarían el alfabeto de los pensamientos,[23] y por consiguiente, tampoco se presentaba algún desarrollo o progresión de la combinatoria de un sujeto o predicado dado. Además, tampoco se ofrecía una cifra tentativa del número de símbolos que conformarían el alfabeto de los pensamientos, ni se presentaban ejemplos de la manera como los signos básicos podrían combinarse para formar signos compuestos y oraciones.

Naturalmente, la obra guardaba completo silencio acerca de otras cuestiones relativas al modo de operar del *ars inveniendi* (*i.e.*, si la combinatoria permitiría formar tanto las oraciones verdaderas y falsas -como afirmaba en relación con el problema de los sujetos y predicados posibles-, ¿de qué manera la combinatoria puede establecer cuáles oraciones son verdaderas y cuáles falsas?, etc.,). En este sentido, la *lengua universal* como *arte del descubrimiento* era más bien un proyecto nebuloso.

Sin embargo, la tabla combinatorial leibniziana (que en esencia es el triángulo de Pascal) se aplicaba a ejemplos concretos, como al registro musical de un órgano y la teoría aristotélica de la generación de los elementos a partir de las cuatro cualidades primarias. En cuanto a las oraciones o proposiciones, afirmaba, eran "com2inaciones"; es decir,

[23] En realidad, Leibniz afirmaba -en ***De Arte Combinatoria***-, que los símbolos de la lengua universal no formarían un alfabeto fijo [Leibniz (1966), p. 11]. Pero curiosamente, si bien la idea misma de un alfabeto de los pensamientos (como conjunto de símbolos que representan "las ideas fundamentales"), dejaba de lado el desarrollo teórico de esta idea, en la práctica los sistemas lógicos leibnizianos se elaboraban a partir de variables.

"complexiones" con exponente 2, dado que toda oración debía de contener dos términos (sujeto y predicado).

Una "complexión" era "la unión de un todo pequeño y uno grande",[24] y las totalidades, grandes o pequeñas, se debían descomponer en partes, ya que "todo lo que existe o puede pensarse se encuentra, principalmente, compuesto de partes ya sea reales, o bien, conceptuales".[25]

Aquí, no obstante, es importante señalar que "unión" no significa la suma lógica de dos conceptos o totalidades sino el producto lógico o inclusión de los mismos. De hecho, a lo largo de sus intentos de elaborar un sistema lógico completo, Leibniz prestó muy poca atención a la suma lógica debido, seguramente, a la excesiva importancia que otorgaba a su teoría de la relación de inclusión: "Siempre el predicado o consecuente está incluido en el sujeto o antecedente, y en eso mismo consiste la naturaleza de la verdad en general y la conexión de los términos enunciados."[26]

De cualquier forma, la relación parte-todo que Leibniz pretendía explotar como base de su mecanismo combinatorio es sin lugar a dudas un principio metafísico muy importante dentro de su sistema filosófico[27] y, por consiguiente, un motivo siempre presente en su tendencia al análisis de la proposición en términos intensionales. Desde el punto de vista del proyecto de

[24] *Ibid.*; p. 2. Una explicación de los premisas metafísicas que subyacen a la combinaroria puede encontrarse en Beuchot (1985), pp. 190-194.
[25] *Ibid.*, p. 3.
[26] "Semper igitur praedicatum seu consequens inest subjecto seu antecedenti. et in hoc ipso conssistit natura veritatis in universum seu connexio inter terminos enuntiationis." ["*Primae Veritas*", en Leibniz (1903), pp. 518-19; Cf. Leibniz (1686), § 132].
[27] Sobre la importancia de esta relación en la filosofía de Leibniz véase Burkhard (1989).

una *caracteristica universal*, se trata de una relación fundamental que merece una representación simbólica adecuada, ya que si "todo lo que existe o puede pensarse" se encuentra bajo el dominio de esta relación, entonces la verdadera *lengua filosófica* debe poseer un simbolismo tal que pueda representar de la mejor manera la forma como se presenta esta relación en los pensamientos y las cosas.

IV. La lógica como *lingua characterica*

Una premisa implícita en el estatus ontológico de la relación parte-todo es la aceptación de una identidad estructural entre la constitución de lo existente (o de las cosas) y el pensamiento. Por lo demás, se trata de un presupuesto muy importante que después encontraremos en diferentes versiones en pensadores como Russell y Wittgenstein.

En abstracto, podemos decir que se trata de un rasgo peculiar y definitorio de aquella concepción de la lógica que, siguiendo a Heijenoort, podemos denominar "absolutismo lógico".[28] De hecho, una de las tesis centrales de este trabajo consiste en sostener que la concepción absolutista tiene su origen en la concepción leibniziana de la lógica como *lingua characteristica* o *characterica*.

No obstante, es importante tener siempre a la vista que no todos los rasgos de la concepción de la lógica como *lengua*

[28] Cf. Heijenoort (1984).

característica son compartidos por la concepción absolutista que después encontramos en lógicos como Frege, Peano, Russell y Wittgenstein. De hecho, es interesante notar que la lógica como arte del descubrimiento sobrevive en lógicos como Mill y Jevons bajo el título leibiziano de "lengua filosófica" pero que en el fondo no corresponde más que a un prerequisito lingüístico de lo que entendemos ahora por lógica inductiva.

Por lo demás, si bien el absolutismo lógico leibniziano viene determinado en gran medida por su concepción de la lógica como arte del descubrimiento, la idea misma de una lógica de la invención es ajena a la concepción absolutista que encontramos en Frege y Russell.

De cualquier manera, una lógica como *ars inveniendi* es una lógica absolutista por derecho propio, aunque quizás sea conveniente insistir en el hecho de que se trata de un objetivo o proyecto que nunca se logra realizar y cuyos preparativos se encuentran en realidad más cerca de la teoría del silogismo que de la lógica contemporánea. Por ejemplo, en una carta a Gabriel Wagner explicaba su concepción de la lógica en los siguientes términos:

> Por lógica o arte del razonamiento entiendo el arte de emplear el entendimiento no sólo para juzgar a propósito de la verdad sino también para descubrir verdades ocultas. Si tal arte es posible, o en otras palabras, si existen marcadas ventajas que puedan encontrarse en tales procesos, de aquí se sigue que este arte debe por todo los medios ser buscado y altamente valorado, y desde luego, ser considerado como la clave de todas las artes y las ciencias.[29]

Además, uno de los propósitos principales de Leibniz en esta carta es la defensa de la lógica aristotélico-escolástica, a la

[29] Leibniz (1969), p. 463; (1982), p. 354.

cual se encuentra ligado en aspectos muy importantes, como ya he comentado. Pero lo que resulta sin duda relevante es la situación que Leibniz encuentra entre el proyecto de la lógica como *lingua characterica* y la teoría del silogismo que le antecede:

> Debo desde luego confesar que todos nuestros sistemas de lógica hasta ahora no son sino la sombra de aquello que anhelo y veo tan distante; pero debo confesar también que, en honor a la verdad y dando a cada quien lo debido, he encontrado muchas cosas útiles y buenas en la lógica del pasado.[30]

Quizá no sea superfluo añadir que Leibniz mantiene en muchos otros aspectos el mismo ánimo conciliador ante los conocidos rechazos del pensamiento humanista y moderno hacia la tradición escolástica.[31] Este es, por ejemplo, el motivo principal de su ***Dissertatio de stilo philosophico Nizolii***,[32] y también mucho del contenido de sus reflexiones sobre la filosofía de Locke, en donde por lo demás, encontramos la siguiente apología de la lógica (escolástica): "como la lógica es el arte que enseña el orden y la relación entre los pensamientos, no veo motivos para repudiarla. Por el contrario, los hombres se equivocan por falta de lógica".[33]

Por otra parte, conviene recordar que en el escrito inédito *Initia et specimina scientiae generalis* que pretendía publicar como introducción a una Enciclopedia (que sería el complemento básico de la *característica universal*, en una de las muchas versiones de la misma), Leibniz usaba el pseudónimo de Pacidius,

[30] *Loc. cit.*
[31] Cf. Leibniz (D.M.), § 11.
[32] Entre sus reivindicaciones más importantes estan: 1) el no atribuir a Aristóteles los errores de los escolásticos. 2) la utilidad de la metafísica y 3) la superioridad del nominalismo escolástico ante el nominalismo moderno a la Hobbes [Cf. Leibniz (1670), 12, 26, 27, 28, 29 y 30].
[33] Leibniz (N.E.) III, § 10, p. 404.

nombre que tenía la connotación de un espíritu conciliador que uniría a todos los pensadores en la tarea común de generar los nuevos conocimientos.

De hecho, la idea de una *lingua characterica* se encuentra motivada por el mismo ánimo de conciliación y concordia intelectual, ya que por medio de semejante simbolismo:

> Seríamos capaces de convencer a todo el mundo de lo que hemos encontrado o concluido, puesto que sería fácil de verificar por medio de un cálculo, de la misma manera como se procede en la aritmética. Y si alguien dudara de mis resultados, le diría: "calculemos, señor", y así, tomando la pluma y la tinta, decidiríamos rápidamente la cuestión.[34]

Es obvio que aquí la idea de fondo no es otra cosa que la idea hobbesiana del razonamiento como un cálculo, pero también debe ser evidente que, como en otros lugares, el ideal de la *lengua universal* se encuentre determinado por la concepción de la matemática como paradigma de verdad y certeza.

Uno de los pasos previos para llegar a semejante lenguaje-cálculo consistía en construir un lenguaje que se diferenciaría del lenguaje natural, entre otras cosas, por eliminar todos aquellos elementos accesorios o superfluos para la expresión de los pensamientos. En numerosos manuscritos, Leibniz insiste, por ejemplo, en considerar el género y las diferencias gramaticales entre sustantivo y adjetivo como elementos innecesarios en una *gramática racional*:

[34] "De plus on ferit convenier tout le monde de ce qu'on auroit trouvé ou conclu. puisqu'il seroit aisé de verifier le calcul soit en le refaisant, soit en essayant quelques preuves semblables à celle de l'abjection novenaire en arithmetique. Et si quelqu'un doutoit de ce que j'aurois avancé, je luy dirois: contons, Monsieur, et ainsi prenant la plume et de l'encre, nous sortirions bientost d'affaire" [*Préface a la Science Générale* (c. 1677) en Leibniz (1903), pp. 153-4; (1951), p. 15].

> Antes de poder proceder en nuestras investigaciones lógicas y sacar algo de valor de ellas, es necesario hacer primero una investigación gramatical... Un sustantivo y un adjetivo se distiguen en que en el último, el género se encuentra determinado por otro. Pero así como uno puede ignorar el género en un lenguaje racional, la diferencia entre sustantivo y adjetivo puede pasarse por alto.[35]

Observaciones similares encontramos en relación con el plural, las declinaciones, las patículas y los casos. Según la interpretación de Burkhardt, este proceso de depuración debía de llevarse a cabo en dos pasos. El primero de ellos consistiría en la eliminación de las anomalías del lenguaje por medio de paráfrasis, y cuando no pudiesen formularse en tal lenguaje, por medio de definiciones. El segundo paso consistiría en la eliminación de los elementos superfluos de la gramática y reemplazados por otros por medio de paráfrasis y definiciones.[36]

No obstante, existen varias razones de peso para no seguir la interpretación de Burkhardt. Una de ellas obedece a que su caracterización del primer paso parece apuntar más a la semántica que a la sintaxis,[37] y por lo tanto, queda fuera de la gramática. Además, dado que la construcción de la *característica* ha de formarse a partir del *alfabeto de los pensamientos humanos*, este primer paso resulta innecesario; es decir, Leibniz no necesitaba detenerse en semejantes "anomalías", ya que la *lingua*

---

[35] "Antequam pergere in Logicis contemplationibus liceat, atque inde fabricare aliquid, prius Grammaticis opus est... Nomen substantivum et adjectivum in eo distinguuntur, quod adjectivum habet genus ab alio rectum. Verum quia in lingua rationali careri potest generibus, ideo discrimen etiam inter substantivum et adjectivum negligi potest" [Leibniz (1903), p. 247; (1966), p. 12].

[36] Burkhardt (1987), p. 44.

[37] Por otra parte, Burkhardt se ha defendido de la críticas acerca de lo poco claro que resulta este primer paso diciendo que él no puede hacerlo más claro de como lo presenta Leibniz [*ibid.*, p. 59, n. 2].

characterica no retomaría los significados habituales que se encuentran en las lenguas naturales, puesto que para su empleo bastaría confeccionar un diccionario, o mejor, una Enciclopedia en la cual todos los conocimientos existentes se presentarían por medio de definiciones.

En cuanto al segundo paso, si bien es cierto que para algunos elementos, como la flexión y las marcas de casos, se propone reemplazarlos por preposiciones, esta no es la norma para todos los elementos ya que algunos de ellos, como el género y el plural, pueden simplemente eliminarse dado que "son claramente inútiles para el razonamiento y han sido inventados para propósitos conversacionales".[38]

Otro paso relevante en la depuración del lenguaje es la forma como pretende establecer las relaciones entre los términos de una proposición. Como ya mencioné, la relación parte-todo es la relación fundamental bajo la cual se componen tanto los pensamientos como las cosas. Ahora bien, en su manuscrito *Elementa calculi* (abril de 1679), señala que su manera de entender la relación entre el género (genus) y la especie difiere de la forma como lo hacen los escolásticos ya que para él, el género se debe encontrar contenido en la especie y no a la inversa, como suponen los últimos. Es decir, "el concepto 'oro' y el concepto 'metal' difieren como la parte y el todo, ya que el concepto 'oro' contiene al concepto 'metal' y a otros más -como por ejemplo, el concepto "ser el más pesado de los metales"-; en

[38] "*Characteristica Verbalis*" (c. 1680) [en Leibniz (1903), p. 434 o en Dascal (1987), p. 176]. El texto se refiere aquí en particular al género: "*Discrimen generum*, masulini, foeminini, neutrius, planè inutile est ad ratiocinationem, et inventum tantùm colloquii causa...".

consecuencia, el concepto 'oro' es más grande que el concepto 'metal'".[39]

Naturalmente, el punto de vista de Leibniz recae en la relación de implicación entre conceptos, dado que decir que el género 'metal' se encuentra incluido en la especie 'oro', no es más que otra forma de expresar que el concepto 'oro' implica el concepto 'metal'. Además, como observó Ishiguro, aquí "el punto de vista de Leibniz parece estar emparentado con la tesis 5.122 del ***Tractatus***, en la cual se afirma que si **p** se sigue de **q**, entonces el sentido de **p** se encuentra contenido en el sentido de **q**".[40]

Por supuesto, desde el punto de vista escolástico, el género es un concepto más amplio que el de la especie en tanto que, por ejemplo, el género 'metal' contiene además otros tipos de especie (como la plata, el bronce, etc.), de tal suerte que la especie 'oro' es sólo una parte del todo. Al respecto, Leibniz observa que usando un simbolismo adecuado se puede probar todas las reglas de la lógica por medio de un cálculo diferente del suyo, simplemente estableciendo algún tipo de inversión del mismo.[41]

Desde luego, el posible isomorfismo entre ambos cálculos es más una presunción que un hecho puesto que aquí no se presentan pruebas de las leyes lógicas. No obstante, lo interesante es la justificación que ofrece para asumir su tipo de cálculo: "En todo caso, he preferido considerar conceptos universales, i.e. ideas,

[39] Leibniz (1903), p. 53; (1966), p. 20.
[40] Ishiguro (1990), p. 48. La tesis se cita en el texto con un 2 de más: 5.1222.
[41] Leibniz, *loc. cit.*

y sus combinaciones, debido a que no dependen de la existencia de individuos".[42]

Naturalmente, el comentario es relevante en muchos sentidos. En primer lugar, parece justificar de manera razonable su tratamiento intensional de la lógica y al mismo tiempo, establecer una división epistemológica paralela a la dicotomía ontológica universal-particular. En segundo lugar, revela notables diferencias con los desarrollos posteriores de la lógica abolutista; y por último, pero no por ello menos importante, debido a su oposición con la conocida interpretación nominalista que Benson Mates ha hecho de la filosofía de Leibniz y su relación con la *lengua filosófica*.[43]

En principio es claro que al intentar un análisis intensional de los conceptos, Leibniz pretende garantizar que las reglas lógicas puedan demostrar todas las proposiciones verdaderas como *verdades de razón*; es decir, como proposiciones reducibles a identidades. Por tal motivo Leibniz asigna a cada término un *número característico* que debe servir de base para las operaciones del lenguaje-cálculo y mostrar al mismo tiempo el tipo de identidad de la proposición. Por ejemplo, la proposición "El oro es un Metal" puede expresarse como S = Px (siendo x un número adecuado) y como la proposición es verdadera sólo si el género esta contenido en la especie, la identidad debe establecerse entre el sujeto (S) y una especie del predicado (Px).

[42] "Verum malui spectare notiones universales sive ideas earumque compositiones, quia ab individuorum existentia non pendent" [*loc. cit.*].
[43] Cf. Mates (1982), X.

No obstante, al intentar "reducir" a identidades las proposiciones verdaderas que expresan las relaciones entre el todo y la parte, Leibniz vuelve de alguna manera al tratamiento extensional que pretende dejar de lado, ya que de S = Px se infiere que el sujeto está contenido como especie en el predicado.

Por otra parte, si su tratamiento intensional de la lógica pretende ser el adecuado para expresar verdades de razón mientras que el enfoque extensional con la expresión de verdades de hecho, como parece suponer Aiton,[44] la lógica como *lingua characterica*, y desde luego, como *ars inveniendi*, además de tener limitaciones obvias, parece no coincidir en cuanto al tipo de reglas lógicas con las que presumiblemente se ha de operar en una lógica extensional (independientemente del hecho de si en este último cálculo pueden probarse dichas reglas).

Por otra parte, la gran diferencia entre Leibniz y los absolutistas lógicos que le preceden recae precisamente sobre el tipo de tratamiento que cada cual hace de la lógica. Por ejemplo, en Leibniz parece existir una diferencia ontológica importante entre lo que existe (los individuos) y lo que es susceptible de pensamiento (los conceptos como entidades abstractas universales), mientras que para otros absolutistas, como Frege, el par concepto-objeto (universal-particular) no coincide necesariamente con el par ontológico concreto-abstracto.

La consecuencia sorprendente de lo anterior consiste en que la concepción absolutista de la lógica no se encuentra asociada a

[44] Aiton (1985), p. 140.

un sólo tratamiento de la misma. De hecho, las evidencias parecen mostrar que la concepción absolutista es compatible con ambos tratamientos. Por ejemplo, para Leibniz, la regla 4 de este primer intento de cálculo (relativa al descubrimiento de los adecuados *números característicos*) garantiza por si solo su estatus absolutista: "La regla presentada en el artículo 4 es suficiente para *incluir cualquier cosa de la totalidad del mundo en nuestro cálculo*".[45]

Ahora bien, dado que uno de los rasgos principales de la concepción abolutista de la lógica consiste en el isomorfismo que establece entre pensamiento y realidad (o mundo), es indispensable que su universo incluya en principio todos los objetos existentes. Y puesto que una lógica abolutista ha de reflejar ese isomorfismo, una lógica extensional o intensional puede ser absolutista siempre y cuando su universo pretenda en principio incluir todos los objetos del universo existente.

En el caso de Leibniz, como ya he mencionado, el isomorfismo se manifiesta por medio de la relación fundamental parte-todo; y además, como acabamos de ver, el universo de su cálculo pretende en principio incluir todos los objetos del mundo.

En resumen, si bien entre los absolutistas existe una diferencia ontológica muy amplia acerca del tipo de cosas que pueden figurar como elementos (objetos o individuos) del mundo, de cualquier manera todos ellos sostienen que todas las cosas

[45] "Caeterum regula artic. 4. tradita sufficit ad omnes res totius mundi <calculo nosotro comprehendendas>" [Leibniz (1903), p. 50; (1966), p. 18; (1969), p. 136; las cursivas son mías]

(i.e., objetos o individuos) del mundo deben encontrase representados en el universo de sus respectivos sistemas lógicos.

Por otra parte, ya que las consideraciones ontológicas han aflorado a lo largo de los comentarios anteriores, podemos pasar rápidamente a la interpretación nominalista que Benson Mates hace de la metafísica leibniziana y, en particular, a la forma como supone que influye en la construcción de la *lengua filosófica*.

V. Nominalismo y *lingua characterica*

En cierto sentido, al admitir que Leibniz considera como existente sólo entidades individuales, se ha dado aquí por supuesto algún tipo de nominalismo. Sin embargo, el problema no parece radicar en esta clase de nominalismo, sino en la fuerza y presión que pueda ejercer sobre otras ideas leibnizianas, pero también, en las contradicciones que pueden surgir en el seno de su pensamiento.

Por supuesto, la consecuencia inmediata del nominalismo es la negación ontológica de toda clase de entidades abstractas; por lo tanto, la cuestión se traduce en la interpretación que se lleve a cabo de esta consecuencia y, naturalmente, la interpretación más obvia es aquella que en efecto coincide con aquel nominalismo clásico que tiende a rechazar las entidades abstractas por considerarlas productos nocivos de la mente y que, por consiguiente, pretende emplear en su lenguaje sólo términos individuales.

Esta actitud negativa hacia los universales es común a los nominalistas de corte empirista, y es el tipo de nominalismo que Benson Mates atribuye a Leibniz y al objetivo de su *lengua filosófica*, apoyándose en numerosos pasajes y en argumentos bastante sólidos. Por ejemplo, Mates considera que el nominalismo leibniziano no ha sido suficientemente reconocido debido a que no se ha reparado en que "un nominalista está perfectamente autorizado para emplear terminología abstracta siempre y cuando poseea una forma de eliminarla en favor de una terminología concreta; y consecuencia, del hecho de que un filósofo use términos abstractos no se sigue que no sea nominalista".[46]

Pero si bien, Mates ofrece algunos de los intentos por "eliminar" los términos abstractos, reconoce que Leibniz nunca presentó instrucciones generales para llevar a cabo esta tarea.[47] Cabe por lo tanto la duda de si los ejemplos de Mates son en realidad intentos por eliminar entidades abstractas, y si ese es el objetivo de la *lengua filosófica*.

Mates añade que el nominalismo leibniziano se inclina por proposiciones como "x está dos veces más caliente que antes" en lugar de afirmaciones como "el calor de x se ha duplicado", mientras que términos generales como 'hombre' y 'animal' pueden ser empleados sin presuponer abstracciones como 'humanidad' o 'animalidad', cambiando simplemente la expresión "el hombre es un animal" por "todos los hombres son animales" o bien, por "si alguien es un hombre, entonces es un animal".[48]

---

[46] Mates (1986), p. 171.
[47] *Ibid.*, p. 174.
[48] *Loc. cit.* Por lo demás, su afirmación de que "en otro lugar, sugiere en efecto que la ocurrencia del término abstracto "animalidad" (animalitas) puede

Sin duda, todos los ejemplos mencionados por Mates pertenecen a Leibniz, no obstante, no existen suficientes elementos de peso para dar por sentado que con ellos Leibniz pretende deshacerse de los términos abstractos. Por supuesto, los últimos ejemplos pertenecen al tratamiento extesional de la lógica que Leibniz remonta de los escolásticos pero que desecha, como ya he mencionado, porque prefiere no depender de la existencia de individuos!

Es cierto también que en algunas ocasiones, como en *Specimen Calculi Universalis*, Leibniz no toma partido por ninguno de los dos tratamientos y usa expresiones como "el hombre es un animal" y "cada hombre es un animal" de manera equivalente; pero esto dista de hablar en favor de la eliminación de entidades abstractas.

Por otra parte, Mates pretende justificar la "técnica" de eliminación de su primer tipo de ejemplos citando un poco antes algunas de las conocidas tesis epistemológicas de los ***Nuevos Ensayos*** en donde se afirma, por ejemplo, que "el conocimiento de los seres concretos es siempre anterior al conocimiento de los seres abstractos: se conoce mejor lo caliente que el calor".[49]

El argumento no explícito de Mates puede reconstruirse entonces de la siguiente manera: si el conocimiento científico no es sobre universales sino sobre individuos igualmente posibles,

---

ser eliminada en favor del predicado "x es un animal"", es simplemente falsa, ya que la cita, que pertenece a las ***Generales Inquisitiones***, se ocupa por el contrario, del origen de los términos abstractos!! [Cf. Leibniz (1686), § 137 ss.; (1903), p. 389; (1966), p. 78].

[49] Leibniz (N.E.) II, § 12, p. 160.

como afirma Leibniz, entonces los términos abstractos deben eliminarse y sustituirse por términos concretos.

No obstante, Mates olvida o deja de lado algunas ideas leibnizianas que no permiten llegar a tales conclusiones; como por ejemplo, su afirmación de que "lo concreto no es concreto sino por la mediación de lo abstracto".[50] O bien, el comentario previo a la cita de Mates:

> Las unidades existen por separado, y el entendimiento las considera juntas, por dispersas que estén. Sin embargo, *aunque el entendimiento sea el que las considere, no por ello dejan de tener fundamento y realidad;* pues el primer entendimiento es el origen de las cosas, e incluso la realidad de las cosas.[51]

Desde luego, este primer entendimiento es Dios, y sólo él puede conocer con absoluta certeza el carácter analítico de las verdades contingentes. De hecho, las proposiciones sobre individuos son para Leibniz contingentes únicamente por nuestra incapacidad para conocer su verdad con total certeza. La razón principal de ello obedece a que para Leibniz, el sujeto de las proposiciones contingentes es un sujeto infinitamente complejo, de modo que para demostrar su verdad se requiere realizar un análisis al infinito, que desde luego, es humanamente imposible de realizar.[52]

---

[50] *Ibid.*, II, § 4, p. 134.
[51] *Ibid.*, II, § 12, p. 159 [las cursivas son mías].
[52] Leibniz ofrece un ejemplo aritético muy sugerente para ilustrar esta idea: "Existe una discrepancia esencial entre las verdades necesarias o eternas y las verdades de hecho o contingentes: diferénciandose entre sí como los números racionales y los irracionales. Las verdades necesarias, en efecto, pueden reducirse a verdades idénticas, como las cantidades conmensurables a su medida común; pero en las verdades contingentes, como en los números irracionales, la reducción se extiende hasta el infinito, y nunca se llega a su término; de modo que la certeza y la perfección de las verdades contingentes únicamente son conocidas de Dios, que de una ojeada abarca el infinito" / "Essentiale est discrimen inter veritates necessarias sive aeternas, et veritates facti sive contingentes, differuntque inter se propemodum ut numeri rationales et surdi. Nam veritates necessariae resolvi possunt in identicas, ut quantitates commensurabiles in communem mensuram, sed in veritatibus contingentibus, ut in numeris surdis, resolutio procedit in infinitum, nec unquam terminatur; itaque certitudo et perfecta ratio veritatum contingentium

En consecuencia, nuestro conocimiento de los individuos es sólo conjetural ya que sólo es posible tener "certeza moral" acerca de su verdad, pues entre otra razones, "en las materias que sólo conocemos empíricamente, todas nuestras definiciones son forzosamente provisionales".[53]

Por el contrario, las verdades de la lógica y la matemática pueden ser conocidas por nosotros con absoluta certeza en tanto que podemos ofrecer una demostración de su verdad. En este sentido, las proposiciones de la lógica y la matemática son consideradas como verdades necesarias porque pueden ser demostradas por medio del razonamiento mientras que las proposiciones empíricas o de hecho son consideradas como verdades posibles porque no podemos ofrecer una demostración concluyente de su verdad.

Naturalmente, la lógica y la matemática trabajan con entidades abstractas, y según Leibniz, el motivo de su necesidad depende en buena medida del uso de semejantes términos; pero además, el conocimiento conjetural de la naturaleza depende también en alguna medida del empleo de ideas abstractas:

> Pero esta certeza moral no está apoyada únicamente en la inducción, pues no se obtiene sólo de ella, sino con la ayuda o sostén de las siguientes proposiciones universales que no dependen de la inducción sino de una idea universal o una definición de los términos: 1) si una causa es la misma o similar en todos los casos, el efecto será el mismo o semejante en todos los casos; 2) no se asume la existencia de una cosa que no haya sido percibida; y por último, 3) cualquier cosa no asumida es ignorada en la práctica hasta que no sea probada.[54]

---

soli Deo nota est, qui infinitum uno intiutu complecitur". *Specimen Inventorum De Admirandis Naturae Generalis Arcanis* [en Leibniz (1966a), pp. 30-31; Gerhard (1875-1890), VII, p. 309].

[53] *Ibid.*, III, § 5, p. 350 [para más discusión sobre este punto véase Rescher (1981), IV].

[54] Leibniz (1670), p. 98; (1969), p. 129.

En la carta a Wagner sobre la utilidad de lógica cita antes afirma todavía con mayor vehemencia que "todo resultado positivo se funda en las cosas abstractas y no en las concretas, en la medida en que éstas puedan proporcionar algo según la forma abstracta. Y esto acontece en aquellos casos en que la ciencia se sirve de una *materia* contingente".

Espero que esto sea suficiente, por el momento, para descartar la posibilidad de una interpretación nominalista como la que propone Benson Mates. Sin duda, Leibniz asume como existentes entidades concretas, pero de aquí no se deduce su rechazo a las entidades abstractas.

Ante todo, debe tenerse muy en cuenta que Leibniz es un racionalista, y que como tal, no puede sentir temor alguno por esas creaturas de la mente (como las llamaba Locke). De hecho, el isomorfismo entre pensamiento y realidad que aquí he caracterizado como un rasgo importante de su concepción absolutista de la lógica se encuentra en franca oposición con una interpretación nominalista como *horror abstractum*.

Al respecto, es importante tener presente que en verdad el isomorfismo entre pensamiento y realidad no constituye un rasgo peculiar y distintivo de la concepción absolutista de la lógica en sí, sino del racionalismo: "El orden y la conexión de las ideas es el mismo que el orden y conexión de las cosas", afirma ya Spinoza en la ***Ética***, mientras que Descartes sostiene que "*l'ideé est la chose même conçue*".

En efecto, el absolutismo lógico participa de esta tesis únicamente en la medida en que la lógica aparece como el medio o instrumento a través del cual pensamiento y realidad se identifican. En el caso de Leibniz, como ya he mencionado, el isomorfismo se establece en el lenguaje filosófico o la *lingua characterica* por medio de la relación lógica "parte-todo".

Además, como Aristóteles, Leibniz considera totalidades que son sólo la sumas de sus partes, y totalidades que son más que la suma de sus partes. Por supuesto, este último tipo es para Leibniz el más importante ya que muchos de los conceptos universales pertenecen a esta clase de totalidades; por ejemplo, el concepto "Humano" es una totalidad que no significa en absoluto la simple suma de los individuos en un tiempo x. De nuevo, no parece existir suficiente evidencia a favor de la interpretación de Mates.

Sin embargo, es claro que esta relación fundamental no es suficiente para dar cuenta de todas las conexiones entre los pensamientos y las cosas. De hecho, Leibniz lo había admitido explícitamente al intentar reducir las proposiciones de relativo a proposiciones de la forma sujeto-predicado, y al sostener "que toda la teoría sologística podría ser demostrada por medio de la del de *continente et contento*, el continente y lo contenido, que es diferente a la del todo y la parte, pues el todo siempre excede a la parte, mientras que el continente y el contenido a veces coinciden, como sucede en las proposiciones recíprocas".[55]

Más aún, existen problemas serios relacionados con la teoría de la identidad, ya que al considerar verdades necesarias de la forma "parte-todo", independientemente de si se toma el género

[55] Leibniz (N.E.), IV, § 17, p. 589.

como contenido en la especie o viceversa, las proposiciones nunca pueden expresar una identidad completa entre los términos. Pero al margen de estos y otros problemas que por razones de espacio no es posible comentar aquí, es claro que para Leibniz el orden y conexión de las cosas se encuentra determinado en el lenguaje universal por la lógica.

Por ejemplo, es suficientemente reconocido que para Leibniz todo razonamiento, y por consiguiente, la estructura del mundo o la realidad, se encuentra determinado por los principios de 1) razón suficiente, y 2) de contradicción: "Así, pues, dos son los primeros principios de todo razonamiento, a saber: el principio de contradicción, según el cual toda proposición idéntica es verdadera y su contadictoria falsa; y el principio de razón suficiente, según el cual toda proposición verdadera que de suyo no sea evidente, admite demostración a priori; o si se prefiere, que de toda verdad se puede dar razón o como se dice vulgarmente, que nada ocurre sin causa".[56]

Desde luego, los dos principios mantienen una relación estrecha con la interpretación semántica de las expresiones del cálculo lógico bajo la cual se define lo necesario, lo posible y lo imposible. En las *Generales Inquisitiones,* encontramos quizá la más clara exposición de esta intepretación:

> Las "verdades" necesarias son aquellas que se pueden reducir a idénticas, a aquellas cuyas opuestas se pueden reducir a contradictorias. E imposibles aquellas que se pueden reducir a contradictorias, o

[56] "Itaque duo sunt prima principia omnium ratiocinationum, principium nempe contradictionis, quod scilicet omnis propositio identica vera et contradictoria ejus falsa est; et principium reddendae rationis, quod scilicet omnis propositio vera, quae per se nota non est, probationem recipit a priori, sive quod omnis veritatis reddi ratio potest, vel ut vulgo ajunt, quod nihil fit sine causa" [Leibniz (1966a), p. 30].

> cuyas opuestas se pueden reducir a idénticas... Son posibles aquellas de las que no se puede demostrar que en la resolución nunca 'ocurrirá contradicción'.[57]

Otra de las peculiaridades de este opúsculo es el tratamiento abstracto del cálculo lógico; es decir, las variables (o términos integrales, como los llama aquí Leibniz) pueden interpretarse como términos o proposiciones.[58] En consecuencia, el tratamiento abstrato le permite hablar también de conceptos necesarios, posibles e imposibles. Por ejemplo, el número mayor de todos, o bien, la mayor de todas las figuras constituyen entidades imposibles dado que implican contradicción.[59]

Por otra parte, esta interpretación del tipo de expresiones del cálculo lógico bivalente guarda un enorme parecido con la tesis 4.464 del ***Tractatus*** en donde Wittgenstein afirma que "la verdad de la tautología es cierta; la de las proposiciones, posible; la de las contradicciones, imposible".

Naturalmente, Wittgenstein llama "proposiciones" a las proposiciones contingentes (o factuales) porque pretende dejar en claro que sólo éstas pueden ser figuras o modelos de los hechos. En consecuencia, para Wittgenstein, la tautología y la contradicción no son propiamente proposiciones, pues, como afirma en la tesis 4.461, "La proposición muestra aquello que dice; la tautología y la contradicción muestran que no dicen nada. La tautología no tiene condiciones de verdad, pues es incondicionalmente verdadera; y la contradicción, bajo ninguna condición es verdadera".

[57] Leibniz (1686), § 60 y 61; (1903), p. 371; (1966), p. 61.
[58] *Ibid.*, § 4 y 13; (1903), pp. 365-366; (1966), pp. 55-56.
[59] Leibniz (D.M.), § 1.

No es extraño entonces encontrar que las proposiciones imposibles y necesarias del cálculo lógico leibniziano, en tanto expresiones idénticas y sus negaciones, posean en sustancia la misma característica que las tautologías y contradicciones de Wittgenstein, pues "parece que lo único que hacen es repetir lo mismo, sin enseñarnos nada".[60]

En el fondo, estas y otras similitudes entre Leibniz y Wittgenstein se deben al hecho de que comparten un marco global común acerca de la naturaleza de la lógica. En el caso de Leibniz, como he tratado de mostrar hasta el momento, se trata de la concepción que nace con la búsqueda de una *lingua characterica* o *filosófica* que pretende elaborar a partir del desarrollo de una nueva lógica.

En este sentido, la lógica como *lingua characterica universalis* fija de antemano qué clase de entidades son necesarias, posibles e imposibles en la realidad; es decir, fija las fronteras de lo real. En el caso de Wittgenstein, esta concepción absolutista de la lógica queda consignada en la tesis 5.61 del ***Tractatus***: "La lógica llena el mundo; los límites del mundo son también sus límites", pues, "Las proposiciones lógicas describen la armazón del mundo o, mejor, lo representan" (6.124).

En relación con Leibniz, por supuesto, el orden de lo posible no se restringe sólo a lo posible dentro de este mundo, sino que cubre todo lo que puede suceder en otros "mundos

---

[60] Leibniz (N.E.) IV, § 2, p. 430. Es curioso observar que en una carta a Russell, F. R. Cowell preguntaba: "¿Sabe usted si Wittgenstein estudió a Leibniz? No puedo creer que lo haya hecho, pero su ecuación pontifical de la lógica y la matemática y su naturaleza tautológica, se encuentran por completo en Leibniz". La respuesta de Russell fue la siguiente: "No sé si Wittgenstein estudió a Leibniz, pero estoy convencido de que nunca lo hizo" [las cartas aparecen en O'Briant (1979), pp. 219-220].

igualmente posibles"; es decir, la metafísica pluralista leibniziana se encuentra también sujeta a los límites establecidos por la lógica. Este mundo, que para Leibniz constituye el mejor de los mundos posibles, no se distingue lógicamente de otros mundos, pues "aunque Dios escoja siempre seguramente lo mejor, esto no impide que lo menos perfecto sea y siga siendo posible en sí mismo, aunque no ocurra, pues no es su imposibilidad, sino su imperfección, quien hace rechazarlo. Y nada cuyo opuesto sea posible, es necesario".[61]

En este sentido, el isomorfismo entre el *ordo notionum* y el *ordo rerum* que la lógica como *característica universal* establece depende sólo de la relación parte-todo, o si se prefiere, de la dicotomía simple-complejo. No obstante, no debe perderse de vista que gran parte de las anomalías en sus intentos de construir una *lingua characterica* (versus cálculos lógicos) se deben a ideas erróneas relacionadas con la naturaleza de lo simple y lo complejo.

Como mencioné en III, la idea de un alfabeto de los pensamientos se apoyaba en la supuesta existencia de un conjunto limitado de ideas simples, del cual se debían deducir por medio de su mera combinación, todos los pensamientos verdaderos.

Si bien Leibniz siguió hablando hasta 1709 acerca de la posibilidad de construir tal alfabeto, también es cierto que en escritos anteriores había desechado la posibilidad de que

[61] Leibniz (D.M.), § 21. Sin embargo, una vez que un determinado hecho posible acaece, se vuelve necesario ya que como he mencionado, las verdades contingentes solo se distinguen de las verdades necesarias por nuestra incapacidad para saber con certeza su verdad, o para decirlo en palabras de la ***Théodicée***, "Todo lo que es, *cuando* es, es necesario" (*Unumquodque, quando est, oportet esse*).

semejante conjunto de ideas fundamentales fuera accesible al intelecto humano. En las *Generales Inquisitiones*, por ejemplo, Leibniz se contenta con avanzar en la construcción del cálculo lógico considerando como simples o primitivo, de manera provisional, tales o cuales conceptos.

Sin embargo, el problema no se limita aquí en la aceptación de simples o primitivos hipotéticos, sino en el mejor de los casos, en la manera como se consideran al momento de explicar su función dentro de la gramática lógica de la *lingua characterica*. Por ejemplo, Leibniz afirma correctamente que "todo el silogismo es también una proposición"; pero añade, incorrectamente, que lo anterior "puede enunciase así: cualquier parte de lo verdadero es verdadera, o lo que está contenido en lo verdadero es verdadero".[62]

Desde luego, desde el punto de vista de los valores de verdad, un silogismo verdadero supone que cualquiera de sus partes (premisas) también lo es, de modo que a este nivel es correcto decir que "cualquier parte de lo verdadero es verdadero". No obstante, también desde el punto de vista de los valores de verdad, es posible que una proposición compuesta y verdadera pueda contener partes que no lo sean, y en tal caso, el dictum leibniziano resulta falso. Esto suena ahora una trivialidad, pero no hay que olvidar que Leibniz pretende pasar del todo a sus partes y luego considerar las partes como todos con sus respectivas partes.

[62] Leibniz (1686), § 55; Leibniz (1903), p. 370; Leibniz (1966), p. 60.

Dado que el cálculo desarrollado en las *Generales Inquisitiones* es un cálculo abstracto en donde los términos pueden interpretarse ya como proposiciones ya como términos, lo anterior vale también para los términos; es decir, "se prueba que los términos incomplejos son verdaderos reduciéndolos a otros términos incomplejos primariamente verdaderos, esto es, a términos que se coinciben por sí, o a términos de los que tenemos experiencia (o de cuyos semejantes tenemos experiencia".[63]

En el caso de los términos compuestos que refieren a la experiencia, según Leibniz, no existen suficientes elementos para dar por sentado que en el análisis se podrá llegar a sus términos más simples. En cierta forma, esto se debe, como he mencionado, a que las proposiciones o términos posibles nunca pueden ser para Leibniz conocidas con absoluta certeza. Por lo tanto, es de esperar que la *resolutio procedit in infinitum*.

Ahora bien, ya que el análisis de los términos y las proposiciones posibles presentan problemas al momento de tratar de establecer con certeza su verdad, de nuevo, resulta bastante improbable la interpretación de Mates. Es decir, no parece existir evidencia suficiente para afirmar que el análisis gramatical y lógico, que debería conducir a la invención de la *característica universal*, se encontrara motivado principalmente por un nominalismo que pretende eliminar los términos o conceptos abstractos en favor de términos o conceptos individuales.

Como mencioné antes, la gramática racional leibniziana se presentaba como un paso previo y necesario para la construcción

---

[63] *Ibid.*, § 61.

de la *lingua characterica.* Su objetivo era en gran medida eliminar todos los elementos superficiales para la expresión de las relaciones entre los pensamientos. El segundo paso, debía de consistir en la elaboración de un cálculo a partir de la gramática racional; esto es, un *calculus ratiocinator.*

No obstante, debe señalarse que el análisis gramatical era necesario también porque, como buen lingüista, Leibniz era perfectamente conciente de que no todo el lenguaje puede analizarse desde el punto de vista de la relación lógica "parte-todo". Por este motivo, uno de los objetivos del análisis gramatical es analizar "las palabras, frases, proverbios, fórmulas; es decir, todas las expresiones cuyo análisis no se obtiene a partir de las partes de que se componen".[64]

Pero así como el análisis gramatical debía ser útil para completar el análisis lógico del lenguaje natural, también este último tendría beneficios desde el punto de vista puramente lingüístico, pues "de este análisis gramatical absoluto sigue el análisis lógico, que muestra como pueden sustituirse una proposiciones por otras, aun y cuando las primeras no surjan inmediatamente de las segundas por medio de la sustitución gramatical".[65]

En resumen, si bien ambos análisis serían prolegómenos necesarios para llegar a la *lengua filosófica* o *characterica,* en

[64] "Resolvendae ergo Voces, phrases, proverbia, formulae, quaecunque scilicet resolutionem suam non accipiunt ex partibus ex quibus componuntur" [Leibniz (1903), p. 353; Dascal (1987), p. 182; Leibniz (1982), p. 182].

[65] "Hac analysi grammatica absoluta sequitur analysis Logica, id est ostenditur quomodo propositiones in propositionum locum substitui possunt, licet non immediate una ex alia per grammaticam substitutionem oriatur" [*Loc. cit.; ibid.*, p. 163; p. 183].

si mismos no eran suficientes pues la lengua universal leibniziana era *in mente* algo más que la síntesis de un análisis gramatical y lógico del lenguaje natural. Este lenguaje-cálculo debía entenderse más que nada como un instrumento de conocimiento, como un arte o lógica del descubrimiento que sería de suma utilidad en el desarrollo de las ciencias, pero también como un lenguaje capaz de eliminar los *idola fori* y *tribus* que nacen de las relaciones entre el pensamiento y la expresión común, así como un medio infalible en la instauración de la verdadera religión, y en suma, un artefacto seguro para dirimir controversias.

VI. La influencia del programa leibniziano

Por otra parte, este *filum meditandi*, por medio del cual Leibniz pretende proporcionar una guía segura a través de los modos más complejos de razonamiento de las ciencias, tiene un efecto colateral muy similar a aquél que encontramos en Wittgenstein como consecuencia final del ***Tractatus*** y que después sería usado como modelo de ataque contra la metafísica por Carnap y otros.[66]

[66] El título del libro de Carnap: ***La superación de la metafísica por medio del análisis lógico del lenguaje***, es la formulación clásica de este modelo de ataque. Obviamente, Leibniz y Wittgenstein eran personas con inquietudes metafísicas profundas y en ningún momento deben tomarse sus ideas como un intento de descalificar todo pensamiento metafísico. Leibniz pensaba que su lenguaje universal sería capaz de eliminar "ciertas" doctrinas nebulosas, mientras que Wittgenstein pretendía mostrar el carácter indecible de lo metafísico.

Esto se debe a que para Leibniz, el lenguaje-cálculo en tanto que teoría del silogismo reelaborada, constituye un lenguaje perfecto en donde no hay cabida para la vaguedad y otras imperfecciones de las que adolecen las lenguas naturales. Es decir, en este lenguaje universal nada puede ser expresado con ambigüedad, pues está previsto en su construcción que "aquellas quimeras que ni siquiera es capaz de entender el mismo que las enuncia no puedan ser escritas con estos caracteres".

Este último comentario, que seguramente ha de parecer sumamente escandaloso para ciertos wittgensteinianos, merece especial atención dado que resulta bastante curiosa la similitud entre el "método verdadero" de Leibniz y el de Wittgenstein.

De acuerdo con el segundo, "el verdadero método de la filosofía sería propiamente éste: no decir nada, sino aquello que se puede decir; esto es, las proposiciones de la ciencia natural -algo pues, que no tiene nada que ver con la filosofía-; y siempre que alguien quiera decir algo de carácter metafísico, demostrarle que no ha dado significado a ciertos signos de sus proposiciones" (6.53).

La diferencia fundamental entre Leibniz y Wittgenstein en este punto (y también ente Frege-Peano-Russell y Wittgenstein, como veremos más adelante), consiste básicamente en la diferencia entre un lenguaje ideal y el lenguaje mismo; es decir, mientras que Leibniz (pero también Frege, Peano y Russell) intenta una construcción lógica de la *lingua characterica*, es decir, como un lenguaje ideal que ha de superar las imprecisiones del lenguaje ordinario, Wittgenstein identifica la lógica con la estructura del Lenguaje, siendo la tarea de la filosofía aclarar la naturaleza de esa estructura.

Desde una perspectiva más amplia, estas y otras similitudes adquieren más relevancia una vez que se enfatiza la relación que mantienen las obras de Frege, Peano y Russell, con el proyecto leibniziano. Por ejemplo, en ***Los Principios de la Matemática***, Russell establece esas relaciones de la siguiente manera:

> La doctrina general de que toda la matemática es deducción por principios lógicos y desde principios lógicos, fue apasionadamente defendida por Leibniz, quien argüía constantemente que los argumentos tienen que probarse y que todo tiene que definirse, excepto una pocas nociones fundamentales.

Pero un poco más atrás, había dicho:

> El hecho de que toda la matemática sea lógica simbólica, es uno de los descubrimientos más importantes de nuestro tiempo; y una vez establecido este hecho, el análisis de los principios de la Matemática consiste en el análisis de la propia lógica simbólica.[67]

Dejando de lado los comentarios anteriores, es conveniente observar que en su ***Exposición Crítica de la Filosofía de Leibniz***, Russell dedica poco espacio a discutir el proyecto de una *característica universal*, pero además, su juicio al respecto no es muy favorable, pues si bien reconoce el valor matemático del proyecto, por otro lado considera que su valor filosófico es muy limitado.

Sin embargo, debe anotarse también que mientras escribía este libro, Russell no entraba aún en contacto con las ideas de Peano y Frege, y por consiguiente, sus opiniones diferían todavía mucho de su filosofía posterior. Esto es evidente por ejemplo,

---

[67] Russell (1903), I, § 5, p. 5 [395].

cuando critica a Leibniz su concepción analítica de las verdades necesarias, debido a que, como repite aquí en varias ocasiones, considera aún que las proposiciones matemáticas son del todo de naturaleza sintética![68]

No obstante, en el ínter de la revisión de las pruebas de imprenta, Russell tuvo oportunidad de añadir dos notas que dejan entrever los cambios sustanciales que se habrían de registrar en su pensamiento en torno al programa leibniziano. La primera de ellas es una referencia a ***La Logique de Leibniz*** (1901) de Louis Couturat, en una nota al pie de página al final de su comentario sobre la *característica universal* [105]. La segunda es una referencia a *Formules de Logique Mathématique* (1900) de Peano, en una nota al pie de página de los fragmentos sobre la *característica* que Russell incluyó al final de su estudio.[69]

Más tarde, en el prólogo a la segunda edición, Russell afirmaba lo siguiente: "poco después de publicarse la primera edición de este libro, su tesis principal -es decir, que la

[68] Pero en el prólogo de la segunda edición anota: "en la época en que escribí la ***Filosofía de Leibniz***, sabía muy poco de Lógica matemática o de la teoría de conjuntos de Cantor acerca de los números infinitos. Ahora no diría, como digo en las páginas que van a continuación, que las proposiciones de las matemáticas puras son 'sintéticas'" [Russell (1900), p. 163]. Por otra parte, es conveniente recordar que Russell ya había escrito el ***Ensayo sobre los fundamentos de la geometría***, y al menos la aritmética y la geometría proyectiva, son consideradas aquí como ciencias *a priori*, y si bien lo que Russell entiende por *a priori* no me parece del todo claro, su creencia en la naturaleza sintética de las matemáticas se me escapa por completo [sobre este libro véase, *supra* capítulo 4, IV].

[69] A diferencia de Peano, Couturat no era ningún desconocido para Russell antes de asistir al primer congreso internacional de filosofía (agosto de 1900). Couturat había reseñado favorablemente su ***Ensayo sobre los fundamentos de la geometría***, y el ***Tratado sobre el álgebra universal*** de Whitehead (*supra* capítulo VI, § II y VI), y desde entonces mantenían una correspondencia más o menos regular. Incluso, Russell sabía acerca de Peano de manera indirecta por medio de su correspondencia con Couturat.

filosofía de Leibniz se deriva casi por completo de su lógica- recibió una abrumadora confirmación con la obra de Louis Couturat".[70]

No obstante, lo anterior merece algunos comentarios. En primer término, Russell entiende por lógica leibniziana una lógica de la forma sujeto-predicado en un sentido muy general y tradicional, que en consecuencia, no da importancia a los intentos de crear un cálculo ligado a la idea de una *lingua characterica*. En concreto, para Russell esa lógica se restringe a cinco premisas, de las cuales sólo tres deberían tomarse como propiamente lógicas.[71]

Pero además, como observa también O'Briant, en su excelente artículo sobre Russell y Leibniz, "Couturat y Russell tienen maneras diferentes de entender la lógica; como lo muestra su correspondencia, Russell entiende por lógica el análisis de las

[70] Como muchos saben, Couturat fue, ademas, el editor de una parte importante de los escritos inéditos de la biblioteca de Hanoover, que tienen que ver directamente con el proyecto de la *lingua characteristica* (y que aquí he transcrito en ocasiones). Pero también fue -junto con L. Leau-, autor de una ***Historia de la lengua universal***, y por consiguiente, como Peano, un activo promotor de una lengua universal, que como complemento a la lógica, sería de utilidad para la rápida transmición de conocimientos.

[71] Las premisas son: 1) toda proposición tiene un sujeto y un predicado, 2) un sujeto puede tener predicados, que son cualidades que existen en tiempos diferentes (y a tal sujeto se le denomina "sustancia"), 3) las proposiciones verdaderas que no afirman existencia en un tiempo determinado son necesarias y analíticas, pero las que afirman existencia en un tiempo determinado son contingentes y sintéticas. Estas últimas dependen de causas finales. 4) El ego es la sustancia, y 5) la percepción nos da un conocimiento de un mundo exterior; es decir, de seres existentes independientes de mí, y de mis situaciones. Es evidente que las premisas 4 y 5 no tienen por qué pertenecer a la lógica de sujeto y predicado, ni a ninguna lógica, salvo quizá, en el sentido muy peculiar que le da Russell aquí (sobre este último punto véase la nota siguiente).

proposiciones a la Moore, mientras que Couturat entiende el cálculo lógico y sus áreas afines".[72]

En segundo lugar, el libro de Couturat concede una importancia capital al proyecto de la *lingua characterica*, que por consecuencia, difiere considerablemente de la evaluación que Russell hace del mismo. Por otro lado, las diferencias entre ambos enfoques saldrían a relucir poco a poco a lo largo de la correspondencia que O'Briant ha citado y comentado, y de la cual sólo citaré lo más relevante para el tema.

Es interesante notar que en un primer momento, y sin el conocimiento directo de sus respectivos trabajos, tanto Russell como Couturat se encontraban convencidos de las similitudes de sus puntos de vista. En una carta fechada el 13 de mayo de 1900, Couturat comentaba la cuestión de la siguiente manera:

> ...no estoy muy sorprendido por el paralelismo de nuestros libros sobre Leibniz; el mismo tema ha sido sugerido en parte por la obra de Whitehead y, en conexión con él, por Grassmann, quien, como usted sabe, se unió (de hecho antes) a Leibniz en el ***Análisis Geométrico*** de 1847 [[73]]; y después,

[72] O'Briant se refiere a la correspondencia Russell-Couturat que citaré más adelante [O'Briant (1979), p. 203, *n*. 145]. El capítulo II del estudio de Russell inicia así: "El hecho de que toda sana filosofía debe comenzar por un análisis de la proposición es algo demasiado evidente, quizá, para que necesite ser demostrado. Que la filosofía de Leibniz comience con tal análisis es menos evidente, pero no parece menos verdadero..." [Russell (1900), II; para detalles sobre la lógica a la Moore, véase Moore (1899) y Bowne (1966), VI].

[73] Sobre la afiliación de Grassmann al programa leibniziano en cuanto característica geomética, véase Echeverria (1979). No esta de más adelantar que la primera incursión de Peano en el campo de la lógica matemática (nombre que si no me equivoco fue el primero en emplear) aparece en 1888 como un estudio preliminar al sistema de Grassmann: ***Calcolo Geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto delle operazioni della logica deduttiva.*** Pero también es conveniente notar que este primer *approach* parte del trabajo de los algebristas lógicos.

> por la obra de Boole y su lógica algorítmica [algorithmic logic]. Estoy convencido, como usted, de que la lógica de Leibniz es el corazón de su sistema.[74]

Tiempo después, en una carta fechada el 21 de junio del mismo año, Russell más consciente de las diferencias entre ambos, le escribe a Couturat:

> ... en cuanto a Leibniz, veo que nuestros dos libros apenas si dicen lo mismo; el tema que usted ha escogido me interesa enormemente, pero creo (como dice usted en su artículo sobre Whitehead) que la característica más que una idea filosófica es más bien una idea matemática [[75]]. Como mi libro es el resultado de un curso puramente filosófico que me ví obligado a impartir en el Trinity College, tuve que dejar de lado aquellas cuestiones que no trataban propiamente sobre filosofía... me hubiera gustado escribir un libro sobre el tema, pues algo así difícilmente podría incluirse dentro de los límites de mi obra.[76]

En otra carta, fechada el 20 de octubre, después de recibir el texto de Russell, Couturat comenta las dos formas de entender la investigación histórica de la filosofía que ahí se discuten,[77]

---

[74] Citado por O'Briant, art. cit., p. 204.

[75] Russell se refiere a la reseña de Couturat mencionada arriba (nota 65). Es interesante observar, por un lado, que en sus notas autobiográficas, Whitehead reconoce que su conocimiento de las investigaciones leibnizianas ¡se basaba por completo en ***La logique de Leibniz*** de Couturat! [Cf. P. A. Schilpp (ed.)(1941), p. xx]; mientras que por el otro, en el prólogo de 1937, Russell afirma que "Hoy en día, su filosofía del mundo empírico [de Leibniz] es sólo una curiosidad histórica; pero en el campo de la lógica y de los principios matemáticos se han realizado muchos de sus sueños, y han demostrado ser, por lo menos, algo más que las imaginaciones fantásticas que les parecieron a todos sus sucesores hasta los tiempos presentes".

[76] Citado por O'Briant, *loc cit*. Como el mismo Russell afirma, su interpretación se basaba principalmente en el ***Discurso de Metafísica*** y en la correspondencia con Arnauld, ya que en estos escritos "comienza su época de madurez intelectual; y no únicamente el comienzo cronológico, sino también, el arranque lógico..." [Russell (1900), I, § 6]. El ***Discurso de Metafísica*** fue probablemente escrito el mismo año que las *Generales Inquisitions* (1686), pero Russell no tenía conocimiento de este opúsculo, que sólo meciona en el prólogo de la segunda edición [sobre los orígenes y objetivos del ***Discurso***, véase Loemker (1947)].

[77] Cf. Rusell (1900), prólogo.

y pregunta si no ha contemplado la posibilidad de una tercera alternativa, que es la suya propia, en la cual se conjuguen el orden lógico y el histórico, y añade:

> ...estoy sorprendido de ver que la Característica (105) aparece bastante al último, porque es, en mi opinión, la raíz o fuente de todas las teorías lógicas de Leibniz. Usted sabe (y lo dice) que esta idea data desde que tenía 20 años de edad (la época de ***De Arte Combinatoria***), e incluso, desde antes (usted está enterado de esto y cita sus proyetos de juventud)... En mi opinión, ésta es, aquí, la única línea inicial que se debe trazar simultáneamente, en el orden histórico y lógico... usted afirma que Leibniz nunca escribió su *magnum opus*, y da buenas razones del porqué [[78]], pero es necesario añadir, que él soñó toda su vida en una obra semejante, la cual hubiese sido su trabajo más singular, y de la que sólo dejó algunos planes, algunos bosquejos y fragmentos; así que se puede decir que en verdad, Leibniz no solo no publicó sino que además, nunca escribió una obra maestra (un poeta ha dicho: los más bellos pensamientos son aquellos que somos incapaces de expresar; nuestras mejores obras son aquellas que no podemos escribir).[79]

Este último comentario de Couturat es especialmente importante porque pone de manifiesto un punto de vista totalmente diferente en relación con la idea de Russell sobre la importancia del proyecto de la *característica universal;* pero también es importante porque sugiere los diferentes esbozos y puntos de

[78] "...la ambición -escribe Russell-, la frivolidad y el deseo de influencia sobre determinados hombres y mujeres se aliaron para impedir que Leibniz se hiciera a sí mismo justicia con una armónica exposición de su sistema" [Russell *ibid.*, § 1]. En su reseña de los libro de Couturat y Cassirer sobre Leibniz abre con las siguientes palabras: "La filosofía de Leibniz, con sus méritos y errores, y su lugar en la historia del pensamiento, ha sido hasta ahora malentendida. Esto puede explicarse en parte por su diáfana grandeza intelectual, en parte por la ignorancia de sus editores, en parte por su falta de tiempo para escribir una *magnum opus*, y en parte también, debe confesarse, por su ausencia total de altura moral. Esto último es la causa que lo condujo a publicar por preferencia su peor trabajo, a arruinar la consistencia de su sistema en favor de la ortodoxia..".

[79] Citado por O'Briant art. cit., p. 204.

partida que Leibniz intentó a lo largo de su vida.[80] Y ésto debe tomarse debidamente en cuenta al momento de sopesar lo que Frege y Peano retoman de ese proyecto inconcluso; es decir, Leibniz no posee más lógica que la silogística escolástica y su lógica "adecuada", al igual que la *lingua characterica,* es uno entre otros intentos que no llega más allá de ser un esbozo.

Por otra parte, debe quedar muy claro que si bien Leibniz identifica en ocasiones su ideal de lenguaje-cálculo con la lógica, también es cierto que en otros momentos pensó sólo en el álgebra y la aritmética; o en la lengua china, como mencioné en II, o en una suerte de simbolismo semejante al de su cálculo infinitesimal, o en una geometría abstracta como posibles modelos de la *caracteristica universal.*

En consecuencia, la historia de los intentos leibnizianos por inventar un *lenguaje filosófico* es mucho más compleja de lo que aquí se ha presentado. Por ejemplo, es evidente que independientemente del tratamiento lógico, su concepción de las proposiciones contingentes y su pluralismo ontológico se debe en buena medida a sus nociones matemáticas sobre el infinito; de tal manera que, como Russell comentó, no es difícil ofrecer un esquema aritmético que represente la idea que Leibniz tenía del mundo.[81]

---

[80] Por lo demás, la evaluación que Russell hizo de la actitud intelectual de Leibniz no sólo es negativa sino también falsa. Por ejemplo, Russell afirma que Leibniz creó dos filosofías: una buena filosofía que nunca publicó "y una mala que publicó con vistas a ganar fama y dinero", lo cual es injusto si se toma en cuenta el escaso número de sus publicaciones en vida [Russell (1900), prólogo a la segunda edición: 1937].

[81] *Loc. cit.* Podemos actualizar esta aseveración russelliana al notar que las mónadas como reflejos del universo concuerdan muy bien con los objetos fractales de Mendelbrot, quien, por cierto, se considera un leibiziano. Sobre este tema vése el interesante ensayo de Bouquiaux (1995).

Por otra parte, debe también tomarse muy en cuenta que su idea de cálculo de los razonamientos no es propiamente una idea lógica sino aritmética, ya que los *números característicos* se asignan a la proposiciones lógicas a nivel metalingüístico. Desde luego, los estudiosos de Leibniz han reconocido con suficiente frecuencia que con este cálculo Leibniz pretendía, equivocadamente como ahora sabemos, ofrecer un mecanismo de decisión para determinar qué tipo de inferencias son correctas y cuáles no.[82]

Sin embargo, debe también reconocerse que Leibniz logró por medio de una versión de este método demostrar algunos modos y leyes de la lógica tradicional, como Lukasiewicz destacó en su célebre estudio sobre la silogística de Aristóteles.[83] Pero no menos importante es resaltar que Gödel demostró la imposibilidad del propósito de Leibniz, ¡usando un método muy similar al suyo!

En este sentido, debe reconocerse a Leibniz el mérito de haber presentado por primera ocasión una interpretación aritmética de la lógica. Por supuesto, una interpretación aritmética del cálculo lógico tiene muchas ventajas pero desde luego, no se trata de un método que se explote con suficiente amplitud, a excepción quizás -aquí en México-, del profesor Hugo Padilla y colaboradores, quienes emplean una interpretación de la lógica en sistema binario, con notables resultados.

Por otra parte, debe también tenerse muy en cuenta que en algunas ocasiones, Leibniz desarrolló también un tratamiento algebraico de la lógica que daría lugar a una concepción de la

[82] Cf. por ejemplo Mates (1986), p. 184.
[83] Lukasiewicz (1957), V, § 34.

lógica opuesta a la que aquí he denominado como absolutismo lógico. Sin embargo, es conveniente señalar en qué consiste precisamente esto con el fin de evitar confusiones.

En primer lugar, debe tenerse siempre a la vista que la concepción absolutista leibniziana se identifica aquí con su concepción de la lógica como *lingua characterica* o filosófica, como *ars inveniendi* o lógica de la invención. Sin embargo, al añadir la idea de un *calculus ratiocinator* o cálculo de los razonamientos, Leibniz emplea métodos algebraicos que en cierta medida toman distancia de los presupuestos absolutistas previos; por ejemplo, adopta un cálculo abstracto en donde los símbolos pueden interpretarse como términos o proposiciones o números, y cuyo universo no se encuentra especificado de antemano.

En segundo lugar, si bien su uso de un cálculo lógico abstracto *implica* una concepción relativista, para Leibniz se trata únicamente de una vía alterna a la realización de la *characteristica universalis*. En consecuencia, Leibniz no es consciente de que su método abstracto tiene implicaciones muy distintas a las de sus aspiraciones filosóficas.

Es decir, el empleo de métodos algebraicos se encuentra motivado por las propiedades simbólicas universales del álgebra como lenguaje artificial y como expresión general del razonamiento aritmético, pero como siempre, teniendo como fondo la idea de una *lengua característica* como cálculo de los razonamientos a la Hobbes, en donde los sofismas y las inferencias incorrectas puedan detectarse como simples errores de cálculo:

> Las lenguas naturales, si bien son de gran ayuda para el razonamiento, son culpables de incontables equívocos y no pueden ser empleadas con el mismo objetivo de un cálculo, es decir, para permitir detectar los errores en los razonamientos por medio de la formación y construcción de las palabras mismas, como en el caso de los solecismos y los barbarismos. Hasta ahora, esos admirables beneficios sólo son asegurados por los símbolos de la Aritmética y el Algebra, en donde todo razonamiento consiste en el uso de caracteres y en donde un error del pensamiento es idéntico a un error de cálculo.[84]

En tercer lugar, es interesante observar como Leibniz confunde las propiedades abstractas del simbolismo con la capacidad abolutista del universo de la lógica; es decir, para Leibniz, el hecho de que un signo X pueda representar "cualquier cosa", implica que el universo de la *lingua characteristica* contiene todos los objetos posibles:

> Como este *ars characteristica*, cuya idea he concebido, contiene El Verdadero Organon de la Ciencia General de todo aquello que es susceptible de razonamiento -vestido con las ininterrumpidas demostraciones de un cálculo evidente-, será necesario exponer por sí misma nuestra característica o arte de emplear los signos de manera más general por medio de cierto tipo de cálculo exacto. Pero dado que aún no es posible establecer la forma cómo se deben crear los signos, seguiremos mientras tanto el ejemplo de los matemáticos, usando, para aquellos signos que hemos de construir en el futuro, letras del alfabeto o cualquier otro simbolismo arbitrario que pueda mostrar un progreso adecuado.[85]

Sin embargo, siempre hay que tener presente que este recurso algebraico es únicamente provisional y hasta en tanto no se descubra la manera correcta de formar los "verdaderos" caracteres de la *lingua characterica*. Por estos motivos es necesario tomar en cuenta que los escritos de Frege representan un renacimiento del proyecto leibniziano de una *característica universal* sólo en

[84] Dascal (1987), p. 182; Leibniz (1982), pp. 189-190.
[85] *Ibid.*, pp. 182-183; pp. 190-191.

la medida en que Leibniz identifica esa *característica* con una lógica no abstracta.

Frege era especialmente sensible a estas diferencias y por esta razón al identificar su *conceptografía* con el proyecto leibniziano, siempre usó los términos "*lingua characterica*", que Leibniz había empleado cuando intentaba desarrollar un lenguaje lógico perfecto que expresaría directamente los pensamientos. En el caso de Peano -y Russell-, el asunto no es muy claro en todos los casos debido a su conocimiento de la obra de Boole y sus seguidores.

Por lo demás, no es mi propósito discutir si los motivos de todos estos fracasos se deben al apego y la confianza de Leibniz en la lógica escolástica, o si por el contrario, se deben "a la dispersión de sus inmensas energías" en indagaciones genealógicas sobre las familias nobles de Hannover y en la confección de filosofías para princesas.[86] Basta con señalar, como oportunamente lo hizo Frege, que "su idea de una Característica General, de un *calculus philosophicus* o *ratiocinator*, era tan gigantesca que el intento de desarrollarla hubo de quedarse en meros preparativos".[87]

Para finalizar, es también conveniente tener presente que a partir de Leibniz y su programa se desarrollan dos tradiciones hasta cierto punto antagónicas. La primera de ellas nace con Boole y De Morgan, y se caracteriza por seguir el tratamiento algebraico de la lógica. La segunda tradición aparece con Frege,

[86] Cf. Bourbaki (1969), p. 20; y Russell (1900), p. I, § 1.

[87] Frege (1879), p. 9 [6].

y como he sugerido, sobresale por su concepción rigurosamente absolutista.

En este sentido, no es nada sorprendente que en sus escritos, Frege fuera muy dado a establecer las diferencias entre su trabajo y el de los algebristas lógicos oponiendo la idea de una *lingua characterica* con la de un *calculus ratiocinator*, oposición que Heijenoort ha reinterpretado correctamente como las diferencias entre una "lógica como lenguaje" y una "lógica como cálculo".[88]

En el siguiente capítulo intentaré presentar algunas peculiaridades y detalles del pensamiento de Frege relacionados con esta concepción de la lógica como lenguaje, y en capitulo III, intentaré precisar un poco en qué consisten sus diferencias con la concepción de Boole, pero también, en qué difiere de Peano, que en principio, se mueve bajo la misma concepción de la lógica como lenguaje.

Por lo pronto, es importante recordar que para Frege y Peano, la lógica como lenguaje no será más un arte o mecanismo de descubrimiento ya que en ambos casos, las pretensiones son más modestas. Por su parte, Peano entiende la lógica como una ciencia metamatemática (en un sentido pre-hilbertiano) que ha de aclarar la naturaleza de las proposiciones matemáticas; mientras que para Frege, su valor científico o metodológico ha de buscarse por ejemplo, al momento de realizar con toda precisión la demostración de un teorema cualquiera, o cuando se trate de establecer los fundamentos del cálculo diferencial y en general,

[88] Cf. Heijenoort (1967).

"para llenar la laguna de los lenguajes de fórmulas existentes, para conectar en un solo dominio campos separados hasta ahora y para ampliarse a campos en que tal lenguaje faltaba".[89]

Sin embargo, en el caso de Frege, nada en estos propósitos significa, como afirma Christian Thiel, una "consabida renuncia al universalismo de Leibniz";[90] o al menos no en cuanto a la naturaleza y dominio de la lógica; esto es, a su concepción absolutista.

De cualquier manera, como también resaltó Heijenoort, el absolutismo lógico no es una teoría abiertamente formulada y defendida, pero sus características generales pueden encontrarse, por ejemplo, en el uso de los cuantificadores por parte de Frege y Russell, en la manera como Frege entiende las reglas de inferencia, en las críticas wittgensteinianas al simbolismo de Russell y en su "solución" a las paradojas lógicas, y en general, en la total ausencia de consideraciones metasistemáticas en estos pensadores.

Sin embargo, la influencia de Leibniz no se limita a las propiedades generales de su filosofía de la lógica, pues independientemente de las coincidencias obvias entre la gramática filosófica de Leibniz y Wittgenstein, y del hecho de que el

---

[89] Frege *op. cit.*, p. 9 [6]. No está de más señalar las similitudes de este pasaje de Frege con el planteamiento que John Wilkins había presentado, dos siglos antes, en su célebre ***Essay towards a Real Character and a philosophical language***, 1668, cuando comentaba: "En las tablas he dispuesto las cosas en un orden que podrá ser probado por la sociedad; en ellas podrán encontrar un método óptimo para la construcción de un Repository, que servirá, por un lado, para ordenar los conocimientos que ya se poseen y, por otro, para suplir las posibles lagunas".

[90] Thiel (1972), p. 21.

dictum según la cual, "es la lógica la que dice cómo debe ser el mundo, si existe", encuentre su desarrollo más acabado en el sistema que se presenta en el ***Tractatus;*** pues también, por ejemplo, la idea de un simbolismo que permite llevar a cabo, en lugar de *nosotros*, operaciones mecanicas de razonamiento (esto es, los "pensamientos ciegos" leibnizianos), reaparece en la teoría del simbolismo que Whitehead presenta en el ***Treatise on Universal Algebra*** y en ensayos posteriores.

Además, en cuanto al modo de construcción, al relacionar los signos con las cosas, es posible encontrar paralelismos en el atomismo lógico de Russell, en el mismo Wittgenstein y, para el colmo de algunos, en el ***Aufbau der Welt*** de Carnap.

En consecuencia, si la filosofía de Leibniz no se deriva, como pensaron Russell y Couturat-, de su lógica sino que es, más bien ésta última la que se deriva de su concepción de la *lingua characterica*, es de esperarse que algo similar podamos encontrar entre aquellos pensadores que comparten esta misma idea de la lógica.

EL PROGRAMA CONCEPTOGRÁFICO DE FREGE

...la lógica debe exigir límites claros a lo que ha de reconocerse como un concepto, a menos que se quiera renunciar a toda precisión y certeza. En consecuencia, un signo para un concepto cuyo contenido no satisface este requerimiento debe considerarse como un sinsentido desde el punto de vista lógico. Puede objetarse que tales palabras son empleadas cientos de veces en el lenguaje ordinario. Si, pero también nuestras lenguas naturales no fueron creadas para elaborar demostraciones; y es precisamente los defectos que brotan de esto lo que ha sido mi razón principal para crear una conceptografía.

Frege

I Introducción

En el capítulo anterior he mencionónado los nexos filosóficos que unen a los principales creadores de la lógica con el proyecto leibniziano de una *lingua characterica*. También mencioné, desde una perspectiva más general, cómo a partir de los numerosos intentos de Leibniz por cumplir su programa, nacen en el campo de la lógica dos corrientes hasta cierto punto antagónicas en su desarrollo histórico pero que en el fondo sólo son complementarias.

Una de esas corrientes es aquella que parte de la idea de un *calculus ratiocinator* como modelo o canon de un cálculo lógico abstracto que en buena medida se modela a imagen y semejanza del álgebra ordinaria. En el siglo pasado, este enfoque fue cultivado principalmente por Boole, De Morgan, Ven, Jevons y Pierce en lengua inglesa, pero en el continente europeo, encuentra su representante más connotado en la figura de Enest Schröder. El otro enfoque es aquél al que me he referido ampliamente en el capítulo anterior en relación con Frege, Peano y Russell como la ampliación del programa leibniziano de una *logica sive characteristica universalis*.

Ahora me ocuparé del análisis de la obra de Frege, no sólo porque es él quien retoma por primera vez de Leibniz la idea de interpretar la lógica como una *lingua characterica* o lenguaje-cálculo, sino porque en Frege aparece de manera sistemática y de golpe una buena parte de la lógica matemática contemporánea y un programa de aplicación para la misma. Además, el nuevo sistema lógico y su programa se encuentra determinado por la doctrina absolutista de la lógica que juega después un papel central en el pensamiento de Russell y Wittgenstein.

Por otra parte, entre los estudios de la obra de Frege no existe un acuerdo unánime y hay quienes dividen su evolución en dos periodos fundamentales, otros en cuatro, y algunos -como Dummett-, en seis. Para nuestro propósito, muy limitado, no es muy importante discutir la conveniencia de uno u otro punto de vista, pues nos basta trazar un breve itinerario de su trabajo bajo el enfoque antes mencionado y más amplio, en donde ciertos aspectos de su trabajo resultan especialmente relevantes en función de su influencia en los sistemas de pensadores como Russell y Wittgenstein.

En cierta forma, dichos aspectos tienen mucho que ver con la cuestión más general acerca de lo que llamamos "pensamiento objetivo"; esto es, los contenidos que hacen posible el marco conmensurable de nuestros acuerdos y la base de todo lo que llamamos conocimiento. Esta manera de proceder podrá parecer en un principio extraña pero se verá justificada al momento de poner de manifiesto el trasfondo filosófico sobre el cual se mueven las tesis principales de Frege y sus desarrollos técnicos.

En sus últimos escritos, Frege se ocupó de presentar un cuadro fundamental de los principios ontológicos de sus concepciones acerca de la teoría semántica, teoría que a su vez tenía como propósito principal poner de manifiesto todos aquellos aspectos precisos y objetivos del conocimiento matemático pero que, en general, valen para un dominio más amplio.

Estos escritos guardan una relación muy estrecha con su trabajo anterior en tanto que representan su soporte filosófico. En concreto, se trata de tres artículos que fueron publicados entre 1918 y 1923 pero que originalmente habían sido concebidos como parte integral de una obra que resumía su trabajo desde una óptica estrictamente filosófica pero que lamentablemente nunca llegó a ver la luz: ***Logische Untersuchungen*** [***Investigaciones Lógicas***].

En lo que sigue, me ocuparé básicamente de poner en relación con toda su obra anterior el primero y más elaborado de esos tres escritos que, como su título sugiere, revela el sentido filosófico de sus indagaciones: *Der Gedanke. Eine logische Untersuchung* [*El Pensamiento. Una Investigación lógica*].

II Génesis del programa Conceptográfico

En 1879 Frege publicó un libro que sería determinante en el desarrollo de la naciente lógica matemática. En esta obra aparece por primera vez una presentación sistemática y formal de la llamada lógica de funciones veritativas (o proposicional) y de la teoría cuantificacional, que de no ser por su notación tan peculiar y su terminología, sería un estupendo manual de lógica.

Sin embargo, las intenciones de su autor no eran puramente lógicas, sino que buscaba presentar un simbolismo adecuado que sirviera "como auxiliar para determinados propósitos científicos"; esto es, entre otras cosas, ofrecer un perfeccionamiento del método por medio de un simbolismo tal que pusiera de manifiesto todas las cadenas de inferencias que se dan en el razonamiento matemático pero que en realidad ocurren en otros dominios del pensamiento. El título de la obra nos sugiere también su objetivo: ***Conceptografía. Un lenguaje de fórmulas, semejante al de la aritmética, para el pensamiento puro*** [***Begriffsschrift. eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens***].[1]

[1] En el prólogo de la ***Conceptografía*** Frege señala como origen de su lógica la inadecuación del lenguaje para especificar todas las cadenas de inferencias que tienen lugar en el razonamiento aritmético. Por lo tanto, es necesario resaltar de nuevo la diferencia entre el enfoque de Frege y el enfoque algebraico de la lógica, y evitar así confusiones: "la semejanza, que he indicado en el título --afirma Frege--, con el lenguaje de la aritmética se refiere más a las ideas fundamentales que a las conformaciones particulares... el más inmediato contacto de mi lenguaje de fórmulas con el de la aritmética consiste en el modo de utilizar las letras" [Frege (1879), p. 8; Heijenoort (ed.)(1967), p. 6]. Naturalmente, esto no debe tomarse como una manera de proceder similar al de Boole y De Morgan; como si Frege pensara en construir su lógica tomando como modelo la aritmética. Confundir

En abstracto, la ***Conceptografía*** ofrecía además una descripción adecuada del método axiomático en lógica; es decir, los mencionados sistemas se presentan de acuerdo con el método axiomático. Pero al igual que sus objetivos principales, el uso de la axiomática se encontraba relacionado directamente con esa concepción de la lógica que siguiendo a Heijenoort he denominado "absolutismo lógico".[2]

En esta doctrina no explícita, la lógica aparece como un cuerpo de conocimientos sistematizados que, en principio, habrá

---

ambas formas de proceder implica, por un lado, perder de vista los objetivos de las dos tradiciones fundamentales que dieron origen a la lógica contemporánea, y por otro, a no entender las críticas de Frege a Boole y Schröder.

Desde otra perspectiva, las diferencias entre ambos enfoques pueden resaltarse apelando a los motivos que dan lugar a la creación de un simbolismo. En una de las primeras cartas a Hilbert, Frege presenta la cuestión de la siguiente manera: "la forma natural de llegar a un simbolismo me parece ser ésta: al emprender una investigación con palabras de uso común, uno siente que el carácter rudo, imperspicuo e imperfecto del lenguaje es un obstáculo, y para remediar esto, uno crea un lenguaje de signos con el cual la investigación pueda dirigirse de manera más perspicua y con mayor precisión. Dicho de otro modo, la necesidad aparece primero y después, su satisfacción. El camino opuesto, el crear primero un simbolismo y buscarle luego una aplicación, parece ser menos provechoso. Probablemente el simbolismo de Boole, Schröder y Peano ha seguido este último camino" [Frege (1980), p. 33].

Sin embargo, este juicio de Frege no es correcto en relación con Peano, como él mismo reconoció más tarde [Cf. Frege (1897)]. De hecho, como comente en el capítulo anterior, la lógica de Peano se debe a motivaciones muy similares a las de Frege. Al respecto, resultan ilustrativas las palabras del prefacio de sus ***Arithmetices Principia***: "las cuestiones que atañen a los fundamentos de la matemática, si bien han sido tratadas por muchos, carecen aún de la solución adecuada. La dificultad de este punto proviene sobre todo de la ambigüedad del lenguaje... [por consiguiente] es conveniente cambiar la forma ordinaria de las demostraciones con el fin de expresar éstas mediante los signos de la lógica. Esta transformación resulta, a veces, bastante difícil, pero a través de ella es evidente con toda claridad la naturaleza de la demostración" [Peano (1889), pp. 31-III, y 33-III; Heijenoort (ed.)(1967), p. 85].

[2] Cf. Heijenoort (1984). El método axiomático tal y como aquí se emplea no debe confundirse con el sentido que tiene usualmente en geometría. En Frege, un sistema axiomático cuenta además de los axiomas, con reglas sintácticas (o formales) que permiten derivar los teoremas. A partir de Kleene (1952), es común llamar a dichos sistemas "sistemas del tipo Hilbert", pero como también observa Heijenoort, históricamente es más correcto llamarlos "sistemas del tipo Frege".

de abarcar todos los objetos, de tal suerte que el universo de una lógica así, se identifica con el Universo de todo lo existente. De modo que el dominio de esta lógica es a su vez, único y fijo.

Desde un punto de vista técnico, esta doctrina se refleja en el uso de los cuantificadores, en la validez universal de sus leyes y en el carácter abierto de lo que puede tomarse como "objeto" dentro de su aparato lógico. Como vimos en el capítulo anterior, esta doctrina viene a encajar con el ideal leibniziano de una lógica como *característica universal.*

Desde otra perspectiva, el nuevo simbolismo aparece como altamente deseable si se toman en consideración todas sus posibles aplicaciones, pues su valor se puede medir no sólo al momento de probar un teorema con toda precisión o cuando se quiera establecer los fundamentos del análisis superior; sino también en la geometría pues con la simple adición de algunos símbolos especiales, el nuevo aparato sería capaz de eliminar todas sus relaciones intuitivas,[3] y en un futuro, encontrar aplicaciones sistemáticas en la cinemática, la mecánica, e incluso en la filosofía.

[3] Frege (1879), p. 9; Heijenoort (ed.)(1967), p. 7. En cuanto a la geometría, Frege comparte la teoría Kantiana del espacio, y por consiguiente, supone que su naturaleza es sintética *a priori*. Pero al parecer, Frege mantiene el aspecto sintético de la geometría debido a la imposibilidad de demostrar el postulado de las paralelas por reducción al absurdo, y porque es de esta imposibilidad de donde surgieron las geometrías no-euclídeas: "en el pensamiento conceptual siempre se puede tomar lo contrario a este o a aquel axioma geométrico, sin que se caiga en contradicción consigo mismo, si se sacan las conclusiones deductivas de esas asunciones, aunque estén en pugna con la intuición. Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes unos de otros y de las leyes básicas de la lógica, y consecuentemente son sintéticos" [Frege (1884), § 14].

Al respecto debe tomarse muy en cuenta la expresión "en un futuro", pues en la ***Conceptografía*** todo lo anterior queda planteado como un mero recuento de los beneficios que pueden lograrse con la aplicación del nuevo "lenguaje de fórmulas".

De hecho, Frege señala que su nuevo sistema ha sido creado en vistas a su aplicación inmediata a la aritmética, pero como su nombre lo delata, su aplicación puede extenderse a todos los campos del pensamiento.

En su segunda obra, ***Los Fundamentos de la Aritmética*** (1884) Frege se disponía a entrar en materia y presentar una primera aproximación de su sistema en el análisis del concepto de número. Para ello, Frege dedica una buena parte a justificar sus propósitos elaborando una crítica penetrante a dos fuegos en contra de las posiciones más conocidas sobre el tema.

En el bando puramente matemático, Frege cuestiona las formulaciones de Dedekind, Grassmann, Jevons y Heine mientras que en el bando filosófico, Frege elabora una profunda crítica al psicologisismo del primer Husserl, ridiculiza el empirismo de Stuart Mill, y refuta la noción de "número" dada por Kant.[4]

Dicho de otra forma, en ***Los Fundamentos de la Aritmética*** Frege se encontraba interesado en poner de manifiesto la

[4] Como correctamente señala Dummet, "El ***Grundlagen*** se encuentra escrito en un marco de la terminología kantiana que no fue empleado por Frege en ningún otro de sus escritos después de 1980 hasta el final de su vida. Pero esta terminología no indica la aceptación de alguna doctrina kantiana especial. Por el contrario, apesar del tono de profundo respeto que frecuentemente, pero no invariablemente, asume al referirse a Kant, Frege regularmente discute los puntos de vista de manera exclusiva para expresar su desacuerdo. El uso de semejante terminología puede quizá deberse a un esfuerzo especial por hacerse entender por los filósofos profesionales; y más probablemente, a que asumía de entrada que el contexto kantiano era el más apropiado para plantear cuestiones filosóficas". Desde luego, prefiero quedarme sólo con la primera hipótesis. Dummett (1991), p. 2.

utilidad de un análisis lógico de los conceptos aritméticos como un remedio eficaz a la imperdonable proliferación de interpretaciones equívocas. Si bien las opiniones de los filosófos podían de alguna manera ignorarse, no lo eran de ninguna forma las ideas que los propios matemáticos tenían de la aritmética.

Sin embargo, para Frege las opiniones de los filósofos se veían de cierta forma reflejadas en las posturas de algunos matemáticos. Tal era el caso que, por ejemplo, Frege encontraba en la interpretación formalista (en la cual se habla de los signos matemáticos como carentes de contenido), pues el formalismo era en cierta forma una variante de la doctrina empirista (que considera como existente aquello que sólo puede ser percibido por los sentidos), ya que "induce erróneamente a tomar por números los signos numéricos mismos, a considerarlos los verdaderos objetos de estudio".[5] En otras palabras, para Frege el formalismo es insuficiente porque olvida distinguir entre la forma y el contenido, entre el signo y el pensamiento expresado por medio de él, y al confundir los números mismos con las marcas sobre el papel, "toda teoría formalista incurre en el peligro de reincidir en lo *a posterori* o en lo sintético, por más que se dé la apariencia de flotar en las alturas de la abstracción".[6]

Pero al margen de cualquier interpretación, para Frege era muy claro que el problema se encontraba hasta cierto punto en

---

[5] Frege (1891), p. 19; (1970), p. 22 [138-139].
[6] Frege (1884), § 109.

la naturaleza de los objetos aritméticos, pues a pesar de su simplicidad o quizá a causa de ella, el concepto de número siempre daba lugar a una variedad de interpretaciones que se contradicen entre sí. Pero ¿cómo es posible semejante desacuerdo sobre objetos tan simples?, ¿cómo puede tolerarse una situación de este tipo en la más fundamental de las ciencias matemáticas?

Un análisis preciso del concepto de número acabaría de una vez por todas con los desacuerdos, pero para lograr enteramente este objetivo era necesario introducir una serie de distinciones y complementos en el nuevo sistema; pues en el proceso de composición de esta segunda obra, Frege se dio cuenta de que no todo marcha a la perfección y que aún se requería introducir una reinterpretación de su "lenguaje de fórmulas" y añadir algunas distinciones que hasta entonces no se habían revelado como necesarias.

Esos ajustes en el aparato fueron apareciendo en ensayos entre 1891 y 1892. Pero también, vistos desde otro punto de vista, esos ensayos tenían el propósito de reforzar aquellos principios generales que Frege había invocado para limpiar la aritmética de las concepciones equívocas que se habían formado como parásitos alrededor de ella. Los tres principios aparecen formulados en ***Los Fundamentos de la Aritmética*** de la manera siguente:

1) Hay que separar tajantemente lo psicológico
   de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo.
2) No se debe preguntar por el *referente* de

una palabra aislada, sino en el contexto de la proposición.[7]

3) Hay que mantener siempre a la vista la diferencia entre concepto y objeto.

A primera vista, los tres principios no parecen tener mayor conexión entre sí, ni parecen expresar alguna división lógica fundamental. Incluso, para los lectores actuales de Frege, el primer principio puede parecer de un superfluo incomprensible; pero todo eso sería perder de vista la dimensión histórica en la cual se desenvuelve su obra.

Por lo demás, tales perplejidades no son en el fondo nada extraño. El lector actual de la ***Conceptografía***, por regla general, encuentra muchos problemas al momento de formarse una idea de lo que Frege entiende por lógica y por qué la lógica es una *conceptografía*. Sin embargo, puede lograr entenderlo si observa el papel que juegan los tres principios anteriores dentro de sus investigaciones.

En "*Función Y Concepto*", uno de los tres ensayos mencionados, se puede entrever la naturaleza de esa concepción de la lógica. El nuevo "lenguaje de fórmulas" fue introducido y bautizado como *conceptografía* en tanto que presuponía como

[7] Este principio del contexto, como se le conoce comúnmente, es motivo de diversas controvesias debido a que es sólo en esta obra donde aparece formulado de manera explícita y por que se dice que aquí la famosa distinción entre *sentido* y *referencia* aún no se había establecido. Pero desde mi punto de vista, es aquí precisamente donde se traza por primera vez, si bien no de manera totalmente explícita, y por consiguiente, el principio tiene que ver con el referente y no con el sentido. Como es bien sabido, para Dummett al no existir aún una distinción tal, el principio puede interpretarse de ambas maneras, pero reconoce que en ***Grundlangen*** el principio tiene que ver principalmente con la referencia [Dummett (1973), pp. 495-6 y (1981), p. 369].

elementos básicos de la lógica, el estudio de los conceptos puros del entendimiento. Desde su aspecto meramente técnico y formal, los conceptos no son otra cosa que clases o conjuntos, pero el tratamiento lógico que hace Frege de las clases como conceptos se aparta mucho del tratamiento algebraico que Boole y Schröder habían hecho de las clases.

En buena medida, esas diferencias pueden salir a la luz si se toma en cuenta, por un lado, el lugar central que ocupa la teoría de la cuantificación y, por el otro, el segundo principio arriba citado y, para lo cual, la noción de "función" viene a ocupar también una posición importante. En este sentido, el ensayo *"Función y Concepto"* aparece como una reinterpretación y ampliación del sentido de "función" matemática.

En primera instancia, Frege cuestiona algunas de las interpretaciones comunes acerca de la naturaleza de las funciones y, al mismo tiempo, elabora una breve relación histórica de la evolución de las mismas. Aquí Frege hace énfasis en la condición incompleta de las funciones e identifica el recorrido de los valores del argumento con la extensión de los conceptos. De modo que así como los posibles valores del argumento implican la verdad o falsedad de la función, así también, los objetos al caer o no dentro de la extensión de un concepto, implican un determinado valor de verdad. Es decir, las relaciones entre objetos y concepto (y también entre conceptos) sólo se pueden establecer por medio de proposiciones, las cuales además, pueden interpretarse como un tipo particular de funciones.

Pero también, Frege insiste en la naturaleza incompleta de las funciones porque le interesa desechar la idea de que las funciones son "números indeterminados", o simplemente números.

> Me interesa señalar -apunta Frege-, que el argumento no forma parte de la función, sino que constituye, junto con la función, un todo completo; pues la función, por sí sola, debe denominarse incompleta, necesitada de complemento o no-saturada. Y ésta es la diferencia de principio que hay entre las funciones y los números. Y por esta naturaleza de la función se explica que, por otra parte, en "$2 \bullet 1^3 + 1$" y "$2 \bullet 2^3 + 2$", a pesar de que estas expresiones se refieren a números distintos reconozcamos la misma función, mientras que, por otra parte, en "$2 \bullet 1^3 + 1$" y "$4 - 1$", a pesar de su mismo valor númerico, no encontramos la misma función.[8]

Pero en relación con los números debemos tener muy en cuenta la diferencia entre su forma y el contenido, pues si bien "1 + 1 + 1" y "4 - 1" refieren al mismo número, no expresan el mismo pensamiento. Y en realidad, esta diferencia entre la forma y el contenido, el sentido y la referencia, vale para un campo más amplio; por ejemplo, el enunciado "el lucero matutino es un planeta cuya revolución es menor que la de la tierra" y el enunciado "el lucero vespertino es un planeta cuya revolución es menor que la de la tierra", si bien remiten al mismo cuerpo celeste, no expresan el mismo sentido, el mismo pensamiento. En palabras de Frege, "la igualdad de referencia no tiene como consecuencia la igualdad de pensamiento".[9]

Por otra parte, el que una expresión determinada tenga sentido o exprese un pensamiento, no implica que la expresión

---

[8] Frege art. cit., p. 22; p. 24 [140].
[9] *Ibid.*, p. 29; p. 29 [145].

cuente con un referente. Esto es bastante obvio en relacion con la expresión "el número ordinal más grande", que ciertamente tiene un sentido pero no obstante, carece de referente, pues para cualquier candidato, siempre es posible construir otro mayor por medio de la regla n + 1.

O bien, como Frege sugiere: "La expresión "la serie menos convergente" tiene sentido; pero se demuestra que no tiene referencia, puesto que para cada serie convergente puede encontrarse otra menos convergente, pero que no obstante, converge. Así pues, por el hecho de que se conciba un sentido, no se tiene seguridad de una referencia".[10]

En cierta forma, la distinción entre sentido y referencia corre paralela a la de concepto y objeto; pero esto no ocurre necesariamente así. Frege se había encargado de introducir explícitamente la distinción entre el sentido y la referencia principalmente en relación con los nombres propios, o términos individuales en su ensayo *"Sobre Sentido y Referencia"*; pero de hecho, también se había ocupado de lo que Russell llamaría más tarde "frases denotativas" o "expresiones descriptivas" (definidas), como "la serie menos convergente" o "el lucero vespertino" que hemos citado anteriormente; y sólo incidentalmente, como una muestra de la manera como la expresión aseverativa se relaciona con su valor de verdad.

En consecuencia, parece plausible suponer que si bien el concepto "impar" tiene por sí solo un sentido, no tiene, por otra parte, una referencia definida; mientras que un objeto no

[10] Frege (1892), pp. 52-53; (1970), p. 58 [159].

tiene ni sentido ni referencia, sino que es él mismo, la referencia de una expresión. Dicho a nivel ontológico, mientras que todo concepto, o mejor, todo término conceptual es necesariamente lingüístico, el objeto no tiene porque caer en esa misma categoría.

Por su parte, Frege contempló la posibilidad de hablar sin mayores complicaciones de la referencia de un término conceptual, la cual quedaría bien determinada si se la identifica con la extensión del mismo. Es decir, la referencia de un término conceptual sería los elementos que caen bajo ese concepto. Sin embargo, esta interpretación *prima faquie* correcta y más adecuada desde el punto de vista actual, presenta dificultades posteriores al interior de sus propias concepciones acerca la verdad y de la distinción misma entre concepto y objeto. Al parecer, Frege era muy consciente de los problemas que se suscitaban y no desarrolló más este punto de vista.[11]

Pero regresando a *"Función y Concepto"*, es conveniente mencionar la manera como Frege amplía la noción de "función" y cómo ésta entra en relación directa con los conceptos. En su rápido recuento de la evolución de la mismas, Frege observa que de hecho, en el desarrollo del análisis superior la noción de función ha experimentado una amplitud en dos direcciones.

Por un lado, se amplió su sentido al admitirse otros tipos de operadores de cálculo, además de la adición, multiplicación,

[11] "También el término conceptual debe tener un sentido y, para su uso científico, una referencia; pero ésta no consiste ni en un objeto ni en varios, sino que es un concepto". Cf. Frege (1892-1895), p. 100 [124].

potenciación y sus inversas. Estas nuevas operaciones fueron las que contribuyeron a la creación de nuevas funciones sobre límites. Y por el otro, se amplió el campo de los objetos que figuran como argumento y valor de la función, al introducirse los números complejos.

Por su parte, Frege avanza también en ambas direcciones y añade, por un lado, operaciones o mejor dicho signos como =, <, >, de modo que una expresión como "$x^2 = 1$" es para Frege una función como cualquier otra, pues al presentar valores numéricos para *x*, digamos 0, 1, 2, etc., siempre tendremos un valor veritativo para la función; que en el primer y el tercer caso será la falsedad, y en el segundo, la verdad. Así pues, a toda función saturada le corresponde un valor de verdad que puede ser "lo falso" o "lo verdadero".

Además, estos valores veritativos son los referentes de las proposiciones, y de aquí se deriva una teoría muy peculiar de la verdad. Al respecto, Kurt Gödel observó que esta caracterización de los valores de verdad recuerda en cierta forma la doctrina eleática de lo "Uno",[12] pero sobre este tema volveré más adelante.

---

[12] Gödel (1944), p. 317. Por lo pronto basta con observar que para algunos pensadores, el problema principal de la teoría de Frege es la identidad de la referencia. Es decir, como observa Gödel, en principio no parece haber ningún problema en el caso de las proposiciones falsas pues, en efecto, todas ellas parecen referirse a lo mismo, a saber, a nada. Pero en el caso de las proposiciones verdaderas, no está muy claro si todas ellas se refieren a lo mismo. Russell, por ejemplo, argumenta que diferentes proposiciones verdaderas deben de hablar acerca de diferentes hechos. Sin embargo, Frege podría salir bien librado de este argumento al invocar su principio según el cual la igualdad de referente no implica la igualdad de sentido (pero aquí es evidente que Frege y Russell están hablando de cosas distintas cuando tratan de la referencia [denotación] de proposiciones).

Por lo pronto, es importante anotar, como ya he mencionado, que Frege identifica el dominio de valores de la variable con la extensión de los conceptos en relación con los valores de verdad. En el caso del ejemplo anterior de Frege, si se sustituye la variable x por el número 0, en la función "$x^2 = 1$", tendremos como valor veritativo la falsedad de la función; entonces, también es posible expresar lo anterior de la siguiente manera: "0 no es raíz cuadrada de 1" o bien, "0 no cae bajo el concepto 'raíz cuadrada de 1'". Con lo cual, queda mostrada la identidad del recorrido de la variable de la función con la extensión del concepto. Y una vez establecida esta identidad, Frege concluye que "un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo".[13]

La afirmación anterior podría parecer también una definición de lo que son los conceptos; pero eso sería tomar un camino mal trazado en la interpretación de las ideas de Frege. En su tercer ensayo, *"Sobre Concepto y Objeto"*, se parte de la idea, anteriormente mencionada, acerca del estatus fundamental de los conceptos dentro de la lógica, o mejor dicho, dentro de su *lenguaje de fórmulas*.

Es decir, los conceptos, en tanto que entidades lógicamente simples, no pueden ser descompuestos en partes, ni ser definidos de manera estricta. Y tal aserto debe tomarse en su sentido general; esto es, podemos definir el concepto de "triángulo" o de "número par", pero es lógicamente imposible definir lo que los conceptos son.

[13] Frege (1891), p. 31; (1970), p. 30 [146].

¿Cómo saber entonces qué son los conceptos?, ¿cómo distinguir entonces entre un concepto y un objeto que cae bajo su extensión? Por lo pronto, debe quedar claro que ambos, concepto y objeto, aparecen como términos indefinibles y que la imposiblidad de ofrecer definiciones verbales obedece en buena medida a la concepción absolutista de la lógica que está detrás de todas las observaciones fregeanas.

Visto desde esa perspectiva, el carácter indefinible de los términos mencionados es una muestra clara del nivel más básico y fundamental de la *conceptografía.* Sin embargo, Frege sostiene que es posible captar su significado a través de indicaciones y sugerencias sobre su modo de empleo. Una de esas sugerencias viene dada, por ejemplo, en la naturaleza predicativa de un concepto, y por lo cual, es algo que podemos identificar con el significado de un predicado gramatical. Por el contrario, un objeto, o mejor dicho, el nombre de un objeto, nunca puede ser identificado con el contenido o sujeto de un predicado gramatical.

Desde un punto de vista técnico, las indicaciones de Frege se encuentran directamente relacionadas con la teoría de la cuantificación y su nueva idea de "función": un cuantificador sólo puede unirse a una expresión que contenga un predicado para formar una proposición, o bien, una función (predicado) requiere tomar valores en su variable (sujeto). Pero también, por otra parte, Frege liga las oraciones o proposiciones como expresión de pertenencia a un concepto porque cumple con uno de sus principios generales: sólo dentro del contexto de la proposición la palabra tiene un referente.

Otra sugerencia o criterio de índole gramatical dado por Frege, señala que es también posible reconcer un término conceptual por medio del artículo indeterminado, mientras que el artículo determinado es siempre una indicación de que se trata del nombre de un objeto dentro de la proposición u oración declarativa.

A pesar de los nutridos comentarios de Frege sobre todos los anteriores puntos, parece que de alguna forma no todo encaja correctamente. En primer término, debe decirse que, mientras que la función "$x^2 = 1$" es falsa cuando su valor numérico es 0, la oración "0 no cae bajo el concepto 'raíz cuadrada de 1'", es verdadera; de modo que para evitar posibles malentendidos, parece más apropiado escribir "'$0^2 = 1$' es falso", que puede expresarse también como "0 no cae bajo el concepto raíz cuadrada de 1".

En segundo lugar, cuando Frege identifica las funciones con los conceptos, parece olvidarse de la naturaleza no-saturada o incompleta de las funciones; pues si "un concepto es una función cuyo valor es siempre un valor veritativo", debe entenderse que esa función está saturada, que ha sido completada. Pero además, en realidad Frege sólo identifica las funciones saturadas con proposiciones acerca de la pertenencia o no a conceptos pero no en relación con los conceptos mismos. De modo que la identificación es sólo aparente en ambas direcciones.

Pero dejemos de lado los comentarios anteriores y volvamos de nuevo sobre el tratamiento que Frege hace de las funciones, pues no hemos dicho nada aún sobre la manera como se amplía en la segunda dirección antes señalada. Anteriormente había comentado que, de acuerdo con Frege, las funciones habían experimentado también un ampliación de su sentido dentro del análisis superior al admitirse como valores de sus argumentos números complejos.

Ahora bien, Frege dio un paso importante en el desarrollo de su programa al pensar que las proposiciones podían entenderse como funciones saturadas. De hecho, una función no sería otra cosa que la expresión simbólica de una proposición incompleta. Pero esto sería así sólo si podemos mostrar que las proposiciones pueden ser descompuestas en dos partes, como ocurre en el caso de las funciones.

Si por ejemplo, la proposición "Russell viajó a China" se descompone en dos partes, la primera en 'Russell', y la otra en '...viajó a China'; la primera parte se puede identificar con el valor determinado del argumento, mientras que la segunda, con la función no saturada o incompleta. Y para enfatizar que se trata de una función, la segunda parte podría escribirse entonces así: "x viajó a China", en donde la variable indica un lugar vacío que puede recibir como valor un nombre propio, o bien, alguna expresión que represente un nombre propio.

Ahora bien, es claro que aquí Frege ha ampliado más allá del análisis matemático de lo que puede tomarse como valor del argumento de una función. En el análisis superior el sentido de las funciones se vio ampliado en una dirección al admitirse de números complejos como valores del argumento. Es decir, las funciones habían admitido series de números irracionales o racionales y luego de números complejos, pero en todos los casos se trataba de números, pero Frege al generalizar el significado de las funciones a expresiones incompletas de proposiciones ha roto cualquier restricción sobre lo que se ha de tomar como valor de un argumento.

> Como vemos -agrega Frege-, aquí se ha emprendido al mismo tiempo una extensión en otra dirección, o sea, con respecto a lo que puede aparecer como argumento. Ya no hay que admitir tan sólo números, sino objetos en general, con lo cual; ciertamente, también se ha de contar a las personas entre los objetos.[14]

Es claro que al admitir una variedad ilimitada de objetos como argumentos y valores posibles de una función, Frege sugiere que sus intereses no se restringen al uso de su *conceptografía* dentro del campo de las matemáticas. Asimismo, se revela más nítidamente ese rasgo importante de su concepción absolutista de la que he venido hablando, pues aquí queda de manifiesto que el universo de la *conceptografía* ha de identificarse con *el* Universo de todos los objetos.

Pero así como no es posible definir qué son en realidad los conceptos, también resulta imposible definir qué es un objeto. Y sin embargo, siempre es necesario tener en cuenta las diferencias entre concepto y objeto, entre función y argumento.

Ahora bien, Frege distingue además diferentes órdenes o niveles de conceptos y funciones. Un concepto o función de

[14] *Ibid.*, pp. 32 y 33; p. 31 [147].

primer nivel tiene como extensión o como valores del argumento, objetos; un concepto o función de segundo nivel cuenta como elementos de su extensión o como valores de su argumento, conceptos o funciones; y así sucesivamente.[15]

Pero de la misma forma como un concepto o función puede ser miembro de la extensión de un concepto de nivel superior, también puede estar subordinado a otro concepto de su mismo nivel. Se dice de un concepto que está subordinado a otro, si todos los objetos del primero caen también bajo el segundo. En lenguaje conjuntista, A está incluido en B, si y sólo si todo objeto de A pertenece también a B.

La anterior distinción es muy significativa desde el punto de vista histórico, dado que hasta ese entonces ninguno de los miembros de la contraparte algebraica de la lógica, como Boole, De Morgan o Schröder, habían logrado establecer una diferencia entre el pertenecer y el estar subordinado a una clase. Y no es difícil imaginar las ventajas técnicas que trae consigo tomar en cuenta esta diferencia fundamental.

Años más tarde, Peano no sólo había llegado por cuenta propia a esa misma división sino que además había introducido los símbolos especiales ε y $\supset$ para tenerla en cuenta.[16] De

[15] Estos niveles suelen emplearse ahora para distiguir al menos entre la lógica de primero y segundo orden, pero desde luego, esta distinción era ajena e irrelevante para Frege debido a su concepción absolutista. Sobre este punto véase Goldfarb (1979) y Moore (1980), § 2, y para un punto de vista opuesto Dummett (1973), V y XV.

[16] En realidad, el símbolo para inclusión usado por primera vez por Peano era la letra romana **C** invertida (tomada como letra inicial de la palabra latina *continet*). Kennedy, apoyandose en una afirmación del mismo Peano, señala que fue este último quien hizo la distinción por primera vez (en 1889). Pero debe ser claro que en la *conceptografía* no es necesario introducir símbolos especiales para esta distinción ya el uso de las variables para objetos y para conceptos (predicados) permite establecer con precisión cuando un

hecho, Russell la retomó de Peano considerándola un desarrollo de la mayor importancia no sólo lógica, sino también filosófica.[17] Esa importancia filosófica viene a cuento porque en el lenguaje ordinario esa misma distinción, que viene a establecerse en el 'es' como identidad y como cúpula, fue pasada de largo -según Russell- por la mayoría de los filósofos clásicos y su falta de atención en este punto los llevó en el caso extremo, como en Hegel, a elaborar los más extraños absurdos.

No obstante, lo importante para Frege consistió en que a partir de aquí, se pueden establecer otros desarrollos y distinciones pertinentes, como por ejemplo, la no menos importante distinción entre poseer una propiedad y poseer una característica (o nota). Así, un objeto tiene *x* propiedad si cae bajo su correspondiente concepto; y un concepto es característico de otro concepto si el primero es una propiedad de los objetos que caen también bajo el segundo.

Sin entrar en detalles debe decirse hasta aquí, que todas las ampliaciones y distinciones antes mencionadas tenían el objetivo de reforzar el aparato lógico de su programa, y en particular, presentar los detalles técnicos apropiados para cumplir cabalmente con su propósito de demostrar la naturaleza meramente lógica de la aritmética.

---

objeto (elemento) cae bajo un concepto (pertenecia) y cuando un concepto se encuentra subordinado a otro (inclusión). En ***Grundlangen***, por ejemplo, Frege distingue ya muy bien cuando un concepto cae bajo otro concepto de orden superior sin que esto deba confundirse con la subordinación [Frege (1984), § 53].

[17] Cf. Russell (1914), p. 1167 y (1959), p. 66 [67].

III Conceptografía y logicismo

En este sentido es conveniente señalar que lo que suele denominarse como "logicismo" es una tesis que Frege sólo comparte en relación con la aritmética, pero que sin embargo, eso no impide la aplicación de la *conceptografía* a otros campos. Ahora bien, es importante añadir que para Frege, de la aplicación de su *conceptografía* se puede determinar qué clase de expresiones han entrado en consideración; es decir, podemos saber qué tipo de proposiciones (analíticas, sintéticas o sintéticas *a priori*) componen o aparecen en la teoría en la cual usamos la *conceptografía*. Y esto obedece a que para Frege, lo analítico se define en virtud de la lógica, y por lo tanto, es un error afirmar que para Frege la lógica es analítica, pues en Frege, la lógica es el canon de lo analítico.

En la ***Conceptografía*** el nuevo lenguaje de fórmulas se presenta como semejante a la aritmética, pero se considera a la primera como más básica y fundamental que la segunda. Esto es bastante obvio si se toma en cuenta que sólo bajo esta razón se puede plantear con sentido una reducción de los conceptos aritméticos a principios lógicos.

En Frege, si recordamos, la lógica aparece como la ciencia más fundamental de todo el conocimiento. Sus leyes se plantean desde un principio como válidas en cualquier dominio, mientras que sus conceptos pueden aplicarse sin problemas a otros conceptos. Y es por estos motivos por los cuales Frege da por descontado que todos aquellos enunciados que puedan ser expresados únicamente a partir de principios lógicos, son proposiciones analíticas.

En cuanto a la aritmética, este era precisamente el caso pues no había duda alguna que en el desarrollo de sus pruebas no hacían falta más que verdades de validez lógica general, pero en otros dominios no había razón para suponer lo mismo, pues "si es imposible llevar a cabo la prueba sin utilizar verdades que no sean de naturaleza lógica general, sino que pertenezcan a un campo especial del conocimiento, entonces se tratara de una proposición sintética".[18]

Pero incluso, en el caso de la aritmética esto era algo que aún quedaba por demostrar completamente. Y este sería el objeto de su siguiente obra, ***Las Leyes Fundamentales de la Aritmética***, que apareció en dos tomos. El primero de ellos fue publicado en 1893 y el segundo 10 años después, en 1903.

En el primer volumen se afirmaba que todo el edificio teórico se apoyaba en las nociones básicas de relación y concepto. Y como ya mencioné, los conceptos no son otra cosa que conjuntos o clases. Aquí también Frege había establecido algunos principios que se debían de seguir en la formación de esas clase y en la manera de conseguir su apropiada jerarquía. Sin embargo uno de esos principios daba pie a la formación de conceptos o conjuntos paradójicos.

---

[18] *Ibid.*, § 3.

Como es bien sabido, la primera paradoja descubierta en el sistema de Frege se conoce como "paradoja de Russell", debido a que fue Bertrand Russell quien dio con ella en 1901. Como también es de sobra conocido, Russell notificó a Frege su descubrimiento cuando el segundo tomo de ***Las Leyes Fundamentales de la Artmética*** estaba por ver la luz.[19] No obstante, tiempo atrás Georg Cantor había encontrado una paradoja en su teoría de los números ordinales, y poco después, Burali-Forti, un matemático de la escuela de Peano, había descubierto también una versión de la misma paradoja de Cantor.[20]

Sin embargo, ni Cantor ni Burali-Forti habían otorgado a sus antinomias las mismas consecuencias negativas que veían Russell y Frege, sino que pensaban que esos problemas se podían salvar con algunos cambios locales en la teoría. Como ha sugerido Grattan-Guinness, Russell fue el primero en coleccionar, interpretar y tratar estos problemas como genuinas paradojas.[21]

---

[19] Frege (1903), apéndice. Históricamente, Ernest Zermelo, un matemático de la escuela de Hilbert, había llegado de manera independiente a la misma paradoja. La paradoja se encontraba relacionada con las nociones de 'propiedad' y 'característica' que he mencionado, es decir, entre el ser elemento (o pertenecer), y el estar incluido (o subordinado) a un concepto (o clase o conjunto). Por ejemplo, la clase de los objetos abstractos es ella misma un objeto abstracto, pero la clase de los objetos físicos no es ella misma un objeto físico; de aquí se sigue que hay clases que son miembros de sí mismas y clases que no lo son. Y si preguntamos si la clase de las cosas que no pertenecen a sí mismas, es miembro o no de sí misma, tenemos como respuestas resultados contradictorios, en tanto que si no lo es, lo es y si lo es, no es la clase de las cosas que no perenecen a sí mismas.

[20] Cf. Burali-forti (1897) y Cantor (1899).

[21] Cf. Grattan-Guinness (1980b).

Pero independientemente de esto último, un sistema lógico o matemático que engendra contradicciones es un sistema que no puede defenderse ni puede ser de alguna utilidad, de modo que sólo hay dos opciones a escoger: o se desecha totalmente el sistema y se empieza a elaborar otro que resulte consistente o bien, el sistema es sometido a un cuidadoso análisis para detectar qué principios o definiciones dan pie a las paradojas para después ser reemplazados por otros que puedan evitar esos resultados.

Por su parte, Frege había seguido la segunda alternativa, pero tampoco estaba muy satisfecho con los cambios del sistema propuestos. Esta insatisfacción se debía en buena medida a que era muy consciente de que la paradoja russelliana no era algo que se podía deducir únicamente de su sistema.

En el ya histórico apéndice del segundo tomo de ***Las Leyes Básicas de la Aritmética***, Frege plantea la cuestión de manera un tanto irónica:

> *solatium miseris, socios habuisse malorum.* También yo tengo este consuelo, si es que es un consuelo; pues cualquiera que en sus pruebas haga uso de la extensión de conceptos, clases o conjuntos, se encontrara en mi misma posición. No se trata únicamente de mi método particular de trazar los fundamentos, sino de toda fundamentación lógica de la aritmética posible.[22]

El reto de los logicistas se convirtió, en este sentido, en superar las contradicciones sin perder de vista su tesis acerca de la naturaleza analítica (lógica) de la aritmética. Es

[22] Frege, *op. cit.*, apéndice; (1970), p. 234 [p. 252]. Para un comentario importante sobre la solucion de Frege y la de Quine, véase Quine (1955).

decir, no sólo se requería un método para salir librados de las paradojas, también se requería que este fuese reconocido como esencialmente lógico.

Cinco años después de la muerte de Frege, el lógico polaco S. Levniesky descubrió que la nueva solucion de Frege también conducía a resultados problemáticos. Frege, por su cuenta, no se ocuparía más del asunto y entre 1903 y 1906 sus fuerzas intelectuales se concentraron para escribir una serie de ensayos pólemicos contra los nuevos métodos formalistas que David Hilbert estaba utilizando en su fundamentación de la geometría. Como ya se ha mencionado, el formalismo como tal, era desde tiempo atrás una doctrina que para Frege no podía ser completamente satisfactoria.

Si bien el formalismo de Hilbert no es el formalismo de los matemáticos del siglo XIX, de alguna forma Frege pensaba que Hilbert no se había librado del prejuicio de "identificar el contenido del símbolo con el símbolo mismo". Desde una perspectiva más amplia, esa discución parte de dos concepciones diferentes sobre la matemática, y más en concreto, sobre la geometría. Esas diferencias se materializan en los problemas técnicos relativos al método axiomático.

El método axiomático de Hilbert es, en el fondo, bastante fregeano en su principios, pero el reproche de Frege se centra en su insistencia de que tal enfoque es insuficiente en sí mismo para revelar la naturaleza de los enunciados geométricos.

De cierta manera, puede decirse que esa disputa es entre un enfoque estrictamente matemático (Hilbert), y uno más filosófico (Frege), que sólo en algunos puntos entran en contacto.[23]

De cualquier manera, Frege se olvidaría casi por completo de su trabajo sistemático y no sería sino hasta 1918 cuando emprende de nueva cuenta la realización de una obra constructiva que desafortunadamente quedaría inconclusa: ***Las Investigaciónes Lógicas***.

IV El *Gedanke* y la Verdad según Frege

No obstante, de este libro de lógica filosófica proyectado por Frege, se conocen tres ensayos que habían sido concebidos como parte integral del mismo. Los ensayos fueron publicados entre 1918 y 1923, y representan algo de la base filosófica sobre la cual Frege había trabajado en todas sus investigaciones anteriores. El primero de los tres ensayos, "*Der Gedanke*", abre desarrollando uno de los principios básicos que siempre había recomendado tener a la vista; esto es, delimitar claramente lo objetivo de lo subjetivo, el pensamiento objetivo (*Gedanke*) de la representación subjetiva (*Vorstellung*); o bien, lo lógico de lo psicológico.[24]

[23] De hecho, la polémica con Hilbert inició a finales de 1898, año de la publicación de sus ***Elementos de Geometría Euclídea***, que anticipa el trabajo axiomático de su ***Grundlangen der Geometrie***, pero la polémica sólo se había dado en su correspondencia. Frege solicitó a Hilbert la publicación de la misma, pero la negativa de Hilbert motivó a Frege a escribir un primer ensayo que Hilbert nunca respondió. Sin embargo, A. Korselt asumió su defensa y es a este último a quien Frege se refiere directamente en sus ensayos siguientes [Cf. Frege (1971)].

[24] Philip Kitcher cuenta con una opinión muy curiosa sobre las tesis antipsicologicistas de Frege. Según él, los intereses que dieron lugar a la

La insistencia sobre este punto radica en que para Frege es importante delimitar de una vez por todas el estatus de las ciencias respecto a la lógica. Es decir, establecer la universalidad de las leyes lógicas y al mismo tiempo demostrar su independencia de los procesos mentales que entran en juego en el razonamiento de una persona determinada.

Para Frege es claro que las leyes lógicas no son leyes del pensamiento en el sentido psicológico. Pero, no obstante, se trata de genuinas leyes del pensamiento. Y a mi manera de ver, Boole era de una opinión muy similar que a menudo se ha malinterpretado (debido principalmente a Russell).[25] Una razón

---

conceptografía y su programa fueron propiamente epistemológicos, en tanto que lo que Frege buscaba era una reforma del conocimiento matemático. Siguiendo este punto de partida, Kitcher llega a la improbable opinión de que Frege basó su reforma en !el concepto tradicional de prueba!, concepto que asocia principalmente con Kant, y que según Kitcher, presupone lo que ha "llamado una explicación psicologicista del conocimiento" [Kitcher (1979), p. 245]. En consecuencia, para Kitcher, Frege en realidad no atacaba el psicologicismo *per se*, sino sólo cierto tipo de psicologicismo: "lo que Frege objeta -escribe Kitcher-, una y otra vez en sus escritos, publicados o no, es la confusión entre la ciencia descriptiva de nuestros procesos mentales de inferencia, con la ciencia normativa de esos procesos. La primera, la psicología, estudia las formas en las cuales las series de razonamientos acontecen en la realidad. La última, la lógica, nos dice como deben ocurrir" [Kitcher *Ibid.*, p. 246].

Es bastante claro que el Frege de Kitcher no difiere sustancialmente de algunos de sus presuntos adversarios: Mill y Boole, pues ambos mantienen que las leyes lógicas son prescriptivas. Boole por ejemplo, observa que "las leyes matemáticas del razonamiento son, propiamente hablando, sólo las leyes del razonamiento correcto, y su trasgresión real es un fenómeno perpetuamente existente" [Boole (1854), p. 408]. Mientras que Mill afirma que la lógica es "una colección de preceptos o reglas para pensar, basadas en una investigación científica de los requisitos para el pensamiento válido" [Mill (1891), p. 146; sobre las similitudes y diferencias entre el psicologicismo de Boole y Mill, véase John Richards (1980), sobre una interpretación diferente del psicologisimo de Boole véase *supra* n. 22 y 23]. Por otra parte, la supuesta filiación kantiana de Frege es muy común en ciertos estudiosos pero como señala correctamente Eva Picardi, si Frege fue kantiano cietamente debe haber sido un "*Kantianer eigener Art*" [Picardi (1987), p. 180].

25 De hecho, parece innegable que la permanencia de esta interpretación errónea del psicologicismo de Boole se debe en buena medida a la autoridad de Russell, quien identifica las leyes del pensamiento de Boole con los procesos mentales del razonamiento [por ejemplo en Russell (1900) § 105],

muy sencilla obedece a que la psicología, de dudoso estatus científico en esa época, es una ciencia experimental cuyas leyes, de llegar a tenerlas, tendrían un campo muy limitado de aplicación.

Pero es obvio que ninguna ley científica puede gozar de la universalidad que Frege le confiere a las leyes lógicas, pues si bien "es tarea de todas las ciencias descubrir verdades; a la lógica le toca decretar las leyes del ser verdad".[26] Dicho de otro modo, esto significa que las leyes de las ciencias valen únicamente para un dominio determinado de fenómenos, mientras que las leyes lógicas valen en general, y determinan todos los modos del ser verdad. Pues es en las leyes del ser verdad donde se despliega el significado de la palabra "verdad".[27]

Ya he mencionado el comentario de Gödel respecto al carácter metafísico de la doctrina de lo *Verdadero* en Frege. Y en efecto, para Frege su teoría del pensamiento objetivo se traduce en una teoría de la Verdad que ya se encuentra formulada en embrión en sus ensayos "*Función y Concepto*", y en "*Sobre Sentido y Referencia*". O dicho desde otro ángulo, en sus

---

pero como mencioné en la nota anterior, esta no es la idea de Boole, lo cual por otra parte, no deja de contrastar con las ideas de Frege.

[26] Frege (1918), p. 49. Es importante comentar que este realismo de Frege es un rasgo que también comparte con Boole, y que, a mi juicio, debe ser tomado suficientemente en cuenta al momento de reconsiderar las llamadas tesis psicologicistas de Boole a las que me he referido en las últimas dos notas. "Ha de recordarse -escribe Boole-, que no es tarea de la ciencia crear leyes, sino descubrirlas. No influimos en el origen de la constitución de nuestras mentes ni está a nuestro alcance modificar su carácter. Y como las leyes del intelecto humano no dependen de nuestra voluntad, así, las formas de la ciencia, de las cuales las primeras constituyen su base, son en todos sus aspectos esenciales, independientemente de la elección individual" [Boole (1954), p. 11].

[27] Frege, *ibid.*, p. 50.

primeras consideraciones sobre la semántica de las proposiciones.

Antes de *"Función y Concepto"*, Frege sólo había distinguido entre la expresión lingüística y su contenido (el pensamiento), entre el signo y su significado; pero después, un análisis más cuidadoso de las funciones y los conceptos lo había empujado a tomar en cuenta un tercer elemento: la referencia.

Ya he observado también que para Frege la referencia de un término individual o de un nombre propio es o debe ser, un objeto; pero ¿cuál sería la referencia de un pensamiento, o de una proposición?

> Una proposición -dice Frege-, contiene como sentido un pensamiento o, por lo menos, pretende contener alguno; y este pensamiento es, en general, verdadero o falso; esto es, tiene, en general, un valor veritativo que puede concebirse asimismo como referencia de la proposición, del mismo modo como el número 4 es la referencia de la expresión '2 + 2', o como Londres es la referencia de la expresión 'la capital de Inglaterra'.[28]

Desde luego, esto supone fuertemente que una expresión aseverativa es una especie de nombre compuesto, que ha diferencia de los nombres propios, denota o refiere valores de verdad; y en consecuencia, estos últimos deben ser considerados también como objetos. Sin embargo, tomar demasiado literalmente esta analogía entre expresiones aseverativas y nombres propios tiene implicaciones bastante indeseables, las cuales han sido tratadas con suficiente amplitud por la mayoría de los estudiosos de Frege.

---

[28] Frege (1891), p. 32; (1970), p. 31 [146].

Desde mi punto de vista, debe señalarse que existe una diferencia sutil pero importante entre la proposición vista como un nombre complejo y un nombre propio, ya que las proposiciones, cualquiera que pueda ser su contenido o sentido, no tienen más posibilidad de referencia que los dos valores de verdad de la lógica bivalente, mientra que a los nombres propios les puede corresponder distintos objetos como referentes. En consecuencia, las proposiciones deben considerase como una clase muy peculiar de nombres.[29]

Ahora bien, ¿no es más natural asumir como referencia de una proposición el hecho denotado o expresado por el pensamiento?, ¿acaso no es necesario para decidir la verdad de la proposición que exista una correspondencia entre el pensamiento y a lo que éste apunta?

Por supuesto, ambas preguntas se fundan en la creencia en una teoría de la verdad por correspondencia, y si bien ahora con la teoría de Tarski sabríamos cómo entender una teoría de este tipo dentro de teorías lógico-matemáticas, debe tenerse presente que para Frege se trata de una teoría claramente inoperante dentro del dominio de las teorías deductivas.

No es mi intención comentar aquí si los conceptos básicos del enfoque de Tarski (validez, satisfacción, etc.) representan en realidad una teoría de la correspondencia, y si tal enfoque

[29] Dummett observa por ejemplo, que "tenemos una intuición fuerte para suponer que las proposiciones (sentences) no son de la misma categoría sintáctica o semántica que la de los nombres propios, y [que] esto implica, al menos en el contexto fregeano, que las cosas que estas denotan serán también de distinto tipo lógico". Dummett (1981a), p. 36.

pudiera armonizar con la teoría de lo *Verdadero* de Frege.[30] Por el momento, me basta con afirmar que la teoría de la correspondencia es una teoría que Frege no comparte, pero que sólo hasta en "*Der Gedanke*" rechaza abiertamente.

Su argumentación, muy sutil, puede plantearse de la siguiente manera: la palabra 'verdadero' parece sugerirse como palabra para propiedad. Y en efecto, se le predica a figuras, representaciones, enunciados y pensamientos. En el fondo, toda figura es una representación de algo, y sólo con miras a eso de lo que es figura o representación se supone su verdad o falsedad; es decir, se presume que su verdad consiste en la correspondencia entre la figura y lo figurado. Pero obviamente, una correspondencia es una relación y esto contradice el uso de la palabra 'verdadero' como predicado.

En "*Sobre Sentido y Referencia*", Frege planteaba también un argumento para rechazar la posibilidad de considerar los valores de verdad como predicados, fundado en su idea de la fuerza asertórica de las proposiciones:

[30] Cf. Tarski (1944). No obstante, puede pensarse que la distinción entre uso y mención de una expresión, o las dicotomías de Frege, entre discurso indirecto y discurso directo, en el que hace énfasis en relación con signo, sentido y referencia, por un lado, y a la diferencia entre objeto y concepto, por otro, han de tomarse como antecedente claro de la división entre lenguaje objeto y mentalenguaje, en la cual se funda el trabajo de Tarski. Pero en mi opinión esta interpretación es errónea si se observa que tales distinciones de Frege aparecen sólo para despejar posibles confusiones cuando, por ejemplo, se habla de la referencia de una proposición compuesta con verbos intensionales (*oratio obliqua*), o cuando se tratan de esclarecer las diferencias entre concepto y objeto [Cf. Frege (1892) y (1892a)]. Por otra parte, una distinción entre metalenguaje y lenguaje objeto es una tesis incompatible desde su punto de vista absolutista de la lógica [sobre una opinión opuesta véase *infra* cap. 3, pp. 166 ss].

> Alguien podría verse tentado a considerar la relación del pensamiento con lo verdadero no como la que hay entre el sentido y la referencia, sino como una relación entre sujeto y predicado. Ciertamente puede decirse: "El pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero". Pero si se examina esto más detenidamente, se observa que con ello no se dice realmente nada más de lo que se dice en la proposición "5 es un número primo". La afirmación de la verdad radica, en ambos casos, en la forma de la proposición asertórica, y cuando ésta no tiene su fuerza habitual, por ejemplo en boca de un actor en escena, la proposición "el pensamiento de que 5 es un número primo es verdadero" contiene también únicamente un pensamiento, a saber, el mismo pensamiento que el simple "5 es un número primo". De aquí puede desprenderse que la relación del pensamiento con lo verdadero no debe compararse a la del sujeto con el predicado. Efectivamente, sujeto y predicado, en su sentido lógico, son partes del pensamiento y para el conocimiento, se encuentran al mismo nivel. Uniendo sujeto y predicado siempre se consigue únicamente un pensamiento, pero no se pasa nunca de un sentido a su referencia, de un pensamiento a su valor de verdad.[31]

Pero regresando a la argumentación de "*Der Gedanke*", de una figura tenemos que saber de antemano qué es lo que intenta representar, puesto que de otro modo, no sabríamos con qué se ha de comparar la figura para poder determinar acerca de su verdad. Y para que una correspondencia sea perfecta, la figura y lo figurado deben coincidir totalmente; pero para que tal correspondencia ocurra, es necesario que, o bien la figura fuese también lo figurado, o lo figurado figura.

Ciertamente esto último no es lo que se quiere decir cuando se habla de la verdad por correspondencia, pero entonces es evidente que cuando se quiere hablar de una correspondencia semejante, no se trata de una correspondencia perfecta, de una correspondencia completa. Y en este sentido, tampoco se puede hablar de una verdad perfecta, de una verdad completa.

[31] Frege (1892), p. 61; (1970), p. 64.

Vistas así las cosas, la verdad por correspondencia resulta ser a fin de cuentas, una verdad a medias; pero una teoría correcta de la verdad no puede tolerar un más o un menos verdadero, puesto que lo que es verdadero o falso, lo es sin más.

Pero eso no es todo, pues hay todavía otro argumento en contra de la verdad por correspondencia que Frege no presenta pero que se sigue de los puntos de partida de su crítica. El argumento puede planterse de manera breve así: aún si se admite una correspondencia parcial entre la figura y lo figurado, se necesita un criterio para determinar qué es lo que se ha de tomar como susceptible de correspondencia; o mejor dicho, lo que se supone ha de considerarse que debe entrar en correspondencia entre la figura y lo figurado. Pero al mismo tiempo, se necesita una justificación del criterio empleado, y el problema siempre podrá empezar de nuevo.

En realidad, según Frege, el problema de fondo no es algo que tenga que ver únicamente con la teoría de la verdad por correspondencia, sino con todo intento de definir la verdad. Todo intento en esta dirección está condenado a caer en un círculo vicioso o en un regreso *ad infinitum*. Lo cual implica, que para Frege, al igual que los conceptos y los objetos, la verdad es algo completamente *sui generis* e indefinible. ¿Pero acaso no se había dicho antes que a través de las leyes del ser verdad se revelaba el significado de la palabra 'verdad'?

Efectivamente, para Frege la verdad, y por ende las leyes del ser verdad, pertenecen al dominio de la lógica y, por consiguiente, a lo más simple y general. Y como todo lo lógicamente simple, como los objetos y los conceptos, es imposible de definición en sentido estricto, entonces sólo es posible alcanzar su significado por medio de alusiones y sugerencias.

En el caso de la verdad, las sugerencias vienen dadas por las mismas leyes del ser verdad. ¿Pero qué es lo que sugieren las leyes del ser verdad acerca de la verdad? En palabras de Frege, que "ser verdad es algo diferente a ser tomado por verdadero, por alguien, por muchos o por cualquiera, y en ningún caso puede ser reducido a esto".[32]

En otras palabras, que la verdad es independiente de nuestro conocimiento o reconocimiento de ella. Lo cual significa que las leyes lógicas determinan la manera correcta de juzgar, donde sea, cuando sea y por quien sea.

En el trasfondo ontológico de esta concepción absolutista de la lógica, las leyes del ser verdad y la verdad en sí pertenecen al reino de lo eterno. Históricamente, los aspectos ontológicos y semánticos de la doctrina absolutista de Frege habían sido presentados con relativa distancia entre sí.

Esto se debía en parte porque Frege aludía a ellos de cuando en cuando para cumplir propósitos diferentes. Por ejemplo, las características ontológicas salían a relucir sólo como argumentos contra el psicologicismo, mientras que los desarrollos semánticos habían surgido directamente de problemas técnicos relacionados con la realización del programa. Un

[32] Frege (1893), p. 13.

ejemplo claro es, de nuevo, la distición entre sentido y referencia, la cual permite, entre otras cosas, explicar su manera de entender la igualdad. Pero en las ***Investigaciónes Lógicas*** proyectadas, Frege buscaba ofrecer una visión sistemática de ambos aspectos.

En la semántica de Frege, la verdad se remite a la referencia de un pensamiento expresado por una proposición. En el caso de las figuras y las representaciones, su verdad debe reducirse a la verdad de una proposición; pero como en el fondo, la verdad de una proposición no es sino la verdad del pensamiento expresado, sólo es correcto hablar de la verdad de pensamientos.

Ahora bien, el pensamiento de una proposición es su sentido; de modo que en cierta forma, el sentido puede también ser identificado con lo que es verdadero. Sin embargo, existen proposiciones que por ejemplo, expresan deseos o peticiones, pero que de acuerdo con Frege, no son susceptibles de recibir valores de verdad y, sin embargo, no carecen de sentido.

Algunos pensadores prefieren ahorrarse las complicaciones de este punto de vista limitando lo que puede ser una proposición, sólo a aquellas expresiones de las cuales cabe predicar un determinado valor de verdad. Pero como éste no es el caso con Frege, no es conveniente identificar siempre el pensamiento con el sentido, ni tampoco, el valor veritativo con el sentido de cualquier proposición.

Y aunque no queda nada claro qué es lo que se ha de entender por el sentido de las oraciones que expresan órdenes o deseos, al menos queda claro que para Frege sólo expresan pensamientos las oraciones aseverativas (aunque en verdad, Frege también contempló la posibilidad de atribuir pensamientos a las expresiones poéticas, aunque no valores de verdad). Y dentro de las oraciones aseverativas, sólo en aquellas que tienen fuerza asertórica (Behauptende Kraft) son los que se han de tomar en relación con la verdad.

Dicho de otro modo, las proposiciones asertóricas representan el prototipo de enunciados científicos, "pues las ciencias estrictas se dirigen hacia la verdad y sólo hacia la verdad. Por lo tanto, todos los componentes de las proposiciones a los que la fuerza asertórica no se extiende, no pertenecen a la exposición científica".[33]

V Semántica y ontología fregeana

En la ***Conceptografía***, Frege había introducido un símbolo especial para expresar la fuerza asertórica de un juicio (|—), de modo que Frege siempre contempló la fuerza asertórica como un elemento básico de su semántica, pero no obstante, llama la atención la poca importancia que se le ha otorgado al aspecto medular de su doctrina.[34]

[33] Frege (1918), pp. 58 y 59.
[34] Sobre este signo véase *infra*, cap. 3, nota 1.

De cualquier manera deben considerarse como elementos esenciales de su semántica, el sentido, la referencia y la fuerza asertórica. Pero cuando se hable de los elementos fundamentales de la semántica de Frege, debe quedar bien claro que no se trata de los únicos elementos que se toman en cuenta. Pues por ejemplo, "el tiempo de emisión es también parte de la expresión del pensamiento".[35] Es decir, de la proposición por medio del cual expresamos ese pensamiento.

En la ontología de Frege, el pensamiento y su verdad pertenecen al mundo de lo imperecedero e inamovible; pero las expresiones, que son el "ropaje perceptible de los pensamientos", se encuentran sujetos a los efectos del tiempo.

Incluso, se encuentran también determinados por las características del emisor y sus intenciones. Así, por ejemplo, en cuanto a la fuerza asertórica de una proposición, Frege señala lo siguiente:

> En la forma de una proposición asertórica expresamos el reconocimiento de la verdad. Para esto no necesitamos la palabra 'verdadero'. E incluso cuando la usamos, la fuerza asertórica no reside en ella, sino en la forma de la proposición asertórica, y cuando ésta pierde su fuerza asertórica, la palabra 'verdadero' no puede reestablecerla. Esto sucede cuando no hablamos en serio.[36]

---

[35] Frege, art. cit., p. 61.

[36] *Ibid.*, p. 57. En "*Sobre Sentido y Referencia*" Frege ya había observado la necesidad de diferenciar entre el sentido de un signo, y la representación asociada a él: "la representación es subjetiva: la representación de un hombre no es la misma que la de otro. Por eso se dan múltiples diferencias en las representaciones asociadas al mismo sentido. Un pintor, un jinete y un zoólogo asociarán probablemente representaciones diferentes al nombre "Bucéfalo". En esto consiste la diferencia esencial entre representación y el sentido de un signo, el cual por el contrario, puede ser propiedad común de muchos y que, por lo tanto, no es una parte o modo de la mente individual" [Frege (1892), p. 54; (1970), p. 59 [160]].

Así también, una misma proposición en boca de dos personas diferentes puede expresar pensamientos diferentes; y cuando un mismo pensamiento tiene lugar en diferentes tiempos de emisión, su expresión verbal tiene que ser diferente, aunque sólo se trate de una diferencia mínima, digamos, por ejemplo, sustituyendo un "hoy" por un "ayer".

Por otra parte, en Frege pensamiento y verdad entran en contacto con los seres humanos sólo como objetos captados; es decir, lo que usualmente llamamos `pensar', significa dentro de la concepción fregeana unicamente el proceso por medio del cual tenemos acceso a lo intemporal.

Esto implica, por supuesto, que nosotros de ninguna manera podemos crear pensamientos. Visto desde otra perspectiva, esta teoría sobre el pensamiento objetivo no es otra cosa que la doctrina de un lógico y matemático realista.

Sin embargo, la ontología de Frege no es una ontología dualista a la manera del realismo platónico. En ella se reconocen, además del reino de lo eterno e inmutable (al que están confinados el pensamiento y la verdad), el mundo externo y el mundo de nuestras experiencias internas. Y si bien el primero influye en los otros dos, estos últimos no pueden hacerlo con el primero.

El mundo interno, no obstante, mantiene ciertas semejanzas con el mundo eterno; y es debido a ellas, según Frege, lo que ha dado pie a que no se les distinga correctamente. Las consecuencias lamentables de no tener presentes las diferencias entre ambos mundos es la continuamente criticada intromisión del psicologicismo en matemáticas.

La primera semejanza entre ambos mundos consiste en que sus contenidos son en ambos casos imperceptibles. Pero de aquí en adelante, sugiere Frege, todas las demás semejanzas resultan engañosas. Las inclinaciones, los deseos y las sensaciones, son inquilinos del mundo interno; y malamente Frege resume estos contenidos bajo el nombre de "representaciones", de manera que se debe de tener cuidado de no confundirlas con aquellas otras de las que Frege hablaba cuando se refería a las figuras. Tampoco debemos de mezclar ambos discursos sin las aclaraciones pertinentes.

Ahora bien, la razón por la cual los pensamientos no pueden ser identificados con representaciones, consiste en primer lugar a que toda representación es representación de alguien, y por consiguiente, es el contenido de conciencia de una persona; pero el pensamiento, atemporal, nunca puede serlo, puesto que es independiente del mundo externo, al cual están ligados los objetos del mundo interno. En otras palabras, mientras que "el mundo interno presupone a alguien del cual es mundo",[37] el mundo de los pensamientos no presupone a nadie.

Como Frege no es lo suficiente explícito sobre lo que pasa cuando se capta un pensamiento, puede creerse que al momento de ser captado un pensamiento, éste pasa a formar parte integral de nuestros contenidos de conciencia. Pero si no me equivoco, para Frege, el captar no es un tomar algo, pues así como cuando

[37] *Op.cit.*, p. 65.

alguien ve un árbol, el verlo no implica que el árbol mismo pase a formar parte de su mundo interior, sino tan sólo la imagen del mismo, así también, supongo, el captar un pensamiento no implica que el pensamiento mismo pase a ser parte del mundo interno, sino digamos, sólo su "imagen".

Por otra parte, una característica de las impresiones sensoriales consiste en que no pueden ser comparadas entre sí, pues "toda representación tiene comúnmente un portador: dos personas no tienen la misma representación".[38] Pero el que no puedan ser comparadas no significa que no puedan ser comunicadas, pero a su vez, no todo lo que enunciamos es necesariamente una representación.

De acuerdo con los anteriores argumentos, Frege mantiene que si por algún motivo alguien insiste en considerar los pensamientos como representaciones, entonces se vería obligado a admitir que cada quien posee, por ejemplo, su propia lógica, sus propias leyes de la genética, etc. Y al mismo tiempo, se vería obligado a admitir que no podría comparar sus propios pensamientos con los de los otros.

En resumen, tanto el pensamiento como la verdad nada tienen que ver con el hecho de que se los capte o con el que sean reconocidos como verdaderos ciertos pensamientos. No obstante, hasta aquí podemos seguir preguntándonos por lo que Frege entiende por un pensamiento verdadero. Pero desafortunadamente, Frege no fue muy claro ni muy amplio sobre este punto, pues sólo nos dice que un pensamiento verdadero es

---

[38] *Ibid.*, p. 67.

un hecho, y que la tarea principal de toda ciencia, consiste no en crear, sino en descubrir pensamientos verdaderos.

Es bastante claro que de estas afirmaciones se siguien consecuencias extrañas dentro de su propia concepción, pues como señalamos antes, Frege rechaza la posibilidad de una teoría de la correspondencia, pero lo que parece más paradójico es que los pensamientos verdaderos no pertenecen al mundo externo, mientras que los hechos le pertenecen por derecho obvio. De modo que todas nuestras dudas se centran ahora en lo que Frege quiere decir cuando afirma que un pensamiento verdadero es un hecho.

Hasta aquí me he limitado a exponer de manera breve y lo más claro posible las ideas centrales del programa de Frege y de cómo entran en contacto con sus concepciones realistas expresadas de manera inconclusa en "*Der Gedanke*". Sin embargo, este punto de vista difiere de algunas interpretaciones conocidas. De modo que para terminar este capítulo, será conveniente realizar un breve examen de esas interpretaciónes; en particular, de aquellas que se refieren a "*Der Gedanke*" como un cambio en los intereses de su autor.

VI Interpretaciones sobre "*Der Gedanke*"

Una de estas interpretaciones se debe a David Bell, quien considera que en "*Der Gedanke*", el interés principal se centra en la posibilidad de comunicación humana. De suerte que, según

Bell, para Frege la comunicación es comunicación de pensamientos.[39] No obstante, esta interpretación no tiene mucho peso en el texto mismo, pues como mencione antes, si bien Frege niega la posibilidad de comparar las representaciones internas, no niega que se puedan comunicar.

En efecto, Frege sería demasiado osado con el sentido común si afirmara otra cosa, porque si bien nadie puede comparar el grado de intensidad de su dolor con el de otro, al menos si puede trasmitirle que sufre dolor. Pero debe quedar claro que para Frege lo importante del caso no es si se pueden o no comunicar las representaciones internas, sino si es posible comparlas, y esto último, sólo como un argumento a favor del caracter objetivo y eterno de los pensamientos.

De modo que no sólo no es factible que, como afirma Bell, la comunicación sea para Frege sólo comunicación de pensamientos, sino que, además, tampoco puede afirmarse que el objetivo de "*Der Gedanke*" sea el problema de la posibilidad de comunicación humana.

Pero la cuestión no queda ahí, pues Bell aduce para sostener su interpretación, las causas que supuestamente motivaron un cambio en el pensamiento de Frege, cambio que Bell caracteriza como "el viraje de lo esotérico a lo cotidiano".

Entre estas causas se encuentran, en primer lugar, "el desencanto" de Frege por el enfoque "formalista de la lógica"; y en segundo lugar, a las visitas del joven Wittgenstein después de 1911. Examinemos ahora ambos motivos. Sobre el

---

[39] Bell (1979), p. 108.

primer punto se puede decir que si bien con la ***Conceptografía*** Frege inició su trabajo desarrollando un tratamiento formalista de la lógica, en su trabajo posterior del programa marcó de manera suficientemente clara la diferencia entre el tratamiento y la filosofía formalista de la lógica.

Esto es más claro si observamos que la lógica de un formalista no tiene, propiamente hablando, una semántica, y es bastante claro que la lógica de Frege sí la tiene. Pero este argumento de Bell resulta tanto más desacertado si recordamos que para Frege el formalismo, y no sólo en lógica, es un enfoque incompleto que merece ser criticado.

Además, Bell añade que el desencanto por el enfoque formal ocurrió después del descubrimiento de la paradoja de Russell; lo cual es también bastante inexacto, si se trae a colación que el desencanto por la lógica como *lingua characterica* (y no por el enfoque formal), ocurrió al parecer al final de su vida, después de la publicación de la serie de ensayos a los que pertenece "*Der Gedanke*".

De cualquier manera, debe señarlarse que el desencanto de Frege por la lógica como un lenguaje de fórmulas adecuado para la matemática ocurrió en favor de la hipótesis sobre la posibilidad de encontrar un fundamento geométrico pero nunca una base empírica.[40] Como Eva Picardi resume correctamente,

[40] "En una época yo mismo -escribió Frege en uno de sus últimos manuscritos-, asumí la posibilidad de conquistar el dominio completo de los números siguiendo un curso puramente lógico a partir de los números elementales [números enteros]. He visto el error en esto pero estaba en lo correcto al pensar que no puedes conseguirlo siguiendo un camino empírico. Pude llegar a esta convicción como resultado de la siguiente consideración: que pensar que la serie de los números enteros eventualmente puede llegar a un fin y que, por consiguiente, ha de existir el número más grande, es manifiestamente

"Mucho después del descubrimiento de las paradojas, Frege llegó a la conclusión de que incluso un simbolismo artificial no sería suficiente para protegernos de nuestra tendencia a dejarnos desorientar por el ropaje lingüístico del pensamiento".[41]

En cuanto a la posible influencia que pudo haber ejercido el joven Wittgenstein sobre Frege, me parece no sólo improbable sino ridícula, pues no parece tener más fundamento que el de seguir cultivando el mito del genio.[42] El mismo Bell no aporta nada para justificar su creencia y no es extraño, pues en los escritos póstumos de Frege no hay, no digo pruebas, sino indicios de una influencia en este sentido.

En cuanto a la correspondencia entre ambos, es bien sabido que ésta no sobrevivió, en el caso de Frege, a los desastres de la guerra. De modo que sólo queda esperar que algo de ella pueda aparecer entre los papeles de Wittgenstein. Además, Bell

---

absurdo, lo cual muestra que la aritmética no puede basarse en la percepción sensible... De manera que un forma de conocimiento *a priori* debe involucrarse aquí, pero este conocimiento no debe de provenir sólo de principios lógicos, como originalmente asumí. Aunque existe la posibilidad de que esto tenga una fuente geométrica..." [Frege (1924-25a), pp. 276-7].

[41] Picardi (1987), p. 185. Por ejemplo, Frege señala que "La tendencia en el lenguaje a usar un artículo definido para señalar como un objeto lo que es de hecho una función y por lo tanto, un no-objeto, prueba en si misma ser la fuente de inexactitud y de expresiónes engañosa, así como de errores de pensamiento. Probablemente, la mayoría de las impurezas que contaminan la fuente lógica del conocimiento tiene sus origenes en esto" [Frege (1924-25), B, p. 273].

[42] Debe recordarse que las polémicas con Peano, Hilbert y otros, revelan que --a diferencia de Russell--, Frege era una persona de profundas convicciones sobre la veracidad de sus propias ideas; de manera que a la luz de este dato resulta absurdo que gente enterada en el tema pueda pensar que un joven, que aún no sabía muy bien lo que quería, pudo haber influido en el viejo y obstinado lógico.

olvida la descripción que el mismo Wittgenstein hizo de Frege y de la respuestas contudentes a sus objecciones:

> Frege era un pulcro hombrecillo de barba puntiaguda, que dio vueltas por toda la habitación mientras hablaba. Echó por tierra absolutamente todo lo que le dije, y me sentí muy deprimido, pero al final dijo: "debe usted volver", y eso me animó... La última vez que vi a Frege, mientras esperábamos el tren en la estación, le dije: "¿No ve alguna dificultad en su teoría de que los números son objetos?" Respondió: "A veces me parece ver una dificultad, pero después dejo de verla".[43]

Pero independientemente de cualquier anécdota, el contenido mismo de "*Der Gedanke*" descarta cualquier suposición en ese sentido. Esto debería ser bastante claro en cuanto al rechazo de Frege a la teoría de la correspondencia, que como se sabe, encuentra su versión más peculiar en lo que se denomina la "teoría figurativa del lenguaje" (Die Theorie der logischen Abbildung).

No obstante, simpatizantes de Wittgenstein suelen manejar siempre las cosas de manera tendenciosa, de modo que no resulta sorprendente que Peter Geach en su introducción a la versión inglesa de ***Las Investigaciones Lógicas***, observe sin más que Wittgenstein no tenía una buena opinión sobre "*Der Gedanke*".[44]

Por otra parte, un comentario más interesante es el de Christian Thiel, quien no supone un cambio de intereses en los

---

[43] Esta multicitada narración se puede encontrar en McGuinness (1991), p. 123.

[44] Geach en la introducción de Frege (1977). En el ***Tractatus***, Wittgenstein afirma lo siguiente sobre la idea de Frege de tomar los valores de verdad como referentes de las proposiciones: "...sólo es falsa en Frege la explicación del concepto de verdad: si lo 'verdadero' y lo 'falso' fuesen realmente objetos y argumentos en $\neg$ p, etc., entonces el sentido de $\neg$ p no estaría, según la determinación de Frege, efectivamente determinado" (1.431). Pero de acuerdo con lo que he mencionado, el que los valores veritativos sean argumentos y objetos de las proposiciones, ¡no es para Frege una explicación del concepto de *verdad*!

objetivos de Frege, pero sí ve una intromisión ontológica en la doctrina semántica; intromisión que Thiel denomina "la contaminación ontológica de la semántica de Frege".

Según Thiel, la ilegitimidad en que incurre Frege, obedece principalmente a que se establece una relación entre los miembros de la semántica (signo, sentido y referencia), y los tres mundos ontológicos (el mundo exterior, el mundo interno y el mundo de lo eterno), y que esta relación, uno a uno, no coincide con anteriores formulaciones del mismo Frege.

En primer lugar, quisiera anotar que la nominación dada por Thiel a los mundos ontológicos no es consistente. Los primeros nombres que usa son 'subjetivo no-real', 'subjetivo real', y 'objetivo real'. Pero después usa, 'subjetivo síquico', 'objetivo físico' y 'objetivo no-real'.[45] La primera denominación es evidentemente equívoca, pero la segunda parece corresponder más o menos con los usos dados por Frege.

En efecto, 'subjetivo psíquico se corresponde con el mundo interior (*Innenwelt*), 'objetivo físico' con el mundo exterior, y 'objetivo no-real' con el mundo de lo eterno e inmutable. En realidad, Frege usó el nombre 'objetivo no-real' para designar a su tercer mundo, pero aquí he omitido ese nombre porque me parece una ironía que a pesar de su continuo reproche hacia aquellos que sólo tienen por real lo que es perceptible por los sentidos, llame a su tercer mundo 'no-real'.

[45] Thiel (1972), 2.4. Es curioso notar que a pesar de los errores fácilmente detectables en la edición castellana, Thiel la da por autorizada.

Pero entrando en detalle, el argumento principal de Thiel consiste en suponer que en "*Der Gedanke*", el tercer mundo alberga como inquilinos objetos lógicos que en la semántica pertenecen a la esfera de la referencia (como los números o los valores de verdad).

> En otras palabras: lo objetivo no-real y la esfera del sentido no coinciden en absoluto; el dominio central de la división en psíquico, objetivo no-real y físico abarca en verdad toda la región de la referencia, pero se extiende todavía más allá en tanto que contiene también todos los objetos abstractos que pertenecen ya a la esfera del sentido.[46]

Es decir, según la interpretación de Thiel, Frege establece ilegítimamente una correspondencia entre esferas semánticas y mundos ontológicos que viola la división semántica. Los signos pertenecen sin lugar a dudas al mundo externo, pero la referencia puede abarcar los tres dominios y no sólo el mundo interno, que según Thiel, es el que Frege le debe de asignar. Sin embargo es bastante claro que si recordamos las características absolutistas de la lógica de Frege, los objetos, que son el correlato ontológico de la referencia, forman el universo de todo lo existente, y por lo tanto, pueden abarcar cualquiera de los tres mundos ónticos.

Pero de nuevo, no parece haber ninguna prueba de que Frege establezca en "*Der Gedanke*" una correspondencia uno a uno entre los mundos ónticos y las esferas semánticas. Por lo que a este capítulo respecta, siempre se ha hablado, por ejemplo, de la verdad y el pensamiento como miembros distinguidos del tercer

---

[46] *Ibid.*, p. 161. En el subrayado el texto dice referencia, pero es claro que debe decir sentido.

mundo; pero obviamente a nivel semántico, mientras que los pensamientos pertenecen al reino del sentido, la verdad pertenece a la referencia.

Pero además, como también he mencionado, en la misma semántica fregeana, los pensamientos no coinciden totalmente con la esfera del sentido, dado que para Frege aquellos enunciados que por medio de los cuales se expresan órdenes o deseos, poseen sin duda sentido pero su sentido no puede ser propiamente un pensamiento en virtud de que no se les puede atribuir un valor de verdad.[47]

En suma, no hay en "*Der Gedanke*" ningúna relación uno a uno entre las esferas semánticas y los mundos ónticos, pero de existir, la objeción de Thiel sería totalmente correcta. Pero por lo pronto, no existe motivo alguno para rechazar como elementos del tercer mundo, números, conceptos, y en general, todo objeto o entidad abstracta.

Sin embargo, lo que en realidad parece insostenible en la teoría de Frege, es su idea de que pensar consiste sólo en captar y no en crear pensamientos. Y aunque el proceso por medio del cual el hombre llega a crear pensamientos no es aún del todo claro, es innegable que éstos son un producto cultural.

---

[47] En realidad, Frege nunca fue lo suficientemente claro sobre esto, aunque no parece haber duda en considerar que el sentido de una proposición es un pensamiento si y sólo si, la expresión es verdadera o falsa. De cualquier manera, no debe olvidarse que en la discusión sobre los fundamentos de la geometría, Frege admite que en la fábula como en la poesía tienen lugar "Pensamientos que no son verdaderos ni falsos". Pero también debe recordarse que en "*Sobre Sentido y Referencia*", Frege señala que sería deseable contar con un término especial para aquellos signos que sólo han de tener sentido, pero que no se les puede asignar un valor de verdad.

De cualquier manera, es también claro que su idea sobre el proceso de captar es algo muy nebuloso y poco elaborado. Aunque ciertamente, Frege puede, como en otras ocasiones, argumentar que describir este proceso no es tarea suya, sino de la psicología.

Sin embargo, una consecuencia extraña que parece deducirse de este captar, sería la manera como se desarrollan las ciencias particulares, pues en cierta forma, no existiría ninguna razón para pensar en un desarrollo gradual del conocimiento, dado que en cierta forma, todos estaríamos en condiciones de realizar alguna contribución al mismo, pues no contaríamos con más limitación que la que pudiera traer consigo el captar mismo.

En realidad, la imagen de desarrollo del conocimiento que en todo caso sería más acorde con este fenómeno del captar, sería algo así como una acumulación anárquica de verdades que sólo serían sistematizables por medio de la aplicación de la conceptografía. Pero quizá, todo lo anterior no sea otra cosa que una idea bastante simplista de lo que Frege entendía por el proceso de captar pensamientos.

De cualquier manera, la existencia de un tercer mundo óntico como el de Frege no es del todo descabellada, pues también existen contadas razones para no incluir todos los objetos no perceptibles dentro del mismo saco. Pero también hay contadas razones para suponer que este tercer mundo no es algo dado de una vez por todas, sino algo que ha ido creciendo gradualmente a medida que los hombres han ido inventando nuevos objetos (llámense 'números ideales', 'espacios de n-dimensiones', etc.). Dicho de otra manera, el tercer mundo no es totalmente independiente, ni es eterno, sino que "es -en palabras de K. Popper-, un producto humano a la vez que sobrehumano en un sentido muy claro: trasciende a su productor".[48]

Pero con estos comentarios finales nos hemos alejado del tema principal que nos ocupa. De modo que en el capítulo siguiente intentaré ofrecer de manera breve, un panorama del ambiente intelectual en el que surge el programa de Frege, acompañado de la problemática general a la cual se encuentra unido en su origen.

[48] Popper (1972), p. 152. Es curioso que Popper, quien sostiene una teoría similar a la de Frege sobre la existencia de un tercer mundo óntico pero sin los tintes extrahumanos del segundo, no parece conocer "*Der Gedanke*". En su ensayo "*Sobre la teoría de la mente objetiva*", Popper no vislumbra todo lo que hay detrás del proceso de captar como lo entiende Frege: "es una característica esencial del ser humano --afirma Popper--, aprender a *captar contenidos de pensamiento objetivos* (como los llamaba Frege)" [Popper *ibid.*, p. 149, las cursivas son de Popper y su referencia es a Frege (1892), p. 58, nota 5; (1970), p. 62].

EL AMBIENTE INTELECTUAL DEL PROGRAMA CONCEPTOGRÁFICO

> En contraste, consideremos ahora el objetivo de mi *conceptografía*. Justamente desde el principio he tenido en mente lo que llamo *la expresión de un contenido*, y para ello me he esforzado después por elaborar una *lingua characterica* que pueda ser útil, en primera instancia, para las matemáticas, y no sólo un *cálculo*, limitado a la lógica pura.
>
> Frege

> En verdad aquí hay algo incomodo; es decir, no cualquier matemático es capaz de leer estos símbolos! Pero, para bien o para mal, uno aprenderá a entenderlos ya que se supone que son la realización de la escritura general de Leibniz.
>
> M. Cantor (a propósito de Peano)

I El trasfondo

Como he mostrado en el capítulo anterior, el desarrollo de la lógica matemática llevado a cabo por Frege se encuentra relacionado históricamente con los intentos de ofrecer fundamentos seguros para el conocimiento. Como también he mencionado, Leibniz había hecho suyo el propósito de elaborar una teoría satisfactoria de la deducción y la definición a partir de su proyectada *sciencia generalis*, y Frege había retomado tal programa en su ***Conceptografía***.

Pero si bien su "lenguaje de fórmulas" consistía en una serie de símbolos de una complejidad tipográfica que poco o nada tenía de parecido con la notación lógica y matemática de sus contemporáneos, en el fondo no se trataba sino de lógica pura.[1] No obstante, en sus breves reseñas de la ***Conceptografía***, John Venn y Ernest Schröder criticaban a Frege el haber introducido una notación que ignoraba por completo más de treinta años de notación lógico-matemática.[2]

---

[1] Un ejemplo especialmente ilustrativo es el signo de aserción " |— ", que Frege usa para distinguir "la mera combinación de ideas" y la fuerza asertórica de un juicio. En la ***Conceptografía***, la totalidad de un juicio se expresa por medio de los símbolos " |— ", pero el símbolo " |— " no es un símbolo simple, sino que esta formado por la barra del juicio " | ", y la barra de contenido " — ", de modo que el símbolo " — A " sólo expresa la "mera conbinación de ideas", sin que se afirme nada sobre su valor de verdad.

[2] Cf. Venn (1880) y Schröder (1880).

Desde luego, ni Venn ni Schröder compredieron o sospecharon que el nuevo programa conceptográfico no sólo se alejaba del simbolismo de Boole y De Morgan, sino que además se trataba un programa con objetivos completamente distintos y hasta cierto punto opuestos. En su comentario sobre la recepción de la ***Conceptografía***, Bynum señala correctamente que tanto Venn y Schröder confundieron el propósito de Frege debido a su insistencia a comparar el libro con ***Las Leyes del Pensamiento*** de Boole,[3] lo cual también resulta bastante comprensible si tomamos en cuenta que se trata de dos pensadores inmersos en la tradición algebrista de la lógica.

De cualquier manera, hoy sabemos que dicha notación fue, en cierta forma, uno de los factores que limitaron la difusión de sus ideas;[4] y si bien, su proyecto fue conocido por mucho

[3] Bynum (1972), p. 18. Sin embargo, más adelante ofrece una explicación posible del porqué de este mal entendido que merece tomarse en cuenta y que dice así: "La mala interpretación del objetivo de Frege pudo quizá eludirse si hubiese elegido un título distinto para su libro pues parece haber hecho una elección singularmente desafortunada. El título completo es ***Conceptografía, un lenguage de fórmulas del pensamiento puro modelado según el lenguaje de fórmulas de la aritmética***. Ahora bien, las fórmulas de la notación booleana se parecen de hecho a las ecuaciones aritméticas y, por tanto, los símbolos de Boole se encuentran ciertamente "moldeados según la aritmética". Además, dado que el símbolo para un *concepto* (*Begriff* en alemán) puede emplearse como un *término*, una concepto-grafía (*Begriffsschrift* en alemán) puede fácilmente tomarse como una lógica simbólica de términos, la cual sería una buena descripción de la lógica de Boole" [*ibid.*, p. 19]. Pero desde mi punto de vista, lo único desafortunado en el título es la construcción *nachgebildete* (que también pude traducirse como *copiado, reproducido, según...*), ya que *concepto, clase, término* o *término-clase* remiten más o menos a las mismas entidades lógicas en ambos autores y por lo tantó, no es aquí en donde debe ubicarse del todo el punto de la malinterpretación (pues es la nueva expresión de esas entidades es lo distingue a Frege de Boole) sino, como mencioné en la nota 1 del cap. II, en el *paraqué* de un lenguaje de fórmulas semejante; y lo mismo se puede decir de su comentario sobre las *Laws of Thought* de Boole y las *Gesetze des reinen Denkens* o *Gesetzen des Wahrseins* de Frege [loc. cit.] como se podrá deducir de lo dicho en el apartado IV del capítulo anterior pero que trataré de explicar más adelante en los apartados III y IV del presente.

[4] Russell por ejemplo, en el prefacio de los ***Principios de la Matemática*** decia que "debido a la gran dificultad de su simbolismo" no había llegado a

tiempo únicamente por un núcleo reducido de matemáticos y lógicos, de cualquier manera, el ambiente intelectual de la época alimentaba ideas similares acerca del rigor y la unidad que se debía alcanzar dentro de las ciencias matemáticas.

De hecho, el programa de Frege representa, en este sentido, un episodio importante de esa historia de la matemática, que a lo largo del siglo XIX y principios del XX, dominaría como una de sus tareas y características principales: la vuelta al rigor y la busqueda de fundamentos seguros.

A diferencia de las ciencias factuales, la matemática se encarga, además de elaborar y desarrollar nuevas teorías, de la tarea complementaria de establecer sus resultados con base en una formulación axiomática que garantice la precisión de sus conceptos y pruebas.

En algunas ocasiones, los matemáticos que realizan este tipo de investigaciones, buscan satisfacer este objetivo siguiendo criterios estéticos o pragmáticos, que se manifiestan en la sencillez o elegancia de una deducción, o en la busqueda del uso mínimo de nociones indefinidas.

Históricamente, esta labor sistemática han tenido una participación muy desigual en el desarrollo de las matemáticas. En un principio, la geometría y la aritmética, las primeras teorías matemáticas, se apoyaban por completo en intuiciones empíricas y actitudes utilitaristas que, por ejemplo, han

---

entender y comprender la importancia de las ideas de Frege. En su ***Autobiografía***, Russell sería más explícito al señalar que "no podía comprender el uso de Frege de las letras griegas, alemanas y latinas", motivo por el cual dejo su estudio de lado por algún tiempo.

quedado plasmadas en el predominio del sistema decimal y en el significado etimológico de la palabra 'geometría': medición de la tierra.

Sin embargo, fueron los griegos antiguos quienes fomentaron la idea de sistematizar los conocimientos matemáticos conocidos bajo un sistema deductivo. Según cuenta Eudemo, es a Pitágoras a quien se debe el haber elevado la matemática a su rango de ciencia del razonamiento y digna del estudio de los nobles; no obstante, el sistema deductivo más elaborado se debe al genio de Euclides.[5]

El modelo que se sigue de su sistema geométrico consiste, en sus ideas generales, en dos conjuntos de expresiones claramente distinguibles: el conjunto de la expresiones básicas del sistema, es decir, los axiomas o postulados, y el conjunto de todas aquellas expresiones que son derivadas deductivamente del primer conjunto. En símbolos decimos que un sistema Σ es euclídeo si y sólo si, Σ es una clase de expresiones con una subclase de fórmulas básicas β, de las cuales se deduce el complemento $\Sigma - \beta$.

En cierta forma, la afirmación anterior en cuanto considerar la matemática pre-griega como puramemente *empírica*, significa únicamente que tales matemáticas no eran deductivas.

[5] Por supuesto, como observa Rescher, aunque el uso del término "sistema" es de uso muy reciente, "la *idea* subyacente de lo que hoy llamamos un "sistema" de conocimiento ya tenía vigor en la Antigüedad clásica, y lo que proporciono el paradigma para esta concepción fue la sistematización de la geometría por Euclides". [Rescher (1979), I.1.]. Por otra parte, es interesante añadir que según Rescher, "Leibniz fue el primer pensador en describirse a sí mismo como poseedor de un *sistema* filosófico y de atribuir la posesión de tales sistemas a otros" [Rescher (1981), p. 29].

"Dicho de manera graciosa y anacrónica -como observó Abraham Robinson en alguna ocasión-, si se le hubiera preguntado a un matemático sumerio acerca de su opinión sobre Euclides, quizá hubiera respondido que él estaba interesado en las matemáticas *reales*, y no en inútiles abstracciónes y generalizaciones".[6]

De cualquier manera, este tipo de sistematización, que Euclides llevó a cabo para la geometría, fue por muchos siglos tomado como el canon de precisión al que deberían aspirar todas las teorías matemáticas; incluso algunos llegaron a pensar que el sistema de Euclides representaba el modelo o ideal de todo conocimiento bien fundamentado. Por ejemplo, este fue de hecho el espíritu que animó a Spinoza en su intento de organizar la ética de acuerdo con el modelo de Euclides, y como también ya he mencionado, la misma idea leibniziana de un *ars combinatoria* formada por signos compuestos a partir de signos simples o primitivos (el alfabeto de los pensamientos), parece seguir a distancia este modelo axiomático.[7]

Sin embargo, la actividad de los matemáticos pocas veces seguía el canon de sistematización euclídea, y las más de las veces, se olvidaron de presentar sus resultados de acuerdo a este canon. Pero más aun, los mismos matemáticos se darían cuenta más tarde que el modelo euclídeo no se encontraba libre de correcciones y algunos, como Leibniz, Gauss y Frege, se

---

[6] Robinson (1968), p. 189.

[7] De hecho, algunos de los fragmentos y opúsculos relativos al desarrollo de la lógica como *lingua characteristica* comentados en el primer capítulo tienen una presentación axiomática.

dieron a la tarea de "ir más allá" de Euclides en la fundamentación del conocimiento matemático.[8]

En cierta forma, gran parte de este desacuerdo o descontento con el modelo euclídeo puede resumirse en dos posiciones opuestas: 1) la sostenida por aquellos que rechazaban la exposición axiomática en sí misma (aunque no siempre la necesidad de ofrecer pruebas de sus resultados) y, 2) quienes estaban de acuerdo en que axiomatizar es demostrar pero que diferían en lo que consideraban susceptible de demostración o en la forma de demostrarlo. Un buen ejemplo de esta última actitud es Leibniz, quien en sus mejores momentos confesaba que tenía como una de sus reglas más importantes "buscar la demostración incluso de los axiomas".[9]

Si bien a lo largo de los siglos muchos matemáticos profesaban, al menos en teoría, su convicción en el modelo euclídeo, también es cierto que mucho de ellos, más preocupados

---

[8] En los ***Elementos***, Euclides había utilizado varios axiomas que no había formulado explícitamente y hacía uso de nociones que no definía previamente. Gauss, por ejemplo, en sus investigaciones críticas sobre los fundamentos de la geometría, llamó la atención sobre el procedimiento informal de Euclides, pues cuando hablaba de puntos que estan entre puntos y líneas que estan entre líneas, la noción geométrica de "estar entre" y sus propiedades, no se definía y quedaba a la intuición del lector. Por otra parte, en su ensayo sobre "*La justifiación científica de una conceptografía*" (1982), Frege, hablando a propósito de las lagunas existentes en las demostraciones, observaba que "aún un escritor tan escrupuloso y estricto como Euclides, usó con frecuencia calladamente de presupuestos no asentados ni en sus postulados ni en los presupuestos de los teoremas particulares" [Frege (1882), p. 211).

[9] Leibniz (N.E.) I, 3, p. 110. Por lo de más, Para Leibniz no se trata de una regla que se limite a su empleo dentro del campo matemático, pues como señala más adelante: "En lo que se refiere al principio mantenido por aquellos que piensan que no se debe disputar con los que niegan los principios, en mi sistema no hay lugar para él, salvo en lo referente a los principios que no pueden tener duda ni prueba", y añade, "Es cierto que, para evitar escándalos y desórdenes, se pueden establecer reglamentos para las disputas públicas y otras controversias, en virtud de las cuales se prohiba poner en duda algunas verdades establecidas; pero eso es más bien un asunto de policía que de filosofía".

en los desarrollos y las aplicaciones, encontraban la tarea de fundamentar sus respectivas teorías como una actividad innecesaria.

Un curioso ejemplo de esta actitud lo fue Sylvestre Francois Lacroix (1810-1853), quien en pleno auge del rigor iniciado por Cauchy en el análisis, decía en su libro sobre cálculo diferencial e integral: "sutilezas como aquellas por las que los griegos se preocuparon, no nos son ya necesarias".

Dos siglos atrás, Bonaventura Cavalieri, respondiendo a sus críticos, quienes lo acusaban de oscuro y de desvirtuar el método de Euclides, argumentaba que sus métodos permitían obtener resultados desconocidos hasta entonces y lograr nuevos inventos, señalando de paso, que el rigor era tarea de la filosofía y no de la geometría. En el fondo, esta era sólo una manera comoda y rápida de salir adelante en la discusión, ya que Cavalieri se encontraba en realidad en medio de la polémica en torno al tipo de prueba que debía prevalecer en la matemática.[10]

También Arthur Cayley, a quien mencionaremos más adelante en relación con sus métodos proyectivos para definir el concepto de "distancia", por lo demás vital en la interpretación de las geometrias no-euclídeas, fue además, el

---

[10] Esta polémica es hasta cierto punto independiente de la preferencia o rechazo por la axiomatización, ya que en un sistema axiomático pueden presentarse distintos tipos de prueba y viceversa, no se requiere un sistema axiomático para ofrecer determinados tipos prueba. En cuanto a Cavalieri, su objetivo metodológico era poder ofrecer pruebas directas (ostensivas) de sus métodos de indivisibles, en oposición a las pruebas *ducen ad impossibile* [para una explicación sencilla de ambos tipos de prueba en relación con Cavalieri y la polémica en torno al estatus de las pruebas en el siglo XVII consultese el interesante ensayo de Mancosu (1991)]

creador de lo que hoy conocemos como álgebra de matrices; pero cuando hablaba de los operadores de adición y multiplicación, los cuales difieren de los operadores usuales por no poseer la propiedad conmutativa, creía innecesario dar una prueba de la validez de los mismos.[11]

Así pues, la actividad sistemática no ha sido vista siempre con buenos ojos por todos los matemáticos, y si la vuelta al rigor y a sus fundamentos fue un fenómeno predominante, lo fue sólo porque los mismos desarrollos de la matemática habían despertado a los matemáticos de su sueño dogmático, poniendo en duda la validez de ciertas ideas que se habían ido acumulando a lo largo de los siglos como una imagen clara y cierta de su propia ciencia.

En sus líneas generales, la necesidad de buscar métodos seguros que garanticen la validez de los resultados, puede muy bien ilustrarse en innunerables casos a lo largo de la historia de la matemática. El ejemplo más conocido de la antigüedad es seguramente, la gran anomalía que supuso el descubrimiento de los números irracionales en el seno de la teoría pitagórica.

Otro ejemplo clásico puede encontrarse en las acaloradas polémicas matemático-metafísicas a que dieron lugar las nociones de 'indivisible' e 'infinitamente pequeño' (e 'infinitamente grande'), en la versión leibniziana del cálculo. Sin embargo, estos casos sólo representan los escándalos públicos de las ciencias matemáticas, porque en realidad, la

---

[11] Comentarios más amplios sobre estos puntos particulares pueden encontrarse en Kline (1980), especialmente cap. V y VI; y Kline (1972), Vol. II y III.

mayoría de los puntos controvertidos nunca llegan a cruzar el círculo reducido de los miembros de esa comunidad invisible. No obstante, en el campo de la teoría de números, la aplicación irrestricta de los operadores había producido nuevos objetos, que como en el caso de los pitagóricos, su significado era motivo de dudas y desconcierto.

Hacia principios del siglo pasado, la aplicación irrestricta había saturado el universo aritmético con entidades de dudosa reputación. Por asombroso que nos pueda parecer ahora a nosotros, tal era el caso con los números negativos,[12] pero también ocurría lo mismo en cuanto a los números imaginarios, o bien en relación con la naturaleza de los llamados números ideales.

¿Pero que significa aplicar de manera irrestricta un operador? Supongamos que nuestro universo numérico se limita, como de hecho ocurrio en algún tiempo pasado, al conjunto de los números enteros positivos. Es claro que al aplicar los operadores de suma o multiplicación a cualquier pareja de números del conjunto, el resultado de tal operación siempre será un número perteneciente al mismo conjunto.

Pero si tomamos, por ejemplo, cualquier pareja de números enteros positivos -no importa que tan grande sean- que cumpla las siguiente condiciones: 1) $a < b$, y 2) $(a - b)$ v $(a \% b)$; y le aplicamos reiteradamente los operadores de resta o

[12] Cauchy por ejemplo, evitaba el uso de expresiones como $\sqrt{-1}$, porque "no se sabe nunca lo que significa ese pretendido símbolo ni qué sentido se le debe atribuir", mientras que Augusto De Morgan, afirmaba que la aparición de expresiones negativas debían de significar alguna inconsistencia o absurdo.

división, entonces el producto de esa operación podrá ser, según sea el caso, un número negativo o un número fraccionario, pero no será en ningún momento un número entero positivo.

De acuerdo con lo anterior, podemos decir que la aplicación irrestricta de un operador tienen lugar cuando el resultado de su aplicación rebasa el sistema numérico al cual pertenecen los números que intervienen en la operación.[13] Visto desde una perspectiva filosófica, esa aplicación irrestricta de los operadores ha empujado a los matemáticos a explorar y conocer las propiedades de nuevos sistemas de números, pero también ha revelado que en el desarrollo acumulativo de la matemática, desarrollo que es más frecuente en esta ciencia que en cualquier otra, la adición de los nuevos sistemas nunca ocurre de acuerdo a un concenso unánime, sino que va acompañada, en mayor o menor medida, de un proceso de confrontación sobre el significado que han de poseer los nuevos objetos o signos matemáticos.

En el siglo XIX, como he mencionado, la confrontación sobre la naturaleza de los nuevos objetos matemáticos había llegado, para muchos eminentes matemáticos, a una situación inaceptable dentro de la "más cierta de las ciencias".

En geometría -paradigma de claridad matemática-, la aparición de nuevos objetos, como los puntos imaginarios,[14] los

[13] Una exposición clara y aguda de este tema puede encontrarse en Waismann (1951), cap. II.

[14] Los puntos imaginarios eran desde el siglo XVII (una vez que Descartes hubo establecido el vínculo entre álgebra y geometría) el correlato geométrico de los números imaginarios, pero se les interpretaba más como una forma cómoda de dar sentido a ecuaciones de grado mayor sin que esto supusiera un compromiso con una determinada configuración geométrica (una posición que encontraremos aún en la primera obra de Russell, como veremos

vectores, multivectores y tensores, no supuso el mismo impacto que acarrearon los números imaginarios e ideales en el álgebra y la teoría de números, pero esto se debió en gran medida a la historia peculiar de esta rama del conocimiento, y en particular, al profundo cambio de visión que esta ligado con el desarrollo de nuevos sistema geométricos, como las llamadas geometrías no-euclídeas.

Desde otro ángulo, estos nuevos sistemas dieron lugar a planteamientos más generales y filosóficos que involucraban la noción de verdad geométrica, la suposición de un espacio único y absoluto, y la "verdadera" naturaleza de la geometría misma.[15] En este sentido, comparativamente hablando, existe una gran diferencia entre el desarrollo histórico de la geometría y el de los sistemas numéricos y del álgebra.

La geometría como tal, había sido organizada deductivamente por Euclides desde el año 300 a.c., y todos sus

---

en el apartado IV del siguiente capítulo). Pero a principios del siglo XIX habían adquirido su estatus geométrico gracias al principio de continuidad (*los teoremas verdaderos para una figura son igualmente verdaderos para la figuras correlativas formadas a partir de la primera por medio de transformaciones continuas*) expuesto por primera vez por Poncelet en 1822 en el marco de la "nueva" geometría proyectiva, y que tenía como consecuencia la representación de posiciones que no se dan de hecho en el plano *real* (*i.e.* como las líneas que se cruzan en un punto en el infinito). Desde luego, Cauchy también era uno de los principales oponentes de esta nueva geometría. Para un ejemplo sencillo de esto último dentro de su contexto histórico véase Joan Richards (1986), pp. 302-311.

[15] Es común hablar de la aparición de las geometrías no-euclídeas como de una forma de "revolución copernicana" en matemáticas; sin embargo, el reconocido grupo de matemáticos que firman bajo el seudónimo de Nicolas Bourbaki, tienen una opinión diferente al respecto: "por lo pronto -señalan-, su efecto sobre los principios de las matemáticas no fue tan profundo como a veces se dice. Simplemente, obligó a abandonar las pretensiones del siglo anterior sobre la "verdad absoluta" de la geometría euclídea, y con más razón, el punto de vista leibniziano de las definiciones implicando los axiomas; estos dejan de parecer como "evidentes" para pasar a ser hipótesis cuya adaptación a la representación matemática del mundo sensible se trataba de comprobar" [Bourbaki (1976), p. 30].

desarrollos posteriores, hasta la aparición de las geometrías no-euclídeanas, fueron en mayor o menor medida, mejoras y ampliaciones al sistema euclídeo. De hecho, fueron las continuas investigaciones sobre el antiguo problema de la independencia del postulado de las paralelas lo que llevaron por fin al surgimiento de nuevas geometrías. Por el contrario, el álgebra y la aritmética evolucionaron sin contar con una sistematización deductiva que permitiera sumar los nuevos conocimientos dentro de una estructura ya establecida.

II Fundamentos nuevos para una ciencia antigua

Un método muy frecuente para asimilar los diversos sistemas numéricos fue el empleo de "modelos" o "interpretaciónes" de un sistema en otro. La idea en sí no era nueva pues de alguna manera, los pitagóricos ya habían intentado una interpretación aritmética de la geometría; y más tarde, Descartes (quien ya tenía en mente la noción de 'isomorfismo', que esta en la base de la idea de modelo) junto con Fermat, con la creación de la geometría analítica establecerían una unión estrecha entre álgebra y geometría que anticipa claramente los usos posteriores de la teoría de modelos.

No obstante, durante la segunda mitad del siglo XIX gran parte de los esfuerzos se centraron en la búsqueda de modelos para sistemas dentro de un mismo campo; es decir, se dieron interpretaciones aritméticas de sistemas aritméticos y lo mismo entre las diversas geometrías.[16]

Siguiendo esta línea, Karl Weierstrass sugirió la idea de proporcionar un *modelo* de los números racionales positivos y de los enteros negativos, considerando únicamente clases de pares de números naturales; más tarde, siguiendo caminos diferentes, Cantor, Dedekind y Weirstrass ofrecieron modelos de los números irracionales dentro del sistema de los números racionales.

Naturalmente, el éxito en la aplicación de modelos en geometría y aritmética tendría como resultado paralelo, una recuperación gradual en la confianza de los matemáticos, quienes incluso tomarían el método de interpretación como la prueba palpable de la unidad de las distintas teorías matemáticas.

Para muchos matemáticos, los modelos también demostraban que las discusiones en torno a la naturaleza de los nuevos entes carecían en el fondo de importancia. De hecho, se pensaba que la preocupación por la naturaleza de cualquier objeto matemático se había desvanecido por completo, pues el uso de modelos revelaba no sólo la unidad de las distintas teorías matemáticas, sino además, su carácter altamente abstracto; es

[16] Hacia 1886, Eugenio Beltrami había ofrecido un modelo de la geometría elíptica del plano de Riemann, en la superficie de la esfera, interpretando las rectas de la geometría elíptica como círculos máximos sobre la esfera; también Felix Klein obtendría más tarde un modelo euclídeo de la geometría de Lovachevski-Bolyai.

decir, los matemáticos recuperaban una imagen más abstracta de su ciencia, que incluso, podía omitir si trataba de números o figuras.

George Boole era un fiel partidario de estas ideas, y en la introducción de su ***Análisis Matemático de la Lógica*** (1847) afirmaba que la matemática trata "acerca de las operaciónes consideradas en sí mismas, independientemente de los distintos objetos a los cuales puedan aplicarse".

Después, en sus célebres ***Investigaciones sobre las Leyes del Pensamiento*** (1854) añadía que "no forma parte de la esencia de la matemática el ocuparse de las ideas de número y cantidad".[17] Desde luego, hacia finales del siglo XIX esta concepción era ya bastante familiar y la afirmación de Russell, según la cual, "las matemáticas pueden definirse como una disciplina en la que nunca sabemos acerca de qué estamos hablando, ni si lo que decimos es cierto",[18] es quizá, la formulación más pintoresca de este punto de vista.

Además, el recurso de los modelos no sólo garantizaba la unidad de la ciencia sino que sería también considerado como un método adecuado para establecer algún tipo de prueba de consistencia. En particular esta fue la opinión de David Hilbert y su seguidores, quienes entendieron mejor que nadie

---

[17] Boole (1854), p. 12.

[18] Russell (1901), p. 959. Un poco antes del pasaje anterior, Russell atribuye a Boole el descubrimiento de las matemáticas puras, pero esto no es históricamente correcto del todo. Por ejemplo, en el mismo año en el que apareció el primer ensayo de Boole en esta dirección, ***Un método general para el análisis*** (1844), Grassmann definia la matemática pura en su ***Ausdebnungslehre***, si bien en términos de un idealismo nebuloso, como "la ciencia del ente particular en tanto que nacido en el pensamiento" [citado por Bourbaki *op. cit.*, p. 36, n. 31].

que la aplicación de modelos, era en sí misma una especie de "prueba relativa de consistencia".

La idea puede ilustrarse un poco razonando de la siguiente manera: si por ejemplo, la geometría elíptica del plano encuentra una interpretación en la geometría euclídea, como de hecho fue el caso, y si la geometría euclídea es consistente, entonces también será consistente la geometría elíptica. En otras palabras, una vez obtenido un modelo, la consistencia de la teoría queda en la misma relación que la consistencia del modelo, por eso sólo se puede afirmar que se trata de una prueba relativa de consistencia: esto es, la teoría es consistente sólo si lo es el modelo.[19]

En teoría de números, el uso de modelos había dejado bastante claro que los números enteros recobraban su posición fundamental y fue por este motivo por el cual la necesidad de presentar una axiomatización de los mismos se convirtió rápidamente en un imperativo importante.

El primer intento en esta dirección se debe a Grassmann, quien presentó una definición de los operadores de suma y multiplicación para números enteros, y demostró las propiedades de asociación, conmutación y distribución apelando a una sola operación, utilizando además, el principio de inducción matemática. Pero Richard Dedekind fue más lejos al proporcionar una axiomática abstracta.

---

[19] Por otra parte, la escuela formalista de Hilbert cuenta con el mérito indiscutible de inaugurar un campo de investigaciones completamente nuevo. Pero este nuevo campo, que conocemos ahora como metamatemática, tiene más que ver con los intentos de construir una meta-teoría que fuese capaz de probar la consistencia *absoluta* de cualquier teoría matemática.

En ***Los Fundamentos de la Aritmética***, Frege criticaba la definición de adición de Grassmann, señalando su circularidad.[20] Y en el primer volumen de sus ***Leyes Fundamentales de la Aritmética***, se quejaba, entre otras cosas, de que Dedekind resbalaba en el subjetivismo al caracterizar los elementos del sistema como representaciones en la mente; y por otra parte, por eliminar el sistema vacío de su exposición (De hecho, Dedekind uso 'sistema' como sinónimo de 'conjunto' o 'clase').[21]

Obviamente, la primera objeción de Frege a Dedekind obedece a que para el primero, los números tienen una existencia independiente de los seres humanos y entiende la actividad del matemático como la de un descubridor de entes objetivos e inmutables.[22] Por el contrario, Dedekind ve en su trabajo la realización de un espíritu creador, como ha quedado manifiesto en un pasaje de una de las célebres cartas dirigida a su amigo Heinrich Weber: "Advierto, además, que entendemos por número no la clase misma, sino algo nuevo que la mente crea. Somos de una raza divina y poseemos el poder de crear".

Sin embargo, tanto Dedekind como Frege entendía la aritmética como un rama especial de la lógica, aunque es justo mencionar también que Dedekind, mantiene una idea de la lógica que debe mucho a la tradición algebraica y en particular a E. Schröder, pero que se distingue de los últimos por sus claros rasgos idealistas, como puede constatarse en las primeras

---

[20] Frege (1884), § 6.
[21] Frege (1893), pp. 29-32.
[22] Véase *supra* capítulo II, IV.

líneas del prefacio de su célebre ***Was sind und was sollen die Zahlen?***:

> En la ciencia nada que sea capaz de demostración debe ser aceptado sin ella. Aunque ésta demanda parece razonable no puedo asegurar aún que ha sido tomada en cuenta en los métodos más recientes que yacen en los fundamentos de la ciencia más sencilla; es decir, aquella parte de la lógica que tiene que ver con la teoría de números. Al hablar de aritmética (álgebra, análisis) como una parte de la lógica quiero suponer que considero el concepto de número como totalmente independiente de las nociones o intuiciones de espacio y tiempo, y que lo considero como un resultado inmediato de las leyes del pensamiento. Por consiguiente, mi respuesta a los problemas planteados en el título de este escrito es brevemente la siguiente: los números son son creaciones libres de la mente humana y por medio de ellos aprendemos más fácil y claramente las diferencias entre las cosas. Es sólo a través del proceso puramente lógico, por medio del cual creamos la ciencia de los números y adquirimos el dominio continuo numérico, que estamos adecuadamente preparados para investigar las nociones de tiempo y espacio en relación con este dominio numérico creado por nuestra mente.[23]

Visto de otra manera, el debate puede ser planteado como la oposición entre idealismo y realismo; es decir, entre la disyuntiva de considerar la actividad del matemático como propia de un inventor, o como la de un descubridor. No obstante, como observa correctamente Bunn:

> El idealismo de un matemático clásico como Dedekind se parecía mucho más al realismo que al idealismo de un constructivista como Poincaré o como Brouwer. De hecho, el idealismo defendido algunas veces por matemáticos clásicos podría denominarse perfectamente "cuasi-realismo", porque, aunque se dice que una estructura matemática es creada en el sentido de ser imaginada o inventada, en vez de ser descubierta, se la concibe sin embargo, por así decirlo, como un sistema de entidades existentes simultáneamente e interrelacionadas.[24]

Por otra parte, la segunda objeción proviene de la manera como Frege procede en la reconstrucción de los números enteros;

---

[23] Dedekind (1888), p. 31.
[24] Bunn (1980), p. 289.

en los ***Fundamentos de la Aritmética***, el 0 se define como el número que corresponde al concepto "no igual a sí mismo", que es equivalente a todos aquellos conceptos en los cuales no cae ningún objeto.[25] Dejando de lado su terminología, se suele decir que el 0 corresponde a la clase vacía, el 1 con la clase cuyo único elemento es la clase vacía, y así sucesivamente.

Pero a pesar de sus críticas es obvio que Frege mantiene, a su manera, una fuerte afinidad con el espíritu del trabajo de Dedekind pues ambos están de acuerdo en la pureza lógica de la aritmética, entendiendo por esto el que la última es producto directo de las leyes del pensamiento (aunque ambos tengan puntos de vista distintos sobre la naturaleza de estas leyes) y ajena a las intuiciones de tiempo y espacio. Y desde luego, el trabajo de ambos se encuentra comprometido con la exigencia de que "en la ciencia nada que sea susceptible de demostración ha de aceptarse sin ella".[26]

Pero también es preciso anotar que justamente en el momento en el que Dedekind formula su axiomática para la aritmética, la aritmética misma deja de ocupar su lugar fundamental dentro de la matemática, para ceder su espacio a la nueva teoría de conjuntos Cantoriana, y a la lógica de conceptos desarrollada por Frege, y Peano de manera independiente.

[25] Frege (1884), § 74 y § 75.

[26] No está por demás notar que Dedekind entró en contacto con el ***Grundlangen*** de Frege un año después de la primera edición de su célebre opúsculo y que en el prefacio a la segunda edición señalaba que si bien entre ambos existían "diferentes puntos de vista sobre la esencia del concepto de número", en algunos aspectos técnicos podían encontrarse notables similitudes [Dedekind (1888), pp. 42-43].

Naturalmente, Cantor se había visto en la necesidad de crear la teoría de conjuntos a causa de problemas bien específicos dentro del análisis, pero a medida que sus investigaciones avanzaban, cada vez se dejaba entrever más claramente que la teoría de conjuntos se perfilaba como una teoría mucho más fundamental de lo que en un principio se había imaginado. De esta manera, hacia 1885, en su ensayo "*Principios de una teoría de los tipos de orden*", se encontraba lo suficientemente seguro para afirmar, por primera vez, que toda la matemática podía ser comprendida bajo los principios generales de la teoría de conjuntos.[27]

Como mencioné brevemente en el capítulo anterior, Cantor elaboró su teoría de manera intuitiva, y él mismo había observado como la teoría podía engendrar conjuntos paradójicos. Pero a principios del siglo XX, Ernest Zermelo proporcionó una axiomática que evitaba la formación de conjuntos patológicos; el sistema sería más tarde perfeccionado por Abraham Fraenkel y Thoralf Skolem, quienes añadieron nuevos axiomas (como el de sustitución y el de fundamentación), y precisaron el uso de algunas nociones que Zermelo había utilizado de manera intuitiva.

El sistema resultante se conoce ahora como sistema Zermelo-Fraenkel (sistema *Z-F*), olvidando incluir a Skolem, quien cuenta además con el mérito de haber formulado la axiomática conjuntista sobre la base del lenguaje de la lógica

[27] Cf. Dauben (1980).

dc predicados con identidad,[28] dejando bien claro las relaciones entre lógica y teoría de conjuntos, que, es justo añadir, en relación con la fundamentación logicista y conjuntista de la matemática, tanto Zermelo como Russell, de acuerdo cada cual a sus puntos de vista, creía poder prescindir ya de la lógica, ya de la teoría de conjuntos.

III **Boole y el álgebra de la lógica**

Ahora bien, debemos recordar y tener siempre en mente que el desarrollo de la lógica tal y como aparece en la obra de Boole no tiene nada que ver, al menos directamente, con los numerosos esfuerzos de los pensadores del siglo XIX por presentar fundamentos sólidos para el conocimiento matemático.

En cierta forma, puede afirmarse que la obra de Boole y los algebristas lógicos corre en sentido contrario a las pretensiones de Frege, ya que mientras que este último busca una fundamentación del pensamiento matemático por medio de un simbolismo lógico que interpreta como un "lenguaje de fórmulas" o *conceptografía*, los primeros elaboran sus respectivos sistemas lógicos tomando como modelo el álgebra ordinaria.

Sin embargo, también es preciso tener presente que Boole y sus continuadores, al crear sistemas lógicos abstractos como el

[28] Para una exposición histórica más amplia de estos puntos véase G. H. Moore (1980), en especial § 4, 5 y 7; y (1988), § 10.

álgebra, se aproximan de alguna forma al enfoque fundacionalista de las teorías matemáticas en función de teorías-modelo mencionado arriba. De hecho, como trataré de comentar en el segundo apartado del siguiente capítulo, el ***Tratado sobre Algebra Universal*** de Whitehead debe ser entendido como la obra explícitamente pertinente de la tradición booleana en cuanto a fundamentación de determinadas teorías matemáticas. Aunque por el momento, debe adelantarse que no se trata de una fundamentación en el sentido usual del término ya que no tiene nada que ver con la pretensión logicista ni con el método propio de las llamadas pruebas relativas de consistencia (como criterio de fundamentación de una teoría en otra), aun y cuando la propuesta de Whitehead conserva notables similitudes de fondo con esta última.

Por otra parte, y como ya he mencionado en algunas ocasiones, la obra de Boole en encuentra, por un lado, unida en su origen al proyecto leibniziano de una *lingua characterica* como *calculus ratiocinator;* y por otro, en oposición a la concepción absolutista de la lógica, oposición, que siguiendo a Heijenoort, puede entenderse como la diferencia entre una lógica vista como *cálculo* y una lógica vista como *lenguaje.*

Ahora bien, entender ambas concepciones simplemente en términos de un lenguaje lógico y un cálculo lógico resulta bastante impreciso y requiere ciertas aclaraciones. Por ejemplo, la primera razón para encontrar inadecuada la formulación anterior, radica en que tanto Boole como De Morgan, los pioneros en el resurgimiento de la lógica, no oponen la noción de *cálculo* a la de *lenguaje*. De hecho, para ellos es evidente, como lo es ahora para nosotros, que un cálculo es una cierta clase de lenguaje:

> El propósito del siguiente tratado -escribé Boole en las primeras líneas de sus ***Laws of Thought***- es investigar las leyes fundamentales de aquéllas operaciones del pensamiento por medio de las cuales se lleva a cabo el razonamiento, para darles expresión en *el lenguaje simbólico de un Cálculo;* y sobre este fundamento, establecer la ciencia de la Lógica y construir su método.[29]

Incluso, puede decirse que para Boole el nexo entre lógica y lenguaje es inseparable, ya que ambos expresan las características generales de la mente:

> Lo que hace posible la Lógica es la existencia de nociones generales en nuestro pensamiento: nuestra capacidad para concebir una clase y designar sus miembros individuales por medio de un nombre común. La teoría de la lógica y la teoría del lenguaje resultan, así, íntimamente relacionadas.[30]

Además, Boole no se aparta de la vieja tradición escolástica al considerar al lenguaje como un instrumento de razonamiento y no como su simple medio de expresión (como lo hizo Frege un poco más tarde). Es por tal motivo que en la construcción de su ciencia de la lógica aparecen como consideraciones preliminares las reflexiones entorno a las propiedades del lenguaje que resultan útiles para la realización efectiva del razonamiento.

---

[29] Boole (1854), p. 1, las cursivas son mías.

[30] Boole (1847), p. 50 [13]. Si bien en el Postscrip señalaba que el lenguaje es sólo un instrumento de la lógica, y ciertamente no indispensable (*Ibid.*, p. 118 [150]), en las ***Leyes del Pensamiento*** vuelve de nuevo, como veremos más adelante, a la posición original.

Por esta misma razón, Boole pretende dejar de lado la también cuestión escolástica acerca de si el lenguaje es un instrumento *esencial* del razonamiento, o si bien es posible razonar sin él.[31] Aunque a decir verdad, Boole no deja de lado la cuestión sino más bien, asume claramente la primera posición al declarar que "en el estudio de las leyes de los signos, estamos estudiando efectivamente las leyes manifiestas del razonamiento".[32]

Es así como Boole propone un tratamiento general de los signos en el cual se puedan especificar los signos particularmente adecuados para la expresión completa de todos los razonamientos, y que por consiguiente, han de pertenecer al dominio de la lógica. Por otra parte, para Boole los elementos universales del lenguaje se encuentran ligados a las leyes generales del pensamiento:

> No podríamos concebir fácilmente que las innumerables lenguas y dialectos de la tierra hayan preservado, a través de largas sucesiones de épocas, mucho de lo que es común y universal en ellas, si no estuviésemos seguros de que existe algún fundamento profundo de su acuerdo en las leyes mismas del pensamiento.[33]

Este *factum* es determinante para entender la manera como Boole considera la naturaleza de los signos, pues para él no son los signos mismo, sino la expresión de las leyes que los gobiernan, el sustento universal del lenguaje.

[31] Boole *op. cit.*, p. 24.
[32] Boole *loc. cit.* En realidad, no se trata de una propuesta nueva, pues un siglo antes Condillac, bajo aires más leibnizianos, afirmaba que "El arte de razonar es en verdad solo un lenguaje bien estructurado" [Condillac (1779)II; véase también Rider (1990), p. 117].
[33] Boole *ibid.*, p. 25.

En este sentido, los elementos del lenguaje (los signos) son totalmente arbitrarios, en tanto que su universalidad no depende de las ideas o cosas que estos representan. Es decir, el signo es una marca arbitraria y por consiguiente es totalmente irrelevante la palabra o señal particular que una lengua asocia a una cosa o idea dada; y eso explica en parte por qué lo que los romanos expresaban por "civitas", es lo mismo que los ingleses entienden por "city" y nosotros por "ciudad".[34]

Naturalmente, a Boole se le escapa por completo la relación de parentesco entre estas palabras y las leyes fonológicas de cambio lingüístico que les subyacen (es decir, el arbitrario absoluto *versus* el arbitrario relativo mencionado ya por Saussure),[35] reproche que, por ejemplo, nunca podríamos hacer a Leibniz;[36] pero no debe perderse de vista que el interés de Boole por el lenguaje se encuentra muy lejos de las preocupaciones estrictamente lingüísticas de sus contemporáneos, ya que sus observaciones están sólo en relación

[34] No esta demás recordar que Saussure, quien según Benveniste toma de Boole esta idea fundamental sobre el signo, afirmaba que "El principio de lo arbitrario no es impugnado por nadie; pero con frecuencia es más fácil descubrir una verdad que asignarle el lugar que le corresponde" [Saussure (1916), p. 104, Cf. Benveniste (1964), p. 249].
[35] Saussure *ibid.*, VI, § 3.
[36] Desde luego, un aspecto particularmente importante de las investigaciones de Leibniz sobre el lenguaje tiene que ver con las leyes del cambio lingüístico. En este sentido, puede afirmarse que Leibniz influyó tanto en el desarrollo de la lógica como en el de la lingüística histórica. Incluso, es bastante sorprendente encontrar que la nueva lingüística -y en particular, la llamada corriente de la "gramática cognitiva"-, conserva, en cuanto a las leyes del cambio semántico, un profundo aire leibniziano, aunque al parecer sin saberlo [sobre este último punto véase Hernández (1995)].

condición del lenguaje como medio del razonamiento y reflejo de las cosas:

> En los procesos de razonamiento, los signos ocupan el lugar y desempeñan el oficio de las nociones y operaciones del pensamiento, pero así como esas nociones y operaciones representan cosas, y las conexiones y relaciones entre las cosas, así también, los signos representan cosas con sus conexiones y relaciones.[37]

Pero de la misma forma como las leyes de los signos de Boole no tienen nada que ver con las leyes del lenguaje en su nivel estrictamente lingüístico, así también, la representación de las cosas por medio de los signos no es de ninguna manera natural, sino convencional. Evidentemente, los signos de una lengua no tiene asociado a ellos un único sentido, y es por este motivo también por el cual Boole exige que todo signo posea una interpretación fija dentro de un mismo discurso o razonamiento. Pero en la misma medida que los signos representan operaciones y concepciones del pensamiento, se encuentran sujetos a las mismas leyes que determinan el comportamiento de las concepciones y operaciones del entendimiento.

Por tal motivo, Boole consideraba que todas las operaciones del lenguaje, en tanto instrumento del razonamiento, se determinan por medio de un sistema lógico de signos que se compone básicamente de símbolos literales (lo que llamamos ahora *variables*), símbolos de operación y el signo de identidad.

---

[37] Boole *op.cit.*, p. 26.

Si bien los signos lógicos de operación son simbolizados por Boole de la misma manera que los operadores del álgebra (+, -, ×), su comportamiento no concuerda plenamente con ellos. Por otra parte, Boole afirma que todas las formas del discurso racional han de ser susceptibles de combinación de acuerdo a los elementos básicos mencionados más arriba.

Pero de nuevo, la generalidad lógica borra de esta manera ciertas diferencias lingüísticas. Por ejemplo, los signos literales han de ocupar el lugar de lo que en el discurso Boole denomina signos *apelativos* o *descriptivos*, y a esta clase de signos corresponde tanto los sustantivos como los adjetivos.

Como mencioné en el primer capítulo, en cuanto al análisis previo del proyecto de la *lingua caracteristica*, Leibniz había observado ya que "en un lenguaje racional la distinción entre adjetivo y sustantivo no es de gran importancia...".[38] Y para Boole el motivo era muy claro dado que desde el punto de vista lógico, los sustantivos y los adjetivos sólo difieren en un aspecto que bien puede dejarse de lado: mientras que los primeros *expresan* la existencia de una cosa (o cosas) a la(s) que refiere(n), el adjetivo *supone* tal existencia.[39]

De manera que un adjetivo como "rojo", puede sustituirse por un signo literal ***x***, que representa "todas las cosas rojas"

[38] Leibniz (c. 1678)[en Leibniz (1903), p. 228; (1966), p. 16]. O bien: "La distinción entre nombre y adjetivos puede ser ignorada en la *característica*". Leibniz (c. 1680) [en Leibniz (1903), p. 432 o en Dascal (1987), p. 175].

[39] "Si asociamos al adjetivo el sujeto "ser" o "cosa", universalmente sobreentendido, entonces el adjetivo se convierte virtualmente en un substantivo y puede, para todos los propósitos esenciales del razonamiento, sustituirse por el substantivo" [Boole (1854), p. 27].

o la clase Rojo. Naturalmente, también las expresiones que involucran más de un signo pero que refieren a una misma cosa, como "el caballero de la triste figura" de Cervantes, pueden sustituirse por un signo literal.

A partir de aquí es bastante claro como Boole obtiene los tipos de clases de su cálculo: cuando un signo descriptivo no cuenta con un referente (como "el hombre que vivió en Venus"), el signo literal denota la clase "nada" (o vacía, como diríamos ahora); cuando el signo es un adjetivo, el signo literal expresa la clase "universo", y cuando el signo es un nombre o una descripción definida,[40] el signo literal expresa la clase unimembre.

Una concatenación de signos descriptivos como "hombres necios" puede expresarse como ***xy*** o ***yx***, de manera que para los efectos del razonamiento, es lo mismo "hombres necios" que "necios hombres"; y con esto último, una vez más, se borra una diferencia importante para los actuales estudiosos de la semántica. Obviamente, esta ley no es otra cosa que la ley de conmutación, y como ya he mencionado, "como ley del pensamiento, está en realidad desarrollada como ley del lenguaje".[41]

Pero como ley del lenguaje, la conmutación de signos no sólo rinde su provecho en el campo del razonamiento, sino que además, resulta un recurso estilístico al cual suele recurrir

[40] Obviamente, si la descripción no cuenta con referente, la descripción expresa la clase vacía, que Boole simboliza como 0, de modo que una clase sin elementos se escribe x = 0.
[41] Boole *ibid.*, p. 30.

el poeta. Para Boole, el ejemplo ideal de semejante licencia poética es el lenguaje de Milton, en el cual no sólo el sustantivo precede con frecuencia al adjetivo calificativo, sino que se coloca además entre dos adjetivos.[42]

Pero regresando a nuestro punto de partida ¿en qué sentido habla Boole de una lógica como un cálculo, y en qué medida se aparta, si efectivamente lo hace, de una lógica vista como un lenguaje? Existen dos posibles respuestas a este planteamiento, que en el fondo se encuentran muy emparentadas: la primera de ellas es de estricto orden histórico mientras que la segunda, más amplia, es de naturaleza interpretativa y metodológica.

La respuesta histórica tiene que ver en el orden cronológico en el cual Boole desarrolló sus ideas. En este sentido, debe mencionarse que lo que hasta aquí he comentado en relación con las ideas de Boole corresponden a una etapa posterior a la construcción de su cálculo lógico. En otras palabras, Boole había publicado en 1847, justo el mismo año de la publicación del ***Formal Logic*** de De Morgan, su tratamiento de la lógica bajo el título de ***Mathematical Analysis of Logic***, y sólo más tarde, en 1854, la concepción más general y elaborada acerca de ese cálculo.

Desde el punto de vista metodológico, esto significa que, como sugiere el título mencionado líneas arriba, Boole construyó su cálculo a partir de la manera como se construye y

[42] "offspring of heaven first-born"
"The rising world of waters dark and deep"
"Bright effluence of bright essence increate"
(Milton, **the invocation of Light**)

se comporta el simbolismo del álgebra ordinaria. Dicho de otra manera, el cálculo booleano se construye a imagen y semejanza del álgebra, lo cual es bastante palpable, por ejemplo, cuando deduce de su ley fundamental $x^2 = x$ la ley de contradicción $x(1 - x) = 0$ por el método de factorización.[43]

Además, no se trata de un método explotado únicamente por Boole, pues también De Morgan se vale del mismo, y como ya he mencionado, este era uno de los principales métodos por medio del cual Leibniz había intentado inventar su *calculus ratiocinator*.[44]

No obstante, es muy importante tener presente que al identificar las leyes lógicas con leyes del pensamiento que se realizan a través de leyes del lenguaje natural, Boole se aleja demasiado del proyecto leibniziano, ya que la invención de un cálculo de los razonamientos se encuentra ligado a la creación de una lengua *artificial* universal.

Por otra parte, debe mencionarse que De Morgan, había aplicado un tipo de análisis a la teoría del silogismo aristotélico muy similar al de Boole, añadiendo nuevos principios[45] expresados en el simbolismo del álgebra y

---

[43] Boole *ibid.* V, § 15.
[44] Dummett ha comentado maliciosamente que la única diferencia entre Boole y Leibniz, consiste en que el primero publicó y el segundo no [Dummett (1959), p. 208 [141]].
[45] Por ejemplo, según la lógica tradicional era imposible deducir conclusión alguna de dos premisas de la forma "Algunos **A** son **B**" y "Algunos **A** son **C**". De Morgan sostiene que de premisas tales como "la mayoría de los **A** son **B**" y "la mayoría de los **A** son **C**", se sigue que "algunos **B** son **C**". El argumento de De Morgan se basa evidentemente en la forma cuantitativa de las expresiones, considerando que existen **x**'s que pertenecen a **A** y **y**'s que pertenecen a **A** y **B**, y **z**'s que pertenecen a **A** y **C** de manera que se cumpla que al menos (**y** + **z** - **x**).

eliminando algunos de sus defectos. De hecho, las conocidas leyes que llevan su nombre, resultan extrañas para quienes se encuentran familiarizados con el simbolismo de la lógica pero no con el del álgebra: el contrario de un agregado es el compuesto de los contrarios de los agregados, y viceversa, el contrario de un compuesto es el agregado de los contrarios de los componentes. En sus símbolos:

$$1 - (x + y) = (1 - x)(1 - y)$$

$$1 - xy = (1 - x) + (1 - y)$$ [46]

En cuanto a Boole, y desde el aspecto meramente formal, su cálculo lógico de clases no era muy diferente del sistema que había surgido como resultado del tratamiento algebraico del silogismo hecho por De Morgan. Sin embargo, con el paso del tiempo, y mientras perfeccionaba su cálculo,[47] Boole había reflexionado en ***The Laws of Thought*** en una dirección muy distinta a la que Leibniz había seguido con la idea de un *calculus ratiocinator*.

En el fondo, esta concepción se encuentra ya sugerida en su ***Mathematical Analysis of Logic***, aunque de manera tan breve y esquemática que apenas deja entrever lo que sería más tarde su concepción de la lógica como una ciencia de las formas

[46] Es decir: $-(\neg\mu \,\&\, \delta) = -\mu \vee -\delta$ y $-(\mu \vee \delta) = -\mu \,\&\, -\delta$. Parkinson ha observado correctamente que debido al casi inexistente papel que Leibniz otorgó a la suma lógica, no pudo llegar a la formulación completa de la ley de De Morgan; en oposición a quienes, afirman que la ley se encuentra ya en los escritos de Leibniz (por ejemplo, Russell afirmaba de manera imprecisa que "En otro escrito [Leibniz] trazó los diagramas de Euler para todos los modos del silogismo; y en otro dió la fórmula de De Morgan: A o B = no (ni A ni B)"; pero desde luego esta es sólo una parte de la ley de De Morgan [Russell (1900), prólogo a la segunda edición, p. 162; Cf. Leibniz (1966), p. lxi]

[47] Para una evaluación altamente crítica del primer cálculo de Boole, véase Dummett art. cit.

generales del razonamiento y el lenguaje. Dicho de otra manera, Boole había especulado desde el principio sobre su lógica como una ciencia general del razonamiento, y como su generalidad se había conseguido en gran medida por la adopción de un simbolismo especial, por lo tanto, su lógica sería también una ciencia general de los signos, y por ende, del lenguaje.

No es extraño entonces que Peirce, años después, bajo el mismo punto de vista metodológico, afirmara que "la Lógica, en su sentido general, es ... sólo otro nombre de la *semiótica* ... la doctrina formal, o cuasi-necesaria, de los signos".[48] Sin embargo, este último punto de vista no esta en la línea Leibniz, pues como Dascal señaló, para este último, la semiótica (en tanto que la lingüística forma parte de ella) no debe tomarse como equivalente a la lógica. Además, estas concepciones no constituyen por sí mismas una concepción de la lógica como *lingua characteria*, lo cual sería sólo posible con el desarrollo de la lógica llevado a cabo por Frege y Peano.

Debe mencionarse también que el caracter dual de la concepción booleana de la lógica ha dado lugar a opiniones encontradas acerca de la misma. Para muchos estudiosos, al centrar la atención en los aspectos algebraicos de su lógica, es evidente la filiación de Boole a una concepción abstracta de

[48] Peirce (1958) II.227. Por supuesto, hay una diferencia de fondo entre Boole y Peirce, dado que en el primer caso se trata de un matemático y en el segundo de un filósofo, y por consiguiente, en Peirce la lógica o semiótica ocupa un lugar dentro de un sistema más amplio: la filosofía. Pero además, la semiótica = lógica cuenta con tres subdivisiones, de las cuales dos corresponden a lo que usualmente se entiende por lógica (i.e., logic proper or critic, and Methodeutic), mientras que la última, llamada gramática pura o gramática especulativa, corresponde mejor con la "general theory of the nature and meaning of signs" [véase D. A. Pharies (1985)].

de la lógica y la matemática; o si se prefiere, a una concepción de la lógica como cálculo.

Por ejemplo, Bochenski considera que el tratamiento abstracto que Boole hace de la lógica "significa que concibe la lógica no como una abstracción de procesos fáctuales -como habían hecho todos los lógicos anteriores-, sino como una construcción formal a la que ha buscado posteriormente una interpretación. Y esto es, frente a toda la tradición, incluído Leibniz, completamente nuevo".[49]

Desde luego, Bochenski se equivoca con respecto a Leibniz, pues como vimos en el primer capítulo, en las *Generales Inquisitiones* se ofrece el mismo procedimiento de interpretación. No obstante, lo importante aquí es el hecho de que Boole establece una estructura lógica abstracta que puede interpretarse de diferentes maneras.

Sin embargo, Grattan-Guinness tiene una opinión diferente sobre este punto, pues en relación con Boole y Jevons, afirma que "Boole no formuló un álgebra de la cantidad como la que supuso Jevons y *tampoco elaboró un álgebra abstracta como la entenderíamos hoy... Ambos estaban analizando las leyes del pensamiento*, y Jevons creyó que Boole estaba *equivocado*... La concepción de las álgebras abstractas como sistemas formales diferentes con (quizá) diversas interpretaciones sobre los dominios y el nacimiento de la axiomática dentro de las

[49] Bochenski (1985), p. 294n.

matemáticas tuvieron lugar en los último treinta años del siglo XIX".[50]

Este comentario de Grattan-Guinness es hasta cierto punto correcto ya que la relación que existe entre el álgebra abstracta de Boole y el álgebra abstracta contemporánea es similar a la relación entre el álgebra de Boole y el álgebra booleana que conocemos hoy en día.[51] Sin embargo, su apreciación es también demasiado restrictiva ya que el álgebra de Boole presenta la idea *general* de un álgebra abstracta, en tanto estructura que puede recibir varias interpretaciones; o bien, si se prefiere, puede decirse que la lógica de Boole es uno de los antecedentes inmediatos de las álgebras abstractas contemporáneas.

Es claro que debido a estos y otros posibles malentendidos y confusiones en torno al desarrollo de las ideas de Boole, debemos tener siempre presente la forma general como fueron evolucionando sus ideas acerca de las relaciones entre pensamiento, lógica y lenguaje. Pero también, es conveniente poner de manifiesto, aunque sea brevemente, la relación entre lógica y matemática.

Sobre esto último es necesario tomar en cuenta el contexo particular de la época y recordar que tradicionalmente la lógica se encontraba ligada a la filosofía. Por este motivo, Boole dedica una serie de observaciones sobre este punto y justifica al mismo tiempo su tratamiento algebraico. En efecto,

---

[50] Grattan-Guinness (1991), p. 21; (1991a), p. 359.
[51] Sobre este último punto puede véase Hailperin (1981).

en su primer ensayo sobre el análisis matemático de la lógica, da por evidente que la lógica se ocupa de las formas correctas del razonamiento, y por consiguiente, se ocupa de las leyes generales del intelecto humano.

Por otra parte, dado que la matemática, y en particular el análisis, no se límita al estudio de cantidad y la magnitud, es bastante aceptable dar por supuesto que comparte con la lógica leyes generales del razonamiento. Además, Boole reconoce que ya la silogística aristotélica es un sistema simbólico[52] aunque menos perfecto del que encontramos en la matemática, y en este sentido, su propósito es asegurarle un simbolismo matemático correcto, pues "la Lógica, como la Geometría, se basa en verdades axiomáticas y sus teoremas se construyen teniendo en cuenta esa doctrina general de los símbolos que constituyen la base del Análisis".[53]

Es obvio entonces que para Boole no existe gran diferencia entre lógica y matemática, pues las leyes de la primera no son sino "las matemáticas del intelecto humano".[54] Ahora bien, queda por establecer cuál es su vínculo con el lenguaje y aquí es menester tener presente que en su primera etapa se encuentra más cerca del ideal leibniziano de una lengua universal artificial, pues debe ser evidente que lo que Boole encuentra aquí en común entre la lógica y la matemática es un lenguaje

[52] De hecho, la lógica de Aristóteles nunca empleó términos concretos para el sujeto y el predicado, sino letras que cumplen el papel de variables. Además, tampoco uso términos singulares ni expresiones como "todo B es A", sino "A pertenece a todo B" [sobre este punto véase Lukasiewicz (1957), I]
[53] Boole (1847), p. 58 [25].
[54] *Ibid.*, 52 [16].

simbólico convencional (artificial), cuyo desarrollo es "la verdadera ley del progreso científico".[55]

No es sorprendente entonces que para Boole, "un intento afortunado de expresar las proposiciones lógicas por medio de símbolos, cuyas leyes combinatorias podrían basarse en las leyes de los procesos mentales que representan, sería un paso en el camino hacia un lenguaje filosófico".[56] Por este motivo la lógica del ***Matehematical Analysis*** es hasta cierto punto absolutista, pues aquí el universo lógico comprende cualquier clase concebible de objetos sin importar si estos existan o no.

Sobre esto último Dummett comentó en alguna ocasión que desde el punto de vista de un sistema que pretende ser extensional este es error,[57] pero debe ser claro a estas alturas que este error no podría solucionarse fácilmente con una afirmación absolutista que pretende establecer que este universo comprende sólo "la clase de *todos* los objetos existentes", puesto que en el universo único y fijo de la lógica absolutista no hay en principio la menor evidencia acerca de lo puede contar como objeto, pues como observó Heijenoort, "No existe una ciencia ontológica, con resultados bastante seguros, que pueda ofrecer a la lógica un universo aceptado por todos".[58]

De cualquier manera, nada de esto encontramos ya en su célebre ***Laws of Thought***, pues en esta obra Boole prefiere

[55] *Ibid.*, p. 55 [20].
[56] *Ibid.*, p. 50 [13].
[57] Dummett (1959), p. 205; (1990), p. 136.
[58] Heijenoort (1984), p. 15.

identificar la doctrina general del simbolismo no con un lenguaje filosófico sino con las leyes generales del lenguaje natural. En cuánto al universo de la lógica de esta última obra, Boole retoma la idea de De Morgan de un universo que puede estipularse de acuerdo al tipo de objetos que se encuentran en discusión; es decir, el universo del discurso.

IV **Boole y Frege**

En resumen, la concepción de la lógica como *lenguaje* debe entenderse exclusivamente como una concepción de la lógica como *lingua characterica* a la manera de Leibniz y con las propiedades absolutista ya mencionadas. Es decir, la lógica fregeana es un lenguaje en tanto que permite expresar de manera precisa los contenidos del pensamiento; esto es, los conocimientos que encontramos en las demás ciencias y que la lógica de Boole es incapaz de formular correctamente.[59]

En este sentido, la lógica de Frege aparece como un instrumento metodológico con el cual el científico ha de superar las deficiencias del lenguaje natural. También por este

[59] Por ejemplo, en su confrontación con el simbolismo de Boole, Frege demuestra con suficiente amplitud que todo lo que puede expresarse en la *conceptografía* no puede expresarse en los símbolos del primero, mientras que la conversa es siempre posible, pues basta con notar que en la notación de Boole no hay una manera correcta de expresar "juicios particulares" como "algunas raíces cuartas de 16 son raíces cuadras de 4" [Frege (1880/1881), p. 14]. En su respuesta a Schröder, para quien el simbolismo de la *conceptografía* era un desperdicio de espacio, Frege ofrece también pruebas contundentes para demostrar que ni Schröder es capaz de expresar de manera clara este tipo de juicios [Cf. Frege (1882/1883), pp. 98-99; Schröder (1880) y Bynum (1972), p. 23].

motivo, no parece adecuado sostener, como lo ha hecho Dummett, que Frege estuvo "interesado en dar una explicación general de la estructura del lenguaje, y con ella, una teoría general del significado".[60]

Además, esta interpretación es también inadmisible porque supone atribuirle a Frege una visión del lenguaje tan limitada como la que encontramos más tarde en el ***Tractatus***; y es limitada debido a que, por un lado, otorga un lugar central y excluyente a las oraciones declarativas (como de hecho ocurre en el ***Tractatus***) dentro de la estructura del lenguaje; y por otro lado, porque también supone que una teoría general del significado debe ocuparse únicamente del sentido literal de cierto tipo de oraciones.

Sin embargo, Frege es ante todo un lógico extensional y como tal, sostiene que sólo en función de la referencia resulta adecuado tener en cuenta el sentido de una oración declarativa. Esto es bastante claro cuando afirma, que "al escuchar un poema épico, por ejemplo, nos cautivan, además de la eufonía del lenguaje, el sentido de las oraciones y las representaciones y sentimientos despertados por ellos. [Pero] Si nos preguntásemos

---

[60] Dummett (1978), p. 163. En su conocido mamotreto, Dummett modera su interpretación de la siguiente manera: "El primer objetivo de Frege fue, entonces, ofrecer *un análisis de la estructura de las oraciones de nuestro lenguaje, adecuado al menos para oraciones como las que aparecen en el curso del razonamiento matemático*. Este análisis no podía detenerse en la especificación de aquellas oraciones que estarían bien formadas, sino que debía explicar también cómo el significado de cada oración está determinado por su estructura interna. En términos modernos, el análisis debía de ser también semántico y no solamente sintáctico. En otras palabras, Frege proporcionó los fundamentos de la teoría del significado" [Dummett (1973), p. 2; las cursivas son mías]. Por lo demás, Dummett -cuyo trabajo es de un valor inestimable-, no deja de reconocer en numerosas ocasiones "la desconfianza permanente [de Frege] hacia el lenguaje ordinario" [Dummett (1990), p. 123].

por su verdad, abandonaríamos el goce estético y nos dedicaríamos a un examen científico".[61]

Pero también esto último es un motivo por el cual Frege, como ya he mencionado, consideraba que sería muy deseable contar con un nombre espacial para aquellas oraciones que sólo han de poseer sentido. Desde luego, si en realidad su intención fuese ofrecer una teoría general del significado, seguramente habría inventado un signo y un nombre especial para ese tipo de oraciones. De cualquier manera, lo cierto es que en lugar de ello, Frege presenta al respecto sólo observaciones incidentales titubeantes y no muy claras. Por ejemplo, duda en ocasiones en establecer si el sentido de la fábula y la poesía expresa o no un pensamiento, o bien, señala que "una orden, un ruego, no son ciertamente pensamientos, pero, con todo, están al mismo nivel que el pensamiento",[62] sin explicar qué ha de entenderse por "estar al mismo nivel", ya que sin lugar a dudas, una oración asertórica y una imperativa deben de contar con un sentido, y según Frege, en el primer caso el sentido expresado es un pensamiento, pero en el segundo, no se nos dice nada acerca de la naturaleza de su sentido.

Obviamente, esto último no es motivo de reproche, aunque debería serlo si Dummett esta en realidad en lo correcto,[63] ya

---

[61] Frege (1892), p. 59 [63*].
[62] *Ibid.*, p. 67 [68*].
[63] En realidad, no se trata de una interpretación particular de Dummett (aunque su popularidad y justificación debe mucho a sus estudios), sino de una creencia colectiva que en cierta forma es la responsable de la esterilidad que ha sufrido la semántica en las últimas décadas. Se le encuentra incluso donde no debería aparecer: por ejemplo, en un artículo de Cocchiarella, en donde se examinan las concepciones de la lógica como cálculo y como lenguaje en función de la distinción entre membresía y predicación, se afirma que "Es claro que él [Frege] uso su lógica como una

que desde nuestra interpretación no se encuentra dentro de sus objetivos el dar cuenta de la naturaleza del significado de este tipo de oraciones.

Para decirlo de nuevo, Frege crea una lógica o *conceptografía* con fines muy concretos, pues para él es claro que el hombre de ciencia ha tenido la necesidad de recurrir a un simbolismo especial para poder expresar sus pensamientos, y es debido a esta necesidad que intenta crear un lenguaje científico universal (*eine Formelsprache des reinen Denkens*).

Además, la necesidad de recurrir a lenguajes especiales se debe, a que el lenguaje ordinario es insuficiente para expresar adecuadamente las leyes de inferencia que se dan en los razonamientos: "el lenguaje -escribe Frege-, no esta dominado por leyes lógicas de manera que la observancia de la gramática garantice ya la corrección formal del proceso del pensamiento".[64]

Es así como en sus propósitos encontramos una semejanza con la idea leibniziana de una *lingua characterica* en tanto simbolismo que "representa directamente los pensamientos, no las palabras".[65] Pues así como la *característica* se presentaba, como el hilo de Ariadna del pensamiento, así también, la

---

manera de proporcionar un análisis lógico de las formas de predicación que aparecen en el lenguaje natural" [Cocchiarella (1988), p. 59]. Pero parafraseando a Frege, la cuestión no se vuelve más clara por el simple hecho de declararla así [sobre la mal influencia de esta interpretación me ocuparé un poco más adelante].

[64] Frege (1882), p. 210. Además, como afirma en otro lugar, "...la tarea del lógico es dirigir una incesante lucha contra el psicologicismo y aquellas partes del lenguaje y la gramática que fallan en dar expresión sin problemas a lo que es lógico" [Frege (1879/1891), p. 6-7].

[65] "Una *lingua characterica* debe -repite Frege-, como Leibniz dijó, *peindre non pas les paroles, mains les pensées*" [Frege (1880/1881), p. 13]

conceptografía, el nuevo lenguaje de fórmulas, sería capaz de expresar de manera precisa todos los modos de razonamiento que se dan en las ciencias.[66]

En este sentido, debe ser claro en qué punto Wittgenstein se encuentra más cerca de Boole que de Frege, y en qué punto Boole se aparta de Leibniz. Pues así como Wittgenstein conserva una concepción absolutista de la lógica, que recibe de Frege, pero que asocia con el lenguaje natural; así Boole, conserva la idea matemática leibniziana de un *calculus ratiocinator* pero no como un componente adicional de un lenguaje artificial, sino como la expresión de las leyes fundamentales del pensamiento que se manifiestan a través del lenguaje natural.[67]

Sobre esto último es interesante observar como Jevons, el primer crítico y renovador del cálculo de Boole, rechaza en parte "la adopción de una notación matemática, *llena de errores pero no totalmente falsa en sus analogías*",[68] en favor de innovaciones que considera más acordes con !el uso del lenguaje

[66] En el ensayo citado en la nota anterior, sobre el álgebra de Boole y su propia lógica, Frege define de una vez por todas su relación con el programa leibniziano: "en una breve monografía [***Begriffschrift***] he intentado una nueva aproximación a la idea leibniziana de una *Lingua Characterica*" [Frege (1880/1881), p. 10].

[67] Desde luego, la antigua interpretación de Prior es inadmisible no sólo porque se funda en la improbable hipótesis sobre la influencia de Boole en Wittgenstein por medio de Frege, sino porque pretende establecer la influencia precisamente en donde ambos se encuentran en los lados opuestos (*i.e.*, la "teoría" absolutista de las posibilidades de verdad de Wittgenstein vs. el Universo Hipotético de Boole, que dicho sea de paso Prior admite como inconsistente, y además, requiere interpretar x = 1, y x = 0, como expresiones de la tautología y la contradicción) [cf. Prior (1949), pp. 193-96]. Por otra parte, quizá no este de más aclarar no estoy afirmado que Wittgenstein tomara de Boole la idea de una lógica del lenguaje natural, ya que me he limitado a establecer simplemente una analogía estrecha entre ambos pensadores.

[68] Carta de Jevons a Boole (Agosto de 1863), en Grattan-Guinness (1991a), p. 25; las cursivas son del autor.

natural! Por ejemplo, Jevons amplía el sentido del operador "+" a su sentido inclusivo argumentando que el lenguaje común admite también este sentido (*i.e.*, "los graduados son licenciados, maestros o doctores").[69]

Por otra parte, es posible explicar, al menos en un sentido, en que consiste la superioridad del sistema de Frege en relación con el de los algebristas lógicos (a parte del rigor y precisión con que Frege presentó sus puntos de vista). Como mencioné anteriormente, Boole había identificado y ordenado sus tipos de clases de acuerdo con la naturaleza cuantitativa de los símbolos descriptivos, y De Morgan había basado su corrección del silogismo tradicional en consideraciones cuantitativas. Sin embargo, ni Boole ni De Morgan lograron ligar sus variables a cuantificadores. De ahí que desde el aspecto puramente formal, tanto el álgebra de Boole, como la silogística de Aristóteles y De Morgan, constituyan sólo una parte del sistema cuantificacional.

Por supuesto, la única excepción dentro de la tradición algebraica de la lógica es Peirce, quien además puso las bases suficientes para la teoría de la cuantificación elaborada por Peano. Sin embargo, la teoría de Peirce sobre la generalidad aparece por lo menos 11 años después de la ***Conceptografía*** y aún bajo el dominio del simbolismo matemático, si recordamos que

[69] Es interesante notar que fue Boole quien había por primera vez apelado al uso común para justificar su sentido exclusivo: "Pero debe admitirse al mismo tiempo que la «*just et norma loquendi*» parece también estar a favor de una interpretación de su oposición" (es decir, del supuesto de que *x* e *y* no tienen ningún miembro en común)[Boole (1854) IV, § 6]. Pero Jevons, un tanto irónico, señaló usos del propio Boole con sentido inclusivo [sobre Boole y Jevons véase Grattan-Guinness *ibid.* y Hailperin (1976), § 1.5]

los cuantificadores son representados por las letras mayusculas griegas Σ y Π que se emplean para simbolizar la suma y el producto respectivamente de una operación algebraica.

Sin embargo, la filiación algebraica de Peirce obedece en buena medida a la convicción positivista de corte comtiano según la cual la matemática es la más fundamental y abstracta de todas las ciencias. Por esta razón, en su reseña de la ***Exakte Logik*** de Schröder, Peirce no duda en afirmar que "la lógica debe asentarse en la matemática para el control de sus principios".[70] Por otra parte, como verdadero padre de la semiótica, para Peirce sus símbolos para cuantificar no pretenden imitar las operaciones algebraicas sino sólo sugerirlas:

> Para hacer tan icónica como sea posible esta notación, emplearemos aquí para representar alguno y todos los símbolos Σ y Π, que suguieren una suma y un producto respectivamente. Así $\Sigma_i x_i$ significa que x es verdadera de alguno de los individuos designados por *i* o lo que es lo mismo
> $$\Sigma_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$
> Del mismo modo, $\Pi_i x_i$ significa que *x* es verdadera de todos esos individuos o, lo que es lo mismo,
> $$\Pi_i x_i = x_i + x_j + x_k + \text{etc.}$$
> ...Conviene señalar que $\Sigma_i x_i$ y $\Pi_i x_i$ son sólo similares a una suma y a un producto; no son de naturaleza exactamente idéntica, ya que los individuos del universo pueden ser innumerables.[71]

De cualquier manera, Frege había elaborado la doctrina lógica de los conceptos usando como base su cálculo

[70] Peirce (1968), p. 224. Sin embargo, tampoco hay que olvidar que en algunas ocasiones afirma que "el álgebra de la lógica debe ser desarrollada en sí misma, debiendo la aritmética surgir de la lógica en lugar de llevar a ella". Peirce (1885), p. 173.

[71] Peirce (1885), pp. 194-195 [187-188]; para mayores comentarios véase Quine (1995), pp. 260ss., G. Moore (1988), § 3, y para una breve comparación con la notación de Frege, véase Hawkins (1981), pp. 381-389..

cuantificacional. Como ya se ha mencionado, la idea principal que subyace a esta concepción radica en identificar los objetos que pertenecen a un concepto con los valores de variables predicativas; de manera que un concepto como 'ángulo recto' puede representase por los símbolos **(x) Ax** (en términos actuales), donde la variable **x** señala el lugar que han de ocupar todos los objetos que caen bajo el concepto.

A primera vista puede pensarse que los conceptos fregeanos no difieren sustancialmente de las clases booleanas, si se recuerda que en Boole los adjetivos y los sustantivos pueden formar clases. Pero, entre otras cosas, para Frege existe una diferencia enorme entre un nombre (simple o compuesto) que denota un objeto particular y un concepto con un sólo elemento.

Esto es muy claro cuando se ha observado las diferencias formales entre la lógica de Frege y la de Boole, pero básicamente, esta distinción se puede entender mejor como una distinción lógica entre *objeto* y *concepto*. Pues recordemos que mientras que para Boole el "hecho" de que un nombre común (common name) permita concebir tanto una clase como sus miembros individuales demuestra que la teoría del lenguaje y la lógica se encuentran íntimamente relacionadas, para Frege este mismo "hecho" lo lleva a introducir el compuesto palabra-concepto, o bien, término conceptual (Begriffswort) en lugar del nombre común (Gemeinname).[72]

[72] "El término 'nombre común' induce a la suposición errónea de que el nombre común se relaciona en lo esencial con objetos del mismo modo que el nombre propio, sólo que éste denomina un único objeto, mientras que el primero, en general, es aplicable a varios. Pero esto es falso; y por ello prefiero

Desde un punto de vista histórico, la distinción entre *objeto* y *concepto* remite directamente a la condición un tanto irónica del pensamiento de Frege como lingüista y filósofo del lenguaje. Es irónica en parte, porque tal distinción nos muestra a Frege como un lógico extensional que otorga un papel secundario al *sentido,*[73] y por consiguiente, se interesa muy poco en explicar o exponer sus ideas semánticas.[74]

Por otra parte es irónico, porque como señaló Hintikka en alguna ocasión, "cuando alguien habla en estos días de las ideas de Frege sobre la semántica, filósofos y lingüistas piensan generalmente en su teoría sobre el sentido y la referencia. Pero esto es únicamente una pequeña y secundaria parte de la historia".[75]

---

decir 'término conceptual' en lugar de 'nombre común'". Frege (1892-1895), p. 96, (1979), p. 124. Cf. Boole (1847), p. 50 [13].

[73] "los lógicos intensionales —escribió Frege—, tienden a fijarse demasiado en el sentido; pues lo que llaman intensión es, si no representación, por lo menos sentido. No tienen en cuenta que en lógica no interesa cómo se producen unos pensamientos a partir de otros sin considerar su valor de verdad; sino dar el paso del pensamiento al valor veritativo; que, más generalmente, hay que dar el paso del sentido a la referencia; que las leyes lógicas son ante todo leyes en el dominio de las referencias y que sólo indirectamente se relacionan con el sentido" [Frege (1892-1895), p. 93 [122]].

[74] Obviamente, desde el punto de vista de la interpretación de Hintikka y seguidores, esto no es nada más que una prueba más del carácter inefable de la semántica fregeana [cf. Hintikka (1979), pp. 718-719; (1981), p. 58 y ss; (1984), p. 28 y ss]. Desde luego, estoy de acuerdo en que existe algo inefable en la semántica de Frege y que es consecuencia de su concepción de la lógica como *lenguaje* (o de su absolutismo lógico, en la interpretación posterior de Heijenoort y la mía) o de su concepción del lenguaje como medium universal (en la generalización que Hintikka hace de la dicotomía de Heijenoort). Pero esto inefable se limita en la *conceptografía*, a la imposibilidad de definir qué es un concepto, un objeto, la verdad, etc., como he tratado de mostrar en el capítulo anterior.

[75] Hintikka (1981), p. 57; (1984), p. 27. No esta demás agregar que para Hintikka, "la teoría del sentido y la referencia fue elaborada por Frege para ocuparse de lo que denominaba *contextos oblicuos"*; lo cual, por supuesto, tampoco corresponde con la versión que he presentado en el capítulo anterior. Cf. además, Hintikka & Hintikka (1986), p. 2.

Entre las cosas que se pueden añadir para completar un poco esa historia, que por lo demás no concuerda del todo con la versión de Hintikka de la misma, es recordar que en 1883, un año antes de la publicación de ***Die Grundlagen der Arithmetik***, Michel Bréal proponía una nueva disciplina lingüística para la cual había acuñado el nombre de "semantique", cuyo interés principal sería el estudio científico de los significados (*la signification des mots*).

Naturalmente, a diferencia de Frege, Bréal era un lingüista *estricto sensu* pero que al igual que el primero en el campo de la matemática, criticaba aquel empirismo en lingüística que pretendía explicar las transformaciones del significado por medio de la simple observación de la forma. Por este motivo, Bréal es también considerado como uno de los principales responsables del surgimiento de la lingüística teórica.[76]

Existen otros paralelismos entre Frege y Bréal bastante interesantes, de los cuales por razones de espacio solo mencionare dos.[77] El primero y más interesante desde mi punto de vista es la relación que mantiene el lenguaje con el significado y con la lógica. En efecto, para Frege como ya he mencionado en repetidas ocasiones, el lenguaje es incapaz de expresar con toda claridad las relaciones lógicas que se dan

[76] En este punto la obra de Bréal corre en dirección opuesta a la tradición comparatista alemana (Bopp, Schleicher, etc.,) que era totalmente indiferente a la teoría. Para un estudio penetrante de los aportes de Bréal en relación con la lingüítica alemana véase Aarsleff (1982), pp. 293-334.

[77] En Hernández (1996) y (1996a) presento una comparación más amplia entre ambos pensadores.

entre los pensamientos mientras que para Bréal la pura forma del lenguaje natural es incapaz de expresar del todo el significado; es decir, no existe una correspondencia exacta entre la forma y el contenido.[78]

Podría decirse también que ambos identifican el *Sinn* y la *signification* con el pensamiento pero debe ser claro que el *Gedanke* fregeano es algo mucho más específico que el *pensée* de Bréal. Además es importante señalar que esta imposibilidad de la forma para expresar todo el pensamiento no es en el caso de Bréal algo que, como en Frege, pueda atribuirse a una deficiencia del lenguaje. En este sentido, Bréal es también el padre de la pragmática lingüística.

Es claro, por otra parte, el contraste entre Frege y Bréal, y he tratado de establecer esta relación entre ambos porque considero que si Frege hubiese sido un pensador interesado en el estudio sistemático de la semántica, Frege debería ser considerado con justicia como el primer *funcionalista* dentro de la lingüística.[79] Pero como ya comente anteriormente, en realidad Frege nunca estuvo interesado en el análisis del lenguaje *per se*, sino en crear un lenguaje lógicamente perfecto que tendría como objetivo su aplicación efectiva en todos los campos de investigación científica, pero que, en principio, había destinado para el esclarecimiento del razonamiento matemático, y más en particular, para la fundamentación de la aritmética.

---

[78] Bréal (1868), p. 300.
[79] No esta demás comentar que en la ***Historia de la semántica*** de Terrence Gordon, el nombre de Frege no se menciona ni una vez [Cf. Gordon (1982)].

En todo caso, el problema principal para la mayoría de sus interpretes y fuente principal de muchos mal entendidos es el hecho de que se trata de un pensador que, por un lado, rechaza toda filosofía de las matemáticas que trata los símbolos matemáticos como si fueran los verdaderos objetos de estudio (*i.e.*, los formalistas); y, por otro, se considera un lógico extensional que se interesa muy poco por el sentido.

Desde luego, la solución que los pensadores de este siglo han dado a lo que podríamos llamar el dilema de dualidad de Frege, al hablar por un lado, de un sentido o significado "referencial"; y por otro, de una semántica formal (en tanto valores de verdad, y en consecuencia, también referencialista según Frege), no puede considerarse desde una posición ortodoxamente fregeana (según mi interpretación) más que como una contradicción en los términos. De hecho es bastante interesante notar que mientras Frege pensaba que el sentido era sólo pertinente en tanto que nos ponía en contacto con la verdad (referencia), la semántica "fregeana" busca hacerse del sentido por medio de la verdad. Pero como este es otro asunto que reclama un espacio distinto al presente volvamos de nuevo al espacio histórico en el cual tuvieron lugar los distintos proyectos leibnizianos.

V La *lingua characterica* de Peano

Ahora bien, en 1889 Giuseppe Peano, siguiendo de cerca a Dedekind, publicó el breve pero notable opúsculo ***Arithmetices Principia. Nova Methodo Exposita*** en donde presentaba por primera vez su célebre axiomatización de los números naturales por medio de un simbolismo lógico.[80] Pero a diferencia de Dedekind, quien "demostraba" la inducción matemática, Peano la introducía como un axioma.[81] Al respecto, en ***Los Principios de la Matemática,*** Russell comentaba que la superioridad del sistema de Dedekind era sólo aparente, pues "con relación a la demostración de la inducción matemática debe observarse -decía-, que se hace la hipótesis, prácticamente equivalente, de que los números forman la cadena de uno de ellos. Cualquiera de

[80] En su conocido libro sobre Peano, Kennedy hace el siguiente comentario: "***Arithmetices principia*** es a la vez un hito en la historia de la lógica matemática y en los fundamentos de la matemática. Es también algo misterioso: ¿Por qué fue escrito en latín?, ¿Cuál es el significado del título? Su traducción es la siguiente: ***Los principios de la aritmética expuestos según un nuevo método***. Aquí la palabra extraña es *arithmetices*, que no es en verdad latín sino griego (la forma propiamente latina es *arithmeticae* o *arithmetica*)¿Por qué escogió esta forma?, ¿Cómo un tributo a Euclides?, ¿Era el uso de la palabra *principia* un tributo a Newton? Peano era ciertamente cuidadoso de hacer algo histórico...¿Pero por qué en latín? Si hubiera querido llegar a un público internacional pudo haberlo escrito en francés, lo cual ya había mostrado que podía hacer perfectamente. Tampoco esto corresponde con su acostumbrada naturaleza práctica (uno de sus dichos favoritos al final de su vida era: ¿Pero hace esto más barato el pan?). No, al parece se trata de un acto puramente romántico, y quizá el único acto romántico de su carrera científica" [Kennedy (1980), p. 26]. Sin embargo, desde mi punto de vista no hay nada extraño ni romántico en todo esto, si recordamos que Peano no sólo comparte el proyecto de una *lingua characterica* en el campo de las matemáticas sino que también estuvo interesado en la creación de un lenguaje universal como instrumento común de comunicación entre los científicos de todo el mundo (su *latino sine flexione*). Además, en realidad Peano no era ajeno a consideraciones históricas. De hecho, siempre fue muy explícito al situar su trabajo dentro de la tradición leibniziana y en algunos casos, como en el alegato con Frege que veremos más delante, no tenía ningún reparo en apelar a consideraciones históricas para justificar su manera de proceder.

[81] Peano (1889), p. 59; Heijenoort (ed)(1967), p. 94.

ellas puede deducirse de la otra, y la elección de cual de ellas es un axioma y cual un teorema, es simplemente cuestión de gusto".[82]

Pero desde luego, a pesar de las críticas de Frege y el comentario de Russell, el sistema de Dedekind es esencialmente correcto, aunque es la formulación de Peano, debido a su sencillez y claridad, la que se ha mantenido hasta el presente. Y algo similar puede decirse de muchos de los símbolos de su notación lógica: por ejemplo, sus signos para la intersección ($\cap$), unión ($\cup$) y membresia (ε) son ahora de uso corriente en teoría de conjuntos, y algo similar ocurre en lógica con su signo de implicación ($\supset$) aunque ciertamente con menor suerte.

Desde luego, desde el punto de vista puramente simbólico, la lógica de Peano tenía bastantes ventajas sobre las notaciónes de Boole y Frege. Con respecto al primero, la notación de Peano era totalmente nueva y desde luego, evitaba la confusión inevitable con los operadores algebraicos. Además, la nueva notación permitía sutilezas lógicas que Boole había pasado por alto o simplemente ignorado (como la letra epsilon para distinguir entre pertenecer o ser subconjunto de una clase). Además, y esto es lo realmente importante, la notación de Peano dejaba de lado la notación de Boole porque tenía como propósito poner de manifiesto las relaciones lógicas que se dan en el razonamiento matemático, algo que había conseguido con suficiente éxito desde el principio con su axiomatización los números naturales.

[82] Russell (1903), p. 248 [587].

Con respecto a Frege, las ventajas de la notación de Peano son más humildes pero no por ello menos eficaces. En efecto, ambos contaban con una notación nueva y distinta a la notación matemática usual, que además permitía sutilezas lógicas que Boole y los algebristas lógicos no tenían en cuenta. Y por si fuera poco, también compartían más o menos las mismas expectativas acerca del servicio que sus respectivas lógicas podían prestar a los fundamentos de las matemáticas.

Obviamente, existían diferencias entre ambos acerca de la manera como la lógica debía mostrar las relaciones que aparecen en el razonamiento matemático. Pero en sus líneas generales, ambos estaban de acuerdo y en gran medida, esto se debía principalmente a que ambos pensaban que sus respectivos sistemas lógicos eran una nueva y más modesta forma de realizar el proyecto leibniziano de la *lingua characteristica universalis*.[83]

¿En qué consiste entonces la ventaja de la notación de Peano sobre la de Frege? La respuesta ya la he dado en parte al inicio del presente capítulo: la notación de Frege es bastante distinta y difícil de seguir mientras que la de Peano es sencilla y fácil de reconocer. Ya he mencionado, por ejemplo, que el signo de aserción " |— " de Frege se encuentra formado

[83] A finales del siglo XIX, la filiación de la escuela de Peano al proyecto de Leibniz era ya suficientemente conocida. Por ejemplo, Couturat inicia su comentario a la lógica de Peano, con las siguientes palabras: "Nuestros lectores saben ya que M. Peano y sus colaboradores han realizado en parte, en el dominio de las matemáticas, el grandioso proyecto de Leibniz, con el cual soñó construir una Enciclopedia, un resumen sistemático de todas las ciencias, por medio de una notación ideográfica que denominaba Característica Universal" [Couturat (1899), p. 616]

por dos signos (la barra del juicio y la barra del contenido). Ahora bien, al introducir la generalidad, la barra del contenido sufre una concavidad al lado izquierdo para expresar la cuantificación: " —◡— ", en donde además ocurre una letra gótica que debe ligar las variables que se presenten a la izquierda del signo. Aquí la cuantificación existencial se distingue de la universal porque el signo de negación aparece siempre al lado derecho del cuantificador, el cual a su vez se representa como una barra vertical pequeña unida a la barra horizontal de contenido.

Por supuesto, esta manera de cuantificar es una ventaja desde el punto de vista de la economía de símbolos, pero desde el punto de vista práctico resulta una desventaja pues es complicada de escribir y exige mayor atención al lugar que deben ocupar cada uno de los símbolos. Por otra parte, como también ha señalado Thiel, la notación de Frege posee la ventaja adiciónal de volver más "natural" y estrecha las relaciones entre la lógica proposicional y la lógica cuantificacional.[84]

Sin embargo, no hay duda que la notación de Peano es mucho más fácil de escribir y recordar que la de Frege. Además, no se pierde nada de lo que ya se ha conseguido con la otra notación. Una ejemplo interesante sobre esto es la cuantificación misma. Como ya también observó Quine, una de las primeras novedades de

[84] Thiel (1972), p. 32, *n*. 22. Thiel añade también lo apropiado que resulta la notación fregeana en el álgebra de circuitos, lo cual no resulta nada sorprendente si observamos que lo primero que sugieren esas largas cadenas de símbolos, son precisamente circuitos lógicos!(o bien, diagramas de flujo).

los escritos de Peano es la adopción explícita de una notación para clases abstractas $\{x\colon Fx\}$; es decir, la clase de todos los objetos x que cumplen la condición Fx.[85]

Es claro que las clases abstractas expresan la generalidad asociada a la cuantificación, dado que la x de una clase abstracta es una variable ligada. Además, la notación invita a la generalización a casos poliádicos (x,z), (x,y,z), etc., y permite expresar tanto la cuantificación universal como la existencial, la cual Peano expresa así $x\colon Fx = \bullet$, para la cuantificación universal en donde $\bullet$ expresa el universo; y $x\colon Fx \neq O$ para la cuantificación existencial, donde O representa la clase vacía.[86]

Por otra parte, a diferencia de Frege, Peano formó una escuela y logró reunir en ella a un grupo entusiasta de lógicos y matemáticos de primera línea; de hecho, Russell entró primero en contacto con Peano y su simbolismo debe mucho a la influencia de este último (aunque no está por demás observar que su uso de los puntos, que Peano introduce para eliminar paréntesis, corchetes, etc., es bastante arbitraria y, eventualmente, superflua o ambigua).[87]

---

[85] Quine (1987), pp. 15-16 [268]. Otros símbolos empleados por Peano para expresar esta clase son: $[x\ \varepsilon]$, $x\ \varepsilon$, $x\ \ni$.

[86] *Loc. cit.*

[87] Por ejemplo, en el argumento $\vdash\colon x \in \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \ x \in \gamma$, que en ***Principia*** se usa para citar el comentario de Peano en cuanto a que este no es un caso particular de $\alpha \subset \beta . \beta \subset \gamma . \supset . \alpha \subset \gamma$ (dado que $x \in \beta$ no es un caso particular de $\alpha \subset \beta$), los dos puntos : a la derecha de la barra del juicio de Frege estan de más. Por otra parte, la expresión no es una instancia del silogismo Barbara, como ahí se dice, y la barra del juicio de Frege debe entenderse aquí no como que la fórmula es verdadera, sino válida [Russell & Whitehead (1910), p. 28; cf. Peano (1889), pp. 34-V y 39-VII; Heijenoort (ed.)(1967), p. 86].

Pero al margen de lo anterior, y como ya he mencionado, Peano también había hecho suyo el propósito de retomar el proyecto leibniziano de la *sciencia generalis*, y en un número de los *Intermédiaire des Mathématiciens*, de 1896, resumía la cuestión de la siguiente manera:

> Leibniz no sólo creó las reglas fundamentales del cálculo infinitesimal, y llevó a cabo indagaciones de un análisis geométrico muy parecido a la teoría vectorial; también a lo largo de su vida, desde su primer trabajo hasta sus últimas cartas, siempre abrigó el proyecto de un álgebra general, o una clase de lenguaje universal o escrip, en el cual todas las verdades de razón pudieran ser reducidas a una especie de cálculo... Así, la cuestión más general que puede plantearse es la construcción de esa álgebra... Después de algunos estudios preliminares de varios autores y principalmente de Boole y Schröder, la cuestión se ha planteado de nuevo. Todas las nociones lógicas pueden expresarse por medio de un pequeño número de signos que pueden ser usados en todos los razonamientos, como los signos +, -, =, en el álgebra... En 1889 publiqué por primera vez un pequeño libro escrito en los símbolos de la lógica matemática. Este primer trabajo fue seguido de otros de diferentes autores. Ahora existe una Sociedad que publica el *Fórmulario de Matemáticas*, el cual es una colección de todos los conocimientos sobre las distintas materias de las ciencias matemáticas, con sus pruebas, acompañados con las debidas indicaciones históricas, y escrito por completo en símbolos lógicos.[88]

Como se podrá ver, Peano olvida, quizá no deliberadamente, hacer alguna referencia mínima sobre el lugar de Frege dentro del programa. Pero la omisión no deja de ser significativa, si tomamos en cuenta la tendencia de Peano a interpretar el trabajo de Frege como idéntico al suyo, a pesar de que existen entre ambos diferencias de fondo.

Por otra parte, el profesor Eugén Ballue, en una carta recomendaba a Frege publicar en el mismo boletín una aclaración sobre el asunto. En el fondo, una disputa inédita sobre la

[88] Peano (1896), p. 169; citado por Ballue en Frege (1980), p. 3.

prioridad del programa estaba en juego. Cronológicamente, Frege fue el primero en retomar el proyecto leibniziano de una *lingua characterica*, pero sus escritos permanecieron practicamente sin influencia durante los años más productivos de su vida. Por el contrario, Peano y su escuela habían alcanzado una rápida reputación en el continente, y en tales condiciones, una disputa por la prioridad del proyecto no tenía mucho sentido.

Además, Peano ya había hecho algunas referencias a Frege en sus publicaciones. En la primera de ellas, en ***Principii di logica matematica,*** (1891) citaba la ***Conceptografía*** para mencionar la manera como Frege símboliza la implicación entre dos proposiciones. Pero lo más curioso de todo es que la segunda referencia a Frege, en su opúsculo sobre las ***Notations de Loguique Mathématique: introduction au Formulaire de Mathematiques*** (1894), ¡es precisamente en relación con el proyecto de una *scriptura universalis*!

Aquí, como afirmaría más tarde en los *Intermédiaire*, se señala como problema Leibniziano la creación de un lenguaje semejante, "Pero -agrega-, la mayor contribución a la solución del problema es la nueva e importante ciencia llamada Lógica Matemática, la cual se encarga de estudiar las propiedades formales de las operaciónes y relaciones lógicas. Esta ciencia ha sido cultivada en nuestro siglo por Boole, Cayley, Clifford, Delbouf, De Morgan, Ellis, Frege...".[89]

Más tarde, en una carta fechada el 30 de enero de 1894, Peano le escribe a Frege: "en las notas que le envío, y en

[89] Peano (1892), citado por Nidditch (1963), p. 105.

particular en una que por ahora esta en prensa y que quizá reciba en pocos días, verá que hemos tomado el mismo camino en la ciencia".[90]

Sin embargo, si bien Peano hace también suya la idea de una *lingua universalis*, difiere de Frege en la manera como se ha de aplicar en los fundamentos de la matemática. Esto es evidente en la reseña de Peano al primer volumen de las ***Leyes Fundamentales de la Aritmética***.

A juicio de Frege, la reseña de Peano le hacía poca justicia y no le comprendía del todo; de hecho, la apreciación de Frege no era equivocada, pues entre otras cosas, como ha resaltado Víctor Dudman, "Peano da por descontado que el objetivo del ***Grundgesetze*** es el mismo que el de su *Formulario de Matemáticas*".[91]

Esto se debe seguramente a lo poco conciente que era Peano de la diferencia entre "expresar las proposiciones aritméticas en símbolos lógicos" y "reducir (o derivar) la aritmética a (de) la lógica". Por supuesto, lo último supone lo primero, pero lo inverso no. "Todas las demostraciones de las proposiciones aritméticas -escribe Peano en su reseña-, son expresadas en su ***Conceptografía*** sin usar términos del lenguaje ordinario. Las demostraciones son reducidas a una sucesión de proposicióñes de tal modo que se pasa de una a otra empleando una sola regla de razonamiento".[92]

[90] En Frege (1980), p. 110. En una carta posterior Peano escribia: "en mi ensayo [Peano (1894)] encontrará muchas ideas que usted ha publicado en sus trabajos, pero en otros puntos nuestros enfoques son diferentes".
[91] Dudman (1971), p. 25.
[92] Peano (1895), p. 28.

Pero la muestra más palpable de que Peano identifica el trabajo de Frege con el suyo propio, es la reseña misma en su conjunto, la cual se encarga principalmente de comparar de manera crítica la *conceptografía* de Frege con su propia notación. "Los dos sistemas de símbolos -dice Peano-, pueden compararse desde un punto de vista práctico o científico. Visto científicamente, el sistema de Frege se basa en cinco signos fundamentales mientras que el nuestro se basa en tres. En consecuencia, el sistema del *Formulario* aporta un análisis más profundo. Y desde el punto de vista práctico, debido al uso de un signo compuesto para representar la multiplicación lógica, Frege obscurece las propiedades conmutativa y asociativa".[93]

En su respuesta (*"Lettera del sig. G. Frege all'Editore"*, 1896), Frege refuta con su agudo sentido crítico la apreciación anterior de Peano, demostrando, entre otras cosas, que los tres símbolos primitivos son insuficientes para dar una definición completa de la igualdad, aun y cuando Peano ofrece no una sino al menos cuatro definiciones. De hecho, Frege critica duramente este procedimiento apelando a su distinción entre sentido y referencia.

El argumento de Frege tiene como propósito sacar a la luz la poca utilidad que tiene el uso de varias definiciones para un mismo signo. Si suponemos dos definiciones que dan el referente de un mismo signo, razona Frege, entonces contamos con las siguientes posibilidades: o bien ambas definiciones dan el mismo referente o no. Y en el primer caso de nuevo tenemos

[93] Peano *ibid.*, p. 30

dos posibilidades: o bien ambas definiciones dan el mismo sentido o no.

Es obvio que dos definiciones que dan distintos referentes a un mismo signo son inútiles (ya que ambas se contradicen). En cuanto a la segunda posibilidad (la diferencia de sentido para un signo con el mismo referente), es claro que una de ellas debe ser más fundamental que la otra y en consecuencia, una de ambas debe considerase un teorema y demostrarse.[94]

Sin embargo, las definiciones de la identidad de Peano no se contradicen pero tampoco se pueden deducir tres a partir de una. En consecuencia, para Frege, estas definiciones no cumplen con el supuesto básico de presentar el referente del signo y deben considerarse como incompletas (stückweise Definieren). Además, para Frege, de las definiciones de Peano, las más manifiestamente incompletas son las definiciones condicionales (las cuales emplea Peano en varias ocasiones) ya que no en todos los casos logran establecer el referente del signo por definir.

En resumen, las objeciones de Frege al sistema de Peano en cuando al uso de las definiciones son las siguientes:

1) cada una de estas definiciones es incompleta
2) Aun cuando se consideren en conjunto siguen siendo incompletas ya que no determinan en cada caso lo que debe tomarse como una identidad

[94] Frege (1896), pp. 32-33[114]. Desde luego, cuando las dos definiciones dan el mismo sentido y el mismo referente una de ellas es superflua.

3) pues estas definiciones explican el signo de identidad por su mismo significado

Pero esto no es todo pues Frege también cuestiona la posiblidad de que Peano pueda dar una definición de la clase vacía [∅] a partir de sus símbolos primitivos. "Además -agrega- si la cuestión es enumerar todos los símbolos primitivos, entonces el signo de relación 'ε' debe también ser mencionado, debido a que no puede ser definido en términos de otros signos". Y concluye, "Por lo tanto, la cuestión que subyace con respecto a cual de los dos análisis es el más profundo me parece que no admite una respuesta sencilla. Varias cosas deben tomarse en consideración: el número de estipulaciones, la exactitud de los principios de la definición y el número de objetos que son introducidos por los signos primitivos. Sobre estas bases, no creo que el número de sus símbolos primitivos sea realmente más pequeño que el mío".[95]

En su "Risposta", Peano reconoció que Frege tenía razón con respecto a este último punto y que en realidad su sistema contaba con nueve signos primitivos. Pero añadía que aún era posible descubrir nuevas entidades lógicas y por consiguiente, una ulterior reducción de los signos sería deseable. En relación con la demanda sobre los principios de la definición, señalaba que presentar varias definiciones para un mismo signo se encontraba de alguna manera justificado por el hecho de que en el desarrollo de la ciencia era común extender el significado de un signo y si bien sus diferentes significados

[95] Frege (1896) p. 36 [118].

contaban con propiedades en común, ningúno de ellos era suficiente para especificar todos los valores que el signo pudiera tener.[96]

Por otra parte, desde el punto de vista lógico, es claro que el sistema de Frege es superior al de Peano en muchos aspectos. Por ejemplo, el sistema de Peano es axiomático (en sentido euclídeo) pero no es propiamente un sistema lógico-deductivo; esto se ve claramente al comparar por ejemplo ***Los Principios de la Aritmética*** con ***Las Leyes Fundamentales de la Aritmética***. Ahí, Peano enumera únicamente las fórmulas lógicas usadas sin presentar leyes de inferencia, y en consecuencia, la deducción de los teoremas se presenta sin una justificación lógica. Este sería uno de los puntos que Frege criticaría más tarde en su ensayo "*Sobre la Conceptografía de Peano y la Mía*", (1896). Pero de nuevo, la falta de sistematicidad del sistema lógico (no el aritmético) de Peano, obedece en parte al papel que este le atribuye a la lógica dentro de los fundamentos de la matemática; para Peano, en este sentido, la tarea de la

[96] Peano (1896), pp. 36-37 [118-9]. Entre las escasa correspondencia posterior que se conserva, el tema principal es de nuevo los principios de la definición. Frege señala, por ejemplo, que Peano en realidad no ha refutado sus argumentos contra la definición múltiple de un signo sino que solo ha apelado a consideraciones históricas y prácticas para justificar su uso, y añade: "Es cierto, desde el punto de vista histórico, que el significado de un signo (*i.e.*, el signo de adición), se ha ido extendiendo paso a paso, pero es objetable mantener este procedimiento en una presentación sistemática. Como expliqué antes, la lógica requiere límites cuidadosamente fijos y definidos ya que en la fluctuación entre los límites, los conceptos rudimentarios y las relaciones, que se introduce por tales extensiones sólo puede poner en peligro la certeza de las inferencias" [Frege (1980), p. 125]. El lector atento recordará que Frege parte también de consideraciones históricas similares al momento de introducir su definición de *función*, pero no debe perder de vista que después de todo se trata de una definición sistemática y única [Cf. cap. II, ii y Heijenoort (1986), pp. 32-35.].

lógica consiste únicamente en aclarar la forma de las proposiciones matemáticas.

Es muy probable también, que al no distinguir entre el propósito de Frege y el suyo, Peano tampoco repare en la distinción entre proposiciones lógicas y reglas de inferencia, o viceversa; pues al respecto, Peano escribe lo siguiente: "El autor muestra gran interés en sus reglas de inferencia, cuyo uso explica en el lenguaje ordinario. Al traducirlas a símbolos, se convierten en identidades lógicas, y todas ellas se encuentran en la parte I del *Formulario*. El autor prueba sus reglas usando el lenguaje ordinario, pero esas pruebas son ilusorias. De hecho, ya que esas reglas son ciertamente las reglas más simples de razonamiento, para probarlas, se ha de usar cualquiera de ellas o bien, otras más complicadas. En cualquier caso, tendríamos un círculo vicioso. Lo único que se puede hacer con esas reglas de razonamiento, es ver si alguna de ellas es equivalente a la combinación de otras; y entonces, continuando este análisis se podrá llegar al sistema de las reglas más simples, las cuales son denominadas 'proposiciones primitivas' en la parte I del *Formulario*".[97]

Como la confusión entre proposiciones lógicas [identidades *versus* proposiciones primitivas] y reglas de inferencia es patente, no se requiere hacer más comentarios. No obstante, debe mencionarse que Peano también se equivoca al considerar que Frege pretende ofrecer una prueba de sus reglas en el lenguaje ordinario; lo cual resultaría un tanto irónico en

[97] Peano art. cit., p. 31.

alguien que como Frege, a creado un lenguaje de fórmulas para escapar de las trampas del lenguaje común. En efecto, como señala Peano en un principio, Frege intenta dar una explicación de cómo operan esas reglas, pero se trata sólo de una explicación y no de una prueba, pues en tanto que las reglas de inferencia constituyen el "núcleo" de la *conceptografía*, estas deben de admitirse sin demostración alguna.[98]

Sin embargo, si en realidad Frege buscara dar una prueba de las reglas de inferencia, caería inevitablemente en un círculo vicioso. Por otra parte, el análisis que propone Peano de encontrar las reglas equivalentes a las reglas complejas, no deja de sorprender pues Frege va de la regla más fundamental a las más complicadas, explicando en cada caso sus conexiones.[99]

Comentando el pasaje anterior de Peano, Kennedy supone que al distinguir entre proposiciones lógicas y reglas de inferencia, Frege establece una demarcación entre lenguaje objeto y metalenguaje.[100] Sin embargo esto no es así, y no porque, como afirma Thiel, no exista una diferencia clara entre ley, juicio y proposición;[101] sino porque la interpretación absolutista que esta en la base de la concepción de la lógica

[98] La explicación de la regla de inferencia del condicional (Modus Ponens), se obtiene en la ***conceptografía*** de la primera posibilidad de valores del operador condicional (A es afirmada y B es afirmada), pero nunca se pretende que tal explicación sea una *prueba* de la regla [Cf. Frege (1879), § 5 y § 6].

[99] Cf. Frege (1893), § 14, § 15 y § 16. Todo esto hace suponer que Peano no prestó mucha atención a la introducción del libro que estaba reseñando, como lo demuestran las mismas palabras de Frege: "la cuestión de porqué y con qué justificación admitimos como verdadera una ley lógica, sólo puede ser contestada reduciendola a otras leyes lógicas. Cuando esto no es posible, la lógica no puede dar otra respuesta" [Frege *loc. cit.*].

[100] Kennedy (1980), p. 74.

[101] Thiel (1972), p. 30.

de Frege, no admite la existencia de un metalenguaje que hable acerca de la lógica.

Dicho de otra manera, no es posible salir del dominio de la lógica, pues la lógica es la piedra de fondo que cubre y sostiene todo el sistema, y cualquier intento de hacerlo es, para decirlo en las mismas palabras de Frege, "un intento de salirse de la propia piel".[102] Además, si como vimos en el capítulo anterior, las leyes lógicas son las leyes del ser verdad, y son ellas las que prescriben cómo hay que juzgar, donde sea, cuando sea y por quien sea, entonces las variables proposicionales que aparecen en las reglas de inferencia no tienen porque admitir necesariemente como sus valores posibles sólo proposiciones lógicas; las variables pueden admitir también como valores proposiciónes acerca de hechos físicos, químicos, sicológicos, etc. De hecho, como se desprende de la carta a Peano citada en la nota anterior (94), sus principios de la definición no tienen más objetivo que garantizar la rectitud y universalidad de las inferencias, y por consiguiente, se encuentran determinados por criterios absolutistas bien definidos.[103]

---

[102] Frege *op. cit.*

[103] Como señaló Heijenoort, los principios de la definición de Frege son una consecuencia de su principio de completud (Grundsatz der Vollständigkeit), que no es otra cosa que la expresión técnica de la identificación del universo de la *conceptografía* con el Universo fijo y determinado de todo lo existente. Debe decirse, no obstante, que el principio de completud se encuentra asociado a su vez con la demanda, siempre insistente de Frege, en la delimitación clara y precisa de los conceptos. Es decir, las definiciones de Peano son consideradas incompletas, porque, por un lado, no delimitan con claridad los conceptos (principio de precisión); y por el otro, porque las operaciones no se encuentran definidas para todos los objetos del universo (principio de completud). En palabras de Heijenoort, "el requerimiento de completud de Frege se encuentra íntimamente conectado con el de precisión.

Dada la generalidad de las reglas (y de la lógica), no puede hablarse con propiedad, en el caso de Frege, de un *lenguaje objeto* específico sobre el cual se aplican esas reglas. Además, dicho tajantemente, en una lógica absolutista no hay lugar para las cuestiones metasistemáticas.

Para él, de hecho, los dos requerimientos parecen fucionarse en uno solo". Heijenoort art. cit., p. 35.

LOS ORIGENES DEL LOGICISMO

Debemos ser sistemáticos. Pero es preciso que dejemos abiertos nuestros sistemas. En otros términos: debemos sentir sus limitaciones. Hay siempre un vago "más allá" que espera que penetremos en su detalle.

A. N. WHITHEHEAD

...la infalibilidad no ha sido concedida a los mortales

B. RUSSELL

I Los antecedentes

En el capítulo anterior vimos que tanto Frege como Peano hicieron suyo el propósito de retomar el proyecto leibniziano de una *lingua characterica* como herramienta fundamental para el esclarecimiento del razonamiento matemático y que ambos identificaron esa *lingua characterica* con sus respectivos sistemas lógicos. Ahora bien, la idea de fondo, según la cual la lógica constituye la base de las diversas teorías matemáticas, era una opinión compartida por algunos lógicos y matemáticos de la época. Frege era consiente de ello y en ***Los Fundamentos de la Aritmética*** citaba las ideas de W. S. Jevons al respecto: "sostengo que el álgebra es una lógica altamente desarrollada, y que el número no es sino un discernimiento lógico".[1]

[1] Frege (1884), § 15. Como ya se ha mencionado, Jevons pertenece más a la tradición algebraica de la lógica que al enfoque de Frege, pero es precisamente por sus convicciones en torno a la naturaleza lógica de la matemática por lo cual se aparta un tanto de la concepción booleana de la lógica; y por lo mismo, se le considera un seguidor parcial de Boole. La crítica y reforma de Javons al sistema booleano parte de esta diferencia de fondo, y por consiguiente, Jevons trata de disminuir lo más posible las analogías entre los operadores lógicos y los aritméticos. En resumen, "la lógica —afirma Javons—, no es parte de las matemáticas, como casi está implícito en los escritos del profesor Boole, sino que más bien las matemáticas provienen de la lógica" [citado por Grattan-Guinness (1991), p. 19 [356-357]. Sobre la crítica de Frege a la teoría de números de Jevons, véase Frege *ibid.*, § 44].

Más tarde, en ***Las Leyes Fundamentales de la Aritmética,*** expresaba como su objetivo principal llevar a buen término lo que hasta ese momento consideraba una mera presunción:

> Ciertamente con frecuencia se ha venido afirmado que la aritmética no es más que lógica desarrollada, pero esto será discutible hasta en tanto aparezcan en las pruebas pasos que no se den según las leyes lógicas reconocidas, sino que parezcan descansar en un conocimiento intuitivo. Sólo a partir del momento en que estos pasos se descompongan en pasos lógicos simples, podemos estar convencidos de que en la base no hay sino lógica.[2]

Si recordamos que Frege pensaba que sólo la aritmética es susceptible de derivación a partir puros conceptos lógicos, el logicismo como tal debe ser entendido en cierta forma como una ampliación del proyecto de Frege. Aunque ciertamente, con respecto a Leibniz el logicismo puede entenderse como un intento por cumplir una de sus hipótesis geniales.

Desde esta perspectiva puede pensarse que el logicismo representa más un renacimiento leibniziano a la manera de Peano y su escuela. No obstante, también debe recordarse que si bien Peano había logrado expresar en el simbolismo lógico muchos importantes axiomas y teoremas de diversas teorías matemáticas, no había realizado las demostraciones de los teoremas con el mismo análisis lógico que Frege había presentado de las deducciones aritméticas.

Como también ya se ha mencionado en el capítulo anterior, Peano no se propuso, *estrictu sensu,* desarrollar la derivación completa de la aritmética, ni de la matematica clásica a partir de los principios de la lógica. Sin embargo, es innegable que

[2] Frege (1903), p. 3.

la obra de Peano influyó de manera importante en la evolución del programa logicista como una extensión "natural" del proyecto leibniziano; el cual, por otra parte, no tardaría en alcanzar su momento más decisivo durante la primera década del presente siglo, y no precisamente debido a Peano o Frege, sino a dos ilustres académicos de Cambridge.

II **Whithead y el álgebra universal**

El mayor de ambos, Alfred North Whitehead (1861-1947), había publicado en 1898 un ***Tratado sobre el Álgebra Universal*** de claros rasgos leibnizianos y booleanos. En este libro, el álgebra universal se presenta como una suerte de abstracción de aquellas características que son comunes a todas las álgebras, pero también, a toda la matemática. Lo cual significa, que el álgebra universal representa "un desarrollo de todos los tipos de razonamiento deductivo, formal y necesario".[3]

Para Whitehead, como para muchos otros matemáticos, el álgebra Universal muestra claramente que la matemática no es sólo la ciencia del número y la magnitud, pues "a decir verdad, no es ella misma una ciencia especial que pueda definirse por

[3] Es formal porque "el significado de las proposiciones no forma parte de la investigación"; necesario, porque todas las proposiciones "se siguen de las reglas"; y por último, deductivo porque "se basa en definiciones que, en lo que respecta a la validez de los razonamientos (al margen de cualquier relevancia existencial), requiere únicamente de una prueba de consistencia". Whitehead (1898), p. vi [la introducción no aparece en la edición de 1960, y por tal razón lo cito a partir de la paráfrasis de Couturat (1900), p. 359 y Bowne (1966), p. 49]

su objeto de estudio y que este pueda circunscribirse a la competencia de un dominio limitado".[4] En este sentido, el álgebra Universal es un cálculo abstracto que Whitehead define como "el arte de manipular la sustitución de los signos de acuerdo a reglas fijas de deducción a partir de proposiciones verdaderas".[5] Siguiendo a Boole, Whithead sostiene que los símbolos empleados en un cálculo son totalmente arbitrarios pero susceptibles de una intepretación fija y predeterminada.

Desde el punto de vista semiótico, Whithead distingue tres tipos de signos: a) sugestivos, b) expresivos y c) sustitutivos. Los primeros no son propiamente signos lingüísticos y son dejados rápidamente de lado. Los signos expresivos son aquellos que son empleados en función de lo que ellos expresan, sin prestar mayor atención a los signos en sí. Para Whitehead, el lenguaje ordinario consiste en grupos o conjuntos de tales signos.

Por último y en sentido opuesto al uso de los anteriores, el empleo de los signos sustitutivos centra su atención en los signos mismos, ya que "un signo sustitutivo es aquel que ocupa en el pensamiento el lugar de aquello que ha sido sustituido por él". Esta es la clase de símbolos que son empleados en el cálculo matemático y cuya función principal es la economía del pensamiento.[6]

En su extensa colaboración al volumen que preparó A. P. Schilpp sobre la filosofía de Whitehead, Víctor Lowe señala que

[4] De acuerdo a lo dicho al final de la nota anterior Cf. Couturat *loc. cit.*
[5] Whitehead *op. cit.*, p. 4.
[6] *Ibid.*, pp. 3-4.

si bien el ***Tratado sobre el álgebra Universal*** sugiere la idea leibniziana de un cálculo universal del razonamiento, el objetivo de ese cálculo no es para nada leibniziano.[7] Desde luego, esto suena bastante extraño, por no decir paradójico, y requiere un comentario.

Según Lowe, la diferencia esencial entre Leibniz y Whitehead consiste en la forma como cada uno entiende el simbolismo y su relación con el razonamiento. Para el primero, por ejemplo, existe una relación íntima entre ambos ya que "todo nuestro razonamiento no es más que relacionar y sustituir caracteres, ya sean éstos palabras o marcas o imágenes",[8] mientras que para Whitehead, siendo la esencia del cálculo la manipulación de signos sustitutivos, "el uso de un cálculo después de todo no es más que una manera de evitar el razonamiento".[9]

Por supuesto, este planteamiento parece muy convincente *prima faquie*, sin embargo, descansa en una interpretación muy rápida y literal de los textos de ambos pensadores. En primer lugar, debe señalarse que Lowe no toma en cuenta la sutileza de Leibniz con respecto a *tipos* de razonamiento (en un sentido

---

[7] Lowe (1941), § 1, pp. 18-19.

[8] Este multicitado texto de Leibniz pertenece al volumen VII de los ***Phil. Scriften von Leibniz*** editado por Gerhardt, p. 31.

[9] Whitehead *op. cit.*, p. viii; citado por Lowe *loc. cit.* En ***El Simbolismo, su significado y efecto***, Whithead es más explícito en las diferencias con el lenguaje ordinario: "Existe también otra clase de lenguaje, puramente escrito, que se encuentra constituido por los símbolos del álgebra. En algunos sentidos, estos símbolos son diferentes a los del lenguaje ordinario, ya que la manipulación de los símbolos algebraicos hacen el razonamiento por uno, si se tiene el cuidado de seguir sus reglas. Este no es el caso con el lenguaje ordinario pues nunca se puede olvidar el significado del lenguaje confiando meramente en que la sintaxis lo saque a uno adelante" [Whitehead (1927), p. 2].

distinto a *formas de*),[10] ya que el algoritmo proporciona lo que éste denomina *pensamientos ciegos* y que bien puede corresponder con lo que Whitehaed entiende por *evitar el razonamiento*.

Quizá la mejor manera de entender esto es limitandonos a la idea de la lógica como *lingua characteristica* y su doble función. En palabras de Couturat, "un simbolismo lógico [como *lingua characteristica*] posee dos fines distintos: por una parte, es una *estenografía* y al mismo tiempo una *ideografía*; es decir, debe expresar de la forma más clara y concisa posible las relaciones entre las ideas, sin la mediación falaz de las palabras; y por otra parte, debe ser un *algoritmo* (el *Calculus ratiocinator* de Leibniz); es decir, debe permitir sacar todas las conclusiones lógicas comprendidas en las premisas por medio de reglas de transformación de fórmulas, similares a las del álgebra. En una palabra, *debe sustituir el razonamiento por el cálculo*".[11]

Una vez que se conocen las peculiaridades del proyecto leibniziano es evidente que existe una similitud muy estrecha entre la manera como Whitehead entiende los signos sustitutivos y la forma como Leibniz considera que los signos de la *lingua characterica* producen el *cogitatio caeca*, pues así como los signos sustitutivos ocupan en el pensamiento aquello que ha sido reemplazado por ellos, así también, los signos de la *característica universal* ocupan en el pensamiento el lugar de

[10] Lo cual se debe, supongo, a que Lowe sigue la exposición que C. I. Lewis hace de la teoría leibniziana del simbolismo en ***A Survey of Symbolic logic***.
[11] Couturat (1899), p. 617. Las últimas cursivas son mías.

aquello que representan, pues esta *lingua* "no sólo ayuda al razonamiento, lo sustituye".[12]

Sin embargo, debe reconocerse también que la idea de Whitehead sobre el simbolismo matemático tiene además otra fuente y hasta cierto punto contraria a la tradición leibniziana. Esta influencia se debe a los neohegelianos de Cambridge, y en especial a Bradley y Stoud. De hecho, la clasificación de los signos en sugestivos, expresivos, y sustitutivos la retoma de este último mientras que del primero asume la idea de que en el cálculo en lugar del razonamiento aparece una "demostración externa".[13]

Por otra parte, es interesante notar que esta concepción neohegeliana del simbolismo lógico y matemático tiene en su origen una buena dosis de carga negativa, en tanto que es debido a esta falta de razonamiento por lo cual Bradley y sus seguidores rechazan el tratamiento algebraico de la lógica a la manera de Boole y De Morgan. Sin embargo, esta idea es

[12] Couturat (1901), p. 101. En los ***Nouveaux Essais*** presenta un punto de vista más general que parece negar la particularidad y ventaja de la *característica*, pero que no obstante sigue manteniendo afinidad con Whitehead: "la mayor parte de nuestros pensamientos son, por así decirlo, sordos (en latín los califico de *cogitationes caecas*), es decir, carentes de percepción y de sensibilidad, y se reducen al empleo sin más de los caracteres, como los algebristas que calculan únicamente sin considerar más que de tarde en tarde las figuras geométricas tratadas; las palabras desempeñan en estas ocasiones un papel muy similar al de los caracteres de la aritmética o del álgebra. A menudo se razona con sólo palabras, sin tener prácticamente presentes los objetos mismos" [Leibniz (N.E.), II, § 31, p. 212; sobre las semejanzas y diferencias entre la metafísica de Leibniz y Whitehead véase A. H. Johnson (1958)].

[13] No está por demás añadir esta noción de demostración tiene involuntariamente un aire hilbertiano en tanto que se trata de una sustitución de marcas sobre el papel siguiendo reglas fijas sin significado alguno. El ensayo citado de Stout es "Thought and Language" que apareció en *Mind* en abril de 1891, mientras que el libro de Bradley es ***Principles of Logic*** de 1883.

asimilada por Whitehead de manera positiva y desarrollada, más tarde, en una teoría amplia sobre el desarrollo del conocimiento y la civilización.[14]

Desde luego, no podemos aquí entrar en detalle sobre los aspectos relevantes de esta teoría de Whitehead, de manera que me limitaré a señalar que Whitehead asimila positivamente las ideas de los neohegelianos simplemente porque se corresponden —vistas con buenos ojos— con las ideas de los matemáticos de la segunda mitad del siglo XIX sobre la pureza de las matemáticas. En otras palabras, las concepciones de los idealistas ingleses resultaban bastante compatibles con la manera como los matemáticos formalistas entendían su ciencia: la matemática -y la lógica incluida- debía ante todo entenderse como una ciencia de la forma, sin determinaciones fijas de significado,[15] las cuales sólo se presentarían al momento de tomar en cuenta tal o cual interpretación del simbolismo.

Por otra parte, debe ser evidente que sólo bajo una concepción como la anterior puede adecuadamente tener sentido

---

[14] En muchos pasajes de sus textos posteriores, la actitud de Whitehead hacia la matemática y la lógica parece ser negativa, pero como señaló correctamente David Harrah, esto no debe desorientarnos, pues sus comentarios siempre van dirigidos hacia la fe ciega en el poder de las matemáticas y en sus abusos: "El pensamiento es abstracto, y el empleo intolerante de abstracciones es el mayor vicio del intelecto", "La certeza matemática depende de su completa generalidad y abstracción. Pero no tenemos certeza *a priori* de que estemos en lo cierto al creer que las entidades observadas en el universo forman un caso particular de lo que cae bajo nuestro razonamiento general" [Whitehead (1925), pp. 24, 27 y 28. Cf. Harrah (1959), p. 421; y Whitehead (1944), segunda lección].

[15] Es interesante notar las relaciones que establece Whitehead entre filosofía, poesía y matemática en las últimas frases de ***Modes of Thought***: "La filosofía es análoga a la poesía y ambas tratan de expresar ese buen sentido final que denominamos civilización. En cada una, hay una referencia a la forma más allá de los significados directos de las palabras. La poesía se alía con el metro, la filosofía con el módulo matemático" [Whitehead (1944), p. 199].

una álgebra universal entendida como el arte de todo razonamiento deductivo, y que se presenta como el resultado natural del "estudio comparativo de la diversidad de formas producidas por la variación de reglas realizadas a la luz de los principios del cálculo".[16]

No obstante, a pesar de las propiedades generales atribuidas a esa nueva álgebra, Whitehead no pretende postular su sistema como fundamento de las teorías matemáticas en el sentido usual al que me he referido en el capítulo anterior, y mucho menos desde la perspectiva logicista que más tarde habría de asumir junto con Russell en ***Principia Mathematica***. Esto es claro al tener presente que se trata más que nada de una *síntesis* o si se prefiere, de una abstracción de todas las demás álgebras.

Por esta razón, el núcleo del álgebra Universal contiene solo las definiciones generales de la equivalencia, la adición y la multiplicación, mientras que el desarrollo y comparación de las definiciones especiales se consideran como ramas especiales.

Es evidente entonces que el álgebra Universal no se identifica con la lógica, ya que en este sistema las ramas especiales se dividen en dos tipos de álgebras: un álgebra no-numérica, que corresponde propiamente con la lógica al estilo de Boole y, un álgebra numérica que se divide en distintas especies de álgebras, como el álgebra ordinaria o el cálculo de extensión de Grassmann.

[16] Whitehead (1898), I, § 2.

Si bien el álgebra de la lógica se presenta como más elemental que cualquier álgebra numérica, en el ***Tratado*** no se ofrece una derivación de las segundas a partir de la primera, ya que cada una cuenta con sus respectivas leyes especiales.[17] Por supuesto, he mencionado que los signos sustitutivos en general mantienen una similitud con la *lingua characterica* leibniziana en tanto algoritmo o *calculus ratiocinatur,* pero esto no significa que el álgebra Universal se presente como una lengua de este tipo.

No obstante, para Louis Couturat, quien tenía una visión más amplia de este programa, era bastante claro que el álgebra de la lógica, era en realidad la verdadera álgebra Universal leibniziana, ya que "desde un punto de vista más general y abstracto —decía Couturat— el álgebra de la lógica aparece como el fundamento de las matemáticas; o como la rama más elemental de éstas, anterior a la ciencia del número, del orden y de la magnitud, de la cual todas son dependientes y tributarias: es la matemática del todo y la parte".[18]

[17] Desde luego, las leyes especiales del álgebra de la lógica son la ley de adición a + a = a; las leyes de multiplicación ab = ba, abc = ab·c = a·bc, aa = a; y la ley de absorción a + ab = a [Whitehead *Op. cit.*, II, § 23].

[18] Couturat (1900), pp. 340-1. Líneas atrás, Couturat afirma que "el álgebra de la lógica es, en el fondo, teoría de conjuntos considerada desde el punto de vista de sus relaciones mutuas de inclusión y exclusión; y de las razones del porqué la lógica admite tres interpretaciones distintas: como conceptos (o clases), como proposiciones y como conjuntos de puntos o regiones espaciales". Boole sólo había contemplado las primeras dos interpretaciones, y es un mérito de Whitehead haber desarrollado interpretaciones geométricas de los sistemas algebraicos ahí presentados (el subtítulo del libro, "con aplicaciones", no alude por supuesto a aplicaciones físicas, sino a modelos geométricos). Aunque el método en sí no era nuevo, su tratamiento se debe, como reconoce Whitehead, a la tradición leibniziana retomada por Grassmann de un "cálculo de la forma". Al final de su amplia reseña, después de señalar la deuda de Boole y Grassmann con Leibniz, Couturat afirma de manera entusiasta: "Debido a que M. Whitehead ha unificado y desarrollado en una vasta síntesis el cálculo lógico de uno [Boole] y el cálculo geométrico del

Por este motivo, para Couturat el tratamiento y simbolismo del álgebra de la lógica tal y como lo presenta Whitehead no es del todo satisfactorio y en cierta medida va en contra de las ventajas que este último atribuye a los signos sustitutivos. Por ejemplo, Couturat reprocha la manera como se simboliza la equivalencia, pues si bien está de acuerdo con Whitehead en que es ésta la relación fundamental de toda álgebra y que no se limita únicamente a establecer una relación de identidad,[19] su simbolismo "complica enormemente los cálculos, y en definitiva, *suprime la principal ventaja, que es la de reemplazar el razonamiento por una manipulación mecánica de los signos mediante reglas generales que se aplican ciegamente a cualquier clase de signos sin tener en cuenta el sentido completo de los signos*"![20]

Entre otras cosas, por ejemplo, Couturat argumentaba que los signos dependientes *j* y *w* que Whithehead introduce para fórmulas existenciales, tales como "*xj*" para expresar que la región x existe (esto es, que no es vacía) y "*x* + *w*" para expresar que la región x no se identifica con el universo, eran

---

otro [Grassmann], puede decirse que ha realizado plenamente el sueño grandioso del filósofo [Leibniz], y que su álgebra universal no es otra cosa que la Característica universal. Todavia mejor, es la Matemática universal que Descartes quería sustituir por la lógica escolástica y que sería la verdadera lógica científica, el método general de invención y demostración. Esos sueños proféticos toman cuerpo de este modo en la obra de M. Whitehead, la cual sumistra el contenido científico y las aplicaciones positivas a esas intuiciones divinas, que por mucho tiempo pasaron por quimeras de metafísicos y da la razón a esos grandes racionalistas al confirmar y en ilustrar la idea cartesiana de la matemática *concue* como la ciencia universal" [*ibid.*, p. 362].

[19] *Ibid.*, p. 325. El que Couturat denomine a la equivalencia "la cópula de todas las proposiciones matemáticas", no es sino una muestra más de que tiene en mente la *lingua characterica*.

[20] *Ibid.*, p. 336; las cursivas son mías.

complicadamente innecesarios y restaban generalidad a las leyes, lo cual podía solucionarse de manera fácil simbolizando $x \neq 0$ y $x \neq i$ en cada caso.[21]

Por otra parte, para Whitehead el fundamento universal de su álgebra descansa en las propiedades formales de los signos sustitutivos, los cuales hacen posible cada una de las ramas especiales y al mismo tiempo, las diferentes interpretaciones de un mismo cálculo. Pero de nuevo, al igual que Boole, Whitehead habla de las cualidades universales del *lenguaje* del cálculo pero en ningún momento considera la posibilidad de tomar esa álgebra como un lenguaje en el sentido especial de una *lingua characterica*.

Por supuesto, desde esta perspectiva, el ***Tratado*** debe ser considerado como el desarrollo más completo del tratamiento algebraico de la lógica asociado a Boole, Hamilton y De Morgan. En consecuencia, el contraste con el punto de vista de Frege y Peano, puede resaltarse muy bien recurriendo a las diferencias señaladas por Frege entre un mero *calculus ratiocinatur* y una *lingua characterica*.[22]

En este sentido, debe quedar claro que con una lógica abstracta es imposible asumir un proyecto para la aritmética como el planteado por Frege desde la ***Conceptografía***, y por lo tanto, tampoco puede hablarse del ***Tratado***, a pesar de su universalidad, como un paso preliminar del proyecto logicista.

---

[21] *Ibid.*, p. 335. Whitehead *op. cit.*, III, § 39. Al respecto, Quine ha comentado que este procedimiento de Whitehead se debe a su manera de entender las álgebras estrictamente como sistemas de ecuaciones, en oposición a desigualdades [Quine (1941), p. 134 [10]].

[22] Cf. Frege (1880/1), (1882) y (1895b).

Técnicamente esta imposibilidad viene determinada por la naturaleza del universo de una lógica abstracta, que por principio, consiste en un universo indeterminado cuyos objetos pueden elegirse de manera arbitraria; es decir, a diferencia de una lógica absolutista como la de Frege, el dominio de una lógica abstracta no puede establecer de una vez por todas qué tipo de objetos van a entrar en consideración. Además, una álgebra abstracta puede admitir muchas interpretaciones (o modelos). Puede por ejemplo, admitir una interpretación aritmética, pero esto no significa que también pueda derivar esa aritmética de sus principios.

Por otra parte, en ***Los Principios de la Matemática***, Russell había dudado de que un cálculo abstracto como el álgebra universal, pudiera poseer de hecho los principios esenciales de cualquier cálculo; e incluso, se mostraba escéptico acerca de la existencia de esos principios esenciales.

Russell alababa el trabajo matemático de Whitehead, pero desde el punto de vista filosófico pensaba que:

> La posibilidad de un álgebra Universal deductiva se basa a menudo en un supuesto principio de la permanencia de la forma... Pero, en realidad -decía-, no existe tal principio... Para que un álgebra tal sea importante, es necesario que exista por lo menos un caso particular en el que se verifiquen las reglas operativas. Pero incluso esta restricción no nos permite hacer una afirmación formal y general sobre todas las posibles reglas operativas. Y en consecuencia, el principio de permanencia de la forma debe considerarse erróneo.[23]

[23] Russell (1903), § 357. En la ***Philosophische Grammatik***, Wittgenstein parece tener en mente el cálculo universal de Whitehead cuando dice que "con Russell, pero especialmente con Whitehead, hizo su entrada en la filosofía

Por otra parte, estos son en realidad argumentos un tanto extraños en un pensador que por un lado, admite la concepción abstracta de la matemática y, por otro, juega con la idea de que las expresiones lógicas son verdaderas en virtud de su forma. Por otra parte, es bastante curioso que Bertrand Russell no fuera muy conciente del tipo de concepciones con las que se había comprometido al admitir el proyecto leibniziano en la fundamentación de las matemáticas.

III **Russell y la herencia de Peano**

Esto es claro cuando observamos que en varios lugares Russell se ha referido a su entrada al programa como la gran revolución conceptual que hubo de experimentar al adoptar "la técnica lógica" de Peano en matemáticas. Y en efecto, Russell creía haber adoptado únicamente una técnica lógica, y no toda la filosofía de la lógica que le acompaña.

Pero en ***La Evolución de mi Pensamiento Filosófico,*** confiesa que antes de conocer a Peano, la lógica matemática no era para él un tema nuevo. Conocía por supuesto el cálculo de Boole, y los trabajos de Peirce sobre la lógica de relaciones; también le era familiar el libro sistemático de Ernest Schöder sobre el álgebra de la lógica, pero no veía como esos sistemas

---

una pseudoexactitud que, en realidad, es el peor enemigo de la exactitud. En la base de todo ello está el error de pensar que un cálculo puede ser el fundamento de las matemáticas". Wittgenstein (1992), p. 581.

podían arrojar ideas claras sobre "la *gramática* de las matemáticas".[24] Pero si observamos que todos esos trabajos pertenecen al enfoque algebraico de la lógica, no es sorprendente que no pudieran sugerirle a Russell una forma novedosa de tratar con los fundamentos o la *gramática* de la matemática.

Esto es más claro si recordamos las diferencias de estos sistemas, en tanto que como lógicas algebraicas, las primeras no cuentan, en principio, con una aplicación u objetivo específico, mientras que la lógica de Peano aparece desde un principio como una ciencia metamatemática cuyo objetivo es establecer con claridad y precisión las propiedades y relaciones lógicas de las expresiones matemáticas.

En realidad, muy pocos lógicos y matemáticos llegaron a darse cuenta de la verdadera naturaleza de la versión de Peano del proyecto leibniziano. Frege, por ejemplo, nunca fue enteramente consciente de sus propósitos, pero quizá eso se debió a la excesiva atención que le había otorgado a los "préstamos" y desarrollos que la lógica de Peano hacía del sistema booleano.

Por lo demás, Russell tampoco fue muy claro en su descripción de los cambios ocurridos en su pensamiento durante su "conversión lógica". Al respecto llama la atención su referencia a la filosofía del atomismo lógico en el resumen que hizo de su revolución conceptual:

---

[24] Russell (1959), pp. 65-66 [67, las cursivas son mías].

> Hay una división principal en mi trabajo filosófico: en los años 1899-1900 adopté la filosofía del atomismo lógico y la técnica de Peano en lógica matemática. Fue una revolución tan grande, que todo mi trabajo anterior, excepto el puramente matemático, resulto inadecuado con respecto a todo lo que hice después. El cambio en aquellos años fue una revolución; los cambios subsiguientes han tenido un caracter evolutivo.[25]

Es claro, al menos para los conocedores de la filosofía de Russell, el papel bastante dudoso que pudo haber jugado la filosofía del atomismo lógico en una fecha tan temprana como la indicada por Russell, pues como se sabe, el nombre de "atomismo lógico" fue usado por Russell para describir, durante un ciclo de conferencias publicadas entre 1918 y 1919, algunas ideas que según el propio autor, se "desprendían" de su filosofía de las matemáticas. Es decir, del logicismo.

Aunque el contenido de las conferencias hacia referencia en buena medida a las "aplicaciones" de teorías que había elaborado para salvar problemas técnicos dentro del programa logicista (como la teoría de los tipos y la teoría de las descripciones, que datan también de una fecha posterior a la antes señalada), él mismo se encargo de reconocer una fuerte influencia de su antiguo alumno Ludwig Wittgenstein en algunas de las opiniones ahí expuestas.

Sin embargo, para ser más precisos, el nombre "atomismo lógico" fue introducido por primera vez en una de dos lecturas que Russell realizó en París en marzo de 1911. Como sugiere el título de la conferencia (Le Réalisme Anaytique), se describe su posición filosófica como un "realismo analítico", en tanto

---

[25] *Ibid.* p. 11 [11].

que se defiende el *realismo* en teoría del conocimiento, y en particular, con respecto a la naturaleza de los universales; y *analítico*, en tanto que se trata de un método de análisis lógico con el cual piensa abordar los problemas filosóficos.

El análisis se describe en esta primera versión como la descomposición de los complejos en sus constituyentes últimos, y a estos constituyentes que son, en principio, el resultado del análisis, los llama, como lo haría más tarde, "átomos lógicos" o "simples". Según el punto de vista ahí expuesto, estos átomos lógicos pueden identificarse con datos de los sentidos (sense data) o con conocimiento *a priori*, según sea el caso del análisis en cuestión.

Como veremos más adelante, las tesis principales de ese ensayo no difieren sustancialmente de los contenidos de lo que más tarde se publicaría bajo el título de ***Filosofía del Atomismo Lógico***. Pero lo que conviene por lo pronto, es poner de manifiesto que este atomismo alude más bien a lo que Russell solía también llamar "técnica filosofica". Esta "técnica filosófica" no debe confundirse con la "técnica lógica" de Peano, pues mientras que la última se aplica a los fundamentos de matemática, la primera se usa en los campos más tradicionales de la filosofía.

Sin embargo, en cierta forma ambas técnicas pertenecen al campo de la lógica aplicada, pero sus diferencias pueden resaltarse como las diferencias entre la lógica de Peano y la lógica de Russell. Como señala Elizabeth Ramsden, lo que Russell "entendía por 'técnica filosófica' fue, primero que nada, la clase de lógica matemática que había hecho en ese libro [***Principia Matehematica***]; y en segundo lugar, la aplicación de las técnicas desarrolladas ahí, a los problemas de la filosofía, la ciencia y el sentido común".[26] De modo que nuestra pregunta inicial sigue en pie: ¿A que alude Russell cuando habla de ese "atomismo lógico" primordial?

Un candidato probable es la doctrina sobre la lógica que aquí denominamos "absolutismo lógico". Sin embargo, aun y cuando el verbo "adoptar" sugiere que Russell tomó esa filosofía de alguien y no que se tratara de un producto de su propia invención, de todos modos, el nombre "atomismo lógico" parece apuntar directamente a su idea del análisis filosófico y no a cierta doctrina sobre la naturaleza de la lógica.

Además, como se desprende del tratamiento no deductivo de la lógica de Peano, es poco probable que Russell adoptara esa doctrina en su totalidad de una lógica así, aunque ciertamente, de Peano tomó la idea de entender la lógica como un lenguaje especial a la Leibniz, y a su vez, tratar los problemas de los fundamentos como problemas de *gramática*. Pero visto de otra manera, es también probable considerar el atomismo lógico como una forma de asumir la sugerencia de Frege en relación con la aplicación de la *conceptografía* a los problemas de la filosofía, como parece confirmarlo el prefacio a las conferencias sobre ***Nuestro Conocimiento del Mundo Exterior***.[27]

---

[26] Ramsden en Russell (1984), p. XVIII.
[27] "Las conferencias siguientes -escribía Russell- intentan exponer, con ejemplos, la naturaleza, capacidad y limitaciones del método lógico analítico en filosofía. Este método, *cuyo primer ejemplo completo se encuentra en los escritos de Frege*, se me impuso en forma gradual y

Pero por lo pronto, si bien es muy difícil saber a ciencia cierta a qué tipo de doctrina se refería Russell en su recuento antes citado, parece más probable que ese prístino atomismo tenga algo que ver con algunas de las ideas que el joven Russell había manejado en su trabajo de grado, y que después daría una forma más acabada en el ***Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría***, y en su investigación acerca de la filosofía de Leibniz.

IV Russell y la lógica de relaciones

Como muchos saben, el ***Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría*** (1897) es el primer libro en la vasta producción intelectual de Russell, y se inscribe entre las propuestas filosóficas que pretendían dar una explicación de las nuevas geometrías. Aunque a esta *ópera prima* a menudo se le ha tildado, no sin cierta razón, de una excesiva tendencia kantiana en sus concepciones, debe mencionarse que se trata también de una propuesta objetivista, en tanto que pretende rechazar los aspectos psicologistas de la doctrina kantiana de lo *a priori* en favor de sus propiedades puramente lógicas, de acuerdo, como ahí se dice, a los resultados de la "lógica moderna".

---

creciente, durante la actual investigación, como algo perfectamente preciso, capaz de sintetizarse en axiomas, y adecuado para proporcionar, en todas las ramas de la filosofía, todo el conocimiento científico y objetivo posible" [Russell (1914), prefacio; las cursivas son mías].

No obstante, debe tenerse de nuevo en cuenta que Russell, entiende aquí por "lógica moderna" la lógica dominante en el ambiente intelectual de Cambridge en esa época; esto es, la lógica de corte neo-hegeliano de Bradley y Bosanquet que nada tienen que ver con el tipo de lógica abstracta de Boole, Schröder y Whitehead, ni con los "lenguajes de formulas" leibnizianos de Frege y Peano.

En este sentido, la presencia de la lógica matemática como tal brilla aquí por su ausencia; aunque también debe reconocerse que la lógica filosófica de los idealistas de Cambridge no aparece exenta del criticismo russelliano. De cualquier forma, la propuesta no deja de enmarcarse dentro de los intentos de realizar una fundamentación lógica del conocimiento matemático, aun y cuando se trata de una fundamentación por medio de una lógica que nada tiene en común con la lógica matemática de Frege y Peano, ni, desde luego, con el tipo de fundamentación logicista que adoptaría después.

Con el paso del tiempo, esta primera obra perdería rápidamente por completo su valor filosófico, y no porque el criticismo de Poncairé haya puesto de manifiesto su fracaso en su pretensión de eliminar lo psicológico de lo lógico en la doctrina de lo *a priori*;[28] ni debido al cambio de lógica y la

[28] A diferencia de Couturat, quien había reseñado positivamente este primer libro, Poincaré (1899) había hecho un examen altamente crítico que llegaba a negar algunas de las tesis principales. Por ejemplo, rechazaba que los axiomas proyectivos ahí propuestos fuesen suficientes para construir la geometría proyectiva (§ 3), y que esta fuese *a priori*, en tanto condición necesaria de toda experiencia (§ 4, p. 255); además, se mofaba de la caracterización de la geometría como conjunto de relaciones porque no era claro el sentido de la palabra relación (*Le raisonnement peut paraitre spécieux au lecteur qui ne chercherait pas à pénétrer ce que signifie le mot*

adopción del logicismo que Russell hubo de experimentar en los años inmediatamente siguientes,[29] pues como él mismo reconoció, el espacio descrito en la teoría de la relatividad general refutaba una de las tesis principales de su libro, al representar precisamente el tipo de espacio geométrico que el joven Russell había declarado imposible![30]

Pero al margen del trasfondo kantiano y neo-hegeliano, y de las supuestas restricciones "lógicas" acerca del tipo de propiedades que deben de poseer las geometrías posibles, hay una idea en esta obra que bien puede considerarse como un elemento importante de ese hipotético "atomismo lógico" del que venimos hablando. Esta idea jugaría más tarde un papel importante dentro del proyecto logicista y se encuentra ligada aquí a la tesis principal que Russell retoma y desarrolla de Arthur Cayley y Felix Klein.

Sin embargo, para llegar a este punto, hemos de regresar al problema kantiano general del cual parte esta obra. Por supuesto, es claro que tal problemática pertenece al dominio de la epistemología o teoría del conocimiento, y que su

---

relation, § 8, 9, p. 263) y señalaba que algunos de sus argumentos se basan más en consideraciones psicológicas que lógicas. Por supuesto, para Poincaré la reseña de Couturat no pasaba de ser *un éloge peu banal*. De aquí en adelante, Poincaré sería el más acérrimo crítico del programa logicista [Cf. Couturat (1898); para la respuesta de Russell a ambas reseñas véase Russell (1898) y (1899); y sobre el papel de Poincaré como crítico del logicismo véase Goldfarb (1988) y el comentario de Detlesen (1992)].

29 Sin embargo, debe señalarse que en el logicismo temprano de los ***Principios de la matemática*** se conservan algunas de las ideas matemáticas que en buena medida motivaron sus ideas sobre el carácter fundamental de la geometría proyectiva (i.e., la deducción de las propiedades métricas a partir de la definicion de espacio proyectivo). Aunque aquí si se ofrece una definición puramente lógica de un espacio proyectivo. Cf. Russell (1903), XLVIII y XLIX, especialmente § 409-411 y § 413.

30 Russell (1959), p. 39 [39].

formulación ha de consistir en la estipulación de las condiciones de posibilidad de un conocimiento geométrico. Kant, desde luego, había partido de un cuestionamiento que presuponía el conocimiento de una y sólo una conceptualización del espacio.

Pero como es bien sabido, las investigaciones sobre la independencia del quinto postulado de Euclides (el axioma de las paralelas), dieron lugar a nuevas geometrías que, por principio de cuentas, borraban toda la caracterización kantiana sobre el conocimiento geométrico.[31] Además, para matemáticos como Riemann y Helmholtz la nueva diversidad de espacios geométricos exigía una explicación acerca del predominio de la geometría euclídea, y por supuesto, esa explicación no podía más que esconder una cuestión de carácter empírico. ¿Cómo sería entonces un planteamiento kantiano que toma en cuenta las nuevas teorías geométricas?

En la versión de Russell, este problema vendría dado en términos de un ajuste, como ya he mencionado, en la doctrina de lo *a priori* eliminando lo subjetivo,[32] y relacionando lo *a priori* con el elemento formal del conocimiento, y entendiendo

[31] Las posiciones en pugna antes de Kant eran, para decirlo con Leibniz, entre aquellos para quienes las únicas *vérités éternells* son las *vérités de raison* (idealistas), y para quienes las únicas verdades son las *vérités de fait* (empiristas). No esta por demás recordar que para algunos matemáticos constructivistas del siglo XIX, las nuevas geometrías no sólo refutaban la teoría kantiana del espacio, sino que además restituían la vieja noción de *vérités de raison*. Pero para Frege, como ya se ha mencionado, las nuevas geometrías sólo refrendaban el carácter *sintético a priori* de la geometría como un todo; véase más adelante nota 34.

[32] Russell da aquí por sentado la interpretación de Edmann, en cuanto a considerar los términos '*a priori*' y 'subjetivo' como intercambiables *salva veritate*.

por esto último, "los postulados que son completamente necesarios para que el conocimiento sea posible y, también, todo lo que puede deducirse de esos postulados". Pues en cuanto a lo sintético, este viene dado por el elemento material del conocimiento; esto es, "todo lo contingente o dependiente de la experiencia, todo lo que podría haber sido de otra manera, aunque sin hacer imposible el conocimiento".[33]

De esta manera, Russell puede llegar a una "confrontación lógica del *a priorismo*", en relación con los nuevos adelantos geométricos: "¿podrá ser imposible la experiencia cuando se desniega algún axioma o postulado? O en un sentido más estricto, tratando de aprioridad dentro de una ciencia determinada, ¿será imposible la experiencia como objetivo material de esa ciencia, prescindiendo de algún axioma o postulado?".[34]

Este es el problema filosófico que Russell presenta en el contexto de la tradición kantiana dentro del campo de la geometría. En palabras de Kilmister, "***Foundations of Geometry*** busca reparar el daño que hizo el descubrimiento de las geometrias no-euclideanas al punto de vista de Kant sobre la certeza de la geometría euclideana".[35]

Comentarios aparte, lo interesante de esta obra no es, a mi manera de ver, la pregunta misma, sino la propuesta constructiva que Russell asume para dar una respuesta a su problema. En el primer capítulo, Russell ofrece un breve

[33] Russell (1897), § 3.
[34] *Ibid.*, § 5.
[35] Kilmister (1992), p. 51.

balance histórico de los desarrollos en ese campo; ahí retoma de Felix Klein el nombre de "Metageometría" para referirse a las geometrías no-euclideanas, y sigue también la división en tres periodos que hace Klein en sus ***Lecciones sobre Geometría No-Euclideana*** (1871). Los periodos son, en orden relativamente cronológico; el sintético, el métrico y el proyectivo.

El período sintético se caracteriza principalmente por su origen, que como se ha mencionado, se encuentra ligado a las investigaciones sobre el postulado de las paralelas; y que da por sentado, en tanto que la negación del axioma da como resultado no una contradicción sino una geometría diferente, y por consiguiente, este resultado es considerado como una "prueba" de la independencia del mismo.[36] A este período pertenecen Gerolamo Saccheri (1667-1733),[37] Gauss (1777-1855),[38] y por supuesto, Lovachevsky y Bolyai.

---

[36] El hecho de negar el axioma de las paralelas y obtener no una contradicción sino un postulado que genera otro tipo de espacio, era interpretado como una evidencia definitiva de su naturaleza altamente abstracta y *a priori;* pero Frege, por ejemplo, pensaba que la ausencia de contradicción mostraba que las expresiones geométricas no eran en absoluto *a priori,* sino como había dicho Kant, sintéticos-*a priori;* pero por supuesto, el concepto fregeano de lo *a priori* difiere ampliamente del concepto de sus contemporáneos [véase capítulo 2, § III].

[37] Saccheri (junto con Legenfre) representa un caso curioso en esta historia dado que fue uno de los primeros en obtener resultados importantes *a partir* del intento de demostrar el postulado de las paralelas vía el método de reducción al absurdo. Asumiendo un punto de vista, que en sus líneas generales es el que más tarde tomaría Lovachevski, Saccheri logró demostrar muchos teoremas no-euclídeos, pero los encontró tan extraños y absurdos que dedicó más de la mitad de su libro ***Euclides ab omni naevo Vindicatus*** (Euclides exonerado de toda culpa) a demostrar que sus resultados eran contradictorios!

[38] A diferencia de Saccheri, Gauss era muy conciente del nuevo universo geométrico que estaba descubriendo; sin embargo, nunca intentó organizar sus resultados en un sistema deductivo completo debido, quizá, a su temor al ridículo y "al griterio de los Boecios", como declaró maliciosamente alguna vez en su correspondencia. En consecuencia este primer período pasó prácticamente al margen de las principales discusiones matemáticas.

El segundo período inicia con Riemann, quien a partir de Gauss y de Herbart, introduce el concepto de "multiplicidad" —por lo demás, fundamental para el sistema de álgebra Universal de Whitehead— y define la medida de la curvatura de una multiplicidad; medida que Russell consideraría equivocadamente como criterio de existencia, al tomar la conservación de una constante del grado de curvatura como propiedad de los espacios "posibles", con las consecuencias negativas ya mencionadas. A este período corresponden también la interpretación de la pangeometría de Lovachevsky realizada por Beltrami.

El tercer período, el proyectivo, se caracteriza por su rechazo a los métodos del período anterior, y en particular, en cuanto al uso de la noción de "cantidad espacial". El nuevo método se basa casi por completo en el trabajo de Cayley, quien según Russell, había realizado una "reducción" de las propiedades métricas a propiedades proyectivas, demostrando así, que la "geometría métrica es solo una rama de la proyectiva".[39] Felix Klein había generalizado el método de Cayley para cualquier espacio no-euclideo y había presentado un modelo proyectivo del sistema de Lovachevsky.

Sin embargo, es conveniente aclarar que Cayley expuso en un principio su método al margen de cualquier consideración sobre las geometrías no-euclídeas, y en consecuencia, los tres periodos no deben entenderse como un desarrollo lineal. Por otra parte, Russell pensaba que, a diferencia de los dos periodos anteriores, el período proyectivo no contaba con un

[39] Russell (1897), § 31. Véase también nota 45.

exponente filosófico y que su valor era básicamente matemático, ya que "el método es puramente simbólico y analítico y se le debe considerar sin trascendencia filosófica".[40] En este sentido, la *ópera prima* de Russell se inscribe también dentro de este período pero desde una perspectiva que intenta ofrecer una interpretación filosófica de ese nuevo formalismo matemático.

Es curioso que a pesar de que Russell se lamenta de la poca atención que los filósofos han prestado a la geometría proyectiva, en esta obra no se le dedica ningún momento a su desarrollo histórico, ni se explica, lo que parece más reprochable, su estatus matemático y filosófico dentro de la geometría euclídea antes de ser usada por Cayley y Klein.[41]

También curioso que una vez que se fue revelando la propiedad meramente cualitativa de la geometría proyectiva y se usaron sus conceptos para deducir sistemas métricos, la geometría proyectiva cumplía con el desiderata leibniziano que

---

[40] *Ibid.*, § 30. Esta objección tiene que ver directamente, entre otras cosas, con el uso de los números imaginarios y su correspondiente representación geométrica. Para Russell no puede hablarse propiamente de puntos imaginarios ya que el método algebraico sólo sirve como paso intermedio para derivar el espacio real: "Entre todos los usos de los imaginarios en Geometría los más fructíferos son aquellos que comienzan y terminan con cantidades reales y utilizan los imaginarios solamente como etapas intermedias, así que, en tales casos, tenemos una interpretación espacial real al principio y al final de nuestros razonamientos y en el cual solo la interpretación real es importante... Este es el caso de los imaginarios de Cayley, y su uso en geometría, aun siendo notables sus avances técnicos y rigurosos en su validez técnica, están desprovistos totalmente de contenido filosófico". *Ibid.*, § 43. Véase más adelante n. 42.

[41] El florecimiento de la geometría proyectiva había iniciado en Francia a principios del siglo XIX con Gaspard Monge y su escuela, y se le atribuía un fundamento sintético o inductivo, razón por la cual Cauchy rechazaba su aplicación a otras áreas de la matemática. Sobre este punto y sobre el papel que desempeñó la geometría proyectiva en la reforma educativa en Inglaterra a mediados del siglo XIX, véase Joan Richards (1986).

también se impondría en teoría de números y que Russell reclamaría más tarde como parte fundamental de la lógica y de su programa; esto es, "la primacía del concepto de orden sobre el concepto de medida".[42]

Para el joven Russell era bastante claro que el trabajo de Cayley y Kein había sugerido el carácter básico y lógicamente anterior de la geometría proyectiva. No obstante, como ya he mencionado, a su juicio el trabajo de Cayley debía entenderse más bien como un desarrollo simbólico desprovisto hasta cierto punto de contenido y pensaba que su propio objetivo era, en este sentido, hacer manifiesto su importancia filosófica estableciendo claramente, por un lado, su pureza analítica;[43] y por otro, la relación fundamental que guarda con el resto de los sistemas geométricos.

Además, su valor filosófico sería puesto de relieve una vez que la geometría proyectiva pudiera establecerse totalmente, sin recurrir a la suposición de propiedades métricas, pues pensaba que era precisamente en las propiedades métricas en donde difieren los diversos sistemas geométricos y a su manera de ver, los geómetras proyectivos no se habían librado totalmente de supuestos de este tipo. Logrado este objetivo, sería fácil observar que las propiedades proyectivas son comunes a todos los espacios, y entonces se podría confiar

[42] Cf. Russell (1901b)

[43] Como señala Joan Richards, el tratamiento de Russell de los puntos imaginarios muestra por un lado, que permanecía atado a la concepción conceptual de la geometría en tanto descripción de un espacio sustrato; y por otro, su fracaso en separar lo lógico de lo psicológico en el tratamiento axiomático formal de la geometría. *Art. cit.*, p. 324.

en "que los axiomas de la geometría proyectiva hayan de ser la más simple y completa expresión de los requisitos indispensables de cualquier razonamiento geométrico". En consecuencia, "la geometría proyectiva, en tanto que trata solamente de propiedades comunes a todos los espacios -decía Russell-, se encontraría, si no me equivoco, que es completamente *a priori* y que no toma nada de la experiencia y que como la aritmética, su materia es creación del intelecto puro".[44]

En cierta forma, esto último era en el fondo una extensión "proyectiva", por decirlo de algún modo, del método que Riemann había empleado antes en su caracterización del espacio como multiplicidades (métricas); es decir, Riemann había tratado de establecer y delimitar cuáles principios relativos a una multiplicidad dada debían considerarse como hipótesis y que tipo de expresiones o principios eran comunes a cualquier multiplicidad, y por consiguiente, podían ser considerados como principios necesarios.

Por lo pronto con esto es suficiente para nuestros propósitos de establecer la continuidad de la idea russelliana que hemos estado persiguiendo. Al respecto debemos llamar primero la atención sobre el hecho de que aquí se habla de una "reducción" de propiedades geométricas, y que la geometría proyectiva, en su calidad de sistema meramente cualitativo, se considera como la geometría más básica y fundamental.[45]

---

[44] Russell *op. cit.*, § 102 y 105.

[45] No está de más recordar que Cayley había cerrado sus célebres "A Sixth Memoir on Quantics", afirmado que "la geometría métrica es... una parte de

Dicho en términos kantianos, la geometría proyectiva se presenta como la condición necesaria para la posibilidad de cualquier sistema geométrico. A primera vista, ambos aspectos mantiene una similitud sospechosa con las premisas del proyecto logicista: la postulación de un sistema (geometría proyectiva *versus* lógica) como teoría básica a partir de la cual es posible derivar los conceptos de la matemática (geometría).

Es evidente que ambos conceptos, "derivar" y "reducir", remiten, en sentido estricto, a procesos lógicos en dirección opuesta, pero también es cierto que a menudo, tanto Frege como Russell, hablaron ya de una "reducción de los conceptos matemáticos a conceptos lógicos", como de una "derivación" de la aritmética a partir de la lógica. En consecuencia, en este contexto deben entenderse con términos intercambiables.

De hecho, si recordamos, el criterio de analisidad de Frege es un criterio reduccionista; de modo que ambos conceptos deben tomarse como complementarios dentro del programa. Sin embargo, cabe notar que desde nuestro punto de vista, el trabajo de Cayley y Klein tiene más que ver con una "interpretación" proyectiva de las geometrías no-euclideas, que con una estricta "reducción" de las propiedades métricas a proyectivas. Y en este sentido, el reproche de Russell a Cayley, en cuanto que en este punto se trata sólo de un mero desarrollo técnico sin valor filosófico, tiene como explicación la diferencia mencionada, como parece confirmarlo el mismo

---

la geometría proyectiva, y [que] la geometría proyectiva es toda la geometría" [citado por Joan Richards (1988), p. 72].

Russell cuando afirma que "la reducción de propiedades métricas a proyectivas es sólo aparente, aunque la independencia de estas últimas frente a la geometría métrica es totalmente real".[46]

Pero una vez que la similitud es aquí engañosa en cuanto a la "reducción", sólo queda examinar el sentido en que la geometría proyectiva se presenta como teoría fundamental. En primer lugar, es claro que esa presunción recae en la idea, o mejor dicho, en el ideal que Russell se ha formado de la geometría proyectiva.

Su concepción, no siempre explícita del todo, se manifiesta en el modo como se ha de proceder en su construcción, que como ya se ha mencionado, ha de realizarse, por un lado, sin suponer en ningún momento nociones métricas, y por otro, limitándose a definir sus conceptos, y presentar sus axiomas en términos de relaciones puras. Pues al considerar a la geometría proyectiva como un "complejo de relaciones", Russell creía poder garantizar así su estatus *a priori*.[47]

No obstante, debe mencionarse que aquí no se presentan los axiomas proyectivos en símbolos de una lógica de relaciones (a la manera de Peano), ni mucho menos como "derivaciones" de una

---

[46] Russell *op. cit*, § 34. Un poco más atrás, explica otra razón de por qué el método de Cayley y Klein es filosóficamente insatisfactorio: "puesto que todos estos sistemas [en este caso, el hiperbólico, el elíptico y el parabólico] se obtienen a partir del plano euclídeo sin más que alterar la definición de distancia, Cayley y Klein tienden a considerar la cuestión en su conjunto no con respecto a la naturaleza del espacio, sino como una cuestión de definición de la distancia. Puesto que según su punto de vista la cuestión es totalmente arbitraria, el problema filosófico se desvanece, -el problema del espacio euclídeo queda sin contestar y el único problema restante es uno convencional y de conveniencia matemática" [*ibid.*, § 33].

[47] Russell *ibid.*, § 208 y 209.

lógica de este tipo (a la manera de Frege); pues a pesar de que Russell insistía en resaltar que expresar los axiomas proyectivos como relaciones fundamentales, era una cuestión lógica, no contaba aún con un verdadero sistema que pudiera ser de alguna ayuda.

Pero tampoco parece probable que esas pudieran haber sido sus intenciones en ese entonces, si recordamos la idea que tenía de la lógica bajo la influencia de los sistemas de Bradley y Bosanquet, quienes negaban el valor de un simbolismo lógico.[48] De cualquier forma, es interesante observar como esta concepción sobre las relaciones, que más tarde habría de generalizar a toda la matemática, puede encajar muy bien entre los elementos de ese hipotético atomismo lógico del que ya hemos hablado, especialmente si se consideran las relaciones lógicas como los átomos del conocimiento geométrico.

Más tarde, Russell llegaría a elaborar una doctrina metafísica de las relaciones como respuesta y ajuste de cuentas con las doctrinas neo-hegelianas hacia las cuales se vio cada vez más atraído tan pronto como termino con esta primera obra. De hecho, en este libro la doctrina de las relaciones no parece depender de las concepciones de Bradley y Bosanquet, o bien Russell no era tan consiente como lo sería más tarde, de que la

[48] Como ya he mencionado en relación con Whitehead, para Bradley como para Bosanquet el objeto de la lógica es dar cuenta de los modos de razonamiento en general, para lo cual, la lógica simbólica, a la manera de Boole o Jevons (sus únicas referencias), es insuficiente ya que consideran que, por su propia naturaleza, sólo es válida ¡dentro del razonamiento numérico!

doctrina de las relaciones internas de Bradley, volvía imposible las matemáticas.[49]

Como el posterior desvarío hegeliano sobre una dialéctica de la física y una "lógica" de las ciencias no tiene ningún interés para nosotros y además ha sido descrito de manera crítica y con el humor característico del propio Russell,[50] no nos ocuparemos en comentario alguno y pasaremos directamente a la "liberación pluralista" que antecede a su encuentro con Peano.

En primer lugar, debe decirse que hasta cierto punto, Russell fue más o menos proclive a dejarse influenciar por aquellas personas inteligentes hacia las cuales sentía respeto o admiración; y esa actitud, aunada a su condición de filósofo en ciernes, explica de alguna forma los cambios drásticos ocurridos en su época temprana.

Por ejemplo, su primer libro era el resultado natural de un adoctrinamiento kantiano (debido probablemente a James Ward), pero se había centrado en la geometría proyectiva por consejo de Whitehead, quien lo había persuadido de su importancia para el tema; pero por aquel tiempo, Whitehead era más bien un matemático y difícilmente podía satisfacer las inquietudes filosóficas de su antiguo alumno. Su adopción de la filosofía hegeliana es por otro lado, bastante explicable si se recuerda que el mismo Whitehead se encontraba bajo su influencia y que tanto J. F. Stout (por ese entonces editor de

---

[49] Russell (1959), p. 54 [55-6].
[50] *Ibid.*, IV.

Mind), Bradley, Bosanquet y McTaggar formaban la respetable versión inglesa del neo-hegelianismo, que además, no contaban con ningún rival filosófico significativo.

Es por esta razón por la cual Russell, junto con G. E. Moore (1873-1958), se vio obligado a elaborar una nueva filosofía que pudiera hacer frente a esas versiones del neo-hegelianismo de Cambridge. Pero también, en la confección de la nueva filosofía Moore llevaba la delantera, pues como dijo en alguna ocasión, "la primera exposición que se publicó de la nueva filosofía fue el ensayo de Moore en *Mind* sobre *La Naturaleza del Juicio*".[51]

Aunque la influencia es este ensayo fue considerable durante un par de años, los intereses particulares de Russell lo llevarían a elaborar sus propias ideas, pues en ese momento, el interés principal de Moore era refutar el idealismo en su totalidad,[52] mientras que Russell se interesaba en particular en combatir la doctrina de "las relaciones internas" y la teoría monista de la verdad, que Bradley había defendido en su libro ***Apariencia y Realidad*** (1893).

De hecho, ambas doctrinas eran solo consecuencias de una misma doctrina general, que por sus características, pertenece a aquellas concepciones metafísicas que tienen como base una lógica de sujeto y predicado. Como ya se mencionó, Russell encontró una lógica similar en el fundamento de la metafísica de Leibniz, y más tarde, vería las diferencias de su filosofía

---

[51] *Ibid.*, p. 54 [55]; cf. Moore (1899).
[52] Cf. Moore (1901).

con respecto a sus rivales como la oposición entre aquellas que se valen de una lógica de relaciones y las que se fundan en una lógica de sujeto-predicado.

En el caso concreto de la doctrina de Bradley de las relaciones internas, la cuestión residía en que en ella se consideraba que toda relación expresa, primariamente, las propiedades inherentes a los términos relacionados, o bien en última instancia, una propiedad del conjunto de ambos términos. Dicho de otra manera, toda relación esconde o encierra la existencia de una o más propiedades, siendo entonces las relaciones sólo una *façon de parler*.

Russell comprendía que una doctrina semejante entraba en conflicto con la idea que se había formado de la geometría proyectiva como un complejo de relaciones y, en particular, con el supuesto no explícito aun el ***Ensayo sobre los Fundamentos de la Geomtería***, de que las relaciones diferían ontológicamente de las propiedades. En otras palabras, para Russell las relaciones son tan reales como las propiedades, de modo que la teoría de Bradley no puede dar cuenta cabal de la geometría, pues el enunciado "el punto A es paralelo al punto D" por ejemplo, obviamente implica una relación externa entre dos términos y no una propiedad de la suma de ambos. En el proceso de desintoxicación hegeliana, Russell generalizó su concepción de la geometría proyectiva a toda la matemática, de modo que bajo el nuevo enfoque la doctrina de las relaciones internas no sólo volvía inexplicable la geometría, sin toda la matemática.[53]

Como dato histórico no está por demás mencionar que de acuerdo a su propio testimonio, Russell se percató de la importancia de las relaciones mientras se encontraba estudiando la filosofía de Leibniz. Es probable que tal importancia se pusiera de manifiesto al momento de examinar los esfuerzos infructuosos de Leibniz por asimilar los casos de Junge dentro de su proyectada nueva teoría del silogismo (*i.e.*, "César es mayor que Claudio" y "Claudio es menor que César"), y en general, a su tendencia a subordinar las relaciones a la forma sujeto-predicado.

V Russell, Leibniz y la *característica universal*

Como hemos comentado en el primer capítulo, Russell distinguía dos tipos de filosofías en el pensamiento de Leibniz. La primera de ellas, y que puede ser considerada como su filosofía oficial debido a que fue la única publicada durante su vida,[54] era aquella que había elaborado

[53] Según Kilmister, "el argumento de Russell sobre la geometría descansa en su compromiso ontológico de que las relaciones son reales; los puntos pueden adquirir estatus real como términos de las relaciones" [Kilmister *op. cit.*, p. 51]. No obstante, tal aserto supone una subordinación del problema espistémico al plano ontológico, lo cual, desde mi punto de vista, no tiene apoyo en la obra sobre los fundamentos de la geometría ya que ahí solo se da por sentado la realidad de las relaciones.

[54] Russell (1900), § 1. Russell estableció esta distinción por primera vez en Russell (1903), y sólo después en el prólogo a la segunda edición (1937) de su estudio sobre Leibniz.

desarrollando sus tesis lógicas a un nivel metafísico, pero que a juicio de Russell, estaba destinada más a agradar y "persuadir a sus lectores que a desarrollar los argumentos más válidos".

La otra filosofía, más sólida y atractiva, y que había quedado en la condición de un mero augurio, permanecía casi en su totalidad en manos de los azarosos vaivenes del tiempo, dispersa entre una gran cantidad de escritos inéditos. En su ***Exposición Crítica de la Filosofía de Leibniz*** Russell no sabía mucho aún de esa filosofía oculta, y por consiguiente, su objetivo se centraba en elaborar una exposición crítica de la filosofía "oficial" que pudiera serle útil al no especialista en filosofía.

Lo anterior puede parecer un gesto de falsa modestia, sobre todo si se reconoce que el libro fue hasta cierto punto el fruto de sus cátedras sobre el tema, pero en realidad no pretendía competir con los eruditos ya que su motivación consistía en que a pesar de considerar esta cara de su filosofía como el producto de una actividad intelectual un tanto deshonesta, no dejaba de admirar que también en ella se manifestaba la gran capacidad y genio lógico de su autor.

Desde una perspectiva general sobre el desarrollo de su pensamiento, es claro que su libro sobre Leibniz le brindaría las condiciones óptimas para tomar conciencia de la necesidad de una teoría de las relaciones que fuera independiente de una lógica de corte tradicional, y de lo perjudicial que había resultado esta última en el campo de la filosofía.

Pero por otra parte, sería demasiado simplista tomar el estudio sobre Leibniz únicamente como el análisis de sus ideas metafísicas, pues en él también se da lugar a la exposición de algunas ideas que, por su propia naturaleza, pueden considerarse como elementos de su otra filosofía. Por ejemplo, se detallan las inconsistencias que afloran al momento de confrontar algunas de sus tesis metafísicas con sus ideas de los ***Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano***; pero también se menciona, aunque de manera breve, sus esperanzas en la creación de una *característica universal*; proyecto que por cierto, Russell juzgó de manera negativa en esa ocasión:

> Lo que Leibniz pretendía era evidentemente algo muy afín a la moderna ciencia de la lógica simbólica, rama especializada de las matemáticas, y que ha sido desarrollada por Boole con la convicción de que estaba tratando de las "leyes del pensamiento". Como idea matemática -como un álgebra universal, que abarca la lógica formal, la geometría y el álgebra ordinaria, como casos especiales-, la concepción de Leibniz se ha manifestado como rentable en el más alto grado. Pero como método de investigación filosófica padecía del defecto formal que precede de la creencia en las proposiciones analíticas...Porque el asunto que la filosofía trae entre manos es precisamente el descubrimiento de estas nociones y de estos axiomas primitivos sobre los que debe basarse todo cálculo o ciencia. La creencia en que los axiomas primitivos son idénticos lleva a cargar el acento sobre los resultados, más bien que sobre las premisas, lo que es radicalmente opuesto al verdadero método filosófico... Leibniz supuso que el requisito más importante era un método conveniente de deducción ... la Característica Universal, por tanto, aunque contribuyó una idea de la más grande importancia en el aspecto matemático, se mostró en el aspecto filosófico como algo radicalmente mal concebido; a ello contribuyó el silogismo, y la creencia básica en la naturaleza analítica de las verdades necesarias.[55]

[55] Russell *ibid.*, § 105.

He citado *in extenso* el comentario de Russell al respecto, porque, como se podrá ver, muestra muy bien el estado de su nueva filosofía inmediatamente antes de su encuentro con Peano, quien no sólo lo llevaría a considerar opiniones más favorables sobre la importancia filosófica de un proyecto como el de la *característica universal*, sino que incluso, lo motivaron para formar parte activa y llevar a cabo una contribución destacada dentro del programa.

Es conveniente también resaltar que las ideas que aquí critica, serían más tarde parte integral de su pensamiento posterior. En concreto, este sería el caso en cuanto a la naturaleza analítica de las verdades necesarias, idea que Russell aceptaría sólo bajo la influencia de Wittgenstein. Pero además, "el cargar el acento sobre los resultados, más bien que sobre las premisas", tendrá más tarde su correlato en lo que Russell llamó "la justificación inductiva" de los axiomas lógicos de ***Principia Mathematica***.[56]

[56] Por ejemplo, en Russell (1924) se afirma: "Cuando se organiza la matemática pura como un sistema deductivo... resulta obvio que, si hemos de creer en la veracidad de la matemática pura, no podemos apoyarnos únicamente en que creemos en la verdad del conjunto de las premisas. Algunas premisas son mucho menos obvias que algunas de sus consecuencias, y se cree en ellas principalmente a causa de sus consecuencias... Las proposiciones lógicamente más simples del sistema no son las más evidentes ni las que proporcionan la parte principal de nuestras razones para creer en el sistema... Algunas de nuestras razones para creer en la lógica y en la matemática pura sólo son inductivas y probables, a pesar del hecho de que, en su orden lógico, las proposiciones de la lógica y de la matemática se siguen de las premisas de la lógica por mera deducción". En 1911 Russell tenía una opinión más enredada del asunto ya que afirmaba, por un lado, que "en lógica matemática son las conclusiones las que tienen mayor grado de certeza, mientras más nos acercamos a las premisas últimas encontramos mayor incertidumbre y dificultad"; y por otro, afirmaba que "en la matemática pura uno se encuentra sólo con verdades lógicas. Para que tal conocimiento sea posible, es necesario que haya verdades lógicas evidentes por sí mismas, es decir, verdades que se conozcan sin demostración". Aunque ciertamente, también reconocía que la evidencia es una propiedad psicológica [Russell (1911)].

Por otra parte, los comentarios de Russell revelan además un desconocimiento de los numerosos sistemas propuestos como posibles modelos de ese lenguaje Universal; pero lo más sorprendente, como ha indicado Kilmister, es que "lo más decepcionante de la evaluación que hace Russell de Leibniz, con todo, es la falta de importancia que le atribuye al uso de la lógica en tanto *characteristica universalis*, aun y cuando algo muy parecido a ésta posición sería la suya propia 10 años más tarde en ***Principia Mathematica***".[57]

Puede agregarse que la evaluación negativa de Russell sorprende más si se toma en cuenta el entusiasmo con que recibió el ***Tratado de Álgebra Universal*** de Whitehead; pues es obvio que Russell entiende aquí *característica universal* como un sistema similar al de Whitehead ("como un álgebra universal, que abarca la lógica formal, la geometría y el álgebra ordinaria"). Sin embargo, recordemos que Russell admiraba el trabajo matemático de Whitehead pero tampoco le otorgaba importancia filosófica. En cuanto a su referencia a Boole, es claro que se debe sólo a que por ese entonces el trabajo de Boole era el único que se acercaba a la idea que Russell tenía de la *lingua characteristica*, quizá motivado en parte por las aparentes similitudes entre la idea de un "alfabeto de los pensamientos" y las "leyes del pensamiento" de Boole. Pero también, como se dijo en el capítulo anterior, por hecho de que el mismo Boole tenía en mente la idea de un *calculus ratiocinator* leibniziano como modelo de su propio cálculo.

[57] Kilmister *op. cit.*, p. 51.

Sin embargo, no serían solo sus opiniones sobre el proyecto leibniziano lo que Russell habría de cambiar en el transcurso de los meses posteriores, también reconsideraría sus opiniones sobre la teoría cantoriana de los números transfinitos, y desde luego, sus dudas (leibnizianas?) a admitir el infinito actual. Así mismo debe resaltarse la falta de un pronunciamiento (a favor o en contra) sobre el papel fundamental de la teoría de conjuntos que su autor reclamaba dentro de la matemática.

Todo lo anterior debe ser tomado en cuenta al momento de formarse una idea del impacto que supuso para Russell entrar en contacto con Peano y su escuela, y sobre el porqué, ese encuentro lo condujo a una revolución filosófica sin precedentes.

VI **El contacto con Peano**

Como es bien sabido, Russell conoció personalmente a Peano durante el primer congreso internacional de filosofía, celebrado en París en agosto de 1900. A este asistieron además, entre los colaboradores de Peano, Cesare Burali-Forti (1861-1931), Alessandro Padoa (1868-1937), Mario Pieri (1860-1913), Giovani Vailati (1863-1909) y Giovani Vacca (1872-1953).

En su participación, Peano leyó un breve ensayo de 10 páginas sobre "las definiciones en la Matemática", que en cierta manera puede entenderse como una secuela de la discusión con Frege comentada al final del capítulo anterior. Según Kennedy se trata también de su primer tratamiento sistemático de la materia y de "una cuestión *filosófica* que continuaría interesándole hasta el final de su vida".[58]

El ensayo enfatiza el carácter lógico de las definiciones, en cuanto que estas pueden reducirse a igualdades, pero también comparte el mismo sentimiento de Frege hacia las mismas al señalar que si bien sólo "expresan una abreviación, la cual es teóricamente innecesaria, en la práctica, pueden ser convenientes, e incluso indispensables para el progreso de la ciencia".[59] Pero lo interesante de este documento es la posibilidad de haber aceptado de manera implícita la crítica de Frege en relación con las definiciones condicionales pues como aquí se señala "una proposición que no es una igualdad no podrá ser una definición".[60] Pero desde luego, tampoco podemos decir que toda igualdad es una definición. ¿Entonces qué es lo que debe entenderse como una definición?

Para Peano, si bien puede decirse qué expresiones no pueden ser consideradas como definiciones, pensaba (como Frege en relación con los conceptos lógicamente más simples) que no era posible ofrecer una definición de lo que son las definiciones, sino tan sólo una explicación de las mismas y una

[58] Kennedy (1980), p. 93.
[59] Peano (1900), p. 288. Debe tomarse en cuenta que no es del todo claro si éste fue siempre el punto de vista de Frege. Por ejemplo, en la ***Conceptografía***, habla de definiciones que "sólo tienen el propósito de producir una simplificación extrínseca por medio del establecimiento de una abreviación", pues "nada se sigue de ella que no se pudiera inferir sin ella" [Frege (1879), § 24]; pero no se dice si todas las definiciones tienen este propósito.
[60] *Ibid.*, p. 279.

enumeración de las condiciones que han de satisfacer para poder ser tomadas en cuenta como definiciones completas.[61]

Un comentario particularmente interesante en este sentido es la observación de que no es suficiente dar por supuesto el conocimiento del lenguaje ordinario. Además, "no es posible juzgar el valor de una definición aislada",[62] sino en relación con la construcción de un sistema deductivo determinado. En todo sistema -afirmaba-, contamos con dos tipos diferentes de símbolos: aquellos que consideramos como símbolos "primitivos" o no definidos, y aquellos que se definen en función de los símbolos ya establecidos. De modo que las definiciones son indispensables en la construcción de todo sistema matemático. En este punto, Peano añade también que un símbolo es primitivo solo de manera relativa, es decir, sólo en relación con un sistema deductivo particular. Pero además, "es conveniente dar a las ideas de una ciencia un orden tal que el número de ideas primitivas relativas a ese orden sea lo más pequeño posible".[63]

Por otra parte, una definición ha de satisfacer lo que Peano llama *ley de homogeneidad;* es decir, además de cumplir el requisito de que la definición bajo consideración sea una proposición completa e inteligible por si misma, los dos

[61] *Ibid.*, p. 283: "Una definición considerada en sí misma, independientemente de las ideas que se suponen conocidas, es una igualdad en donde el primer miembro es una palabra, o signo, que no aparece en el segundo miembro. Llamamos "definiciones posibles" a las igualdades que tienen esta forma".

[62] *Ibid.*, p. 280.
[63] *Ibid.*, p. 284.

miembros de la igualdad deben contar con el mismo tipo de signos (o *letras variables reales*, como las llama Peano).[64]

Peano señala además que si bien las definiciones no homogéneas no son nada raro en los tratados, la precisión intrínseca de las matemáticas corrige este tipo de imprecisiones. Pero también añade que si bien en los buenos matemáticos (como Euler) esas inexactitudes no llevan a consecuencias falsas, esto no quiere decir que estas últimas no esten siempre a la vista. Por último, aconseja como ejercicio útil eliminar o suprimir dentro de una teoría un signo definido a fin de poder reconocer la exactitud de la definición.

Por otra parte, no es sorprendente que este breve ensayo le haya sugerido a Russell cómo tratar con la *gramática* de las matemáticas, ya que para Peano las diferentes opiniones sobre la teoría de la definición descansa en mayor medida en la importancia que se le dé a las formas gramaticales.

El trabajo de Peano fue en buena medida una introducción general a los tópicos que sus colaboradores trataron con detalle. Por ejemplo, Burali-Forti se ocupa de discutir dentro de un sistema concreto el papel que juega la teoría de la definición. Aquí, "los diferentes métodos lógicos" del título ("Sur les différentes methodes logiques pour la définition du

[64] *Loc. cit.* Por ejemplo, la fórmula: 0 = a — a no puede ser una definición dado que no especifica qué valor debe atribuirse a la letra a, y por lo tanto, no es una proposición completa; pero si se establece la proposición "Sea a un número en donde a: 0 = a — a" se cumple ese criterio pero no la ley de homogeneidad dado que el primer miembro es una constante y el segundo una función de a. Por consiguiente, la proposición debe formularse así: 0 = (el valor constante de la expresión a — a, en donde algo sea el número a). *Ibid.*, p. 185.

nombre réel"), aluden a los tipos de definiciones *nominale, par postulats, et par abstraction*. Y pretende deducir de su comparación la importancia científica y didáctica de la definición nominal.[65]

Estos tipos de definiciones, según Bural-Forti, pueden dar el significado exacto de las palabras *intuición* y *concepto;* es decir, un *concepto* es, bajo este sentido, cualquier cosa *x* de la que podamos dar una definición nominal mientras que una *intuición* es todo aquello del cual sólo podemos dar una definición por abstracción o por postulados.[66] Desde este punto de vista, las definiciones de número entero dadas por Dedekind, Peano y Cantor consideran el número como una *intuición* ya que la forma de sus definiciones es por postulado o por abstracción.

Ahora bien, definir un objeto *x* desde el punto de vista lógico significa "ofrecer una o más relaciones lógicas contenidas en *x*, tal que para un elemento dado *y* sea posible afirmar o negar la relación $x = y$".[67]

Las definiciones *nominales*, son aquellas definiciones en las cuales se da el significado de un objeto por medio de una expresión formada por los símbolos previamente admitidos. Las definiciones por postulación, son aquellas en las cuales se establece la especificación de las relaciones lógicas que mantiene un determinado grupo o conjunto de objetos por medio

---

[65] Burali-Forti (1900), p. 289.
[66] *Ibid.*, 290 y 296.
[67] *Ibid.*, p. 294. "En otros términos -continúa-, *x* se encuentra definido cuando se puede *deducir* todas las propiedades de *x* de las relaciones lógicas en cuestión".

de una serie de postulados que los objetos deben satisfacer. Desde luego, este tipo de definiciones corresponde al tipo de definiciones condicionales o hipotéticas en la que se había detenido la discusión entre Peano y Frege (El postulado Dedekind-Peano: si x+ = y+ para x e y, entonces x = y, en donde x+, es el sucesor único de x, es un ejemplo). El último tipo de definición, la definición por abstracción, de acuerdo con Burali-Forti, es también muy importante porque son las que establecen el sentido en que se debe usar un operador cualquiera. Por consiguiente, las definiciones por abstracción definen propiedades o relaciones lógicas tales como *la dirección de, la masa de, la temperatura de, el largo de*, etc., con las cuales se define un objeto x.

Por último, es deseable contar siempre con definiciones nominales ya que son ellas las que ofrecen los conceptos lógicos fundamentales de una ciencia. Además, las definiciones por abstracción y por postulados son de carácter provisional ya que solo expresan nuestra incapacidad para formular definiciones nominales. "En consecuencia, la palabra *concepto* viene a adquirir un sentido *absoluto*, mientras que la palabra *intuición* tendrá un sentido relativo al estado de la ciencia".[68]

Desde luego, este trabajo de Burali-Forti encajaba muy bien con la actitud ahora más cauta de Peano hacia las formas empleadas para definir los símbolos, ya que dentro de este nuevo punto de vista las definiciones por postulados o por abstracción no pasaban de ser una incomodidad pasajera.

[68] *Ibid.*, p. 296.

Por su parte, el trabajo de Alejandro Padoa también tenía que ver directamente con las preocupaciones de Peano y en particular con su sugerencia de que hay que presentar "las ideas de una ciencia en un orden tal que el número de ideas primitivas relativas a ese orden sea lo más pequeño posible". De hecho, la propuesta para lograr este objetivo fue todo un éxito ya que Padoa presentó una versión del método (que ahora lleva su nombre) para establecer la irreductibilidad de un grupo de términos primitivos en relación con un conjunto de axiomas. Este método es en cierta forma, el complemento del método de Peano para probar la independencia de un conjunto de axiomas, dado que el método de Padoa establece que un grupo de términos primitivos es irreductible dentro de un grupo de axiomas, si es imposible ofrecer una definición de cualquiera de los símbolos indefinidos.

Esto puede parecer a primera vista algo muy trivial en tanto que es evidente que un símbolo primitivo susceptible de definición, no puede ser en realidad un símbolo primitivo. Pero el problema es saber si efectivamente los términos primitivos son indefinibles entre sí. Dicho de manera breve, el método de Padoa consiste en presentar una interpretación del grupo de los símbolos indefinidos que continúe satisfaciendo al conjunto de los axiomas del sistema, cambiando el significado, uno por uno y por separado, de cada símbolo primitivo. La prueba de la validez del método de Padoa, la daría Tarski en 1926.

Es claro que este método de Padoa, igual que el de Peano para establecer la independencia de un grupo de axiomas, representa la realización efectiva del programa de la Escuela de Peano, en cuanto que el objetivo de la lógica es entendido como una ciencia "Metamatemática". En palabras de Padoa: "lo que es necesario en el desarrollo lógico de una teoría deductiva no es *el conocimiento empírico de las propiedades de las cosas*, sino *el conocimiento formal de las relaciones entre los signos*".[69]

En el mismo tono, encontramos la misma concepción en el ensayo de Pieri, "La Geometría como Sistema Puramente Lógico". El argumento central consistía en sugerir cómo las relaciones geométricas podían ser tratadas como relaciones lógicas abstractas sin referencia alguna a cualquier tipo de percepción visual del espacio. Es decir, las relaciones lógicas aparecen como una descripción de las relaciones geométricas de tal forma que el uso de figuras se vuelve superfluo.

Pieri no dejaba de señalar las virtudes del nuevo método y entre ellas, decía que el nuevo método permitía dejar claro y fuera de toda duda razonable, el estatus *a priori* de la Geometría, pues al hacer uso de las relaciones lógicas para expresar relaciones geométricas, la geometría podía librarse por completo, como la aritmética, de apelar a la "razón intuitiva", o a la "evidencia".[70] Pero También, como Dedekind, Pieri entendía los objetos geométricos "como creaciones puras

[69] Padoa (1900), p. 319 [121]; las cursivas son del autor.
[70] Pieri (1900), p. 368.

de la mente, y sus postulados, como simples actos de nuestra voluntad".[71]

Es muy difícil saber hasta qué punto Russell asimiló en ese momento las contribuciones de cada uno de los miembros del grupo italiano. El trabajo de Pieri, a quien al parecer era el único que Russell había leído antes, debió de haberle provocado un cierto sentimiento de *Déja Vu*, en cuanto a la importancia de las relaciones en la geometría, pero también debió de parecerle repugnantes y burdas a su nuevo sentido platónico, las disgresiones idealistas de Pieri sobre la geometría como producto humano.

Es indudable, por otra parte, la influencia duradera de Peano en el sistema lógico russelliano, y en menor medida, en su "técnica lógica" para el análisis de los fundamentos de las matemáticas; pero debe mencionarse, que si bien la lógica de Russell debe mucho a la lógica de Peano, esta deuda se centra más en la notación, pues Russell amplió el sistema de Peano a la teoría de las relaciones en una dirección muy similar a la de Frege y en esa misma dirección, también modificaría su manera de aplicar la lógica en el campo de los fundamentos de la matemática.

[71] *Ibid.*, p. 374; el párrafo completo dice así: "Mais, si je ne me trompe, une fois arrivés à cette hauteur de représentation idéale, rien ne nous empêche de concevoir la Géométrie tout entiére comme un *système purement spéculatif et abstrait*, dont les objets sont de pures créations de notre espirit et les postulats de simples actes de notre volonté (choix de l'esprit, vérités subjectives *a priori*, vérités de définition), sans méconnaître qu'ils ont souvent leur premère racine dans quelque fait extérieur; par suite, les uns et les autres seront *arbitraires*, du moins en tant que nous ne les ordonnons pas en vue d'une fin préétablie qui doive guider la pensée". Las cursivas son del autor.

Estos cambios son históricamente relevantes no solo porque revelan la independencia de los resultados russellianos en relación con los de Frege, sino también porque demuestran que a pesar del enorme impacto que supuso su conocimiento de la obra de Peano y su escuela, Russell no dejo de mantener una actitud crítica hacia las nuevas ideas.

Kennedy ha llamado ya la atención sobre el rechazo a las definiciones por abstracción y postulación que habían admitido Peano y su Escuela antes del citado congreso.[72] No obstante, esto resulta *prima faquie* extraño dado que, como se mencionó antes, para principios de siglo, tanto Peano como Burali-Forti consideran que estos dos tipos de definiciones tienen solo un carácter provisional. Sin embargo, para complementar este dato con nuestra exposición es conveniente anotar que ese rechazo es una consecuencia de la nueva versión russelliana del programa absolutista, y que suele conocerse como "logicismo".

Esto puede verse claramente siguiendo la argumentación que Russell presenta para desechar ambos tipos de definiciones. De hecho, el argumento en sí parte de una premisa logicista acerca de los indefinibles de la matemática. Si recordamos, para Peano y Padoa un símbolo es únicamente primitivo o indefinible en relación con un grupo de axiomas dentro de un sistema particular, y por lo tanto, cada teoría matemática ha de poseer su propio conjunto de símbolos primitivos.

Ahora bien, como Russell ha adoptado ya, en ***Los Principios de la Matemática*** la tesis leibniziana sobre la reducción de la

[72] Cf. Kennedy (1973), p. 369.

matemática a la lógica, es obvio que para que tal tesis sea factible, es necesario que todos los indefinibles de las teorías matemáticas puedan ser reducidos a los indefinibles de la lógica absolutista russelliana. Entonces, de aquí se sigue que Russell no pueda aceptar, como Peano y Padoa, diversos indefinibles de acuerdo a diferentes teorías matemáticas.

Pero también de aquí se sigue que las definiciones por postulación y por abstracción resultan superfluas, pues sólo son necesarias cuando se consideran grupos diversos de indefinibles, pero también -afirma Russell, "por la negativa de Peano a considerar las relaciones como parte del aparato fundamental de la lógica, y por su erróneo apresuramiento a considerar como individuo lo que realmente es una clase".[73]

Desde una perspectiva más general, debe de quedar claro que las razones por las cuales Peano admite tres tipos de definiciones, se debe en el fondo, a que él no admite la versión logicista del programa leibniziano; por lo demás, cabe mencionar que la convicción de Russell en poder llevar a buen término la realización del proyecto apelando únicamente a un grupo de indefinibles lógicos y valiéndose solo del principio de definición nominal, es algo que no se satisface plenamente en los ***Principia Mathematica***.

Como dato adicional, es curioso observar como en el hilo de la argumentación anterior, Russell introduce por cuenta propia lo que podría llamarse una versión más del criterio de

[73] Russell (1903), § 108. En § 31-36, Russell discute los indefinibles de la lógica de Peano.

analisidad de Frege: "Todo los indefinibles de la matemática pura son de este tipo [lógico], y la presencia de cualquier otro indefinible indica que la cuestión pertenece a la matemática aplicada".[74]

Pero más curioso y perturbador resulta el comentario que hace Russell más adelante, al discutir la teoría cantoriana del continuo, pues ahí afirma, en oposición a la nueva concepción que se ha venido comentando, que "no existe ningún misterio en la continuidad del espacio, ni en la necesidad de nociones indefinibles en Aritmética"![75] Sin embargo, existen algunas consideraciones doxográficas relacionadas con la composición de este libro que deben tomarse en cuenta al momento de formarse una explicación plausible de esta y otras inconsistencias leves que pueden encontrarse en el texto.

En ***El Desarrollo de Mi Pensamiento Filosófico***, y en otros lugares, Russell afirma haber escrito la primera versión de ***Los Principios de la Matemática*** durante los últimos tres meses de 1900. Y añade que mientras las partes III, IV, V y VI fueron publicadas casi exactamente como fueron escritas durante esos meses, las partes I, II, y VII fueron corregidas más tarde.[76] No obstante, los estudiosos de la obra russelliana han tomado con suma reserva la veracidad de las anteriores declaraciones, debido a que no encajan con el análisis de los manuscritos originales y con otras fuentes.

[74] Russell *loc. cit.*
[75] Russell *ibid.*, § 419.
[76] Russell (1959), p. 72 [74]

Incluso, se ha llegado a afirmar, apoyándose en la total falta de rastros de las partes I y II en el manuscrito de 1900, que Russell no escribió en realidad esas partes sino hasta tiempo después.[77] Por otra parte, se ha comprobado que Russell utilizó versiones corregidas de sus anteriores intentos de escribir un libro sobre los fundamentos de la matemática, pero por supuesto, no bajo la influencia logicista, sino de esa lógica no simbólica y más filosófica, que como ya se ha mencionado, Russell había tomado de Moore.

La cuestión es importante porque es en las partes I y II en donde se presenta con mayor fuerza la tesis logicista y es donde se presenta el sistema lógico que se supone será la base del nuevo edificio de las matemáticas. Ahora bien, si es verdad que Russell compuso esas partes después de 1900, es probable que su logicismo no hubiese madurado sino hasta el momento en que pudo reorganizar todo el material y escribir las partes mencionadas.

Aunque también es posible que el pasaje citado de la parte IV, sea un agregado de un manuscrito previo, no anterior a 1900 (pues como el mismo Russell confiesa en su libro sobre Leibniz, en ese entonces conocía muy poco de la teoría de Cantor, pero además, al parecer, Russell estuvo leyendo a Bolzano y releyendo a Cantor antes de ir al congreso de filosofía[78]), y la inconsistencia con el nuevo enfoque pudo pasar fácilmente desapercibida.

[77] Cf., por ejemplo, Garciadiego (1992), p. 124.
[78] Cf. Russell (1983), apéndice II.

De cualquier forma, a mi modo de ver las cosas, parece más prometedor seguir la primera alternativa, pues no tenemos ninguna razón de peso para pensar que Russell asumió le tesis logicista inmediatamente después de su encuentro con Peano, puesto que este último no admitía tal tesis, y Russell pudo muy bien seguir pensando, al igual que Peano y muchos otros, que la aritmética cuenta con sus propios indefinibles y que estos no pueden ser susceptibles de una definición a partir de principios lógicos.

EL ABSOLUTISMO LÓGICO DEL *TRACTATUS*

Farther, the trouble is not with what the author does say, but with what he does not say...

A. N. Whitehead

mi obra se compone de dos partes: de lo que dice, y de todo aquello que no dice. Y precisamente esta segunda parte es la importante.

L. Wittgenstein

I Balance y Perspectiva

En el primer capítulo intenté ilustrar de la mejor manera posible como el proyecto leibniziano sobre la creación de una *lingua characterica* tenía su origen, como todos los proyectos semejantes de su época, en la convicción de que las lenguas naturales son insuficientes para expresar adecuadamente el pensamiento y la verdadera naturaleza de las cosas. En el segundo capítulo, he mostrado cómo el programa *conceptográfico* retoma explícitamente la idea de esa *lingua characterica*, y como Frege comparte también, hasta el final de su vida, la convicción en el carácter inapropiado del lenguaje natural para expresar de manera adecuada las relaciones que se dan entre los pensamientos.

La *conceptografía* como lenguaje artificial había sido creada para suplir esta deficiencia del lenguaje natural dentro del campo matemático, pero su autor no descartaba su utilidad en otras áreas del conocimiento. De hecho, en el prólogo de la ***Conceptografía***, Frege era ya lo bastante explícito acerca del beneficio que tendría su empleo en la filosofía:

> Si es una tarea de la filosofía romper con el dominio de la palabra sobre la mente humana al descubrir los engaños que sobre las relaciones de los conceptos surgen casi inevitablemente en el uso del lenguaje, al liberar al pensamiento de aquellos con que lo plaga la naturaleza de los medios lingüísticos de expresión, entonces mi conceptografía, más desarrollada para estos propósitos, podría ser un instrumento útil a los filósofos. Ciertamente, tampoco reproducirá las ideas en una forma pura, lo cual es probablemente inevitable cuando los pensamientos son representados por un medio concreto; pero, por una parte, se pueden restringir las discrepancias a aquellas que son inevitables e inocuas y, por otra parte, en virtud de que son de un tipo totalmente distinto al de las que son propias del lenguaje, se ofrece ya una protección contra una influencia unilateral de este medio de expresión.[1]

Por supuesto, esta sugerencia incidental tuvo un efecto inusual en Russell, quien llegó a proponer el empleo del nuevo simbolismo como la esencia de la filosofía, y afirmó mucho después que "el motivo para emplear un lenguaje simbólico fue la inevitable vaguedad y ambigüedad de cualquier lenguaje usado para los fines cotidianos".[2] Tampoco es difícil advertir en este

[1] Frege (1879), p. 10 [7].

[2] Schilpp (ed.) (1944), p. 690. Antes, en 1923, ya había declarado que este era el motivo de su lenguaje: "Todos ustedes saben que yo inventé un lenguaje especial con el fin de evitar la vaguedad". No obstante, en esta época Russell sostenía que su lenguaje ideal no era del todo preciso y exacto, y que su única ventaja con respecto al lenguaje natural consistía en el carácter no representacional de sus signos, ya que es en la relación del signo con lo representado en donde tiene sentido hablar de precisión y vaguedad: "La vaguedad y la precisión son características que sólo pueden pertenecer a la representación, de la cual el lenguaje es un ejemplo. Tienen que ver con la relación entre una representación y aquello que ésta

desarrollo russelliano una de las fuentes principales del llamado positivismo o empirismo lógico.[3]

De cualquier manera, lo relevante, por el momento, es que esta sugerencia de Frege y su aplicación por parte de Russell, alimentaron en buena medida la suposición de que *todos* los problemas filosóficos tienen que ver con problemas de lenguaje. No obstante, es también indudable que la popularización de esta suposición se debe a Wittgenstein, aunque de igual forma, debe señalarse una diferencia sutil pero importante entre la manera cómo Frege y Russell entendían la relación que debe darse entre el simbolismo lógico y el lenguaje ordinario, y cómo lo hacía Wittgenstein en el ***Tractatus***.

---

representa. Fuera de la representación, sea cognoscitiva o mecánica, no puede haber cosa tal como vaguedad o precisión". Russell (1923), pp. 84-85[14-15]. Sobre el punto de vista de Frege sobre este tema véase Heijenoort (1986).

[3] En el prólogo de la primera edición del ***Der logische Aufbau der Welt***, Carnap señalaba que debido a que el origen de la nueva lógica se encontraba relacionado con los problemas en la fundamentación de las matemáticas, "Sólo unos cuantos vislumbran su extraordinaria *importancia para toda la filosofía*"; y añadía: "Apenas comienza a apreciarse su valor para este campo tan vasto. Si la filosofía quiere emprender el mismo camino que la ciencia (en sentido estricto), no podrá prescindir de este medio tan radical como eficaz para dilucidar sus conceptos y para depurarse de pseudoproblemas" [Carnap (1928), p. VI]. No obstante, la descripción carnapeana de la lógica tradicional era tan equívoca que apuntaba involuntariamente al sistema fregeano: "En las últimas décadas, los matemáticos han construido una *nueva lógica*. Se vieron obligados a desarrollarla en vista de la crisis que sufría la fundamentación de las matemáticas, crisis ante la cual la lógica tradicional no sólo demostró su incapacidad para resolver tan difícil problema, sino que le ocurrió algo mucho más grave, lo más grave que le puede suceder a una teoría científica: llevaba a contradicciones. Este fue el impulso más fuerte que llevó a construir una nueva lógica. Dicha lógica evita las contradicciones de la anterior; pero además de ese mérito, meramente negativo, ha demostrado tener una capacidad positiva, aunque por lo pronto solamente se aplique al examen y a una nueva fundamentación de las matemáticas" [p. V].

Desde luego, si tomamos en cuenta únicamente el contenido de las afirmaciones de 3.323 a 3.325, no parece existir una diferencia importante:

> En el lenguaje ordinario ocurre muy a menudo que la misma palabra designe de modo y manera diferentes -esto es, que pertenezca a símbolos distintos-, o que dos palabras que designan de modo y manera diferentes sean usadas externamente de igual modo en la proposición... Surgen así fácilmente las confusiones más fundamentales (de las cuales está llena toda la filosofía)... Para evitar estos errores debemos emplear un simbolismo que los excluya, no usando el mismo signo en símbolos diferentes ni usando aquellos signos que designen de modo diverso, de manera aparentemente igual. Un simbolismo, pues, que obedezca a la gramática *lógica* -a la sintaxis lógica-... (El lenguaje simbólico de Frege y Russell es un lenguaje así, que, no obstante, no excluye aún todos los errores).

Esta última observación induce a pensar que el objetivo de Wittgenstein es en lo esencial el mismo de Frege y Russell, y que consiste llanamente en la perfección de un simbolismo lógico que pueda eliminar todos los errores de designación que se dan en el lenguaje ordinario.[4] Pero para Wittgenstein el simbolismo lógico adecuado no es de ninguna manera un sustituto del lenguaje natural; es decir, no es un lenguaje artificial que habrá de sustituir al lenguaje común en el análisis detallado del conocimiento matemático, en la representación

[4] No esta de más advertir aquí una vez más que esto no significa para nada que Frege (y Russell en buena medida), intentara una formalización del lenguaje natural, y mucho menos teniendo como base el lenguaje de la artitmética, como afirma Kenny: "En las tres décadas anteriores a la primera llegada de Wittgenstein a Cambridge, el estudio de la lógica se había visto revolucionado por la obra de Frege. Frege formalizó la teoría de inferencia de un modo que era a la vez más rigurosa y más general en su aplicación que la silogística tradicional. Para ello *inventó un sistema simbólico o 'escritura conceptual' (Begriffsschrift), como él la llamó, con la idea de formalizar el lenguaje ordinario sobre el modelo del lenguaje de la aritmética"* [Kenny (1982), p. 31; las cursivas son mías].

correcta del mundo o en el descubrimiento de errores filosóficos.

Una explicación de esto puede encontarse en el hecho de que para Wittgenstein no es el lenguaje mismo quien nos induce a errores de designación o pensamiento sino nuestra incomprensión de su gramática lógica inherente; es decir, somos *nosotros* quienes violentamos los modos de designación de las palabras debido en buena medida a lo complicado que resulta captar la lógica del lenguaje:

> El lenguaje ordinario es una parte del organismo humano, y no menos complicado que éste... Es humanamente imposible extraer de él inmediatamente la lógica del lenguaje... El lenguaje disfraza el pensamiento. Y de tal modo, que por la forma externa del vestido no es posible concluir acerca de la forma del pensamiento disfrazado; porque la forma externa del vestido está construida con un fin completamente distinto que el de permitir reconocer la forma del cuerpo... Las convenciones tácitas para comprender el lenguaje ordinario son enormemente complicadas (4.002).

En consecuencia, lo que hace un simbolismo lógico como el de Frege y Russell, no es pues, según Wittgenstein, sustituir al lenguaje natural para evitar equívocos o malentendidos dentro de una determinada área cognoscitiva, sino *poner de manifiesto la correcta lógica del lenguaje*. Además, esta lógica del lenguaje no es otra cosa que la estructura por medio de la cual el pensamiento adquiere su forma lingüística.

Para Russell, el asunto era un tanto distinto ya que suponía que el propósito de Wittgenstein tenía que ver con la construcción de un lenguaje artificial que debía servir de modelo al lenguaje natural al momento de considerar su capacidad para hacer contacto con la realidad:

> Un lenguaje lógicamente perfecto tiene reglas sintácticas que evitan los sinsentidos, y tiene símbolos particulares con un referente determinado y único. Wittgenstein estudia las condiciones necesarias para un lenguaje perfecto. No es que haya lenguaje lógicamente perfecto, o que nosotros nos creamos aquí y ahora capaces de construir un lenguaje lógicamente perfecto, sino que toda la función del lenguaje consiste en tener referencia y sólo cumple esta función satisfactoriamente en la medida en que se aproxima al lenguaje ideal que nosotros postulamos.[5]

Por supuesto, las últimas líneas suenan un tanto sorprendentes ya que sugieren que el lenguaje ha de aproximarse a un lenguaje perfecto utópico, o inexistente, si es que pretende representar de manera correcta la realidad.[6] Y, obviamente, como esta manera de entender el ***Tractatus*** no podía dejar satisfecho a su autor, Wittgenstein llegaría a sostener que Russell no lo había llegado a comprender en absoluto.

De cualquier manera, y al margen de esta diferencia sutil pero fundamental, es importante tener siempre presente que en la medida en que la lógica de Frege y Russell determinan las propiedades de esa lógica del lenguaje, en esa misma medida

---

[5] Russell (1921), pp. 12-13 [186].

[6] Sin embargo, esto se debe a que olvidamos que para Russell la exactitud y precisión absoluta no es algo que podamos alcanzar con éxito, pues "las palabras lógicas, como el resto, cuando son usadas por seres humanos comparten la vagedad de todas las palabras". No obstante, ya he mencionado, en la nota 2, que para Russell los signos lógicos estan menos sujetos a la vagedad debido a su falta de representabilidad y es debido a este rasgo por lo cual podemos acercanos a la precisión: "Hay, sin embargo, menos vagedad en las palabras lógicas que en las palabras de la vida diaria, a causa de que las palabras lógicas se aplican esencialmente a símbolos, y pueden concebirse como aplicadas más bien a símbolos posibles que a símbolos reales. Somos capaces de imaginar lo que sería un simbolismo preciso, aunque realmente no podamos construir ese simbolismo. De ahí que seamos capaces de imaginar un significado preciso para palabras tales como 'o' y 'no'. Podemos, en efecto, apreciar precisamente lo que ellas significarían si nuestro simbolismo fuera preciso". Russell (1923), p. 88 [20].

podemos hablar también de una concepción absolutista del lenguaje. Sin embargo, debe también reconocerse que es sólo a través de Wittgenstein como el absolutismo lógico asume un giro que como doctrina llega a sus tesis más radicales.[7]

Esto se pone de manifiesto una vez que notamos que si bien Leibniz, Frege y Russell habían confiado en un simbolismo artificial que *peindre non pas les paroles, mais les pensées;* y por consiguiente, permitía una relación exacta entre pensamiento y realidad (cosa que el lenguaje natural no podía hacer); para Wittgenstein, es ese simbolismo artificial y arbitrario el que nos permite captar la perfecta correspondencia entre pensamiento, lenguaje y mundo.[8] Pero al margen de las mencionadas diferencias, es importante tener presente que todos ellos comparten la convicción de que ese simbolismo tiene como objeto la verdad y sólo la verdad.

Otro aspecto relevante a destacar con respecto a Frege y Russell, es la determinación que hace Wittgesntein de la concepción absolutista; es decir, como señaló Heijenoort, en

---

[7] O para decirlo en los términos de Hintikka, las partes más importantes del ***Tractatus*** (y del atomismo lógico de Russell), pueden ser vistas como una dramatización metafísica del paradigma fregeano. Cf. Hintikka (1984), p. 30.

[8] A mi juicio, esta puede ser la respuesta plausible a las interesantes cuestiones que plantea MacGuinness al referirse a la idea de Wittgenstein de que un simbolismo correcto debería mostrar lo superfluo de la teoría russelliana de los tipos lógicos: "¿Estaba recomendando Wittgenstein la construcción de un simbolismo ideal que impidiese la formulación de enunciados sin sentido o paradójicos, «un lenguaje perfecto», como dijo Russelll en la introducción del ***Tractatus***?-. Si así fuese, ¿no habría que disponer previamente de una teoría de las condiciones que ha de satisfacer un lenguaje lógicamente perfecto? ¿O quería decir que el lenguaje ordinario, si se comprendían las reglas para su uso correcto, ya impedía semejantes formulaciones? Y si es así, ¿qué tipo de estudio o investigación revelaría las reglas para el uso correcto del lenguaje ordinario, puesto que nuestras

Frege el absolutismo lógico no es una doctrina explícita, defendida o justificada abiertamente, pero que no obstante, esta siempre presente y penetra todo su trabajo.[9] En cuanto a Russell, el asunto es aún más problemático ya que sus intentos por hacer manifiesta dicha concepción nunca logran desembocar en una formulación que le fuera del todo convincente.[10] En contraste, en Wittgenstein hay una enunciación clara y contudente de tal doctrina y un cuidadoso tratamiento de sus consecuencias.

De hecho, la muestra más clara del carácter absolutista de la lógica wittgensteiniana puede verse en que el isomorfismo entre pensamiento, lenguaje y realidad no es otra cosa que la estructura de la lógica que éste reelabora a partir de Frege y Russell. Además, una de las razones principales por la cual el lenguaje, o mejor, su gramática lógica aparece en el ***Tractatus*** como la estructura afín entre pensamiento y realidad, consiste en que comparte con Frege, no tanto la idea de que el lenguaje es la forma visible del pensamiento (o el *disfraz* del pensamiento[11]); sino tesis más importantes y fuertes, como lo es la "identificación" entre el pensamiento y el sentido de la

---

inclinaciones iniciales son obviamente una guía inadecuada?" [MacGuinnesss (1991), p. 225].

[9] Heijenoort (1984), p. 13.

[10] No está por demás recordar que Russell pensó dejar a Wittgenstein la tarea de poner en orden aquellos "fundamentos de la lógica", que había intentado en vano plasmar en su manuscrito inconcluso "What is logic?".

[11] O mejor aún, "En la proposición, el pensamiento se expresa sensiblemente" (Im Satz drückt sich der Gedanke sinnlich wahrehmbar aus). 3.1. En el ***Prototractatus*** se dice: "La expresión perceptible de un pensamiento es un signo proposicional". Para un comentario interesante sobre la diferencia

proposición,[12] y el llamado principio del contexto: "Sólo la proposición tiene sentido; sólo en el contexto de la proposición tiene el nombre referente"(3.3).

Como la teoría del lenguaje de Wittgenstein se basa casi por completo en los mismos principios y supuestos que dan lugar a la *conceptografía* (en tanto lenguaje lógico o simbolismo), y al sistema de ***Principia Mathematica***, no es extraño encontrar con que tal teoría se "reduce" a la naturaleza de la proposición (y su verdad). Por este motivo, es conveniente pasar ahora a su examen y poner en evidencia sus rasgos absolutistas.

II La Proposición

entre el signo proposicional (Satzzeichen) y la proposición véase Kenny (1981), pp. [26-29].

[12] "El pensamiento es el sentido de la proposición" (Der Gedanke ist der sinnvolle Satz). 4. He decidido acompañar en algunas ocasiones el original alemán debido a que mis citas no corresponden del todo con las correspondientes versiones españolas (la de Tierno Galván y la de Jacobo Muñoz e Isidoro Reguera), ya que considero que no traducen el uso correcto de palabras claves como *Sinn* y *Bedeutung* (*bedeuten*, *sinnvolle*, etc.). Desde luego, estoy completamente de acuerdo con Anscombe cuando señala que Wittgenstein sigue el uso que Frege dio a estas palabras (aun y cuando *aparentemente* para el primero los nombres no tienen sentido, sino sólo referencia), y por consiguiente, la traducción inglesa de C. K. Ogden no es también afortunada [Wittgenstein (1979), p. 15e, n. y Anscombe(1977), pp. 8-9]. Lo curioso es que I. Reguera y J. Muñoz parecen haber seguido a Anscombe en su versión de los ***Notebooks*** pero no en el ***Tractatus***. Pero debe reconocerse que Reguera y Muñoz son más consistentes que Tierno Galván, ya que traducen en todos los casos *sentido* y *significado*. Debo de agregar, por último, que no condeno el traducir *Bedeutung* por *significado*, pero creo que los traductores deben advertir al lector que el *Bedeutung* corresponde más a nuestro término *referencia* (o si prefieren, *denotación*), o decir, como lo hacía Wittgenstein, que el *Bedeutung* proviene de *deuten*; esto es, *señalar*. Al margen de lo anterior, no deben olvidarse las dudas de Frege sobre la identificación entre pensamiento y sentido cuando tomaba en cuenta expresiones poéticas o imperativos.

El esquema y dominio general sobre los cuales se proyectan estos rasgos se encuentran planteados de manera explícita en el *Tractatus*, y pueden enlistarse a manera de premisas de la siguiente manera:

1) El mundo es la totalidad de los hechos (no de las cosas)[13]

2) La totalidad de los pensamientos verdaderos es una figura (Bild) del mundo (3.01)

3) La totalidad de las proposiciones verdaderas es la ciencia natural entera (o la totalidad de las ciencias naturales) (4.11)

3') La realidad empírica viene limitada por la totalidad de los objetos. El límite vuelve a mostrarse en la totalidad de las proposiciones elementales (5.5561)

4) La totalidad de las proposiciones es el lenguaje (4.01)

Por supuesto, es bastante plausible pensar que existe un orden muy claro en estas afirmaciones, y que este orden va del nivel ontológico al nivel lingüístico, ya que el lenguaje sólo puede ser la totalidad de las proposiciones si es posible de antemano formarnos una representación o figura verdadera del mundo. Pero también, cabe pensar que ese orden es el inverso; es decir, sabemos que el mundo es la totalidad de los hechos

[13] 1.1. O bien: "La totalidad de los estados de cosas que se dan efectivamente es el mundo". 2.04.

precisamente porque el lenguaje es la totalidad de las proposiciones, y sólo podemos pensar o representar el mundo por medio de proposiciones.

Sin embargo, este segundo orden es epistémico en tanto que presupone una pregunta del tipo: ¿Cómo sabemos que el mundo es así? Además, es claro que hay aquí una prioridad ontológica en el primer orden que no puede dejarse de lado debido a su cabal independencia con respecto a nuestra capacidad para figurarnos o representarnos el mundo. No es sorprendente, entonces, encontrar que las primeras observaciones wittgensteinianas hayan aparecido dentro de una problemática involuntariamente leibniziana que busca descubrir cómo nos formamos las representaciones de la realidad y cómo estas logran atrapar o hacer contacto con esa realidad.[14]

Estas reflexiones tenían como propósito elaborar lo que Wittgenstein llamaba su teoría de la representación lógica (meiner Theorie der logischen Abbildung), y en una de sus primeras reflexiones pensaba que no podía haber en todo esto más que un orden ontológico:

---

[14] Como se mencionó en el primer capítulo (III y IV), la forma sujeto predicado de la lógica clásica había inducido a Leibniz en la creencia en un mundo conformado por la estructura parte-todo, y es una notable coincidencia encontrar en las primeras notas de los ***Notebooks*** la preocupación por cuestiones tales como ¿tiene este hecho la forma sujeto-predicado?, ¿Cómo puedo identificar la forma sujeto-predicado en un hecho?. Pero desde luego, estos últimos problemas tienen directamente un fondo general dentro del contexto russelliano, y que podemos trasferir sin dificultad a la manera como Russell entendía el problema que da lugar al ***Tractatus*** (y en esto no se equivocaba): "Hay varios problemas en relación con el lenguaje... ¿Qué relación debe haber entre un hecho (una proposición, por ejemplo) y otro hecho para que el primero sea capaz de ser un símbolo del segundo?. Esta última es una cuestión lógica y es precisamente la única de la cual se ocupa Wittgenstein" [Russell, (1921), p. 12].

> Mi error radica obviamente en una falsa concepción de la representación lógica de la proposición.... Una afirmación no puede afectar a la estructura lógica del mundo, porque para que una afirmación sea del todo posible, para que una proposición PUEDA ser capaz de tener Sentido, el mundo tiene que tener ya precisamente la estructura lógica que tiene. La lógica del mundo es anterior a toda verdad y falsedad.[15]

No obstante, se supone necesario para la correcta representación de los hechos que exista una *identidad* entre lo que representa o figura y lo representado; es decir, debe darse una correspondencia uno a uno entre los elementos de la proposición y los elementos de lo representado. En palabras de Wittgenstein: "En la representación y lo representado tiene que haber algo idéntico en orden a que aquélla pueda siquiera ser representación de esto".[16]

Ahora bien, eso que es idéntico entre el hecho y su representación por medio del lenguaje es la forma lógica y sólo ella pues no se puede negar que existe una gran diversidad de lenguas naturales y lenguajes simbólicos (Zeichensprachen) con características propias:

---

[15] Wittgenstein (1979), 18.10.14. Sin embargo, diez días después volvía de nuevo a la hipótesis de partida: "En última instancia, la verdad o falsedad de *toda* proposición cambia algo en la *estructura* general del mundo" [28.10.14], la cual finalmente, matizada, aparece en el ***Tractatus*** como 5.5262.

[16] 2.161. "La relación figurativa consiste en la coordinación entre los elementos de la representación y las cosas" (Die abbildende Beziehung besteht aus den Zuordnungen der Elemente des Bildes und der Sachen), 2.1514. La versión de Tierno Galván dice "... y de las cosas", mientras que Muñoz y Reguera traducen "... y los de las cosas", pero es obvio que si el mundo es la totalidad de los hechos y no de las cosas y, como veremos más adelante, el hecho, el estado de cosas, es una combinación de cosas (Sachen, Dingen), entonces la coordinación no puede darse propiamente entre los elementos de la representación y los de las cosas. Además, según Wittgenstein, los objetos no pueden ser compuestos, ya que constituyen la sustancia del mundo (2.021).

> En la proposición tiene que haber algo idéntico con su referencia, aunque la proposición no puede ser idéntica con su referencia; algo *no* tiene que ser en ella idéntico con su referencia (la proposición es una formación con los rasgos lógicos de lo representado y con otros rasgos; éstos serán, sin embargo, arbitrarios y diferentes en diferentes lenguajes simbólicos). Tiene que haber, pues, diferentes formaciones con los mismos rasgos lógicos; lo representado será uno de éstos, y en la representación se tratará de distinguir esta formación de otras con los mismos rasgos lógicos (porque de lo contrario la representación no sería clara). Esta parte de la representación (la asignación de nombres) habrá de ocurrir mediante determinaciones arbitrarias. De acuerdo con ello cada proposición habrá de contener rasgos con referencias arbitrariamente determinadas.[17]

Por otra parte, es conveniente tener presente que lo que se encuentra en relación isomórfica estricta con el mundo es sólo una parte del lenguaje, y tal parte corresponde al subconjunto de proposiciones verdaderas. Pero, para que toda proposición sea al menos posible debe haber entre el mundo y toda proposición un cierto grado de isomorfismo que haga posible la figuración, verdadera o falsa, del mundo.

Para Russell la cuestión del isomorfismo tenía un aspecto más general, en tanto que no se limitaba al lenguaje, y al mismo tiempo más restrictivo, pues tenía que ver con el grado de exactitud con el cual un sistema de signos es una representación fiel de otro sistema:

> Un sistema de términos relacionados en varias formas es una representación exacta de otro sistema de términos relacionados en varias otras formas si hay una relación biunívoca entre los términos de uno y los términos del otro y también una relación biunívoca entre las relaciones de uno y las relaciones del otro, tal que, cuando en uno de los sistemas dos o más términos tienen una relación que pertenece a ese sistema, los términos correspondientes del otro sistema tienen la relación correspondiente al otro sistema.[18]

[17] Wittgenstein *Op. cit.*, 22.10.14. O bien: "«Lenguaje» son los lenguajes.- Los lenguajes son sistemas. Llamo 'proposiciones' a las unidades de los lenguajes". Wittgenstein (1992), p. 51.

Es claro que sistemas de este tipo lo son los mapas, las fotografías, los catálogos, etc. En comparación con Wittgenstein, el isomorfismo parece ser más restrictivo si tomamos en cuenta que es sólo la relación biunívoca entre las relaciones de ambos sistemas; es decir, la forma lógica y sólo ella es lo que es común a la figura y lo figurado, dado lo arbitrario que puede ser la determinación de la referencia en cada lengua. Pero, como es de sobra sabido, Wittgenstein desarrolló sus puntos de vista sobre la naturaleza representativa del lenguaje teniendo siempre en mente otros sistemas representacionales (como fotografías, cuadros, o los modelos tridimensionales de accidentes automovilísticos llevados a cabo en los tribunales de París), en donde también hay una relación biunívoca entre los elementos (términos) de ambos sistemas.[19] En consecuencia, puede decirse que independientemente de la arbitrariedad con la cual se presenta la determinación de la referencia en cada lengua, esto no impide la exigencia de una relación biunívoca entre los elementos de ambos sistemas.

En este punto, es importante llamar la atención sobre el desarrollo o reelaboración que hace Wittgenstein de los rasgos

[18] Russell (1923), p. 89 [21].

[19] Hay quienes sostienen que la idea de figura o pintura de la realidad debe tomarse en sentido literal pero si bien hay observaciones y declaraciones posteriores de Wittgenstein que apoyan este punto de vista, parece más conveniente asumir un interpretación metafórica. Sobre esta última interpretación véase Hintikka & Hintikka (1986), p. 93.

supuestamente biunívocos de los jeroglíficos: "¡Pensemos en los escritos jeroglíficos, en los que cada palabra representa su referencia!".[20] Como he intentado mostrar en el capitulo primero, la escritura glífica de los egipcios y los mayas había dado pie, gracias a Bacon, a la búsqueda o creación de símbolos o caracteres especiales cuya función principal fuese la representación directa de las cosas. Lo curioso del asunto, es que esta misma concepción equivocada de los jeroglíficos lleva a Wittgenstein a una posición totalmente opuesta a la de los teóricos de los lenguajes universales del siglo XVII. En efecto, en 4.016 se lee: "Para comprender la esencia de la proposición, pensemos en la escritura jeroglífica, que figura los hechos que describe. Y de ella, sin perder la esencia de la figuración, proviene la escritura alfabética".

Pero sin duda, y como ya se ha sugerido, en el fondo de esta teoría de la figuración o representación lógica del mundo hay también un fuerte ingrediente fregeano pues la figura o representación lógica es ante todo pensamiento (3) y este no es otra cosa que la proposición con sentido (4). Sin embargo, no debe olvidarse también que hay una diferencia ontológica fuerte entre el *Gedanke* fregeano y el de Wittgenstein, pues, como ya se ha señalado en el segundo capitulo (V), si bien Frege establece también una identidad entre el pensamiento y el

[20] Wittgenstein (1961), 29.9.14.

hecho, el *Gedanke* es algo totalmente suprahumano ya que nosotros únicamente podemos captarlo pero nunca crealo.[21]

Por otra parte, para Wittgenstein, la teoría de la figuración da por sentado que somos nosotros quienes elaboramos pensamientos, erróneamente o no, sobre el mundo, quienes nos formamos o creamos representaciones, verdaderas o falsas, del mismo. No obstante, para ambos, es claro que el pensamiento se encuentra conectado con la verdad. Por este motivo, la teoría de la figuración lógica es también una teoría de la verdad; o para decirlo de otra manera, "lo primero que nos ofrece la teoría de la representación lógica a través del lenguaje es información sobre la naturaleza de la relación de verdad".[22] Pero como ya se mencionó en el capítulo segundo (IV y VI en especial), aquí también existe una diferencia importante entre Frege y Wittgenstein ya que el primero niega la posibilidad de entender la verdad como una relación entre la figura y lo figurado mientras que para el segundo es esencial que exista una correspondencia tal pues "para conocer si la figura es verdadera o falsa debemos compararla con la realidad"(2.223).

De cualquier manera, no debe perderse de vista que lo que ha de haber en común entre la figura (la proposición) y lo figurado es la forma lógica, y que es en tal estructura donde descansa la particularidad absolutista de la filosofía del

[21] Los Hintikka señalan muy bien las deudas de la teoría de la representación de Wittgenstein para con Frege pero no logran ver las grandes diferencias entre ambos. Cf. Hintikka & Hintikka *op. cit.*, pp. 92-112.
[22] Wittgenstein *op. cit.*, 20.10.14.

llamado primer Wittgenstein. Esto es obvio una vez que se piensa, por un lado, en la razón por la cual esta forma ha de ser una forma *lógica* y, por otro, en el papel fundamental que esta tradición atribuye a la lógica.

Por eso, apesar de las agudas diferencias en cuanto a la teoría de la verdad entre Frege y Wittgenstein, existe un acuerdo tácito en cuanto que el objeto y objetivo de la lógica es la verdad y sólo ella, pues, en palabras de Heijenoort, "en la concepción abolutista, la noción fundamental de la semántica no es la validez, sino la de *verdad*. La tarea de la lógica es pasar de una verdad a otra".[23]

Al respecto, Dummett señala correctamente que en Frege esta tesis "retrógrada" se debe en gran parte a su interés en la verdad matemática y su deseo en demostrar que estas verdades son una subclase de la verdad lógica.[24] Ahora bien, algo análogo ocurre con Wittgenstein ya que su interés se encuentra conectado con las condiciones de verdad de la proposición. No obstante, la razón principal recae de nuevo en la concepción omniabarcadora de la lógica.

En Frege, recordemos, la lógica es capaz de sistematizar todos los conocimientos ya que sus cuantificadores se extienden, por principio, a todos los objetos. Una verdad es analítica si es expresable únicamente en los símbolos de la

---

[23] Heijenoort *art. cit.* p. 14. No esta de más recordar aquí las siguientes palabras de Frege: "si nos interesa la verdad -y la verdad es el objetivo de la lógica- debemos preguntarnos por las referencias". Frege (1892-1895), p. 97 [122].

conceptografía y si necesitamos añadir símbolos especiales, entonces se trata de una verdad sintética, pero de cualquier manera toda verdad es, en principio, expresable en el lenguaje de la *conceptografía*.

En Wittgenstein, por otra parte, no hay el menor reparo en enunciar el carácter fundamental y omnicomprensivo de la lógica: "La lógica llena el mundo; los límites del mundo son también sus límites"(5.61).... "La lógica no es una doctrina, sino un reflejo del mundo"(6.13)... ¿Cómo puede la lógica, que todo lo abarca y que refleja el mundo, utilizar garabatos y manipulaciones tan especiales? Sólo en la medida en que están unidas formando una red infinitamente fina en el gran espejo" (5.511).[25]

En Wittgenstein, esta doctrina absolutista de la lógica tiene como base una interpretación de las expresiones que aparecen en el cálculo bivalente, y ya he dicho también, en el primer capítulo (especialmente en V), que esa interpretación es muy similar a la que presenta Leibniz en las *Generales Inquisitiones*.

Desde luego, dicha interpretación define a su vez la naturaleza de la proposición y del lenguaje, pues cada expresión es vista y considerada de acuerdo con sus condiciones de verdad. Esta semántica del cálculo lógico puede ilustrarse

---

[24] Dummett (1973), pp. 432-433.
[25] O bien: "Sólo la realidad interesa a la lógica. Esto es, las proposiciones SOLO en la medida en que son figuras de la realidad" [Wittgenstein (1979), 5.10.14.

muy bien tomando la combinatoria de los valores posibles que puede tomar una proposición cualquiera (y que es una versión abreviada de la combinatoria para dos variables que se ofrece en 5.101, y que ilustra, de pasada, la idea de que en la proposición elemental estan dadas ya todas las operaciones y constantes lógicas (5.47)):

TAUTOLOGIA	PROPOSICIONES		CONTRADICCION
V	F	V	F
V	V	F	F
P v -P	P	-P	P & -P

La interpretación del cálculo bivalente viene dada al momento de considerar el valor epistémico de cada clase de expresiones: 1) la tautología y la contradicción definen los polos y límites del lenguaje y del mundo, y constituyen propiamente lo que debe entenderse, en este contexto Wittgensteiniano, por expresiones lógicas,[26] pues "las proposiciones lógicas describen el armazón del mundo, o mejor, lo presentan. No "tratan" de nada, presuponen que los nombres tienen referente, las proposiciones elementales, sentido; y

[26] Debe ser evidente aquí que, de acuerdo con mi punto de vista, los Hintikka se equivocan cuando afirman, apelando a 5.61!, que "para Wittgenstein, el mundo como un todo es inexpresable, porque sus fronteras son inexpresables". Hintikka & Hintikka (1986), p. 7. Pues las fronteras son expresadas por las proposiciones lógicas! La afirmación es además sorprendente, si tomamos en cuenta que los autores sostienen una interpretación kantiana del ***Tactatus***. Interpretación que encaja hasta cierto punto con el marco general de la problemática aunque sea históricamente ajena a ella.

esta es su conexión con el mundo" (6.124). 2) Las proposiciones, que podríamos llamar también expresiones *sintéticas, factuales* o *contingentes*, son figuras o modelos de la realidad en tanto que sus condiciones de verdad no están determinadas más que por la realidad misma.

Ahora bien, es importante tener siempre en cuenta que para Wittgenstein, la tautología y la contradicción no son propiamente proposiciones, pues reserva este término para aquellas expresiones que son representaciones o figuras de los hechos, lo cual queda determinado por sus condiciones de verdad. Es decir, "la tautología no tiene condiciones de verdad, pues es incondicionalmente verdadera; y la contradicción, bajo ninguna condición es verdadera"... Y por este motivo, "la proposición muestra aquello que dice; la tautología y la contradicción muestran que no dicen nada" (4.461).

Pero la tautología y la contradicción no dicen nada, porque definen los límites de lo pensable, de la realidad y del lenguaje, pues, mientras que la tautología fija lo que es necesario, la contradicción establece lo que es imposible. Por este motivo, ambos tipos de expresiones no tienen *sentido* (4.461) y sin embargo, no son absurdos, pues en este contexto, decir que no tienen *sentido* es decir simplemente que no son figuras o modelos de la realidad (4.462), lo cual, como veremos más adelante, es algo distinto a decir que son sinsentidos.

Por otra parte, la tautología y la contradicción como polos de las condiciones posibles de verdad fijan también lo que puede ser expresable (figurable) por medio del lenguaje. De ahí que para Wittgenstein, ambos tipos de expresiones formen parte del simbolismo del lenguaje de la misma forma como el 0 forma parte del simbolismo de la aritmética (4.4611). Desde el punto de vista más general y ontológico de esta intepretación, — la proposición, lo posible, tiene como límites lógicos lo que es necesariamente verdadero (la tautología) y falso (la contradicción), y por ello, lo posible es sólo posible lógicamente; es decir, esta lógica absolutista fija de antemano que estados de cosas son posibles como un estado intermedio entre aquello que es necesario y lo que es imposible. Por eso, "algo lógico no puede ser meramente posible. La lógica trata de cualquier posibilidad y todas las posibilidades son sus hechos" (2.0121).

Por otra parte, esta semántica del cálculo lógico bivalente tiene como consecuencia aceptar que las constantes lógicas (es decir, v, &, -, etc.,) no cuentan en el fondo con ningún correlato en el mundo, o mejor dicho, no representan o refieren en particular a algo en la proposición; esto es más claro, una vez que observamos, por ejemplo, que una tautología y una contradicción pueden expresarse como la combinación lógica de la proposición y su negación (*i.e.*, -(P v -P) o P & -P). Desde luego, esta es otra forma de argumentar por qué estos tipos de expresiones no son propiamente proposiciones y por qué el lenguaje sólo puede ser la totalidad de las proposiciones.

Otra razón para sospechar de la falta de referencia de las constantes lógicas es, de hecho, su posibilidad de interdefinibilidad. El que $P \rightarrow P$ sea igual por definición a $-P \vee P$ o a $-(P \,\&\, -P)$, muestra ya que no hay nada particular en cada una de las constantes lógicas que aparecen dentro de una determinada expresión.

Vistas las cosas en perspectiva histórica, se puede decir que para Russell y Wittgenstein, el problema de los fundamentos de la lógica era en lo esencial el problema de saber qué eran las constantes lógicas, pues de aquí se derivaban el problema de la forma lógica, el de lo simple y lo complejo, el del hecho y del hecho atómico.

En 1911 Russell admitía que no era fácil dar una definición de lo que son las constantes lógicas y, como Frege, ofrecía sugerencias para poder reconocerlas diciendo que es todo aquello que en la proposición no puede ser sustituido por una variable. Sin embargo, esto no le impedía señalar que las constantes lógicas son las que constituyen la *forma pura* y que una proposición lógica o matemática (formal) es una expresión tal que no contiene más constantes que constantes lógicas. Desde luego, esta era una manera bastante inapropiada para dar con las constantes lógicas ya que si reconocemos que existen constantes lógicas, ¿cómo podemos decir que las constantes lógicas son aquellas que quedan en la proposición cuando se han sustituido todos los otros elementos por variables?

Se puede decir, no obstante, a su favor que las constantes no lógicas son sustituibles por variables, tal y como el nombre "Platón" es eliminable de "Platón fue un filósofo griego" por "x fue un filósofo griego". Sin embargo, el asunto es mucho más complicado una vez que se toman en cuenta expresiones de cierto tipo. El mismo Russell fue después consciente de esto al señalar en el prólogo de la segunda edición de los ***Principles*** que "la ausencia de constantes no lógicas, aunque condición necesaria para el carácter matemático de una proposición, no es condición suficiente".[27]

III **Lo indecible**

En el capítulo II mencioné que para Frege lo más simple desde el punto de vista lógico (*i.e.*, las nociones de *verdad*, *concepto*, etc.,) no puede definirse en sentido estricto ya que únicamente podemos captar su significado por medio de vagas sugerencias y alusiones. También mencioné que esta característica es una consecuencia natural de la concepción absolutista de la lógica de Frege.

[27] Russell (1903), p. vii [381].

En Wittgenstein, por otra parte, esta incapacidad de expresar verbalmente el significado de lo lógicamente simple recibe una extensión más elaborada, pero no exenta de problemas, por medio de la famosa distinción entre *decir* y *mostrar*, la cual, de nuevo, es una consecuencia inevitable de la interpretación que se da de los tres tipos de expresiones de la lógica (bivalente), al momento de identificarlos con la estructura de la realidad y del lenguaje. Es decir, el lenguaje esta conformado por la totalidad de las proposiciones, las cuales se encuentran delimitadas, positiva y negativamente, por las proposiciones lógicas (tautología-contradicción), y por consiguiente, las proposiciones como tales sólo pueden versar sobre situaciones o estados de hecho de la realidad o el mundo. Por supuesto, de aquí se sigue que no hay posibilidad alguna de un metalenguaje; o si se prefiere, de una capacidad autoreferencial del lenguaje, en el sentido de Jakobson.[28] En

[28] Cf. Jakobson (1988), pp. 81-91. Debo decir que esto es muy distinto a declarar la imposibilidad de la semántica y por tal motivo puede indicarse, como lo hacen los Hintikka, que la concepción absolutisma implica la inexpresibilidad de la semántica más que su imposibilidad. No obstante, la razón que dan los Hintikka es, desde mi punto de vista, tan equivocada como sorprendente: "es importante tener en cuenta que la tesis del lenguaje como medium universal implica principalmente la inexpresibilidad de la semántica más que su imposibilidad, en el sentido de que un creyente en la tesis del lenguaje como medium universal puede, con todo, tener muchas ideas claras sobre las conexiones entre lenguaje y mundo, que son el objeto de la semántica" [Hintikka & Hintikka (1986), p. 2]. Pues es claro que, en el caso de Wittgenstein, encontramos *expresadas* muchas ideas sobre las conexiones entre el lenguaje y el mundo. Sin embargo, es posible salvar la explicación de los Hintikka si uno considera que las proposiciones del ***Tractaus*** son finalmente sinsentidos. No esta de más mencionar también que para los Hintikka, la doctrina del mostrar, tiene dos razones muy distintas a las que aquí se han señalado: "la razón más general es la inefabilidad de todas las relaciones semánticas. La razón más específica es la inexpresabilidad de los objetos simples y sus formas" [*ibid.*, p. 9]. Desde luego, para mi la inexpreabilidad de la semántica (en un sentido distinto al de los Hintikka),

otras palabras, la proposición, la figura, no puede *decir* que es una tautología o una contradicción, y viceversa, ni la contradición ni la tautología pueden expresar la naturaleza de la proposición; y desde luego, tampoco pueden *decir* nada acerca de sí mismas.

No hay pues, lugar para una forma lógica de la forma lógica del lenguaje, para una figura de la figura, o para una figura o representación de la tautología y la contradicción, pues cada una de estas últimas *muestra*, por sus valores de verdad, su propia forma lógica. En palabras de Wittgenstein, la proposición es figura de todo lo que en la realidad tiene su forma lógica (2.171), pero "no puede figurar su forma de figuración, la muestra" (2.172).

Ahora bien, la relación con Frege en este punto es más clara si tomamos debidamente en cuenta el papel fundamental que juega la lógica en la determinación de esta imposibilidad del lenguaje para hablar sobre sí mismo, pues aquí Wittgenstein asume, junto con Frege, que todo intento de ir más allá de la lógica, de sus tres tipos de expresiones, es como intentar salirse de la propia piel.[29] Y si para Wittgenstein, la figura lógica de los hechos es en cierto sentido el *Gedanke* fregeano, no es extraño que pueda decir que "nosotros no podemos pensar

---

es paralela a la dicotomía decir-mostrar, y al hecho de que los nombres, más que los objetos, no puedan ser definibles ni analizables, y todo esto se debe a la intepretación absolutista del cálculo lógico.

[29] "Se ha dicho alguna vez que Dios pudo crear todo, salvo lo que fuese contrario a las leyes de la lógica. La verdad es que nosotros no somos capaces de *decir* qué aspecto tendría un mundo ilógico" (3.031).

nada ilógico, porque, de otro modo, tendríamos que pensar ilógicamente" (3.03).

Pero hay que insistir una vez más que lo que hay detrás de todo esto no es la lógica a secas, sino una concepción muy particular acerca de la misma; y si hemos de ser más precisos, debemos decir que se trata de una concepción de la lógica bivalente en un momento de su desarrollo histórico. Desde luego, puede decirse, junto con Quine,[30] que no hay más lógica que la lógica bivalente y que las llamadas lógicas divergentes, llamense lógicas polivalentes o lógicas no-clásicas, no son otra cosa que álgebra o ni siquiera eso.

Aunque puede responderse ante tal actitud que ciertos sistemas polivalentes pueden ser tan veritativo-funcionales como los sistemas clásicos (e incluso, que sus matrices o tablas de verdad de los conectivos contienen como un subconjunto los valores de los conectivos clásicos), o bien, que la lógica absolutista de Frege, Russell y Wittgenstein, no

[30] Cf. Quine (1970), cap. VI. Hintikka ha llamado la atención sobre lo deseable de un estudio sobre la importancia implícita de la concepción absolutista (que el prefiere denominar la visión de la lógica como *medium universal*) en la filosofía de la lógica y el lenguaje de Quine. Por mi parte, no sé hasta que punto pueda considerarsele un absolutista lógico, pues ciertamente hay algunos rasgos relevantes que apuntan en esa dirección pero hay otros, no menos importantes, que parecen dejar de lado una interpretación así. De hecho, la aguda observación de Hintikka sobre la actitud paradójica de Quine hacia las lógicas no-clásicas es una muestra de lo difícil que resulta indilgarle una concepción absolutista, pues su actitud filosófica hacia la dicotomía analítico-sintético y, por consiguiente, al carácter no previligiado de los principios de la lógica (que contrasta con su conservadurismo al rechazar a las lógicas no-clásicas), parece cerrar de manera definitiva una atribución en este sentido (atribución que si se hace en Hintikka & Hintikka *op. cit.*, p. 3). Pero desde luego, este comentario no hace más que refrendar la necesidad de un estudio que determine el papel que juega esta doctrina en su pensamiento. Cf. Hintikka (1984), pp. 30 y 45, n. 15.

agota ni siquiera la lógica bivalente, en tanto que les falta la cuantificación ampliada (*i.e.*, el teorema de Löwenheim, el teorema de Herbrand, etc.,);[31] prefiero volver a Wittgenstein, y en particular, a una objeción, en principio plausible, y a un dato interesante sobre la imposibilidad supuestamente lógica de un metalenguaje.

El argumento al que me refiero puede entenderse como una manera de rechazar mi interpretación de la imposibilidad de un metalenguaje en el ***Tractatus***. Su premisa principal es la observación 2.141, en la cual se dice que "la figura es un hecho", y como es claro que la proposición es una figura de un estado de cosas o de un hecho, de aquí se sigue que una proposición puede ser figura de otra proposición, y por lo tanto, no hay razón de peso para negar la imposibilidad del metalenguaje.

Sin embargo, debe ser también claro, por el contexto en el cual aparece esta observación, que no debe leerse en un sentido puramente literal pues aquí Wittgenstein se limita a reafirmar el isomorfismo entre la figura y el hecho, entre el lenguaje y el mundo: "Los elementos de la figura están en la figura en lugar de los objetos" (2.131). "Que los elementos de la figura estén combinados unos con respecto de otros de un modo determinado, representa que las cosas están combinadas también

[31] Puede pensarse que no hay ningún impedimento en "actualizar" la lógica absolutista de Wittgenstein a este dominio de la cuantificación, pero este no es el caso ya que los teoremas mencionados son metasistemáticos, y por lo

unas respecto de las otras. A esta conexión de los elementos de la figura se llama su estructura y a su posibilidad su forma de figuración" (2.15).

Además, hay suficiente evidencia de la imposibilidad de un metalenguaje en las objecciones de Wittgenstein a la teoría de los tipos, y en consecuencia, en su manera de resolver la paradoja de Russell (que es auto-referencial), en su manera de entender la igualdad (6.2322), en su idea de "que la *lógica* de los hechos no puede representarse" (4.0312), y en el resultado sorprendente de que el lector que ha entendido el ***Tractatus*** ha de reconocer como absurdas sus propias proposiciones!

Antes de comentar un poco estos puntos quiero pasar rápidamente al dato mencionado arriba. El asunto en cuestión es anecdótico y remite a Wittgenstein de manera indirecta ya que se encuentra más bien en relación con Gödel y algunos de los miembros del Círculo de Viena. Sin embargo, creo que permite ilustrar un poco más la persistencia de Wittgenstein en la imposibilidad de un metalenguaje en una fecha posterior al ***Tractatus***, lo cual, según mi punto de vista, ha de tomarse también como la razón principal del por qué consideraba paradójico el célebre teorema de Gödel.

En su primer libro sobre Gödel, Hao Wang registra la actividad del gran lógico durante los primeros meses de 1930 con el siguiente comentario:

---

tanto ajenos a la tradición Russell-Frege. Al respecto véase Heijenoort (1976).

> Hasta ahora no he visto ningún informe sobre las actividades de Gödel antes del verano. La única excepción es que Menger invitó a Alfred Tarski a dar algunas conferencias en Viena en Febrero. Aparentemente, ambos convencieron a Carnap de la necesidad de emplear un metalenguaje separado, un un paso que Gödel había recomendado el año anterior pero que Carnap y otros seguidores de Wittgenstein eran reluctantes a dar.[32]

Por supuesto, este dato no tiene más peso que el de confirmar la continuidad y la influencia del absolutismo Wittgeinsteiniano en su retorno a la vida académica. Incluso, es un tanto superfluo si tomamos en cuenta y bajo nuestro punto de vista, algunos de los pensamientos más significativos de la segunda parte de la ***Gramática Filosófica*** ("No existe la metamatemática", "Pruebas de consistencia", "¿Merece una prueba recursiva el nombre de "prueba"?", etc.,),[33] y otras observaciones no menos importantes de sus escritos posteriores.

Esto último sugiere que la presente interpretación da por sentado una continuidad -y no una ruptura radical- en la filosofía de Wittgenstein; la cual, por cierto, ha sido ya defendida por algunos filósofos aunque desde perspectivas muy distintas. Pero como este tema merece por sí mismo un tratamiento aparte,[34] intentaré volver sobre el dominio del

[32] Wang (1987), p. 84.
[33] Cf. Wittgenstein (1992), pp. 581-585, 595-599, 783-787, 789-841.
[34] En Hernández (1989), que es el antecedente directo de este trabajo, intenté una aproximación de la evolución de los rasgos absolutistas de Wittgenstein, pero ahora me parece bastante inexacto. No obstante, en la última parte puede encontrarse una argumentación en contra de lo que Wang llama la concepción "etnológica" de lógica en ***Sobre la Certeza***: "No estoy enterado -escribe Wang- de un tratamiento estandar de las dos o más concepciones de la lógica de Wittgenstein; pero es claro, que sus concepciones cambiaron en su perspectiva general, de ver al lenguaje como uno (en el ***Tractatus***) y verlo como formado por muchos juegos de lenguaje".

Tractatus y su relación con el comentario de Gödel registrado por Wang.

El motivo de fondo no es tanto la consabida influencia que ejerció el *Tractatus* en algunos miembros notables del Círculo de Viena y el contacto personal de Wittgenstein con ellos, como poner de manifiesto el conocimiento que tenía Gödel del programa leibniziano de una *lingua characterica* y su continuidad en la obra de Frege, Peano y Russell.[35] En efecto, Wang registra en numerosas ocasiones el interés de Gödel por Leibniz, y su *lingua characterica.*[36]

De hecho, Gödel se encontraba interesado en la lógica como *lingua characterica* por razones ligadas a su propia concepción de la lógica y a sus descubrimientos sobre las limitaciones internas de los sistemas formales. Es decir, Gödel consideraba también que la lógica tiene un carácter básico y previo a las

---

Wang (1991), p. 234. Mi opinión en ese escrito es que la lógica absolutista sigue siendo la lógica o estructura del lenguaje, y por lo tanto, tampoco puede ser descrita: "En último término, ¿no me inclino cada vez más a decir que la lógica no puede ser descrita? Es preciso que tomes en consideración la práctica del lenguaje, entonces lo verás", "todo lo que describe el juego del lenguaje pertenece a la lógica". Wittgentein (1979), pp. 9 y 501. Existen muchos puntos encontrados entre Wang y el presente trabajo como para ser siquiera mencionados.

[35] No es casual el que Gödel inicie su ensayo sobre Russell con las siguientes palabras: "La lógica matemática... es [por un lado] una parte de las matemáticas que trata de clases, relaciones, combinaciones de signos... Pero por otro lado es una ciencia previa a todas las demás, que contiene las nociones y principios que subyacen al resto de las ciencias. Leibniz fue el primero en concebir la lógica matemática, y precisamente en este segundo sentido, en su Characteristica universalis, de la cual habría constituido una parte central. Pero su idea de un cálculo lógico realmente suficiente para abarcar los razonamientos de las ciencias exactas no fue llevado a la práctica hasta casi dos siglos después, por la obra de Frege y Peano (aunque quizá no de la misma manera que Leibniz tenía en mente)". Gödel (1944), p. 125 [297]; Benacerraf & Putnam (eds.)(1983), p. 447. Como señala Wang, Gödel hablaba de este ensayo como una historia de la lógica que hacia especial referencia a la obra de Russell. Cf. Wang *op. cit.*, pp. 48, 305 y 312.

demás ciencias, pero rechazaba que ésta pudiera proporcionar, como habían pensado Leibniz y Frege, un procedimiento de decisión completo para la matemática. Esto es claro en las afirmaciones de Gödel registradas por Carnap en su diario después de una conversación sostenida el 23 de diciembre de 1929:

> Admitimos como matemáticas legítimas ciertas reflexiones sobre la gramática de un lenguaje concerniente a lo empírico. Si uno intenta formalizar tales matemáticas, entonces existen problemas con cada formalización, que uno puede entender y expresar en el lenguaje ordinario, pero que no se pueden expresar en el lenguaje formalizado dado. De aquí se sigue (Brouwer) que la matemática es inagotable [inexhaustible]: uno debe siempre beber de la 'fuente de la intuición'. No hay, pues, una *characteristica universalis* para la *totalidad* de las matemáticas, no hay un procedimiento de decisión para la totalidad de las matemáticas. Para cada y cualquier *lenguaje cerrado* hay sólo enumerablemente muchas expresiones. El *continuum* aparece sólo en 'la totalidad de las matemáticas'... Si tenemos *únicamente un lenguage,* sólo podemos hacer 'elucidaciones' acerca de él, entonces esas elucidaciones son inagotables [inexhaustible], pues siempre requeriran otra vez alguna nueva intuición.[37]

El registro telegráfico y un tanto críptico de Carnap puede no ser de mucha ayuda para comprender su pertinencia en relación con Wittgenstein, sobre todo si se deconocen los fondos sobre los que pesan estas afirmaciones. Pero al menos debe ser claro su pertinencia con respecto a Frege, y más de cerca, en relación con el propósito de Russell y Whitehead en

[36] Wang, *ibid.*, pp. 19, 46, 48, 49, etc.

[37] Citado por Wang *ibid.*, p. 50. Aunque Wang registra el interés de Gödel en Leibniz y la *lingua characterica* en una fecha posterior a la segunda mitad de la década de los treinta, es claro que el diario de Carnap revela ya, a finales de 1929, un conocimiento profundo de sus principios y consecuencias. Por otra parte, la referencia a Brouwer es bastante pertinente si mencionamos que, según el testimonio de Wang, el resultado del teorema de Gödel era ya para él algo evidente. Cf. Wang (1987), pp. 57 y 88; (1991), p. 254.

Principia Methematica. Ahora bien, la cuestión central de estos comentarios yace, por supuesto, en el conocido resultado de Gödel (*i.e.*, la imposibilidad de un lenguaje formal, suficientemente rico, para demostrar todas sus expresiones válidas), el cual debe considerarse como la refutación más contundente del absolutismo lógico (y desde luego, del logicismo), ya que demuestra que este último no puede lograr lo que se propone.

El argumento es netamente lingüístico y, despojado de sus elementos técnicos, puede explicarse, como de hecho sugirió Gödel, empleado cualquier antinomia autoreferencial (como la del "mentiroso" o la de Richard).[38] Pero también puede formularse de manera intuitiva y general en términos de los supuestos de una lógica como *lingua characterica*, como de hecho lo hizo Gödel según el registro de Carnap. Es decir, si se crea un lenguaje simbólico con reglas mecánicas de demostración para el total del conocimiento (Leibniz y Frege), o para derivar la matemática clásica (Russell y Whitehead), o bien, para describir la estructura lógica del Lenguaje (Wittgenstein); entonces debe admitirse que no puede existir algo más amplio o más allá de este lenguaje, y como se trata de un *lenguaje*

[38] Gödel (1931), p. 58; Heijenoort (ed.)(1967), p. 598. En realidad, en 1926, Paul Finsler presentó por primera vez una demostración de una expresión indecible empleando como argumento una versión modificada de la antinomia de Richard. Existen, no obstante, diferencias importantes en el método de prueba y en la evaluación que Gödel y Finsler hacen de un formalismo y de sus resultados. El ensayo de Finsler puede encontrarse en Hijenoort *ibid*, pp. 438-445.

cerrado debemos buscar una manera de resolver todas las cuestiones por medio de este lenguaje.

El primer problema serio se convierte entonces, en la manera de evitar que los signos hablen de los signos mismos ya que esto supone de alguna manera salirse de los límites autoimpuestos. Así que se puede, como el caso de Frege, dar indicaciones más o menos intuitivas o por ostención, para entender la diferencia entre objeto y concepto, o la relación entre la proposición y sus valores de verdad; o se puede intentar imponer un límite a lo que se puede *decir* y relegar al reino de lo *mostrable* todo cuanto se refiera a los signos mismos (e incluso, a mucho más). O, por último, violar las propias restricciones intentando no sólo respetarlas sino asegurarlas creando una teoría de tipos lógicos.

Por supuesto, Wittgenstein era muy conciente de los límites y se daba cuenta que la teoría de los tipos va más allá al ~~tratar~~ de establecerlos: "El error de Russell se manifiesta en esto: que Russell, para establecer las reglas de los signos, ha tenido necesidad de hablar del referente del signo"(3.331). Es decir, Wittgenstein no rechaza la teoría de los tipos sin más, pues es claro, como también observa Ishiguro,[39] que esta de

[39] Cf. Ishiguro (1981), pp. 44-45. No obstante, más adelante escribe, "pero si Wittgenstein creía en los tipos lógicos, ¿Qué era exactamente un tipo lógico para él, o para cualquiera en este asunto? En ***Philosophische Bemerkungen,*** 1.6 (1930) Wittgenstein escribió que la gramática filosófica o la sintaxis lógica era una teoría de tipos lógicos. Para Wittgenstein, una teoría tal era una verdad necesaria acerca del simbolismo y el lenguaje: algo que puede ser captado como evidente, si entendemos correctamente la naturaleza del simbolismo" [*ibid.*, p. 47]. Pero debe ser claro que Ishiguro

acuerdo con su propósito: "Ninguna proposición puede decir nada de sí misma porque el signo proposicional no puede estar contenido en sí mismo (ésta es toda la «teoría de los tipos»)" (3.332). Entonces, lo que encontramos después, es lo que para Wittgenstein es la explicación correcta: "Una función no puede ser su propio argumento porque el signo de la función contiene ya el prototipo de su propio argumento y no puede contenerse a sí mismo"(3.333). Por tal motivo, no es necesario ni permitido intentar establecer niveles entre lo lógicamente simple pues, de nuevo, no hay un más allá de la lógica. Y en este sentido, "esta claro: [que] las leyes de la lógica no pueden estar sometidas a su vez a leyes lógicas (No hay, como Russell creyó, un principio de contradicción propio para cada «type», sino que basta uno, ya que no se aplica a sí mismo)"(6.123). En fin, para decirlo en general y con las palabras de Wittgenstein: "la teoría de los tipos ha de volverse superflua con una correcta teoría del simbolismo".[40]

IV Gramática Filosófica

La teoría del simbolismo correcta debía ser ante todo una notación que permitiera reconocer la sintaxis lógica del

va más allá de Wittgenstein, pues una teoría no puede ser considerada como verdad necesaria por su evidencia, y si lo fuera, no diría absolutamente nada.

[40] Wittgenstein (1961), p. 122 [210].

lenguaje, ya que sus rasgos semánticos es algo que sólo pueden *mostrar* o presuponer los signos mismos. En el caso de las funciones proposicionales discutido arriba, es su *forma* o *prototipo* lógico el que indica el tipo de valores que ha de recibir el argumento (3.315, 3.316); es decir, "la determinación trata, pues, *sólo* de los símbolos, no de su referente. Y sólo esto es esencial a la determinación: *que sea sólo una descripción de los símbolos y no asevere nada acerca de lo designado*" (3.317).

A estas alturas no será difícil para el lector atento reconocer en todas estas afirmaciones la manera peculiar como Wittgenstein asimila el llamado principio del contexto de Frege (3.3): "En sintaxis lógica el referente de un signo no debe nunca desempeñar ningún papel; debe poder establecerse sin que haya por ello que hablar del referente de un signo; debe *sólo* presuponer la descripción de la expresión"(3.33).

No obstante, lo relevante por el momento recae en la cuestión relativa a la corrección del simbolismo, pues la manera de librarse de la teoría de los tipos y, mejor aún, de las paradojas de los conjuntos, y otras consideraciones relativas a los sentidos y los referentes de los signos, debe consistir, según Wittgenstein, en la creación de una notación que por sí sola *muestre* las propiedades semánticas y formales de los signos. Por ejemplo, bastará con mirar las proposiciones para reconocer si se trata de tautologías, contradicciones o de proposiciones genuinas (6.122), y si esto último es el caso, deberá ser claro que ha de contar con su respectivo sentido y sus nombres con referentes, pues "cualquier proposición posible está correctamente formada y si carece de sentido se debe únicamente a que no hemos dado el referente a algunas de sus partes constitutivas (aunque creamos haberlo hecho)"(5.4733).[41]

Esta último comentario de Wittgenstein es especialmente importante porque choca con la manera como se ha de entender la falsedad de proposiciones dentro de una interpretación isomórfica entre lenguaje y mundo. Es decir, es evidente que *el sentido y la falta de sentido de las proposiciones se encuentra en relación directa con la presencia o ausencia de la referencia de las partes integrales de la proposicion.*

Ya he mencionado que las proposiciones lógicas (la tautología y la contradicción) no tienen sentido (4.461) porque no dicen nada acerca de la realidad y, a su vez, esto ocurre porque las relaciones lógicas entre los signos no tienen referente (4.4661) y, por supuesto, el signo de negación tampoco corresponde a nada en la realidad (4.0621). El problema salta entonces a la vista cuando volvemos a las proposiciones

[41] "...Wittgenstein pudo decir, escribe Ishiguro, que *si* no entendemos una oración aparente que contiene palabras que conocemos, *entonces* no es una oración bien formada. Por otro lado, si entendemos una proposición y vemos que no dice nada, i.e. al expresar una condicion de verdad, entonces la proposición esta bien formada (5.4733). Comprender que es lo que se dice al emplear una oración, es, entonces, una noción primitiva". Pero es claro que la observación 5.4733 no presta ningún apoyo a la interpretación de Ishiguro sino 4.024, pero una cosa es comprender una oración y otra saber si esta bien formada. Además, ¿qué es lo que quiere decir Ishiguro con que *comprender el uso de una oración* es un término primitivo?, ¿Es el ***Tractatus*** un sistema axiomático? [Ishiguro art. cit., p. 44].

genuinas y tratamos de entender qué es lo que ocurre cuando una proposición es presumiblemente falsa.

Claro, podemos repetir que una proposición es falsa cuando no se da el hecho representado por la proposición, y señalar que no hay que confundir esto con la ausencia de referencia, ya que el mundo es la totalidad de los hechos, no de las cosas. Pero debe ser también claro que aún no se ha resuelto la cuestión; es decir, no se ha despejado lo que se ha de entenderse por el *no darse* el hecho representado por la proposición; o planteado de otra manera, ¿cuando no se da en la realidad un hecho representado por la proposición? Puede alegarse a manera de respuesta, algo similar a la definición de Tarski, que vale para una teoría de la verdad por correspondencia como la de Wittgenstein.

No obstante, debe reconocerse que la definición no decide para nada la cuestión. De cualquier manera, y es a lo que quiero llegar, no es difícil imaginar ejemplos de proposiciones que resultan falsas por la ausencia de referencia, o si se prefiere, de hechos que no se dan por la falta de referente en algunos de sus componentes. Por ejemplo, la proposición:

El planeta tierra tiene nueve satélites naturales

es falsa debido a que el estado de hecho descrito no es el caso, pero no es el caso por la ausencia de ocho objetos a los cuales se hace referencia en la proposición. El ejemplo es obvio, pero no es difícil encontrar casos más complicados en los cuales el factor principal del valor de verdad sea la ausencia o presencia de referencia (*i.e.* si tal y tal reacción química, como la ionización del cianuro de hidrógeno al disolverse en el agua, se debe a tal y tal colisión de moléculas x, y, etc.,). Entonces, ¿debemos, de acuerdo al marco tractusiano, considerar estas proposiciones como simplemente falsas, o bien, como seudoproposiciones debido a la falta de referencia de alguno o algunos de sus nombres, y por lo tanto, de sentido?

Existen varias formas de enfrentar este dilema. Uno de ellas es considerar toda esta clase de proposiciones como sin sentido y limitar la falsedad o veracidad de las proposiciones de acuerdo con la configuación o articulación determinada que la proposición muestra. Es decir, se han de rechazar como proposiciones todas aquellas expresiones que involucren cuestiones de existencia sobre los objetos denotados por los nombres en la proposición (*i.e.* son admisibles como proposiciones expresiones de la forma aRb que será verdadera cuando efectivamente aRb, y falsa cuando bRa, etc.,).

Otra respuesta plausible, es sostener que en el ejemplo anterior no hay falta de referencialidad ya que sabemos que estado de cosas se describe por medio de la proposición, aunque no sea el caso (4.024). Es decir, la ausencia de referencialidad, en el sentido del ***Tractatus***, se presenta sólo cuando no sabemos a que refieren los nombres que aparecen en una determinada proposición. Dicho de otra manera, sabemos a que cosas se referirían los nombres si fuera el hecho de que existieran.

Esta parece ser una explicación bastante buena de no ser porque va en contra de una de las tesis principales del *Tractaus*, a saber, que sólo las proposiciones tienen *sentido* mientras que los nombres sólo tienen *referente*, y por lo tanto, también son inanalizables (3.142; 3.26 y 3.261). En consecuencia, salta la pregunta, ¿Cómo sabemos a que refieren, en caso de que refieran, los nombres si no tienen sentido?

Puede contestarse, sin éxito supongo, alegando que el ejemplo no logra dar en el blanco pues los términos involucrados no serían nombres para Wittgenstein, dado que poseen evidentemente un sentido; pero ha de ser claro entonces que se requiere de un criterio para identificar los nombres dentro de la proposición. Pero esto sería contradictorio ya que según el principio del contexto, es en la proposición en donde el nombre recibe un referente.

Ya he mencionado (en la nota 39) que no es conveniente tomar la comprensión de una oración aseverativa como criterio para saber si se encuentra bien formada ya que esto supone imponer un criterio semántico a algo que es propiamente gramatical, o si se prefiere, relativo a la sintaxis lógica del lenguaje. Y si mi interpretación es correcta, esto supone ya, desde la misma concepción absolutista, una violación tan criticable como la teoría de los tipos lógicos, como el símbolo de aserción de Frege (4.442) o el intentar describir la forma lógica de la representación.

Pero independientemente de esto último, es claro que nosotros comprendemos muy bien expresiones que son anómalas desde el punto de vista gramatical, y puede ser el caso, aunque esto resulta impensable para quienes han sido adiestrados en la semántica formal del lenguaje natural a la Davidson o a la Montague, encontrar expresiones que siendo gramaticalmente correctas no son comprendidas por sus interlocutores (incluso en un sentido menos restringido que el de saber en que condiciones la expresión sería verdadera).

Ejemplos del primer tipo los encontramos con frecuencia al interactuar con niños que se encuentran en proceso de adquisición de la lengua, con extranjeros, ebrios o cuando de plano cometemos errores de lenguaje (i.e. se me lengua traba). Los ejemplos del segundo tipo son mucho más frecuentes, aunque quizá menos admitidos, ya que la comprensión depende de nuestro "conocimiento del mundo", de hábitos mentales, de concepciones particulares y probablemente de otras cosas más.

Puede alegarse como respuesta, y con justa razón, que he salido del sistema del ***Tractatus***, pues si bien en el primer tipo de ejemplo aludo a hechos bien conocidos del lenguaje natural (i.e. lo que los lingüistas llaman principio de corregibilidad),[42] la gramaticalidad en cuestión es superficial

[42] O dicho en otras palabras, la gramaticalidad no se ha de identificar con la aceptabilidad. Cf. Lyons (1983), V.

(es decir, relativa a la forma externa de la expresión, y por consiguiente en un sentido similar al que Chomski da a este término), mientras que la gramaticalidad del ***Tractatus*** ha de entenderse como la sintaxis profunda del lenguaje (es decir, relativa a la forma interna de la expresión). Mientras que en el segundo caso, simplemente he introducido un sentido distinto a lo que Wittgenstein entiende por comprensión.

De cualquier manera y si no me equivoco, el problema es bastante serio al interior de las ideas que dan forma al ***Tractatus*** ya que no parece existir una manera adecuada de resolverlo sin violentar los límites que previamente se han autoimpuesto. Dicho de otra forma, la doctrina absolutista de Wittgenstein lo llevó a confinar al mundo de lo mostrable todo aquello que tenía que ver con el sentido y la referencia del simbolismo, de tal suerte que la única técnica filosófica admisible sería un simbolismo y un tipo de análisis que pudiera poner de manifiesto la verdadera sintaxis lógica del lenguaje.

Ahora bien, podemos suponer que aceptamos un criterio semántico como criterio de corrección formal, como parece ocurrir con la comprensión e ignorar por el momento los límites autoimpuestos; pero esto no es ninguna gran ventaja ya que la comprensión de proposiciones, aún y cuando se le entienda como el saber bajo que condiciones la mentada proposición sería verdadera, involucra rasgos psicológicos que no pueden dejarse de lado (por no decir que la comprensión es en sí un proceso subjetivo), pues aunque seamos capaces de establecer condiciones suficientes y necesarias para determinar cuando alguien sabe que tal y tal proposición sería verdadera en tales y tales condiciones, no estaríamos más que dando vueltas en círculo, ya que ahora apelaríamos a un criterio formal para determinar algo que es de carácter semántico.

Además, si aceptamos, en caso extremo, esta vuelta en círculo, el criterio no excluye la posibilidad de que *creamos* saber cuales serían las condiciones bajo las cuales una determinada proposición sería verdadera, pues puede ocurrir, como señala Wittgenstein, que creamos haber dado el referente de alguno de los símbolos involucrados en la proposición aunque en realidad no lo hayamos hecho.

Puede alegarse que el criterio formal determina en *todos* los casos en que condiciones una persona x sabe que p es verdadera, y que la cuestión de si un persona y cree saber q aunque de acuerdo con el criterio en realidad no sabe que q, es una cuestión aparte que el criterio no puede ni tiene porque resolver. Queda entonces sólo por comprobar si efectivamente el critero se aplica a todos los casos. Pero no voy a intentar argumentar aquí contra las versiones que se han propuesto ya que Wittgenstein no ofreció nunca tal criterio. Por el contrario, intentare ilustrar un poco un estudio de caso, volviendo al resultado de Gödel antes mencionado.

Ya he dicho que desde esta perspectiva, la actitud de Wittgenstein hacia el teorema de Gödel se encuentra condicionada por los rasgos absolutistas que imponen límites a lo que se puede o no decir por medio de lenguaje. En las breves y escasas observaciones que encontramos en ***Remarks on the Foundations of Mathematics***, Wittgenstein cuestiona si hay proposiciones verdaderas en el sistema de Russell que no puedan ser sin embargo probadas dentro del mismo sistema, y pregunta sobre qué es lo que se entiende por proposición verdadera en el sistema de Russell.[43]

Wittgenstein responde dando lo que considera que son las condiciones bajo las cuales sería verdadera una proposición en el juego de Russell: a) cuando la proposición aparece como resultado final de una de sus pruebas, o b) cuando aparece como una 'ley fundamental'.[44] Desde luego, lo que está bajo consideración en el teorema de Gödel no son proposiciones en el sentido de a) ni de b) pues lo que establece precisamente el teorema es la existencia de una clase δ distinta a β y α (donde α es el complemento de $\Sigma - \beta$).[45] Entonces, si aplicamos el criterio de Wittgenstein en este caso, debe ser claro que no comprende del todo cuando una proposición en el sistema de Russell es verdadera, ya que no contempla la posibilidad de

[43] Wittgenstein (1978), p. 117. El sistema de Russell significa aquí obviamente el sistema expuesto en ***Principia Mathematica*** de Russell y Whitehead.
[44] *Loc. cit.*

proposiciones verdaderas en el sistema que no son del tipo a) o b).

Al parecer, Wittgenstein pensaba que si existiera un tipo tal de proposiciones que no pudiese ser probada en el sistema, entonces sería 'falsa' o 'verdadera' en un sentido distinto al que reciben estos términos en ***Principia Mathematica***.[46] Por otra parte y como ya he mencionado, el resultado fundamental de Gödel se expresa por medio de una proposición que dice de sí misma, por medio de un recurso que recuerda a la antinomia de Richard, que no puede ser probada. Pero para Wittgenstein, esto no podía tener nada más que un sentido contradictorio pues pensaba que lo que se establecía era que la proposición en cuestión pertenecía y al mismo tiempo no pertenecía al sistema de Russell.[47]

Es un hecho que Wittgenstein pensara esto último debido a que para él una proposición verdadera sólo podía ser del tipo a) o b), y si este no era el caso, entonces la proposición no pertenecía al sistema. Pero también es probable que sus tendencias absolutistas lo llevaran a pensar que el teorema era simplemente contradictorio porque violaba los límites de lo decible: "lo que se muestra en el lenguaje no puede ser expresado por medio del lenguaje" (4.121). Por otra parte, Wang registra una conversación con Gödel en la cual se refiere

---

[45] Recuérdese lo que en el capítulo III, I llamé el modelo euclídeo (pp. 124-125).
[46] *Ibid.*, p. 118.
[47] *Ibid.*, p. 119.

a los puntos de vista de las ***Remarks on the Foundations of Mathematics*** sobre su teorema, en los siguientes términos: Wittgenstein "no lo entendió (o pretendió no entenderlo), pues lo interpretó como una clase de paradoja lógica cuando de hecho es precisamente lo opuesto".[48]

Por último, puede argumentarse que el absolutismo lógico aparece sólo en el llamado primer Wittgenstein y que en las ***Observaciones sobre los Fundamentos de la Matemática*** es ya una concepción ampliamente superada. No obstante, no es difícil encontrar en esta última obra afirmaciones del carácter absolutista de la lógica:

> La lógica es una suerte de ultrafísica, la descripción de la «descripción lógica» del mundo, que percibimos mediante una especie de ultraexperiencia. Las leyes lógicas son ciertamente expresión de 'hábitos de pensar', pero también del hábito de *pensar*. Esto es, puede decirse que muestran cómo piensan los seres humanos y a *qué* llaman «pensar». Las proposiciones de la lógica son 'leyes del pensamiento', 'ya que expresan la esencia del pensar humano', pero más corrrectamente: ya que expresan, o muestran la esencia, la técnica del pensar. Muestran lo que es el pensar, o también modos del pensar. Puede decirse que la lógica muestra lo que nosotros entendemos por «proposición» y por «lenguaje».[49]

En qué medida llegó a dominar esta peculiar filosofía de la lógica en los últimos escritos de Wittgenstein, es una cuestión abierta que merece estudiarse por derecho propio. Por mi parte, me sentiría satisfecho si este trabajo puede ser de algún provecho al momento de reconocer su importancia en el pensamiento de los filósofos aquí tratados.

---

[48] Wang *Op. cit.*, p. 49 o art. cit., p. 257.
[49] Wittgenstein *Op. cit.*, pp. 40, 89, 90.

V Conclusiones

Por fin hemos llegado a las palabras finales de este trabajo y espero que el lector no se haya perdido en las particularidades olvidando el marco general que he intentado mostrar. Ahora bien, este marco general refiere a una tradición hasta ahora no reconocida, o si se prefiere, no suficientemente reconocida, y mi objetivo ha sido el establecer las relaciones y los puntos de vista particulares de sus miembros.

Como es evidente, esta tradición se encuentra íntimamente ligada con el renacimiento de la lógica llevado a cabo por Frege, Peano, Russell y Whitehead; en contraposición al desarrollo llevado a cabo por De Morgan, Boole, Jevons, Schröder y Peirce. Sin embargo, el resultado de ambos enfoques, y de desarrollos posteriores, se conoce con el nombre general de logística, lógica matemática o lógica formal, designando así una ciencia autónoma en tanto que se pretende ajena a tendencias filosóficas particulares. Pero desde luego, este punto de vista sistemático no se mantiene necesariamente cuando estudiamos un periodo dado de la lógica o a un lógico en particular.

En nuestro caso es muy importante tener presente esto último al momento de evaluar las tesis de este trabajo pues de lo contrario equivale, de manera inversa, a confundir la lógica formal con las tesis formalistas acerca de la misma. Como ya se ha dicho, Frege crea un sistema de lógica formal pero no sólo no sostiene un punto de vista formalista sino que explícitamente lo rechaza.

Ahora bien, mi objetivo principal se ha centrado en cuestiones de carácter lógico relativas a ese renacimiento de la lógica pero siempre ligados o como resultado de presupuestos o principios de carácter más general que a menudo se encuentran impregnados de un fuerte componente metafísico. Entre esos principios destaca la manera cómo estos pensadores entienden las relaciones entre pensamiento, lenguaje y realidad. Por consiguiente, este trabajo no es una historia de la lógica absolutista, sino en todo caso, del desarrollo de la filosofía de la lógica absolutista.

Dentro del mismo existen tres tipos de juicios que merece la pena distinguir y tener siempre presentes. En primer lugar, están aquellos que tienen que ver con la interpretación particular que aquí se presenta (*i.e.*, si la lógica de Wittgenstein es o no de carácter absolutista, si Frege entiende su *conceptografía* como una *lingua characterica*, etc.,). En segundo término, se encuentran aquellos juicios relativos a la coherencia internas y plausibilidad de las tesis que se le atribuye a los pensadores (*i.e.*, si el *ars* combinatoria era un proyecto nebuloso, si Frege no daba una explicación satisfactoria de la manera cómo un *Gedanke* es verdadero, etc.,). Y por último, se emiten juicios sobre literatura secundaria (*i.e.*, si Leibniz era nominalista como sostiene Mates, si el propósito de Frege era realizar un análisis del lenguaje natural, etc.,).

Sin embargo, existe otro tipo de juicios que me he reservado para el final pero que de alguna manera aparece ya de forma implícita en el cuerpo del trabajo y en particular en mis comentarios sobre Wittgenstein y Gödel. Estos juicios tienen que ver con la pertinencia de las concepciones aquí discutidas desde el punto de vista de nuestras circunstancias actuales. Esto último puede parecer inútil o evidente para algunos pero, en el fondo, en pocas ocasiones se tiene conciencia de las razones que sostienen tales certezas.

En este caso particular, cabe entonces preguntarse si la lógica como *lingua characterica* sigue siendo, a pesar de sus tropiezos, un programa sostenible. No obstante, debe mencionarse que en este planeamiento existe ya de entrada una evaluación negativa que no debe perderse de vista, pues tampoco debe olvidarse que, después de todo, aquí se da por sentado que la doctrina absolutista de la lógica fue un estímulo fundamental en el desarrollo de la lógica tal y como la encontramos en Frege y Russell.

Desde esta óptica es claro que el programa absolutista puede apoyar muy bien la tesis, sostenida por Koestler y otros, relativa a que el conocimiento avanza, en muchas ocasiones, motivado por errores de cálculo o por ideas equivocadas. Y es un tanto irónico el resultado si además tomamos en cuenta que en el seno del programa absolutista se encuentra una idea opuesta sobre la naturaleza del desarrollo del conocimiento.

Sin embargo, desde un plano filosófico más amplio es necesario reconocer que el mismo desarrollo de la lógica posterior a nuestros protagonistas ha tomado una dirección que no parece tener más fin que el relativismo y pluralismo lógico. Las lógicas polivalentes, infinivalentes y la lógica borrosa han roto la unidad de la lógica en el sentido clásico y por tal motivo requieren de un examen cuidadosos de sus consecuencias filosóficas.

Es obvio que el programa absolutista reposa en el principio de bivalencia y que un cambio en este punto implica si no su bancarrota si supone seguramente un cambio radical en la fisonomía del mismo ¿Podría Frege sostener los valores de verdad como referente de la proposición? ¿Sería posible una re-escritura del ***Tractatus*** bajo principios polivalentes o difusos?, ¿Podrá la lógica polivalente asumir el papel que Frege, Russell y Wittgenstein le otorgaron a la lógica de principios de siglo?

Desde luego, pueden plantearse numerosas preguntas interesantes a partir de la perspectiva que aquí se ha delineado. Aunque mi opinión personal se inclina hacia una negativa sobre el actual valor filosófico del programa absolutista, me parece también que las respuestas apropiadas vendrán sólo cuando se haya llegado a un acuerdo sobre cuestiones que estan fuera de este trabajo pues es obvio que para Russell, Wittgenstein y muchos otros, el desarrollo de la lógica a partir de Frege fue una revolución conceptual mientras que para algunos lógicos actuales, tomando en cuenta las lógicas polivalentes y en especial, la lógica borrosa, se trata más de una prolongación de la bivalencia que de una verdadera revolución.

No obstante, existe también, por parte de lógicos y matemáticos de renombre, un fuerte rechazo hacia los sistemas divergentes y si bien los argumentos de los lógicos difusos parecen más adecuados no podemos ignorar que el debate se encuentra ahora en su mejor momento.[50] Queda entonces por ver si la nueva lógica (*i.e.* la lógica borrosa) puede ofrecernos en verdad una nueva imagen de las relaciones entre lógica, lenguaje y realidad.

[50] Como ya se ha citado, la posición "clásica" hacia la lógica divergente se encuentra en Quine (1970), cap. 6. La respuesta de los lógicos difusos se puede encontrar en McNeill y Freiberger (1993) y Kosko (1994).

Bibliografía

Nota: Todas las citas de los textos de Frege remiten a las traducciones españolas (cuando las hay), y en particular a Frege (1971a), que es la colección de ensayos más accesible en nuestra lengua; además, los números entre corchetes remiten a las versiones inglesas de Frege, en los otros casos remiten a las versiones en español o a compilaciones o ediciones posteriores. Todas las citas que corresponden directamente a textos en inglés o francés son traducciones mías.

Aarsleff, Hans (1982) ***From Locke to Saussure. Essays on the study of language and intellectual history***. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Aiton, E. J. (1992) ***Leibniz. Una biografía***. Versión de Cristina Corredor [de ***Leibniz. A Biography***. Bristol, 1985]. Madrid: Alianza.

Anscombe, G. E. (1977) ***Introducción al "Tractatus" de Wittgenstein***. Versión de M. Pérez Rivas [de ***An introduction to Wittgenstein's Tractaus***. Londres, 1959]. Argentina: Ateneo.

Aspray, William & Kitcher, Ph. (eds.)(1988) ***History and Philosophy of Modern Mathematics***. Minnesota Studies in the Ph. of Science XI. Minneapolis Minnesota University Press.

Ayer, A. (Comp.) (1965) ***El Positivismo Lógico***. Trad. de L. Aldama et. *al.* [de ***Logical Positivism***. Chicago, 1959]. México: FCE.

Bell, David (1979) ***Frege's Theory of Judgement***. Oxford: Clarendon Press.

Benacerraf, Paul & Putnam, H. (eds.) (1983) *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. Cambridge: Cambridge University Press. 1ra ed.: New Jersey: Prentice, 1964.

Benveniste, Émil (1964) "Documents pour l'historie de quelques notions saussuriennes". *Cahiers Ferdinad de Saussure* 21: 131-5 [Trad. española en Saussure (1977), pp. 249-53]

Beuchot, Mauricio (1985) "El ars magna de Lulio y el ars combinatoria de Leibniz". *Dianoia* 31: 183-194.

Block, Irving (ed.) (1981) ***Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein.*** Oxford: B. Blackwell, MIT Press.

Bochenski, I. (1985) ***Historia de la Lógica Formal.*** Versión de M. Bravo [de ***Formale logik.*** Freiburg-München, 1956] Madrid: Gredos.

Boole, George (1847) ***The Mathematical Analysis of Logic, being an essay towards a calculus of deductive reasoning.*** Cambridge: Macmillan. Incluido con adición en Boole (1952), pp. 49-124; reimp.: Oxford: B.Blackwell, 1948 [***El Análisis Mathemático de la Lógica. Ensayo de un cálculo del razonamiento deductivo.*** Versión y notas de Asti Vera. Argentina: Universidad Nacional de la Plata, 1960]

--(1854) ***An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities.*** Londres: Macmillan.Reimpresión: New York : Dover, 1958.

--(1952) ***Studies in Logic and Probability.*** Rush Rhees ed., London: Watts.

Bouquiaux, L. (1996) "Mónadas y Caos: lo que está vivo de la filosofía de Leibniz". *Diógenes* 161: 97-115. Trad. de M. Mansour.

Bourbaki, Nicolás (1976) ***Elementos de Historia de las Matemáticas.*** Trad. de J. Hernández [***Eléments d'historie des mathématiques.*** París, 1969]. Madrid: Alianza; edición corregida y aumentada.

Bowne, G. (1966) ***The Philosophy of Logic. 1880-1908.*** The Hague: Mounton.

Bréal, M. (1886) "Les idées latentes du langage". Collège de France. Reimp. en Bréal (1882), pp. 295-322. Versión inglesa en Bréal (1991), pp. 79-92.

--(1882) ***Mélanges de Mythologie et de Linguistique.*** París.

--(1991) ***The Beginnings of Semantics. Essays, lectures and reviws.*** Ed. y versión de George Wolf. Stanford: Stanford University Press.

Bunge, Mario (comp.)(1960) ***Antología Semántica***. B. Aires: Nueva Visión.

Bunn, R. (1980) "Developments in the foundations of mathematics, 1870-1910". En I. Grattan-Guinness (ed.)(1980), pp. 220-55 [pp. 283-327].

Burali-Forti, Cesare (1897) "Una questione sui numeri transfiniti". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 11: 154-164. Traducción inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 104-111.

--(1900) "Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel". En ***Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris, 1900***. Vol. 3. Paris: A. Colin, 1901; pp. 289-307.

Burkhardt, Hans (1987) "The Leibnizian Characteristica Universalis as link between grammar and logic". En D. Buzzetti & M. Ferriani (eds.)(1987), pp. 43-63.

--(1989) "The part-whole relation in the metaphysics of Leibniz". En Rescher (ed.)(1989), pp. 171-181.

Buzzetti, Dino & Ferriani, Mario (eds.)(1987) ***Speculative Grammar, Universal Grammar and Philosophical Analysis of language***. Amsterdam:Benjamins.

Bynum, T. W. (ed.) (1972) ***Conceptual Notation and related articles***. Trad. de Frege (1879), (1882), (1882/1883), Schröder (1880), y otros; con una biografía e introducción del editor. Oxford: Clarendon.

Cantor, G. (1899) Carta a Dedekind. Versión inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 113-117.

Carnap, Rudolf (1928) ***Der logische Aufbau der Welt***. Hamburgo: F. Meiner [***La Construcción Lógica del Mundo***. Trad. L. De Schrenk. México: UNAM, 1988]

--(1935) ***Philosophy and Logical Syntax***. Londres: K. Paul [***Filosofía y Sintaxis Lógica***. Versión de César N. Molina. México: UNAM, 1963]

Cocchiarella, Nino (1988) "Predication versus membership in the distinction between logic as language and logic as calculus". *Synthese* 77: 37-72.

Cohen, J. (1954) "On the project of a universal character". *Mind* 63: 49-63.

Condillac, É. B. de (1979) ***La Logique ou Premiers Développements de L'art de Penser***. Trad. de J. A. Villa y J. Gimeno como ***Lógica***, con un prólogo de L. Rodríguez Aranda. Buenos Aires: Aguilar, 1982.

Cook, D. J. & Rosemont Jr., H. (1981) "The pre-established harmony between Leibniz and chinese tought". *Journal of History of Ideas* 42: 253-267.

Couturat, L. (1898) Reseña de Russell (1897). *Revue de Métaphysique et de Morale* 6: 354-380.

--(1899) "La logique mathématique de M. Peano". *Revue de Métaphysique et de Morale* 7: 616-646.

--(1900) "L'Algébre universelle de M. Whitehead". *Revue de Métaphysique et de Morale* 8: 323-362.

--(1901) ***La Logique de Leibniz d'après des documents inédits***. Paris: Preses Universitaires de France. Reimpresión: Georg Olms.

Dalen, D. van, *et. al.* (eds.) (1968) ***Logic and Foundations of Mathematics***. Netherlands: Wolters-Noordhoff.

Dascal, Marcelo (1987) ***Leibniz: Language, Signs and Thought***. Amsterdam: Benjamins.

Dedekind, R. (1963) ***Essays on the Theory of Numbers***. Traducción inglesa de Wooster Woodruff [de *Stetigkeit und irrationale Zahlen* y *Was sind und was sollen die Zahlen?*. Londres: O. Court, 1901; reimp. N. Y.: Dober.

Detlefsen, M. (1992) "Poincaré against the logicians". *Synthese* 90: 349-378.

Dudman, Victor (1971) "Peano's review of Frege's ***Grungesetze***". *Southern Journal of Philosophy* 9: 25-37.

Dummett, Michael (1959) Reseña de Boole (1952). *Journal of Symbolic Logic* 24: 203-9; reimp. como "George Boole" en Dummett (1978), pp. 66-73 [135-142].

--(1973) ***Frege: Philosophy of Language***. Cambridge: Harvard Univ. Press. Segunda edición: 1982.

--(1978) ***Truth and Other Enigmas***. Londres: Ducnworth [***La verdad y otros enigmas***. Versión de A. Herrera. México: FCE, 1990]

--(1981) ***The Interpretation of Frege's Philosophy***. Cambridge: Harvard University Press.

--(1981a) "Frege and Wittgenstein". En Irving Block (ed.) (1981), pp. 31-42.

--(1991) ***Frege. Philosophy of Mathematics***. Cambridge: Harvard Univ. Press.

Echeverría, Javier (1979) "L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz". *Studia Leibnitiana* 11: 223-273.

Eco, Umberto (1994) ***La Búsqueda de la Lengua Perfecta en la Cultura Europea***. Traducción de Maria Pons [de ***La Ricerca della Lingua Perfetta nella Cultura Europea***. Roma, 1993] Barcelona: Crítica.

Elsky, M. (1984) "Bacon's hieroglyphs and the separation of the words and things". *Philological Quarterly* 64: 449-460.

Flostad, G. (ed.)(1981) ***Contemporary Philosophy. A new survey***. Vol. 1. La Hague: M. Nijhoff.

Frängsmyr, F. *et. al.* (eds.) (1990) ***The Quantifying Spirit in the Eighteenth Century***. Berkeley: University of California Press.

Frege, G. (1879) ***Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache***

des reinen Denkens. Halle [***Conceptografía, un leguaje de formulas semejante al de la aritética, para el pensamiento puro***. Traducción de Hugo Padilla en Frege (1972), pp. 5-104. Trad. inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 8-82; y en T. W. Bynum (ed.)(1972), pp. 101-203]

--(1879/1891) "Logik". Versión inglesa en Frege (1979), pp. 1-8.

--(1880/1881) "Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift". Versión inglesa en Frege (1979), pp. 9-46.

--(1882) "Ueber die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 81: 48-56 [Sobre la justificacíon científica de una conceptografía. Traducción española en Frege (1972), pp. 209-14; versión inglesa en Bynum (ed.) (1972), pp. 83-89]

--(1882/1883) "Über den Zweck der Begriffsschrift".*Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft* 16: 1-10. Versión inglesa en Bynum (ed.)(1972), pp. 90-100.

--(1884) ***Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung ueber den der Zahl***. Breslau [***Los Fundamentos de la Aritmética, una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número***. Traducción de Hugo Padilla en Frege (1972), pp. 105- 206].

--(1891) "Funktion und Begriff". Jena [Función y concepto. Traducción española en Frege (1971a), pp. 17-47; Frege (1972), pp. 215-235; Frege (1974), pp. 11-30; Trad. inglesa en Frege (1952), pp. 21-41]

--(1892) "Ueber Begriff und Gegenstand". *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* 16: 192-205 [Sobre Concepto y objeto. Trad. española Frege (1971a), pp. 99-119; Frege (1972), pp. 237-50; Frege (1974), pp. 60-72; Versión inglesa en Frege (1952), pp. 42-55]

--(1892a) "Über Sinn und Bedeutung". *Zeitschrift für Philosophie und* *philosophische Kritik* 100: 25-50 [*Sobre Sentido y Referencia*. Versión española en Frege (1971a), pp. 49-84; y como Sobre *Sentido y Significado* en Frege (1974), pp. 31-52; versión inglesa en Frege (1952), pp. 56-78]

--(1892-95)"Ausführungen über Sinn und Bedeutung". [*Observaciones sobre Sentido y Referencia*. Traducción española en Frege (1972), pp. 85-97; traducido como *Aclaraciones sobre Sentido y Significado*, en Frege (1974), pp. 53-9; Traducción inglesa en Frege (1979), pp. 118-25 como *Comments on Sense and Meaning*]

--(1896) "Lettera del sig. G. Frege all'editore". *Revista di Matematica* 6: 53-9; Trad. inglesa en Dudman (1971), pp. 31-6 y en Frege (1980), p. 112-118.

--(1897) "Über die Begriffsschrift des Herr Peano und meine eigene". En *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzing, Mathematisch-Physisch Klasse* 48: 361-78.

--(1918) "Der gedanke. Eine logische untersuchung". *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus* 1: 58-77 [*El pensamiento. Una investigación lógica*; Trad. española en Frege (1974), pp. 136-157 y Frege (1984), pp. 49-85; versión inglesa en Frege (1977).

--(1924-5) "Zahlen und Arithmetik". Traducción inglesa en Frege (1979), pp. 275-7.

--(1924-5a) "Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften". Versión inglesa en Frege (1979), pp. 267-74.

--(1952) ***Translations from the Philosophical Writings of G. Frege***. Ed. de Peter Geach & Max Black. Trad. de P. Geach, Max Black, P. B. Jourdain & J. Stachelroth. Oxford: Basil Blackwell. 2da ed., 1960.

--(1971) ***On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic***. Versión e introducción de E. Kluge. New Haven: Yale University Press.

--(1971a) ***Studios sobre Semántica***. Versiones de C. Ulises Moulines con una introducción de Jesús Mosterín. Madrid: Ariel; 2ed., 1973.

--(1972) ***Conceptografía. Los Fundamentos de la Aritmética. Otros estudios filosóficos***. Traducciónes de Hugo Padilla Chacón. México: UNAM.

--(1979) ***Posthumous Writings***. Traducciónes de P. Long y R. White [de ***Nachgelassene Schriften***, Vol. I. Hamburg, 1969] Oxford: B. Blackwell.

--(1974) ***Escritos lógico-semánticos***. Trad. de Carlos Pereda y Carlos Luis. Madrid: Tecnos.

--(1977) ***Logical Investigations***. Traducción y edición de Peter Geach & R. H. Stoothoff. Oxford: Basil Blackwell.

--(1980) ***Philosophical and Mathematical Correspondence***. Edición inglesa de B. McGuinness y trad. de H. Kaal [de ***Wissenschaftlicher Briefwechsel.*** Hamburg, 1976] Oxford: Basil Blackwell.

--(1984) ***Investigaciones Lógicas***. De., versión y presentación de Luis Váldes Villanueva. Madrid: Tecnos.

Gardner, Martin (1973)***Máquinas Lógicas y Diagramas***. Trad. de Eli de Gortari [de ***Logic Machines and Diagrams***. New York, 1958]. México: Grijalbo.

Gödel, Kurt (1944) "Russell's mathematical logic". En P. Schilpp (ed.) (1944), pp. 123-153; reimp. en Benacerraf & H. Putnam (eds.)(1983), pp. 447-69. Trad. de E. Casanovas en Gödel (1981), pp. 295-327.

--(1981) ***Obras Completas***. Ed. e introducción de Jesús Mosterín. Trad. De J. Mosterín, E. Casanovas y C. U. Moulines. Madrid: Alianza; segunda edición ampliada: 1989.

Goldfarb, W. (1979) "Logic in the twenties: the nature of the quantifier". *Journal of Symbolic Logic* 44: 351-354.

--(1988) "Poincaré against the logicists". En W. Aspray & P. Kitcher (eds.), pp. 61-81.

Gordon, Terrence (1982) ***A History of Semantics***. Amsterdam: Benjamins.

Grattan-Guinness, Ivor (ed.) (1980) ***History and Philosophy of Logic***. Vol. I. Londres: Abacus.

--(1980b) "George Cantor's influence on Bertrand Russell". En Grattan-Guinness (ed,)(1980a), pp. 61-93.

--(ed.)(1984) ***Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910***. Traduccón de M. Martínez Pérez [de ***From the Calculus to Set Theory, 1630-1910***. Londres, 1980]. Madrid: Alianza.

--(1991) "The correspondence between George Boole and Stanley Jevons, 1863-1864". *History and Philosophy of Logic* 12: 15-35.

--(1991a) "Boole y su semi-seguidor Jevons". *Mathesis* 7: 351-62. Trad. española modificada del texto de Grattan-Guinness en (1991).

Haaparanta, L. & Hintikka, J. (eds.) (1986) ***Frege Synthesized***. Dordrecht: D. Reidel.

Hailperin, Theodore (1976) ***Boole's Logic and Probability***. Amsterdam: North -Holland.

--(1981) "Boole's algebra isn't Boolean algebra". *Mathathematical Magazin*, 54: 172-184.

Harrah, David (1959) "The influence of logic and mathematics on Whitehead". *Journal of the History of Ideas* 20: 420-430.

Hawkins, B. (1981) "Peirce's and Frege's systems of notation". En Ketner et. *al.* (eds.)(1981), pp. 381-89.

Heijenoort, Jan Van (ed.)(1967) ***From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931***. London: Harvard University Press. 3ra reimp., 1977.

--(1967a)"Logic as calculus and logicas language". *Synthese* 17: 324-330.

--(1976) ***El Desarrollo de la Teoría de la Cuantificación***. México: UNAM.

--(1984) "Absolutismo y relativismo en lógica". En Heijenoort *et.al.* (1984), pp. 13-21.

--(1986) "Frege and vagueness". En L. Haaparanta & Jakko Hintikka (eds.)(1986), pp. 31-45.

Heijenoort, Jan *et. al.* (1984) ***Hacia una Explicación de las Entidades Lógicas***. México: UNAM.

Hernández, Víctor M. (1989) "Wittgestein: del absolutismo lógico al relativismo lingüístico". Manuscrito.

--(1995) "Bacon en el ***Mercurio*** de Wilkins". *Metamorfosis* 25: 9-26.

--(1995a) "Leibniz y los tropos". Por aparecer en *Solar*.

--(1996) "Bréal, Frege y los orígenes de la semántica". Por aparecer en las Actas del IV Encuentro de Lingüística en el Noroeste.

Hintikka, J. (1979) "Frege's hidden semantics". *Revue Internationale de Philosophie* 33: 716-722.

--(1981) "Semantics: A revolt against Frege". En Flostad (ed.)(1981), pp. 57-82.

--(1984) "A hundred years later: The rise and fall of Frege´s influence in language theory". *Synthese* 59: 27-49.

Hintikka, Jakko & Hintikka, Merrill (1986) ***Investigating Wittgenstein***. Oxford: Basil Blackwell.

Ishiguro, H. (1981)"Wittgenstein and the theory of types". En Irving Block (ed.)(1981), pp. 43-59.

--(1990) ***Leibniz's Philosophy of Logic and Language***. 2da. ed. Cambridge: Cambridge University Press.

Jakobson, Roman (1988) ***El Marco del Lenguaje***. Trad. de T. Segovia de ***The***

Frame of Language [Michigan, 1980]. México: FCE.

Johnson, A. H. (1958) "Leibniz and Whitehead". *Philosophy and Phenomenological Research* 19: 285-304.

Kennedy, H. C. (1971) "What Russell learned from Peano". *Notre Dame Journal of Formal logic* 14: 367-372.

--(1980) ***Peano. Life and Works of G. Peano***. Holland-Boston: Reidel.

Kenny, Anthony (1981) "Wittgenstein's early philosophy of mind". En Irving Block (ed.)(1981), pp. 148-158.

--(1982) ***Wittgenstein***. Trad. de Alfredo Deaño [Inglaterra, 1973]. Madrid: Alianza

--(1990) ***El Legado de Wittgenstein***. Versión de J. A. Robles [de ***The Legacy of Wittgenstein***. Oxford, 1984]. México: Siglo XXI.

Ketner, K., *et. al.* (eds.) (1981) ***Proceedings of the C. S. Peirce Bicentennial International Congress***. Texas: Texas Tech Press.

Kilmister, C. W. (1992) ***Russell***. Versión de Alfredo Herrera [de ***Russell.*** Gran Bretaña, 1984]. México: FCE.

Kitcher, P. (1979) "Frege's Epistemology". *Philosophical Review* 88: 235-62.

Kleene, S. C. (1952) ***Introduction to Metamathematics***. Amsterdam: North -Holland [***Introducción a la metamatemática***. Versión de Manuel Garrido. Madrid: Tecnos, 1974]

Kline, M. (1985) ***Matemáticas. La perdida de la certidumbre***. Trad. de Andrés Ruiz Merino [de ***Mathematics. The loss of certainty***. New York, 1980]. México: Siglo XXI.

--(1992) ***El Pensamiento Matemático de la Antiguedad a Nuestros Días***. Vol. I-III. Traducción de A. Garciadiego y M. Matinez [de ***Mathematical Thought from Ancient to Modern Times***. Cambridge, 1972]. Madrid: Alianza.

Kluge, Eike-Henner (1980) "Frege, Leibniz and the notion of an ideal language". *Studia Leinitiana* 12: 140-154.

Kosko, Bart (1994) ***Fuzzy Thinking. The new science of fuzzy logic***. Inglaterra: Harper Collins

Leibniz, G. W. (1670)***Dissertatio de Stilo Philosophico Nizolli*** [***Disertación sobre el Estilo Filosófico de Nizolio***. Estudio preliminar y trad. de Luis Frayle Delgado. Madrid: Tecnos, 1993; trad. Parcial inglesa en Leibniz (1969), pp. 121-130].

--(D.M.) ***Discours de Métaphysique.*** (c. 1686) [***Discurso de Metafísica***. Trad., prólogo y notas de Julian Marías. Madrid: Alianza, 1981; trad. inglesa en Leibniz (1969), pp. 303-330].

--(1686) ***Generales Inquisitiones de Analys i Notionum et Veritatum***. En Leibniz (1903), pp. 356-399. Trad. inglesa en Leibniz (1966), pp. 47-87 [***Investigaciones Generales sobre el Análisis de las Nociones y las Verdades***. Versión, Introducción y notas de Mauricio Beuchot y A. Herrera-Ibañez. México: UNAM, 1986].

--(1696) Carta a Gabriel Wagner. Versión inglesa en Leibniz (1969), pp. 462-71; traducción española en Leibniz (1982), pp. 353-69.

--(N.E.) ***Nouveaux Essais sur l'Entendament Humain***, 1705 [***Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano***. Trad. e introducción de Javier Echeverría, Madrid: Alianza, 1992]

--(1903) ***Opuscules et Fragments Inédits***. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Royale de Hanovre par Louis Couturat. Paris: Presses Universitaires de France; reimpresión: Hildesheim, 1961.

--(1951) ***Leibniz: Selections***. Versiones de P. Wiener. New York: Scribens.

--(1966)***Logic Papers: A Selecction***. Trad., introducción y de. de G. H. R. Parkinson. Oxford: Clarendon.

--(1966a) ***Naturaleza y Libertad. Opúsculos Escogidos***. Texto, trad. y notas de José Soriano Gamazo. Universidad del Zulia.

--(1969) ***Philosophical Papers and Letters***. Versión, introducción y de. de Leroy E. Loemker. 2da. ed. en un volumen. Dordrecht: D.Reidel.

--(1982) ***Escritos Filosóficos***. Ed. de Ezequiel De Olaso, notas de E. de Olaso y Roberto Torretti; Trad. de E. de Olaso, R. Torretti y Thomás E. Zwanck. Buenos Aires: Charcas.

Loemker, Leroy (1947) "A note on the origin and problem of Leibniz's ***Discourse*** of 1686". *Journal of the History of Ideas* 8: 449-466.

--(1961) "Leibniz and the Herborn Encyclopedists". *Journal of the History of Ideas* 22: 323-338.

Lowe, Victor (1941) "The development of Whitehead's philosophy". En P. A. Schilpp (ed.)(1941), pp. 16-124.

Lukasiewicz, Jan (1957) ***Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic***. Oxford: Clarendon; 1ra. edición, 1951 [***La Silogística de Aristóteles desde el Punto de Vista de la Lógica Formal Moderna***. Versión de J. F. Robles de la 2da ed., ampliada: 1957. Madrid: Tecnos, 1977].

Lyons, John (1983) ***Lenguaje, Significado y Contexto***. Trad. de S. Alcoba [de ***Language, Meaning and Context***. Londres, 1981]. Barcelona: Paidós.

Mancosu, P. (1991) "On the status of proof by contradiction in the seventeenth century". *Synthese* 88: 15-41.

Mates, Benson (1986) ***The Philosophy of Leibniz: Metaphysics and Language***. New York-Oxford: Oxford University Press.

McGuinness, Brian (1991) ***Wittgenstein. El Joven Ludwig (1889-1921)***. Trad. de Humberto González [de ***Wittgenstein a Life. Young Ludwig (1889-1921)***. Londres, 1988]. Madrid: Alianza.

McNeill, D. & Freiberger, P. (1993) ***Fuzzy Logic***. N. York: S. & Schuster.

Moore, George E. (1899) "The nature of Judgement". *Mind* 8: 176-193.

Moore, G. (1980) "Beyond first-order logic: the historical interplay Between mathematical logic and axiomatic set theory". En Grattan-Guinness (ed.)(1980a), pp. 95-137.

--(1988) "The emergence of first-order logic". En Aspray & Phillip Kitcher (eds.)(1988), pp. 95-135.

Nidditch, P. (1963) "Peano and the recognition of Frege". *Mind* 72: 103-10.

O'Briant, Walter (1979) "Russell and Leibniz". *Studia Leibnitiana* 11: 159-222.

Padoa, Alessandro (1900) "Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une intoduction logique a une théorie déductive quelconque". En ***Bibliothéque du Congrés International de Philosophie, Paris, 1900***; Vol. III. París: Colin, 1901, pp. 309-365. Trad. parcial inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 118-123.

Peano, G. (1889) ***Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita***. Torino: Bocca. Traducción parcial inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 86-97 [***Los Principios de la Aritmética Expuestos Según un Nuevo Método***. Traducción e introducción de J. V. Lombraña. Ed. facsímil. Oviedo:Pentalfa, 1979]

--(1895) Reseña de Frege (1893). *Revista di Matematica* 5: 122-128. Versión inglesa en Dudman (1971), pp. 27-31.

--(1896/1899) "Risposta alla lettera del signor Frege all'Editore". *Revista di Mathematica* 6: 53-61. Versión inglesa en Dudman (1971), pp. 36-7, y en Frege (1980), pp. 118-120.

--(1900) "Les Définitions Mathématiques". En ***Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, Paris, 1900***. Vol. III. París: Colin, 1901; pp. 279-288.

Peirce, Charles (1885) "On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation". *Amer. Jour. Math.* 7: 180-202. Traducción española en Peirce (1968), pp. 167-200.

--(1968) ***Escritos Lógicos***. Introducción, selección y Traducción de Pilar Castrillo Criado. Madrid: Alianza.

Pharies, David (1985) ***Charles S. Peirce and the Linguistic Sign***. Amsterdam: Benjamins.

Pieri, M. (1900) "Sur la géométrie envisagée comme un systéme purement logique". En ***Bibliothéque du Congrés International de Philosophie, Paris, 1900;*** Vol. III. París: Armand Colin, 1901, pp. 367-404.

Picardi, Eva (1987) "The logics of Frege's contemporaries, or «Der Verderbliche einbruch der psychologie in die logik»". En Dino Buzzetti & M. Ferriani (eds.)(1987), pp. 172-204.

Platts, Mark (1992) ***Sendas del Significado. Introducción a una filosofía del lenguaje***. Trad. de Cecilia Hidalgo y Eduardo Rabossi [de ***Ways of Meaning: an introduction to a philosophy of language***. Londres, 1979]. México: FCE.

Poincaré, Henry (1899) "Des foundements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell". *Revue de Métaphysique et de Morale* 7: 251-279.

Popper, K. R. (1972) ***Objetive Knowledge***. Oxford: Clarendon [***Conocimiento Objetivo***. Versión de Carlos Solis. Madrid: Tecnos, 1974]

Prior, A. N. (1949) "Categorial and hypotheticals in George Boole and his successors". *Australasian Journal of Philosophy* 27: 171-196.

Quine, Willard Von (1941) "Whitehead and the rise of modern logic". En Schilpp (ed.) (1941), pp. 127-163; reimp. en Quine(1995), pp. 3-36.

--(1955) "On Frege's Way out". *Mind* 64: 145-159; reimpreso en Quine (1995), pp. 146-58.

--(1970) ***Philosophy of Logic***. New Jersey: Prentice-Hall [***Filosofía de la Lógica***. Versión de Manuel Sacristán. Madrid, Alianza, 1973].

--(1987) "Peano as logician". *History and Philosophy of Logic* 8: 15-24. Reimpreso en Quine (1995), pp. 266-277.

--(1995) ***Selected Logic Papers***. Cambridge: Harvard University Press. Edición ampliada. 1era ed.: 1966.

Rescher, Nicholas (1981) ***Sistematización Cognitiva***. Versión de Rafael Luis [de ***Cognitive Systematization. A systems-theoretic approach to a coherentist theory of knowledge***. Oxford, 1979]. México: Siglo XXI.

--(1981) ***Leibniz's Philosophy of Nature***. Holanda: D. Reidel.

--(ed.)(1989) ***Leibnizian Inquiries***. Lanham: University Press of America.

Richards, Joan (1986) "Proyective geometry and mathematical progress in mid-victorian Britain". *Stud. Hist. Phil. Sci.* 17: 297-325.

--(1988) "Bertrand Russell's ***Essay on the Foundations of Geometry*** and the Cambridge mathematical tradition". *Russell* 8: 59-80.

Richards, J. (1980) "Boole and Mill: differing perspectives on logical pychologism". En Ivor Grattan-Guinness (ed.)(1980a), pp. 19-36.

Rider, R. (1990) "Measure of ideas, rule of language: Mathematics and language in 18th century". En Fränsmyr *et. al.* (eds.)(1990), pp. 113-140.

Robinson, A. (1968) "Some thoughts on the history of mathematics". En Dalen *et. al.* (eds.)(1968), pp. 188-193.

Rossi, P. (1989) ***Clavis Universalis. El arte de la memoria y la lógica combinatoria de Lulio a Leibniz***. Traducción de Esther Cohen [de ***Clavis Universalis. Arti della memoria e logica combinatoria da Lullo a Leibniz***. Bologna, 1983]. Méx.: FCE.

Roy, Oliver (1972) ***Leibniz et la Chine***. France: Vrin.

Russell, Bertrand (1897) ***An Essay on the Foundations of Geometry***. Cambridge:

Cambridge University Press [***Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría***. Versión de Julio Porcel en Russell (1973a), pp. 13-157]

--(1898) "Les axiomes propes à Euclide. Sont-ils empiriques?". *Revue de Métaphysique et de Morale* 6: 759-776.

--(1899) "Sur les axiomes de la géométrie". *Revue de Métaphysique et de Morale* 7: 684-707.

--(1900) ***A critical Exposition of the Philosophy of Leibniz, with an appendix of leading passages***. Cambridge: Cambridge Univ. Press [***Exposición Crítica de la Filosofía de Leibniz***. Trad. de Benito Cardenal en Russell (1973a), pp. 161-375]

--(1901) "On the notion of order". *Mind* 10: 30-51.

--(1902) "Carta a Frege". Versión inglesa en Heijenoort (ed.)(1967), pp. 124-125 y Frege (1980), pp. 130-131.

--(1903) ***The Principles of Mathematics***. London: Allen and Unwin; 2da ed., 1937. Nueva ed. New York: Norton, 1996 [***Los Principios de la Matemática***. Versión de José B. Gutierrez en Russell (1973a), pp. 377-820]

--(1903a) "Recent work on the philosophy of Leibniz". *Mind* 12: 177-201.

--(1905) "On Denoting". *Mind* 14: 479-93; reimp. en Russell (1956), pp. 39-56 [51-74].

--(1914) ***Our knowledge of the External World as a field for a scientific method in philosophy***. Londres: Open Court [***Nuestro Conocimiento del Mundo Exterior como campo para el método científico en filosofía***. Trad. de Miguel Ortega en Russell (1973a), pp. 1145-1262]

--(1918-1919) "the philosophy of logical atomism". *The Monist* 28: 495-527; 29: 33-63, 190-222 y 344-380. Reimp. en Russell (1956), pp. 245-395.

--(1919) ***An Introduction to the Mathematical Philosophy***. Londres: G. Allen & Unwin [***Introducción a la Filosofía Matemática***. Traducción de J. Fuentes en Russell (1973a), pp. 1264-1390.

--(1921) Introducción al ***Tractatus***. En Wittgenstein (1921), pp. [11-28 o 185-197].

--(1923) "Vagueness". *Australasian Journal of Psychology and Philosophy* 1: 84-94. Trad. española de E. Arias y L. Fornasari en Mario Bunge (comp.)(1960), pp. 14-24.

--(1924) "Logical atomism". En ***Contemporary British Philosophy***. J. Muirhead comp., Londres: Allen & Unwin. Trad. española en Ayer (comp.)(1965), pp. 37-56.

--(1956) ***Logic and Knowledge, 1901-1950***. Ed. de R. Ch. March. London: G. Allen & Unwin [***Lógica y Conocimiento***. Versión de J. Muguerza. Madrid: Taurus, 1966].

--(1973) ***Essays in Analysis***. Londres: G. Allen & Unwin.

--(1973a) ***Obras Completas. Volumen II, Ciencia y Filosofía 1897-1919***. Madrid: Aguilar.

--(1984) ***The Collected Papers of Bertrand Russell, v. 7. Theory of Knowledge. The 1913 manuscript***. Edición de E. Ramsden Eames con la colaboración de Kenneth Blackwell. Londres: Allen & Unwin.

Saussure, F. de (1916) ***Cours de Linguistique Générale***. Ed. de Charles Bally & A. Sechehaye; 2da edición 1922. Ginebra: Lausanne [***Curso de lingüística General***. Versión de M. Armiño de la 2da ed.. México: Planeta, 1993]

--(1977) ***Fuentes Manuscritas y Estudios Críticos***. Edición de Ana M. Nethol, y versiones de M. Olivera y A. M. Nethol. 2da ed. corregida y aumentada. México: Siglo XXI.

Schilpp, P. A. (ed.)(1941) ***The Philosophy of Alfred N. Whitehead***. Evanston:

Northwestern University Press.
--(ed.)(1944) ***The Philosophy of Bertrand Russell.*** Evanston: Northwestern Univ. Press; 2da. ed.: New York: Harper, 1963.

Schröder, Ernest (1880) Reseña de Frege (1879). *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 25: 81-94. Versión inglesa en Bynum (ed.)(1972), pp. 218-232.

Tarski, A. (1944) "The semantic conception of truth and the foundations of semantics". *Philosophy and Phenomenological Research* 4: 341-76. Trad. española de M. Bunge en Bunge (comp.)(1960), pp. 111-157.

Thiel, Ch. (1972) ***Sentido y Referencia en la Lógica de Gottlob Frege.*** Trad. española ampliada de ***Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Freges.*** Trad. de José Sanmatin Esplugues. Madrid: Tecnos.

Venn, John (1880) Reseña de Frege (1879). *Mind* 5: 297. Reimp. en T. Bynum (ed.)(1972), pp. 234-5.

Wang, Hao (1987) ***Reflections on Kurt Gödel.*** Cambridge: MIT Press.

--(1991) "To and from philosophy-Discussions with Gödel and Wittgenstein". *Synthese* 88: 229-277.

Whitehead, A. N. (1898) ***A Treatise on Universal Algebra. Whith applications.*** Inglaterra: Cambridge Univ. Press. Reimp. New York: Hafner, 1960.

--(1925) ***Science and the Modern World.*** Cambridge: Cambridge Univ. Press. New York: Mentor Book, 1948.

--(1927) ***Symbolism. Its meaning and effect.*** N. York: Macmillan. Reimp. 1958.

--(1938) ***Modes of Thought.*** New York: Macmillan [***Modos de Pensamiento.*** Versión de J. Xirau. Buenos Aires: Losada, 1944]

--(1941) "Autobilografical notes". En Schilpp (ed.)(1941), pp. 1-14.

Wilkins, John (1641) ***Mercury: or the secret and swift messenger. Shewing how a man may with privacy and speed communicate his thoughts to a friend at any distance.***

Reimp. de la 3ra ed., *The mathematical and philosophical works of the right reverend John Wilkins* (1708), con resumen del *Essay Towards a Real Character and a Philosophical Language;* y una intro. de Brigitte Asbach-Schnitker. Amsterdam: Benjamins, 1984.

Wittgenstein, Ludwig (1921) *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. inglesa de C. K. Ogden. Londres: Routledge & Kegan [Trad. de Tierno Galván; Trad. e introducción de J. Muñoz e I. Reguera: Madrid: Alianza, 1972 y 1987 respectivamente]

--(1969) *Über Gewissheit. On Centainty*. Ed. de G. E. M. Ascombe y G. H. Wright. Versión inglesa de Denis Paul y G. Ascombe [*Sobre la Certeza*. Versión de Josep L. Prades y Vincent Raga. Barcelona: Gedisa, 1988]

--(1978) *Remarks on the Foundations of Mathematics*. Ed. revisada de G. H. von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe. Versión de G. Ascombe. Londres: MIT Press. 1era. ed.: 1956 [*Observaciones sobre los Fundamentos de la Matemática*. Versión de I. Reguera. madrid: Alianza, 1987]

--(1979) *Notebooks 1914-1916*. Edición de G. H. von Wright y E. Ascombe; Versión inglesa de Anscombe. Chicago: Chicago Univ. Press. 1ra ed.: Oxford: B. Blackwell, 1961 [*Diario Filosófico 1914-1916*. Traducción de J. Muñoz e Isidoro Reguera. España: Planeta, 1986]

--(1992) *Gramática Filosófica*. Trad. de Luis Felipe Segura según el texto establecido por Rush Rhees [*Philosophische Grammatik- Philosophical Grammar*, Oxford: B. Blackwell, 1969]. México: UNAM.

Yates, Frances (1990) *Ensayos Reunidos, I. Lulio y Bruno*. Versión de Thomas Segovia [de *Lull & Bruno. Collected Essays. Volume I*. Londres, 1982]. México: FCE.