23

2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"COMERCIO INTERNACIONAL. DOS MODELOS MATEMATICOS"

T E S I S

Que para obtener el título de

A C T U A R I A

p r e s e n t a

Luz Adriana Encarnación Caudillo Fuentes

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Directora de Tesis:
M. en C. Paloma Zapata Lillo

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
" COMERCIO INTERNACIONAL. DOS MODELOS MATEMATICOS"

realizado por LUZ ADRIANA ENCARNACION CAUDILLO FUENTES

con número de cuenta 9150542-2 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario
M. en C. Paloma Zapata Lillo Paloma Zapata

Propietario
M. en C. Sergio Hernández Castañeda

Propietario
Act. Juan León Montañez

Suplente
M. en C. Salvador Ferrer Ramírez

Suplente
Act. Guadalupe Patlán Espinosa

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN A. P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

Gracias, Dios, por el regalo precioso de la vida, y por el magnífico don del pensamiento, del cual surge todo el saber humano.

Con profundo respeto y admiración a mi padre, Sr. Gustavo Caudillo Márquez, de quien aprendí la honestidad y el trabajo arduo como medios de vida.

Con muchísimo cariño a mi madre, Sra. Luz María Fuentes de Caudillo, de quien aprendí que no hay ser humano pequeño ni tarea que no amerite ser hecha de la mejor manera.

In memoriam

Santiago Caudillo
17 de septiembre de 1997

Adelina Fuentes
13 de junio de 1996

Tía Adelina:
Espero que sientas esta meta alcanzada como tuya también. Te extrañamos, pero sabemos que estás feliz con Dios.

Tío Sany:
Compartimos las sonrisas de aquel viaje. Ahora viajaste a ver a Dios, y sé que desde allá sonríes conmigo hoy.

AGRADECIMIENTOS

Innumerables son las personas que de alguna u otra manera me aportaron algo en el desarrollo de mis estudios y en el de la presente tesis, y sobra decir que sería imposible mencionarlas a todas. Sin embargo, mencionaré a algunas, que influyeron de manera definitiva en el desarrollo de este trabajo. En primer lugar, debo mencionar que este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo brindado por mi familia, particularmente por mis padres y por mi tío, Sr. Pedro Caudillo, quien me facilitó la PC con la que este trabajo fue capturado en su mayor parte.

Igualmente importante es la colaboración de los integrantes del Seminario de Economía Matemática codirigido por los M. en C. Sergio Hernández y Paloma Zapata, entre quienes se encuentran José Ibarra, Rafael Bouchain, César Sousa, Jorge Ruiz y Salvador Ferrer. Agradezco también la colaboración de José Alberto Cuéllar Alvarez.

Es de particular importancia el apoyo otorgado por la Facultad de Ciencias para la presentación de reportes de esta tesis en los XXVIII y XXIX Congresos Nacionales de la

Sociedad Matemática Mexicana, celebrados en Colima y San Luis Potosí. respectivamente; así como en el V y VI Coloquios Nacionales de Economía Matemática y Econometría efectuados en Cholula y en la propia Facultad de Ciencias.

Finalmente, doy las gracias a todos mis profesores, y a todos los amigos que me han acompañado en el camino.

ACLARACION

Esta tesis fue realizada en el Seminario de Economía Matemática que codirigen el M. en C. Sergio Hernández Castañeda y la M. en C. Paloma Zapata Lillo, por lo que en realidad ambos son codirectores de este trabajo. Sin embargo, los trámites que involucra el registro de tesis requieren que sea designada una sola persona como director. Por mutuo acuerdo de ambos, la profesora Zapata funge como directora, aún cuando, vale la pena repetirlo, se trata de una codirección.

Introducción

El uso de las matemáticas como herramienta para modelar diferentes aspectos de la economía se ha generalizado , puesto que se hace el supuesto intrínseco de que su utilización hace más "científico" el análisis. Sin embargo, al modelar una misma situación, los resultados arrojados por distintos modelos pueden ser diferentes, puesto que se utilizan diferentes supuestos simplificadores que hacen resaltar uno u otro factor de los muchos que intervienen en una realidad tan compleja como la económica, la cual involucra cuestiones sociales, políticas, geográficas, culturales, históricas, etc. Esta tesis, más que justificar afirmaciones económicas, da una breve muestra de la utilización de diferentes técnicas para la modelación de un mismo hecho económico: el comercio internacional. En ella se presentan dos modelos referentes al tema completamente diferentes en metodología y supuestos, que conducen a distintos resultados. Con ello, se pretende poner de relieve la importancia de analizar un fenómeno económico bajo distintos puntos de vista, que permitan vislumbrar todas las posibles consecuencias que una medida económica puede desencadenar. Se busca además, con estos modelos dar sugerencias para los países que se involucran en el comercio internacional.

El primer modelo es de Akira Takayama, y es una formalización matemática de los argumentos expuestos en su tiempo por David Ricardo en favor del libre intercambio comercial entre dos países. Además del análisis de dicho modelo, la autora de la presente tesis aporta una generalización del mismo. Este modelo es más bien de interés pedagógico, porque permite mostrar como se pueden emplear las técnicas de optimización matemática en un problema económico para retratar un instante en el tiempo. Por ser un modelo de supuestos limitados, es poco factible su aplicación para entender el intercambio entre países demasiado diferentes entre sí.

El segundo modelo es de Amitava Krishna Dutt, y es una modificación de un modelo propuesto por Krugman. Se analiza este modelo con detalle y se analizan las conclusiones obtenidas por Dutt. Además de ello, la autora analiza dos equilibrios que no se mencionan en el artículo original del sistema de ecuaciones diferenciales propuesto por Dutt para modelar el cambio en el capital de los dos países de la economía teórica en la que basa su estudio. Este modelo también contiene supuestos bastante fuertes. Sin embargo, capta una diferencia esencial entre países, que es el tipo de bien en que cuya producción tienen ventaja comparativa. Esto tiene consecuencias en el nivel de capital que mantienen los países a lo largo del tiempo, y muestra que bajo ciertas circunstancias el comercio podría llevar a la descapitalización del país periferia.

Se presenta antes de cada modelo una breve recopilación de elementos de la herramienta matemática que se necesita para comprenderlos, y que generalmente no se estudian en la carrera de Actuario, por lo cual se espera que ésta sea útil al lector.

CONTENIDO

CAPITULO 1: VENTAJAS COMPARATIVAS Y OPTIMIZACION MATEMATICA

A) Elementos previos de optimización matemática

En esta sección se presentan algunos conceptos y teoremas que se utilizaran a lo largo del análisis que se hace de la teoría de las ventajas comparativas.

I) Definiciones

Puesto que generalmente se estudian problemas de optimización que involucran una función real es pertinente definir lo que se entiende por óptimo de un problema en el que la función objetivo es una de tipo vectorial, como la que aparecerá en el análisis

Definición 1.1

Sean $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$, ..., $f_k(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x})_1$, $g_2(\mathbf{x})$, ..., $g_m(\mathbf{x})$ funciones reales definidas en un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathbf{x}^* \in X$ resuelve el problema $(\mathbb{P})$:

$(\mathbb{P})$ Maximizar: $f(\mathbf{x}) \equiv [f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_k(\mathbf{x})]$

sujeto a: $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$; $j = 1, 2, \ldots, m$;

si y sólo si tienen lugar las siguientes condiciones:

(i) $g_j(\mathbf{x}^*) \geq 0$; $j = 1, 2, \ldots, m$; $\mathbf{x}^* \in X$;

(ii) No existe $\mathbf{x}_0$ tal que

$$f_i(\mathbf{x}_0) \geq f_i(\mathbf{x}^*) \quad \forall\ i = 1, 2, \ldots, k;$$

$$f_i(\mathbf{x}_0) > f_i(\mathbf{x}^*) \quad \text{para alguna } i \in \{1, 2, \ldots, k\};$$

$$g_j(\mathbf{x}_0) \geq 0 \ ; \quad j = 1, 2, \ldots, m; \ \mathbf{x}_0 \in X.$$

II) Teoremas

A continuación se enuncian tres teoremas que serán útiles para caracterizar las soluciones de algunos problemas que se enunciarán más adelante.

Teorema 1.1

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_m$ funciones reales cóncavas, definidas en un conjunto convexo X en $\mathbb{R}^n$. Supóngase que la condición de Slater se cumple, es decir, que existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots x_k) \in \mathbf{X}$ tal que $g_j(\mathbf{x}) > 0$ $\forall\ j$. Con estas hipótesis, si $\mathbf{x}^*$ es solución del problema $(\mathbb{P})$, existen $\alpha \in \mathbb{R}^k$, $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ con $\alpha \geq 0$, y $\lambda^* \geqq 0$, tal que $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ es un punto silla de $\phi\ (\mathbf{x}, \lambda) \equiv \alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \lambda \cdot g(\mathbf{x})$; es decir:

$$(i) \quad \phi\ (\mathbf{x}, \lambda^*) \leq \phi\ (\mathbf{x}^*, \lambda^*) \leq \phi\ (\mathbf{x}^*, \lambda)$$

para toda $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y $\lambda \geq 0$

Teorema 1.2

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k, g_1, g_2, \ldots, g_m$

funciones reales cóncavas, definidas en un conjunto convexo $\mathbf{X}$ en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existen coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, con $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$; y un punto silla $(\mathbf{x}^*,\lambda^*) \in \mathbf{X} \times \Omega^m$ tal qué para toda $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ y toda $\lambda \in \Omega^m$:

$$(a) \quad \phi\ (\mathbf{x},\lambda^*) \leq \phi\ (\mathbf{x}^*,\lambda^*) \leq \phi\ (\mathbf{x}^*,\lambda)$$

donde:

$$\phi\ (\mathbf{x},\lambda) \equiv \alpha\cdot f(\mathbf{x}) + \lambda\cdot g(\mathbf{x}) \ ;$$

entonces

(i) $\mathbf{x}^*$ es solución del problema $(\mathbb{P})$

(ii) $\lambda^*\cdot g(\mathbf{x}^*) = 0$

Teorema 1.3 (Goldman-Tucker)

Sean los problemas (**P**) y (**D**):

(**P**) Max $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

sujeto a:

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} \leqq \mathbf{r}$

$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$

(**D**) Min $\mathbf{w}\cdot\mathbf{r}$

$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$

sujeto a:

$\mathbf{A}^t\cdot\mathbf{w} \geqq \mathbf{p}$

$\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$

$(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*)$ es un par de soluciones para (**P**) y (**D**) respectivamente, si y sólo si $(\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*)$ es un punto silla de

$$(a) \quad \phi\ (\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{w}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}),$$

esto es:

(*i*) $\phi\ (\mathbf{x},\mathbf{w}^*) \le \phi\ (\mathbf{x}^*,\mathbf{w}^*) \le \phi\ (\mathbf{x}^*,\mathbf{w})$
para toda $\mathbf{x} \geqq 0$ y toda $\mathbf{w} \geqq 0$.

Se enunciará ahora un lema que será útil en el análisis.

Lema 1.1 (Neyman y Pearson)

Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i$,

donde $\gamma_i \in \mathbb{R}\ \forall i=1,\dots,m$, y $\exists\ i$ tal que $\gamma_i>0$.
Sea $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, $\alpha > 0$.
Sea $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

$$\text{Sea } \mathcal{A} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \geqq 0 \;\middle|\; \alpha\cdot\mathbf{x} \le \beta \right\}$$

$$\text{Sea } \mathbf{S} = \left\{ s \in \{1,\dots,m\} \;\middle|\; \frac{\gamma_s}{\alpha_s} \ge \frac{\gamma_i}{\alpha_i},\ \forall i=1,\dots m. \right\}$$

Entonces el conjunto

$$(i) \quad \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{x}\in\Omega^m \;\middle|\; x_i=0 \text{ si } i\notin\mathbf{S},\ \sum_{i\in S} \gamma_i x_i = \beta \right\}$$

es el conjunto solución del siguiente problema:

Maximizar $f(\mathbf{x})$
sujeto a: $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$

(B) La teoría de las ventajas comparativas

En esta sección se hace el supuesto de que sólo existen dos países que producen e intercambian dos bienes. Se efectuará un análisis para determinar cuál es el plan de producción que cada país debe seguir con el fin de maximizar el vector de la producción mundial y el valor de dicha producción. Para ello, primero se caracterizarán los planes factibles en cada país y los planes factibles mundialmente. Se plantean a continuación los problemas de optimización enunciados, y después, haciendo uso de los teoremas, se hallarán las soluciones de dichos problemas.

I) Planteamiento

Considérese un mundo con dos países que se denotarán como 1, 2; en el que se pueden producir dos bienes: X, Y, utilizando un insumo, por ejemplo, el trabajo. Sean l_{xi}, l_{yi} las cantidades de trabajo necesarias para producir una unidad de X y de Y respectivamente, en el país i ($i = 1, 2$)

Sea L_i la cantidad total de trabajo disponible en el país i.

Se supondrá que el trabajo no se transfiere entre los países y que los costos de transporte de X y de Y son despreciables.

Sean x_i, y_i las producciones de bien X, y de bien Y respectivamente en el país i.

De esta manera, las restricciones para los recursos de los dos países pueden escribirse como:

$$l_{x1}x_1 + l_{y1}y_1 \leq L_1 \quad \text{(País 1)}$$

$$l_{x2}x_2 + l_{y2}y_2 \leq L_2 \quad \text{(País 2)}$$

La restricción para cada país se pueden reescribir como:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{y_1}{b_1} \leq 1 \qquad (1)$$

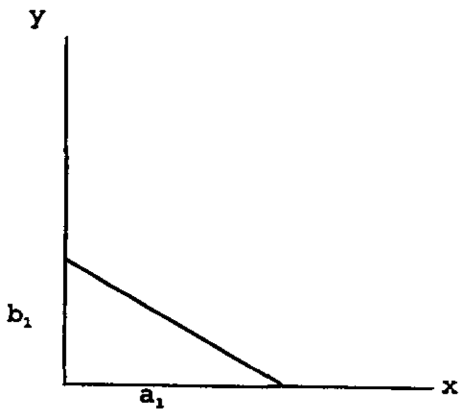
$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} \leq 1 \qquad (2)$$

donde:

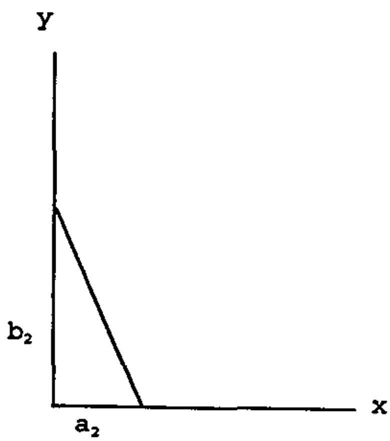
$$a_i \equiv \frac{L_i}{l_{xi}}, \quad b_i \equiv \frac{L_i}{l_{yi}}$$

Los coeficientes a_i, b_i se pueden interpretar respectivamente como la cantidad de producción de bien X y de bien Y que se podría obtener en el país i si se dedicara por completo a la producción de dicho bien.

Con las restricciones dadas, es posible identificar los planes de producción que pueden ser llevados a cabo por cada país.



Región factible país 1



Región factible país 2

Definición 1.2

Llamaremos plan de producción posible para el país i a una pareja ordenada (x_i, y_i), tal que cumpla con la restricción asociada al país i.

Hasta el momento se han dado elementos para caracterizar los planes de producción en cada país por separado. A continuación se caracterizan los planes de producción factibles mundialmente.

Definición 1.3

Al conjunto:

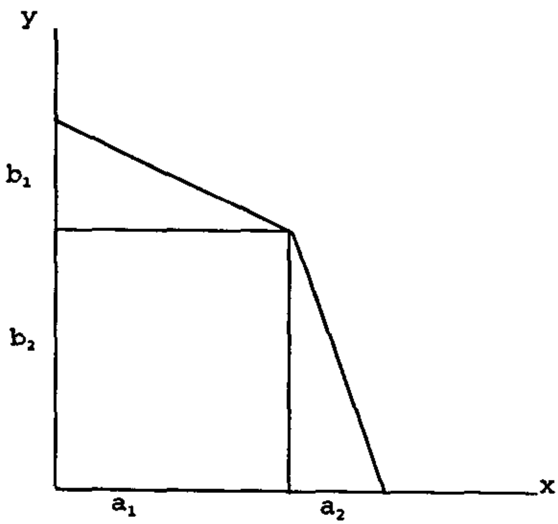
$$\Pi = \Big\{(x, y) \mid (x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \text{ con } (x_i, y_i) \text{ factible para i} \Big\}$$

se le denominará conjunto de planes de producción mundialmente posibles.

En el análisis subsecuente, se asume además que:

$$\frac{l_{x1}}{l_{y1}} \leq \frac{l_{x2}}{l_{y2}} \quad (3)$$

A esta condición se le conoce como **la condición de Ricardo de la ventaja comparativa**, la cual, en términos de a_i, b_i:



Región factible mundial

$$\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{b_1} \quad (4)$$

II) Caracterización alternativa de la región factible mundial

Para poder hacer uso de los teoremas que se enunciaron en la sección de elementos previos de matemáticas, se hace necesario reexpresar las condiciones que caracterizan los planes de producción mundialmente factibles. La siguiente proposición contiene la caracterización que se utilizará posteriormente.

Proposición 1.1

Suponiendo la condición de Ricardo de la ventaja comparativa, un plan de producción (x,y) es mundialmente posible si y sólo si satisface las siguientes restricciones:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} \leq \frac{b}{b_1} \quad (5)$$

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} \leq \frac{a}{a_2} \quad (6)$$

donde

$$a = a_1+a_2 \;; \quad b = b_1+b_2;$$

Demostración:

Sea

$$\Pi' = \left\{ (x,y) \mid \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} \le \frac{b}{b_1};\ \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} \le \frac{a}{a_2} \right\}$$

P. d. $\Pi = \Pi'$

Primera parte ($\Pi \subset \Pi'$):

Sea $(x,y) \in \Pi$

P. d. $(x,y) \in \Pi'$

Por hipótesis:

$(x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$, con (x_i,y_i) factible para i

$\Rightarrow$ (x_i,y_i) satisface la restricción (i)

Reescribiendo cada restricción:

$$x_1 + \frac{a_1 y_1}{b_1} \le a_1 \qquad (1')$$

$$x_2 + \frac{a_2 y_2}{b_2} \le a_2 \qquad (2')$$

Sumando ambas restricciones:

$$x_1 + x_2 + \frac{a_1 y_1}{b_1} + \frac{a_2 y_2}{b_2} \le a_1 + a_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a_2} + \frac{a_1 y_1}{a_2 b_1} + \frac{y_2}{b_2} \leq \frac{a}{a_2} \qquad (7)$$

Por otro lado,

$$\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{b_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_1 y_1}{b_2 b_1} \leq \frac{a_1 y_1}{a_2 b_1} \qquad (8)$$

Con esta condición y (7), se concluye que:

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} \leq \frac{a}{a_2} \qquad (6)$$

Análogamente para demostrar que se cumple la segunda restricción, se obtiene de (1) y (2):

$$\Rightarrow \frac{x_1}{a_1} + \frac{b_2 x_2}{a_2 b_1} + \frac{y}{b_1} \leq \frac{b}{b_1} \qquad (9)$$

y como:

$$\frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_1}{b_1}$$

se tiene que:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} \leq \frac{b}{b_1} \qquad (5)$$

$$\therefore \ (x,y) \in \Pi'$$

□

Segunda Parte ($\Pi' \subset \Pi$)

Sea $(x,y) \in \Pi'$

P. d. $(x,y) \in \Pi$

Por hipótesis (x,y) cumple con las dos siguientes restricciones:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} \le \frac{b}{b_1} \quad , \quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} \le \frac{a}{a_2} \qquad (5\ ,\ 6)$$

de manera que puede hallarse en cualquiera de las siguientes tres regiones:

a) $(x,y) \in \mathbf{P} \Leftrightarrow x \le a_1;\ y \le b_2$

b) $(x,y) \in \mathbf{P}_1 \Leftrightarrow y > b_2$

c) $(x,y) \in \mathbf{P}_2 \Leftrightarrow x > a_1$

Para cada uno de estos casos se demostrará que $(x,y) \in \Pi$.

a) $(x,y) \in \mathbf{P}$ ie $x \le a_1;\ y \le b_2$

Sean $(x_1,y_1) = (x,0)$; $(x_2,y_2) = (0,y)$.

Para (x_1,y_1) se tiene que

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{y_1}{b_1} = \frac{x}{a_1} \le 1 \qquad (1)$$

$\therefore$ (x_1,y_1) es factible para el país 1.

Para (x_2,y_2) ocurre:

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} = \frac{y}{b_2} \le 1 \qquad (2)$$

$\therefore$ (x_2,y_2) es factible para el país 2.

Además:

$$(x,y) = (x,0)+(0,y) = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) \qquad (10)$$

$$\therefore \quad (x,y) \in \Pi$$

b) (x,y) P_1, ie: $y > b_2$

Sean $(x_1,y_1)=(x,y-b_2)$; $(x_2,y_2)=(0,b_2)$.

Para (x_1,y_1) se tiene que:

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{y_1}{b_1} = \frac{x}{a_1} + \frac{y-b_2}{b_1} \leq 1 \qquad (1)$$

Para demostrar esta afirmación, supóngase lo contrario, es decir:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y-b_2}{b_1} > 1 \qquad (11)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a_1} \pm \frac{y}{b_1} \geq 1 + \frac{b_2}{b_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} > \frac{b_1+b_2}{b_1} = \frac{b}{b_1} \qquad (11')$$

lo cual contradice la hipótesis.

$\therefore$ (x_1,y_1) es factible para el país 1.

Por otro lado, para (x_2,y_2) ocurre que:

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{y_2}{b_2} = \frac{b_2}{b_2} = 1 \qquad (12)$$

$\therefore$ (x_2,y_2) es factible para el país 2.

Además

$$(x,y)=(x,y-b_2)+(0,b_2)=(x_1,y_1)+(x_2,y_2) \qquad (13)$$

$$\therefore \ (x,y) \in \Pi$$

c) Sea $(x_1,y_1) = (a_1,0)$; $(x_2,y_2) = (x-a_1,y)$

Por razonamientos análogos a los hechos en el caso b), (x_1,y_1) es factible para el país 1 y (x_2,y_2) es factible para el país 2, y trivialmente se satisface que

$$(x,y) = (x_1,y_1) + (x_2,y_2)$$
$$\therefore (x,y) \in \Pi$$

□ ■

III) Problemas de optimización

Se ha presentado la proposición que permite caracterizar la región factible mundial de una manera alternativa. Aunque esta caracterización es menos intuitiva, permite aplicar los teoremas con mayor facilidad.

Ahora, se plantea el siguiente problema de optimización vectorial:

$$\begin{aligned} (P_1)\ \text{Maximizar: } & (x,y) \\ \text{sujeto a: } & \mathbf{Az} \leqq \mathbf{r} \\ & x \geq 0; \\ & y \geq 0; \end{aligned}$$

con:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a_1} & \dfrac{1}{b_1} \\ \dfrac{1}{a_2} & \dfrac{1}{b_2} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{b_1} \\ \dfrac{a}{a_2} \end{bmatrix};$$

Para encontrar las soluciones de este problema, se hará uso del teorema 1.1, que se enunció en la sección de elementos de optimización matemática.

Para poder aplicar este teorema, es necesario verificar que se cumple la condición de Slater. Sea $\mathbf{z} = (x,y)$ con

$$x < \text{Mín}\left\{ \frac{a_1 b}{2b_1}, \frac{a}{2} \right\} \quad ;$$

$$y < \text{Mín}\left\{ \frac{b_2 a}{2a_2}, \frac{b}{2} \right\} \quad (14)$$

El punto $\mathbf{z}$ es un punto interior de la región factible, ya que por hipótesis se cumple que:

$$x < \frac{a_1 b}{2b_1}, \quad x < \frac{a}{2}, \quad y < \frac{b_2 a}{2a_2}, \quad y < \frac{b}{2}$$

de lo que se desprende de manera inmediata que:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} < \frac{b}{b_1} \quad (5'')$$

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} < \frac{a}{a_2} \quad (6'')$$

es decir, $\mathbf{z}$ es punto interior de la región factible.

Por lo tanto, la región factible del problema P_1 es no vacía, por lo cual es posible aplicar el teorema 1.1 para caracterizar sus soluciones. De acuerdo con este teorema, si (x^*, y^*) es solución de este problema, ocurre entonces lo siguiente:

$\exists\ p \equiv (p_x, p_y) \geq 0,\ \Lambda^* \equiv (\lambda^*_1, \lambda^*_2) \geqq 0$; tales que:

$$\phi\ (x, y; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \lambda) \qquad (15)$$
$$\forall\ x,\ y,\ \lambda \geqq 0;$$

donde:

$$\phi\ (x, y; \lambda) = p_x x + p_y y +$$
$$\lambda_1 \left[\frac{b}{b_1} - \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1}\right] + \lambda_2 \left[\frac{a}{a_2} - \frac{x}{a_2} - \frac{y}{b_2}\right]$$

y

$$\lambda^*_1 \left[\frac{b}{b_1} - \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1}\right] = 0 \qquad ;$$
$$\lambda^*_2 \left[\frac{a}{a_2} - \frac{x}{a_2} - \frac{y}{b_2}\right] = 0 \qquad (16)$$

Se tiene además, por el Teorema 1.2 un resultado que es casi recíproco al recién hallado:

Si existen $\mathbf{p} = (p_x, p_y) > 0$ y $\Lambda^* = (\lambda^*_1, \lambda^*_2)$ tales que se cumpla la condición de punto silla:

$$\phi\ (x, y; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \lambda) \qquad (17)$$
$$\forall\ x,\ y,\ \lambda \geqq 0;$$

entonces (x^*, y^*) es una solución del problema de optimización vectorial (P_1).

Considérese ahora el problema de maximizar el valor de la producción mundial dados precio p_x, p_y.

$$(P_2)\ \text{Maximizar: } p_x x + p_y y$$
$$\text{sujeto a: } \mathbf{A}\cdot\mathbf{z} \leqq \mathbf{r}$$
$$x \geq 0;$$
$$y \geq 0;$$

Ahora se caracterizarán las soluciones de este problema mediante el teorema 1.3.

El problema dual de P_2 es:

$$\text{Minimizar } \Lambda\cdot\mathbf{r}$$
$$\text{sujeto a: } \mathbf{A}^t\Lambda \geqq \mathbf{p}$$

De acuerdo con el teorema, $(x^*, y^*) \geqq 0$ es una solución de este problema si y sólo si existe $\Lambda^* \geqq 0$ tal que

$$\phi\ (x, y; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \Lambda^*) \leq \phi\ (x^*, y^*; \lambda) \qquad (18)$$
$$\text{para toda } x,\ y,\ \lambda \geqq 0$$

con

$$\phi\ (x, y; \lambda) = p_x x + p_y y +$$
$$\lambda_1 \left[\frac{b}{b_1} - \frac{x}{a_1} - \frac{y}{b_1}\right] + \lambda_2 \left[\frac{a}{a_2} - \frac{x}{a_2} - \frac{y}{b_2}\right]$$

De ello se concluye que la

caracterización de las soluciones del problema de optimización vectorial es la misma que la de las soluciones del problema de programación lineal para valores de $p_x>0$, $p_y>0$. En otras palabras, si un punto es solución de uno de los problemas, también es la solución del otro.

Se determinará ahora qué puntos satisfacen estas condiciones, es decir, cuáles puntos son solución de ambos problemas. La existencia de la solución queda garantizada por el teorema del máximo, dado que la región factible es cerrada y acotada y la función objetivo ($p_x x + p_y y$) es continua

Si en el problema de programación lineal elegimos p_x, $p_y > 0$ tales que

$$\frac{l_{x1}}{l_{y1}} < \frac{p_x}{p_y} < \frac{l_{x2}}{l_{y2}} \qquad (3')$$

el óptimo es el punto $\mathbf{z}^* = (a_1, b_2)$. Esto se demostrará a continuación.

De la programación lineal se sabe que la solución se halla en la frontera. Sea $\mathbf{z}_a = (u,v) \neq \mathbf{z}^*$ una solución al problema. En este caso, ello conlleva que se satisfaga al menos una de las dos restricciones con igualdad. Sin pérdida de generalidad, supongamos que

$u/a_1+v/b_1 = b/b_1$ (en caso de que la otra restricción sea la que se da con igualdad, se puede proceder de manera análoga). Claramente se observa que el punto tiene la forma: $\mathbf{z}_a=(u,b-ub_1/a_1)$, y el valor de la función objetivo, en consecuencia es:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}_a) &= p_x u + p_y(b-ub_1/a_1) \\ &= p_x u+p_y\big((1-u/a_1)b_1+b_2\big) \qquad (19) \end{aligned}$$

El valor de la función objetivo en $\mathbf{z}^* = (a_1,b_2)$ es:

$$f(\mathbf{z}^*) = p_x a_1 + p_y b_2 \qquad (20)$$

Se compararán los valores de $f(\mathbf{z}_a)$ y $f(\mathbf{z}^*)$. Hay que no puede ocurrir $u>a_1$ (esta observación se demostrará abajo). Sabiendo esto, recordando que se supuso $u \neq a_1$, y haciendo uso de la hipótesis sobre la razón de precios se desprende que:

$$\frac{b_1}{a_1} < \frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} < \frac{p_x(a_1-u)}{p_y(a_1-u)}$$

$$\Leftrightarrow p_x(a_1-u) > p_y(1-u/a_1)b_1 \Leftrightarrow$$

$$p_x a_1+p_y b_2 > p_x u+p_y\big((1-u/a_1)b_1+b_2\big) \qquad (21)$$

$$\text{ie } f(\mathbf{z}^*) = f(\mathbf{z}_a)$$

lo cual es una contradicción, pues se había supuesto que z_a era un óptimo distinto de z^*. De ello se desprende de manera inmediata que el punto $\mathbf{z}^* = (a_1,b_2)$ es el único óptimo.

Se demostrará en seguida la observación enunciada anteriormente:

Si se satisface con igualdad la restricción $u/a_1+v/b_1 = b/b_1$, no es posible que $u>a_1$.

Supóngase que esto no es cierto, es decir, que $u=a_1+\delta$ con $\delta>0$; entonces sucedería que:

$$\mathbf{z}_a = (u,v) = (a_1+\delta, b-(a_1+\delta)b_1/a_1) =$$
$$(a_1+\delta, b-b_1-\delta b_1/a_1) = (a_1+\delta, b_2-\delta b_1/a_1) \qquad (22)$$

no respetaría la segunda restricción del problema, ya que

$$u/a_2+v/b_2 =$$
$$\frac{a_1+\delta}{a_2} + \frac{b_2-\delta b_1/a_1}{b_2} > \frac{a_1+\delta}{a_2} + \frac{b_2-\delta b_2/a_2}{b_2} =$$
$$\frac{a_1+\delta}{a_2} + 1 - \frac{\delta}{a_2} = \frac{a_1+a_2}{a_2} = \frac{a}{a_2} \qquad (23)$$

■

Ahora que se ha concluído la demostración de que el punto $\mathbf{z}^* = (a_1,b_2)$ es la única solución a los problemas P_1 y P_2 analizaremos sus implicaciones.

Al analizar con cuidado el punto $\mathbf{z}^*$, se observa que éste sólo puede ser obtenido a través de la **completa especialización** de cada país (es decir, el país 1 produce $x_1 = a_1$,

$y_1 = 0$, y el país 2 produce $x_2 = 0$, $y_2 = b_2$). Este punto se conoce como el **punto de Ricardo** (como lo llamaron Dorfman, Samuelson y Solow), ya que tiene lugar la especialización recomendada por David Ricardo: que cada país se dedique a producir el bien en el que es comparativamente mejor. La solución obtenida es obvia utilizando el método gráfico.

A continuación se verá que en el caso de que cada país se dedique a buscar la producción con el valor máximo de manera independiente a lo que haga el otro, se llegará a la misma solución, es decir, a la completa especialización.

El país 1 resuelve:

$$(\pi_1) \text{ Maximizar: } p_x x_1 + p_y y_1$$
$$\text{sujeto a: } l_{x1}x_1 + l_{y1}y_1 \leq L_1,$$
$$x_1,\ y_1 \geq 0$$

y puesto que:

$$\frac{p_x}{l_{x1}} > \frac{p_y}{l_{y1}} \quad (3),$$

por el Lema de Neyman y Pearson se dedica a producir bien X, es decir:

$$x_1 = L_1/l_{x1} \quad (24)$$

De manera análoga, el país 2 resuelve el siguiente problema:

$$(\pi_2)\ \text{Maximizar: } p_x x_2 + p_y y_2$$
$$\text{sujeto a: } l_{x2} x_2 + l_{y2} y_2 \le L_2,$$
$$x_2,\ y_2 \ge 0$$

Por el Lema de Neyman y Pearson, el país 2 se dedica por completo a producir bien Y, ie $y_2 = L_2/l_{y2}$, ya que

$$\frac{p_x}{l_{x2}} < \frac{p_y}{l_{y2}} \qquad (3)$$

También por medio de análisis gráfico es posible constatar que si cada uno de los países se dedica a buscar la producción con el valor máximo de manera independiente a lo que haga el otro, llegará a la misma solución, es decir, a la completa especialización.

Cabe mencionar que los cocientes

$$\frac{p_x}{l_{x1}},\ \frac{p_y}{l_{y1}}$$

tienen una interpretación que da una intuición muy clara de la solución al problema de optimización: Cada uno es el precio de una unidad de trabajo dedicada a la producción de bien X (o Y, respectivamente) en el país *i*. Claramente, a un país le conviene dedicarse al sector productivo en el que su trabajo es más valioso.

Ahora, cabría preguntarse lo que sucedería para precios fuera del rango especificado, en esta economía simplificada.

Supongamos $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ tal que

$$\frac{p_x}{p_y} > \frac{l_{x2}}{l_{y2}} > \frac{l_{x1}}{l_{y1}} \qquad (25)$$

En este caso el país 1 se enfrenta a condiciones semejantes a las que se habían planteado anteriormente ($p_x/p_y > l_{x1}/l_{y1}$). Por ello, la solución a su problema no se altera: continua produciendo bien *X* de manera exclusiva, es decir $x_1 = L_1/l_{x1}$. Sin embargo el país 2 se enfrenta a condiciones diferentes, ya que

$$\frac{p_x}{l_{x2}} > \frac{p_y}{l_{y2}},$$

de manera que éste también se dedica a producir bien *X*, es decir $x_2 = L_2/l_{x2}$. Ante esta oferta excesiva de bien 1, éste se encarece y la razón de precios cambia hasta llegar a:

$$\frac{p_x}{p_y} \geq \frac{l_{x2}}{l_{y2}} \qquad (3'') \ .$$

Por un razonamiento análogo, ocurre que si

$$\frac{l_{x2}}{l_{y2}} > \frac{l_{x1}}{l_{y1}} > \frac{p_x}{p_y} \qquad (26)$$

ambos países se dedicarán a producir bien Y, lo que hará que este se encarezca, y que entonces ocurra:

$$\frac{l_{x1}}{l_{y1}} \leq \frac{p_x}{p_y} \qquad (3''').$$

IV) Generalización

En esta sección se generaliza el problema de la sección anterior al caso en que hay más de dos bienes y más de dos países.

Supóngase una economía en la que existen n países y m bienes. Sea p_i, $i=1,\ldots,m$, el precio (dado) del bien i; y sea x_{ij},

$i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, la producción de bien i en el país j. Sea l_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, la cantidad de trabajo que se necesita para producir una unidad de bien i en el país j. Sea L_j, $j=1,\ldots,n$, la cantidad de trabajo total disponible en el país j. Se supondrá que el trabajo no se transfiere entre los países y que los costos de transporte de los bienes son despreciables.

Supóngase que se desea resolver el siguiente problema:

$$(\mathbb{P}_1)\ \text{Max}\ \left[\sum_{j=1}^{n} x_{1j}, \sum_{j=1}^{n} x_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_{mj}\right]$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} l_{ij}x_{ij} \leq L_j,\ j=1,\ldots,n$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$$

Es claro que cada restricción j se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} \leq 1,\ j=1,\ldots,n \qquad (27)$$

con $a_{ij} \equiv L_j/l_{ij}$.

Se aplicará el teorema 1.1 para caracterizar las soluciones a este problema. Esto se puede hacer ya que se satisface la condición de Slater, esto es, la existencia de un punto interior χ de la región factible. Para comprobarlo, defínase χ de la forma:

$\chi = (\chi_{11},\ldots,\chi_{1m},\chi_{21},\ldots,\chi_{2m},\chi_{n1},\ldots,\chi_{nm}) \equiv (\chi_{nm})$,
tal que $\chi_{ij} = a_{ij}/(m+1) > 0$. Tal χ satisface que:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} = m/(m+1) < 1, \ j=1,\ldots,n \qquad (28)$$

Entonces, por el teorema 1.1, si $\mu = (\mu_{11},\ldots,\mu_{1m},\mu_{21},\ldots,\mu_{2m},\mu_{n1},\ldots,\mu_{nm})$ es solución de dicho problema, entonces existen $p \equiv (p_1,\ldots,p_m) \geq 0$, $\Lambda^* \equiv (\lambda^*_1,\ldots,\lambda^*_n) \geqq 0$ tales que:

$$\phi(x,\Lambda^*) \leq \phi(\mu,\Lambda^*) \leq \phi(\mu,\lambda) \qquad (29)$$

con:

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\lambda \left(1-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij}\right)$$

Análogamente al caso de dos países y dos bienes, se tiene por el Teorema 1.2 un resultado que es casi recíproco al recién hallado:

Si existen $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} > 0$ y $\Lambda^* \in \mathbb{R}^n$ tales que se cumpla la condición de punto silla:

$$\phi\ (\mathbf{x},\Lambda^*) \leq \phi\ (\mu,\Lambda^*) \leq \phi\ (\mu,\lambda), \qquad (30)$$
$$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(mxn)},\ \lambda \in \mathbb{R}^n$$

entonces (x^*,y^*) es una solución del problema de optimización vectorial $(\mathbb{P}_1)$.

Ahora, considérese el problema siguiente:

$$(\mathbb{P}_2) \text{ Maximizar } \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} \leq 1 \quad j=1,\ldots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad j=1,\ldots,n$$

Este problema puede plantearse como:

$$\text{Maximizar } \mathbf{p}^t \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{1}_{nx1}$$

con:

$$\mathbf{p}^t = (\underbrace{p_1,\ldots,p_m,p_1,\ldots,p_m,\ldots,p_1,\ldots,p_m}_{n \text{ veces } p_1,\ldots,p_m}) = (p_{ij})^t$$

$$\mathbf{x}^t = (\underbrace{x_{11},\ldots,x_{1m}}_{\text{País } 1}, \underbrace{x_{21},\ldots x_{2m}}_{\text{País } 2}, \ldots \underbrace{x_{n1},\ldots,x_{nm}}_{\text{País } n}) = (x_{ij})^t$$

$$\mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} 1/a_{11}\ldots1/a_{1m} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & 1/a_{21}\ldots1/a_2 & \ldots & & & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1/a_{n1}\ldots1/a_{nm} & & \end{bmatrix}$$

El problema dual a éste es:

$$\text{Minimizar } \Lambda \cdot \mathbf{1}_{nx1}$$

$$\text{sujeto a: } \mathbf{A}^t\Lambda \geqq \mathbf{p}$$

Nuevamente se puede aplicar el teorema

1.3, y se obtiene como resultado que $\mu \geqq 0$ es una solución de este problema si y sólo si existe $\Lambda^* \geqq 0$ tal que

$$\phi\ (\mathbf{x},\Lambda^*) \leq \phi\ (\mu,\Lambda^*) \leq \phi\ (\mu,\lambda) \qquad (31)$$

$$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(mxn)},\ \lambda \in \mathbb{R}^n$$

con

$$\phi(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\lambda \left[1-\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij}\right]$$

Así, nuevamente se puede concluir que las soluciones al problema de optimización vectorial son soluciones al problema de programación lineal para valores de $\mathbf{p} > 0$ y viceversa. Por ello, basta con revisar las soluciones del problema de programación lineal.

Proposición 1.2

Sea $\mathbf{S}_j = \left\{ s\in\{1,\ldots,m\} \,\middle|\, p_s a_{sj} \geq p_i a_{ij}, \forall i=1,\ldots m. \right\}$

Entonces el conjunto

$$\mathbf{U} =$$

$$\left\{ \mathbf{x}\in\Omega^{(mn)} \,\middle|\, x_{ij}=0 \text{ si } i\notin \mathbf{S}_j, \sum_{i\in S_j} x_{ij}/a_{ij} \leq 1 \ \forall 1\leq j\leq n \right\}$$

es el conjunto solución del problema $(\mathbb{P}_2)$, dado $\mathbf{p} > 0$.

Demostración:

Primero se demostrará que en el óptimo

todas las restricciones deben cumplirse con igualdad

Contención ($\supseteq$)

Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{nm}$

$\mathbf{y} = (y_{11},..,y_{1m},y_{21},..,y_{2m},...,y_{n1},..,y_{nm})$, tal que para alguna jo ocurre:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ijo}/a_{ijo} < 1 \qquad (32)$$

y que además ocurre:

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij}/a_{ij} \leqq 1; \ \forall \ j \neq jo \qquad (33)$$

Sea $\mathbf{z} = \mathbf{y} + (0,...,0,\zeta_{1jo},0,...,0)$, con:

$$\zeta_{1jo} = a_{1jo} + a_{1jo} \sum_{i=1}^{m} y_{ijo}/a_{ijo}$$

Entonces:

$$p \cdot \mathbf{z} = p \cdot \mathbf{y} + p_{1jo}\zeta_{1jo} > p \cdot \mathbf{y} \qquad (34)$$

Además, trivialmente se satisface que:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij}/a_{ij} \leqq 1; \ \forall \ j \neq jo \qquad ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij}/a_{ij} = 1; \ \forall \ j = jo \qquad (35)$$

$\therefore$ $\mathbf{y}$ no es solución al problema $(\mathbb{P}_2)$

Se obtendrá ahora el resultado enunciado por la proposición:

Sea $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{+}^{nm}$, de la forma:

$\mathbf{w} = (w_{11},..,w_{1m},w_{21},..,w_{2m},...,w_{n1},..,w_{nm})$, tal que para alguna jo ocurre $w_{hjo}>0$ con $h \notin \mathbf{S}_{jo}$; además ocurre:

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij}/a_{ij} = 1; \ \forall \ j \in \{1,...n\} \qquad (36)$$

Puesto que $h \notin \mathbf{S}_j$, $\exists$ **s** tal que:

$$p_s a_{sj_o} > p_h a_{hj_o} \qquad (37)$$

Sea

$$\mathbf{x} = \mathbf{w} + (0,\ldots,0,-\xi_{hj},0,\ldots,0,\xi_{sj},0,\ldots,0)$$

con:

$$0 < \xi_{hj} < w_{hj},\ \xi_{hj} \text{ fija;}$$

$$\xi_{sj} = a_{sj}(1 - \sum_{i=1}^{m} w_{ij}/a_{ij} + \xi_{hj}/a_{hj}) = a_{sj}\xi_{hj}/a_{hj}$$

Es claro que:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} = 1;\ \forall\ j \in \{1,\ldots n\} \qquad (38)$$

ya que las restricciones asociadas a cada país j con $j \neq j_0$ permanecen sin cambio, y la asociada al país j_0 queda:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij_o}/a_{ij_o} =$$

$$\sum w_{ij_o}/a_{ij_o} - \xi_{hj}/a_{hj} + \xi_{sj})/a_{sj} = 1 \qquad (39)$$

Ahora bien, evaluando en la función objetivo **x**, **w**; y comparando:

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{w} + p_{sj}\xi_{sj} - p_{hj}\xi_{hj} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{w} + (p_{sj}a_{sj}/a_{hj} - p_{hj})\xi_{hj} \qquad (40)$$

Pero por hipótesis: $p_{sj}a_{sj} > p_{hj}a_{hj}$, así que $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} > \mathbf{p}\cdot\mathbf{w}$.

$\therefore$ **w** no puede ser un óptimo.

Así si **u** es solución, entonces satisface:

$$u_{ij} = 0 \text{ si } i \notin S_j$$
$$\sum_{i\in S_j} u_{ij}/a_{ij} = 1 \qquad (42)$$

■

La demostración de la contención en el sentido inverso es muy sencilla.

Contención ($\geq$)

Sea $\mathbf{u} \in U$. Se demostrará ahora que **u** es solución del problema $\mathbb{P}_2$. Supóngase ahora que cada país *j* se plantea el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} \leq 1$$
$$x_{ij} \geq 0,\ i=1,\ldots,m$$

Por el lema de Neyman y Pearson, el conjunto solución del problema es de la forma:

$$\left\{\mathbf{x}_j \in \Omega^{(mn)} \,\middle|\, x_{ij}=0 \text{ si } i\notin S_j, \sum_{i\in S_j} x_{ij}/a_{ij} \leq 1 \right\},$$

con el conjunto $\mathbf{S}_j$ definido de la siguiente manera:

$$\mathbf{S}_j \equiv \left\{ s \in \{1, \ldots, m\} \,\middle|\, p_s a_{sj} \geq p_i a_{ij}, \forall i=1, \ldots m. \right\}$$

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^m$ definidas de la siguiente manera:

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \equiv$$
$$\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1m}, u_{21}, \ldots u_{2m}, \ldots, u_{n1}, \ldots u_{nm})$$

Puesto que cada $\mathbf{u}_j$ satisface las condiciones requeridas por el Lema de Neyman y Pearson para resolver el problema del país *j* se tiene que la función $\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}$ restringida al conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} \leq 1$ alcanza su máximo en $\mathbf{u}_j$. Sumando el valor del máximo para todos los países *j* (*j*=1...n) se obtiene:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_i u_{ij} \qquad (43)$$

que es el máximo en el conjunto de vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nm}$ que satisfacen el conjunto de restricciones:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}/a_{ij} \le 1 \quad j=1,\ldots,n$$
$$x_{ij} \ge 0, \; i=1,\ldots,m, \; j=1,\ldots,n$$

Esta afirmación se justifica porque si no se alcanzara el máximo en **u**, existiría un vector **v** tal que:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i v_{ij} > \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i u_{ij} \qquad (44)$$

Entonces existiría un vector $\mathbf{v}_j$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} p_i v_{ij} > \sum_{i=1}^{m} p_i u_{ij} \qquad (45)$$

lo cual sería una contradicción, ya que en $\mathbf{u}_j$ se alcanzaba el máximo de $\sum_{i=1}^{m} p_i x_{ij}$.

■

Con esto se concluye la demostración de la proposición.

■

Es interesante señalar que en este contexto, un país j tiene ventaja comparativa sobre los otros países en los bienes i tales que $i \in \mathbf{S}_j$.

Por otro lado, se puede dar una interpretación intuitiva a este resultado:

$p_{ij}a_{ij} = p_{ij}L_j/l_{ij}$ es el precio de todo el trabajo disponible en el país j si se dedica de manera exclusiva a la producción de bien i. Así, a cada país le conviene especializarse dedicarse al sector productivo en el que su trabajo tiene un precio mayor.

C) Resumen del capítulo

En el estudio de la teoría de las ventajas comparativas, primeramente se caracterizaron los países, los bienes, los planes de producción factibles para los países y para el mundo y la condición de la ventaja comparativa. Se dio una caracterización alternativa para los planes de producción factibles. Se plantearon los problemas de optimización correspondientes a la maximización del vector de producción y del valor de dicha producción, y se caracterizaron las soluciones a estos problemas. De tal caracterización, se desprendió que las soluciones de ambos problemas son las mismas. Se obtuvo explícitamente la solución, y se examinó el significado intuitivo de la misma. Se encontró que esta solución consistía en que cada país se especializara en el bien en el que es comparativamente mejor que el otro.

Posteriormente se generalizó el resultado al caso en que hay más países y más bienes. De este modelo, se desprende que para países homogéneos es conveniente que se dediquen a producir bienes en los que son comparativamente mejores.

CAPITULO 2: INTERCAMBIO COMERCIAL VERTICAL ENTRE PAISES

(A) Elementos previos de ecuaciones diferenciales

El modelo de intercambio comercial vertical se apoya fundamentalmente en las ecuaciones diferenciales como herramienta. De hecho, la parte más importante descansa en el análisis *cualitativo* de la estabilidad de los sistemas de dos ecuaciones diferenciales. En esta sección se presentan las definiciones y los criterios de estabilidad que se aplicarán en el análisis.

Notación

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \; ; \; \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt}$$

Criterios de estabilidad

El siguiente criterio puede ser enunciado en forma general para su aplicación a sistemas de *n* ecuaciones diferenciales.

Criterio de estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales basado en los valores propios

Sea el sistema de ecuaciones

diferenciales simultáneas no lineales:

$$\dot{x} = f(x,y); \qquad \dot{y} = g(x,y).$$

Sea $z^* = (x^*,y^*)$, el estado estacionario, ie, el punto tal que

$$\dot{x} = f(x,y) = \dot{y} = g(x,y) = 0.$$

Sea J^* la matriz jacobiana asociada al sistema, evaluada en z^*:

$$J^* = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{z^*} & \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{z^*} \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{z^*} & \left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_{z^*} \end{bmatrix}$$

Si suponemos que los valores propios de la matriz jacobiana son reales, y que sus signos son:

a) Positivos, entonces el estado estacionario es localmente inestable.

b) Negativos, entonces el estado estacionario es localmente estable.

c) Uno de cada signo, entonces el estado estacionario posee localmente propiedades de un punto silla.

∎

Del álgebra lineal se sabe que si **A** es una matriz de n × n, con valores propios asociados $a_1, \ldots, a_n$, ocurre que:

Definición 2.1

Sea Δ un subconjunto abierto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Se llama campo vectorial en Δ de clase C^k, (con $1 \leq k \leq \infty$) a una función $X:\Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k. La ecuación diferencial asociada a él es:

$$\dot{x} = X(x)$$

Definición 2.2

Sean $\phi_1:D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_1:D_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ los flujos generados por los campos vectoriales $X_1:\Delta_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $X_2:\Delta_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente. Se dice que X_1 es topológicamente conjugado a X_2 cuando existe un homeomorfismo $h:\Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$ tal que $h(\phi_1(t,x))=\phi_2(t,h(x))\ \forall\ (t,x) \in D_1$.

■

Queda fuera de los objetivos de esta tesis el analizar con detalle esta definición. Basta señalar que si los campos vectoriales asociados a dos sistemas de ecuaciones diferenciales son topológicamente conjugados, entonces se mantendrán las propiedades de estabilidad de los respectivos estado estacionarios, es decir, si $\mathbf{x}_1$ es un estado estacionario estable (punto silla, o inestable, respectivamente) del campo X_1, $\mathbf{x}_2$

también es un estado estacionario estable (punto silla, o inestable) del campo X_2. Se enunciará ahora otro concepto necesario.

Definición 2.3

Sea p un estado estacionario de un campo vectorial X de clase C^r, $r \geq 1$. Se le llama hiperbólico si todos los autovalores de DX(p) tienen parte real diferente de cero.

■

Ahora, la noción de localidad a que se hizo referencia arriba, se desprende del Teorema de Hartman, el cual se enuncia a continuación:

Teorema 2.1

Sea $\mathbf{x}: \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 es p un punto singular hiperbólico. Existen vecindades V de p en Δ y W de **0** en $\mathbb{R}^n$ tales que el campo X restringido a la vecindad V es topológicamente conjugado al campo W restringido a la vecindad W.

■

Esto quiere decir que existe una *vecindad* alrededor del estado estacionario en la cual el comportamiento del diagrama de fase es semejante al del diagrama de fase del sistema de ecuaciones linealizado asociado (ie $\dot{x} = DX(x)$), en el sentido de que se el tipo de estado estacionario (estable, inestable, punto silla) es el mismo para ambos sistemas.

(B) Intercambio comercial vertical entre países (Modelo de Dutt)

En esta sección se utilizan supuestos distintos a los empleados en el análisis de la ventaja comparativa. En el modelo de Dutt se supone que existen dos países y se toman en consideración diferencias entre ellos tales como el aprendizaje obtenido por la elaboración de bienes manufactureros o bienes agrícolas. Se analizan dos escenarios distintos: el de autarquía (ausencia de intercambio comercial) y el de libre intercambio. En cada uno se examina la tasa de crecimiento del capital de cada país, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Esta tasa se ve influenciada por la productividad, la cual se modela con ecuaciones sencillas que la vinculan al capital

En el escenario del libre intercambio se analizan distintas situaciones que podrían ocurrir, dependiendo del tipo de equilibrio del sistema. Una de tales situaciones consiste en la disminución del capital del país periferia, lo cual es un resultado de interés puesto que pone de relieve que el intercambio entre países desiguales no siempre es conveniente.

I) Planteamiento

Supóngase que hay dos países, uno al que se le llamará en este análisis "centro", y otro al que se le llamará "periferia", los cuales se denotarán con j = 1, 2. En estos países se producen dos bienes: uno manufacturado y otro agrícola, a los cuales se les denotará con i = 1, 2, respectivamente.

El bien agrícola requiere para su producción sólo trabajo y su función de producción es lineal:

$$A_j = b_{2j}L_{2j} \qquad (1)$$

donde:

A_j = Cantidad de bien 2 (bien agrícola) en el país j.

b_{2j} = Productividad del trabajo en el sector 2 (agrícola) en el país j.

L_{2j} = Cantidad de trabajo que se asigna en el país j al sector 2 (agrícola) en el país j.

El bien manufacturado requiere tanto trabajo como capital en proporciones fijas para su producción, es decir, que la función de producción del bien manufacturado es del tipo Leontief:

$$M_j = f_{1j}(K_j, L_{1j}) = \text{Mín}\ \{b_{1j}L_{1j}, a_jK_j\} \qquad (2)$$

donde:

M_j = Cantidad de bien 1 (manufacturado) en el país j.

b_{1j} = Productividad del trabajo en el sector 1 (manufacturero) en el país j.

L_{1j} = Cantidad de trabajo que se asigna en el país j al sector 1 (sector manufacturero) en el país j.

a_j = Productividad del capital (razón producto-capital en el sector manufacturero) en el país j.

K_j = Acervo de capital en el país j.

La oferta de trabajo disponible en cada

país es constante en el tiempo. El capital inicial es producto de la inversión hecha en el pasado. Se asumirá que ninguno de los dos países se especializa completamente en la producción de un sólo bien. Se hace también la suposición de que hay libre movilidad del trabajo dentro de cada país, pero que no es transferible entre países. Debido a esto, el salario se iguala en los dos sectores productivos de cada país, ya que si en alguno de ambos el salario fuera más alto, éste atraería a todos los trabajadores, y ante este exceso de oferta de trabajo, su precio (el salario) disminuiría hasta llegar a la igualdad. Es importante recalcar la importancia del supuesto de la especialización incompleta: ésta es necesaria para la igualación del salario entre los dos sectores, dada la ausencia de transferencias de trabajo entre países.

Si hace el supuesto de que no hay desperdicio, al elaborar el bien manufacturado ocurre que:

$$b_{1j}L_{1j} = a_j K_j \qquad (3)$$

con lo que se tiene que:

$$M_j = a_j K_j \qquad (4)$$

y que:

$$L_{1j} = \frac{M_j}{b_{1j}} = \frac{a_j K_j}{b_{1j}} \qquad (5)$$

Se asume que hay pleno empleo, lo que se traduce en la siguiente ecuación:

$$L_{2j} = L_j - L_{1j} = L_j - \frac{a_j K_j}{b_{1j}} \qquad (6)$$

con L_j = Oferta total de trabajo disponible en el país j.

Esta igualdad se interpreta de la siguiente manera: todos los que no se ocupen en el sector manufacturero se ocuparán en el sector agrícola.

Sustituyendo L_{2j} en la función de producción del sector agrícola se obtiene una expresión que será útil posteriormente.

$$A_j = b_{2j} L_{2j} = b_{2j} \left[L_j - \frac{a_j K_j}{b_{1j}} \right] \qquad (7)$$

Sea p_1 el precio del bien manufacturado en términos del bien agrícola (es decir, se asume que el precio del bien agrícola es 1).

Suponiendo que el bien de capital es el agrícola, la tasa de beneficio en el sector manufacturero es:

$$r_j = \frac{p_{1j}M_j - b_{2j}L_{1j}}{K_j} \qquad (8)$$

Esta tasa se reexpresará para poder utilizarla posteriormente:

$$r_j = \frac{p_{1j}a_jK_j - b_{2j}(a_jK_j/b_{1j})}{K_j} \qquad (9)$$

$$r_j = (p_{1j} - b_{2j}/b_{1j})a_j \qquad (10)$$

donde p_{1j} es el precio del bien manufacturado.

Se supondrá que todos los salarios se consumen, de los cuales una fracción α_j se dedica en el país j al consumo de bien manufacturado.

Además, se asumirá que todos los beneficios se ahorran (y por lo tanto se invierten).

Con estas suposiciones, el acervo de capital crece en el tiempo de acuerdo con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{K}_j = r_j \, K_j \qquad (11)$$

Esta ecuación es importante, porque en ella se basa el análisis que se hace posteriormente sobre el comportamiento de la tasa del crecimiento del capital en ambos países

Por otro lado, se asumirá que existen efectos generalizados de aprendizaje a la Galtung, es decir, que la productividad en ambos sectores aumenta con la experiencia adquirida al producir en el sector manufacturero. Arrow propuso que una manera aproximada de medir la experiencia es a través de la inversión acumulada.

Suponiendo que la tasa de depreciación δ es cero, la inversión acumulada es igual al capital, como se demuestra a continuación:

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = I + \delta \qquad (12)$$

con:

K = Capital

I = Inversión

δ = Tasa de depreciación instantánea.

Integrando respecto al tiempo:

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dK}{ds}\, ds = \int_{t_o}^{t} I\, ds + \int_{t_o}^{t} \delta\, ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_o}^{t} I\, ds = K_t - K_o - \delta t \qquad (13)$$

y sustituyendo $\delta \equiv 0$, se tiene que:

$$\int_{t_o}^{t} I\, ds = K_t - K_o \qquad (14)$$

con K_t = Capital en el período t; K_o = capital inicial.

∴ la inversión acumulada en el período t:

$$I_t = \int_{t_o}^{t} I\, ds + K_o = K_t \qquad (15)$$

Puesto que la productividad se incrementa al aumentar la experiencia, y ésta se mide de manera aproximada utilizando el capital, se puede modelar de manera sencilla el cambio en la productividad mediante las siguientes ecuaciones:

$$b_{1j} = \theta_{1j}\, K_j^{\nu_j} \qquad (16)$$

$$b_{2j} = \theta_{2j} \, K_j^{\gamma j} \qquad (17)$$

donde $\theta_{ij} > 0$, νj, $\gamma j \in (0,1)$. Con estas condiciones se garantizan rendimientos decrecientes del aprendizaje.

Para hacer énfasis en los efectos producidos por las diferencias en el aprendizaje, se supondrá que en los dos países coinciden los siguientes parámetros:

a) la productividad marginal de capital,

b) la proporción de gasto en bien manufacturado, y

c) los parámetros de las funciones de aprendizaje.

Expresando este supuesto con la notación definida anteriormente:

$$a_j = a; \ \alpha_j = \alpha; \ \theta_{ij} = \theta_i;$$
$$\nu_j = \nu; \ \gamma_j = \gamma, \quad \text{con } j = 1, 2. \qquad (18)$$

Ello conlleva la hipótesis bastante fuerte de que la tecnología en los dos países es igual: con una cantidad $\mathcal{K}$ de capital, una cantidad $\mathcal{L}_1$ de trabajo dedicado al sector manufacturero y una cantidad de trabajo $\mathcal{L}_2$ en el sector agrícola de cada país, en ambos se obtienen las siguientes producciones:

$$M = \theta_1 \, \mathcal{K}^{\nu} \, \mathcal{L}_1 = a \, \mathcal{K},$$

$$A = \theta_2 \, \mathcal{K}^{\nu} \, \mathcal{L}_2 \qquad (19)$$

Lo que hará la diferencia entre ambos países, será la cantidad de trabajo disponible en cada país, la cual determinará la dirección del intercambio cuando este sea permitido, como se verá más adelante.

En el análisis subsecuente, se procederá a hallar las condiciones que se cumplen en el equilibrio económico a corto plazo, en el cual ocurre que se igualan la oferta y la demanda en los dos mercados. Posteriormente se analizarán lo que ocurre en el equilibrio de largo plazo. En este caso se vacían ambos mercados, y se mantienen constantes los consumos y el capital (por ende la producción también permanece constante).

II) Autarquía (ausencia de intercambio)

En el equilibrio económico a corto plazo para cada economía, ocurre que los mercados de bienes y de trabajo se vacían. Para el mercado de bienes manufacturados, se tiene que:

Oferta = Demanda

$$p_{1j}M_j = \alpha b_{2j}L_j; \quad j = 1,\ 2 \qquad (20)$$

Por la Ley de Walras, si hay equilibrio económico en dos de los tres mercados (el de trabajo, por definición; y el de bien manufacturado, con la condición mencionada) y los agentes son racionales (en el sentido de que no desperdician recursos), también el mercado de bien agrícola estará en equilibrio.

Por lo tanto, el análisis se limitará a considerar el mercado de bien manufacturado.

A continuación se efectuarán varios pasos algebraicos que permitirán determinar la tasa de crecimiento del capital en cada país cuando no hay intercambio comercial, y el tipo de equilibrio que ocurre en esta situación. Primeramente se obtendrá una expresión para el precio del bien manufacturado.

Sustituyendo la productividad marginal del trabajo por la ecuación que modela su comportamiento (17):

$$p_{1j}M_j = \alpha\ \theta_2\ K_j^{\gamma}\ L_j \qquad (21)$$

Sustituyendo la ecuación (4):

$$p_{1j}\ a\ K_j = \alpha\ \theta_2\ K_j^{\gamma}\ L_j \qquad (22)$$

$$\therefore\ p_{1j} = \frac{\alpha\ \theta_2\ L_j}{a\ K_j^{1-\gamma}} \qquad j = 1,\ 2 \qquad (23)$$

Esta expresión es conveniente porque vincula el precio del bien manufacturado de cada país con el capital y la fuerza de trabajo existentes en él. Con esta expresión del precio, se puede reexpresar la tasa de beneficio en el bien manufacturero, la cual permitirá posteriormente reexpresar las ecuaciones de cambio del capital.

Sustituyendo el precio p_{1j} en la tasa de beneficio (10), y usando las ecuaciones (16) y (17) se obtiene:

$$r_j = \left\{ \frac{\alpha\ L_j}{K_j^{1-\gamma}} - \frac{a\ K_j^{\gamma}}{\theta_1\ K_j^{\nu}} \right\} \theta_2 \qquad (24)$$

Una vez se tiene esta expresión de la tasa de beneficios es posible expresar la ecuación de la inversión neta (3) (i.e. la ecuación del cambio de capital) en términos del capital y la fuerza de trabajo en el país *j*:

$$\dot{K}_j = \left\{ \frac{\alpha \ L_j}{K_j^{1 \ -\gamma}} - \frac{a}{\theta_1 \ K_j^{\nu-\gamma}} \right\} \theta_2 \ K_j, \ j = 1,2 \qquad (25)$$

Se tiene un par de ecuaciones diferenciales de primer orden que modela la tasa de crecimeinto del capital.

En el equilibrio económico de largo plazo el capital permanece constante, ie $\dot{K}_j = 0$. En otras palabras, en el largo plazo se llega al estado estacionario del sistema de ecuaciones formulado. Es de interés el estado estacionario ***no trivial*** (ie, se descarta el (0,0)). Se obtendrá a continuación el valor de K_1 y K_2 en el estado estacionario.

$$0 = \left\{ \frac{\alpha \ L_j}{K_j^{1 \ -\gamma}} - \frac{a}{\theta_1 \ K_j^{\nu-\gamma}} \right\} \theta_2 \ K_j, \quad j = 1,2. \qquad (26)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\alpha \ L_j}{K_j^{1-\gamma}} - \frac{a}{\theta_1 \ K_j^{\nu-\gamma}}, \qquad j = 1, \ 2.$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha \ K_j^{-1} \ L_j - a \ K_j^{-\nu} / \ \theta_1$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \ K_j^{-1} \ L_j = a \ K_j^{-\nu} / \ \theta_1 \qquad (27)$$

De manera que K_j^* del estado estacionario es:

$$K_j^* = \left\{ \alpha\ \theta_1\ L_j\ /\ a \right\}^{1/(1-\nu)},\ j = 1,\ 2 \qquad (28)$$

No sólo es de interés conocer el valor del capital en cada país en el estado estacionario. Además, es importante saber si estos estados estacionarios son estables o inestables. Sería de poco interés conocer el valor del capital en equilibrio de cada país si no fuera posible alcanzarlo. Por esta razón, se analizará ahora la estabilidad de cada uno.

Escribiendo explícitamente la ecuación del país centro:

$$\dot{K}_1 = f(K_1, K_2) = \left\{ \frac{\alpha L_1}{K_1^{1-\gamma}} - \frac{a}{\theta_1\ K_1^{\nu-\gamma}} \right\} \theta_2 K_1 \quad (29)$$

La ecuación para el país periferia es:

$$\dot{K}_2 = g(K_1, K_2) = \left\{ \frac{\alpha L_2}{K_2^{1-\gamma}} - \frac{a}{\theta_1\ K_2^{\nu-\gamma}} \right\} \theta_2 K_2 \quad (30)$$

Para analizar la estabilidad, es menester encontrar los valores propios de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones diferenciales. Primero, se calculan las derivadas de las funciones f y g, evaluadas en K^*:

$$\frac{\partial f}{\partial K_1} = \theta_2\left\{\alpha\gamma K_1^{\gamma-1}L_1 - a(\gamma-\nu+1)K_1^{\gamma-\nu}/\theta_1\right\} \quad (31)$$

Evaluando en $K^* = (K_1^*, K_2^*)$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{K^*} =$$

$$\theta_2\left\{\alpha\gamma K_1^{*\ \gamma-1}L_1 - a(\gamma-\nu+1)K_1^{*\ \gamma-\nu}/\theta_1\right\} \quad (32)$$

Además:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{K^*} = 0 \quad (33)$$

Análogamente:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{K^*} = 0 \quad (34)$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{K^*} =$$

$$\theta_2\left\{\alpha\gamma\ K_2^{*\ \gamma-1}L_2 - a(\gamma-\nu+1)K_2^{*\ \gamma-\nu}/\theta_1\right\} \quad (35)$$

Habiendo calculado estas derivadas, es posible encontrar la matriz jacobiana asociada al sistema de ecuaciones diferenciales (evaluada en K^*):

$$\begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{K^*} & 0 \\ 0 & \left.\dfrac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{K^*} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

cuyos valores propios son:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{K^*}, \quad \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{K^*} \qquad (37)$$

Como ya se ha comentado, es de interés saber cuando es posible alcanzar el estado estacionario, es decir, cuando hay estabilidad. Esto ocurre, de acuerdo a lo explicado en los antecedentes matemáticos, cuando los valores propios son negativos.

Para valores de parámetros tales que:

$$2\gamma L_j \leq (\gamma - \nu + 1)(L_1 + L_2), \quad j = 1,2$$

ocurre que:

$$\frac{2\alpha\gamma L_j\theta_1 a}{(\gamma-\nu+1)\theta_1\alpha(L_1+L_2)} \leq a$$

$$\Leftrightarrow \alpha\gamma K^{*\nu-1}L_j \leq \frac{a(\gamma-\nu+1)K^{*\gamma-\nu}}{\theta_1} \qquad (38)$$

y con ello:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{K^*}, \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{K^*} \leq 0 \qquad (39)$$

con lo que el sistema es estable.

III) Libre intercambio

Con libre intercambio, la condición de equilibrio económico en el mercado de bien manufacturado se expresa de la siguiente manera:

$$p_1(M_1 + M_2) = \alpha(b_{21}L_1 + b_{22}L_2) \qquad (40)$$

lo que se interpreta como la igualdad entre la oferta y la demanda mundial de bien manufacturado. Se harán algunas manipulaciones algebraicas con esta ecuación para obtener el precio de equilibrio del bien manufacturado.

Sustituyendo las expresiones (1) para M_1 y M_2 se obtiene:

$$p_1a(K_1 + K_2) = \alpha(b_{21}L_1 + b_{22}L_2) \qquad (41)$$

Sustituyendo además las ecuaciones que modelan el comportamiento de la productividad marginal:

$$p_1a(K_1 + K_2) = \alpha\theta_2\ (K_1^{\gamma}\ L_1 + K_2^{\gamma}\ L_2) \qquad (42)$$

Así, en el equilibrio el precio mundial del bien manufacturado va a ser:

$$p_1 = \frac{\alpha\theta_2 \ (K_1^{\gamma} \ L_1 \ + \ K_2^{\gamma} \ L_2)}{a(K_1 \ + \ K_2)} \qquad (43)$$

Es claro que si ocurre $p_{12} > p_1 > p_{11}$ (con p_{12}, p_{11} los precios de autarquía del bien manufacturado), al país periferia le convendrá importar y al centro exportar bien manufacturado. En este modelo se supondrá que:

$$K_1 \ / \ K_2 > (L_1 \ / \ L_2)^{1/(1-\gamma)} \qquad (44)$$

lo cual conlleva que se va a dar la condición de precios arriba mencionada y que por lo tanto el país centro exportará el bien manufacturado.

Ahora utilizando el precio de equilibrio del bien manufacturado y la expresión (10), se puede obtener la tasa de beneficio del bien manufacturado en cada país:

$$r_j = \left(\frac{\alpha(b_{21}L_1 \ + \ b_{22}L_2)}{M_1 \ + \ M_2} - \frac{b_{2j}}{b_{1j}} \right) a$$

$$= \left(\frac{\alpha\theta_2 \ (K_1^{\gamma} \ L_1 + K_2^{\gamma} \ L_2)}{a(K_1 \ + \ K_2)} - \frac{b_{2j}}{b_{1j}} \right) a \qquad (45)$$

Nuevamente se procederá a utilizar la tasa de beneficio del bien manufacturado para modelar la tasa de crecimiento del capital en cada país. La ecuación que modela el cambio en el capital es:

$$\dot{K} = \left[\frac{\alpha(b_{21}L_1 + b_{22}L_2)}{M_1 + M_2} - \frac{b_{2j}}{b_{1j}}\right] a\ K_j$$

$$= \left[\frac{\alpha\theta_2\ (K_1^{\gamma}\ L_1 + K_2^{\gamma}\ L_2)}{a(K_1 + K_2)} - \frac{b_{2j}}{b_{1j}}\right] a\ K_j$$

$$= \left[\frac{\alpha\theta_2\ (K_1^{\gamma}\ L_1 + K_2^{\gamma}\ L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a\ \theta_2\ K_j^{\gamma}}{\theta_1\ K_j^{\nu}}\right] K_j$$

$$= \left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{aK_j^{\gamma}}{\theta_1 K_j^{\nu}}\right] \theta_2\ K_j \qquad (46)$$

Nuevamente es posible obtener los valores del capital en cada país un estado estacionario $\mathbf{K}^* = (K_1^*, K_2^*)$ diferente del trivial (existen otros dos, que se analizarán posteriormente).

$$\dot{K}_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\alpha \ (K_1^{\gamma} \ L_1 + K_2^{\gamma} \ L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a \ K_j^{\gamma}}{\theta_1 \ K_j^{\nu}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha \ (K_1^{\gamma} \ L_1 + K_2^{\gamma} \ L_2)}{(K_1 + K_2)} = \frac{a \ K_j^{\gamma}}{\theta_1 \ K_j^{\nu}} \quad \forall j = 1,2 \qquad (47)$$

De ello se desprende que:

$$a \ K_1^{\ \gamma-\nu} / \ \theta_1 = a \ K_2^{\ \gamma-\nu} / \ \theta_1$$
$$\Leftrightarrow K_1^* = K_2^* = K^* \qquad (48)$$

Por lo tanto, se puede deducir que:

$$\frac{\alpha \ K^{*\gamma} \ (L_1 + L_2)}{2K^*} = \frac{a \ K^{*\gamma}}{\theta_1 \ K^{*\nu}} \qquad (49)$$

$$\Rightarrow K^* = \left(\frac{2a}{\theta_1 (L_1 + L_2) \alpha} \right)^{\frac{1}{1-\nu}} \qquad (50)$$

Se observa que la suposición de iguales tecnologías arroja un resultado fuerte: En teoría los dos países podrían llegar al mismo nivel de capital en el largo plazo. Además, si se supone $L_2 = L_1$, el nivel del capital en el estado estacionario coincidirá bajo el libre comercio y la autarquía. Este hecho podría hacer pensar a primera vista que el intercambio no modifica la situación de los países. Pero hay que recordar que no sólo es importante conocer el valor del capital en cada país en el estado estacionario, sino que es necesario saber si este estado es estable o no. El modelo permite extraer conclusiones interesantes que se desprenden de la estabilidad del sistema de ecuaciones diferenciales.

Para analizar la estabilidad, primero se obtendrá la matriz jacobiana asociada al sistema de ecuaciones diferenciales. Se ha dado ya la ecuación que define al sistema de ecuaciones diferenciales. Ahora se escribirán las dos explícitamente:

$$\dot{K}_1 = \left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma}} \right] \theta_2 \; K_1 \qquad (51)$$

$$\dot{K}_2 = \left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_2^{\nu-\gamma}} \right] \theta_2 \; K_2 \qquad (52)$$

Como en el caso anterior, se utilizará la notación:

$$\dot{K}_1 = f(K_1, K_2), \quad \dot{K}_2 = g(K_1, K_2).$$

Se obtendrá ahora la matriz jacobiana evaluada en el estado estacionario.

Calculando las derivadas (Ecuaciones 53, 54, 55 y 56):

$$\frac{\partial f}{\partial K_1} = \theta_2 \left(\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma}} \right) +$$

$$\theta_2 K_1 \left(\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} \right)$$

$$+ \theta_2 K_1 \left(\frac{a(\nu - \gamma)}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma+1}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial K_2} = \theta_2 K_1 \left(\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_2^{\gamma-1}L_2) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial K_1} =$$

$$\theta_2 K_2 \left(\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial K_2} = \theta_2 \left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_2^{\nu-\gamma}} \right] +$$

$$\theta_2 K_2 \left[\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_2^{\gamma-1}L_2) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} \right]$$

$$+ \theta_2 K_2 \left[\frac{a(\nu - \gamma)}{\theta_1 K_2^{\nu-\gamma+1}} \right]$$

Ahora, evaluando en $\mathbf{K}^* = (K^*, K^*)$ se obtiene (ecuaciones 57, 58, 59 y 60):

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} =$$

$$\theta_2 \left[\frac{\alpha K^{*\gamma-1}(L_1+L_2)}{4} + \frac{\alpha\gamma L_1 K^{*\gamma-1}}{2} + \frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}} \right]$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} = \alpha\ \theta_2 \left[\frac{2\gamma L_2 - L_1 - L_2}{4K^{*1-\gamma}} \right]$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} = \alpha\ \theta_2 \left[\frac{2\gamma L_1 - L_1 - L_2}{4K^{*1-\gamma}} \right]$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} =$$

$$\theta_2\left[\frac{\alpha K^{*\gamma-1}(L_1+L_2)}{4}+\frac{\alpha\gamma L_2 K^{*\gamma-1}}{2}+\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}\right]$$

Como se sabe, la matriz jacobiana J^* evaluada en $\mathbf{K}^*$ tiene la siguiente forma:

$$J^* = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} & \left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} \\ \left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} & \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} \end{bmatrix} \qquad (61)$$

Como se explicó en la sección de antecedentes matemáticos, para conocer las características de estabilidad del sistema, basta analizar las expresiones siguientes:

$$\mathrm{Tr}\ (J^*) = \left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} + \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} \qquad (62)$$

$$\mathrm{Det}\ (J^*) = \left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} - \left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} \qquad (63)$$

Se calculará primero la expresión para la traza. De la expresión recién mencionada es inmediato que (ecuación 64):

$$\mathrm{Tr}\ (J^*) =$$

$$\theta_2 \left[\frac{\alpha K^{*\gamma-1} (L_1+L_2)}{2} + \frac{\alpha\gamma (L_1+L_2) K^{*\gamma-1}}{2} + \frac{2a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}} \right]$$

$$= \theta_2 \frac{1}{K^{*(\nu-\gamma)}} \left[\frac{\alpha (L_1+L_2)(1+\gamma)}{2K^{*(1-\nu)}} + \frac{2a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1} \right]$$

Se reexpresará esta expresión de manera conveniente para los cálculos posteriores.

Se tenía que:

$$K^* = \left[\frac{2a}{\theta_1 (L_1 + L_2)\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\nu}}$$

$$\Rightarrow K^{*(1-\nu)} = \frac{2a}{\theta_1 (L_1 + L_2)\alpha} \qquad (65)$$

y además:

$$\frac{1}{K^{*(\nu-\gamma)}} = K^{*(1-\gamma)} \frac{2a}{\theta_1 (L_1 + L_2)\alpha} \qquad (66)$$

Sustituyendo estas dos últimas expresiones en el desarrollo obtenido para la traza se obtiene:

$$Tr\ (J^*) =$$

$$\theta_2 \frac{1}{K^{*(\nu-\gamma)}} \left[\frac{a(1+\gamma)}{\theta_1} + \frac{2a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1} \right] =$$

$$\theta_2 \left[\frac{a(2\nu-\gamma-1)}{\theta_1\ K^{*(\nu-\gamma)}} \right]$$

$$= \theta_2 \left[\frac{(2\nu-\gamma-1)\alpha(L_1 + L_2)}{\theta_1\ K^{*(1-\gamma)}} \right] \qquad (66)$$

Ahora, se obtendrá una expresión explícita para el determinante. Calculando primero cada sumando por separado:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} \cdot \left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*} =$$

$$(\theta_2)^2\left\{\left(\frac{\alpha K^{*\gamma-1}(L_1+L_2)}{4}\right)^2+\frac{\alpha^2\gamma L_2 K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)}{8}+\frac{\alpha K^{*(\gamma-1)}(L_1+L_2)a(\nu-\gamma-1)}{4\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}+\frac{\alpha^2\gamma L_1 K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)}{8}+\frac{\alpha^2\gamma^2 L_1 L_2 K^{*2(\gamma-1)}}{4}\right.$$

$$+\frac{\alpha\gamma L_1 K^{*\gamma-1}a(\nu-\gamma-1)}{2\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}+\frac{a(\nu-\gamma-1)\alpha K^{*\gamma-1}(L_1+L_2)}{4\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}$$

$$\left.+\frac{a(\nu-\gamma-1)\alpha\gamma L_2 K^{*\gamma-1}}{2\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}+\left(\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}\right)^2\right\}=$$

$$(\theta_2)^2\left\{\left(\frac{\alpha K^{*\gamma-1}(L_1+L_2)}{4}\right)^2+\frac{\alpha^2\gamma K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)^2}{8}+\right.$$

$$\frac{\alpha K^{*(\gamma-1)}(L_1+L_2)a(\nu-\gamma-1)}{2\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}} +$$

$$\frac{\alpha^2\gamma^2 L_1 L_2 K^{*2(\gamma-1)}}{4} +$$

$$\frac{\alpha\gamma(L_1+L_2)K^{*\gamma-1}a(\nu-\gamma-1)}{2\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}$$

$$\left. + \left(\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}\right)^2 \right\} =$$

$$(\theta_2)^2\left\{\frac{\alpha^2 K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)^2}{4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^2 L_1 L_2}{(L_1+L_2)^2}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}\left(\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1 K^{*(\nu-\gamma)}}+\frac{\alpha K^{*(\gamma-1)}(L_1+L_2)(1+\gamma)}{2}\right)\right\}$$

(Ecuación 67)

Calculando ahora la segunda expresión:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^*}\cdot\left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^*} =$$

$$(\alpha\theta_2)^2\left[\frac{2\gamma L_1 - L_1 - L_2}{4K^{*1-\gamma}}\cdot\frac{2\gamma L_2 - L_1 - L_2}{4K^{*1-\gamma}}\right] =$$

$$(\alpha\theta_2)^2\left[\frac{4\gamma^2 L_1L_2 - (L_1+L_2)(2\gamma L_1+2\gamma L_2)+(L_1+L_2)^2}{16K^{*2(1-\gamma)}}\right] =$$

$$(\alpha\theta_2)^2\left[\frac{4\gamma^2 L_1L_2 + (L_1+L_2)^2(1-2\gamma)}{16K^{*2(1-\gamma)}}\right] \qquad (68)$$

De esta manera:

$$\mathrm{Det}\ (J^*) =$$

$$(\theta_2)^2\left\{\frac{\alpha^2K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)^2}{4}\left[\frac{1}{4}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma^2L_1L_2}{(L_1+L_2)^2}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1K^{*(\nu-\gamma)}}\left[\frac{a(\nu-\gamma-1)}{\theta_1K^{*(\nu-\gamma)}}+\frac{\alpha K^{*(\gamma-1)}(L_1+L_2)(1+\gamma)}{2}\right]\right\}$$

$$-\ (\alpha\theta_2)^2\left[\frac{4\gamma^2L_1L_2+(L_1+L_2)^2(1-2\gamma)}{16K^{*2(1-\gamma)}}\right] =$$

$$\frac{\theta_2^2\alpha^2K^{*2(\gamma-1)}(L_1+L_2)^2\gamma}{4}+\frac{\theta_2^2a^2(\nu-\gamma-1)^2}{\theta_1^2K^{*(\nu-\gamma)}}$$

$$+\frac{\theta_2^2\alpha(\nu-\gamma-1)aK^{*(\gamma-1)}(L_1+L_2)(1+\gamma)}{2\theta_1K^{*(\nu-\gamma)}} \qquad (69)$$

También se reexpresará el determinante para facilitar los cálculos posteriores.

Como se había visto anteriormente ocurre que:

$$K^{*(1-\nu)}=\frac{2a}{\theta_1(L_1+L_2)\alpha},$$

$$\frac{1}{K^{*(\nu-\gamma)}}=K^{*(1-\gamma)}\frac{2a}{\theta_1(L_1+L_2)\alpha} \qquad (70)$$

Usando este hecho, se puede escribir la expresión del determinante de la siguiente manera:

$$\mathrm{Det}\ (J^*)=\frac{\theta_2^2\alpha^2(L_1+L_2)^2\gamma}{4K^{*2(1-\gamma)}}+$$

$$\frac{\alpha^2\theta_2^2(L_1+L_2)^2(\nu-\gamma-1)^2}{4K^{*2(1-\gamma)}}+$$

$$\frac{\theta_2^2\alpha^2(L_1+L_2)^2(\nu-\gamma-1)(1+\gamma)}{4K^{*2(1-\gamma)}} =$$

$$\frac{\theta_2^2\alpha^2(L_1+L_2)^2}{4K^{*2(1-\gamma)}}\left[\gamma + (\nu-\gamma-1)^2 + (\nu-\gamma-1)(1+\gamma)\right] =$$

$$\frac{\theta_2^2\alpha^2(L_1+L_2)^2}{4K^{*2(1-\gamma)}}(\nu-\gamma)(\nu-1) \qquad (71)$$

Una vez obtenidos la traza y el determinante (cuyos signos dependen de γ y ν), se pueden analizar las condiciones de estabilidad mediante los criterios establecidos en la sección de antecedentes matemáticos. Para hacer los diagramas de fase, se distinguirá entre los tres casos enuciados a continuación:

A) $2\nu-\gamma-1 < 0$, $\nu-\gamma < 0$; estabilidad local:
$Tr\ (J^*) < 0$, $Det\ (J^*) > 0$

B) $2\nu-\gamma-1 < 0$, $\nu-\gamma > 0$; punto silla local:
$Det\ (J^*) < 0$

C) $2\nu-\gamma-1 > 0$, $\nu-\gamma > 0$; punto silla local:
$Det\ (J^*) < 0$

Para hacer los diagramas de fase, se hará el supuesto simplificador $L_1 = L_2$. Recuérdese que se había asumido anteriormente que ocurría $K_1 / K_2 > (L_1 / L_2)^{1/(1-\gamma)}$. Con el supuesto recién hecho, esta condición significa simplemente $K_1 > K_2$, es decir, que el país centro tiene un mayor nivel de capital que el país periferia. Se demuestra a continuación que la pendiente de la curva $\dot{K}_1 = 0$ es igual a $-(2\nu-\gamma-1)/(\gamma-1)$.

Primero hay que notar que si $K_1 \neq 0$, ocurre que:

$$\dot{K}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha(K_1{}^{\gamma}L_1 + K_2{}^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1{}^{\nu-\gamma}} = 0 \qquad (72)$$

Haciendo la derivación implícita correspondiente:

$$\left\{ \frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1{}^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1{}^{\gamma}L_1+K_2{}^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} - \frac{a(\nu-\gamma)}{\theta_1 K_2{}^{\nu-\gamma+1}} \right\} dK_1 +$$

$$\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1{}^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1{}^{\gamma}L_1+K_2{}^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} dK_2 = 0$$

$$\therefore \quad -\left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{K^*} = \frac{2K^{*\gamma}\gamma L_1 - K^{*\gamma}(L_1+L_2)}{2K^{*\gamma}\gamma L_2 - K^{*\gamma}(L_1+L_2)}$$

$$-\frac{(\gamma-\nu)aK^{*\gamma-\nu-1}\cdot 4K^{*2}}{\alpha(2K^{*\gamma}\gamma L_2 - K^{*\gamma}(L_1+L_2))\theta_1} \quad (73)$$

Y dado que se supuso $L_1 = L_2 = L$:

$$-\left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{K^*} = 1 + \frac{2(\gamma-\nu)aK^{*\gamma-\nu+1}}{2K^{*\gamma}L\alpha(\gamma - 1)\theta_1}$$

$$= 1 + \frac{2\ (\gamma-\nu)\ a\theta_1\alpha\ (2L)}{2L\alpha\ (\gamma-1)\ (2a)\ \theta_1} = \frac{\gamma - 1 + \gamma - \nu}{\gamma - 1} =$$

$$(2\gamma - \nu - 1)/(\gamma - 1) \qquad (74)$$

■

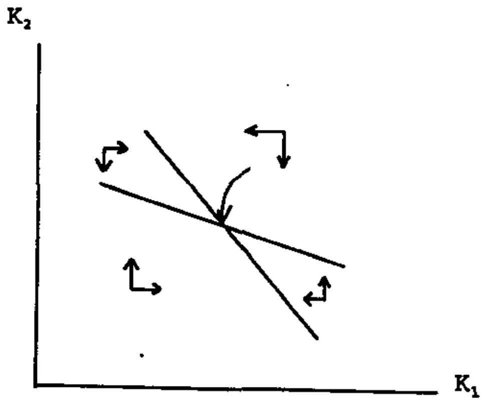
Por un procedimiento completamente análogo, se demuestra que la pendiente de la curva $\dot{K}_2 = 0$ es igual a $-(\gamma-1)/(2\nu-\gamma-1)$.

En los casos A y B, ambas curvas tendrán pendiente negativa. Sin embargo:

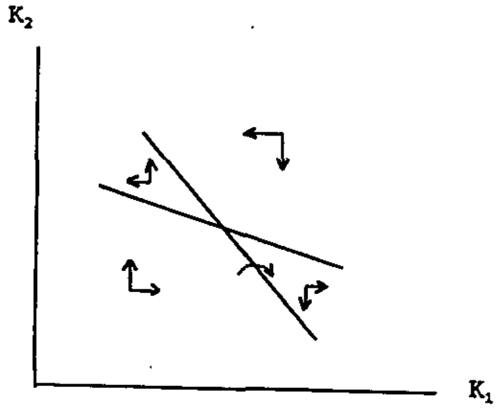
a) En el caso A, $\dot{K}_1 = 0$ tiene mayor pendiente en valor absoluto que $\dot{K}_2 = 0$.

b) En el caso B, $\dot{K}_2 = 0$ tiene mayor pendiente en valor absoluto que $\dot{K}_1 = 0$.

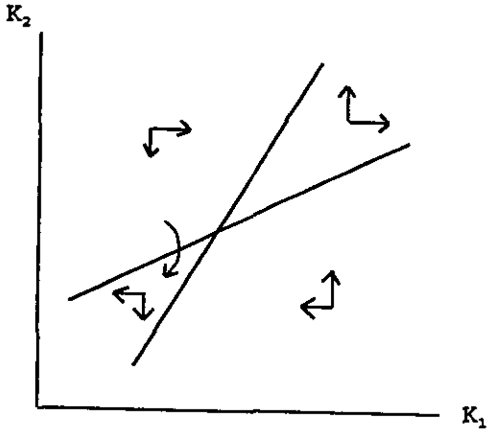
En el caso C, $\dot{K}_1 = 0$ tiene mayor



Caso A



Caso B



Caso C

pendiente que $\dot{K}_2 = 0$, y ambas son positivas.

En las ilustraciones se exhiben los diagramas de fase para los tres casos. En el caso A (localmente estable), se concluye que trayectorias que inician en puntos suficientemente cercanos al estado estacionario , se acercarán a éste.

En los casos B y C se exhiben trayectorias que inician en puntos suficientemente cercanos al estado estacionario, en las que inicialmente el capital del país periferia aumenta, pero posteriormente disminuye.

Puntos *suficientemente cercanos* al estado estacionario son aquellos que se encuentran en la vecindad en que el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales y su sistema linealizado asociado son topológicamente conjugados. Se hace énfasis en ello, ya que si la mencionada vecindad es muy pequeña (lo cual depende de la magnitud de los diferentes parámetros del modelo) el capital del país periferia, aunque disminuye, puede no variar ostensiblemente. Sin embargo, si la vecindad es grande, esto puede significar la descapitalización del país periferia, con la consecuente decadencia económica.

IV) Otros equilibrios

Dutt halló uno de los equilibrios del sistema de ecuaciones diferenciales para el libre intercambio. Sin embargo existen otros dos que se exhiben en esta sección.

Se sabe que en un estado estacionario ocurre:

$$\dot{K}_1 = 0, \ \dot{K}_2 = 0 \qquad (75)$$

Claramente

$$\dot{K}_2 = \left[\frac{\alpha(K_1{}^{\gamma}L_1 + K_2{}^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_2{}^{\nu-\gamma}}\right] \theta_2 K_2 = 0 \qquad (76)$$

puede ocurrir cuando $K_2 = 0$.

Ahora, sustituyendo en:

$$\dot{K}_1 = \left[\frac{\alpha(K_1{}^{\gamma}L_1 + K_2{}^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1{}^{\nu-\gamma}}\right] \theta_2 K_1 = 0 \qquad (76)$$

se tiene que:

$$\dot{K}_1 = \left(\frac{\alpha K_1^{\gamma} L_1}{K_1} - \frac{a}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma}}\right)\theta_2 K_1 = 0,$$

$$\Leftrightarrow \alpha K_1^{\gamma} L_1 - aK_1^{\gamma-\nu+1} = 0 \Leftrightarrow \alpha L_1 = aK_1^{1-\nu}$$

$$\Leftrightarrow \alpha L_1/a = K_1^{1-\nu} \Leftrightarrow K_1 = \left(\alpha L_1/a\right)^{\frac{1}{1-\nu}} \quad (77)$$

$\therefore$ El segundo estado estacionario es

$$\mathbf{K}^{**} = (K_1^{**}, 0) \qquad (78)$$

$$\text{con } K_1^{**} = \left(\alpha L_1/a\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$$

Ahora, es posible efectuar un análisis de estabilidad semejante al hecho anteriormente.

Se denotará con J^{**} a la matriz jacobiana del sistema evaluada en $\mathbf{K}^{**}$:

$$J^{**} = \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^{**}} & \left.\dfrac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^{**}} \\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^{**}} & \left.\dfrac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^{**}} \end{bmatrix} \qquad (79)$$

Evaluando las derivadas obtenidas

anteriormente en $\mathbf{K}^{**}$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^{**}} = \theta_2\left(\alpha K_1^{**\gamma-1}L_1 - aK_1^{**\gamma-\nu}/\theta_1\right) +$$

$$\theta_2 K_1^{**}\left[\alpha\gamma K_1^{**\gamma-2}L_1 - \alpha K_1^{**\gamma-2}L_1\right] +$$

$$\theta_2 K_1^{**}\left[a\ (\nu-\gamma)\ K_1^{**\nu-\gamma+1}/\ \theta_1\right] \qquad (80)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^{**}} = \alpha\theta_2 K_1^{**}(K_1^{**\gamma-2}L_1) \qquad (81)$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_1}\right|_{\mathbf{K}^{**}} = 0 \qquad (82)$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial K_2}\right|_{\mathbf{K}^{**}} = \alpha\theta_2 K_1^{**\gamma-1}L_1 \qquad (83)$$

Así, se desprende que:

$$\mathrm{Tr}\ (J^{**}) = \theta_2\left(\alpha K_1^{**\gamma-1}L_1 - aK_1^{**\gamma-\nu}/\theta_1\right) +$$

$$\theta_2 K_1^{**}\left[\alpha\gamma K_1^{**\gamma-2}L_1 - \alpha K_1^{**\gamma-2}L_1\right] +$$

$$\theta_2 K_1^{**}\left[a\ (\nu-\gamma)\ K_1^{**\nu-\gamma+1}/\ \theta_1\right] +$$

$$\alpha\theta_2 K_1^{**\gamma-1}L_1 =$$

$$\theta_2 K_1^{**\gamma-1}\left\{\alpha L_1(1+\gamma) + K_1^{**1-\nu} a(\nu-\gamma-1)/\theta_1\right\} =$$

$$\theta_2 K_1^{**\gamma-1}\left\{\alpha L_1(1+\gamma) + \alpha L_1(\nu-\gamma-1)\right\}$$

$$= \theta_2 K_1^{**\gamma-1} \alpha L_1 \gamma \qquad (84)$$

Ahora, calculando el determinante:

$$\mathrm{Det}\ (J^{**}) =$$

$$\theta_2^{\,2} \alpha K_1^{**\gamma-1} L_1 \times \left\{ \left[\alpha K_1^{**\gamma-1} L_1 - a K_1^{**\gamma-\nu}/\theta_1\right] \right.$$

$$+ \left[\alpha(\gamma-1) K_1^{**\gamma-1} L_1\right] +$$

$$\left. \left[a\ (\nu-\gamma)\ K_1^{**\nu-\gamma} /\ \theta_1 \right] \right\} =$$

$$\theta_2^{\,2} \alpha K_1^{**\gamma-1} L_1 \left\{\alpha K_1^{**\gamma-1} \gamma L_1 + a(\nu-\gamma-1) K_1^{**\gamma-\nu}\right\} =$$

$$\theta_2^{\,2} \left\{\alpha^2 K_1^{**2(\gamma-1)} \gamma L_1^{\,2} + a\alpha(\nu-\gamma-1) L_1 K_1^{**2\gamma-\nu-1}\right\}$$

(Ecuación 85)

Como:

$$K_1^{**(1-\nu)} = \alpha L_1/a$$

ocurre que:

$$\mathrm{Det}\ (J^{**}) =$$

$$\theta_2^{2} \left\{\alpha K_1^{**2(\gamma-1)}\gamma L_1^{2} + a(\nu-\gamma-1)\alpha L_1 K_1^{**2\gamma-\nu-1}\right\} =$$

$$\theta_2^{2} \left\{\alpha K_1^{**2(\gamma-1)}\gamma L_1^{2} + (\nu-\gamma-1)\alpha^{2} L_1^{2} K_1^{**2(\gamma-1)}\right\}$$

$$= \theta_2^{2}\alpha^{2} K_1^{**2(\gamma-1)} L_1^{2}(\nu-1) \qquad (86)$$

Como $\nu < 1$, se tiene Det $(J^{**}) < 0$.

De ello se desprende que este estado estacionario es un punto silla.

Ahora, se calculará la pendiente de la curva $\dot{K}_1 = 0$.

En ella ocurre que:

$$\left(\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma}}\right)\theta_2 K_1 = 0 \qquad (87)$$

Puesto que en este caso se descartó el caso $K_1 = 0$ se tiene que:

$$\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} - \frac{a}{\theta_1 K_1^{\nu-\gamma}} = 0 \qquad (88)$$

Haciendo la derivación implícita:

$$\left\{ \frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} \right.$$

$$\left. \frac{a\ (\ \nu - \gamma\ )}{\theta_1 K_1^{\ \nu-\gamma+1}} \right\} dK_1 +$$

$$\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_2^{\gamma-1}L_1) - \alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2} dK_2 = 0$$

(Ecuación 89)

Evaluando en $\mathbf{K}^{**} = (K_1^{**}, 0)$:

$$\left\{ \frac{\alpha\gamma K_1^{\gamma}L_1 - \alpha K_1^{\gamma}L_1}{K_1^{2}} \quad \frac{a(\nu-\gamma)}{\theta_1 K_1^{\ \nu-\gamma+1}} \right\} dK_1 + \frac{K_1^{\gamma}L_1}{K_1^{2}} dK_2 = 0$$

(Ecuación 90)

De manera análoga a lo hecho anteriormente, se supondrá $L_1 = L_2 = L$ para simplificar la obtención de la pendiente de las curvas. Entonces:

$$\left[\alpha K_1^{\gamma} L(\gamma-1) - a(\nu-\gamma) K_1^{(\gamma-2)} K_1^{1-\nu}/\theta_1 \right] dK_1 +$$

$$K_1^{\gamma-2}L\ dK_2 = 0 \qquad (91)$$

Y como:

$$K_1^{1-\nu} = \alpha L_1/a$$

ocurre que:

$$\left[\alpha K_1^{\gamma}L(\gamma-1) - (\nu-\gamma)K_1^{(\gamma-2)}\alpha L_1\right]dK_1$$
$$+ K_1^{\gamma-2}LdK_2 = 0 \qquad (92)$$

De inmediato se desprende que:

$$\left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{\mathbf{K}^*} = \alpha(1-\nu) \qquad (93)$$

es la pendiente de la curva $\dot{K}_1 = 0$.

Ahora, se obtendrá la pendiente de la curva $\dot{K}_2 = 0$ lo cual ocurre cuando:

$$\left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}L_1 + K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)} \quad \frac{a}{\theta_1 K_2^{\nu-\gamma}}\right]\theta_2\ K_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\alpha(K_1^{\gamma}K_2L_1+K_2^{\gamma+1}L_2)}{(K_1+K_2)} \quad \frac{a}{\theta_1 K_2^{\nu-\gamma-1}}\right] = 0 \qquad (94)$$

Haciendo la derivación implícita:

$$\theta_2 K_2 \left[\frac{(K_1+K_2)(\alpha\gamma K_1^{\gamma-1}L_1)-\alpha(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2}\right] dK_1 +$$

$$\left\{\frac{\alpha(\gamma+1)K_2^{\gamma}L_2+K_1^{\gamma}L_1-\alpha K_2(K_1^{\gamma}L_1+K_2^{\gamma}L_2)}{(K_1 + K_2)^2}\right.$$

$$\left.\frac{a(1-\nu+\gamma)}{\theta_1 K_2^{\gamma-\nu}}\right\} dK_2 = 0 \qquad (95)$$

De ello se desprende de inmediato que:

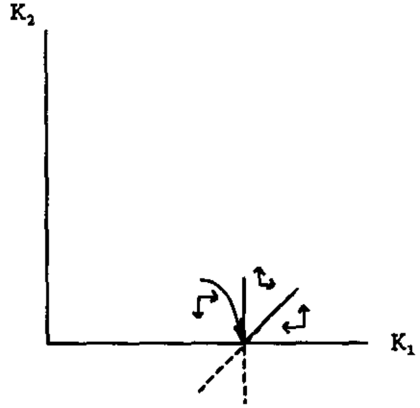
$$\lim_{K\to K^{**}} \left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{K^{**}} = \infty \qquad (96)$$

es decir, que la curva $\dot{K}_2 = 0$ es vertical en K^{**}. Siendo un punto silla, existe una trayectoria atractora para este estado estacionario.

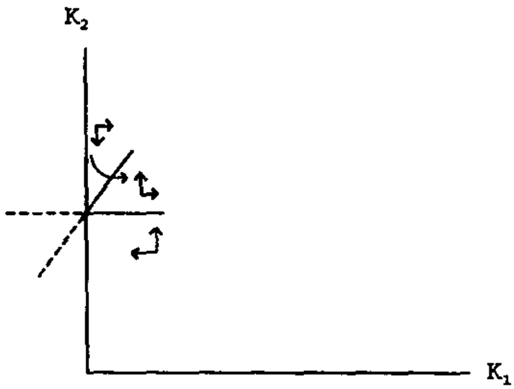
De manera análoga se deduce que existe otro estado estacionario:

$$K^{***} = (0, K_2^{***}) \qquad (97)$$

$$\text{con } K_2^{***} = \left(\alpha L_2/a\right)^{\frac{1}{1-\nu}}$$



Segundo estado estacionario



Tercer estado estacionario

para el cual se pueden obtener la traza y el determinante evaluados en K^{***}:

$$Tr\ (J^{***}) = \theta_2 K_2^{***\gamma-1} \alpha L_2 \gamma$$

$$Det\ (J^{***}) = \theta_2^2 \alpha^2 K_2^{***2(\gamma-1)} L_2^2 (\nu-1) \qquad (98)$$

de manera que se trata de un punto de silla, en el cual la curva $\dot{K}_1 = 0$ es horizontal, ie:

$$\left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{K^{***}} = 0 \qquad (99)$$

y la curva $\dot{K}_2 = 0$ tiene pendiente:

$$\left.\frac{dK_2}{dK_1}\right|_{K^{***}} = \frac{1}{\alpha(1-\nu)} \qquad (100)$$

Ambos estados estacionarios son de interés porque en ellos uno de los países no tiene capital. La intuición económica hace pensar que sería más factible que se de el estado K^{**}, en el que el país periferia se queda sin capital, pero esto no se desprende del modelo como tal. Según el modelo, para cada uno de estos estados estacionarios, existe una senda convergente, de manera que también sería factible llegar al estado K^{***}.

(C) Resumen del capítulo

A lo largo del capítulo se analizó el libre intercambio entre dos países distintos.

Primeramente se planteó el modelo explicando las características de los países, de los bienes y de sus tecnologías. Se obtuvo una expresión para el rendimiento en el sector manufacturero. Con ella, y el supuesto de que los rendimientos se invierten, se obtuvo una expresión para el cambio del capital en el tiempo. Se dio una expresión para medir la productividad, en la que se consideró que ésta se incrementa con la experiencia, y que una manera de medir tal experiencia es mediante el capital.

A continuación, se examinó el comportamiento del capital (utilizando la expresión encontrada anteriormente) en el caso de que no hay intercambio en los países, y se encontró que el estado estacionario es estable, lo que implica que los países a la alrga alcanzarían el nivel de capital de equilibrio.

Finalmente, se examinó el comportamiento del capital cuando hay intercambio comercial, y se encontró que éste puede ser de tres distintos tipos. En dos de ellos, el estado estacionario es un punto silla, y existen sendas que hacen disminuir el capital del país periferia. Entre los supuestos que se hicieron, y que condujeron a este resultado, se hizo el de que $K_1 > K_2$. Este supuesto, que significa el país centro tiene mayor capital que el país periferia, implica además, por lo comentado al dar la expresión para medir la productividad, que el país periferia ***tiene menos experiencia*** en la producción de bien manufacturado.

De este modelo, se desprende que el país periferia no siempre resulta beneficiado con el libre intercambio. Además, se desprende como recomendación que, para evitar el tipo de equilibrios que son desfavorables para el país periferia, es conveniente ***sustituir la falta de experiencia del país con capacitación que lo haga más competitivo en el sector manufacturero con el país centro.***

Conclusiones

En este trabajo se presentaron dos modelos diferentes acerca del comercio internacional. En ellos se pudo apreciar que los supuestos que se hacen en cada uno son especialmente importantes para los resultados que se obtienen. Por ello, es importante recalcar que cualquier conclusión económica que resulte de algún modelo no es definitiva. Hace falta analizar cuales supuestos son más acordes con la realidad que se pretende modelar. En ello, la herramienta estadística puede jugar un papel importante, pero es necesario aclarar que existen parámetros que no son fácilmente medibles.

Por otro lado, también es de interés el hecho de que ciertas herramientas matemáticas permiten una visión de un momento en el tiempo, mientras que otras permiten conocer la evolución de algunas variables en intervalos de tiempo, lo cual es un factor que se debe tomar en cuenta al modelar. El modelo de Ricardo es de interés porque permite ver una visión "fotográfica" de algunas variables económicas, pero es limitado en cuanto a que no permite conocer el comportamiento de tales variables con el paso del tiempo. El modelo de Dutt, en cambio, muestra el cambio de una variable tomando en cuenta las consecuencias de tener ventaja comparativa al producir un bien en particular.

Otro aspecto que se debe mencionar es que es necesario revisar los supuestos de los teoremas que se apliquen en un análisis. De otra manera, no se podrá comprender el verdadero alcance de los resultados obtenidos.

A lo largo del desarrollo de la tesis, se hizo patente la importancia de analizar un fenómeno económico bajo distintos enfoques, que permitan entender todas las posibles consecuencias que la aplicación de una medida económica puede tener, con lo que se logró uno de los objetivos de la misma. Se logró asimismo, desprender recomendaciones para los países que llevan a cabo actividades de comercio internacional. La implicación del primer modelo para los países que se involucran en el comercio internacional es que es conveniente para ellos el dedicarse a producir bienes en los que tengan ventaja comparativa. Sin embargo, del modelo de Dutt se desprende la recomendación, aún más importante, de que los países con las características de "periferia", deben esmerarse en la capacitación de su fuerza de trabajo, para que no queden en desventaja con respecto a los países "centro" en el sector manufacturero.

BIBLIOGRAFIA

TAKAYAMA, Akira
Mathematical Economics, 2a ed., The Dryden Press, Hinsdale Illinois, 1974, 730 pp.

RICARDO, David
On the Principles of Political Economy and Taxation, Londres, en The Works and Correspondence of David Ricardo, Vol I, editado por P. Sraffa.

GOLDMAN y TUCKER
Theory of Linear Programming, en Linear Inequalities and Related Systems, editado por Kuhn y Tucker, Princeton, 1956.

DUTT, Amitava Krishna
Vertical Trading and Uneven Development, en Journal of Development Economics 20 (1986), p. 339-356.

KRUGMAN, Paul
Trade, accumulation and uneven develpment, en Journal of Development Economics 8, abril de 1981.

SOTOMAYOR, Jorge
Liçoes de equaçoes diferenciais ordinárias, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Río de Janeiro, 1979, 327 pp.

CHIANG, Alpha
Métodos fundamentales de Economía Matemática, 3a ed., Mc Graw Hill, México, 1993, 805 pp.