



872715  
1  
24

UNIVERSIDAD DON VASCO, A.C.

INCORPORADA A LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

CLAVE N° 8727-15

ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

METODOS NUMERICOS APLICADOS AL FLUJO EN  
CANALES ARTIFICIALES DE SECCION REGULAR, POR  
COMPUTADORA

---

TESIS PROFESIONAL

QUE PRESENTA

**JUAN CARLOS CARAVEO VILLANUEVA**

**LUIS FERNANDO MAGAÑA GOMEZ**

PARA OBTENER EL TITULO DE

**INGENIERO CIVIL**

URUAPAN, MICHOACAN

264667  
1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Es motivo nuestro mostrar reconocimiento merecido a nuestras familias, amigos y compañeros que con su ejemplo, amistad, cariño y apoyo nos acompañaron a lo largo de nuestros estudios, agradeciendo y dedicando a ellos el presente trabajo.

Al Ing. Martín Barragán Solís, profesor excelente en su área, que como nosotros ha disfrutado del estudio de la hidráulica y los métodos numéricos, deseando contribuir con sus actividades docentes y publicaciones a incrementar el conocimiento en estas bellas ramas de la ingeniería civil.

También queremos mostrar especial agradecimiento al Ing. Anastacio Blanco Simiano, quién con su dedicación, apoyo y amistad nos impulsó siempre adelante.

Al Ing. Raúl Jamit Abud, director de nuestra Escuela de Ingeniería Civil, por todo su respaldo como profesor y como persona.



## INDICE

I.	<b>INTRODUCCION</b>	1
II.	<b>CONCEPTOS BASICOS</b>	6
	A. FUNDAMENTOS TEORICOS	7
	A.1. FLUJO EN CANAL ABIERTO Y SUS CLASIFICACIONES	7
	A.2. TIPOS DE ESCURRIMIENTO	8
	A.3. ESTADO DE FLUJO	10
	A.4. REGIMENES DE FLUJO	17
	B. TIPOS DE CANAL ABIERTO	19
	B.1. GEOMETRIA DEL CANAL	19
	B.2. ELEMENTOS GEOMETRICOS DE LA SECCION DEL CANAL	21
	C. DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD EN UN CANAL	23
	C.1. CANAL ABIERTO ANCHO	25
	C.2. MEDIDAS DE LA VELOCIDAD	25
	C.3. COEFICIENTES DE DISTRIBUCION DE VELOCIDAD	26
III.	<b>CANALES CON FLUJO CRITICO</b>	28
	A. FUNDAMENTOS TEORICOS: PRINCIPIOS DE ENERGIA Y MOMENTUM	29
	A.1. ENERGIA EN ESCURRIMIENTO EN CANAL ABIERTO	29
	A.2. ENERGIA ESPECIFICA	31
	A.3. CRITERIO PARA EL ESTADO CRITICO DEL FLUJO	32
	A.3.1. INTERPOLACION DE LOS FENOMENOS LOCALES	34
	A.4. MOMENTUM EN ESCURRIMIENTO EN CANAL ABIERTO	35
	A.5. FUERZAS ESPECIFICAS	39
	B. FLUJO CRITICO: CALCULO Y APLICACIONES	42
	B.1. EL FACTOR DE LA SECCION PARA CALCULO DE FLUJO CRITICO	43
	B.2. EL EXPONENTE HIDRAULICO PARA EL CALCULO DE FLUJO CRITICO	44
	B.3. CALCULO DEL FLUJO CRITICO	47
	B.3.1. METODO ALGEBRAICO	47
	B.3.2. METODO GRAFICO	48
	B.3.3. METODO DEL GRAFICO DEL DISEÑO	48



<b>IV.</b>	<b>CANALES A FLUJO UNIFORME</b>	<b>49</b>
A.	FUNDAMENTOS TEORICOS	50
A.1.	DESARROLLO DEL FLUJO UNIFORME Y SUS FORMULAS	50
A.2.	ESTABLECIMIENTO DEL FLUJO UNIFORME	50
A.3.	EXPRESANDO LA VELOCIDAD DE UN FLUJO UNIFORME	52
A.4.	FORMULA DE CHEZY	52
A.4.1.	DETERMINACION DEL FACTOR DE RESISTENCIA DE CHEZY (C)	53
A.4.1.1.	FORMULA DE G.K. (GANGUILLET Y KUTTER)	53
A.4.1.2.	FORMULA DE BAZIN	54
A.4.1.3.	FORMULA DE POWELL	55
A.5.	FORMULA DE MANNING	56
B.	CALCULO DE FLUJO UNIFORME	57
B.1.	TRANSPORTE DE LA SECCION DE UN CANAL	57
B.2.	FACTOR DE LA SECCION PARA CALCULO DE FLUJO UNIFORME	58
B.3.	EL EXPONENTE HIDRAULICO PARA EL CALCULO DE FLUJO UNIFORME	59
B.4.	DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD NORMAL Y DE LA VELOCIDAD	63
B.4.1.	METODO ALGEBRAICO	63
B.4.2.	METODO GRAFICO	64
B.4.3.	METODO DEL GRAFICO DEL DISEÑO	64
B.5.	DETERMINACION DE LAS PENDIENTES NORMAL Y CRITICA	65
B.6.	METODOLOGIA DE CALCULO DE FLUJO UNIFORME	65
B.7.	FLUJO DE SUPERFICIE UNIFORME	66
B.8.	TABLA DE LOS VALORES DE LA $n$ DE MANNING	68
<b>V.</b>	<b>SALTO HIDRAULICO</b>	<b>69</b>
A.	FUNDAMENTOS TEORICOS: SALTO HIDRAULICO	70
A.1.	SALTO EN CANALES HORIZONTALES RECTANGULARES	70
A.2.	TIPOS DE SALTO	71
A.3.	CARACTERISTICAS BASICAS DEL SALTO	73
A.4.	LONGITUD DEL SALTO	75
A.5.	EL PERFIL DE LA SUPERFICIE	76
A.6.	LOCALIZACION DEL SALTO	77
A.7.	EL SALTO COMO DISIPADOR DE ENERGIA	79
A.8.	FUNCION MOMENTUM	79



<b>VI.</b>	<b>FLUJO GRADUALMENTE VARIADO</b>	<b>83</b>
A.	FUNDAMENTOS TEORICOS: FLUJO GRADUALMENTE VARIADO	84
A.1.	ECUACION DINAMICA DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO	86
A.2.	CARACTERISTICAS Y CLASIFICACION DE PERFILES EN FLUJO GRADUALMENTE VARIADO	89
B.	INTEGRACION DE LA ECUACION DINAMICA	90
B.1.	METODO DEL PASO DIRECTO (PASO DIRECTO EN ETAPAS)	91
B.2.	METODO DEL PASO ESTANDAR	92
B.2.1.	ECUACION PARA EL FLUJO SUPERCRITICO	93
B.2.2.	ECUACION PARA EL FLUJO SUBCRITICO	94
B.3.	METODO DE INTEGRACION GRAFICA	94
<b>VII.</b>	<b>SOLUCION MANUAL Y POR COMPUTADORA DE PROBLEMAS DE HIDRAULICA DE CANALES MEDIANTE METODOS NUMERICOS</b>	<b>96</b>
A.	FUNDAMENTOS TEORICOS: ANTECEDENTES	97
A.1.	METODO DE NEWTON-RAPHSON	97
A.2.	METODO DE LA SECANTE	100
A.3.	INTEGRACION NUMERICA	102
A.3.1.	REGLA TRAPEZIAL	102
A.3.2.	EXTRAPOLACION DE RICHARDSON	104
A.3.3.	INTEGRACION DE ROMBERG	106
B.	EJEMPLOS	107
B.1.	EJEMPLO CALCULO DE $y_n$ PARA CANAL RECTANGULAR (METODO DE NEWTON-RAPHSON)	107
B.2.	EJEMPLO CALCULO DE $y_c$ PARA CANAL TRAPEZOIDAL (METODO DE LA SECANTE)	108
B.3.	EJEMPLO CALCULO CANAL TRAPEZOIDAL (METODO DEL PASO DIRECTO)	109
B.4.	EJEMPLO CALCULO CANAL CIRCULAR (METODO DEL PASO STANDARD)	111
B.5.	EJEMPLO CALCULO CANAL TRAPEZOIDAL (METODO DE INTEGRACION GRAFICA)	113
B.6.	EJEMPLO CALCULO DE $y_l$ PARA CANAL RECTANGULAR (SALTO HIDRAULICO)	115



<b>CONCLUSIONES</b>	116
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	118
<b>ANEXOS</b>	121
<b>A. HIDRAULICA</b>	122
A.1 TABLA DE ABREVIATURAS	122
A.2 ELEMENTOS GEOMETRICOS DE LAS SECCIONES (CUADRO II-1)	124
A.3 DETERMINACION PRACTICA DE LOS COEFICIENTES DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES	125
A.4 DISTRIBUCION DE LA PRESION EN LA SECCION DE UN CANAL	126
A.4.1 EFECTO DE LA PENDIENTE SOBRE LA DISTRIBUCION DE PRESION	127
A.5 CURVAS PARA DETERMINAR LA PROFUNDIDAD CRITICA (CUADRO III-1)	129
A.6 CURVAS PARA DETERMINAR LA PROFUNDIDAD NORMAL (CUADRO IV-1)	130
A.7 CARACTERISTICAS DEL ESCURRIMIENTO EN UN CONDUCTO CERRADO CON FLUJO EN CANAL ABIERTO	131
<b>B. PROGRAMACION</b>	133
B.1 SIMBOLOGIA EMPLEADA EN LOS DIAGRAMAS DE FLUJO	133
B.2 DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE LA SECANTE	134
B.3 DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO DE NEWTON-RAPHSON	135
B.4 DIAGRAMA DE FLUJO DEL METODO ROMBERG	136



# INTRODUCCION





## I. INTRODUCCION

Emprendimos el presente trabajo con la intención de mostrar una aplicación de los métodos numéricos, en la solución de ecuaciones de la hidráulica de canales que tradicionalmente se resuelven por tanteos o métodos gráficos. En ello existe el propósito de evitar al ingeniero o estudiante de la hidráulica las operaciones matemáticas necesarias para resolver un problema típico de esta disciplina. Lo anterior no significa que el usuario se convierta en mero espectador y se concrete a introducir datos y obtener resultados, mas bien; la computadora será una herramienta que le facilite la tarea para tomar decisiones en el proceso de la solución de un problema. No se debe olvidar que la máquina es incapaz de tomar decisiones por si sola, es decir, si se introducen datos erróneos los resultados también lo serán. De ahí la advertencia de tener cuidado al usar un software determinado sin saber exactamente su funcionamiento y determinar lo que se espera y a partir de qué información se obtendrá.

En el presente trabajo se hace énfasis en los principios generales de la hidráulica de canales, los cuales se deben comprender suficientemente como para hacer un uso adecuado de las expresiones matemáticas que emanan de ellos, para después poder plantear el uso de herramientas valiosas y poderosas como son: la matemática numérica y la programación de computadoras.

Puede partirse de una base refutable de que no vale la pena invertir tiempo en programar computadoras, y mejor proceder a resolver directamente problemas por medios convencionales como gráficas y operaciones manuales. Decimos refutable porque si bien, el tiempo empleado en desarrollar algoritmos, diagramas de flujo y codificación de programas es considerable y la labor delicada, los beneficios son apreciables y valiosos, como por ejemplo: Se puede resolver un problema dado en repetidas ocasiones para verificar su solución en un tiempo breve, además existe la posibilidad de tener mayor precisión en los cálculos, confiabilidad y seguridad.

Los métodos numéricos son una rama de las matemáticas que también se conocen como matemática numérica, análisis o cálculo numérico. A su vez las ciencias de la computación tienen fuertes componentes matemáticos como la matemática simbólica y en sí los métodos numéricos. Uno de los intereses fundamentales de las ciencias computacionales es el análisis algorítmico o estudio de los algoritmos. Un algoritmo es un conjunto completo y bien definido de procedimientos que conllevan a la solución de un problema matemático dado. Los métodos numéricos consisten en la teoría y práctica del cálculo eficiente y la estimación de error de una solución aproximada. Cabe señalar que la diferencia entre matemática y matemática numérica estriba en el concepto de eficiencia. Los métodos numéricos buscan la elección del procedimiento más adecuado.



Los métodos numéricos son muy antiguos, los babilonios (2000 a. de c.) elaboraron tablas matemáticas y efemérides astronómicas. Arquímedes en el año 200 a. de c. empleó polígonos regulares como aproximaciones del círculo. Desde entonces y hasta el siglo XVIII se trabajó principalmente en las tablas astronómicas. En 1614 Neper publicó la primera tabla de logaritmos. Hacia finales del siglo XVII se usaba en abundancia el cálculo con series. Newton creó un método para aproximar raíces de polinomios algebraicos que todavía se usa en la actualidad. Por su parte Euler (1707-1783) tiene innumerables ejemplos numéricos dispersos en sus sesenta volúmenes publicados, los algoritmos que empleó aparecen frecuentemente bajo la forma de series. A mediados del siglo XVIII aparece la regla de Simpson. En el presente siglo, a causa del desarrollo vertiginoso de las computadoras electrónicas, los métodos numéricos se han seguido desarrollando de manera enorme. A pesar de sus raíces tan antiguas, la matemática numérica comenzó ya como disciplina independiente en el año de 1947, cuando se le denominó "Análisis Numérico" por sus estudiosos como: Householder, Traub y Wilkinson.

En cuanto a la hidráulica de canales podemos decir que los proyectos hidráulicos y trabajos de ingeniería en esa área se han intensificado en los últimos años. La ingeniería sanitaria, el tratamiento y conducción de aguas residuales, y los proyectos hidroeléctricos son algunas ramas de la ingeniería civil que se han beneficiado con la aportación de las teorías y prácticas de esta parte de la hidráulica; como en el caso específico del diseño de estructuras hidráulicas.

Nuestro trabajo pretende conjuntar una parte de estas dos ramas del conocimiento que para nosotros los ingenieros son fundamentales.

En este trabajo nos concretamos a tratar sobre los canales de sección regular (los más comunes), es decir artificiales, dejando a un lado lo referente al flujo en cauces naturales y canales erosionables, que si bien su comportamiento entra en la clasificación de flujo a superficie libre, sus características como arrastre de sedimentos y erosionabilidad, con la consiguiente disminución de sección y acumulación de sedimentos forman un estudio aparte de lo que tratamos aquí. En el segundo capítulo se estudian los principios generales del flujo en canales o sea con una superficie libre expuesta a la atmósfera, las secciones y propiedades geométricas. El tercer y cuarto capítulo tratan sobre las teorías y ecuaciones que rigen al comportamiento del flujo en canales ante los importantes regímenes, uniforme y crítico. El quinto capítulo versa sobre el salto hidráulico resaltando su importancia como fenómeno local y disipador de energía. Finalmente se trata del cálculo de los perfiles formados por el flujo gradualmente variado, esto es cuando existe un cambio en la profundidad a lo largo de un tramo de canal. Siendo así el capítulo siete la compilación de los ejemplos que fueron resueltos manualmente y por computadora, lo que constituye el objetivo primordial de este trabajo.



En esta tesis, hemos empleado tres métodos numéricos que son: método de la secante, método de Newton-Raphson e integración de Romberg. Se han seleccionado estos métodos por sobre otros debido a su exactitud y precisión. Los dos primeros métodos utilizados sirven para obtener raíces de polinomios. El tercero, como su nombre lo indica se usa para la determinación de áreas bajo curvas, que es la interpretación de la integral que usamos en el flujo gradualmente variado, recuérdese que otra función de la integral es obtener una ecuación a partir de una derivada o una ecuación diferencial.

Para resolver casos de flujo normal y crítico se debe conocer el tirante crítico y el tirante normal, esto lo hacemos en el desarrollo de dichos capítulos, calculando la raíz de las ecuaciones de Manning para el flujo normal y la ecuación del flujo crítico. Para el flujo gradualmente variado usamos los métodos de Newton-Raphson y la integración de Romberg como se verá en su momento.

Deseamos aclarar que a lo largo de la tesis aparecen citas textuales principalmente del libro "hidráulica de los canales abiertos" de Ven Te Chow, las cuales no están señaladas como tales, nuestra intención fue mostrar la teoría de la hidráulica desde una de sus fuentes mas legítimas, es decir, Chow recopiló e investigó toda la gama de teorías de y antes de su tiempo, también en su obra están plasmados años de experimentación, por lo que no quisimos cambiar su obra que es tan clara y completa, debido a que cuenta con el valor del testimonio directo del investigador. Nosotros sólo nos encargamos de comentar los puntos que creímos sobresalientes, y corregir algunas frases que tienen sentido equívoco en el lenguaje técnico de la ingeniería en nuestro idioma. Debe quedar entendido que nuestra aportación es en torno a la aplicación los métodos numéricos a problemas de la hidráulica de canales, no así sobre la elaboración de los postulados de ésta última, de hecho ni contamos con los medios experimentales para realizar aportaciones a la ciencia de la hidráulica.

En algunos casos, las unidades quedaron en sistema inglés tal como aparecen en los textos originales. Esto es justificable, debido a los orígenes prácticos (empíricos) de muchas teorías y sus expresiones matemáticas que incluyen coeficientes y constantes, aunque en algunos casos sí hicimos la conversión a nuestro sistema métrico, como para la ec. de Manning.

El proceso que se siguió para la elaboración de los programas fue: (1) resolver un ejemplo de forma manual, (2) enunciar las tareas a realizar y los resultados a obtener, (3) elaborar un diagrama de flujo, (4) codificar en un lenguaje de computación, (5) depurar y corregir los programas.

La elección de los temas a realizar fue hecha por nuestro asesor, considerando el alcance de un trabajo de esta naturaleza y además de nuestra propuesta de trabajar en equipo de dos.



Los temas tratados en esta tesis cubren en un 75% aproximadamente el contenido del programa de la asignatura de "Hidráulica de Canales" impartida en nuestra Universidad, por lo que consideramos que una de las finalidades con las que elaboramos nuestro trabajo es servir de ayuda didáctica en la impartición de dicha materia, en lo concerniente a verificar algunos ejemplos dados en clase mediante los programas de computación que se presentan.

Pensamos que está en cada ingeniero el utilizar todas las herramientas a su disposición para que realice proyectos de calidad cumpliendo con su ética profesional y las normas vigentes de su ejercicio, por ello queremos contribuir con este trabajo para aquellos que como nosotros desean utilizar las computadoras y calculadoras programables para resolver problemas de una forma más fácil y con un margen menor de error.



# CAPITULO II

---

# CONCEPTOS BASICOS



### A.1. FLUJO EN CANAL ABIERTO Y SUS CLASIFICACIONES

El escurrimiento o flujo de agua en un conducto puede ser *escurrimiento en canal abierto* o *en tubería (cañería)*. Las dos clases de escurrimiento son similares en muchos aspectos, pero difieren en un punto importante: el escurrimiento en canal abierto debe tener una superficie libre, mientras que el escurrimiento en tubería no tiene ninguna, ya que el agua debe llenar el conducto totalmente. Una superficie libre está expuesta a la presión atmosférica. En el caso de las tuberías, es la carga de presión entre otras la causante del que el flujo ocurra. En los canales es básicamente una diferencia de alturas o desnivel del fondo del canal el motivo del flujo.

Las condiciones del escurrimiento en canales abiertos son complicadas por el hecho de que la posición de la superficie cambie en función del tiempo y del espacio y también porque la profundidad del escurrimiento, el canal, y las pendientes del fondo del canal y de la superficie libre son interdependientes. Datos experimentales confiables son normalmente difíciles de obtener sobre el escurrimiento en canales abiertos. Más aún, las condiciones físicas de los canales abiertos varían mucho más que las de las tuberías. Por ejemplo al estar expuestos los canales a la atmósfera, el flujo puede sufrir cambios debidos al ambiente (temperatura, evaporación, etc.). La sección transversal de una tubería es generalmente redonda, pero la de un canal abierto puede ser de cualquier forma, desde la circular hasta las formas irregulares de las corrientes o cursos naturales.

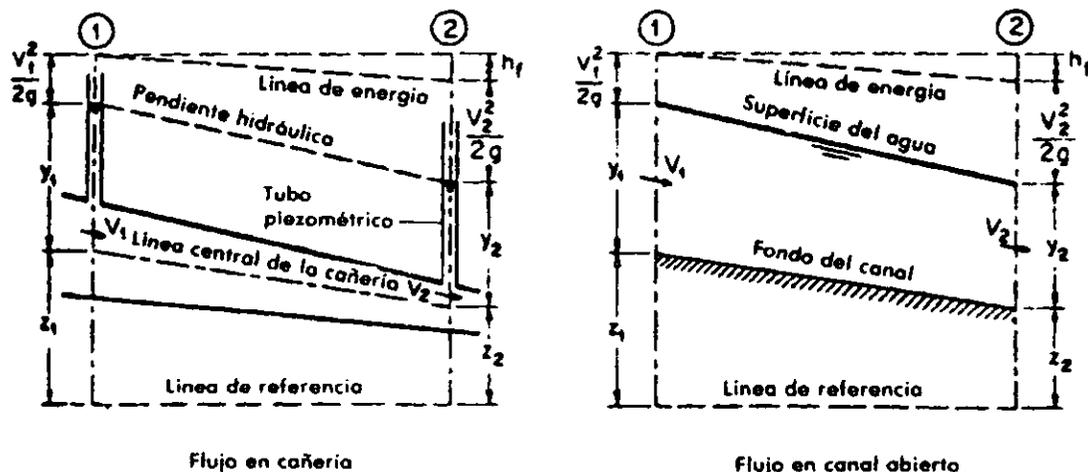


FIG. II-1 COMPARACION ENTRE FLUJO EN CAÑERÍA Y FLUJO EN CANAL ABIERTO.

En los canales abiertos la superficie varía desde la correspondiente a un metal pulido usado en canales de prueba hasta en lechos de ríos de rugosidad irregular. Mas aún, las fuerzas de fricción en un canal abierto varía con la posición de la superficie libre. La selección de los coeficientes de fricción está sujeta a una mayor incertidumbre para canales abiertos que para tuberías. En general, el tratamiento de los escurrimientos en canales abiertos es algo más empírico que el de escurrimiento en tuberías. El método empírico es el mejor disponible actualmente, si se aplica cuidadosamente, pudiendo producir resultados de valor práctico. El



escurrimiento en un conducto cerrado no es necesariamente escurrimiento en tubería. Debe ser clasificado como escurrimiento en canal abierto si tiene una superficie libre. Las tuberías de aguas pluviales, por ejemplo, que son conductos cerrados, son generalmente proyectadas para escurrimiento en canal abierto puesto que el escurrimiento en el conducto se supone que mantendrá una superficie libre la mayor parte del tiempo. Tal como indica Chow el método experimental, será el más indicado cuando exista la incertidumbre en la aplicación de cierta teoría. Cabe recordar que el desarrollo de hidráulica de canales se debe a la experimentación y a la generación de resultados prácticos.

## A.2. TIPOS DE ESCURRIMIENTO

El flujo en canal abierto puede clasificarse en muchos tipos y descrito en diferentes modos. La clasificación siguiente se ha hecho de acuerdo al cambio de la profundidad del flujo en función del tiempo y espacio. Para mayor facilidad y comprensión sobre las variables favor de consultar el anexo A.1, el cual es la tabla de abreviaturas.

*Escurrecimiento permanente y escurrimiento no permanente:* El tiempo es el criterio ( $\partial C/\partial t=0$ , donde  $C$ = característica del flujo). El escurrimiento en un canal abierto se dice que es permanente si la profundidad del escurrimiento no cambia o si se supone que es constante durante el intervalo de tiempo considerado. El escurrimiento es *no permanente* si la profundidad cambia con el tiempo ( $\partial C/\partial t \neq 0$ ). En la mayor parte de los problemas de canales abiertos, es necesario estudiar el procedimiento solamente bajo condiciones permanentes. Si, sin embargo, el cambio en las condiciones del escurrimiento con respecto al tiempo es grande, el escurrimiento con respecto al tiempo es grande, el escurrimiento deber ser tratado como no permanente. En crecidas y mareas, por ejemplo, las cuales son ejemplos típicos de escurrimiento no permanente, la forma del escurrimiento cambia instantáneamente a medida que las olas pasan, y el elemento tiempo se hace vitalmente importante en el diseño de estructuras de control.

Para todo escurrimiento, el caudal  $Q$  en una sección del canal se expresa por

$$Q = VA \quad (\text{II-1})$$

$V$  es la velocidad media y  $A$  es el área de la sección transversal del escurrimiento, normal a la dirección del flujo, ya que la velocidad media se define como el caudal dividido por el área de la sección transversal.

En la mayoría de los problemas de flujo permanente, el caudal es constante a lo largo del tramo del canal en consideración; es decir que el flujo es *continuo*. Entonces, usando la ecuación (II-1)

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (\text{II-2})$$



en donde los subíndices indican diferentes secciones del canal. Esta es la *ecuación de continuidad* para un escurrimiento permanente.

La ecuación (II-2) es obviamente sin valor, cuando el caudal de un flujo permanente es *no uniforme* a lo largo del canal, es decir, cuando el agua entra o sale a lo largo del curso del escurrimiento. Este tipo de flujo, conocido como *espacialmente variado* o *flujo discontinuo*, se ha encontrado en alcantarillas, canales laterales de vertederos, desagües, en filtros, canales afluentes alrededor de tanques de tratamiento de aguas servidas, y en los principales canales de drenaje y canales de alimentación de los sistemas de irrigación.

La ley de continuidad de los flujos no permanentes requiere consideración del efecto del tiempo. Por lo tanto, la ecuación de continuidad para flujos no permanentes y continuos debería incluir el elemento tiempo como variable.

**Flujo uniforme y flujo variado:** *El espacio es el criterio.* El flujo en canal abierto se dice que es *uniforme* si la profundidad del flujo es la misma en cada sección del canal ( $\partial C/\partial S=0$ , donde  $S$ =la distancia). Un flujo uniforme puede ser permanente o no permanente, dependiendo de si la profundidad no cambia en función del tiempo.

**Flujo permanente uniforme** es el tipo fundamental de flujo considerado en la hidráulica de canales abiertos. La profundidad del flujo no cambia durante el intervalo de tiempo considerado. El establecimiento de flujo *uniforme no permanente* requiere que la superficie de agua fluctúe de tiempo en tiempo mientras permanece paralela al fondo del canal. Obviamente, ésta es una condición prácticamente imposible. El término “flujo uniforme” es entonces usado desde ahora para referirse solamente a flujo uniforme permanente.

El flujo es *variado* si la profundidad del flujo cambia a lo largo del canal ( $\partial C/\partial S \neq 0$ ). El flujo variado puede ser permanente o irregular. Ya que el flujo uniforme irregular es poco común el término “flujo no permanente” se usa desde ahora en adelante para distinguir el *flujo variado no permanente* exclusivamente.

El flujo variado puede ser posteriormente clasificado como *rápidamente* o *gradualmente variado*. El flujo es rápidamente variado si la profundidad cambia abruptamente en una distancia comparativamente corta; y si así no fuera, es gradualmente variado. Un flujo rápidamente variado es también conocido como un *fenómeno local*, como por ejemplo, el salto hidráulico que estudiaremos más adelante.

Para mayor claridad, la clasificación de flujos en canales abiertos, se puede resumir en la siguiente forma:



- A. Flujo Permanente.
  - 1. Flujo uniforme
  - 2. Flujo variado
    - a. Flujo variado gradualmente.
    - b. Flujo variado rápidamente.
  
- B. Flujo Irregular.
  - 1. Flujo uniforme (raro)
  - 2. Flujo variado
    - a. Flujo variado gradualmente.
    - b. Flujo variado rápidamente.

### A.3. ESTADO DE FLUJO

El estado o comportamiento del flujo en canal abierto es gobernado básicamente por los efectos de viscosidad y gravedad relativa a las fuerzas de inercia del flujo, representadas o debidas a la velocidad. La tensión superficial del agua puede afectar el comportamiento del flujo bajo ciertas circunstancias, pero no juega un papel significativo en la mayor parte de los problemas de canal abierto encontrados en ingeniería. La viscosidad o fricción interna de las partículas del fluido al estar relacionadas con la temperatura descubre la influencia de ésta como se mencionó al comienzo del capítulo.

*Efectos de viscosidad.* Dependiendo del efecto de la viscosidad relativa a la inercia, el flujo puede ser laminar, turbulento, o de transición.

El flujo es *laminar* si las fuerzas viscosas son más fuertes comparadas con las fuerzas de inercia, la viscosidad juega un papel importante para determinar el comportamiento del flujo. En el flujo laminar, las partículas del agua parecen moverse en recorridos calmados definidos, o líneas de corriente, y las capas infinitesimalmente delgadas del fluido parecen deslizarse sobre las capas adyacentes.

El flujo es *turbulento* si las fuerzas viscosas son débiles comparadas con las fuerzas de inercia. En el flujo turbulento, las partículas de agua se mueven en recorridos irregulares, los cuales no son ni calmados ni determinados pero en su conjunto todavía representan el movimiento hacia delante de la corriente total.

Entre los estados laminar y turbulento hay uno mixto, o estado de *transición*.

El efecto de viscosidad relativo al de inercia puede representarse por el número Reynolds definido así:



$$R_e = \frac{VL}{\nu} \quad (\text{II-3})$$

donde  $V$  es la velocidad del flujo en fps;  $L$  es la longitud característica en ft, considerada aquí igual al radio hidráulico  $R$  de un conducto y  $\nu$  (nu) es la viscosidad cinemática del agua en  $\text{ft}^2/\text{sec}$ . La viscosidad cinemática en  $\text{ft}^2/\text{sec}$  es igual a la viscosidad dinámica  $\mu$  (mu) en  $\text{slug}/\text{ft}\cdot\text{sec}$  dividida por la densidad de la masa  $\rho$  (ro) en  $\text{slug}/\text{ft}^3$ . Para el agua a  $68^\circ\text{F}$  ( $20^\circ\text{C}$ ),  $\mu=2.09 \times 10^{-5}$  y  $\rho=1.937$ ; por lo tanto,  $\nu=1.08 \times 10^{-5}$ .

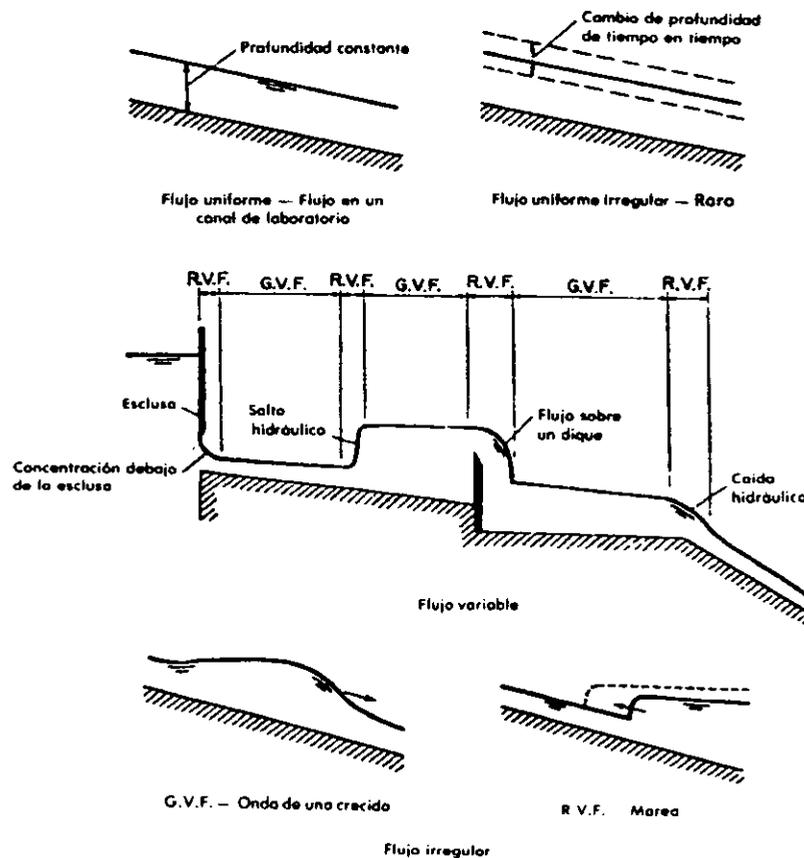
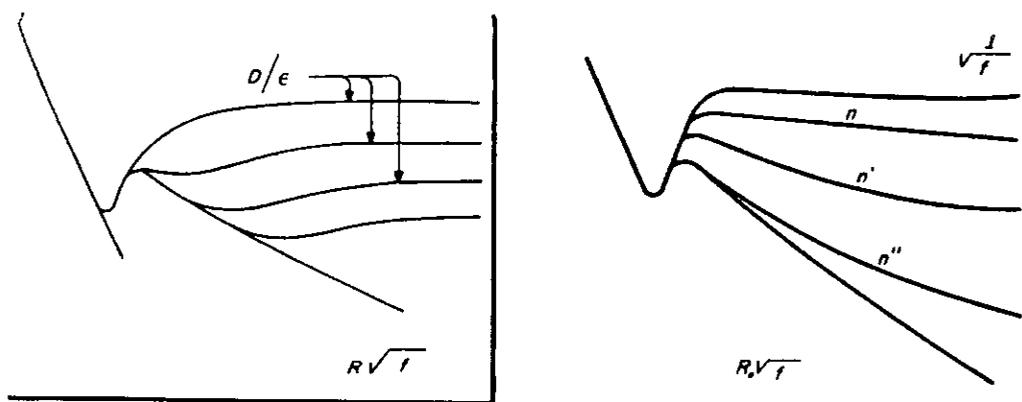


FIG. II-2 DIFERENTES TIPOS DE CANALES ABIERTOS.

Un flujo en canal abierto es laminar si el número de Reynolds  $R_e$  ( $R$ ) es pequeño y es turbulento si  $R_e$  es grande. En general se pueden considerar los siguientes valores de  $R_e$  para la clasificación del tipo de flujo en canales: *unidimensional* o *laminar*  $R_e < 600$ , *transición*  $600 < R_e < 2000$ , y *turbulento*  $R_e > 2000$ . Los estados laminar, turbulento y transicional del escurrimiento en canal abierto se pueden expresar en un diagrama que muestra una relación entre el número de Reynolds y el factor de fricción de la fórmula Darcy-Weisbach. Tal diagrama, generalmente conocido como *diagrama Stanton*, ha sido desarrollado para flujos en tubería.



DIAGRAMAS DE STANTON

La fórmula Darcy-Weisbach, también desarrollada principalmente para flujos en tuberías, es

$$h_f = f \frac{L V^2}{d_0 2g} \quad (\text{II-4})$$

donde  $h_f$  es la pérdida de fricción en ft para el flujo en tubería,  $f$  es el factor de fricción,  $L$  es la longitud de la tubería en ft,  $V$  es la velocidad del flujo en fps, y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad en ft/sec<sup>2</sup>.

Ya que  $d_0 = 4R$  y el gradiente de energía  $S = h_f / L$ , la ecuación de arriba puede volverse a escribir para el factor de fricción

$$f = \frac{8 g R S}{V^2} \quad (\text{II-5})$$

Esta ecuación puede también ser aplicada a escurrimientos uniforme y casi uniforme en canales abiertos.

La relación  $f-R_e$  para tuberías lisas pueden expresarse por la ecuación Blasius.

$$f = \frac{0.223}{R_e^{.25}} \quad (\text{II-6})$$

la cual será válida solamente si el valor  $R_e$  esta entre 750 y 25000. Para valores más altos de  $R_e$ , Von Kármán desarrolló una expresión general, que fue modificada posteriormente por Prandtl para concordar más aproximadamente con los datos obtenidos por Nikuradse. La ecuación resultante Prandtl-von-Kármán es

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log(R \sqrt{f} + 0.4) \quad (\text{II-7})$$



2.- Los datos en la región laminar se pueden definir por una ecuación general.

$$f = \frac{K}{R} \quad (\text{II-8})$$

De la ecuación (II-3) y (II-5) se puede observar que

$$K = \frac{8 g R^2 S}{\nu V} \quad (\text{II-9})$$

Ya que  $V$  y  $R$  tienen valores específicos para cada forma dada de canal,  $K$  es un factor numérico puramente dependiendo solamente de la forma dada de canal. Para flujo laminar en canales lisos, el valor de  $K$  puede ser determinado teóricamente. El dibujo en la fig. II-3 indica que  $K$  es aproximadamente 24 para los canales rectangulares y 14 para los canales triangulares.

3.- Los datos en la región turbulenta corresponden aproximadamente a la curva Blasius-Prandtl-von-Kármán. Esto indica que la ley para flujo turbulento en tuberías lisas puede ser aproximadamente representativa de todos los canales lisos. El dibujo también muestra que la forma del canal no tiene una influencia importante sobre la fricción en flujo turbulento, como lo tiene en flujo laminar.

Los datos para flujo laminar obtenidos en la Universidad de Minnesota y los datos para flujo turbulento coleccionados individualmente por Kirschmer, Einser y Koeny se muestran en el diagrama para flujo en *canales rugosos* (fig. II-4). En algunos datos, la rugosidad del canal se representa por  $k$ , la cual es una medida del tamaño de las partículas formando la rugosidad de la superficie del canal. El diagrama ilustra los siguientes hechos:

1.- En la región laminar los datos pueden ser definidos por la ecuación (II-8) en esta región, el valor de  $K$  es generalmente más alto que el de canales lisos y varía entre 60 y 33, indicando la pronunciada influencia de la rugosidad del canal sobre el factor de fricción.

2.- En la región turbulenta, la forma del canal tiene un efecto pronunciado sobre el factor de fricción. Se piensa que, cuando el grado de rugosidad es constante, el factor de fricción decrece aproximadamente en orden para canales rectangulares, triangulares, trapezoidales y circulares. Según una sugerencia de Prandtl, Kirschmer explica que el efecto de la forma del canal puede ser debido al desarrollo del flujo secundario, el cual aparentemente es digamos más pronunciado en canales rectangulares que en canales triangulares. El flujo secundario es el movimiento de las partículas de agua en una sección transversal normal a la dirección longitudinal del canal. Un flujo secundario alto significa gran pérdida de energía y por lo tanto da lugar una gran resistencia del canal.



3.- En la región turbulenta la mayor parte de los puntos aparecen paralelos a la curva Prandtl-von-Kármán. Esta curva sirve como una posición límite aproximada hacia la cual un punto se mueve a medida que la resistencia total se hace menor. De acuerdo a un concepto adelantado por Morris, el ascenso de los puntos sobre la curva de conducto liso se puede explicar como resultado de la pérdida de energía adicional generada por la rugosidad de los elementos. Cuando el número de Reynolds es muy alto, algunos puntos se ponen esencialmente horizontales, alcanzando un estado llamado de *completa turbulencia*. En este estado el valor de  $f$  es independiente del número de Reynolds y depende solamente de la rugosidad, radio hidráulico y forma del canal.

4.- El dibujo de los datos de Warwick para una determinada rugosidad, radio hidráulico y forma del canal arranca desde una curva paralela a la curva de Prandtl-von-Kármán, entonces sube a medida que el número de Reynolds aumenta, y finalmente se hace horizontal cuando se alcanza un estado de completa turbulencia. El ascenso del dibujo es un fenómeno peculiar que exige explicación, y ya que este hallazgo no ha sido verificado por otros datos, parecen necesarios más estudios experimentales para defenderlo.

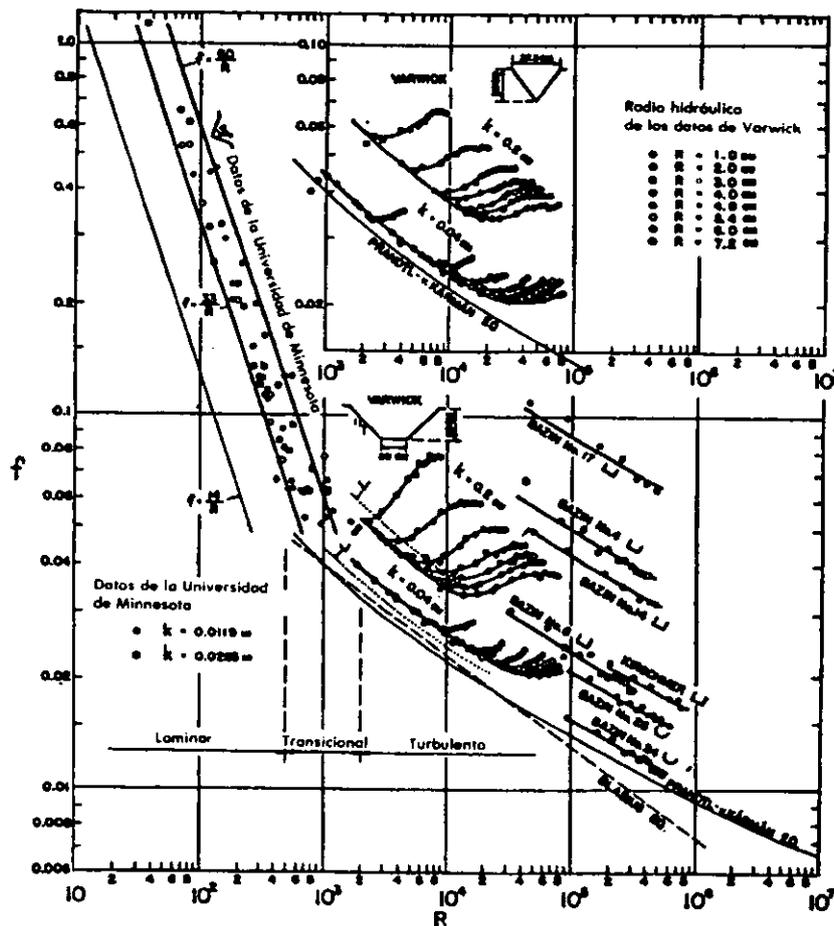


FIG. II-4 LA RELACION  $f$ - $R$ , PARA FLUJO EN CANALES RUGOSOS.



Se debe hacer notar que las descripciones dadas se limitan a una baja velocidad, o flujo subcrítico y a flujos sobre los cuales la tensión superficial no tiene influencia.

En la mayor parte de los canales abiertos el flujo laminar ocurre muy raramente; debido a la baja viscosidad cinemática del agua y a las dimensiones relativamente grandes de los canales. El hecho de que la superficie de una corriente aparezca lisa y tersa para un observador no es de ningún modo una indicación de que el flujo sea laminar; más probablemente, ello indica que la velocidad de la superficie es más baja que la requerida para que se formen ondas capilares. El flujo laminar en canales abiertos se sabe que existe, sin embargo, usualmente donde delgadas laminas de agua fluyen sobre el suelo o donde se ha creado deliberadamente en canales de prueba de modelos. Un caso donde ocurre flujo laminar es el escurrimiento de agua de lluvia sobre superficies pavimentadas y cubiertas, donde el tirante es pequeño.

Como el flujo en la mayoría de los canales es turbulento, un modelo utilizado para simular un canal prototipo, debió ser proyectado para que el número de Reynolds del flujo del canal modelo esté en la zona turbulenta.

*Efecto de la gravedad.* El efecto de la gravedad sobre el estado del flujo se representa por una relación de las fuerzas de la inercia a las fuerzas de gravedad. Esta relación se da por el número de Froude  $F$ , definido así;

$$F = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (\text{II-10})$$

donde  $V$  es la velocidad media del flujo en fps,  $g$  es la aceleración de la gravedad en ft/sec<sup>2</sup>, y  $L$  es una longitud característica en ft. En el flujo de canal abierto, la longitud característica se hace igual a la *profundidad hidráulica*  $D$ , la cual se define como el área de la sección transversal del agua, normal a la dirección del flujo en el canal, dividida por el ancho de la superficie libre. Para canales rectangulares esto es igual a la profundidad de la sección del flujo.

Cuando  $F$  es igual a la unidad, la ecuación (II-10) da

$$V = \sqrt{gD} \quad (\text{II-11})$$

y el flujo se dice que está en estado *crítico*. Si  $F$  es menor que la unidad, o  $V < \sqrt{gD}$ , el flujo es *subcrítico*. En este estado el papel jugado por las fuerzas de gravedad es más pronunciado; entonces el flujo tiene baja velocidad y se describe a menudo como tranquilo y lento. Si  $F$  es más grande que la unidad, o  $V > \sqrt{gD}$ , el flujo es *supercrítico*. En este estado, las fuerzas de inercia se hacen dominantes; entonces el flujo tiene una gran velocidad y se describe normalmente como rápido o torrencioso.



En la mecánica de las ondas de agua, la velocidad crítica  $\sqrt{gD}$  se identifica como la *celeridad* de las pequeñas ondas de gravedad que ocurren en aguas bajas en los canales como resultado de un cambio momentáneo en la profundidad local del agua. Más adelante en el estudio del régimen crítico se hará otra consideración donde interviene la celeridad. Tal cambio puede ser ocasionado por disturbios u obstáculos en el canal que ocasionen un desplazamiento del agua arriba y abajo del nivel superficial medio y así crear ondas que ejercen un peso o fuerza de gravedad. Se debería hacer notar que una onda de gravedad puede propagarse aguas arriba con flujo subcrítico pero no en agua con flujo supercrítico, ya que la celeridad es más grande que la velocidad del flujo en el primer caso y menor en el último. De este modo, la posibilidad o imposibilidad de propagarse una onda de gravedad aguas arriba se puede utilizar como un criterio para distinguir entre flujo subcrítico y supercrítico. Para verificar esto proponemos la experiencia común de lanzar un objeto pequeño a una corriente de agua con el fin de crear ondas. Resumiendo, si la velocidad es menor que la crítica (subcrítica) los anillos u ondas se moverán aguas arriba. Ante la velocidad crítica las ondas no se moverán aguas arriba ya que su velocidad es igual a la de la corriente. Si existe una velocidad supercrítica, las ondas serán barridas formando una onda de choque en forma de V sobre la superficie.

#### A.4. REGIMENES DE FLUJO

Un efecto combinado de viscosidad y gravedad puede producir cualquiera de los cuatro *regímenes de flujo* en un canal abierto, nominalmente, (1) *laminar-subcrítico*, cuando  $F$  es menor que la unidad y  $R_e$  esta en la zona laminar; (2) *laminar-supercrítico*, cuando  $F$  es más grande que la unidad y  $R_e$  esta en la zona laminar; (3) *turbulento-supercrítico*, cuando  $F$  es más grande que la unidad y  $R_e$  esta en la zona turbulenta; y (4) *subcrítico-turbulenta* cuando  $F$  es menor que la unidad y  $R_e$  esta en la zona turbulenta.

Las relaciones profundidad-velocidad para los cuatro regímenes de flujo en un canal abierto y ancho se pueden mostrar en un gráfico logarítmico (fig. II-5). La línea gruesa para  $F=1$  y la banda rayada para la zona transicional laminar-turbulenta intersecta en el gráfico y divide el área total en cuatro porciones, cada una de las cuales representa un régimen de flujo.

Los primeros dos regímenes, subcrítico-laminar y supercrítico-laminar, no se encuentran normalmente en la hidráulica aplicada de canales abiertos, ya que el flujo es normalmente turbulento en los canales considerados en los problemas de ingeniería.

Sin embargo, estos regímenes ocurren frecuentemente donde hay profundidades muy pequeñas, lo cual se conoce como flujo delgado y ellos se hacen significativos en problemas tales como la prueba en modelos hidráulicos, el estudio del flujo sobre el suelo, y control de la erosión para tales flujos.

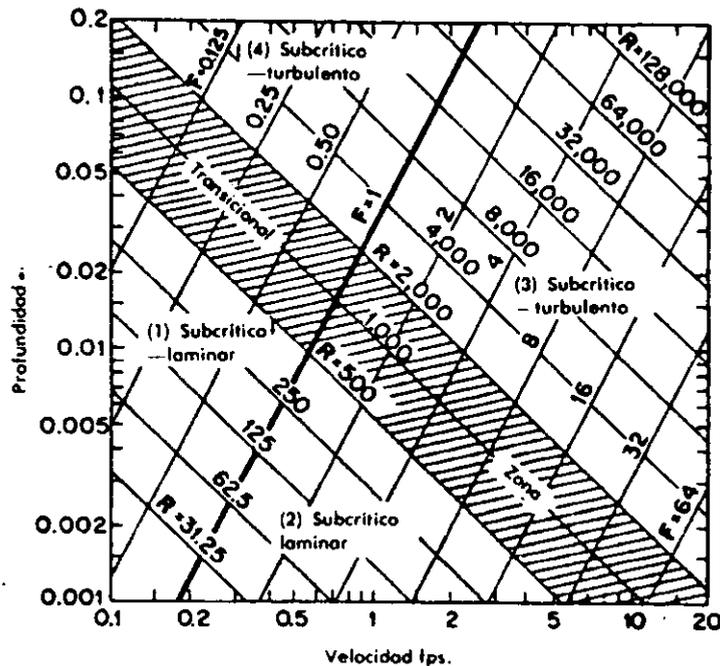


FIG. II-5 RELACIONES PROFUNDIDAD-VELOCIDAD PARA CUATRO REGIMENES DE FLUJO EN CANAL ABIERTO.

Se cree que la acción de la gravedad puede tener efecto definitivo sobre la resistencia del flujo en canales dentro del rango de flujo turbulento, Los datos experimentales estudiados por Jegorow y Iwagaki para canales rectangulares lisos y por Hom-ma para canales rugosos han demostrado que, en el flujo de régimen supercrítico-turbulento, el factor de fricción tiende a aumentar con el incremento del número de Froude. Generalmente, el efecto de la gravedad sobre el valor  $f$  es prácticamente despreciable cuando el número de Froude es pequeño, digamos, menor que 3. Una investigación posterior hecha por Iwagaki indica que, con números de Froude aumentando, el factor de fricción del flujo turbulento en ambos canales abiertos lisos y rugosos, se hace más grande que aquel en tuberías. Es posible que la presencia de la superficie libre en flujos en canal abierto haga el canal hidráulicamente más rugoso que la tubería. Cuando más datos y evidencias estén disponibles, el número de Froude, representando el efecto de la gravedad, tendrá que ser considerado como un factor adicional en la definición de la relación  $f-R_e$  para flujos supercrítico-turbulento.



## B. TIPOS DE CANAL ABIERTO

Un tipo de canal es un conducto en el que el agua fluye con superficie libre. Clasificado de acuerdo a su origen, un canal puede ser natural (creado por corrientes pluviales, por ejemplo) o artificial.

Los canales artificiales son aquellos construidos o desarrollados por el esfuerzo humano: canales de navegación, de potencia, de irrigación y canaletas, zanjas de drenaje, cubetas de vertederos, alcantarillas, etc., así como canales modelos que son construidos en el laboratorio para propósitos experimentales. Las propiedades hidráulicas de tales canales pueden ser controladas en la extensión deseada o proyectada para cumplir con los requerimientos establecidos. La aplicación de las teorías hidráulicas a canales artificiales producirá, así, resultados aproximados a las condiciones reales y por lo tanto, razonablemente seguros para los propósitos de diseño práctico. En el laboratorio es posible controlar y predecir los eventos o el curso del comportamiento del flujo, los materiales empleados en la construcción de los modelos, etc.

Bajo ciertas circunstancias en la práctica de la ingeniería, a los canales abiertos artificiales se les dan diferentes nombres como "canal", "caída", "canaleta", "cuneta", "alcantarilla", "túnel con escurrimiento abierto", etc. Estos nombres sin embargo, son usados en forma poco común y pueden ser definidos en un modo muy general. El canal es normalmente un trazado largo y de pendiente suave construido en la tierra y que puede ser revestido o no con mampostería, hormigón, madera o materiales bituminosos. El acueducto es un canal de madera, metal, hormigón o mampostería, normalmente soportado sobre o arriba de la superficie del terreno, para llevar agua a través de una depresión. La caída es un canal teniendo pendiente pronunciada. El salto es similar a la caída, pero el cambio de nivel se hace en una distancia corta. La alcantarilla escurriendo parcialmente llena, es un canal cubierto de corta longitud, comparativamente, instalada para drenar agua a través de terraplenes de carreteras o ferrocarriles. El túnel de escurrimiento abierto es un canal cubierto, comparativamente largo, usado para llevar agua a través de una colina o cualquier obstrucción en el terreno. Estas denominaciones son válidas y usadas comúnmente por especialistas del área. Sin embargo, como en todo lenguaje técnico se debe tener precaución con el empleo de términos procedentes de otros idiomas ya que puede cambiar el significado.

### B.1. GEOMETRIA DEL CANAL

Un canal construido con sección transversal constante y pendiente del fondo también constante, se llama un canal prismático. De lo contrario, el canal es no prismático; un ejemplo es la cubeta de un vertedero con ancho variable y alineamiento curvo.



El término sección del canal se refiere a la sección transversal de un canal tomada normalmente a la dirección del flujo. Una sección vertical del canal, sin embargo, es la sección vertical pasando a través del punto más bajo o del fondo de la sección del canal. Para canales horizontales, entonces, la sección del canal es siempre una sección vertical del canal.

Las secciones de los canales naturales son en general muy irregulares, variando normalmente de una parábola a un trapecoide aproximadamente. Para cursos de agua sujetos a frecuentes crecidas, el canal puede consistir de una sección principal del canal llevando caudales normales y una o más secciones laterales del canal para acomodar las crecidas. El alcance de esta tesis es estudiar los canales de sección regular, es decir formas geométricas puras, por ello este último caso (sección compuesta) queda fuera de nuestro estudio.

Los canales artificiales se proyectan usualmente con sección de formas geométricas regulares. El cuadro II-1 (ver anexo A.2) agrupa siete formas geométricas que tienen un uso muy frecuente. La forma trapecoidal es la más común para canales con terraplenes de tierra sin revestir, pues suministra pendientes laterales para la estabilidad. El triángulo y el rectángulo son casos especiales del trapecoide. Al resolver problemas con los programas de computación que presentaremos, se verá, al introducir los datos, que en las ecuaciones para la forma trapecoidal si  $b=0$  entonces tenemos una sección triangular, si  $b=T$  tenemos un rectángulo. Ya que el rectángulo tiene lados verticales, se usa comúnmente para canales construidos de materiales estables como mampostería revestida, roca, metal o madera. La sección rectangular es utilizada solamente para pequeñas zanjas, cunetas y trabajos de laboratorio. El círculo es la sección popular para colectores y alcantarillas de tamaño pequeño y mediano. La parábola es usada como una aproximación de secciones de canales naturales de tamaño pequeño y mediano. El rectángulo de ángulos redondeados es una modificación del rectángulo. El triángulo de fondo redondeado es una aproximación de la parábola; es una forma normalmente creada para excavación con palas excavadoras. Estos no son mas que algunos ejemplos típicos aunque obviamente puede haber más aplicaciones de cierto tipo de sección.

Las secciones geométricas cerradas diferentes del círculo son utilizadas frecuentemente en colectores, particularmente para colectores de suficiente tamaño para permitir entrar a un hombre. Estas secciones tiene nombres diferentes de acuerdo a su forma; ellas pueden ser de forma de huevo, ovoide, semielípticas, forma de U, catenaria, herradura, etc. El rectángulo completo y el cuadrado son también comunes para colectores grandes. Las dimensiones y otras propiedades de las secciones de los colectores pueden encontrarse en textos sobre instalaciones sanitarias. Hay que hacer mención de que ciertas secciones aunque son hidráulicamente eficientes, en el momento de su planeación y construcción pueden presentar desventajas que las hagan no usuales. Por ejemplo en el caso de canales de concreto una cimbra muy compleja y delicada en su diseño puede hacer que un proyecto no sea viable.



## B.2. ELEMENTOS GEOMETRICOS DE LA SECCION DEL CANAL

Los elementos geométricos son propiedades de una sección del canal que puede ser definida enteramente por la geometría de la sección y la profundidad del flujo. Estos elementos son muy importantes y usados ampliamente en los cálculos de escurrimiento.

Para secciones simples de canales regulares, los elementos geométricos se pueden expresar matemáticamente en función de la profundidad del escurrimiento y de otras dimensiones de la sección. Para secciones de corrientes naturales, sin embargo, ninguna fórmula simple se puede escribir para expresar estos elementos, pero curvas representando la relación entre estos elementos y la profundidad del escurrimiento, se pueden preparar para su uso en cálculos hidráulicos.

Las definiciones de algunos elementos geométricos de importancia básica se dan a continuación.

La *profundidad del flujo*  $y$  es la distancia vertical del punto más bajo (fondo) de la sección de un canal a la superficie libre. Este término se usa a menudo indistintamente con la *profundidad de la sección del flujo*  $d$ . Estrictamente hablando, la profundidad de la sección del flujo es la profundidad del flujo normal a la dirección del flujo, o la altura de la sección del canal conteniendo el agua. Para un canal con una pendiente longitudinal de ángulo  $\theta$ , se puede ver que la profundidad del flujo es igual a la profundidad de la sección dividida entre  $\cos \theta$ . En el caso de canales con grandes pendientes, entonces, los dos términos debieran usarse de forma adecuada distintamente. La distinción entre  $y$  y  $d$  es importantísima en la aplicación de ecuaciones donde se supone que  $y \cong d$  por tratarse de una pendiente pequeña ( $\theta < 10^\circ$ ).

La *cota* es la elevación o distancia vertical de la superficie libre sobre una referencia dada. Si el punto más bajo de la sección del canal se ha elegido como referencia, la cota es idéntica con la profundidad del escurrimiento.

El *ancho superior*  $T$  es el ancho de la sección del canal en la superficie libre.

El *área mojada*  $A$  es el área de la sección transversal del flujo normal a la dirección del flujo.

El *perímetro mojado*  $P$  es la longitud de la línea de intersección de la superficie mojada del canal con el plano de la sección transversal normal a la dirección del flujo.

El *radio hidráulico*  $R$  es la relación del área mojada a su perímetro mojado, o



$$R = \frac{A}{P} \tag{II-12}$$

La *profundidad hidráulica*  $D$  es la relación del área mojada del ancho superior, o

$$D = \frac{A}{T} \tag{II-13}$$

El factor de la sección para cálculos de escurrimiento o flujo crítico  $Z$ , es el producto del área mojada por la raíz cuadrada de la profundidad hidráulica, o

$$Z = A\sqrt{D} = A\sqrt{\frac{A}{T}} \tag{II-14}$$

El factor de la sección para cálculos de escurrimiento uniforme  $AR^{2/3}$  es el producto del área mojada y la potencia a los dos tercios del radio hidráulico.

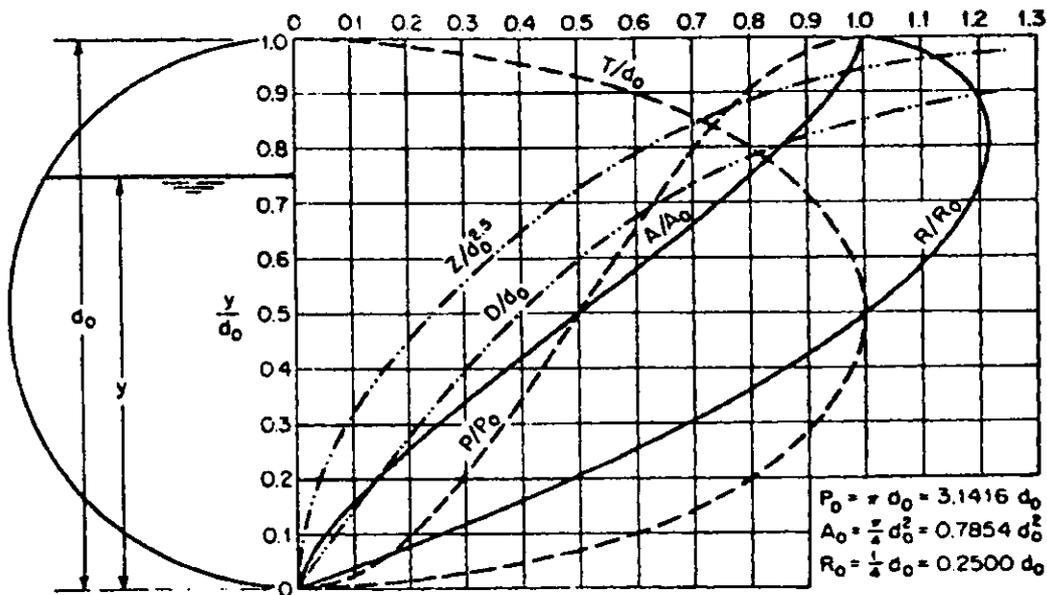


FIG. II-6 ELEMENTOS GEOMETRICOS DE UNA SECCION CIRCULAR.

El cuadro II-1 (ver anexo A.2) suministra una lista de fórmulas para seis elementos geométricos básicos de siete secciones de canal comúnmente utilizadas. Para una sección circular, las curvas en la fig. II-6 representan las relaciones de los elementos geométricos de la sección que fluye llena.



### C. DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD EN LA SECCION DE UN CANAL

Debido a la presencia de una superficie libre y a la fricción a lo largo de las paredes de un canal, las velocidades en un canal no están uniformemente distribuidas. La velocidad máxima medida en canales comunes, normalmente parece ocurrir debajo de la superficie libre a una distancia de 0.05 a 0.25 de la profundidad. La fig. II-7 ilustra el esquema de la distribución de las velocidades sobre varias secciones verticales y horizontales de un canal de sección rectangular y las curvas de igual velocidad en la sección transversal. La configuración general de la distribución de velocidad en varias secciones de canales de otras formas se muestra a continuación en la fig. II-8.

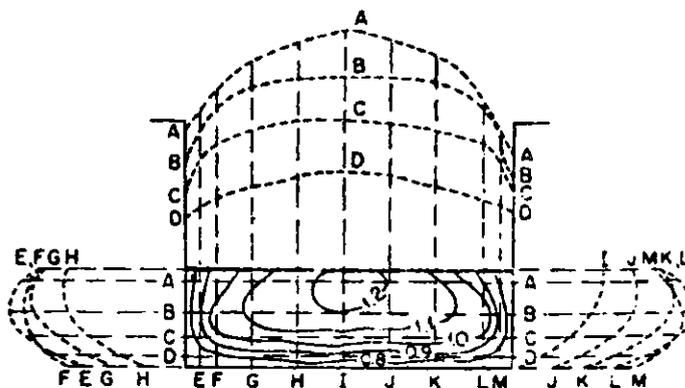


FIG. II-7 DISTRIBUCION DE LA VELOCIDAD EN UN CANAL RECTANGULAR.

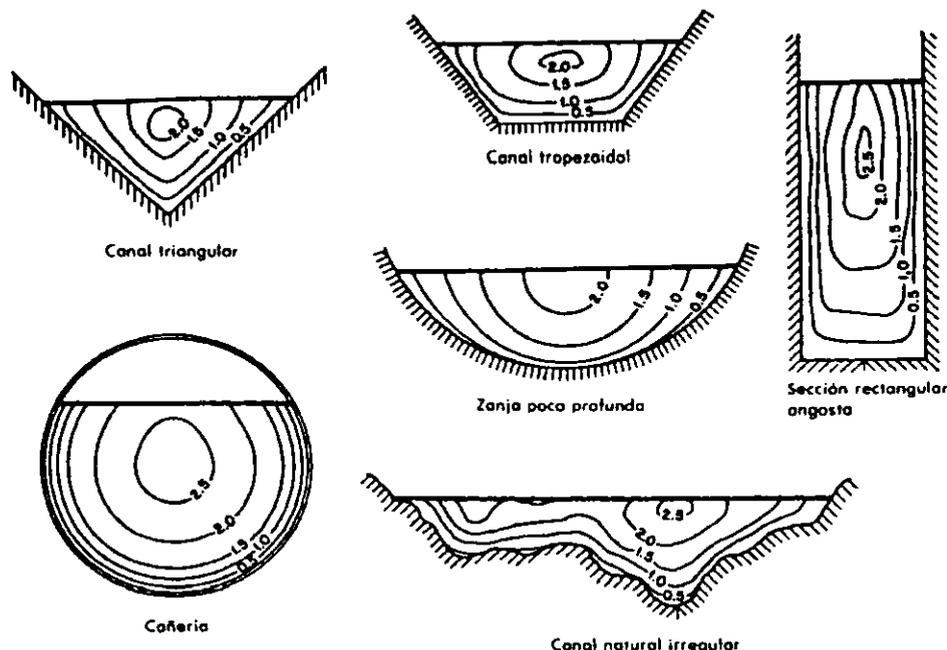


FIG. II-8 CURVAS TÍPICAS DE IGUAL VELOCIDAD EN DIFERENTES SECCIONES DE CANALES



La distribución de la velocidad en una sección del canal depende también de otros factores, tales como la forma poco común de la sección, la rugosidad del canal y la presencia de codos o curvas. En un curso de agua ancho, bajo y rápido o en un canal muy liso, la máxima velocidad se puede encontrar muy a menudo en la superficie libre. La rugosidad del canal causará el incremento de la curva que relaciona la profundidad con la distribución de la velocidad (fig. II-9). En un codo, la velocidad aumenta grandemente en el lado convexo, debido a la acción centrífuga del flujo. Contrariamente a la creencia común, el viento en la superficie tiene poco efecto sobre la distribución de velocidades.

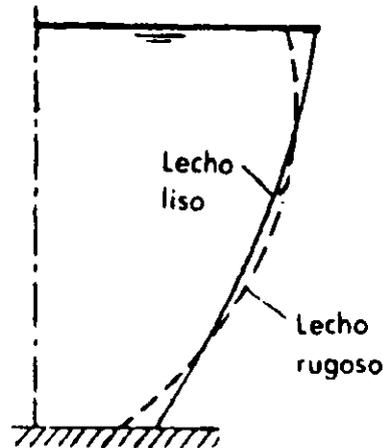


FIG. II-9 EFECTO DE LA RUGOSIDAD SOBRE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES EN UN CANAL ABIERTO

Como se ha revelado en cuidadosas investigaciones de laboratorio, el escurrimiento en un canal recto prismático es en efecto tridimensional, manifestando un movimiento en espiral, aunque la componente de velocidad en la sección transversal del canal es normalmente pequeña e insignificante comparada con las componentes de la velocidad longitudinales. Shukry encontró que, en canaletas cortas de laboratorio, un disturbio pequeño a la entrada, el cual es usualmente inevitable, es suficiente para causar el desplazamiento de la zona de niveles de agua más altos a un lado, dando así lugar a un movimiento de espiral simple (fig. II-10). En un tramo largo y uniforme, alejado de la entrada, un movimiento doble espiral ocurrirá para permitir la igualación de los esfuerzos cortantes en ambos lados del canal. El flujo incluirá una espiral en cada lado de la línea central, donde el nivel agua es más alto, en consideraciones prácticas es bastante seguro ignorar el movimiento espiral en canales prismáticos rectos. El flujo espiral en canales curvos, sin embargo, es un fenómeno importante para ser considerado en diseños.

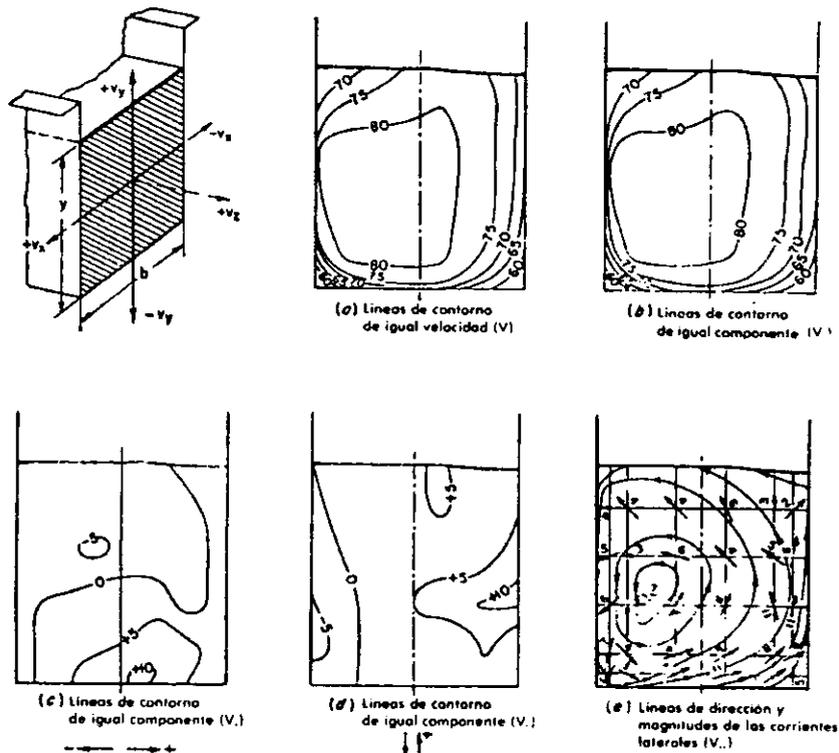


FIG. II-10 DISTRIBUCION DE LAS COMPONENTES DE LA VELOCIDAD, MIRANDO HACIA AGUAS ABAJO EN LA SECCION MEDIA DE UNA CANALETA RECTA

### C.1. CANAL ABIERTO ANCHO

Las observaciones en un canal abierto ancho, han mostrado que la distribución de velocidades en la región central de la sección es esencialmente la misma que la que se será en un canal rectangular de ancho infinito. En otras palabras, bajo esta condición, los lados del canal no tienen prácticamente influencia sobre la distribución de velocidades en la región central, y el flujo en la región puede entonces ser considerado como bidimensional en el análisis hidráulico. Experimentos cuidadosos indican, aún más, que esta región central existe en los canales rectangulares solamente cuando el ancho es más grande que 5 a 10 veces la profundidad del flujo, dependiendo de las condiciones de rugosidad de la superficie. De este modo, un *canal ancho abierto* puede seguramente ser definido como un canal rectangular cuyo ancho es más grande que 10 veces la profundidad del flujo. Para los propósitos experimentales o analíticos, el flujo en la región central de un canal ancho abierto puede ser considerado que sea el mismo que el flujo en un canal rectangular de ancho infinito.

### C.2. MEDIDAS DE LA VELOCIDAD

De acuerdo al procedimiento utilizado por la U.S. Geological Survey, para medir las corrientes, la sección transversal del canal se divide en fajas verticales mediante el trazado de



líneas sucesivas verticales, y las velocidades medias en las verticales se calculan midiendo la velocidad a los 0.6 de la profundidad, en cada vertical, o, cuando se requieren resultados más exactos, tomando el promedio de las velocidades a los 0.2 y 0.8 de la profundidad. El promedio de las velocidades medias en cualesquiera dos verticales adyacentes multiplicando por el área entre las verticales, da el caudal o descarga a través de esa faja vertical de la sección transversal. La suma de los caudales a través de todas las fajas, es el caudal total. La velocidad media de la sección completa es, así, igual al caudal total dividido por el área total.

Debería hacerse notar que los métodos indicados son simples y aproximados. Para medidas precisas se necesita utilizar métodos más elaborados.

### C.3. COEFICIENTES DE DISTRIBUCION DE VELOCIDAD

Como un resultado de la distribución no uniforme de velocidades sobre la sección de un canal, la altura o carga de velocidades del escurrimiento de un canal abierto es, en general, más grande que el valor calculado de acuerdo a la expresión  $V^2/2g$ , donde  $V$  es la velocidad media. Cuando se utiliza el principio de la energía en el cálculo, la verdadera altura de velocidad se puede expresar como  $\alpha V^2/2g$ , donde  $\alpha$  es conocido como el *coeficiente de energía* o *coeficiente Coriolis*, en honor de G. Coriolis quien fue el primero en proponerlo. Los datos experimentales indican que el valor de  $\alpha$  varía desde alrededor de 1.03 a 1.36 para canales prismáticos ligeramente rectos. El valor es generalmente más grande para canales pequeños y menor para grandes corrientes de considerable profundidad.

La distribución no uniforme de velocidades también afecta al cálculo del momentum en flujos de canales abiertos. Partiendo del principio de la mecánica, el momentum del fluido pasando a través de la sección de un canal por unidad de tiempo se expresa por  $\beta wV/g$ , donde  $\beta$  se conoce como el *coeficiente del momentum* o *coeficiente Boussinesq*, después de que J. Boussinesq fue el primero que lo propuso;  $w$  es el peso unitario del agua;  $Q$  es el caudal; y  $V$  es la velocidad media. Generalmente se supone que el valor de  $\beta$  para canales prismáticos ligeramente rectos varía aproximadamente desde 1.01 a 1.12.

Los dos coeficientes de distribución de velocidades son siempre ligeramente más grandes que el valor límite de la unidad para el cual la distribución de velocidades sería estrictamente uniforme a través de la sección del canal. Para canales de sección transversal de tamaño regular y alineamientos casi rectos, el efecto de la distribución no uniforme de la velocidad sobre el cálculo de la altura y del momentum es pequeño, especialmente en comparación con otras incógnitas envueltas en el cálculo. Por lo tanto, a menudo, los coeficientes se suponen iguales a la unidad. En canales de sección transversal compleja, los coeficientes para la energía y momentum pueden fácilmente ser tan grandes como 1.6 y 1.2 respectivamente, y pueden variar muy rápidamente de sección a sección en caso de



alineamientos irregulares. Aguas arriba de los vertederos, en la vecindad de obstrucciones, o cerca de irregularidades pronunciadas en el alineamiento, valores de  $\alpha$  tan grandes como 2.0, han sido observados. Estudios precisos o análisis de flujos en tales canales requerirán medidas de la velocidad real y determinaciones seguras de los coeficientes. En cuanto al efecto de la pendiente del canal, los coeficientes son normalmente más altos en canales empinados que en canales planos.

Para propósitos prácticos, Kolupaila propuso los valores indicados abajo para los coeficientes distribución de velocidades.

Canales	Valores de $\alpha$			Valores de $\beta$		
	Min.	Prom.	Máx.	Min.	Prom.	Máx.
Canales regulares, canaletas, vertederos	1.10	1.15	1.20	1.03	1.05	1.07
Corrientes naturales y torrentes	1.15	1.30	1.50	1.05	1.10	1.17
Ríos bajo capa de hielo	1.20	1.50	2.00	1.07	1.17	1.33
Ríos en valles, crecidos	1.50	1.75	2.00	1.17	1.25	1.33

Para conocer el procedimiento que se usa en la determinación práctica de los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  consultar el anexo A.3.

Para conocer un poco más sobre la distribución de presión en la sección de un canal, habrá que referirse al anexo A.4 y A.4.1.



# CAPITULO III

---

## CANALES CON FLUJO CRITICO



## A. PRINCIPIOS DE LA ENERGIA Y DEL MOMENTUM

### A.1. ENERGIA EN ESCURRIMIENTOS EN CANAL ABIERTO

Es conocido de la hidráulica elemental que la energía total en m-kg por kg de agua en cualquier línea de corriente pasando a través de la sección de un canal, puede expresarse como la carga total, en metros de agua, la cual es igual a la suma de la elevación sobre un nivel de referencia o datum, la altura o carga de presión, y la altura o carga de velocidad. La suma de las energías (cargas) anteriores considerando las pérdidas, se conoce comúnmente como la ecuación de Bernoulli o de la energía.

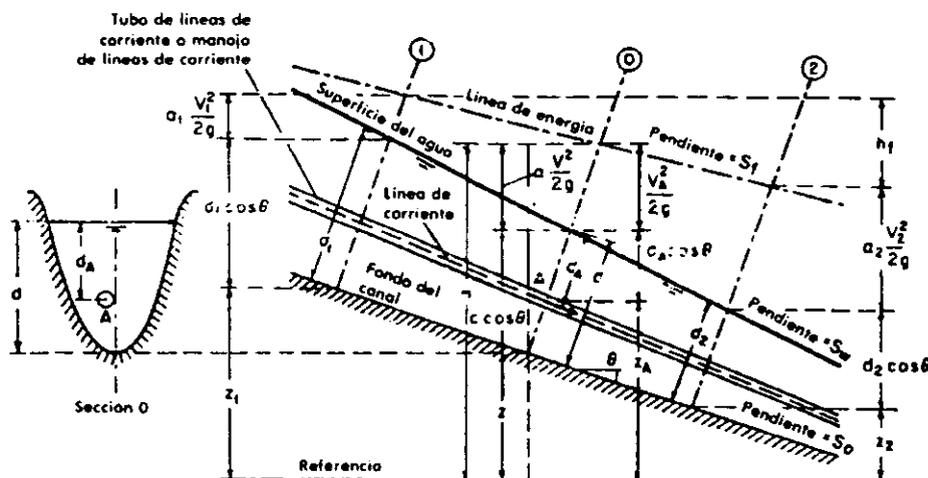


FIG. III-1 ENERGIA EN FLUJO GRADUALMENTE VARIADO EN CANAL ABIERTO

Por ejemplo, con respecto al plano de referencia, la altura o carga total  $H$  en la sección  $O$  conteniendo el punto  $A$  sobre una línea de corriente del flujo en un canal de gran pendiente se puede escribir así:

$$H = z_A + d_A \cos \theta + \frac{V_A^2}{2g} \quad (\text{III-1})$$

donde  $z_A$  es la elevación del punto  $A$  sobre el plano de referencia,  $d_A$  es la profundidad del punto  $A$  debajo de la superficie del agua medido a lo largo de la sección del canal,  $\theta$  es el ángulo de la pendiente del fondo del canal, y  $V_A^2/2g$  es la carga de velocidad del flujo en la línea de corriente que pasa a través de  $A$ .

En general, cada línea de corriente pasando a través de una sección del canal tendrá una carga de velocidad diferente, debido a la distribución no uniforme de la velocidad en el escurrimiento real. Solamente en un flujo paralelo ideal de distribución uniforme de velocidad, puede la carga de velocidad ser idéntica para todos los puntos de la sección transversal. Se considera ideal dicha distribución porque equivaldría a eliminar la fricción con las paredes y la presión hidrostática, así como el impulso de las partículas del líquido. En el caso del flujo



gradualmente variado, sin embargo se puede suponer, por razones prácticas que las cargas de velocidad para todos los puntos de la sección del canal son iguales y el coeficiente de la energía se puede utilizar para la corrección del efecto total debido a la distribución no uniforme de la velocidad (ver anexo A.3). De este modo, la energía total en la sección del canal es

$$H = z + d \cos q + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III-2})$$

Para canales de pequeña pendiente,  $\theta = 0$ . Así la energía total en la sección del canal es

$$H = z + d + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III-3})$$

Consideremos ahora un canal prismático de gran pendiente (fig. III-1). La línea representando la elevación de la carga total del flujo es la línea de energía. La pendiente de esta línea se conoce como *gradiente de energía*, denominado como  $S_f$ . La pendiente superficial del agua se denomina  $S_w$  y la pendiente del fondo del canal es  $S_0 = \text{sen } \theta$ . En flujo uniforme,  $S_f = S_w = S_0 = \text{sen } \theta$ . Se ha dado en denominar a la pendiente  $\text{sen } \theta$  porque se dividen las cargas representadas como alturas (verticales) respecto al fondo del canal que en este caso representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

De acuerdo al principio de la conservación de la energía, la altura total de la energía en la sección 1 aguas arriba debería ser igual a la altura total de la energía en la sección 2 aguas abajo más la pérdida de energía  $h_f$  entre las dos secciones, o

$$z_1 + d_1 \cos \theta + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + d_2 \cos \theta + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (\text{III-4})$$

Esta ecuación se aplica a los flujos paralelos o gradualmente variados. Para un canal de pendiente pequeña (dado que  $d \cos \theta \approx y$ ), se hace

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (\text{III-5})$$

Cualquiera de estas ecuaciones es conocida como *ecuación de la energía*. Cuando  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  y  $h_f = 0$ , la ecuación III-5 se hace

$$z_1 + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} = \text{constante} \quad (\text{III-6})$$

Esta es la bien conocida ecuación de Bernoulli.



## A.2. ENERGIA ESPECIFICA

La energía específica en la sección de un canal se define como la energía por metro de agua en cualquier sección medida con respecto al fondo del canal. De este modo, de acuerdo a la ecuación (III-2) con  $z=0$ , la energía específica se hace

$$E = d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III-7})$$

o, para un canal de pequeña pendiente y  $\alpha=1$

$$E = y + \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III-8})$$

la cual indica que la energía específica es igual a la suma de la profundidad del agua y la altura de velocidad. Por simplicidad, la discusión siguiente se basará en la ecuación (III-8) para un canal de pendiente pequeña. Ya que  $V=Q/A$  (de la ecuación de continuidad), la ecuación (III-8) se puede escribir  $E=y + \frac{Q^2}{2gA^2}$ . Se puede ver que, para una sección dada de un canal y un caudal  $Q$ , la energía específica en la sección de un canal es una función de la profundidad del flujo (tirante) solamente.

Cuando la profundidad del flujo se dibuja contra la energía específica para una sección dada del canal  $y$  para un gasto, se obtiene una *curva de energía específica* (fig. III-2). Esta curva tiene dos partes AC y BC. La parte AC se aproxima al eje horizontal asintóticamente hacia la derecha. La parte BC se aproxima a la línea OD a medida que se extiende hacia arriba y a la derecha. La línea OD es una línea que pasa a través del origen y tiene un ángulo de inclinación igual a  $45^\circ$ . Pensamos que esto se debe a que al aumentar la velocidad con una pendiente pronunciada es decir al provocarse una aceleración, disminuye el tirante, entonces la curva de energía específica cambia. Otra explicación nos la da la fig. III-2 en si misma, observamos que si  $Q$  cambia, el extremo superior de la curva deja de ser asintótico a una línea de  $45^\circ$ . Para un canal de pendiente grande, el ángulo de inclinación de la línea OD será diferente a  $45^\circ$ . En cualquier punto  $P$  de esta curva, la ordenada representa la profundidad, y la abscisa representa la energía específica, la cual es igual a la suma de la altura de presión  $y$  y la altura de velocidad  $V^2/2g$ .

La curva muestra que, para una energía específica dada, hay dos posibles profundidades, por ejemplo, la *cota inferior*  $y_1$  y la *cota superior*  $y_2$ . La cota o nivel inferior se llama *profundidad alterna* de la cota superior, y viceversa. En el punto C, la energía específica es un mínimo. Se probará más adelante que esta condición de energía específica corresponde al estado crítico del flujo. Así, en el estado crítico las dos profundidades alternas aparentemente



se hacen una sola, la cual es conocida como la *profundidad crítica o tirante crítico*  $y_c$ . Cuando la profundidad del flujo es más grande que la profundidad crítica, la velocidad del flujo es menor que la velocidad crítica para la correspondiente descarga, y entonces, el flujo es subcrítico. Cuando la profundidad del flujo es menor que la profundidad crítica, el flujo es supercrítico. Por lo tanto,  $y_1$  es la profundidad de un flujo supercrítico, y  $y_2$  es la profundidad de un flujo subcrítico. Podemos resumir lo anterior enunciando que, para un régimen subcrítico el agua está bajo régimen lento, al contrario cuando existe un flujo supercrítico el agua se mueve con régimen rápido.

También queremos anotar que existen dos soluciones (tirantes) para una energía determinada con excepción de la energía mínima que se da sólo con el tirante crítico. Además hacemos la afirmación de que si  $E$  se puede mantener constante ( $E_0$ ), podemos saber que  $Q_{m\acute{a}x}$  se podrá obtener con dicha  $E_0$  si la ecuación III-8 se sustituye por  $E_0 = y + Q^2/2gA^2$ .

Si los caudales cambian, la energía específica cambiará en consecuencia. Las curvas A'B' y A''B'' (fig. III-2) representan posiciones de la curva de energía específica cuando el caudal es menor y más grande respectivamente, que el caudal usado para la construcción de la curva AB.

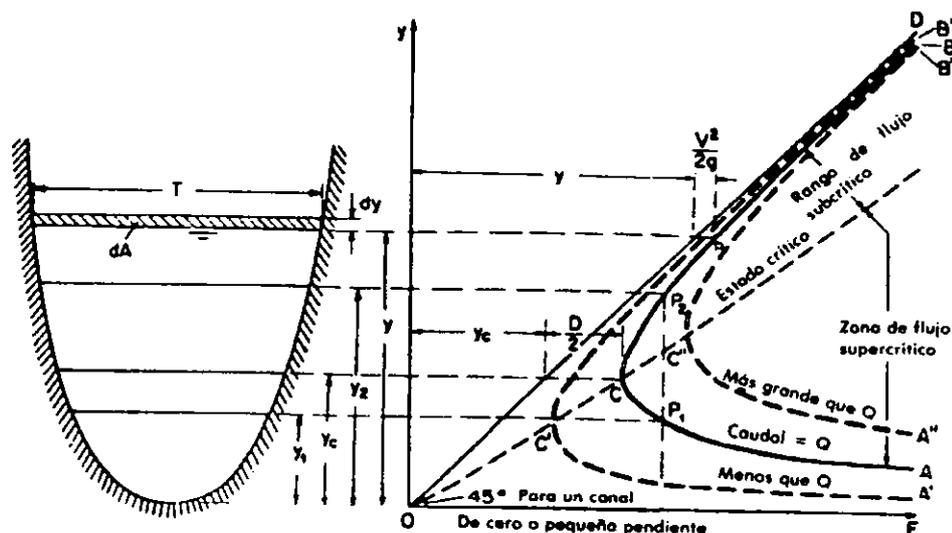


FIG. III-2 CURVA DE LA ENERGÍA ESPECÍFICA

### A.3. CRITERIO PARA EL ESTADO CRÍTICO DEL FLUJO

El estado crítico del flujo se define como la condición para la cual el número Froude es igual a la unidad. Una definición más común es aquella que dice que el estado del flujo al cual la energía específica es un mínimo para una descarga dada. Un criterio teórico para el flujo crítico se puede desarrollar de esta definición en la siguiente forma:



Ya que  $V=Q/A$ , ecuación (III-8), la ecuación para la energía específica en un canal de pendiente pequeña con  $\alpha=1$ , se puede escribir

$$E = y + \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (\text{III-9})$$

diferenciando con respecto a  $y$  y observado que  $Q$  es una constante,

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{V^2}{gA} \frac{dA}{dy}$$

El diferencial de área mojada  $dA$  cerca de la superficie libre (fig. III-2) es igual a  $Tdy$ . Ahora  $dA/dy=T$ , y la profundidad hidráulica  $D=A/T$ : así que las ecuaciones superiores se hacen

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{V^2 T}{gA} = 1 - \frac{V^2}{gD}$$

En el estado crítico del flujo, la energía específica es un mínimo o sea  $dE/dy=0$ . La ecuación anterior, entonces queda así:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \quad (\text{III-10})$$

Este es el criterio para flujo crítico, el cual establece que en el estado crítico del flujo, la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica. La ecuación superior puede escribirse también como  $V/\sqrt{gd} = 1$ , la cual significa  $F=1$ .

Si el criterio dado anteriormente se ha de usar en cualquier problema, las condiciones siguientes deben ser satisfechas: (1) flujo paralelo o gradualmente variado, (2) canal de pequeña pendiente, y (3) coeficiente de la energía supuesto que sea la unidad. Si el coeficiente de la energía no se supone que sea la unidad, el criterio de flujo crítico es

$$\alpha \frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \quad (\text{III-11})$$

Las condiciones previas nos restringen para que los principios expuestos con anterioridad sean válidos. Para un canal de gran pendiente de ángulo  $\theta$  y coeficiente de energía  $\alpha$ , el criterio para el flujo crítico puede fácilmente ser demostrado que es



$$\alpha \frac{V^2}{2g} = \frac{D \cos \theta}{2} \quad (\text{III-12})$$

donde  $D$  es la profundidad hidráulica de la superficie mojada normal al fondo del canal. Nótese que cambió el parámetro  $y$  por  $D$ . Esto se debe al presentarse una gran pendiente donde  $y \neq D \cos \theta$ , por tanto,  $y$  ya no se usa como parámetro válido. En este caso, el número Froude se puede definir como

$$F = \frac{V}{\sqrt{\frac{g D \cos \theta}{\alpha}}} \quad (\text{III-13})$$

Se debe hacer notar que el coeficiente  $\alpha$  de la sección del canal varía con la profundidad. Esta variación suponemos es debida a que al disminuir la profundidad el flujo está más expuesto a fuerzas de fricción de mayor magnitud. En la derivación superior, sin embargo, el coeficiente se supone sea constante; de este modo la ecuación resultante no es absolutamente exacta.

### A.3.1. INTERPOLACION DE LOS FENOMENOS LOCALES

El cambio del estado del flujo de subcrítico a supercrítico o viceversa ocurre frecuentemente en canales abiertos. Tal cambio se ha manifestado en un cambio correspondiente en la profundidad del flujo de una cota alta a una cota o nivel bajo o viceversa. Si el cambio se efectúa rápidamente sobre una distancia relativamente corta, el flujo es rápidamente variado, y es conocido como *fenómeno local*, tal como es el caso del salto hidráulico, el cual se estudiará en un capítulo aparte dado el interés que tiene para nosotros ya que es frecuente este fenómeno.

*Salto hidráulico.* Cuando se da un cambio rápido en la profundidad del flujo, desde un nivel bajo a un nivel alto, el resultado es normalmente un brusco levantamiento de la superficie del agua (fig. III-3). Este fenómeno local se llama salto hidráulico. Ocurre frecuentemente en un canal abajo de la compuerta de regulación, al pie de un vertedero, o en lugar donde un canal de gran pendiente repentinamente se vuelve plano.

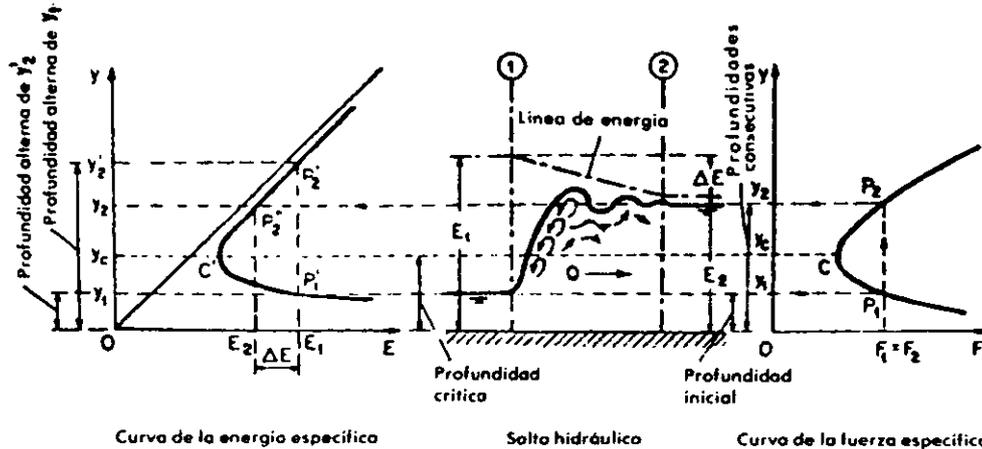


FIG. III-3 SALTO HIDRAULICO INTERPRETADO POR LA ENERGIA ESPECIFICA Y LAS CURVAS DE FUERZA ESPECIFICA

Si el salto es bajo, si el cambio en la profundidad es pequeño, el agua no se levantará obviamente y de manera brusca pero pasará de un nivel bajo a uno alto a través de series de ondulaciones gradualmente disminuyendo en tamaño. Tal salto bajo se llama *salto ondular*.

Cuando el salto es alto, es decir, cuando el cambio en profundidad es grande, el salto se llama *directo*. El salto directo incluye una cantidad relativamente grande de pérdida de energía a través de la disipación en el cuerpo turbulento de agua dentro del salto. Consecuentemente, el contenido de la energía en el flujo después del salto es apreciablemente menor que aquél antes del salto. De ahí que las aplicaciones de este fenómeno se encuentren en obras hidráulicas.

Se puede destacar que la profundidad antes del salto es siempre menor que la profundidad después del salto. La profundidad antes del salto se llama la *profundidad inicial*  $y_1$  y aquella después del salto se llama la *profundidad seciente* o *consecutiva*  $y_2$ . Las profundidades inicial y seciente  $y_1$  y  $y_2$  se muestran sobre la curva de energía específica (fig. III-3). Ellas debieran diferenciarse de las profundidades alternas y conjugadas  $y_1$  y  $y_2'$ , las cuales son las dos profundidades posibles para la misma energía específica. A veces se denomina conjugado mayor y menor a los tirantes inicial y seciente. Las profundidades inicial y seciente son las profundidades antes y después de un salto en el cual hay pérdida de energía  $\Delta E$  incluida. En otras palabras, la energía específica  $E_1$  en la profundidad inicial  $y_1$  es más grande que la energía específica  $E_2$  en la profundidad seciente  $y_2$  en una cantidad igual a la pérdida de energía  $\Delta E$ . Si no hubiera pérdidas de energía, Las profundidades inicial y seciente podrían hacerse idénticas a las profundidades alternas en un canal prismático. Esto es cuando no existe disipación de energía, o sea en ausencia de salto.

#### A.4. MOMENTUM EN ESCURRIMIENTO EN CANAL ABIERTO

Como se estableció anteriormente, el momentum del flujo pasando por la sección de un canal por unidad de tiempo se expresa por  $\beta w Q V / g$  donde  $\beta$  es el coeficiente del momentum,  $w$  es el peso específico del agua en  $\text{kg/m}^3$ ,  $Q$  es el gasto en  $\text{m}^3/\text{s}$ , y  $V$  es la velocidad media en  $\text{m/s}$ .



De acuerdo a la segunda ley de Newton del movimiento, el cambio de momentum por unidad de tiempo en el cuerpo de agua fluyendo es igual a la resultante de todas las fuerzas externas que están actuando en el cuerpo. Aplicando este principio a un canal de gran pendiente (fig. III-4), la siguiente expresión para el cambio del momentum por unidad de tiempo en el cuerpo de agua entre secciones 1 y 2 se puede escribir:

$$\frac{Qw}{g} (\beta V_2 - \beta V_1) = P_1 - P_2 + W \sin \theta - F_f \quad (\text{III-14})$$

donde  $Q$ ,  $w$ , y  $V$  son previamente definidos, con subíndices referidos a las secciones 1 y 2;  $P_1$  y  $P_2$  son resultantes de las presiones actuantes sobre las dos secciones;  $W$  es el peso del agua encerrada entre las secciones; y  $F_f$  es la fuerza total externa de fricción y resistencia actuando a lo largo de la superficie de contacto entre el agua y el canal. La ecuación superior es conocida como la *ecuación del momentum*. El cambio de momentum o cantidad de movimiento se denomina impulso.

Para un flujo paralelo o gradualmente variado, los valores de  $P_1$  y  $P_2$  en la ecuación del momentum se puede calcular asumiendo una distribución hidrostática de presión, la cual se da en canales con líneas de flujo paralelas. Para un flujo curvilíneo o rápidamente variado, sin embargo, la distribución de presión no es hidrostática; Por lo tanto, los valores de  $P_1$  y  $P_2$  no pueden ser calculados así pero deben ser corregidos por el efecto de curvatura de las líneas de corriente del flujo.

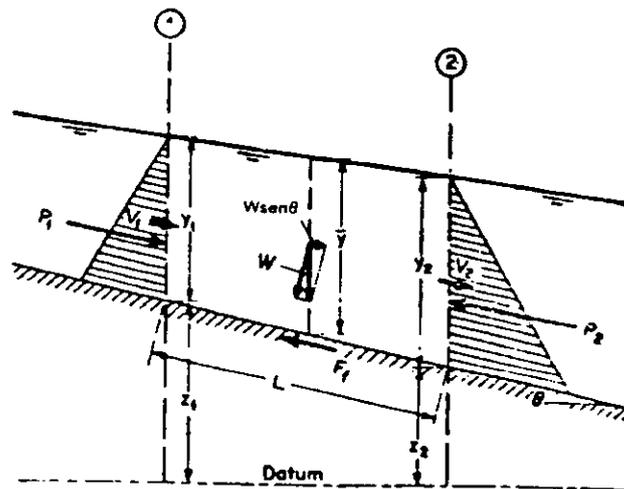


FIG. III-4 APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MOMENTUM

Por simplicidad,  $P_1$  y  $P_2$  se pueden remplazar respectivamente por  $\beta'_1 P_1$  y  $\beta'_2 P_2$ , donde  $\beta'_1$  y  $\beta'_2$  son los coeficientes de corrección en las dos secciones. Los coeficientes se refieren como *coeficientes de distribución de presión*. Ya que  $P_1$  y  $P_2$  son fuerzas, los coeficientes pueden específicamente ser llamados *coeficientes de fuerza*. Se puede mostrar que el coeficiente de fuerza se expresa por



$$\beta' = \frac{1}{AZ} \int_0^A h \, dA = 1 + \frac{1}{AZ} \int_0^A c \, dA \quad (\text{III-15})$$

donde  $z$  es la profundidad del centroide del área mojada  $A$  debajo de la superficie libre,  $h$  es la altura de presión sobre el área elemental  $dA$ , y  $c$  es la corrección de la altura de presión (ec. III-16), e igual a 1.0 para flujo paralelo. Se puede mostrar que la ecuación del momentum es similar a la ecuación de la energía cuando se aplica a ciertos problemas de flujo. En este caso, un flujo gradualmente variado es considerado; y en consecuencia la distribución de presión en las secciones se puede suponer hidrostática, y  $\beta' = 1$ .

$$c = \frac{d \, v^2}{g \, r} \quad (\text{III-16})$$

También se supone que la pendiente del canal es relativamente pequeña. Si el ángulo de la pendiente  $\theta$  es grande, entonces  $P_1 = 1/2 w d_1^2 \cos \theta$  y  $P_2 = 1/2 w d_2^2 \cos \theta$ , donde  $d_1$  y  $d_2$  son las profundidades de la sección del flujo y  $\cos \theta$  es un factor de corrección. De acuerdo a los alcances de nuestro trabajo estudiamos canales con pendiente pequeña. De este modo en el corto tramo de un canal rectangular de pendiente pequeña y ancho  $b$  (fig. III-4),

$$\begin{aligned} P_1 &= 1/2 w b y_1^2 \\ P_2 &= 1/2 w b y_2^2 \\ F_1 &= w h'_f b \bar{y} \end{aligned}$$

y  
por tanto

donde  $h'_f$  es la altura de fricción y  $\bar{y}$  es la profundidad media, o  $(y_1 + y_2)/2$ . La descarga a través del tramo se puede tomar como el producto de la velocidad promedio y el área promedio, o sea

$$Q = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) b \bar{y}$$

También, es evidente (fig. III-5) que el peso de agua es

$$W = w b \bar{y} L$$

$$\sin \theta = \frac{Z_1 - Z_2}{L}$$

y

Sustituyendo todas las expresiones de arriba por las variables correspondientes en la ec. (III-14) y simplificando,



$$z_1 + y_1 + \beta_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + y_2 + \beta_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_f \quad (\text{III-17})$$

esta ecuación parece ser prácticamente la misma que la ecuación de la energía (III-5).

Hablando teóricamente, sin embargo, las dos ecuaciones no solamente usan coeficientes de distribución de velocidad diferentes, aunque éstos son casi iguales, sino que también incluyen diferentes significados de las pérdidas de fricción. En la ecuación de la energía, la variable  $h_f$  mide la energía *interna* disipada en la masa entera del agua en el tramo, mientras que la variable  $h'_f$  en la ecuación del momentum mide las pérdidas debidas a las fuerzas *externas* ejercidas sobre el agua, por las paredes del canal. Ignorando la pequeña diferencia entre los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ , parece que en flujo gradualmente variado, las pérdidas de energía internas son prácticamente idénticas con las pérdidas debidas a las fuerzas externas. En el flujo uniforme, el lapso de tiempo en el que las fuerzas de superficie están haciendo trabajo es igual al tiempo en que ocurre la disipación de energía. En tal caso, entonces, una distinción entre  $h_f$  y  $h'_f$  no existe excepto en la definición. Debe quedar claro el uso de coeficientes de corrección en cada caso y sobre todo visualizar el principio que opera.

La similitud entre las aplicaciones de los principios de la energía y del momentum puede ser confusa. Una clara comprensión de las diferencias básicas en su constitución, es importante, a pesar del hecho de que en muchas oportunidades los dos principios producirán prácticamente idénticos resultados. La distinción inherente entre los principios radica en el hecho de que la energía es una cantidad escalar mientras que el momentum es una cantidad vectorial; También la ecuación de la energía contiene un término para las resistencias externas. Como el impulso es una variación de la cantidad de movimiento (momentum) entonces es la velocidad la que le confiere su carácter vectorial.

Generalmente hablando, el principio de la energía ofrece una explicación más simple y más clara que la que ofrece el principio del momentum. Pero el principio del momentum tiene ciertas ventajas en su aplicación a los problemas que incluyen grandes cambios de la energía interna, tales como el problema del salto hidráulico. Si la ecuación de la energía se aplica a tales problemas, la pérdida desconocida de la energía interna representada por  $h_f$  es indeterminada, y la omisión de este término podría dar lugar a errores considerables. Si en vez, la ecuación del momentum es aplicada a estos problemas, ya que él trata solamente con fuerzas externas, los efectos de las fuerzas internas estarán enteramente fuera de consideración y no necesitan ser evaluadas. El término para pérdidas de fricción debido a las fuerzas externas, por otra parte, es poco importante en tales problemas y puede ser omitido seguramente, porque el fenómeno toma lugar en un corto tramo del canal y el efecto debido a las fuerzas externas es despreciable comparado con las pérdidas internas.



### A.5. FUERZAS ESPECÍFICAS

Aplicando el principio del momentum a un tramo corto horizontal de un canal prismático, la fuerza externa de fricción y el efecto del peso del agua, pueden ser ignorados. Así, con  $\theta=0$  y  $F_f=0$  y suponiendo también que  $\beta_1=\beta_2=1$ , la ec.(III-14) se hace

$$Qw/g (V_2-V_1) = P_1-P_2$$

Las fuerzas hidrostática  $P_1$  y  $P_2$  se pueden expresar como

$$P_1 = w z_1 A_1 \quad \text{y} \quad P_2 = w z_2 A_2$$

donde  $z_1$  y  $z_2$  son las distancias de los centroides de las respectivas áreas húmedas  $A_1$  y  $A_2$  debajo de la superficie del flujo. También,  $V_1=Q/A_1$ , y  $V_2=Q/A_2$ . Entonces, la ecuación del momentum de arriba se puede escribir

$$\frac{Q^2}{gA_1} + z_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + z_2 A_2 \quad \text{(III-18)}$$

Los dos lados de la ec.(III-18) son análogos y, entonces, se pueden expresar para cada sección del canal por medio de una función general

$$F = \frac{Q^2}{gA} + zA \quad \text{(III-19)}$$

Esta función consiste de dos términos. El primero es el momentum del flujo pasando a través de canal por unidad de tiempo y por peso unitario de agua y el segundo es la fuerza por unidad de peso de agua. Ya que ambos términos son esencialmente fuerza por unidad de peso de agua, su suma puede llamarse *fuerza específica*. Concordantemente, la ec.(III-18) puede expresarse como  $F_1=F_2$ . Esto significa que las fuerzas específicas de las secciones 1 y 2 son iguales siempre que las fuerzas externas y el efecto del peso del agua en el tramo entre las dos secciones puedan ser ignorados, debido a que es constante en ambas secciones.

Dibujando la profundidad contra la fuerza específica para una dada sección del canal y descarga, se obtiene una *curva de fuerza específica* (fig. III-5). Esta curva tiene dos partes AC y BC. La parte AC se aproxima al eje horizontal asintóticamente hacia la derecha. La parte BC se levanta hacia arriba y se extiende indefinidamente a la derecha. Para un valor dado de la fuerza específica, la curva tiene dos posibles profundidades  $y_1$  y  $y_2$ . Las dos profundidades constituyen las profundidades inicial y seciente de un salto hidráulico. En el punto C sobre la curva, las dos profundidades se hacen una, y la fuerza específica es un mínimo. El argumento



siguiente muestra que la profundidad en el valor mínimo de la fuerza específica es igual a la profundidad crítica.

Para un valor mínimo de la fuerza específica, la primera derivada de  $F$  con respecto a  $y$  debería ser cero, o de la ec. (III-19),

$$\frac{dF}{dy} = \frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d(zA)}{dy} = 0$$

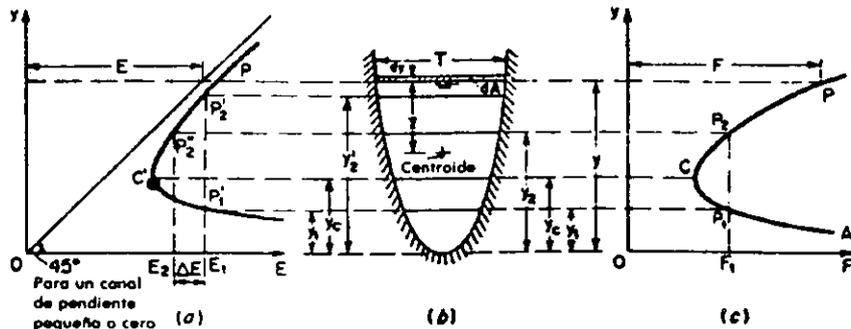


FIG. III-5 CURVA DE FUERZA ESPECÍFICA SUPLEMENTADA CON LA CURVA DE ENERGÍA ESPECÍFICA (a) CURVA DE ENERGÍA ESPECÍFICA; (b) SECCIÓN DEL CANAL; (c) CURVA DE FUERZA ESPECÍFICA

Para un cambio  $dy$  en la profundidad, el correspondiente cambio  $d(zA)$  en el momento estático del área mojada relativo a la superficie libre es igual a  $[A(z+dy) + T(dy)^2/2] - zA$ , fig.(III-5). Ignorando el diferencial de mayor grado, es decir, asumiendo  $(dy)^2=0$ , el cambio en el momento estático se hace  $d(zA) = A dy$ . Entonces la ecuación precedente se puede escribir

$$\frac{dF}{dy} = \frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + A = 0$$

Ya que  $dA/dy=T$ ,  $Q/A=V$  y  $A/T=D$ , la ecuación de arriba se puede reducir a

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{D}{2} \tag{III-10}$$

Este es el criterio para el estado crítico del flujo, derivado anteriormente. De este modo, se han probado que la profundidad en el valor mínimo de la fuerza específica es la profundidad crítica. Se puede también establecer que en el estado crítico del flujo, la fuerza específica es un mínimo para el caudal dado.

Ahora, comparemos la curva de la fuerza específica con la curva de la energía (fig. III-5). Para una dada energía específica  $E_1$ , la curva de energía específica indica dos posibles profundidades, las cuales son, un nivel inferior  $y_1$  en la región de flujo supercrítico y un nivel superior  $y_2$  en la región de flujo subcrítico. Para un valor dado de  $F_1$ , la curva de fuerza específica también indica dos posibles profundidades que son, una profundidad inicial  $y_1$  en la región supercrítica y una profundidad secuenta  $y_2$  en la región de flujo subcrítico. Se ha



supuesto que el nivel bajo y la profundidad inicial sean ambos iguales a  $y_1$ . Así, las curvas indican conjuntamente que la profundidad seciente  $y_2$  es siempre menor que el nivel alto  $y'_2$ . Más aún la curva de energía específica muestra que el contenido de energía  $E_2$  para la profundidad  $y_2$  es menor que el contenido de energía  $E$  para la profundidad  $y'_2$ . Así, para mantener un valor constante de  $F_1$ , la profundidad del flujo se puede cambiar de  $y_1$  a  $y_2$  al precio de perder una cierta cantidad de energía, la cual es igual a  $E_1 - E_2 = dE$ . Un ejemplo de esto es el salto hidráulico sobre un piso horizontal, en el cual las fuerzas específicas antes y después del salto son iguales y la pérdida de energía es una consecuencia del fenómeno.

Se puede establecer en este punto, sin embargo, que las profundidades  $y_1$  y  $y_2$  mostradas por la curva de la energía específica son las profundidades alternas; Mientras que las profundidades  $y_1$  y  $y_2$  mostradas por la curva de la fuerza específica son, respectivamente, la profundidad inicial y la profundidad seciente del salto hidráulico.



## B. FLUJO CRITICO: CALCULO Y APLICACIONES

Como se describió anteriormente, el estado crítico del flujo a través de una sección del canal se caracteriza por varias condiciones importantes, ellas son (1) de energía específica en un mínimo para un gasto dado, o sea para un  $y_c$ ; (2) la descarga es un máximo para una energía específica dada; (3) la fuerza específica es un mínimo para una descarga dada; (4) la altura de velocidad es igual a la mitad de la profundidad hidráulica en un canal de pendiente pequeña; (5) el número de Froude es igual a la unidad; y (6) la velocidad del flujo en un canal de pendiente pequeña con distribución uniforme de velocidad es igual a la celeridad de pequeñas ondas de gravedad en aguas bajas ocasionada por disturbios locales. Sobre este último punto puede definirse dicha celeridad como:  $v_c = \sqrt{gy_c}$ , y también se conoce como *velocidad de onda*.

Las discusiones sobre el estado crítico del flujo se han referido principalmente a una sección particular de un canal conocido como la *sección crítica*. Si el estado crítico del flujo existe a través de la longitud total del canal o sobre un tramo del canal, el flujo en el canal es un *flujo crítico*. Ya que, como se ha indicado por el criterio del flujo crítico en la ec. (III-10), a la profundidad del flujo crítico depende de los elementos geométricos A y D de la sección del canal cuando el caudal es constante, la profundidad crítica en un canal prismático de pendiente uniforme será la misma en todas las secciones, y el flujo crítico en un canal prismático debiera, así, ser flujo uniforme. En esta condición, la pendiente del canal que sostiene un caudal dado por una profundidad uniforme y crítica se llama la *pendiente crítica*  $S_c$ . Una pendiente del canal menor que la pendiente crítica causará un flujo más lento del estado subcrítico para el caudal dado, y en consecuencia, es llamada una *pendiente moderada* o *subcrítica*. Una pendiente más grande que la pendiente crítica resultará en un flujo más rápido del estado supercrítico y es llamada una *pendiente pronunciada* o *supercrítica*.

Un flujo en o cerca del estado crítico es inestable. Esto es porque un cambio menor en la energía específica en o cerca del estado crítico causará un cambio mayor en la profundidad. Este hecho puede también ser reconocido en la curva de la energía específica (fig. III-2). Como la curva es casi vertical cerca de la profundidad crítica, un ligero cambio en la energía podría cambiar la profundidad a una profundidad alterna mucho más pequeña o mucho más grande, correspondiendo a la energía específica después del cambio. Se puede observar que, cuando el flujo está cerca del estado crítico, la superficie del agua aparece inestable y ondulada. Tales fenómenos son causados generalmente por cambios menores en la energía debido a variaciones de la rugosidad del canal, sección transversal, pendiente, o depósitos de sedimentos o residuos. En el diseño de un canal, si la profundidad se encuentra en o cerca de la profundidad crítica para una gran longitud del canal, la forma o pendiente del canal debe alterarse, si es posible, a los efectos de asegurar una estabilidad mayor. Creemos que estas consideraciones redundarán en una mayor funcionalidad del canal.



El criterio para un estado crítico del flujo es la base para el cálculo del flujo crítico, el cual será explicado en los artículos subsiguientes. Dos aplicaciones principales de la teoría de flujo crítico son el control del flujo y las medidas del flujo.

### B.1. EL FACTOR DE LA SECCION PARA CALCULO DE FLUJO CRITICO

Sustituyendo  $V=Q/A$  en la ec.(III-10) y simplificando,

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{g}} \quad (\text{III-20})$$

Cuando no se asume que el coeficiente de la energía sea la unidad

$$Z = \frac{Q}{\sqrt{\frac{g}{\alpha}}} \quad (\text{III-21})$$

En las ecuaciones anteriores,  $Z = A\sqrt{D}$ , el cual es el *factor de sección para cálculos de flujo crítico* (ec.II-14). La ec.(III-21) establece que el factor de sección  $Z$  para la sección de un canal en el estado crítico del flujo es igual a la descarga dividida entre la raíz cuadrada de  $g/\alpha$ . Ya que el factor de sección  $Z$  generalmente es un simple valor de la función de la profundidad, la ecuación indica que sólo hay una posible profundidad crítica para mantener la descarga dada en un canal y similarmente que cuando la profundidad está fijada, allí puede haber sólo un caudal que mantenga un flujo crítico y haga la profundidad crítica en la sección dada del canal.

Las ecs. (III-20) y (III-21) son una herramienta muy útil para el cálculo y análisis del flujo crítico en un canal abierto. Cuando el caudal está dado, la ecuación da el factor  $Z_C$  de la sección crítica  $y$ , entonces la profundidad crítica  $y_C$ . De otro modo, cuando la profundidad  $y$ , por lo tanto, el factor de la sección son dados, la descarga crítica se puede calcular por la ec.(III-20) en la forma siguiente:

$$Q = Z \sqrt{g} \quad (\text{III-22})$$

o por la ec.(III-21) en la forma siguiente:

$$Q = Z \sqrt{\frac{g}{\alpha}} \quad (\text{III-23})$$



Un subíndice  $c$  se usa a veces para especificar la condición de flujo crítico. Se dan fórmulas para el factor de la sección  $Z$  de siete secciones de canal comunes en el cuadro II-1 (ver anexo A.2). Los valores  $Z$  para una sección circular se pueden encontrar partiendo de la curva en la fig. II-6.

A los efectos de simplificar los cálculos de flujo crítico, han sido preparadas curvas adimensionadas mostrando la relación entre la profundidad y el factor de sección  $Z$  (cuadro III-1, anexo A.5) para canales rectangulares, trapezoidales, y circulares. Estas curvas auto explicatorias ayudarán a determinar la profundidad  $y$  para un factor dado  $Z$  de sección, y viceversa.

Ejemplo I: Derivar una ecuación mostrando el caudal crítico a través de un canal de sección transversal en términos del ancho del canal y de la altura total.

*Solución:* Para la sección rectangular, El cuadro II-1 (ver anexo A.2) da el factor de sección  $Z=by^{1.5}$ . En el estado crítico del flujo, la profundidad  $y=H/1.5$ . Sustituyendo estas expresiones en la ec.(III-22), usando  $g=32.16 \text{ ft/seg}^2$ , y simplificando, nosotros encontramos que la descarga crítica es

$$Q_c = 3.78bH^{1.5} \quad (\text{III-24})$$

## B.2. EL EXPONENTE HIDRAULICO PARA EL CALCULO DE FLUJO CRITICO

Ya que el factor de sección  $Z$  es una función de la profundidad del flujo  $y$  y se puede suponer que

$$Z^2 = Cy^M \quad (\text{III-25})$$

donde  $C$  es un coeficiente y  $M$  es un parámetro llamado *exponente hidráulico para cálculos de flujo crítico*.

De la forma logarítmica de la ec.(III-25) es evidente que el exponente hidráulico  $M$  a la profundidad  $y$  es

$$\frac{d(\ln Z)}{dy} = \frac{M}{2y} \quad (\text{III-26})$$

Ahora, tomando logaritmos en ambos lados de la ec.(II-14), o  $Z = A\sqrt{A/T}$ , y entonces diferenciando con respecto a



$$\frac{d(\ln Z)}{dy} = \frac{3T}{2A} - \frac{1}{2T} \frac{dT}{dy} \quad (\text{III-27})$$

Igualando las partes a la derecha de las ecs.(III-26 y III-27) y resolviendo para  $M$ ,

$$M = \frac{y}{A} \left( 3T - \frac{A}{T} \frac{dT}{dy} \right) \quad (\text{III-28})$$

Esta es una ecuación general para el exponente hidráulico  $M$ , el cual es una función de la sección del canal y de la profundidad del flujo. Para una sección trapezoidal, las expresiones para  $A$  y  $T$  obtenidas del cuadro II-1 (anexo A.2) son sustituidas en la ec.(III-28); la ecuación resultante es simplificada y se hace

$$M = \frac{3[1 + 2z(y/b)]^2 - 2z(y/b)[1 + z(y/b)]}{[1 + 2z(y/b)][1 + z(y/b)]} \quad (\text{III-29})$$

Esta ecuación indica que el valor de  $M$  para la sección trapezoidal es una función de  $z$  y de  $y/b$ . Para valores de  $z = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  y  $4.0$ , se ha construido una familia de curvas para  $M$  versus  $y/b$  (fig. III-6). Estas curvas indican que el valor de  $M$  varía en un rango desde 3.0 a 5.0.

También es mostrada una curva para una sección circular con  $M$  dibujado contra  $y/d_o$ , donde  $d_o$  es el diámetro, (fig. III-6). Esta curva fue desarrollada mediante un procedimiento similar pero construida partiendo de una fórmula mucho más complicada. La curva indica que el valor de  $M$  varía en un rango más bien estrecho para valores de  $y/d_o$  menores que 0.7 o parecidos, para aumentar rápidamente cuando el valor de  $y/d_o$  se hace más grande que 0.7. El significado de esta característica es que, cuando la profundidad del flujo en la sección circular se aproxima a la parte superior del círculo, el factor de sección y con él, el caudal crítico, como se ven en ec.(III-22), se hace indefinidamente grande. En otras palabras, es prácticamente imposible mantener un flujo crítico en un conducto circular en una profundidad cerca de la parte superior de la sección.

En efecto, la superficie ondulada del flujo crítico tocará la parte superior del conducto antes de que esté tan cerca como para aproximarse al tope. Una característica y fenómeno similar ocurre sólo en otros tipos de conductos cerrados, cuando la superficie del agua se aproxima al límite superior del conducto.

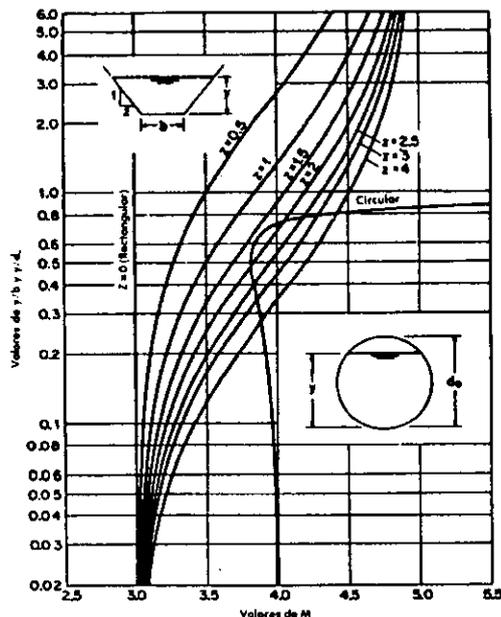


FIG. III-6 CURVAS DE LOS VALORES DE M

Para secciones del canal de otras formas diferentes de la trapezoidal o circular, se pueden calcular valores exactos de  $M$  directamente mediante la ec.(III-28), probando que la derivada  $dT/dy$  puede ser evaluada. Se pueden obtener valores aproximados de  $M$  para cualquier sección del canal, mediante la siguiente ecuación

$$M = 2 \frac{\log(Z_1 / Z_2)}{\log(y_1 / y_2)} \quad (\text{III-30})$$

donde  $Z_1$  y  $Z_2$  son los factores de la sección para cualesquiera dos profundidades  $y_1$  y  $y_2$  de la sección dada. Esta ecuación se puede derivar fácilmente de la ec.(III-25). Aplicando la ec.(III-30), se recomienda un método gráfico en vez de cálculos directos. Esto incluye un trazo logarítmico de  $Z$  como ordenada contra la profundidad como abscisa (fig. III-7). Lo visto hasta aquí nos indica como Chow construyó sus nomogramas y da la recomendación de usar métodos gráficos. Recuérdese que en 1955 aproximadamente se carecía de calculadoras electrónicas y computadoras. En la actualidad retomamos métodos de cálculo que estaban relegados por consistir en un gran volumen de operaciones. Las computadoras nos dan la oportunidad de llegar a resultados más precisos obviando operaciones matemáticas manuales complejas y el uso de gráficas que para algunos resultan demasiado anticuadas.

Para la mayoría de los canales, excepto para conductos cerrados con profundidades aproximándose a un límite superior cerrándose gradualmente y algunos canales de formas peculiares, el trazo toma una forma más o menos de línea recta. El exponente hidráulico es igual a dos veces la pendiente de la línea recta trazada. Para una profundidad acercándose al límite superior gradualmente cerrado de un conducto, el trazo se convierte en una curva, y el



exponente hidráulico de una profundidad dada es igual a dos veces la pendiente de la tangente a la curva a esa profundidad.

El exponente hidráulico  $M$  es descrito aquí solamente como un valor característico de la sección de un canal bajo la condición de flujo crítico.

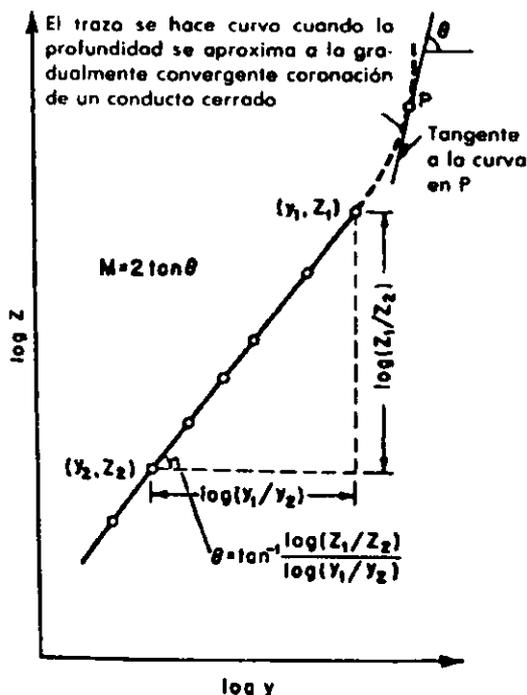


FIG. III-7 DETERMINACION GRAFICA DEL VALOR  $M$

### B.3. CALCULO DEL FLUJO CRITICO

El cálculo del flujo crítico incluye la determinación de la profundidad crítica y de la velocidad cuando la descarga y la sección del canal son conocidas. A continuación serán dados tres métodos ilustrados mediante ejemplos simples.

**B.3.1. METODO ALGEBRAICO.** Para un canal de sección simple geométrica, el flujo crítico se puede determinar por un cálculo algebraico usando las ecuaciones básicas. El método ha sido ya usado, pero el ejemplo siguiente se da para ilustración posterior:

Ejemplo II. Calcular la profundidad crítica y la velocidad de un canal trapezoidal llevando una descarga de 400 cfs.,  $z=2$ ,  $P=46.8$  ft,  $b=20$  ft,  $T=44$  ft..

*Solución.* La profundidad hidráulica y el área mojada de la sección trapezoidal están expresadas en términos de la profundidad  $y$  como



$$D = \frac{y(10+y)}{10+2y} \quad y \quad A = y(20+2y)$$

La velocidad es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{400}{y(20+2y)}$$

Sustituyendo las expresiones superiores para  $D$  y  $V$  en la ec(III-10) y simplificando,

$$2,484 (5+y) = [y(10+y)]^2$$

Resolviendo esta ecuación para  $y$  por un procedimiento de tanteo,  $y_c = 2.15$  ft. Esta es la profundidad crítica. El área correspondiente es  $A_c = 52.2 \text{ ft}^2$ , y la velocidad crítica es  $V_c = 400/52.2 = 7.66$  fps.

**B.3.2. METODO GRAFICO.** Por este procedimiento se construye una curva  $y$  versus  $Z$ . Se calcula entonces el valor de  $Q/\sqrt{g}$ . Usando la ec.(III-20), la profundidad crítica se puede obtener directamente de la curva, donde  $Z = Q/\sqrt{g}$ .

Ejemplo III. Una alcantarilla circular de concreto de 36 pulgadas de diámetro lleva un caudal de 20 cfs. Determinar la profundidad crítica.

*Solución.* Construir una curva de  $y$  vs  $Z$  (fig.III-8). Entonces, calcular  $Z = Q/\sqrt{g} = 20/\sqrt{g} = 3.53$ . De la curva, se encuentra la profundidad crítica para este valor de  $Z$  que es  $y_c = 1.44$  ft.

**B.3.3. METODO DEL GRAFICO DE DISEÑO.** El gráfico de diseño para determinar la profundidad crítica (cuadro III-1, anexo A.5) se puede usar con gran facilidad.

En el ejemplo II,  $Z = 400/\sqrt{g} = 70.5$  [ec. (III-20)]. El valor de  $Z/b^{2.5}$  es 0.0394. Para este valor, el gráfico da  $y/b = 0.108$  ó  $y_c = 2.16$  ft.

En el ejemplo III,  $Z/d_0^{2.5} = 0.226$ . Para este valor el gráfico da  $y/d = 0.48$  ó  $y_c = 1.44$  ft.

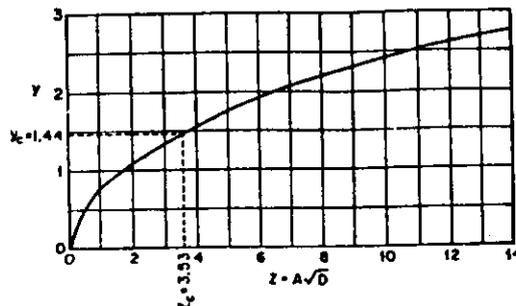


FIG. III-8 CURVA DE  $y$  vs  $Z$  PARA UNA SECCION CIRCULAR



# CAPITULO IV

---

## CANALES A FLUJO UNIFORME



## A.1. DESARROLLO DEL FLUJO UNIFORME Y SUS FORMULAS

El flujo uniforme a ser considerado tiene los siguientes aspectos principales: (1) la profundidad, área mojada, velocidad y gasto (descarga) en cada tramo del canal son constantes; y (2) la línea de energía, superficie del agua, y fondo del canal son todas paralelas: es decir, sus pendientes son todas iguales, o  $S_f = S_w = S_o = S$ . Para propósitos prácticos, el requerimiento de velocidad constante puede ser libremente interpretado como el requerimiento de que el flujo posee una velocidad media constante. Estrictamente hablando, sin embargo, esto debe significar que el flujo posea una velocidad constante en cada punto sobre la sección del canal dentro del tramo de flujo uniforme. En otras palabras, la distribución de velocidad a través de la sección del canal no es alterada en el tramo. Tal patrón estable de distribución de velocidad puede ser alcanzado cuando la llamada "capa límite" es desarrollada completamente.

El flujo uniforme es considerado como permanente solamente ya que el flujo uniforme no permanente es inexistente prácticamente. En corrientes naturales, aún el flujo uniforme permanente es raro, para ríos y corrientes en estado natural raramente alguna vez experimentan la condición estricta de flujo uniforme. A pesar de esta desviación de la verdad, la condición de flujo uniforme es frecuentemente asumida en el cálculo del flujo en cursos de aguas naturales. Los resultados obtenidos de esta hipótesis se comprende que son aproximados y generales, pero ellos ofrecen una solución relativamente simple y satisfactoria para muchos problemas prácticos. Se puede suponer que para cauces naturales dada la variación de sección y pendiente de un lugar a otro, es difícil hacer concordar las condiciones del flujo uniforme.

Se debe destacar que el flujo uniforme no puede ocurrir a velocidades muy altas, generalmente descrito como *ultrarrápido*. Esto es porque, cuando el flujo uniforme alcanza una cierta velocidad alta, se hace muy inestable. A más altas velocidades el flujo eventualmente arrastrará aire y se hace no permanente, es decir, en nuestro estudio consideramos que no hay arrastre de aire lo cual provocaría entre otras cosas socavaciones e implosión.

## A.2. ESTABLECIMIENTO DE FLUJO UNIFORME

Cuando se da el flujo en un canal abierto, se encuentra resistencia del agua si el flujo va aguas abajo. Esta resistencia se contrarresta generalmente por las componentes de las fuerzas de gravedad actuando sobre el cuerpo del agua, en la dirección del movimiento (fig. IV-2). Se desarrollará un flujo uniforme si la resistencia es balanceada por las fuerzas de gravedad. La magnitud de la resistencia, cuando otros factores físicos del canal se mantienen sin cambiar, depende de la velocidad del flujo. Si el agua entra al canal lentamente, la velocidad y la resistencia, son pequeñas; la resistencia es balanceada por las fuerzas de gravedad, resultando en un flujo acelerado en el tramo aguas arriba. La velocidad y la resistencia gradualmente se incrementarán hasta que se alcance un balance entre las fuerzas de resistencia y de gravedad.



En ese momento y de ahí en adelante el flujo se hace uniforme. El tramo aguas arriba que se requiere para el establecimiento del flujo uniforme es conocido como *la zona transitoria*. En esta zona el flujo es acelerado y variado. Si el canal es más corto que la longitud transitoria requerida por las condiciones dadas, el flujo uniforme no se puede dar. Hacia el extremo aguas abajo del canal, la resistencia puede otra vez ser superada por la fuerza de gravedad y el escurrimiento puede hacerse otra vez variado. Según lo anterior cabe resaltar que se balancean la velocidad y las componentes de las fuerzas de gravedad para que ocurra el flujo normal. Sin embargo, hace falta que el agua recorra cierto tramo para que se normalice, a dicha distancia se le conoce como *transitoria*, en seguida se hablará más de ello.

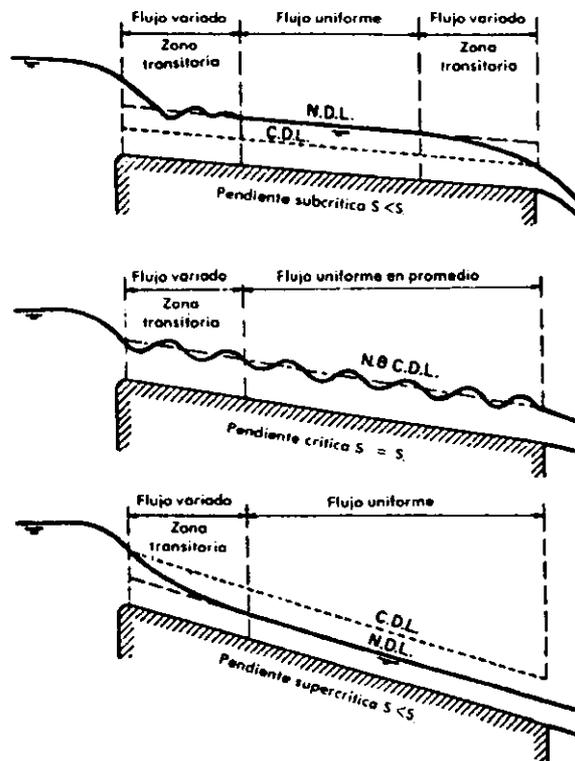


FIG. IV-1 ESTABLECIMIENTO DE FLUJO UNIFORME

Para propósitos de explicación, es mostrado un canal largo con tres pendientes diferentes; subcrítica, crítica y supercrítica (fig. IV-1). Con la pendiente subcrítica (parte superior de la fig. IV-1) la superficie del agua en la zona transitoria aparece ondulatoria. El flujo es uniforme en el tramo central del canal pero es variado en los dos extremos; teóricamente hablando, la profundidad que varía en cada extremo se aproxima a la profundidad uniforme en el medio, asintóticamente y gradualmente. Para propósitos prácticos, sin embargo, la profundidad puede ser considerada constante si la variación de la profundidad está dentro de un cierto margen, digamos, 1% de la profundidad del flujo uniforme, o sea el tirante normal.

En la pendiente crítica (dibujo central de la fig. IV-1) la superficie del agua del flujo crítico es inestable. Pueden ocurrir posibles ondulaciones en el tramo central, pero en el



promedio de la profundidad es constante y el flujo puede considerarse uniforme. En la pendiente supercrítica (dibujo inferior de la fig. IV-1) la superficie del agua transitoria pasa del estado subcrítico al estado supercrítico a través de una caída hidráulica gradual. Es decir aumenta la velocidad y el flujo se acelera. Más allá de la zona transitoria, el flujo se acerca a la uniformidad. La profundidad de un flujo uniforme se llama *la profundidad normal (tirante normal)*. En todas las figuras, la línea punteada larga representa la línea de profundidad normal, abreviada como N.D.L. (Normal Depth Line), y la línea punteada corta representa la línea de profundidad crítica, o C.D.L. (Critical Depth Line).

La longitud de la zona transitoria depende del gasto y de las condiciones físicas del canal, tales como condición de entrada, forma, pendiente y rugosidad.

### A.3. EXPRESANDO LA VELOCIDAD DE UN FLUJO UNIFORME

Para los cálculos hidráulicos la velocidad media de un flujo uniforme turbulento en canales abiertos se expresa por la llamada *fórmula de flujo uniforme*. Chow hace esta aclaración ya que como veremos diversos investigadores han propuesto sus ecuaciones pero todas engloban los mismos principios. La mayoría de las fórmulas prácticas de flujo uniforme se pueden expresar en la siguiente forma general:

$$V = CR^x S^y \quad (IV-1)$$

donde  $V$  es la velocidad media en fps,  $R$  es el radio hidráulico en ft;  $S$  es la pendiente de la energía,  $x$  y  $y$  son exponentes,  $C$  es un factor de resistencia del flujo, que varía con la velocidad media, radio hidráulico, rugosidad del canal, viscosidad y muchos otros factores.

Se han desarrollado y publicado un gran número de fórmulas prácticas de flujo uniforme, pero ninguna de estas fórmulas cumple la calificación de una fórmula totalmente exacta tal como se definió arriba. Las fórmulas mejor conocidas y más ampliamente usadas son las fórmulas de Chézy y Manning.

### A.4. LA FORMULA DE CHEZY

Ya en el año 1789, el ingeniero francés Antonio Chézy estuvo desarrollando probablemente la primera fórmula de flujo uniforme, la famosa *fórmula Chézy* la cual se expresa usualmente como sigue:

$$V = C\sqrt{RS} \quad (IV-2)$$



donde  $V$  es la velocidad media en fps,  $R$  es el radio hidráulico en ft,  $S$  es la pendiente de la línea de la energía, y  $C$  es un factor de resistencia de flujo, llamado el  $C$  de Chézy.

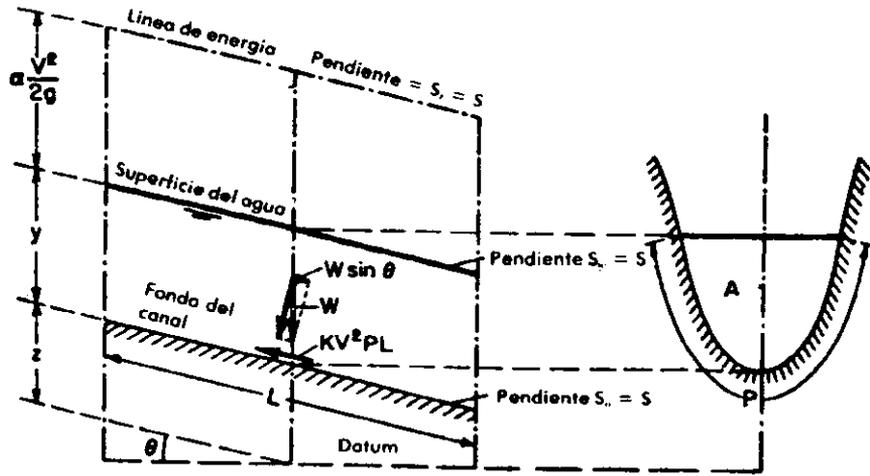


FIG. IV-2 DERIVACION DE LA FORMULA PARA FLUJO UNIFORME EN CANAL ABIERTO

La fórmula de Chézy se puede derivar matemáticamente partiendo de dos hipótesis. La primera hipótesis fue hecha por Chézy. Establece que la fuerza resistente al flujo por unidad de área del lecho de la corriente es proporcional al cuadrado de la velocidad; es decir, esta fuerza es igual a  $KV^2$  donde  $K$  es una constante de proporcionalidad. La superficie de contacto de flujo con el lecho de la corriente es igual al producto del perímetro mojado y la longitud del tramo del canal, o  $PL$  (fig. IV-2). La fuerza total resistiendo al flujo es entonces igual a  $KV^2PL$ .

La segunda hipótesis es el principio básico de flujo uniforme, el cual se cree ha sido planteado primero por Brahm en 1754. Él establece que, en el flujo uniforme, la componente efectiva de la fuerza de gravedad causando el escurrimiento debe ser igual a la fuerza total de resistencia. La componente efectiva de la fuerza de gravedad (fig. IV-2) es paralela al fondo del canal e igual a  $wAL \sin \theta = wALS$ , donde  $w$  es el peso unitario del agua,  $A$  es el área mojada,  $\theta$  es el ángulo de la pendiente del canal. De aquí,  $wALS = KV^2PL$ . Hagamos  $A/P = R$  y permitamos que  $\sqrt{w/K}$  sea reemplazado por factor  $C$ : entonces la ecuación previa se reduce a  $V = \sqrt{(w/K)(A/P)S} = C\sqrt{RS}$  o fórmula de Chézy.

#### A.4.1. DETERMINACION DEL FACTOR DE RESISTENCIA DE CHEZY (C)

Tres importantes fórmulas para la determinación del  $C$  de Chézy son dadas en la siguiente forma:

**A.4.1.1. La fórmula G.K.:** En 1869, dos ingenieros suizos, Ganguillet y Kutter publicaron una fórmula expresando el valor de  $C$  en términos de la pendiente  $S$ , radio



hidráulico  $R$ , y el coeficiente de rugosidad  $n$ . En unidades inglesas, la fórmula es:

$$C = \frac{41.65 + \frac{0.00281}{S} + \frac{1.811}{n}}{1 + \left(41.65 + \frac{0.00281}{S}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}} \quad (IV-3)$$

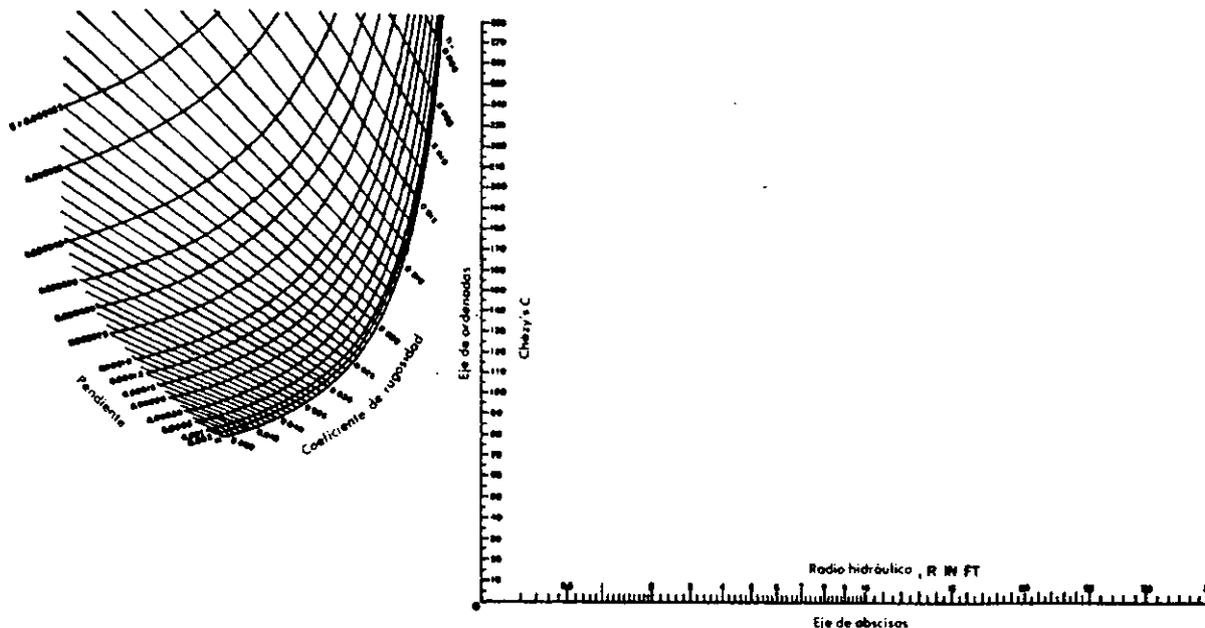


FIG. IV-3 SOLUCION GRAFICA DE LA FORMULA G.K.

Para encontrar  $C$  cuando  $R$ ,  $S$  y  $n$  son dados: una la línea recta  $R$  sobre el eje de las abscisas con el punto donde la curva pendiente  $S$  intersecciona la línea  $n$ , esta indicará el valor  $C$  sobre el eje de las ordenadas.

Para encontrar  $R$  cuando  $C$ ,  $S$  y  $n$  son dados: una la línea recta del punto donde la curva pendiente  $S$  intersecciona la línea  $n$ , una vez localizado el valor  $C$  sobre el eje de las ordenadas, obtendremos el valor  $R$ .

Para encontrar  $S$  cuando  $C$ ,  $R$  y  $n$  son dados: una la línea recta  $R$  sobre el eje de las abscisas hasta  $C$  sobre el eje de las ordenadas, y cuando se extienda la línea, busque el valor de  $S$  y así encontrará el valor  $S$ .

Para encontrar  $n$  cuando  $C$ ,  $R$  y  $S$  son dados: una la línea recta  $R$  sobre el eje de las abscisas con el valor  $C$  sobre el eje de las ordenadas, prolongue la línea hasta la curva pendiente  $S$ , aquí se buscará la intersección con la línea  $n$ .

El coeficiente  $n$  en esta fórmula es conocido específicamente como la  $n$  de Kutter. La fórmula G.K. fue derivada de datos de medidas de flujo en canales de varios tipos. Aunque la fórmula parece complicada, produce usualmente resultados satisfactorios. Ha sido tan ampliamente usada que muchos cuadros y cartas están disponibles para su aplicación. La fig. IV-3 da una carta o gráfico popular para la solución de la fórmula G.K.

**A.4.1.2. La fórmula Bazin:** En 1897, el investigador francés H. Bazin propuso una fórmula de acuerdo a la cual, el  $C$  de Chézy es considerado una función de  $R$  y no de  $S$ . Expresada en unidades inglesas, esta fórmula es

$$C = \frac{157.6}{1 + m/\sqrt{R}} \quad (IV-4)$$

donde  $m$  es un coeficiente de rugosidad cuyos valores propuestos por Bazin se dan en el cuadro IV.1.

CUADRO IV.1. Valores propuestos del valor  $m$  de Bazin.

Descripción del canal	$m$ de Bazin
Cemento muy liso de madera plana	0.11
Madera no plana, hormigón o ladrillo	0.21
Piedra, mampostería alisada o trabajo en ladrillo pobre	0.83
Canales en tierra en perfectas condiciones	1.54
Canales en tierra en normales condiciones	2.36
Canales en tierra en rugosas condiciones	3.17

La fórmula Bazin fue desarrollada inicialmente partiendo de datos obtenidos de canales experimentales pequeños; por lo tanto, su aplicación general se encuentra que es menos satisfactoria que la fórmula G.K.

*A.4.1.3. La fórmula de Powell.* En 1950, Powell sugirió una fórmula logarítmica para la rugosidad de canales artificiales. esta fórmula, una función implícita de  $C$ , es

$$C = -42 \log \left( \frac{C}{4R_e} + \frac{\varepsilon}{R} \right) \quad (IV-5)$$

donde  $R$  es el radio hidráulico en ft;  $R_e$  es el número Reynolds; y  $\varepsilon$  es una medida de la rugosidad del canal, teniendo los valores tentativos indicados en el cuadro IV.2.

Para canales rugosos, el flujo es generalmente tan turbulento que  $R_e$  se hace muy grande comparado con  $C$ ; entonces, la ec. (IV-5) se aproxima a la forma  $C=42\log(R/\varepsilon)$ . Para canales lisos, la rugosidad de la superficie puede ser tan ligera que  $\varepsilon$  se hace despreciable comparado con  $R$ ; entonces, la fórmula se aproxima a la forma  $C=42\log(4R_e/C)$ . Ya que la  $C$  de Chézy se expresa implícitamente en la fórmula Powell, la solución de la fórmula para  $C$  requiere un procedimiento de tanteo y error.

CUADRO IV.2. Valores tentativos del valor  $\varepsilon$  de Powell.

Descripción del canal	Valor $\varepsilon$ de Powell	
	Nuevo	Viejo
Superficie de cemento limpia	0.0002	0.0004
Canaleta de placa irregulares	0.0010	0.0017
Canales revestidos de hormigón	0.004	0.006
Tierra, rectos y uniforme	0.04	
Canales de tierra dragados	0.10	



### A.5. LA FORMULA DE MANNING

En el año de 1889, el ingeniero Irlandés Robert Manning presentó una fórmula, que fue modificada más tarde a su actual forma bien conocida

$$V = \frac{1.49}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (\text{IV-6})$$

donde  $V$  es la velocidad media en fps,  $R$  el radio hidráulico en ft,  $S$  es la pendiente de la línea de energía, y  $n$  es el coeficiente de rugosidad, específicamente conocido como la  $n$  de Manning. Esta fórmula se desarrolló de siete diferentes formas, basadas en datos experimentales de Bazin, y posteriormente verificada por 170 observaciones. Para la derivación del exponente de  $R$ , se hizo uso de los datos experimentales de Bazin sobre canales artificiales. Para diferentes formas y rugosidades, el valor medio del exponente se encontró que varía desde 0.6499 hasta 0.8395. Considerando estas variaciones, Manning adoptó un valor aproximado de  $2/3$  para el exponente. Debido a su simplicidad de forma y a los resultados satisfactorios que arroja para aplicaciones prácticas, la fórmula de Manning se ha hecho la más usada de todas las fórmulas de flujo uniforme para cálculos de escurrimiento en canal abierto. En América siempre ha gozado de mayor aceptación la ecuación de Manning. Por otro lado la constante 1.49 se usa con las variables en sistema inglés.

Dentro de los rangos normales de pendiente y radio hidráulico, los valores  $n$  de Manning y Kutter se encuentran generalmente que son muy parecidos numéricamente. Para propósitos prácticos, los dos valores pueden considerarse idénticos cuando la pendiente sea igual o más grande que 0.0001 y el radio hidráulico está entre 1.0 y 30 ft.

Comparando la fórmula de Chézy con la fórmula de Manning, se puede ver que

$$C = \frac{1.49}{n} R^{1/6} \quad (\text{IV-7})$$

Esta ecuación suministra una relación importante entre el  $C$  de Chézy y la  $n$  de Manning. Debido a esta relación, la fórmula de Manning es a veces considerada como una variación de la fórmula de Chézy con la  $C$  definida previamente por la ec. (IV-7).

El exponente de radio hidráulico en la fórmula Manning no es una constante sino que varía en un rango que depende principalmente de la forma y de la rugosidad del canal. Por esta razón, algunos investigadores prefieren usar la fórmula con un exponente variable.



Esta fórmula en unidades métricas es:

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (\text{IV-8})$$

donde  $y = 2.5\sqrt{n} - 0.13 - 0.75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0.10)$  (IV-9)

y donde  $C$  es el factor de resistencia en la fórmula Chézy expresado en unidades métricas. El exponente  $y$  depende del coeficiente de rugosidad y del radio hidráulico. La fórmula es válida para  $R$  entre 0.1 y 3.m y para  $n$  entre 0.011 y 0.040. Para propósitos prácticos, son generalmente sugeridas las siguientes formas aproximadas de la ec. (IV-9) para su uso:

$$y = 1.5\sqrt{n} \quad \text{para } R < 1.0 \text{ m} \quad (\text{IV-10})$$

$$y = 1.3\sqrt{n} \quad \text{para } R > 1.0 \text{ m} \quad (\text{IV-11})$$

## B. CALCULO DE FLUJO UNIFORME

### B.1. TRANSPORTE DE LA SECCION DE UN CANAL

El gasto de un flujo uniforme en un canal se puede expresar como el producto de la velocidad, representada por la ec. (IV-1) y el área mojada, o

$$Q = VA = C A R^x S^y = KS^y \quad (\text{IV-12})$$

donde  $K = C A R^x$  (IV-13)

El término  $K$  es conocido como el transporte de la sección del canal: es una medida de la capacidad de transporte de la sección del canal, ya que es directamente proporcional a  $Q$ .

Cuando la fórmula de Chézy o Manning es usada como fórmula de flujo uniforme, es decir, cuando  $y=1/2$ , el gasto dado por la ec. (IV-12) se hace igual a:

$$Q = K\sqrt{S} \quad (\text{IV-14})$$

el transporte es,

$$K = \frac{Q}{\sqrt{S}} \quad (\text{IV-15})$$



Esta ecuación puede ser usada para calcular el transporte cuando el gasto y la pendiente del canal son dados.

Cuando la fórmula de Chézy es usada, la ec. (IV-13) se transforma en,

$$K = C AR^{2/3} \quad (IV-16)$$

donde  $C$  es el factor de resistencia de Chézy. Similarmente, cuando la fórmula de Manning es utilizada.

$$K = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} \quad (IV-17)$$

Las dos ecuaciones superiores son usadas para calcular el transporte cuando la geometría del área mojada y el factor de resistencia o coeficiente de rugosidad son dados. Ya que la fórmula de Manning es utilizada extensamente, la mayoría de las discusiones y cálculos siguientes estarán basadas en la ec. (IV-17)

## B.2. FACTOR DE LA SECCION PARA CALCULO DE FLUJO UNIFORME

La expresión  $AR^{2/3}$  se ha llamado *el factor de sección para cálculos de flujo uniforme*. Es un elemento importante en el cálculo del flujo uniforme. Partiendo de la ec. (IV-17), este factor puede ser expresado como:

$$AR^{2/3} = \frac{nK}{1.49} \quad (IV-18)$$

y de la ec.(IV-15), a

$$AR^{2/3} = \frac{nQ}{1.49\sqrt{S}} \quad (IV-19)$$

Principalmente, la Ec. (IV-19) se aplica a la sección del canal cuando el flujo es uniforme. La parte derecha de la ecuación contiene los valores de  $n$ ,  $Q$ , y  $S$ ; pero la parte izquierda depende solamente de la geometría del área mojada. Así, muestra que, para una condición dada de  $n$ ,  $Q$ , y  $S$ , existe sólo una profundidad posible para mantener un flujo uniforme, provisto que el valor  $AR^{2/3}$  que siempre aumenta con el aumento en la profundidad, lo cual es cierto en la mayoría de los casos. Esta profundidad es la *profundidad normal* (*tirante normal*). Cuando  $n$  y  $S$  son conocidos en una sección del canal, se puede ver de la ec. (IV-19) que puede haber sólo un gasto para mantener un flujo uniforme a través de la sección, provisto que  $AR^{2/3}$  que siempre aumenta con el aumento de la profundidad. Esta descarga es el gasto *normal*.



La ec. (IV-19) es una herramienta muy útil para los cálculos y análisis del flujo uniforme. Cuando el gasto, pendiente, y rugosidad son conocidas, la ecuación da el factor de sección  $A_n R_n^{2/3}$  y de aquí, la profundidad normal  $y_n$ . Por otra parte, cuando  $n$ ,  $S$ , y la profundidad, es decir el factor de sección, son dados, el caudal normal  $Q_n$  puede ser calculado de esta ecuación en la siguiente forma:

$$Q = \frac{1.49}{n} AR^{2/3} \sqrt{S} \quad (\text{IV-20})$$

Esto es esencialmente el producto del área mojada y la velocidad definido por la fórmula de Manning. El subíndice  $n$  es usado a veces para especificar la condición del flujo uniforme.

A efecto de simplificar los cálculos, han sido preparadas curvas adimensionadas mostrando la relación entre profundidad y el factor de sección  $AR^{2/3}$  (ver cuadro IV-1, anexo A.6), para secciones del canal rectangular, trapezoidal y circular. Estas curvas que se explican por sí mismas y ayudarán a determinar la profundidad para un dado factor de sección  $AR^{2/3}$  y viceversa. Decidimos incluir en nuestro trabajo las gráficas preparadas por Chow como mera referencia. Nuestra finalidad es calcular  $y_n$  usando la computadora.

### B.3. EL EXPONENTE HIDRAULICO PARA CALCULO DE FLUJO UNIFORME

Ya que el transporte  $K$  es una función de la profundidad del flujo  $y$ , se puede asumir que

$$K^2 = Cy^N \quad (\text{IV-21})$$

donde  $C$  es un coeficiente y  $N$  es un parámetro llamado el *exponente hidráulico para cálculos del flujo uniforme*.

Del gráfico logarítmico de la ec. (IV-21) es evidente que el exponente hidráulico  $N$  a la profundidad  $y$  es

$$\frac{d(\ln K)}{dy} = \frac{N}{2y} \quad (\text{IV-22})$$

Ahora, tomando los logaritmos en ambos lados de la ec. (IV-17),  $K=1.49AR^{2/3}/n$  y entonces diferenciando esta ecuación con respecto a  $y$  bajo la hipótesis de que  $n$  es independiente de  $y$ ,



$$\frac{d(\ln K)}{dy} = \frac{1}{A} \frac{dA}{dy} + \frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{dP}{dy} \quad (\text{IV-23})$$

Ya que  $dA/dy=T$  y  $R=A/P$ , la ecuación superior se hace

$$\frac{d(\ln K)}{dy} = \frac{1}{3A} \left( 5T - 2R \frac{dP}{dy} \right) \quad (\text{IV-24})$$

Igualando las partes derechas de las ecs. (IV-22) y (IV-24) y resolviendo para  $N$ ,

$$N = \frac{2y}{3A} \left( 5T - 2R \frac{dP}{dy} \right) \quad (\text{IV-25})$$

Esta ecuación general para el exponente hidráulico  $N$ . Para una sección trapezoidal del canal teniendo un fondo ancho  $b$  y pendientes laterales 1 sobre  $z$ , las expresiones para  $A$ ,  $T$ ,  $P$ , y  $R$  se pueden obtener del cuadro II-1 (ver anexo A.2) Sustituyéndolas en la ec. (IV-15) y simplificando, la ecuación resultante es:

$$N = \frac{10}{3} \frac{1+2z(y/b)}{1+z(y/b)} - \frac{8}{3} \frac{\sqrt{1+z^2}(y/b)}{1+2\sqrt{1+z^2}(y/b)} \quad (\text{IV-26})$$

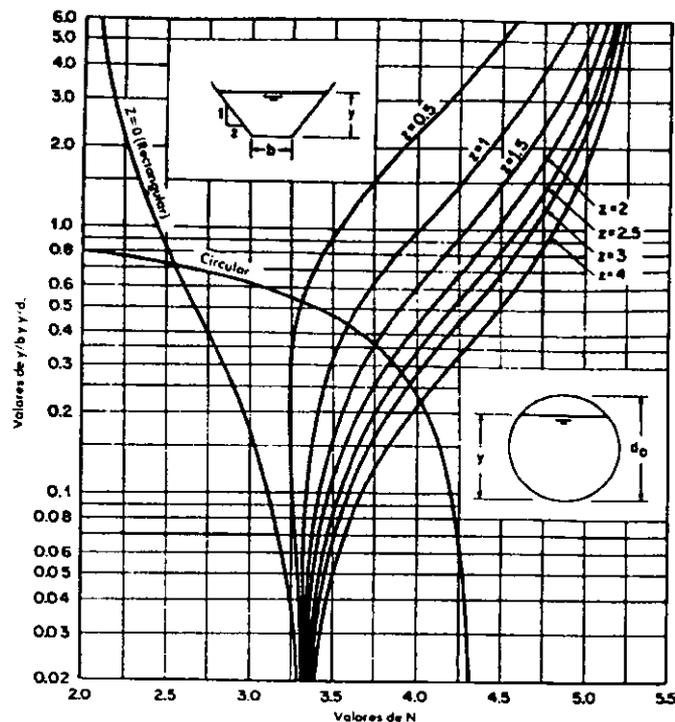


FIG. IV-4 CURVAS DE LOS VALORES  $N$



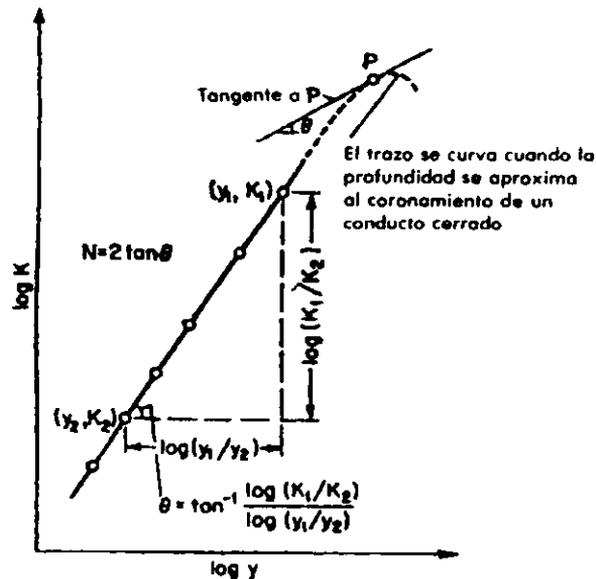
Esta ecuación indica que el valor  $N$  para la sección trapezoidal es una función de  $z$  y de  $y/b$ . Para valores  $z = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ , y  $4.0$ , se puede construir una familia de curvas para  $N$  versus  $y/b$  (fig. IV-4). Estas curvas indican que el valor de  $N$  varía en el rango de 2.0 a 5.3. la deducción de las curvas presentadas por Chow nos indican un esfuerzo loable por facilitar la determinación de la profundidad crítica. Nosotros pensamos de manera semejante al querer proporcionar una medio más moderno de solución al mismo problema.

La curva para una sección círculo con  $N$  trazada contra  $y/d_0$ , donde  $d_0$  es el diámetro, se muestra también en al fig. IV-4. Esta curva muestra que el valor de  $N$  decrece rápidamente conforme la profundidad del flujo se aproxima al techo del canal. Análisis matemáticos posteriores han revelado que un valor de  $N$  será igual a cero en  $y/d_0=0.938$  y entonces se hará negativo a profundidades mayores.

Para otras secciones del canal distintas de las formas rectangular, trapezoidal y circular, los valores exactos de  $N$  se pueden calcular directamente por la ec. (IV-25), provisto que la derivada  $dP/dy$  pueda ser evaluada. Para la mayoría de los canales, excepto para canales con cambios abruptos en la forma de la sección transversal y para conductos cerrados llenándose, un trazo logarítmico de  $K$  como ordenada contra la profundidad como abscisa (fig. IV-5) aparecerá aproximadamente como la línea recta. Esto también puede ser visto de las curvas adicionadas para  $AR^{2/3}$  en el cuadro IV-1 (ver anexo A.6), las cuales son trazadas similarmente excepto que la ordenada y la abscisa son intercambiadas. Si se supone un valor constante  $n$ , la ec. (IV-17) indica que  $K \propto AR^{2/3}$ ; por lo tanto, estas curvas para  $AR^{2/3}$  debieran mostrar las mismas características como si las curvas fueran trazadas para  $K$ . De la ec. (IV-21), puede ser visto que el exponente hidráulico para la zona de la línea recta del trazo es igual a dos veces la pendiente de la línea recta dibujada. Así, si cualquiera dos puntos con coordenadas  $(K_1, y_1)$  y  $(K_2, y_2)$  son tomados de la línea recta, el valor aproximado de  $N$  puede ser calculado por la siguiente ecuación:

$$N = 2 \frac{\log(K_1 / K_2)}{\log(y_1 / y_2)} \quad (IV-27)$$

Queremos indicar que vemos una ventaja interesante en la elaboración de estas gráficas y es que se pueden hacer deducciones a primera vista, como lo dicho anteriormente de que  $N$  decrece conforme  $y$  tiende a un máximo.

FIG. IV-5 DETERMINACION DE LA GRAFICA DE  $N$  POR TRAZADO LOGARÍTMICO

Cuando la sección transversal de un canal cambia abruptamente con respecto a la profundidad, el exponente hidráulico cambiará en consecuencia. Se indican algunas secciones típicas en la fig. (IV-6). En tales casos, el dibujo logarítmico de  $N$  puede aparecer como un trazo quebrado o una curva evidente. Para las porciones casi rectas de la línea quebrada o curva, el exponente hidráulico se puede suponer constante.

Cuando la profundidad del flujo se aproxima al límite superior de un conducto cerrado, el trazo logarítmico aparecerá como una curva. El exponente hidráulico en el rango del trazo curvo es igual a dos veces la pendiente de la tangente a la curva a la profundidad dada (fig. IV-5). Para propósitos prácticos, la curva puede ser dividida en un número de segmentos cortos y cada segmento puede ser considerado como una línea recta teniendo una pendiente o exponente hidráulico constante.

Ahora tomemos la sección circular como ejemplo. El dibujo logarítmico adimensionado de  $AR^{2/3}$  contra la profundidad se muestra en el cuadro IV-1 (ver anexo A.6) suponiendo un valor constante de  $n$ , esta curva mostrará las mismas características como si la profundidad fuese trazada contra  $K$ . A medida que la profundidad aumenta, la curva se desvía gradualmente de una línea recta y finalmente alcanza una curvatura pronunciada en  $y/d_0 = 0.938$ , donde el valor de  $AR^{2/3}/d_0^{8/3}$  es un máximo. Ya que el valor de  $n$  se supone constante, esta relación  $y/d_0 = 0.938$  también corresponde al valor máximo del transporte  $K$ . La pendiente de la tangente a la curva a esta profundidad, de acuerdo con la gráfica en la cual la ordenada y la abscisa son intercambiadas, es horizontal, y así el exponente hidráulico  $N$  es igual a cero. Para profundidades con radio mayor que  $y/d_0 = 0.938$  la curva muestra un decrecimiento en el valor de  $AR^{2/3}/d_0^{8/3}$  y, de aquí, un decrecimiento en el transporte  $K$  si  $n$  se supone constante. La pendiente de la tangente a la curva y con ella el exponente hidráulico se hará entonces negativos.

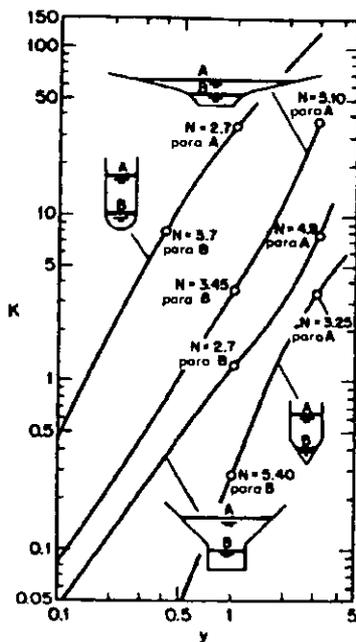


FIG. IV-6 TÍPICAS SECCIONES DEL CANAL TENIENDO VARIACIONES APRECIABLES EN LOS VALORES N CON RESPECTO A LA PROFUNDIDAD

### B.4. DETERMINACION DE LA PROFUNDIDAD NORMAL Y DE LA VELOCIDAD

La profundidad normal y la velocidad pueden ser calculadas por una fórmula de flujo uniforme. En los cálculos siguientes, la fórmula de Manning es usada con tres diferentes métodos de solución.

**B.4.1. Método Algebraico.** Para canales de secciones geométricas simples, las condiciones de flujo pueden ser determinadas con una solución algebraica, como sigue:

Ejemplo. Un canal trapezoidal, con  $b=20\text{ft}$ ,  $z=2$ ,  $S_0=0.0016$  y  $n=0.025$ , lleva un caudal de 400cfs. Calcular la profundidad normal y velocidad.

Solución 1: El desarrollo analítico. El radio hidráulico y el área mojada de la sección dada se expresan en términos de la profundidad  $y$  y así:

$$R = \frac{y(10 + y)}{10 + y\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad A = y(20 + 2y)$$

La velocidad es

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{400}{y(20 + 2y)}$$

sustituyendo las cantidades dadas y las expresiones superiores en la fórmula de Manning y simplificando



$$\frac{200}{y(10+y)} = \frac{1.49}{0.025} \left[ \frac{y(10+y)}{10+y\sqrt{5}} \right]^{2/3} 0.0016^{1/2}$$

$$o \quad 7680 + 1720y = [y(10+y)]^{2.5}$$

Resolviendo esta ecuación para  $y$  por el método de tanteos,  $Y_n=3.36$ ft. Esta es la profundidad normal. El área correspondiente es  $A_n=89.8$ ft<sup>2</sup> y la velocidad normal es  $V_n=400/89.8 = 4.46$ fps. Del ejemplo II (ver capítulo "Canales con flujo crítico"), es conocido que la profundidad normal es más grande que la profundidad crítica, el flujo es subcrítico.

**Solución 2:** *El desarrollo por aproximación.* Algunos ingenieros prefieren resolver este tipo de problemas por aproximación. Utilizando los datos dados, el lado derecho de la ec. (IV-19) es  $nQ/1.49\sqrt{S} = 167.7$ . Entonces suponemos un valor de  $y$  y calculemos el factor de sección  $AR^{2/3}$ . Hagamos varios tanteos hasta que el valor supuesto  $y$  para el tanteo más próximo es la profundidad normal. Este cálculo de aproximaciones o tanteos es indicado a continuación:

$y$	$A$	$R$	$R^{2/3}$	$AR^{2/3}$	Observaciones
3.00	78.0	2.34	1.762	137.4	$y$ Demasiado pequeño
3.50	94.5	2.65	1.915	181.0	$y$ Demasiado grande
3.30	87.7	2.53	1.852	162.6	
3.35	89.5	2.56	1.870	167.2	
3.36	89.8	2.56	1.870	168.0	El más aproximado

La profundidad normal es entonces  $y_n 3.36$  ft.

**B.4.2. Método Gráfico.** Para canales de sección transversal complicada y en condiciones de flujo variable, se ha visto que una solución gráfica del problema es conveniente. Por este procedimiento, una curva de  $y$  contra el factor de sección  $AR^{2/3}$  se construye primero y el valor de  $nQ/1.49\sqrt{S}$  es calculado. De acuerdo a la ec. (IV-19), es evidente que la profundidad normal puede ser hallada de la curva  $y-AR^{2/3}$  donde la coordenada de  $AR^{2/3}$  es igual al valor calculado de  $nQ/1.49\sqrt{S}$ . Cuando el gasto cambia, se calculan valores nuevos de  $nQ/1.49\sqrt{S}$  y las correspondientes nuevas profundidades normales pueden ser encontradas en la misma curva.

**B.4.3. Método del Gráfico del Diseño.** El gráfico de diseño puede ser utilizado con gran facilidad para determinar la profundidad normal (cuadro IV-1, ver anexo A.6).



### B.5. DETERMINACION DE LAS PENDIENTES NORMAL Y CRITICA

Cuando el gasto y rugosidad son dados, la fórmula de Manning puede ser usada para determinar la pendiente de un canal prismático en el cual el flujo es uniforme a una dada profundidad normal  $y_n$ . La pendiente así determinada es a veces llamada la pendiente normal  $S_n$ .

Variando la pendiente de un canal a cierto valor, es posible cambiar la profundidad normal y hacer que el flujo uniforme ocurra en un estado crítico para un gasto y rugosidad dados. La pendiente obtenida es la pendiente crítica  $S_c$ , y la profundidad normal correspondiente es igual a la profundidad crítica. La pendiente crítica más pequeña para un canal con una determinada forma y rugosidad es llamada *pendiente limite*  $S_L$ .

Aún más, ajustando la pendiente y el gasto, puede ser obtenido un flujo uniforme crítico para una profundidad normal dada. La pendiente así obtenida se conoce como *la pendiente crítica para una profundidad normal dada*  $S_{cn}$ .

### B.6. METODOLOGIA DE CALCULO DEL FLUJO UNIFORME

El cálculo de flujo uniforme se puede realizar mediante el uso de dos ecuaciones: la ecuación de continuidad y la fórmula de flujo uniforme. Cuando se usa la fórmula de Manning con la fórmula de flujo uniforme, los cálculos comprenderán los siguientes variables:

1. - El gasto normal  $Q$ .
2. - El coeficiente de rugosidad  $n$ .
3. - La pendiente del canal  $S$ .
4. - El área transversal al flujo  $A$ .
5. - El radio hidráulico  $R$ .

Un problema es hidráulicamente determinado, cuando de los datos se deduce de manera unívoca, la incógnita.

Para ilustrar podemos decir que: conocidos  $R$ ,  $A$  y  $n$  existe una infinidad de caudales  $Q$  que satisfacen la ecuación de flujo uniforme, así a cada  $Q$  queda asociada una  $S$ , entonces este problema no es hidráulicamente determinado.

Son tres los problemas hidráulicamente determinados:

Dados  $n$ ,  $R$ ,  $A$  y  $S$ . Calcular  $Q$

Dados  $n$ ,  $R$ ,  $A$  y  $Q$ . Calcular  $S$

Dados  $n$ ,  $Q$ , y  $S$ . Calcular  $A$  y  $R$  que dependen de  $y$



### B.7. FLUJO DE SUPERFICIE UNIFORME

Cuando el agua fluye a través de una superficie muy ancha, se produce el llamado *flujo de superficie*. La profundidad del flujo puede ser tan delgada en comparación con el ancho del flujo, que el flujo se hace un flujo en canal abierto ancho, conocido específicamente como *flujo en lámina*. En una cuenca, el flujo de superficie ocurre principalmente como un resultado del desagüe natural y es llamado superficial.

El flujo uniforme puede ser turbulento o laminar, dependiendo de ciertos factores como gasto, pendiente, viscosidad y grado de rugosidad superficial. Si las velocidades y profundidades del flujo son relativamente pequeñas, la viscosidad se hace un factor dominante y el flujo es laminar. En este caso se aplica la ley de viscosidad de Newton. Esta ley expresa la relación entre la viscosidad dinámica  $\mu$  y el esfuerzo cortante  $\tau$  a una distancia  $y$  de la superficie del contorno (fig. IV-7), como sigue

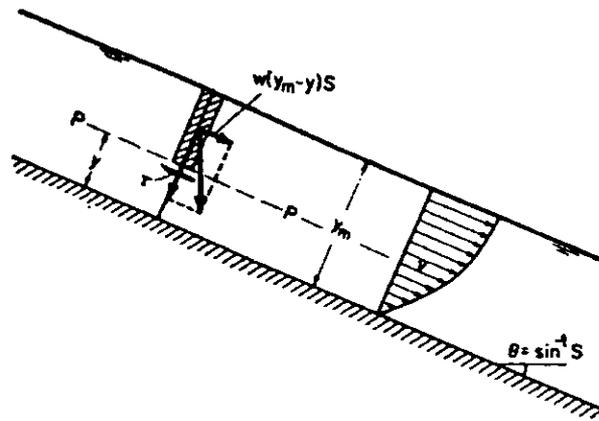


FIG. IV-7 FLUJO UNIFORME LAMINAR EN CANAL ABIERTO

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (\text{IV-28})$$

Para el flujo laminar uniforme, la componente de la fuerza gravitacional paralela al flujo en cualquier capa laminar es balanceada por la fuerza de fricción. En otras palabras el esfuerzo cortante  $\tau$  por unidad de área del flujo a lo largo de la capa laminar  $PP$  (fig. IV-7) es igual a la componente efectiva de la fuerza gravitacional, es decir,  $\gamma = w(y_m - y)S$ . Ya que el peso específico  $w = \rho g$  y  $\mu/\rho = \nu$ ,  $\gamma = g\mu(y_m - y)S/\nu$ . Así, de la ec.(IV-15)

$$dv = \frac{gS}{\nu} (y_m - y)dy$$

integrando y observando que  $v=0$  cuando  $y=0$ ,

$$v = \frac{gS}{\nu} \left( yy_m - \frac{y^2}{2} \right) \quad (\text{IV-29})$$



Esta es una ecuación cuadrática indicando que la velocidad del flujo uniforme laminar en un canal abierto ancho tiene una distribución parabólica. Integrando la ec.(IV-29) desde  $y=0$  hasta  $y=y_m$  y dividiendo el resultado por  $y_m$ , la velocidad media es

$$v = \frac{1}{y_m} \int_0^{y_m} v dy = \frac{gS y_m^2}{3\nu} \quad (\text{IV-30})$$

y el gasto por unidad de ancho es:

$$q = C_L y_m^3 \quad (\text{IV-31})$$

donde  $C_L = Gs/3\nu$ , es un coeficiente comprendiendo pendiente y viscosidad.

El flujo de superficie uniforme se hace turbulento si la superficie es rugosa y si la profundidad del flujo es suficientemente grande para producir remolinos persistentes, en este caso la rugosidad de la superficie es un factor dominante, y la velocidad puede ser expresada fácilmente por la fórmula de Manning. Así el gasto por unidad de ancho es

$$q = C_T y_m^{5/3} \quad (\text{IV-32})$$

donde  $y_m$  es la profundidad media del flujo y donde  $C_T = 1.49S^{0.5}/n$ , es un coeficiente incluyendo pendiente y rugosidad.

El cambio de estado del flujo delgado de laminar a turbulento ha sido estudiado por muchos investigadores. La región de transición se vio que varía a  $Re = 310$  según Jeffreys, de  $Re = 300$  a  $330$  para Hopf, y de  $Re = 548$  a  $773$  para Horton. Sin embargo, Horton pensó que el criterio de Reynolds no es satisfactorio para el flujo en láminas sobre superficies relativamente rugosas. Él razonó que, en el punto de transición, las velocidades para el flujo laminar y turbulento son casi iguales, porque esta condición de velocidades iguales representa la cantidad mínima de energía capaz de mantener flujo turbulento. Así, el flujo no puede ser turbulento si la velocidad es menor que

$$V = \frac{v}{4.83n^2 y_m^{2/3}} \quad (\text{IV-33})$$

donde  $y_m$  es la profundidad media del flujo.

Si se desea conocer más acerca de las características del escurrimiento en un conducto cerrado favor de ver el anexo A.7.

Se han elaborado diversas tablas para valores de  $n$  de Manning, a continuación se ve una de ellas. Se puede consultar la obra de Simon, Sotelo, Chow, y otros los cuales muestran tablas más completas y/o otros términos.

B.8. TABLA DE LOS VALORES DE LA  $n$  DE MANNING

<i>Descripción del canal</i>	<i>n</i>	<i>1.49/n</i>
Superficies rectas, excepcionalmente lisas: revestimiento esmaltado o vidriado, vidrio, lucita, latón.	0.009	165.55
Tablones muy cepillados y ajustados, metal liso, mortero de cemento solamente, capa lisa de alquitrán o pintura.	0.010	149.00
Madera cepillada: mortero aplanado (1/3 de arena) sin proyecciones, con alineación recta.	0.011	135.45
Tablones cuidadosamente ajustados pero sin cepillar, concreto flotado con llana de acero, con alineación recta.	0.012	124.16
Superficies razonablemente rectas, limpias y lisas, sin proyecciones; tablones de buena calidad; paredes de ladrillo bien construida; concreto aplanado con llanas de madera; mampostería lisa y terminada.	0.013	114.62
Superficie de madera de buena calidad, metal o concreto, con alguna curvatura, muy pequeñas proyecciones, ligeras colonias de musgo o algas, o deposición de grava. Concreto a pistola recubierto con mortero aplanado.	0.014	106.49
Ladrillo áspero; superficie de piedra picada de mediana calidad; madera con manchas musgo; concreto áspero; acero remachado.	0.015	99.33
Canales de tierra muy lisos y rectos, libres de plantas; escombros de piedra empotrada en cemento; concreto a pistola sin aplanar; pared de ladrillos deteriorados; canal cortado en la roca, excepcionalmente bien excavado y terminado.	0.017	87.65
Canales de tierra bien construidos, cubiertos con depósitos de fango espeso y uniforme; canales metálicos con curvaturas excesivas, grandes proyecciones y desechos acumulados.	0.018	82.77
Tierras lisas bien compactadas; paredes de tierra sin acabado; canales excavados en rocas sólidas pero suave; pequeños canales curvos excavados en loess sólidos, grava y arcilla con depósitos de fango, libre de plantas, en condiciones normales; canales metálicos de superficie normal y deteriorados, con curvaturas y desechos, canales muy grandes en buenas condiciones.	0.020	74.50
Canales artificiales de tierra, de pequeñas dimensiones, conservado en buenas condiciones; cursos de agua naturales, rectos, con fondo uniforme bastante limpio, sin remansos ni barreras contra el flujo, con derrumbes y socavaciones de los márgenes.	0.025	59.60
Zanjas; canales artificiales por debajo de lo normal con pedruscos dispersos por el lecho.	0.028	53.21
Grandes cauces de alivio con buen mantenimiento; canales artificiales mal cuidados, con socavaciones, deslizamientos con plantas acuáticas abundantes; corrientes naturales con buena alineación y una sección transversal constante.	0.030	49.66
Ríos aluviales permanentes con cambios moderados en la sección transversal, etapa promedio; corrientes de agua intermitentes con ligeras curvas en muy buenas condiciones.	0.033	45.15
Pequeños canales artificiales deteriorados, medio congestionados con vegetación acuática; ríos sinuosos con lechos limpios, pero con remansos y vados.	0.035	42.57
Corrientes aluviales permanentes con curvas irregulares y un lecho liso; canales naturales rectos con forma desigual, bancos de arena, dunas, algunas rocas y zanjas sumergidas; secciones inferiores de corrientes montañosas con un canal bien desarrollado y depósitos sedimentarios; corrientes intermitentes en buenas condiciones; canales artificiales bastante deteriorados, con musgo y cañas, rocas socavadas y deslizamientos.	0.040	37.25



# CAPITULO V



# SALTO HIDRAULICO



## A. SALTO HIDRAULICO

El salto hidráulico fue investigado experimentalmente por primera vez, por Bidone, un científico italiano, en 1818. Esto permitió a Bálanger distinguir entre pendientes moderadas (subcríticas) y pronunciadas (supercríticas), Ya que él había observado canales pronunciados y dedujo que el salto hidráulico se produce frecuentemente por una barrera en un flujo uniforme originalmente.

La teoría del salto hidráulico que se desarrolló en los primeros días es para canales horizontales o inclinados ligeramente en los cuales el peso del agua en el salto tiene poco efecto sobre el corrimiento del salto y por lo tanto es ignorado en el análisis. Los resultados así obtenidos, sin embargo, se pueden aplicar a la mayoría de los canales encontrados en los problemas de ingeniería. Para canales de gran pendiente, el efecto del peso del agua en el salto se puede hacer tan pronunciado que se debe incluir en el análisis.

Hay muchas aplicaciones prácticas del salto hidráulico; es utilizado (1) Para disipar energía en el agua escurriendo sobre presas, diques y otras estructuras hidráulicas y así prevenir socavación aguas abajo de las estructuras; (2) Para recuperar altura o levantar el nivel del agua sobre el extremo aguas abajo de un canal de control de medición y así mantener alto el nivel del agua en el canal para irrigación u otros propósitos de distribución de agua; (3) Para incrementar peso sobre un lecho amortiguador y así reducir la presión hacia arriba debajo de una estructura de mampostería mediante la subida de la profundidad del agua sobre el lecho amortiguador; (4) Para incrementar la descarga de una esclusa manteniendo atrás el nivel aguas abajo, ya que la altura efectiva será reducida si se permite que el nivel aguas abajo ahogue el salto; (5) Para indicar condiciones especiales del flujo, tales como la existencia del flujo supercrítico o la presencia de una sección de control siempre que se pueda ubicar una estación de medición; (6) Para mezclas químicas usadas para purificación del agua; (7) Para aerear agua para abastecimiento de agua a las ciudades; y (8) Para remover bolsas de aire de las líneas de abastecimiento de agua y así prevenir bloqueos de aire.

### A.1. SALTO EN CANALES HORIZONTALES RECTANGULARES

Para el flujo supercrítico en un canal horizontal rectangular, la energía del flujo está disipada a través de resistencia friccional a lo largo de un canal, resultando una disminución en velocidad y un aumento en la profundidad en la dirección del flujo. Se formará un salto hidráulico en un canal si el número Froude  $F_1$  del flujo, la profundidad  $y_1$  y una profundidad aguas abajo  $y_2$  satisfacen la ecuación

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1) \quad (V-1)$$



Esta ecuación se puede representar por la curva en la fig. V-1. Esta curva ha sido verificada satisfactoriamente con muchos datos experimentales y será encontrada muy útil en el análisis y diseño para saltos hidráulicos.

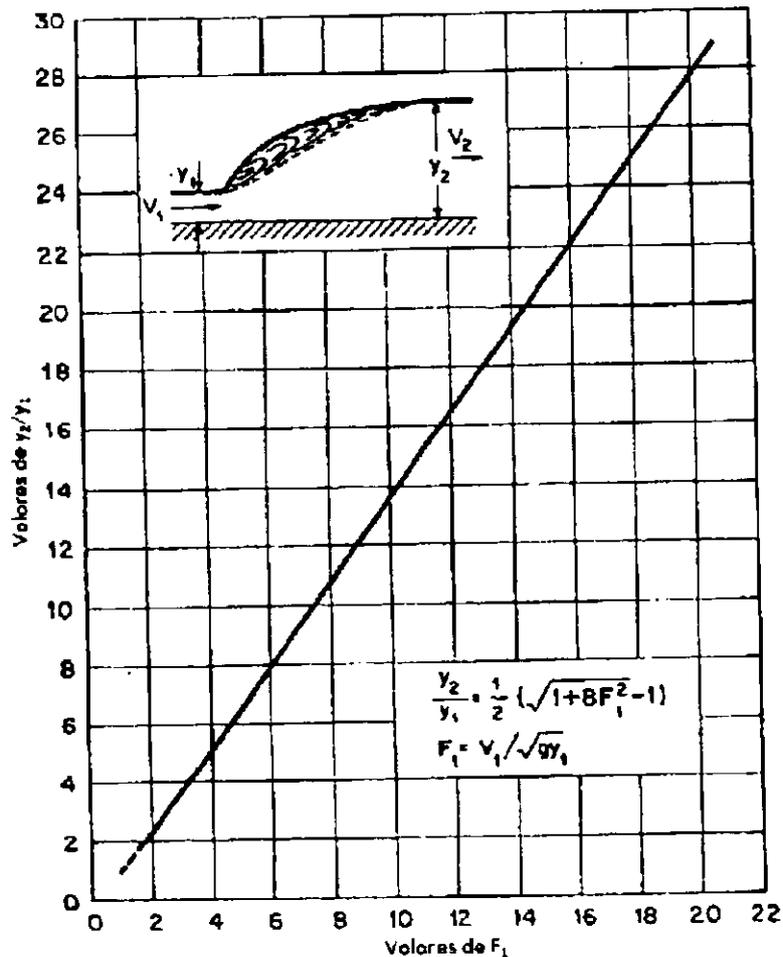


FIG. V-1 RELACION ENTRE  $F_1$  Y  $y_2/y_1$  PARA UN SALTO HIDRAULICO EN UN CANAL RECTANGULAR HORIZONTAL

## A.2. TIPOS DE SALTO

Son dos los saltos hidráulicos sobre piso horizontal de varios tipos distintos. Estos tipos se pueden clasificar convenientemente mediante el número de Froude  $F_1$  del flujo próximo (fig. V-2), como sigue:

1. - Para  $F_1 = 1$ , el flujo es crítico, y de aquí, no se puede formar ningún salto.
2. - Para  $F_1 = 1$  a  $1.7$ , la superficie del agua muestra ondulaciones, y el salto es llamado salto ondular.



3. - Para  $F_1 = 1.7$  a  $2.5$ , una serie de pequeños rolos se desarrolla sobre la superficie del salto, pero la superficie del agua, aguas abajo, permanece lisa. La velocidad a lo largo es ligeramente uniforme, y la pérdida de energía es baja. Este salto se puede llamar un salto débil.

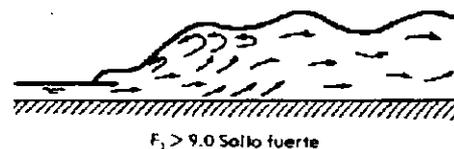
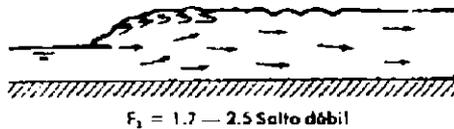
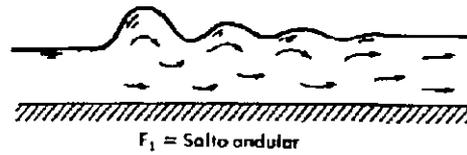


FIG. V-2 VARIOS TIPOS DE SALTOS HIDRAULICOS

4. - Para  $F_1 = 2.5$  a  $4.5$ , hay un chorro oscilante entrando al salto del fondo a la superficie y atrás otra vez sin periodicidad. Cada oscilación produce una gran onda de periodo irregular, la cual comúnmente en canales, puede viajar por kilómetros haciendo daño a la estructura. Este salto se puede llamar un salto oscilante.

5. - Para  $F_1 = 4.5$  a  $9.0$ , la extremidad aguas abajo del rolo de la superficie y el punto en el cual el chorro de alta velocidad tiende a dejar el flujo ocurre, prácticamente, a la misma sección vertical. La acción y posición de este salto son menos sensibles a la



variación en la profundidad aguas abajo. El salto está bien balanceado y el rendimiento es el mejor. La disipación de energía varía desde 45 a 70%. Este salto se puede llamar salto permanente.

6. - Para  $F_1 = 9.0$  y más grande, el chorro de alta velocidad agarra golpes intermitentes de agua rodando hacia debajo de la cara del frente del salto, generando ondas aguas abajo, y puede prevalecer una superficie áspera. La acción del salto es brusca pero efectiva ya que la disipación de energía puede alcanzar 85%. Este salto se puede llamar un salto fuerte.

Se debe destacar que los rangos del número Froude dados arriba para los diversos tipos de salto no son límites rigurosos sino que se traslapan a una cierta extensión dependiendo de condiciones locales.

### A.3. CARACTERISTICAS BASICAS DEL SALTO

Algunas características básicas del salto hidráulico en canales horizontales rectangulares serán discutidas a continuación:

*Pérdida de energía.* La pérdida de energía en el salto es igual a la diferencia en energías específicas antes y después del salto. Se puede mostrar que la pérdida es

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (V-2)$$

La relación  $\Delta E/E_1$  se conoce como la *pérdida relativa*.

*Eficiencia.* La relación de la energía específica después del salto a aquella antes del salto se define como la *eficiencia del salto*. Se puede mostrar que la eficiencia es

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{(8F_1^2 + 1)^{3/2} - 4F_1^2 + 1}{8F_1^2(2 + F_1^2)} \quad (V-3)$$

Esta ecuación indica que la eficiencia de un salto es una función adimensionada, dependiendo solamente del número Froude del flujo aproximadamente. La pérdida relativa es igual a  $1 - E_2/E_1$ ; esta es también una función adimensionada de  $F_1$ .

*Altura del salto.* La diferencia entre las profundidades después y antes del salto es la altura del salto, o  $h_j = y_2 - y_1$ . Expresando cada término como una relación con respecto a la energía específica inicial,



$$\frac{h_j}{E_1} = \frac{y_2}{E_1} - \frac{y_1}{E_1}$$

donde  $h_j/E_1$  es la altura relativa,  $y_1/E_1$  es la profundidad relativa inicial, e  $y_2/E_1$  es la profundidad relativa seciente. Todas estas relaciones se pueden mostrar que son funciones adimensionadas de  $F_1$ . Por ejemplo

$$\frac{h_j}{E_1} = \frac{\sqrt{1+8F_1^2} - 3}{F_1^2 + 2} \quad (\text{V-4})$$

Ya que la pérdida relativa, eficiencia, altura relativa y profundidades relativa inicial y seciente de un salto hidráulico en un canal rectangular horizontal, son funciones de  $F_1$ , ellas pueden ser dibujadas contra  $F_1$ , resultando en un juego de curvas muy características (fig. V-3). Con referencia a estas curvas, se pueden destacar los siguientes aspectos interesantes:

1. La mixta altura relativa  $h_j/E_1$  es 0.507, la cual ocurre en  $F_1=2.77$ .
2. La mixta profundidad relativa  $y_2/E_1$  es 0.8, que ocurre a  $y_1/E_1=0.4$  y  $F_1=1.73$ . Los experimentos han demostrado que la transición desde un salto ondular a un salto directo tiene lugar aproximadamente en este punto  $F_1=1.73$ .
3. Cuando  $F_1=1$ , el flujo es crítico e  $y_1 = y_2 = 2/3 E_1$ .
4. Cuando el  $F_1$  aumenta, los cambios en todas las relaciones características se hacen graduales.

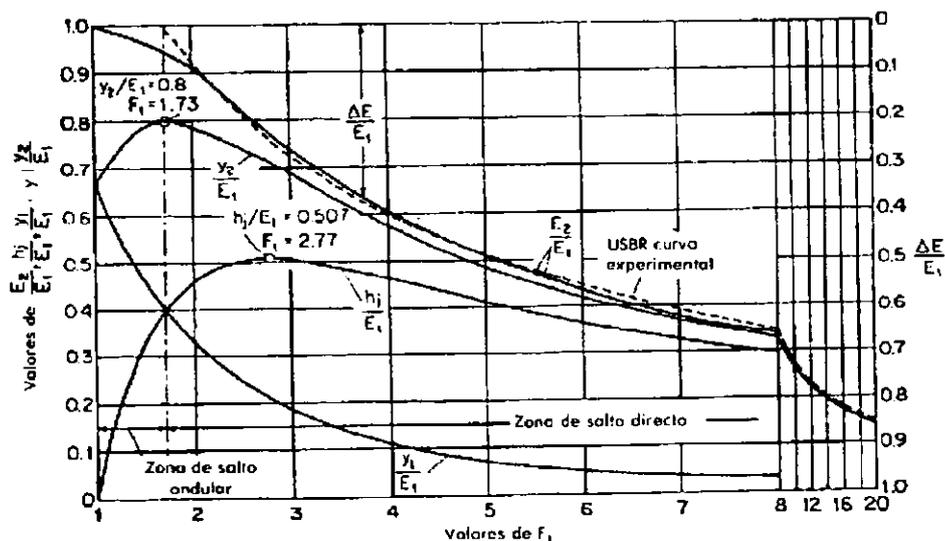


FIG. V-3 CURVAS CARACTERISTICAS DE SALTO HIDRAULICOS EN CANALES RECTANGULARES HORIZONTALES



Las curvas características proveerán al diseñador con una idea general acerca del rango de condiciones bajo las cuales la estructura debe ser operada. Por ejemplo, en el diseño de una compuerta de esclusa o ahogada, incluyendo un salto debajo de la compuerta, tales curvas mostrarán claramente la formación del salto para diferentes aberturas de la compuerta bajo una altura dada. Para canales horizontales no rectangulares, se pueden preparar también curvas similares.

#### A.4. LONGITUD DEL SALTO

La longitud del salto se puede definir como la distancia medida desde el inicio o cara frontal del salto a un punto sobre la superficie inmediatamente aguas debajo de la turbulencia. Esta longitud no puede ser determinada fácilmente por la teoría, pero ha sido estudiada experimentalmente por muchos investigadores.

Los datos experimentales sobre la longitud del salto se pueden dibujar convenientemente con el número Froude  $F_1$  contra la relación adimensionada  $L/(y_2 - y_1)$ ,  $L/y_1$  o  $L/y_2$ . La gráfica de  $F_1$  vs  $L/y_1$  es probablemente la mejor, pues la curva resultante puede ser definida mejor por los datos. Para propósitos prácticos, sin embargo, es deseable la gráfica de  $F_1$  vs  $L/y_2$ , porque la curva resultante muestra regularidad o una ligera porción plana para el rango de saltos bien definidos. La curva mostrada en la fig. V-4, fue desarrollada para saltos que se dan en canales rectangulares. En ausencia de datos adecuados, esta curva puede ser aplicada también aproximadamente a saltos formados en canales trapezoidales.

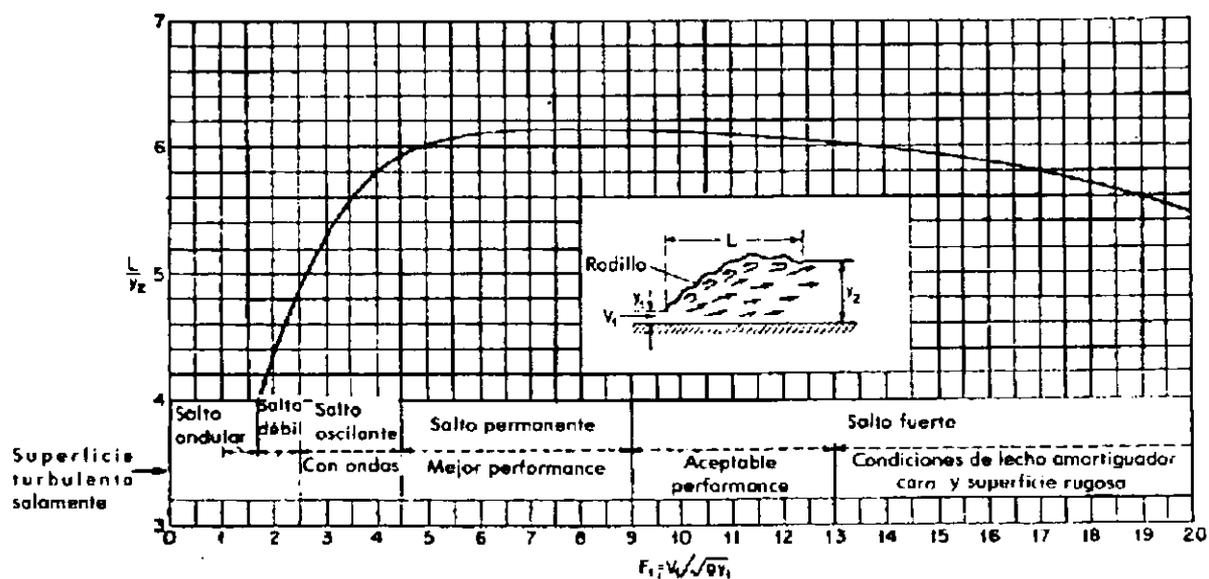


FIG. V-4 LONGITUD EN TERMINOS DE PROFUNDIDAD SECUENTE  $y_2$  DE SALTOS EN CANALES HORIZONTALES.



### A.5. EL PERFIL DE LA SUPERFICIE

Es deseable un conocimiento del perfil de la superficie de un salto al diseñar el margen libre para las paredes de retención del lecho amortiguador en donde tiene lugar el salto. Es importante también para determinar la presión para uso en diseño estructural, por causa de que los experimentos han demostrado que la presión vertical sobre el piso horizontal bajo un salto hidráulico es prácticamente la misma como podría indicarse por el perfil de la superficie del agua.

Sobre la base de sus datos experimentales, Bakhmeteff y Matzke han encontrado que el perfil de la superficie de un salto hidráulico se puede representar por curvas adimensionadas para varios valores  $F_1$ , como se ve en la fig. (V-5). Moore ha desarrollado curvas similares para saltos debajo de un bordo libre. Los perfiles mostrados por Moore se levantan más rápidamente al empezar que los perfiles de Bakhmeteff y Matzke. Se cree que esto es porque la distribución no hidrostática de la presión en el salto no fue registrada apropiadamente por las medidas piezométricas por los datos de Bakhmeteff y Matzke. Más aún, la longitud de salto de Moore era alrededor de 20% más larga que la mostrada por las curvas de Bakhmeteff y Matzke. Ya que el salto en última instancia, se formó aguas abajo de una esclusa reguladora, la falta de acuerdo puede ser causada por una diferencia en el perfil de la velocidad flujo lanzado entrando al salto.

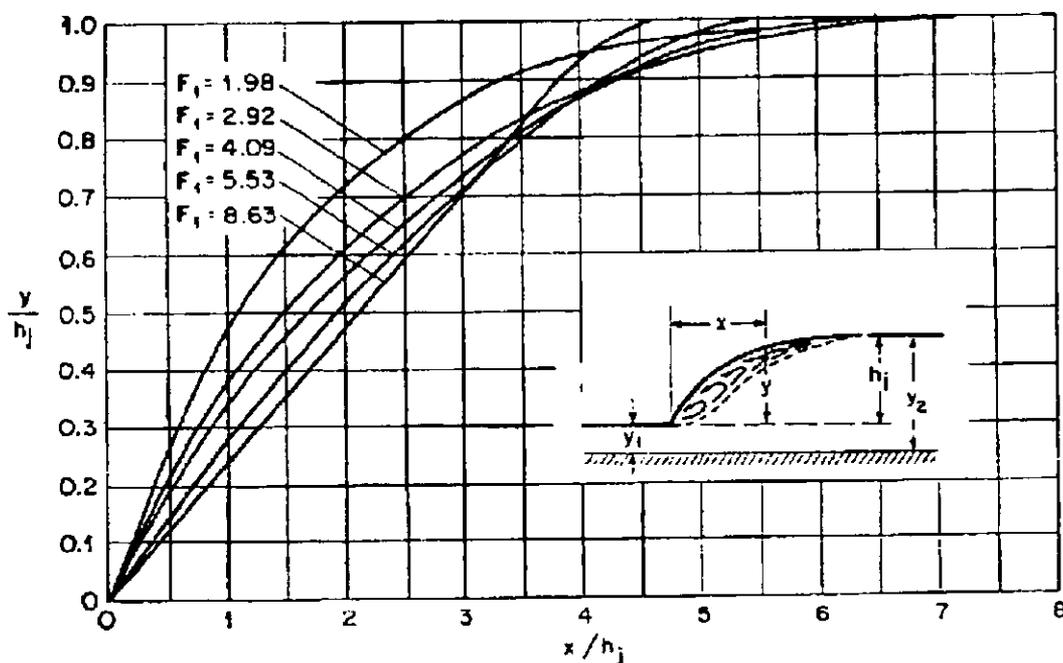


FIG. V-5 PERFILES ADIMENSIONADOS DE SUPERFICIE DE SALTOS HIDRAULICOS EN CANALES HORIZONTALES



## A.6. LOCALIZACION DEL SALTO

El salto hidráulico ocurre en un escurrimiento supercrítico cuando la profundidad cambia abruptamente en su profundidad seciente. Hablando teóricamente, el salto ocurrirá en un canal rectangular horizontal si las profundidades iniciales y secuentes y el número de Froude satisfacen la ec.(V-1). Esta condición teórica es generalmente usada para ubicar la posición de un salto. Para una estimación más ajustada de la posición del salto, sin embargo, debe considerarse la longitud del salto. Lo siguiente ilustrará la ubicación de un salto hidráulico en tres casos típicos. (fig. V-6):

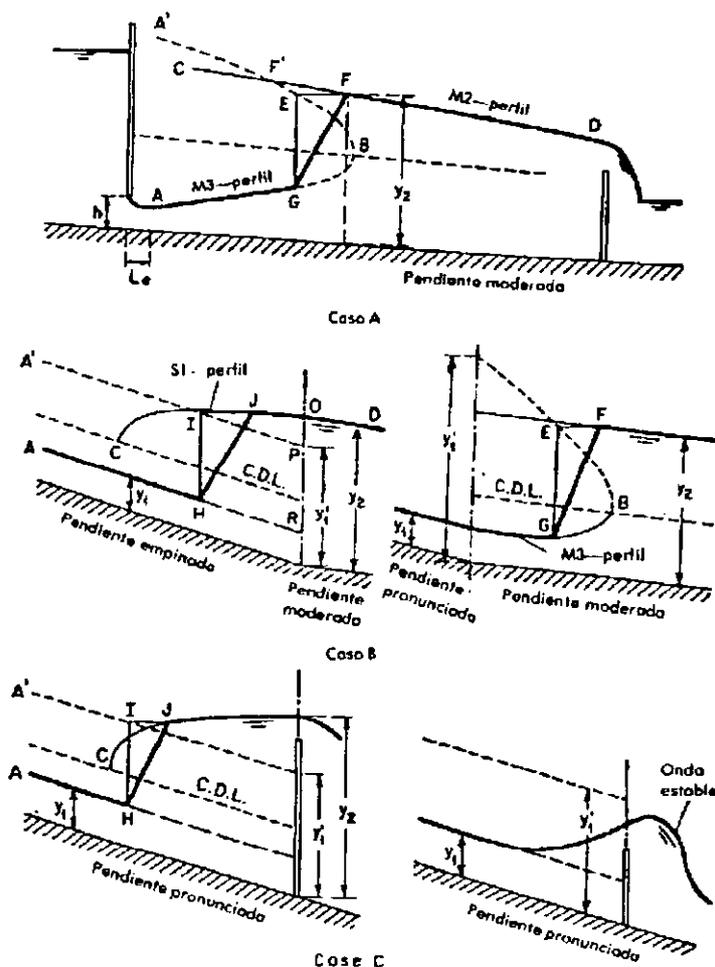


FIG. V-6 LOCALIZACION DE UN SALTO HIDRAULICO

*Caso A.* Muestra el salto debajo de una esclusa de regulación en un canal moderado. Los perfiles AB y CD pueden ser identificados fácilmente como el tipo M3 y M2 respectivamente. La curva A'B es un dibujo de la profundidad seciente de AB. Se puede estimar la longitud del salto por la posición de F'. Mediante una intersección horizontal entre la curva A'B y CD se puede encontrar que es igual a la longitud del salto. Por ejemplo, la distancia horizontal EF es igual a la longitud del salto correspondiente a la profundidad  $y_2$  en F. Se hace aparente que el salto se formará entre G y F, ya que la profundidad de F es seciente



a la profundidad de G y la distancia EF mide la longitud del salto. Se puede notar que, si la longitud del salto no fuera tomada en consideración en el análisis, el salto podría haberse considerado que se formaría en el punto aguas arriba F', resultando en un error representado por F'F. En el caso A, se puede ver que, aumentando la profundidad aguas abajo o levantando la curva CD, el salto puede ser barrido aguas arriba. La profundidad aguas abajo se puede levantar a tal altura que el salto será eventualmente inundado enfrente de la esclusa. Disminuyendo la profundidad aguas abajo o bajando CD, moverá el salto aguas abajo.

Cuando hay un salto hidráulico debajo de una compuerta, el flujo saliente de la compuerta formará un chorro que posea una vena contraída. La distancia  $L_e$  de la vena contraída a la abertura de la compuerta es usualmente corta. A pesar de esta distancia, hay una regla adoptada generalmente la cual establece que la vena contraída está localizada aproximadamente a una distancia  $h$  desde la abertura de la compuerta.

*Caso B.* Este caso muestra el salto en un canal teniendo un quiebre en la pendiente del fondo que cambia de pronunciada a moderada. Por simplicidad, se ha asumido que el flujo es uniforme en el canal excepto en el tramo entre el salto y el quiebre. El salto puede ocurrir ya sea en el canal pronunciado o en el canal moderado, dependiendo de si la profundidad aguas abajo  $y_2$  es más grande que la profundidad  $y_1'$  seciente de la profundidad aguas arriba  $y_1$ . Si la profundidad  $y_2$  es más grande que  $y_1$ , el salto ocurrirá en la región pronunciada. Entonces la curva de la superficie OC es del tipo S1. La línea A'P indica la profundidad seciente de la línea AR. Ahora, determinar una intersección horizontal IJ entre A'P y CO que es igual a la longitud del salto. Es aparente que un salto HJ empezará en la sección conteniendo I. Si la profundidad  $y_2$  es bajada aproximadamente a menos que  $y_1'$ , el salto empezará a moverse dentro del canal moderado. En este caso, el salto puede estar ubicado tal como se describe en el caso A.

*Caso C.* Este caso muestra el salto detrás de una barrera desbordada. Teóricamente, se formará un salto si la profundidad en la barrera es más grande que la profundidad  $y_1'$  seciente a la profundidad supercrítica aproximadamente  $y_1$ . La ubicación del salto es la misma como la del caso B si el salto ocurre en la región pronunciada. Aumentando la altura de la barrera se moverá el salto aguas arriba. Disminuyendo la altura el salto se moverá aguas abajo. Cuando la profundidad en la barrera es menor que la profundidad seciente  $y_1'$ , la barrera será cruzada por una elevación fija en la forma de una superficie ondular simple cuya levatada no será seguida por ondulaciones posteriores.



### A.7. EL SALTO COMO DISIPADOR DE ENERGIA

Desde un punto de vista práctico el salto hidráulico es un medio útil para disipar el exceso de energía en flujo supercrítico. Su mérito consiste en prevenir la posible erosión debajo de vertederos de demasías, caídas y compuertas, pues rápidamente reduce la velocidad del flujo sobre un lecho pavimentado a un punto donde el flujo se hace incapaz de erosionar el fondo del canal aguas abajo.

El salto hidráulico utilizado para disipación de energía está confinado parcialmente o enteramente a un tramo del canal que es conocido como *lecho amortiguador*. El fondo del lecho está pavimentado para resistir la erosión. En la práctica, el lecho amortiguador está rara vez diseñado para confinar la longitud total de un salto hidráulico libre sobre el lecho pavimentado, porque tal lecho podría ser demasiado caro. Consecuentemente, se instalan usualmente en el lecho, accesorios para controlar el salto. El principal propósito de tal control es acortar el rango en el cual el salto tendrá lugar y así reducir el tamaño y el costo del lecho amortiguador. El control tiene ventajas adicionales, pues él mejora la función de disipación del lecho, estabiliza la acción del salto, y en algunos casos aumenta el factor de seguridad.

### A.8. FUNCION MOMENTUM

La aplicación de la ecuación de energía en dos secciones transversales antes y después del salto, no proporciona un medio eficaz de análisis debido a que ocurre una pérdida de energía indeterminada, en principio. La utilización de la ecuación de la cantidad de movimiento proporciona en cambio gran confiabilidad, expresada en la similitud entre los resultados experimentales y teóricos. La ecuación de la cantidad de movimiento es más útil por dos causas principalmente: (1) existe una gran variación de la velocidad media entre el comienzo y el final del salto, y (2) no es necesario determinar los cambios de energía internos.

La ecuación de la cantidad de movimiento aplicada a dos secciones del canal es:

$$F_p + F_\tau + F_c = \rho(Q\beta V)_2 - \rho(Q\beta V)_1 \quad (V-5)$$

donde:

$F_p$ , es la fuerza resultante debida a las presiones (kg),

$F_\tau$ , es la fuerza resultante ocasionada por el esfuerzo cortante generado en las paredes y fondo del canal (kg),

$F_c$ , es la fuerza debida al peso del agua (kg),

ESTA TESIS  
SALIDA DE LA  
NO DEBE  
BIBLIOTECA



$Q$ , es el gasto ( $m^3/s$ ),

$V$ , es la velocidad media en la sección ( $m/s$ ),

$\rho$ , es la densidad del líquido ( $\rho = \gamma/g$ , en  $kg \cdot s^2/m^4$ ), y

$\beta$ , es el coeficiente de Boussinesq (adimensional).

Para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento (momentum), se debe cumplir lo siguiente: (1) el canal es horizontal y la sección constante, (2) debido a la corta distancia en que ocurre el salto, se desprecia la fricción en el perímetro mojado, (3) no existe ningún obstáculo que impida u obstruya el salto, y (4) la distribución de velocidades en las secciones inicial y final son uniformes además,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Consideremos un tramo longitudinal del canal donde se produce el salto hidráulico y un volumen de control limitado por las secciones transversales que limitan al salto (ver figura V-7.a).

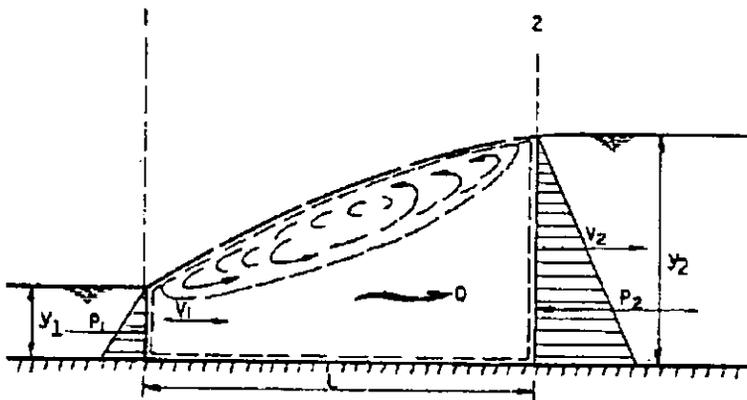


FIG. V-7.a VOLUMEN DE CONTROL

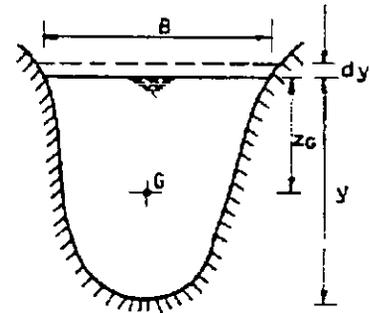


FIG. V-7.b SECCION TRANSVERSAL

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento al volumen de control, se tiene

$$P_1 - P_2 = \frac{\gamma Q}{g} (V_2 - V_1)$$

Si  $A_1 = A_2 = A$ , y por continuidad tenemos,

$$P_1 - P_2 = \frac{\gamma Q^2}{g} \left( \frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \quad (V-6)$$



Definiendo los empujes totales debidos a la presión hidrostática:

$$P_1 = \gamma Z g_1 A_1$$

$$P_2 = \gamma Z g_2 A_2$$

donde  $Zg_1$  y  $Zg_2$  son las profundidades de los centroides de área (fig. V-7.b), y sustituyendo los empujes en la ec. V-6.

$$\frac{Q^2}{gA_1} + Zg_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + Zg_2 A_2 \quad (V-7)$$

Como ambos términos son semejantes, pueden adquirir la siguiente forma

$$M = \frac{Q^2}{gA} + ZgA$$

la cual llamaremos *función momentum*. El primer término representa la cantidad de movimiento del flujo atravesando la sección del canal y el segundo representa el empuje hidrostático por unidad de peso. Ya que ambos términos tienen dimensiones de fuerza por unidad de peso, a la *función momentum* también se le conoce como *fuerza específica*.

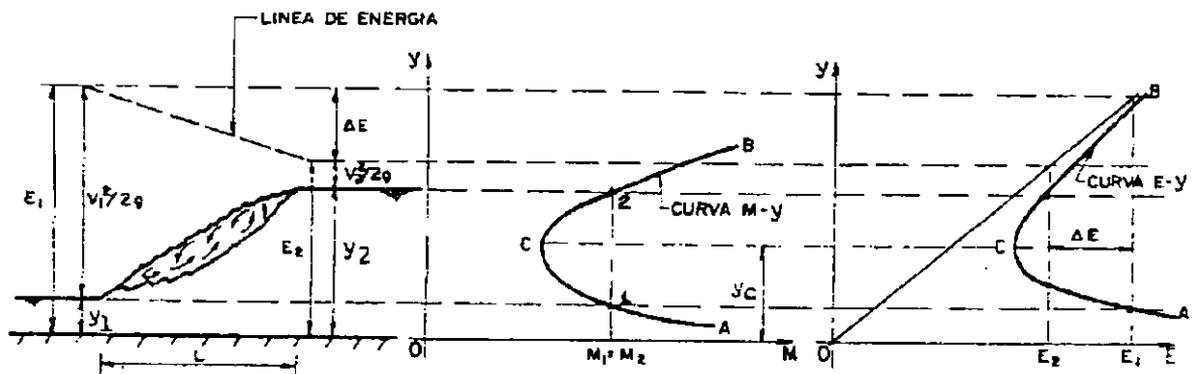


FIG. V-8.a SALTO HIDRAULICO

FIG. V-8.b CURVA M-y

FIG. V-8.c CURVA E-y

Para un  $Q$  dado la función momentum sólo depende del tirante, de forma semejante a la gráfica de energía específica ( $E-y$ ), si dibujamos un plano  $M-y$  tendremos una curva que en este caso es asintótica sólo al eje horizontal (figura V-8.a). Observemos que existen dos tirantes (llamados "conjugados") que satisfacen la función momentum para un punto determinado. La gráfica  $M-y$  indica a su vez que existe un mínimo en la función, el cual se encuentra derivando " $M$  respecto a  $y$ " y es igual a:



$$\frac{dM}{dy} = -\frac{Q^2}{gA^2} \frac{dA}{dy} + \frac{d(ZgA)}{dy} = 0$$

la cual después de simplificaciones nos lleva a la ecuación del flujo crítico, lo que significa que para un gasto dado, el mínimo de la función momentum corresponde al *tirante crítico*. Así el conjugado menor corresponde la régimen supercrítico y el conjugado mayor al régimen subcrítico. Observando la figura (V-8. b y c) vemos como los conjugados tienen correspondencia en la gráfica  $E$ - $y$  con las energías  $E_1$  y  $E_2$  cuya diferencia  $\Delta E$  es la pérdida de energía interna debida al salto hidráulico. Podemos concluir de todo lo anterior que:

- (1) El cambio de régimen de supercrítico a subcrítico se lleva a cabo de manera violenta, con una disipación de energía considerable; al contrario cuando se pasa de un régimen subcrítico al supercrítico no hay salto y ocurre de forma gradual con una pérdida despreciable de energía.
- (2) La pérdida de energía del salto la obtenemos a partir de la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento.
- (3) El salto se produce sólo cuando se iguala el momentum antes y después del fenómeno.
- (4) Para un gasto determinado, el conjugado mayor  $y_1$  (tirante aguas arriba del salto) aumenta, el tirante  $y_2$  o conjugado menor disminuye.

A continuación podemos escribir la ecuación general del salto hidráulico de la siguiente manera:

$$M_1 = M_2$$

Donde  $M_i$  es la función momentum.



# CAPITULO VI

---

## FLUJO GRADUALMENTE VARIADO



## A. FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Debido a que el agua es un fluido viscoso, cuando fluye, pierde gradualmente su energía a lo largo del trayecto, al vencer resistencias indicadas por los límites del canal que la confina.

Si la energía perdida a lo largo del canal es menor que la energía adquirida por la elevación decreciente, la energía de descarga aumentará. Por el contrario si las pérdidas por fricción superan a la energía de velocidad adquirida por el flujo descendente, este se desacelera.

En el caso de  $Q$  constante, el aumento de velocidad a lo largo del canal provoca una disminución de la profundidad y viceversa. En cualquiera de los casos, la superficie del agua no se mantiene recta y paralela con el fondo del canal, sino que presentará una ligera curva.

Aún en el caso de que se conozcan el tirante crítico y el tirante normal para el flujo en un canal en particular, no existe información adicional para conocer el tirante del flujo en estudio. El tirante está determinado por dos condiciones extremas del tramo a considerar y por la relación entre la energía disponible y la energía requerida para vencer las pérdidas que se presenten.

Cabe mencionar que generalmente un cambio de pendiente o una alteración en la sección de un canal es precisamente el origen del régimen gradualmente variado; aunque este no se forme en la parte alterada sino en las zonas aguas abajo o aguas arriba de ella.

Se puede señalar además que el flujo gradualmente variado se presenta típicamente en canales artificiales revestidos y no precisamente en cauces naturales por lo que las leyes a las que está sometido este tipo de flujo son de gran importancia para el ingeniero.

Suponiendo que para una sección geométrica y para un  $Q$  dado sea posible variar la pendiente del canal, al calcular los tirantes crítico y normal para varias pendientes se encontrará que existe una pendiente en particular para la que es crítico el flujo a través del canal, y que ambos tirantes crítico y normal son iguales. Esta es la llamada pendiente crítica. Las pendientes menores que la crítica son pendientes *suaves*; aquellas más abruptas que la crítica se denominan *fuertes*.

Al calcular  $y_c$  y  $y_n$  para canales de pendientes suaves ( $M$ , *mild*) y fuertes ( $S$ , *steep*), el  $y_c$  es más elevado que  $y_n$  ( $y_n < y_c$ ) en canales de pendiente  $S$  por lo tanto el flujo será supercrítico (ver gráfica  $E-y$ , fig.V-8.c). En pendientes ligeras, se da que la profundidad normal es mayor que la crítica ( $y_n > y_c$ ); por tanto, el flujo será subcrítico.



El tirante en estudio podrá estar además en cualquier posición respecto a  $y_n$  y  $y_c$  por ello se han denominado tres zonas, a saber: zona 1 es aquella donde  $y > y_c$  y  $y > y_n$ ; Zona 2 donde  $y$  está ubicada entre ambos tirantes normal y crítico; y zona 3:  $y < y_c$  y  $y < y_n$ . Para mayor claridad obsérvese la siguiente tabla de clasificación de perfiles. (fig. VI-1)

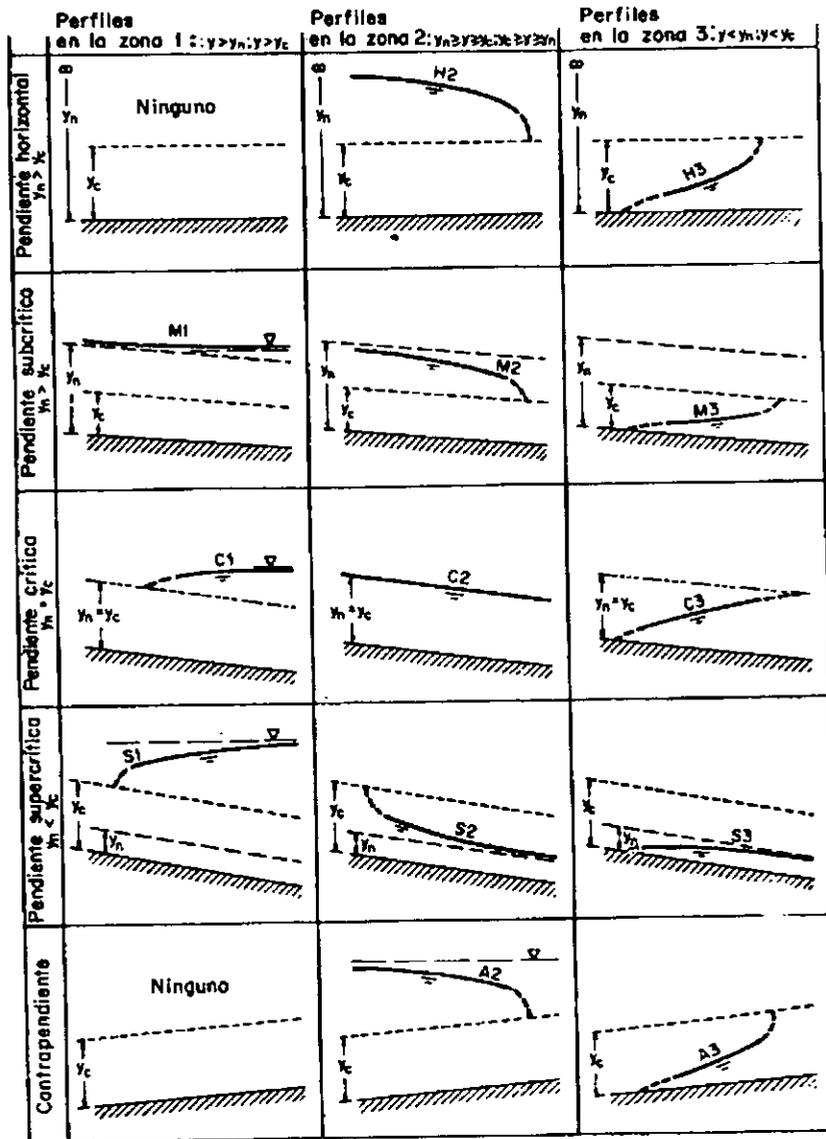


FIG. VI-1 CLASIFICACION DE PERFILES DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Para enunciar una definición del flujo gradualmente variado se puede decir que es el *flujo permanente cuya profundidad varía de forma gradual a lo largo de la longitud del canal.*

La definición anterior está basada en las dos siguientes premisas: (1) el flujo es permanente, o sea, las características hidráulicas del flujo permanecen constantes en el intervalo de tiempo en consideración; y (2) las líneas de corriente son prácticamente paralelas, o bien, que la distribución hidrostática de la presión predomina sobre la sección del canal.



Los postulados básicos que sirven para el desarrollo de la teoría del flujo gradualmente variado son:

- (1) La pérdida de carga en la sección es la misma que para el flujo uniforme y la que predomina es la de fricción, por ello, la pendiente de la línea de energía se estima con la fórmula de la velocidad de Manning, de donde se obtiene.
- (2) La pendiente longitudinal del fondo del canal es pequeña ( $\theta < 10^\circ$  aproximado) por lo que el tirante de sección normal se confunde con el tirante de la sección vertical y además, no ocurre arrastre de aire en el interior del flujo.
- (3) El canal es prismático.
- (4) La distribución de velocidades en la sección del canal es fija, por tanto, el coeficiente de energía o de Coriolis ( $\alpha$ ) es constante.

### A.1. ECUACION DINAMICA DEL FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

El comportamiento de la superficie libre del agua está gobernado por la Ecuación Dinámica, sin embargo, para la solución correcta de ella se requiere conocer previamente, las características de los perfiles y la clasificación de los mismos, para lo cual se puede revisar la tabla anterior y la obra de Chow.

Para la deducción de la Ecuación Dinámica se aplica la ecuación de energía para una sección dada de un canal como se muestra en la siguiente figura.

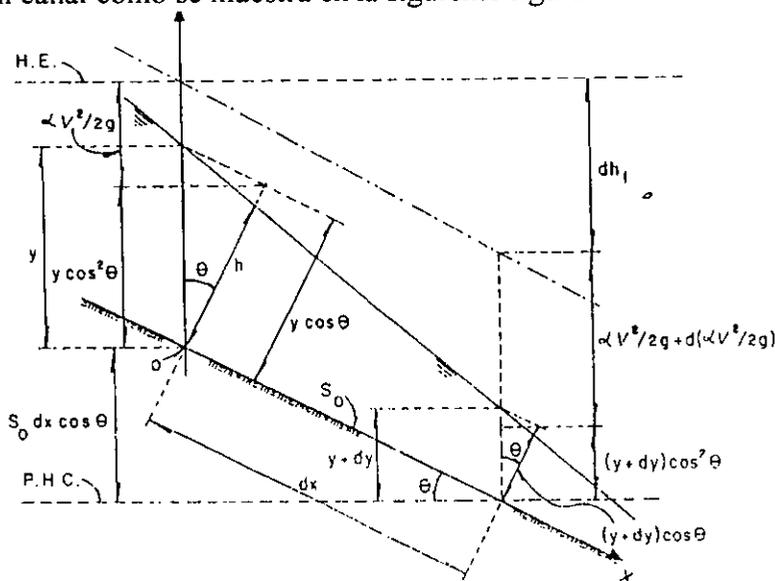


FIG. VI-2



Considérense dos secciones separadas una distancia  $dx$  y tomando un eje vertical  $y$  a partir del fondo, y otro  $x$  en el plano del fondo, ubicando el origen de ambos ejes en la sección desde donde se desea hacer el análisis.

Se designa con la variable  $y$  el desnivel entre el fondo del canal y la superficie libre del agua. Debe observarse que para cada desnivel  $y$  la carga de presión real en la plantilla es  $ycos^2\theta$ . Con base en lo anterior, la ecuación de la energía se expresa como sigue:

$$S_0 dx \cos\theta + y \cos^2\theta + \alpha \frac{V^2}{2g} = (y + dy) \cos^2\theta + \alpha \frac{V^2}{2g} + \alpha d\left(\frac{V^2}{2g}\right) + dh_f$$

y simplificando queda

$$\frac{dy}{dx} \cos^2\theta + \frac{\alpha}{2g} \frac{d(V^2)}{dx} = S_0 \cos\theta - \frac{dh_f}{dx} \quad (\text{VI-1.a})$$

ahora dado que el término  $\frac{d(V^2)}{dx}$  equivale a:

$$\frac{d(V^2)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Q}{A}\right)^2}{dx} = -\frac{2Q^2}{A^3} \frac{dA}{dx} \quad (\text{VI-1.b})$$

y ya que,

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx}$$

si  $\theta$  es pequeño tal que  $sen\theta$  sea aproximadamente igual que  $tan\theta$  se puede aceptar que  $h=ycos\theta$  por lo que:

$$\frac{dh}{dx} = \cos\theta$$

tomando en cuenta lo anterior y la expresión  $dA/dh=B$  la ecuación anterior equivale a:

$$\frac{dA}{dx} = B \cos\theta \frac{dy}{dx}$$

que sustituida en (VI-1.b) da:



$$\frac{d}{dx}(V^2) = -\frac{2Q^2B}{A^3} \cos\theta \frac{dy}{dx} \quad (\text{VI-1.b'})$$

como  $dh/dx$  es, por definición, la pendiente hidráulica  $S$  en el tramo en estudio, al sustituir esta definición y la expresión (V-1.b') en la ec.(VI-1.a) y simplificando convenientemente se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2B}{gA^3} \cos\theta} \quad (\text{VI-1.c})$$

que es precisamente la Ecuación Dinámica del Flujo Gradualmente Variado.

Definiendo el tirante medio como:

$$h_m = \frac{A}{B}$$

se puede volver a escribir la ecuación (VI-1.c) como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2}{gA^2 h_m} \cos\theta} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{V^2 \cos\theta}{gh_m}}$$

y expresando el número de Froude como:

$$Fr_m = \frac{V}{\sqrt{gh_m}}$$

la ecuación del flujo puede escribirse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha Fr_m^2 \cos\theta} \quad (\text{VI-1.d})$$

y si  $\theta$  es menor de  $10^\circ$ ,  $\cos\theta \cong 1$ , la expresión se simplifica a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \alpha Fr_m^2} \quad (\text{VI-1.d'})$$

Claro que si el canal es rectangular, entonces:  $h = h_m$  y  $Fr_m = Fr$ .



Como se dijo anteriormente la ecuación (VI-1.d) o la ecuación (VI-1.d') describen el comportamiento de la superficie libre del agua según se desempeñen las variables  $F_r$  y  $S$  a lo largo del eje  $x$ , en relación con la pendiente constante  $S_0$ . En consecuencia observando la fig. (VI-2) y a partir de (VI-1.d') puede decirse que los tipos de flujo gradualmente variado son:

- (1) Si  $dy/dx < 0$ , el flujo es *gradualmente acelerado* (desagüe)
- (2) Si  $dy/dx > 0$ , el flujo es *gradualmente retardado* (remanso)
- (3) Si  $dy/dx = 0$ , o sea,  $y =$  constante y también  $h =$  constante, se tendrá un flujo uniforme, que en base a la ec. (4.1.ch) puede considerarse como un caso particular del flujo gradualmente variado y, además,  $S_0$  puede considerarse igual a  $S$  (si  $\theta < 10^\circ$ ).
- (4) Si  $dy/dx \rightarrow \infty$  se tendrá una discontinuidad en el perfil de la superficie libre, consistente en un "salto" vertical del fluido. Lo anterior se provoca cuando el denominador de la Ecuación Dinámica tiende a cero, o sea, el segundo término de la ecuación es prácticamente 1 por lo que la sección se hace crítica. Para que esto suceda el número de Froude debe ser 1 ( $F_r = 1$ ).

## A.2. CARACTERISTICAS Y CLASIFICACION DE PERFILES EN FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

Cuando se pretende definir el perfil de la superficie libre del flujo a partir de un tirante conocido, se puede lograr dividiendo el canal en tramos longitudinales (equidistantes) y aplicar el teorema de Bernoulli en forma sucesiva. Cabe observar que a partir de una sección (1) conocida se puede determinar el tirante de otra sección (2) aplicando la ecuación:

$$Z_1 + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_{f_{1-2}}$$

que se puede utilizar en el caso de pendientes pequeñas ( $\theta < 10^\circ$ ) donde se puede considerar que  $h$  es aproximadamente igual a  $y$ .

La pérdida por fricción  $h_f$  puede determinarse con los datos conocidos de la sección (1) y si el tramo a considerar no es muy largo; en la práctica no difiere del valor real, esto reduce la ecuación anterior a:

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2g} = cte.$$

ecuación que se satisface para dos valores positivos del tirante  $h_2$ . Sólo uno de los tirantes es el correcto y habrá que definir cual es.



El análisis de la ec. (VI-1.d') determinará cual de los dos valores es el adecuado ya que muestra claramente el perfil de la superficie del agua a partir de la sección (1).

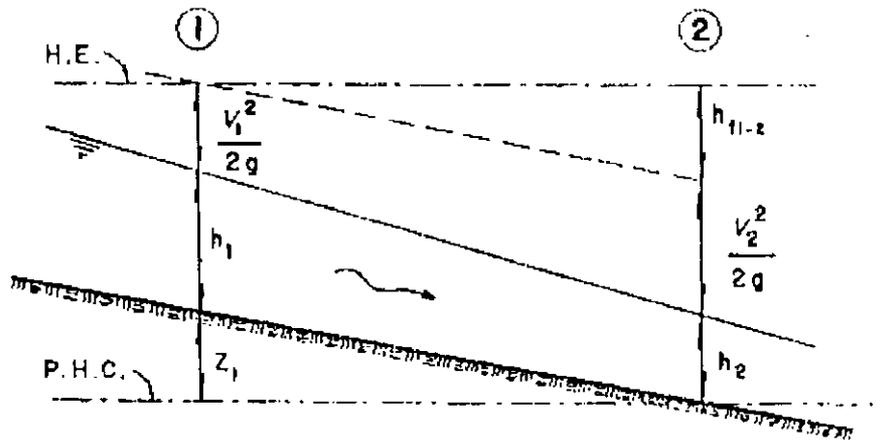


FIG. VI-3

### B. INTEGRACION DE LA ECUACION DINAMICA

Para resolver la Ecuación Dinámica la cuestión es hallar la función  $y=f(x)$  del flujo a lo largo del canal prismático que se comporta como flujo gradualmente variado. La Ecuación Dinámica del flujo en estudio (VI-1.c) para pendientes pequeñas ( $\cos\theta \cong 1$ ,  $h \cong y$ ) puede escribirse de la forma:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \alpha \frac{Q^2 B}{gA^3}}$$

y ya que:

$$S=f(n, R, V)$$

\* n = coef. de rugosidad

y  $R$ , en un canal prismático varía con el tirante  $y$ , que a su vez en el flujo gradualmente variado, es función tan sólo de  $x$ , así como  $V$ ; se puede aceptar que el coeficiente de rugosidad es constante, la expresión anterior puede escribirse como:

$$S=f(x)$$

en consecuencia puede decirse que:

$$dy=f(x)dx$$



Teóricamente esta ecuación es integrable aunque habrá que tener en cuenta ciertas consideraciones según se explica en los tres métodos tratados mas adelante.

Se han propuesto varios métodos de solución para la Ecuación Dinámica. Los investigadores tales como Bresse (1860) y Bakhmetef (1912) desarrollaron sus procedimientos, que en su tiempo tuvieron gran importancia. ya que otro camino es aplicar sucesivamente la ecuación de Bernoulli en tramos cortos del canal, esto conduce a realizar un número considerable de operaciones. No obstante en los últimos veinticinco años se han utilizado métodos iterativos con la ayuda de las computadoras digitales, con ellas se puede obtener la precisión que se desee, además con relativa facilidad.

En el presente trabajo es precisamente la tarea que nos hemos propuesto; en este capítulo se desarrollarán tres métodos conocidos para obtener el perfil de la superficie libre del agua a partir de la aplicación de métodos numéricos y la programación de computadoras.

### B.1. METODO DEL PASO DIRECTO (METODO DIRECTO EN ETAPAS)

En términos generales un método por pasos o etapas se caracteriza por dividir el canal en estudio en tramos cortos y realizar el cálculo de los tirantes de un extremo a otro.

Los métodos por etapas existen en cierta cantidad pero no se ha encontrado alguno que sea mejor que los demás en todas las aplicaciones. El método del paso directo es un método sencillo aplicable a canales prismáticos.

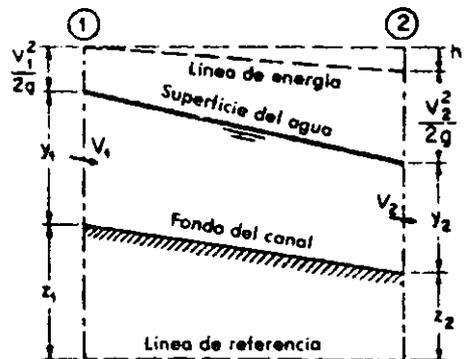


FIG. VI-4

La fig.(VI-4) muestra un tramo corto de longitud  $\Delta x$ , igualando las alturas (cargas) en las secciones (1) y (2) de los extremos, se puede expresar como sigue:

$$S_0 \Delta x + y_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + S_f \Delta x$$



Despejando  $\Delta x$  queda:

$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S_f} = \frac{\Delta E}{S_0 - S_f} \quad (\text{VI-2})$$

donde  $E$  es la energía específica, o bien en el caso de que:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (\text{III-8})$$

En las ecuaciones anteriores:

$y$ , es la profundidad del flujo (tirante);

$V$ , es la velocidad media;

$\alpha$ , es el coeficiente de energía;

$S_0$ , es la pendiente del fondo o plantilla;

$S_f$ , es la pendiente de la línea de pérdidas por fricción.

El valor medio de  $S_f$  es indicado por  $\bar{S}_f$ . Al utilizar la fórmula de Manning, la pendiente de fricción se expresa por

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{2.22 R^{4/3}}$$

o bien, en sistema métrico decimal desaparece el factor 2.22 y simplificando los exponentes queda:

$$S_f = \left( \frac{nV}{R^{2/3}} \right)^2 \quad (\text{VI-4.a}) \quad \text{ó} \quad S_f = \left( \frac{nQ}{AR^{2/3}} \right)^2 \quad (\text{VI-4.b})$$

## B.2. METODO DEL PASO STANDARD

Según Chow, este método es solamente aplicable a canales no prismáticos. En los canales naturales se requiere llevar una minuciosa investigación de campo para obtener los datos necesarios de todas las secciones a considerar. El cálculo se elabora por pasos, de estación a estación donde se hayan conocido las características hidráulicas previamente. Para ello las distancias están predeterminadas y se trata de conocer el tirante en dichos puntos. El proceso se lleva a cabo por tanteos generalmente. En el presente trabajo recurrimos a utilizar el método de Newton-Raphson dentro de un programa de computadora, para la determinación del perfil, en vez de los tanteos; ahorrando de esta manera tiempo y con mejor precisión.



En cuanto a lo dicho referente a la utilización exclusiva de este método en canales no prismáticos, pretendemos mostrar cómo ya que las distancias horizontales están determinadas de antemano, esto puede ser atractivo y sumamente útil para un caso en canales artificiales de sección regular.

Para el flujo supercrítico la sección (1) quedará aguas arriba de la sección (2); o bien, el cálculo se hará siguiendo el sentido del flujo. Para el flujo subcrítico la sección (1) quedará aguas abajo de la sección (2) y el cálculo se hará hacia aguas arriba.

### B.2.1. ECUACION PARA EL FLUJO SUPERCRITICO

Al aplicar la ecuación de Bernoulli en dos secciones distantes entre sí una distancia  $\Delta x$  y tomando en cuenta que las pérdidas se obtienen de la ecuación de Manning, se puede expresar que:

$$S_0 \Delta x + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\Delta x}{2} (S_{f_1} + S_{f_2}) \quad (\text{VI-5})$$

donde:

$S_0 \Delta x$ , representa la carga de posición (m);

$y_i$ , es la carga de presión (m);

$V_i^2/2g$ , es la carga de velocidad (m);

$S_{f_i}$ , la pendiente de la línea de energía;

esta pendiente procede de la ecuación de velocidad propuesta por Manning, es decir;

$$\sqrt{S_{f_i}} = \frac{nV_i}{R_i^{2/3}} = \frac{nQ}{A_i R_i^{2/3}}$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente, y ya que la ec. (VI-5) depende sólo del tirante ( $y$ ), puede enunciarse la siguiente expresión:

$$f(y) = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\Delta x}{2} S_{f_2} - (S_0 \Delta x + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{\Delta x}{2} S_{f_1}) = 0 \quad (\text{VI-6})$$

los términos entre paréntesis son conocidos por lo que se igualarán a una constante que llamaremos  $C_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ), por lo que la ec. (VI-6) queda:

$$f(y) = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{\Delta x}{2} S_{f_2} - C_i = 0 \quad (\text{VI-7.a})$$



Para resolver esta ec. hay que determinar  $C_1$  con  $y_1$ , para encontrar  $y_2$ , tal que pueda satisfacer la ec. (VI-7.a), esto conlleva a realizar tanteos si se quiere. Debido a que contamos con las herramientas computacionales como para evitar esa tediosa actividad, utilizaremos el método de Newton-Raphson para encontrar  $y_2$ , que representa la raíz de la ecuación del flujo. De esta manera, y continuando el procedimiento, a partir de  $y_2$  se estima  $C_2$  quedando la ec. (VI-7.a) en función de  $y_3$ , y así sucesivamente.

### B.2.2. ECUACION PARA FLUJO SUBCRITICO

La Ecuación de Energía se aplica de manera semejante y sólo es necesario cambiar el sentido en que se realiza el cálculo como se dijo al comienzo de este método, por ello la ec. (VI-7.a) quedaría:

$$f(y) = y_2 + \frac{V_2^2}{2g} - \frac{\Delta x}{2} S_{f_2} - C_i = 0 \quad (\text{VI-7.b})$$

como puede observarse, cambió  $\Delta x$  por  $-\Delta x$ , permaneciendo los demás términos igual, y en consecuencia la ec. (VI-7.b) se resuelve siguiendo el mismo procedimiento que la ec. (VI-7.a).

### B.3. METODO DE INTEGRACION GRAFICA

Este método sirve para integrar la ecuación dinámica por medios gráficos. Considerando dos secciones del canal a distancias  $x_1$  y  $x_2$  de un mismo origen, y con sus respectivos tirantes  $y_1$  y  $y_2$ ; la distancia a lo largo del fondo del canal es:

$$x = x_2 - x_1 = \int_{x_2}^{x_1} dx = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy} dy \quad (\text{VI-8})$$

En primer término se proponen los valores de  $y$  deseados, y se calculan los valores correspondientes a  $dx/dy$  que es el recíproco de la ecuación dinámica. Se puede construir una gráfica como la mostrada a continuación (VI-5). De acuerdo con la ecuación (VI-8) es evidente que el valor de  $x$  es igual al área formada bajo la curva, el eje  $y$  las coordenadas de  $dx/dy$  correspondientes a  $y_1$  y  $y_2$ . En consecuencia determinando el área bajo la curva se puede conocer el valor de  $y$ . Podemos mencionar que en el método de *integración gráfica* como en el de *paso directo* se obtienen distancias a partir de ciertos tirantes dados, mientras que en el método de *paso standard*, dadas ciertas distancias obtenemos las profundidades.

El método de *integración gráfica* tiene una aplicación amplia, se aplica al flujo en canales prismáticos como naturales, de variada pendiente y forma. Para calcular el área bajo la



curva hemos empleado la *integración de Romberg* aplicado la *extrapolación de Richardson*, debido a su bondad sobre otros métodos como son: regla de Simpson de 1/3 y 3/8, y regla de los rectángulos. La superioridad del *método de Romberg* consiste en que mediante la *extrapolación de Richardson* se van corrigiendo los errores de la regla trapezoidal, obteniendo así una precisión mejorada que se acerca bastante a una integración directa. Se pueden consultar las obras de Luthe, Curtis, Suárez Alonso y Nakamura entre otros, en lo referente a la comparación entre los diferentes métodos en cuanto a su precisión.

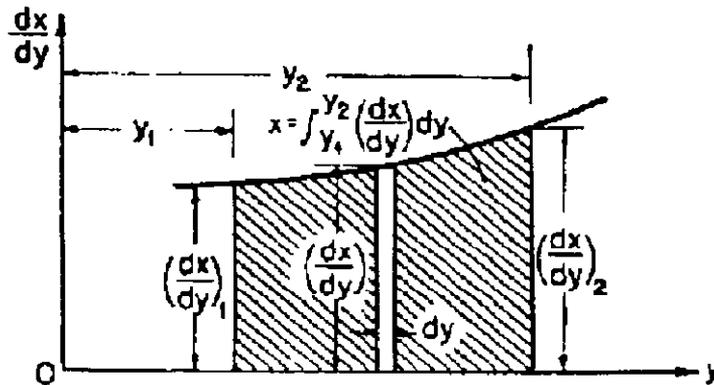


FIG. VI-5 PRINCIPIO DEL METODO DE INTEGRACION GRAFICA

Para calcular la distancia entre las dos secciones transversales sucesivas a considerar, la primera con un tirante  $y_i$  y la segunda con tirante  $y_{i+1}$ . Puede construirse una gráfica que muestre a los tirantes en eje de las abscisas y en eje de las ordenadas al cociente  $dx/dy$  que se obtiene de (VI-8), la cual depende sólo de  $y$ . El área bajo la curva en la gráfica comprendida entre los dos tirantes representa la *distancia* que separa dichos tirantes. El proceso se repite para los dos tirantes siguientes, esto es, para los  $y_{i+1}$  y  $y_{i+2}$  a cada paso.



# CAPITULO VII

---

SOLUCION MANUAL  
Y POR  
COMPUTADORA DE  
PROBLEMAS DE  
HIDRAULICA DE  
CANALES MEDIANTE  
METODOS  
NUMERICOS



## A. ANTECEDENTES

La idea de la utilización de los métodos numéricos en la solución de problemas, que involucran tanteos u operaciones repetitivas (evaluaciones de funciones, sumas, etc.), no es nueva. Sin embargo, con el desarrollo de las computadoras electrónicas hasta nuestros días, se ha abierto un panorama atractivo en cuanto a la aplicación de la matemática numérica a la solución de problemas de ingeniería, el cual es nuestro caso. En la hidráulica de canales como se vió en los capítulos de flujo crítico y uniforme respectivamente, se llega al punto de tener que resolver una ecuación bien por tanteos o por gráficas preparadas para tal fin. Nosotros proponemos en cambio, que se usen los métodos de Newton-Raphson y de la Secante para obtener las raíces de las ecuaciones del flujo crítico y de Manning. Con ello se ganará tiempo, comodidad y precisión. Ambos métodos sirven para obtener raíces de polinomios, y elegimos aplicar el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación de Manning, además del método de la Secante para resolver la ecuación de flujo crítico, pero sólo como un ejemplo en particular porque ambos métodos sirven para el mismo fin.

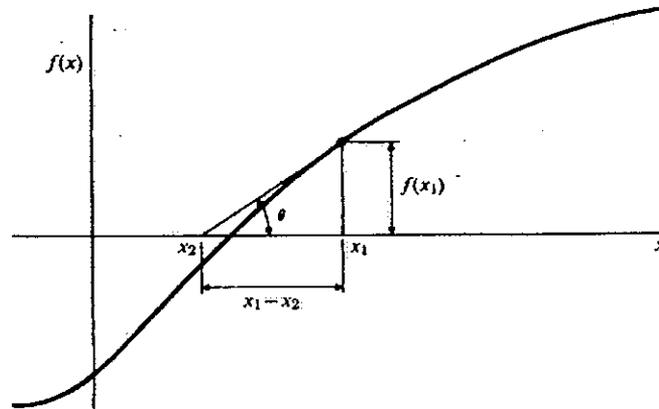
En la solución de ejemplos veremos mas de cerca cómo y en qué se aplica cada método.

### A.1. METODO DE NEWTON-RAPHSON

Uno de los métodos mas ampliamente usados para resolver ecuaciones es el método de Newton-Raphson. Newton no publicó una discusión extensa de este método en "Principia" (1686) sino que resolvió un polinomio cúbico. En años posteriores se realizaron mejoras a su método, del cual, se presenta aquí una de las versiones actualizadas.

Comenzando a partir de una estimación inicial cercana a la raíz,  $x_I$ , se extrapola a lo largo de la tangente hasta su intersección con el eje  $x$ , y se toma ese como el siguiente valor aproximado. Así se continúa hasta que el valor de  $f(x)$  esté lo suficientemente cercano a cero como se requiera.

El esquema de cálculo se puede deducir a partir del triángulo rectángulo mostrado en la figura siguiente, el cual tiene el ángulo  $\theta$  de la línea tangente a la curva en  $x=x_I$ .



De esta manera,

$$\tan \theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se continúa el procedimiento de resolución

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

o bien, generalizando,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El método de Newton-Raphson tiene un uso amplio debido a que, al menos en la cercanía a la raíz, converge con más rapidez que otros métodos (bisección, aproximaciones sucesivas, etc.). Este método es cuadráticamente convergente, es decir, el error en cada paso se aproxima proporcionalmente al cuadrado del error en la iteración anterior. El cuadrado neto de ello es el número de cifras decimales de precisión que casi se duplica en cada iteración. Esto se compensa con ventaja, al hecho de tener que evaluar en cada paso  $f(x)$  y  $f'(x)$ .

Al comparar los métodos numéricos hay que tener en cuenta el número de veces que hay que evaluar las funciones. Aunque en este método es necesario hacer dos evaluaciones por



ciclo, el uso de las computadoras actuales facilita la tarea, y la condición del número de evaluaciones no es de importancia, salvo el caso de que se efectúen las operaciones manualmente.

Cabe resaltar que el método de Newton-Raphson, como casi todos los demás, puede converger a una raíz diferente de la esperada o diferir si el valor inicial no está lo suficientemente cercano a la raíz. Se recomienda que en caso de incertidumbre, se hagan diferentes pruebas para corroborar que el resultado que se obtenga de la aplicación del método sea el deseado, además; será de gran ayuda hacer una interpretación gráfica de la función a estudiar.

Para la deducción de este método, considérese un punto  $x_0$ , el cual no es una raíz de la función  $f(x)$ , pero sí muy cercano a serlo. Desarrollando una serie de Taylor en torno a  $x_0$ .

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Si  $f(x) = 0$ , entonces  $X$  debe ser una raíz, así el miembro derecho de la ecuación anterior constituye una expresión para la raíz  $X$ . Dado que el grado del polinomio es infinito se tomarán sólo los dos primeros términos de dicha serie y un valor aproximado de la raíz  $X$  puede obtenerse haciendo cero la expresión que se propone, o sea:

$$0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

por lo que resolviendo para  $X$  se tiene,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (a)$$

o bien,

$$x - x_0 = h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

De este modo,  $X$  representa una mejor aproximación de la raíz y puede sustituirse por  $x_0$  en (a) para proporcionar una raíz más exacta en la siguiente iteración. La fórmula de recurrencia general para este método es:



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

El subíndice  $n$  denota los valores obtenidos en la  $n$ -ésima iteración y  $n+1$  los obtenidos en la siguiente. Este proceso convergerá hacia una raíz para la mayoría de las funciones.

El proceso termina cuando la magnitud del cambio calculado en el valor de la raíz,  $h$ , es más pequeño que alguna cantidad dada. Aunque se pueden hacer análisis más sofisticados de convergencia, una regla útil y práctica puede ser seleccionar dicha cifra tal que sea la décima parte del error permisible en la raíz. En la aplicación de este método para nuestros fines, se usa la ecuación de Manning o la del flujo crítico con sus respectivas derivadas, poniendo las ecuaciones y sus derivadas en función de  $y$ .

Se muestra en el anexo B.3 el diagrama de flujo para el método de Newton-Raphson.

## A.2. METODO DE LA SECANTE

El método de la Secante es un procedimiento para obtener raíces de polinomios de diferentes grados. Es llamado así debido a que la línea que pasa a través de dos puntos sobre una curva es una línea secante. En esencia es una modificación del método de Newton-Raphson con la derivada reemplazada por una ecuación diferente. La ventaja que ofrece es evidente a la luz de que hay expresiones difíciles de derivar, y también es fácil de programar; en el sentido de que, en vez de crear subrutinas para la función y su derivada, solamente hay que utilizar un subprograma en el método (véase el diagrama de flujo en el anexo B.2).

En efecto, el método de la Secante usa sólo valores de  $f(x)$ , y por lo tanto requiere evaluar una función en cada paso, mientras que en el método de Newton-Raphson se hacen dos evaluaciones ( $f(x)$  y  $f'(x)$ ) por paso.

En este método el valor de la derivada  $f'(x_n)$  se aproxima por el cociente de las diferencias

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

formadas como se dijo por dos aproximaciones (iteraciones) precedentes.



Permutando la derivada en la ecuación

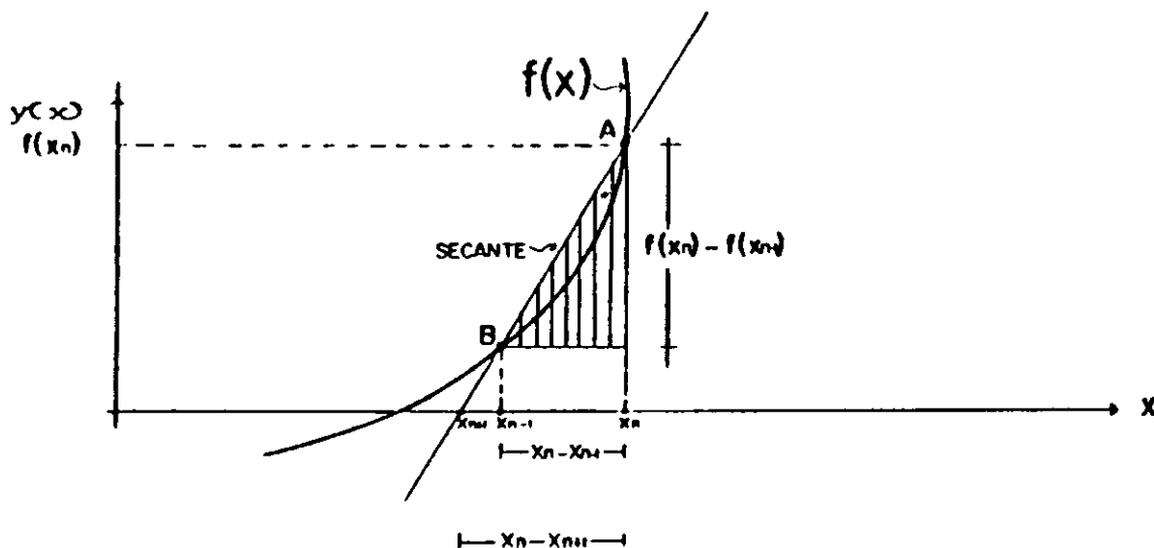
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

por una simple resta;

$$x_{n+1} - x_n = D_{n+1} = - \frac{f(x) * (D_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Para la utilización de este método  $f(x_{n-1})$  debe ser conocida. Este valor es el de la función de dos iteraciones anteriores a la actual. Puesto que no está determinado tal valor, se darán dos valores iniciales supuestos  $y_1$  y  $y_2$  los que serán utilizados para la primera iteración, deberán naturalmente ser proporcionados como datos para el algoritmo (ver diagrama de flujo del método, ver anexo B.2).

Para la mayoría de las funciones, el método de la Secante no tiene una convergencia muy rápida como el método de Newton-Raphson. En cambio, si  $f'(x)$  invierte mucho tiempo para su evaluación, el método de la Secante puede requerir menos tiempo de cómputo que el método de Newton-Raphson. En la figura siguiente se puede ver un esquema ilustrativo.





### A.3. INTEGRACION NUMERICA

El método de Romberg o extrapolación al límite, se basa en la regla trapezoidal de integración que consiste a grandes rasgos, en dividir en pequeños trapecios el área bajo la curva de una función para que la suma de esas pequeñas áreas sea la representación de la integral de dicha función con una aproximación aceptable. Sólo que la integración de Romberg se basa en la extrapolación de Richardson, que combina dos valores de integrales para obtener un tercero más preciso. De este modo, la integral generada queda dentro de una tolerancia de error especificada.

En la hidráulica de canales, específicamente en el tema del flujo gradualmente variado (cap. VI), se presenta la situación de que hay que integrar el recíproco de la *Ecuación Dinámica* con el fin de obtener una distancia  $\Delta x$  partiendo de dos tirantes consecutivos. En vista de ello, al realizar el programa del método de la Integración Gráfica llegamos a una subrutina para evaluar la mencionada integral de la Ecuación Dinámica.

Para el manejo de los métodos numéricos aplicados a la hidráulica, seleccionamos la integración de Romberg por la superioridad que tiene en comparación a la regla de Simpson (división del área en parábolas) y a la regla trapezoidal. Como ya se dijo, se pueden obtener resultados más precisos por la corrección que hace (extrapolación de Richardson) a cada iteración.

En los siguientes apartados hablaremos someramente sobre la regla trapezoidal, la extrapolación de Richardson, y describiremos la integración de Romberg.

#### A.3.1. REGLA TRAPEZIAL

El área bajo la curva de una función se puede dividir en trapecios cuya superficie es:

$$A_1 = (y_1 + y_2) * \Delta / 2$$

En el caso del área 2 ( $A_2$ ):

$$A_2 = (y_2 + y_3) * \Delta / 2$$

puediendo generalizar que para el trapecio  $n$ , su área será:

$$A_n = (y_n + y_{n+1}) * \Delta / 2$$



Cabe señalar que la suma de todos los trapecios considerados dentro del intervalo  $[a,b]$  se aproxima al valor exacto de la integral:

$$\int_a^b f(x)dx \cong A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

sustituyendo, ordenando los términos y escribiendo en notación de sumatoria:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{2} (y_i + 2 \sum_{j=2}^n y_j + y_{n+1}) \quad (\text{VII-1})$$

Obsérvese que a medida que  $\Delta x \rightarrow 0$ , ambos miembros de la ecuación tienden a ser iguales.

#### EJEMPLO DE REGLA TRAPECIAL

Calcular numéricamente integral  $\int_0^{\pi/2} \text{sen } x dx$  por la regla trapecial.

*Solución:* El valor exacto de la integral es 1.

El intervalo  $[0, \pi/2]$ , se dividirá en 4 y 6 partes con el fin de observar la influencia de del número de subintervalos en la aproximación de la integral:

1. dividiendo el intervalo en 4 partes y de forma tabular:

$i$	$x_i$	$y_i = \text{sen } x_i \text{ (rad.)}$
0	0	0.000
1	$\pi/8$	0.382
2	$\pi/4$	0.707
3	$\pi/8$	0.924
4	$\pi/2$	1

en este caso,  $h$  o  $\Delta x$ (valor del paso) es  $\pi/8$ , o sea,

$$h_m = \frac{b-a}{2^m} \quad (m=1,2,3,\dots) \quad h = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{4} = \frac{\pi}{8}$$



y se tiene según la ec. VII-1,

$$I_4 = (\pi/8) * (0.000 + 1.000 + 2(0.382 + 0.707 + 0.924))/2 = 0.987$$

con un error de: (valor exacto)/(valor numérico) = (1/0.987) = 1.0132, es decir, 1.32 %.

2. Dividiendo el intervalo en 6 partes,  $h = \pi/12$ .

$i$	$x_i$	$y_i = \text{sen } x_i \text{ (rad.)}$
0	0	0.000
1	$\pi/12$	0.258
2	$\pi/6$	0.5
3	$\pi/4$	0.707
4	$\pi/6$	0.866
5	$5\pi/12$	0.966
6	$\pi/2$	1

aplicando la regla trapezoidal ec. VII-1,

$$I_6 = (\pi/12) * (0.000 + 1.000 + 2(0.258 + 0.5 + 0.707 + 0.866 + 0.966))/2$$

$$I_6 = 0.994, \text{ con error de } 0.6 \%$$

Debemos señalar que cuando se divide el área en pequeños trapecios de base  $\Delta x$ , hay una parte de dicha área que al ajustarse a la curva o bien se excede o falta, o bien, los trapecios deberían ser tan pequeños como para ajustarse perfectamente al contorno de la curva. Esta área excedente o faltante, ha dado en denominarse error y se han hecho varios intentos por parte de los investigadores, para encontrar expresiones matemáticas que los definan para las fórmulas de integración, entre ellas la serie de Taylor es un método para una aproximación a los errores (consultar las obras de Luthe, Suárez Alonso y Curtis sobre éste método).

### A.3.2 EXTRAPOLACION DE RICHARDSON

El conocimiento del orden del error permite estimar de forma adecuada, el valor correcto de las cantidades obtenidas aproximadamente. Sea  $Q$  el valor exacto o verdadero de una integral a evaluar, y  $Q_1$  y  $Q_2$  dos aproximaciones hechas a partir de dividir el intervalo en  $n_1$  y  $n_2$  partes iguales, respectivamente, dando subintervalos (pasos fijos)  $h_1$  y  $h_2$  también respectivamente, es decir

$$h_1 = \frac{x_n - x_0}{n_1}, h_2 = \frac{x_n - x_0}{n_2}$$



Si  $Q_1$  y  $Q_2$  se estimaron a partir de fórmulas con errores del orden de  $h^n$ , el error valdrá  $e=Ch^n$  más términos con potencias superiores de  $h$ . Como se trata de una serie (ver bibliografía) se acepta el primer término como el más importante lo que ocurre si  $h$  es pequeño, se tiene:

$$Q \cong Q_1 + Ch_1^n \quad \text{y} \quad Q \cong Q_2 + Ch_2^n$$

dividiendo las ecuaciones entre  $h_1^n$  y  $h_2^n$  y resolviendo para eliminar  $C$ , tendremos

$$Q = \frac{h_2^n Q_1 - h_1^n Q_2}{h_2^n - h_1^n}$$

si se divide el numerador y el denominador del segundo miembro entre  $h_1^n$ , se obtiene la expresión para la *extrapolación de Richardson*.

$$Q = \frac{(h_2^n / h_1^n) Q_1 - Q_2}{(h_2^n / h_1^n) - 1} \quad (\text{VII-2})$$

#### EJEMPLO

Si se calcula numéricamente la integral  $\int_0^{\pi/2} \text{sen } x dx$ , dividiendo el intervalo de integración en 4 y 6 partes, se puede hacer una extrapolación de Richardson para mejorar los valores obtenidos.

Se tiene  $h_1 = \pi/8$  e  $I_1 = 0.987$  y para  $h_2 = \pi/12$ ,  $I_2 = 0.994$ . Los resultados se obtuvieron con la fórmula trapezoidal la cual tiene un error del orden  $h^2$ , por lo que  $n=2$  en (VII-2)

Sustituyendo

$$Q = \frac{\left(\frac{\pi/12}{\pi/8}\right)^2 0.987 - 0.994}{\left(\frac{\pi/12}{\pi/8}\right)^2 - 1} = \frac{(4/9)0.987 - 0.994}{(4/9) - 1} = 0.9996$$

Por lo que

$$I = 0.9996 \text{ con } 0.04\% \text{ de error.}$$

Podemos concluir que se mejoró el resultado con la extrapolación.



### A.3.3. INTEGRACION DE ROMBERG

La aplicación sistemática de la extrapolación de Richardson a la regla trapezoidal, se denomina Integración de Romberg.

El método consiste en calcular la integral para una  $h$  arbitraria y después se calcula para  $h$  dividida entre dos. Si los valores difieren más de una cierta tolerancia, se mejora el valor por medio de la extrapolación de Richardson para calcular en seguida una nueva integral con  $h$  dividida entre dos. Esto se combina con el valor anterior de la integral para obtener un segundo valor extrapolado, el cual se compara con el primero. De ser necesario se sigue el procedimiento incluyendo una extrapolación de mayor orden. Se continúa el método hasta que un par de valores, concuerden con la integral exacta satisfactoriamente, es decir, dentro de una tolerancia prefijada. El diagrama de flujo en el anexo B.4 aclara lo anterior. La siguiente ecuación es la forma general para la aplicación del método, donde:

$$I = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Donde:  $I_{j+1,k-1}$  y  $I_{j,k-1}$  son las integrales más y menos exactas respectivamente,  $I_{j,k}$  es la integral mejorada. El índice  $k$  indica el nivel de integración,  $k=1$  corresponde a la estimación de la regla trapezoidal original,  $k=2$  corresponde a  $h^4$ ,  $k=3$  a  $h^6$ , etc. El índice  $j$  se usa para distinguir entre las estimaciones mejores ( $j+1$ ) y menores ( $j$ ).

El ejemplo de la integración de Romberg se verá en la aplicación del método de la integración gráfica del flujo gradualmente variado más adelante.



## B. EJEMPLOS

Ejemplo B.1. Estimar el tirante normal ( $y_n$ ) para un canal rectangular, excavado en tierra y recubierto con un material no erosionable ( $n=0.025$ ) que tiene un ancho en la base de 5.00 m, transporta un gasto de  $15 \text{ m}^3/\text{s}$  y tiene una pendiente longitudinal de 0.009.

*Solución.*

Ya que se conocen  $n$ ,  $Q$ , y  $S$  podemos arreglar la ecuación de Manning de la siguiente forma:

$$\frac{nQ}{\sqrt{S}} = AR^{2/3}$$

sustituyendo los valores:

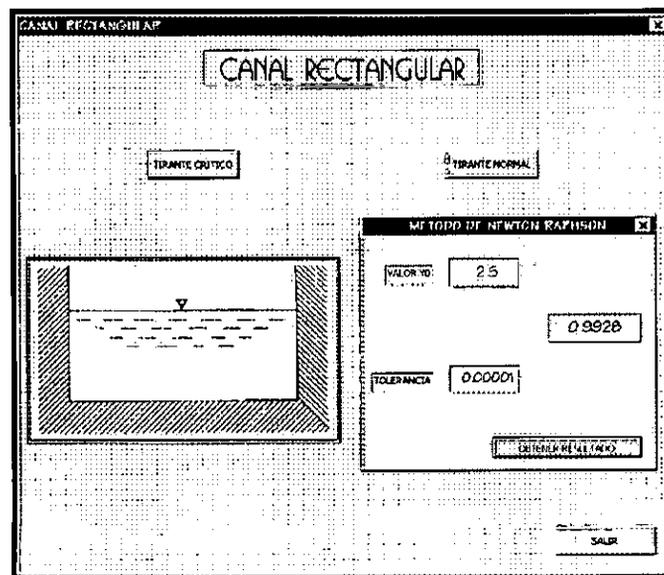
$$\frac{nQ}{\sqrt{S}} = 3.9528$$

$$AR^{2/3} = (5y) * (5y / (5 + 2y))^{2/3}$$

como puede apreciarse el miembro de la ecuación  $AR^{2/3}$  es función del tirante  $y$ , resolviendo por tanteos:

$y$	$AR^{2/3}$
0.5	1.3947
0.8	2.8646
0.9	3.4173
0.99	3.9365 $\cong$ 3.9528, luego $y_n = 0.99 \text{ m}$

A continuación se muestra la corrida del programa de computadora (método de Newton-Raphson).



$$y_n = 0.9928 \text{ m}$$



comparando los resultados notamos que la precisión mejoró, además, los tanteos pueden ser innumerables si no se tiene la “suerte” de comenzar a evaluar con un valor cercano a la raíz, o sea,  $y_n$ .

*Ejemplo B.2.* Calcular el tirante crítico y la energía mínima para un canal de sección trapezoidal, el cual escurre con un caudal de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ . Los demás datos son:  $n=0.015$ ,  $z=1.5$ ,  $b=2.5\text{m}$  y  $\alpha=1.0$ . Considerar  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ . Se debe comprobar también que para la condición crítica del flujo el número de Froude vale 1.

*Solución.*

En primer lugar calculamos el lado izquierdo de la ecuación del flujo crítico, el cual depende sólo de  $Q$ .

$$Q^2/(g/\alpha)=40.7747$$

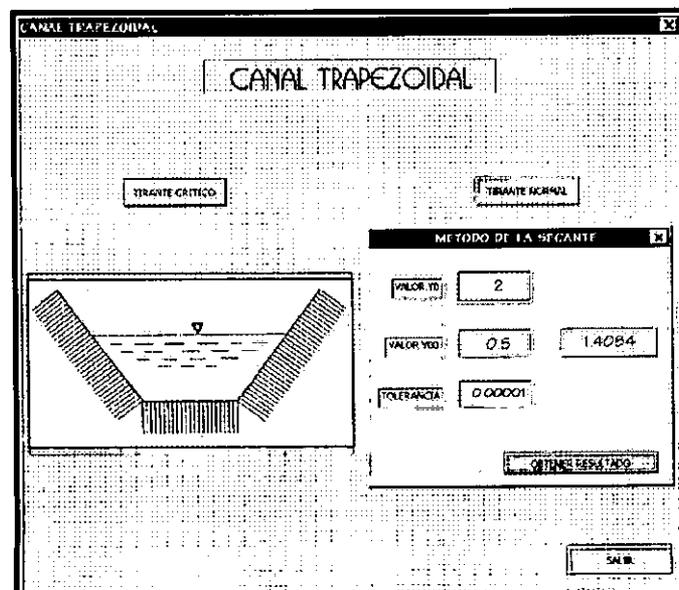
De la tabla de secciones geométricas podemos ver que  $A$  es  $(b+zy)y$  y  $T = b+zy$ . La ecuación del flujo crítico queda:

$$40.7747 = (((2.5 + (1.5 * y))y)^3) / (2.5 + 2 * (1.5 * y))$$

Resolviendo por tanteos:

$y$	$A^3/T$
1.00	11.6364
1.20	22.5226
1.30	30.2503
1.40	39.8642
1.41	40.9409 $\cong$ 40.7747; $y_c = 1.41 \text{ m}$

A continuación se muestra la solución por computadora (método de la Secante).



$$y_c = 1.4084 \text{ m}$$



La energía mínima del canal es aquella que ocurre con  $y_c$ :

$$E = y + \alpha (Q^2/2gA^2) \quad \text{III-9}$$

$$E = 4.545 \text{ m}$$

La expresión para el número de Froude es:

$$Fr = V_c / (gA_c/T_c)^{0.5} \quad \text{(VII-2)}$$

$$\begin{aligned} V_c &= Q/A_c \\ A_c &= 6.50 \text{ m}^2 \\ V_c &= 3.076 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ec.(VII-2) nos da  $Fr = 1$ .

Ejemplo B.3. Usando el método del Paso Directo, determinar el perfil a formarse en un canal de sección trapecial que tiene una compuerta sumergida con 0.20m de abertura y después de cierta distancia se inicia una turbulencia que comienza con un tirante de 0.5m. El canal conduce un gasto de 11.30 m<sup>3</sup>/s, con  $n=0.025$ ,  $z=2$ ,  $b=6.0\text{m}$ ,  $\alpha=1.1$  y  $S_0=0.0036$ .

*Solución.*

Se obtienen  $y_n$  y  $y_c$  del programa de computadora, los cuales valen:

$$\begin{aligned} y_n &= 0.822 \text{ m} \\ y_c &= 0.679 \text{ m} \end{aligned}$$

Como  $y_n > y_c$  el perfil es tipo  $M$  y dado que  $y > y_c$  (flujo subcrítico) el perfil se ubica en la zona 3 ( $M3$ ). El perfil se desarrolla con tirantes extremos de 0.20 y 0.50 m. Como el flujo es subcrítico el cálculo se realiza hacia aguas abajo.

Se empiezan los cálculos como sigue:

para  $Y=0.20 \text{ m}$

$$A = (b + zy)y = (6 + 2*0.20)0.20 = 1.28 \text{ m}^2$$

$$P = b + 2y(1+z^2)^{0.5} = 6 + 2*0.20(1+4)^{0.5} = 6.89 \text{ m}$$

$$R = A/P = 0.19 \text{ m}$$



$$V = Q/A = 8.83 \text{ m/s}$$

$$E = y + V^2/2g = 4.57 \text{ m}$$

$$S_f = (nV/R^{2/3})^2 = 0.4599$$

$$S_{fm} = ***$$

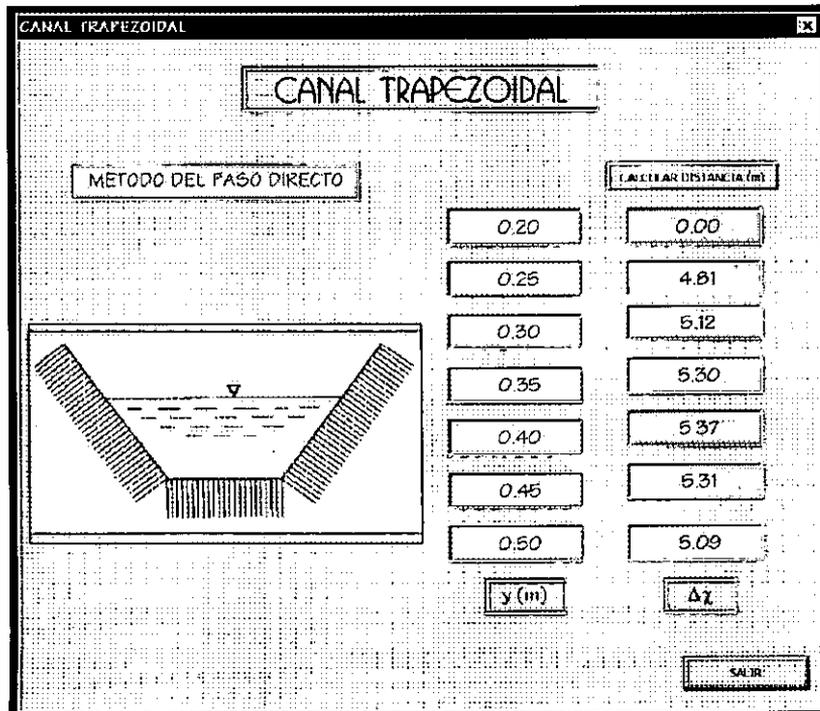
$$Dx = 0.0000$$

Para la siguiente fila de valores se repiten los pasos anteriores sólo que  $y=0.25\text{m}$  y  $S_{fm}=(0.4599+0.2166)/2 = 0.3383$  (pendiente promedio).

El cálculo completo puede verse en la siguiente tabla.

$y \text{ (m)}$	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$P \text{ (m)}$	$R \text{ (m)}$	$V \text{ (m/s)}$	$E \text{ (m)}$	$S_f$	$S_{fm}$	$\Delta x \text{ (m)}$
0.2	1.28	6.8944272	0.185657	8.82813	4.56948879	0.4599048	***	0
0.25	1.625	7.118034	0.228293	6.95385	2.9610894	0.216607	0.33826	4.8061292
0.3	1.98	7.3416408	0.269694	5.70707	2.12608163	0.1168271	0.16672	5.1190707
0.35	2.345	7.5652476	0.30997	4.81876	1.65186177	0.0691818	0.093	5.3042084
0.4	2.72	7.7888544	0.349217	4.15441	1.36763766	0.0438637	0.05652	5.3705486
0.45	3.105	8.0124612	0.387521	3.63929	1.19255283	0.029299	0.03658	5.3086002
0.5	3.5	8.236068	0.42496	3.22857	1.08440575	0.0203909	0.02484	5.0904828

Corrida de programa.





*Ejemplo B.4.* Una cuneta tiene como derivación una alcantarilla de sección circular  $d_0 = 5\text{ft}$  (1.524m), de longitud  $L = 90\text{m}$ . Sus datos son:  $S_0 = 0.02$ ,  $n = 0.014$ ,  $Q = 4.5\text{ m}^3/\text{s}$ ,  $\alpha = 1.01$ . Se asume que la alcantarilla no escurre a presión y que entra el agua con  $y_c$  (energía mínima). Determinar el perfil a formarse por el método del Paso Standard.

*Solución.*

Se obtiene que  $y_c = 1.1175\text{m}$  y  $y_n = 0.7301\text{ m}$  ( $y_c > y_n$ , flujo supercrítico) el perfil a formarse es  $S_2$ .

Se decide tomar incrementos fijos,  $\Delta x = 10\text{ m}$ .

Comenzando las operaciones con  $y_c = 1.1175\text{ m}$  se tiene lo siguiente:

$$y = 1.1175\text{ m}$$

$$\theta (\text{rad}) = (4y/d_0) - 2 + \pi = 4.0747\text{ rad}$$

$$\theta (\text{deg}) = 4.0747 * 57.2958 = 233.4631\text{ deg}$$

$$A = (1/8) * (4.0747 - \text{sen}(4.0747)) * (1.524^2) = 1.4162\text{ m}^2$$

$$P = (4.0747/2) * 1.524 = 3.1049\text{ m}$$

$$R = 1.4162/3.1049 = 0.4561\text{ m}$$

$$V = 4.5/1.4162 = 3.1775\text{ m/s}$$

$$S_f = (0.014 * 3.1775)^2 / (0.4561^{4/3}) = 0.005635$$

De la ecuación VI-7.a para flujo supercrítico tenemos que son conocidos los siguientes datos:  $\Delta x$ ,  $y_1$ ,  $\alpha V_1^2/2g$ ,  $S_{f1}$ ,  $Q$ ,  $n$ ,  $S_0$  y la geometría de sección, de esta manera convenimos en llamar *DATO* a la siguiente expresión:

$$\Delta x S_0 + E_1 - 1/2 (\Delta x S_{f1})$$

Así la ecuación VI-7.a queda :

$$E_2 + 1/2 \Delta x S_{f2} = \text{DATO} \quad (\text{VII-3})$$

pasando el miembro derecho al otro lado con signo contrario e igualando a cero:

$$E_2 + 1/2 \Delta x S_{f2} - \text{DATO} = 0$$



La expresión obtenida (VII-3), habrá de ser resuelta por tanteos para hallar  $y_2$  como sigue:

$$DATO = 10 * 0.02 + 1.1175 + (1.01 * 3.1775^2 / 19.62) - (1/2) * 10 * 0.005635$$

$$DATO = 1.809056$$

$\theta$ (rad)	$y$	expresión
4.0	1.08905	1.6655
3.9	1.05095	1.6712
3.8	1.01285	1.6841
3.5	0.89855	1.7832
3.4	0.86045	1.8114 $\cong$ dato = 1.8091m

Ahora se usa  $\theta = 3.4$  rad. ó  $y = 0.86045$  para la siguiente iteración donde se obtendrá un segundo dato y habrá que resolver la expresión nuevamente para encontrar  $\theta$  y luego  $y$ .

Los tanteos se hacen con el valor de  $\theta$  y después se calcula el valor de  $y$ , para este ejemplo en particular, para una sección trapezoidal o de otro tipo no hace falta hallar las conversiones entre  $\theta$  y  $y$ . Las siguientes expresiones son útiles para los cálculos:

$$\theta = (4y/d_0) - 2 + \pi \quad y = (d_0/4) * (\theta + 2 - \pi)$$

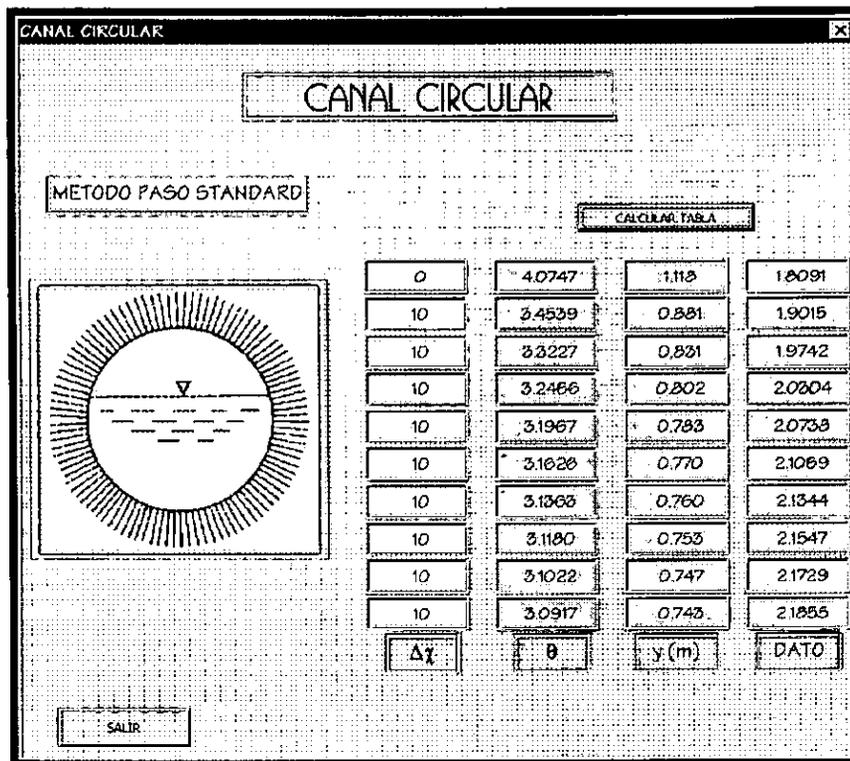
Puede apreciarse que para cada iteración hay que realizar varios tanteos. Resulta laborioso tener que evaluar la expresión en numerosas ocasiones para obtener una sola raíz.

La tabla con el perfil completo se muestra enseguida:

Y	$\theta$	$\theta$	A	P	R	V	Sf	$\Delta x$	DATO
(m)	(rad)	(grad)	(m <sup>2</sup> )	(m)	(m)	(m/s)		m	
1.118	4.0747	233.461	1.4162	3.1049	0.4561	3.17746	0.0056	0	1.8091
0.881	3.4539	197.8956	1.092	2.6319	0.4149	4.12102	0.0108	10	1.9015
0.831	3.3227	190.3764	1.0169	2.5319	0.4017	4.42503	0.013	10	1.9742
0.802	3.2466	186.0153	0.973	2.4739	0.3933	4.62498	0.0145	10	2.0304
0.783	3.1967	183.1581	0.9441	2.4359	0.3876	4.7666	0.0158	10	2.0738
0.770	3.1626	181.2031	0.9243	2.4099	0.3835	4.86873	0.0167	10	2.1069
0.760	3.1363	179.6993	0.909	2.3899	0.3804	4.95036	0.0174	10	2.1344
0.753	3.118	178.6466	0.8984	2.3759	0.3781	5.00914	0.018	10	2.1547
0.747	3.1022	177.7443	0.8892	2.3639	0.3762	5.06063	0.0185	10	2.1729
0.743	3.0917	177.1428	0.8831	2.3559	0.3749	5.09555	0.0188	10	2.1855



Enseguida se usa el programa de computadora para presentar los resultados de este mismo problema.



*Ejemplo B.5.* Calcular el perfil a formarse por el método de integración gráfica, en un canal de sección trapezoidal a partir de un bordo de altura 1.524 m que provoca una elevación del tirante (represa) con los siguientes datos:  $Q=11.327 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $n=0.025$ ,  $S_0=0.0016$ ,  $\alpha=1.1$ ,  $b=6.096 \text{ m}$  y  $z=2$ .

*Solución.*

Sabemos que  $y_c = 0.674 \text{ m}$ . y  $y_n = 1.024 \text{ m}$  por lo que el perfil a formarse es tipo *M1* y se realiza el cálculo en sentido contrario al escurrimiento. Comenzaremos con  $y_1=1.524$  y terminaremos con  $y_n=1.024$ , o sea, cuando el flujo está normalizado.

Para  $y=1.524 \text{ m}$ .

$$A=13.9355 \text{ m}^2.$$

$$P=12.9115 \text{ m}.$$

$$R=1.0793 \text{ m}.$$

$$T=12.1920 \text{ m}.$$

$$V=0.8128 \text{ m}.$$



$$Fr=0.8128/((9.81)*(13.9355/12.1920))^{0.5}=0.2427$$

$$S_f=0.0004$$

$$f'(y)=dx/dy=((1-0.2427)/(0.0016-0.0004))=766.958$$

$$X=0$$

En la siguiente iteración se repiten los pasos anteriores igual, pero ahora como si hay que calcular una distancia para el siguiente tirante  $y=1.51$  m. se calcula  $X$  como sigue:

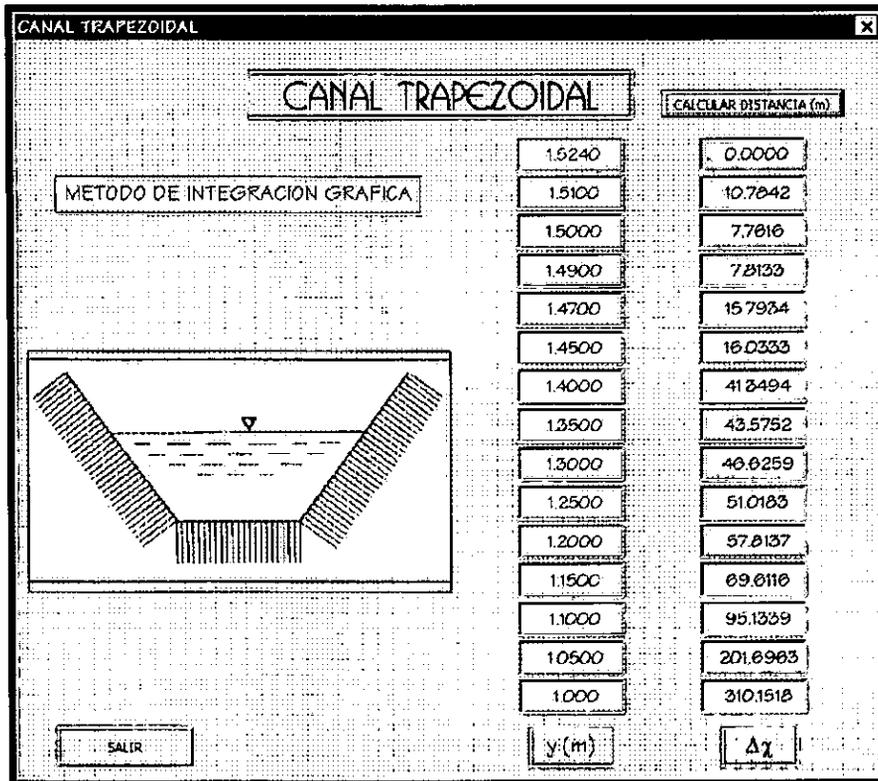
$$X=(766.958+773)*(1.524-1.51)/2=10.7842 \text{ m}$$

Nótese que la ecuación de donde se obtuvo  $X$  es la fórmula del TRAPECIO. Si aplicáramos el método manual descrito seguramente tendríamos poca precisión en los cálculo debido a los errores descritos en la Regla Trapecial.

La tabla de valores fue calculada según el procedimiento mostrado arriba.

$Y$ (m)	$A$ (m <sup>2</sup> )	$P$ (m)	$R$ (m)	$T$ (m)	$V$ (m/s)	$F_r$	$S_f$	$f'(y)=dx/dy$	$\Delta x$ (m)
1.5240	13.9355	12.9115	1.0793	12.1920	0.8128	0.2427	0.0004	766.958	0.0000
1.51	13.7652	12.8489	1.0713	12.1360	0.8229	0.2467	0.0004	773.638	10.7842
1.5	13.6440	12.8042	1.0656	12.0960	0.8302	0.2496	0.0004	778.684	7.7616
1.49	13.5232	12.7595	1.0599	12.0560	0.8376	0.2525	0.0004	783.976	7.8133
1.47	13.2829	12.6700	1.0484	11.9760	0.8527	0.2585	0.0004	795.366	15.7934
1.4500	13.0442	12.5806	1.0369	11.8960	0.8684	0.2648	0.0004	807.961	16.0333
1.4000	12.4544	12.3570	1.0079	11.6960	0.9095	0.2814	0.0005	846.016	41.3494
1.3500	11.8746	12.1334	0.9787	11.4960	0.9539	0.2997	0.0006	896.992	43.5752
1.3000	11.3048	11.9098	0.9492	11.2960	1.0020	0.3198	0.0007	968.044	46.6259
1.2500	10.7450	11.6862	0.9195	11.0960	1.0542	0.3420	0.0008	1072.689	51.0183
1.2000	10.1952	11.4626	0.8894	10.8960	1.1110	0.3667	0.0009	1239.859	57.8137
1.1500	9.6554	11.2390	0.8591	10.6960	1.1731	0.3942	0.0011	1544.606	69.6116
1.1000	9.1256	11.0153	0.8284	10.4960	1.2412	0.4250	0.0012	2260.750	95.1339
1.0500	8.6058	10.7917	0.7974	10.2960	1.3162	0.4597	0.0015	5807.103	201.6963
1.0300	8.4007	10.7023	0.7849	10.2160	1.3483	0.4747	0.0016	25208.08	310.1518

Ahora resolvemos el perfil usando el programa elaborado para el método de integración gráfica.



**Ejemplo B.6.** Un canal rectangular tiene un ancho  $b=5$  m, una pendiente longitudinal  $S_0=0.001$ ; transporta un gasto de  $10 \text{ m}^3/\text{s}$  con  $n=0.013$ . Debido a condiciones topográficas cambia de pendiente de  $0.001$  a  $0.01$ . Calcular  $y_1$ .

**Solución.**

Se calcula el tirante normal, el cual resulta se  $y_n=1.0195$  m y se tomará como  $y_2$  en la ecuación

$$y_1 = \frac{y_2}{2} \sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1$$

el área es:  $A_2 = 5(1.0195) = 5.0977 \text{ m}^2$

$$Fr^2 = V^2/gD = Q^2/A^2 gy_2$$

$Fr^2 = 10^2/(5.0977)(9.81)(1.0195) = 0.3848 \text{ m}$ .

$$y_1 = \frac{1.0195}{2} \sqrt{1 + 8(0.3848)} - 1 = 0.5197 \text{ m}.$$



# CONCLUSIONES





## CONCLUSIONES

La utilización de métodos numéricos y programación de computadoras, permite el empleo de procesos de cálculo que están compuestos de un gran número de cálculos repetitivos (iteraciones), los cuales se resuelven en poco tiempo y con gran precisión.

Los diagramas de flujo son la base de toda la programación, ya que forman el esqueleto de las operaciones y tareas que se le asignan a la máquina.

La metodología consistente en resolver primero un ejemplo manual y después por computadora, presenta la ventaja de constatar el buen funcionamiento de un programa de cómputo, así como sus límites.

La hidráulica como disciplina basada en gran parte en fundamentos empíricos, presenta una gama amplia de áreas de oportunidad para la elaboración de nuevas teorías, que seguramente con el uso de la tecnología moderna podrá avanzar en los siguientes años, ya que como se vio en este trabajo, los primeros intentos de explicar los fenómenos y funcionamiento del flujo en canales, datan la mayoría de unos doscientos cincuenta años atrás.

El uso de tablas y nomogramas para resolver problemas de hidráulica, está quedando paulatinamente en lo obsoleto. Algo que ocurrió también con las tablas de funciones trigonométricas y logarítmicas, que fueron desplazadas por las calculadoras de bolsillo, no hace mucho tiempo. En estos días, es relativamente fácil adquirir una computadora. Y no será raro ver dentro de cinco años a la mayoría de los ingenieros en nuestro medio con computadoras portátiles, como ya ocurre en países más adelantados que el nuestro. Esto no significa que la máquina vaya a sustituir la capacidad y la creatividad para resolver problemas, sino más bien ya constituye una herramienta valiosa para el desempeño del ingeniero.

Varios métodos de cálculo tanto en la hidráulica como en la matemática numérica estaban relegados, al ser muy laboriosos en su realización. Con la capacidad de las computadoras para calcular a gran velocidad, se han vuelto a emplear demostrando su gran utilidad.

En los métodos para el flujo gradualmente variado, en particular para el de integración gráfica y paso standard, donde su correcta aplicación necesita precisión, en la estimación de áreas bajo una función y la raíz exacta de una ecuación, respectivamente, encontramos que la eficiencia de la máquina no puede ser superada por los cálculos manuales. De comparación de resultados dados en los ejemplos se puede corroborar lo anterior.



# BIBLIOGRAFIA





## BIBLIOGRAFIA

- i. ASHTON-TATE. PROGRAMING WITH DBASE III PLUS. 1986.
- ii. AZEVEDO, J.M. de, Acosta, Guillermo. MANUAL DE HIDRAULICA. Ed. HARLA. México, 1976.
- iii. BAKHMETEFF, Boris A. HYDRAULICS OF OPEN CHANNELS. Ed. McGraw Hill Book Company Inc. United States of America, 1932.
- iv. BARRAGAN Solis, Martín. APUNTES DE METODOS NUMERICOS. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- v. BARRAGAN Solis, Martín. APUNTES PARA EL CURSO DE HIDRAULICA DE CANALES. Cursos impartidos en la Esc. de Ingeniería Civil, U.D.V., Uruapan Mich. México, años: 1994 y 1996
- vi. BARRAGAN Solis, Martín. METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA HIDRAULICA (primera parte). Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Guerrero. México, 1997.
- vii. C.F.E. Instituto de Investigaciones Eléctricas. MANUAL DE DISEÑO DE OBRAS CIVILES, sección E "hidráulica y ayudas de diseño". Ed. C.F.E. México, 1970.
- viii. CHAPRA, S. CANALE, R. METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS CON APLICACIONES A LAS COMPUTADORAS PERSONALES. Ed. McGraw Hill. México, 1990.
- ix. CHOW, Ven Te. HIDRAULICA DE LOS CANALES ABIERTOS. Ed. Diana. México, 1993.
- x. EVETT, Jack B., Liu, Cheng. FUNDAMENTALS OF FLUID MECHANICS. Ed. McGraw Hill, Civil Engineering Serics. Singapore, 1987.
- xi. GARCIA PELAYO Y GROSS, Fernando. PEQUEÑO LAROUSSE ILUSTRADO. Ed. Larousse. France, 1964.
- xii. GARDEA Villegas, Humberto. HIDRAULICA DE CANALES. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México.
- xiii. GERALD, Curtis F. ANALISIS NUMERICO. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México, 1987.
- xiv. GILES, Ranald V. MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA. Ed. McGraw Hill, serie Schaum. México, 1969.
- xv. GOLDSTEIN, Larry Joel. IBM PC Y COMPATIBLES. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana. México, 1992.
- xvi. HEYMAN, Mark S. LA ESENCIA DE VISUAL BASIC. Ed. Prentice Hall Hispanoamericana. México, 1996.
- xvii. JAMES, Merlin L. METODOS NUMERICOS APLICADOS A LA COMPUTACION DIGITAL CON FORTRAN. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería. México, 1973.
- xviii. LUTHE, R. Olivera, A. Schutz, F. METODOS NUMERICOS. Ed. Limusa. México, 1990.
- xix. McCracken, Daniel. METODOS NUMERICOS Y PROGRAMACION FORTRAN. Ed. Limusa. México, 1986.



- XX. NAKAMURA, Shoichiro. METODOS NUMERICOS APLICADOS CON SOFTWARE. Ed. Prentice Hall. México, 1992.
- XXI. NIETO RAMIREZ, José A. METODOS NUMERICOS EN COMPUTADORAS DIGITALES. Ed. Limusa. México, 1980.
- XXII. OLIVERA, Salazar Antonio. METODOS NUMERICOS. Facultad de Ingeniería U.N.A.M. México, 1973.
- XXIII. SAINZ DE ROBLES, Federico Carlos. ENSAYO DE UN DICCIONARIO ESPAÑOL DE SINONIMOS Y ANTONIMOS. Ed. Aguilar. España, 1969.
- XXIV. SIMON, Andrew L. HIDRAULICA PRACTICA. Ed. Limusa. México, 1986.
- XXV. SIMPSON, Alan. COMO USAR DBASE III PLUS, incluye avance de Dbase IV. Ed. Macrobit Editores. México, 1990.
- XXVI. SOTELO, Avila Gilberto. APUNTES DE HIDRAULICA II. Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. México.
- XXVII. SUAREZ, Alonso Margarita. MATEMATICA NUMERICA. I.P.N. México, 1997.
- XXVIII. VELASCO Avalos, Fernando Augusto. TEORIA Y PROGRAMA DE MICROCOMPUTADORA PARA DETERMINAR EL FUNCIONAMIENTO HIDRAULICO DE CANALES ARTIFICIALES DE SECCION REGULAR. TESIS PROFESIONAL, U.M.S.N.H. Escuela de Ingeniería Civil. México 1985.
- XXIX. ZUBIZARRETA, Armando F. LA AVENTURA DEL TRABAJO INTELECTUAL, cómo estudiar e investigar. Ed. Fondo Educativo Interamericano. México, 1983.

***PAQUETES DE COMPUTACION EMPLEADOS:***

- I. BORLAND DBASE III PLUS
- II. MICROSOFT OFFICE 97
- III. MICROSOFT VISUAL BASIC 5
- IV. COREL CORPORATION COREL DRAW 5
- V. MICROSOFT WORKS FOR WINDOWS
- VI. WORKS FOR DOS



# ANEXOS





## TABLA DE ABREVIATURAS

$A$	Area mojada	$R$	Número de Reynolds
$V$	Velocidad media	$R_e$	
$V_{ms}$	Velocidad máxima de superficie	$h_f$	Pérdidas por fricción
$P$	Perímetro mojado	$g$	Aceleración debida a la gravedad
$R$	Radio hidráulico	$f$	Factor de fricción
$y_{ms}$	Profundidad máxima del área mojada	$L$	Longitud
$S_w$	Pendiente de la superficie del agua	$h$	Altura de presión
$S_0$	Pendiente del fondo del canal	$k$	Factor numérico del canal
$n$	Un coeficiente representando la rugosidad del canal, conocido como <i>coeficiente de rugosidad</i> (coeficiente rugoso o de Manning).	$D$	Profundidad hidráulica
$Q$	Gasto, caudal ó escurrimiento normal	$F$	Número de Froude
$T$	Temperatura del agua	$Fr$	
$S$	La pendiente del canal	$y$	Profundidad del flujo
$S_f$	Gradiente ó pendiente de energía	$d$	Profundidad de la sección del flujo normal
$E$	energía específica	$T$	Ancho superior de la sección
		$Z$	Factor de la sección
		$\alpha$	Coficiente de energía ó factor de Coriolis



$\beta$	Coeficiente de momentum ó coeficiente de Boussinesq	$M$	Exponente hidráulico para flujo crítico
$w$	Peso unitario del agua	$Z_c$	Factor de la sección crítica
$H$	Altura o carga total	$N.D.L$	Normal Depth Line
$\theta$	Angulo de la pendiente del fondo del canal	$C.D.L$	Critical Depth Line
$F$	Fuerza específica	$C$	Factor de resistencia del flujo, $C$ de Chezy.
$y_1$	Profundidad inicial	$y_n$	Profundidad o tirante normal
$y_2$	profundidad secuente o consecutiva	$S_L$	Pendiente límite
$\Delta E$	Pérdida de energía	$\mu$	Viscosidad dinámica del agua
$F_f$	Fuerza total externa de fricción	$\tau$	Esfuerzo cortante en un fluido
$z$	profundidad del centroide del área mojada	$\gamma$	La componente efectiva de la fuerza gravitacional
$P_1$	Coeficientes de fuerza	$\rho$	Densidad del líquido
$P_2$		$y_m$	Profundidad media del flujo
$y_c$	Profundidad crítica ó tirante crítico	$N$	Exponente hidráulico para flujo normal
$V_c$	Velocidad de onda (celeridad de onda)	$b$	Ancho del canal
$S_c$	Pendiente crítica	$z$	Cotangente del talud de una sección trapecial.
		$k$	



CUADRO II-1 ELEMENTOS GEOMETRICOS DE LAS SECCIONES DEL CANAL

Sección	Area A	Perímetro mojado P	Radio hidráulico R	Ancho superior T	Profundidad hidráulica D	Factor de la sección Z
 Rectángulo	$by$	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	$b$	$y$	$by^{1.48}$
 Trapezoide	$(b + ay)y$	$b + 2y\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2y\sqrt{1 + a^2}}$	$b + 2ay$	$\frac{(b + ay)y}{b + 2ay}$	$\frac{[(b + ay)y]^{1.48}}{\sqrt{b + 2ay}}$
 Triángulo	$ay^2$	$2y\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{ay}{2\sqrt{1 + a^2}}$	$2ay$	$\frac{2}{3}y$	$\frac{\sqrt{2}}{3}ay^{1.48}$
 Círculo	$\frac{1}{2}(\theta - \text{sen } \theta)d^3$	$\frac{1}{2}d\theta$	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\text{sen } \theta}{\theta}\right)d$	$\frac{(\text{sen } \frac{\theta}{2})d}{2\sqrt{1 - (\frac{\text{sen } \theta}{\theta})}}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{\theta - \text{sen } \theta}{\text{sen } \frac{\theta}{2}}\right)d$	$\frac{\sqrt{2}}{32}\left(\frac{\theta - \text{sen } \theta}{\text{sen } \frac{\theta}{2}}\right)^{1.48} d^{2.48}$
 Parábola	$\frac{2}{3}Ty$	$T + \frac{8}{3}\frac{y^2}{T}$	$\frac{2Ty}{T + \frac{8}{3}\frac{y^2}{T}}$	$\frac{3}{2}\frac{A}{y}$	$\frac{2}{3}y$	$\frac{1}{4}\sqrt{6}Ty^{1.48}$
 Rectángulo con ángulos redondeados	$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)r^2 + (b + 2r)y$	$(\pi - 2)r + b + 2y$	$\frac{(\pi/2 - \theta)r^2 + (b + 2r)y}{(\pi - 2)r + b + 2y}$	$b + 2r$	$\frac{(\pi/2 - \theta)r^2 + y}{b + 2r} + y$	$\frac{[(\pi/2 - \theta)r^2 + (b + 2r)y]^{1.48}}{\sqrt{b + 2r}}$
 Triángulo con fondo redondeado	$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\theta^2}{4}(1 - \text{sen } \theta)$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + a^2} - \frac{2\theta}{3}(1 - \text{sen } \theta)$	$\frac{A}{P}$	$2r(\theta - r) + r\sqrt{1 + a^2}$	$\frac{A}{T}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{A}{T}}$

\* Aproximación satisfactoria para el intervalo  $0 < x \leq 1$ , donde  $x = 4y/T$ . Cuando  $x > 1$ , use la expresión exacta.  
 $P = (T/2) \left[ \sqrt{1 + x^2} + 1/x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \right]$



### A.3 DETERMINACION PRACTICA DE LOS COEFICIENTES DE LA DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

Si suponemos que  $\Delta A$  sea un área elemental del área total mojada  $A$ , y  $w$  el peso el peso unitario del agua: entonces el peso de agua pasando  $\Delta A$  por unidad de tiempo con una velocidad  $v$  es  $wv\Delta A$ . La energía cinética del agua pasando  $\Delta A$  por unidad de tiempo es  $wv^3\Delta A/2g$ . Esto es equivalente al producto del peso  $wv\Delta A$  y la altura de velocidad  $v^2/2g$ . La energía cinética total para el área total mojada es igual a  $\sum wv^3\Delta A/2g$ . Ahora, tomando el área total como  $A$ , la velocidad media como  $V$ , y la altura de velocidad corregida para el área total como  $\alpha V^2/2g$ , la energía cinética total es  $\alpha wV^3A/2g$ . Igualando esta cantidad con  $\sum wv^3\Delta A/2g$  y reduciendo,

$$\alpha = \frac{\int v^3 dA}{V^3 A} \approx \frac{\sum v^3 \Delta A}{V^3 A} \quad (\text{A.3-1})$$

El momentum del agua pasando  $\Delta A$  por unidad de tiempo es el producto de la masa  $wv\Delta A/g$  y la velocidad  $v$ , o  $wv^2\Delta A/g$ . El momentum total es  $\sum wv^2\Delta A/g$ . Igualando esta cantidad con el momentum corregido para el área total, o  $\beta wAV^2/g$ , y reduciendo,

$$\beta = \frac{\int v^2 dA}{V^2 A} \approx \frac{\sum v^2 \Delta A}{V^2 A} \quad (\text{A.3-2})$$

O'Brien y Johnson usaron una solución gráfica de las fórmulas superiores, en la siguiente forma:

De las curvas de la distribución de velocidades medidas, se calcula el área dentro de cada curva de igual velocidad se dibuja. Tomando la velocidad indicada para cada curva de igual velocidad como  $v$ , una curva de  $v^3$  contra la correspondiente área planimetrada. Es evidente que el área debajo de esta curva  $v^3$  es la integral  $\sum v^3 \Delta A$  la cual se puede obtener planimetrando otra vez. Similarmente, las integrales  $\sum v^2 \Delta A$  y  $\sum v \Delta A$  se pueden también obtener. La integral  $\sum v \Delta A$  dividida por  $A$  da  $V$ . Con estas cantidades calculadas, las ecuaciones de arriba se pueden resolver para determinar los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ .

Para valores aproximados, los coeficientes de energía y momentum se pueden calcular con las fórmulas siguientes:

$$\alpha = 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon^3 \quad (\text{A.3-3})$$

$$\beta = 1 + \epsilon^2 \quad (\text{A.3-4})$$

donde  $\epsilon = v_M/V - 1$ ,  $v_M$  siendo la velocidad máxima y  $V$  siendo la velocidad media.

En la mayoría de los problemas prácticos que tratan de canales regulares, no es necesario considerar la variación de la velocidad a través de la sección transversal, ya que el uso de la velocidad promedio dará la seguridad requerida. Las expresiones  $V^2/2g$  y  $wQV/g$  se usan ampliamente suponiendo que estos coeficientes han sido corregidos por el efecto de la distribución de la velocidad no uniforme o que el valor de la unidad se ha supuesto.

#### A.4 DISTRIBUCION DE LA PRESION EN LA SECCION DE UN CANAL

La presión en cualquier punto de una sección transversal del flujo en un canal de pendiente pequeña, se puede medir por la altura de la columna de agua en un tubo piezométrico instalado en el punto (fig. A.4-1). Eliminando disturbios menores debido a turbulencia, etc. es aparente que esta columna de agua debiera alzarse desde el punto de medida hasta la línea del gradiente hidráulico o la superficie del agua. De este modo, la presión en cada punto de la sección es directamente proporcional a la profundidad del punto debajo de la superficie libre e igual a la presión hidrostática correspondiente a esta profundidad. En otras palabras, la distribución de presión sobre la sección transversal del canal es la misma que la distribución de presión hidrostática; es decir, la distribución es lineal y puede ser representada por una línea recta AB (fig. A.4-1). Esto se conoce como la *ley hidrostática de la distribución de presión*.

Estrictamente hablando, la aplicación de la ley hidrostática a la distribución de presión en la sección transversal de un canal escurriendo es válida solamente si los filamentos del flujo no tienen componentes de la aceleración en el plano de la sección transversal. Este tipo de flujo es conocido teóricamente como flujo paralelo, es decir, que las líneas de corriente no tienen curvatura sustancial ni divergencia.

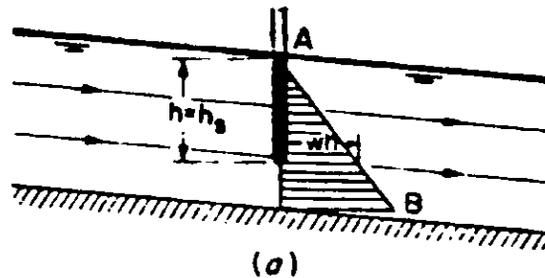


FIG. A.4-1 DISTRIBUCION DE PRESION EN UN CANAL RECTO DE PENDIENTE PEQUEÑA U HORIZONTAL DONDE  $h$ = ALTURA PIEZOMETRICA Y  $h_s$ = ALTURA HIDROSTATICA

Consecuentemente, no hay componentes apreciables de la aceleración normales a la dirección del flujo que podrían deformar la distribución hidrostática de la presión en la sección transversal de un flujo paralelo.

En problemas reales, el flujo uniforme es prácticamente un flujo paralelo. El flujo gradualmente variado puede ser también considerado como flujo paralelo, ya que el cambio en la profundidad del flujo es tan suave que las líneas de corriente no tienen curvatura apreciable ni divergencia; es decir, la curvatura y divergencia son tan pequeñas que el efecto de las componentes de la aceleración en el plano de la sección transversal es despreciable. Por lo tanto, para propósitos prácticos, *la ley hidrostática de distribución de presión es aplicable al flujo gradualmente variado así como al flujo uniforme.*



### A.4.1 EFECTO DE LA PENDIENTE SOBRE LA DISTRIBUCION DE PRESION

Con referencia a un canal inclinado y recto de ancho unitario y ángulo de pendiente  $\theta$  (fig. A.4-2), el peso del elemento rayado de agua de longitud  $dL$  es igual a  $wy \cos\theta dL$ . La presión debida a este peso es  $wy \cos^2\theta dL$ . La presión unitaria es, así, igual a  $wy \cos^2\theta$ , y la altura es

$$h = y \cos^2\theta \tag{A.4-1}$$

o

$$h = d \cos\theta \tag{A.4-2}$$

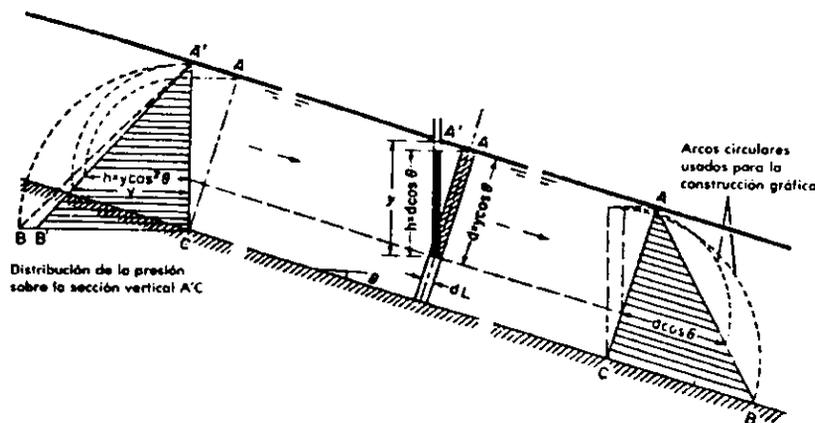


FIG. A.4-2 DISTRIBUCION DE LA PRESION EN FLUJO PARALELO EN CANALES DE PENDIENTES GRANDE

donde  $d = y \cos\theta$ , siendo la profundidad medida perpendicularmente desde la superficie del agua. Se debe destacar de la geometría que la ec. (A.4-1) no se aplica estrictamente al flujo variado particularmente cuando  $\theta$  es muy grande, mientras que la ec. (A.4-2) se aplica todavía. La ec. (A.4-1) establece que la altura de presión en cualquier profundidad vertical es igual a esta profundidad multiplicada por un factor de corrección  $\cos^2\theta$ .

Evidentemente, si el ángulo  $\theta$  es pequeño, éste no diferirá apreciablemente de la unidad. En efecto, la corrección tiende a disminuir la altura de presión por una cantidad menor que 1% hasta que  $\theta$  esté cerca de los  $6^\circ$ ; o sea una pendiente de alrededor de 1:10. Ya que la pendiente de canales comunes es mucho menos que 1:10, la corrección por efecto de la pendiente puede normalmente ser ignorada con toda seguridad. Sin embargo, cuando la pendiente del canal es grande y sus efectos se hacen apreciables, la corrección deberá ser hecha si se desean cálculos precisos. Un canal de este tipo, digamos con una pendiente mayor que 1 a 10, es llamado aquí un *canal de gran pendiente*. A menos que se mencione específicamente, todos los canales descritos en esta tesis, se consideran *canales de pendiente pequeña*.

Si un canal de pendiente grande tiene un perfil longitudinal vertical de curvatura apreciable, la altura de presión debería ser corregida por el efecto vertical de las líneas de corriente (fig. A.4-3). En una notación simple, la altura de presión puede expresarse como  $\alpha' y \cos^2\theta$ , donde  $\alpha'$  es el coeficiente de presión.

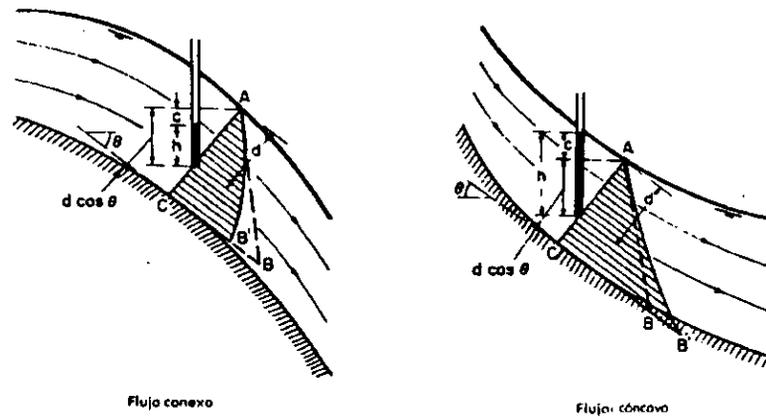
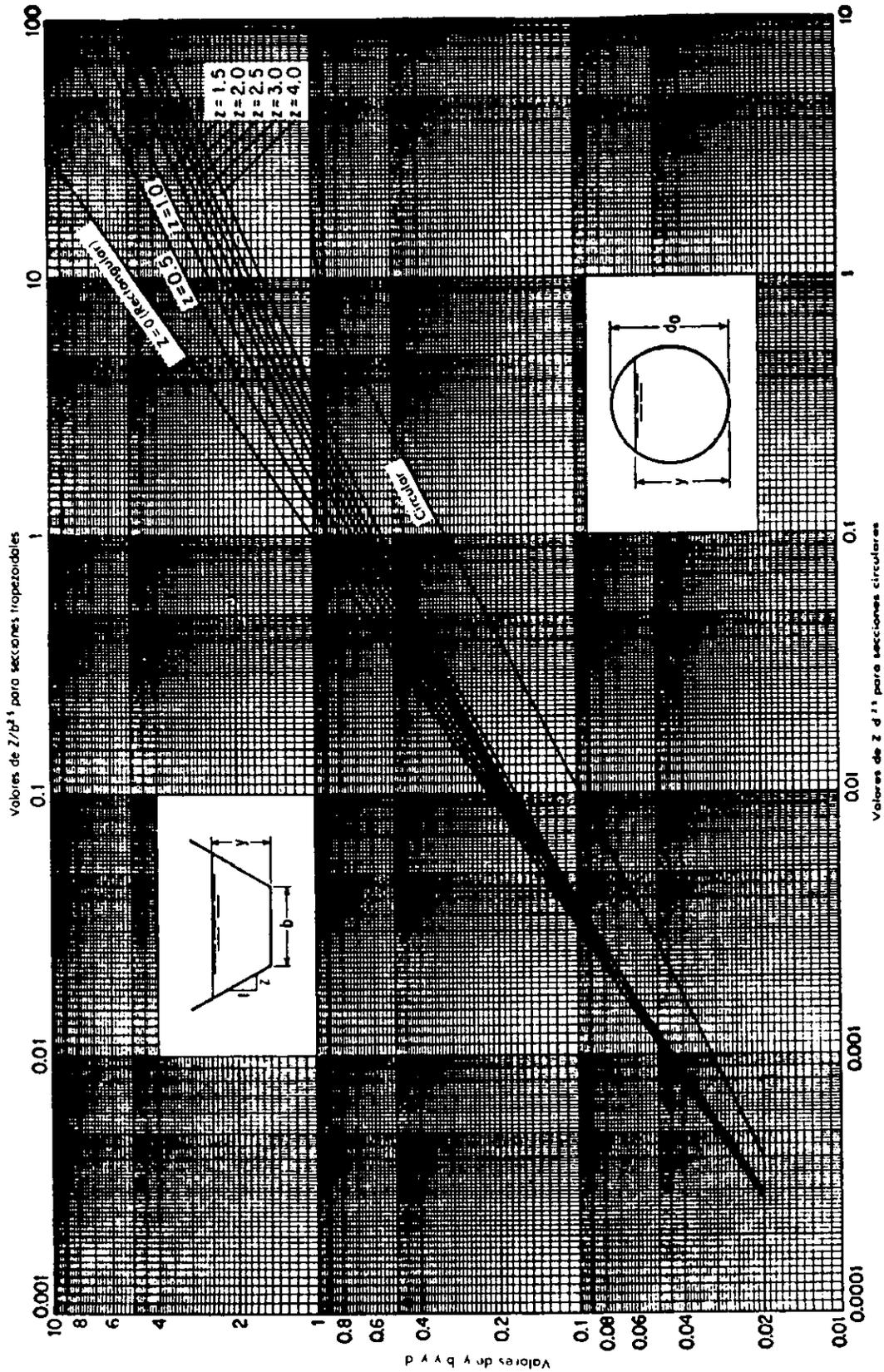


FIG. A.4-3 DISTRIBUCION DE PRESION EN FLUJO CURVILINEO EN CANALES DE GRAN PENDIENTE

En canales de gran pendiente la velocidad del flujo es normalmente alta y más alta que la velocidad crítica. Cuando esta velocidad alcanza cierta magnitud, el agua que está fluyendo arrastrará aire, produciendo un aumento en su volumen y también en la profundidad. El aire es arrastrado en el agua, generalmente a velocidades alrededor de 20 fps (6.1 m.) y aún más altas. Además de la velocidad, sin embargo, otros factores tales como la condición de entrada, rugosidad del canal, distancia recorrida, sección transversal del canal, volumen de descarga, etc., tienen todos alguna influencia sobre el aire arrastrado.

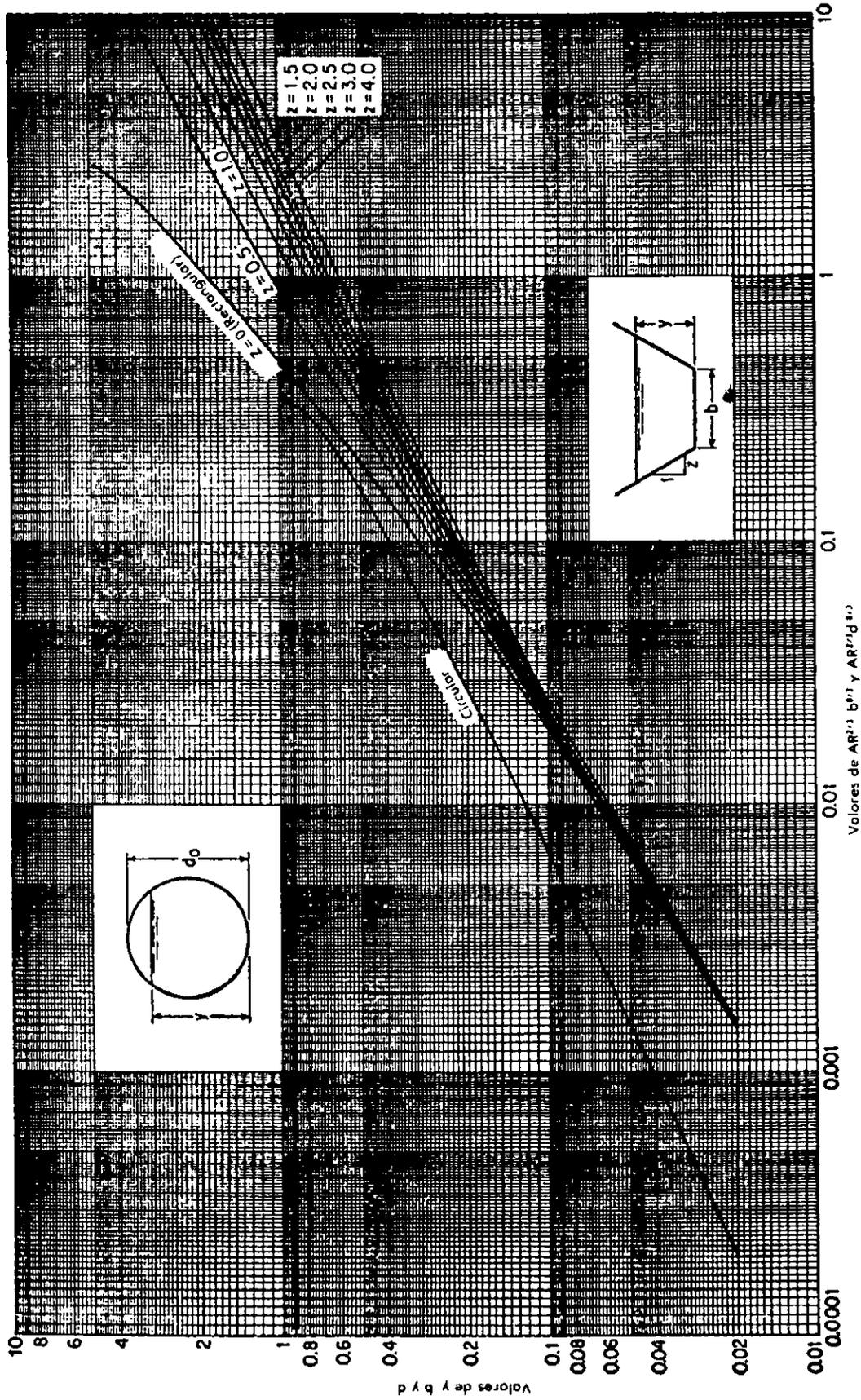
Por esta razón, la presión calculada por la ec. (A.4-1) o (A.4-2) se ha visto en algunos casos que es más alta que la presión medida y obtenida por ensayos de modelos. Si la densidad media de la mezcla aire-agua, es conocida, debería ser utilizada para reemplazar la densidad de agua pura en el cálculo cuando se espera tener aire arrastrado. La densidad real de la mezcla varía desde el fondo a la superficie del flujo. Para propósitos prácticos, sin embargo, la densidad se puede suponer constante; esta hipótesis de aire arrastrado uniforme en la sección transversal simplificará los cálculos.

CUADRO III-1 CURVAS PARA DETERMINAR LA PROFUNDIDAD CRITICA





CUADRO IV-1 CURVAS PARA DETERMINAR LA PROFUNDIDAD NORMAL





### A.7 CARACTERISTICAS DEL ESCURRIMIENTO EN UN CONDUCTO CERRADO CON FLUJO EN CANAL ABIERTO

Tomando la sección circular como ejemplo, se muestran las curvas adimensionadas para  $AR^{2/3}A_0R_0^{2/3}$  y  $R^{2/3}R_0^{2/3}$  en las líneas continuas en la fig. A.7-1. El subíndice cero indica la condición del flujo lleno. Si el valor de  $n$  se supone constante o independiente de la variación de profundidad, estas dos curvas representarán la variación de las relaciones de la descarga y velocidad a sus correspondientes valores para flujo lleno (por ejemplo  $Q/Q_0$  y  $V/V_0$ ). Ambas las curvas de descarga y velocidad muestran valores máximos, los cuales ocurren a aproximadamente  $0.938d_0$  y  $0.81d_0$  respectivamente. Matemáticamente, la profundidad para el caudal máximo, ó  $0.938d_0$ , puede ser obtenida simplemente igualando a cero la primera derivada de  $AR^{2/3}$  con respecto a  $y$ , ya que el caudal calculado por la fórmula de Manning es proporcional a  $AR^{2/3}$  para  $n$  y  $S$  constantes. Similarmente, conforme o mientras la velocidad por la fórmula de Manning es proporcional a  $R^{2/3}$ , la profundidad para la velocidad máxima ó  $0.81d_0$ , puede ser obtenida igualando la primera derivada de  $AR^{2/3}$  a cero. Más aún, la curva adimensionada de  $Q/Q_0$  muestra que, cuando la profundidad es más grande que alrededor de  $0.82d_0$ , es posible tener dos profundidades diferentes para la misma descarga, uno arriba y otro abajo del valor de  $0.938d_0$ . En forma similar, la curva  $V/V_0$  muestra que, cuando la profundidad es más grande que la profundidad media, es posible tener dos profundidades diferentes para la misma velocidad, una arriba y otra abajo del valor de  $0.81d_0$ .

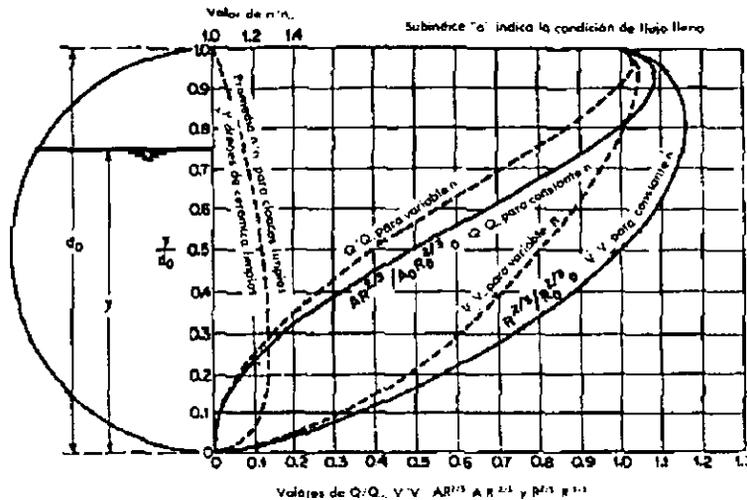


FIG. A.7-1 CARACTERISTICAS DEL FLUJO DE UNA SECCION CIRCULAR

La discusión anterior se basa sobre la hipótesis de que el coeficiente de rugosidad permanece constante conforme la profundidad cambia. El valor de  $n$  para un promedio de colectores limpios y drenes de cerámica, ambos arcilla y hormigón, por ejemplo, que aumenta 28% desde  $1.00d_0$  hasta  $0.25d_0$ , donde parece alcanzarse el máximo (ver fig. A.7-1). Este efecto da lugar a que las máximas descargas y velocidades ocurran a profundidades alrededor de  $0.97d_0$  y  $0.94d_0$ , respectivamente. Las correspondientes curvas de  $Q/Q_0$  y  $V/V_0$  se indican con curvas quebradas en la fig. A.7-1. De acuerdo a la hipótesis de un valor  $n$



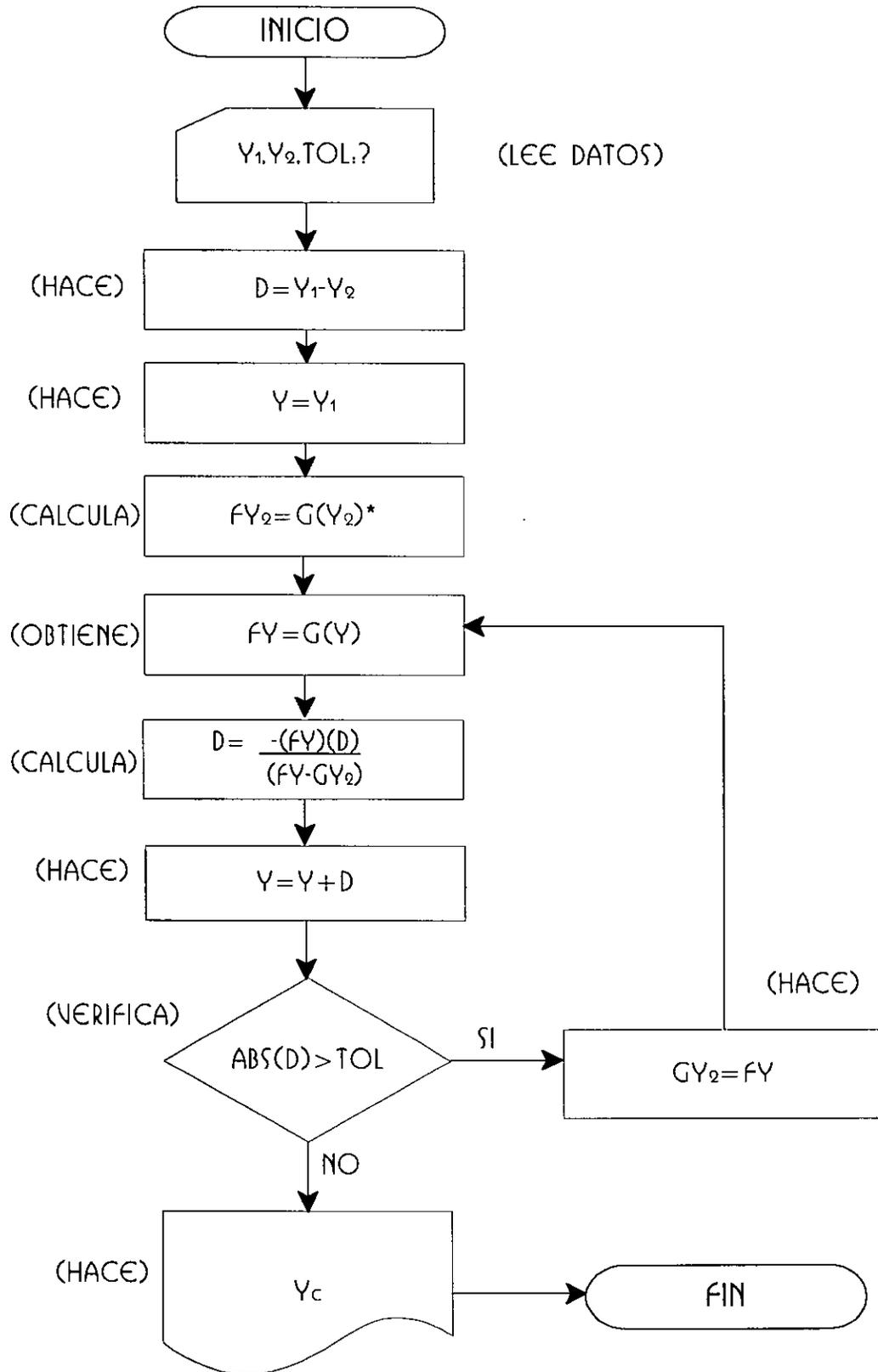
constante, la velocidad podría ser la misma para una tubería llena hasta la mitad como para una tubería llena totalmente; mientras que, si el valor  $n$  es considerado variando con la profundidad, se indica, la velocidad para la profundidad media la cual es sólo 0.8 de la velocidad completa. En resumen la fig. A.7-1 nos sirve para estimar la velocidad máxima con relación al diámetro para una sección circular.

La discusión para el conducto circular se aplica también a cualquier conducto cerrado llenándose. Las profundidades exactas para caudales y velocidades máximas, sin embargo, dependerán de la variación de la forma y de la rugosidad de la sección del conducto. Ya que las velocidades y caudales máximos de un conducto cerrado, no ocurren cuando está lleno, esto significa que el conducto no escurrirá lleno para la máxima capacidad siempre y cuando se mantenga como flujo en canal abierto sobre una pendiente uniforme libre de obstrucciones. Para propósitos prácticos, sin embargo, puede a veces asumirse, que la descarga máxima de un conducto circular o conducto cerrado similar llenándose, ocurre con la máxima profundidad, ya que la profundidad para máxima descarga es tan cercana al límite superior que existe siempre una posibilidad de pequeños remansos que incrementan esta profundidad más cerca y eventualmente igualan a la profundidad total o diámetro.



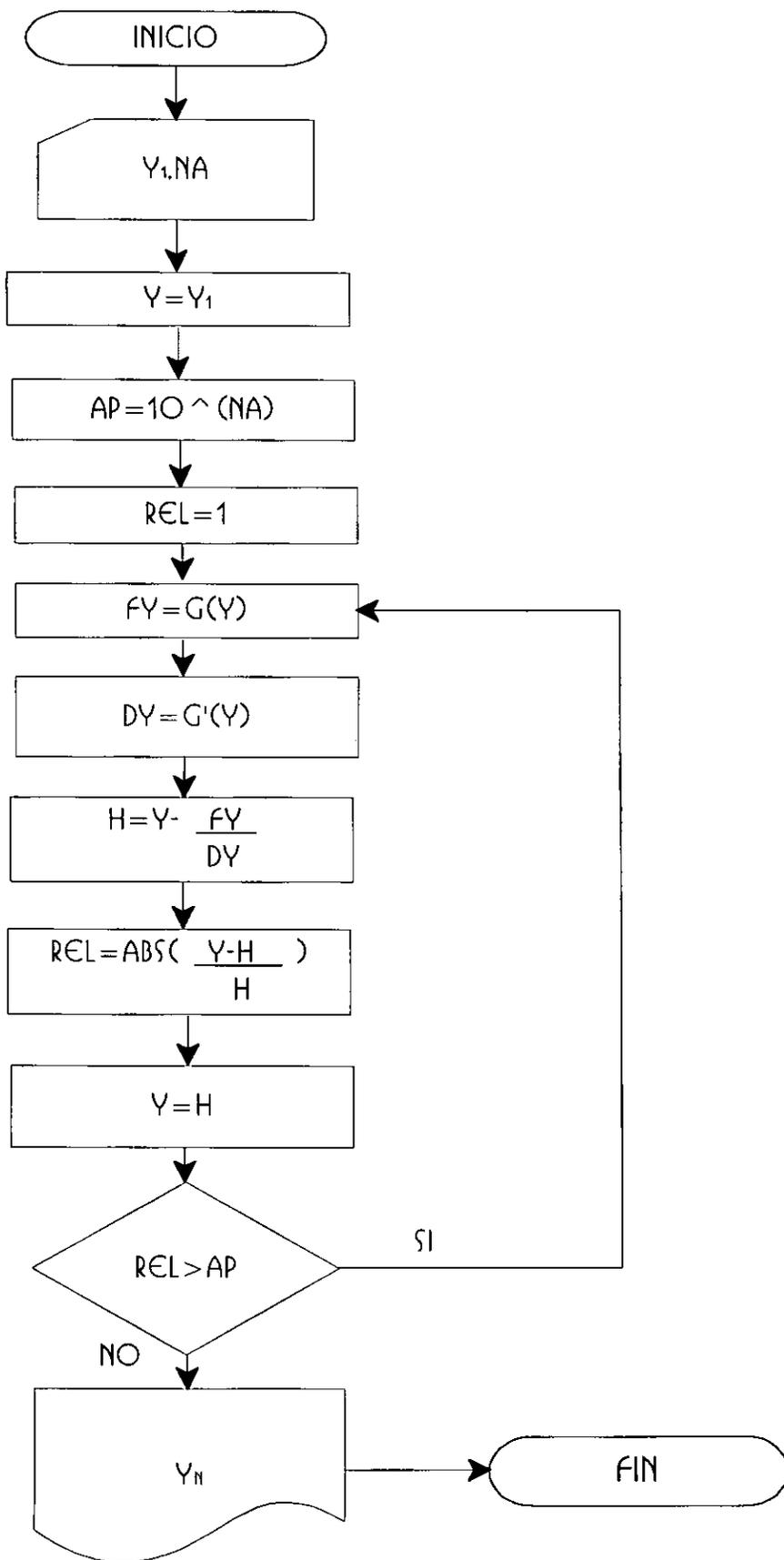
FIGURA	SIGNIFICADO	FIGURA	SIGNIFICADO
	Principio del programa		Fin del diagrama
	Operación algebraica		Conector
	Decisión numérica		Conector de cambio de página
	Lectura de datos por tarjeta		Decisión lógica
	Resultados por impresora de líneas		Entrada de información por cualquier medio
	Entrada y salida inmediata de información		Salida de información por cualquier medio
	Operación repetitiva o cíclica		Operación repetitiva o cíclica

SIMBOLOGIA EMPLEADA EN LOS DIAGRAMAS DE FLUJO

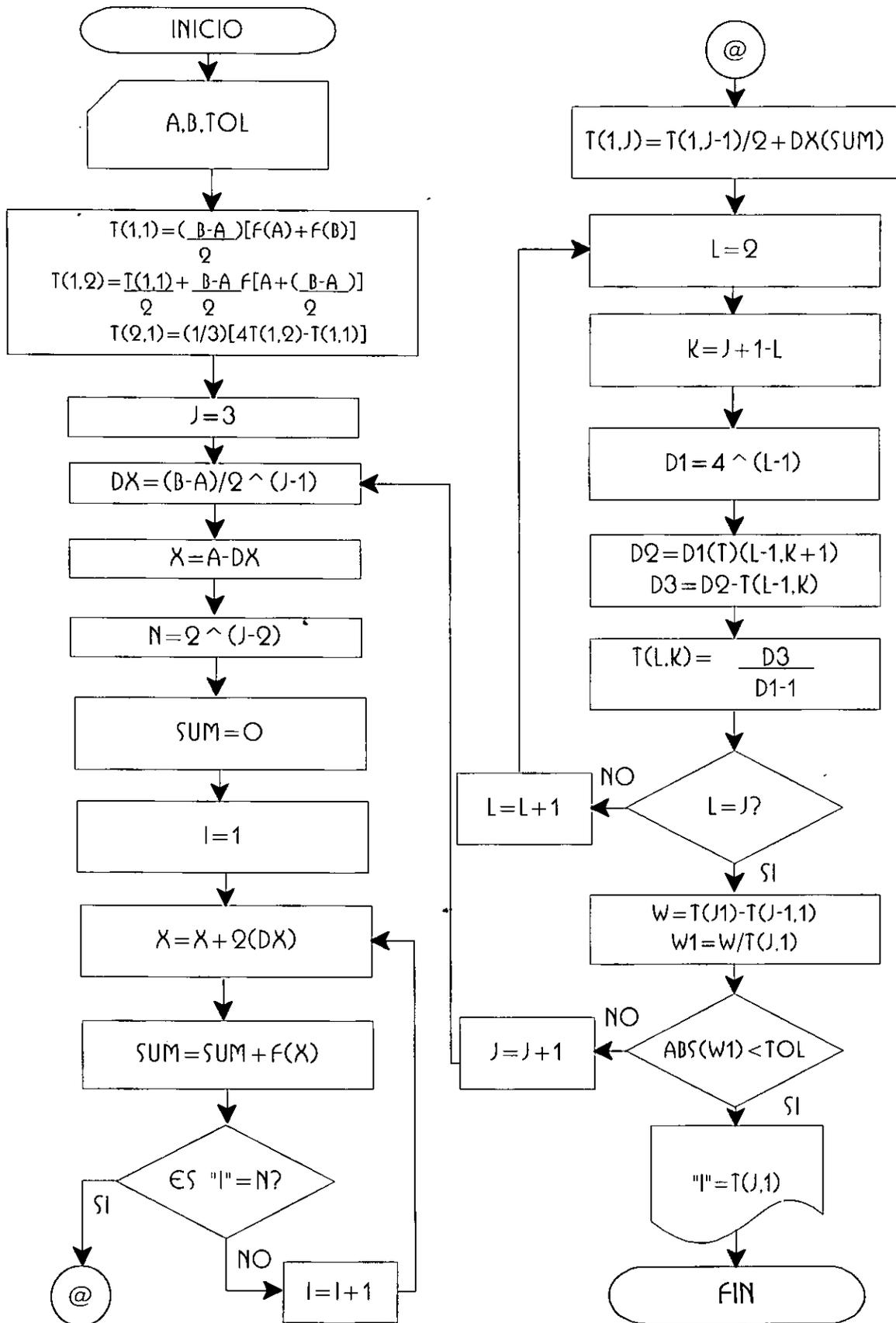


**METODO DE LA SECANTE**

\*G(Y<sub>2</sub>) ECUACION DEL FLUJO CRITICO



METODO DE NEWTON-RAPHSON



METODO DE ROMBERG