

33
2es.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

CAMPUS ACATLAN

TEORIA DE WAVELETS, UNA
ALTERNATIVA



T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIATURA EN MATEMATICA
APLICADA Y COMPUTACION
P R E S E N T A :
PINEDA CABALLERO ARELI ROCIO



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

264625



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A Dios

Por darme la oportunidad de vivir y disfrutar las maravillas de tu creación. Por el inmenso amor que siempre me has brindado, por darme la paz interior necesaria en los momentos difíciles. Pero sobretodo Señor, por darme todo lo que poseo sin cuestionar si soy o no digna de ello ...

Gracia.

A mis Padres

Adela Caballero

Por ser mi mayor fuente de inspiración, mi mejor amiga y la persona a la que más admiro, por tu amor incondicional y sin límites. Por tu constante motivación, por estar siempre a mi lado sin esperar nada a cambio, sólo mi felicidad. Gracias por enseñarme que la vida es una lucha continua a la que debemos enfrentarnos sin miedos y con la frente en alto. Y no olvides que mis éxitos son el resultado de tus éxitos. Te amo Mamá.

Fernando Pineda

*Por tu apoyo, por haber recibido de ti la herencia
más importante y valiosa en la vida: mi educación.*

Te agradezco todos tus esfuerzos.



A mis Hermanas

Adela Marina

*Por tu voto de confianza en cualquier momento, por
aligerarme los instantes difíciles, por tus consejos
oportunos, por tu protección y por todo lo que hemos
compartido desde nuestra infancia. Pero sobretodo,
por ser un ejemplo a seguir y por enseñarme que soy
un ser completo. Gracias.*



Amanda Viridiana

*Por permitirme disfrutar de momentos inolvidables,
por ser una persona con un gran potencial que sabe
que los límites no existen y que no se deja vencer. Por
tu constante superación y motivación, que son un
aliciente para mi.*



*A mi Mami Carmen Duran y a mi Papá Javier
Caballero*

*Por ser una parte importante de mi familia, por creer
en mi, por darme todo su amor y por ayudarme
siempre que a ustedes he recurrido.*



A Gabriel Camacho

*Por tu amistad incondicional, por venir a darle a mi
vida un giro de ciento ochenta grados. Porque de ti
aprendí a disfrutar la vida y muchas cosas más. Y
especialmente gracias, no sólo por ser mi amigo sino
por ser más que eso. Te quiero mucho.*



A Florencio Lugo

*Por ser un excelente amigo, una persona admirable y
primordialmente por confiar en mi.*



A Luis F. P. Troconis

*Por ser una persona tan linda y noble, en cuyo
corazón no existe la soberbia y si la humildad, de
quien he aprendido eso y mas. Gracias por tu
amistad.*



A Saúl Villagómez

*Porque has dejado una huella imborrable en mi vida,
por ser además de un buen amigo un buen consejero.*

Te quiero.



A mis amigos y compañeros

*Por lo momentos inolvidables e irrepetibles que
hemos vivido, y por permitirme aprender de todos
ustedes.*



A la Universidad Nacional Autónoma de México

Por permitirme ser parte de la máxima casa de estudios. Por proporcionarme más allá de los elementos necesarios para mi formación profesional, y por ser la Institución de mayor prestigio en Latinoamérica. Gracias.



Al M. en I. Víctor J. Palencia Gómez

Por ser más que un maestro, un amigo que me escucha cuando más lo necesito, por sus sabios consejos. Por darme lo más valioso que los seres humanos tenemos, la experiencia. Por el tiempo dedicado a este trabajo, que es el resultado de una ardua jornada, en la cual usted me ayudó a vencer miedos y superar obstáculos, esta obra, también es su obra. Gracias.



A la M. Beatriz E. Clavel Díaz

Por dejar en mi algo más que sus conocimientos, por la fe que en mi a puesto y por su amistad.



A la m. Nora del C. Goris Mayan

*Por su cariño, por su enorme vocación docente y por
el gran amor que le tiene a su profesión.*



A mi Respetable Jurado

M. en I. Víctor J. Palencia Gómez.

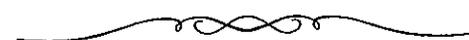
Fís. Ramón Martínez Maldonado.

Fís. Mat. Jorge Luis Suárez Madariaga.

Fís. Manuel Valadez Rodríguez.

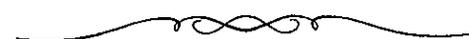
Ing. Nora del C Goris Mayan.

*Por el tiempo dedicado a este trabajo y muy
particularmente por lo conocimientos que aportan a
la formación de profesionistas, es el mejor regalo que
los estudiantes podemos recibir.*



A todos mis Profesores

*Porque en mi dejaron un enorme legado, sus
conocimientos, porque son parte importante de mi
formación académica y profesional.*



ÍNDICE

Objetivo	IV
Introducción	V
1. Transformada Wavelet Continua.	1
1. 1. Transformada Wavelet.	1
1. 1. 1. Obtención de la Transformada Wavelet.	3
1. 2. Señales y Frecuencias.	11
1. 3. Wavelets y su Distribución de Probabilidad. Un Ejemplo.	14
1. 4. Unidades de Resolución.	16
1. 5. Marcos Generalizados.	19
1. 5. 1. Obtención de Marcos.	20
1. 5. 2. Condición de Consistencia.	24
1. 5. 3. ¿ Por qué Marcos y no Bases ?.	28
1. 5. 4. Obtención Recursiva.	31
1. 6. Marcos Discretos.	32

2. Análisis y Muestreo de Señales en Dominios Discretos.	39
2. 1. Teorema de Shannon.	39
2. 2. Muestreo en Tiempo y Frecuencia.	42
2. 2. 1. Muestreo en el Tiempo y Muestreo en Tiempo y Frecuencia.	53
2. 2. 2. Submarcos Discretos en Tiempo y Frecuencia.	56
2. 3. Ortogonalidad.	66
3. Marcos Discretos.	69
3. 1. Muestreo en la Escala del Tiempo.	69
3. 2. Marcos Discretos con Wavelets de Banda Limitada.	71
3. 3. Otros Marcos Discretos.	84
4. Análisis de Resolución Múltiple.	91
4. 1. Análisis de Resolución Múltiple.	91
4. 2. Esquemas de Filtros de Subbandas.	100
4. 3. Dominio de Frecuencia.	119
4. 3. 1. Inverso Simétrico de la Frecuencia y Estructura Compleja.	126
4. 4. Conjunto de Wavelets.	131
4. 5. Construcción de Filtros de Impulso de Respuesta Finita.	135
4. 5. 1. Obtención Recursiva de ϕ e Interpolación Bivalente.	135
4. 6. Método de Acumulación.	139
5. Aplicaciones del Análisis con Base en la Teoría de Wavelets.	149
5. 1. Compresión de Imágenes con Wavelets.	149

5. 1. 1. Detección de Líneas en Escalas Múltiples de una Transformada Wavelet.	151
5. 1. 2. Reconstrucción de Imágenes a partir de Líneas en Escalas Múltiples.	156
5. 1. 3. Compactación de Líneas.	161
5. 1. 4. Error de Codificación de Imagen.	163
5. 2. Wavelets Acústicas.	178
5. 2. 1. Construcción de Wavelets Acústicas.	178
5. 2. 2. Emisión Absorción y Curso.	184
5. 3. Aplicación de Wavelets a Radares y Dispersión de Señales.	204
5. 3. 1. Funciones Indeterminadas para Señales en el Tiempo.	204
5. 3. 2. Dispersión de Wavelets Electromagnéticas.	219
Conclusiones.	230
Bibliografía.	232

OBJETIVO

- Presentar el Análisis con base en la Teoría de Wavelets como una teoría Alternativa al Análisis de Fourier.
- Difundir y promover el estudio de la Teoría de Wavelets dentro de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación.

INTRODUCCIÓN

La transformada de Fourier ha sido usada durante muchos años, como una herramienta eficaz para el análisis de señales. Es considerada una parte fundamental del análisis moderno de señales que ha demostrado una increíble versatilidad de aplicación, pues es usada desde para reconocer señales, hasta procesar imágenes. Pero no debemos olvidar sus limitaciones. En años recientes surge la Transformada Wavelet, la cual ha demostrado ser tan potente y versátil como la transformada de Fourier, solo que sin las limitaciones que ésta presenta.

A diferencia del análisis de Fourier, el análisis con base en la teoría de wavelets, no hace uso de curvas seno y coseno, solo llama a las curvas wavelets. Este trabajo es parte del campo del análisis armónico y aporta una familia de wavelets, las cuales son más eficientes para modelar fenómenos complejos.

Dentro del análisis de Fourier, una función en el dominio del tiempo es trasladada al dominio de la frecuencia, donde es analizada por el contenido de su frecuencia. Esto es porque la transformada de Fourier expresa la función original en términos de funciones que pertenecen a una base ortonormal de curvas de senos y cosenos de duración infinita. Los coeficientes de Fourier de la función transformada, representan la contribución de cada curva seno o coseno en cada frecuencia.

La transformada de Fourier trabaja bajo el supuesto de que las funciones originales pertenecen al dominio del tiempo y son periódicas por naturaleza, por lo que al no contar con este tipo de funciones, trabajar con la transformada de Fourier se vuelve engorroso, y no aporta información referente a la traslación de la señal.

La transformada wavelet, traslada una función que se encuentra en el dominio del tiempo a una representación no sólo en la frecuencia, sino también en el tiempo. Esto gracias a que sus bases no necesariamente tienen que ser de duración finita, y para rangos pequeños, pueden ser diferentes de cero.

El análisis wavelet se inicia con dos funciones fundamentales: La función de escala $\phi(t)$ y la wavelet madre $\psi(t)$. Ambas utilizan dos escalas y son el prototipo de una clase de bases ortonormales, $\phi_{j,k}(t)$ y $\psi_{j,k}(t)$, donde j controla la dilatación o compresión de la función en el tiempo y la amplitud, mientras que k controla la traslación en el tiempo, lo que conduce a afirmar que el conjunto de bases formadas por $\phi(t)$ y $\psi(t)$ es un sistema de escalación y traslación.

Al igual que en el análisis de Fourier, contamos con coeficientes de expansión, los cuales representan la aproximación a la señal, con una resolución de 2^j puntos de la señal original.

La transformada wavelet puede ser implementada con dos filtros especiales: Filtro de Impulso de Respuesta Finita y Filtro de Imagen Cuadrática, el primero transforma el producto interno en filtros de coeficientes y muestras discretas, lo que nos permite obtener la señal original a partir de un muestreo discreto y finito. El segundo, toma las muestras y selecciona sólo aquellas que pueden ser incluidas en un espacio dual; al resto las descarta. Esta operación puede llevarse a cabo en un algoritmo recursivo, ya que el filtro de imagen cuadrática divide el espectro de la señal original en bandas de octavas con alargamientos en el tiempo, generando así esquemas de filtros de subbandas.

Ambos filtros dan paso al Análisis de Resolución Múltiple, cuyo principal objetivo es obtener una copia de la señal original, la cual sea lo más fiel posible. Esto se logra gracias a que el análisis de resolución múltiple divide el dominio de la frecuencia en octavas, y no en bandas lineales de igual ancho, como sucede en el análisis de Fourier.

Puesto que no tendría caso utilizar un análisis alternativo a Fourier, si nuestro problema tiene solución con el análisis de Fourier, el presente trabajo, sólo desea exponer un análisis alternativo a éste, ya que como antes se mencionó, dentro del análisis de

Fourier si no se cuenta con una señal con ciertas características no llegaremos muy lejos. El análisis wavelet es sólo una de muchas alternativas. No pretendemos decir que es la panacea, ya que eso sólo el lector lo decidirá.

No podemos hacer a un lado el análisis de Fourier, pues el análisis wavelet es resultado de un híbrido de la teoría de wavelets y la transformada de Fourier con ventana.

Concluamos pues, diciendo que el análisis wavelet nos permite ir más allá del análisis de Fourier, ya que si éste no nos permite solucionar el problema planteado, el análisis wavelet puede ser una opción.

El presente trabajo consta de cinco capítulos, donde los cuatro primeros presenta toda la construcción del análisis wavelet y el último capítulo muestra como lo visto en los primeros puede tener una aplicación real.

En el capítulo 1, se presenta la Transformada Wavelet Continua como una herramienta eficiente que supera los inconvenientes de la modulación correspondiente a la Transformada de Fourier para la caracterización de señales de intervalos muchos más grandes o mucho más pequeños que el ancho de la ventana. Se muestra como la teoría general no está aislada y forma parte de una estructura general y, como consecuencia, pueden ser demostrados ciertos teoremas, fórmulas de reconstrucción, condiciones de consistencia y aproximaciones por mínimos cuadrados para marcos generalizados y esto se extiende a diferentes ámbitos. También se muestra cómo la teoría de marcos generalizados proporciona una herramienta por la cual diferentes análisis, como el análisis wavelet, pueden ser desarrollados estudiados y comparados.

En el capítulo 2, se desarrolla una formulación para la construcción de señales que utiliza solamente un subconjunto discreto de la transformada, lo cual permite ignorar elementos con parámetros demasiado grandes en el tiempo o en la frecuencia. Se desarrolla también un método para procesar el espectro de frecuencias de una señal por medio de subbandas. Se construye una fórmula de reconstrucción usando sólo un subconjunto discreto de notas. Aunque esta reconstrucción es redundante, es más eficiente y puede ser aproximada numéricamente ignorando notas con parámetros de tiempo o

frecuencia muy grandes. Asimismo, se demuestra el teorema de Shannon, en el cual se basa la tecnología digital de audio.

Ya en el capítulo 3, se estudia el análisis de marcos discretos por medio de wavelets y se muestra que, en este caso, las frecuencias correspondientes a bandas adyacentes del espacio de frecuencias están relacionadas entre sí por una razón constante, lo que da origen a la reconstrucción de la transformada wavelet discreta. De aquí se demuestra que la familia de wavelets discretas es un submarco discreto del marco continuo y la función de coeficientes discretos es una muestra de la función de coeficientes continuos.

En el capítulo 4, se desarrolla la teoría del método de Análisis de Resolución Múltiple. Se muestra que este método es recursivo y consecuentemente ideal para ser implementado como un proceso computacional, además de que permite que la señal original puede ser reconstruida con tanto nivel de detalle y suavidad como se desee. Se hace ver que las wavelets construidas por este método aparte de formar un marco también forman una base ortonormal, lo que permite reconstruir la señal de forma eficiente. Esto conduce a nuevos algoritmos, los cuales hacen uso de filtros que junto con las ecuaciones de dilatación, determinan las funciones de escalación en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo. Ya en la última parte de este capítulo, se muestra como el método de acumulación proporciona un esquema alternativo para la construcción de filtros.

El capítulo 5, presenta tres aplicaciones del Análisis con Base en la Teoría de Wavelets. Se muestran las ventajas y desventajas de usar wavelets en cada una de las aplicaciones. La primera de ellas se refiere a la compresión de imágenes. El algoritmo presentado separa las líneas de la textura, lo que nos permite adaptar la precisión de la codificación a las propiedades de las percepciones visuales del hombre. Se codifica el error, y se observa que éste presenta esencialmente información sobre la textura, la cual se codifica con una base wavelet ortonormal.

La segunda es una aplicación de wavelets acústicas donde se construye un grupo adaptado que transforma las ondas acústicas, lo que hace que haya un marco de referencia único. También se construye una familia de parámetros wavelets no unitarios,

cada uno de los cuales cuenta con su propia unidad de resolución. Y se termina demostrando que todas las wavelets acústicas, construidas bajo los criterios aquí planteados, se pueden separar en dos partes una de absorción y otra de emisión.

Finalmente en el tercer apartado de este capítulo se trata la aplicación de wavelets a radares y dispersión de señales. El objetivo es obtener información acerca de un objeto a través de analizar las ondas electromagnéticas reflejadas por éste. Además de la información visual que se obtiene de analizar el espectro visible, es posible localizar el objeto si se mide el tiempo que transcurre entre la emisión y su detección.

1. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA.

*Todos somos seres enteros y no
necesitamos perseguir nada con
el fin de estar completos, sólo
necesitamos transformarnos.*

Wayne W. Dyer

1. 1. Transformada Wavelet.

La transformada Wavelet surge a partir de buscar un método que permita procesar una señal, sin necesidad de perjudicar la escala. El análisis wavelet es un método de escala independiente. Inicia con una función ventana de valor complejo $\psi(u)$, llamada Wavelet Madre o Wavelet Básica la cual proporciona una escala al análisis, lo que permite usar escalas de ψ y no necesariamente ψ . Esto es gracias a que para una $p \geq 0$ y $s \neq 0$ (para s real), tenemos que:

$$\psi_s(u) \equiv |s|^{-p} \psi\left(\frac{u}{s}\right) \quad (1)$$

Ahora bien, si $s > 1$, entonces $\psi_s(u)$ es una versión extendida de ψ sobre el eje u . Por lo que respecta a $0 < s < 1$, ψ_s se reduce sobre el mismo eje. Si $s = -1$, ψ_s es un reflejo de ψ , y si $-1 < s < 0$, ψ_s es un reflejo reducido de ψ . Finalmente, si $s < -1$, tenemos que ψ_s es un reflejo extendido sobre el eje horizontal de ψ . De aquí en adelante para referirnos a s , lo haremos como factor de escala.

Así como s es el factor de escala del eje horizontal, $|s|^{-p}$ es el del eje vertical. Si $p > 0$, ψ se comprime sobre el eje vertical, siempre que ψ se haya extendido sobre el eje horizontal y se extiende sobre el eje vertical si se redujo en el horizontal¹.

Para localizar una señal cualquiera ψ , es necesario observar sus traslaciones ψ_s . Si ψ es válida dentro de un intervalo de longitud T cerca de $u = 0$, entonces $\psi_s(u)$ es válida en un intervalo de longitud $|s|T$, cerca de $u = 0$ y la función:

$$\psi_{s,t}(u) \equiv \psi_s(u-t) = |s|^{-p} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right) \quad (2)$$

es válida en un intervalo de longitud $|s|T$ cerca de $u = t$.

Asumiendo que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ entonces $\psi_{s,t}$ también pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, ya que:

$$\|\psi_{s,t}\|^2 = |s|^{-2p} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{u-t}{s}\right) \right|^2 du = |s|^{1-2p} \|\psi\|^2 \quad (3)$$

Las funciones $\psi_{s,t}$ son las wavelets generadas por ψ y juegan un papel similar al de las notas $g_{w,t}(u)$ dentro de la transformada de Fourier con ventana. La transformada Wavelet Continua de una señal $f(t)$ se define como:

$$\tilde{f}(s,t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{s,t}}(u) f(u) du = \langle \psi_{s,t}, f \rangle = \psi_{s,t}^* f \quad (4)$$

El producto interno existe si $\psi_{s,t}$ y f pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$.

¹ Si $p=1$, la integral $\int |\psi(u)| du$ no se ve afectada por el factor de escala. Si $p=1/2$, sí se afecta la integral, pero no a $L^2(\mathbb{R})$, es decir, $\|\psi_s\| = \|\psi\|$. Por lo que el valor de p es irrelevante dentro de la teoría básica.

La transformada Wavelet $\tilde{f}(s,t)$ se puede entender como una interpretación directa, dependiendo de la wavelet usada, de una función de t para un valor s , la cual representa una parte de la señal en la escala de s .¹

1. 1. 1. Obtención de la Transformada Wavelet.

Nuestro principal objetivo es obtener $f(u)$ y esto es posible a partir de su Transformada Wavelet Continua $\tilde{f}(s,t)$. Aplicando la identidad de Parseval a la expresión (4), tenemos:

$$\tilde{f}(s,t) = \langle \psi_{s,t}, f \rangle = \langle \hat{\psi}_{s,t}, \hat{f} \rangle \quad (5)$$

y obteniendo:

$$\hat{\psi}_{s,t}(\omega) = |s|^{1-p} e^{-2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega) \quad (6)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s,t) &= |s|^{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= |s|^{1-p} \left(\overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) \right)^{\vee} (t) \end{aligned} \quad (7)$$

Obsérvese que $\tilde{f}(s,t)$ es la inversa de la transformada de Fourier de $\overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{f}(\omega)$ con respecto a ω y s como parámetro. Aplicando la transformada de Fourier en ambos lados de la igualdad tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} \tilde{f}(s,t) dt = |s|^{1-p} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) \quad (8)$$

¹ El uso de escalas y traslaciones fue propuesto por Morlet en 1983.

De aquí podemos obtener $f(t)$, a partir de $\hat{f}(\omega)$. Para realizar esto necesitamos una función de peso $W(s)$, la cual no conocemos, pero será determinada durante el proceso de obtención de $f(t)$.

Más adelante, cuando estudiemos el caso discreto, tendremos que separar las escalas en positivas ($s>0$) y negativas ($s<0$). Por lo que desde este momento integraremos sólo sobre $s>0$. Ahora bien, por la expresión (8), tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} W(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \hat{\psi}(s\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds &= \\ &= \int_0^{\infty} W(s) s^{1-p} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 \hat{f}(\omega) ds \end{aligned} \quad (9)$$

Si definimos:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} W(s) s^{1-p} |\hat{\psi}(s\omega)|^2 ds$$

y asumiendo que $Y(\omega)$ y su recíproco son constantes, tales que:

$$A \leq Y(\omega) \leq B \quad (10)$$

Para cualesquiera A, B con $0 < A \leq B < \infty$, por (9):

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= Y(\omega)^{-1} \int_0^{\infty} W(s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \hat{\psi}(s\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds = \\ &= Y(\omega)^{-1} \int_0^{\infty} W(s) s^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \hat{\psi}_{s,t}(\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds = \\ &= \int_0^{\infty} W(s) s^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} \hat{\psi}^{s,t}(\omega) \tilde{f}(s, t) dt ds \end{aligned} \quad (11)$$

donde se ha definido un nuevo conjunto de wavelets $\psi^{s,t}(u)$ a través de sus transformadas de Fourier $\hat{\psi}^{s,t}(u)$:

$$\hat{\psi}^{s,t}(\omega) \equiv Y(\omega)^{-1} \hat{\psi}_{s,t}(\omega) = s^{1-p} Y(\omega)^{-1} e^{-2\pi i \omega s} \hat{\psi}(s\omega) \quad (12)$$

Obsérvese que:

$$|\hat{\psi}^{s,t}(\omega)| \leq A^{-1} |\hat{\psi}_{s,t}(\omega)| \quad (13)$$

y además, por (10), (3) y que $\hat{\psi}^{s,t}(u) \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$\|\psi^{s,t}\|^2 \leq A^{-2} \|\psi_{s,t}\|^2 = |s|^{1-2p} A^{-2} \|\psi\|^2 \quad (14)$$

En el dominio del tiempo las nuevas wavelets tienen la forma:

$$\begin{aligned} \psi^{s,t}(u) &= s^{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega u} Y(\omega)^{-1} \hat{\psi}(s\omega) d\omega \equiv \\ &\equiv \psi^s(u-t) \end{aligned} \quad (15)$$

donde:

$$\begin{aligned} \psi^s(u) &\equiv s^{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega u} Y(\omega) \hat{\psi}(s\omega) d\omega = \\ &= s^{-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega u} Y\left(\frac{\omega}{s}\right)^{-1} \hat{\psi}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (16)$$

Ahora la señal original se puede obtener de tomar la transformada inversa de Fourier de (11):

$$f(u) = \int_0^{\infty} W(s) s^{p-1} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{s,t}(u) \tilde{f}(s,t) dt ds \quad (17)$$

f es una superposición de los nuevos vectores $\psi^{s,t}$, con $\tilde{f}(s,t)$ como coeficientes de la función.

Usar $f(u)$ no es muy conveniente, ya que requiere que se obtenga la nueva familia de vectores $\psi^{s,t}$. Un punto a su favor podría ser el hecho de obtener a toda la familia de vectores a partir de una sola wavelet madre por medio de traslaciones y dilataciones, como se hizo con las wavelets originales $\psi_{s,t}$. Para ello será necesario obtener la nueva wavelet y generar la nueva familia. Si retomamos la expresión (15), veremos que ahí hemos manejado la traslación, por lo que nos enfocaremos a la dilatación.

Por la expresión (16) sabemos que una condición suficiente para que la nueva familia tenga una wavelet madre es que:

$$Y\left(\frac{\omega}{s}\right) = Y(\omega) \text{ para casi toda } \omega \in \mathbb{R}, s > 0 \quad (18)$$

donde $\psi^s(u) = \psi^1\left(\frac{u}{s}\right)$ y por (16):

$$\psi^{s,t}(u) = s^{-p} \psi^1\left(\frac{u-t}{s}\right) \quad (19)$$

donde $\psi^1 = \psi^s$ con $s=1$. La ecuación (18) sugiere que $Y(\omega)$ sea constante para $\omega < 0$ y $\omega > 0$, aunque no necesariamente igual. Con lo anterior ya podemos elegir una función de peso $W(s)$ que permita fijar el valor de (18). Como ω está dentro de la definición de $Y(\omega)$, en el producto $s\omega$, es necesario que:

$$W(s)s^{1-p}ds = \frac{ds}{s} \quad (20)$$

Esto porque, para toda $\omega > 0$ el intercambio de variable $s\omega = \xi$ permite que:

$$Y(\omega) = \int_b^\infty \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = \int_b^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \equiv C_+ \quad (21)$$

siguiendo el mismo procedimiento para $\omega < 0$, el cambio de variable $s\omega = -\xi$ da:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(s\omega)|^2}{s} ds = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} d\xi \equiv C_- \quad (22)$$

La expresión (10) es válida para toda $\omega \neq 0$ si y sólo si:

$$0 < C_{\pm} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\pm\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty \quad (23)$$

la cual es la condición para que la Wavelet Madre sea aceptada. Obsérvese que la función $W(s)$ elegida para (20), $W(s) = s^{p-2}$, garantiza la existencia de una wavelet madre para la nueva familia y además hace que $Y(\omega)$ sea constante, lo que simplifica la obtención de ψ .

Con $s = 1$ la expresión (16) es ahora:

$$\begin{aligned} \psi^1(u) &= C_-^{-1} \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(\omega) d\omega + C_+^{-1} \int_0^{\infty} e^{2\pi i \omega u} \hat{\psi}(\omega) d\omega = \\ &= C_-^{-1} \psi_-(\omega) + C_+^{-1} \psi_+(\omega) \end{aligned} \quad (24)$$

donde ψ_{\pm} son las frecuencias¹ positivas y negativas de ψ , las cuales surgen de tomar la inversa de la transformada de Fourier de $\hat{\psi}(\omega)$ en los intervalos positivo y negativo. ψ^1 es la inversa de la wavelet madre ψ , y consecuentemente $\{\psi^{s,t}\}$ la familia de wavelets inversas a $\{\psi_{s,t}\}$.

¹ ψ_{\pm} son también conocidas como funciones analíticas de ψ .

Teorema 1.

Sea ψ válida para la expresión (23), y sea $\{\psi^{s,t}\}$ la familia de wavelets inversas a $\{\psi_{s,t}\}$. Entonces cualquier señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede obtenerse de su transformada wavelet continua $\tilde{f}(s,t) = \psi_{s,t}^* f$:

$$f(u) = \int_0^\infty s^{2p-3} \int_{-\infty}^\infty \psi^{s,t} \tilde{f}(s,t) dt ds \quad (25)$$

que proporciona una unidad de resolución en $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_0^\infty s^{2p-3} \int_{-\infty}^\infty \psi^{s,t} \psi_{s,t}^* dt ds = I \quad (26)$$

Demostración. Sustituyendo $\tilde{f}(s,t) = \psi_{s,t}^* f$ en (25), tenemos que:

$$f(u) = \int_0^\infty s^{2p-3} \int_{-\infty}^\infty \psi^{s,t} \psi_{s,t}^* f(u) dt ds$$

Pero $I f(u) = f(u)$, por lo que:

$$I f(u) = \int_0^\infty s^{2p-3} \int_{-\infty}^\infty \psi^{s,t} \psi_{s,t}^* f(u) dt ds$$

factorizando $f(u)$:

$$I = \int_0^\infty s^{2p-3} \int_{-\infty}^\infty \psi^{s,t} \psi_{s,t}^* dt ds \quad \blacklozenge.$$

Si ψ es tal que $C_- = C_+ = C/2$, entonces (24) es $\psi^1 = \left(\frac{2}{C}\right)\psi$, lo que no implica obtener ψ^1 a menos que se desee obtener C . Esto sólo se presenta cuando $\psi(t)$ es real y $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$. Aunque es conveniente usar wavelets cuya transformada de Fourier no sea

válida para $\omega < 0$ o $\omega > 0$, la expresión (23) no se satisface ya que $C_- = 0$ o $C_+ = 0$. Si recordamos la fórmula (7), vemos que si $\hat{\psi}(-\omega) = 0$ para $\omega < 0$, entonces para $s > 0$ la transformada $\tilde{f}(s, t)$ depende solo de $\hat{f}(\omega)$ con $\omega > 0$ por lo que es prácticamente imposible obtener la frecuencia negativa de f , ya que solo se integra sobre la escala positiva.

Teorema 2.

Sea ψ tal que $0 < C < \infty$, donde:

$$C \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)| \frac{d\xi}{|\xi|} = C_+ + C_- \quad (27)$$

Entonces $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede obtenerse de \tilde{f} por medio de:

$$f(u) = C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |s|^{2p-3} \psi_{s,t}(u) \tilde{f}(s, t) ds dt \quad (28)$$

y con la unidad de resolución:

$$C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |s|^{2p-3} \psi_{s,t} \psi_{s,t}^* ds dt = I \quad (29)$$

Demostración. La demostración de este teorema es muy sencilla, ya que si retomamos la idea del teorema 1 y consideramos ahora que la integral es sobre toda $s \neq 0$ y una función de peso $W(s) = |s|^{2p-3}$, vemos que debemos seguir la misma temática que en el teorema anterior. ♦

De (29) podemos ver que:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |s|^{2p-3} f^* \psi_{s,t} \psi_{s,t}^* f ds dt = \\ &= C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |s|^{2p-3} |\tilde{f}(s, t)|^2 ds dt \end{aligned} \quad (30)$$

La función:

$$\rho(s, t) = C^{-1} |s|^{2p-3} |\tilde{f}(s, t)|^2 \quad (31)$$

se entiende como la densidad de energía en la escala del tiempo.

Ahora bien, sea $\mathfrak{S} \equiv \{\tilde{f}: f \in L^2(\mathbb{R})\}$ el espacio de todas las transformadas wavelet (con respecto a una wavelet madre ψ cualquiera). Por (30), \mathfrak{S} es un subespacio del espacio de todas las funciones medibles que son doblemente integrables con respecto a la función de peso $|s|^{2p-3}$ para las cuales la norma es:

$$\|h\|^2 = C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |s|^{2p-3} |h(s, t)|^2 ds dt < \infty \quad (32)^1$$

Por (30) podemos afirmar que $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\tilde{f}\|_{\mathfrak{S}}^2$. Lo cual implica que el mapeo $f \rightarrow \tilde{f}$ define un operador $T: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{S}$ que cumple las características $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|Tf\|_{\mathfrak{S}}^2$. Por como definimos \mathfrak{S} , observamos que este es el rango de T . Aplicando la identidad de polarización a (30), obtenemos una expresión similar a la identidad de Parseval.

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle Tf, Tg \rangle_{\mathfrak{S}} \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (33)$$

Obsérvese que T conserva el producto interno³ y por tanto, las longitudes y los ángulos. T es parcialmente isométrico ya que su rango es \mathfrak{S} el cual no es totalmente \mathfrak{S} .

No toda función h puede ser la transformada wavelet continua de una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$. Es decir, si $h = \tilde{f}$, entonces por (29):

¹ El conjunto de tales funciones forman un espacio de Hilbert con producto interno. El cual denotaremos por \mathfrak{S} .

² Entiendase al operador T como la fórmula de Plancherel en el análisis de Fourier.

³ A los operadores con las características de T y rango \mathfrak{S} , son llamados isométricos.

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{s}', t') &= \psi_{\mathbf{s}', t'}^* f = \psi_{\mathbf{s}', t'}^* \int f = \\
&= C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{s}|^{2p-3} \psi_{\mathbf{s}', t'}^* \psi_{\mathbf{s}, t} \psi_{\mathbf{s}, t}^* f d\mathbf{s} dt = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{s}|^{2p-3} K(\mathbf{s}', t' | \mathbf{s}, t) h(\mathbf{s}, t) d\mathbf{s} dt
\end{aligned} \tag{34}$$

donde:

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{s}', t' | \mathbf{s}, t) &= C^{-1} \langle \psi_{\mathbf{s}', t'}, \psi_{\mathbf{s}, t} \rangle = C^{-1} \langle \hat{\psi}_{\mathbf{s}', t'}, \hat{\psi}_{\mathbf{s}, t} \rangle = \\
&= C^{-1} |\mathbf{s}' \mathbf{s}|^{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega (t'-t)} \overline{\hat{\psi}(\mathbf{s}' \omega)} \hat{\psi}(\mathbf{s} \omega) d\omega
\end{aligned} \tag{35}$$

$K(\mathbf{s}', t' | \mathbf{s}, t)$ es el kernel de reproducción asociado a ψ . Obsérvese que (34) es una condición suficiente para que una función $h \in \mathcal{L}$, pertenezca a \mathfrak{F} . esta condición se relaciona con la dependencia lineal entre las wavelets $\psi_{\mathbf{s}, t}$. También es una aproximación por mínimos cuadrados, f_n , determinada por las funciones $h(\mathbf{s}, t)$ que no necesariamente pertenecen a \mathfrak{F} .

1. 2. Señales y Frecuencias.

La Transformada Wavelet Continua \tilde{f} representa el análisis de la escala del tiempo de una señal. Ahora agregaremos el tratamiento de señales de valor real, considerando sólo sus componentes de frecuencia positiva, las señales analíticas.

Las condiciones para que una wavelet madre sea aceptada en los teoremas 1 y 2, requieren que $\hat{\psi}(\omega) \rightarrow 0$ conforme $\omega \rightarrow 0$. Si $\hat{\psi}(\omega)$ es continua, entonces $\hat{\psi}(0) = 0$, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du = 0 \tag{36}$$

Como $\hat{\psi}(\omega)$ es doblemente integrable, ésta decrece conforme $|\omega| \rightarrow \infty$. Si esto sucede, $\hat{\psi}(\omega)$ estará ligeramente fuera de una banda de frecuencia $\alpha < |\omega| < \beta$ para $0 < \alpha < \beta$. Entonces (6) demuestra que $\hat{\psi}_{s,t}(\omega) \approx 0$ fuera de la banda de frecuencia $\frac{\alpha}{|s|} \leq |\omega| \leq \frac{\beta}{|s|}$, y (7) también prueba que $\tilde{f}(s,t)$ posee información acerca de $\hat{f}(\omega)$ en esta banda, con $\hat{\psi}(s\omega)$ jugando el papel de ventana de localización en la frecuencia, por lo que la Transformada Wavelet Continua usa escalas en el tiempo para ajustar la ventana en la frecuencia.

Si la wavelet madre ψ es de valor real, entonces su transformada de Fourier es simétrica, esto es $\overline{\hat{\psi}(\omega)} = \hat{\psi}(-\omega)$, por lo que la banda de frecuencia efectiva, mencionada hace unos momentos, es simétrica respecto al origen. Puede parecer poco obvio el decir que algunas veces es conveniente trabajar sólo con wavelets madres de frecuencia positiva, $\hat{\psi}(\omega) = 0$ para $\omega < 0$, ya que estas funciones, como en el análisis de Fourier, se pueden expresar en forma exponencial compleja o en términos de senos y cosenos, pero las imágenes de las funciones $\sin(2\pi t)$ y $\cos(2\pi t)$ no son localizadas fácilmente dentro de la frecuencia, ya que se concentran en $\omega = \pm 1$. La inclusión de ambas frecuencias hace que las relaciones de ortogonalidad sean más complejas, resultando un mayor problema la expresión de fórmulas de una función cualquiera como una superposición de senos y cosenos.

Para evitarnos todo lo anterior dentro de la transformada wavelet continua, usemos sólo un lado de la wavelet. Si recordamos el teorema 1, ψ_+ y ψ_- eran solo frecuencias positivas y negativas respectivamente¹, por lo que $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede expresar como una suma única $f = f_+ + f_-$ de una señal analítica superior e inferior, definidas como:

$$f_+(u) = \int_0^{\infty} e^{2\pi i \omega u} \hat{f}(\omega) d\omega \quad f_-(u) = \int_{-\infty}^0 e^{2\pi i \omega u} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (37)$$

¹ Estas funciones las propuso D. Gabor en su escrito de Teoría de la comunicación en 1946, también las llama señales analíticas, porque pueden prolongarse analíticamente a la mitad superior del tiempo en el plano complejo. Similarmente para frecuencias negativas, solo que en este caso es la mitad inferior del plano. Por lo que una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ es una señal analítica superior si $\hat{f}(\omega) = 0$ para $\omega < 0$ y es llamada señal analítica inferior si $\hat{f}(\omega) = 0$ para $\omega > 0$.

y $\langle f_+, f_+ \rangle = 0$ por la identidad de Parseval. Además $f_+ \in L^2_+(\mathbb{R})$ y $f_- \in L^2_-(\mathbb{R})$, donde $L^2_{\pm}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ por lo que $L^2(\mathbb{R})$ es la suma ortogonal de $L^2_+(\mathbb{R})$ y $L^2_-(\mathbb{R})$. Los operadores:

$$P_{\pm}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \text{ definido por } P_{\pm} f = f_{\pm} \quad (38)$$

son las proyecciones ortogonales en $L^2_{\pm}(\mathbb{R})$.

Es claro que cuando tenemos señales $f(u)$ reales no perdemos información al considerar sólo las frecuencias positivas $f_+(u)$, pues $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$. De aquí que $f_-(u) = \overline{f_+(u)}$ y $f(u) = 2 \operatorname{Re} f_+(u)$.

Teorema 3.

Sea ψ una wavelet analítica superior, es decir $\psi \in L^2_+(\mathbb{R})$, y sea f una señal cualquiera en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces la transformada wavelet $\tilde{f}(s, t)$ de $f \in L^2(\mathbb{R})$ con respecto a ψ , está compuesta sólo de información sobre la frecuencia positiva de f si $s > 0$ e información de la frecuencia negativa si $s < 0$. Esto es:

$$\tilde{f}(s, t) = \begin{cases} \hat{f}_+(s, t) & \text{si } s > 0 \\ \hat{f}_-(s, t) & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (39)$$

donde \tilde{f}_{\pm} son las transformadas wavelet de las señales analíticas superiores e inferiores de f . Además:

$$f_{\pm} = C^{-1} \iint_{R_{\pm}^2} |s|^{2p-3} \psi_{s,t} \tilde{f}(s, t) ds dt \quad (40)$$

donde $R_{\pm}^2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : \pm s > 0\}$ y las proyecciones ortogonales en los subespacios $L^2_{\pm}(\mathbb{R})$ de las señales analíticas superior e inferior están dadas por:

$$P_{\pm} \equiv C^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+^2} |s|^{2p-3} \psi_{s,t} \psi_{s,t}^* ds dt \quad (41)$$

Demostración. Sea $s > 0$. Entonces por (5):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s, t) &= s^{1-p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= s^{1-p} \int_0^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \hat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \bar{f}_+(s, t) \end{aligned} \quad (42)$$

donde $\hat{\psi}(s\omega)$ no es válida para $\omega < 0$. Similarmente para $\tilde{f}(s, t) = \tilde{f}_-(s, t)$ para $s < 0$. Por el teorema 2, la integral sobre \mathbb{R}_+^2 en (40) es f_+ donde $\tilde{f}(s, t) = \tilde{f}_+(s, t)$ para $s > 0$. La expresión (41) la obtenemos de (40), donde $\tilde{f}(s, t) = \psi_{s,t}^* f$. La demostración para el caso de frecuencias negativas es análoga. ♦

Obsérvese que $(P_+ + P_-)f = f_+ + f_- = f$, por lo que $P_+ + P_- = I$. Cuando en el teorema 2 incluimos la expresión (41) y una wavelet analítica superior de ψ , obtenemos una mayor claridad dentro de este, debido a que no existe una combinación de frecuencias positivas y negativas.

1. 3. Wavelets y su Distribución de Probabilidad. Un Ejemplo.

Si hacemos un recuento, recordaremos que para una función de t con $s \neq 0$, la transformada wavelet $\tilde{f}(s, t)$ representa detalles de la señal en la escala s . Esto será de suma importancia cuando nos refiramos al caso discreto aunado al análisis de resolución múltiple. Lo que se pretende en esta sección es dar una interpretación de $\tilde{f}(s, t)$ como detalles de la señal.

Supóngase que tenemos una función de distribución de probabilidad $\phi(u)$ con media cero y varianza uno. $\phi(t)$ es una función no negativa que cumple con:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) du = 1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) u du = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) u^2 du = 1 \quad (43)$$

Asumiendo que $\phi(u)$ es diferenciable n - veces ($n \geq 1$) y su $(n - 1)$ derivada satisface:

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \phi^{(n-1)}(u) = 0 \quad (44)$$

y sea:

$$\psi^n(u) \equiv (-1)^n \phi^{(n)}(u) \quad (45)$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^n(u) du = (-1)^n [\phi^{(n-1)}(\infty) - \phi^{(n-1)}(-\infty)] = 0 \quad (46)$$

Por lo que ψ^n satisface la condición para que la wavelet sea aceptada y pueda usarse para definir una transformada wavelet continua. Para $s \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$ sea:

$$\phi_{s,t}(u) \equiv |s|^{-1} \phi\left(\frac{u-t}{s}\right) \quad \psi_{s,t}^n \equiv |s|^{-1} \psi^n\left(\frac{u-t}{s}\right) \quad (47)$$

Entonces $\phi_{s,t}$ es una función de distribución de probabilidad con media t y varianza s^2 y $\psi_{s,t}^n$ es la nueva familia de wavelets de ψ^n . Sea:

$$\bar{f}(s,t) \equiv \phi_{s,t}^* f, \quad \tilde{f}_n(s,t) \equiv \psi_{s,t}^n f \quad (48)$$

$\bar{f}(s,t)$ representa el promedio de f en t tomado en la escala s . $\tilde{f}_n(s,t)$ es la transformada wavelet continua de f con respecto a ψ^n . Pero (45) implica que:

$$\psi_{s,t}^n(u) = (-1)^n s^n \frac{\partial^n}{\partial u} \phi_{s,t}(u) = s^n \frac{\partial^n}{\partial t} \phi_{s,t}(u) \quad (49)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_h(s, t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{s,t}^n(u) f(u) du = \\ &= s^n \frac{\partial^n}{\partial t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{s,t}(u) f(u) du \right] = s^n \frac{\partial^n}{\partial t} \bar{f}(s, t) \end{aligned} \quad (50)$$

de donde la transformada wavelet continua de f con respecto a ψ^n es proporcional (por el factor s^n) a la n -ésima derivada $f^{(n)}(t)$ del promedio de f ($\bar{f}(s, t)$) en la escala s . La n -ésima derivada $f^{(n)}(t)$ es un momento de n -ésimo orden en la escala cero el cual nos habla de características de f .

1. 4. Unidades de Resolución.

La transformada wavelet continua analiza una señal usando las wavelets $\psi_{s,t}(u) \equiv s^{-p} \psi\left(\frac{u-t}{s}\right)$ con $s > 0$, esto es $\tilde{f}(s, t) = \psi_{s,t}^* f$. Su fórmula es:

$$f = \iint_{\mathbb{R}^2} s^{2p-3} \psi^{s,t} \tilde{f}(s, t) ds dt \quad (51)$$

donde $\{\psi^{s,t}\}$ es la familia recíproca de wavelets definidas por (19) y (24). Que junto con el análisis dan paso a una unidad de resolución en $L^2(\mathbb{R})$ en términos de $\{\psi_{s,t}, \psi^{s,t}\}$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} s^{2p-3} \psi^{s,t} \psi_{s,t}^* ds dt = 1 \quad (52)$$

Donde la expresión está en términos de bases recíprocas $\{b_n, b^n\}$ con las características:

- a) La familia $\{b_n\}$ es finita, a pesar de que cada familia tenga un numero infinito de vectores, ya que $L^2(\mathbb{R})$ es de dimensión infinita.
- b) $\{b_n\}$ esta indexada por una variable discreta n , aunque las familias lo estén por variables continuas: $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$.
- c) Aunque $\{b_n\}$ son linealmente dependientes y consecuentemente no son bases, la unidad de resolución permite trabajar con éstas en forma similar a una base.

Estudiando en qué sentido $\{\psi_{s,t}\}$ son vectores linealmente dependientes, tomamos la adjunta de (52) y obtenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} s^{2p-3} \psi_{s,t} (\psi_{s,t})^* ds dt = I \quad (53)$$

lo que hace que $\{\psi_{s,t}\}$ sea recíproca a $\{\psi_{s',t'}\}$. Haciendo lo mismo para $\psi_{s',t'}$:

$$\begin{aligned} \psi_{s',t'} &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} s^{2p-3} \psi_{s,t} (\psi_{s,t})^* \psi_{s',t'} ds dt = \\ &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} s^{2p-3} \psi_{s,t} \overline{K(s', t' | s, t)} ds dt \end{aligned} \quad (54)$$

donde:

$$K(s', t' | s, t) = \langle \psi_{s',t'}, \psi_{s,t} \rangle = \overline{\langle \psi_{s,t}, \psi_{s',t'} \rangle} \quad (55)$$

Pero $K(s', t' | s, t)$ no se anula cuando $s \neq s'$ o $t \neq t'$ por lo que (54) demuestra que $\{\psi_{s,t}\}$ son linealmente dependientes ya que todos los vectores se pueden expresar como una combinación lineal continua de otros.

La dependencia lineal de $\{\psi_{s,t}\}$ es precisamente la causa que origina la condición de consistencia que cualquier transformada wavelet continua debe satisfacer. Tomando el producto de ambos lados de la expresión (54):

$$\begin{aligned}\tilde{f}(s', t') &\equiv \psi_{s', t'}^* f = \iint_{\mathbb{R}^2} s^{2p-3} K(s', t' | s, t) \psi_{s, t}^* f ds dt = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} s^{2p-3} K(s', t' | s, t) \tilde{f}(s, t) ds dt\end{aligned}\quad (56)$$

Lo anterior muestra que las unidades de resolución son herramientas mucho más eficaces que las bases, ya que una base proporciona sólo una unidad de resolución, pero no toda unidad de resolución proviene de una base.

Para tener una unidad de resolución son necesarias dos familias recíprocas las cuales surgen a partir de una familia de vectores que debe satisfacer ciertas condiciones, para que la familia recíproca exista, de hecho esas condiciones son una generalización de las condiciones de una base. En general:

a) Para el análisis ($f \rightarrow \tilde{f}$) se requiere de un espacio de Hilbert H de posibles señales, un conjunto de índices M y una familia de vectores $h_m \in H$ indexadas por $m \in M$. $H = L^2(\mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}_+^2$ el conjunto de todas las escalas y momentos $m = (s, t)$, $h_m = \psi_{s, t}$.

b) Para la síntesis ($f \rightarrow \tilde{f}$) es necesario construir una familia de vectores $\{h^m\} \in H$ recíproca a $\{h_m\}$. Además de poder integrar sobre los índices en M , de tal forma que la señal se obtenga de una combinación de los vectores h^m . Esto es, que dado un subconjunto medible $A \subset M$, podemos asignarle una métrica $\mu(A)$, $0 \leq \mu(A) \leq \infty$ lo que lleva a poder integrar una función medible $F: M \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_M F(m) d\mu(m).$$

Los espacios métricos deben ser:

$$M = \mathbb{R}_+^2 \quad \mu(A) = \iint_A s^{2p-3} ds dt \quad (57)$$

para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}_+^2$. La integral es:

$$\int_M F(m) d\mu(m) = \int_{\mathbb{R}_+^2} s^{2p-3} F(s, t) ds dt \quad (58)$$

Dado un espacio métrico M con métrica μ y función medible $g: M \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_M |g(m)|^2 d\mu(m) \quad (59)$$

Puesto que $|g(m)|^2$ es medible y no negativa, la integral existe y es finita, o $\|g\|_{L^2}^2 = +\infty$. Sea $L^2(\mu)$ el conjunto de las funciones g , para las cuales $\|g\|_{L^2}^2 < \infty$, entonces $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert con producto interno:

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{L^2} = \int_M \overline{g_1(m)} g_2(m) d\mu(m) \quad (60)$$

que es resultado de polarizar la norma. Para ser más claros, podríamos entender a $M = \mathbb{R}^n$ y a μ como la métrica de Lebesgue en \mathbb{R}^n , entonces $L^2(\mu)$ es $L^2(\mathbb{R}^n)$; o bien $M = \mathbb{Z}^n$ y μ la métrica contable, $\mu(A) = \text{número de elementos de } A$, por lo que $L^2(\mu) = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Habiendo entendido lo anterior, podemos dar paso a la definición de marcos generalizados lo cual se estudiará en la siguiente sección.

1. 5. Marcos Generalizados.

Un marco generalizado es una familia de vectores en H indexados por M , donde H es un espacio de Hilbert y M es un espacio métrico con métrica μ , definido por $H_M \equiv \{h_m \in H: m \in M\}$, tal que:

a) Para toda $f \in H$, la función $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\tilde{f}(m) \equiv \langle h_m, f \rangle_H \quad (61)$$

b) Existe un par de constantes $0 < A \leq B < \infty$ tal que para cada $f \in H$:

$$A\|f\|_H^2 \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq B\|f\|_H^2 \quad (62)$$

Los vectores $h_m \in H_M$ son llamados vectores de marco; (62) es la condición de marco, y A y B son los límites de marco. Obsérvese que $\tilde{f} \in L^2(\mu)$ siempre que $f \in H$. La función $\tilde{f}(m)$ se conoce como la transformada de f con respecto al marco.

1. 5. 1. Obtención de Marcos.

Hasta este momento hemos considerado el hecho de que $0 < A \leq B < \infty$, pero ¿qué sucede cuando $A = B$? pues la condición se reduce a:

$$A\|f\|_H^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (63)$$

Bajo estas circunstancias, el marco es llamado marco limitado el cual puede ser considerado como una analogía de la fórmula de Plancherel en el análisis de Fourier, lo que asegura que no se pierde información en la transformación $f \rightarrow \tilde{f}$, que permitirá obtener f de \tilde{f} .

Dado un marco, podemos asumir que todos los vectores de marco están normalizados $\|h_m\| = 1 \quad \forall m \in M$. De no ser el caso, debemos definir otro marco equivalente a H_M . Para esto será necesario eliminar todos los índices de M para los cuales $h_m = 0$ y denotemos el nuevo conjunto como M' . Para $m \in M'$, definimos los nuevos vectores de marco $h'_m = \frac{h_m}{\|h_m\|}$ por lo que $\|h'_m\| = 1$. La transformada de $f \in H$ con respecto a los nuevos vectores de marco es:

$$\tilde{f}'(m) \equiv \langle h'_m, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \|h_m\|^{-1} \tilde{f}(m), \quad m \in M' \quad (64)$$

Por lo que:

$$\|\tilde{f}\|_{L^2}^2 \equiv \int_M |\tilde{f}(m)|^2 d\mu(m) = \int_{M'} \|h_m\|^2 |\tilde{f}'(m)|^2 d\mu(m) \quad (65)$$

donde hemos considerado el hecho de que el integrando no es válido cuando $m \notin M'$, pues $\tilde{f}(m) = \langle 0, f \rangle = 0$. Definiendo una métrica $\mu' \in M'$ por $d\mu'(m) = \|h_m\|^2 d\mu(m)$, esto es:

$$\mu'(A) \equiv \int_A \|h_m\|^2 d\mu(m) \quad (66)$$

para cualquier subconjunto métrico $A \subset M'$, entonces (65) proporciona:

$$\|\tilde{f}\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{M'} |\tilde{f}'(m)|^2 d\mu'(m) = \|\tilde{f}'\|_{L^2(\mu')}^2 \quad (67)$$

por lo que ahora la condición de marco es:

$$A\|f\|^2 \leq \|\tilde{f}'\|_{L^2(\mu')}^2 \leq B\|f\|^2 \quad (68)$$

quedando demostrado que $H'_{M'} \equiv \{h'_m : m \in M'\}$ es también un marco, con los mismos límites de marco para H_M .

Dado que los vectores de marco no tienen una normalización natural y ésta no es necesariamente la unidad, entonces $\|h_m\|^{-1} \tilde{f}(m)$ de \tilde{f} no es analítica por lo que no podemos asumir que $\|h_m\| = 1$ en general, pero consideremos la normalización de h_m como una libre incorporación a la teoría de marco.

Ya que $\tilde{f} \in L^2(\mu) \forall f \in H$, el mapeo $f \rightarrow \tilde{f}$ define una función $T:H \rightarrow L^2(\mu)$, $Tf = \tilde{f}$, donde T es lineal y llamado operador de marco de H_M . Si normalizamos f , por la desigualdad de Schwarz:

$$|\tilde{f}(m)|^2 = |\langle h_m, f \rangle|^2 \leq \|h_m\|^2 \equiv H(m) \quad (69)$$

la igualdad se cumple sólo cuando f es un múltiplo de h_m . Esto hace que $|\tilde{f}(m)|^2$ este dominada por $H(m)$ la cual está determinada por el marco. Además para una m_0 , $|\tilde{f}(m)|^2$ alcanza su máximo valor en $H(m_0)$ si y sólo si f es un múltiplo de h_{m_0} . Por lo que $|\tilde{f}(m)|^2 < H(m)$ para toda $m \neq m_0$. El número $|\tilde{f}(m)|^2$ analiza qué tanto del bloque construido h_m se encuentra en la señal f . Por lo que T analiza la señal f en términos de h_m . T es un operador de análisis asociado al marco H_M . La síntesis u obtención de la señal se encuentran a partir de un mapeo inverso, esto es $\tilde{f} \rightarrow f$. Por la definición de operador adjunto $T^*:L^2(\mu) \rightarrow H$:

$$\|\tilde{f}\|_{L^2}^2 = \|T\tilde{f}\|_{L^2}^2 = \langle Tf, Tf \rangle_{L^2} = \langle f, T^*Tf \rangle_H \quad (70)$$

La condición de marco se puede reescribir en términos del operador $G \equiv T^*T:H \rightarrow H$ sin hacer uso de un espacio de Hilbert auxiliar $L^2(\mu): \langle f, Gf \rangle = f^*Gf$ y $\|f\|^2 = f^*f$, asumiendo que las normas y productos internos están en H . Entonces tenemos que la condición de marco es:

$$Af^*f \leq f^*Gf \leq Bf^*f, \quad f \in H \quad (71)$$

Queda claro que G es autoadjunto, $G^* = G$, por lo que sus valores característicos son reales. Si H es un operador de Hermitte en H , tal que $f^*Hf \geq 0$ para toda $f \in H$, entonces todos los valores característicos de H son no negativos. Ya que (71) se puede expresar

como $f^*(G - A)f \geq 0$ y $f^*(A - G)f \geq 0$, es equivalente a la desigualdad $G - A \geq 0$, $B - G \geq 0$, o:

$$A \leq G \leq B \quad (72)$$

Esta desigualdad hace que todos los valores característicos λ de G cumplan $A \leq \lambda \leq B$, que es la condición de marco en forma de operador. G es llamado un operador métrico de marco.

La desigualdad (72) expresa que el operador $A \leq G \leq B$ está limitado, ya que $B < \infty$ y tiene inverso, G^{-1} , pues $A > 0$. De hecho, G^{-1} satisface la igualdad:

$$B^{-1} \leq G^{-1} \leq A^{-1} \quad (73)$$

Por lo que la condición de marco garantiza la existencia de un operador inverso.

Ahora bien, para toda $f, g \in H$:

$$\begin{aligned} f^*Gg &= \langle f, T^*Tg \rangle_H = \langle Tf, Tg \rangle_{L^2} = \int_M \overline{\tilde{f}(m)} \tilde{g}(m) d\mu(m) = \\ &= \int_M \overline{h_m^* f} h_m^* g d\mu(m) = \int_M f^* h_m h_m^* g d\mu(m) \end{aligned} \quad (74)$$

Por lo que G se puede expresar como una integral sobre M de los operadores $h_m h_m^*: H \rightarrow H$:

$$G = \int_M h_m h_m^* d\mu(m) \quad (75)$$

Queda claro ahora que la condición de marco generaliza la idea de unidades de resolución. Cuando $G = I$, es necesario contar con una familia recíproca $\{h^m\}$ para obtener la unidad de resolución y la reconstrucción asociada.

1. 5. 2. Condición de Consistencia.

Hasta este momento sabemos que si tenemos un marco para cualquier señal $f \in H$ la transformada $\tilde{f}(m) \in L^2(u)$. También es necesario saber si para una función $g \in L^2(\mu)$, $g = \tilde{f}$ para cualquier $f \in H$. Esto es muy simple, ya que al conocer el rango del operador $T: H \rightarrow L^2(\mu)$ el subespacio:

$$\mathfrak{R} \equiv \{\tilde{f}: f \in H\} \subset L^2(\mu) \quad (76)$$

y si $g(m) = \tilde{f}(m)$ para cualquier $f \in H$, entonces, ¿de donde obtendremos f ? Para esto es necesario encontrar un operador inverso por la izquierda de T , esto es $S: L^2(\mu) \rightarrow H$ tal que $ST = I$ en H . Si se cuenta con S , entonces $f = S\tilde{f}$ lo cual es lo que buscamos. Para poder llevar a cabo esto es necesario encontrar el inverso del operador métrico G , el cual esta garantizado por la condición de consistencia.

Supongamos que G^{-1} es conocido. Entonces el operador $S = G^{-1} T^*$ mapea sobre los vectores de $L^2(\mu)$ a H :

$$L^2(\mu) \xrightarrow{T^*} H \xrightarrow{G^{-1}} H \quad (77)$$

Además, $ST = G^{-1} T^* T = G^{-1} G = I$, lo que demuestra que S es el inverso por la izquierda de T y $f = S\tilde{f}$. Por lo que S es el operador de síntesis asociado al operador de análisis T . Para encontrar el rango de T , definamos el operador $P = TS: L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$. Se podría pensar que P es el operador identidad en $L^2(\mu)$, pero hasta este momento no se ha demostrado la conmutatividad entre los operadores, por lo que no podemos garantizar esto. De hecho tenemos que:

Teorema 3.

$P \equiv TS = TG^{-1}T$ que es el operador de proyección ortogonal al rango \mathfrak{S} de T en $L^2(\mu)$.

Demostración. Cualquier vector $g \in L^2(\mu)$ se puede expresar como una suma única $g = \tilde{f} + g_{\perp}$ donde $\tilde{f} \in \mathfrak{S}$ y g_{\perp} pertenece al complemento ortogonal \mathfrak{S}^{\perp} de \mathfrak{S} en $L^2(\mu)$. El decir que P es la proyección ortogonal de \mathfrak{S} en $L^2(\mu)$ significa que $Pg = \tilde{f}$. Esto es que $\tilde{f} = Tf$ para $f \in H$ por lo que $P\tilde{f} = PTf = TSTf = Tf = f$. Además, para $g_{\perp} \in \mathfrak{S}^{\perp}$, $\langle g_{\perp}, \tilde{f}' \rangle_{L^2} = 0$ para toda $\tilde{f}' \in \mathfrak{S}$.

Ya que $\tilde{f}' = Tf'$ para cualquier $f' \in H$:

$$0 = \langle g_{\perp}, Tf' \rangle_{L^2} = \langle Tg_{\perp}, f' \rangle \quad \forall f' \in H \quad (78)$$

por lo que T^*g_{\perp} debe ser el vector cero en H (si $f' = T^*g_{\perp}$ tiene $\|T^*g_{\perp}\| = 0$) donde $Pg_{\perp} = TG^{-1}T^*g_{\perp} = 0$ y:

$$Pg = P(\tilde{f} + g_{\perp}) = \tilde{f} + 0 = \tilde{f} \quad (79) \spadesuit.$$

La familia recíproca se define por:

$$h^m \equiv G^{-1}h_m, \quad m \in M \quad (80)$$

El nuevo marco recíproco de H_M es el conjunto:

$$H^M \equiv \{h^m : m \in M\} \quad (81)$$

Entonces, por (75):

$$\int_M h^m h_m^* d\mu(m) = G^{-1} \int_M h_m h_m^* d\mu(m) = G^{-1}G = I \quad (82)$$

que es la unidad de resolución que andábamos buscando, la cual está en términos de H_M y H^M . Tomando la adjunta de (82):

$$\int_M h_m (h^m)^* d\mu(m) = I \quad (83)$$

lo que nuevamente demuestra que H_M es recíproca a H^M . Ya que:

$$\int_M h^m h^{m*} d\mu(m) = G^{-1} \int_M h_m h_m^* G^{-1} d\mu(m) = G^{-1}GG^{-1} = G^{-1} \quad (84)$$

y $B^{-1} \leq G \leq A^{-1}$ se sigue que $H^M \equiv \{h^m\}$ que también es un marco, con límites de marco B^{-1} , A^{-1} y operador métrico G^{-1} .

Teorema 4.

La adjunta $T^*: L^2(\mu) \rightarrow H$ del operador de análisis es:

$$(T^*g)(m) = \int_M h_m g(m) d\mu(m) \quad (85)$$

donde el producto interno de ambos lados de la igualdad con un vector $f \in H$ es igual.

Demostración. Para $f \in H$ y $g \in L^2(\mu)$:

$$\begin{aligned} \langle f, T^*g \rangle_H &= \langle Tf, g \rangle_{L^2} = \int_M \overline{h_m^* f} g(m) d\mu(m) = \\ &= \int_M f^* h_m g(m) d\mu(m) = \left\langle f, \int_M h_m g(m) d\mu(m) \right\rangle \end{aligned} \quad (86) \spadesuit$$

Teorema 5.

El operador de síntesis $S = G^{-1}T^*: L^2(\mu) \rightarrow H$ esta dado por:

$$Sg = \int_{\mathcal{M}} h^m g(m) d\mu(m) \quad (87)$$

$f \in H$ se puede obtener de $\tilde{f} \in \mathfrak{S}$ por :

$$f = S\tilde{f} = \int_{\mathcal{M}} h^m \tilde{f}(m) d\mu(m) \quad (88)$$

Demostración. Para $g \in L^2(\mu)$, por (85):

$$\begin{aligned} Sg &= G^{-1} \int_{\mathcal{M}} h_m g(m) d\mu(m) = \int_{\mathcal{M}} G^{-1} h_m g(m) d\mu(m) = \\ &= \int_{\mathcal{M}} h^m g(m) d\mu(m) \end{aligned} \quad (89) \blacklozenge$$

Teorema 6.

La proyección ortogonal $P: L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ al rango \mathfrak{S} de T es:

$$(Pg)(m') = \int_{\mathcal{M}} K(m'|m) g(m) d\mu(m) \quad (90)$$

donde:

$$K(m'|m) = \langle h_{m'}, h^m \rangle = \langle h_{m'}, G^{-1} h_m \rangle \quad (91)$$

Una función $g \in L^2(\mu)$ pertenece a \mathfrak{S} si y solo si satisface la condición de consistencia:

$$g(m') = \int_{\mathcal{M}} K(m'|m) g(m) d\mu(m) \quad (92)$$

Demostración. Por el teorema 5:

$$(Pg)(m') = (TSg)(m') = \langle h_{m'}, Sg \rangle = \int_M \langle h_{m'}, h^m \rangle g(m) d\mu(m) \quad (93)$$

ya que $g \in \mathfrak{S}$ si y sólo si $g = Pg$, obtenemos (92). ♦

$K(m' | m)$ es el kernel de reproducción de \mathfrak{S} asociado el marco H_M .

Teorema 7.

Un marco generalizado es una base si y sólo si el operador $T^*: L^2(\mu) \rightarrow H$ es uno a uno.

Demostración. Una base en H es un marco H_M cuyos vectores son linealmente independientes. Si $g \in L^2(\mu)$ es tal que:

$$\int_M h_m g(m) d\mu(m) = 0 \quad \text{en } H \quad (94)$$

entonces $g = 0$ como un elemento de $L^2(\mu)$, esto es, el conjunto $\{m \in M: g(m) \neq 0\}$ tiene métrica cero. Por (85), $T^* g = 0$ implica que $g = 0$, que es equivalente a decir que T^* es uno a uno, puesto que $T^*(g_1 - g_2) = T^* g_1 - T^* g_2 = 0$ lo que hace que $g_1 - g_2 = 0$. ♦

1. 5. 3. ¿ Por qué Marcos y no Bases?.

Cuando los vectores de marco h_m son linealmente dependientes, la transformada $\tilde{f}(m)$ contiene información redundante. Esto es, debido a un sobremuestreo de la señal. Aunque esto podría parecer insuficiente, la redundancia tiene ciertas ventajas, ya que puede detectar y corregir errores, los cuales pueden aparecer cuando la información es

mínima. Dentro de los marcos, la corrección de errores se expresa como una aproximación por mínimos cuadrados, que es una propiedad de los marcos.

Teorema 8. Aproximaciones por Mínimos Cuadrados.

Sea $g(m) \in L^2(\mu)$ no necesariamente en \mathfrak{S} . Entonces, la única señal $f \in H$ que minimiza el error:

$$\|g - \tilde{f}\|_{L^2}^2 \equiv \int_{\mathfrak{M}} |g(m) - \tilde{f}(m)|^2 d\mu(m) \quad (95)$$

esta dada por $\|g - \tilde{f}\|_{L^2}^2 \equiv \int_{\mathfrak{M}} |g(m) - \tilde{f}(m)|^2 d\mu(m)$.

Demostración. La única $f \in H$ que minimiza $\|g - \tilde{f}\|_{L^2}$ es la proyección ortogonal de g a \mathfrak{S} , la cual es $Pg = TSg = Tfg = \tilde{f}g$. ♦

El hacer uso de vectores linealmente dependientes significa que los coeficientes usados en la expansión de la señal no son únicos. Dentro de los marcos, esta carencia de unicidad se puede entender como que la reconstrucción se logra al aplicar el operador $SG^{-1}T: L^2(\mu) \rightarrow H$ a la transformada de \tilde{f} de f . Como $T^*g_{\perp} = 0$ siempre que $g_{\perp} \in \mathfrak{S}^{\perp}$, que es el complemento ortogonal de \mathfrak{S} en $L^2(\mu)$, de (78) $Sg_{\perp} = 0$. Por lo que por el teorema 5:

$$f = S\tilde{f} = S(\tilde{f} + g_{\perp}) = \int_{\mathfrak{M}} h^m [\tilde{f}(m) + g_{\perp}(m)] d\mu(m) \quad \forall g_{\perp} \in \mathfrak{S}^{\perp} \quad (96)$$

Ahora bien, para el caso contrario, cuando los vectores son linealmente independientes, $\mathfrak{S} = L^2(\mu)$, por lo que $\mathfrak{S}^{\perp} = \{\emptyset\}$ y la representación de f es única. Si los vectores de marco son linealmente dependientes, entonces \mathfrak{S}^{\perp} es no trivial, es decir los vectores que pertenecen a \mathfrak{S}^{\perp} son diferentes de cero, y existe un número infinito de representaciones de

f (una para cada $g_{\perp} \in \mathfrak{F}^{\perp}$). De hecho, (96) expresa la función de coeficientes más general que podamos usar para hacer una combinación de h_m , si el objetivo es obtener f .

Teorema 9. Representación de la Energía Mínima.

De todas las posibles funciones de coeficientes $g \in L^2(\mu)$ para $f \in H$, la función $g = \tilde{f}$ es la única que minimiza la energía $\|g\|_{L^2}^2$.

Demostración. Ya que \tilde{f} y g_{\perp} son ortogonales en $L^2(\mu)$:

$$\|g\|_{L^2}^2 = \|\tilde{f} + g_{\perp}\|_{L^2}^2 = \|\tilde{f}\|_{L^2}^2 + \|g_{\perp}\|_{L^2}^2 \geq \|\tilde{f}\|_{L^2}^2 \quad (97)$$

siendo iguales solo cuando $g_{\perp} = 0$. ♦

La función de coeficientes $g = \tilde{f}$ se distingue porque es la única que satisface la condición de consistencia (teorema 6). Además, la elección de la función de coeficientes está limitada, ya que $|\tilde{f}(m)| = \|h_m\| \|f_m\| = \|f\|$, pues en general los elementos de $L^2(\mu)$ no están limitados.

Los dos últimos teoremas son similares ya que en ambos hacemos una comparación de f con los operadores de análisis y síntesis, sólo que en el teorema 8, para una $g \in L^2(\mu)$ cualquiera, la comparamos con todas las posibles señales $f \in H$, tales que $Tf \approx g$ mientras que en el Teorema 9, para una $f \in H$ cualquiera la comparamos con todas las $g \in L^2(\mu)$ tales que $Sg = f$. Obsérvese que los teoremas son recíprocos uno al otro.

1. 5. 4. Obtención Recursiva.

Como hemos visto, la obtención de una señal f requiere de forma muy importante de los vectores de marco $h^m = G^{-1}h_m$, por lo que conocer f depende de la obtención del recíproco del operador métrico G , G^{-1} . La condición de marco se puede expresar como:

$$-\frac{1}{2}(B-A) \leq G - \frac{1}{2}(B+A) \leq \frac{1}{2}(B-A) \quad (98)$$

Haciendo $\delta \equiv \frac{(B-A)}{(B+A)}$ y $\alpha = \frac{2}{(B+A)}$, tenemos:

$$-\delta I \leq I - \alpha G \leq \delta I \quad (99)$$

Como $0 < A \leq B < \infty$, implica que $0 \leq \delta < 1$ y (99) hace que los valores característicos del operador $E = I - \alpha G$ cumplan $|\varepsilon| \leq \delta < 1$. Si fuera representada por una matriz regular (finita), por medio de (99) probaríamos que la serie:

$$G^{-1} = \alpha(I - E)^{-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} E^n \quad (100)$$

converge. Esto, es válido inclusive para el caso infinito. Obsérvese que conforme δ es más pequeña, la serie converge más rápido. δ es una métrica de la vecindad del marco, ya que $\delta = 0$ si y sólo si el marco está limitado y $\delta \rightarrow 1^-$ conforme $A \rightarrow 0^+$ y / ó $B \rightarrow \infty$. Conforme la vecindad del marco va decreciendo, es más fácil operar con G^{-1} . Cuando $0 < \delta \ll 1$ el marco es llamado marco compacto. Cualquier marco tiene un conjunto único de límites óptimos de marco, $A_{opt} \equiv \sup A$ y $B_{opt} \equiv \inf B$, el límite máximo de los mínimos sup, y el límite mínimo de los máximos inf, son tomados de los límites superiores e inferiores respectivamente.

Es obvio que en (100) no podemos obtener una suma infinita, por lo que la obtención de G^{-1} es sólo una aproximación que está dada por:

$$H_N \equiv \alpha \sum_{n=0}^N E^n \quad (101)$$

donde H_N se puede convertir en una expresión recursiva, esto es:

$$H_N = \alpha I + E H_{N-1} = \alpha I + (I - \alpha G) H_{N-1} \quad (102)$$

y el inverso de los vectores de marco están dados por:

$$h_N^m \equiv H_N h_m = \alpha h_m + E h_{N-1}^m \quad (103)$$

por lo que la obtención de f queda en términos de:

$$f_N = H_N G f = H_N \int_{\mathcal{M}} h_m h_m^* f d\mu(m) = \int_{\mathcal{M}} h_N^m \tilde{f}(m) d\mu(m) \quad (104)$$

Como $H_N G \rightarrow I$ conforme $N \rightarrow \infty$, entonces $f_N \rightarrow f$ por lo que podemos demostrar que:

$$\|f - f_N\| \leq \delta^{N-1} \|f\| \quad (105)$$

converge exponencialmente y conforme δ toma valores pequeños (105) converge más rápido. Finalmente, una forma de calcular f_N más fácil es a partir de la expresión (102):

$$f_N = (\alpha I + E H_{N-1}) G f = \alpha G f + E f_{N-1} = f_0 + E f_{N-1} \quad (106)$$

1. 6. Marcos Discretos.

Consideremos ahora que M es un conjunto discreto o contable, esto es que los elementos de M son indexados por los enteros positivos $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$.

Si M es discreto, entonces $A \subset M$ es medible por lo que toda función $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ es medible, y la integral sobre M es ahora una suma:

$$\int_M g(m) d\mu(m) = \sum_{m \in M} \mu_m g(m) \quad (107)$$

donde $\mu_m \equiv \mu(\{m\})$, es decir, la métrica de uno de los puntos de conjunto. En general, $0 \leq \mu_m \leq \infty$. Asumiendo, sin generalizar, que $0 < \mu_m < \infty \forall m \in M$, si $\mu_{m_0} = 0$ para alguna $m_0 \in M$, entonces $g(m_0)$ no aporta en la suma (107) por lo que podemos eliminar m_0 de M . Por otro lado, si $\mu_{m_0} = \infty$, entonces cada función integrable $g(m)$ no es válida en m_0 y nuevamente se elimina m_0 de M . Con esto, la condición de marco (64) es:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m \in M} \mu_m |\tilde{f}(m)|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (108)$$

Cuando $\mu_m = 1 \forall m \in M$, μ es la métrica contable en M , ya que $\mu(A)$ es el número de elementos en $A \subset M$. Por lo tanto, la condición de marco se reduce a:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m \in M} |\tilde{f}(m)|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (109)^1$$

razón por la cual en la sección 1. 5. se habló de marcos generalizados. Cuando M es discreta y μ es la métrica contable de M , nuestra definición se reduce a (107).

No siempre se cuenta con métricas contables como para el caso discreto. En el siguiente capítulo hablaremos de marcos limitados continuos, H_M , asociados a la transformada wavelet continua y de ahí obtener un submarco discreto, el cual obtiene un muestreo de $\tilde{f}(m)$ en un subconjunto discreto $\Gamma \subset M$ donde cada muestra $m \in \Gamma$ representa una región $A_m \subset M$ con $m \in A_m$ y, naturalmente, $\mu_m = \mu(A_m)$.

¹ Esta definición es la definición clásica de marco, la cual fue introducida por Duffin y Schaeffer (1952).

Durante el desarrollo de los marcos se ha hablado de la dependencia o independencia lineal entre los vectores de marco. Ahora necesitamos saber bajo qué condiciones son una base, puesto que en la sección 1. 5. 3. se dieron fundamentos para preferir un marco sobre una base.

Teorema 10.

Un marco discreto es una base, si y sólo si su kernel de reproducción está dado por:

$$K(k|m) = h_k^* h^m = \mu_m^{-1} \delta_k^m \quad \forall k, m \in M \quad (110)$$

Entonces $\{\mu_m h_m\}$ es la base biortogonal a $\{h_m\}$.

Demostración. En el caso discreto, las unidades de resolución (82) y (83) son:

$$\sum_{m \in M} \mu_m h^m h_m^* = I, \quad \sum_{m \in M} \mu_m h_m (h^m)^* = I \quad (111)$$

Usando la segunda identidad:

$$f = \sum_{m \in M} \mu_m h_m (h^m)^* f = \sum_{m \in M} \mu_m h_m \tilde{f}^*(m) \quad (112)$$

donde $\tilde{f}^*(m) = \langle h^m, f \rangle$ lo que demuestra que los vectores de marco h_m describen H , lo que es cierto para cualquier marco. Por tanto forman una base si y solo si son linealmente independientes.

Ahora:

$$h_k = \sum_{m \in M} \mu_m h_m (h^m)^* h_k = \sum_{m \in M} \mu_m h_m \overline{K(k|m)} \quad (113)$$

Si los vectores de marco son linealmente independientes, entonces $K(k|m) = \mu_m^{-1} \delta_k^m$. Por otro lado, si $K(k|m) = \mu_m^{-1} \delta_k^m$, la condición de consistencia (92) es ahora:

$$g(k) = \sum_{m \in M} \mu_m K(k|m) g(m) \quad (114)$$

lo que es ya una identidad. Por el teorema 8 demostramos que si $\mathfrak{I} = L^2(\mu)$, entonces $\mathfrak{I}^\perp = \{\emptyset\}$. Suponiendo que la combinación de h_m es válida:

$$\sum_{m \in M} h_m c^m = 0 \quad (115)$$

donde $\sum_{m \in M} |c^m|^2 < \infty$, entonces la función $g(m) \equiv c^m \in L^2(\mu)$ y, para toda, $f \in H$:

$$\langle \tilde{f}, g \rangle_{L^2} = \sum_{m \in M} \mu_m f^* h_m g(m) = 0 \quad (116)$$

Puesto que $\overline{\tilde{f}(m)} = f^* h_m$ lo que demuestra que g es ortogonal a $\tilde{f} \in \mathfrak{I}$. Esto es que $g \in \mathfrak{I}^\perp = \{\emptyset\}$ por lo que $g = 0$ y consecuentemente $c^m = 0 \forall m \in M$. Finalmente, concluimos que los vectores de marco son linealmente independientes y forman una base. La igualdad $h_k^* h_m = \mu_m^{-1} \delta_k^m$ es equivalente a la condición de biortogonalidad entre $\{\mu_m h_m\}$ y $\{h_m\}$. ♦

Es importante recordar que (113) es una expansión de f en términos de los vectores de marco h_m , con $\tilde{f}^\#(m)$ como función de coeficientes. Las funciones de coeficientes $\tilde{f}^\#$ y \tilde{f} en (112) y (116) son iguales si y sólo si $h^m = h_m$ para toda m , lo cual se cumple si y solo si $G = I$.

Teorema 11.

Sea H_M un marco discreto normalizado con $\gamma > 0$ (constante), para toda m en M . Entonces su límite de marco superior satisface $B \geq \gamma$. Además el límite marco óptimo $B_{opt} = \gamma$ si y sólo si H_M es una base ortonormal. Por lo que $G = \gamma I$ y H está limitado.

Demostración. Si asumimos que el marco es normalizado y $N_k \equiv \|h_k\|^2 > 0$; aplicando la condición de marco (108) a $f = h_k$:

$$AN_k \leq \sum_{m \in M} \gamma |\langle h_m, h_k \rangle|^2 = \gamma N_k^2 + N_k O_k \leq BN_k \quad (117)$$

donde:

$$O_k \equiv N_k^{-1} \sum_{m \neq k} \gamma |\langle h_m, h_k \rangle|^2 \geq 0 \quad (118)$$

por lo que:

$$A \leq \gamma N_k + O_k \leq B \quad (119)$$

y $B \geq \gamma N_k \forall k$. Como asumimos que el marco está normalizado, $B \geq \gamma$ sigue siendo válida. Además, $B_{opt} = \gamma$ si y sólo si $O_k = 0$ para toda k ; lo que significa que $\langle h_m, h_k \rangle = 0$ siempre que $k \neq m$ que, aunado con $\|h_k\| = 1$, da, $\langle h_m, h_k \rangle = \delta_m^k$. Entonces h_m describe a H , por lo que se forma una base ortonormal y $\sum_m h_m h_m^* = I$ y $G = \sum_m \gamma h_m h_m^* = I$. ♦

El número O_m definido en (118) es una métrica numérica del límite para el cual el vector h_m es ortogonal al resto del marco. Es ortogonal si y sólo si $O_m = 0$ y es "casi ortogonal" si $0 < O_m \ll N_m$. Esto es:

$$O = \sup_m O_m \quad (120)$$

que es el límite hacia el cual es ortogonal (no necesariamente ortonormal). O es llamado índice de ortogonalidad del marco. Si H_m está normalizado y limitado por $G = CI$, entonces (119) prueba que $O_m = C - \gamma \forall m \in M$ y principalmente, O_m es independiente de m .

Corolario.

Sea H_M un marco discreto normalizado con métrica contable. Entonces H es autorrecíproco ($G = I$) si y solo si H_M es una base ortonormal.

El corolario anterior se refiere a los marcos autorrecíprocos por lo que es necesario contar con un método para obtener un marco autorrecíproco de un marco cualquiera. Esto involucra obtener $G^{-1/2}$ para lo que requerimos una matriz H positiva. $H^{1/2}$ se define como la matriz cuyos valores característicos son la raíz cuadrada de los valores característicos de H y el cuadrado de $H^{1/2}$ es H por lo que $G^{-1/2}$ se obtiene de forma similar que G^{-1} .

$$\begin{aligned} G^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\alpha}(I-E)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \sqrt{2} \left[I + \frac{1}{2}E + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}E^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}E^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (121)$$

y converge uniformemente conforme $-\delta I \leq E \leq \delta I$ y $0 \leq \delta < 1$. Nuevamente, la serie converge rápidamente si el marco es compacto ($\delta \ll 1$) y el operador resultante satisface:

$$B^{-\frac{1}{2}}I \leq G^{-\frac{1}{2}} \leq A^{-\frac{1}{2}}I \quad (122)$$

por lo que ahora podemos definir:

$$\tilde{h}_m \equiv G^{-\frac{1}{2}}h_m \quad (123)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\check{G} &= \sum_{m \in M} \mu_m \check{h}_m \check{h}_m^* = & (124) \\
&= \sum_{m \in M} \mu_m G^{-1/2} h_m h_m^* G^{-1/2} = \\
&= G^{-1/2} G G^{-1/2} = I
\end{aligned}$$

donde $(G^{-1/2} h_m)^* = h_m^* (G^{-1/2})^* = h_m^* G^{-1/2}$ por lo que $\check{h}^m = \check{h}_m$, y \check{H}_M es autorrecíproco. En el teorema 11 y el corolario se podría considerar que \check{H}_M es una base ortonormal, pero no siempre. Y si $\mu_m = \gamma$ para m en M y $\check{N}_k \equiv \|\check{h}_k\|^2$ y $\check{O}_k = \check{N}_k^{-1} \sum_{m \neq k} \gamma \langle h_m, h_k \rangle^2$ la contraparte de (119) obliga a que $\gamma N_k + O_k = 1$, $m \neq k$ para toda $k \in M$. Para que \check{H}_M sea una base ortonormal es necesario que $\check{N}_k = \gamma^{-1}$, $\forall k \in M$, que en lo general no es cierto. De hecho:

$$\check{N}_k = \left\langle G^{-1/2} h_k, G^{-1/2} h_k \right\rangle = h_k^* G^{-1} h_k \quad (125)$$

y, generalmente, $\check{N}_k \neq N_k$ por lo que \check{H}_M no está normalizado aunque H_M sí lo esté. Además, si H_M es un submarco discreto de un marco continuo, entonces $\check{N}_k = N_k$, es decir, el multiplicar por $G^{-1/2}$ no altera la norma de h_k por lo que si H_M es normalizado y $\mu_m = \gamma$ para toda m , entonces $G = I$ y:

$$1 = \|h_m\|^2 = \sum_{k \in M} \gamma \langle \check{h}_k, \check{h}_m \rangle^2 = \gamma + \check{O}_m \quad \forall m \in M \quad (126)$$

De aquí que \check{O}_m es independiente de m , y el índice de ortogonalidad de H_M es $O = 1 - \gamma$ por lo que también ha quedado demostrado que $\gamma \leq 1$.

2. ANÁLISIS Y MUESTREO DE SEÑALES EN DOMINIOS

DISCRETOS.

*La flor se desvanece por sí misma
al crecer el fruto. Así se
desvanecerá tu yo interior al
crecer el divino dentro de ti.*

Vivekenanda

Una función $f(t)$ es llamada de banda limitada si su transformada de Fourier $\hat{f}(\omega)$ es válida dentro del intervalo $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$, donde Ω es el ancho de banda de f .

Como la frecuencia de f está limitada, la variación de $f(t)$ es lenta y su grado de precisión está en función de Ω , esto es, si Ω es pequeña, la variación es lenta. De aquí que, si una señal varía lentamente, puede ser interpolada a partir de conocer un conjunto de valores discretos, los cuales se toman por muestreo. A menor variación, menor es la frecuencia de muestreo de la señal. Lo anterior quedará mejor explicado en el siguiente tema.

2. 1. Teorema de Shannon.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\omega) = 0 \forall |\omega| > \Omega$. Entonces podemos reconstruir $f(t)$ a partir de muestreos, llevados a cabo cada $t_n = \frac{n}{2\Omega}$, $n \in \mathbb{Z}$ intervalos de tiempo, por la interpolación:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}[2\pi\Omega(t - t_n)]}{2\pi\Omega(t - t_n)} f(t_n) \quad (1)$$

Demostración. Obsérvese que:

$$\|f\|_{L^2(-\Omega, \Omega)}^2 = \int_{-\Omega}^{\Omega} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2)$$

por el teorema de Plancherel, donde $\hat{f} \in L^2(-\Omega, \Omega)$. Podemos expandir $\hat{f}(\omega)$ por medio de una serie de Fourier en el intervalo $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i \omega t_n} c_n \quad (3)$$

donde:

$$t_n = \frac{n}{2\Omega} \text{ y } c_n = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \omega t_n} \hat{f}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t_n} \hat{f}(\omega) d\omega = f(t_n) \quad (4)$$

Esto es, los coeficientes de Fourier en (3) son muestras tomadas de $f(t)$. Por lo que:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \omega t} \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\Omega} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \omega (t - t_n)} f(t_n) d\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\text{sen}[2\pi\Omega(t - t_n)]}{2\pi\Omega(t - t_n)} f(t_n) \end{aligned} \quad (5)$$

y se cumple para $L^2(\mathbb{R})$. Las funciones de banda limitada, al igual que el resto de las funciones, se extienden al plano complejo, por lo que la igualdad también se cumple en este plano. ♦

Como se puede observar $f(t)$ es una superposición de los exponenciales complejos $e_{\omega}(t) = e^{2\pi i \omega t}$ con $|\omega| \leq \Omega$ y que satisfacen:

$$\left| \frac{d}{dt} e_{\omega}(t) \right| = 2\pi |\omega| |e_{\omega}(t)| \leq 2\pi \Omega \quad (6)$$

De donde podemos demostrar que:

$$|f'(t)| \leq 2\pi \Omega C_f, \text{ donde } C_f \equiv \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty \quad (7)^1$$

La expresión anterior garantiza que $f(t)$ no crecerá o decaerá en mayor proporción a $2\pi\Omega$. Similarmente, la n -ésima derivada de f quedará limitada por $|f^{(n)}(t)| \leq (2\pi\Omega)^n$. Lo cual tiene sentido si las muestras de f se tomaron frecuentemente, es decir, si medimos $f(t_n)$ cada t_n períodos de tiempo, donde $t_n - t_{n-1}$ es muy pequeña. Así obtenemos $f(t)$ para todo t a través de una interpolación, siempre que los muestreos sean lo suficientemente densos.

El intervalo de tiempo entre cada muestra para el teorema de Shannon es $\Delta t = t_n - t_{n-1} = \frac{1}{2\Omega}$ y la razón de muestreo es $R \equiv \frac{1}{\Delta t} = 2\Omega$ muestras por unidad de tiempo. R es teóricamente el valor mínimo de muestras para obtener $f(t)$ totalmente. También es conocida como la razón de Nyquist. En la práctica, una señal necesita ser muestreada a una razón mayor que R por dos causas: primero, porque el muestreo y la interpolación no se ajustan exactamente a la señal teórica u original; y segundo porque un sobremuestreo reduce errores.

¹ Esta desigualdad es un caso especial de la desigualdad de Bernstein.

Otra característica de las funciones de banda limitada es que todo su análisis se extiende al plano complejo, como las funciones analíticas.

De hecho, sustituyendo $t \rightarrow t + iv \in \mathbb{C}$ en el análisis de Fourier, tenemos que $f(t)$ es:

$$f(t + iv) = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \omega (t - iv)} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (8)$$

la cual converge siempre que $f(t + iv)$ quede definida como una función entera¹.

El ancho de banda, Ω , está relacionado con la razón de crecimiento de $f(t + iv)$ en el plano complejo, pues las funciones analíticas están determinadas por sus valores en conjuntos discretos², por lo que $f(t)$ puede ser determinada a partir de muestras discretas $f(t_n)$ aunque el conjunto $\{t_n\}$ carezca de puntos de acumulación. El teorema de muestreo es una consecuencia de la razón de crecimiento de $f(t + iv)$.

2. 2. Muestreo en Tiempo y Frecuencia.

Hasta este momento hemos hablado de marcos y submarcos continuos. Ahora en este apartado, hablaremos de submarcos discretos G_p , los cuales tienen la característica de que por sí mismos forman un marco. Nos referiremos a dos tipos de ventanas en particular:

- Cuando g tiene un rango compacto en el tiempo, donde $g(u) = 0$ para toda u fuera del intervalo $a \leq u \leq b$ (por lo que la función está limitada en el tiempo).
- Cuando g es una función de banda limitada, con $\hat{g}(\omega) = 0$ para toda ω fuera del intervalo $\alpha \leq \omega \leq \beta$.

¹ Cuando $f(t + iv)$ no es una función de banda limitada, esto es, $\Omega \rightarrow \infty$, la integral diverge porque $e^{-2\pi i \omega v}$ tiende a infinito.

² Entiéndase como una analogía a los puntos de acumulación.

Es claro que g no puede ser ambos tipos de funciones al mismo tiempo. Si g es de banda limitada, entonces su análisis se extiende a funciones analíticas enteras, como la expresión (8). Una función entera es válida en cualquier intervalo, aunque no en forma idéntica. Esto es, que el comportamiento que presente en un intervalo no será el mismo que presente en otro, por lo que g no puede ser de tiempo limitado. Aplicando el mismo razonamiento cuando g es de tiempo limitado, entonces $\hat{g}(\omega)$ se extiende al plano de frecuencia compleja, por lo que g no puede ser de banda limitada y $\hat{g}(\omega)$ concentrarse en $[\alpha, \beta]$ o contrariamente, que g sea de banda limitada que se concentra en $[a, b]$ o bien que g sea una función que no se ajusta a ninguno de los casos anteriores, pero $g(t)$ y $\hat{g}(\omega)$ se concentren dentro de sus respectivos intervalos.

Suponiendo que contamos con una ventana que es de tiempo limitado y la señal f no necesariamente es de tiempo o de banda limitada, podemos obtener una versión del teorema de Shannon para la frecuencia, en el tiempo. Es decir que una señal localizada $f_t(u) \equiv \bar{g}(u-t)f(u)$ se mantiene de forma firme en el intervalo $[a+t, b+t]$, esto es, que la función se puede extender en el intervalo, a través de series de Fourier con frecuencias armónicas $\omega_m = \frac{m}{(b-a)}$:

$$f_t(u) = v \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i \omega_m u} c_m(t), \text{ donde } v \equiv (b-a)^{-1} \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned} c_m(t) &= \int_{a+t}^{b+t} e^{-2\pi i m v u} \bar{g}(u-t) f(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m v u} \bar{g}(u-t) f(u) du = \tilde{f}(m v, t) \end{aligned} \quad (10)$$

La expresión anterior explica que los coeficientes de Fourier de $f_t(u)$ son muestras de $\tilde{f}(\omega, t)$ en las frecuencias discretas $\omega_m = m v$, por lo que estamos hablando de un muestreo de funciones de tiempo limitado en frecuencias discretas y el intervalo de frecuencias v es recíproco al rango de la señal en el tiempo. Lo que buscamos es obtener

la señal $f(u)$ de la expresión (9), usando sólo valores discretos de t , lo que implica tomar muestras en el tiempo y la frecuencia. Es claro que (9) no está establecida fuera del intervalo $[a + t, b + t]$, ya que el lado izquierdo de la igualdad no está definido fuera de éste, mientras que el lado derecho tiene un comportamiento periódico. Para obtener una igualdad global, debemos multiplicar ambos lados de la expresión (9) por $g(u - t)$ y usar (10):

$$\begin{aligned} |g(u - t)|^2 f(u) &= \nu \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m \nu u} g(u - t) \tilde{f}(m\nu, t) = \\ &= \nu \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{m\nu, t}(u) \tilde{f}(m\nu, t) \end{aligned} \quad (11)$$

De donde obtenemos $f(t)$ si integramos con respecto a t y recordamos que $\int |g(u - t)|^2 dt = \|g\|^2$. Esto produce ciertos inconvenientes para obtener un submarco G_p , ya que la expresión que arroja la integral es una superposición semidiscreta de vectores de marco, pues la frecuencia es discreta y el tiempo continuo.

En lugar de esto podemos usar $\tau > 0$ y:

$$H_\tau(u) = \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(u - n\tau)|^2 \quad (12)$$

que es una aproximación a $\|g\|^2$ por medio de sumas de Riemann, pues:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} H_\tau(u) = \|g\|^2 \equiv C \quad (13)$$

Es claro que para toda $\tau > 0$, H_τ es periódica de período τ . Retomando (11), haciendo $t_n = n\tau$ y realizando la suma, tenemos que:

$$H_\tau(u)f(u) = \nu \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{m\nu, n\tau}(u) \tilde{f}(m\nu, n\tau) \quad (14)$$

Para obtener f es indispensable dividir por $H_\tau(u)$, además de garantizar que converja y es positiva. La convergencia no representa mayor discusión, por la forma en que se ha llevado a cabo la construcción, pues (12) está conformada sólo de un número finito de términos, esto porque el rango de g es compacto. Para asegurar que sea positiva es condición necesaria que $H_\tau > 0$ para $0 < \tau \leq b - a$, ya que de otra forma $H_\tau = 0$ cuando $b < u < a + \tau$. Es decir, no se puede obtener f a menos que $0 < \tau \leq 1$.

Para tener una reconstrucción numérica estable, es necesario algo más que $H_\tau > 0$. Asumiendo que el máximo de los mínimos de las constantes de $H_\tau(u)$ es positivo además de considerar ventanas que no son de tiempo limitado, será necesario asumir que (12) converge a una función constante pues el mínimo de los máximos de las constantes H_τ es finito. Sea:

$$A_\tau \equiv \inf_u H_\tau(u) > 0, \quad B_\tau \equiv \sup_u H_\tau(u) < \infty \quad (15)$$

Por lo visto en (13), es obvio que para tener la mejor ventana, es necesario :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} A_\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} B_\tau = C \quad (16)$$

De aquí que (15) se satisfaga con valores muy pequeños de τ . Si consideramos que (15) se cumple, entonces:

$$0 < A_\tau \leq H_\tau(u) \leq B_\tau < \infty \quad (17)$$

y podemos resolver (14) para $f(u)$. Por conveniencia será:

$$\begin{aligned} \Gamma_{m,n}(t) &= g_{m,n,\tau}(t) \\ \Gamma^{m,n}(t) &= H_\tau(t)^{-1} \Gamma_{m,n}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

La expresión (17) implica que $\|\Gamma^{m,n}\| \leq A_\tau^{-1} \|\Gamma_{m,n}\| = \frac{C}{A_\tau} < \infty$, pues $\Gamma^{m,n} \in L^2(\mathbb{R})$. Con esto tenemos que:

$$f(t) = v\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma^{m,n}(t) \tilde{f}(m\nu, n\tau) \tag{19}$$

por lo que todo ha quedado en términos de marcos.

Teorema 2.

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ una ventana compacta de rango $b - a \equiv \frac{1}{v}$, que satisface (17) para $0 < \tau < \frac{1}{2}$. Sea $P_{v,\tau}$ una latice regular, $\{(m\nu, n\tau) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ en el plano del tiempo y frecuencia con métrica $\mu_{v,\tau}$, que asigna el valor $v\tau$ a cada punto $(m\nu, n\tau)$. Entonces la familia de vectores $g_{\omega,t} \in G_p$ con $(\omega, t) \in P_{v,\tau}$, esto es:

$$G_{v,\tau} = \{g_{m\nu, n\tau} \equiv \Gamma_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z}\} \tag{20}$$

es un marco con parámetros en $P_{v,\tau}$. Cuyo operador métrico G_τ consiste en multiplicar H_τ por el dominio del tiempo:

$$(G_\tau f)(t) = H_\tau(t) f(t) \tag{21}$$

y cuyos límites de marco óptimos son A_τ y B_τ , que se relacionan con la constante de marco $C = \|g\|^2$ del marco continuo limitado G_p por la expresión:

$$A_\tau \leq C \leq B_\tau \tag{22}$$

Una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede obtenerse a partir de muestras de su transformada de Fourier con ventana en $P_{v,\tau}$ por:

$$f = \nu\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Gamma^{m,n} \tilde{f}(m\nu, n\tau) \quad (23)$$

y la unidad resolución es:

$$\nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Gamma^{m,n} \Gamma_{m,n}^* = I \quad (24)$$

donde $\Gamma_{m,n}^* = G_\tau^{-1} \Gamma_{m,n}$ son los vectores del marco recíproco $G^{\nu,\tau}$.

Demostración. Por las expresiones (21) y (14):

$$G_\tau f = \nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Gamma_{m,n} \Gamma_{m,n}^* f = \int \Gamma_{m,n} \Gamma_{m,n}^* f d\mu_{\nu,\tau}(m,n) \quad (25)$$

donde el lado derecho de la igualdad es la integral con respecto a $d\mu_{\nu,\tau}$, por definición (Capítulo 1), lo que demuestra que G_τ es el operador métrico de $G_{\nu,\tau}$. Para toda $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$, la definición de G_τ proporciona:

$$\langle f, G_\nu f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) H_\nu(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H_\nu(t) |f(t)|^2 dt \quad (26)$$

Por la expresión (17), $A_\tau \|f\|^2 \leq \langle f, G_\tau f \rangle \leq B_\tau \|f\|^2$, que es la condición de marco que buscábamos. Para probar (22), obsérvese que:

$$\int_0^\tau H_\tau(u) du = \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\tau |g(u - n\tau)|^2 du = \tau \|g\|^2 = \tau C \quad (27)$$

Integrando (17) en el intervalo $0 \leq u \leq \tau$ obtenemos (22). ♦

$P_{\nu,\tau}$ es una métrica contable que asigna el valor de uno a cada muestra (m, n) . En este caso el factor $\nu\tau$ en (19) y (23) es considerado por $\Gamma^{m,n}$. Esto es, que G_τ es

reemplazado por $G'_\tau \equiv (\nu\tau)^{-1}G_\tau = \left(\frac{(b-a)}{\tau}\right)G_\tau$, y los límites de marco son $A'_\tau = (\nu\tau)^{-1}A_\tau$ y $B'_\tau = (\nu\tau)^{-1}B_\tau$. También existe un factor extra, 2π , por usar $e^{\pm i\omega t}$ en lugar de $e^{\pm 2\pi i\omega t}$ en la transformada de Fourier, lo que significa que la frecuencia es medida en radianes (en lugar de ciclos) por unidad de tiempo y debemos cambiar ν por $\frac{\nu}{2\pi}$.

$G_{\nu,\tau}$ es un submarco discreto de G_p pues toda $\Gamma_{m,n} \in G_p$, pero no necesariamente pertenece a G^p pues $H_\tau(u)$ generalmente no es constante, por lo que $G^{\nu,\tau}$ no es un submarco de G^p . Entonces podemos garantizar a priori que todos los vectores de $\Gamma^{m,n}$ se puedan obtener de una traslación y modulación de una ventana (dentro de marcos continuos esto es seguro, gracias al hecho de que $g^{\omega,t} = C^{-1}g_{\omega,t}$). Esta es una propiedad muy importante, ya que de no contar con ella, cada $\Gamma^{m,n}$ se tendría que obtener de manera separada. Afortunadamente, esto es, por la periodicidad de H_i :

$$\begin{aligned}\Gamma^{m,n}(t) &= e^{2\pi i\omega t} \frac{g(t-n\tau)}{H_\tau(t)} = e^{2\pi i\omega t} \frac{g(t-n\tau)}{H_\tau(t-n\tau)} = \\ &= e^{2\pi i\omega t} \Gamma^{0,0}(t-n\tau)\end{aligned}\quad (28)$$

Por lo que todos los vectores $\Gamma^{m,n}$ se obtienen de $\Gamma^{0,0}$ por traslación y modulación.

G_p es un marco lo suficientemente compacto para τ , pues la suma que representa a G_τ en (21) tiende a CI conforme $\tau \rightarrow 0$. No necesariamente la suma es igual a su límite, por lo que $G_{\nu,\tau}$ no es limitado en lo general. El formalismo de la teoría de marcos puede considerar esta posibilidad y nos proporciona una unidad de resolución que adecua un análisis y síntesis en forma exacta. La desigualdad (22), sugiere que τ se incremente conforme $A \rightarrow 0$ o $B \rightarrow \infty$.

Consideremos una escala de $g: g'(t) = s^{-\frac{1}{2}}g\left(\frac{s}{t}\right)$ para $s > 0$, tal que $C \equiv \|g'\|^2 = \|g\|^2 = C$. Entonces el rango de g' es el intervalo $[a',b'] = [sa, sb]$, y

$v' = [b - a]^{-1} = s^{-1}v$. Siguiendo el mismo procedimiento anterior, ahora para $\tau' = s\tau$, tenemos que:

$$\begin{aligned} H_{v',\tau'}(t) &= \tau' \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g'(t - n\tau')|^2 = \\ &= \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| g\left(\frac{t}{s} - n\tau\right) \right|^2 = H_{v,\tau}\left(\frac{t}{s}\right) = \end{aligned} \quad (29)$$

Y, además:

$$\begin{aligned} A_{v',\tau'} &= \inf_t H_{v',\tau'}(t) = A_{v,\tau} \\ B_{v',\tau'} &= \sup_t H_{v',\tau'}(t) = B_{v,\tau} \end{aligned} \quad (30)$$

Esto es, que el conjunto de vectores $\Gamma'_{m,n} = g'_{mv',n\tau'}$ generado por g' por traslaciones y modulaciones y con parámetros en $P_{v',\tau'}$ también forman un marco con límites de marco. Esto demuestra que $A_{v,\tau}$ y $B_{v,\tau}$ dependen solo de $v\tau$ y que todas las funciones de ventana se relacionan por su escala.

Es claro que:

$$\rho(v,\tau) = \frac{1}{v\tau} = \frac{b-a}{\tau} \quad (31)$$

es el radio del ancho de la ventana para los intervalos entre muestreos. Esto mide la redundancia de nuestros marcos discretos. Como $\tau \rightarrow 0$ para una v cualquiera, $G_{v,\tau}$ se vuelve infinitamente redundante. Otra forma de entender la redundancia es interpretando a $\rho(v,\tau)$ como la densidad de muestreo en el plano del tiempo y la frecuencia, ya que tenemos exactamente una muestra en cada celda, con $\Delta t = \tau$ y $\Delta \omega = v$. El área de esta celda es $\Delta A = v\tau$, que se mide en ciclos o repeticiones. La desigualdad $v\tau \leq 1$, que es necesaria para la reconstrucción, es una manifestación del principio de incertidumbre. Esto es, que necesitamos al menos una muestra por cada ciclo, para obtener la señal. La relación con el principio de incertidumbre es que la desigualdad $v\tau \leq 1$ no requiere de un gran desarrollo, pues puede tomar lugar en una celda del área $\Delta A = 1$ en el plano del

tiempo y la frecuencia, por lo que una muestra en cada celda es suficiente para determinar f .

Para hacer esto más eficiente, será deseable tomar τ lo más grande posible, para minimizar el número de muestreos. Si tomamos el máximo valor de $\tau = b - a$, entonces $|g(u - t_n)|^2$ y $|g(u - t_{n-1})|^2$ no se empalmarán, lo que obliga a $g(t)$ a ser discontinua y así satisfacer (17). Tal discontinuidad en g conduce a una discontinuidad en \hat{f}_t , lo que significa que $\hat{f}_t(\omega) \equiv \tilde{f}(\omega, t)$ contiene una componente de alta frecuencia para producirla. Estas discontinuidades en g introducen ruido innecesario en la transformada de Fourier con ventana. Si queremos hacer esto más eficiente, debemos tomar $\tau \approx b - a$. Mientras se mantenga constante el valor del límite inferior A_τ y g siga siendo continua, entonces g se verá obligada a cambiar cerca de los puntos críticos de su rango, para satisfacer (17). Esto nuevamente introduce componentes de alta frecuencia en la transformada de Fourier con ventana, por lo que más coeficientes $\tilde{f}(m\nu, n\tau)$ con valores altos de m son significativamente grandes. Por ello, una reducción del rango de muestreo en el tiempo, incrementa inevitablemente el número de muestras en la frecuencia. La única solución es que si g es permanentemente continua debemos hacer A_τ lo suficientemente pequeño conforme $\tau \rightarrow b - a$, pues $H(t)$ debe ser pequeña en el empalme de las dos ventanas consecutivas. Así la reconstrucción es inestable y es lo que queremos evitar. Por esta razón, es mejor aceptar que $g(t)$ es continua y dar márgenes entre τ y $b - a$ lo que sugiere un sobre muestreo, que es preferible. Esto es exactamente el tipo de intercambio característico del principio de incertidumbre.

La ecuación (19) es similar a la fórmula de Shannon (1) excepto que la señal se toma ahora en el tiempo y la frecuencia y no sólo en el tiempo. No es necesario asumir que f es de banda limitada pues la expresión es aplicable para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$.

La interpolación dada a una muestra por ciclo, también se aplica al teorema de Shannon. El muestreo se lleva a cabo sólo en el tiempo, con intervalos $\Delta t \leq \frac{1}{2\Omega}$ donde Ω es el ancho de banda de f . 2Ω es el ancho del rango de $\hat{f}(\omega)$, y $\Delta\omega\Delta t \leq 1$.¹

Teorema 3.

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$ una ventana de banda limitada, con $\hat{g}(\omega) = 0$ fuera de $\alpha \leq \omega \leq \beta$.

Sea $\tau = (\beta - \alpha)^{-1}$, $0 < \nu \leq \frac{1}{\tau}$, y defínase:

$$K_\nu(\omega) = \nu \sum_{m \in \mathbb{Z}} |g(\omega - m\nu)|^2 \quad (32)$$

como una aproximación discreta a $\|\hat{g}\|^2 = C$. Supóngase que:

$$A'_\nu \equiv \inf_{\omega} K_\nu(\omega) > 0 \quad \text{y} \quad B'_\nu \equiv \sup_{\omega} K_\nu(\omega) < \infty \quad (33)$$

Sean $P_{\nu,\tau}$ y $G_{\nu,\tau}$ definidos por el teorema 2. Entonces $G_{\nu,\tau}$ es un marco con parámetros dados por $P_{\nu,\tau}$. Su operador métrico es el resultado del producto K_ν en la frecuencia:

$$(G_\nu f)^\wedge(\omega) = K_\nu(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (34)$$

y las constantes óptimas son A'_ν y B'_ν . Que se relacionan con la constante de marco $C = \|\hat{g}\|^2$ del marco continuo limitado, G_p , por:

$$A'_\nu \leq C \leq B'_\nu \quad (35)$$

¹ Esta es una forma más fácil de entender la razón de muestreo de Nyquist

Una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede obtener de muestreos en su transformada de Fourier con ventana en $P_{\nu,\tau}$ por:

$$\hat{f}(\omega) = \nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{\Gamma}^{m,n}(\omega) \hat{f}(m\nu, n\tau) \quad (36)$$

y la unidad de resolución:

$$\nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Gamma^{m,n} \Gamma_{m,n}^* = I \quad (37)$$

donde $\Gamma^{m,n} \equiv G^{-1} \Gamma_{m,n}$ son los vectores de marco de $G^{\nu,\tau}$.

Demostración. La expresión (32), es periódica de período ν para $\nu > 0$. Sumando sobre $\omega = n\omega$, tenemos que:

$$K_\nu(\omega) \hat{f}(\omega) = \nu\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_{m\nu, n\tau}(\omega) \hat{f}(m\nu, n\tau) \quad (38)$$

por (38) y (34):

$$(G_\nu f)^\wedge = \nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Gamma_{m,n} \Gamma_{m,n}^* \hat{f} = \int \Gamma_{m,n} \Gamma_{m,n}^* \hat{f} d\mu_{\nu,\tau} \quad (39)$$

con lo que hemos demostrado que G_ν es el operador métrico de $G_{\nu,\tau}$. Para toda $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, la definición de G_ν proporciona:

$$\langle \hat{f}, G_\nu \hat{f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) K_\nu(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 K_\nu(\omega) d\omega \quad (40)$$

como (33) implica que $A'_\nu \|f\|^2 \leq \langle \hat{f}, G_\nu \hat{f} \rangle \leq B'_\nu \|f\|^2$, tenemos la condición de marco necesaria.

Para demostrar (35), sea:

$$\int_0^v K_v(\omega) d\omega = v \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^v |g(\omega - n\nu)|^2 d\omega = v \|g\|^2 = vC \quad (41)$$

integrando $0 \leq A'_v \leq K_v(\omega) \leq B'_v < \infty$ en $0 < \omega < v$, obtenemos (35). ♦

2. 2. 1. Muestreo en el Tiempo y Muestreo en el Tiempo y la Frecuencia.

Supongamos que $\hat{f}(\omega) = 0$ fuera del intervalo de la frecuencia de banda $|\omega| \leq \Omega$ para $\Omega > 0$. Para la ventana, se toma una $g(t)$ tal que $\hat{g}(\omega) = P_\Omega(\omega)$ donde:

$$P_\Omega(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega \\ 0, & |\omega| > \Omega \end{cases} \quad (42)$$

Llamamos a P_Ω el Filtro Ideal, con ancho de banda Ω , ya que al multiplicar la frecuencia por P_Ω , son filtrados los componentes de la frecuencia, cuya $|\omega| > \Omega$, dejando sólo los componentes no afectados. Haciendo $\hat{g} = P_\Omega$, tenemos:

$$g(t) = \check{P}_\Omega(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i \omega t} d\omega = \frac{\text{sen}(2\pi \Omega t)}{\pi t} \quad (43)$$

Ya que \hat{g} tiene un rango compacto, el teorema 3 se aplica al intervalo de muestreo en el tiempo $\tau = (2\Omega)^{-1}$. En este caso, podemos tomar el intervalo de muestreo en la frecuencia máxima $\nu = \frac{1}{\tau} = 2\Omega$, pues $K(\omega) = 2\Omega$, por lo que (33) es ahora $A'_\nu = B'_\nu = \nu$ (excepto cuando ω es un múltiplo de Ω , y este conjunto es insignificante, pues su métrica es cero). Todos los términos con $m \neq 0$ en (36) no son válidos. Esto porque:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(2m\Omega, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\omega - 2m\Omega)t} \tilde{g}(\omega - 2m\Omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega t} \hat{f}(\omega + 2m\Omega) d\omega\end{aligned}\quad (44)$$

y el rango de $\hat{f}(\omega + 2m\Omega)$ es $-(1+2m)\Omega \leq \omega \leq (1-2m)\Omega$. Además, (40) muestra que $\tilde{f}(0, t) = f(t)$, por lo que:

$$\tilde{f}(m\Omega, n\tau) = \delta_m^0 f(n\tau) \quad (45)$$

en (36). También:

$$\Gamma^{0,n}(t) = \frac{1}{2\Omega} \Gamma_{0,n}(t) = \frac{1}{2\Omega} g(t - n\tau) = \frac{\text{sen}[2\pi\Omega(t - n\tau)]}{2\pi\Omega(t - n\tau)} \quad (46)$$

Sustituyendo (45) y (46) en (36) y tomando la inversa de la transformada de Fourier tenemos la fórmula de muestreo de Shannon.

Para señales de banda limitada, el teorema 3 conduce a una generalización del teorema de Shannon. Nuevamente, supóngase que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$. Para un entero $M \geq 0$, sea $L = 2M + 1$, y sea una ventana $g(t) = P_{\frac{L}{2}}(t)$, entonces $\tau = \frac{L}{2\Omega}$. Si tomamos el intervalo de muestreo en la frecuencia máxima $\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{2\Omega}{L}$, $K(\omega) \equiv \frac{2\Omega}{L}$, según (33). Ahora bien, la suma sobre m en (36), se reduce a una suma finita en $|m| \leq M$, pues $L = 2M + 1$ subbandas, de ancho $\frac{2\Omega}{L}$, son necesarias para barrer el ancho de banda de \hat{f} . Por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.

Sea f una función de banda limitada con $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \Omega$, sea $M = 0, 1, \dots$, un entero y sea:

$$\nu = \frac{2\Omega}{2M+1}, \quad \tau = \frac{1}{\nu} \quad (47)$$

Entonces:

$$f(t) = \sum_{|m| \leq M} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i m \nu t} \frac{\text{sen}[2\pi\Omega(t - n\tau)]}{2\pi\Omega(t - n\tau)} \tilde{f}(m\nu, n\tau) \quad (48)$$

Por lo que la obtención de la señal de banda limitada, puede ser hecha en paralelo en $2M + 1$ subbandas de frecuencia diferentes B_m , ($m = -M, \dots, M$) de $[-\Omega, \Omega]$, donde

$$B_m = \left\{ \omega : |\omega - m\nu| \leq \frac{\Omega}{L} \right\} = \left[\frac{(2m-1)}{2M+1} \Omega, \frac{(2m+1)}{2M+1} \Omega \right] \quad (49)$$

Demostración.

$$B_m = \left\{ \omega : |\omega - m\nu| \leq \frac{\Omega}{L} \right\} = \left\{ \omega : -\frac{\Omega}{L} \leq \omega - m\nu \leq \frac{\Omega}{L} \right\} \quad (50)$$

para $\Omega > 0$, como $L = 2M + 1$, $\nu = \frac{2\Omega}{2M+1}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{\Omega}{L} &\leq \omega - m\nu \leq \frac{\Omega}{L} \\ -\frac{\Omega}{2M+1} &\leq \omega - m\left(\frac{2\Omega}{2M+1}\right) \leq \frac{\Omega}{2M+1} \end{aligned} \quad (51)$$

Sumando a (51) $\frac{2m\Omega}{2M+1}$:

$$\frac{2m-1}{2M+1}\Omega \leq \omega \leq \frac{2m+1}{2M+1}\Omega \quad (52)$$

Esto es:

$$B_m = \left\{ \omega : |\omega - m\Omega| \leq \frac{\Omega}{L} \right\} = \left[\frac{(2m-1)}{2M+1}\Omega, \frac{(2m+1)}{2M+1}\Omega \right] \cdot \blacklozenge$$

Una ventaja que tiene este esquema, es que el rango de muestreo para cada subbanda es:

$$R_M = \frac{2\Omega}{2M+1} = \frac{R_{\text{Nyquist}}}{2M+1} \quad (53)$$

Cuando $M = 0$, (48) es la fórmula de Shannon con razón de muestreo de Nyquist. Para $M > 1$, un rango más amplio puede ser usado en cada subbanda. Lo ideal sería usar la menor razón de muestreo en subbandas de baja frecuencia, pues las frecuencias bajas varían en forma muy lenta a diferencia de las frecuencias altas.

En la práctica, sólo un número finito de operaciones pueden ser calculadas. Por lo que las sumas en m y n en (19) y (36), así como las sumas en n en (48), deben ser truncadas. Esto es, la reconstrucción en todos los casos es una aproximación por medio de una suma finita:

$$f_{MN}(u) = v\tau \sum_{|m| \leq M} \sum_{|n| \leq N} \Gamma^{m,n}(u) \tilde{f}(m\Omega, n\tau) \quad (54)$$

Esta frecuencia es buena si la ventana está bien ubicada en la frecuencia y en el tiempo y si M y N son lo suficientemente grandes.

2. 2. 2. Submarcos Discretos en Tiempo y Frecuencia.

Supóngase que tenemos una función ventana $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que ni g ni \hat{g} tienen rango compacto. Sea $\upsilon > 0$, $\tau > 0$, $P_{\upsilon,\tau}$ y $G_{\upsilon,\tau}$ satisfacen los teoremas 2 y 3. $G_{\upsilon,\tau}$ no puede ser un marco si $\upsilon\tau > 1$.

Aunque no es condición necesaria y suficiente para que $G_{\upsilon,\tau}$ sea un marco cuando $\upsilon\tau \leq 1$, es de gran ayuda dar dos condiciones, una necesaria y otra suficiente, las cuales están estrechamente ligadas con otras condiciones. Sabemos que $G_{\upsilon,\tau}$ es un marco y estimamos sus límites de marco, por lo que podemos usar el esquema de aproximación recursiva para hallar el marco recíproco y así reconstruir una señal con los valores de su transformada de Fourier con ventana tomados de $P_{\upsilon,\tau}$. Sea:

$$\begin{aligned} H_\tau(t) &= \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(t - n\tau)|^2 \\ K_\tau(\omega) &= \tau \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\omega - m\upsilon)|^2 \end{aligned} \tag{55}$$

que son aproximaciones discretas a $\|g\|^2$ y $\|\hat{g}\|^2$ por medio de sumas de Riemann por lo que si $g(t)$ y $\hat{g}(\omega)$ son continuas:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} H_\tau(\omega) &= \|g\|^2 = C \\ \lim_{\upsilon \rightarrow 0^+} K_\upsilon(\omega) &= \|\hat{g}\|^2 = C \end{aligned} \tag{56}$$

Sea:

$$\begin{aligned} A_\tau &= \inf_t H_\tau(t), & B_\tau &= \sup_t H_\tau(t) \\ A'_\upsilon &= \inf_\omega K_\upsilon(\omega), & B'_\upsilon &= \sup_\omega K_\upsilon(\omega) \end{aligned} \tag{57}$$

Cuando ambas g y \hat{g} se comportan de forma regular, (56) sugiere:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow 0^+} A_\tau &= \lim_{\tau \rightarrow 0^+} B_\tau = C \\ \lim_{\nu \rightarrow 0^+} A'_\nu &= \lim_{\nu \rightarrow 0^+} B'_\nu = C\end{aligned}\quad (58)$$

De donde para una ν y τ lo suficientemente pequeñas, se cumple:

$$\begin{aligned}0 < A_\tau &\leq H_\tau(t) \leq B_\tau < \infty \\ 0 < A'_\nu &\leq K_\nu(t) \leq B'_\nu < \infty\end{aligned}\quad (59)$$

Por lo teoremas 2 y 3:

$$0 < A_\tau \leq C \leq B_\tau < \infty \text{ y } 0 < A'_\nu \leq C \leq B'_\nu < \infty \quad (60)$$

De donde g es de tiempo limitado y $G_{\nu,\tau}$ es un marco, y entonces los límites de marco óptimos para $G_{\nu,t}$ son A'_ν y B'_ν . Los límites de marco (cuando $G_{\nu,\tau}$ es un marco), dependen de ν y τ y no pueden ser calculados exactamente.

Teorema 5. Condición Necesaria.

Sea $G_{\nu,t}$ un submarco de G_p , parametrizado por $P_{\nu,\tau}$, con límites de marco $0 < A_{\nu,\tau} \leq B_{\nu,\tau} < \infty$. Entonces $H_\tau(t)$ y $K_\nu(\omega)$ satisfacen las desigualdades:

$$\begin{aligned}0 < A_{\nu,\tau} &\leq H_\tau(t) \leq B_{\nu,\tau} < \infty \\ 0 < A_{\nu,\tau} &\leq K_\nu(t) \leq B_{\nu,\tau} < \infty\end{aligned}\quad (61)$$

Por lo que los límites de marco de $G_{\nu,t}$ están relacionados con la constante de marco C de G_p , por:

$$A_{\nu,\tau} \leq C \leq B_{\nu,\tau} \quad (62)$$

Demostración. Por transitividad, obtenemos (62) de (61) y (27). ♦

Teorema 6. Condición Suficiente.

Sea $g(t)$ tal que:

$$|g(t)| \leq N(1+|t|)^{-b} \quad (63)^1$$

para $b > 1$ y $N > 0$. Sea $\tau > 0$ y supóngase que:

$$A_\tau \equiv \inf_t H_\tau > 0, \quad B_\tau \equiv \sup_t H_\tau < \infty \quad (64)$$

entonces, existe una frecuencia inicial $\nu_0(\tau) > 0$ y para toda $0 < \nu < \nu_0(\tau)$ un número $\delta(\nu, \tau)$ con $0 \leq \delta(\nu, \tau) < A_\tau$, tal que:

$$\begin{aligned} A_{\nu, \tau} &\equiv A_\tau - \delta(\nu, \tau) \\ B_{\nu, \tau} &\equiv B_\tau + \delta(\nu, \tau) \end{aligned} \quad (65)$$

son los límites de marco para $G_{\nu, \tau}$, es decir, el operador:

$$G_{\nu, \tau} \equiv \nu \tau \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \Gamma_{m, n} \Gamma_{m, n}^* \quad (66)$$

satisface $A_{\nu, \tau} I \leq G_{\nu, \tau} \leq B_{\nu, \tau} I$.

Demostración. Supongamos que g es continua con rango compacto en $[a, b]$ y $g(t) \neq 0$ en (a, b) . Entonces el teorema 2 demuestra que $G_{\nu, \tau}$ es un marco si y solo si $0 < t < b - a \equiv \frac{1}{\nu}$; como $A_\tau > 0$ si $0 < \tau < \frac{1}{\nu}$, pero $A_\tau = 0$ si $\tau = \frac{1}{\nu}$. Por lo que este teorema impone $\nu_0(\tau) = \frac{1}{\tau}$.

¹ Condición de Regularidad

Cabe aclarar que no es necesario que $A_{\nu,\tau}$ y $B_{\nu,\tau}$ sean los límites de marco óptimos. Si tomamos $0 < \nu < \nu_0(\tau)$ tal que $G_{\nu,\tau}$ garantice un marco, podemos afirmar que los límites de marco satisfacen:

$$0 < A_{\nu,\tau} \leq A_{\nu,\tau}^{\text{opt}} \leq B_{\nu,\tau}^{\text{opt}} \leq B_{\nu,\tau} < \infty \quad (67) \spadesuit$$

La expresión (65), junto con $\delta(\nu, \tau)$, es llamada estimación de los límites de marco óptimos.

Para corroborar la importancia de los teoremas 5 y 6, sea $G_{\nu,\tau}$ un marco cuya existencia está avalada por el teorema 6, lo cual implica que:

$$\begin{aligned} A_{\nu,\tau} &\leq \inf_t H_\tau(t) = A_\tau \\ B_{\nu,\tau} &\geq \sup_t H_\tau(t) = B_\tau \end{aligned} \quad (68)$$

Esta es una afirmación un poco más débil que (65) (si tenemos forma de obtener $\delta(\nu, \tau)$). De hecho, esto demuestra que la diferencia entre la condición necesaria del teorema 5 y la condición suficiente del teorema 6, es el factor $\delta(\nu, \tau)$.

Por la simetría de la transformada de Fourier con ventana con respecto a la transformada de Fourier, el teorema 6 puede demostrarse invirtiendo los papeles del tiempo y la frecuencia. Esto es, iniciar con $\nu > 0$ y suponer que $A'_\nu \equiv \inf_\omega K_\nu(\omega) > 0$ y $B'_\nu \equiv \sup_\omega K_\nu(\omega) < \infty$. Sea $\hat{g}(\omega)$, que satisface la condición de regularidad. Entonces existe un intervalo de tiempo inicial, $\nu_0(\tau) > 0$, y para toda $0 < \tau < \tau_0(\nu)$, existe un número $0 \leq \delta'(\nu, \tau) < A'_\nu$, tal que:

$$\begin{aligned} A'_{\nu,\tau} &\equiv A'_\nu - \delta'(\nu, \tau) \\ B'_{\nu,\tau} &\equiv B'_\nu + \delta'(\nu, \tau) \end{aligned} \quad (69)$$

son también límites de marco. En general, estos nuevos límites diferirán de los anteriores. El mejor conjunto de límites es aquel que se obtiene de tomar unos $A_{v,\tau}$ y $A'_{v,\tau}$ más grandes, $B_{v,\tau}$ y $B'_{v,\tau}$ más pequeños.

Para el caso cuando g tiene un rango compacto, $G_{v,\tau}$ es un submarco de G_p , pero en general $G^{u,\tau}$ no es un submarco de G^p . Es importante saber que los vectores se pueden obtener todos a partir de un solo vector por traslaciones y modulaciones.

Definamos un operador T de traslación y un operador M de modulación:

$$(Tf)(t) = f(t-r) \text{ y } (Mf)(t) = e^{2\pi i b t} f(t) \quad (70)$$

Entonces, todos los valores de $G_{v,\tau}$ se generan a partir de g por potencias de T y M , esto es:

$$\Gamma_{m,n} = M^m T^n g \quad (71)$$

y, como se mencionó en el capítulo anterior, ambos operadores son conmutativos con respecto al operador métrico (66), es decir:

$$TG_{v,\tau} = G_{v,\tau}T, \quad MG_{v,\tau} = G_{v,\tau}M \quad (72)$$

Consecuentemente T y M conmutan con $G_{v,\tau}^{-1}$ y:

$$\Gamma^{m,n} \equiv G_{m,n}^{-1} \Gamma_{m,n} = G_{m,n}^{-1} M^m T^n g = M^m T^n G_{m,n}^{-1} g \quad (73)$$

lo que hace que $\Gamma^{m,n}$ se obtenga de $G_{v,\tau}^{-1}g$ por traslación y modulación, de la misma forma en que se obtuvo $\Gamma_{m,n}$ de g .

El teorema 6 no se aplica cuando $v\tau = 1$, ya que $v < v_0(\tau) \leq \tau^{-1}$. Aunque existen marcos discretos con $v\tau = 1$, la construcción en la sección 2. 2 sugiere requerir de un

comportamiento caótico de $g(t)$ o $\hat{g}(\omega)$, por lo que para resolver esto es necesario hacer uso del teorema de Balian.

Teorema 7. Teorema de Balian.

Sea $G_{\nu,\tau}$ un marco con $\nu\tau = 1$. entonces al menos una de las siguientes igualdades se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 dt = \infty \text{ o } \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega = \infty \quad (74)$$

Esto es, que g decrezca rápidamente en el tiempo o \hat{g} lo haga en la frecuencia.

Demostración. Para demostrar este teorema, haremos uso de la transformada de Zak¹. Si asumimos que $G_{\nu,\tau}$ es un marco, entonces:

$$\sum_{\nu,\tau} |\langle f, G_{\nu,\tau} \rangle|^2 = \int_0^1 \int_0^1 |Zf(s,t)|^2 |Zg(s,t)|^2 dt ds \quad (75)$$

y como Z es un operador unitario, tenemos que:

$$0 < A \leq |Zg(s,t)|^2 \leq B < \infty \quad (76)$$

Los vectores de marco duales están dados por:

$$\tilde{g}_{\nu,\tau} = (F^*F)^{-1} g_{\nu,\tau} \quad (77)$$

Como $Z(F^*F)Z^{-1}$ es igual a multiplicar por $|Zg|^2$, se sigue que:

$$Z\tilde{g}_{\nu,\tau} = |Zg|^2 Zg_{\nu,\tau} \quad (78)$$

¹ Daubechies I, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia, 1992.

O:

$$\begin{aligned} (\tilde{Zg}_{v,\tau})(s,t) &= |Zg(s,t)|^{-2} e^{2\pi i v s} e^{-2\pi i t t} (Zg)(s,t) = \\ &= e^{2\pi i v s} e^{-2\pi i t t} |Zg(s,t)|^{-1} \end{aligned} \quad (79)$$

que pertenece a \mathfrak{Z}^1 . Es decir:

$$\tilde{g}_{v,\tau}(t) = e^{2\pi i v t} g(t - \tau) \quad (80)$$

con $Z\tilde{g} = \frac{1}{Zg}$.

Ahora, supongamos que $\int t^2 |g(t)|^2 dt < \infty$, $\int \omega^2 |g(\omega)|^2 d\omega < \infty$, es decir que $Tg, Mg \in L^2(\mathbb{R})$, que es una contradicción, lo que terminará demostrando el teorema. Como $Tg, Mg \in L^2(\mathbb{R})$, tenemos que:

$$\partial_s(Zg), \partial_t(Zg) \in L^2([0,1]^2) \quad (81)$$

Por lo que:

$$\partial_s Z\tilde{g} = (\overline{Zg})^{-2} \overline{\partial_s Zg} \quad \text{y} \quad \partial_t Z\tilde{g} = (\overline{Zg})^{-2} \overline{\partial_t Zg} \quad (82)$$

que también pertenecen a $L^2([0,1]^2)$; y $T\tilde{g}, M\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$.

También se debe cumplir que:

¹ Definimos al subespacio \mathfrak{Z} como $\mathfrak{Z} = \{F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}; F(s, t+1) = F(s, t), F(s+1, t) = e^{2\pi i t} F(s, t)\}$ y $\|F\|_{\mathfrak{Z}}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |F(s, t)|^2 ds dt < \infty$

$$\langle \tilde{g}, g_{v,\tau} \rangle = \langle Z\tilde{g}, Zg_{v,\tau} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 Z\tilde{g}(s,t) \overline{Zg(s,t)} e^{-2\pi i u s} e^{-2\pi i t \tau} dt ds = \delta_{v_0} \delta_{\tau_0} \quad (83)$$

similarmente:

$$\langle g, \tilde{g}_{v,\tau} \rangle = \delta_{v_0} \delta_{\tau_0} \quad (84)$$

Como $Tg, Mg \in L^2(\mathbb{R})$ y $(g_{v,\tau})_{v,\tau \in \mathbb{Z}}, (\tilde{g}_{v,\tau})_{v,\tau \in \mathbb{Z}}$ forman un marco dual, tenemos que:

$$\langle Tg, M\tilde{g} \rangle = \sum_{v,\tau} \langle Tg, \tilde{g}_{v,\tau} \rangle \langle g_{v,\tau}, M\tilde{g} \rangle \quad (85)$$

Pero:

$$\begin{aligned} \langle Mg, \tilde{g}_{v,\tau} \rangle &= \int tg(t) e^{-2\pi i v t} \overline{\tilde{g}(t-\tau)} dt = \\ &= \int g(t) e^{-2\pi i v t} (t-\tau) \overline{\tilde{g}(t-\tau)} dt = \\ &= \langle g_{-v,-\tau}, Mg \rangle \end{aligned} \quad (86)$$

porque $\langle g, \tilde{g}_{v,\tau} \rangle = \delta_{v_0} \delta_{\tau_0}$.

Similarmente, para $\langle g_{v,\tau}, T\tilde{g} \rangle = \langle Tg, \tilde{g}_{-v,-\tau} \rangle$. Como consecuencia:

$$\langle Tg, M\tilde{g} \rangle = \sum_{v,\tau} \langle Mg, \tilde{g}_{-v,-\tau} \rangle \langle g_{-v,-\tau}, T\tilde{g} \rangle = \langle Mg, T\tilde{g} \rangle \quad (87)$$

donde el último término está bien definido, porque $Tg, Mg \in L^2(\mathbb{R})$.

Pero $\langle Tg, M\tilde{g} \rangle = \langle Mg, T\tilde{g} \rangle$ es imposible, pues para dos funciones f_1 y f_2 que satisfacen $|f_j(t)| \leq C(1+t^2)^{-1}$, $|\hat{f}_j(\omega)| \leq C(1+\omega^2)^{-1}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle Tf_1, Mf_2 \rangle &= \int tf_1(t) \overline{if'_2(t)} dt = \\
&= - \int [tf'_1(t) + f_1(t)] f_2(t) dt = \\
&= -i \langle f_1, f_2 \rangle + \langle Mf_1, Tf_2 \rangle
\end{aligned} \tag{88}$$

Por otro lado, como $Tg, Mg \in L^2(\mathbb{R})$, existe una g_n que satisface $|g_n(t)| \leq C(1+t^2)^{-1}$, $|\hat{g}_n(\omega)| \leq C(1+\omega^2)^{-1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Mg_n = Mg$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Tg_n = Tg$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\langle Mg, T\tilde{g} \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Mg_n, T\tilde{g}_n \rangle = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} [\langle Tg_n, M\tilde{g}_n \rangle + i \langle g_n, \tilde{g}_n \rangle] = \\
&= \langle Tg, M\tilde{g} \rangle + i \langle g, \tilde{g} \rangle
\end{aligned} \tag{89}$$

Retomando (88), tenemos que $\langle g, \tilde{g} \rangle = 0$, y según (84), $\langle g, \tilde{g} \rangle = 1$, lo cual contradice el teorema y, consecuentemente, lo demuestra. ♦

Por tanto la representación completa de un marco $G_{\nu, \tau}$ con ventanas gaussianas existe. Sea $g(t) = Ne^{-\alpha t^2}$, para $N, \alpha > 0$. $G_{\nu, \tau}$ no puede ser un marco si $\nu\tau > 1$. Por lo que una condición suficiente y necesaria para que $G_{\nu, \tau}$ sea un marco es que $0 < \nu\tau < 1$, cuando la ventana es gaussiana¹.

Los marcos discretos $G_{\nu, \tau}$ no consideran todas las posibilidades, ya que sólo incluyen latices regulares es decir, $\Delta t = \text{cte}$, $\Delta \omega = \text{cte}$, estas latices son paralelas a los ejes.

Aunque para latices regulares los teoremas 2 y 6 no agotan todas las opciones ya que existe un método de deformación para que a partir de un marco dado se obtenga toda la familia de marcos relacionados. Este método proporciona marcos que no son de tipo $G_{\nu, \tau}$ pero conservando los límites de marco. Algunos de estos marcos usan latices regulares en

¹ Bargmann en 1971 demostró que, para $\nu\tau > 1$, $\Gamma_{m,n}$ expande $L^2(\mathbb{R})$, pero no proporciona una fórmula de reconstrucción. Utilizó Teoría de Distribución de Valor para Funciones Enteras de Tipo Exponencial, lo que hace posible la relación de la transformada Gaussiana con la transformada de Bargmann.

el plano del tiempo y la frecuencia, las cuales están rotadas en los ejes. Otros usan latices irregulares, que se obtuvieron de latices regulares por una compresión o descompresión. Para entender este método, considérese el espacio de Hilbert, C^N , finito. Sea $R(0)$ una rotación del ángulo θ en el plano de C^N . Entonces definimos $R(\theta): C^N \rightarrow C^N$ como una rotación expandida por $\{b_1, b_2\}$. De hecho, $R(\theta)$ es unitaria, $R(\theta) + R(\theta) = I$. Por lo que $R(\theta)$ conserva el producto interno, los ángulos y las longitudes. Además, la familia $\{R(\theta): \theta \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de parámetros de operadores unitarios, por lo que $R(\theta_1) R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. Dado un marco $H_M = \{h_m\} \subset C^N$, sea $h_m^\theta \equiv R(\theta)h_m$ y $H_M^\theta \equiv \{h_m^\theta: m \in M\}$. Por lo que H_M^θ es también un marco con los mismos límites de marco de H_M y $H_M^\theta = H_M$, donde la familia $\{H_M^\theta: \theta \in \mathbb{R}\}$ es una deformación de H_M . Obsérvese que este es un conjunto cuyos elementos son conjuntos de vectores.

Retomando el caso general, sea H un espacio de Hilbert cualquiera, sea M una métrica del espacio, y sea H_M un marco generalizado de H . Cualquier operador adjunto $H^* = H$ en H genera un grupo de parámetros de operadores unitarios en H , definidos por $R(\theta) = e^{i\theta H}$. Si retomamos h^θ y H^θ , nuevamente cada H_M^θ será un marco con los mismos límites de marco y $H_M^\theta = H_M$. Esta es la idea de deformación de marco. Existe un número infinito de operadores adjuntos H en H y ninguno proporciona deformaciones iguales.

Es importante elegir un H que conserve el plano del tiempo y la frecuencia del marco, lo que no todos cumplen.

2. 3. Ortogonalidad

En este punto, buscamos construir un marco ortonormal, o algo similar. Sea $G_{\omega, \tau}$ un marco generado por una ventana de tiempo limitado y sea:

¹ Este operador se definió a partir del Teorema Espectral de la Teoría de Espacios de Hilbert.

$$\Gamma_{m,n}^{\#} = G^{-\frac{1}{2}} \Gamma_{m,n} \quad (90)$$

Entonces:

$$G_{\nu,\tau}^{\#} \equiv \nu\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Gamma_{m,n}^{\#} (\Gamma_{m,n}^{\#})^* = 1 \quad (91)$$

y $G_{\nu,\tau}^{\#}$ es un marco limitado por $A = 1$. Como los operadores de traslación T y modulación M son conmutativos con G , también conmutan con $G^{-1/2}$. Por lo que:

$$\Gamma_{m,n}^{\#} = G^{-\frac{1}{2}} M^m T^n g = M^m T^n G^{-\frac{1}{2}} g = M^m T^n g^{\#} \quad (92)$$

donde:

$$g^{\#}(t) = (G^{-\frac{1}{2}} g)(t) = \frac{g(t)}{\sqrt{H_{\tau}(t)}} \quad (93)$$

por (21). Entonces los vectores de marco $\Gamma_{m,n}^{\#}$ se obtienen de $g^{\#}$, de manera análoga a como se obtuvieron $\Gamma_{m,n}$ de g .

Teorema 8.

Sea $g \in L^2(\mathbb{R})$, $0 < A_{\tau} \leq H_{\tau}(t) \leq B_{\tau} < \infty$ y retomemos $g^{\#}$. Entonces $\|g^{\#}\| = 1$. Si g es de tiempo limitado, (por lo que el operador métrico de $G_{\nu,\tau}$ está dado por (21)), entonces $G_{\nu,\tau}^{\#}$ está normalizado para toda $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. (92) implica que:

$$H_{\tau}^{\#}(t) \equiv \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g^{\#}(t - n\tau)|^2 = 1 \quad \forall t \quad (94)$$

integrando sobre $0 \leq t \leq v$ y usando (27), tenemos que $\|g^\#\| = 1$. ♦

De (91) vemos que para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\|f\|^2 = v\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \langle \Gamma_{m,n}^\#, f \rangle \right|^2 \quad (95)$$

Si $f = \Gamma_{m,n}$:

$$\begin{aligned} 1 &= \|\Gamma_{j,k}^\#\|^2 = v\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \langle \Gamma_{m,n}^\#, \Gamma_{j,k}^\# \rangle \right|^2 = \\ &= v\tau \left(1 + \sum_{(m,n) \neq (j,k)} \left| \langle \Gamma_{m,n}^\#, \Gamma_{j,k}^\# \rangle \right|^2 \right) = \\ &= v\tau + O_{j,k}^\# \end{aligned} \quad (96)$$

donde $O_{j,k}^\#$ es un marco discreto, que se definió en la última sección del capítulo 1. Queda claro que $G_{v,\tau}^\#$ es simétrico, pues $O_{j,k}^\#$ es independiente de j y k y su índice de ortogonalidad es $O^\# \equiv \sup_{j,k} O_{j,k}^\# = 1 - v\tau$. Por lo que $G_{v,\tau}^\#$ no es ortonormal si $v\tau < 1$. Además, es redundante, por lo que tampoco es una base. No debemos olvidar que $\rho(v, \tau) = (v\tau)^{-1}$ es una métrica de redundancia. Cuando $v\tau \approx 1$, $O^\# \approx 0$, y $G_{v,\tau}^\#$ es casi ortonormal; cuando $v\tau \rightarrow 1^-$, $G_{v,\tau}^\#$ es ortonormal. Requerimos que g y $g^\#$ sean discontinuas para que su transformada de Fourier decaiga lentamente. Este método proporciona bases ortonormales, con una resolución de frecuencia escasa. Similarmente, cuando g es de banda limitada, el método proporciona un marco ortonormal en el límite $v\tau \rightarrow 1^-$, pero con escasa resolución. Es claro que la carencia de bases de notas ortonormales con buena resolución, es una característica general de la transformada de Fourier con ventana.

3. MARCOS DISCRETOS

Uno de los aspectos más interesantes del mundo es que se puede considerar que está compuesto de patrones. Se caracteriza más por el orden de los elementos que lo componen, que por la naturaleza intrínseca de estos.

Norbert Wiener

En el Capítulo 2 demostramos que para obtener una señal f a partir de su transformada de Fourier con ventana era necesario contar con un conjunto en el plano del tiempo y la frecuencia, denotado por $P = \{(m\nu, n\tau): m, n \in \mathbb{Z}\}$. Ahora, dentro de este capítulo generaremos un subconjunto discreto regular en el plano del tiempo, que sea apropiado para la transformada Wavelet.

3. 1. Muestreo en la Escala del Tiempo.

Un muestreo regular en la escala se refiere a que el paso de una escala a otra es igual. Como el uso de escalas requiere de productos y no de sumas, requerimos un factor de escala cualquiera, $\sigma > 1$, y considerar sólo las escalas $s_m = \sigma^m$, $m \in \mathbb{Z}$ lo cual simplemente proporciona escalas positivas. Valores de $m > 0$, generan escalas toscas y

valores de $m < 0$ dan escalas finas. Si la wavelet madre ψ se compone de frecuencias positivas y negativas, como se mencionó dentro del Capítulo 1, Teorema 1, las escalas positivas serán suficientes para reconstruir la señal, mientras que si ψ sólo cuenta con frecuencias positivas, como en el Teorema 3 del mismo capítulo, entonces debemos considerar también las escalas negativas $-s_m = -\sigma^m$ para muestrear la frecuencia negativa de f .

La transformada wavelet continua cuenta con propiedades, que nos permitirán llevar a cabo el muestreo. Si escalamos la señal, esto es:

$$f_\sigma(t) \equiv \sigma^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{\sigma}\right) \quad (1)^1$$

entonces su transformada wavelet continua se relaciona con \tilde{f} por medio de :

$$\tilde{f}_\sigma(\sigma s, \sigma t) = \tilde{f}(s, t) \quad (2)$$

Por lo que la transformada wavelet continua no tiene preferencias entre una escala y otra. Para que un subconjunto discreto de wavelets herede esta característica es necesario que al pasar de una escala $s_m = \sigma^m$ a $s_{m+1} = \sigma s_m$, se vea incrementado el intervalo de tiempo de muestreo Δt con el factor σ .

Como tomamos $\Delta t = \sigma^m \tau$, donde $\tau > 0$ es un intervalo de muestreo cualquiera en la escala $s = 1$, el rango del tiempo de muestreo se ajusta inmediatamente a la escala. La latice regular $P_{\sigma, \tau}$ en el plano del tiempo y la frecuencia es ahora:

$$S_{\sigma, \tau} = \left\{ (\sigma^m, n\sigma^m \tau) : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3)$$

en el plano de la escala del tiempo. Esta es una latice hiperbólica, ya que todos los puntos se encuentran en una mitad del plano hiperbólico $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s > 0\}$, donde la geometría es

¹ f_σ es una versión ampliada de f , pues $\sigma > 1$.

tal que conforme los puntos convergen al eje horizontal ($s = 0$), más se contrae la hipérbola.

3. 2. Marcos Discretos con Wavelets de Banda Limitada.

Como se vio en el capítulo 1, el conjunto de todas las wavelets $\psi_{s,t}$, generadas por una wavelet madre ψ por traslaciones y escalaciones, forman un marco, indexadas por el tiempo en la escala del tiempo s , con métrica $ds \frac{dt}{s^2}$. Denotemos a este marco por W_s . En este apartado, construiremos la teoría necesaria para generar una escala de submarcos discretos de W_s en el más simple de los casos, esto es, cuando $\hat{\psi}(\omega)$ tiene rango compacto. Para esto es necesario crear un tipo de submarcos semidiscretos, indexados en forma discreta en el tiempo, pero de escala continua. Un caso particular de esto, será cuando la escala sea discreta.

Supóngase que tenemos una wavelet madre de banda limitada: $\hat{\psi}(\omega) = 0$ fuera de $\alpha < \omega < \beta$, para $-\infty < \alpha < \beta < \infty$. Retomando la expresión para la transformada wavelet continua:

$$\tilde{f}(s,t) = \hat{\psi}_{s,t}^* \hat{f} = |s|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\omega t} \overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (4)^1$$

donde $s \neq 0$. Queda claro que estamos considerando ambas escalas, positivas y negativas. En el desarrollo de la transformada wavelet continua, tomamos la inversa de la transformada de Fourier de (4) con respecto a t , para obtener $\overline{\hat{\psi}(s\omega)} \hat{f}(\omega)$, que es una función de banda limitada, válida solo en el intervalo $I_s = \{\omega: \alpha \leq s\omega \leq \beta\}$, que puede ser expandida en una serie de Fourier en lugar de una integral de Fourier, pues ω está limitada al rango. El ancho del rango es $\frac{(b-a)}{|s|}$ que varía según la escala. Sea:

¹ Con $p = 1/2$.

$$\tau = (\beta - \alpha)^{-1} \quad (5)$$

Este será el intervalo de tiempo de muestreo en la escala $s = 1$. El intervalo de tiempo de muestreo en la escala s es $|s|\tau$, Pues:

$$|s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) = |s|\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n \omega s \tau} c_n(s), \quad c_n(s), \omega \in I_s \quad (6)$$

donde:

$$c_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \omega s \tau} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \tilde{f}(s, n s \tau) \quad (7)$$

Como el integrando no es válido para $\omega \notin I_s$, podemos extender entonces la integral a $\omega \in \mathbb{R}$. La expresión (6) es válida sólo para $\omega \in I_s$ pues el lado izquierdo de la igualdad no se satisface fuera del intervalo, mientras que el lado derecho, como anteriormente se mencionó, es periódica. Para que sea válida en forma global, multiplicamos ambos lados por $|s|^{-\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega)$:

$$\begin{aligned} |\widehat{\psi}(s\omega)| \hat{f}(\omega) &= \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n \omega s \tau} |s|^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega) \tilde{f}(s, n s \tau) = \\ &= \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_{s, n s \tau}(\omega) \tilde{f}(s, n s \tau) \end{aligned} \quad (8)$$

Ahora bien, para obtener $\hat{f}(\omega)$ sólo debemos integrar ambos lados de la expresión (8) con respecto a la métrica $\frac{ds}{s}$, usando sólo escalas positivas:

$$\int_0^{\infty} |\widehat{\psi}(\omega)|^2 \hat{f}(\omega) \frac{ds}{s} = \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\infty} \widehat{\psi}_{s, n s \tau}(\omega) \tilde{f}(s, n s \tau) \frac{ds}{s} \quad (9)$$

donde:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \frac{ds}{s} \quad (10)$$

La igualdad (9) demuestra que \hat{f} y f se pueden obtener totalmente si dividimos por $Y(\omega)$, lo cual tiene sentido para casi toda ω . Pero si $\omega > 0$, requerimos de un cambio de variable $\varepsilon = s\omega$:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\varepsilon)|^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \equiv C_+ \quad (11)$$

análogamente, si $\omega < 0$, $\varepsilon = -s\omega$:

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(-\varepsilon)|^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \equiv C_- \quad (12)$$

Por lo que para obtener f de los valores de $\tilde{f}(s, n\sigma\tau)$ con $s > 0$ y $n \in \mathbb{Z}$, una condición necesaria y suficiente es que ambas constantes de marco sean positivas y finitas:

$$0 < C_{\pm} < \infty \quad (13)$$

Esto, como se recordará, es la condición para que la wavelet madre sea aceptada (Teorema 1, Capítulo 1). Para que (13) sea válida, es necesario que $\hat{\psi}(\omega) \rightarrow 0$ conforme $\omega \rightarrow 0$ y el rango de $\hat{\psi}$ incluya $\omega = 0$, esto es, $\alpha < 0 < \beta$. En caso de que esto no se cumpla, es decir, $\alpha \geq 0$, entonces tendremos que hacer uso de las escalas positivas para obtener f . Asumiendo que (13) se cumple, entonces la división por $Y(\omega)$ tiene sentido para toda $\omega \neq 0$ (pues $Y(0) = 0$ siempre que $\hat{\psi}(0) = 0$) y recordando la expresión (7):

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \tau Y(\omega)^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\infty} \hat{\psi}_{s, n\sigma\tau}(\omega) \tilde{f}(s, n\sigma\tau) \frac{ds}{s} \equiv \\ &\equiv \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{\infty} \hat{\psi}^{s, n\sigma\tau}(\omega) \tilde{f}(s, n\sigma\tau) \frac{ds}{s} \quad \omega \neq 0 \end{aligned} \quad (14)$$

donde $\psi^{s,ns\tau}$ es la wavelet recíproca $\psi^{s,nt} \in W^s$, con $t = ns\tau$. Tomando la transformada de Fourier, tenemos, en $L^2(\mathbb{R})$, que:

$$f = \tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi^{s,ns\tau} \tilde{f}(s,ns\tau) \frac{ds}{s} \quad (15)$$

Con lo que obtenemos un submarco semidiscreto de W_s , usando sólo vectores de $\psi_{s,t}$ con $t = ns\tau$, $n \in \mathbb{Z}$, el cual denotaremos por W_s . Los límites de marco son los mismos que para W_s :

$$A = \min\{C_-, C_+\}, \quad B = \max\{C_-, C_+\} \quad (16)$$

Recordando que si $C_- = C_+$ el marco es limitado, el marco recíproco, W^s , es un submarco de W^s pues $\tilde{f}(s,ns\tau) = (\psi_{s,ns\tau})^* f$, y tiene una unidad de resolución discreta en $L^2(\mathbb{R})$, la cual es semidiscreta:

$$\tau \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^\infty \psi^{s,ns\tau} (\psi_{s,ns\tau})^* \frac{ds}{s} = 1 \quad (17)$$

Nótese que la métrica de la escala continua de la expresión (17) está dada por $\frac{ds}{s}$, en lugar de $\frac{ds}{s^2}$, como en el caso donde ambas escalas eran continuas. Las métricas difieren en el sentido de que $\frac{ds}{s}$, es invariante, mientras que $\frac{ds}{s^2}$ no, pero si hacemos las escalas $s = \lambda s'$ para una $\lambda > 0$, entonces $\frac{ds'}{s'} = \frac{ds}{s}$ mientras $\frac{ds'}{(s')^2} = \lambda \frac{ds}{s^2}$. En el caso continuo, la métrica en el tiempo es:

$$\frac{ds dt}{s^2} = \frac{ds}{s} \frac{dt}{s} \quad (18)$$

Esta descomposición muestra el producto de una métrica invariante en s , con una métrica covariante en t . Cuando el tiempo es discreto, $\frac{dt}{s}$ se sustituye por $\frac{\tau s}{s} = \tau^1$. Por lo que a $\tau \frac{ds}{s}$ la podemos entender como una métrica semidiscreta en el conjunto de escalas positivas y tiempo discreto, donde cada n asigna una métrica τ . De esta manera, el lado derecho de (15) es una suma de Riemann en el tiempo, con una aproximación de la integral sobre la escala del tiempo asociada al marco continuo.

Para obtener una escala discreta consideremos una $s > 0$ y $s_m = \sigma^m$, con un factor de escala $\sigma > 1$ y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces el incremento en s_m es $\Delta s_m = s_{m+1} - s_m = (\sigma - 1)s_m$. La versión discreta de $\frac{ds}{s}$ es entonces $\frac{\Delta s_m}{s_m} = \sigma - 1$. El hecho de que ésta sea independiente de m significa que, al igual que su contraparte continua $\frac{ds}{s}$, la métrica discreta $\frac{\Delta s_m}{s_m}$ maneja a todas las escalas de igual forma. Cuando $\hat{\psi}(\omega)$ es continua, la integral $Y(\omega)$ es:

$$Y(\omega) = \lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \left[(\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\sigma^m \omega)|^2 \right] \quad (19)$$

De donde, para $\sigma > 1$, definimos:

$$Y(\omega) = (\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\sigma^m \omega)|^2 \quad (20)$$

que es una suma de Riemann que se aproxima a la integral. Como vimos en el capítulo anterior, H_τ y K_ω , son de gran importancia para llevar a cabo la transformada de Fourier con ventana discreta. Lo mismo sucede con Y_σ en la transformada wavelet continua. Retomando (11) y (12):

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} Y_\sigma(\omega) = Y(\omega) = C_\pm, \quad \forall \pm \omega > 0 \quad (21)$$

¹ Lo cual explica el porque del factor τ en la suma (13).

cuando $\hat{\psi}$ es continua. En general, (21) es válida para casi toda $\pm\omega > 0$, no cumpliéndose en el conjunto de métricas cero. Queda claro entonces, que $Y_\sigma(\omega)$ es una escala periódica, pues:

$$Y_\sigma(\sigma^k \omega) = Y_\sigma(\omega), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (22)$$

Por lo que $Y_\sigma(\omega)$ es discontinua en $\omega = 0$ pues $Y_\sigma(0) = 0$ ya que $\hat{\psi}(\omega) = 0$ y $Y_\sigma(\omega)$ no es válida en (21), por lo que $Y_\sigma(\omega) = \rho > 0$ para $\omega \neq 0$. Entonces (22) implica que $Y_\sigma(\sigma^k \omega_0) = \rho, \forall k \in \mathbb{Z}$ pues $\sigma^k \omega_0 \rightarrow 0$ conforme $k \rightarrow \infty$ y $Y(\omega)$ es discontinua en $\omega = 0$.¹

Una consecuencia de la periodicidad y dilatación es cuando se toma una frecuencia cualquiera, $\nu > 0$, e integrando $Y_\sigma(\pm\omega)$ en un período $\nu \leq \omega \leq \nu\sigma$ con métrica invariante $\frac{d\omega}{\omega}$:

$$\begin{aligned} \int_{\nu}^{\nu\sigma} Y_\sigma(\pm\omega) \frac{d\omega}{\omega} &= (\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\nu}^{\nu\sigma} |\hat{\psi}(\pm\sigma^m \omega)|^2 \frac{d\omega}{\omega} = \\ &= (\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\nu\sigma^m}^{\nu\sigma^{m+1}} |\hat{\psi}(\pm\varepsilon)|^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \\ &= (\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\nu}^{\nu\sigma} |\hat{\psi}(\pm\varepsilon)|^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = (\sigma - 1) C_{\pm} \end{aligned} \quad (23)$$

Donde el lado derecho de la igualdad es independiente de ν , esto porque la escala es periódica.

Sean $A_{\pm, \sigma}$ y $B_{\pm, \sigma}$ el límite máximo de los mínimos (A_{inf}) y el límite mínimo de los máximos (B_{sup}) de $Y_\sigma(\pm\omega)$ para $\omega > 0$ ²:

¹ Esta discontinuidad es tanto por la derecha como por la izquierda.

² Teóricamente debemos usar los límites óptimos (A_{inf} y B_{sup}), los cuales ignoran los conjuntos con métrica cero. Pero como se vio en el capítulo anterior, para el muestreo en tiempo y frecuencia no es necesario. Sin embargo, para la expresión (24) debemos excluir $\omega = 0$. De otra forma no sería válida.

$$A_{\pm, \sigma} = \inf_{\omega > 0} Y_{\sigma}(\pm \omega), \quad B_{\pm, \sigma} = \sup_{\omega > 0} Y_{\sigma}(\pm \omega) \quad (24)$$

Esto porque la escala es periódica para cualquier $\nu > 0$ y tomando A_{inf} y B_{sup} de un período $[\nu, \nu\sigma]$. En el caso continuo, sólo considerábamos la condición $0 < C_{\pm} < \infty$ para reconstruir la señal. Ahora, tenemos condiciones más fuertes, $A_{\pm, \sigma} > 0$, $B_{\pm, \sigma} < \infty$ por lo que podremos asumir que:

$$0 < A_{\pm, \sigma} \leq Y_{\sigma}(\pm \omega) \leq B_{\pm, \sigma} < \infty, \text{ para casi toda } \omega > 0 \quad (25)$$

que es la condición de estabilidad. Cuando se comporta en forma razonable, (21) sugiere que $A_{\pm, \sigma} \rightarrow C_{\pm}$ y $B_{\pm, \sigma} \rightarrow C_{\pm}$ conforme $\sigma \rightarrow 1^+$, y la condición de estabilidad se reduce a la condición para que la wavelet madre sea aceptada.

Sustituyendo (23) en (25), tenemos:

$$0 < A_{\pm, \sigma} \ln \sigma \leq (\sigma - 1)C_{\pm} \leq B_{\pm, \sigma} \ln \sigma < \infty \quad (26)$$

Probando así que la condición de estabilidad genera la condición para que la wavelet madre sea aceptada. Por lo que la condición de estabilidad es más fuerte que la segunda.

En la definición (20) de $Y_{\sigma}(\omega)$ se pudo haber escogido un factor $\ln \sigma$, en lugar de $(\sigma - 1)$ para representar $\frac{\Delta s_m}{s_m}$, pues $\sigma - 1 \approx \ln \sigma$ cuando $\sigma \approx 1$. Lo que llevaría a $\Delta \sigma^m = \Delta e^{m \ln \sigma} \approx \sigma^m \Delta(m \ln \sigma) = \sigma^m \ln \sigma$. La expresión (26), se simplifica y queda como $0 < A_{\pm, \sigma} \leq C_{\pm} \leq B_{\pm, \sigma} < \infty$.

Retomando la expresión (8), repitiendo el mismo proceso que nos llevó a obtener (15), sólo que esta vez usando exclusivamente escalas discretas, y definiendo:

$$\Psi_{m, n}(t) = \psi_{\sigma^m, n\sigma^m \tau}(t) = \sigma^{-\frac{m}{2}} \psi(\sigma^{-m} t - n\tau) \quad (27)$$

entonces $\tilde{f}(\sigma^m, n\sigma^m\tau) = \Psi_{m,n}^* f$. Multiplicando (8) por $(\sigma - 1)$ y sumando sobre $s_m = \sigma^m$, tenemos que:

$$Y_\sigma \hat{f}(\omega) = (\sigma - 1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \Psi_{m,n}^* f \quad (28)$$

Donde el factor $(\sigma - 1)\tau$ del lado derecho de la igualdad es considerado como la métrica asignada a cada punto muestreado en el conjunto $S_{\sigma,\tau} \equiv \{(\sigma^m, n\sigma^m\tau); m, n \in \mathbb{Z}\}$. Esto es, la métrica continua es ahora una métrica discreta definida por:

$$\frac{dsdt}{s^2} = \frac{ds}{s} \frac{dt}{s} \rightarrow \frac{\Delta s_m}{s} \frac{\Delta t_{m,n}}{s} = (\sigma - 1)\tau \quad (29)$$

La expresión (28) expone que el operador métrico para el conjunto de vectores $\{\Psi_{m,n}\}$ surge de multiplicar por $Y_\sigma(\omega)$ en la frecuencia, esto es, un filtro:

$$(G_\sigma f)^\wedge(\omega) = Y_\sigma(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (30)$$

Sea:

$$\begin{aligned} A_\sigma &\equiv \min\{A_{+,\sigma}, A_{-,\sigma}\} = \inf_{\omega \neq 0} Y_\sigma(\omega) \\ B_\sigma &\equiv \max\{B_{+,\sigma}, B_{-,\sigma}\} = \sup_{\omega \neq 0} Y_\sigma(\omega) \end{aligned} \quad (31)$$

Entonces, por (25), tenemos que:

$$0 < A_\sigma \leq Y_\sigma(\omega) \leq B_\sigma < \infty \quad (32)$$

Para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$ Por la identidad de Parseval:

$$\begin{aligned} \langle f, G_\sigma f \rangle &= \langle \hat{f}, (G_\sigma f)^\wedge \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\hat{f}}(\omega) Y_\sigma(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (33)$$

Por lo que, de (32):

$$A_\sigma \|f\|^2 \leq \langle f, G_\sigma f \rangle \leq B_\sigma \|f\|^2 \quad (34)$$

Con lo que hemos demostrado que $\{\Psi_{m,n}\}$ es un marco con operador métrico G_σ y límites de marco A_σ y B_σ . De la expresión (28), tenemos que:

$$\hat{f}(\omega) = (\sigma - 1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \hat{\Psi}^{m,n}(\omega) \Psi_{m,n}^* f \quad (35)$$

donde:

$$\hat{\Psi}^{m,n}(\omega) = Y_\sigma(\omega)^{-1} \hat{\Psi}_{m,n}(\omega) \quad (36)$$

son los vectores de marco recíprocos en la frecuencia. En conclusión, todo lo anterior queda expresado en el siguiente teorema¹.

Teorema 1.

Sea $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ una función de banda limitada, con $\hat{\psi}(\omega) = 0$ fuera del intervalo $\alpha \leq \omega \leq \beta$. Sea $\tau \equiv (\beta - \alpha)^{-1}$ y $Y_\sigma(\omega)$ que satisface la expresión (25) para una $\sigma > 1$. Sea $S_{\sigma,\tau} = \{(\sigma^m, n\sigma^m\tau) : m \in \mathbb{Z}\}$ con métrica $\mu_{\sigma,\tau} = (\sigma - 1)\tau$ para toda $(\sigma^m, n\sigma^m\tau)$. Entonces la familia de wavelets $\psi_{s,t} \in W_s$ con $(s,t) \in S_{\sigma,\tau}$, es decir:

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

¹ El cual es análogo al Teorema 1 del Capítulo 1 por lo que presentar su demostración sería repetitivo.

$$W_{\sigma,\tau} = \left\{ \Psi_{\sigma m, n \sigma m \tau} \equiv \Psi_{m,n} : m, n \in \mathbb{Z} \right\} \quad (37)$$

es un marco indexado por $S_{\sigma,\tau}$ cuyo operador métrico, G_{σ} , está dado por la expresión (30) y los límites de marco óptimos son A_{σ} y B_{σ} que están relacionados con los límites del marco continuo W_S por:

$$A_{\sigma} \leq \frac{\sigma-1}{\ln \sigma} A \leq \frac{\sigma-1}{\ln \sigma} B \leq B_{\sigma} \quad (38)$$

Por lo que una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede reconstruir de sus muestreos en $S_{\sigma,\tau}$, por:

$$f = (\sigma-1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Psi^{m,n} \tilde{f}(\sigma^m, n \sigma^m \tau) \quad (39)$$

y la correspondiente unidad de resolución:

$$(\sigma-1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Psi^{m,n} \Psi_{m,n} = 1 \quad (40) \spadesuit^1$$

Como en el caso del tiempo y la frecuencia, la métrica contable es tomada como la métrica en $S_{\sigma,\tau}$. En este caso, el factor $(\sigma-1)\tau$ es absorbido por $\Psi^{m,n}$, lo que significa que G_{σ} es ahora $G_{\sigma} \rightarrow G'_{\sigma} \equiv [(\sigma-1)\tau]^{-1} G_{\sigma}$. Entonces los límites de marco también deben ser redefinidos.

La dependencia de los límites en $\tau = (\beta - \alpha)^{-1}$ es total, pues τ depende de la wavelet madre. Las sumas de (39) y (40) son aproximaciones al caso continuo, y la relación (38) entre los límites de marco discretos y continuos se simplifican más.

Retomando la idea de funciones razonables, $\hat{\psi}$ es razonable si $A_{\sigma} \rightarrow A$ y $B_{\sigma} \rightarrow B$ conforme $\sigma \rightarrow 1^+$, lo que proporciona continuidad completa entre $W_{\sigma,\tau}$ y W_S .

¹ Para la demostración de este teorema, refiérase al teorema 1, capítulo 1.

La condición de estabilidad para el teorema 1 permite afirmar que $C_{\pm} > 0$, por lo que el rango de $\hat{\psi}(\omega)$ debe abarcar frecuencias positivas y negativas. Debemos recordar que es preferible trabajar con wavelets de frecuencias sólo positivas o sólo negativas.

Sea ψ_+ una wavelet madre, tal que $\hat{\psi}_+(\omega) = 0$ fuera del intervalo $\alpha \leq \omega \leq \beta$, donde $0 \leq \alpha < \beta < \infty$. Entonces $C_- = 0$, por lo que la construcción anterior debe ser modificada. Evocando (3), tenemos dos soluciones a este problema:

- a) Incluir escalas positivas y negativas en la reconstrucción. Esto funcionaría ya que para $s < 0$, $\hat{\psi}(s\omega)$ sondea la frecuencia negativa de la señal.
- b) O bien, elegir otra wavelet ψ_- de banda limitada con $\hat{\psi}_-(\omega) = 0$ para $\omega \geq 0$, y usar ψ_+ para obtener la frecuencia positiva, f_+ , de f y ψ_- para obtener la frecuencia negativa, f_- , usando sólo escalas positivas en ambos casos. Entonces usaríamos dos wavelets madres en lugar de una.

En la opción (a), tendríamos que trabajar con el doble de escala, y en (b) con el doble de wavelets madre. De hecho, (a) es un caso especial de (b) ya que la elección de una $\psi_-(t) \equiv \psi_+(-t)$ y $\hat{\psi}_-(\omega) \equiv \hat{\psi}_+(-\omega)$ y:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_-(s, t) &\equiv |s|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s \omega t} \overline{\hat{\psi}_-(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega = \\ &= |s|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s \omega t} \overline{\hat{\psi}_+(s\omega)} \hat{f}(\omega) d\omega = \hat{f}_+(-s, t) \end{aligned} \quad (41)$$

Por lo que obtenemos mayor generalidad, sin ningún costo, al tomar la opción (b). Obsérvese que cuando $\hat{\psi}_+(\omega) \neq \overline{\hat{\psi}_-(\omega)}$, ψ_+ es necesariamente de valor complejo. Tomando $\psi_-(t) \equiv \overline{\psi_+(t)}$, tenemos $\hat{\psi}_+(\omega) \neq \overline{\hat{\psi}_-(\omega)}$, con $\omega < 0$ y:

$$\psi_+(t) + \psi_-(t) = 2\text{Re } \psi_+(t), \quad \psi_+(t) - \psi_-(t) = 2\text{Im } \psi_+(t) \quad (42)$$

Esto es, en lugar de usar ψ_+ y ψ_- como dos wavelets madres, podemos usar las partes real e imaginaria de ψ_+ . Aunque dos wavelets madres son usadas, son ahora las partes real e imaginaria de una función analítica en el plano superior complejo.

Sean ψ_+ y ψ_- , tales que $\alpha \leq \omega \leq \beta$, con $0 \leq \alpha < \beta < \infty$, $\tau = (\beta - \alpha)^{-1}$, $\sigma > 1$ cualquiera, y denotemos los conjuntos discretos de wavelets generados por ψ_+ y ψ_- por:

$$\Psi_{\pm, m, n}(t) = \sigma^{-\frac{m}{2}} \psi_{\pm}(\sigma^{-m}t - n\tau) \quad (43)$$

Con lo que ahora tenemos la contraparte de (28):

$$Y_{\pm, \sigma}(\omega) \hat{f}(\omega) = (\sigma - 1) \tau \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \hat{\Psi}_{\pm, m, n}(\omega) \Psi_{\pm, m, n}^* f \quad (44)$$

donde:

$$Y_{\pm, \sigma}(\omega) \equiv (\sigma - 1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_{\pm}(\sigma^m \omega)|^2 \quad (45)$$

Si $\hat{\psi}_+(\omega)$ y $\hat{\psi}_-(\omega)$ son de comportamiento razonable, entonces:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} Y_{\pm, \sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}_{\pm}(s\omega)|^2 \frac{ds}{s} \equiv C_{\pm} \quad (46)$$

Donde es claro que $Y_{\pm, \sigma}(\omega) = 0$ cuando $\pm\omega \leq 0$. Sea:

$$\begin{aligned} A_{\pm, \sigma} &= \inf_{\pm\omega > 0} Y_{\pm, \sigma}(\omega), & B_{\pm, \sigma} &= \sup_{\pm\omega > 0} Y_{\pm, \sigma}(\omega) \\ A_{\sigma} &= \min\{A_{+, \sigma}, A_{-, \sigma}\} & B_{\sigma} &= \max\{B_{+, \sigma}, B_{-, \sigma}\} \end{aligned} \quad (47)$$

Para obtener una reconstrucción estable de f de sus muestreos:

$$\tilde{f}_{\pm}(\sigma^m, n\sigma^m\tau) \equiv (\Psi_{\pm, m, n})^* f \tag{48}$$

de donde asumimos que $A_{\pm, \sigma} > 0$ y $B_{\pm, \sigma} < \infty$, esto es:

$$0 < A_{\pm, \sigma} \leq Y_{\pm, \sigma}(\omega) \leq B_{\pm, \sigma} < \infty, \text{ para casi toda } \pm\omega > 0 \tag{49}$$

De donde el teorema 1 tiene una extensión directa.

Teorema 2.

Sea $\psi_{\pm} \in L^2(\mathbb{R})$ una función de banda limitada, con $\hat{\psi}_{\pm}(\omega) = 0$ fuera del intervalo $\alpha \leq \pm\omega \leq \beta$, donde $0 \leq \alpha < \beta$. Sea $\tau \equiv (\beta - \alpha)^{-1}$ y $Y_{\pm, \sigma}(\omega)$ satisface la expresión (49) para cualquier $\sigma > 1$. Entonces la familia de wavelets:

$$W_{\sigma, \tau} = \{\Psi_{+, m, n}, \Psi_{-, m, n} : m, n \in \mathbb{Z}\} \tag{50}$$

es un marco cuyo operador métrico G_{σ} está dado por:

$$(G_{\sigma} f)^{\wedge}(\omega) = [Y_{+, \sigma} + Y_{-, \sigma}] \hat{f}(\omega) \tag{51}$$

y los límites óptimos son A_{σ} y B_{σ} que se relacionan con los límites del marco continuo W_{σ} por:

$$A_{\sigma} \leq \frac{\sigma - 1}{\ln \sigma} A \leq \frac{\sigma - 1}{\ln \sigma} B \leq B_{\sigma} \tag{52}$$

Una señal $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede reconstruir a partir de sus muestreos por:

$$f = (\sigma - 1)\tau \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ p = \pm}} \Psi_{p, m, n} \tilde{f}_p(\sigma^m, n\sigma^m\tau) \tag{53}$$

y con unidad de resolución:

$$(\sigma - 1)\tau \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ p=\pm}} \Psi_{p,m,n} (\Psi_{p,m,n})^* = 1 \quad (54)$$

Demostración. Por definición de operador métrico, para $W_{\sigma,\tau}$ es:

$$G_{\sigma} = (\sigma - 1)\tau \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ p=\pm}} \Psi_{p,m,n} (\Psi_{p,m,n})^* \quad (55)$$

Por lo que, por (44):

$$\begin{aligned} (G_{\sigma} f)^{\wedge}(\omega) &= (\sigma - 1)\tau \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ p=\pm}} \hat{\Psi}_{p,m,n}(\omega) (\Psi_{p,m,n})^* f = \\ &= Y_{+,\sigma}(\omega) \hat{f}(\omega) + Y_{-,\sigma}(\omega) \hat{f}(\omega) \end{aligned} \quad (56) \blacklozenge$$

3. 3. Otros Marcos Discretos.

La construcción anterior de marcos de wavelets discretas es válida bajo el supuesto de que ψ es de banda limitada. Cuando éste no es el caso, el método falla. A diferencia de la transformada de Fourier con ventana, la transformada wavelet continua no es simétrica con respecto a la transformada de Fourier, es decir, ésta no puede ser vista en términos de traslaciones y escalaciones en la frecuencia, por lo que no podemos aplicar el mismo método a marcos construidos con wavelets con rango compacto en el tiempo. En general, es más difícil construir marcos de wavelets que no son de banda limitada. En esta sección generaremos teoremas sobre marcos de wavelets del tipo $W_{\sigma,\tau} = \{\Psi_{m,n}\}$, indexados por $S_{\sigma,\tau}$ con $\sigma > 1$ y $\tau > 0$, sin asumir que la wavelet madre es de banda limitada. Al igual que en los Teoremas 5 y 6 del Capítulo 2, generaremos en forma separada las condiciones necesaria y suficiente.

Teorema 3. Condición Necesaria.

Sea $W_{\sigma, \tau}$ un submarco de W_S indexado por $S_{\sigma, \tau}$ con límites de marco $A_{\sigma, \tau}$, $B_{\sigma, \tau}$. Entonces $Y_{\sigma}(\omega)$ satisface la desigualdad:

$$A_{\sigma, \tau} \leq Y_{\sigma}(\omega) \leq B_{\sigma, \tau} \quad (57)$$

Consecuentemente, los límites de marco de $W_{\sigma, \tau}$ se relacionan con los de W_S por:

$$A_{\sigma, \tau} \leq \frac{\sigma - 1}{\ln \sigma} A \leq \frac{\sigma - 1}{\ln \sigma} B \leq B_{\sigma, \tau} \quad (58)$$

Demostración. La expresión (57) se obtiene de usar (23). Finalmente, de (57) obtenemos (58). ♦

Teorema 4. Condición Suficiente.

Sea ψ que satisface la condición de regularidad:

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq N|\omega|^a (1 - |\omega|)^{-b} \quad (59)$$

para $0 < a < b - 1$ y $N > 0$ cualquiera. Sea $\sigma > 1$, y supóngase que:

$$\begin{aligned} A_{\sigma} &\equiv \inf_{\omega \neq 0} Y_{\sigma}(\omega) > 0 \\ B_{\sigma} &\equiv \sup_{\omega \neq 0} Y_{\sigma}(\omega) < \infty \end{aligned} \quad (60)$$

Entonces existe un intervalo inicial de muestreo en el tiempo $\tau_0(\sigma) > 0$ y, para toda $0 < \tau < \tau_0(\sigma)$, un número $\delta(\sigma, \tau)$ con $0 \leq \delta(\sigma, \tau) \leq A_{\sigma}$, tal que:

$$\begin{aligned} A_{\sigma, \tau} &\equiv A_{\sigma} - \delta(\sigma, \tau) \\ B_{\sigma, \tau} &\equiv B_{\sigma} + \delta(\sigma, \tau) \end{aligned} \quad (61)$$

son límites de marco para $W_{\sigma, \tau}$, es decir el operador:

$$G_{\sigma, \tau} \equiv (\sigma - 1)\tau \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \Psi_{m, n} \Psi_{m, n}^* \quad (62)$$

satisface $A_{\sigma, \tau} I \leq G_{\sigma, \tau} \leq B_{\sigma, \tau} I$. ¹

Obsérvese que, hasta este momento, $A_{\sigma, \tau}$ y $B_{\sigma, \tau}$ no han sido dados en (61) como los límites de marco óptimos por lo que, si elegimos $0 < \tau < \tau_0(\sigma)$, garantizamos que $W_{\sigma, \tau}$ es un marco, por lo cual concluimos que sus límites de marco satisfacen:

$$0 < A_{\sigma, \tau} \leq A_{\sigma, \tau}^{\text{opt}} \leq B_{\sigma, \tau}^{\text{opt}} \leq B_{\sigma, \tau} < \infty \quad (63)$$

Por tanto, (61) junto con la expresión para $\delta(\sigma, \tau)$ dan un estimado para los límites de marco óptimos.

Para obtener una mayor visión de este teorema, supóngase que tratamos con una situación similar a la del teorema 2, donde $\hat{\psi}_{\pm}(\pm\omega)$ cuentan ambas con rango $[\alpha, \beta]$, con $0 < \alpha < \beta$. Entonces el máximo intervalo de muestreo en el tiempo es $\tau_{\max} = (\beta - \alpha)^{-1}$ por lo que podemos sobremuestrear tomando $\alpha' \leq \alpha$ y $\beta' \leq \beta$, y $\tau \leq \tau_{\max}$. Supóngase además que $\hat{\psi}$ es continua con $\hat{\psi}(\omega) \neq 0$ para $\alpha < |\omega| < \beta$. Entonces queda claro que la condición de estabilidad (60) se satisface si y sólo si $\alpha < \sigma\alpha < \beta$. Por tanto, $W_{\sigma, \tau}$ es un marco si y sólo si:

$$0 < \tau \leq \frac{1}{(\beta - \alpha)} < \frac{1}{(\sigma - 1)\alpha} \equiv \tau_0(\sigma) \quad (64)$$

La condición de regularidad (59) implica que $\hat{\psi}(\omega)$ no es válida cerca de $\omega = 0$, así como $|\omega|^a$ tampoco lo es, y decrece más rápido que $|\omega|^{-1}$ conforme $\omega \rightarrow \pm\infty$.

¹ Es claro que los teoremas 3 y 4 son equivalentes a los presentados en el capítulo 2, teoremas 5 y 6. Por lo que sus demostraciones son enteramente correspondientes.

Consecuentemente, $\hat{\psi}(\omega)$ se concentra principalmente en un intervalo doble, $\alpha_{\text{estable}} \leq |\omega| \leq \beta_{\text{estable}}$, para $0 < \alpha_{\text{estable}} < \beta_{\text{estable}} < \infty$. Con lo que esperamos que $\tau_0(\sigma) \sim [(\sigma - 1)\alpha_{\text{estable}}]$ en el teorema 4.

Definamos la densidad de muestreo, $\mathfrak{R}(\sigma, \tau)$, en muestreos por unidad métrica como el recíproco de la métrica $\mu_{\sigma, \tau} = (\sigma - 1)\tau$ por muestra. Entonces (64) demuestra que para wavelets de banda limitada:

$$\mathfrak{R}(\sigma, \tau) \equiv \frac{1}{(\sigma - 1)\tau} \geq \alpha \quad (65)$$

En el contexto general, en (65) puede esperarse que α sea cambiada por α_{estable} en el lado derecho de la igualdad. Esto es semejante a $\rho(v, \tau) \geq 1$, en el tiempo y la frecuencia, donde $\rho(v, \tau)$ es la densidad de muestreo en muestras por unidad de área del plano de tiempo y frecuencia. Pero ahora no estamos hablando de una métrica de área, pues $\mu_{\sigma, \tau}$ es una versión discreta de $d\mu(s, t) = \frac{dsdt}{s^2}$, la cual no es una métrica de Lebesgue en la escala del tiempo. Como α puede ser tan pequeña como uno quiera, no existe un límite de marco absoluto en el muestreo de la frecuencia para marcos wavelets. Esto lo podemos ver como un argumento "de proporción"; v y τ determinan un número de menor proporción $v\tau$, el cual es considerado como un límite superior para la métrica por muestreo ya que s es sólo un número, por lo que no hay forma de contar con un número de menor proporción de s y τ .

Para ver la importancia de las condiciones necesaria y suficiente de los teoremas 3 y 4 respectivamente, obsérvese que si $W_{\sigma, \tau}$ es un marco cuya existencia está garantizada por los teoremas 3 y 4, implica que:

$$\begin{aligned} A_{\sigma, \tau} &\leq \inf_{\omega \neq 0} Y_{\sigma}(\omega) \equiv A_{\sigma} \\ B_{\sigma, \tau} &\leq \sup_{\omega \neq 0} Y_{\sigma}(\omega) \equiv B_{\sigma} \end{aligned} \quad (66)$$

Esto es una afirmación un tanto más débil que (60), si sabemos como obtener $\delta(\sigma, \tau)$. Esto demuestra que la diferencia entre el teorema 3 y 4 es el factor $\delta(\sigma, \tau)$.

Sean los operadores $T, D: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, operadores de traslación y dilatación respectivamente, los cuales se definen como:

$$\begin{aligned} (Tf)(t) &= f(t - \tau) \\ (Df)(t) &= \sigma^{-\frac{1}{2}} f(\sigma^{-1}t) \end{aligned} \quad (67)$$

Ambos operadores son unitarios, $T^* = T^{-1}$ y $D^* = D^{-1}$. Para toda $m, n \in \mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{aligned} (D^m T^n \psi)(t) &= \sigma^{-\frac{m}{2}} (T^n \psi)(\sigma^{-m}t) = \\ &= \sigma^{-\frac{m}{2}} \psi(\sigma^{-m}t - n\tau) = \Psi_{m,n}(t) \end{aligned} \quad (68)$$

pues $\Psi_{m,n} \equiv D^m T^n \psi$. Los vectores de marco recíprocos son entonces:

$$\Psi^{m,n} = G_{\sigma,\tau}^{-1} D^m T^n \psi \quad (69)$$

Si $W_{\sigma,\tau}$ esta limitado, entonces $G_{\sigma,\tau} = A_{\sigma,\tau}$ y $\Psi^{m,n} = D^m T^n (A_{\sigma,\tau}^{-1} \psi)$, lo que demuestra que $W^{\sigma,\tau}$ se genera del vector $A_{\sigma,\tau}^{-1} \psi$. Cuando $W_{\sigma,\tau}$ no está limitado la situación es más difícil. Una condición suficiente es que D y T sean conmutativos con $G_{\sigma,\tau}$ $DG_{\sigma,\tau} = G_{\sigma,\tau}D$ y $TG_{\sigma,\tau} = G_{\sigma,\tau}T$, lo que implicaría que también conmutan con $G_{\sigma,\tau}^{-1}$ y:

$$\Psi^{m,n} = D^m T^n G_{\sigma,\tau}^{-1} \psi \quad (70)$$

Quedando demostrado así que $W^{\sigma,\tau}$ se genera de $G_{\sigma,\tau}^{-1} \psi$. Verifiquemos ahora que D y T conmuten con $G_{\sigma,\tau}$. Por (68) y la unicidad de D :

$$D\Psi_{m,n} = \Psi_{m+1,n}, \text{ entonces } \Psi_{m,n}^* D^{-1} = \Psi_{m+1,n}^* \quad (71)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} DG_{\sigma,\tau} D^{-1} &= (\sigma - 1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} D\Psi_{m,n} \Psi_{m,n}^* D^{-1} = \\ &= (\sigma - 1)\tau \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Psi_{m+1,n} \Psi_{m+1,n}^* = G_{\sigma,\tau} \end{aligned} \quad (72)$$

Lo que demuestra que D conmuta con $G_{\sigma,\tau}$. De lo que obtenemos $\Psi^{m,n} = D^m \Psi^{0,n}$, por lo que sólo $\Psi^{0,n}$ requieren ser calculados para toda $n \in \mathbb{Z}$. Desafortunadamente, T no conmuta con $G_{\sigma,\tau}$ en lo general por lo que los vectores $\Psi^{0,n}$ no se pueden escribir como $T^n \Psi^{0,0}$, pues:

$$(T\Psi_{m,n})(t) = \Psi_{m,n}(t - \tau) = \sigma^{-\frac{m}{2}} \psi(\sigma^{-m}(t - \tau) - n\tau) \quad (73)$$

Si $m > 0$, entonces $T\Psi_{m,n}$ no es un marco en $W_{\sigma,\tau}$ y no contamos con la contraparte de (71). Esto es, si $m > 0$, entonces debemos trasladar en intervalos de tiempo múltiplos de $\sigma^m \tau > \tau$ para que persista en el muestreo de la escala del tiempo la lattice $T_{\sigma,\tau}$.

Como resultado del análisis anterior, concluimos que cuando $W_{\sigma,\tau}$ no está limitado, el marco recíproco $W_{\sigma,\tau}^*$, no se puede generar de una sola wavelet por lo que necesitamos obtener un número infinito de vectores $\Psi^{0,n}$ para tener una reconstrucción exacta. Cuando T no conmuta con $G_{\sigma,\tau}$, tampoco lo hace con $G_{\sigma,\tau}^{-\frac{1}{2}}$. Por lo tanto, el marco autorrecíproco $\tilde{W}_{\sigma,\tau}$ derivado de $W_{\sigma,\tau}$ tampoco se genera de una sola wavelet madre.

Esto demuestra que es importante tener un marco limitado cuando trabajamos con wavelets. En la práctica, debe ser suficiente para $W_{\sigma,\tau}$ ser ajustado, es decir, casi limitado con:

$$\delta \equiv \frac{(B_{\sigma,\tau} - A_{\sigma,\tau})}{(B_{\sigma,\tau} + A_{\sigma,\tau})} \ll 1 \quad (74)$$

entonces los primeros términos del procedimiento recursivo de los apartados 1. 5. 4 y 1. 6 del capítulo 1, dan una aproximación razonable a:

$$G_{\sigma,\tau}^{-1} \approx \alpha_{\sigma,\tau} \quad \text{y} \quad G_{\sigma,\tau}^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\alpha_{\sigma,\tau}} \quad (75)$$

donde:

$$\alpha_{\sigma,\tau} = \frac{2}{(B_{\sigma,\tau} + A_{\sigma,\tau})} \quad (76)$$

Por lo que:

$$\Psi^{m,n} \approx \alpha_{\sigma,\tau} \Psi_{m,n}, \quad \tilde{\Psi}_{m,n} \approx \sqrt{\alpha_{\sigma,\tau}} \Psi_{m,n} \quad (77)$$

4. ANÁLISIS DE RESOLUCIÓN MÚLTIPLE.

*Mi pasado no es más que la
estela que he dejado tras de mí.
Lo que impulsa mi vida es la
energía que genero en el
presente.*

Wayne W. Dyer

4. 1. Análisis de Resolución Múltiple.

En 1986 surge un nuevo método para el análisis y síntesis de wavelets, el cual se conoce actualmente como Análisis de Resolución Múltiple, que es recursivo, lo que permite se pueda implementar como un método numérico.

En el capítulo anterior hablamos de marcos continuos, los cuales eran infinitamente redundantes; por lo tanto los marcos discretos con $\sigma \approx 1$ y $\tau \approx 0$ son muy redundantes. Para que un marco continuo exista es necesario que la wavelet satisfaga la condición para que la wavelet madre sea aceptada, y la existencia de un marco discreto con $\sigma \approx 1$ no es la excepción. En este capítulo hablaremos de wavelets que no sólo forman marcos, también forman bases ortonormales. Dichos marcos no son redundantes, por lo tanto no podemos obtener sus marcos discretos a partir de un marco continuo genérico. De hecho utilizaremos un factor de escala 2, el cual satisface las condiciones para que la wavelet madre sea aceptada. La construcción de las nuevas wavelets se basa en el Análisis de Resolución Múltiple.

Para iniciar este análisis es necesario crear el intervalo de tiempo de muestreo básico en $\tau = 1$ y factor de escala $\sigma = 2$. El tomar $\tau = 1$ es sólo por conveniencia, y $\sigma = 2$ porque el análisis falla cuando $\sigma \neq 2$. Los operadores de traslación y dilatación $T, D: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ se definen por:

$$\begin{aligned} (Tf)(t) = f(t-1), &\Rightarrow (T^n f)(t) = f(t-n), \quad n \in \mathbb{Z} \\ (Df)(t) = 2^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{2}\right), &\Rightarrow (D^m f)(t) = 2^{-\frac{m}{2}} f(2^{-m}t), \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (1)$$

que son invertibles y satisfacen $\langle Tf, Tg \rangle = \langle f, g \rangle = \langle Df, Dg \rangle$, por lo tanto son operadores unitarios:

$$\begin{aligned} T^* &= T^{-1}, \\ D^* &= D^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

No debemos olvidar que Df es una versión alargada de f y $D^{-1}f$ es una compresión de f y:

$$\begin{aligned} DT &= T^2 D, \\ D^{-1}T &= T^{\frac{1}{2}} D^{-1} \end{aligned} \quad (3)$$

de donde fácilmente podemos demostrar que $DTf = T^2 Df$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$. La primera igualdad de la expresión (3), describe una traslación de la función f con $\Delta t = 1$ y después un alargamiento con factor 2, que es igual a primero alargar y después trasladar la función con factor $\Delta t = 2$. La segunda igualdad tiene la misma interpretación. Ambas expresiones serán útiles para obtener el cuadrado y la raíz cuadrada de T respectivamente.

El análisis de resolución múltiple inicia con una función de escala $\phi(t)$ que es utilizada para generar ψ . La traslación y dilatación de ϕ se definen por:

$$\begin{aligned} \phi_{m,n}(t) &\equiv (D^m T^n \phi)(t) = 2^{-\frac{m}{2}} (T^n \phi)(2^{-m}t) = \\ &= 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}t - n) \end{aligned} \quad (4)$$

que nos permite tomar muestras de la señal. Las muestras $\langle \phi_{m,n}, f \rangle \equiv \phi_{m,n}^* f$ se presume representan los valores de la señal por sí mismas, alrededor de una vecindad de ancho $2^m W$ con $t = 2^m n$, de donde:

$$\phi_n(t) \equiv \phi_{0,n}(t) = \phi(t-n) \quad (5)$$

Para poder llevar a cabo el análisis de resolución múltiple, es necesario que ϕ satisfaga ciertas condiciones. La primera es la condición de ortonormalidad en la escala $m = 0$:

$$\langle \phi_n, \phi_k \rangle = \delta_n^k \quad (6)$$

Como $T^* = T^{-1}$, tenemos que $\langle T^n \phi, T^k \phi \rangle = \langle T^{n-k} \phi, \phi \rangle$, de donde (6) es equivalente a:

$$\langle \phi_n, \phi \rangle \equiv \phi_n^* \phi = \delta_n^0 \quad (7)$$

Además, como $D^* = D^{-1}$:

$$\langle \phi_{m,n}, \phi_{m,k} \rangle = \langle D_m \phi_n, D_m \phi_k \rangle = \langle \phi_n, \phi_k \rangle \quad (8)$$

Es claro que (7) implica ortonormalidad en cada escala. Además, es necesario que $\phi_{m,n}$ sea ortogonal en diferentes escalas.

Sea f una función constante $f(t) \equiv 1$. Si ϕ es integrable, entonces el producto interno $\phi_n^* f$ está bien definido. Si su interpretación como muestras de f tiene sentido, entonces:

$$\phi_n^* f = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(t-n) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\phi}(t) dt = \bar{\phi}(0) = 1 \quad (9)$$

de donde asumimos que $\hat{\phi}(0) = 1$ lo cual consideraremos como una segunda condición, a la que llamaremos condición de promedio. Esta condición aunada con la condición de ortonormalidad no son suficientes para el análisis de resolución múltiple, pero la combinación de ambas será de gran importancia cuando estudiemos filtros y muestreos.

Sea $m \in \mathbb{Z}$ y V_m un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ descrito por $\{\phi_{m,n}: n \in \mathbb{Z}\}$, es decir:

$$V_m = \left\{ f = \sum_n \phi_{m,n} u_n : \|f\|^2 = \sum_n |u_n|^2 < \infty \right\} \quad (10)$$

$\{\phi_{m,n}: n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal a V_m . Como:

$$\sum_n \phi_{m,n} u_n = D^m \sum_n \phi_n u_n \quad (11)$$

y $\sum_n \phi_n u_n \in V_0$ entonces:

$$V_m = \{D^m f: f \in V_0\} \equiv D^m V_0, \quad m \in \mathbb{Z}_0 \quad (12)$$

Esto es, V_m es una imagen de V_0 bajo el operador D^m . La proyección ortogonal a V_m es el operador $P_m: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ que se define por:

$$P_m = \sum_n \phi_{m,n} \phi_{m,n}^* = D^m \sum_n \phi_n \phi_n^* D^{-m} = D^m P_0 D^{-m} \quad (13)$$

donde $\phi_{m,n}^* = (D^m \phi_n)^* = \phi_n^* D^{-m}$. No debemos olvidar que $P_m^* = P_m = P_m^2$, propiedad algebraica necesaria para todas las proyecciones ortogonales. P_m produce una reconstrucción parcial de f a partir de sus muestras $\phi_{m,jn}^* f$ en la escala m :

$$f_m(t) \equiv (P_m f)(t) = \sum_n \phi_{m,n}(t) \phi_{m,n}^* f \quad (14)$$

En la expresión anterior, $\phi_{m,n}(t)$ actúa como una escala de una función pixel, dando la forma de un punto en $t = n2^m$ y escala m .

Cuando una señal es muestreada en $\Delta t = 2^m$, esperamos que se pierdan partes de la función cuya escala sea menor a 2^m . Lo cual requiere que:

$$V_{m+1} \subset V_m \quad \forall m \in Z \quad (15)$$

Esta es una condición que se reduce a:

$$D\phi = \sum_n h_n \phi_n = \sum_n h_n T^n \phi \equiv h(T)\phi \quad (16)$$

donde $D\phi \in V_1$ y $V_1 \subset V_0$, así que $D\phi \in V_0$. Esta ecuación se conoce como ecuación de dilatación o relación de dos escalas para ϕ . $\{h_n\}$ es el conjunto de coeficientes de filtro para ϕ .

Formalmente, el operador $h(t) = \sum_n h_n T^n$ en $V_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Podemos considerar a $h(T)$ como el operador promedio, el cual representa el alargamiento del pixel $D\phi$ como una superposición del pixel ϕ_n . Podemos considerar a $h(T)$ como el operador que actuará sobre ϕ para producir $D\phi$: trasladando a ϕ a diferentes posiciones, multiplicando por los coeficientes de filtro y sumando. La ecuación de dilatación se puede expresar como el promedio $D^{-1}h(T)\phi = \phi$, esto es, tomamos el promedio de ϕ y comprimimos el promedio, lo que nos proporciona ϕ . Esto nos permite determinar ϕ de $h(T)$, a partir de una normalización. La expresión (16), nos dice que:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= (D^{-1}h(T)\phi)(t) = \sqrt{2}(h(T)\phi)(2t) = \\ &= \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \end{aligned} \quad (17)$$

Para una mayor comprensión del texto, es conveniente homogeneizar la notación, por lo que la expresión (16) queda como:

$$\sum_n u_n \phi_n = \sum_n u_n T^n \phi = u(T)\phi \quad \text{para todos los vectores en } V_0 \quad (18)$$

Al igual que con $h(T)$, debemos entender a $u(T)$ como el operador bajo el cual ϕ produce el vector $u(T)\phi$ en V_0 . Los vectores en V_m pueden ser expresados por $D^m u(T)\phi$. Se debe tener especial cuidado al definir los operadores $h(T)$ y $u(T)$, pues cuando la suma anterior cuenta con un número infinito de términos, puede quedar indeterminada. Una definición precisa puede ser tomada en la frecuencia, donde T surge del producto $(Tf)^\wedge(\omega) = e^{-2\pi i \omega} \hat{f}(\omega)$, y $u(T)$ actúa sobre $f \in L^2(\mathbb{R})$ como:

$$(u(T)f)^\wedge(\omega) = \sum_n u_n e^{-2\pi i \omega} \hat{f}(\omega) \equiv u(e^{-2\pi i \omega}) \hat{f}(\omega) \quad (19)$$

Como $\sum_n |u_n|^2 < \infty$, la función $u(z)$ en (19) es doblemente integrable en el círculo unitario $|z| = 1$, con:

$$\|u\|^2 \equiv \int_0^1 |u(e^{-2\pi i \omega})|^2 d\omega = \sum_n |u_n|^2 \quad (20)$$

Para $\{u_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, (19) define $u(T)$ como un operador no limitado en $L^2(\mathbb{R})$ aunque podemos obtener aproximaciones en V_0 por combinaciones lineales finitas de ϕ_n . $u(T)$ es un polinomio de Laurent en T , esto es, un polinomio en T y T^{-1} , y $u(z)$ es un polinomio trigonométrico, entonces $u(T)$ es un operador limitado en $L^2(\mathbb{R})$. Nuestro punto de interés es cuando ϕ tiene un rango cerrado. Entonces (16) es finita y $h(T)$ sigue siendo un polinomio de Laurent. El conjunto de todos los polinomios de Laurent en T los denotamos por P , que es un álgebra. Por lo tanto la suma y el producto de dichos polinomios pertenecen a P .¹

¹ Para simplificar el análisis, asumimos que el rango de ϕ es cerrado, aunque algunos resultados se generalizan para el caso contrario.

La ecuación de dilatación (16), no es sólo necesaria para satisfacer (15), también es suficiente. Obsérvese que (3) implica que $Du(T) = u(T^2)D$. De donde un vector $V_1 = DV_0$ se puede expresar como:

$$Du(T)\phi = u(T^2)D\phi = u(T^2)h(T)\phi = h(T)u(T^2)\phi \quad (21)$$

El lado derecho de la igualdad pertenece a V_0 , lo que establece que $V_1 \subset V_0$. Aplicando D^m a ambos lados, obtenemos $V_{m+1} \subset V_m$, como fue propuesto.

Para dar una definición formal del análisis de resolución múltiple, recordemos sus propiedades esenciales. Sea una secuencia de subespacios cerrados $V_m \in L^2(\mathbb{R})$, tales que:

- a) $\phi_n(t) \equiv \phi(t - n)$ forman una base ortonormal para V_0
 - b) $V_m \equiv D^m V_0$ y
 - c) $V_{m+1} \subset V_m$
- (22)

Esta secuencia de espacios anidados formarán un análisis de resolución múltiple si, además de lo anterior, para toda $f \in L^2(\mathbb{R})$:

- d) $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f = 0$ en $L^2(\mathbb{R})$, es decir, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m f\| = 0$
 - e) $\lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f = f$ en $L^2(\mathbb{R})$, es decir, $\lim_{m \rightarrow -\infty} \|f - P_m f\| = 0$
- (23)

Proposición 1.

Sea ϕ una función integrable que satisface las condiciones de promedio y ortonormalidad, (7) y (8). Entonces (23d) y (23e) se cumplen.

Demostración. Como V_0 es generado por ϕ y V_m es determinado por V_0 , las dos propiedades anteriores reducen los requisitos para ϕ . $P_m f$ es interpretada como una versión

poco clara de f en la escala $\Delta t = 2^m$. Como el límite de $P_m f$, cuando $m \rightarrow \infty$, es una función constante, y la única constante en $L^2(\mathbb{R})$ es cero, (d) se cumple. Por otro lado, si ϕ es una función razonable¹, entonces $P_m f$ tiende a f conforme $m \rightarrow -\infty$, donde (e) se cumple. ♦

Si ϕ satisface (7), entonces $\hat{\phi}(\omega)$ es doblemente integrable y, consecuentemente, limitada. En el caso más general, cuando ϕ no necesariamente es ortogonal a sus traslaciones, es necesario hacer uso de un truco de ortogonalidad para generar una nueva función de escala $\phi^\#$ que satisfaga (7). Por lo general, $\phi^\#$ y su wavelet madre asociada no cuentan con un rango cerrado, a pesar de que ϕ sí.

La formulación de wavelets de un análisis de resolución múltiple, surge de considerar los complementos ortogonales de V_{m+1} en V_m :

$$W_{m+1} \equiv \{f \in V_m : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in V_{m+1}\} \quad (24)$$

Definimos a $W_{m+1} = V_m \ominus V_{m+1}$ y $V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1}$. Entonces $f^m \in V_m$ tiene una descomposición única $f^m = f^{m+1} + d^{m+1}$ con $f^{m+1} \in V_{m+1}$ y $d^{m+1} \in W_{m+1}$. Como $W_{m+1} \subset V_{m+1}$ y W_m es ortogonal a W_m son mutuamente ortogonales, a diferencia de los espacios V_m . Ya que D^m conserva la ortogonalidad, tenemos que:

$$W_m = \{D^m f : f \in W_0\} \equiv D^m W_0 \quad (25)$$

Sea $Q_m : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ la proyección ortogonal a W_m . Entonces:

$$\begin{aligned} W_m = D^m W_0 &\Rightarrow Q_m = D^m Q_0 D^{-m} \\ V_m \perp W_m &\Rightarrow P_m Q_m = Q_m P_m = 0 \\ V_m = V_{m+1} \oplus W_{m+1} &\Rightarrow P_m = P_{m+1} + Q_{m+1} \end{aligned} \quad (26)$$

¹ Una condición para que ϕ sea lo suficientemente razonable, es que $\int |\phi(t)| dt < \infty$, esto es, que ϕ sea integrable.

Cuando $k > m$, $V_k \subset V_m$ y $W_k \subset V_m$, donde:

$$\begin{aligned} P_k P_m &= P_m P_k = P_k, \\ Q_k P_m &= P_m Q_k = Q_k \end{aligned} \quad \text{para } k > m \quad (27)$$

La expresión (26) puede ser recursiva si reemplazamos los P por su descomposición:

$$P_m = P_M + \sum_{k=m+1}^M Q_k, \quad \text{para } M > m \quad (28)$$

Cualquier $f \in L^2(\mathbb{R})$ puede descomponerse de la siguiente manera: la proyección ortogonal $f^m \equiv P_m f \in V_m$, para alguna $m \in \mathbb{Z}$, es:

$$f^m = P_M f + \sum_{k=m+1}^M Q_k f = P_M f^m + \sum_{k=m+1}^M Q_k f^m \quad (29)$$

por (27). Una señal puede ser aproximada por una versión muestreada, la cual es identificada por f^m para alguna m . Como el intervalo de muestreo para f^m es $\Delta t = 2^m$, 2^{-m} es la resolución de la señal. Es conveniente preguntarnos qué sucede cuando la resolución de la señal inicial es cada vez mayor. El límite de (29) conforme $m \rightarrow \infty$ debe ser analizado para obtener una respuesta. Como $P_m f \rightarrow f$ por (23e) y (29), tenemos:

$$f = P_M f + \sum_{k=-\infty}^M Q_k f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (30)$$

lo que presenta a f como una suma de una versión sucia $f^M \equiv P_M f$ y, sucesivamente, partes más finas $d^k = Q_k f$, $k < M$. Si la señal dada $f \in V_m$, entonces $Q_k f = 0$ para $k \leq m$ y (30) se reduce a (29). La expresión (30), proporciona una descomposición ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_M \oplus \bigoplus_{k=-\infty}^M W_k \quad (31)$$

Si ahora tenemos que $M \rightarrow \infty$ y usamos (23d), obtenemos:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k f, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (32)$$

lo que da una descomposición ortogonal:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} W_k \quad (33)$$

4. 2. Esquemas de Filtros de Subbandas.

Iniciemos este apartado, definiendo los operadores $H: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ y $G: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ por:

$$\begin{aligned} H &= P_0 D^{-1} = D^{-1} P_1, \\ G &= Q_0 D^{-1} = D^{-1} Q_1 \end{aligned} \quad (34)$$

Entonces:

$$H^* = D P_0 = P_1 D \quad G^* = D Q_0 = Q_1 D \quad (35)$$

y:

$$\begin{aligned} H H^* &= P_0^2 = P_0 & G G^* &= Q_0^2 = Q_0 \\ H G^* &= P_0 Q_0 = 0 & G H^* &= Q_0 P_0 = 0 \\ H^* H &= P_1^2 = P_1 & G^* G &= Q_1^2 = Q_1 \\ H^* G &= P_1 Q_1 = 0 & G^* H &= Q_1 P_1 = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$H H^* + G G^* = P_0 + Q_0 = P_{-1}$$

$$H^* H + G^* G = P_1 + Q_1 = P_0$$

A pesar de haber definido H y G para $L^2(\mathbb{R})$, debemos poner especial atención en su acción sobre $V_0 = V_1 \oplus W_1$. Como:

$$\begin{aligned} P_1 V_1 &= V_1, & P_1 W_1 &= \{0\} \\ Q_1 V_1 &= \{0\}, & Q_1 W_1 &= W_1 \end{aligned} \quad (37)$$

De la expresión (35), obtenemos que las imágenes de V_1 y W_1 bajo H y G son:

$$\begin{aligned} H V_1 &= D^{-1} V_1 & H W_1 &= \{0\} \\ G W_1 &= D^{-1} W_1 = W_0 & G V_1 &= \{0\} \end{aligned} \quad (38)$$

De hecho, como D^{-1} es unitario, H mapea V_1 isométricamente en V_0 , esto es, $\|Hf\| = \|f\|$, $f \in V_1$, lo mismo ocurre con G sobre W_1 en W_0 . Lo cual implica que:

$$\begin{aligned} H^* V_0 &= D V_0 = V_1 \\ G^* W_0 &= D W_0 = W_1 \end{aligned} \quad (39)$$

Si $f^0 = f^1 + d^1 \in V_0$ con $f^1 \in V_1$ y $d^1 \in W_1$, entonces $Hf^0 = D^{-1}f^1$ y $Gf^0 = D^{-1}d^1$. Ya que f^1 y d^1 se entienden como el promedio (frecuencia inferior) y partes (frecuencia superior) en f_0 respectivamente, H es entonces el filtro inferior y G es el filtro superior. Hf^0 y Gf^0 son compresiones de la frecuencia inferior y superior de f^0 , esto por el operador D^{-1} . Como esto no altera la información, es conveniente para cálculos computacionales, pues $\Delta t = 1$ para Hf^0 , entonces cuando iteramos la descomposición, la densidad de información es constante y no requiere conservar la escala. Entonces H es un alejamiento (zoom out) a f^0 con factor 2, perdiendo la frecuencia superior. H y G son conocidos como filtros de imagen cuadrática, definidos en V_0 o en $\ell^2(\mathbb{Z}) \approx V_0$.

El haber definido H y G es porque ambos pueden describir los subespacios V_1 y W_1 y las wavelets asociadas al análisis de resolución múltiple. El objetivo de H^* en $u(T)\phi \in V_0$ es explicar:

$$H^*v(T) = Dv(T)\phi = h(T)v(T^2)\phi \quad (40)$$

Entonces:

$$V_1 = \text{cerradura de } \{h(T)v(T^2)\phi : v(T) \in P\} \quad (41)$$

donde la cerradura es tomada en $v(T) \in P$ pues cuenta con un número finito de términos cálidos. Esto es, incluye los límites de vectores en el conjunto de normas finitas.

Describir W_0 , según (38) es el conjunto de vectores en V_0 que anulan H . Para obtener H , es necesario obtener primero H^* , el cual lo obtendremos de una forma diferente a la que hemos estado utilizando. Definamos el operador de muestreo superior $S_\uparrow: V_0 \rightarrow V_0$ por:

$$S_\uparrow u(T)\phi \equiv u(T^2)\phi = \sum_n u_n T^{2n}\phi = \sum_n u_n \phi_{2n} \quad (42)$$

S_\uparrow duplica el número de muestras, separándolas cada $\Delta t = 2$ e inserta un cero entre cada par de vecindades, lo que hace $\Delta t = 1$. Por lo tanto, $S_\uparrow u(T)\phi$ es tan ancho como $u(T)\phi$ y difiere de $Du(T)$ en que los pixeles ϕ_n no son alargados. La ecuación (39) demuestra que $H^*V_0 = V_1 \subset V_0$, lo que hace que H^* defina un operador en V_0 . Según (40) y (42), $H^*: V_0 \rightarrow V_0$ está dado por:

$$H^*u(T)\phi = h(T)S_\uparrow u(T)\phi \quad \text{ó} \quad H^* = h(T)S_\uparrow \quad \text{en } V_0 \quad (43)$$

Esto es, H^* toma un muestreo superior S_\uparrow en $u(T)\phi \in V_0$ y después promedia con $h(T)$. Este promedio proporciona los puntos faltantes, y el resultado, según (40), es una versión alargada de $Du(T)\phi$ de la señal original. Por esta razón, H^* es un operador de interpolación. El cual hace un acercamiento (zoom in) a la señal muestreada, tal y como lo hacía H .

La ventaja del operador H^* , mostrado en (43) es que $H:V_0 \rightarrow V_0$ proporciona inmediatamente su operador adjunto:

$$H = S_{\uparrow}^* h(T)^* = S_{\downarrow} h(T)^* \text{ en } V_0 \quad (44)$$

donde $S_{\downarrow} = S_{\uparrow}^*$ es el operador de muestreo inferior. Por lo tanto, debemos tener bien definido S_{\downarrow} para conocer H . Obsérvese que $v(T) \in P$ se puede expresar como una suma única de los polinomios:

$$v(T) = v_+(T^2) + T v_-(T^2) \quad (45)$$

donde:

$$\begin{aligned} v_+(T) &= \frac{1}{2} [v(T) + v(-T)] = \sum_n v_{2n} T^{2n} \\ v_-(T) &= \frac{1}{2} T^{-1} [v(T) - v(-T)] = \sum_n v_{2n+1} T^{2n} \end{aligned} \quad (46)$$

La expresión (3) proporciona a $v_+(T)$ y $v_-(T)$ en términos de $v(T)$ y $v(-T)$:

$$\begin{aligned} v_+(T) &= \sum_n v_{2n} T^{2n} = \frac{1}{2} D^{-1} [v(T) + v(-T)] D \\ v_-(T) &= \sum_n v_{2n+1} T^{2n} = \frac{1}{2} D^{-1} T^{-1} [v(T) - v(-T)] D \end{aligned} \quad (47)$$

Proposición 2.

Los operadores de muestreo superior e inferior, satisfacen las siguientes proposiciones:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } S_{\uparrow} S_{\downarrow} &= I_{V_0} \\
 \text{b) } S_{\downarrow} v(T)\phi &= v_{+}(T)\phi = \sum_n v_{2n}\phi_n \\
 \text{c) } S_{\downarrow} v(T)S_{\uparrow} &= v_{+}(T), \quad S_{\downarrow} T^{-1}v(T)S_{\uparrow} = v_{-}(T) \\
 \text{d) } S_{\uparrow} S_{\downarrow} + TS_{\uparrow} S_{\downarrow} T^{-1} &= I_{V_0}
 \end{aligned} \tag{48}$$

Demostración. Como $S_{\downarrow} = S_{\uparrow}^*$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \langle u(T)\phi, S_{\downarrow} S_{\uparrow} v(T)\phi \rangle &= \langle S_{\uparrow} u(T)\phi, S_{\uparrow} v(T)\phi \rangle = \langle u(T^2)\phi, v(T^2)\phi \rangle = \\
 &= \langle u(T)\phi, v(T)\phi \rangle
 \end{aligned} \tag{49}$$

Donde la última igualdad se origina de la condición de ortonormalidad, $\langle \phi_{2n}, \phi_{2k} \rangle = \delta_{2k}^{2n} = \delta_k = \langle \phi_n, \phi_k \rangle$. Lo que demuestra (a); para demostrar (b), debemos tomar en cuenta que para toda $u(T) \in P$, se cumple:

$$\begin{aligned}
 \langle u(T)\phi, S_{\downarrow} v(T)\phi \rangle &= \langle S_{\uparrow} u(T)\phi, v(T)\phi \rangle = \\
 &= \langle u(T^2)\phi, v_{+}(T^2)\phi + Tv_{-}(T^2)\phi \rangle
 \end{aligned} \tag{50}$$

un resultado de la ortogonalidad entre los polinomios impares. Así, la expresión anterior es ahora:

$$\langle u(T)\phi, S_{\downarrow} v(T)\phi \rangle = \langle u(T^2)\phi, v_{+}(T^2)\phi \rangle = \langle u(T)\phi, v_{+}(T)\phi \rangle \tag{51}$$

la cual es válida para toda $u(T\phi) \in V_0$, lo cual demuestra (b). Obsérvese que $S_{\uparrow}u(T)v(T)\phi = u(T^2)v(T^2)\phi$ es un operador similar al expresado en (3):

$$S_{\uparrow}u(T) = u(T^2)S_{\uparrow}, \quad u(T) \in P \tag{52}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} S_{\downarrow}v(T)S_{\uparrow} &= S_{\downarrow}[v_+(T^2) + Tv_-(T^2)]S_{\uparrow} = \\ &= S_{\downarrow}S_{\uparrow}v_+(T^2) + S_{\downarrow}TS_{\uparrow}v_-(T^2) \end{aligned} \tag{53}$$

Pero $S_{\downarrow}TS_{\uparrow}u(T)\phi = S_{\downarrow}Tu(T^2)\phi = 0$ según (b), como $Tu(T^2)$ es impar; entonces $S_{\downarrow}TS_{\uparrow} = 0$. Además, $S_{\downarrow}S_{\uparrow} = I_{V_0}$, por (a), por lo tanto (53) se reduce a $S_{\downarrow}v(T)S_{\uparrow} = v_+(T)$. La segunda igualdad en (c), surge de tener presente que $T^{-1}v(T) = v_-(T^2)$. Entonces:

$$\begin{aligned} S_{\downarrow}S_{\uparrow}v(T)\phi + TS_{\downarrow}S_{\uparrow}T^{-1}v(T)\phi &= S_{\uparrow}v_+(T)\phi + TS_{\uparrow}v_-(T)\phi = \\ &= v_+(T^2)\phi + Tv_-(T^2)\phi = v(T)\phi \end{aligned} \tag{54} \blacklozenge$$

Una forma de entender al operador de muestreo inferior es a través de la igualdad (48b), que es consecuencia de eliminar la muestras impares de $v(T)\phi$, razón por la cual la señal resultante es de la mitad de ancho que la original. Es obvio que perdemos información durante el proceso, contrariamente al operador de muestreo superior.

Sea:

$$\begin{aligned} Hu(T)\phi &= S_{\downarrow}h(T)^{\wedge}u(T)\phi = \\ &= \frac{1}{2}D^{-1}[h(T)^{\wedge}u(T) + h(-T)^{\wedge}u(-T)]D\phi \end{aligned} \tag{55}$$

De donde $Hu(T)\phi = 0$ si y sólo si $h(T)^{\wedge}u(T)$ es impar, lo que podemos solucionar haciendo:

$$u(T) = h(-T)^* v(T), \text{ con } v(T) \text{ impar} \quad (56)$$

puesto que $h^*(T)h(-T)$ es necesariamente impar. Esto demuestra que W_1 es complemento de V_1 en la expresión (41).

Proposición 3.

Sea λ entero impar, y sea:

$$g(T) = -T^\lambda h(-T) \quad (57)$$

Entonces toda $u(T) \in P$ se puede escribir en forma única como:

$$u(T) = h(T)v(T^2) + g(T)\omega(T^2) \text{ para } v(T), \omega(T) \in P \quad (58)$$

y:

$$W_1 = \text{cerradura de } \{g(T)\omega(T^2)\phi : \omega(T) \in P\} \quad (59)$$

Demostración. Considerando que (58) sea válida, entonces $h(T)v(T^2)\phi \in V_1$ y $g(T)\omega(T^2)\phi \in W_1$, según (56), pues $-T^\lambda\omega(T^2)$ es impar. En consecuencia:

$$h(T)v(T^2)\phi = P_1 u(T)\phi, \quad g(T)\omega(T^2)\phi = Q_1 u(T)\phi \quad (60)$$

Por lo tanto, $\{Q_1 u(T)\phi : u(T) \in P\}$ componen W_1 , demostrando así (59). Para demostrar (58) haremos mención de un lema:

Lema 1.

$h(T)$ y $g(T)$ satisfacen las siguientes relaciones de ortogonalidad:

$$a) S_{\downarrow} h(T) h(T)^* S_{\uparrow} = S_{\downarrow} g(T) g(T)^* S_{\uparrow} = I_{V_0}$$

$$b) S_{\downarrow} g(T) h(T)^* S_{\uparrow} = S_{\downarrow} h(T) g(T)^* S_{\uparrow} = 0$$

Equivalente a:

(61)

$$c) h(T)^* h(T) + h(-T)^* h(-T) = g(T)^* g(T) + g(-T)^* g(-T) = 2I_{V_0}$$

$$d) g(T)^* h(T) + g(-T)^* h(-T) = h(T)^* g(T) + h(-T)^* g(-T) = 0$$

Demostración. $HH^* = P_0$ en $L^2(\mathbb{R})$, según (36), por restricciones de V_0 , $HH^* = I_{V_0}$.

Entonces, por (43) y (44):

$$HH^* = S_{\downarrow} h(T) h(T)^* S_{\uparrow} = I_{V_0} \tag{62}$$

Además $g(T)^* g(T) = h(-T) h(-T)^*$ y $S_{\downarrow} g(T) g(T)^* S_{\uparrow} = I_{V_0}$. Finalmente:

$$S_{\downarrow} h(T) g(T)^* S_{\uparrow} = -S_{\downarrow} h(T) h(-T)^* T^{\lambda} S_{\downarrow} = 0 \tag{63}$$

pues $h(T) h(-T)^* T^{\lambda}$ es impar y, similarmente, $S_{\downarrow} g(T) h(T)^* S_{\uparrow} = 0$. Demostrando así (61a) y (61b). Las expresiones (61c) y (61d) se originan de (60) y (46). ♦

Si (58) es válida, entonces por el lema 1:

$$\begin{aligned} S_{\downarrow} h(T) u(T) S_{\uparrow} &= S_{\downarrow} h(T) h(T) v(T^2) S_{\uparrow} + S_{\downarrow} h(T) g(T) \omega(T^2) S_{\uparrow} = \\ &= S_{\downarrow} h(T) h(T) S_{\uparrow} v(T) + S_{\downarrow} h(T) g(T) S_{\uparrow} \omega(T) = \\ &= v(T) \end{aligned} \tag{64}$$

De forma análoga:

$$S_{\downarrow}g(T)^{\star}u(T)S_{\uparrow} = \omega(T) \quad (65)$$

Entonces $v(T)$ y $\omega(T)$ son únicos si (58) es válida. Esto permite demostrar que, al sustituir (64) y (65) del lado derecho de (58), obtenemos $u(T)$ para cualquier $u(T) \in P$ dada. Por (47) y (48c):

$$\begin{aligned} v(T^2) &= Dv(T)D^{-1} = DS_{\downarrow}h(T)^{\star}u(T)S_{\uparrow}D^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} [h(T)^{\star}u(T) + h(-T)^{\star}u(-T)] \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \omega(T^2) &= D\omega(T)D^{-1} = DS_{\downarrow}g(T)^{\star}u(T)S_{\uparrow}D^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} [g(T)^{\star}u(T) + g(-T)^{\star}u(-T)] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} h(T)v(T^2) + g(T)\omega(T^2) &= \frac{1}{2} [h(T)h(T)^{\star} + g(T)g(T)^{\star}]u(T) + \\ &+ \frac{1}{2} [h(T)h(-T) + g(T)g(-T)]u(-T) \end{aligned} \quad (67)$$

Pero por (61):

$$\begin{aligned} h(T)h(T)^{\star} + g(T)g(T)^{\star} &= h(T)h(T)^{\star} + h(-T)^{\star}h(-T) = 2I_{V_0} \\ h(T)h(-T)^{\star} + g(T)g(-T)^{\star} &= h(T)h(-T)^{\star} - h(-T)^{\star}h(T) = 0 \end{aligned} \quad (68)$$

De donde (58) queda demostrada. ♦

El operador $g(T)$ es un operador diferencial en V_0 , así como $h(T)$ es un operador de muestreo. La expresión (68) explica cómo estos dos operadores son complementarios uno del otro.

En este momento podemos ya definir las wavelets asociadas al análisis de resolución múltiple. La wavelet madre pertenece a W_0 y V_0 está compuesto de las funciones de escala. Como $W_0 = D^{-1}W_1$, el conjunto de vectores de W_0 están dados por:

$$D^{-1}g(T)\omega(T^2)\phi = D^{-1}\omega(T^2)g(T)\phi = \omega(T)D^{-1}g(T)\phi \quad (69)$$

con $\omega(T) \in P$. Definiendo la wavelet madre como:

$$\psi \equiv D^{-1}g(T) \in W_0, \text{ esto es, } \psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n) \quad (70)$$

entonces:

$$W_0 = \text{cerradura de } \{\omega(T)\psi : \omega(T) \in P\} \quad (71)$$

Las wavelets del conjunto se definen por:

$$\psi_n \equiv T^n \psi = T^n D^{-1}g(T)\phi = D^{-1}T^{2n}g(T)\phi \quad (72)$$

que conforman W_0 .

Finalmente, para toda $m \in Z$, los vectores:

$$\psi_{m,n} \equiv D^m T^n \psi \text{ es decir, } \psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n) \quad (73)$$

describen W_m .

Proposición 4.

Las wavelets $\{\psi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ forman una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Demostración. Hemos demostrado que las wavelets ψ_n en la escala $m = 0$, son ortonormales y, por ende, forman una base ortonormal que describe W_0 . Entonces, a partir del operador D que es unitario para toda m , $\{\psi_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de W_m puesto que $L^2(\mathbb{R})$ es el resultado de la suma ortogonal de los W_m . De aquí que:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_k \rangle &= \langle T^{2n}g(T)\phi, T^{2k}g(T)\phi \rangle = \\ &= \langle T^{2n-2k}\phi, g(T)^*g(T)\phi \rangle \end{aligned} \quad (74)$$

Pero $\phi = S_{\uparrow}\phi$ y $T^{2n-2k}\phi = S_{\uparrow}T^{n-k}\phi$, entonces por el lema 1 y la ortogonalidad de las ϕ_n , obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \psi_k \rangle &= \langle S_{\uparrow}T^{n-k}\phi, g(T)^*g(T)S_{\uparrow}\phi \rangle = \\ &= \langle T^{n-k}\phi, S_{\downarrow}g(T)^*g(T)S_{\uparrow}\phi \rangle = \\ &= \langle T^{n-k}\phi, \phi \rangle = \langle \phi_n, \phi_k \rangle = \delta_k^n \end{aligned} \quad (75) \blacklozenge$$

En este momento, podemos expresar la proyección ortogonal de Q_m a W_m en términos de la base de wavelets, así como la proyección P_m a V_m fue dada en (13):

$$Q_m = \sum_n \psi_{m,n} \psi_{m,n}^* \quad (76)$$

Entonces, por (30) y (32):

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{M,n} \phi_{M,n}^* f + \sum_{k=-\infty}^M \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{k,n} \psi_{k,n}^* f \quad (77)$$

y:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{k,n} \psi_{k,n}^* f \quad (78)$$

El operador $H^* = DP_0$ definido para $L^2(\mathbb{R})$, el cual estaba restringido a $H^*: V_0 \rightarrow V_0$, fue usado junto con su operador adjunto, para definir las wavelets. Es conveniente restringir $G^* = DQ_0$ de forma similar, ya que las cuatro restricciones H , H^* , G y G^* , de manera colectiva, dan paso a los "Filtros de Subbandas" los cuales son un esquema para la descomposición de wavelets que es completamente recursivo y propio para ser implementado en un algoritmo computacional. Según (39), la imagen de W_0 bajo G^* es $W_1 \subset V_0$, por lo tanto, G^* queda restringido a un operador de W_0 a V_0 . Esta restricción, $G^*: W_0 \rightarrow V_0$ se comporta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G^* \omega(T)\psi &= DQ_0 \omega(T)\psi = D\omega(T)\psi = \omega(T^2)D\psi = \\ &= \omega(T^2)g(T)\phi = g(T)S_{\uparrow} \omega(T)\phi \end{aligned} \quad (79)$$

Puede ser demostrado que $G: V_0 \rightarrow W_0$ está dado por:

$$Gu(T)\phi = S_{\downarrow} g(T)^* u(T)\phi \quad (80)$$

donde los operadores S_{\uparrow} y S_{\downarrow} tienen el mismo efecto en W_0 como en V_0 :

$$S_{\uparrow} \omega(T)\psi = \omega(T^2)\phi \Rightarrow S_{\downarrow} \omega(T)\psi = \omega_+(T)\psi \quad (81)$$

junto con:

$$H^* u(T)\phi = h(T)S_{\uparrow} u(T)\phi, \quad Hu(T)\phi = S_{\downarrow} h(T)^* u(T)\phi \quad (82)$$

Las expresiones (79) y (80) dan una descripción clara de los filtros de imagen cuadrática H , G y sus adjunto. Estos operadores proceden sobre la secuencia $\{u_n\}$ correspondiente a $u(T)\phi \in V_0$ o $u(T)\psi \in W_0$.

Obsérvese que:

$$\begin{aligned} g(T) &= -T^\lambda h(-T)^* = -\sum_n (-1)^n \bar{h}_n T^{\lambda-n} = \\ &= \sum_n (-1)^n \bar{h}_{\lambda-n} T^n \end{aligned} \quad (83)$$

Entonces:

$$g_n = (-1)^n \bar{h}_{\lambda-n} \quad (84)$$

$\{g_n\}$ es el conjunto de coeficientes de ψ o la secuencia del filtro superior. Un cambio de variable de λ , $\lambda' = \lambda + 2\mu$ da $g'(T) = T^{2\mu}g(T)$, dando origen a una nueva wavelet:

$$\psi' = D^{-1}T^{2\mu}g(T)\phi = T^\mu\psi \quad (85)$$

que es simplemente una traslación de ψ . En esto radica la importancia de λ .

Al aplicar H^* , debe ser sobre los elementos de la base, ϕ_k , de una secuencia:

$$H^*\phi_k = h(T)\phi_{2k} = \sum_n h_n T^{n+2k}\phi = \sum_n h_{n-2k}\phi_n \quad (86)$$

De donde:

$$H^*\sum_k u_k\phi_k = \sum_k \sum_n u_k h_{n-2k}\phi_n = \sum_n \left(\sum_k h_{n-2k}u_k \right) \phi_n \quad (87)$$

que origina la igualdad:

$$H^* \{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{ \sum_k h_{n-2k} u_k \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (88)$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} G^* \psi_k &= \sum_n g_{n-2k} \phi_n, \\ H \phi_n &= \sum_k \bar{h}_{n-2k} \phi_k, \\ G \phi_n &= \sum_k \bar{g}_{n-2k} \phi_k \end{aligned} \quad (89)$$

De donde:

$$\begin{aligned} G^* \{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \sum_k g_{n-2k} u_k \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ H \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \sum_k \bar{h}_{n-2k} u_n \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ G \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \sum_k \bar{g}_{n-2k} u_n \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (90)$$

En las sumas anteriores, el rango de ϕ y ψ son finitos, lo que permite sean incluidas en un método numérico. H y G son filtros de impulso de respuesta finita. La descomposición de wavelets y la reconstrucción de señales forman un esquema recursivo en el sentido de que las restricciones para $H: V_0 \rightarrow V_0$, $G: V_0 \rightarrow W_0$, sus adjuntos y la expresión (36), implican que:

$$\begin{aligned} HH^* &= I_{V_0} \\ GG^* &= I_{W_0} \\ HG^* &= GH^* = 0 \\ H^*H + G^*G &= I_{V_0} \end{aligned} \quad (91)$$

que al ser aplicados a $u^0 = \{u_n^0\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \approx V_0$ nos da la descomposición:

$$u^0 = H^*u^1 + G^*d^1 \text{ donde } u^1 = Hu^0, d^1 = Gu^0 \tag{92}$$

Como $u^1 \in \ell^2(Z) \approx V_0$ podemos descomponer u^1 en forma similar a u^0 :

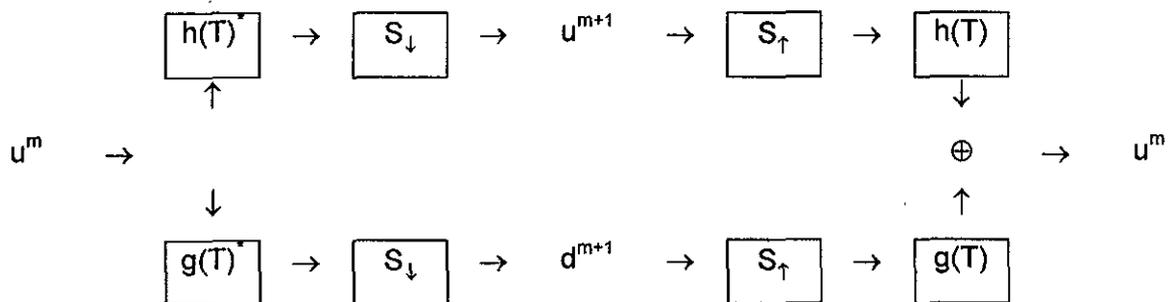
$$u^1 = H^*u^2 + G^*d^2 \text{ donde } u^2 = Hu^1, d^2 = Gu^1 \tag{93}$$

De forma similar, obtenemos u^m :

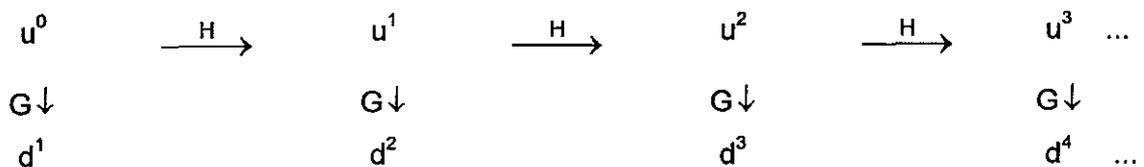
$$u^m = H^*u^{m+1} + G^*d^{m+1} \text{ donde } u^{m+1} = Hu^m, d^{m+1} = Gu^m \tag{94}$$

expresiones recursivas para el análisis y la síntesis, donde en cada paso se involucra un número finito de cálculos. Esto es el esquema de "Filtros de Subbandas". También es conocido como Código de Subbandas, porque los coeficientes $\{u^m, d^m\}$ son interpretados como códigos de la señal, de los cuales podemos reconstruir por decodificación la señal original.

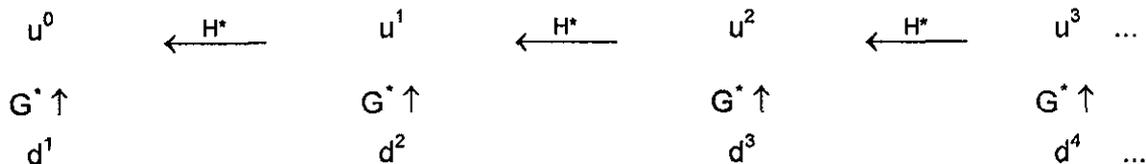
Para entender mejor este esquema de filtros de subbandas, veamos el siguiente diagrama:



La descomposición y reconstrucción podemos explicarlas por los diagramas duales:



El esquema anterior representa la descomposición wavelet, usando filtros de imagen cuadrática:



Los requerimientos para la función de escala, para definir las restricciones de $h(T)$ y $g(T)$ o, en forma equivalente, los coeficientes de filtro h_n y g_n son:

- a) Propiedad de Promedio: $\hat{\phi}(0) \equiv \int \phi(t) dt = 1.$
- b) Ecuación de Dilatación: $D\phi = h(T)\phi.$ Integrando sobre t y usando (a), tenemos que

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t-n) \Rightarrow \sum_n h_n = \sqrt{2} \tag{95}$$

- c) Condición de Ortogonalidad:

$$\begin{aligned}
 \delta_k^0 &= \langle \phi_k, \phi \rangle = \langle D\phi_k, D\phi \rangle = \langle h(T)\phi_{2k}, h(T)\phi \rangle = \\
 &= \sum_{n,l} \bar{h}_n \bar{h}_l \langle \phi_{2k+n}, \phi_l \rangle = \\
 &= \sum_n \bar{h}_n h_{n+2k}
 \end{aligned} \tag{96}$$

Las expresiones (95) y (96) se originan de la interacción entre la dilatación y la traslación.

Por no contar con un conjunto finito de coeficientes h_n , debemos exigir ciertas condiciones mutuamente consistentes. La relación entre la condición lineal (95) y la cuadrática (96), no debe provocar conflictos. Una forma de evitar conflictos es por medio de (61):

$$\begin{aligned}
 2|V_0| &= h(T)^* h(T) + h(-T)^* h(-T) = \\
 &= \sum_{n,\ell} \left[1 + (-1)^\ell \right] \bar{h}_n h_{n+\ell} T^\ell
 \end{aligned} \tag{97}$$

donde:

$$\left[1 + (-1)^\ell \right] \sum_n \bar{h}_n h_{n+\ell} = 2\delta_\ell^0 \tag{98}$$

para ℓ impar, (98) es una identidad, mientras que para $\ell = 2k$, (98) se reduce a la expresión (96). La ventaja que ofrece la expresión (97) acerca de la condición de ortogonalidad, sobre la expresión (96), es la relación tan transparente que existe con la expresión (95). Tomando la transformada de Fourier, como en la igualdad (19), obtenemos la sustitución $T \rightarrow e^{-2\pi i k \omega} \equiv z$, donde $h(T)$ da paso a $h(z)$, un polinomio ordinario de Laurent de variable compleja z , $|z| = 1$. De forma análoga, $h(T)^* = \sum_n \bar{h}_n T^{-n}$ es ahora

$$\sum_n \bar{h}_n z^{-n} = \sum_n \bar{h}_n \bar{z}^n = \overline{h(z)}.$$

La expresión (97) en el dominio de la frecuencia está representada de la siguiente forma:

$$|h(z)|^2 + |h(-z)|^2 = 2 \tag{99}$$

Similarmente, (95) es:

$$h(1) = \sqrt{2} \tag{100}$$

La relación entre las dos restricciones anteriores, es clara: ambas implican que:

$$h(-1) = 0, \text{ esto es, } \sum_n (-1)^n h_n = 0 \tag{101}$$

Esto porque la suma de los coeficientes h_{2k} es igual a la suma de los h_{2k-1} , donde la suma de ambos es $\sqrt{2}$, pues:

$$\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (102)$$

No debemos olvidar que $g(T) = T^\lambda H(-T)^*$. Por lo tanto, $|g(z)| = |h(-z)|$ para $|z| = 1$ y:

$$\begin{aligned} |g(z)|^2 + |g(-z)|^2 &= 2 \\ g(1) &= 0 \\ g(-1) &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad (103)$$

Finalmente:

$$\sum_k g_{2k} = -\sum_k g_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (104)$$

La igualdad (104), implica que la wavelet madre ψ , satisface la condición para que sea aceptada:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n = 0 \quad (105)$$

Los coeficientes de filtro h_n y g_n satisfacen las propiedades de $\phi(t)$ y $\psi(t)$ respectivamente, con la ventaja de que la variable continua t es reemplazada por la variable discreta n , los que nos permite asumir que ϕ tiene un rango compuesto de números finitos. La condición de ortogonalidad para el caso discreto, está representada en las fórmulas (96) y (99). De forma similar, la condición para que la wavelet madre sea aceptada está expresada en la fórmula (104) que es finita y discreta. Finalmente, (95) es la descripción de $\int \phi(t) dt \neq 0$ en forma finita y discreta. El haber hallado estas representaciones implica que

debemos contar con descripciones discretas y finitas en términos de los coeficientes de filtro.

Analicemos las expansiones (77) y (78) en términos de la condición para que la wavelet madre sea aceptada, (105):

$$\text{a) } f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{M,n} \phi_{M,n}^* f + \sum_{k=-\infty}^M \psi_{k,n} \psi_{k,n}^* f \quad (106)$$

$$\text{b) } f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{k,n} \psi_{k,n}^* f$$

Puesto que $\int \phi(t) dt = 1$ y $\int \psi_{m,n}(t) dt = 0$, lo que implica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{M,n}(t) dt = 2^{\frac{M}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t) dt = 0 \quad (107)$$

integrando de manera formal término a término (106), obtenemos:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2^{\frac{M}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_{M,n}^* f \quad (108)$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

(108b) no se satisface en lo general, puesto que el lado derecho de la igualdad es necesariamente válido para $f \in L^2(\mathbb{R})$. Esta paradoja, es resultado de integrar término a término (106b). Lo que pretendemos explicar es que la expansión (106b) converge en $L^2(\mathbb{R})$ pero no necesariamente en L^1 , lo que significa que las sumas parciales:

$$\text{a) } f_N(t) = \sum_{n=-N}^N \phi_{M,n} \phi_{M,n}^* f + \sum_{k=-N}^M \sum_{n=-N}^N \psi_{k,n} \psi_{k,n}^* f \quad (109)$$

$$\text{b) } f_N(t) = \sum_{k=-N}^M \sum_{n=-N}^N \psi_{k,n}(t) \psi_{k,n}^* f$$

se aproximan a f en L^2 normalizado:

$$\|f - f_N\|_2^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_N(t)|^2 dt \rightarrow 0, \text{ conforme } N \rightarrow \infty \quad (110)$$

lo cual no necesariamente tiene que ocurrir en L^1 normalizado:

$$\|f - f_N\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_N(t)| dt \rightarrow 0, \text{ conforme } N \rightarrow \infty \quad (111)$$

La función $f(t) - f_N(t)$ en (109b) se comporta de manera similar a g_N , esto es, $f(t) - f_N(t)$ es más larga y ancha para una N grande, ya que partes de la función han sido removidas. Conforme $N \rightarrow \infty$, su norma en L^2 no se satisface, pero en L^1 sí, a pesar de que $\int f(t) dt = 0$, provocando una paradoja en (108b). Como vimos en (109a), tal paradoja no es originada por (106a), ya que ésta se compone de términos en $P_m f$. Lo que hace que se prefiera la expansión (a) sobre la (b).

4. 3. Dominio de Frecuencia.

A pesar de que se ha afirmado que el análisis de wavelets reemplazará al análisis de Fourier, no debemos dudar que el análisis de Fourier juega un papel importante en la construcción de wavelets. Esto es claro en la descomposición wavelet, expresiones (30) y (32), las cuales son de vital importancia para explicar cómo el espectro de la frecuencia de una señal $f \in V_m$ se divide en los espacios V_{m+1} y W_{m+1} , lo cual permite explicar el significado de "promedio" y "partes". Los dominios naturales para el análisis de wavelets son el tiempo y la escala plana del tiempo, lo que permite el estudio en el dominio de la frecuencia.

En apartados previos nos hemos referido al producto interno $\langle \phi_n, f \rangle$ como "muestras" en V_0 (con $\Delta t = 1$) de $f \in L^2(\mathbb{R})$. Estas muestras no son exactamente los valores de $f(n)$, puesto que ϕ no es una función de Δt . De hecho:

$$\langle \phi_n, f \rangle = \langle \hat{\phi}_n, \hat{f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \omega} \bar{\hat{\phi}}(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega = F(n) \quad (112)$$

donde la función $F(t)$ está definida por su transformada de Fourier:

$$\hat{F}(\omega) = \bar{\hat{\phi}}(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (113)$$

Obsérvese que $\int |\hat{F}(\omega)| d\omega \leq \|\hat{\phi}\| \|\hat{f}\| = \|\phi\| \|f\|$ por la desigualdad de Schwarz y el teorema de Plancherel, donde $\hat{F}(\omega)$ es integrable y, consecuentemente, $F(t)$ es continua y sus valores $F(n)$ están bien definidos. $\phi_n^* f$ son muestras de la función $F(t)$ definidos en (113) y no muestras de $f(t)$. En general, una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ no puede ser muestreada tal como es, ya que su valor en cualquier punto dado, está indefinido. En el capítulo 2, tomamos muestras de funciones límite de banda, las cuales son necesariamente continuas y consecuentemente tienen valores bien definidos. En general, $f \in L^2(\mathbb{R})$ debe hacerse continua (por ejemplo, pasar la función por un filtro inferior) antes de ser muestreada. La expresión (112) demuestra que ϕ actúa como un operador continuo, resultando la función $F(t)$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} F(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n \omega} \hat{F}(\omega) d\omega = \sum_k \int_0^1 e^{2\pi i n(\omega+k)} \hat{F}(\omega+k) d\omega = \\ &= \int_0^1 e^{2\pi i n \omega} \sum_k \hat{F}(\omega+k) d\omega = \int_0^1 e^{2\pi i n \omega} A(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (114)$$

Las muestras $F(n)$ son los coeficientes de Fourier de la función periódica $A(\omega) = \sum_k \hat{F}(\omega+k)$ de período 1. Las copias $\hat{F}(\omega+k)$ con $k \neq 0$ son réplicas de $\hat{F}(\omega)$ y si el rango de $\hat{F}(\omega)$ es mayor a 1, entonces estas réplicas generarán interferencia, lo cual hará imposible recobrar de las muestras a $\hat{F}(\omega)$. En otras palabras, conociendo $F(t)$ en $t = n \in \mathbb{Z}$ obtenemos información acerca de los períodos de $\hat{F}(\omega)$, la cual es proporcionada por las réplicas.

En la construcción parcial de f a través de $P_0 f = \sum_n u_n \phi_n = u(T)\phi$, $u_n \equiv \phi_n^* f$ son las muestras de las que hablábamos. El operador T , operador de traslación en el tiempo, actúa en el dominio de la frecuencia por (19):

$$(Tg)^\wedge(\omega) = z\hat{g}(\omega), \text{ donde } z = z(\omega) \equiv e^{-2\pi i\omega} \quad (115)$$

para toda $g \in L^2(\mathbb{R})$. Es conveniente usar la notación $\hat{g}(\omega) = e_\omega^* g$, a pesar de que $e_\omega(t) \equiv e^{2\pi i\omega t}$ no pertenece a $L^2(\mathbb{R})$, por lo tanto (115) es ahora:

$$e_\omega^* Tg = ze_\omega^* g, \text{ ó } e_\omega^* T = ze_\omega^* \quad (116)$$

Esta expresión es el adjunto de $T^{-1}e_\omega(t) = e^{2i\omega(t+1)} = \bar{z}e_\omega(t)$, donde (116) define a e_ω^* como un vector propio de T con valor propio $z(\omega)$. Entonces:

$$(P_0 f)^\wedge(\omega) = e_\omega^* P_0 f = e_\omega^* u(T)\phi = u(z)e_\omega^* \phi = u(z)\hat{\phi}(\omega) \quad (117)$$

Pero $u_n = F(n)$, luego por (114):

$$u(z) \equiv \sum_n e^{-2\pi i n \omega} u_n = A(\omega) \equiv \sum_k \hat{F}(\omega + k) \quad (118)$$

La expresión (117), permite afirmar que V_0 es la cerradura (en $L^2(\mathbb{R})$) del conjunto de todas las funciones cuya transformada de Fourier puede expresarse como el producto de un polinomio trigonométrico $u(z)$ por una función $\hat{\phi}(\omega)$ cualquiera (la cerradura incrementa el conjunto, al incluir las funciones $u(z)$ de período 1, y cuadrática integrable en $0 \leq \omega \leq 1$ como en (20)).

El proceso de muestreo $f \rightarrow \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ define un operador $S_0: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, esto es, $S_0 f \equiv \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. S_0 es llamado operador de muestreo de V_0 . El operador de muestreo en V_m ,

S_m , se define de manera similar, si toda la teoría se extiende a $m \in \mathbb{Z}$. Si $\{u_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces la serie de Fourier correspondiente es $u(z) \equiv \sum_n u_n z^n$ que es cuadrática integrable en el círculo unitario $T \equiv \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Denotemos al espacio de funciones por $L^2(T)$. El mapeo $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow u(z)$ define un operador $\hat{\cdot}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(T)$, el cual es una analogía discreta de la transformada de Fourier.

Definamos al operador $\hat{S}_0: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(T)$ como el operador dual de Fourier de S_0 , esto es, el operador correspondiente a S_0 en el dominio de la frecuencia:

$$(\hat{S}_0 \hat{f})(z) \equiv (S_0 f)^\wedge(z) = \sum_n z_n \phi_n^* f \tag{119}$$

Esto es:

$$\begin{array}{ccc} f(t) \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{S_0} & \{\phi_n^* f \equiv u_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow \\ \hat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{S}_0} & u(z) \in L^2(T) \end{array}$$

S_0 es el operador de muestreo de V_0 y su operador dual de Fourier, el operador de réplica \hat{S}_0 .

Las expresiones (118) y (113) describen explícitamente a \hat{S}_0 :

$$(\hat{S}_0 \hat{f})(z) = \sum_k \overline{\hat{\phi}(\omega + k)} \hat{f}(\omega + k) \tag{120}$$

El lado derecho de la igualdad, es de período 1 y depende solo de $z = e^{-2\pi i \omega}$, razón por la cual \hat{S}_0 es llamado operador de réplica asociado a V_0 . Tomar muestras en el dominio del tiempo es equivalente a tomar réplicas en el dominio de la frecuencia.

Por la manera en que se define S_0 , es fácil ver que $S_0^*: \ell^2(Z) \rightarrow L^2(R)$. Además, $S_0^*\{u_n\} = u(T)\phi$. S_0^* es un operador de interpolación, ya que interpola las muestras $\{u_n\}$ para obtener la función $\sum_n u_n \phi(t-n)$. La relación entre los operadores adjuntos S_0^* y \hat{S}_0^* de S_0 y \hat{S}_0 se describe en el siguiente diagrama, el cual surge de analizar la expresión (117).

$$\begin{array}{ccc}
 u(T)\phi \in L^2(R) & \leftarrow & \{u_n\} \in L^2(R) \\
 \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow \\
 u(z)\hat{\phi}(\omega) \in L^2(R) & \leftarrow & u(z) \in L^2(T)
 \end{array}$$

El operador de interpolación de V_0 , S_0^* , y su operador dual de Fourier, el operador de réplica \hat{S}_0^* .

El operador \hat{S}_0^* produce una función no periódica $u(z)\hat{\phi}(\omega)$ de $u(z)$. Para una $f \in L^2(R)$ puede llevarse a cabo una réplica. De hecho, por (120):

$$(\hat{S}_0^* \hat{S}_0 f)(\omega) = \sum_k \overline{\hat{\phi}(\omega+k)} \hat{f}(\omega+k) \hat{\phi}(\omega) \tag{121}$$

lo cual no coincide con $\hat{f}(\omega)$ en general. Obsérvese que $S_0^* S_0 = P_0$. Entonces $S_0^* S_0 \hat{f} = \hat{f}$ si y sólo si $f \in V_0$. Si $f = u(T)\phi \in V_0$, entonces $\hat{f}(\omega) = u(z(\omega))\hat{\phi}(\omega)$ y para $k \in Z$:

$$\hat{f}(\omega+k) = u(z(\omega+k))\hat{\phi}(\omega+k) = u(z(\omega))\hat{\phi}(\omega+k) \tag{122}$$

De (121) obtenemos que:

$$(\hat{S}_0^* \hat{S}_0 f)(\omega) = \left[\sum_k |\hat{\phi}(\omega+k)|^2 \right] u(z)\hat{\phi}(\omega) \tag{123}$$

La siguiente proposición confirma que el lado derecho de la igualdad anterior es $u(z)\hat{\phi}(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

Proposición 5.

La propiedad de ortonormalidad $\langle \phi_n, \phi \rangle = \delta_n^0$ es equivalente a:

$$K(\omega) \equiv \sum_k |\hat{\phi}(\omega + k)|^2 = 1 \quad (124)$$

Demostración. Obsérvese que $K(\omega)$ es de período 1 y $\int_0^1 K(\omega) d\omega = \|\hat{\phi}\|^2 = 1$, por lo que K es integrable y se puede expresar en una serie de Fourier. De las expresiones (112) y (114), con $f = \phi$ obtenemos:

$$\langle \phi_n, \phi \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i n \omega} K(\omega) d\omega \quad (125)$$

Por la condición de ortogonalidad, tenemos que los coeficiente de Fourier de $K(\omega)$ son $c_n = \delta_n^0$, lo que significa que $K(\omega) = 1$. ♦

Nótese que cuando $\phi(t)$ es de rango compacto entonces $\hat{\phi}(\omega)$ es analítica y continua, y (124) se satisface para toda ω , aunque no en todo momento. Cuando $e^{\pm i\omega t}$ es usado en lugar de $e^{\pm 2\pi i \omega t}$, en la transformada de Fourier, la expresión (124) es:

$$\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (126)$$

La proposición 5 da la interpretación intuitiva de $\hat{\phi}$. De acuerdo a (120), la k -ésima copia $\hat{f}(\omega + k)$ de \hat{f} está modulada por la función de amplitud compleja $\hat{\phi}(\omega + k)$ en el proceso de réplica. En la reconstrucción parcial $u(z) \rightarrow u(z(\omega))\hat{\phi}(\omega)$, $\hat{\phi}(\omega)$ actúa como

una sola función de amplitud que modula todas las diferentes copias. Si $\omega \in [-0.5, 0.5]$ y consideramos $|\hat{\phi}(\omega+k)|^2$ como una función de peso asignada a la k -ésima copia, entonces la proposición 5 demuestra que el peso total de todas las copias es 1. Por lo tanto, podemos decir que ϕ es un filtro de réplica diseminado: Si $\hat{\phi}(\omega)$ fuera la función característica de un solo período $[-0.5 - k, 0.5 - k)$, entonces $u(z)\hat{\phi}(\omega)$ filtraría sólo esa copia. Aunque el rango de $\hat{\phi}(\omega)$ este diseminado alrededor de varios períodos, la proposición 5 garantiza que S_0^* genere una réplica exacta de $u(z)$ cuando $f \in V_0$. Es claro que la proposición anterior no tiene preferencias por alguna copia en particular, ya que es una traslación invariante. Para toda α , $\phi^\alpha(\omega) \equiv \hat{\phi}(\omega + \alpha)$ que satisface (124). La siguiente proposición demuestra que cuando se requiere que ϕ satisfaga las propiedades de promedio y ortonormalidad, entonces obtenemos una mayor preferencia por $\hat{f}(\omega)$ sobre todas las réplicas $\hat{f}(\omega+k)$, $k \neq 0$, donde ϕ actúa como un filtro inferior de réplica. Otra importante consecuencia de las propiedades de promedio y ortonormalidad es que, si para una señal $f \in V_0$ cualquiera, se genera una réplica de período 1 en el dominio del tiempo, el resultado es una función constante.

Proposición 6.

Sea ϕ integrable, que satisface $\langle \phi_n, \phi \rangle = \delta_n^0$ y $\hat{\phi}(0) = 1$. Entonces:

$$a) \hat{\phi}(k) = \delta_k^0 \quad k \in Z$$

$$b) \sum_n f(t-n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \quad \forall f \in V_0 \text{ integrable} \quad (127)$$

$$c) \{ \phi_n \}, \text{ forman una partición de la unidad, esto es, } \sum_n \phi_n(t) = 1$$

Demostración. Como ϕ es integrable, $\hat{\phi}$ es continua; entonces sus valores en los puntos $\omega = k$ están bien definidos. La expresión (124) junto con $\hat{\phi}(0) = 1$ implican que $\hat{\phi}(k) = 0$ para toda $k \neq 0$ entera, lo que demuestra (a).

Sea ahora $f = u(T)\phi \in V_0$ y considérese la señal réplica de tiempo $P(t) \equiv \sum_n f(t-n)$, la cual es de período 1 e integrable, pues $u(T)$ es un polinomio, y posee una serie de Fourier, cuyos coeficientes son:

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 e^{-2\pi ikt} \sum_n f(t-n) dt = \sum_n \int_0^1 e^{-2\pi ikt} f(t-n) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ikt} f(t) dt = \hat{f}(k) \end{aligned} \quad (128)$$

Pero (a) implica que $\hat{f}(k) = u(e^{-2\pi ik}) \hat{\phi}(k) = \delta_k^0$, entonces:

$$P(t) = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \quad (129)$$

lo que demuestra (b). La condición (c) se satisface al elegir $f = \phi$. ♦

El término partición de la unidad se refiere al hecho de que una función arbitraria, pero suficientemente razonable, puede ser expresada como una suma de funciones localizables: $f(t) = \sum_n f_n(t)$, donde $f_n(t) \equiv \phi_n(t)f(t)$.

4. 3. 1. Inverso Simétrico de la Frecuencia y Estructura Compleja.

Cuando hablamos de esquemas de filtros de subbandas mencionamos pero no explicamos la simetría entre la frecuencia superior y la inferior. En este apartado pretendemos retomarlo con el fin de desarrollarlo.

Iniciemos con $h(T) \in P$. $h(T)$ determina $g(T)$ por:

$$g(T) = -T^\lambda h(-T); \lambda \in Z \text{ impar} \quad (130)$$

La función de escala y la wavelet madre están determinadas (con previa normalización), por:

$$D\phi = h(T)\phi, \quad (131)$$

$$D\psi = g(T)\phi$$

El filtro de cuadratura $H: V_0 \rightarrow V_0$, $G: V_0 \rightarrow V_0$ y sus adjuntos están dados por:

$$\begin{aligned} H^*u(T)\phi &= h(T)u(T^2)\phi \\ G^*u(T)\psi &= g(T)u(T^2)\phi \end{aligned} \quad (132)$$

$$Hu(T)\phi = S_{\downarrow}h(T)^*u(T)\phi$$

$$Gu(T)\phi = S_{\uparrow}g(T)^*u(T)\psi$$

La simetría de estas relaciones con respecto a $h(T) \leftrightarrow g(T)$, $\phi \leftrightarrow \psi$ y $H \leftrightarrow G$ es evidente, aunque no están expresadas con el debido formalismo. Es claro que la simetría es entre los elementos de la frecuencia inferior h , ϕ , H y los de la frecuencia superior g , ψ y G . Su origen no es muy patente, aunque es evidente que tiene que ver con el hecho de que V_0 es un espacio (aproximado) de funciones de banda limitada, y el espectro de la frecuencia en V_0 está dividido en V_1 y W_1 . Esta simetría es lo que llamamos Inverso Simétrico de la Frecuencia. Es ciertamente difícil de estudiar, ya que sin el análisis de resolución múltiple, sería imposible definir las wavelets.

El propósito de esta sección es ofrecer las bases matemáticas para desarrollar la simetría. Nuestro punto de partida es generalizar $h(T)$ y $g(T)$, esto por medio de definir el operador $J: V_0 \rightarrow V_0$ por:

$$Ju(T)\phi = -T^{\lambda}u(-T)\phi \quad (133)$$

donde λ es el entero impar usado en la definición de $g(T)$. El siguiente teorema demuestra que J se comporta como una multiplicación por y , lo que produce una rotación de $\frac{\pi}{2}$

radianes en V_0 y, además, J rota $D\phi \in V_1$ a $D\psi \in W_1$ y a todo el subespacio V_1 en W_1 y W_1 en V_1 . Como se mencionó en secciones anteriores, la teoría expuesta para V_0 , se extiende a V_m , por lo que podemos definir un operador J_m tal que $J_m = D^m J D^{-m}$ para toda $m \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.

Las siguientes igualdades se satisfacen,

$$\begin{aligned} \text{a) } J^2 &= -I_{V_0}, \\ \text{b) } JD\phi &= D\psi, \quad JD\psi = -D\phi \\ \text{c) } JV_1 &= W_1, \quad JW_1 = V_1 \end{aligned} \tag{134}$$

Demostración.

$$J^2 u(T)\phi = -JT^\lambda u(-T)^* \phi = T^\lambda [(-T)^\lambda]^* u(T)\phi = -u(T)\phi \tag{135}$$

ya que λ es impar y $(T^\lambda)^* = T^{-\lambda}$, hemos demostrado (a). La expresión (b) se sigue de:

$$JD\phi = Jh(T)\phi = -T^\lambda h(-T)^* \phi = g(T)\phi = D\psi \tag{136}$$

y $JD\psi = J^2 D\phi = -D\phi$, por (a). Para demostrar (c), recordemos que cualquier vector en V_1 tiene la forma $Du(T)\phi = h(T)u(T^2)\phi$, mientras que los vectores de W_1 son de la forma $Du(T)\psi = g(T)u(T^2)\phi$. Entonces:

$$\begin{aligned} JDu(T)\phi &= Jh(T)u(T^2)\phi = -T^\lambda [h(-T)u(T^2)]^* \phi = \\ &= g(T)u(T^2)\phi \in W_1 \end{aligned} \tag{137}$$

Como $\{Du(T)\phi : u(T) \in P\}$ define a V_1 y $\{g(T)u(T^2)^* \phi : u(T) \in P\}$ define a W_1 , se demuestra que $JV_1 = \{Jf : f \in V_1\} = W_1$. De (a) se sigue que:

$$JW_1 = J^2V_1 \equiv \{J^2f: f \in V_1\} = \{-f: f \in V_1\} = V_1 \quad (138) \blacklozenge$$

La relación entre los filtros está implícita en (137):

$$JH^*u(T)\phi = Jh(T)u(T^2)\phi = g(T)u(T^2)^* \phi = G^*u(T)^* \psi \quad (139)$$

Reemplazando $u(T)$ por $u(T)^*$ y aplicando J en ambos lados de la igualdad:

$$JG^*u(T)\psi = J^2H^*u(T)\phi = -H^*u(T)^* \phi \quad (140)$$

El operador J es real y lineal, esto es $J[cu(T)\phi + v(T)\phi] = cJu(T)\phi + Jv(T)\phi$ para $c \in \mathbb{R}$. Un mapeo real y lineal J en un espacio de vectores reales V , cuyo cuadrado es menor a la identidad, es llamado "Estructura Compleja". Obsérvese que para $J:V_0 \rightarrow V_0$, para algún complejo c , $[cu(T)^*] = \bar{c}u(T)^*$, por lo que:

$$Jcu(T)\phi = \bar{c}Ju(T)\phi, \text{ esto es, } Jc = \bar{c}J \quad (141)$$

Lo que significa que J es antilineal con respecto al producto por un escalar complejo. Esto es un resultado de vital importancia para la estructura compleja J . Defínase $K:V_0 \rightarrow V_0$ como:

$$K = iJ, \text{ es decir, } K = u(T)\phi = iJu(T)\phi = -iT^\lambda u(-T)^* \phi \quad (142)$$

para $i = \sqrt{-1}$. Según (141):

$$K^2 = iJiJ = -i^2J^2 = -I_{V_0} \quad (143)$$

y:

$$\begin{aligned} JK = JiJ = -iJ^2 = i, \\ Ki = iJi = -i^2J = J \end{aligned} \tag{144}$$

De suyo, $\{i, J, K\}$ define una estructura cuaterna en V_0 . Esto significa que podemos extender las rotaciones generadas por J , a rotaciones en R^3 .

La implementación de un inverso simétrico de la frecuencia por una estructura compleja es un poco abstracta, ya que hasta el momento no se ha explicado el por qué J intercambia la frecuencia inferior por la superior.

Veamos cómo actúa J en $L^2(T)$:

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(Z) & \xrightarrow{J} & \ell^2(Z) \\ \wedge \downarrow & & \wedge \downarrow \\ L^2(T) & \xrightarrow{\hat{J}} & L^2(T) \end{array}$$

Estructura compleja en $\ell^2(Z)$ y $L^2(T)$.

El operador J es $\hat{J}: L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ definido por:

$$(\hat{J}u)(z) = -z^\lambda \overline{u(-z)} \tag{145}$$

Como $z = e^{-2\pi i \omega}$ con período $0 \leq |\omega| \leq 0.5$, la frecuencia inferior está representada por $0 \leq |\omega| \leq 0.25$ y la superior por $0.25 \leq \omega \leq 0.5$. Es evidente que \hat{J} intercambia partes de la frecuencia inferior y superior de $u(z)$, El operador $j: \ell^2(Z) \rightarrow \ell^2(Z)$ está dado por:

$$j\{u_n\}_{n \in Z} = \{(-1)^n \overline{u_{\lambda-n}}\}_{n \in Z} \tag{146}$$

Nótese que, $u(-T)^* = \sum_n \bar{u}_n (-T^{-1})^n \equiv \bar{u}(-T^{-1})$, donde $\bar{u}(T)$ es el polinomio definido por $\bar{u}(T) = \sum_n \bar{u}_n T^n$. particularmente, si u_n es real, entonces $u(-T)^* = u(-T^{-1})$, de donde $(ju)(z) = -z^\lambda u(-\bar{z})$, y el mapeo \hat{j} produce una reflexión del eje al plano Z , generado por $-z^\lambda$.

Las estructuras complejas y cuaternas pueden transferirse a $\ell^2(Z)$ y $L^2(T)$, definiendo $k = ij$ en $\ell^2(Z)$ y $\hat{k} = ij$ en $L^2(T)$.

4. 4. Conjunto de Wavelets.

Una de las principales razones por las que el análisis Wavelet es muy eficiente es porque el dominio de la frecuencia está dividido logarítmicamente en octavas, en lugar de bandas lineales de igual ancho. Aunado a esto, prefiere escalaciones y no modulaciones de muestras de diferentes bandas de frecuencia. El muestreo de wavelets de frecuencia superior no presenta mayor oscilación que el muestreo de frecuencia inferior, lo que no sucede con el análisis de Fourier, más específicamente, en la transformada de Fourier con ventana. Es de gran ayuda dividir en octavas, lo que permite generar los subespacios W_m y consecuentemente, podemos trabajar con marcos. El consecuente formalismo es resultado de un híbrido, de la teoría de wavelets y la transformada de Fourier con ventana, pues ésta usa wavelets en forma repetida para lograr una resolución de frecuencia más fina, así como la transformada de Fourier con ventana usa ventanas moduladas. Originalmente, el conjunto de wavelets fue construido por Coifman y Meyer¹.

Para construir un conjunto wavelet, asumamos que V_0 es real, es decir, sólo coeficientes reales componen $u(T) \in P$. Entonces $V_m \equiv D^m V_0$ es real. Lo que implica que la

¹ Coifman R, Meyer Y, and Wickerhauser MV, Wavelet analysis and signal processing, in Ruskai MB, Beylkin G, Coifman R, Daubechies Y, Mallat S, Meyer Y, and Raphael L, eds., Wavelets and their Applications, Jones and Bartlett, Boston, 1992.

estructura compleja definida en 4. 3. 1, la cual no es lineal, es anti - Hermítica, esto es, $J^* = -J$, y definamos los operadores $F_0:V_0 \rightarrow V_0$ y $F_1:V_0 \rightarrow V_0$, por:

$$F_0 = H, F_1 = -HJ \quad (147)$$

F_1 , trabaja como G , operador de filtro superior, extrayendo el ruido. De hecho, por (38) y (39):

$$\begin{aligned} \text{a) } F_1 V_1 &= -HJV_1 = HW_1 = \{0\} \\ \text{b) } F_1 W_1 &= -HJW_1 = -HV_1 = V_0 \\ \text{c) } F_1^* V_0 &= JH^* V_0 = JV_1 = W_1 \end{aligned} \quad (148)$$

Consecuentemente:

$$\begin{aligned} F_1^* \{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \sum_k g_{n+2k} u_k \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ F_1 \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &= \left\{ \sum_k g_{n+2k} u_n \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned} \quad (149)$$

Estos resultados son idénticos a los obtenidos para G^* y G en el apartado 4. 2., sólo que en este momento consideramos el espacio real. La principal diferencia radica en que a pesar de que $G:V_0 \rightarrow W_0$, F_1 mapea a V_0 por si mismo. Esto permite cualquier combinación de F_0 , F_1 , F_0^* y F_1^* , lo que conduce a un conjunto wavelet.

Proposición 4.

$$\begin{aligned} \text{a) } F_a F_b^* &= \delta_a^b I_{V_0}, \quad (a, b = 0, 1) \\ \text{b) } F_0^* F_0 + F_1^* F_1 &= I_{V_0} \end{aligned} \quad (150)$$

Demostración. Sabemos, por (91), que $F_0 F_0^* = H H^* = I$. Como $J J^* = -J^2 = I_{V_0}$, entonces $F_1 F_1^* = I_{V_0}$. Por (39), (134c) y (38):

$$F_1 F_0^* V_0 = -HJH^* V_0 = -HJV_1 = -HW_1 = \{0\} \quad (151)$$

Por lo cual, $F_1 F_0^* = 0$ lo que implica que $F_0 F_1^* = 0$. Esto demuestra (a). La demostración de (b), es una consecuencia de las expresiones (91) y (36). ♦

Consideremos una composición arbitraria de nuevos filtros. Sean $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ conjuntos de índices, donde $a_k, b_k = 0, 1$ y denotemos la longitud de A como $|A| = m$. Definamos:

$$\delta_B^A = \delta_{b_1}^{a_1} \delta_{b_2}^{a_2} \dots \delta_{b_m}^{a_m}, \quad |A| = |B| = m \quad (152)$$

Lo cual nos permite hacer una generalización de la proposición 4.

Proposición 5.

$$\begin{aligned} \text{a) } F_A F_B^* &= \delta_B^A I_{V_0}, \text{ si } |A| = |B| \geq 1 \\ \text{b) } \sum_{|A|=m} F_A^* F_A &= I_{V_0}, \quad \forall m \geq 1 \end{aligned} \quad (153)$$

donde la suma en (b) es sobre todos los multi - índices (2^m), con $|A| = m$.

Demostración. Ambas expresiones son, como ya se mencionó, una generalización de (150), por lo que sus demostraciones son enteramente similares. ♦

La proposición 5, asegura que:

$$\Pi_A = F_A^* F_A \quad (154)$$

con $|A| = m$ para todo entero positivo, forman un conjunto completo de proyecciones ortogonales en V_0 . Esto es:

$$\begin{aligned}
 \Pi_A^* &= \Pi_A = \Pi_A^2 \\
 \Pi_A \Pi_B &= \delta_B^A \Pi_A \\
 \sum_{|A|=m} \Pi_A &= I_{V_0}
 \end{aligned}
 \tag{155}$$

De aquí que cualquier $f \in V_0$, pueda ser expresada como:

$$f = \sum_{|A|=m} \Pi_A f \equiv \sum_{|A|=m} f_A \tag{156}$$

con $\langle f_A, f_B \rangle = 0$ siempre que $A \neq B$. Los esquemas de filtros de subbandas en (92) y (93) pueden ser generalizados. Dentro de la recursión, cualquier $u \in V_0$, puede ser expresada como:

$$u = \sum_{|A|=m} F_A^* u^A, \text{ donde } u^A \equiv F_A u \tag{157}$$

aplicando la idea anterior a:

$$u^{A_1 A_2 \dots A_r} = \sum_{|A_{r+1}|=m} F_{A_{r+1}}^* u^{A_1 A_2 \dots A_{r+1}} \tag{158}$$

donde:

$$u^{A_1 A_2 \dots A_{r+1}} \equiv F_{A_{r+1}} u^{A_1 A_2 \dots A_r} \tag{159}$$

La principal diferencia entre la descomposición wavelet (92) y (93), y la descomposición del conjunto wavelets, es que la primera, sólo descompone los promedios, mientras que la segunda descompone promedios y detalles.

4. 5. Construcción de Filtros de Impulso de Respuesta Finita.

Sean $h(T)$ y $g(T)$ llamados Filtros de Impulso de Respuesta Finita, ya que la forma de operar de $h(T)$ y $g(T)$ es por medio de productos en el dominio de la frecuencia, es decir, operadores de convolución. Al ser aplicados a ϕ , la cual corresponde (bajo el operador de muestreo $S_0: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$) a la secuencia de "impulso" $\{\delta_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$, estos operadores proporcionan las secuencias $\{h_n\} = S_0 h(T)\phi$ y $\{g_n\} = S_0 g(T)\phi$ respectivamente. Entonces, $\{h_n\}$ y $\{g_n\}$ son las respuestas a los impulsos de $h(T)$ y $g(T)$.

La función de escala y la wavelet correspondiente a un filtro de impulso de respuesta finita, son de rango compacto por lo que tienen muy buena localización en el dominio del tiempo.

Lo que estamos buscando es construir una serie de filtros de impulso de respuesta finita inferiores, $h^N(T)$, $N = 1, 2, \dots$, y sus filtros superiores asociados $g^N(T)$. La función de escala y las wavelets asociadas, se obtienen de resolver:

$$D\phi^N = h^N(T)\phi^N \text{ y } D\psi^N = g^N(T)\phi^N \quad (160)$$

en el intervalo $[0, 2N - 1]$.

4. 5. 1. Obtención Recursiva de ϕ e Interpolación Bivalente.

Existe una gran cantidad de métodos recursivos para obtener ϕ con gran precisión. Una vez que ϕ se conoce dentro de una escala, ψ puede obtenerse de la siguiente escala más fina, por medio de $\psi \equiv D^{-1}g(T)\phi$, es decir:

$$\psi(t) = \sum_n d_n \phi(2t - n) \quad (161)$$

Lo que pretendemos es construir un esquema recursivo en el dominio de la frecuencia el cual hace uso de los polinomios $P(e^{-2\pi i\omega}) \equiv m_0(\omega)$, para obtener $\hat{\phi}(\omega)$ escala por escala. Cuando contamos con la precisión deseada en el dominio de la frecuencia, debemos aplicar la transformada de Fourier inversa, para así obtener la aproximación correspondiente a $\phi(t)$. Por el teorema de Plancherel, el error global en el dominio del tiempo, es el mismo que en el dominio de la frecuencia..

Si aplicamos en forma repetida una ecuación de dilatación, definida por:

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{m=1}^M m_0\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^M}\right) \quad (162)$$

conforme $M \rightarrow \infty$, $\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^M}\right) \rightarrow \hat{\phi}(0) = 1^1$. De esta manera, hemos obtenido formalmente $\hat{\phi}(\omega)$, de un producto infinito:

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{m=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^m}\right) = \prod_{m=1}^{\infty} P\left(e^{-\frac{2\pi i\omega}{2^m}}\right) \quad (163)$$

Lo cual proporciona un conjunto de coeficientes de filtro que pueden ser determinados, por a lo más, una función de escala (además, de estar normalizado, $\hat{\phi}(\omega) = 1$). Debemos analizar la forma en que el producto anterior converge, para así determinar la naturaleza de $\hat{\phi}(\omega)$ y asimismo, poder demostrar que $\hat{\phi}(\omega)$, definida en (163), es la transformada de Fourier de una función en el dominio del tiempo. Obviamente, es condición necesaria que $m_0(0) = P(1) = 1$ para todo tipo de convergencia, ya que de otra forma, los factores no se aproximarían a 1. Si $m_0(0) = 1$, entonces:

$$m_0(0) = 1 + \frac{1}{2} \sum_n c_n (e^{-2\pi i n \omega} - 1) = 1 - i \sum_n c_n e^{-\pi i n \omega} \text{sen}(\pi n \omega) \quad (164)$$

¹ Sin olvidar que $\hat{\phi}(\omega)$ es una función entera analítica, pues ϕ cumple con un rango compacto.

Donde:

$$|m_0(\omega)| \leq 1 + \sum_n |c_n| |\text{sen}(\pi n \omega)| \leq 1 + A|\omega| \leq e^{A|\omega|} \quad (165)$$

con $A = \pi \sum_n |nc_n|$, (pues $|\text{sen } x| \leq |x|$) y:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\omega}{2^m}\right) \right| \leq e^{(A|\omega| \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n})} = e^{A|\omega|} \quad (166)$$

Lo cual ha demostrado que el producto infinito converge absolutamente y es uniforme en el subconjunto compacto¹, aunque esto no parezca razonable desde un punto de vista práctico, pues ϕ es una función singular en el dominio del tiempo. Para ejemplificar lo anterior, consideremos $P(z) = 1$, el cual satisface $P(1) = 1$, pero no la condición de ortogonalidad:

$$P(1) = 1, \quad (167)$$

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1, \quad z = e^{-2\pi i \omega}$$

Lo que origina que $\hat{\phi}(\omega) \equiv 1$ y $\phi(t) = \delta(t)$. Si $P(z)$ satisface la condición de ortogonalidad, entonces $\hat{\phi}$ pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ y tiene norma $\|\hat{\phi}\| \leq 1$ pues las condiciones de promedio y ortonormalidad para $P(z)$, implican que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ (por el teorema de Plancherel). Para que ψ genere una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$, dentro del contexto de análisis de resolución múltiple, es necesario que ϕ satisfaga la condición de ortonormalidad $\phi_n^* \phi = \delta_n^0$, además de la condición de regularidad. Aunque la condición (167) fue necesaria para que la condición de ortonormalidad se cumpliera, no es suficiente.

¹ De hecho, fue demostrado por Deslauriers y Dubuc (1987), que el producto converge a una función entera de tipo exponencial, lo cual es la transformada de Fourier de una función de distribución en el rango $[0, 2N - 1]$.

Aunque las ϕ_n son linealmente independientes, puede ocurrir una inestabilidad, esto es, que al tener una de las combinaciones lineales $\sum_n u_n \phi_n$, cuya norma es pequeña, la suma $\sum_n |u_n|^2$ sea muy grande. Consecuentemente, ϕ no genera un análisis de resolución múltiple y el resultado no es una base pero si un marco limitado, con constante de marco igual a 3.

El producto infinito y la inversa de la transformada de Fourier, nos permiten obtener $\phi(t)$. Particularmente, la construcción no es local, ya que en cada recursión, $\phi(t)$ cambia para todos los valores de t . Lo que pretendemos ahora es demostrar que ϕ se puede obtener en forma local en el tiempo, sin olvidar las técnicas de recursividad.

La técnica a emplear es llamada Interpolación Bivalente, la cual tiene la peculiaridad, de dar una aproximación mejor en cada iteración, proporcionando el valor exacto de $\phi(t)$. Esto es gracias, a que en cada iteración, contamos sólo con un número finito de puntos los cuales son la mitad de la iteración anterior.

Para obtener ϕ a partir de enteros, obsérvese que para $t = n$, la ecuación de dilatación es ahora:

$$\phi(n) = \sum_{k=0}^{2N-1} c_k \phi(2n-k) = \sum_{k=0}^{2N-1} c_{2n-k} \phi(k) \quad (168)$$

teniendo presente que $c_m = 0$ fuera de $0 \leq m \leq 2N - 1$. Ambos lados de la igualdad involucran a ϕ , por lo tanto (168) es una ecuación lineal para $\phi(n)$. Si ϕ se encuentra en el intervalo $[0, 2N - 1]$ y es continua, entonces $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(2N - 2)$ son diferentes de cero. Consecuentemente, tenemos $M \equiv 2N - 2$ ecuaciones lineales, y (168) es ahora la matriz de orden $M \times M$ de un sistema de ecuaciones lineales, cuyo vector solución es $u \equiv [\phi(1), \dots, \phi(M)]^T$, el cual es un vector característico de la matriz $A_{n,k} = c_{2n-k}$, $n, k = 1, \dots, M$. Esto proporciona valores exactos de ϕ dentro de los enteros y permite ser aplicado como un algoritmo computacional. Para $t = n + 0.5$, la ecuación de dilatación es:

$$\phi(n + 0.5) = \sum_{k=0}^{2N-1} c_k \phi(n + 1 - k) \quad (169)$$

que determina el valor exacto de ϕ entre dos enteros. Cualquier solución de $Au = u$ determina ϕ para todos los racionales $t = \frac{k}{2^m}$ ($k, m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$), el cual es un conjunto muy denso. Si ϕ es continua, podemos determinarla en cualquier punto. Contrariamente, cualquier solución de la ecuación de dilatación determina una solución de $Au = u$. Como sabemos, la ecuación de dilatación tiene una solución única normalizada, consecuentemente, u es única y el valor característico 1 de A es no degenerado.

4. 6. Método de Acumulación.

Como $\int \phi(t) dt = 1$, podríamos pensar en $\phi(t)$ como una función de distribución de probabilidad lo cual es consistente con la interpretación de ϕ como una función promedio, aunque no es estrictamente válido, porque $\phi(t)$ puede tomar valores negativos. La idea de función de distribución de probabilidad, la tomaremos para hacer esta explicación más sencilla. Cuando nos hemos referido a $\phi_n^* f$, lo hemos hecho considerándolas muestras de f . Pero como el rango de ϕ_n es $n \leq t \leq n + 2N - 1$, la probabilidad sugiere entonces que $\phi_n^* f$ no sean muestras de f en $t = n$, pero en $t = \tau + n$, donde:

$$\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t \phi(t) dt \quad (170)$$

es la media en el tiempo con respecto a ϕ . Esto es:

$$\text{Condición E': } \phi_n^* f = f(n + \tau), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (171)$$

Obviamente, la expresión anterior no es válida para todo $f \in L^2(\mathbb{R})$, pues f no está bien definida. Para $f = \phi$, esto implica que:

$$\text{Condición E: } \phi(\tau + n) = \phi_n^* \phi = \delta_n^0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (172)$$

Nótese que (171) es consecuencia de (172) para toda $f \in V_0$.

Si $f = u(T)\phi$, entonces:

$$\begin{aligned} f(\tau + n) &= \sum_k u_k \phi_k(\tau + n) = \\ &= \sum_k u_k \phi(\tau + n - k) = u_n = \phi_n^* f \end{aligned} \quad (173)$$

Decimos que una función de escala es exacta si satisface la condición E.

La expresión (172) es muy útil por las siguientes razones:

- a) La condición E da origen a un nuevo algoritmo para construir y trazar ϕ . Este algoritmo es resultado de depurar la interpolación bivalente y es más simple que ésta, ya que no requiere que se resuelva desde el principio la ecuación característica.
- b) Esta condición da una interpretación de los coeficientes de filtro c_n de ϕ más sencilla y directa; pues los toma como muestras de ϕ en $t = \frac{(\tau + n)}{2}$.
- c) El buscar la validación de la condición E, nos conduce a un nuevo método para construir coeficientes de filtro para wavelets ortonormales, y probablemente obtener otros análisis de resolución múltiple, basados en el concepto estadístico de acumulación. Este método es independiente de la validez de la condición E.

Para iniciar la construcción de este algoritmo, debemos interpretar a la condición E como la definición de los valores iniciales de ϕ en un esquema recursivo:

$$\phi^{(0)}(\tau + n) \equiv \delta_n^0 \quad (174)$$

Esto es análogo a encontrar $\phi(n)$ en el esquema de interpolación bivalente excepto que no requerimos solucionar la ecuación característica. Si ϕ es exacta, estamos por encima de la interpolación bivalente. Si no, (174) es un buen punto de partida para una rápida convergencia. La forma de proceder ahora, es exactamente como lo hicimos en la interpolación bivalente, excepto que no asumiremos tener valores exactos en ningún momento. La primera iteración es:

$$\phi^{(1)}\left(\frac{\tau+n}{2}\right) \equiv \sum_k c_k \phi^{(0)}(\tau+n-k) = c_n \quad (175)$$

y cada iteración se obtiene de la anterior, por la fórmula:

$$\phi^{(m+1)}\left(\frac{\tau+n}{2^{m+1}}\right) \equiv \sum_k c_k \phi^{(m)}\left(\frac{\tau+n}{2^m} - k\right) \quad (176)$$

Si la condición E se cumple, entonces $\phi^{(m)} = \phi$ para toda $m \geq 0$ y (175) demuestra que los coeficientes de filtro c_n son valores de ϕ en $t = \frac{(\tau+n)}{2}$ lo cual es una buena interpretación intuitiva de los c_n .

Para hacer uso de este esquema, es necesario hallar τ en términos de los coeficientes de filtro, esto es:

$$\tau = \frac{1}{2} \sum_n n c_n \quad (177)$$

que es la expresión (170) en forma discreta, usando $\left\{\frac{c_n}{2}\right\}$ como una función de distribución de probabilidad en Z . Como ϕ es integrable con rango compacto, podemos definir:

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{st} \phi(t) dt = \hat{\phi}\left(\frac{is}{2\pi}\right) \quad (178)$$

sin olvidar que $\hat{\phi}$ es una función entera. Entonces (163) es:

$$\Phi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} P\left(e^{\frac{s}{2^m}}\right) \quad (179)$$

y la ecuación de dilatación es ahora:

$$\Phi(2s) = P(e^s)\Phi(s) \quad (180)$$

Como $\Phi(s)$ es una función entera con $\Phi(0) = 1$ existe una vecindad D_Φ alrededor de $s = 0$, donde $\log \Phi(s)$ puede ser definido. Un argumento similar demuestra que $\log P(e^s)$ se define en una vecindad D_P para toda $m \geq 0$.

La expresión (179), implica que:

$$\log \Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \log P\left(e^{\frac{s}{2^m}}\right) \quad (181)$$

en $D_\Phi \cap D_P$. Definiendo los momentos de ϕ alrededor de $t = 0$, por:

$$M_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^k \phi(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (182)$$

Particularmente, $M_0 = 1$ y $M_1 = \tau$.

$\Phi(s)$ es una función generadora de momentos, pues:

$$\partial_s^k \Phi(s) \Big|_{s=0} = M_k \quad (183)$$

La ecuación de dilatación (180), presenta una relación recursiva entre los momentos, lo cual nos permite obtenerlos de los coeficientes de filtro. Pero existe una relación más directa en términos de logaritmos, esto debido a que (180) es un producto.

Definamos los términos de acumulación continuos y discretos para $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} K_k &\equiv \partial_s^k \log \Phi(s) \Big|_{s=0} \\ k_k &\equiv \partial_s^k \log P(e^s) \Big|_{s=0} \end{aligned} \quad (184)$$

respectivamente. Obsérvese que:

$$\begin{aligned} K_0 &= \log \Phi(0) = 0 \\ K_1 &= \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)} = \tau \\ K_2 &= M_2 - \tau^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \tau)^2 \phi(t) dt \end{aligned} \quad (185)$$

Si ϕ fuera realmente una función de distribución de probabilidad, es decir, $\phi(t) \geq 0$, entonces K_2 sería su segundo momento central y $\sqrt{K_2}$ su desviación estándar. Como ϕ puede asumir valores negativos, nuestro concepto de acumulación amplía su definición usual.

Debemos ahora buscar una relación que nos permita expresar K_k en términos de coeficientes de filtro, sin olvidar que:

$$P(e^s) = \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{ns} \quad (186)$$

y definamos los momentos discretos de los c_n , por analogía con (183):

$$\mu_k \equiv \partial_s^k P(e^s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \sum_n c_n n^k \quad (187)$$

Los términos de acumulación y momentos discretos, satisfacen relaciones similares a las expuestas en (184):

$$\begin{aligned}
 k_0 &= \log P(1) = 0 \\
 k_1 &= \frac{P'(1)}{P(1)} = \mu_1 \\
 k_2 &= \mu_2 - \mu_1^2
 \end{aligned}
 \tag{188}$$

Lo cual nos permite obtener los k_n de los c_n , que a su vez se obtuvieron de los K_n .

Teorema 2.

Los términos de acumulación continuos están dados en función de los términos discretos por:

$$K_k = \frac{k_k}{2^k - 1} \tag{189}$$

Demostración. Por (181):

$$\begin{aligned}
 K_k &= \sum_{m=1}^{\infty} \partial_s^k \log P \left(e^{\frac{s}{2^m}} \right) \Big|_{s=0} = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-mk} \partial_u^k \log P \left(e^u \right) \Big|_{u=0} = \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-mk} k_k = \frac{k_k}{2^k - 1}
 \end{aligned}
 \tag{190} \blacklozenge$$

Para $K = 1$, (189) se reduce a (177) por lo que podemos proceder con un esquema modificado de la interpolación bivalente.

La obtención de los coeficientes de filtro de los términos de acumulación, se basa en el resultado del siguiente teorema.

Teorema 3.

Sea $P(s) = 0.5 \sum_n c_n z^n$ una función entera con c_n real. Supongamos que $P(z)$

satisface:

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1 \text{ para } |z| = 1 \quad (191)$$

y es cero para $z = -1$:

$$P(z) = \left(\frac{1-z}{2}\right)^N W(z) \quad (192)$$

con $W(z)$ entera. Entonces:

$$k_{2k} \equiv \partial^{2k} \log P(e^s) \Big|_{s=0} = 0, \quad 0 \leq k < N \quad (193)$$

Demostración. Como los c_n son reales, $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$, la expresión (191) implica que:

$$P(e^s)P(e^{-s}) + P(-e^s)P(-e^{-s}) = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad (194)$$

Para $s = -2\pi i\omega$ con ω real (194) es (191), puesto que el lado izquierdo de (194) es una función entera de s e igual a 1 en el eje imaginario, lo cual conduce a que ésta sea igual a 1 para toda s . Pero:

$$P(e^s) = \left(\frac{1-e^s}{2}\right)^N W(-e^s) \quad (195)$$

Como:

$$\frac{1 - e^s}{2} = sU(s) \quad (196)$$

donde $U(s)$ es entera. (195) da ahora:

$$P(e^{-s}) = s^N U(s)^N W(-e^s) \equiv s^N V(s) \quad (197)$$

con $V(s)$ entera. Entonces:

$$\begin{aligned} P(e^s)P(e^{-s}) &= 1 - P(-e^s)P(-e^{-s}) = \\ &= 1 - s^{2N}(-1)^N V(s)V(-s) = \\ &= 1 + s^{2N}F(s) \end{aligned} \quad (198)$$

para $F(s)$ entera. Ahora, para $|w| < 1$:

$$\log(1 + w) = w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 - \dots = wH(w) \quad (199)$$

donde $H(w)$ es analítica en $|w| < 1$. Entonces, existe una vecindad D alrededor de $s = 0$, donde:

$$\log[P(e^s)P(e^{-s})] = s^{2N}F(s)H(s^{2N}F(s)) \equiv s^{2N}G(s) \quad (200)$$

donde $G(s)$ es analítica en D , sin olvidar que hemos definido a $\log P(e^s)$ en la vecindad D_p alrededor de $s = 0$. Debemos asumir que D_p es circular, de tal forma que $-s \in D_p$ siempre que $s \in D_p$. Entonces:

$$\log P(e^s) + \log P(e^{-s}) = s^{2N}G(s) \quad (201)$$

en $D \cap D_p$. Aplicando ∂^k y tomando a $s = 0$, el lado derecho de la igualdad no se cumple, porque existen factores de s después del operador derivada. Por lo tanto, por la definición de K_k :

$$k_k + (-1)^k k_k = 0, k < 2N \quad (202)$$

para k impar, (202) es una identidad; para $k = 0, 2, 4, \dots, 2N - 2$, la expresión (202) se reduce a (193). ♦

Por lo tanto, una condición necesaria para la ortonormalidad es que los primeros N términos de acumulación discreta, K_{2k} no sean válidas. Entonces el teorema 2 implica que los términos de acumulación continuos tampoco sean válidos. En particular $K_2 = 0$, dentro de nuestra función de distribución de probabilidad ϕ es una varianza no válida.

El teorema 3 es el punto de partida para generar filtros ortonormales de resolución múltiple. Por ejemplo, si ϕ tiene un rango compacto mínimo para un valor dado de N , entonces $W(z)$ en (192) es un polinomio de grado $N - 1$, lo que significa que se tienen N coeficientes, por lo que podemos hallar los c_n resolviendo (193).

Para un filtro ortonormal de rango mínimo, los primeros N términos de acumulación determinan los coeficientes de filtro. Los términos de acumulación impares, juegan un papel importante dentro de la exactitud del método. Si los filtros satisfacen (192), entonces:

$$\begin{aligned} N \geq 1 &\Rightarrow \sum_n \phi(\tau + n) = 1 \\ N \geq 2 &\Rightarrow \sum_n n \phi(\tau + n) = 0 \\ N \geq 3 &\Rightarrow \sum_n n^2 \phi(\tau + n) = 0 \\ N \geq 4 &\Rightarrow \sum_n n^3 \phi(\tau + n) = K_3 = \frac{k_3}{7} \end{aligned} \quad (203)$$

obteniendo ecuaciones similares para $N \geq 5$ y $N \geq 6$, etc. Para toda $N \geq 1$, debemos poner atención en los $2N - 1$ valores desconocidos de $\phi(\tau + n)$ dentro del rango de ϕ . Entonces (203) aporta N ecuaciones para estos valores desconocidos, teniendo $N - 1$ grados de libertad. Para $N = 1$, el caso es trivial. Las primeras dos ecuaciones en (203) son consistentes para ϕ , pero no suficientemente exactas para probarla, pues hay tres expresiones desconocidas $\phi(\tau)$, $\phi(\tau + 1)$, $\phi(\tau + 2)$. Lo mismo ocurre para $N = 3$. La cuarta expresión de (203) demuestra que ϕ^N no es exacta para $N \geq 4$, a pesar de que $K_3 = 0$. Debe quedar claro que, a mayor orden de los términos de acumulación impares, mayor es la inexactitud de los filtros de mayor orden, lo cual es una destrucción a la exactitud.

5. APLICACIONES DEL ANÁLISIS CON BASE EN LA TEORÍA DE WAVELETS.

Pero la vida es corta y la información infinita... La abreviatura es un diablillo necesario y la tarea del abreviador es hacer lo mejor de un trabajo que, aunque sea intrínsecamente malo, es mejor que nada.

Aldous Huxley

5. 1. Compresión de Imágenes con Wavelets.



El objetivo de este inciso es describir un algoritmo para la compactación de imágenes, el cual separa las líneas de la textura de la imagen, lo que nos permite adaptar la precisión a las propiedades de la percepción visual del hombre. Las líneas en escalas múltiples son detectadas a partir del máximo local de los módulos de la transformada wavelet. Al reconstruir una aproximación de la imagen lo hacemos por medio de líneas importantes, las cuales son seleccionadas por el algoritmo. Generamos un error, el cual es la diferencia entre la imagen real y la reconstruida.

Los algoritmos de compresión de imágenes han sido divididos en dos generaciones de métodos. Las técnicas más eficientes de la primera generación descomponen la imagen en una base ortogonal. Muchas transformadas ortogonales han sido usadas para este propósito: La transformada discreta de cosenos, diferentes descomposiciones ortogonales de subbandas como la transformada wavelet o el conjunto de wavelets. La imagen original se descompone en la correspondiente base ortogonal y los coeficientes de descomposición se obtienen por diferentes técnicas. Para la transformada discreta de cosenos y la transformada wavelet sólo se hace uso de una base. No así para el conjunto de wavelets que adapta las bases de la imagen a las propiedades estadísticas. El elegir una base es para minimizar la distorsión de la descomposición de los coeficientes y como consecuencia el número de bits requeridos para la codificación.

Los métodos de la segunda generación, pretenden tomar ventaja de las propiedades estructurales de la imagen y la forma en que son percibidas por el hombre. La información es dividida en dos categorías: La primera corresponde a las líneas, las cuales son particularmente importantes para entender la imagen. La degradación del contorno de la imagen afecta severamente la calidad de la imagen. La segunda categoría reagrupa las diferentes texturas. La textura es información menos estructurada que las líneas aunque ésta depende de la escala de referencia. En una imagen, en una escala cualquiera, las líneas se pueden entender como elementos de textura en una escala mayor. En la mayoría de los casos, la distorsión de la textura no es muy visible, lo que sugiere una codificación de la textura menos precisa que la de las líneas. Este tipo de algoritmos permiten una mayor compresión, ya que no se afecta la visualización de la imagen si se introduce distorsión. Los métodos de segunda generación son más fáciles de estudiar, esto porque la

detección de líneas y texturas requiere de transformadas lineales, cuyo estudio es más sencillo de entender.

Se ha demostrado¹ que las líneas en escalas múltiples pueden ser detectadas y representadas por la transformada wavelet, pues para una clase particular de wavelets el máximo local de los módulos de la transformada wavelet proporciona la localización de las líneas en la imagen. Una mayor aproximación a la imagen original se obtiene de estas escalas múltiples de las líneas. La imagen reconstruida es visualmente idéntica a la original.

5. 1. 1. Detección de Líneas en Escalas Múltiples de una Transformada Wavelet.

Las líneas de las diferentes estructuras que aparecen en una imagen son, en la mayoría de los casos, los elementos más importantes para el reconocimiento de la imagen. Esto se muestra con nuestra habilidad visual para reconocer un objeto de un dibujo que solo presenta líneas. Los puntos de corte en una imagen están localizados donde la intensidad de la imagen sufre un cambio. Dentro del área de visualización, existe una gran cantidad de detectores de líneas los cuales buscan los puntos donde el módulo del gradiente de la imagen es un máximo local. El detector de líneas de Canny² es una versión de escala múltiple de esta aproximación. La imagen es suavizada por un filtro inferior que es dilatado por un factor de escala. Las líneas son localizadas al calcular el vector gradiente de la intensidad de la imagen, en cada pixel. Lo anterior puede reformularse con wavelets, lo que permite entender con mayor precisión las propiedades de las líneas en escalas múltiples. Para una clase particular de wavelets los puntos en la línea se obtienen del módulo máximo local de la transformada wavelet.

Llamemos función de suavizamiento a cualquier función $\theta(x, y)$ tal que su doble integral sea igual a 1. Esto es, el impulso de respuesta de un filtro inferior. Sean:

¹ Mallat S. and Zhong, Characterización of signals from multiscale edges, New York University, Computer Science, Tech. Report, 1991; IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.

² Canny J., A computational approach to edge detection, IEEE Trans Pattern Anal. and Machine Intell. 8 (1986), 679 - 698.

$$\psi^1(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial x}, \quad \psi^2(x, y) = \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \quad (1)$$

Ambas funciones son llamadas wavelets. Dilatemos ambas funciones con un factor de escala 2^j y denotemos:

$$\theta_{2^j}(x, y) = \frac{1}{4^j} \theta\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad (2)$$

$$\psi_{2^j}^1 = \frac{1}{4^j} \psi^1\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad \text{y} \quad \psi_{2^j}^2 = \frac{1}{4^j} \psi^2\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad (3)$$

Para cualquier $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R})$, la transformada wavelet definida con respecto a $\psi^1(x, y)$ y $\psi^2(x, y)$ tienen dos componentes dados por la convolución:

$$\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y) = f * \psi_{2^j}^1(x, y) \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) = f * \psi_{2^j}^2(x, y) \quad (4)$$

La secuencia de funciones $(\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y), \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y))$ es llamada transformada wavelet bivalente de $f(x, y)$.

Como la transformada de Fourier está definida por convoluciones, entonces la transformada de Fourier de cada componente esta dada por:

$$\hat{\mathcal{W}}_{2^j}^1 f(\omega, \xi) = \hat{f}(\omega, \xi) \hat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{W}}_{2^j}^2 f(\omega, \xi) = \hat{f}(\omega, \xi) \hat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \quad (5)$$

Una transformada wavelet bivalente es una representación completa de la señal si y sólo si la dilatación de la transformada de Fourier de cada wavelet cubre completamente el plano de Fourier. Esto significa que existen dos constantes $A > 0$ y $B > 0$, tales que:

$$\forall (\omega, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \right|^2 + \left| \hat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \right|^2 \leq B \quad (6)$$

Entonces, existe un par de funciones wavelets no únicas, $\chi^1(x,y)$ y $\chi^2(x,y)$, cuya transformada de Fourier satisface:

$$\sum_{j \geq 1} \hat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) + \hat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) = 1 \quad (7)$$

Por lo tanto, cualquier función $f(x,y) \in L^2(\mathbb{R})$ es reconstruida de su transformada wavelet por la suma:

$$f(x,y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{W}_{2^j}^1 f * \chi_{2^j}^1(x,y) + \mathcal{W}_{2^j}^2 f * \chi_{2^j}^2(x,y) \quad (8)$$

Una transformada wavelet bivalente, es más que completa, es una representación redundante de la señal, lo que indica que cualquier secuencia de señales es, no necesariamente a priori, la transformada wavelet de alguna señal $f(x,y) \in L^2(\mathbb{R})$. Para que una secuencia de señales sea transformada wavelet bivalente, debe satisfacerse la ecuación del Kernel de reproducción.

Como las wavelets se definen en términos de las derivadas parciales de la función de suavizamiento $\theta(x,y)$, entonces por las expresiones (1) y (4), las dos componentes de la transformada wavelet satisfacen:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_{2^j}^1 f(x,y) \\ \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^j \frac{\partial}{\partial x} (f * \theta_{2^j})(x,y) \\ 2^j \frac{\partial}{\partial y} (f * \theta_{2^j})(x,y) \end{pmatrix} = 2^j \nabla (f * \theta_{2^j})(x,y) \quad (9)$$

Las dos componentes de la transformada en la escala 2^j , definen un vector, el cual es proporcional al vector gradiente de la imagen suavizada por $\theta_{2^j}(x,y)$. El módulo del vector gradiente es proporcional al módulo de la imagen:

$$M_{2^j} f(x,y) = \sqrt{|\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x,y)|^2 + |\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x,y)|^2} \quad (10)$$

Para cada punto (x, y) , el ángulo del gradiente con respecto al eje horizontal está dado por:

$$A_{2^j}f(x, y) = \arctg\left(\frac{\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y)}{\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y)}\right) \quad (11)$$

Donde los puntos del vector gradiente tienen una mayor amplitud. Para obtener los puntos donde el módulo de $\nabla(f * \theta_{2^j})(x, y)$ es un máximo local, debemos tomar en cuenta que en la escala 2^j el módulo máximo de la transformada wavelet está definido como los puntos (x, y) donde el módulo de la imagen $M_{2^j}f(x, y)$ es un máximo local en la dirección del gradiente, es decir, $A_{2^j}f(x, y)$. Estos módulos máximos son los puntos de inflexión de $f * \theta_{2^j}(x, y)$. Registramos la posición de cada módulo máximo y los valores de $M_{2^j}f(x, y)$ y $A_{2^j}f(x, y)$ en la ubicación correspondiente.

Las imágenes son medidas en una resolución finita. Por lo tanto, no podemos calcular la transformada wavelet por debajo de una escala normalizada a 1. Para modelar esta limitación, requerimos de una función $\phi(x, y)$, tal que el módulo de su transformada de Fourier satisfice:

$$|\hat{\phi}(\omega, \xi)|^2 = \sum_{j \geq 1} \hat{\psi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^1(2^j \omega, 2^j \xi) + \hat{\psi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \hat{\chi}^2(2^j \omega, 2^j \xi) \quad (12)$$

Por la expresión (7), podemos demostrar que $\phi(x, y)$ es una función de suavizamiento y definir el operador de suavizamiento:

$$S_{2^j}f(x, y) = f * \phi_{2^j}(x, y) \quad (13)$$

donde $\phi_{2^j}(x, y)$ es una dilatación de $\phi(x, y)$ con factor 2^j . Debido a que la resolución es finita, suponemos que la imagen es un suavizamiento en la escala 1 de alguna imagen original $f(x, y)$, y es entonces igual a $S_1 f(x, y)$. No podemos evaluar la transformada wavelet en escalas muy grandes, porque es registrada en un dominio finito. Limitemos ahora el

parámetro de la escala sobre una escala dada 2^j . Llamamos transformada wavelet bivalente de $S_1 f(x, y)$ a la secuencia:

$$\left\{ \left(\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y), \mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, S_{2^j} f(x, y) \right\} \quad (14)$$

De donde la transformada wavelet se encuentra entre las escala 1 y 2^j y el resto de la información es llevada por la imagen de baja frecuencia $S_{2^j} f(x, y)$. $S_1 f(x, y)$ se puede obtener a partir de su transformada wavelet bivalente finita. Si la imagen original tiene N pixeles, entonces estimamos la transformada wavelet bivalente finita con un algoritmo que sólo requiere de $O(N \log(N))$ operaciones. La figura 1¹, muestra la transformada wavelet bivalente finita de la imagen que se encuentra al inicio de este capítulo. La imagen $S_1 f(x, y)$ se encuentra en la esquina superior izquierda y la imagen de frecuencia inferior $S_{2^j} f(x, y)$ en la esquina superior derecha. Las primeras dos columnas muestran $\mathcal{W}_{2^j}^1 f(x, y)$ y $\mathcal{W}_{2^j}^2 f(x, y)$, y la escala incrementa de arriba hacia abajo. Podemos reconocer el efecto de la derivada parcial sobre x y y , en cada componente de la transformada wavelet. Las wavelet usadas para estas estimaciones se definen de una función de suavizamiento $\theta(x, y)$, que es separable y de una función cúbica unidimensional de soporte compacto. El módulo de la imagen, $M_{2^j} f(x, y)$, y el ángulo de ésta, $A_{2^j} f(x, y)$, son mostrados en la tercera y cuarta columnas. La quinta columna presenta la posición de los puntos de las líneas definidos como los máximos locales de los módulos de la imagen en la dirección indicada por el ángulo de la imagen. Cuando la escala 2^j es pequeña, el suavizamiento aportado por $\theta_{2^j} f(x, y)$ es insignificante. Cualquier pequeña fluctuación, debida al ruido de la imagen, genera un punto en la línea. En escalas grandes, el suavizamiento desplaza las variaciones y líneas de los límites de las estructuras más importantes de la imagen.

¹ Las figuras 1, 3 - 13 se muestran al final de este subtema.

5. 1. 2. Reconstrucción de Imágenes a partir de Líneas en Escalas Múltiples.

Dentro de la codificación de imágenes, es necesario reconstruir una aproximación de la información de las líneas en escalas múltiples. Zhong¹ construyó un algoritmo que reconstruye imágenes, las cuales están constituidas por líneas en escalas múltiples, que obtenemos con la transformada wavelet. Cuando todas las líneas se han reconstruido, el algoritmo recobra la imagen que visualmente es idéntica a la original. En cada escala, un punto en la línea se define por su posición en el plano de la imagen, además de los valores $M_{2^j}f(x,y)$ y $A_{2^j}f(x,y)$ en la locación correspondiente. Como puede observarse en la columna de la derecha de la figura 1, el comportamiento de suavizamiento en escalas múltiples modifica la posición de los puntos en las líneas. Estos aparecen en una escala 2^{j+1} , los cuales se pueden encontrar en una escala más fina 2^j , pero su posición ha cambiado. Codificar diferentes líneas en diferentes escalas es muy costoso, por lo que sólo detectamos líneas en una escala de referencia, cuyo módulo de la transformada wavelet es un máximo local. Dentro de este ejemplo, tomamos como escala de referencia 2^2 . Esto porque las líneas en la escala 2^1 se ven más afectadas por el ruido de la imagen y lo áspero de la escala, lo que origina que la detección de líneas sea menos precisa. La imagen del lado derecho de la figura 3 muestra las líneas que se obtuvieron de la imagen de la mujer, en la escala 2^2 . Podemos seleccionar un subconjunto de líneas que sean consideradas "importantes" para la visualización de la imagen. Las líneas de la imagen derecha de la figura 4 han sido seleccionadas con el método que se describe más adelante.

Sea $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ la posición de los puntos en la línea que son seleccionados por la escala 2^2 . Supongamos que:

$$(M_{2^j}f(u_n, v_n), A_{2^j}f(u_n, v_n))_{1 \leq j \leq J, n \in \mathbb{Z}} \quad (15)$$

son el módulo y el ángulo en estos puntos. El detector de líneas puede entenderse como un muestreo de los módulos y los ángulos de la imagen. En la escala áspera 2^j , para

¹ Mallat, S. and S. Zhong, Characterization of signals from multiscales edges, New York University, Computer Science, Tech. Report, 1991; IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.

propósitos de codificación, necesitamos reducir la frecuencia inferior de la imagen $S_{2^j}f(x, y)$. La transformada de Fourier de la imagen tiene una mayor energía concentrada en frecuencias más pequeñas de $2^{-j}\pi$. Por lo tanto debemos muestrear uniformemente la frecuencia inferior de la imagen en el rango 2^{-j} en x y y . Dados los valores de los módulos $M_{2^j}f(x, y)$ y el ángulo $A_{2^j}f(x, y)$ en el punto de la línea $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{Z}}$, para $1 \leq j \leq J$, además de un muestreo uniforme de $S_{2^j}f(x, y)$ en el rango 2^{-j} , permite recuperar la mejor aproximación posible de $f(x, y)$. Esperamos obtener una imagen que contenga las principales características de las líneas que han sido seleccionadas, aunque algunos detalles hayan desaparecido.

El objetivo es recuperar una imagen $S_1h(x, y)$ tal que su transformada wavelet bivalente tenga los mismos valores de la transformada wavelet bivalente $S_1f(x, y)$, en los puntos de las líneas. En cualquier punto de la línea $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ de $M_{2^j}f(x, y)$ y $A_{2^j}f(x, y)$, podemos obtener $\mathcal{W}_{2^j}^1f(u_n, v_n)$ y $\mathcal{W}_{2^j}^2f(u_n, v_n)$, y viceversa. La transformada wavelet bivalente finita de $S_1h(x, y)$ debe satisfacerse para toda (u_n, v_n) y $1 \leq j \leq J$:

$$\mathcal{W}_{2^j}^1h(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^1f(u_n, v_n) \text{ y } \mathcal{W}_{2^j}^2h(u_n, v_n) = \mathcal{W}_{2^j}^2f(u_n, v_n) \quad (16)$$

y para todo par de enteros (m, n) :

$$S_{2^j}h(n2^j, m2^j) = S_{2^j}f(n2^j, m2^j) \quad (17)$$

Fuera de los puntos (u_n, v_n) , no conocemos los valores de la transformada wavelet de $S_1h(x, y)$. Por omisión, $S_1h(x, y)$ debe ser continua. La expresión (9) explica que la transformada wavelet se refiere al gradiente de la intensidad de la imagen, lo que implica recuperar una transformada wavelet cuya energía sea lo más pequeña posible. Para evitar que más de una línea contenga los puntos (u_n, v_n) , debemos condicionar los componentes de la transformada wavelet de tal forma que estos contengan la menor oscilación posible de forma tal que no ocasionen un máximo local en el módulo de la imagen $M_{2^j}f(x, y)$. Si

suponemos que $\psi^1(x, y)$ y $\psi^2(x, y)$ son continuas y diferenciables, entonces la transformada wavelet en cada escala es también diferenciable.

Sea $\|g\|$ la norma de cualquier función $g(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, e imponemos condiciones de continuidad, minimizando la norma de Sobolev:

$$\begin{aligned} \left\| \left((w_{2^j}^1 h, w_{2^j}^2 h)_{1 \leq j \leq J}, S_{2^j} h \right) \right\|^2 &= \sum_{j=1}^J \left(\|w_{2^j}^1 h\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{\partial w_{2^j}^1 h}{\partial x} \right\|^2 \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^J \left(\|w_{2^j}^2 h\|^2 + 2^{2j} \left\| \frac{\partial w_{2^j}^2 h}{\partial y} \right\|^2 \right) + \|S_{2^j} h\|^2 \end{aligned} \quad (18)$$

El minimizar esta norma nos proporciona una transformada wavelet donde la energía de $w_{2^j}^1 h$ y $w_{2^j}^2 h$ es pequeña y tiene la menor oscilación posible¹. Las derivadas parciales son importantes para 2^j porque la continuidad de $w_{2^j}^1$ y $w_{2^j}^2$ incrementa con la escala 2^j .

Definamos un espacio K de todas las funciones $\left((w_j^1(x, y), w_j^2(x, y))_{1 \leq j \leq J, S_j(x)} \right)$, de tal forma que la norma de Sobolev (18) es finita. Sea el espacio K un espacio de Hilbert, con respecto a esta norma. Sea Γ el conjunto $\left((w_j^1(x, y), w_j^2(x, y))_{1 \leq j \leq J, S_j(x)} \right)$, que pertenece a K y todos los puntos de la línea (u_n, v_n) , para $1 \leq j \leq J$:

$$w_j^1(u_n, v_n) = w_{2^j}^1 f(u_n, v_n) \text{ y } w_j^2(u_n, v_n) = w_{2^j}^2 f(u_n, v_n) \quad (19)$$

y para los enteros (n, m) :

$$S_j(n2^j, m2^j) = S_{2^j} f(n2^j, m2^j) \quad (20)$$

¹ La norma de Sobolev hace uso de la derivada parcial con respecto a x de $w_{2^j}^1 h$, porque este componente se define como una derivada parcial con respecto a x. (9), por lo tanto, oscila sobre la variable x. Análogamente, para $w_{2^j}^2 h$, con respecto a y.

El conjunto Γ es cerradura de K .

Definamos ahora el espacio V como el conjunto de funciones que son la transformada wavelet bivalente de alguna función $S_1g(x, y)$ con $g(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Por definición el conjunto de transformadas wavelet bivalente que satisfacen las expresiones (16) y (17) son la secuencia de funciones que pertenecen a:

$$\Lambda = \Gamma \cap V \quad (21)$$

Los elementos de este conjunto son las transformadas wavelet bivalentes que satisfacen esta condición y minimizan la norma de Sobolev. Este conjunto se obtiene de la proyección de Γ y V .

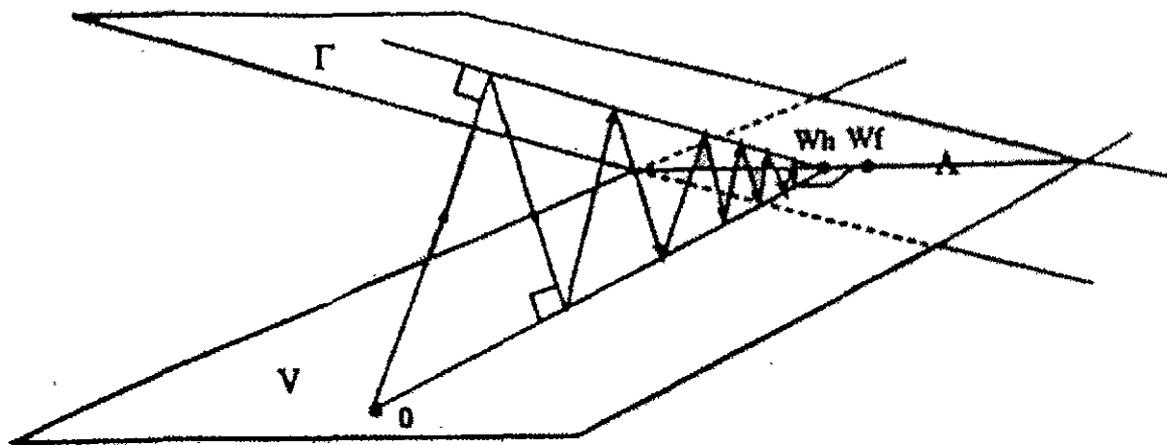


Figura 2. Una aproximación de la transformada wavelet de $f(x, y)$ es reconstruida a partir de una proyección ortogonal en un espacio afin Γ en el espacio V de todas las transformadas wavelet bivalentes. La proyección ortogonal en Γ y V inicia en el elemento cero y converge a su proyección ortogonal en $\Gamma \cap V$

Sea P_Γ el operador que realiza la proyección ortogonal en Γ , con respecto a la norma de Sobolev. Este es aplicable a cualquier elemento de K , a los cuales transforma en elementos de Γ , con respecto a la norma de Sobolev. Sea P_V el operador de proyección ortogonal en V , con respecto a la norma mencionada. Sea $P = P_\Gamma \cdot P_V$ una proyección alternativa en Γ y V . Sea P^n las n iteraciones del operador P . Como Γ es una cerradura y V

un espacio de Hilbert, por la expresión (20) podemos demostrar que para cualquier elemento de K , se cumple:

$$X = \left(\left(w_j^1(x, y), w_j^2(x, y) \right)_{1 \leq j \leq J}, s_j(x) \right), \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n X = P_\Lambda X \quad (23)$$

La proposición alterna converge a la proyección ortogonal de X en el espacio Λ . Si $X = 0$, esto es, que todas las funciones de la expresión (22) son iguales a cero, entonces el límite (23) converge a los elementos de Λ , cuya norma de Sobolev es mínima. Este algoritmo se ilustra en la figura 2. Si la imagen original tiene N pixeles, la implementación de P_Γ y P_V , requiere de sólo $O(N \log(N))$ operaciones. Una imagen se reconstruye al aplicar la inversa de la transformada wavelet en la transformada wavelet bivalente reconstruida. Para efecto de procesamiento de imágenes, 10 iteraciones son suficientes para obtener una aproximación que no represente diferencias visibles. Debemos hacer énfasis en que esta solución no es igual a la imagen original $S_1 f(x, y)$. Meyer¹ demostró que aunque se cuente con toda la información de las líneas, no reconstruimos la imagen original en forma exacta, sólo obtenemos una aproximación a la imagen, donde los componentes principales son restaurados.

A la izquierda de la figura 4, se tiene una imagen reconstruida de los valores de su transformada wavelet sobre el mapa de líneas mostrado a la derecha. Esta imagen se obtiene de aplicar 10 veces el operador P . La transformada wavelet fue evaluada sobre una escala de 4, ($J = 4$). Las líneas que han sido seleccionadas se recuperan de manera muy precisa, pero los pequeños detalles que fueron eliminados, han desaparecido de la imagen reconstruida.

¹ Meyer, Y., Un contre - exemple à la conjecture de Marr et à celle de S. Mallat, CERAMADE, University Paris - IX, 1991, preprint.

5. 1. 3. Compactación de Líneas.

Un algoritmo de compactación de imágenes basado en líneas, involucra dos pasos: El primero seleccionar los puntos de línea más importantes para la visualización de la imagen. Y el segundo, codificarlos eficientemente. En lugar de procesar en forma individual los puntos de líneas encontrados, la transformada wavelet une los puntos para construir curvas. En la locación de una línea, la dirección del vector gradiente es perpendicular a la curva que atraviesa este punto. A este procedimiento, va aunado el considerar dos vecindades de puntos de línea cuya posición relativa es perpendicular a la dirección dada por el ángulo de la imagen, además de haber impuesto que el módulo de $M_2, f(x, y)$ varíe de forma continua a través de la curva, a lo que la intensidad de la imagen no presenta modificaciones abruptas a lo largo de la curva. La máxima unión de puntos que obtenemos es localizada generalmente en los límites de la estructura de la imagen. La selección de las curvas más importantes, requiere de algoritmos sofisticados, si tomamos en cuenta el contexto de la imagen. En el caso de la imagen que se ha venido manejando, es importante no introducir distorsiones alrededor de los ojos, porque estos son de gran importancia para el ojo humano, lo que implica encontrar la locación de los ojos, lo cual presenta un problema de reconocimiento de patrones. Los límites de estructuras coherentes generan curvas largas, por lo que debemos mover cualquier curva cuya longitud sea menor a un límite dado. De las curvas restantes, seleccionamos las que correspondan a las variaciones más intensas de la imagen. Esto se lleva a cabo moviendo las curvas, con lo cual el valor promedio del módulo de la transformada wavelet es más pequeño que el límite de una amplitud dada. En la figura 4, la imagen de la derecha es la representación de las curvas, en la escala 2^2 . Los parámetros de la selección de líneas dependen sólo de cuantos bits se desean usar para la codificación de la imagen. Conforme más líneas se seleccionan más bits se requieren. La imagen presentada al inicio del capítulo, es una imagen con 512×512 píxeles, y la figura 6 es el mapa de líneas en la escala 2^2 , además de desplegar las curvas seleccionadas por ser el doble del límite de longitud y el límite del módulo promedio, que fueron usados por las curvas seleccionadas en la figura 5. Como resultado, más curvas son eliminadas en esta selección.

Ya que la selección de líneas ha sido realizada, debemos codificar eficientemente la información restante, lo que requiere codificar la posición de los puntos de línea que

hayan sido seleccionados. Para cada escala 2^j , $1 \leq j \leq J$, debemos codificar el módulo y el ángulo de la transformada wavelet sobre esas curvas. Finalmente, debemos hacer un submuestreo de la frecuencia inferior de la imagen $S_{2^j}f$.

Hasta este momento, la imagen ha sido codificada sólo por sus líneas. Por lo que el error generado por este procedimiento está codificado por la transformada wavelet, y podemos analizar las líneas con muy pocos bits, aunque el error produzca distorsiones visuales importantes las cuales se reducen en una segunda codificación.

La posición de cada curva es registrada, y es codificado el incremento de un pixel a otro. Carlsson¹ demostró que con un código de entropía se requerían, en promedio, 10 bits para el primer punto y 1.3 bits para cada punto sobre la curva. Para reducir el costo de esta codificación con un factor 2, debemos submuestrear con factor 2 la malla de la imagen donde las curvas están definidas. De las curvas que se encuentran en esta submalla, estimamos con interpolaciones lineales la geometría de las curvas en la malla original.

De una curva en la escala de referencia 2^2 , sabemos que el ángulo $A_{2^2}f(x,y)$ indica la dirección del vector gradiente, que es perpendicular a la tangente de la curva. Podemos estimar el valor de $A_{2^2}f(x,y)$ en un punto de la línea, esto si previamente hemos evaluado la dirección de la tangente en la línea. Consecuentemente, no necesitamos codificar los valores de los ángulos. En otras escalas 2^j , aproximamos $A_{2^j}f(x,y)$ a $A_{2^2}f(x,y)$ en la misma locación. Sobre cada curva, el módulo $M_{2^j}f(x,y)$ varía continuamente.

La imagen de la derecha de la figura 5 es una interpolación del mapa de líneas que es usado para codificar la imagen original. A la izquierda se encuentra la imagen reconstruida del código de líneas. Esta imagen requiere de 0.166 bits por pixel. Comparándola con la original (figura 3), que fue codificada con 8 bits por pixel, estaríamos hablando de un factor de compresión de 72. La imagen reconstruida presenta las principales características de la imagen original, pero muestra una importante distorsión y

¹ Carlsson, S., Sketch based coding of grey level images, Signal Processing North - Holland 15 (1) (1988), 57 - 83.

toda la textura ha desaparecido. La figura 8, es una reconstrucción de los valores codificados de la transformada wavelet sobre el mapa de líneas en la figura 7 con 10 iteraciones del operador P. Esta imagen de 512 x 512 fue codificada en 0.043 bits por pixel, lo que corresponde a una razón de compresión de 186, pero la imagen codificada es sobremuestreada. Pocas curvas fueron seleccionadas, lo que sólo permite obtener los principales componentes de la imagen. A pesar de esto, la imagen es clara y no incluye grandes distorsiones.

5. 1. 4. Error de Codificación de Imagen.

El algoritmo de codificación de líneas restaura las principales características de la imagen pero elimina las texturas además de los detalles más finos de la imagen. Podemos evaluar el error de la imagen, sustrayendo la imagen codificada de la original. La figura 9, es el resultado de sustraer la imagen codificada (figura 8), de la original (imagen presentada al inicio de este capítulo). La textura aparece en esta imagen de error, además de algunas características como son la línea vertical de la derecha cuyas líneas no fueron seleccionadas en la figura 8. La imagen de error incluye información acerca de la codificación de líneas. Para obtener información acerca de la textura, debemos codificar el error con una base wavelet ortonormal.

Una base wavelet ortonormal, provee una de las transformadas más efectivas para la compactación de imágenes. Estas bases se adaptan de forma muy eficiente a las propiedades estadísticas de las imágenes y a los artificios de codificación que pueden ajustarse a la sensibilidad humana. En un rango de compresión amplio, las bases wavelets ortonormales producen el fenómeno de Gibbs de error en la locación de líneas, lo cual degrada considerablemente la calidad de la imagen. Como ya hemos codificado la mayoría de las líneas, podemos comprimir un error con un amplio rango de compresión sin crear más error. Una base wavelet ortonormal descompone la imagen en partes que aparecen en diferentes resoluciones y con diferentes orientaciones. En dos dimensiones, podemos construir una base wavelet ortonormal de las tres wavelets $\psi^1(x, y)$, $\psi^2(x, y)$ y $\psi^3(x, y)$. Cada una de éstas es dilatada por el factor de escala 2^j , para $1 \leq k \leq 3$:

$$\psi_{2^j}^k(x, y) = \frac{1}{4^j} \psi^k\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \quad (24)$$

Cada 2^j , estas wavelets se trasladan dentro de una malla uniforme cuyos intervalos son 2^j . Las tres wavelet se encogen de tal manera que la familia resultante de funciones:

$$\left(\psi_{2^j}^1(x - 2^j n, y - 2^j m), \psi_{2^j}^2(x - 2^j n, y - 2^j m), \psi_{2^j}^3(x - 2^j n, y - 2^j m)\right)_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3} \quad (25)$$

es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Cualquier función es representada por el producto interno con cada elemento de esta base.

Una imagen es medida en una resolución finita, normalizada a 1. Se descompone con la dilatación de wavelets con factores de escala mayores a 1. La figura 10, muestra la descomposición del error de la imagen (9), con wavelets derivadas de la wavelets de Daubechies¹ de soporte compacto en una dimensión. Cada 2^j escalas, hay tres imágenes de tamaño $2^j N$, donde N es el número total de pixeles de la imagen original. Esta imagen corresponde al producto interno de la imagen original con cada una de las tres wavelets dilatadas por 2^j y trasladadas a una malla de tamaño $2^j N$. Los pixeles blancos indican los coeficientes ortogonales cuyos valores absolutos tienen una mayor amplitud. Como puede verse, estos coeficientes se concentran en las regiones de textura del error de la imagen. En este ejemplo, el error se descompone en 5 escalas. El número total de muestras de la representación ortogonal es igual al número de muestras del error original. Una gran parte de los coeficientes ortogonales se aproximan a cero y aparecen en negro en la figura 9.

Para reducir el número de coeficientes wavelets a codificar, debemos hacer tantos coeficientes como sea posible iguales a cero. Esto se lleva a cabo en un primer paso en una simple operación de limitación. En cada escala 2^j , y para cada orientación, medimos el total de energía de los coeficientes wavelets en bloque de $16 \cdot 2^j \times 16 \cdot 2^j$ pixeles. Si la energía total es menor a la dada, entonces debemos hacer cero a todos los coeficientes de bloque. Esto es, no habrá textura en ese bloque de la imagen y cualquier coeficiente wavelet no insignificante, muy probablemente corresponda a una fluctuación de la imagen

¹ Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets, Commun. Pure and Appl. Math. 41 (1988), 909 - 996.

poco importante. El registrar el resto de coeficientes diferentes de cero, permite adaptarse a su distribución de probabilidad. Un registro exponencial se adapta muy bien a la distribución de probabilidad de los coeficientes wavelets ortogonales, lo que conlleva a un error cuadrático medio pequeño. El error de la figura 11 es codificado con una base wavelet ortonormal, con 0.038 bits por pixel. Este tipo de codificaciones restauran las texturas más irregulares de la imagen. La figura 12 surge de añadir el error codificado a la codificación de líneas de la figura 8. Esto requiere de un total de $0.043 + 0.038 = 0.081$ bits por pixel para su codificación, lo que corresponde a una razón de compresión de alrededor de 100. Es clara la diferencia con respecto a la imagen original aunque, dada una razón de compresión alta, las líneas importantes y texturas se recuperan de forma precisa. La esquina superior derecha de la figura 13, es el resultado de codificar el error en una base ortogonal con 0.086 bits por pixel. La imagen inferior derecha se obtiene de agregar el error codificado a las líneas codificadas de la figura 5, lo que finalmente requiere de $0.116 + 0.086 = 0.202$ bits por pixel, lo que representa una compresión con factor 40. Nuevamente, las características principales de la imagen se restauran en forma favorable.

Concluamos este ejemplo, analizando las ventajas proporcionadas por esta técnica que nos permite comprimir imágenes con factores entre 40 y 100. Codificando específicamente las líneas y texturas de la imagen, no debemos olvidar que la distorsión en la textura es menos visible que la distorsión en las líneas. Es importante tener claro cómo seleccionar de forma óptima las líneas de la imagen, dada una razón de compresión final. Debe ser claro cómo distribuir los bits entre las líneas y texturas, para igualar la información de la imagen y la percepción humana.

La transformada wavelet es una herramienta importante que determina líneas en imágenes. Una representación precisa del tipo de líneas, se obtiene del comportamiento de los valores de la transformada wavelet en las escalas, lo cual es aplicado en reconocimiento de patrones.

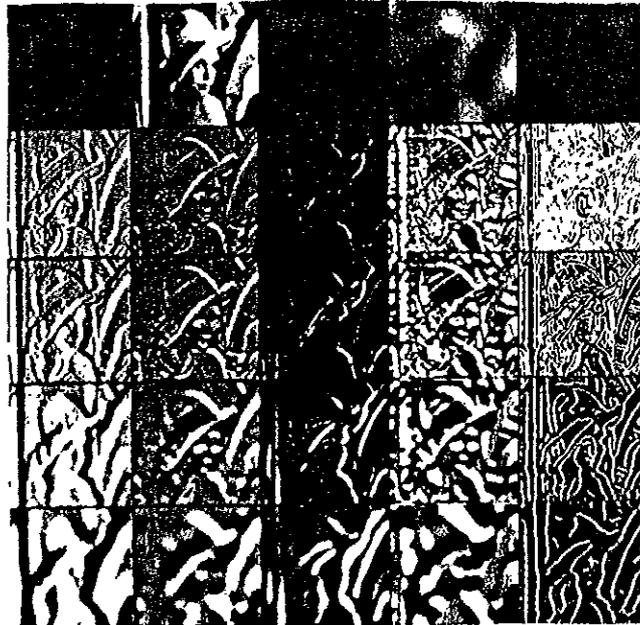


Figura 1. La $S_1 f(x, y)$ de la imagen original se encuentra en la esquina superior izquierda. En la esquina superior derecha se encuentra la frecuencia inferior de la imagen, $S_{2^4} f(x, y)$. La primera columna de la derecha se refiere a $w_{2^1} f(x, y)$ y la escala incrementa conforme se avanza de la parte superior a la parte inferior. La segunda columna despliega $w_{2^2} f(x, y)$. Los pixeles negros, grises y blancos indican los valores negativos, cero y positivos respectivamente, de las muestras. La tercera columna presenta los módulos de las imágenes $M_{2^1} f(x, y)$. Los pixeles negros indican valor cero, mientras que los blancos, corresponden a mayores amplitudes. La cuarta columna representa el ángulo de las imágenes $A_{2^1} f(x, y)$. Los valores de los ángulos van desde cero (negro), hasta 2π (blanco). Finalmente, si observamos la quinta columna vemos la posición, en color blanco, de los máximos locales $M_{2^1} f(x, y)$ en la dirección dada por el ángulo de la imagen $A_{2^1} f(x, y)$.



Figura 3. A la izquierda, la imagen original de 256 x 256 píxeles. A la derecha las líneas que se obtuvieron de los módulos máximos de la transformada wavelet, en la escala 2^2 .



Figura 4. A la izquierda, la imagen reconstruida a partir de los valores de la transformada wavelet aportados por el mapa de líneas de la derecha. Esta reconstrucción se obtiene después de 10 iteraciones del operador P . A la derecha, las líneas seleccionadas de las líneas de la figura 3. La selección se realiza a partir de la longitud de las líneas y sus módulos promedio.



Figura 5. A la izquierda, la imagen reconstruida a partir de la representación de las líneas codificadas por la transformada wavelet . Esta reconstrucción se obtiene después de 10 iteraciones del operador P. Esta imagen de 256 x 256 pixeles fue codificada en 0.116 bits por pixel. A la derecha, las curvas seleccionadas y codificadas en una submalla.



Figura 6. Líneas detectadas por el máximo local del módulo de la transformada wavelet, en la escala 2^2 .



Figura 7. Curvas seleccionadas después de haber considerado su longitud y el valor promedio del módulo de la transformada wavelet en la escala 2^2 . La longitud y los módulos son dos veces más grandes que en la figura



Figura 8. Imagen reconstruida de los valores codificados de la transformada wavelet a partir del mapa de líneas de la figura 7. Esta codificación requirió de 0.043 bits por pixel.



Figura 9. Esta imagen presenta el error, el cual se obtiene de sustraer la imagen codificada de la figura 8 de la imagen original. Los pixeles negros, grises y blancos corresponden a coeficientes negativos, cero y positivos respectivamente. La mayor parte de la energía se concentra en las regiones de textura.

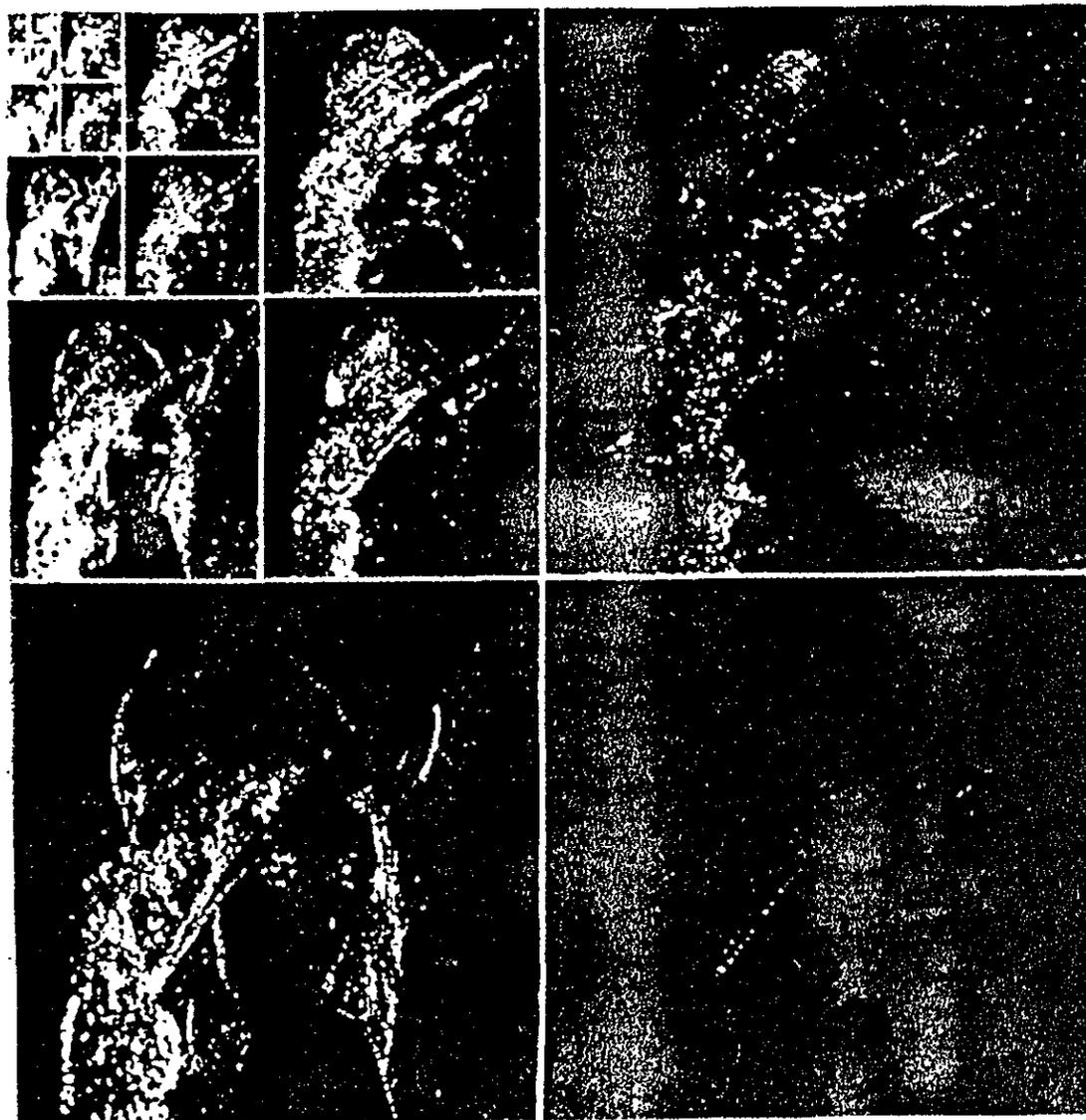


Figura 10. Descomposición wavelet ortogonal del error de la figura 9. Desplegamos el valor absoluto de los coeficientes ortogonales. Los pixeles negros y blancos corresponden a los valores cero y de amplitud mayor de los coeficientes. Los coeficientes con mayor energía se concentran principalmente en las regiones de textura del error de la imagen.

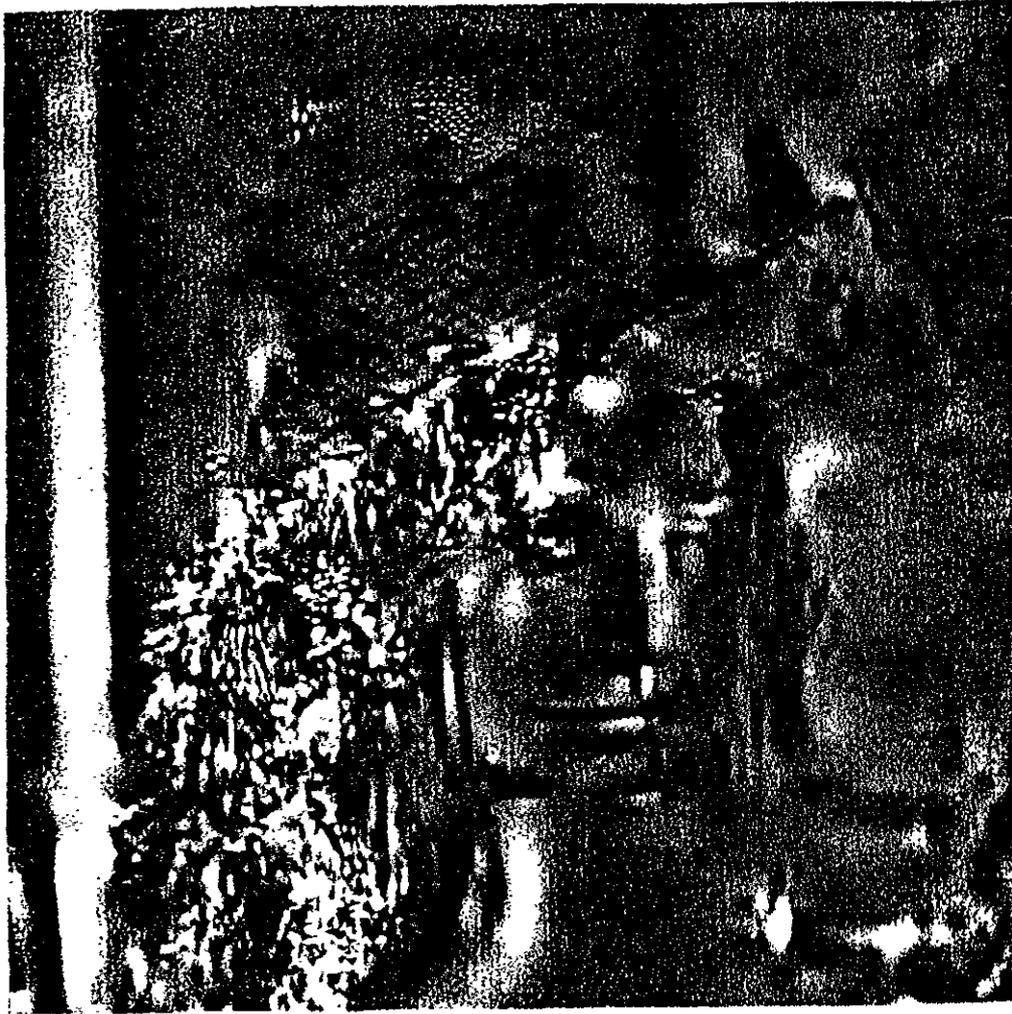


Figura 11. Error de la imagen codificado en 0.038 bits por pixel, con una base wavelet ortonormal. Las texturas principales son restauradas.



Figura 12. Imagen codificada, que se obtiene de unir las líneas codificadas de la figura 8 y el error de la imagen codificado de la figura 11. Esta imagen es codificada en un total de 0.081 bits por pixel.



Figura 13. En la esquina superior izquierda, el error de la imagen que se obtuvo de sustraer la imagen de la derecha de la figura 5 a la imagen original, la cual esta representada en la esquina inferior izquierda. En la esquina superior derecha, el error de la imagen codificada en una base wavelet ortogonal, con 0.086 bits por pixel. En la esquina inferior derecha, la imagen que se obtiene de unir el error de codificación (esquina superior derecha) con las líneas codificadas de la imagen de la izquierda de la figura 5. Esta imagen fue codificada en 0.202 bits por pixel.

5. 2. WAVELETS ACÚSTICAS.

5. 2. 1. Construcción de Wavelets Acústicas.

En este apartado usamos la transformada de señales analíticas para generar una familia de escalares wavelets relacionados con una ecuación de onda. Debemos esperar que estas wavelets¹ sean usadas para modelar la dispersión acústica. Construimos una familia de parámetros Ψ_z^α , indexados por una variable continua $\alpha > 2$. Para toda α , el conjunto $\{\Psi_z^\alpha : z \in T\}$ forma una familia wavelet.

La solución de la ecuación de onda se obtiene por medio del análisis de Fourier, esto es:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{16\pi^3 \omega} \left[e^{i(\omega t - p \cdot x)} f(p, \omega) + e^{i(-\omega t - p \cdot x)} f(p, -\omega) \right] d^3 p = \\ &= \int_C e^{ip \cdot x} f(p) d\tilde{p} \end{aligned} \quad (1)$$

donde:

$x = (x, t)$ = vector de Fourier en el espacio del tiempo.

$p = (p, p_0)$ = vector de frecuencia de onda.

$p_0 = \pm |p|$, por la ecuación de onda.

$\omega = |p|$ = valor absoluto de la frecuencia.

$p \cdot x = p_0 t - p \cdot x$ = producto escalar de Lorentz.

$C = \{p = (p, p_0) \in \mathbb{R}^4 : p_0^2 = |p|^2, p \neq 0\} = C_+ \cup C_- = \text{Cono de luz.}$

¹ Las wavelets acústicas son escalares, por lo que no requerimos de una matriz wavelet.

$$C_+ = \{(\mathbf{p}, p_0) : p_0 = |\mathbf{p}| > 0\} = \text{Frecuencia positiva del cono.}$$

$$C_- = \{(\mathbf{p}, p_0) : p_0 = -|\mathbf{p}| < 0\} = \text{Frecuencia negativa del cono.}$$

(2)

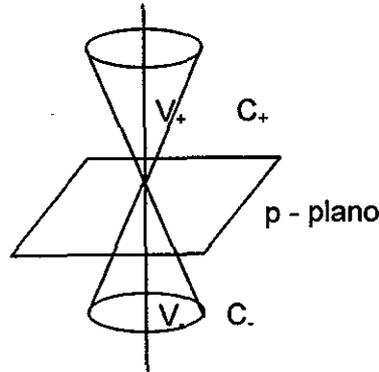


Figura 1. $C_{\pm} = \partial V_{\pm}$

$$d\tilde{\mathbf{p}} = \frac{d^3\mathbf{p}}{16\pi^3\omega} = \text{Métrica de Lorentz en } C$$

Para definir las wavelets requerimos de un espacio de soluciones de Hilbert.

Sea $\alpha > 1$, y:

$$\|F\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \left[|f(\mathbf{p}, \omega)|^2 + |f(\mathbf{p}, -\omega)|^2 \right] \frac{d^3\mathbf{p}}{16\pi^3\omega^\alpha} = \int_C |f\mathbf{p}|^2 \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{\omega^{\alpha-1}} \tag{3}$$

Sea H_α el conjunto de soluciones de (1), para las cuales la expresión anterior converge:

$$H_\alpha = \left\{ F : \|F\|^2 < \infty \right\} \tag{4}$$

Entonces H_α es un espacios de Hilbert bajo el producto interno, que se define de polarizar (3):

$$F^*G = \langle F, G \rangle \equiv \int_C \bar{f}(\mathbf{p})g(\mathbf{p}) \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{\omega^{\alpha-1}}, \quad F^*F = \|F\|^2 \tag{5}$$

La información que nos proporciona α , es que para valores muy grandes de α , $f(p)$ decrece rápidamente a $\omega = 0$ para $F \in H_\alpha$. Esto significa que $F(x)$ necesariamente tiene varios momentos cero en la dirección del tiempo, lo cual implica que se tiene un alto grado de oscilación en el eje del tiempo. Por otro lado, conforme $\omega \rightarrow \infty$, $F(x)$ será discontinua. Esto es, para valores grandes de α se tiene oscilación y discontinuidad. Las wavelets que construiremos oscilarán pero no serán discontinuas, ya que se forzarán a decrecer en forma exponencial en la frecuencia.

Para construir las wavelets debemos extender $F(x)$ del espacio real R^4 al espacio $T = \{x + iy \in C^4 : y^2 < 0\}$, esto lo haremos aplicando la transformada de señales analíticas:

$$\tilde{F}(x + iy) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + \tau y) \frac{d\tau}{\tau - i} = \int_C 2\theta(p \cdot y) e^{ip \cdot (x + iy)} f(p) d\tilde{p} \quad (6)$$

Donde θ es el rango de crecimiento. Multiplicando y dividiendo el integrando de la expresión anterior por $\omega^{\alpha-1}$, podemos expresar la integral como el producto interno de F con otra solución Ψ_{x+iy} , la cual es la wavelet acústica con parámetro $z = x + iy$:

$$\tilde{F}(z) = \int_C 2\omega^{\alpha-1} \theta(p \cdot y) e^{ip \cdot z} f(p) \frac{d\tilde{p}}{\omega^{\alpha-1}} = \int_C \bar{\Psi}_z(p) f(p) \frac{d\tilde{p}}{\omega^{\alpha-1}} \quad (7)$$

donde:

$$\Psi_z(p) \equiv 2\omega^{\alpha-1} \theta(p \cdot y) e^{-ip \cdot z} \quad (8)$$

Ψ_z es el coeficiente de Fourier de la función para la solución:

$$\Psi_z(x') \equiv \int_C e^{ip \cdot x'} \Psi_z(p) d\tilde{p} = \int_C 2\omega^{\alpha-1} \theta(p \cdot y) e^{ip \cdot (x' - \bar{z})} d\tilde{p} \quad (9)$$

a la cual llamaremos wavelet acústica de orden α . Por la definición (5) de producto interno:

$$\tilde{F}(z) = \Psi_z^* F = \langle \Psi_z, F \rangle, \quad \forall F \in H_\alpha \text{ y } z \in T \quad (10)$$

Para wavelets acústicas es recomendable expresar las soluciones $F(x)$ como la superposición de Ψ_z . Lo cual implica contar con una unidad de resolución. La restricción de la señal analítica $\tilde{F}(z)$ a la región Euclídeana $E = \{(x, is): x \in \mathbb{R}^3, s \neq 0\}$ en T es:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x, is) &= \int_{\mathbb{C}} 2\theta(p_0 s) e^{-p_0 s} e^{-ip \cdot x} f(p) d\tilde{p} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ip \cdot x} [\theta(s) e^{-\omega s} f(p, \omega) + \theta(-s) e^{\omega s} f(p, -\omega)] \frac{d^3 p}{8\pi^3 \omega^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Entonces, por el teorema de Plancherel:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\tilde{F}(x, is)|^2 d^3 x = \int_{\mathbb{R}^3} \left[\theta(s) e^{-2\omega s} |f(p, \omega)|^2 + \theta(-s) e^{2\omega s} |f(p, -\omega)|^2 \right] \frac{d^3 p}{8\pi^3 \omega^2} \quad (12)$$

Obsérvese que para $\alpha > 2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s|^{\alpha-3} \theta(\pm s) e^{\mp 2\omega s} ds = \int_0^{\infty} s^{\alpha-3} e^{-2\omega s} ds = \frac{\Gamma(\alpha-2)}{(2\omega)^{\alpha-2}} \quad (13)$$

Para obtener $\|F\|^2$ de (12), debemos integrar ambos lados de la igualdad con respecto a s , con un factor de peso $|s|^{\alpha-3}$, asumiendo que $\alpha > 2$:

$$\begin{aligned} &\int_E |s|^{\alpha-3} |\tilde{F}(x, is)|^2 d^3 x ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Gamma(\alpha-2)}{(2\omega)^{\alpha-2}} \left[|f(p, \omega)|^2 + |f(p, -\omega)|^2 \right] \frac{d^3 p}{8\pi^3 \omega^2} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha-2)}{2^{\alpha-3}} \|F\|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Sea \tilde{H}_α el espacio de soluciones de señales analíticas en H_α :

$$\tilde{H}_\alpha \equiv \{ \tilde{F} : F \in H_\alpha \} \quad (15)$$

La expresión (14) sugiere definir un producto interno en \tilde{H}_α :

$$\tilde{F}^* \tilde{G} \equiv \langle \tilde{F}, \tilde{G} \rangle \equiv \int_{\mathbb{E}} \overline{\tilde{F}(z)} \tilde{G}(z) d\mu_\alpha(z) \quad (16)$$

donde $d\mu_\alpha(z)$ es la métrica en la región Euclideana, definida por:

$$d\mu_\alpha(\mathbf{x}, i\mathbf{s}) = \frac{2^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha-2)} |\mathbf{s}|^{\alpha-3} d^3\mathbf{x} d\mathbf{s} \quad (17)$$

Con esta definición obtenemos los siguientes resultados:

Bajo el supuesto de $\alpha > 2$,

a) El producto interno en \tilde{H}_α , (16), satisface:

$$\tilde{F}^* \tilde{G} = F^* G, \text{ es decir, } \int_{\mathbb{E}} F^* \Psi_z \Psi_z^* G = F^* G \quad (18)$$

En particular, $\|\tilde{F}\| = \|F\|$ y \tilde{H}_α es un subespacio cerrado de $L^2(d\mu_\alpha)$.

b) La wavelet acústica de orden α cuenta con la unidad de resolución:

$$\int_{\mathbb{E}} \Psi_z \Psi_z^* d\mu_\alpha(z) = 1, \text{ débilmente en } H_\alpha \quad (19)$$

Esto es, (18) es válida para toda $F, G \in H_\alpha$.

c) Toda solución $G \in H_\alpha$ se puede escribir como:

$$G = \int_{\mathbb{E}} \Psi_z \Psi_z^* G d\mu_\alpha(z) = \int_{\mathbb{E}} F^* \Psi_z \tilde{G}(z) d\mu_\alpha(z), \text{ débilmente en } H_\alpha \quad (20)$$

Nuevamente, (18) se satisface para toda $F \in H_\alpha$. Entonces:

$$G(x') = \int_{\mathbb{E}} \Psi_z(x') \tilde{G}(z) d\mu_\alpha(z) \quad (21)$$

d) La proyección ortogonal en $L^2(d\mu_\alpha)$ al subespacio cerrado \tilde{H}_α está dada por:

$$(P\Phi)(z') = \int_{\mathbb{E}} K(z'|z) \Phi(z) d\mu_\alpha(z), \quad \Phi \in L^2(d\mu_\alpha) \quad (22)$$

donde:

$$\begin{aligned} K(z'|z) &= \Psi_z^* \Psi_{z'} = 4 \int_{\mathbb{C}} \omega^{\alpha-1} \theta(p \cdot y') \theta(p \cdot y) e^{ip(z'-\bar{z})} d\tilde{p} = \\ &= 4\theta(y \cdot y') \int_{\mathbb{C}} \omega^{\alpha-1} \theta(p \cdot y) e^{ip(z'-z)} d\tilde{p} \end{aligned} \quad (23)$$

es el Kernel de reproducción asociado.

Para $\alpha \leq 2$, (13) demuestra que la expresión del producto interno en \tilde{H}_α diverge y las proposiciones anteriores no se cumplen. Entonces decimos que Ψ_z son válidas si y sólo si $\alpha > 2$ y sólo las wavelets válidas proporcionan una unidad de resolución en E .

5. 2. 2. Emisión, Absorción y Curso.

Para que el producto interno $\Psi_z^* F$ converja para toda $F \in H_\alpha$, Ψ_z debe pertenecer a H_α .

La norma de Ψ_z es:

$$\begin{aligned} \|\Psi_{x+iy}\|^2 &= \int_{\mathcal{C}} 4\omega^{2\alpha-2} \theta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}) e^{-2\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{\omega^{\alpha-1}} = \\ &= 4 \int_{\mathcal{C}} \omega^{\alpha-1} \theta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}) e^{-2\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} d\tilde{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (24)$$

donde $\theta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})^2 = \theta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})$. Claramente, $\|\Psi_{x-iy}\|^2 = \|\Psi_{x+iy}\|^2$, por lo que podemos asumir que y pertenece al cono V'_+ . Entonces:

$$\|\Psi_z\|^2 = 4 \int_{\mathcal{C}_+} \omega^{\alpha-1} e^{-2\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} d\tilde{\mathbf{p}} = 2^{1-\alpha} E_\alpha(\mathbf{y}) \quad (25)$$

donde:

$$E_\alpha(\mathbf{y}) \equiv \int_{\mathcal{C}_+} \omega^{\alpha-1} e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}} d\tilde{\mathbf{p}} \quad (26)$$

Como:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} = \omega s - \mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \geq \omega s - \omega |\mathbf{y}| \quad (27)$$

y $s - |\mathbf{y}| > 0$ para $\mathbf{y} \in V'_+$, el integrando de la expresión (26) decrece en forma exponencial en el radio (ω), y la dirección y el integrando convergen. Si el integrando decrece en la dirección donde \mathbf{p} es paralelo a \mathbf{y} , entonces Ψ_z favorece a los coeficientes de Fourier. Lo que demuestra que $\Psi_z \in H_\alpha$ para cualquier $\alpha \geq 1$ y toda $z \in T$.

Evaluemos $E_\alpha(z)$ cuando α es un entero positivo. La expresión resultante será válida para cualquier $\alpha \geq 1$, y la usaremos para encontrar una forma explícita de $\Psi_z(x')$:

$$S(y) \equiv \int_{c_1} e^{-p'y} d\tilde{p} = \frac{1}{4\pi^2 y^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{s^2 - |y|^2} \quad (28)$$

Haciendo $u \equiv |y| \neq 0$, $S(y)$ es:

$$S(y) = \frac{1}{8\pi^2 u} \left[\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s+u} \right] \quad (29)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E_\alpha(y) &= (-\partial_s)^{\alpha-1} S(y) = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 u} (-\partial_s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s+u} \right], \quad u \equiv |y| \neq 0 \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{8\pi^2 u} \left[\frac{1}{(s-u)^\alpha} - \frac{1}{(s+u)^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Para obtener $E_\alpha(y)$, cuando $y = 0$, debemos tomar el límite $u \rightarrow 0^+$. Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$E_\alpha(0, s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4\pi s^{\alpha+1}}, \quad s > 0 \quad (31)$$

A pesar de que las expresiones (30) y (31) se originan del supuesto $\alpha \in \mathbb{N}$, en la expresión (26), se demuestra que $\Psi_z \in H_\alpha$, para toda $\alpha \geq 1$.

La igualdad (30) nos permite evaluar las wavelets, pues sólo necesitamos conocer $\Psi_{iy}(x)$, pues:

$$\Psi_{x+iy}(x') = \Psi_{iy}(x'-x) \quad (32)$$

Pero:

$$\Psi_{iy}(x) = 2 \int_{C_+} \omega^{\alpha-1} e^{-p^*(y-ix)} d\tilde{p} = 2E_\alpha(y+ix) \quad (33)$$

Y además:

$$(y-ix)^2 = -(x+iy)^2 \neq 0, \quad \forall y \in V' \quad (34)$$

Como un primer resultado, $E_\alpha(y)$ tiene una única continuación analítica a $E_\alpha(y-ix)$. Esta continuación se obtiene formalmente al substituir:

$$s \rightarrow s-it, \quad u = (y^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow ((y-ix)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

en (30)¹. Y obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(r,t) &= \Psi_{0,i}(x,t) = \\ &= 2 \int_{C_+} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega(1-it)-ip^*x} d\tilde{p}, \quad r \equiv |x| \end{aligned} \quad (36)$$

Ψ es esféricamente simétrica. Entonces, según (35):

$$s \rightarrow 1-it, \quad u \rightarrow (-x^2)^{\frac{1}{2}} \equiv ir \quad (37)$$

obteniendo:

¹ Usamos la notación $(y-ix)^2 = (y-ix) \cdot (y-ix) = y^2 - x^2 - 2ix \cdot y$, evitando crear confusión con $|y-ix|^2$ la norma de Hermitte en C^3 .

$$\Psi(r, t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{4\pi^2 ir} \left[\frac{1}{(1-it-ir)^\alpha} - \frac{1}{(1-it+ir)^\alpha} \right], \quad r \neq 0 \quad (38)$$

$$\Psi(0, t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi^2 (1-it)^{\alpha+1}}$$

La expresión anterior se puede reescribir como:

$$\Psi(r, t) = \Psi^-(r, t) + \Psi^+(r, t) \quad (39)$$

donde:

$$\Psi^-(r, t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{4\pi^2 ir} \frac{1}{(1-it-ir)^\alpha} \quad (40)$$

$$\Psi^+(r, t) = \Psi^-(-r, t)$$

$\Psi^\pm(r, t)$ son singulares en $r = 0$, lo que anula $\Psi(r, t)$. De esto observamos que $\Psi^-(r, t)$ se concentra en el conjunto:

$$\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4 : t = -r = -|\mathbf{x}| < 0\} = \partial V_- \quad (41)$$

esto es, $\Psi^-(r, t)$ se concentra cerca de los límites del cono inferior en el espacio del tiempo, y no olvidemos que $c = 1$. Esto es, el conjunto de eventos de los cuales se puede emitir una señal y extenderse al origen en $x = 0$ en $t = 0$. Entonces:

- $\Psi^-(r, t)$ representa una wavelet de absorción, la cual es asimilada cerca del origen $x = 0$ en el espacio del tiempo.

similarmente, $\Psi^+(r, t)$ se concentra cerca de:

$$\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4 : t = r = |\mathbf{x}| > 0\} = \partial V_+ \quad (42)$$

Los límites del cono superior.

Este es el conjunto de todos los puntos que se pueden obtener de extender una señal emitida del origen.

- $\Psi^+(r, t)$ es una wavelet de emisión que se origina cerca de $x = 0$.

Al aplicar escalas, incrementos y traslaciones a $\Psi^-(r, t)$, se genera una familia de wavelets $\Psi_z^-(x')$ que son interpretadas como absorciones en $x' = x$ y cuyo centro se mueve con velocidad $\frac{y}{y_0}$. Como Ψ_z^- no es simétricamente esférica a pesar de $y = 0$, su espacio

de localización en el momento de absorción no es uniforme, lo que nos hace pensar que es de orden $y_0 \pm y$, dependiendo de la dirección, la cual está relacionada con los rangos de decrecimiento de $\theta(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})e^{-\mathbf{p} \cdot \mathbf{y}}$ en las diferentes direcciones de \mathbf{p} . Similarmente, $\Psi^+(r, t)$ genera una familia de wavelets $\Psi_z^+(x')$, interpretadas como emisiones de x con velocidad

$$v = \frac{y}{y_0}.$$

Las wavelets Ψ_z^\pm no son soluciones globales de la ecuación de onda, pues son singulares en el origen. De hecho, usando:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x}) \quad (43)$$

podemos demostrar que $\Psi^+(r, t)$ y $\Psi^-(r, t)$ son soluciones fundamentales de la ecuación de onda en el sentido:

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \Psi^-(r, t) + \nabla^2 \Psi^-(r, t) &= -\frac{\Gamma(\alpha)}{i\pi(1-it)^\alpha} \delta(\mathbf{x}) \\ -\partial_t^2 \Psi^+(r, t) + \nabla^2 \Psi^+(r, t) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{i\pi(1-it)^\alpha} \delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (44)$$

La segunda igualdad es una continuación analítica de la primera a otra división de $ir = (-x^2)^{\frac{1}{2}}$. La interpretación es la siguiente: La segunda expresión afirma que a una emisión de Ψ^+ , necesitamos producir un curso elemental en el origen dado por:

$$J(\mathbf{x}, t) = \frac{\Gamma(\alpha)}{i\pi(1-it)^\alpha} \delta(\mathbf{x}) \equiv -i\phi(t)\delta(\mathbf{x}) \quad (45)$$

y la primera expresión asevera que la absorción de Ψ^- crea el mismo curso con signo contrario. La suma de las dos wavelets parciales satisface la ecuación de onda ya que ambos cursos se cancelan. Para una función de una variable, la cual decrece rápidamente, esto es:

$$\phi(t) \equiv \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi(1+it)^\alpha} \quad (46)$$

se concentra en una línea en el espacio del tiempo. Entonces $\phi(t)$ es sólo una señal pasada, detectada o transmitida por una "apertura" (antena, micrófono o bocinas) inmóvil en el origen. Evidentemente, la expresión (44), presenta una relación precisa entre las wavelets Ψ^\pm y la señal ϕ . Esta relación está dada por (38):

$$\phi'(t) = 2\pi i \Psi(0, t) \quad (47)$$

la cual no se da por accidente. $\phi'(t)$ es el coeficiente de la función de $\delta(\mathbf{x})$ en (45), pues aplicando ∇^2 a Ψ^- cambia el factor $(ir)^{-1}$ en (40) por $4\pi i \delta(\mathbf{x})$. Otra forma de eliminar este factor es tomando el límite $r \rightarrow 0^+$ en (38). Esto requiere de aplicar la regla de L'Hôpital, lo que implica una diferenciación con respecto a r . Pero el diferenciar a Ψ^- con respecto a r afecta de manera similar que si se diferenciara con respecto a t .

Según (47), la señal actúa como una potencia para Ψ . Usando las propiedades de las wavelets acústicas bajo traslaciones y dilataciones, queda claro que por (44):

$$\begin{aligned} \square \Psi_{x,t+is}^{-}(\mathbf{x}', t') &= i\phi_{s,t}(t')\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \equiv -J_{x,t+is}(\mathbf{x}') \\ \square \Psi_{x,t+is}^{+}(\mathbf{x}', t') &= -i\phi_{s,t}(t')\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) \equiv -J_{x,t+is}(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (48)$$

donde

$$\square \equiv -\partial_t^2 + \nabla_{\mathbf{x}'}^2 \quad \text{y} \quad \phi_{s,t}(t') \equiv |s|^{-\alpha} \phi\left(\frac{t'-t}{s}\right) \quad (49)$$

Aplicando la transformada de Lorentz a (48), obtenemos una expresión similar, válida para toda $z \in T$ (con $v \equiv \frac{y}{y_0}$ no necesariamente cero), la cual relaciona $\square \Psi_z^{\pm}(\mathbf{x}')$ con $J_z(\mathbf{x}')$. J_{x+iy} se encuentra en R^4 , con parámetros:

$$\mathbf{x}'(\tau) = \mathbf{x} + \psi y \quad (50)$$

Lo cual se extiende a la relación entre wavelets y a la familia de señales Ψ_z^{\pm} .

La expresión (48) sugiere un método de análisis y síntesis para wavelets acústicas, el cual consiste en reconocer la señal recibida $i\phi_{s,t}$ en $\mathbf{x} \in R^3$ como la marca de $\Psi_{x,t+is}^{-}$. Este proceso representa el análisis, y la síntesis se basa en usar $-i\phi_{s,t}$ como un ingreso en \mathbf{x} para generar una wavelet $\Psi_{x,t+is}^{+}$ de salida. Esto permite relacionar el análisis de la señal (como una línea de voltaje o la presión en una cuerda de violín) y las características físicas de la señal. Si usamos ϕ como la wavelet madre para pruebas, la expresión (48) presenta una relación entre wavelets Ψ_z^{\pm} y las de prueba $\phi_{s,t}$, que después permitirán formar la familia original. Esta relación se extiende a las ondas arbitrarias y las señales. Consecuentemente, la información de la señal se puede transmitir directamente en el espacio del tiempo, considerando que usamos las wavelets de prueba $\phi_{s,t}$ compatibles con Ψ_z .

La señal $\phi(t)$ tiene centro en $t = 0$ y grado de oscilación controlado por α . Sin olvidar que para valores altos de α la señal oscila con mayor rapidez y mayor decrecimiento en el tiempo, con norma:

$$|\phi(t)| = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad (51)$$

Para $\alpha \in \mathbb{N}$ es fácil evaluar la transformada de Fourier de ϕ :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi t}}{(1-it)^\alpha} dt \Big|_{u=1} = \\ &= \frac{1}{\pi} (-\partial u)^{\alpha-1} [(-2\pi i)\theta(\xi)e^{-\xi u}] \Big|_{u=1} = \\ &= 2\theta(\xi)\xi^{\alpha-1}e^{-\xi} \end{aligned} \quad (52)$$

donde ha quedado establecido el límite superior del plano si $\xi < 0$ y el límite inferior si $\xi > 0$. Comparando (52) con (8), observamos que $\hat{\phi}(\xi)$ es la transformada de Fourier $\psi_{0,i}$ de la wavelet de referencia $\Psi = \Psi_{0,i}$, es decir:

$$\hat{\phi}(p_0) = 2\theta(p_0)p_0^{\alpha-1}e^{-p_0} = \psi_{0,i}(p, p_0) \quad (53)$$

Recordando (46):

$$C_\beta \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\beta-1} |\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi = 2^{4-2\alpha-\beta} \Gamma(2\alpha + \beta - 2) < \infty \quad (54)$$

para todo $2\alpha + \beta > 2$. Entonces ϕ es válida según (47), y puede usarse como wavelet madre para el espacio de prueba de Hilbert:

$$H_\beta^{\text{prueba}} = \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}: \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{f}(\xi)|^2}{|\xi|^\beta} d\xi < \infty \right\}, \quad \beta > 2 - 2\alpha \quad (55)$$

La expresión (28), es el resultado de separar Ψ_z , que a su vez surge de haber separado Ψ_z . Las wavelets parciales Ψ_z^\pm son soluciones fundamentales de la ecuación de Maxwell, el lado derecho representa cargas eléctricas elementales y corriente.

El haber tomado $\alpha = 3$, fue porque el producto interno en H así lo requería, pues éste es invariante en el grupo conformado, lo cual implica que la representación de C en H es unitaria. Esto es importante para representar la transformada de Lorentz, en términos de operadores unitarios en un espacio libre, ya que no se prefiere a algún marco de referencia en el espacio libre. Si los operadores que representan la transformada de Lorentz no son unitarios, entonces la norma de alguna solución podría cambiar. Podemos entonces elegir soluciones minimizando la norma, y hacer alusión al marco de referencia. Veamos ahora cómo la norma de Ψ_z depende de la velocidad $v = |\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{y}|}{s} = \frac{u}{s} < 1$. Por (25) y (30):

$$\|\Psi_z\|^2 = \frac{\Gamma(\alpha)}{2\pi^2(2s)^{\alpha+1}v} \left[\frac{1}{(1-v)^\alpha} - \frac{1}{(1+v)^\alpha} \right], \quad z \in T_+ \quad (56)$$

Ahora:

$$\lambda(y) = \sqrt{y^2} = s\sqrt{1-v^2} \quad (57)$$

que es invariante bajo la transformada de Lorentz. Entonces, eliminando s :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\alpha)(1-v^2)^{\frac{(\alpha+1)}{2}}}{2\pi^2(2\lambda)^{\alpha+1}v} \left[\frac{1}{(1-v)^\alpha} - \frac{1}{(1+v)^\alpha} \right] = \\ & = \frac{\Gamma(\alpha)\sqrt{1-v^2}}{2\pi(2\lambda)^{\alpha-1}v} \left[\left(\frac{1+v}{1-v} \right)^\alpha - \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (58)$$

La métrica $d\tilde{p}$ tiene unidades $[\ell^{-1}t^{-1}]$, donde $[t]$ y $[\ell]$ son las unidades de tiempo y longitud respectivamente; entonces $\|\Psi_z\|^2$ tiene unidades $[\ell^{-1}t^{-\alpha}]$. Como λ tiene unidades de longitud, multiplicamos (57) por c^α , y sustituimos v por $\frac{v}{c}$.

Proposición 1.

El único valor $\alpha \geq 1$ para el cual $\|\Psi_z\|^2$ es invariante bajo la transformada de Lorentz, es $\alpha = 1$. Para $\alpha > 1$, $\|\Psi_z\|^2$ es una función creciente monótona, con velocidad

$v(y) = \left| \frac{y}{y_0} \right|$ del centro de la wavelet, dada por:

$$\|\Psi_z\|^2 = \frac{\Gamma(\alpha)c^\alpha \sinh(\alpha\theta)}{\pi^2(2\lambda)^{\alpha+1} \sinh\theta} \quad (59)$$

donde θ se define por:

$$\frac{v}{c} = \tanh\theta \quad (60)$$

Demostración. Sabemos que v es la tangente hiperbólica de una rotación de un ángulo en la geometría del espacio del tiempo de Minkowsky, lo cual sugiere un cambio de variable (60) en (58), lo que conlleva a (59). Como λ es invariante bajo la transformada de Lorentz, solo θ depende de v en (59). Entonces la expresión es independiente de v si y solo si $\alpha = 1$. Para $\alpha > 1$, sea:

$$f(\theta) = \frac{\sinh(\alpha\theta)}{\sinh\theta} \quad (61)$$

Podemos demostrar que $f(\theta)$ es una función creciente monótona de θ . La derivada de f es:

$$f'(\theta) = \frac{\alpha \sinh \theta \cosh(\alpha\theta) - \cosh \theta \sinh(\alpha\theta)}{\sinh^2 \theta} \quad (62)$$

Entonces, es suficiente demostrar que:

$$\tanh(\alpha\theta) < \alpha \tanh \theta, \quad \theta > 0, \alpha > 1 \quad (63)$$

Si consideramos el hecho de que:

$$\cosh(\alpha\theta) > \cosh \theta, \quad \theta > 0 \quad (64)$$

esto por la monotonía del coseno hiperbólico en $[0, \infty)$, entonces:

$$\operatorname{sech}^2(\alpha\theta) < \operatorname{sech}^2 \theta, \quad \theta > 0 \quad (65)$$

integrando ambos lados sobre $0 < \theta' < \theta$, obtenemos (63). ♦

La expresión (59) puede ser expandida en potencias de $\frac{v}{c}$. Los dos primeros términos son:

$$\|\Psi_z\|^2 = \frac{\Gamma(\alpha + 1)c^\alpha}{\pi^2(2\lambda)^{\alpha+1}} \left[1 + \frac{\alpha^2 - 1}{6} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \quad (66)$$

Las wavelets Ψ_z se comportan como partículas: sus parámetros incluyen posición y velocidad. Las wavelets son una mezcla de los conceptos de partícula y onda.

Supongamos que $\alpha > 1$. Para cualquier $z = (\mathbf{x}, is) \in E$, y considerando toda la familia de wavelets que se pueden obtener de Ψ_z al aplicar la transformada de Lorentz, es decir, obtener a Ψ_z a partir del marco de referencia en todos los posibles estados de movimiento uniforme. Según la proposición 1, Ψ_z tiene menor energía que cualquiera de las

otras wavelets, pues las otras wavelets tienen el mismo valor de $\sqrt{(y')^2} = \lambda = |s|$, pero solo Ψ_z tiene $v = 0$, esto define un marco de referencia único al que podemos interpretar como el marco donde se encuentra el punto medio. Como la transformada de Lorentz no conserva la norma de Ψ_z , la representación de C en H_α no es unitaria para $\alpha > 1$.

Hasta este momento hemos presentado en forma teórica el comportamiento de las wavelets acústicas. Las siguientes gráficas muestran diferentes aspectos de $\Psi(r, t)$ y $\Psi^\pm(r, t)$, para $\alpha = 3, 10, 15$, y 50 . Lo cual nos dará una idea más clara de lo que hemos hablado en este apartado.

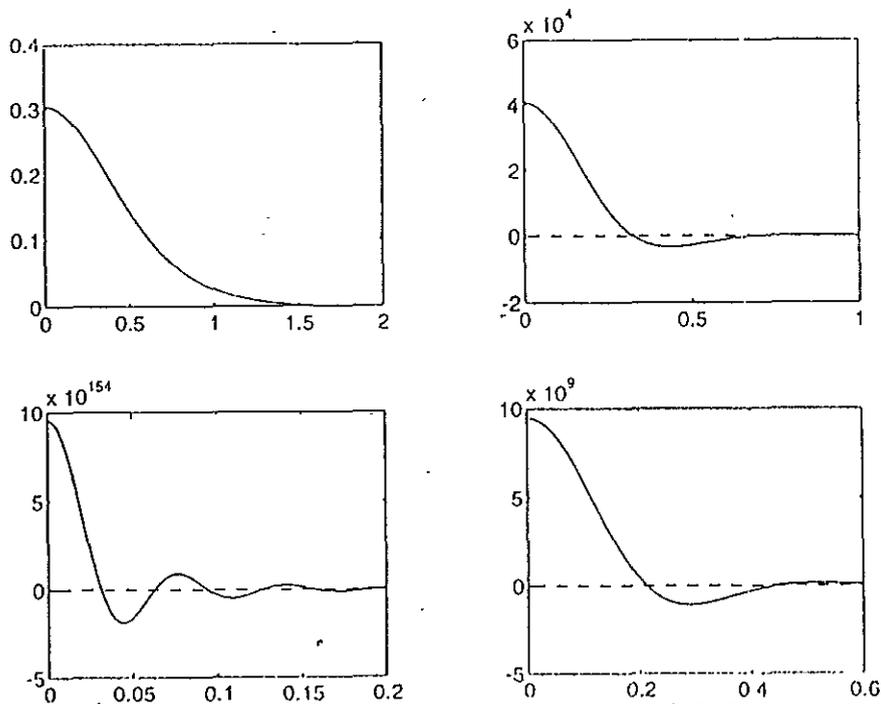


Figura 2. En dirección a las manecillas del reloj, $\Psi(r, 0)$ con $\alpha = 3, 10, 15$, y 50 .

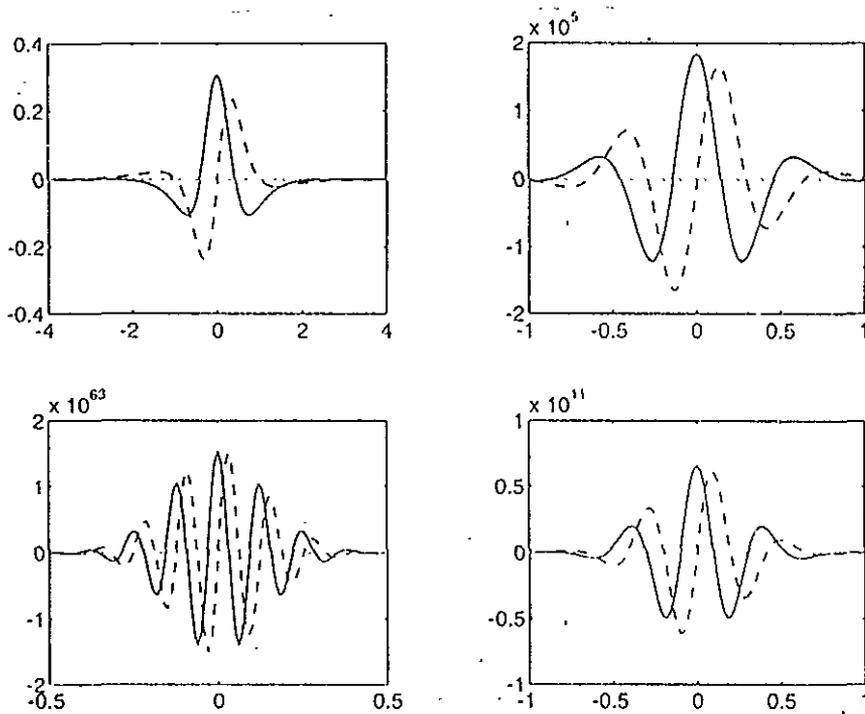


Figura 3. En dirección a las manecillas del reloj, $\Psi(0, t)$ con $\alpha = 3, 10, 15,$ y 50 , la línea sólida es la parte real y la línea punteada es la parte imaginaria.

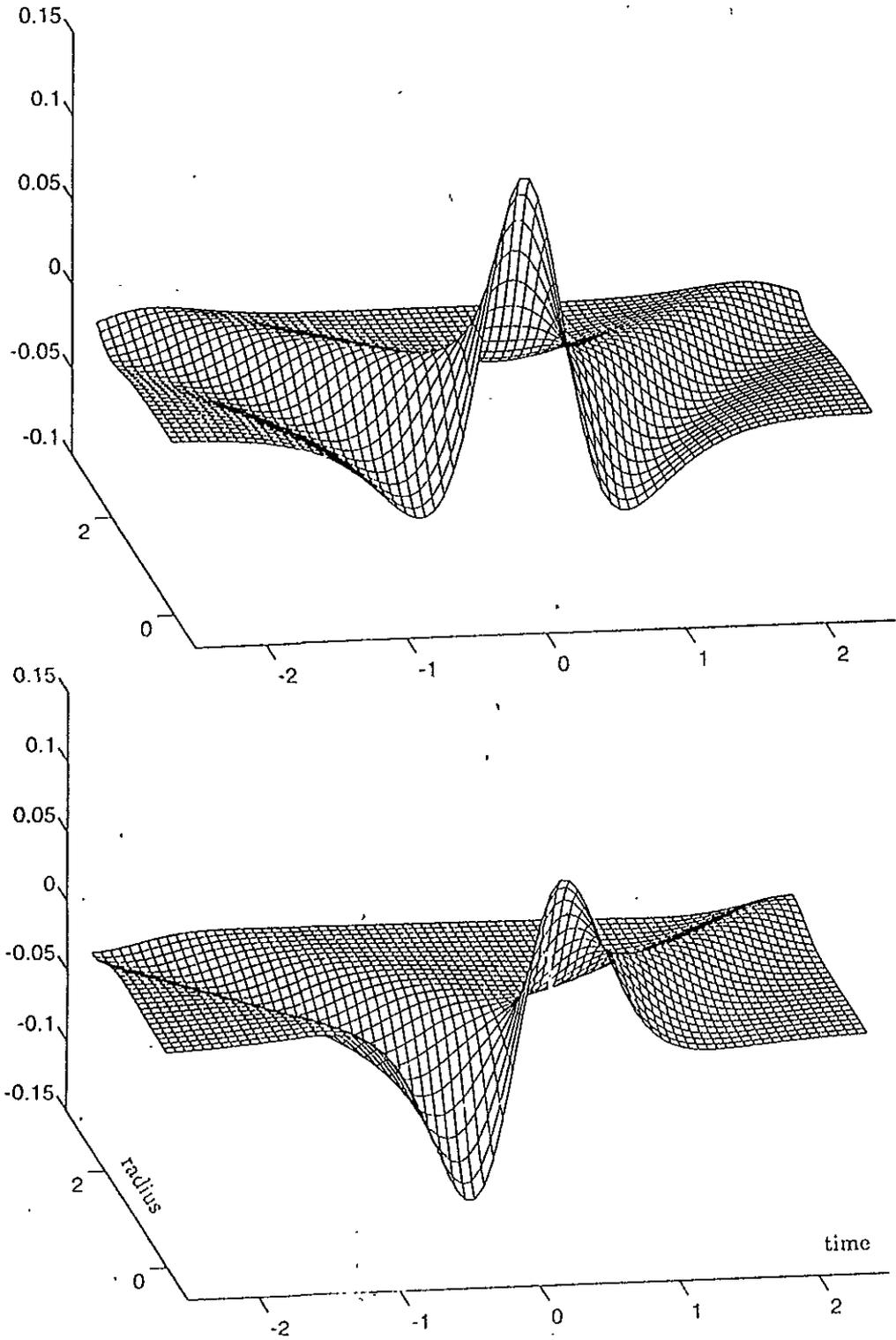


Figura 4. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de $\Psi(r, t)$, con $\alpha = 3$.

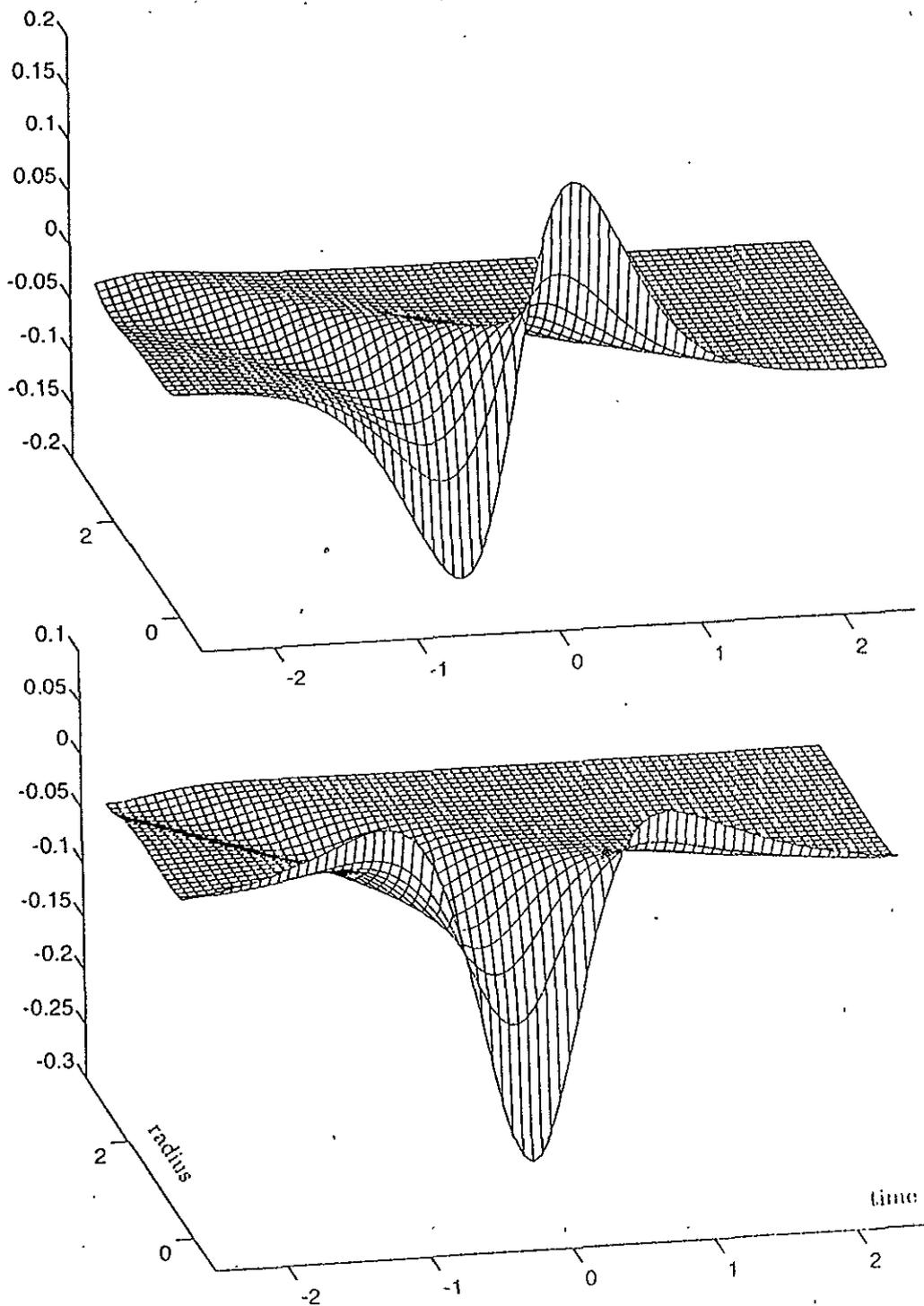


Figura 5. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de la absorción $\Psi(r, t)$ (o detección) con $\alpha = 3$.

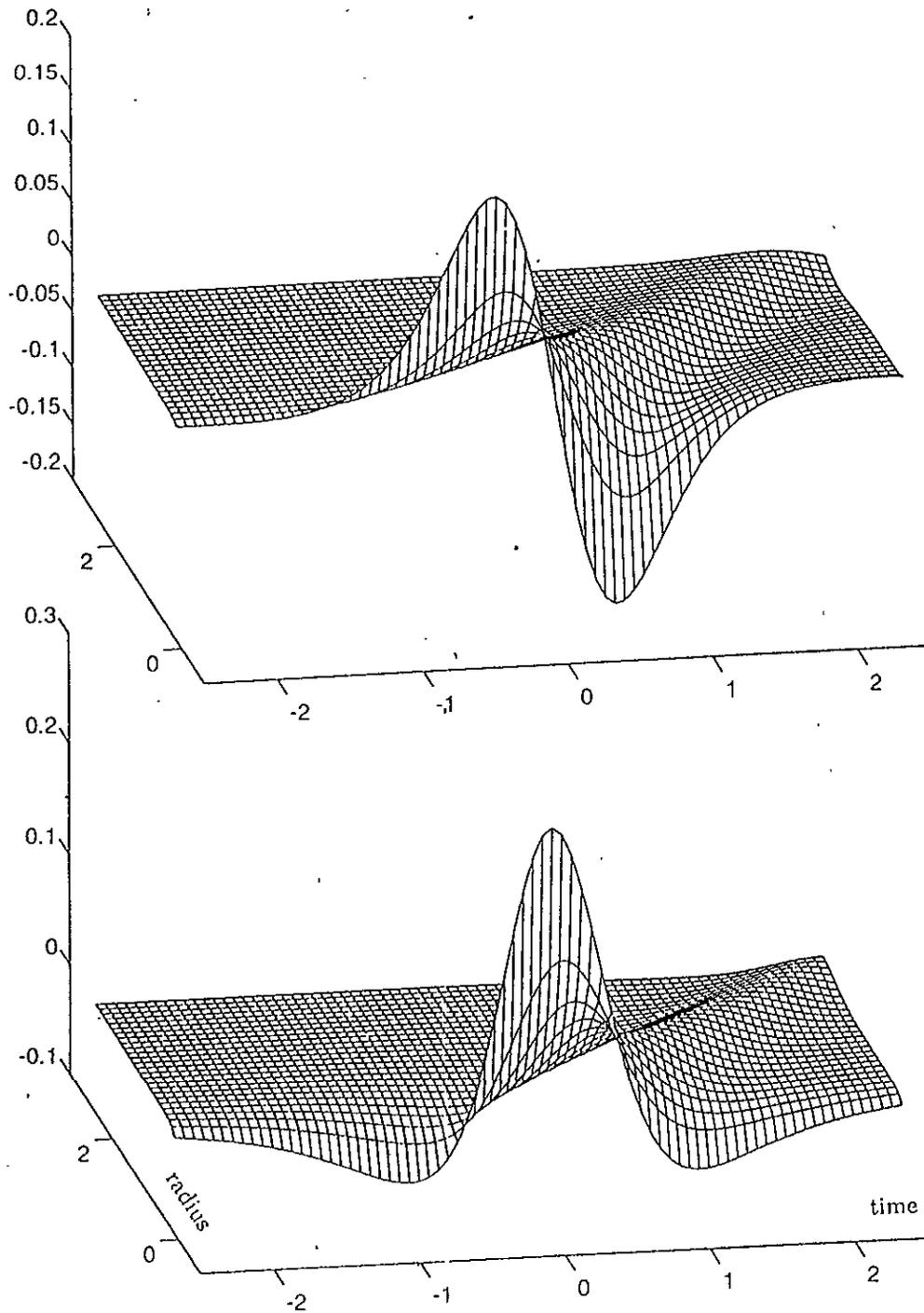


Figura 6. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de la emisión $\Psi^+(r, t)$, con $\alpha = 3$.

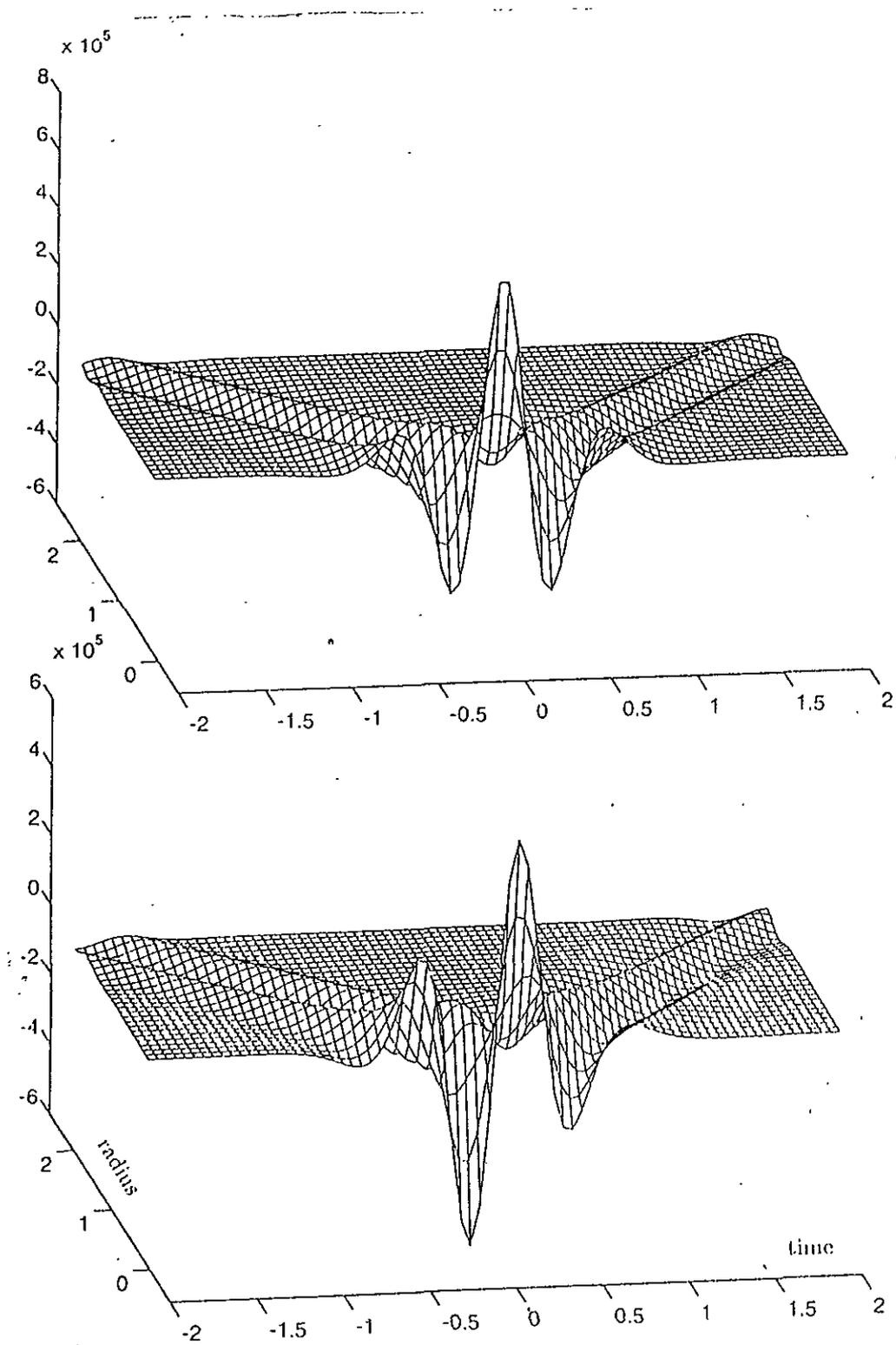


Figura 7. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de la wavelet $\Psi(r, t)$ con $\alpha = 10$.

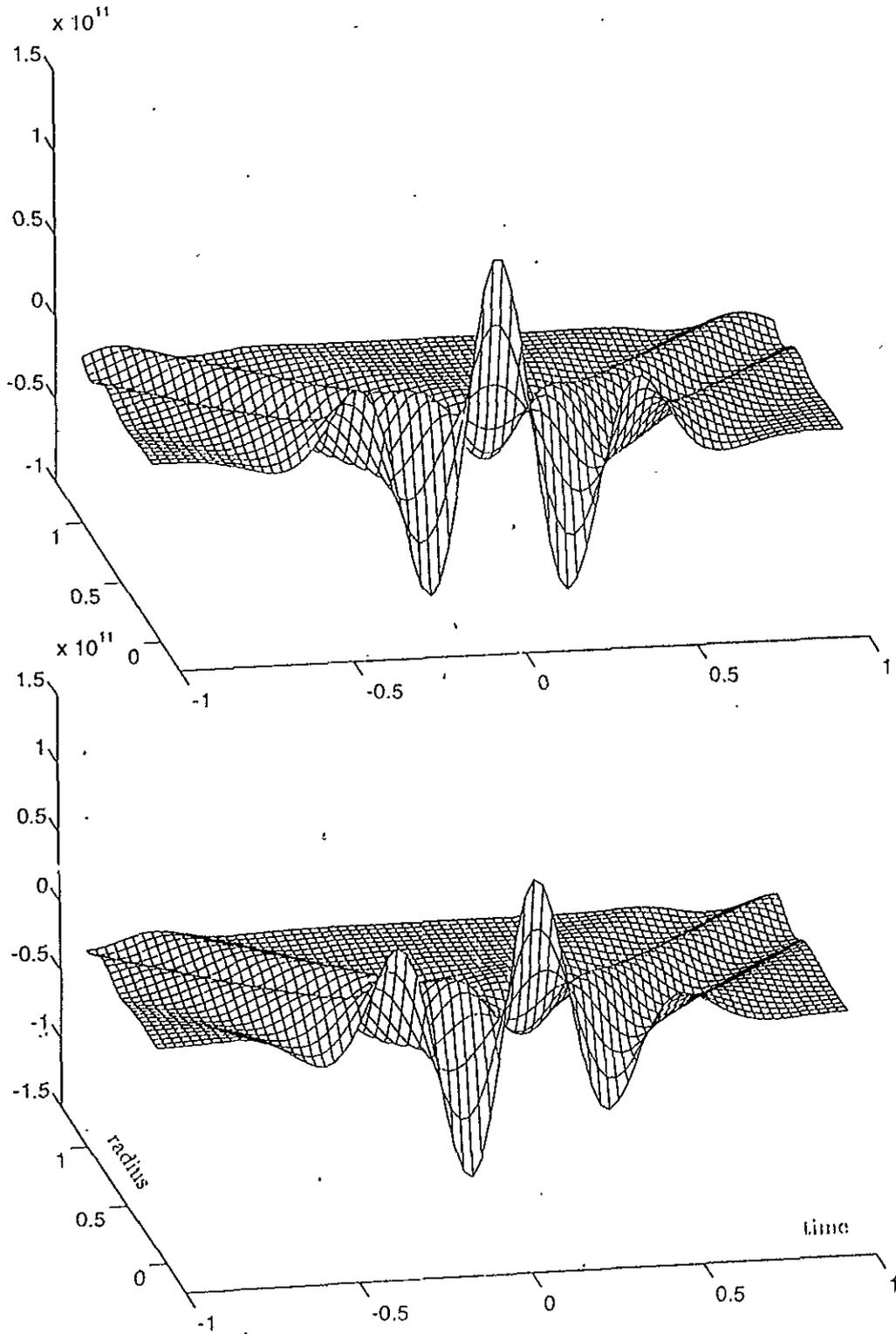


Figura 8. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de la wavelet $\Psi(r, t)$ con $\alpha = 15$.

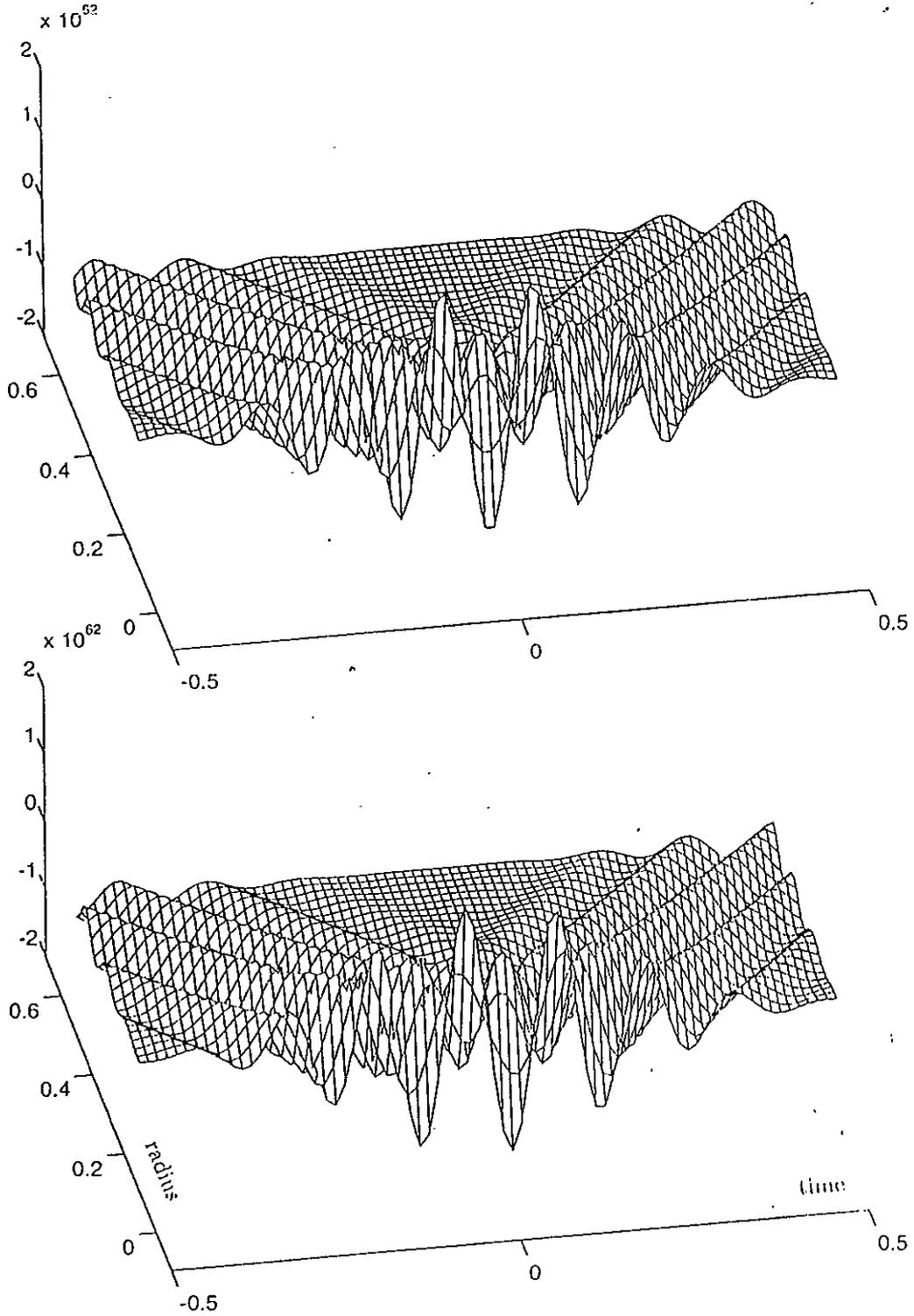


Figura 9. La primera gráfica presenta la parte real y la segunda la parte imaginaria de la wavelet $\Psi(r, t)$ con $\alpha = 50$.

En la figura 2, vea como se presenta una excelente localización en $t = 0$ cuando $\alpha = 3$, también obsérvese que $\Psi(r, 0)$ es real para toda r . Para el caso cuando $r = 0$ (figura 3), obsérvese como incrementa la oscilación y decrece la duración.

La figura 4, es una muestra evidente de cuan eficaz es el análisis wavelet, pues al reconstruir la señal original, esta es casi idéntica. Si observamos en las figura 5 y 6, vemos como se satisface la ecuación de onda, pues si sumáramos $\Psi^-(r, t) + \Psi^+(r, t) = 0$, ambas partes, la real y la imaginaria se anularían.

Finalmente, las figuras 7, 8 y 9, corroboran lo que se ha venido mencionando en el texto, que para valores altos de α la señal oscila con mayor rapidez y mayor decrecimiento (menor duración) en el tiempo, sin que los valores de r y t influyan para hacer esta afirmación.

5. 3. Aplicación de Wavelets a Radares y Dispersión de Señales.

En este apartado presentamos una aplicación de wavelets al análisis de señales de radar y la dispersión de señales electromagnéticas. El principal objetivo dentro del análisis de señales de radar es obtener información acerca de objetos (por ejemplo, la localización y velocidad de un avión) a través de analizar las ondas electromagnéticas reflejadas por este objeto, además de que la información visual se obtiene de analizar las ondas electromagnéticas reflejadas en el espectro visual. La localización de un objeto se puede obtener de medir el tiempo de dilatación τ entre la emisión de la señal y su absorción. Además, el movimiento del objeto produce el efecto Doppler en la absorción en la escala del tiempo, donde el factor de escala s presenta una correspondencia de uno a uno con la velocidad del objeto. La función indeterminada de banda ancha es el resultado de la correlación entre la absorción y una versión dilatada y escalada en el tiempo de una señal emitida cualquiera. Es un máximo cuando la dilatación en el tiempo y el mejor factor de escala corresponden a la absorción, lo cual nos permite determinar s y τ , que a su vez dan una velocidad y localización aproximada del objeto. Cuando la señal emitida ocupa una frecuencia de banda angosta dentro de una frecuencia alta, el efecto Doppler puede ser aproximado a una frecuencia uniforme.

5. 3. 1. Funciones Indeterminadas para Señales en el Tiempo.

Supongamos que queremos encontrar la localización y velocidad de un objeto. Una forma de hacer esto es enviando una onda electromagnética en dirección al objeto y observar el reflejo al origen. La comparación entre la señal emitida y su absorción nos permite determinar la distancia (rango R) del objeto y su velocidad radial v a lo largo de la línea deseada. Este es el problema de radar en su forma más elemental¹.

¹ El análisis wavelet presentado aquí, fue iniciado por Naparst (1988), Auslander y Gertner (1990), y Miller (1991), aunque algunas de las ideas de Swick (1966, 1969) fueron retomadas.

La señal emitida por un radar es una función de tiempo real, esto es, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual representa el voltaje dentro de una antena de transmisión. La antena convierte $\psi(t)$ en una onda electromagnética y dirige esta onda en la dirección deseada (En la fase de búsqueda, todas las direcciones de interés son examinadas, una vez que los objetos son detectados, puede ser localizada su trayectoria, por medio del método aquí descrito). La onda electromagnética emitida puede ser representada como un vector complejo, resultado de haber evaluado la función $F(\mathbf{x}, t) = B(\mathbf{x}, t) + iE(\mathbf{x}, t)$ en el espacio del tiempo, es decir $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$. Por supuesto, sólo los valores de ψ y F en regiones limitadas de \mathbb{R} y \mathbb{R}^4 , respectivamente, son de interés práctico. El punto principal es que la recepción, además de la onda electromagnética, sea convertida por el mismo aparato (una antena en modo receptor) a una señal en el tiempo de valor real $f(t)$, la cual nuevamente presenta un voltaje. Más adelante, demostraremos que $\psi(t)$ y $f(t)$ son representaciones de la onda electromagnética emitida $F(\mathbf{x}, t)$ y su absorción respectivamente.

Aunque pueda parecer que sea necesario presentar el proceso general de transmisión, propagación, reflexión y recepción, para así poder obtener mayor información acerca del rango de velocidad y el proceso de comparación de f y ψ , a la larga este proceso será ignorado. La situación es tan sencilla como una conversación telefónica: $\psi(t)$ realiza una pregunta y $f(t)$ proporciona la respuesta. Para obtener la información deseada, sólo necesitamos dos factores, los cuales surgen de las leyes de propagación y reflexión de ondas electromagnéticas:

- a) Las ondas electromagnéticas se propagan con una velocidad constante c , a la velocidad de la luz ($\approx 3 \times 10^8$ m/sec). Consecuentemente, si el objeto de reflexión se encuentra en reposo y la reflexión ocurre con un retraso R de donde se encuentra el radar, entonces f sufre una dilatación igual al tiempo $\frac{2R}{c}$, necesaria para que la onda haga el viaje completo. Entonces:

$$f(t) = a\psi(t - d), \text{ donde } d \equiv \frac{2R}{c} \text{ si } v = 0 \quad (1)$$

En la expresión anterior, a , representa la reflexión del objeto y la atenuación (pérdida de amplitud) que sufre la señal.

b) Una onda electromagnética reflejada por un objeto en movimiento con una velocidad radial v , sufre un efecto Doppler; esto es, la onda es escalada por el factor $s(v) = \frac{(c+v)}{(c-v)}$ en la reflexión. Entonces, el rango varía con el tiempo de la siguiente manera:

$$R(t) = R_0 + vt \quad (2)$$

Como el rango varía durante el intervalo de observación, ocurre una dilatación en la absorción en el momento t . Entonces:

$$cd(t) = 2R \left(t - \frac{d(t)}{2} \right) = 2R_0 + 2vt - vd(t) \quad (3)$$

lo que conduce a:

$$d(t) = 2 \frac{R_0 + vt}{c + v} \quad (4)$$

que generaliza 1. Cuando sustituimos la expresión anterior en (1), obtenemos:

$$f(t) = a\psi \left(t - \frac{2v}{c+v} t - \frac{2R_0}{c+v} \right) = a\psi \left(\frac{t - \tau_0}{s_0} \right) \quad (5)$$

donde:

$$s_0 \equiv \frac{c+v}{c-v}, \quad \tau_0 \equiv \frac{2R_0}{c-v} \Rightarrow v = \frac{s_0 - 1}{s_0 + 1} c, \quad R_0 = \frac{c\tau_0}{s_0 + 1} \quad (6)$$

Todos los objetos materiales se mueven con velocidad menor a c , entonces $s_0 > 0$ siempre. Si $v > 0$, es decir, el objeto esta en movimiento, entonces f es una versión alargada de ψ . Esto tiene una explicación muy sencilla, ya que cuando $v > 0$, las ondas sucesivas, toman más tiempo en ser recibidas por el objeto, esto es debido a que la separación de las ondas en la absorción es más larga. Similarmente cuando $v < 0$, la señal reflejada es una versión comprimida de ψ . Es evidente que el valor de a depende de la cantidad de ampliaciones realizadas dentro de la absorción. Si $a = s_0^{-1}$, entonces f tiene la misma energía que ψ , es decir $\|f\|^2 = \|\psi\|^2$.

Para toda $\tau \in \mathbb{R}$ y $s > 0$, introduzcamos la notación:

$$\psi_{s,\tau}(t) \equiv s^{\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (7)$$

entonces:

$$f(t) = \psi_{s_0,\tau_0}(t) \quad (8)$$

En el dominio de la frecuencia:

$$\hat{f}(\omega) = s_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \omega \tau_0} \hat{\psi}(s_0 \omega) \quad (9)$$

Si $v > 0$, entonces $s_0 > 1$ y todas las escalas de los componentes en la frecuencia se encontrarán en la escala anterior. De manera similar si $v < 0$, entonces $s_0 < 1$ y las escalas de sus componentes en la frecuencia se encontrarán en la escala superior.

El objetivo es predecir la trayectoria del objeto, y esto va acompañado (con las limitaciones del modelo) de encontrar R_0 y v . Para finalizar, consideremos toda la familia de escalas y traslaciones de ψ :

$$\{\psi_{s,\tau} : s > 0, \tau \in \mathbb{R}\} \quad (10)$$

Debemos entender a $\psi_{s,\tau}$ como una señal a prueba, con la cual compararemos f . Una función de retorno $f(t)$ corresponde a $\psi_{s,\tau}$ al tomar el producto interno con $\psi_{s,\tau}$:

$$\tilde{f}(s, \tau) = \langle \psi_{s,\tau}, f \rangle \equiv \psi_{s,\tau}^* f = \int_{-\infty}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) f(t) dt \quad (11)$$

Sin olvidar que ψ es real. Si fuera compleja, entonces sería necesario usar $\bar{\psi}$ en (11). $\tilde{f}(s, \tau)$ es la función de banda ancha indeterminada de f . Si el modelo (8) es válido para f , entonces:

$$\tilde{f}(s, \tau) = \langle \psi_{s,\tau}, \psi_{s_0,\tau_0} \rangle \quad (12)$$

Por la desigualdad de Schwarz:

$$|\tilde{f}(s, \tau)| \leq \|\psi_{s,\tau}\| \|\psi_{s_0,\tau_0}\| = \|\psi\|^2 \quad (13)$$

siendo igual si y sólo si $s = s_0$ y $\tau = \tau_0$. Por lo tanto, necesitamos maximizar $|\tilde{f}(s, \tau)|$ para hallar s_0 y τ_0 , asumiendo que (8) es válida. Nótese que aunque f y ψ son reales, es suficiente maximizar $\tilde{f}(s, \tau)$ en lugar de $|\tilde{f}(s, \tau)|$.

En general (8) no se podría cumplir por varias razones: La reflexión del objeto podría ser no rígida en diferentes partes con diferente velocidad radial (considérese una mancha). O el objeto aunque sea rígido, podría cambiar su aspecto (orientación con respecto al radar) durante el intervalo de reflexión, por lo que en diferentes partes tiene diferente velocidad radial; o existen diferentes objetos de reflexión, cada uno con su propia velocidad radial. En el presente texto, modelaremos todas estas situaciones asumiendo que existe una función de distribución de reflectores en el plano del tiempo, descrita por una función de densidad $D(s, \tau)$. Entonces (8) se sustituye por:

$$f(t) = \iint \frac{1}{s_0^2} \psi_{s_0, \tau_0}(t) D(s_0, \tau_0) ds_0 d\tau_0 \quad (14)$$

$D(s_0, \tau_0)$ es llamada la distribución de reflexión. En este contexto general, el objetivo es hallar $D(s, \tau)$. Esto, entonces, es el problema inverso a ser resuelto: Conociendo ψ y dado f , encontramos D .

Por las ideas expuestas anteriormente el análisis wavelet es una herramienta natural aquí. $\tilde{f}(s, \tau)$ es la transformada wavelet de f , con ψ como la wavelet madre. Si ψ es válida, esto es, si:

$$C \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\omega|} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (15)$$

entonces f se puede obtener de:

$$f(t) = C^{-1} \iint \frac{1}{s^2} \psi_{s, \tau}(t) \tilde{f}(s, \tau) ds d\tau \quad (16)$$

Comparando (14) con (16), surge una posibilidad de solución al problema inverso:

$$D(s, \tau) = C^{-1} \tilde{f}(s, \tau) \quad (17)$$

es decir, D es la transformada wavelet de $C^{-1}f$. Aunque, esto podría no ser cierto en lo general. (17) implicaría que D se encuentra en el rango de la transformada wavelet con respecto a ψ :

$$D \in \mathfrak{F}_\psi \equiv \{ \tilde{g}: \tilde{g}(s, \tau) \equiv \psi_{s, \tau}^* g: g \in L^2(\mathbb{R}) \} \quad (18)$$

Pero como vimos en el capítulo 1, \mathfrak{F}_ψ es un subespacio cerrado de $L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$ y además, una función $D(s, \tau)$ puede pertenecer a \mathfrak{F}_ψ si y sólo si satisface la condición de consistencia con respecto al Kernel de reproducción K asociado a ψ .

En otras palabras, si $D \in L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$, es decir:

$$\iint \frac{1}{s} |D(s, \tau)|^2 dsd\tau < \infty \quad (19)$$

Entonces D pertenece a \mathfrak{F}_ψ si y sólo si se satisface la integral:

$$D(s, \tau) = \iint \frac{1}{s_0^2} K(s, \tau | s_0, \tau_0) D(s_0, \tau_0) ds_0 d\tau_0 \quad (20)$$

Donde K es el Kernel de reproducción asociado a ψ :

$$K(s, \tau | s_0, \tau_0) \equiv C^{-1} \langle \psi_{s, \tau}, \psi_{s_0, \tau_0} \rangle \quad (21)$$

Si (20) es válida, entonces $D(s, \tau) = \tilde{g}(s, \tau)$ donde $g \in L^2(\mathbb{R})$ esta dada por:

$$g(t) = C^{-1} \iint \frac{1}{s^2} \psi_{s, \tau} D(s, \tau) dsd\tau \quad (22)$$

Debe ser lo suficientemente claro que (20) proporciona una condición necesaria y suficiente para una función indeterminada de banda ancha $D(s, \tau)$ de alguna señal en el tiempo. Dentro de la terminología de radares, $K(s, \tau | s_0, \tau_0)$ es la función de indeterminación de ψ , pues ésta corresponde a una traslación y dilatación de ψ , sobre otra. En contraste, $\tilde{f}(s, \tau)$ es una función híbrida de indeterminación. Entonces, (20) presenta la relación que debe satisfacerse entre la función de indeterminación y la función híbrida de indeterminación.

Retomando (14), observamos que (17) está lejos de una solución única. Razón por la cual, la reflexión D debe satisfacer la condición (20). Si recordamos en el capítulo 1, la proyección ortogonal P_ψ a \mathfrak{F}_ψ en $L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$ es, precisamente, el operador integral en (20):

$$(P_\psi D)(s, \tau) \equiv \iint \frac{1}{s_0^2} K(s, \tau | s_0, \tau_0) D(s_0, \tau_0) ds_0 d\tau_0 \quad (23)$$

La expresión (20) sólo afirma que D pertenece a \mathfrak{F}_ψ si y sólo si $P_\psi D = D$. Un elemento general $D \in L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$ puede ser expresado en forma única como:

$$D(s, \tau) = D_{\parallel}(s, \tau) + D_{\perp}(s, \tau) \quad (24)$$

donde D_{\parallel} pertenece \mathfrak{F}_ψ y D_{\perp} al complemento ortogonal, $\mathfrak{F}_\psi^{\perp}$, de \mathfrak{F}_ψ en $L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$.

Entonces (14) implica que:

$$\begin{aligned} C^{-1} \tilde{f}(s, \tau) &= C^{-1} \psi_{s, \tau}^* f = \iint \frac{1}{s_0^2} K(s, \tau | s_0, \tau_0) D(s_0, \tau_0) ds_0 d\tau_0 = \\ &= (P_\psi D)(s, \tau) = D_{\parallel}(s, \tau) \end{aligned} \quad (25)$$

La expresión anterior es la correcta sustitución de (17), ya que la expresión (17) no asume que $D \in \mathfrak{F}_\psi$. La combinación de (24) y (25) proporciona una solución parcial al problema inverso:

La solución más general de $D(s, \tau)$ de (14) en $L^2\left(\frac{dsd\tau}{s^2}\right)$ está dada por:

$$D(s, \tau) = C^{-1} \tilde{f}(s, \tau) + h(s, \tau) \quad (26)$$

donde $h(s, \tau)$ es una función en $\mathfrak{F}_\psi^{\perp}$, es decir:

$$\iint \frac{1}{s_0} K(s, \tau | s_0, \tau_0) h(s_0, \tau_0) ds_0 d\tau_0 = 0 \quad (27)$$

El problema inverso no tiene, entonces, solución única si sólo una señal emitida es usada. Hasta el momento, hemos usado una función de una variable independiente, podemos determinar una función de dos variables independientes. Esto sugiere usar un conjunto de wavelets $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \dots$ ¹. Entonces la generalización de la expresión (25) es:

$$P_{\psi^k} D = C_k^{-1} \tilde{f}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

donde $\tilde{f}^k(s, \tau) \equiv \langle \psi_{s, \tau}^k, f^k \rangle$ es la función indeterminada de absorción $f^k(t)$ de $\psi^k(t)$ y P_{ψ^k} es la proyección ortogonal al rango de la transformada wavelet asociada a ψ^k . Aunque varios esquemas asumen que la función de distribución $D(s, \tau)$ tiene un objetivo significativo en el sentido de que la misma $D(s, \tau)$ proporciona todas las absorciones f_k de sus señales ψ^k . Esta no es una razón a priori de que deba ser así. Cualquier función finita, y en particular, cualquier absorción $f(t)$ puede ser expresada en la forma (14) para algunos coeficientes $D(s, \tau)$, $D = C^{-1} \tilde{f}$. La afirmación de que una función de coeficientes universal proporciona todas las absorciones además de una exposición física, será examinada a la luz de las leyes de propagación y dispersión de ondas electromagnéticas.

El término "función indeterminada" dentro del área de radares², usualmente se refiere a las funciones indeterminadas de banda angosta, las cuales se relacionan con las versiones de banda ancha de la siguiente manera: Ésta última puede ser expresada en el dominio de la frecuencia al aplicar la identidad de Parseval a la definición (11):

$$\tilde{f}(s, \tau) = \langle \hat{\psi}_{s, \tau}, \hat{f} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{s} e^{2\pi i \omega \tau} \hat{\psi}(s\omega) \hat{f}(\omega) d\omega \quad (29)$$

¹ Esto fue sugerido por Bernfeld en 1984, su aportación fue dentro del área de funciones de banda angosta, donde sugiere usar una familia de notas. Dentro del área de funciones de banda ancha, las principales aportaciones fueron hechas por Maas (1992) y Tewfik y Hosur (1994).

² - Woodward PM, Probability and Information Theory, with Applications to Radar, Pergamon Press, London, 1953.

- Cook CE and Bernfeld M, Radar Signals, Academic Press, New York; republished by Artech House, Norwood, MA, 1993 (1967).

- Barton DK, Modern Radar System Analysis, Artech House, Norwood, MA, USA, 1988.

Todos los objetos de interés viajan a una velocidad mucho menor que la de la luz. entonces

$$\frac{|v|}{c} \ll 1 \text{ y:}$$

$$s \equiv \frac{c+v}{c-v} \approx 1 + \frac{2v}{c}, \quad \tau \equiv \frac{2R_0}{c-v} \approx \frac{2R_0}{c} \quad (30)$$

Si la máxima velocidad esperada es $0 < v_{\max} \ll c$, y el máximo rango del radar es R_{\max} , entonces:

$$|s - 1| \leq \frac{2v_{\max}}{c}, \quad |\tau| \leq \frac{2R_{\max}}{c} \quad (31)$$

Por lo cual, en la práctica, sólo $\tau \approx 0$ y $s \approx 1$ son de interés y podemos asumir que $D(s, \tau)$ está ligeramente fuera de la vecindad $(1, 0)$. El factor s_0^{-2} en (14) es sólo de interés académico. Supóngase ahora, que $\hat{\psi}(\omega)$ se concentra principalmente en la banda:

$$0 < \alpha \leq |\omega| \leq \gamma, \text{ donde } \frac{\gamma - \alpha}{\gamma + \alpha} \ll 1 \quad (32)$$

El ancho de banda β y la frecuencia central ω_c están definidos por:

$$\beta \equiv \gamma - \alpha, \quad \omega_c = \frac{\alpha + \gamma}{2} \quad (33)$$

y (32) significa que $\beta \ll 2\omega_c$. Una señal ψ que satisface esta condición será llamada señal de banda angosta. Debemos poner especial atención a cómo un mensaje de ligera variación puede ser codificado a una frecuencia superior ω_c . Esto es, cómo el sonido puede ser transformada a una onda de radio. La integral (29), se extiende sobre dos intervalos de frecuencia:

$$\omega_c - \frac{\beta}{2} = \alpha \leq |s\omega| \leq \gamma = \omega_c + \frac{\beta}{2} \quad (34)$$

Ahora:

$$s\omega \approx \left(1 + \frac{2v}{c}\right)\omega = \omega + \frac{2v}{c}\omega \quad (35)$$

Si ψ es una señal de banda estrecha, el segundo término puede ser aproximado si:

$$\omega \rightarrow \begin{cases} \omega_c & \text{si } \omega > 0 \\ -\omega_c & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (36)$$

Entonces:

$$s\omega \approx \begin{cases} \omega + \phi & \text{si } \omega > 0 \\ \omega - \phi & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad \text{donde } \phi \equiv \phi(v) = \frac{2\omega_c v}{c} = \frac{2v}{\lambda_c} \quad (37)$$

donde λ_c es la longitud de onda. Esto es, para una señal de banda angosta el efecto Doppler de escalación puede ser aproximado a una traslación Doppler, que transforma los componentes de la frecuencia positiva en $\phi(v)$ y las de la frecuencia negativa en $-\phi(v)$. Podemos entonces expresar la función de indeterminación en términos de ϕ y τ en lugar de s y τ . Porque las frecuencias positiva y negativa sufren una traslación Doppler contraria, esto es llamado aproximación a la banda angosta, la cual es considerablemente más simple si se ignora la banda de frecuencia negativa. Esto es hecho si sustituimos:

$$\hat{\psi}(\omega) \rightarrow 2\theta(\omega)\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 2\hat{\psi}(\omega) & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (38)$$

La inversa de la transformada de Fourier del lado derecho de la expresión (38) es la señal analítica de Gabor de $\psi(t)$, la cual es necesariamente de valor complejo y su parte real es $\psi(t)$. Como $\hat{\psi}(-\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$, no se pierde información en el proceso. Además, como el espectro restante se forma de una banda de frecuencia angosta alrededor de ω_c , el análisis numérico será mucho más simple si la señal analítica es demodulada, es decir si la traslación de la frecuencia superior es removida, entonces sólo el mensaje permanece, lo

que conduce a trasladar al espectro de la derecha de ω_c . Entonces podemos definir una nueva señal compleja $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = 2e^{-2\pi i\omega_c t} \int_0^{\infty} e^{2\pi i\omega t} \hat{\psi}(\omega) d\omega \quad (39)$$

La absorción $f(t)$ tiene una estructura de banda similar a la de $\psi(t)$, pues la traslación de Doppler es muy pequeña comparada con la de la frecuencia. Por lo tanto podemos aplicarle las mismas operaciones: Filtrar la banda de frecuencia negativa y demodular después, lo que nos proporciona la señal compleja:

$$F(t) = 2e^{-2\pi i\omega_c t} \int_0^{\infty} e^{2\pi i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (40)$$

Ψ y F contienen la misma información que ψ y f pero tienen la ventaja de una menor oscilación y están sometidas a la traslación Doppler (en lugar de escalaciones de Doppler, las cuales actúan en forma opuesta en la frecuencia negativa). Si $f = \psi_{s, \tau}$, entonces para $\omega > 0$ (37) es ahora:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{s} e^{-2\pi i\omega\tau} \hat{\psi}(s\omega) = e^{-2\pi i\omega\tau} \hat{\psi}(\omega + \phi) \quad (41)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} F(t) &\approx 2e^{-2\pi i\omega_c t} \int_0^{\infty} e^{2\pi i\omega(t-\tau)} \hat{\psi}(\omega + \phi) d\omega = \\ &= 2e^{-2\pi i\omega_c t} e^{-2\pi i\phi(t-\tau)} \int_0^{\infty} e^{2\pi i\omega(t-\tau)} \hat{\psi}(\omega) d\omega = \\ &= 2e^{-2\pi i\omega_c t} e^{-2\pi i\phi(t-\tau)} \int_0^{\infty} e^{2\pi i\omega(t-\tau)} \hat{\psi}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (42)$$

como $\hat{\psi}(\omega)$ no es válida para $|\omega| \leq |\phi|$. Entonces:

$$F(t) \approx e^{-2\pi i\theta} \Psi_{\phi, \tau}(t) \quad (43)$$

donde:

$$\Psi_{\phi, \tau}(T) = e^{-2\pi i \phi t} \Psi(t - \tau), \quad \theta \equiv \theta(\phi, \tau) = (\omega_c - \phi)\tau \quad (44)$$

El factor de fase $e^{-2\pi i \theta}$ es independiente del tiempo, por lo que éste no afecta el análisis y puede ser ignorado, razón por la cual la reflexión de un punto reflector puede representarse por $\Psi_{\phi, \tau}$ en la aproximación de la banda angosta. Para una $f(t)$ definimos la función indeterminada híbrida de banda angosta en términos de $F(t)$ como¹:

$$\tilde{F}(\phi, \tau) \equiv \Psi_{\phi, \tau}^* F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \phi t} \bar{\Psi}(t - \tau) F(t) dt \quad (45)$$

Si $f = \psi_{s_0, \tau_0}$, entonces $F = e^{-2\pi i \theta_0} \Psi_{\phi_0, \tau_0}$, donde:

$$s_0 = 1 + \frac{2v_0}{c}, \quad \phi_0 = \frac{2v_0}{\lambda_c}, \quad \theta_0 = (\omega_c - \phi_0)\tau_0 \quad (46)$$

Entonces:

$$|\hat{F}(\phi, \tau)| = \left| \langle \Psi_{\phi, \tau}, \Psi_{\phi_0, \tau_0} \rangle \right| \leq \|\Psi\|^2 \quad (47)$$

siendo igual si y sólo si $\tau = \tau_0$ y $\phi = \phi_0$, es decir $v = v_0$. Lo que proporciona un método para determinar el rango y la velocidad de un punto reflector. Como en el caso de banda ancha, una absorción general es modelada al asumir que una función de distribución de reflectores es descrita como una función de dilatación y traslación de Doppler:

$$F(t) = \iint \Psi_{\phi, \tau}(t) D_{BA}(\phi, \tau) d\phi d\tau \quad (48)$$

¹ En muchos textos, la función indeterminada de banda angosta se define como $|\tilde{F}(\phi, \tau)|^2$ en lugar de $\tilde{F}(\phi, \tau)$. Las funciones indeterminadas de banda ancha son reales cuando las señales son reales, entonces pueden ser maximizadas directamente al hallar la correspondencia entre la dilatación y la escalación. Las versiones de bandas angostas, por otro lado, son necesariamente complejas y entonces sus módulos deben ser maximizados.

La función de distribución de banda angosta $D_{BA}(\phi, \tau)$ puede relacionarse con la función de distribución de banda ancha $D(s, \tau)$ sólo que ésta no cuenta con el factor de fase $e^{-2\pi i\theta}$ y $d\phi = \omega_c ds$. La expresión (48) cuenta con un problema inverso: Dado F , encontrar D_{BA} . Sólo el análisis wavelet fue usado para analizar el problema inverso de banda ancha. Esto se basa en observar que $\tilde{F}(\phi, \tau)$ es la transformada de Fourier con ventana de F con respecto a la ventana compleja $\Psi(t)$. La función de autoindeterminación correspondiente es:

$$K(\phi, \tau | \phi_0, \tau_0) \equiv C_{\Psi}^{-1} \langle \Psi_{\phi, \tau}, \Psi_{\phi_0, \tau_0} \rangle, \quad C_{\Psi} \equiv \|\Psi\|^2 \quad (49)$$

que representa al Kernel de reproducción asociado al marco $\{\Psi_{\phi, \tau}\}$. Todas las observaciones hechas anteriormente, acerca de la existencia y unicidad de soluciones del problema inverso de banda ancha son aplicadas ahora al caso de banda angosta, ya que la estructura matemática en ambos casos, es idéntica, como se planteo en el capítulo 1. En particular, la solución más general de (48) es:

$$D_{BA}(\phi, \tau) = C_{\Psi}^{-1} \tilde{F}(\phi, \tau) + H(\phi, \tau) \quad (50)$$

donde $H(\phi, \tau)$ es una función del complemento ortogonal $\mathfrak{I}_{\Psi}^{\perp}$ de \mathfrak{I}_{Ψ} de la transformada de Fourier con ventana (con respecto a Ψ) en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Nuevamente la solución no es única y es necesario usar una variedad de señales emitidas para obtener una singular.

El retomar las funciones de banda ancha, se debe a que:

- a) Las ondas acústicas satisfacen la ecuación de onda y se propagan a una velocidad constante. Consecuentemente, las funciones indeterminadas juegan un papel importante en el análisis de sonar y radar. Sin embargo, el análisis de radar usualmente involucra señales de banda angosta, lo que no necesariamente ocurre en el análisis sonar pues las frecuencias involucradas son mucho menores y la velocidad del sonido es mucho menor que la de la luz.

- b) A diferencia de las señales de banda angosta, el formalismo asociado a las funciones indeterminadas de banda ancha es conceptualmente más simple e intuitivo que el asociado a las versiones de banda angosta. La relación de la velocidad con el factor de escala es directa y clara, ya que su relación con la frecuencia Doppler es más convolucionada, dependiendo de cómo ésta se transforma en el dominio de la frecuencia. Además, la eliminación de la frecuencia negativa y la subsecuente demodulación hace que $\tilde{F}(s, \tau)$ sea menos intuitiva y directa al objeto que $\tilde{f}(s, \tau)$.
- c) Las aceleraciones son simples de describir en el dominio del tiempo, pero muy complicadas en el dominio de la frecuencia. Entonces, una extensión del concepto de funciones indeterminadas que debe incluir aceleraciones, es más probable que exista en la escala del tiempo y no en la escala del tiempo y la frecuencia.

Muchos tratados de análisis de radar usan funciones indeterminadas de banda angosta sin referirse a las versiones de banda ancha. Una de las razones prácticas, es porque la demodulación de señales oscila en forma más lenta que las originales, lo que permite un manejo más sencillo. Otra razón es que el análisis wavelet es muy reciente y consecuentemente poco conocido. Una tercera es que antes de contar con la velocidad de las computadoras, las funciones indeterminadas eran evaluadas en forma rutinaria por métodos analógicos, usando bancos de filtros, los cuales son más fáciles de tratar con la transformada de Fourier con ventana que con la transformada wavelet, pues la primera requiere de modulaciones y la segunda de escalaciones.

5. 3. 2. Dispersión de Wavelets Electromagnéticas.

Cuando el proceso físico de propagación y dispersión es ignorado, el efecto neto de un punto en la representación $\psi(t)$ que exhibe la onda electromagnética emitida es la transformación:

$$\psi(t) \rightarrow \psi_{s,\tau}(t) \equiv s^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (51)$$

donde τ es la dilatación y $s = \frac{(c-v)}{(c+v)}$ es el factor de escala introducido por la velocidad del objeto. Dentro del análisis de bandas angostas, la expresión anterior se reduce a:

$$\Psi(t) \rightarrow \Psi_{\phi,\tau}(t) \equiv e^{-2\pi i \phi t} \Psi(t-\tau) \quad (52)$$

donde $\phi = \frac{2v}{\lambda_c}$ es la traslación Doppler en la frecuencia, que se introduce en la banda de frecuencia positiva por la velocidad, y hemos ignorado el factor de fase $e^{-2\pi i \theta(\phi,\tau)}$ en (43). $\Psi(t)$ es la señal analítica de Gabor demodulada, de $\psi(t)$.

En cada caso, contamos con un conjunto de operaciones que actúan sobre las señales: En el primer caso son traslaciones y escalaciones, mientras que en el segundo, son traslaciones y modulaciones.

Para cualquier señal de energía finita $f(t)$, definamos $U_{s,\tau}f$ y $W_{\phi,\tau}f$ como:

$$(U_{s,\tau}f)(t) \equiv s^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (W_{\phi,\tau}f)(t) \equiv e^{-2\pi i \phi t} f(t-\tau) \quad (53)$$

de donde:

$$\psi_{s,\tau} = U_{s,\tau}\psi, \quad \Psi_{\phi,\tau} = W_{\phi,\tau}\Psi \quad (54)$$

$U_{s,\tau}$ y $W_{\phi,\tau}$ son operadores en $L^2(\mathbb{R})$ invertibles, por lo cual conservan la norma:

$$\|U_{s,\tau}f\|^2 = \|f\|^2 \quad \text{y} \quad \|W_{\phi,\tau}f\|^2 = \|f\|^2 \quad (55)$$

Polarizándolas, observamos que conservan el producto interno, y concluimos que son unitarios:

$$U_{s,\tau}^* = U_{s,\tau}^{-1}, \quad W_{\phi,\tau}^* = W_{\phi,\tau}^{-1} \quad (56)$$

Además, fácilmente podemos verificar que en cada caso, aplicando consecutivamente dos veces el operador, es equivalente a aplicarlo una sola vez. Esto es:

$$U_{s',\tau'} U_{s,\tau} = U_{s',s,s'\tau+\tau'}, \quad W_{\phi',\tau'} W_{\phi,\tau} = e^{-2\pi i \phi \tau'} W_{\phi'+\phi,\tau'+\tau} \quad (57)$$

Como $U_{1,0}$ es el operador identidad, $U_{\frac{1}{s},-\frac{\tau}{s}}$ es el inverso de $U_{s,\tau}$. Ya que los $U_{s,\tau}$ forman un grupo, los productos e inversos de los operadores U son U . De hecho, los índices (s, τ) forman un grupo, llamado grupo afín o grupo $ax + b$, denotado por A . El cual consiste del medio plano $\{(s, \tau) \in \mathbb{R}^2 : s > 0\}$ que procede sobre la variable del tiempo por una traslación afín:

$$t \rightarrow (s, \tau)t \equiv st + \tau \quad (58)^1$$

Dos transformaciones consecutivas dan:

$$(s', \tau')(s, \tau)(t) = (s', \tau')(st + \tau) = (s's)t + (s'\tau + \tau') \quad (59)$$

lo que implica que la regla de multiplicación en A , es:

$$(s', \tau')(s, \tau) = (s's, s'\tau + \tau') \quad (60)$$

La expresión (57) demuestra que las U satisfacen la condiciones de grupo así como los elementos de A :

$$U_{g'} U_g = U_{g'g}, \quad g', g \in A \quad (61)$$

Esto es, la forma de actuar de (s, τ) en el tiempo $t \in \mathbb{R}$ es por medio de una inducción de $U_{s,\tau}$ en las señales $f \in L^2(\mathbb{R})$. Podríamos decir que la correspondencia $U: g \rightarrow U_g$ (un mapeo

¹ En algunas ocasiones utilizaremos $g = (s, \tau)$ para abreviar la notación.

del tiempo a las señales) es una representación de A en $L^2(\mathbb{R})$. Además de que cada U_g es un operador unitario, esta representación es unitaria. Otra importante propiedad de la representación es que, según (54), todas las wavelets representadas, se obtienen de aplicarle a la wavelet madre U :

$$\psi_g = U_g \psi \quad (62)$$

Consecuentemente:

$$U_{g'} \psi_{g'} = U_{g'} U_g \psi = U_{g'g} \psi = \psi_{g'g} \quad (63)$$

Es decir, transformaciones afines, como representaciones en $L^2(\mathbb{R})$ por U , mapean wavelets a wavelets transformado sus índices. Observándose que $(s\tau)^{-1}t = \frac{(t-\tau)}{s}$. U_g actúa en las funciones aplicándose inversamente en el argumento:

$$(U_g f)(t) = s^{-\frac{1}{2}} f(g^{-1}t), \quad g = (s, \tau) \quad (64)$$

El factor de fase en la segunda ecuación de (57) no permite satisfacer las condiciones para que W sea un grupo. Por ejemplo, el inverso de $W_{\phi, \tau}$ no pertenece a W , aunque $\phi\tau$ es entero, ya que el factor de fase no permite la existencia de $W_{-\phi, -\tau}$ que es la única posibilidad para el inverso de $W_{\phi, \tau}$. Desde este punto de vista, W es más complicado que U . Esto es debido a las repetidas transformaciones aplicadas a las señales para ser llevadas de frecuencia de banda ancha a frecuencia de banda angosta. Por no ser objetivo de esta tesis el análisis de frecuencias de banda ancha o angosta, no adentraremos más en este punto. Sólo queremos hacer notar que el análisis de frecuencia de banda ancha es conceptualmente más simple que su aproximación a una banda angosta¹.

Los operadores $U_{s, \tau}$ y $W_{\phi, \tau}$ actúan en funciones abiertas, esto es en señales cuya única condición es el de ser de energía finita, aunque su importancia radica en el hecho de

¹ El conjunto W puede ser un grupo al incluir un factor de fase arbitrario $e^{2\pi i \lambda}$, lo que implica que (ϕ, τ) es ahora (λ, ϕ, τ) , lo que extiende el conjunto de índices a un grupo conocido como el grupo de Weyl - Heisenberg \mathcal{WH} , el cual se relaciona con A por un proceso de contracción.

Si las traslaciones se denotan por $T_b x = x + b$ entonces las transformaciones adaptadas especiales son el resultado de una composición $C_b \equiv J T_b J$; es decir:

$$C_b x = J \left(\frac{x}{x \cdot x} + b \right) = \frac{\frac{x}{x \cdot x} + b}{\left(\frac{x}{x \cdot x} + b \right)^2} = \frac{x + (x \cdot x)b}{1 + 2b \cdot x + (b \cdot b)(x \cdot x)}, \quad b \in \mathbb{R}^4 \quad (70)$$

Como C_b es no lineal, ésta mapea de subconjuntos planos en \mathbb{R}^4 a curvas en \mathbb{R}^4 . Dependiendo de cómo se elija b , C_b puede ser interpretada como un impulso hacia un marco de referencia acelerado. Esto es similar a como las transformaciones de Lorentz (lineales) son impulsadas a un marco de referencia de movimiento uniforme. Esto puede ser utilizado para estimar la aceleración de un objeto, así como las transformaciones de Lorentz son usadas para estimar la velocidad.

De esta manera, hemos llegado a un grupo adaptado C como un modelo que combina propagación y dispersión elemental. Para que este modelo sea útil debemos saber cómo las transformaciones adaptadas afectan las ondas electromagnéticas. Esto es, necesitamos una representación de C en \mathbb{H} . Además, queremos que C en \mathbb{H} conserve las normas de soluciones de $\|F\|$, lo cual implica que sea unitario. Una representación unitaria de C es análoga a la representación del grupo afín. Cada transformación adaptada es un mapeo $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, no necesariamente lineal porque incluye una transformación adaptada especial como (70). g puede extenderse a un mapeo único en el espacio del tiempo complejo T , es decir:

$$g: T \rightarrow T \quad (71)$$

Por ejemplo, una transformación de Poincaré actúa en $z = x + iy \in T$ como:

$$(\Lambda, b)z = \Lambda z + b = (\Lambda x + b) + i\Lambda y \quad (72)$$

y una transformación adaptada especial es como (70) pero ahora en lugar de x , z . De hecho, la acción de g en T es similar a su acción en \mathbb{R}^4 , pues este último es singular debido

$$(U_g F)(x) = M_g(x)F(g^{-1}x) \quad (76)$$

Aunque $M_g(x)$ (a diferencia de $M_g(z)$) cuenta con singularidades, debido a la singularidad natural de la transformación adaptada especial en \mathbb{R}^4 (el conjunto singular tiene métrica cero), entonces (76) define una representación unitaria en H). Esto significa que desde un punto de vista objetivo, no existe diferencia absoluta entre el sistema coordenado cartesiano en \mathbb{R}^4 y su imagen bajo g .

Podemos ahora obtener el efecto de C en las wavelets. Sea $g \rightarrow g^{-1}$ en (74) y usando $\tilde{F}(z) = \Psi_z^* F$, tenemos:

$$\Psi_z^* U_{g^{-1}} F = M_{g^{-1}}(z) \Psi_{gz}^* F \quad (77)$$

Eliminando F y tomando los adjuntos:

$$U_{g^{-1}}^* \Psi_z = \Psi_{gz} M_{g^{-1}}(z)^* \quad (78)$$

Pero U_g es unitario, por lo que $U_{g^{-1}}^* = U_g$. Lo que conduce a:

$$U_g \Psi_z = \Psi_{gz} M_{g^{-1}}(z)^* \quad (79)$$

que generaliza (63) de representaciones a wavelets físicas. Obsérvese que la polarización de la matriz M opera sobre las wavelets por la derecha. Además de esto, U_g procede en Ψ_z sólo el transformar el índice z por gz lo que significa que U_g no sólo cambia el punto focal x de Ψ_{x+iy} , sino también su velocidad central $v = \frac{y}{s}$, y la escala $|s|$. Entonces U_g impulsa Ψ_z a transformar las coordenadas de su punto focal y simultáneamente la velocidad / escala del vector. Las traslaciones por otro lado, existen sólo en x pues $z + b = (x + b) + iy$.

Para que un evento de dispersión sea "elemental", ambas, la onda y la dispersión deben ser elementales en ciertos sentidos. En el caso de las representaciones, las ondas

CONCLUSIONES

Uno de los objetivos de este trabajo fue el de presentar al Análisis con base en la Teoría de Wavelets, como un análisis alternativo al Análisis de Fourier, el presente texto presenta y demuestra las enormes ventajas de éste análisis con respecto al segundo. Es evidente que no es un análisis de fácil digerimiento, lo cual no necesariamente debe ser un obstáculo para su estudio. Esto se debe a que no existe en México una bibliografía extensa y fácil de asimilar para iniciar su estudio, a pesar de los enormes avances científicos que se han suscitado en nuestro país.

Otro objetivo planteado al inicio del presente trabajo, fue el de difundir el estudio de la teoría de Wavelets. Consecuentemente, esta tesis es una tesis de difusión, la cual pretende proporcionar las herramientas necesarias para poder llevar a cabo el estudio del análisis con base en la teoría de wavelets. Dicho objetivo se cumplió e incluso se superó, pues se presentan diferentes aplicaciones de este análisis, las cuales nos permiten ver las ventajas y desventajas de este método y así poder hacer un estudio más completo lo que nos permitirá ver la importancia de que este análisis sea difundido dentro de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación.

Es evidente la gran eficacia y eficiencia del análisis wavelet, pues la manera en que hace el tratamiento digital de imágenes es mucho más satisfactorio que otro tipo de análisis, incluso el JPEG, el cual actualmente es considerado uno de los métodos de compactación de imágenes más eficaz.

La compresión de imágenes es una de las pocas áreas que ha recibido una respuesta comercial suficientemente amplia, lo que garantizará la adopción de nuevos y mejores estándares.

A diferencia de la compresión de imágenes, los formatos de sonido se encuentran en una etapa de desarrollo más temprana que el de las imágenes, razón por la cual los esfuerzos están concentrados en homologar el hardware dentro de las diferentes plataformas. Consecuentemente, no se ha iniciado un estudio más profundo acerca de la optimización en el área de reconocimiento de señales acústicas. Eso impide ver claramente cómo el usar el análisis wavelet para el reconocimiento de señales acústicas es más apropiado, aunque no necesariamente más sencillo.

Una aplicación que nos permitió ver que el análisis wavelet no siempre resuelve todos nuestros problemas, fue el de radares y dispersión de señales, pues cuando la frecuencia de la señal se pasa de una banda ancha a una angosta, el análisis wavelet se vuelve un trabajo engorroso cuando se trata de analizar la frecuencia de la señal en la banda angosta, lo que sugiere aplicar otro tipo de análisis. El principal obstáculo es trabajar con este tipo de señales, pues si la frecuencia de la señal es de banda ancha, ésta no presenta problema alguno.

Queda claro entonces, que el análisis con base en la teoría de wavelets, es una herramienta muy eficaz. Sin embargo, se sugiere tomar las debidas precauciones al momento de ser aplicada, pues si lo que queremos es facilitar la solución de un modelo particular, debemos considerar que tipo de modelo es. Vimos que el tratamiento de señales cuya frecuencia es de banda ancha, el análisis wavelet es de gran ayuda, pues facilita enormemente su estudio. Para un modelo cuyas señales se encuentren en una frecuencia de banda angosta, lo preferible es buscar otro tipo de análisis o incluso hacer una combinación de análisis, lo que nos permitirá trabajar con las bondades del análisis wavelet y evitarnos tratar las señales de banda angosta con éste. Es evidente, como las limitaciones de este análisis son menores a las que se pueden presentar con otro tipo de análisis, como puede ser el análisis de Fourier, pues en este caso no es necesario que la señal sea periódica, y pertenezca al dominio del tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

La presente bibliografía es la sugerida para el lector que desee abundar en el tema.

- 📖 Auslander L y Gertnet I, *Wideband ambiguity functions and the $a \cdot x + b$ group*, in Auslander L, Grünbaum F A, Helton J W, Kailath T, Khargonekar P, y Mitter S, eds., *Signal Processing: Part I - Signal Processing Theory*, Springer - Verlag, New York, pp 1 - 12, 1990.
- 📖 Balian R, *Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique quantique*, C. R. Acad. Sci. Paris, 292 (1981), Série 2.
- 📖 Barton DK, *Modern Radar System Analysis*, Artech House, Norwood, MA, USA, 1988.
- 📖 Carlsson, S., *Sketch based coding of grey level images*, *Signal Processing North - Holland* 15 (1) (1998), 57 - 83.
- 📖 Chui CK, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York, 1992a.
- 📖 Chui CK, ed., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1992b.
- 📖 Coifman R, Meyer Y, y Wickerhauser MV, *Wavelet analysis and signal processing*, in Ruskai MB, Beyclin G, Coifman R, Daubechies I, Mallat S, Meyer Y, y Raphael L, eds., *Wavelets and their Applications*, Jones y Bartlett, Boston, 1992.
- 📖 Cook CE y Bernfeld M, *Radar Signals*, Academic Press, New York; vuelto a publicar por Artech House, Norwood, MA, 1993 (1967).
- 📖 Daubechies I, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- 📖 Einstein A, Lorentz HA, Weyl H, *The Principle of Relativity*, Dover, 1923.
- 📖 Kaiser G, *Local Fourier analysis and sintesys*, University of Lowell, pre impreso (no publicado). Originally NSF Proposal #MCS - 7822673, 1978b.

- ☞ Kaiser G, *Generalized wavelet transform, Part I: The window X - ray transform*, Technical Reports Series #18, Mathematics Department, University of Lowell. Part II: *The multivariate analytic - signal transform*, Technical Reports Series #19, Mathematics Department, University of Lowell, 1990b.
- ☞ Kaiser G, *An algebraic theory of wavelets, Part I: Complex Structure and operational calculus*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 222 - 243, 1992a.
- ☞ Kaiser G, *Space - time - scale analysis of electromagnetics waves*, in Proc. of IEEE - SP Internat. Symp. on Time frequency and Time - Scale Analysis, Victoria, Canada, 1992c.
- ☞ Kaiser G y Streater RF, *Windowed Radon transform, analytic signals and the wave equation*, in Chui CK, ed., *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York, pp. 399 - 441, 1992.
- ☞ Kaiser G, *Wavelet Electrodynamics: A Short Course*, Lecture notes for course given at the Tenth Annual ACES (Applied Computational Electromagnetics Society) Conference, March 1994, Monterey, CA, 1994b.
- ☞ Kaiser G, *A Friendly Guide to Wavelets*. Birkhäuser. Boston 1994.
- ☞ Maas P., *Wideband approximation and wavelet transform*, in Grünbaum FA, Bernfeld M, y Bluhart RE, eds., *Radar and Sonar, Part II*, Springer - Verlag, New York, 1992.
- ☞ Mallat S. y Zhong S., *Wavelet Transform scale maxima and multiscale edges*, in Ruskai MB, Beylkin G, Coifman R, Daubechies I, Mallat S, Meyer Y, y Raphael L, eds., *Wavelets and their Applications*, Jones y Bartlett, Boston, 1992.
- ☞ Meyer Y, *Un contre - exemple à la conjecture de Marr et à celle de S. Mallat*, CEREMADE, University Paris - IX, 1991.
- ☞ Meyer Y, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993a.
- ☞ Meyer Y, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1993b.
- ☞ Meyer Y y Roques S, eds., *Progress in Wavelet Analysis and Applications*, Editions Frontières, Paris, 1993.
- ☞ Miller W, *Topics in harmonics analysis with applications to radar and sonar*, in Bluhart RE, Miller W, y Wilcox CH, eds., *Radar and Sonar, Part I*, Springer - Verlag, New York, 1991.
- ☞ Morlet J, *Sampling theory and wave propagation*, in NATO ASI Series, Vol I, *Issues in Acustics Signal / Image Processing and Recognition*, Chen CH, ed., Springer - Verlag, Berlin, 1983.

- 📖 Naparst H, *Radar signal choice and processing for a dense target environment*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1988.
- 📖 Papoulis A, *The Fourier Integral and its Applications*, Mc Graw - Hill, New York, 1962.
- 📖 Streater RF y Wightman AS, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, Benjamin, New York, 1964.
- 📖 Swick DA, *An ambiguity function independent of assumption about bandwidth and carrier frequency*, NRL Report 6471, Washington, DC, 1966.
- 📖 Tewfik AH y Hosur S, *Recent progress in the applications of wavelet in surveillance systems*, Proc. SPIE Conf. on Wavelet Applications, 1994.
- 📖 Woodward PM, *Probability and Information Theory, with Applications to Radar*, Pergamon Press, London, 1953.

ENSAYOS

- 📖 Bargmann V, Butera P, Girardello L, y Klauder JR, *On the completeness of coherent states*, Reps. Math. Phys. 2 (1971), 221 - 228.
- 📖 Battle G, *Heisenberg proof of Balian - Low theorem*, Lett. Math. Phys. 15 (1988), 175 - 177.
- 📖 Bernfeld M, *CHIRP Doppler radar*, Proc. IEEE 72 (1984), 540 - 541.
- 📖 Canny J., *A computational approach to edge detection*, IEEE Trans Pattern Anal. and Machine Intell. 8 (1986), 679 - 698.
- 📖 Daubechies I, Grossman A, y Meyer Y, *Painless non - orthogonal expansions*, J. Math. Phys. 27 (1986), 1271 - 1283.
- 📖 Daubechies I, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 909 - 996.
- 📖 Daubechies I, *The wavelet transform, time - frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory 36 (1990), 961 - 1005.
- 📖 Deslauriers G y Dubuc S, *Interpolation dyadique, in Fractals, dimensions non entières et applications*, G. Cherbit, de., Masson, Paris, pp. 44 - 45, 1987.

- 📖 Duffin RJ y Schaeffer AC, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341 - 366.
- 📖 Froment, J., *Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes*, Thèse de l'Université Paris - IX, 1990, 131 - 180.
- 📖 Gabor D, *Theory of communication*, J. Inst Electr. Eng. 93 (1946) (III), 429 - 457.
- 📖 Mallat S., *Multiresolution approximation and wavelets*, Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69 - 88.
- 📖 Mallat S. y Zhong S., *Characterization of signals from multiscale edges*, New York University, Computer Science, Tech. Report, 1991; IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.
- 📖 Swick DA, *A review of wide - band ambiguity functions*, NRL Report 6994, Washington, DC, 1969.