



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO NO PERTURBATIVO DEL VACÍO
EN UNA TEORÍA DE NORMA PURA $SU(2)$
DE COLOR

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F Í S I C O
P R E S E N T A :
SERGIO ADRIÁN LERMA HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. PETER OTTO HESS BECHSTEDT



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR
1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2620/9



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Estudio No Perturbativo del Vacío en una Teoría de Norma Pura SU(2) de Color"

realizado por LERMA HERNANDEZ SERGIO ADRIAN

con número de cuenta 8923362-9 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

Peter Hess

Propietario

DR. JORGE ANDRES FLORES VALDES

Jorge Flores

Propietario

DR. ANGEL PRIETO RUIZ

Angel Prieto

Suplente

DR. CHRISTOPHER R. STEPHENS STEVENS

Suplente

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

Carlos Villarreal

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

Roberto Ruelas



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A Sebastián que gusta de las playeras con tigres, osos y peces

a Alicia con todo mi amor

a mi mamá un nudo sin tregua, gracias por todo tu amor

a mi papá por su mundo infinito

a Cynthia y Demián mis hermanos

a mi abuelita Eva, a Oscar y mi tía

a Pit, Quetzal y Eleazar inevitables

a mis amigos

a mí

a tí

salud!

Agradecimientos

Agradezco sinceramente al Dr. Peter Hess por todo su apoyo (tanto académico como financiero) a lo largo de la realización de esta tesis, su enseñanza (a tiempos jeroglífica) es invaluable, vielen Dank!

Asimismo agradezco al grupo de trabajo del ICN: Dr. Juan Carlos López, Dr. Christopher Stephens, Dr. Peter Hess y Dr. Axel Weber, por permitirme el contacto directo con la labor de investigación.

A la UNAM y al Instituto de Ciencias Nucleares por las facilidades materiales.

Por último quiero agradecer al Conacyt (proyecto 3298-E9607) y a mi mamá por el apoyo financiero sin el cual hubiera sido imposible realizar esta tesis.

Contenido

Introducción	iii
0.1 Breve recuento histórico	iii
0.2 El vacío, una visión actual	v
0.3 El vacío en la Electrodinámica Cuántica	vii
0.4 La Cromodinámica Cuántica	x
0.5 El Vacío en la Cromodinámica Cuántica	xiii
0.6 Este trabajo	xiv
1 La Cromodinámica Cuántica (CDC)	1
1.1 Los campos, un sistema con un número infinito de grados de libertad	1
1.2 El “boom” en la fauna hadrónica	5
1.3 La “doma” de la fauna Hadrónica	6
1.4 La simetría $SU(3)$	7
1.5 El Color, una simetría exacta	15
1.6 Los campos de Yang-Mills y la CDC	17
1.7 El estado base de la CDC	21
2 Bajas energías en una teoría clásica $SU(2)_{color}$	23
2.1 Las coordenadas hiperesféricas	23
2.2 Una solución clásica	25
2.3 Caso ρ_k 's constantes	29
2.4 Transformación del Campo Cromoeléctrico y Cromomagnético al sistema intrínseco	34
2.5 Fijando un campo Cromomagnético intrínseco	37
3 La descripción cuántica en coordenadas curvilíneas	41
3.1 Integrales de trayectoria	41

3.2	Un caso sencillo	47
3.3	El jacobiano de la transformación a campos hiperesféricos	58
3.4	Dando paso al final	65
4	Un modelo del Hamiltoniano de la CDC usando coordenadas hiperesféricas	67
4.1	Los grados de libertad y su clasificación	68
4.2	Propiedades de Paridad y Conjugación de Carga	70
4.3	Un Hamiltoniano Colectivo	74
4.4	El espectro de los glueballs	80
	Conclusión	85
	Apéndices	90
A		91
A.1	Matrices de Gell-Mann y constantes de estructura de $SU(3)$	91
B		95
B.1	Cálculo de las parciales $\partial_\mu D$	95
B.2	Coefficientes de Clebsch-Gordan cartesianos	98
B.3	$F^{ij} = \tilde{F}^{ij}$, caso ρ_k 's ctes	102
B.4	B_a^k , cálculo complementario al capítulo 2	103
B.5	Otras condiciones para las coord. hiperesféricas	104
C		107
C.1	Función de Bessel asintótica	107
C.2	Energía cinética en coordenadas hiperesféricas	108
D		111
D.1	Conjugación de Carga de los estados con escalares de Color	111

Introducción

0.1 Breve recuento histórico

La historia de la física es, sobretodo, la historia de unos cuantos conceptos: espacio, tiempo, movimiento, etc.; entre estos está el vacío, concepto que ha ido cambiando a través de los años mostrándose siempre diferente, tanto como las escuelas de pensamiento desde las cuales se intentaba entenderlo, nada extraño, puesto que la concepción del vacío ha sido un resumen de la concepción general de la naturaleza, ha tenido que ser considerado para construir una visión del mundo, por lo que su entendimiento ha traído consigo nuevos conceptos que han permitido comprender con mayor profundidad los fenómenos naturales. Entre las escuelas filosóficas de la antigüedad encontramos al concepto de vacío ligado a varios problemas físicos:

- La constitución de la materia (ó ¿que hay entre los átomos de Demócrito?)
- La finitud del mundo (ó ¿que hay mas allá de la octava esfera de Aristóteles?)
- El problema del movimiento.

En lo que se refiere a éste último, Aristóteles llegó a la conclusión de que si un medio se desvanecía enteramente el movimiento en dicho medio estaría mas allá de cualquier relación matemática [1], o dicho de otro modo el movimiento sería instantáneo puesto que no habría resistencia para él mismo, este problema del movimiento a través del vacío no era un simple problema secundario sino que ocupó un papel central en la reflexión acerca

del movimiento a lo largo de toda la edad media. Avempace (Ibn Bājja , árabe español del siglo XII), en un ensayo transmitido a través de Averroes concluye que el movimiento a través de un medio era lo que restaba del movimiento hipotéticamente libre en el vacío después de restarle el retardo debido al medio. Estas ideas, semejantes a las del filósofo griego tardío Filopón (siglo VI d.c.), consideraban posible el movimiento a través de un medio sin resistencia como el vacío, poniendo como evidencia al movimiento de los astros que se mueven a través de un éter celestial sin resistencia. El problema del movimiento a través del vacío daría mas frutos, aún cuando se considerara la posibilidad de su existencia quedaba por resolver la causa que hacía a dicho movimiento finito, sin poder recurrir al argumento Aristotélico del medio como opositor al movimiento, puesto que se trataba precisamente de entender el movimiento sin medio opositor. Las primeras tentativas medievales sin poderse sustraer de la tradición aristotélica, dieron un paso más al considerar lo que se llamó resistencia interna: un cuerpo mixto constituido por elementos livianos (aire y fuego) y por elementos pesados (tierra y agua) tendría por fuerza impulsora la tendencia natural de los elementos de los que en mayor proporción estuviera constituido (livianos o pesados) y por resistencia interna la tendencia contraria de los que en menor proporción constituyeran al cuerpo. Con esto el movimiento finito de los cuerpos mixtos podía entenderse sin recurrir a un medio que oponiéndose al movimiento lo hiciera finito. La aportación principal de estas ideas es hacer de la resistencia de un cuerpo al movimiento algo inherente a él mismo, un acercamiento a lo que hoy conocemos como masa inercial a partir de considerar el movimiento en el vacío. Tales ideas tenían por supuesto muchas flaquezas, pués al explicar el movimiento no natural de un objeto (una piedra lanzada hacia arriba por ejemplo), se perdían tanto la fuerza impulsora como la resistencia interna, se tuvieron, entonces, que crear nuevos conceptos que poco a poco se alejaban aún más de las ideas de Aristóteles. De entre los autores griegos (Filopón), islámicos (Avicena) y europeos (Francisco de Marchia) que trataron el problema de la fuerza impulsora en el movimiento violento de un cuerpo destaca Juan Buridan, quien introduce el término de ímpetu como la fuerza incorpórea que transmitida desde un impulsor inicial hasta un cuerpo causaba el movimiento de éste. Buridan atribuía al ímpetu una cualidad de permanencia y postulaba que duraría indefinidamente a menos que fuera disminuido o corrompido por la resistencia externa [2]. Buridan tomó como medidas del ímpetu la velocidad y la cantidad de materia del cuerpo. Dentro de esta lógica el movimiento en un vacío hipotético sería uno donde las condi-

ciones iniciales de movimiento no variarían, es decir un movimiento rectilíneo, uniforme e indefinido, tales consecuencias fueron inconcebibles para Buridan considerando su creencia en un mundo esférico y finito aristotélico, de este modo optó por negar la posibilidad de un movimiento finito y sucesivo en el vacío [2]. Todas estas ideas en torno al movimiento hipotético en un vacío si bien no lograron consolidar una teoría acerca del mundo que describiera los hechos entonces conocidos, sentaron el terreno para lo que harían posteriormente Galileo y Newton, el primero a partir de esta tradición antiaristotélica; proveniente de la escolástica medieval, cultura islámica y más aun de la Grecia tardía de Filopón; de la inteligibilidad del movimiento finito en un vacío, dedujo la idea de que un medio resistente es meramente un factor de retraso en la caída de los cuerpos, cuyos movimientos naturales reales se producen sólo en un vacío, aunque éste sea sólo hipotético [3].

El recorrido histórico anterior sobre el concepto del vacío y su relación en el desarrollo de las ideas acerca del movimiento de los cuerpos, dejan entrever claramente el papel que jugó dentro del desarrollo de nuevos conceptos, y este no es el único ejemplo en donde el vacío asume un papel importante, lo mismo ocurrió en el desarrollo de la termodinámica en donde el vacío deja de ser una hipótesis para cobrar realidad como en el barómetro de Torricelli y Viviani (discípulos de Galileo) y en los experimentos de Magdeburgo de Otto von Guericke. La culminación tecnológica que resultó de experimentar (ya no sólo reflexionar) con el vacío llega en 1776 con la invención de la máquina de vapor de Watt. El entendimiento de tales máquinas daría origen en el siglo XIX a la termodinámica. No es raro, pues, que en la física actual el entendimiento del vacío siga siendo de primordial importancia [4]. Ahora se entiende el vacío en términos de nuevos conceptos, ya no es la ausencia de resistencia al movimiento como en los antiguos, ni la baja presión de una bomba de agua, sino simplemente el estado mas bajo en energía de los campos de materia y de interacción, que dentro del esquema cuántico relativista actual toma propiedades que lo hacen un objeto físico mucho más complejo de lo que pudiera pensar cualquier mente anterior a este siglo.

0.2 El vacío, una visión actual

Durante el siglo XIX la idea del vacío estaba íntimamente ligada a la idea del espacio absoluto, entendido como un sistema de referencia privilegiado

con respecto al cual podían referirse las leyes de la naturaleza (en particular la velocidad de la luz). Como es bien conocido, el peso de la evidencia experimental y teórica modificaron estos postulados, la velocidad de la luz y en general las leyes del electromagnetismo resultaron las mismas para todos los sistemas inerciales; en pos de la consistencia se tuvo que renunciar a las leyes de Newton y dejar lugar a la teoría especial de la relatividad, dentro de este contexto la única exigencia para el vacío es su invarianza ante transformaciones de Lorentz, es decir la descripción del vacío debe ser la misma para diferentes sistemas de referencia inerciales, aún así el vacío era una especie de mar de la tranquilidad carente de estructura. El panorama se modificaría radicalmente con el desarrollo de la mecánica cuántica , en donde los sistemas físicos se representan como vectores en un espacio de Hilbert (el espacio de las funciones de cuadrado integrable por ejemplo), el vacío tiene que representarse en esos términos. El vacío es el estado con menor energía del sistema, no una idea preconcebida sino un estado exigido por la misma teoría cuántica para construir el espacio de Hilbert. En un caso cuántico simple como el del oscilador en una dimensión, los eigenvalores de los eigenestados de la energía son $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$, ¿dónde poner al vacío?, lo mas intuitivo sería asociarle el estado sin cuantos es decir aquel en el que $n=0$, aún así tendríamos que asociarle un valor de la energía diferente de cero ($E = 1/2\hbar\omega$), ¿un vacío con energía?, esto inmediatamente modifica la idea pre-cuántica del vacío sugiriéndonos características nuevas para él mismo. El oscilador armónico en una dimensión no es, claramente, un ejemplo de una teoría de campo, sin embargo muestra características propias de una teoría cuántica, en particular el de un estado base con una energía diferente de cero. Un campo cualquiera y en particular uno que puede entenderse como un sistema formado por un número infinito de osciladores en coordenadas normales, tendrá también esta característica, que no es sólo una idea teórica sino que, como en el caso del campo electromagnético, produce efectos medibles. Un ejemplo de ello es el efecto Casimir [5], resultado de la dependencia de la energía del vacío (a través de los modos de vibración del campo) en la configuración geométrica de una cavidad metálica.

Entender el vacío en la física actual es, pues, de inicio un problema cuántico. La cuantización de los campos no es un problema trivial y mas en una teoría de norma (como la teoría electromagnética) en donde los grados de libertad de la teoría son representados por un número mayor de variables lo que hace de la elección de la norma un problema de especial importancia. Los éxitos, sin embargo, han sido muchos, en particular en el estudio

de las interacciones electromagnéticas dentro de la llamada electrodinámica cuántica (EDC ó QED por sus siglas en inglés), cuyo estado base presenta características que significaron un cambio radical en nuestra concepción del vacío (una exposición ilustrativa del estado base de esta teoría puede encontrarse en la ref. [20]).

0.3 El vacío en la Electrodinámica Cuántica

El premio nobel del año 1965 fué otorgado a tres científicos: Richard P. Feynman, Tomonaga Shin'ichiro y Julian S. Schwinger por el desarrollo de la electrodinámica cuántica. Con este premio se reconocía publicamente el avance en el entendimiento de las interacciones electromagnéticas, el camino había comenzado a aclararse 35 años atrás con el trabajo de Paul Dirac. Sin embargo algunos problemas asociados con las inevitables divergencias propias de un sistemas con infinitos grados de libertad y partículas puntuales, habían hecho imposible una teoría concisa. Las soluciones que se propusieron durante la década de los 30's y 40's fueron muy variadas, Heisenberg [15], por ejemplo, sugirió la existencia de una longitud fundamental con lo cual se daba un carácter no local a las teorías de campo a la vez que se perdían los infinitos al tener un límite en las integrales divergentes. Un año antes, por otro lado, se había alcanzado uno de los primeros éxitos en el manejo de los infinitos, obtenido por Felix Bloch y Arne Nordsieck [12] al estudiar las divergencias infrarojas. Sin embargo aún quedaban muchos infinitos en la teoría. El camino que mayor éxito habría de tener fué, finalmente, el que consideraba la eliminación de los infinitos como un problema de redefinición (renormalización) de los principales parámetros de la teoría. El pesimismo que imperaba en torno a la teoría cuántica electromagnética fué diluyéndose cuando Willis Lamb [16] anunció el resultado de la medición del llamado corrimiento Lamb (la diferencia de energía entre los estados $2s_{1/2} - 2p_{1/2}$, degenerados según la teoría de Dirac), antes Edwin Albrecht Uehling [17] había hecho un cálculo de este corrimiento entendiéndolo como un efecto de la polarización del vacío. La importancia del anuncio de Lamb fué el dar un criterio para decidir si la renormalización era un idea correcta. Los resultados fueron alentadores, los cálculos realizados por diferentes autores como French, Weisskopf, Schwinger, Fukuda, Miyamoto y Tomonaga entre otros, reprodujeron los resultados experimentales de Lamb. La síntesis de todo este trabajo teórico de los años 30's y 40's habría de llegar finalmente con los

formalismos de los tres científicos ganadores del premio nobel de física del 65. De modo independiente (el trabajo de Tomonaga incluso, ni siquiera era conocido en un principio entre las comunidades científicas de occidente) cada uno formuló la teoría que habría de sentar las bases para el entendimiento mas profundo de las partículas y sus interacciones; el punto final lo pondría Dyson quien en 2 artículos publicados en 1949 [18] demostró la equivalencia entre las formulaciones de Feynman y Schwinger y demostró, también, que todos los infinitos que aparecen en la electrodinámica cuántica eran susceptibles de ser absorbidos en la renormalización. Los trabajos e ideas de Schwinger, Tomonaga, Feynman y Dyson (sustentadas en el trabajo de toda una comunidad científica) lograron consolidar a la ahora llamada electrodinámica cuántica como una teoría sistemática y en cierto sentido completa. En particular los trabajos de Feynman [13] dieron una imagen muy intuitiva de los fenómenos electromagnéticos reduciendolos, al menos a nivel químico, a tres: el acoplamiento electrón-fotón, la propagación electrónica y la propagación fotónica [14]. Una teoría cuántica de campo podía sintetizarse en los llamados diagramas de Feynman junto con sus respectivas reglas (para el caso electromagnético cada línea representando al propagador del electrón o el fotón y cada nodo el acoplamiento entre los dos campos) de este modo fué posible calcular dentro de un esquema netamente perturbativo (desarrollo en series de potencias de la constante de acoplamiento: $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$), las probabilidades de transición entre dos estados cualquiera, con los infinitos producto de los diagramas de orden mayor asimilados en una redefinición de la constante de normalización de la función de onda, de la carga y de la masa de las partículas dentro del llamado “programa” de renormalización. En el esquema perturbativo anterior no pareciera haber mayor problema para encontrar al vacío o estado base de la teoría, trabajando en el espacio de Fock, en segunda cuantización, el vacío es la ausencia de cuantos tanto de los campos de materia (electrones, protones, etc.) como de los campos de interacción (fotones). Sin embargo no hay que olvidar el carácter cuántico de la teoría, por lo que, tomando en cuenta el principio de incertidumbre de Heissenberg, en particular entre la energía y el tiempo ($\Delta E \Delta t \simeq \hbar$), son posibles fluctuaciones en la energía, fluctuaciones mayores en tiempos menores y viceversa, así el vacío, que según el ejemplo sencillo del oscilador debería tener una energía diferente de cero, comienza a cobrar forma; las fluctuaciones de energía producirían pares de partícula-antipartícula, que así creadas no serían partículas físicas (en el sentido de que no son detectables directamente) sino que formarían parte del vacío, el cual deja de ser ese mar de la tranquilidad para convertirse

en un medio de energía infinita conformado por partículas virtuales creadas “bajo el auspicio” del principio de incertidumbre. Estas partículas virtuales dan al vacío propiedades similares a las de un medio dieléctrico, es decir es susceptible de ser modificado por la presencia de una carga eléctrica, y no sólo esto, la analogía entre el vacío de la EDC y un medio dieléctrico puede llevarse más allá permitiendo entender algunos fenómenos como, por poner un sólo ejemplo, la emisión de positrones en colisiones de iones pesados [19], que puede entenderse como una consecuencia del reajuste electrónico del vacío, semejante al reajuste electrónico en un material cuando es colocado dentro de un campo eléctrico muy intenso que permite el tunelaje a través de la barrera de potencial. Todos estos hallazgos acerca del estado base de los campos de materia e interacción han tenido, incluso, repercusiones en la cosmología. Algunas teorías, por ejemplo, consideran que nuestro universo puede entenderse como una fluctuación del vacío [20]. La ciencia nunca ha resuelto un problema sin provocar muchos más, el caso de las teorías de partículas y campos no es la excepción, aún cuando se haya alcanzado con la EDC predicciones teóricas que coinciden con las mediciones experimentales en más de 8 cifras significativas, no deja de ser una teoría parcial, en la cual no se incluye todo el conjunto de fenómenos que tienen lugar en el interior del núcleo, ni mucho menos los fenómenos gravitacionales. En la actualidad se reconocen 4 fuerzas fundamentales, y aún cuando los trabajos teóricos han permitido construir teorías con éxito predictivo para cada una de ellas, se ha perseverado en los esfuerzos por construir una teoría que las unifique. El éxito ha sido relativo mientras que las fuerzas electromagnética, nuclear y débil han podido ser entendidas dentro de un sólo modelo (el llamado modelo estándar) capaz de predecir acertadamente los resultados experimentales, el hecho de no incluir a la fuerza gravitacional y de requerir de más de 20 parámetros [4], hace dudar de su carácter fundamental.

La unificación llevada a cabo en el modelo estándar ha sido posible a partir de reconocer a las teorías cuánticas de campo de cada una de las interacciones como teorías de norma ¹, así, mientras que los grupos de norma son $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$ para las interacciones electromagnéticas, débil y fuerte respectivamente, el grupo de norma del modelo unificador es el producto directo de los 3 grupos anteriores ($U(1) \times SU(2) \times SU(3)$). Se han intentado otros esquemas de unificación algunos basados en teorías de campos de norma (utilizando el grupo $SU(5)$ por ejemplo) y otros fundamentados en concep-

¹En un capítulo aparte se trata con mayor detalle el concepto de campo de norma

tos matemáticos diferentes que parecen ser más accesibles a la inclusión de la fuerza gravitacional como por ejemplo las teorías tipo Kaluza-Klein y las teorías de supercuerdas. Pero aún no hay nada definitivo, muchas dudas existen acerca de si las teorías cuánticas de campo son más que simples modelos fenomenológicos, es decir aproximaciones a bajas energías de teorías más profundas, sin embargo no hay duda de que el estudio exhaustivo de las mismas es imprescindible para poder vislumbrar lo que hay detrás o más allá de ellas.

0.4 La Cromodinámica Cuántica

El panorama desde la década anterior ha cambiado rotundamente con respecto a lo que ocurría en las décadas de los 50's y 60's, donde se tenía una gran cantidad de información experimental sin una teoría que la explicara. Ahora, por el contrario existen predicciones teóricas esperando por una confirmación experimental, tal es el caso, por ejemplo, de la partícula de Higgs o los llamados "glueballs" (para estos últimos sólo existen candidatos no confirmados del todo). Como ya se mencionó, los mayores éxitos han venido por el lado de las teorías cuanticas de norma (traducción del inglés gauge), en esquemas no lineales que hacen de cualquier cálculo una tarea muy compleja, sin embargo la información extraída y su confirmación experimental las ha puesto como, al menos, la punta de lanza para el entendimiento del mundo a escalas subnucleares. Una de estas teorías de norma que permite describir las interacciones fuertes, es la llamada Cromodinámica Cuántica, el nombre de color proviene de la existencia dentro de la teoría de 3 diferentes "cargas" (generalización de la carga eléctrica), cuya combinación da por resultado un color nulo, similar a lo que resulta de combinar los tres colores primarios. El surgimiento de esta teoría comienza con una serie de trabajos teóricos encaminados a explicar la gran diversidad de partículas hadrónicas descubiertas, en 1964 Murray Gell-Mann y George Zweig [22] observaron que las propiedades de las partículas podrían agruparse en un multiplete del grupo $SU(3)$, asociando a las partículas los tensores base para construir una representación irreducible del grupo mencionado. Este modelo si bien es puramente algebraico, reproducía cada una de las partículas observadas y es más predecía nuevas partículas que posteriormente serían encontradas como la llamada partícula Ω [23]. La concordancia parecía indicar mucho más que un simple juego matemático, además la representación irreducible

no trivial más simple del grupo $SU(3)$ es de dimensión 3, es decir deberían existir tres partículas cuya combinación conduciría a las representaciones irreducibles de orden mayor. Estas partículas recibieron el nombre de cuarks, cuark up, cuark down y cuark strange (el nombre fué sugerido por Gell-Mann, el nombre que propuso Zweig para estas nuevas partículas fué “aces”). En el primer capítulo de esta tesis hablaré del camino que condujo a la cromodinámica cuántica, por ahora baste decir que los trabajos pioneros de Gell-mann, Zweig, Ne’eman entre otros, marcarían el comienzo del esclarecimiento del aparente caos que imperaba en la física de partículas a comienzos de los años 60’s, abriendo el camino para construir una teoría cuántica de campo con la cual no sólo sería posible clasificar las partículas sino, también, conocer su dinámica. El grupo $SU(3)$ de sabor (los sabores son up, down y strange), no sería a fin de cuentas el grupo a partir del cual se construiría la CDC, puesto que una teoría de norma se obtiene a partir de una simetría exacta y la simetría mencionada no lo es, si lo fuera los multipletes de esta simetría (incluyendo el de los propios cuarks) serían degenerados, es decir las partículas de un mismo multiplete tendrían la misma masa, cosa que no ocurre [24].

La evidencia experimental mostraría poco a poco que el modelo original de Gell-Mann y Zweig no era más que una aproximación, así por ejemplo, el barión $\Delta^{++}(1232)$ formado, según el modelo de Gell-Mann, por 3 cuarks de sabor up debería ser descrito por una función antisimétrica para el intercambio de cuarks (tomando en cuenta que los cuarks son partículas de espín $1/2$), por otra parte las mediciones del momento magnético indican que no hay contribuciones orbitales para la función de onda de la partícula, es decir los tres cuarks deben de estar en el estado S lo que conduce a una función de onda simétrica. Una solución a esta paradoja fué dada por O.W Greenberg, M.H. Han y Yochiro Nambu, ellos sugirieron la existencia de un nuevo número cuántico para los cuarks, al cual se le daría el nombre de color (una revisión de la idea de color se encuentra en la ref. [25]). Este nuevo número cuántico permite obtener una función de onda donde los tres cuarks esten en el estado S sin violar el principio de exclusión de Pauli. Al tiempo que lo anterior se veía la necesidad de un sabor más para los cuarks. En 1970 Sheldon Glashow, Iliopoulos y Maiani sugirieron a partir del patrón observado en los leptones (partículas que no interaccionan fuertemente) un nuevo sabor para los cuarks al cual llamaron encanto (charm). Este nuevo sabor permitía evitar en la vieja teoría de las interacciones débiles, violaciones a leyes establecidas empíricamente [26]. Tendrían que pasar algunos años para

que Burton Richter y Samuel Ting [28, 27], cada uno por su lado encontraran evidencia experimental para la existencia de este sabor al detectar un nuevo tipo de partículas: entre ellas el mesón J/ψ formado por un cuark y un anticuark charm. El cuadro actual se completaría con el descubrimiento de partículas formadas por cuarks bottom [29] y por cuarks top [30], en 1977 y 1995 respectivamente. Especial importancia tendrían las sugerencias de Greenberg, Han y Nambu, las cuales significaron el siguiente paso importante en el camino a la CDC. El nuevo número cuántico que propusieron para resolver paradojas en el modelo de Gell-Mann y Zweig, conocido como color, resulta de una simetría exacta (también $SU(3)$), lo que permite construir una teoría de norma no abeliana para las interacciones entre cuarks, esta teoría es la Cromodinámica Cuántica. En 1971 se pudo demostrar que las teorías cuánticas no abelianas (como la CDC) eran renormalizables [21] y dos años después Politzer, David Gross y Franck Wilzeck ¹ descubrieron que la CDC presentaba una característica especial llamada libertad asintótica [31, 32], que permitía explicar los datos obtenidos en el acelerador lineal de Stanford para colisiones electrónicas en protones [33]. Estos datos ya habían sido interpretados en algunos trabajos de Feynman y Bjorken [34, 35] como consecuencia de la interacción del electrón con partículas libres dentro del protón, a las que Feynman llamó partones.

Una característica de los cuarks es que no pueden encontrarse de forma aislada, es decir, sólo es posible detectarlos formando parte de hadrones, la confirmación experimental de los cuarks, por tanto, sólo se puede inferir si el comportamiento de los hadrones coincide con lo que desde la teoría se deduce para el comportamiento de partículas formadas por cuarks. La concordancia entre la predicción y el experimento para la razón de estados finales hadrónicos a estados finales muónicos en colisiones electrón positrón [36], es una de las evidencias más importantes a favor de la CDC. Por otro lado si los estados hadrónicos finales resultan de cuarks producidos durante las colisiones electrón positrón deben de guardar información de las direcciones originales de estos pares de cuarks producidos. Lo que se ha detectado [37, 38] en el fenómeno llamado “chorros (jets) hadrónicos” en colisiones electrón-positrón coincide con las predicciones de la CDC. A pesar de lo anterior muchas de las características más importantes de la CDC (como el confinamiento de cuarks) no han podido ser demostradas teóricamente. Dichas características (junto con, seguramente, otras inesperadas) parecen estar es-

¹t’Hooft también pero no publicó sus resultados

perando en la formulación no perturbativa de la CDC y en particular en el estudio del estado base de la misma.

0.5 El Vacío en la Cromodinámica Cuántica

Aún cuando la CDC se asemeja en parte a la EDC (ambas son teorías cuánticas de norma renormalizables) presentan diferencias muy marcadas consecuencia de sus grupos de norma (mientras que el grupo de norma de la EDC es el grupo conmutativo con un generador $U(1)$, el de la CDC es el grupo no conmutativo con 8 generadores $SU(3)$), estas diferencias y semejanzas se reflejan en el vacío de ambas teorías. A continuación se exponen algunas de las características más importantes del estado base de los campos de interacción y materia de la CDC.

Al igual que en el ejemplo histórico acerca del movimiento mencionado al principio de esta introducción, el vacío sigue ocupando un lugar muy importante dentro de las teorías físicas más avanzadas como las teorías de Norma no-Abelianas. En ellas se han encontrado problemas propios de las teorías cuánticas de campo, es decir problemas de divergencias infinitas que, contrario a lo que sucede con las teorías de norma Abelianas como la electrodinámica cuántica, han puesto énfasis en la formulación no perturbativa de la teoría.

Los problemas asociados a las divergencias en altas frecuencias (divergencias ultravioletas) pueden manejarse, tanto en las teorías Abelianas como en las no Abelianas a través del grupo de renormalización. Mientras que las divergencias asociadas a las frecuencias bajas (divergencias infrarrojas), manejables en el caso de la electrodinámica cuántica debido al carácter conmutativo de la teoría [7], hacen del vacío perturbativo (el “vacío” de las altas energías o vacío “partónico”) de las teorías de norma no abelianas un sistema inestable [8] con propiedades aun no del todo determinadas. A pesar de ello las perspectivas de su estudio indican que está en el meollo de muchos problemas teóricos de primera importancia como el confinamiento de cuarks [45] y el espectro hadrónico a bajas energías [46]. La estructura del vacío no perturbativo parece ser la culpable del confinamiento de cuarks y gluones el problema esta en que el estudio no perturbativo es mucho más difícil que el estudio perturbativo. Este estado de las cosas ha sugerido algunos modelos como el llamado modelo de bolsas del MIT (MIT bag model) [39], en donde los hadrones son vistos como una especie de burbujas de va-

cio perturbativo (sin cuantos de materia e interacción) inmersas en un vacío físico no perturbativo, caracterizado unicamente por la diferencia en la densidad de energía entre estas dos fases del vacío. Sin embargo un estudio no perturbativo más riguroso es necesario para entender las características más importantes de la CDC. Contrario a lo que sucede con el vacío de la EDC, en la CDC se presenta un antiapantallamiento de las cargas de color, algo similar a lo que ocurriría en un dieléctrico con permeabilidad eléctrica menor que la del vacío; es decir la constante de acoplamiento para las interacciones de color disminuye con las distancia a la carga física, esto fué lo que Gross, Wilczek y Politzer [31] mostraron en 1973: la libertad asintótica de la CDC. Esta característica del vacío de la CDC es resultado de la no linealidad de la teoría [40, 41], resultado a su vez, de su carácter no abeliano, dicho en otros términos es consecuencia de que los bosones de interacción (los llamados gluones iguales en número a los de generadores del grupo $SU(3)$) esten cargados (cosa que no ocurre con los fotones de la EDC), lo que provoca que junto con la llamada polarización fermiónica apantallante (producida por la creación de pares virtuales fermiónicos) exista una polarización bosónica antiapantallante. El dominio de esta última sobre la primera (que es lo que se observa) impone una cota al número de sabores para los cuarks, de tal modo que la polarización fermiónica no domine sobre la bosónica.

Es claro de lo anterior que el estudio no perturbativo de la CDC y en particular del vacío, es de total importancia para poder entender las principales características de la teoría, ya sea para desecharla como una teoría incapaz de reproducir lo observado o para tomarla como guía en el descubrimiento de nuevas características del mundo físico.

0.6 Este trabajo

En el presente trabajo de tesis se hace un estudio del estado base de una teoría de norma. En los capítulos 2 y 3 se trabaja con un grupo de norma $SU(2)_{color}$ en el supuesto de que esta simplificación permite reducir los cálculos sin perder resultados que igual se aplican a la CDC. En el último capítulo, sin embargo, regresamos al grupo de norma real de la CDC. El estudio no incluye a los campos de materia de la interacción de color (cuarks), sólo a los campos de norma (gluones); que en la versión simplificada $SU(2)$ se reducen a 3 (el número de generadores del grupo $SU(2)$). Esto explica el adjetivo de “pura” en el título de la presente tesis.

La polarización bosónica mencionada en el apartado anterior da por resultado un antiapantallamiento de las cargas de color, es decir el vacío gluónico es un medio con permeabilidad eléctrica menor que 1, de este modo como el vacío es invariante de Lorenz $\mu\epsilon = 1$ y por tanto $\mu > 1$. El vacío gluónico es un medio “paracromomagnético”, esto puede entenderse si se considera que los gluones son partículas cargadas (con color) y espín igual a 1. Es de esperar, entonces, que el estado de menor energía del vacío gluónico sea uno con un campo cromomagnético en alguna dirección, esto es efectivamente lo que se observa en el trabajo de Savvidy, Batalin y Matinian [8] (también por otro camino en la Ref. [42]) en donde el vacío perturbativo resulta inestable como consecuencia de las divergencias infrarojas, favoreciendo energéticamente un campo cromomagnético. Estos resultados han sugerido algunos modelos para el vacío de la CDC, en los cuales la naturaleza paramagnética del vacío se manifiesta cuánticamente como un condensado Bose-Einstein de pares de gluones acoplados a espín y color cero [43, 44], algo similar al apareamiento electrónico (pares de Cooper) que ocurre en un superconductor. Sin embargo existen problemas con la presencia de un campo cromomagnético en el estado base de la CDC ya que el vacío debe ser invariante ante transformaciones de Poincaré, en la Ref. [47] se resuelve este problema utilizando transformaciones de Poincaré modificadas que consisten de una combinación de traslaciones y rotaciones junto con transformaciones de norma convenientes. En esta tesis utilizamos una transformación de los campos de norma a nuevos campos que creemos permite obtener un campo cromomagnético sin violar, al menos, la simetría rotacional del vacío. Esta transformación ha sido muy utilizada en modelos colectivos en física nuclear [48, 49] para describir los núcleos atómicos haciendo explícitas sus estructuras internas. Las nuevas variables están relacionadas a la intensidad de los vectores de norma, a su distribución cuadrupolar y a los ángulos de rotación en el espacio físico y de color. La transformación de coordenadas significa el paso a un sistema de referencia (sistema intrínseco) donde el vector potencial en la norma del tiempo ($A_{\beta a} = 0$ si $\beta = 0$) es diagonal ($A^i{}_a \equiv \rho_{ia} = \rho_i \delta_{ia}$). Los nuevos campos son precisamente los ángulos (pueden ser los de Euler o cualquiera otros) que forma el sistema intrínseco con un sistema de referencia fijo en el laboratorio para que se cumpla la diagonalidad del vector de norma transformado, estos ángulos (3 para el espacio físico y otros 3 para el espacio de color) dependen en general de los puntos en el espacio-tiempo al igual que el valor de los tres componentes diagonales del vector de norma transformado. La primera parte de esta tesis consiste en encontrar una solución

clásica a las ecuaciones de movimiento de los campos de norma de la CDC en la simplificación a $SU(2)$, buscando encontrar un campo cromomagnético en el sistema intrínseco, los resultados negativos (aunque sólo para el caso más simple) condujo a intentar el problema inverso, es decir ¿cuál es la forma de un campo magnético y eléctrico en el sistema intrínseco? y ¿qué resulta de imponer un campo cromomagnético diferente de cero al tiempo que se fija el eléctrico a cero?. Se obtuvieron diferentes condiciones para los campos vectoriales transformados al sistema intrínseco, estas diferentes condiciones corresponden a la libertad de norma “remanente” a la norma del tiempo (a lo largo de todo este trabajo se trabaja con esta norma).

El hecho de no encontrar soluciones clásicas con un campo cromomagnético sugirió el estudio cuántico. Utilizando el formalismo de Feynman de integrales de trayectoria se estudio un caso sencillo, para comparar su conveniencia respecto al formalismo de Schrödinger. Se vió que este último es más sencillo y directo para el problema de encontrar el potencial efectivo que resulte de pasar de coordenadas cartesianas a coordenadas hiperesféricas. La motivación original fué que este potencial efectivo favoreciera un campo cromomagnético intrínseco. Un resultado al margen de los objetivos iniciales de la tesis se obtuvo en el estudio de las integrales de Feynman para el caso sencillo mencionado. Se confirmaron resultados obtenidos por otros autores [50] para el cálculo de la integral de Feynman en coordenadas curvilineas. La comparación de lo realizado en la ref. [50] con lo obtenido en el capítulo 3 de esta tesis, sugiere realizar el cálculo de la integral de Feynman en el espacio de Euclides (como en la Ref. [50]) en lugar que en el de Minkowski (como se hace en el cap. 3), puesto que los cálculos son más directos.

En el último capítulo se trabaja en la imagen de Schrödinger (como sugiere lo realizado en el capítulo 3) para construir un operador Hamiltoniano hiperesférico para los campos de norma de la CDC sin campos de materia. El modelo obtenido se construye bajo la suposición de que los modos no constantes de la teoría (campos dependientes de las coordenadas espacio temporales) pueden ser absorbidos dentro de parámetros ajustables en un modelo de modos constantes.

Lo anterior significa que la rotación del sistema intrínseco (tanto en el espacio de color como en el físico) no depende ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo, es decir la rotación es la misma en todo el espacio. Esto reduce el problema de campos a uno con un número finito de grados de libertad muy estudiado en la física nuclear, donde se tiene mayor experiencia en el manejo de la transformación a coordenadas hiperesféricas.

El reducir el problema a modos constantes es justificable pues a bajas energías los modos dominantes son aquellos que tiene longitudes de onda grandes cuyo caso límite es precisamente el de modos constantes.

Analizando los grados de libertad gluónicos se muestra que los estados ligados gluónicos (glueballs) pueden ser clasificados según la siguiente cadena de grupos:

$$\begin{array}{rcc}
 U(24) \supset & U_c(8) \times & U_L(3) \\
 & \cup & \cup \\
 & O(8) & SU_L(3) \\
 & \cup & \cup \\
 & SU_c(3) & SO(3)
 \end{array}$$

No sólo es posible clasificar los estados ligados, utilizando algunas aproximaciones para la parte cinética del Hamiltoniano y suponiendo un potencial sencillo (oscilador armónico), se llega a un Hamiltoniano efectivo en modos constantes (bajas energías) que depende de operadores de Casimir de los grupos envueltos en la clasificación, de dos osciladores de una y cinco dimensiones respectivamente y de 6 parámetros, los cuales se ajustan según el espectro conocido “experimentalmente” en cálculos de redes para los glueballs [51]. El acuerdo con estos cálculos es muy bueno considerando lo simple del modelo presentado, además contrario a lo que ocurre con el cálculo de redes el modelo no sólo reproduce el espectro, también permite apreciar la estructura algebraica del mismo, explicando de modo natural las degeneraciones observadas y abriendo la posibilidad de extenderlo para incluir a los cuarks.

La última parte de esta tesis consiste de las conclusiones.

Capítulo 1

La Cromodinámica Cuántica (CDC)

1.1 Los campos, un sistema con un número infinito de grados de libertad

Desde la publicación de los *Principios matemáticos de la filosofía natural* de Isaac Newton, se avanzó enormemente en la formulación de las tres leyes newtonianas con herramientas matemáticas cada vez mas efectivas. Durante el siglo XVIII el interés de algunos filósofos franceses, como Voltaire, por divulgar las ideas de Newton [6] dió abundantes frutos, así se gestó una tradición que, comenzando con matemáticos como Clairaut y D'Alembert hasta Lagrange y Laplace, hizo posible reformular la teoría newtoniana de una forma tal que permitió el manejo de cualquier sistema dinámico incluyendo aquellos con un número infinito de grados de libertad, se tenían, pués, las herramientas para el manejo teórico de lo que científicos como Faraday y Maxwell habrían de consolidar : el concepto de campo electromagnético, susceptible de ser manejado y estudiado de un modo similar a un problema de partículas en algún potencial. Formular la mecánica de Newton en términos de una Lagrangiana o Hamiltoniano, permitió su generalización como una teoría dinámica, similar en tal sentido a la electrodinámica Maxwelliana, además de que esta formulación hizo mas claro el paso de la teoría clásica a la cuántica. El principio del cual se deriva toda esta formulación es el llamado principio de mínima acción de Hamilton, el cual establece que la trayectoria real de un sistema físico será aquella que extremize la acción es decir aquella trayec-

toría que anule la diferencial a primer orden de la acción. En el caso de la mecánica Newtoniana, la equivalencia de este principio con la formulación original puede verse fácilmente [9]:

La 2a ley de Newton se escribe, para el caso de una fuerza conservativa:

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_i}$$

multiplicando por dq_i y sumando para cada grado de libertad se tiene:

$$\sum_{i=1}^n m\dot{q}_i dq_i = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} dq_i$$

Integrando por partes desde t_1 hasta t_2 y considerando que: $dq_i(t_1) = dq_i(t_2) = 0$, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(m\ddot{q}_i + \frac{\partial V(q)}{\partial q_i} \right) dq_i dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q_i} dq_i - m\dot{q}_i d\dot{q}_i \right) dt = 0$$

Puesto que la expresión entre paréntesis de la segunda integral es una diferencial exacta, lo anterior puede escribirse del siguiente modo:

$$\int_{t_1}^{t_2} d \left(V(q) - \sum_{i=1}^n \frac{m\dot{q}_i^2}{2} \right) dt = -d \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{m\dot{q}_i^2}{2} - V(q) \right) dt = 0$$

Este es el principio de Hamilton con la acción definida como $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} dt$ y \mathbf{L} el Lagrangiano del sistema: $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \frac{m\dot{q}_i^2}{2} - V(q)$

El paso a una teoría de campos consiste en tomar el límite cuando n (el número de grados de libertad) tiende a infinito, en ese caso la suma del Lagrangiano se convierte en una integral, los puntos en el espacio toman el lugar de los índices de los grados de libertad y las coordenadas generalizadas (q_i) son sustituidas por el valor del campo, un Lagrangiano en teoría de campos se ve, entonces, así:

$$\mathbf{L} = \int_{\text{espacio}} \mathcal{L} d^3\mathbf{X}$$

De este modo la acción $\int \mathcal{L} d^4X$ con $d^4X = dt d^3\mathbf{X}$, toma una forma simétrica para las coordenadas espaciales y temporales, como era deseable

para formular una teoría física covariante, esta simetría da a la formulación lagrangiana una ventaja sobre la formulación hamiltoniana (canónica) [10], en donde no se tiene esta simetría explícitamente en las ecuaciones de movimiento. La función \mathcal{L} recibe el nombre de densidad lagrangiana.

La densidad lagrangiana de un campo encierra toda la información física del mismo así, por ejemplo, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener del principio de Hamilton directamente considerando que $d\phi(t_1, \mathbf{X}) = d\phi(t_2, \mathbf{X}) = 0$, resultando la llamada ecuación de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi}$$

Mientras que las cantidades dinámicas que se conservan pueden deducirse a partir de las simetrías de la densidad lagrangiana ante transformaciones continuas, el número de parámetros de dichas transformaciones implica un número igual de cantidades que no cambian en el tiempo [11]; el ejemplo más sencillo es la invarianza del Lagrangiano ante traslaciones espacio-temporales, dichas transformaciones dependen de 4 parámetros (una por cada dirección del espacio-tiempo), por lo que se deberán tener 4 cantidades independientes del tiempo, estas son las integrales en el espacio de cada uno de los elementos del primer renglón del tensor Energía-momento, es decir precisamente la energía y las 3 componentes del momento lineal.

La invarianza de las leyes de la física ante transformaciones de Lorentz y el hecho de que d^4X sea invariante relativista, exigen que la densidad lagrangiana (\mathcal{L}) sea, también, invariante relativista, lo cual facilita su deducción al restringir su forma [10], la misma ayuda brinda la invarianza de norma.

Como mencioné, la formulación lagrangiana permite hacer más claro el paso de una teoría clásica a una cuántica, dos modos de ver esta transición son:

1.
 - Sustituir las variables que representan los grados de libertad del sistema (cartesianos) y sus momentos conjugados por operadores hermitianos en el espacio de Hilbert, del mismo modo para el resto de las variables físicas.
 - Sustituir los paréntesis de Poisson ($\{H, C\}_{poisson} = \frac{dC}{dt}$) por conmutadores multiplicados por el factor $\frac{i}{\hbar}$:

$$\{H, C\} \rightarrow \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{C}] = \frac{i}{\hbar} (\hat{H}\hat{C} - \hat{C}\hat{H}) = \frac{d\hat{C}}{dt}$$

en particular:

$$[\hat{p}_j, \hat{q}_i] = -i\hbar\delta_{ij}$$

2. • Integrar el valor de $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - \mathbf{H})\right)$ por todas las trayectorias posibles en el espacio fase, \mathbf{H} , p y q son el hamiltoniano, momento conjugado y coordenada generalizada clásicos, con lo que se obtiene la amplitud de probabilidad (o elementos de la matriz de dispersión S) entre 2 estados con q definidos: $\langle q_1 t_1 | q_2 t_2 \rangle$.

La cuantización de los campos realizada por alguno de los caminos brevemente descritos en lo anterior no esta exenta de problemas, sin embargo los exitos han sido muchos, en particular en el estudio de las interacciones electromagnéticas dentro de la llamada electrodinámica cuántica (QED por sus siglas en inglés). En lo que se refiere al resto de las interacciones, como se mencionó en la introducción, se lograron avances muy importantes estudiando teorías de campo con características particulares: las llamadas teorías de norma, en las cuales los campos que representan las interacciones son obtenidos a partir de extender la simetría global de la teoría (una simetría independiente de las coordenadas espacio temporales) a una simetría local, es decir las transformaciones de la simetría son independientes en cada punto del espacio (pero relacionadas por la derivada covariante). Esta extensión de una simetría global a una local responde a la necesidad de ser consistente con una teoría de campo localizado y con el principio de causalidad. Originalmente la introducción de nuevos campos a partir de la extensión de una simetría global se debió a los físicos Yang y Mills quienes en 1954 [53] publicaron un artículo donde reconocían la semejanza entre la libertad de norma de la electrodinámica de Maxwell con la simetría del isoespín, en otras palabras: la libertad de elegir arbitrariamente el signo de las partículas en cada punto del espacio-tiempo que es posible gracias a la libertad de norma de los campos de interacción de la electrodinámica (el potencial eléctrico y magnético) es similar a la libertad de elegir el signo de la proyección del isoespín (elegir de entre los nucleones quién es un protón y quién un neutrón) independientemente de la elección que hayamos hecho en cualquier otro punto del espacio-tiempo. La idea resultó muy fructífera, aunque no se explotó desde un principio y hubieron de pasar algunos años antes de que las teorías de norma fueran ubicándose en el lugar que ahora ocupan. En el caso particular del isoespín, sin embargo, la extensión de la simetría no fué posible debido a que el isoespín no es una simetría exacta (el protón y el neutrón

no tienen la misma masa), lo fundamental del trabajo de Yang y Mills fue la idea de hacer de la simetría un concepto dinámico, dependiente del espacio y del tiempo, con lo cual se hizo posible derivar la interacción entre partículas con dicha simetría.

1.2 El “boom” en la fauna hadrónica

El descubrimiento del electrón, del protón y del neutrón junto con el reconocimiento del fotón como partícula mediadora de la interacción electromagnética, parecían redondear una visión acerca del mundo físico, mas aún cuando Anderson [54] descubrió en los rayos cósmicos una partícula de masa muy parecida a la que se predecía desde la teoría de Yukawa [55] para las partículas mediadoras de la interacción nuclear entre protones y neutrones. Sin embargo, no sería tan sencillo, la partícula descubierta por Anderson resultó inocua para los núcleos atómicos (más tarde se descubriría que resultaba del decaimiento de la partícula predicha por Yukawa) los muones como actualmente se conocen, resultan ser, al menos hasta los límites experimentales actuales, partículas puntuales, que junto con el conocido electrón, el tauón [56] y los respectivos neutrinos (partículas predichas por Pauli para explicar la violación al principio de conservación de la energía de los decaimientos beta) forman el conjunto de los leptones, partículas puntuales con número bariónico igual a cero, que no experimentan la llamada fuerza fuerte o de color, en cambio los piones (nombre con el que finalmente habrían de conocerse las partículas de Yukawa), quienes sí experimentan la fuerza fuerte, pertenecen al grupo de los hadrones, partículas que tienen por peculiaridad precisamente la de experimentar la fuerza fuerte. Los hadrones (del griego “hadros” = fuerte) se dividen a su vez en partículas con número bariónico igual a cero, los llamados mesones y aquellas con número bariónico diferente de cero, los llamados bariones. La razón de estos nombres es histórica y en la actualidad inaplicable, en la década de los 30’s las partículas leptónicas conocidas eran el electrón, los mesones conocidos eran los piones y entre los bariones estaban el protón y el neutrón, los nombres respondían al valor de sus masas (y a la entonces imperante tradición de poner nombres griegos a las partículas): leptón significa ligero, mesón medio y barión pesado. El panorama se modificaría radicalmente empezando por el ya mencionado descubrimiento del leptón llamado muón tan pesado como algunos mesones (el tauón, leptón descubierto más tarde es más pesado, incluso, que

el protón y el neutrón). En cuanto a los hadrones, el perfeccionamiento de los aceleradores de partículas permitió el acceso a fenómenos con una energía mucho mayor con lo cual fué posible detectar un enorme número de nuevas partículas hadrónicas incluyendo a las llamadas resonancias [57] con una vida media tan corta que no es posible detectarlas directamente por sus trazas en una cámara de burbujas o de niebla.

Así, la original clasificación de las partículas por su masa se vino abajo, y se recurrió a clasificarlas en base a otras características físicas como las que ya mencione (interacción fuerte o no, número bariónico, etc.); tal clasificación de las partículas en tres grupos (leptones, mesones y bariones), puede entenderse en la actualidad de otro modo, los leptones son partículas fundamentales, mientras que los mesones son partículas formadas por un par cuark-anticuark y los bariones por tres cuarks. Las diferencias físicas observadas son consecuencia de estas características en su composición. Los cuarks son partículas con carga de color, la fuerza fuerte entre nucleones puede entenderse, así, como el remanente de las interacciones en el interior del nucleón, algo similar a la fuerza de Van der Waals a nivel nuclear.

1.3 La “doma” de la fauna Hadrónica

Del mismo modo que Mendeleiev logró clasificar el conjunto de los elementos químicos a partir de observar y ordenar las características físicas y químicas de los diferentes elementos, paso a paso se fué logrando clasificar a los hadrones descubiertos experimentalmente en esquemas matemáticos basados sobre todo en la teoría de grupos y las simetrías de las partículas, de las primeras simetrías que lograron identificarse esta el ya mencionado isospín, que algebraicamente tiene una estructura semejante al espín. Por otro lado, el estudio de los decaimientos de partículas y la no observación de algunos decaimientos que no violaban las leyes hasta entonces conocidas fueron introduciendo nuevos números cuánticos. Las reglas empíricas que permitían conectar estos números cuánticos con características físicas medibles sirvieron, sino para entender el espectro hadrónico, sí para conocer que es lo que estaba sucediendo a nivel subnuclear. De entre los trabajos más importantes en la segunda mitad del siglo XX, está el de Murray Gell-Mann y Zweig, quienes obsevaron que el conjunto de partículas hadrónicas conocidas podía acomodarse dentro de multipletes del grupo $SU(3)$, multipletes en los que quedaban naturalmente incluidos los multipletes del isospín:

1.4 La simetría $SU(3)$

Si giramos una esfera con respecto a cualquiera de sus diámetros no tendremos forma de distinguir los estados de la esfera antes y después de la rotación, es eso lo que decimos al afirmar que la esfera tiene simetría rotacional. Fué precisamente con respecto a este tipo de transformaciones en el espacio físico que se entendió en un principio el concepto de simetría. En lo que se refiere a la física hadrónica, hemos mencionado algunas simetrías entre las partículas que no tienen que ver con transformaciones en el espacio, se llamaron simetrías internas: el isoespín, la extrañeza, el número bariónico y la carga; en particular el isoespín surgió como consecuencia de la simetría entre el protón y el neutrón en lo que respecta a las interacciones nucleares, se observó, por ejemplo [58], que las características físicas de los núcleos atómicos con la misma masa atómica eran similares sin importar el número atómico, la fuerza nuclear no distingue entre un protón y un neutrón, es decir para ella los protones y neutrones son una misma partícula (el nucleón) con isoespín $T=1/2$, las dos proyecciones de este isoespín sobre cualquier eje (el operador T_3 por ejemplo) corresponderán al protón y neutrón respectivamente. Podremos, entonces, representar al nucleón del siguiente modo:

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

La simetría de isoespín significa invarianza, al menos en lo que respecta a las fuerzas nucleares, ante transformaciones del grupo $SU(2)$:

$$N' = N + \delta N \quad \text{con} \quad \delta N = -i\omega_\alpha I_\alpha N$$

donde ω_α son los parámetros de la transformación (infinitesimales en este caso) e I_α son los generadores del grupo $SU(2)$ que definen la estructura del grupo por la relación que hay entre ellos, la llamada álgebra de Lie del grupo

$$[I_\alpha, I_\beta] = I_\alpha I_\beta - I_\beta I_\alpha = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} I_\gamma$$

De este modo el doblete de los nucleones forma un base para una representación irreducible del grupo $SU(2)$ (Una representación es un espacio de transformaciones lineales no-singulares homomorfas al grupo en cuestión). Además del estudio del espín conocemos un conjunto de matrices que satisfacen la anterior algebra de Lie: $I_\alpha = 1/2\tau_\alpha$ con τ_α las matrices de Pauli.

La anterior no es la única representación de la simetría del isoespín, si observamos la siguiente tabla con información experimental acerca de las propiedades físicas de los piones, podemos darnos cuenta de que forman un multiplete:

PiÓN	masa (m_0c^2)	Diferencia en masa (MeV)	carga	Tiempo de vida (seg)	espín
π^+	139.59	4.59	e	2.55×10^{-8}	0
π^0	135.00	0	0	0.83×10^{-16}	0
π^-	139.59	4.59	-e	2.55×10^{-8}	0

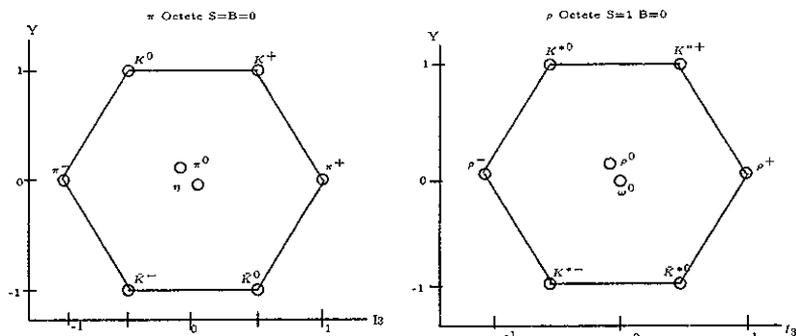
La casi igualdad en sus masas y sus semejanzas físicas, en lo que respecta a las interacciones nucleares, significan que forman la base para una representación irreducible del grupo SU(2) de dimensión 3 (por el hecho de ser de dimensión igual al número de generadores del grupo se llama representación adjunta).

De este modo los miembros de los multipletes del grupo SU(2) isoespín difieren entre si por sus características electromagnéticas (en particular la carga eléctrica), dentro de un multiplete de isoespín la carga varia desde Q_{min} hasta Q_{max} cubriendo todos los valores intermedios que sean obtenidos por sumar multiples enteros de la carga elemental al valor mínimo de la carga dentro del multiplete, ($Q_{min}, Q_{min} + e, \dots, Q_{max} - e, Q_{max}$), como en general las cargas de un multiplete de isoespín no está centrada en el cero, la componente 3 del isoespín que recorre el total de los miembros del multiplete, se cuenta a partir del valor central de la carga del multiplete:

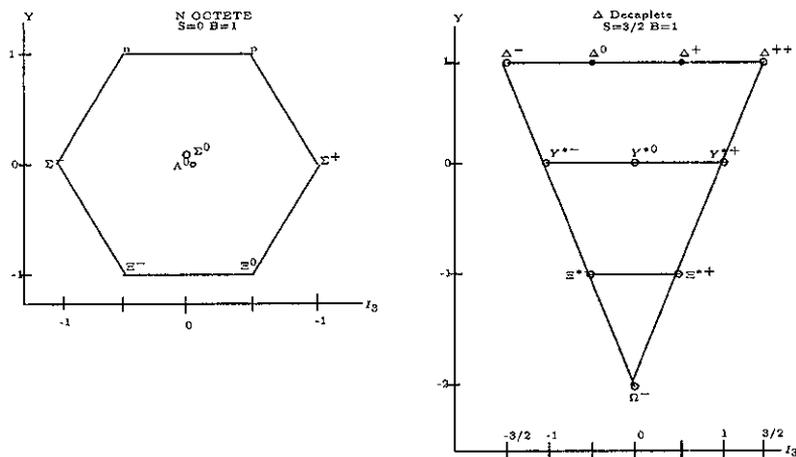
$$Q = 1/2(Q_{max} + Q_{min}) + T_3$$

Definiendo la hipercarga [60] como $Y = Q_{max} + Q_{min}$, obtenemos que: $Q = 1/2Y + T_3$ de este modo la hipercarga caracteriza al multiplete independientemente del valor del isoespín. Por otro lado la no observación de algunas reacciones como por ejemplo el decaimiento del átomo de hidrógeno en dos fotones ($e^- + P \rightarrow \gamma + \gamma$) a pesar de no violar ninguna ley de conservación conocida sugirió un nuevo número cuántico. el número bariónico (B). De modo similar se propuso la extrañeza (S) [59, 60] para explicar el largo tiempo de vida de las (entonces llamadas) partículas V. Ambos números cuánticos tienen relación con la hipercarga: $Y=S+B$.

Si de las partículas hadrónicas (conocidas en su mayoría por Gell-Mann y Zweig), agrupamos aquellas con el mismo número bariónico y espín y las acomodamos en diagramas Y vs I_3 , obtenemos lo siguiente :



Y para las partículas con número bariónico diferente de cero:



Observemos que los multipletes de isospín quedan incluidos en los ejes horizontales de los diagramas anteriores, y es más, a continuación veremos

brevemente que cada uno de los diagramas anteriores pueden reproducirse a partir de representaciones irreducibles del grupo $SU(3)$, es decir cada uno de los diagramas es un multiplete del grupo $SU(3)$.

En términos de diagramas de Young [62] la representación irreducible (irrep) de orden más bajo consiste de un solo cuadro:

$$\boxed{i} \equiv \boxed{\cdot} \quad \text{con } i = 1, 2, 3: \quad \boxed{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los generadores del grupo $SU(3)$ en la representación fundamental (de dimensión 3) son las llamadas matrices de Gell-Mann (ver apéndice A.1).

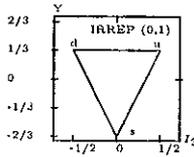
Podemos darle contenido físico al irrep anterior, proponiendo 3 partículas (los cuarks) que se identifican con el irrep anterior: $i=1=u$, $i=2=d$, $i=3=s$. Las propiedades físicas (isospín e hipercarga) de ellos las obtenemos de los generadores de $SU(3)$, recordando que los multipletes de Isoespín están contenidos en los diagramas Y vs. I_3 , del mismo modo que el grupo $SU(3)$ contiene al $SU(2)$:

$$I_k = \frac{1}{2}\lambda_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad (1.2)$$

con λ_i las matrices de Gell-Mann.

Así, graficando las propiedades Y vs I_3 de los tres cuarks obtenemos:



La carga de cada cuark dada por $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ es entonces: $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$ y $Q_s = -1/3$, en unidades de e .

Además a cada cuark debemos asociarle un número bariónico de $\frac{1}{3}$ de tal modo que una partícula formada por 3 cuarks tenga número bariónico igual a 1.

Los irreps de orden mayor podemos obtenerlos del producto directo del irrep fundamental:

$$\begin{array}{c} \square \otimes \square = \square \oplus \square \\ \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{3} \end{array}$$

la dimensión de cada irrep se indica debajo.

Observemos de inmediato que en el producto anterior aparece otro irrep con dimensión 3. Veamos cuáles son las propiedades Y e I_3 (y con ellas la carga) de este irrep. Consideremos para ello transformaciones infinitesimales del grupo $SU(3)$ respecto a un grado de libertad que tiene un generador diagonal (como lo son los generadores de los cuales se obtienen Y e I_3):

Los tensores base normalizados tot. antisim. del irrep son

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(su - us) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Como ejemplo ilustrativo veamos como se transforma el primero de los tensores anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(d's' - s'd') = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 - \frac{i}{2}\omega\lambda)d(1 - \frac{i}{2}\omega\lambda)s - (1 - \frac{i}{2}\omega\lambda)s(1 - \frac{i}{2}\omega\lambda)d \right) = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \left((d - \frac{i}{2}\omega C_d d)(s - \frac{i}{2}\omega C_s s) - (s - \frac{i}{2}\omega C_s s)(d - \frac{i}{2}\omega C_d d) \right) \end{aligned}$$

con C_d y C_s los eigenvalores de s y d respecto a la matriz λ . Despreciando términos de orden 2 en el parámetro ω lo anterior es:

$$\left(1 - \frac{i}{2}(C_s + C_d)\right) \frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)$$

Es decir los eigenvalores del tensor (y por tanto las propiedades Y e I_3) son la suma de los eigenvalores de los vectores antisimetrizados que forman el tensor.

De este modo vemos que el tensor $\frac{1}{\sqrt{2}}(ds - sd)$ tiene propiedades de signo contrario a u (incluyendo la carga) y lo mismo para los otros dos tensores. Por ello es natural asociar este irrep con el de los anticuarks.

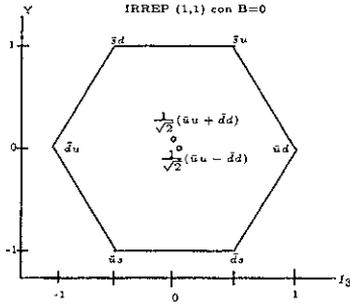
$$\begin{array}{l} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \quad \text{con } i=1,2,3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} = \bar{u} \approx \frac{1}{2}(ds - sd) \\ \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} = \bar{d} \approx \frac{1}{2}(su - us) \\ \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} = \bar{s} \approx \frac{1}{2}(ud - du) \end{array}$$

El signo de semejanza entre los cuarks antisimetrizados y los anticuarks se refiere a su comportamiento respecto al grupo SU(3), pero físicamente no son iguales: mientras que dos cuarks tiene número bariónico 2/3, cada anticuark tiene número bariónico -1/3.

Un resultado empírico importante es que todas las partículas hadrónicas tienen número bariónico entero. De este modo no todos los irreps de SU(3) tendrán contraparte en el mundo físico. El primer irrep de SU(3) con número bariónico entero que podemos encontrar es el formado por un cuark y un anticuark. Las partículas así formadas tendrán número bariónico $1/3 - 1/3 = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \\ \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \quad \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{1} \end{array}$$

Las propiedades Y e I_3 de los tensores son la suma de las propiedades de las partículas que los forman (como ya vimos). De este modo los 8 tensores base del irrep obtenido de multiplicar un cuark por un anticuark tienen las siguientes propiedades Y e I_3 :

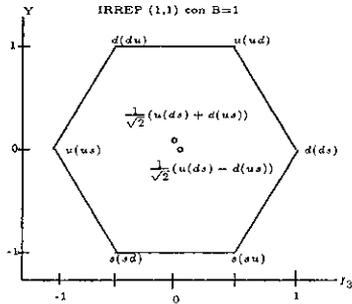


donde se toman, para las partículas con $Y = I_3 = 0$, combinaciones lineales de $u\bar{u}$ y $d\bar{d}$ (tienen los mismos eigenvalores).

El multiplete obtenido representa a los multipletes mesónicos (π octete y ρ octete) el primero acoplado los espines del par cuark-anticuark a cero y el segundo acoplándolos a 1 (es decir los cuarks deben ser partículas de espín $1/2$). Otro multiplete con número bariónico entero lo podemos obtener de multiplicar 3 veces el irrep fundamental. Las partículas obtenidas tendrán número bariónico $3 \times 1/3 = 1$:

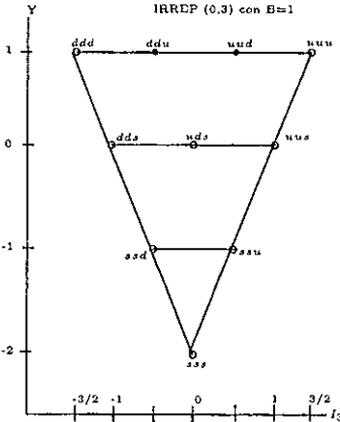
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array} \\
 \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{10} \quad \mathbf{8} \quad \mathbf{1}
 \end{array}$$

El segundo de los irreps anteriores (de dimensión 8) es similar al obtenido para los mesones, sólo que con número bariónico 1:



y representa al N-octete.

Los tensores base del irrep de dimensión 10 tienen las siguientes propiedades Y e I_3 :



Lo anterior claramente reproduce al Δ decuplete graficado antes. Es de notar que la partícula Ω^- que forma un singulete de isospín dentro del Δ decuplete fué descubierta después de haberse propuesto el presente modelo, incluso éste permitió, al predecir sus características físicas, disminuir la dificultad en su búsqueda y detección [23]. Por último el irrep de dimensión 1 corresponde a la partícula Λ^* detectada experimentalmente.

Es posible reproducir el decuplete anterior pero formado por antipartículas considerando que la elección del irrep \square como el que representa las partículas fué arbitraria y de igual modo pudo haber representado antipartículas.

Es importante mencionar que mientras que en los multipletes mesónicos las antipartículas se encuentran en el mismo multiplete que las partículas, en los multipletes bariónicos las antipartículas y respectivas partículas forman dos multipletes diferentes. Podemos construir multipletes exóticos que no violen la exigencia de B entero: por ejemplo uno formado por partículas compuestas por dos cuark y dos anticuarks ($qq\bar{q}\bar{q}$); otro ($B = -1$) con partículas compuestas por un cuark y cuatro anticuarks ($q\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) y uno más ($B = -2$) formado por seis anticuarks ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}\bar{q}$).

Historicamente el camino esbozado en lo anterior, condujo, como se ve, de modo natural a la idea de los cuarks como constituyentes de las partículas hadrónicas, con el modelo se lograron entender y explicar muchos de los datos experimentales sin aparente conexión y se logro una visión más profunda de

la física hadrónica, por ejemplo la diferencia en las características entre los mesones y bariones se entendió como una consecuencia de la diferente composición de cuarks: los mesones formados por una pareja cuark-anticuark mientras que los bariones por tres cuarks. Más tarde se descubrieron nuevos cuarks, el cuark charm (encanto) en 1975 [28], el cuark bottom en 1977 [29] y el cuark top en 1995 [30] (este grado de libertad: up, down, strange, charm, bottom y top recibe el curioso nombre de sabor). La ampliación, primero, de la simetría SU(3) a una simetría SU(4) que incluyera al cuark charm, era natural y efectivamente se lograron reproducir nuevamente [64] los resultados experimentales, sin embargo la inexactitud de la simetría (que dentro del modelo de cuarks podía entenderse como consecuencia de las diferentes masas de los cuarks) se hacía aún más evidente, esto mismo es lo que hace ya imposible la ampliación a una simetría SU(5) donde se incluya al cuark bottom, esto obligó al uso de nuevas técnicas [64]. La relevancia, pues, del modelo de Gell-Mann y Zweig, radica en el reconocimiento de la simetría como elemento fundamental en la física de partículas, así como, obviamente, en la introducción de los cuarks. El paso siguiente consistiría en encontrar una simetría exacta que permitiera una teoría cuántica de norma (la CDC), es claro que sin el modelo de cuarks la labor hubiera sido mucho mas complicada, éste condujo a algunas paradojas cuya respuesta sería la puerta de entrada para el descubrimiento de esa nueva simetría exacta: la simetría de color.

1.5 El Color, una simetría exacta

El modelo de Gell-Mann y Zweig para reproducir los multipletes hadrónicos, significó apenas el comienzo en el entendimiento de la física a escalas sub-hadrónicas, durante la década de los 60's y 70's, el modelo fué explorado en sus consecuencias, se llegó a paradojas que significarían el paso para la introducción de un nuevo grado de libertad interno para los cuarks. En 1964 Gurse y Radicati [65] extendieron el modelo de cuarks para incluir en él mismo al espín, es decir se incluyó al producto de los grupos $SU(3)_{sabor}$ y $SU(2)_{espin}$ en un grupo mayor: el grupo SU(6), de este modo la representación fundamental asociada a los cuarks es:

$$\{u(\uparrow), d(\uparrow), s(\uparrow), u(\downarrow), d(\downarrow), s(\downarrow)\}$$

Los bariones son obtenidos, por el producto triple de la representación

anterior:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \square & \otimes & \square & \otimes & \square & = & \square \square \square \oplus 2 \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \oplus \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \\
 6 & & 6 & & 6 & & 56 & & 70 & & 20
 \end{array}$$

De inmediato se observa que el irrep [3] tiene la dimensión justa para incluir los multipletes bariónicos de mas baja energía: $\dim(N\text{-octete}, s=1/2) + \dim(\Delta\text{-decuplete}, s=3/2) = 8 \times 2 + 10 \times 5 = 56$.

El problema con la elección del irrep [3] para reproducir los multipletes hadrónicos esta en que no reproduce la antisimetría de los estados. Experimentalmente la medición de los momentos magnéticos de los bariones indica que no hay contribuciones orbitales es decir los tres cuarks deben de estar en el mismo estado orbital S^1 .

Asi pues, por un lado tenemos una función de onda simétrica para los estados bariónicos en lo que respecta a los grados de libertad espín y sabor, y por otro necesitamos que dicha función sea antisimétrica de acuerdo al hecho de que los cuarks son partículas de espín 1/2.

Una alternativa explorada por Sakita [66] fué utilizar el irrep $[1^3]$ en lugar del [3], sin embargo su dimensión no permite incluir los dos multipletes bariónicos ademas de otras inconsistencias como el momento magnético que, calculado suponiendo el irrep $[1^3]$, difiere del experimental no sólo en magnitud sino también en signo.

Este problema de los momentos magnéticos no se presenta con el irrep [3]. Bajo suposiciones muy simples (ver por ejemplo [64]) se obtienen valores teóricos de acuerdo satisfactorio con los experimentales.

Asi las cosas, no resultaba tan sencillo descartar sin más el modelo de cuarks y en particular el irrep [3]. Resolver la paradoja de algún modo fué la alternativa tomada por Greenberg [67] M.Y. Han y Yochiro Nambu [68].

Si los cuarks dentro de un barión son simétricos es porque en lo que respecta a los grados de libertad sabor y espín, los cuarks no son partículas idénticas, asumiendo que los tres cuarks están en el estado S, entonces debe haber un número cuántico con al menos 3 valores diferentes. Haciendo que

¹además el radio de carga de los hadrones coincide con el de los mesones quienes no tienen restricción para que sus constituyentes cuark y anticuark, ocupen simultaneamente el estado S.

este nuevo grado de libertad sea antisimétrico se concilian los extremos de la paradoja: los tres cuarks del irrep [3] pueden estar en el estado S y cumplir con el principio de exclusión. Este número cuántico extra debía provenir de una simetría SU(3) exacta que explicara, entre otras cosas, la igualdad en masa de sus multipletes (3 cuarks con el mismo sabor y espín).

En el primer lustro de la década de los 70's Gell-Mann y colaboradores [69] revisaron la idea del nuevo grado de libertad para los cuarks y le dieron el nombre de color, nombre que terminaría por popularizarse en la comunidad mundial.

Desde un principio la nueva simetría interna (color), se utilizó más allá de sus objetivos iniciales: en el contexto de teorías de unificación [70, 71, 72] y para explicar el confinamiento de cuarks, por ejemplo en el artículo ya mencionado de 1965 Han y Nambu [68] introdujeron un octete de la simetría (los gluones), con lo cual obtuvieron un mecanismo para que todos los estados de baja energía fueran singuletes de color. Con ello el problema del confinamiento de cuarks adquiría nuevas dimensiones. Precisamente el éxito de la simetría de color para explicar, o al menos abrir nuevas perspectivas para el estudio del comportamiento de los cuarks (libertad asintótica y confinamiento principalmente) a través de su extensión como simetría local en una teoría cuántica de campos, es lo que la colocó como la simetría fundamental en lo que se refiere a las partículas hadrónicas, dicha extensión da lugar a bosones de norma (gluones) mediadores de la interacción entre partículas con color.

1.6 Los campos de Yang-Mills y la CDC

En lo siguiente se expone el modo en que la extensión de una simetría global a una local, da lugar a interacción entre las partículas con dicha simetría. La exposición es directa, y no se ocupa de las implicaciones topológicas y de otra índole relacionadas con las simetrías de norma:

Supongamos el Lagrangiano (densidad lagrangiana) de una partícula de Dirac:

$$\bar{\Psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\Psi = \bar{\Psi}i\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\Psi - \bar{\Psi}m\Psi$$

El Lagrangiano anterior depende de términos de la forma $\bar{\Psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\Psi$ y $\bar{\Psi}\Psi$, cada uno de los cuales permanece invariante cuando se le aplica una trans-

formación unitaria global:

$$U = \exp\{-i\omega_a L_a\}$$

Donde los ω_a son los parámetros (independientes de las coordenadas espacio temporales) de la transformación y L_a son los generadores del grupo.

Al aplicar la transformación los términos del Lagrangiano quedan:

$$(U^\dagger \bar{\Psi}) \gamma_\mu \partial^\mu U \Psi = \exp\{i\omega_a L_a\} \exp\{-i\omega_a L_a\} \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi$$

Lo anterior fue posible ya que la transformación es global, lo que le permite conmutar con la derivación parcial. Los términos de la otra forma $\bar{\Psi} \Psi$ son claramente invariantes. Si queremos que el Lagrangiano anterior sea invariante ante transformaciones locales:

$$U(x) = \exp\{-i\omega_a(x) L_a\}$$

Tendremos problemas con el término donde aparece la derivación parcial (los del otro tipo siguen siendo invariantes), el problema se reduce a buscar que $\partial^\mu \Psi$ se transforme igual que Ψ con lo cual se lograria anular ambas transformaciones, como en el caso de la simetría global, y dejar el Lagrangiano invariante.

De principio $\partial^\mu \Psi(x)$ se transforma a : $U(x) \partial^\mu \Psi + [\partial^\mu U(x)] \Psi(x)$, el segundo sumando es el que debemos eliminar. Es claro que si no agregamos algo más a la teoría, no será posible lo anterior, por otro lado una transformación local “independiza” a los puntos del espacio-tiempo con lo cual las derivadas parciales pierden su sentido (que es, por el contrario, relacionar el valor de los campos en diferentes puntos), lo anterior nos conduce así a buscar una nueva derivación generalizada que no solo haga al Lagrangiano localmente invariante, sino que asociada con la transformación local, permita “reconectar” el valor de los campos en diferentes puntos, definimos, pues, la derivada covariante como:

$$D^\mu \Psi(x) \equiv [\partial^\mu + ig A^\mu(x)] \Psi(x)$$

Donde $A^\mu(x)$ es un elemento del álgebra de Lie de la transformación, es decir es una combinación lineal de los generadores de la transformación:

$$A^\mu(x) \equiv A_a^\mu(x) L_a$$

Estos nuevos campos serán, por lo tanto, iguales en número a los generadores del grupo y reciben el nombre de campos de Yang-Mills.

Si bajo una transformación de norma infinitesimal los campos se transforman:

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \frac{1}{g}\partial^\mu\omega(x) - i[\omega(x), A^\mu(x)]$$

se garantiza que bajo esa misma transformación infinitesimal $D^\mu\Psi(x)$ se transforme igual que Ψ es decir:

$$D^\mu\Psi \rightarrow [\partial^\mu + ig(A^\mu(x) + \delta A^\mu(x))](\Psi + \delta\Psi) = (1 - i\omega_a(x))D^\mu\Psi(x)$$

Con lo anterior hemos garantizado la invarianza local del Lagrangiano y hemos tenido necesariamente que introducir una derivación generalizada y en ella, a su vez, nuevos campos. Estos últimos hacen del Lagrangiano original insuficiente ya que debe, también, incluirlos. Lo que se logra agregando un término al Lagrangiano que sea invariante ante las transformaciones locales (transformaciones de norma) y transformaciones de Lorentz. Podemos proceder a semejanza de la teoría electromagnética, definiendo un tensor cuya reducción escalar nos de el termino buscado. Dicho tensor debe, por otro lado, transformarse de acuerdo a una representación irreducible del grupo de las transformaciones y estar determinado por la estructura del grupo, es decir por las llamadas constantes de estructura C_{ab}^c ($[L_a, L_b] = iC_{ab}^c L_c$). El tensor buscado es una generalización del tensor de Faraday:

$$F_a^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) - gC_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\nu(x)$$

Con su correspondiente elemento en el álgebra de Lie $F^{\mu\nu} \equiv F_a^{\mu\nu}L_a$, las transformaciones del tensor anterior garantizan (ver ref. [61]) la invarianza local del siguiente Lagrangiano donde se incluye el correspondiente al campo fermiónico y el nuevo termino de los campos de norma.

$$\mathcal{L} = -1/4F_a^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} + \Psi(i\gamma_\mu D^\mu - M)\Psi$$

El $1/4$ es convencional y el parametro g es llamado constante de acoplamiento de norma quien via el acoplamiento mínimo fija la escala de interacción entre el campo de materia y el de norma.

La Cromodinámica Cuántica es un caso particular de teoría de Yang-Mills, con las transformaciones locales pertenecientes al grupo $SU(3)_{color}$. En los dos siguientes capítulos de esta tesis trabajamos con el grupo $SU(2)_{color}$

, bajo el supuesto de que los resultados obtenidos son de igual importancia y aplicabilidad para la teoría completa.

Podemos definir un campo magnético y eléctrico, con la particularidad de que son parte del álgebra de Lie del grupo:

$$\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_a L_a \text{ y } \mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_a L_a$$

Identificando las componentes de estos campos con los elementos del tensor $F_a^{\mu\nu}$ (del mismo modo que en la electrodinámica) obtenemos los campos \mathbf{E}_a y \mathbf{B}_a en términos de los cuadripotenciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= -\nabla A_a^0 - \frac{\partial \mathbf{A}_a}{\partial t} - g C_{abc} \mathbf{A}_b A_c^0 \\ \mathbf{B}_a &= \nabla \times \mathbf{A}_a + \frac{1}{2} g C_{abc} \mathbf{A}_b \times \mathbf{A}_c \end{aligned}$$

Las constantes de estructura C_{abc} son las componentes del tensor tot. antisim. f_{abc} para $SU(3)$ (ver apéndice A.1) y las del tensor de Levi-civita ϵ_{abc} para el caso $SU(2)$. En el caso del grupo $U(1)$ $C_{abc} = 0$, con lo cual recuperamos las expresiones de la electrodinámica.

Así un grupo de norma no abeliano introduce términos extras en comparación con la electrodinámica. Por ejemplo $\nabla \cdot \mathbf{B}_a = \frac{1}{2} g C_{abc} \nabla \cdot (\mathbf{A}_b \times \mathbf{A}_c)$ es decir existe una densidad de carga magnética, que además depende de los campos mismos.

Las ecuaciones de movimiento (equivalentes a la ley de Gauss y a la de Ampere-Maxwell), para el caso de campos de norma libres se pueden derivar del Lagrangiano usando las ecs. de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}_a + g C_{abc} \mathbf{A}_b \cdot \mathbf{E}_c &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_a - \frac{\partial \mathbf{E}_a}{\partial t} + g C_{abc} (A_b^0 \mathbf{E}_c + \mathbf{A}_b \times \mathbf{B}_c) &= 0 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar las ecs. ya no son lineales y su resolución aun en el caso libre no es sencillo. Observese que en la ec. equivalente a la ec. de Gauss, no aparecen derivadas temporales de A_a^0 , lo que indica que A_a^0 no representa un grado de libertad físico. De este modo podemos elegir una norma que la anule $A_a^0 = 0$. Esta es la llamada norma del tiempo.

Finalmente, haciendo la transformación de Legendre usual se obtiene la densidad Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_a \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}_a \cdot \mathbf{E}_a)$$

que tiene una forma similar al caso de la electrodinámica.

1.7 El estado base de la CDC

En 1977 G. K. Savvidy y S.G. Matinyan [8] publicaron un artículo en donde, utilizando aproximación a un lazo y técnicas de renormalización, demostraban que la densidad de energía de los campos de norma de una teoría de norma libre $SU(2)$ tenía la siguiente forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2}H^2 + \frac{11g^2H^2}{48\pi^2} \left[\ln \frac{H}{\mu^2} - \frac{1}{2} \right]$$

donde H es el campo Cromomagnético. En el mínimo de esta expresión $H \neq 0$.

Desde un principio Savvidy y Matinyan intuyeron que este resultado podía dar lugar a un modelo fenomenológico que explicara el confinamiento de cuarks. Sin embargo el cálculo que realizaron ocultaba el hecho de que los estados que obtenían en realidad son inestables y por tanto no son una solución física, lo que por otro lado resulta reconfortante ya que un estado base con un campo magnético homogéneo no es invariante de Lorentz.

Se puede intentar un modelo fenomenológico que reproduzca los resultados de Savvidy y donde se vea que los estados son inestables. El punto de inicio es encontrar una situación análoga en electrodinámica que tenga por resultado el confinamiento de algunas partículas (análogas entonces a los cuarks confinados). Esta situación la encontramos en la superconductividad, sabemos que dentro de un superconductor de tipo I, las líneas de campo magnético no pueden penetrar (efecto Meissner-Ochsenfeld). Así el campo magnético de dos hipotéticos monopolos magnéticos sumergidos en un medio superconductor creará una región de conducción normal dentro del superconductor. En esta región la densidad de energía será mayor que en la región superconductora y por lo tanto la configuración de energía mínima será aquella donde los monopolos estén confinados. Podemos asociar estos monopolos con las cargas de color. Extendemos más la analogía: si los monopolos crean una región de conductividad normal con un campo magnético, los cuarks crearán una región dentro del vacío con un campo cromoelectrónico. En el superconductor existen pares de Cooper unidos por interacciones electrón-fonón, los análogos en CDC pueden ser cuerdas de campo magnético, es decir, hablando en términos clásicos, un campo magnético constante (que por otro lado rompe la simetría de Lorentz del vacío). Los resultados de Savvidy son congruentes con el modelo fenomenológico anterior (un campo cromomagnético en el estado base). Sin embargo partiendo de las ecs. de

movimiento para los campos de norma y suponiendo desde un principio un campo cromomagnético constante se llega a [73]:

$$\epsilon = \frac{11(gH)^2}{48\pi^2} \ln \frac{gH}{\mu^2} - i \frac{(gH)^2}{8\pi}$$

El resultado es igual al de Savvidy, salvo por el término imaginario indicativo de la inestabilidad de los estados.

Podemos manejar los estados inestables de tal modo que podamos darnos una idea de lo que ocurre no perturbativamente con el vacío (estado base) de la CDC. En la ref. [74] se hace lo anterior haciendo algunas suposiciones. El resultado es un campo cromomagnético que en dos dimensiones varía de tal manera que el promedio del campo cromomagnético sobre una región del tamaño típico de un hadrón es cero. Sin embargo el campo cromomagnético en todos los puntos es paralelo, con lo que se viola la invarianza de Lorentz del estado base. En el caso cuántico se tendrá una oscilación sobre esta configuración clásica. La variación hará que los campos cromomagnéticos dejen de ser paralelos cambiando totalmente su orientación en grandes regiones del espacio, preservando de ese modo la invarianza de Lorentz. Esta característica es también la que le da nombre al modelo: “el vacío de espagueti”.

El manejo de la inestabilidad magnética del estado base de la CDC, ha dado lugar a otros modelos. En la referencia [44] se propone el manejo de la inestabilidad del vacío a través de agregar gluones localizados que estabilizarían la solución. Las consecuencias de este modelo es un vacío con propiedades similares a las de un condensado Bose-Einstein, formado por estados ligados de gluones (“glueballs”) acoplados a color cero.

Por caminos diferentes en la ref. [43] se llega a un conclusión similar: en modos constantes el estado base de la CDC es descrito por un condensado de glueballs acoplados a color y espín cero.

Capítulo 2

Bajas energías en una teoría clásica $SU(2)_{color}$

2.1 Las coordenadas hiperesféricas

En la última sección del capítulo anterior se mencionaron algunas características del estado base de la CDC, entre ellas la inestabilidad de una solución con un campo cromomagnético homogéneo, que por otro lado es congruente con el modelo fenomenológico de confinamiento de cuarks que explota la dualidad vacío de CDC-Superconductor . El manejo de esta inestabilidad da lugar a modelos del estado base. Uno de ellos conduce a un estado base con un campo cromomagnético que, en su versión cuántica, varía tanto en magnitud y dirección en cada punto del espacio de tal modo que el promedio del campo sobre regiones típicas hadrónicas es nulo, preservandose, así, la invarianza de Lorentz.

Las coordenadas hiperesféricas, usadas inicialmente en física nuclear en modelos colectivos microscópicos [49], permiten la descripción del núcleo atómico en términos de los elementos no nulos (ρ_k $k = 1, 2, 3$) de una matriz cuadrupolar diagonal referida a un sistema intrínseco, de los ángulos (θ) que gira ese sistema intrínseco respecto a un sistema fijo en el “laboratorio” y de otros ángulos (ϕ) que son parámetros de transformaciones ortonormales cuyos índices se refieren al índice de cada nucleón. Tanto las ρ 's como las θ 's son variables colectivas, en el sentido de que no se alteran por permutaciones en el índice que nombra las coordenadas de las partículas.

Dadas las características que se sugiere tiene el estado base de la CDC

(un campo magnético que varía de en magnitud y sentido de punto a punto) parece conveniente el uso de las coordenadas hipersféricas para su descripción. Nos permiten referir los campos de norma a un sistema intrínseco (orientado en general de modo diferente en cada punto del espacio) donde la matriz:

$$q_{kj} = \sum_a A_{ka} A_{ja} \mapsto q'_{kj} = \rho_k \delta_{kj}$$

es diagonal.

Concretando, la transformación a coordenadas hipersféricas es la siguiente:

$$A_{ia} = \sum_{k=1}^3 \rho_k(x) D_{k,i}^{1^3}(\Theta(x)) \Delta_{A-3+k,a}^{1^s}(\Phi(x)) \quad . \quad (2.1)$$

La matriz $D_{k,i}^{1^3}(\Theta(x))$ se refiere a la matriz de rotación en el espacio físico 3-dimensional mientras que $\Delta_{A-3,a}^{1^s}(\Phi(x))$ es una matriz ortonormal en el espacio de color de dimensión A. Donde A es el número de campos de norma (A=3 para $SU(2)$ y A=8 para $SU(3)$).

De las propiedades de ortogonalidad de las matrices Δ es fácil probar que la matriz cuadrupolar es:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \sum_a A_{ia} A_{ja} \\ &= \sum_k (D^{1^3}(\Theta))_{i,k}^T \rho_k^2 D_{k,j}^{1^3}(\Theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

T denota transpuesta

Con lo que se demuestra que las rotaciones D en el espacio físico nos llevan de un sistema fijo al laboratorio a un sistema intrínseco donde la matriz cuadrupolar es diagonal. Notese que tanto ρ_k como los ángulos Θ y Φ dependen en general de x . El hecho de que la transformación (2.1) sea biyectiva implica que: $0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3$.

Expresar algunas de las cantidades físicas importantes de la QCD en términos de coordenadas hipersféricas es una tarea que ya ha sido realizada en la ref. [75], aquí nos limitaremos a reproducirlas. La densidad Lagrangiana, por ejemplo, tiene la siguiente forma (en la norma del tiempo y para $SU(2)$):

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (2.3)$$

con:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \rho_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} (\rho_m^2 + \rho_k^2) (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) - \sum_{m,k} \rho_m \rho_k \Omega_{mk} \omega_{mk} \quad (2.4)$$

y \mathcal{V} independiente de las derivadas temporales.

De lo anterior es directo obtener los momentos conjugados de las coordenadas hiperesféricas. De especial importancia es el momento conjugado a los campos $\Phi_{kk'}$, ya que en la siguiente sección buscamos soluciones a las ecs. de movimiento acopladas a color cero. Es decir que sean escalares de color ó dicho de otro modo con “momento angular de color” igual a cero:

$$\mathcal{L}_{kk'} = \frac{\partial L}{\partial(\partial^0 \Phi_{kk'})} = \frac{\partial T}{\partial(\partial^0 \Phi_{kk'})} = 0 \quad (2.5)$$

Esta condición simplificará la solución de las ecs. de movimiento para los campos de norma expresadas en términos de los nuevos campos.

2.2 Una solución clásica

Haciendo uso de la transformación de los campos de norma a campos hiperesféricos, buscamos, en una esquema clásico, algunas soluciones de las ecuaciones de campo, con la esperanza de encontrar alguna con un campo cromomagnético transformado diferente de cero.

En lugar de proceder con las ecuaciones de movimiento para los campos, utilizamos un resultado obtenido por Belavin et. al. y G't Hooft [76, 77] donde se deduce que cuando:

$$F^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu} \quad (2.6)$$

se tiene un extremal en la acción, es decir la condición anterior es una solución para las ecuaciones de campo sin fuentes. Con el grupo de norma $SU(2)$ y en la norma del tiempo ($A_a^0 = 0$) el tensor $F_a^{\mu\nu}$ es:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \epsilon_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (2.7)$$

antisimétrico para los índices $\mu\nu$, por lo cual los términos diagonales se anulan. Los elementos que incluyen el índice temporal son:

$$F_a^{0k} = \partial^0 A_a^k = -F_a^{k0} \quad (2.8)$$

El resto de los elementos del tensor:

$$F_a^{ij} = \partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i - g\epsilon_{abc}A_b^i A_c^j \quad (2.9)$$

Los cuales se expresan en los nuevos campos ($A_{i\alpha} = \rho_k D_{ki}(\Theta)\Delta_{k\alpha}(\Phi)$) como:

$$F_a^{ij} = F_a{}_{\nu j} = \partial_i(\rho_k D_{kj}\Delta_{ka}) - \partial_j(\rho_k D_{ki}\Delta_{ka}) - \epsilon_{abc}((\rho_k D_{kb}\Delta_{kb})(\rho_{k'} D_{k'j}\Delta_{k'c})) \quad (2.10)$$

donde los ángulos de rotación en las transformaciones ortogonales se emiten por comodidad. Para expresar lo anterior de un modo más conveniente, utilizamos lo siguiente (para detalles ver apéndice B.1):

$$\partial_i D(\theta) = \alpha^i D \quad (2.11)$$

Donde α^i son matrices 3x3 antisimétricas ($\alpha^i = -(\alpha^i)^T$), iguales a:

$$\alpha_{kk'}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Theta_{kk'}(x) \quad (2.12)$$

Las componentes de esta matriz $\alpha_{kk'}^i$, son las “velocidades angulares espaciales” a lo largo del plano (kk') fijo al sistema intrínseco. Es decir es la proyección sobre el eje perpendicular al plano intrínseco (kk'), del vector que nos da la información de la variación en la orientación de los sistemas intrínsecos al desplazarnos a lo largo del eje i fijo al laboratorio.

Del mismo modo $\partial_i \Delta$, puede expresarse en términos de matrices (β^i) como las anteriores con la sustitución de los parámetros espaciales $\Theta_{kk'}$, por los respectivos en el espacio de color $\Phi_{kk'}$, estos parámetros que en general dependen de las coordenadas espacio temporales completan (junto con los ρ 's y Θ 's) el conjunto de los nuevos campos hiperesféricos. Así la parcial de Δ se escribe:

$$\partial_i \Delta = \beta^i \Delta \text{ Con } \beta_{kk'}^i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi_{kk'}(x) \quad (2.13)$$

Las matrices β^i , son también antisimétricas. Con los resultados anteriores podemos reescribir las componentes espaciales(ij) del tensor de campo:

$$F_a{}_{\nu j} = \Delta_{ka} \left\{ D_{kj} \partial_i \rho_k - D_{ki} \partial_j \rho_k + \rho_k (\alpha_{kk'}^i D_{k'j} - \alpha_{kk'}^j D_{k'i}) + \rho_{k'} (\beta_{k'k}^i D_{k'j} - D_{k'i} \beta_{k'k}^j) \right\} - g\epsilon_{bca} D_{kb} D_{k'j} \Delta_{kb} \Delta_{k'c} \rho_k \rho_{k'} \quad (2.14)$$

Por otro lado las componente del tensor de campo que incluyen un índice temporal ($F_a^{0k} = \partial^0 A_a^k = -F_a^{k0}$) son:

$$F_a^{j0} = F_a{}_{0j} = \partial^0 \rho_k D_{kj} \Delta_{ka} + \rho_k \omega_{kk'} D_{k'j} \Delta_{ka} + \rho_k D_{kj} \Omega_{kk'} \Delta_{k'a} \quad (2.15)$$

Donde las matrices $\omega_{kk'}$ y $\Omega_{kk'}$ son las equivalentes a las matrices α^2 y β^2 sólo que para la derivación parcial en el tiempo:

$$\begin{aligned} \partial^0 D &= \omega D \text{ con } \omega_{kk'} = \partial^0 \Theta_{kk'} \\ \partial^0 \Delta &= \Omega \Delta \text{ con } \Omega_{kk'} = \partial^0 \Phi_{kk'} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ambas matrices (ω y Ω) son antisimétricas.

Para expresar el tensor dual en los nuevos campos utilizamos los resultados anteriores directamente:

$$\tilde{F}_a^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{a\alpha\beta} \quad (2.17)$$

Considerando, primero, las componentes sin índice temporal tenemos que:

$$\tilde{F}_a^{\nu j} = \frac{1}{2} \epsilon^{\nu j 0k} (F_{aok} - F_{ak0}) = \epsilon^{\nu j 0k} F_{a0k} = \epsilon^{\nu j k} F_{a0k} \quad (2.18)$$

El resto de los elementos son:

$$\tilde{F}_a^{0k} = -\tilde{F}_a^{k0} = \frac{1}{2} \epsilon^{0kij} F_{a ij} = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} F_a^{\nu j} \quad (2.19)$$

La solución que buscamos resulta de igualar el tensor de campo con su dual ec.(2.6):

$$F^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu\nu}$$

Es decir en términos de los generadores de SU(2):

$$(F_a^{\mu\nu} - \tilde{F}_a^{\mu\nu}) L_a = 0 \quad (2.20)$$

De la independendencia lineal de los generadores de SU(2), lo anterior implica que:

$$F_a^{\mu\nu} = \tilde{F}_a^{\mu\nu} \quad (2.21)$$

La condición anterior dada en términos de las componentes espaciales y las espacio-temporales separadamente es:

$$F_a^{\nu j} = \tilde{F}_a^{\nu j} = \epsilon^{\nu j k} F_a^{0k} \text{ y } F_a^{0k} = \tilde{F}_a^{0k} = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} F_a^{\nu j} \quad (2.22)$$

Las dos ecuaciones anteriores son equivalentes. Para demostrarlo supongamos que se cumple la primera ecuación y sustituyamos en la segunda:

$$F_a^{0k} = \frac{1}{2}(\epsilon^{kij}\epsilon^{ijp})F_a^{0p} = \frac{1}{2}(2\delta_{kp})F_a^{op} = F_a^{0k}$$

Ahora en sentido inverso, supongamos cierta la segunda ecuación y sustituyamos en la primera:

$$F_a^{ij} = \frac{1}{2}(\epsilon^{ijp}\epsilon^{kpq})F_a^{pq} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})F_a^{pq} = \frac{1}{2}(F_a^{ij} - F_a^{ji}) = F_a^{ij}$$

Así pues el par de ecuaciones (2.22) son enteramente equivalentes, y podemos utilizar cualquiera de ellas sin perder ninguna información. Elegimos la primera que en términos de los nuevos campos se ve del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_a^{ij} = & \Delta_{ka} \left\{ D_{kj} \partial_i \rho_k - D_{ki} \partial_j \rho_k + \rho_k (\alpha_{kk'}^i D_{k'j} - \alpha_{kk'}^j D_{k'i}) + \rho_{k'} (\beta_{k'k}^i D_{k'j} - D_{k'i} \beta_{k'k}^j) \right\} \\ & - g_{\bar{b}ca} D_{ki} D_{k'j} \Delta_{kb} \Delta_{k'c} \rho_k \rho_{k'} = \\ \tilde{F}_a^{ij} = & \epsilon^{ijm} F_a{}_{0m} = \epsilon^{ijm} (\partial^0 \rho_k D_{km} \Delta_{ka} + \rho_k \omega_{kk'} D_{k'm} \Delta_{ka} + \rho_k D_{km} \Omega_{kk'} \Delta_{k'a}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

No intentaremos dar solución al conjunto anterior de ecuaciones diferenciales acopladas. En lugar de ello supondremos un caso simple en el que llegar a un resultado resulte más sencillo, justificando la conveniencia de estudiar ese caso con argumentos físicos. De principio es importante notar que el hecho de que los campos estén acoplados a color cero, trae como consecuencia una relación para las derivadas temporales de los campos Θ y Φ .

El momento conjugado al campo Φ (las rotaciones en el espacio de color del sistema “intrínseco”) es de acuerdo con el lagrangiano expresado en los nuevos campos (ec. (2.3)):

$$\mathcal{L}_{kk'} = \frac{\partial T}{\partial(\partial^0 \Phi)} = -\frac{1}{2}((\rho_k^2 + \rho_{k'}^2)\Omega_{kk'} - 2\rho_k \rho_{k'} \omega_{kk'}) \quad (2.24)$$

La condición color cero consiste en igualar a cero el momento conjugado anterior, con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$\Omega_{kk'} = \partial^0 \Theta_{kk'} = \frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 \rho_{k'}^2} \partial^0 \Phi_{kk'} \quad (2.25)$$

Lo anterior implica que:

$$\Theta_{kk'}(x) + f(X^i) = \Phi_{kk'}(x) \frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 \rho_{k'}^2} - 2 \int \Phi_{kk'} \partial^0 \left(\frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 \rho_{k'}^2} \right) \quad (2.26)$$

Donde $f(X^i)$ es una función de las coordenadas espaciales unicamente.

La relación entre Θ y Φ se simplifica si ρ_k es independiente tanto del tiempo como del espacio, este es el caso que consideraremos en lo siguiente.

2.3 Caso ρ_k 's constantes

En el espectro a bajas energías del campo gluónico los modos dominantes son aquellos con longitudes de onda grandes, cuyo caso limite es precisamente el caso de longitud de onda infinita ó ρ_k constante en el tiempo y el espacio, es de esperar entonces que el estudio de los llamados modos constantes aporte información acerca del comportamiento a bajas energías de los campos gluónicos. En el último capítulo de esta tesis se construye un modelo en el que las aportaciones de los modos no constantes están absorbidos en parámetros susceptibles de ser ajustados a resultados obtenidos en teorías de redes (lattice gauge theories). Otro ejemplo de lo anterior es el trabajo de Baal (ref. [79]), en donde se estudia el campo gluónico en una caja con condiciones periódicas (un toro) y los modos no constantes son incluidos como perturbaciones a la teoría en modos constantes

Con las componentes del potencial vector transformado al sistema "intrín seco" constantes en el tiempo y el espacio, las ecuaciones diferenciales obtenidas se reducen a:

$$\begin{aligned} F_a^{ij} &= \Delta_{ka} \left\{ \rho_k \left((\partial_i \Theta_{kk'}) D_{k'j} - (\partial_j \Theta_{kk'}) D_{k'i} \right) + \rho_{k'} \left((\partial_i \Phi_{kk'}) D_{k'j} - (\partial_j \Phi_{kk'}) D_{k'i} \right) \right\} \\ &\quad - g \epsilon_{bca} D_{ki} D_{k'j} \Delta_{kb} \Delta_{k'c} \rho_k \rho_{k'} = \\ \tilde{F}_a^{ij} &= \epsilon^{ijk} F_a^{0k} = \epsilon^{ijm} (\rho_k \partial^0 \Theta_{kk'} D_{k'm} \Delta_{ka} + \rho_k D_{km} \partial^0 \Phi_{kk'} \Delta_{k'a}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

En la expresión anterior el término que depende de la constante de acoplamiento (g), puede expresarse de otro modo utilizando los coeficientes de Clebsch-Gordan para el grupo $SO(3)$ (ver apéndice B.2).

Las representaciones irreducibles del grupo $SO(3)$, quedan totalmente caracterizadas por un número entero mayor o igual que cero, la relación entre representaciones de diferente orden está dada por coeficientes de Clebsch-Gordan del siguiente modo:

$$D_{m_1 n_1}^{j_1} D_{m_2 n_2}^{j_2} = (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) (j_1 n_1 j_2 n_2 | JN) D_{MN}^J$$

En el término que nos interesa aparecen irreps de “espín” 1, tanto para las rotaciones espaciales como para las de color. La aplicación directa de la relación anterior para las rotaciones en el espacio de color (Δ) nos da:

$$-g\epsilon_{bca}D_{ki}D_{k'j}\Delta_{kb}\Delta_{k'c}\rho_k\rho_{k'} = -g\epsilon_{bca}\rho_k\rho_{k'}D_{ki}D_{k'j}(1k1k'|\lambda q)(1b1c|\lambda q')\Delta_{qq'}^\lambda \quad (2.28)$$

Por otro lado: $\epsilon_{bca} = \sqrt{2}(1b1c|1a)$ para el caso de índices cartesianos (ver apéndice B.2). Con esto y con las propiedades de los CCG ($(1b1c|1a)(1b1c|\lambda q') = \delta_{1\lambda}\delta_{aq'}$), el término queda:

$$-g\sqrt{2}\delta_{1\lambda}\delta_{qa}\Delta_{qa}^\lambda\rho_k\rho_{k'}D_{ki}D_{k'j}(1k1k'|\lambda q) = -g\sqrt{2}\Delta_{qa}\rho_k\rho_{k'}D_{ki}D_{k'j}(1k1k'|1q) \quad (2.29)$$

Haciendo lo mismo para las rotaciones espaciales:

$$D_{ki}D_{k'j} = (1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p')D_{pp'}^\lambda$$

el término del que nos hemos ocupado es:

$$-g\sqrt{2}\rho_k\rho_{k'}(1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p')D_{pp'}^\lambda\Delta_{qa} \quad (2.30)$$

La suposición ρ_k constante implica que:

$$\Phi_{kk'} + f(X^i) = \frac{2\rho_k\rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2}\Theta_{kk'} \quad (2.31)$$

Suponiendo $f(X^i) = 0$ los campos Φ 's y Θ 's son proporcionales (del mismo modo sus derivadas tanto temporales como espaciales). Con los resultados obtenidos la ecuación original completa ec.(2.27) se escribe (para detalles ver apéndice B.3):

$$\Delta_{ka}\rho_k\left(\frac{\rho_k^2 - \rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2}\right)\left\{(\partial_i\Theta_{kk'})D_{k'j} - (\partial_j\Theta_{kk'})D_{k'i} - \epsilon^{ijm}\partial_0\Theta_{kk'}D_{k'm}\right\} = g\sqrt{2}\rho_k\rho_{k'}(1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p')D_{pp'}^\lambda\Delta_{qa} \quad (2.32)$$

El primer término es de espín 1 tanto para las rotaciones espaciales como para las de color, por lo tanto la igualdad implica que el segundo también debe ser de espín 1 para los dos tipos de rotaciones. Para el caso del color

la condición se cumple, sin embargo para las rotaciones espaciales se cumple sólo si $\lambda = 1$, es decir el segundo término debe ser igual a:

$$g\sqrt{2}\rho_k\rho_{k'}(1k1k'|1q)(1k1k'|1p')(1i1j|1p)D_{p'p}\Delta_{qa} = \frac{1}{2}g\rho_k\rho_{k'}\epsilon_{kk'q}\epsilon_{kk'p'}\epsilon_{ijp}D_{p'p}\Delta_{qa} \quad (2.33)$$

Con los siguientes cambios de índices mudos:

$$\begin{aligned} k &\mapsto q \\ k' &\mapsto p' \\ q &\mapsto k \\ p' &\mapsto k' \\ p &\mapsto m \end{aligned}$$

El término queda:

$$\frac{1}{2}g\rho_q\rho_{p'}\epsilon_{qp'k}\epsilon_{qp'k'}\epsilon_{ijm}D_{k'm}\Delta_{ka} \quad (2.34)$$

La sustitución de índices mudos anterior permite escribir la ecuación para los campos (ec. 2.32) de un modo más conveniente:

$$\begin{aligned} \Delta_{ka}\rho_k\left(\frac{\rho_k^2 - \rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2}\right)\{(\partial_i\Theta_{kk'})D_{k'j} - (\partial_j\Theta_{kk'})D_{k'i} - \epsilon^{ijm}\partial_0\Theta_{kk'}D_{k'm}\} = \\ \rho_k\frac{\rho_k^2 - \rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2}\{(\partial_i\Theta_{kk'})\delta_{jm} - (\partial_j\Theta_{kk'})\delta_{im} - \epsilon_{ijm}(\partial_0\Theta_{kk'})\}D_{k'm}\Delta_{ka} = \\ \left\{\frac{g}{2}\rho_q\rho_{p'}\epsilon_{qp'k}\epsilon_{qp'k'}\epsilon_{ijm}\right\}D_{k'm}\Delta_{ka} \quad (2.35) \end{aligned}$$

Una solución de la ecuación anterior es eliminar término a término las componentes del tensor que multiplica a $D_{k'm}\Delta_{ka}$ es decir:

$$\begin{aligned} \rho_k\frac{\rho_k^2 - \rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2}\{(\partial_i\Theta_{kk'})\delta_{jm} - (\partial_j\Theta_{kk'})\delta_{im} - \epsilon_{ijm}(\partial_0\Theta_{kk'})\} = \\ \left\{\frac{g}{2}\rho_q\rho_{p'}\epsilon_{qp'k}\epsilon_{qp'k'}\epsilon_{ijm}\right\} \quad (2.36) \end{aligned}$$

Para el caso $k = k' = 1$ la ecuación (2.36) queda:

$$\frac{g}{2}\rho_q\rho_{p'}(\epsilon_{qp'1}\epsilon_{qp'1})\epsilon_{ijp} =$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{2} \rho_q \rho_{p'} (\delta_{q3} \delta_{p2} + \delta_{q2} \delta_{p3}) \epsilon_{ijp} &= \\ \frac{g}{2} (2\rho_2 \rho_3) \epsilon_{ijp} &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Como los índices ijp del tensor ϵ_{ijp} son libres, la ecuación anterior exige que:

$$\rho_2 \rho_3 = 0 \quad (2.38)$$

Procediendo del mismo modo para $k = k' = 2$ y $k = k' = 3$ obtenemos además:

$$\rho_1 \rho_3 = 0 \quad (2.39)$$

$$\rho_1 \rho_2 = 0 \quad (2.40)$$

Una solución a las ecs. (2.38) y (2.40) es: $\rho_1 = \rho_2 = 0$ y $\rho_3 \neq 0$, o cualquier otra permutación.

El resto de la solución la obtenemos de la ecuación (2.36) con $k \neq k'$. Para $k = 3$ y $k' = 2$ y utilizando la solución anterior ($\rho_1 = \rho_2 = 0$, $\rho_3 \neq 0$) obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_3 \left((\partial_i \Theta_{32}) \delta_{jm} - (\partial_j \Theta_{32}) \delta_{im} - \epsilon_{ijm} (\partial_0 \Theta_{32}) \right) &= \\ \frac{g}{2} \rho_q \rho_{p'} \epsilon_{qp'3} \epsilon_{qp'2} \epsilon_{ijm} &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Es decir:

$$(\partial_i \Theta_{32}) \delta_{jm} - (\partial_j \Theta_{32}) \delta_{im} - \epsilon_{ijm} (\partial_0 \Theta_{32}) = 0 \quad (2.42)$$

Lo cual resulta en:

$$\partial_\mu \Theta_{32} = 0 \text{ con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.43)$$

Un resultado similar se obtiene de tomar $k = 3$ y $k' = 1$:

$$\partial_\mu \Theta_{31} = 0 \text{ con } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.44)$$

La otra posibilidad ($k = 1$ y $k' = 2$) no da ninguna condición para las rotaciones a lo largo del eje perpendicular al plano (21). Por otra parte la relación impuesta por la condición color cero, exige que los campos Θ_{13} Θ_{23} sean igual a cero. Quedando los campos $\Phi_{kk'}(x)$ y sus derivadas con total libertad, veamos por qué. La condición cero implica ec. (2.25):

$$\Theta_{kk'} = \frac{\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \Phi_{kk'}(x)$$

Como $\rho_2 = \rho_1 = 0$ y $\rho_3 \neq 0$ los campos Φ y Θ sobre los planos (32) y (31) se “desacoplan” y los campos Θ se anulan necesariamente. Para el caso de las rotaciones sobre los planos (12) es claro que la condición (2.25) se cumple cualquier que sea la forma de los campos. En resumen la solución que obtuvimos es:

$$\begin{aligned}
\rho_1 = \rho_2 &= 0 \\
\rho_3 &\neq 0 \\
\Theta_{13} = \Theta_{23} &= 0 \\
\Theta_{12} &= \text{“libre”} \\
\Phi_{kk'} &= \text{“libres”}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

La libertad de Θ_{12} y $\Phi_{kk'}$ es consecuencia de la libertad de norma de la teoría.

La solución obtenida no produce un campo cromomagnético en el sistema fijo al laboratorio, lo que es posible comprobarlo por la sustitución directa de la solución en la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
E_a^k &= -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F_a^{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\Delta_{ka}\{D_{kj}\partial_i\rho_k - D_{ki}\partial_j\rho_k + \rho_k(\alpha_{kk'}^i D_{k'j} - \alpha_{kk'}^j D_{k'i}) + \\
&\quad \rho_{k'}(\beta_{k'k}^i D_{k'j} - D_{k'i}\beta_{k'k}^j)\} - g\epsilon_{bca}D_{ki}D_{k'j}\Delta_{kb}\Delta_{k'c}\rho_k\rho_{k'} \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\{g\epsilon_{bca}D_{31}D_{3j}\Delta_{3b}\Delta_{3c}\rho_3^2\} = 0
\end{aligned}$$

Lo mismo ocurre en el sistema intrínseco, la solución obtenida tampoco produce un campo magnético, esto no es posible verlo con los resultados hasta ahora obtenidos. Para comprobarlo es necesario encontrar el modo en que el campo magnético se transforma al sistema intrínseco, tarea que se realiza en el siguiente apartado, en donde, además, se encuentra el modo en que se transforma el campo eléctrico. En primera instancia los resultados obtenidos son validos en general y no se hace ninguna suposición para los campos salvo la exigencia de que estén acoplados a color cero. Sin embargo para obtener condiciones para los nuevos campos que satisfagan un campo cromomagnético intrínseco no nulo y un campo eléctrico cero se hace uso de la misma suposición que en el presente apartado, es decir ρ 's constantes. En particular se puede utilizar la solución obtenida en el presente apartado para comprobar que efectivamente el campo magnético es nulo en el sistema intrínseco

Encontrar el modo en que se transforman los campos eléctricos y magnéticos al sistema intrínseco e imponer un campo cromomagnético no nulo al tiempo que el correspondiente campo eléctrico se iguala a cero, es abordar el problema desde el lado contrario. Encontraremos el tipo de soluciones que esperábamos encontrar (y no encontramos) con la solución clásica anterior. Creemos que es posible llegar a este tipo de soluciones si se considera la teoría cuántica correspondiente (aunque quizá estas soluciones se encuentren clásicamente al no hacer las simplificaciones que nos condujeron a la solución anterior (2.45)). Un intento por arribar a soluciones con las características antes mencionadas a través de la consideración de la teoría cuántica se realiza en el capítulo siguiente.

2.4 Transformación del Campo Cromoeléctrico y Cromomagnético al sistema intrínseco

En el presente apartado se encuentra el modo en que los campo cromoeléctrico y magnético intrínsecos se expresan en términos de los campos hiperesféricos.

El campo magnético “intrínseco” (h_{mb}) se obtiene a partir de:

$$B_a^k = h_{mb} D_{mk} \Delta_{ba} = -\frac{1}{2} \epsilon^{kij} F_a{}_{ij} \quad (2.46)$$

Sustituyendo la expresión (2.14) en lo anterior y haciendo el algebra necesaria (para detalles ver apéndice B.4) llegamos a:

$$B_a^k = h_{mb} D_{mk} \Delta_{ba} = \epsilon^{kij} \Delta_{ba} D_{mi} (\partial_j \rho_b \delta_{bm} + \rho_b \partial_j \Theta_{bm} + \rho_b \partial_j \Phi_{mb}) + \frac{g}{2} \epsilon_{nn'm} \epsilon_{nn'b} \rho_n \rho_{n'} D_{mk} \Delta_{ba} \quad (2.47)$$

El primer sumando del último término puede expresarse de otro modo utilizando el hecho de que $\partial_j = D_{pj} \bar{\partial}_p$ donde $\bar{\partial}_p$ es la derivada parcial con respecto a las coordenadas espaciales del sistema intrínseco:

$$\epsilon_{kij} \Delta_{ba} D_{mi} (D_{pj} \bar{\partial}_p \rho_b \delta_{bm} + \rho_b D_{pj} \bar{\partial}_p \Theta_{bm} + \rho_b D_{pj} \bar{\partial}_p \Phi_{mb}) = \epsilon_{kij} \Delta_{ba} D_{mi} D_{pj} (\bar{\partial}_p \rho_b \delta_{bm} + \rho_b \bar{\partial}_p \Theta_{bm} + \rho_b \bar{\partial}_p \Phi_{mb}) \quad (2.48)$$

En la expresión anterior aparece el siguiente término:

$$\epsilon_{kij} D_{mi} D_{pj} = \epsilon_{kij} (1m1p|\lambda q)(1i1j|\lambda q) D_{qq'}^\lambda \quad (2.49)$$

Utilizando las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan y el hecho de que λ debe ser igual a 1 obtenemos lo siguiente:

$$\epsilon_{kij}D_{mi}D_{pj} = \epsilon_{mpq}D_{qk} \quad (2.50)$$

Sustituyendo lo anterior en el sumando (ec. (2.48)) resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kij}\Delta_{ba}D_{mi}(D_{pj}\bar{\partial}_p\rho_b\delta_{bm} + \rho_bD_{pj}\bar{\partial}_p\Theta_{bm} + \rho_bD_{pj}\bar{\partial}_p\Phi_{mb}) = \\ \epsilon_{mpq}D_{qk}\Delta_{ba}(\bar{\partial}_p\rho_b\delta_{bm} + \rho_b\bar{\partial}_p\Theta_{bm} + \rho_b\bar{\partial}_p\Phi_{mb}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Haciendo el siguiente cambio de índices mudos en la expresión anterior $m \mapsto n$ y $q \mapsto m$, la sustituimos en la ecuación para el campo magnético (ec. (2.47)):

$$B_a^k = h_{mb}D_{mk}\Delta_{ba} = \left\{ \epsilon_{npm}(\rho_b\bar{\partial}_p\Theta_{bn} + \rho_b\bar{\partial}_p\Phi_{nb} + \bar{\partial}_p\rho_b\delta_{bn}) + \frac{g}{2}\epsilon_{nn'm}\epsilon_{nn'b}\rho_n\rho_{n'} \right\} D_{mk}\Delta_{ba} \quad (2.52)$$

El campo cromomagnético intrínseco es entonces:

$$h_{mb} = \epsilon_{npm}(\rho_b\bar{\partial}_p\Theta_{bn} + \rho_b\bar{\partial}_p\Phi_{nb} + \bar{\partial}_p\rho_b\delta_{bn}) + \frac{g}{2}\epsilon_{nn'm}\epsilon_{nn'b}\rho_n\rho_{n'} \quad (2.53)$$

sin suma sobre el índice repetido b .

Para obtener el campo cromoelectrico transformado en términos de los nuevos campos procedemos de igual modo que para el caso magnético:

$$\begin{aligned} E_a^k = F_a^{0k} = -\partial^0\rho_mD_{mk}\Delta_{ma} - \rho_b\omega_{bm}D_{mk}\Delta_{ba} - \rho_mD_{mk}\Omega_{mb}\Delta_{ba} = \\ -(\partial^0\rho_m\delta_{mb} + \rho_b\omega_{bm} - \rho_m\Omega_{mb})D_{mk}\delta_{ba} = e_{mb}D_{mk}\Delta_{ba} \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde e_{mb} es el campo cromoelectrico transformado al sistema intrínseco. En la ecuación anterior se ve claramente que éste es:

$$e_{mb} = -(\partial^0\rho_m\delta_{mb} + \rho_b\omega_{bm} + \rho_m\Omega_{mb}) \quad (2.55)$$

sin suma sobre el índice repetido m y con $\omega_{mm'} = \partial^0\Theta_{mm'}$ y $\Omega_{mm'} = \partial^0\Phi_{mm'}$

Hasta ahora no se ha utilizado la simplificación que resulta de acoplar los campos a color cero. En los siguientes párrafos se hace uso de ella, a la vez que se impone la condición ρ 's constantes:

Las condiciones color cero y ρ 's constantes junto con la misma suposición hecha en la ec. (2.31) implican que:

$$\Phi_{kk'} = \frac{2\rho_k\rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \Theta_{kk'} \quad (2.56)$$

Sustituyendo en la expresión para el campo magnético transformado (ec. 2.53) y teniendo cuidado de la correcta sustitución de índices mudos, obtenemos:

$$h_{mb} = \epsilon_{mpn} \left\{ \rho_b \bar{\partial}_p \Theta_{bn} + \rho_b \left(\frac{2\rho_n \rho_b}{\rho_n^2 + \rho_b^2} \right) \bar{\partial}_p \Theta_{nb} \right\} + \frac{g}{2} \epsilon_{nn'm} \epsilon_{nn'bb} \rho_n \rho_{n'} \quad (2.57)$$

Utilizando el hecho de que $\partial^\mu \Theta_{kk'}$ es antisimétrico respecto al intercambio de índices kk' expresamos el campo cromomagnético de otra forma:

$$h_{mb} = \epsilon_{mpn} \left(\rho_b \bar{\partial}_p \Theta_{bn} \frac{(\rho_n - \rho_b)^2}{\rho_n^2 + \rho_b^2} \right) + \epsilon_{nn'm} \epsilon_{nn'bb} \rho_n \rho_{n'} \quad (2.58)$$

La expresión para el campo cromoelectrónico también se simplifica con la condición color cero y ρ 's constantes. Cabe aclarar que contrario al campo cromomagnético no se hace otra simplificación (hay que recordar que para el caso magnético además se igualó $f(X^k)$ ec. (2.31) a cero):

$$\begin{aligned} e_{mb} &= -(\rho_b \partial^0 \Theta_{bm} + \rho_m \partial^0 \Phi_{mb}) = -\left(\rho_b \partial^0 \Theta_{bm} + \rho_m \frac{2\rho_m \rho_b}{\rho_m^2 + \rho_b^2} \partial^0 \Theta_{mb} \right) \quad (2.59) \\ &= \partial_0 \Theta_{mb} \rho_b \frac{\rho_b^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_b^2} \end{aligned}$$

donde se utilizó la propiedad de antisimetría de las derivadas de los campos Θ .

Fijando un campo cromomagnético en una dirección e igualando el campo cromoelectrónico a cero, es decir:

$$h_{mb} = \delta_{3m} \delta_{b3} h \quad (2.60)$$

$$e_{mb} = 0 \quad (2.61)$$

obtenemos, como era de esperar, un conjunto muy amplio de soluciones que las satisfacen. Esta tarea se realiza en el siguiente apartado.

2.5 Fijando un campo Cromomagnético intrínseco

Lo que se muestra en el presente apartado son algunas condiciones para los campos hiperesféricos en el caso ρ 's constantes, que producen un campo cromomagnético intrínseco en una dirección dada en el espacio físico y de color (en la dirección (33)), al mismo tiempo que el campo cromoelectrico es cero, es decir se muestran algunas condiciones para las ρ 's y Θ 's que cumplen con las siguientes ecuaciones (2.60,2.61).

$$h_{mb} = \hbar \delta_{3m} \delta_{3b} = \epsilon_{mpn} \left(\rho_b \bar{\partial}_p \Theta_{bn} \frac{(\rho_n - \rho_b)^2}{\rho_n^2 + \rho_b^2} \right) + \epsilon_{nn'm} \epsilon_{nn'b} \rho_n \rho_{n'} \quad (2.62)$$

$$e_{mb} = 0 = (\partial_0 \Theta_{mb}) \rho_b \frac{\rho_b^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_b^2} \quad (2.63)$$

Con el fin de apreciar claramente las ecuaciones anteriores, se muestran de modo explícito las condiciones impuestas por los término diagonales del campo cromomagnético intrínseco:

$$\rho_1 \bar{\partial}_2 \Theta_{13} \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2}{\rho_3^2 + \rho_1^2} - \rho_1 \bar{\partial}_3 \Theta_{12} \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2} + g \rho_2 \rho_3 = 0 \quad (2.64)$$

$$\rho_2 \bar{\partial}_3 \Theta_{21} \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2} - \rho_2 \bar{\partial}_1 \Theta_{23} \frac{(\rho_2 - \rho_3)^2}{\rho_2^2 + \rho_3^2} + g \rho_1 \rho_3 = 0 \quad (2.65)$$

$$\rho_3 \bar{\partial}_1 \Theta_{32} \frac{(\rho_3 - \rho_2)^2}{\rho_3^2 + \rho_2^2} - \rho_3 \bar{\partial}_2 \Theta_{31} \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2}{\rho_3^2 + \rho_1^2} + g \rho_1 \rho_2 = h \quad (2.66)$$

Mientras que para los términos no diagonales las condiciones quedan:

$$0 = \rho_a \bar{\partial}_a \Theta_{ab} \frac{(\rho_a - \rho_b)^2}{\rho_a^2 + \rho_b^2} \quad (2.67)$$

sin suma sobre índices repetidos y con $a, b = 1, 2, 3, a \neq b$

Las condiciones impuestas sobre los campos hiperesféricos por $e_{mb} = 0$, son similares a estas últimas pero con parciales temporales (notese que los términos diagonales e_{kk} se anulan directamente):

$$0 = \partial_0 \Theta_{ab} \rho_a \frac{\rho_b^2 - \rho_a^2}{\rho_a^2 + \rho_b^2} \quad (2.68)$$

sin suma sobre índices repetidos y con $a, b = 1, 2, 3, a \neq b$

Observese que en todas las condiciones anteriores (2.64, 2.65, 2.66, 2.67 y 2.68) aparecen diferencias entre las ρ 's. Por otro lado el hecho de que hayamos impuesto un campo cromomagnético en la dirección tres, impone, también, una simetría a lo largo del plano intrínseco (12), lo cual nos sugiere suponer que $\rho_1 = \rho_2$. Bajo esta suposición las condiciones antes escritas se simplifican bastante. Los términos diagonales del campo magnético intrínseco que se igualan a cero (ecs. 2.64, 2.65) conducen a las siguientes relaciones :

$$\bar{\partial}_2 \Theta_{13} = -g\rho_3 \frac{\rho_3^2 + \rho_1^2}{(\rho_3 - \rho_1)^2} \quad (2.69)$$

$$\bar{\partial}_1 \Theta_{23} = g\rho_3 \frac{\rho_3^2 + \rho_2^2}{(\rho_3 - \rho_2)^2} \quad (2.70)$$

Utilizando la propiedad de antisimetría de las derivadas parciales que se conserva al pasar al sistema intrínseco ($\bar{\partial}_a \Theta_{bc} = -\bar{\partial}_a \Theta_{cb}$), sustituímos las expresiones anteriores en la condición impuesta por el término diagonal no nulo del campo cromomagnético intrínseco (ec. 2.66), encontramos que:

$$g(\rho_1 \rho_2 - 2\rho_3^2) = g(\rho_1^2 - \rho_3^2) = h \quad (2.71)$$

El resto de las condiciones para las Θ 's, aparte de las condiciones (2.69, 2.70), se obtienen de la la expresiones (2.67) y (2.68) que no dependan de restas de ρ_1 y ρ_2 . Por ejemplo poniendo en (2.67) $a = 3$ y $b = 1$ obtenemos:

$$\rho_3 \bar{\partial}_3 \Theta_{31} \frac{(\rho_3 - \rho_1)^2}{\rho_3^2 + \rho_1^2} = 0 \quad (2.72)$$

que como $(\rho_3 - \rho_1)^2 \neq 0$ y $\rho_3 \neq 0$ implica que:

$$\bar{\partial}_3 \Theta_{31} = 0 \quad (2.73)$$

Del mismo modo se obtiene que:

$$\bar{\partial}_1 \Theta_{31} = \bar{\partial}_3 \Theta_{31} = \bar{\partial}_2 \Theta_{32} = \bar{\partial}_3 \Theta_{32} = \bar{\partial}_0 \Theta_{31} = \bar{\partial}_0 \Theta_{32} = 0 \quad (2.74)$$

En todas las condiciones (2.64, 2.65, 2.66, 2.67 y 2.68) las parciales de Θ_{12} aparecen multiplicadas por diferencias de ρ_1 y ρ_2 por lo que tales condiciones

no imponen ninguna restricción sobre las derivadas de Θ_{12} . Por ejemplo si en (2.67) ponemos $a = 1$ y $b = 2$ tenemos:

$$\rho_1 \bar{\partial}_1 \Theta_{12} \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} = 0 \quad (2.75)$$

que como $(\rho_1 - \rho_2)^2 = 0$ no impone ninguna condición para $\bar{\partial}_1 \Theta_{12}$. Lo mismo se obtiene para el resto de las parciales de Θ_{12} . Esto era de esperarse dada la simetría respecto a rotaciones en el plano intrínseco (12).

Las parciales de los campos Φ 's de las rotaciones en el espacio de color se pueden conocer de la condición impuesta por el acoplamiento a color cero (2.25). Obtenemos lo mismo en lo que se refiere a los campos nulos e indefinidos. Para los dos campos Φ 's que no se anulan la única diferencia con las condiciones para los dos campo Θ que tampoco se anulan, es el factor constante al que son iguales:

$$\bar{\partial}_2 \Phi_{31} = \frac{2g\rho_3^2\rho_1}{(\rho_3 - \rho_1)^2} \quad (2.76)$$

$$\bar{\partial}_1 \Phi_{32} = \frac{2g\rho_3^2\rho_2}{(\rho_3 - \rho_2)^2} \quad (2.77)$$

En resumen el conjunto de condiciones que obtuvimos para los campos hiperesféricos que implican un campo cromomagnético intrínseco diferente de cero y el correspondiente eléctrico nulo, suponiendo $\rho_1 = \rho_2$ es:

$$\begin{aligned} g(\rho_1\rho_2 - 2\rho_3^2) &= g(\rho_1^2 - \rho_3^2) = h \\ \bar{\partial}_i \Theta_{jk} &= g\epsilon_{ijk}\rho_3 \frac{\rho_j^2 + \rho_k^2}{(\rho_j - \rho_k)^2} \text{ con } j \text{ ó } k = 3 \\ \bar{\partial}_i \Phi_{jk} &= -\epsilon_{ijk} \frac{2g\rho_3\rho_j\rho_k}{(\rho_j - \rho_k)^2} \text{ con } j \text{ ó } k = 3 \\ \bar{\partial}_\mu \Theta_{12} \text{ y } \bar{\partial}_\mu \Phi_{12} &\text{ arbitrarias } (\mu=0,1,2,3) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Se pueden intentar muchas formas para los campos hiperesféricos que arrojen el mismo resultado en lo que a campo cromoelectrico y magnetico se refiere, por ejemplo suponer $\partial_\mu \Theta_{mb} = 0$ (en lugar de $\rho_1 = \rho_2$) exige que $\rho_3 = 0$ y $g\rho_1\rho_2 = h$. En el apéndice B.5 se muestran otros resultados similares.

Como ya se ha adelantado, la solución clásica obtenida al principio del capítulo ecs. (2.45), es incompatible con las condiciones (2.78), es decir

esa solución corresponde al caso campo cromoelectrico y magnetico igual a cero. Sin embargo el ejercicio anterior arroja un poco de luz al tipo de soluciones que cabria esperar para campos hiperesfericos que correspondan a un campo cromomagnetico no nulo que no rompa la invarianza rotacional del vacio; se sabe que dicho campo debe existir en el estado base de los campos de norma no abelianos de la simetria $SU(2)_{color}$ [8]. Hasta ahora se ha trabajado enteramente en un contexto clasico, es decir hemos considerado unicamente la primera aproximacion al correspondiente sistema cuantico, es posible que soluciones compatibles con (2.78) (o semejantes a las del apendice B.5) resulten al considerar la teoria cuantica, esto ultimo es justamente el tema del siguiente capitulo de esta tesis.

Capítulo 3

La descripción cuántica en coordenadas curvilíneas

3.1 Integrales de trayectoria

El hecho de no haber encontrado soluciones clásicas a las ecuaciones de los campos de Yang-Mills, con simetría $SU(2)_{color}$, que contengan un campo cromomagnético en el sistema intrínseco; nos conduce al desarrollo del presente capítulo, en donde se considera la teoría cuántica correspondiente.

Es bien sabido que cuando, en un problema de campo central, se hace un cambio de variables cartesianas a polares aparece en el hamiltoniano, expresado unicamente como función de la coordenada r , un nuevo término que corresponde a la parte angular pero que puede entenderse como un potencial efectivo para la variable r . De modo similar esperamos que la transformación de los campos de norma a campos hiperesféricos traerá consigo un potencial efectivo que favorezca energéticamente la presencia de un campo cromomagnético que no rompa la simetría esférica del vacío, es decir un campo cromomagnético intrínseco.

Las consecuencias de una transformación a coordenadas curvilineales, en los sistemas cuánticos ha sido plenamente estudiado. En las referencias [4, 80], por ejemplo, existe un estudio del problema. En la primera parte de este capítulo exploramos la transformación a coordenadas curvilineales dentro del formalismo de las integrales de trayectoria de Feynman. Con el fin de hallar las complicaciones particulares que tiene este formalismo en el estudio de las transformaciones a coordenadas curvilineales (la transformación

a campos hiperesféricos es sólo un caso particular de ellas), es conveniente estudiar un caso sencillo, para así enfocarnos, sobretodo, en el método antes que en las complicaciones matemáticas que pudieran aparecer. De principio introduzcamos las ideas básicas de las llamadas integrales de trayectoria de Feynman [81]:

Las relaciones entre los eigenvectores de los operadores de posición y momento en la imagen de Schrödinger son las siguientes [82]:

La ortonormalidad y completéz de los eigenestados de la posición implican que:

$$\langle q''|q' \rangle = \delta(q'' - q') \quad \int_{-\infty}^{\infty} dq'|q' \rangle \langle q'| = 1 \quad (3.1)$$

Por otro lado la relación entre los eigenestados de la posición y el momento se obtienen del siguiente modo:

$$\langle p'|q' \rangle^* = \langle q'|p' \rangle = \psi_{p'}(q')$$

Donde $\psi_{p'}(q')$ es la eigenfunción del operador momento en la representación de coordenadas:

$$\hat{p}\psi_{p'}(q') = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \psi_{p'}(q') = p' \psi_{p'}(q')$$

La solución de la ecuación diferencial anterior es:

$$\psi_{p'}(q') \equiv \langle q'|p' \rangle = Ae^{(ip'q'/\hbar)} \quad (3.2)$$

Con A una constante de normalización que por convención la elegimos igual a la unidad (A=1), así entonces de (3.2), obtenemos:

$$\langle p'|q' \rangle = \psi_{p'}^*(q') = e^{(-ip'q'/\hbar)} \quad (3.3)$$

Con la elección de la constante A=1 la completéz y ortonormalidad de los eigenestados del momento son:

$$\langle p''|p' \rangle = 2\pi\hbar\delta(p'' - p') \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp'}{2\pi\hbar} |p' \rangle \langle p'| = 1 \quad (3.4)$$

La amplitud de transición entre dos estados con q'' y q' definidos en los tiempos t'' y t' respectivamente se obtiene de:

$$\langle q''t''|q't' \rangle = \langle q''| \exp[-\frac{i}{\hbar}(t'' - t')\hat{H}] |q' \rangle \quad (3.5)$$

Donde $|q't'\rangle$ son los eigenestados en la representación de Heisenberg del operador de posición ($q_H(t) \equiv e^{itH/\hbar} q_S e^{-itH/\hbar}$). Hay que recordar que en la imagen de Schrödinger la dependencia temporal va por cuenta de los estados, mientras que en la representación de Heisenberg son los operadores los que dependen del tiempo (y por tanto sus eigenestados).

El objetivo de las integrales de Feynman es expresar la amplitud de probabilidad entre dos estados sin hacer referencia a los operadores y eigenestados en el espacio de Hilbert, sino unicamente al correspondiente hamiltoniano clásico. Para ello dividimos el intervalo de tiempo entre t'' y t' , en N "saltos":

$$\langle q'' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t''-t')} | q' \rangle = \langle q'' | \prod_1^N e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{(t''-t')}{N}} | q' \rangle \quad (3.6)$$

En cada uno de los cuales introducimos una condición de completéz de los eigenestados de posición, es decir entre cada dos factores $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \frac{(t''-t')}{N}}$ introducimos un término similar a (3.1), con esto la amplitud de probabilidad es:

$$\int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q'' | e^{-i(t''-t')H/N\hbar} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | \cdots | q_1 \rangle \langle q_1 | e^{-i(t''-t')H/N\hbar} | q' \rangle \quad (3.7)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, el término $(t''-t')/N$, se vuelve infinitesimal y entonces la exponencial puede ser aproximada a primer orden, con lo cual la expresión anterior queda:

$$\langle q'' | e^{-i(t''-t')H/N\hbar} | q' \rangle = \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q'' | (1 - i\epsilon H) | q_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1 | (1 - i\epsilon H) | q' \rangle \quad (3.8)$$

Con $\epsilon = (t'' - t)/N\hbar$.

Cada uno de los factores de la forma: $\langle q_{k+1} | (1 - i\epsilon H) | q_k \rangle$ puede ser expresado de otro modo utilizando la completéz de los eigenestados del momento (3.4).

$$\langle q_{k+1} | (1 - i\epsilon H) | q_k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | (q - i\epsilon H) | q_k \rangle \quad (3.9)$$

Hasta aquí hemos explotado unicamente el formalismo de la teoría cuántica, la conexión con la teoría clásica se hace con la siguiente definición

$$\langle p | H | q \rangle = \langle p | q \rangle H(p, q) \quad (3.10)$$

Donde $H(p, q)$ es el correspondiente hamiltoniano clásico, nótese que habrá ambigüedad en la anterior definición si en el hamiltoniano clásico aparecen productos de q's y p's, ya que ambas cantidades no conmutan en la teoría cuántica, esta ambigüedad se elimina si tomamos la ordenación de Weyl en el operador hamiltoniano [4], es decir todo producto de la forma $f(q)p^2$, en el Hamiltoniano clásico debe ser escrito en el operador Hamiltoniano como $\frac{1}{4}[f(q)p^2 + 2pf(q)p + p^2f(q)]$. Así pues, con la definición (3.10), la expresión (3.9) se escribe:

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1} | (1 - i\epsilon H | q_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} \langle q_{k+1} | p_k \rangle \langle p_k | q_k \rangle (1 - i\epsilon H(p_k, q_k)) = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi\hbar} e^{ip(q_{k+1} - q_k)/\hbar} [1 - i\epsilon H(p, q)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

Con el resultado anterior e identificando $q_0 \equiv q'$ y $q_N \equiv q''$ obtenemos para la amplitud de probabilidad:

$$\begin{aligned} \langle q'' t'' | q' t' \rangle = \\ \int \frac{dq_1 dp_1}{2\pi\hbar} \dots \int \frac{dq_{N-1} dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} p_n (q_{n+1} - q_n)\right] \prod_{n=0}^{N-1} [1 - i\epsilon H(p_n, q_n)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como ϵ es infinitamente pequeño cuando N tiende a infinito, el factor $\prod_{n=0}^{N-1} [1 - i\epsilon H(p_n, q_n)]$, puede sustituirse por:

$$\prod_{n=0}^{N-1} [1 - i\epsilon H(p_n, q_n)] = \exp\left[\sum_{n=0}^{N-1} -i\epsilon H(p_n, q_n)\right] \quad (3.13)$$

Con lo cual la ecuación (3.12) queda:

$$\begin{aligned} \langle q'' t'' | q' t' \rangle = \int \frac{dq_1 dp_1}{2\pi\hbar} \dots \int \frac{dq_{N-1} dp_{N-1}}{2\pi\hbar} \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \exp \\ \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{p_n (q_{n+1} - q_n)}{\Delta t} - H(p_n, q_n) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Con $\Delta t = (t'' - t')/N$

Como q_n y p_n recorren todos los valores posibles, podemos identificar sus valores como los que toma alguna función arbitraria $q(n)$ y $p(n)$ en el tiempo $t_n = t' + n\Delta t$, es decir:

$$q_n = q(t_n) \quad p_n = p(t_n) \quad (3.15)$$

Entonces la resta que aparece en la sumatoria de la ec.(3.14), es:

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = \frac{q(t' + n\Delta t + \Delta t) - q(t' + n\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$ $\Delta t \rightarrow 0$ y entonces la resta anterior queda:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} = \dot{q}(t' + n\Delta t) = \dot{q}(t_n) \quad (3.17)$$

De este modo el argumento del exponente en la ec. (3.14) toma la forma:

$$\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} [p(t_n)\dot{q}(t_n) - H(p(t_n), q(t_n))]\Delta t \quad (3.18)$$

Que cuando $N \rightarrow \infty$ se transforma en una integral:

$$\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \quad (3.19)$$

La única condición para las funciones $q(t)$ es que los puntos extremos esten fijos, es decir $q(t') = q'$ y $q(t'') = q''$.

Con los resultados obtenidos la amplitud de probabilidad es:

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle = \int (Dq)(Dp) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt [p\dot{q} - H(pq)]\right\} \quad (3.20)$$

Con $(Dq) = \prod_{n=1}^{N-1} dq(t_n)$ y $(Dp) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{dp(t_n)}{2\pi\hbar}$.

En palabras el resultado obtenido nos dice que la amplitud de probabilidad entre dos estados con posiciones definidas en los tiempos t' y t'' , será la suma de un número infinito de amplitudes unitarias correspondientes cada una al infinito número de maneras posibles en que se puede llegar del punto q' al q'' en el tiempo t' a t'' , sin ninguna restricción para el valor del momento conjugado en cualquier tiempo entre t' y t'' (incluyendo t' y t'').

La integración de los momentos conjugados puede efectuarse si tenemos un hamiltoniano de la forma:

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (3.21)$$

lo que da una integral gaussiana para los momentos. En general la integral de trayectoria de cualquier forma cuadratica :

$$Q(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (b, u) \quad (3.22)$$

puede ser calculada [61]. Aquí limitemonos al caso particular de un Hamiltoniano como (3.21). Sustituyendo este Hamiltoniano en (3.20), obtenemos N integrales (una por cada p_k) de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_k}{2\pi} \exp \left\{ \frac{-i\Delta t}{2m\hbar} p_k^2 + i(q_k - q_{k-1})p_k \right\} \quad (3.23)$$

que son integrales gaussianas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \exp\{-ax^2 + bx\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp b^2/4a$$

con $b = \frac{i}{\hbar}(q_k - q_{k-1})$ y $a = \frac{i\Delta t}{2m\hbar}$. Es decir las integrales (3.23) son:

$$\left(\frac{m\hbar}{2\pi i\Delta t} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta t\hbar} \right\} \quad (3.24)$$

Sustituyendo este resultado explícito para las N integrales sobre los momentos en (3.20) obtenemos finalmente :

$$\langle q''t'' | q't' \rangle = \mathcal{N} \int (Dq) \exp \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt L(q, \dot{q}) \quad (3.25)$$

con $\mathcal{N} = \left(\frac{m\hbar}{2\pi i\Delta t} \right)^{N/2}$, Dq definido como en (3.20) y $L = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$ el lagrangiano clásico.

La anterior es la llamada fórmula de Feynman que permite dar una nueva visión a la relación entre la teoría clásica y la cuántica.

La ecuación de Feynman nos dice que la amplitud de probabilidad entre dos estados con valores q'' y q' definidos en los tiempos t'' y t' , es la suma infinita de amplitudes unitarias correspondientes a cada una de las infinitas posibles trayectorias (clásicamente no físicas con excepción de una) con puntos extremos fijos, la fase de estas amplitudes está dada por el valor de la acción de la trayectoria correspondiente, clásicamente la trayectoria real (física) del sistema será aquella donde la acción es un extremo, tal condición implica que la acción (y por tanto la fase de la amplitud) de las trayectorias vecinas serán iguales (a menos a primer orden). Por lo tanto la suma de las amplitudes de las trayectorias cerca del extremo en la acción se “reforzarán”; en cambio las trayectorias lejos del extremo, cada una con amplitudes diferentes, al sumarse se anularán mutuamente (o al menos su contribución será mucho menor que las trayectorias cerca del extremo). El resultado es que la

amplitud de probabilidad total estará dada en gran medida por las trayectorias cerca del extremo. Las contribuciones de las trayectorias clásicamente prohibidas dan correcciones a ordenes mayores, es decir desde la formulación de Feynman de la mecánica cuántica es posible ver a la teoría clásica como una aproximación a primer orden de la teoría completa, es decir de la teoría cuántica.

Nuestro interés inicial en el presenta capítulo es explorar la conveniencia del uso de las integrales de Feynman para estudiar el paso de coordenadas cartesianas a coordenadas curvilíneas, como es el caso de la transformación de los campos de norma a coordenadas hiperesféricas. Para ello, estudiaremos un caso sencillo, que es totalmente resuelto en la referencia [4] sólo que de modo diferente a como lo haremos aquí , también, en la referencia [50] se estudia este caso con la diferencia de que en la fase del exponente de la integral funcional, el factor i es sustituido por -1 , es decir la integración temporal se hace en el espacio de Euclides y no en el de Minkowski como lo haremos aquí .

3.2 Un caso sencillo

Estudiaremos el siguiente Lagrangiano:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = m \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} - V(q) \quad (3.26)$$

Donde $V(q)$, es una función que depende unicamente de $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ La transformación que consideraremos es:

$$q_1 = q \cos \phi \quad (3.27)$$

$$q_2 = q \sin \phi \quad (3.28)$$

Con esta transformación tenemos dos maneras de plantear la integral de Feynman, la primera es construir la integral en coordenadas cartesianas para después hacer la transformación a coordenadas polares, con lo cual aparecerá un Jacobiano en la integral. La otra opción es, desde el principio, construir la integral de Feynman en términos de las coordenadas curvilíneas. Veamos explícitamente cuales son las diferencias entre estas dos opciones. Nuestro objetivo es encontrar la amplitud de probabilidad entre dos estados con q''

y q' definidos en los tiempos t'' y t' respectivamente (ϕ' y ϕ'' con cualquier valor), es decir:

$$\langle q''t'' | q't' \rangle \quad (3.29)$$

Construir la integral de Feynman en coordenadas cartesianas para después hacer la transformación a las coordenadas polares significa expresar la amplitud anterior en términos de la amplitud entre dos estados con q_1 y q_2 definidos en los tiempos t'' y t' de tal modo que $q_1'^2 + q_2'^2 = q'^2$ y $q_1''^2 + q_2''^2 = q''^2$. Como no nos interesan los valores inicial y final de ϕ hay que hacer una integración sobre dicha variable. Una integración sobre la ϕ final entre 0 y 2π cubre el total de los casos para valores arbitrarios de ϕ inicial y final. La amplitud de probabilidad (3.29), en términos de la integral de Feynman en coordenadas cartesianas es entonces:

$$\begin{aligned} \langle q_1''(q'')q_2''(q'')t'' | q_1'(q')q_2'(q')t' \rangle &= \int_0^{2\pi} d\phi'' \langle q_1'', q_2'', t'' | q_1', q_2', t' \rangle = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi'' \int_{q_1' q_2'}^{q_1'' q_2''} Dq_1 Dq_2 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \left(m \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} - V(q) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Puesto que los estados inicial y final no dependen de la coordenada ϕ , lo anterior es :

$$\langle q_1''(q''), q_2''(q'') | e^{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')\hat{H}} | q_1'(q'), q_2'(q') \rangle \quad (3.31)$$

Donde \hat{H} es el operador Hamiltoniano que resulta del lagrangiano clásico sustituyendo p_{q_i} por el operador $-i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$. Este Hamiltoniano, a su vez, se puede expresar en términos de q :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + V(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right) + V(q) - \left(\frac{\hbar^2}{2mq^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.32)$$

El término que contiene parciales con respecto a ϕ , en el segundo término de la igualdad, puede ser eliminado puesto que los estados son independientes de dicha variable.

Sin embargo existe ambigüedad en lo que respecta al operador hamiltoniano que debemos utilizar. El lagrangiano clásico en las coordenadas q, ϕ es:

$$L = m \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{m} - V(q) = m \frac{q^2 \dot{\phi}^2 + \dot{q}^2}{2} + V(q) \quad (3.33)$$

Por lo tanto el Hamiltoniano es:

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\phi^2}{q^2} + p_q^2 \right) + V(q) \quad (3.34)$$

Donde p_ϕ y p_q son los momentos conjugados respectivos. Si en lo anterior sustituimos el momento conjugado de q por el operador $(-i\hbar \frac{\partial}{\partial q})$ y, ya que estamos trabajando con estados independientes de ϕ , eliminamos el operador de momento de ϕ , obtenemos

$$H_0 = -\hbar^2 \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \quad (3.35)$$

El cual evidentemente difiere del que obtuvimos al expresar el Hamiltoniano cartesiano en coordenadas polares (ec. (3.32) sin el término con ϕ).

Por otro lado, supongamos las eigenfunciones del Hamiltoniano en la representación de coordenadas cartesianas:

$$\Psi_a \equiv \langle q_i | a \rangle \quad (3.36)$$

Tales funciones son ortonormales:

$$\int \Psi_{a'}^*(q_i) \Psi_a(q_i) dq_i = \delta_{aa'} \quad (3.37)$$

Transformando la integral anterior a las coordenadas polares obtenemos:

$$\int \Psi_{a'}^*(q_i(q, \phi)) \Psi_a(q_i(q, \phi)) \mathcal{J}(q, \phi) dq d\phi = \delta_{aa'} \quad (3.38)$$

Donde $\mathcal{J}(q, \phi)$ es el jacobiano de la transformación. Un grupo de funciones ortonormales en el espacio de las coordenadas polares es entonces:

$$\psi_a(q, \phi) \equiv \langle q\phi | a \rangle \equiv \sqrt{\mathcal{J}(q, \phi)} \Psi_a(q_i(q, \phi)) \quad (3.39)$$

Sin embargo las anteriores no son eigenestados del operador Hamiltoniano. Definimos un nuevo Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \sqrt{\mathcal{J}} \hat{H} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}}} \right) \quad (3.40)$$

Con la definición de ψ_a y utilizando el hecho que las Ψ_a son eigenfunciones del operador \hat{H} , puede verse inmediatamente que las funciones ψ_a son eigenfunciones del nuevo Hamiltoniano. Planteamos la amplitud de probabilidad

entre dos estados con coordenada q definida en los tiempos t'' y t' , con este nuevo Hamiltoniano (con estados independientes de ϕ):

$$\langle q'' t'' | q' t' \rangle = \langle q'' | e^{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle \quad (3.41)$$

Así la integral de Feynman que obtenemos de desarrollar lo anterior queda planteada desde un inicio en coordenadas polares.

La cuestión planteada originalmente es, entonces, si la integral de Feynman (3.30) es igual a la que se obtiene de la expresión (3.41). Para ello desarrollaremos (3.30). La integral que resulta de la amplitud de la ec. (3.41) se obtiene en la referencia [4]. Al final compararemos ambos resultados.

Partimos de la ecuación (3.30):

$$\int_0^{2\pi} d\phi'' \int_{q_1' q_2'}^{q_1'' q_2''} Dq_1 Dq_2 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt \left(m \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}{2} - V(q) \right) \right\}$$

Haciendo discreta la integral anterior obtenemos:

$$\mathcal{N}^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi'' \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_{1k} dq_{2k} \exp \left\{ \frac{im}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{(q_{1k} - q_{1(k-1)})^2}{2\Delta} + \frac{(q_{2k} - q_{2(k-1)})^2}{2\Delta} - V(q)\Delta \right\} \quad (3.42)$$

Con $q_{10} = q_1(t')$, $q_{1n} = q_1(t'')$, $q_{1k} = q_1(t' + k\Delta)$ y $\Delta = \frac{t''-t'}{n}$; \mathcal{N} es una constante igual a $(\pi\Delta)^n$.

Con el cambio a coordenadas polares aparece un factor q_k que corresponde al Jacobiano de la transformación :

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}^{-1} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{n-1} q_k dq_k \exp \left\{ \frac{mi}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2 + q_{k-1}^2}{2\Delta} - V(q)\Delta \right\} \times \\ & \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^n d\phi_k \exp \left\{ \frac{-im}{\hbar\Delta} \sum_{k=1}^n q_k q_{k-1} \cos(\phi_k - \phi_{k-1}) \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Para hacer la integración sobre los ángulos ϕ , hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\chi_k = (\phi_k - \phi_{k-1}) \quad (3.44)$$

Obtenemos un producto de n integrales de la forma.

$$\int_0^{2\pi} d\chi_k \exp \left\{ \frac{-i}{m\hbar\Delta} q_k q_{k-1} \cos \chi_k \right\} = (2\pi) J_0 \left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar\Delta} \right) \quad (3.45)$$

Donde J_0 es la función de Bessel con argumento real [83]

El comportamiento de $J_0(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ es (ver apéndice C.1):

$$\lim_{z \rightarrow \infty} J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8z} + O(z^{-2})\right) \quad (3.46)$$

sustituyendo $z = \frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta}$ obtenemos el valor de la integral (3.45) cuando se toma el límite $\Delta \rightarrow \infty$. La integración angular nos da un producto de funciones de Bessel que al tomar el límite se convierten en cosenos multiplicados por una raíz:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^n d\phi_k \exp\left\{\frac{-im}{\hbar \Delta} \sum_{k=1}^n q_k q_{k-1} \cos(\phi_k - \phi_{k-1})\right\} = \\ & (2\pi)^n \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{2\hbar \Delta}{m\pi q_k q_{k-1}}} \cos\left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Es importante notar que conservamos el término $\frac{1}{8z}$, más adelante se verá el porqué de ello.

Al multiplicar el producto de raíces de (3.47) por el jacobiano de la transformación obtenemos:

$$\prod_{k=1}^{n-1} q_k \prod_{k=1}^n \sqrt{\frac{2\hbar \Delta}{m\pi q_k q_{k-1}}} = \left(\sqrt{\frac{2\hbar \Delta}{m\pi}}\right)^n \frac{1}{q_n} \prod_{k=1}^n \sqrt{q_k} = \left(\frac{2\hbar \Delta}{m\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{q_n q_0}} \quad (3.48)$$

Con los resultados anteriores y utilizando lo siguiente :

$$\prod_{k=1}^n \cos(h_k) = \exp \ln\left(\prod_{k=1}^n \cos(h_k)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(\cos(h_k))\right) \quad (3.49)$$

la integral (3.43) es igual a:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}^{-1} (2\pi)^n \left(\frac{2\hbar \Delta}{m\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{q_n q_0}} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \\ & \left\{ \frac{im}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{q_k^2 + q_{k-1}^2}{2\Delta} - V(q)\Delta - i\hbar \ln\left(\cos\left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4}\right)\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Expresamos el logaritmo del coseno que aparece en la integral de otro modo:

$$\ln(\cos(A)) = \ln(e^{iA} + e^{-iA}) - \ln 2 = \ln(e^{-iA}(e^{2iA} + 1)) - \ln 2 = -iA + \ln(1 + e^{2iA}) - \ln 2$$

Sustituyendo lo anterior en (3.50) con $A = \frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4}$ obtenemos:

$$\mathcal{N}' \frac{1}{\sqrt{q_n q_0}} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^n \frac{m(q_k^2 + q_{k-1}^2)}{2\Delta} - V(q)\Delta \right. \\ \left. - i\hbar \left(-i \left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4} \right) + \ln \left\{ 1 + \exp \left[2i \left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} - \ln 2 \right) \right\} \quad (3.51)$$

Sacando de la integral los terminos constantes y separando los sumandos que tienen logaritmos, resulta:

$$\mathcal{M} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{k=1}^n \frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \right\} \times \\ \exp \left\{ \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \exp \left\{ 2i \left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \right) \right\} = \quad (3.52)$$

$$\mathcal{M} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{k=1}^n \frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \right\} \times \\ \prod_{k=1}^n \left(1 + \exp 2i \left(\frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar \Delta}{8mq_k q_{k-1}} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (3.53)$$

Con \mathcal{M} una constante igual a:

$$\left(\frac{2\hbar i}{m\Delta\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{q_n q_0}}$$

El producto que aparece al final de la integral (3.53), es una suma infinita de productos de exponentes con argumento:

$$S_k \equiv \frac{mq_k q_{k-1}}{\hbar \Delta} - \frac{\hbar}{8mq_k q_{k-1} \Delta} \quad (3.54)$$

Es decir:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + (-i) \exp \{ 2i S_k \} \right) = 1 - i \sum_{\tau_1=1}^n \exp \{ 2i S_{\tau_1} \} + (-i)^2 \sum_{\tau_1 < \tau_2}^n \exp \{ 2i (S_{\tau_1} + S_{\tau_2}) \} + \dots$$

$$+(-i)^j \sum_{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j}^n \exp\{2i(S_{\tau_1} + S_{\tau_2} + \dots + S_{\tau_j})\} + \dots + (-i)^n \exp\{2i(\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n)\} \quad (3.55)$$

Entonces tomando solamente el primer término de la sumatoria anterior, la integral (3.53) es:

$$\mathcal{M} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{k=1}^n \frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \right\} \quad (3.56)$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se convierte en¹:

$$\mathcal{M} \int Dq \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mq^2} - V(q) dt \right\} \quad (3.57)$$

Sin embargo el resto de los términos no puede reducirse del modo anterior al tomar el límite cuando n tiende a infinito. Cada factor $\exp\{2iS_k\}$ al multiplicarse por el exponente de la izquierda en (3.53) hace que el k -ésimo sumando en el argumento de dicho exponente se transforme :

$$\frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar^2}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \rightarrow \frac{m(q_k + q_{k-1})^2}{2\Delta^2} - \frac{\hbar^2}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \quad (3.58)$$

Con el fin de hacer más corta la notación definamos :

$$C_k \equiv \frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar^2}{8mq_k q_{k-1}} - V(q_k) \quad (3.59)$$

$$E_k \equiv \frac{m(q_k + q_{k-1})^2}{2\Delta^2} - \frac{\hbar^2}{8mq_k q_{k-1}} - V(q_k) \quad (3.60)$$

Entonces (3.58) es:

$$C_k \rightarrow E_k$$

Los miembros de la primera sumatoria en la ec. (3.55) producen n integrales en las que un sólo término C_k , es sustituido por E_k (el término C_k sustituido diferente en cada integral), así estas integrales difieren de (3.56), sólo en que

¹aquí se ve porqué conservamos el factor $\frac{m\hbar\Delta}{8mq_k q_{k-1}}$, el factor Δ , al tomar el límite, se convierte en la diferencial de integración. Los términos de orden mayor aparecen proporcionales a Δ^2 por lo tanto se anulan.

un miembro de la sumatoria, digamos el k -esimo, es sustituido por E_k . Al tomar el límite a infinito, como ya vimos:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} C_k = \frac{mq^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mq^2} - V(q) \quad (3.61)$$

Pero E_k tiende a infinito ya que $\Delta \rightarrow 0$.

Obtenemos una suma infinita de amplitudes unitarias cuya fase esta dada por la integral de una función que es infinita en un punto (conjunto de medida cero).Explicitamente:

$$-i\mathcal{M} \sum_{\tau_1=1}^n \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left\{ \frac{i\Delta}{\hbar} \left(E_{\tau_1} + \sum_{i \neq \tau_1}^n C_i \right) \right\} \quad (3.62)$$

La siguiente sumatoria de (3.55), producirá $\binom{n}{2}$ integrales, en cada una de las cuales 2 factores C_k son sustituidos por dos factores E_k , así continúa para las siguientes. La k -esima produce lo siguiente:

$$W_k \equiv (-i)^k \mathcal{M} \sum_{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k}^n \int_0^\infty \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left\{ \frac{i\Delta}{\hbar} \left[\sum_{m=1}^k E_{\tau_m} + \sum_{i \neq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k}^n C_i \right] \right\} \quad (3.63)$$

Así, identificando W_0 con la primera integral que obtuvimos (3.56), podemos escribir la integral de Feynman (3.30):

$$\langle q_1''(q'')q_2''(q'')t'' | q_1'(q')q_2'(q')t' \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n W_k \quad (3.64)$$

Sin embargo las integrales W_k con $k > 0$ son nulas. Para confirmar lo anterior más que dar una prueba completa analizemos el caso más simple, es decir W_1 (ec. 3.62):

$$-i\mathcal{M} \sum_{\tau_1=1}^n \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left\{ \frac{i\Delta}{\hbar} \left(E_{\tau_1} + \sum_{i \neq \tau_1}^n C_i \right) \right\} \quad (3.65)$$

Puede escribirse de otro modo:

$$-i\mathcal{M} \sum_{\tau=1}^n \int \prod_{j=1}^{n-1} dq_j \exp \left\{ \frac{i\Delta}{\hbar} \sum_{i=1}^n C_i + \delta_{i\tau} (E_\tau - C_\tau) \right\} \quad (3.66)$$

Sustituyendo el valor de $(E_\tau - C_\tau)$ obtenemos:

$$-i\mathcal{M} \frac{1}{\Delta} \int_0^\infty \Pi dq_j \sum_{\tau=1}^n \Delta \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{i=1}^n C_i + 2 \frac{\delta_{i\tau}}{\Delta^2} \left(m q_\tau q_{\tau-1} - \frac{\hbar^2 \Delta^2}{8 m q_\tau q_\tau} \right) \right\} \quad (3.67)$$

Al tomar el límite las sumatorias se vuelven integrales, el factor con la delta de Kroenecker se convierte en una delta de Dirac y los términos proporcionales a Δ^2 se anulan, el resultado es:

$$\frac{-i\mathcal{M}}{\Delta} \int Dq \int_{t'}^{t''} d\tau \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{\hbar}{8mq^2} + \delta(t - \tau) 2mq^2 dt \right\} \quad (3.68)$$

Igual a:

$$\frac{-i}{\Delta} \mathcal{M} \int Dq \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{\hbar}{8mq^2} dt \right\} \int_{t'}^{t''} dT \exp \left\{ \frac{mi}{\hbar} 2q^2 \right\} \quad (3.69)$$

El término de la derecha en la integración funcional anterior, tiene puntos extremos en funciones constantes (si $\frac{2mq^2}{\hbar} = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$) y por cada punto extremo máximo tiene un mínimo que lo anula, por tanto la integración funcional es cero. Del mismo modo el resto de las integrales con excepción de W_0 se anulan nuestro resultado final es así.

$$\begin{aligned} \langle q_1''(q'') q_2''(q'') | q_1'(q') q_2'(q') \rangle &\equiv \langle q_1''(q'') q_2''(q'') | e^{\frac{i}{\hbar}(t''-t')\hat{H}} | q_1'(q') q_2'(q') \rangle = \\ \mathcal{M} \int_0^\infty \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta \sum_{k=1}^n \frac{m(q_k - q_{k-1})^2}{2\Delta^2} + \frac{\hbar}{8mq_k q_{k-1}} - V(q) \right\} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Habiendo integrado explícitamente la parte angular de (3.30), debemos, ahora, comparar el resultado obtenido con la integral que resulta de la expresión (3.41). En el libro de Lee [4] se encuentra dicha integral de trayectoria:

$$\langle q'' | e^{\frac{i}{\hbar}(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle = \left(\frac{1}{2\pi i \Delta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dq \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left(\frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8mq^2} - V(q) \right) dt \right\} \quad (3.71)$$

Esta integral coincide (salvo un factor) con nuestro resultado:

$$\langle q_1''(q'') q_2''(q'') | e^{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')\hat{H}} | q_1'(q') q_2'(q') \rangle = \frac{(2i)^n}{\sqrt{q'' q'}} \langle q'' | e^{-i(t''-t')\hat{H}} | q' \rangle \quad (3.72)$$

Utilizando el hecho de que $\sqrt{\mathcal{J}(q)}|q_1(q)q_2(q)\rangle \equiv |q\rangle$ (donde $\mathcal{J}(q)$ es el jacobiano de la transformación igual en nuestro caso a q) reescribimos lo anterior:

$$\langle q''|e^{-\frac{1}{\hbar}(t''-t')\hat{H}}|q'\rangle = (2i)^n \langle q''|e^{-\frac{1}{\hbar}(t''-t')\bar{H}}|q'\rangle \quad (3.73)$$

Así entonces según lo que hemos realizado, sí es equivalente construir la integral de Feynman en coordenadas cartesianas para después hacer la transformación a coordenadas polares que construir directamente la integral de Feynman en coordenadas polares. Esta conclusión, coincide con los resultados obtenidos por Edwards y Gulyavev en la ref. [50]. Allí los autores calculan la integral de Feynman con para un lagrangiano de la forma $L = \dot{q}^2$. La diferencia con lo hecho aquí es que la integral la realizan en el espacio de Euclides, en lugar que en el de Minkowski, es decir sustituyen el factor i que aparece en el argumento del exponente, por un -1 .

No está de más decir que trabajar en el espacio Euclideano, al menos para este caso particular, es mucho más sencillo y el resultado mas directo. La razón técnica es que al hacer la integración angular aparecen funciones de Bessel con argumento imaginario cuyo comportamiento asintótico va como una exponencial y no como un coseno como ocurrió aquí . De este modo el logaritmo y el exponente se cancelan obteniendose el resultado directamente.

El objetivo original de estudiar las integrales de trayectoria en un cambio de coordenadas cartesianas a curvilíneas, fué el de dar con el potencial efectivo que traé consigo tal transformación. En el caso de la transformación a campos hiperesféricos se quiere estudiar si la transformación implica un potencial que favorezca energéticamente un campo cromomagnético intrínseco. Como hemos visto, sin embargo, el metodo de las integrales de trayectoria resultó muy complicado para nuestro ejemplo simple, comparado con la relativa facilidad con la que se podría calcular el potencial efectivo directamente del operador hamiltoniano curvilíneo:

$$\bar{H} = \sqrt{\mathcal{J}(q)}\hat{H}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}(q)}} \quad (3.74)$$

Sustituyendo los operadores correspondientes para el ejemplo sencillo que estudiamos obtenemos:

$$\bar{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{m\hbar^2}{8mq^2} + V(q) \quad (3.75)$$

que es justamente el Hamiltoniano efectivo que corresponde al Lagrangiano que obtuvimos al hacer la integral de trayectoria, con la diferencia de que esto nos llevo sólo un renglón. Observese que en la descripción cuántica con coordenadas curvilíneas, no se utilizan ni el hamiltoniano \hat{H} (cartesiano ec. (3.32)) ni el que resulta de sustituir en el hamiltoniano curvilíneo clásico operadores, $P_q \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, H_0 (ec.3.35). Pero están relacionados como puede verificarse inmediatamente :

$$\bar{H} = \sqrt{\mathcal{J}(q)} \hat{H} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}(q)}} = H_0(q) + \frac{\hbar^2}{8mq^2} \quad (3.76)$$

Así, el término $\frac{m\hbar^2}{8q^2}$, juega el papel de un potencial efectivo. La relación anterior puede generalizarse para cualquier transformación a coordenadas curvilíneas [4]

$$\bar{H} = H(q, p)_w + V_e(q) \quad (3.77)$$

Donde $H(q, p)_w$ es el operador que resulta de sustituir en el hamiltoniano clásico, dado en términos de las coordenadas curvilíneas y sus momentos conjugados, $P_q \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}$, con la exigencia extra de que el operador esté en la ordenación de Weyl. Por su parte $V_e(q)$, está dado por:

$$V_e(q) = \frac{1}{8} \left[\frac{\partial}{\partial q_a} \left(\frac{\partial q_b}{\partial X_c} \right) \right] \left[\frac{\partial}{\partial q_b} \left(\frac{\partial q_a}{\partial X_c} \right) \right] \quad (3.78)$$

q y X son las coordenadas curvilíneas y cartesianas respectivamente, además se suma sobre índices repetidos.

Queda aclarar que al pasar a coordenadas curvilíneas, en la integral de Feynman correspondiente, el jacobiano puede meterse en el argumento del exponente, por lo que da lugar a un potencial efectivo extra (aparte de $V_e(q)$).

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{-i}{\Delta} \ln(\mathcal{J}(q)) \quad (3.79)$$

En el ejemplo que estudiamos este término se anula al hacer la integración angular.

En conclusión, si queremos conocer el potencial efectivo (sin considerar la parte angular) que resulta al hacer la transformación a coordenadas hipersféricas, podemos:

- Calcular el jacobiano de la transformación y multiplicar su raíz cuadrada y el inverso de la raíz cuadrada por ambos lados de \hat{H} (el Hamiltoniano expresado en términos de los campos de norma), como se hace en la ec. (3.40).
- Calcular directamente el potencial efectivo utilizando la ec. (3.78).

La primera de estas opciones es explorada en el resto del presente capítulo, en donde se hace uso de las mismas aproximaciones que en el capítulo anterior de esta tesis (es decir modos constantes, color 0, etc.)

3.3 El jacobiano de la transformación a campos hiperesféricos

De lo realizado en el apartado anterior resulta que plantear una integral de trayectoria para los campos de norma y después hacer la integración de las partes angulares ($\Theta_{kk'}$ y $\Phi_{kk'}$ en este caso) para obtener un Lagrangiano efectivo para los campos ρ 's, es más complicado que plantear el lagrangiano directamente en coordenadas hiperesféricas. Sin embargo como mostraremos en lo siguiente, esta segunda opción esta lejos de ser inmediata, aunque en principio no hay ningún problema en plantear el jacobiano de la transformación, expresarlo de una forma manejable implica calcular un determinante de 9×9 .

El problema consiste en calcular el jacobiano de la siguiente transformación:

$$A_{ia} = \rho_k D_{ki}(\Theta) \Delta_{ka}(\Phi) \quad (3.80)$$

Es decir, tomando como parámetros de las 2 matrices ortogonales los 3 ángulos alrededor de cada uno de los ejes (X,Y,Z) tanto en el espacio físico como en el de color, lo que debemos calcular es:

$$\mathcal{J}(\rho, \Theta, \Phi) = \left| \frac{\partial(A_{ia})}{\partial(\rho_k \Theta_i \Phi_j)} \right| \quad (3.81)$$

Donde $\Theta_1 \equiv \Theta_{X_{f_{1s1co}}}$, $\Phi_2 \equiv \Phi_{Y_{color}}$, $\Theta_3 \equiv \Theta_{Z_{f_{1s1co}}}$, etc.

Existen tres ángulos, respectivamente, para las rotaciones en el espacio físico y de color, que junto con los tres ρ 's completan las nuevas coordenadas.

Para encontrar las parciales de A_{ia} respecto a las coordenadas hipersféricas notemos que.

$$A = D^T \rho \Delta \quad (3.82)$$

Donde $A_{ia} = A_{i\alpha}$ y $\rho_{ij} = \delta_{ij} \rho_k$

Las matrices ortonormales D^T y Δ son:

$$D^T = \begin{pmatrix} \cos \Theta_y \cos \Theta_z & \cos \Theta_x \sin \Theta_z + \sin \Theta_x \sin \Theta_y \cos \Theta_z & \sin \Theta_x \sin \Theta_z - \cos \Theta_x \sin \Theta_y \cos \Theta_z \\ -\cos \Theta_y \sin \Theta_z & \cos \Theta_x \cos \Theta_z - \sin \Theta_x \sin \Theta_y \sin \Theta_z & \sin \Theta_x \cos \Theta_z + \cos \Theta_x \sin \Theta_y \sin \Theta_z \\ \sin \Theta_y & -\sin \Theta_x \cos \Theta_y & \cos \Theta_x \cos \Theta_y \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos \Phi_y \cos \Phi_z & & -\cos \Phi_y \sin \Phi_z & \sin \Phi_y \\ \cos \Phi_x \sin \Phi_z + \sin \Phi_x \sin \Phi_y \cos \Phi_z & \cos \Phi_x \cos \Phi_z - \sin \Phi_x \sin \Phi_y \sin \Phi_z & \sin \Phi_x \cos \Phi_z + \cos \Phi_x \sin \Phi_y \sin \Phi_z & -\sin \Phi_x \cos \Phi_y \\ \sin \Phi_x \sin \Phi_z - \cos \Phi_x \sin \Phi_y \cos \Phi_z & \sin \Phi_x \cos \Phi_z + \cos \Phi_x \sin \Phi_y \sin \Phi_z & \cos \Phi_x \cos \Phi_y & \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Con las matrices anteriores podemos calcular de un modo directo las derivadas parciales, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ia}}{\partial \Theta_x} &= \epsilon^{1kk'} D_{ki} \rho_{k'} \Delta_{k'a} \\ \frac{\partial A_{ia}}{\partial \Theta_z} &= (\epsilon^{i23} + \epsilon^{i13})(D_{k(3-i)} \rho_k \Delta_{ka}) = (\epsilon^{i23} + \epsilon^{i13}) A_{(3-i)a} \\ \frac{\partial A_{ia}}{\partial \Phi_x} &= \epsilon^{1kk'} D_{k'i} \rho_{k'} \Delta_{ka} \\ \frac{\partial A_{ia}}{\partial \Phi_z} &= (\epsilon^{a23} + \epsilon^{a13}) D_{ki} \rho_k \Delta_{k(3-a)} = (\epsilon^{a23} + \epsilon^{a13}) A_{i(3-a)} \end{aligned} \quad (3.85)$$

Nótese que las parciales con respecto a los ángulos x varía sólo por un signo y por el índice de ρ (en una parcial es reducido con D y en la otra con Δ). Las parciales con respecto a los ángulos “ y ” no pueden ser escritas de un modo compacto como las anteriores:

$$\frac{\partial A_{ia}}{\partial \Theta_y} = \begin{pmatrix} -\rho_k D_{k3} \Delta_{k1} \cos \Theta_z & -\rho_k D_{k3} \Delta_{k2} \cos \Theta_z & -\rho_k D_{k3} \Delta_{k3} \cos \Theta_z \\ \rho_k D_{k3} \Delta_{k1} \sin \Theta_z & \rho_k D_{k3} \Delta_{k2} \sin \Theta_z & \rho_k D_{k3} \Delta_{k3} \sin \Theta_z \\ \rho_k \Delta_{k1} \frac{\partial D_{k3}}{\partial \Theta_y} & \rho_k \Delta_{k2} \frac{\partial D_{k3}}{\partial \Theta_y} & \rho_k \Delta_{k3} \frac{\partial D_{k3}}{\partial \Theta_y} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial A_{ia}}{\partial \Phi_y} = \begin{pmatrix} -\rho_k D_{11} \Delta_{13} \cos \Phi_z & \rho_k D_{11} \Delta_{13} \sin \Phi_z & \rho_k D_{11} \frac{\partial \Delta_{13}}{\partial \Phi_y} \\ -\rho_k D_{k2} \Delta_{k3} \cos \Phi_z & \rho_k D_{k2} \Delta_{k3} \sin \Phi_z & \rho_k D_{k2} \frac{\partial \Delta_{k3}}{\partial \Phi_y} \\ -\rho_k D_{k3} \Delta_{k3} \cos \Phi_z & \rho_k D_{k3} \Delta_{k3} \sin \Phi_z & \rho_k D_{k3} \frac{\partial \Delta_{k3}}{\partial \Phi_y} \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

Por último las parciales con respecto a las ρ 's son :

$$\frac{\partial A_{ia}}{\partial \rho_k} = D_{ki} \Delta_{ka} \quad (\text{sin suma sobre } k) \quad (3.88)$$

Para obtener el jacobiano debemos calcular el determinante de una matriz 9×9 , en la cual cada columna esta formada por cada una de las parciales de las componentes A_{ia} con respecto a una de las coordenadas hipersféricas. Esta matriz se muestra en la siguiente página.

A pesar de lo terrible que se ve el cálculo del determinante de la matriz mostrada, es posible extraer algo de información acerca de él. La semejanza entre las columnas correspondientes a las parciales respecto a los ángulos x , permite expresar el determinante de otro modo. Los elementos de un mismo renglón de dichas columnas son:

Para Θ_x

$$D_{2i} \rho_3 \Delta_{3a} - D_{3i} \rho_2 \Delta_{2a}$$

y para Φ_x

$$-D_{2i} \rho_2 \Delta_{3a} + D_{3i} \rho_3 \Delta_{2a}$$

Nótese que si $\rho_2 = \rho_3$ ambas columnas serán iguales y por lo tanto el jacobiano sera cero. Por otro lado utilizando la linealidad de los determinantes para la suma dentro de columnas (y/o filas) , el determinante será la suma de 4 determinantes en las cuales las columnas correspondientes a las parciales con respecto a los ángulos x , estarán ocupadas por elementos de la siguiente forma:

determinante	Θ_x	Φ_x
1o	$D_{2i} \rho_3 \Delta_{3a}$	$-D_{2i} \rho_2 \Delta_{3a}$
2o	$D_{2i} \rho_3 \Delta_{3a}$	$D_{3i} \rho_3 \Delta_{2a}$
3o	$-D_{3i} \rho_2 \Delta_{2a}$	$-D_{2i} \rho_2 \Delta_{3a}$
4o	$-D_{3i} \rho_2 \Delta_{2a}$	$D_{3i} \rho_3 \Delta_{2a}$

Las columnas Φ_x y Θ_x del primer determinante difieren sólo por una constante de proporción, por lo tanto el determinante se anula, lo mismo ocurre

(3.89)

$$\begin{array}{cccccccc}
& \frac{1}{\partial p_1} & \frac{1}{\partial p_2} & \frac{1}{\partial p_3} & \frac{1}{\partial \Theta_z} & \frac{1}{\partial \Theta_y} & \frac{1}{\partial \Theta_x} & \frac{1}{\partial \Phi_z} \\
\left(\begin{array}{l}
\partial A_{11} \\
\partial A_{12} \\
\partial A_{13} \\
\partial A_{21} \\
\partial A_{22} \\
\partial A_{33} \\
\partial A_{31} \\
\partial A_{32} \\
\partial A_{33}
\end{array} \right) & \begin{array}{l}
D_{11} \Delta_{11} \\
D_{11} \Delta_{12} \\
D_{11} \Delta_{13} \\
D_{12} \Delta_{11} \\
D_{12} \Delta_{12} \\
D_{12} \Delta_{13} \\
D_{13} \Delta_{11} \\
D_{13} \Delta_{12} \\
D_{13} \Delta_{13}
\end{array} & \begin{array}{l}
D_{21} \Delta_{21} \\
D_{21} \Delta_{22} \\
D_{21} \Delta_{23} \\
D_{22} \Delta_{21} \\
D_{22} \Delta_{22} \\
D_{22} \Delta_{23} \\
D_{23} \Delta_{21} \\
D_{23} \Delta_{22} \\
D_{23} \Delta_{23}
\end{array} & \begin{array}{l}
D_{31} \Delta_{31} \\
D_{31} \Delta_{32} \\
D_{31} \Delta_{33} \\
D_{32} \Delta_{31} \\
D_{32} \Delta_{32} \\
D_{32} \Delta_{33} \\
D_{33} \Delta_{31} \\
D_{33} \Delta_{32} \\
D_{33} \Delta_{33}
\end{array} & \begin{array}{l}
e^{1k'k'} D_{k_1 p_{k'}} \Delta_{k'1} \\
e^{1k'k'} D_{k_1 p_{k'}} \Delta_{k'2} \\
e^{1k'k'} D_{k_1 p_{k'}} \Delta_{k'3} \\
e^{1k'k'} D_{k_2 p_{k'}} \Delta_{k'1} \\
e^{1k'k'} D_{k_2 p_{k'}} \Delta_{k'2} \\
e^{1k'k'} D_{k_2 p_{k'}} \Delta_{k'3} \\
e^{1k'k'} D_{k_3 p_{k'}} \Delta_{k'1} \\
e^{1k'k'} D_{k_3 p_{k'}} \Delta_{k'2} \\
e^{1k'k'} D_{k_3 p_{k'}} \Delta_{k'3}
\end{array} & \begin{array}{l}
-D_{k_3 p_k} \Delta_{k_1} \cos \Theta_z \\
-D_{k_3 p_k} \Delta_{k_2} \cos \Theta_z \\
-D_{k_3 p_k} \Delta_{k_3} \cos \Theta_z \\
D_{k_3 p_k} \Delta_{k_1} \text{sen} \Theta_z \\
D_{k_3 p_k} \Delta_{k_2} \text{sen} \Theta_z \\
D_{k_3 p_k} \Delta_{k_3} \text{sen} \Theta_z \\
\rho_k \frac{\partial D_{k_3}}{\partial \Theta_k} \Delta_{k_1} \\
\rho_k \frac{\partial D_{k_3}}{\partial \Theta_k} \Delta_{k_2} \\
\rho_k \frac{\partial D_{k_3}}{\partial \Theta_k} \Delta_{k_3}
\end{array} & \begin{array}{l}
D_{k_2 p_k} \Delta_{k_1} \\
D_{k_2 p_k} \Delta_{k_2} \\
D_{k_2 p_k} \Delta_{k_3} \\
-D_{k_1 p_k} \Delta_{k_1} \\
-D_{k_1 p_k} \Delta_{k_2} \\
-D_{k_1 p_k} \Delta_{k_3} \\
0 \\
0 \\
0
\end{array} & \begin{array}{l}
e^{1k'k'} D_{k'1 p_{k'}} \Delta_{k_1} \\
e^{1k'k'} D_{k'1 p_{k'}} \Delta_{k_2} \\
e^{1k'k'} D_{k'1 p_{k'}} \Delta_{k_3} \\
e^{1k'k'} D_{k'2 p_{k'}} \Delta_{k_1} \\
e^{1k'k'} D_{k'2 p_{k'}} \Delta_{k_2} \\
e^{1k'k'} D_{k'2 p_{k'}} \Delta_{k_3} \\
e^{1k'k'} D_{k'3 p_{k'}} \Delta_{k_1} \\
e^{1k'k'} D_{k'3 p_{k'}} \Delta_{k_2} \\
e^{1k'k'} D_{k'3 p_{k'}} \Delta_{k_3}
\end{array} & \begin{array}{l}
-D_{k_1 p_k} \Delta_{k_3} \cos \Phi_z \\
D_{k_1 p_k} \Delta_{k_3} \text{sen} \Phi_z \\
D_{k_1 p_k} \frac{\partial \Delta_{k_3}}{\partial \Theta_k} \\
-D_{k_2 p_k} \Delta_{k_3} \cos \Phi_z \\
-D_{k_2 p_k} \Delta_{k_3} \text{sen} \Phi_z \\
D_{k_2 p_k} \frac{\partial \Delta_{k_3}}{\partial \Theta_k} \\
-D_{k_3 p_k} \Delta_{k_3} \cos \Phi_z \\
D_{k_3 p_k} \Delta_{k_3} \text{sen} \Phi_z \\
D_{k_3 p_k} \frac{\partial \Delta_{k_3}}{\partial \Theta_k}
\end{array} & \begin{array}{l}
D_{k_1 p_k} \Delta_{k_2} \\
-D_{k_1 p_k} \Delta_{k_1} \\
0 \\
D_{k_2 p_k} \Delta_{k_2} \\
-D_{k_2 p_k} \Delta_{k_1} \\
0 \\
D_{k_3 p_k} \Delta_{k_2} \\
-D_{k_3 p_k} \Delta_{k_1} \\
0
\end{array}
\end{array}$$

con el cuarto. Sacando del 2o determinante el factor que multiplica a las columnas obtenemos una determinante multiplicada por ρ_3^2 , lo mismo hacemos con el tercer determinante, obtenemos un determinante multiplicado por ρ_2^2 , el cual difiere del anterior sólo por que las columnas estan intercambiadas, el intercambio implica un cambio de signo, por lo tanto el resultado final es un sólo determinante multiplicado por $(\rho_3^2 - \rho_2^2)$ los elementos de las columna $\partial\Theta_x$ de dicho determinante serán: $D_{2i}\Delta_{3a}$, mientras que los correspondiente a $\partial\Phi_x$ son: $D_{3i}\Delta_{2a}$.

Lo que hemos hecho es sacar de dos columnas del determinante la dependencia en las ρ 's, lo mismo es posible hacer con el resto de las columnas que dependen de ρ . Sin embargo, en el caso anterior fué muy importante el hecho de que los elementos de ambas columnas fueran "casi" iguales fila a fila. Esto no ocurre con el resto de las columnas, obtener un factor tan sencillo como el que obtuvimos al sacar la dependencia ρ de las columnas correspondiente a las parciales x, no parece inmediato. Sin embargo, como veremos más adelante, estos factores son sencillos y no dependen de los ángulos. Por ahora lo único que podemos decir es que utilizando el hecho de que las columnas que dependen de ρ son sumas de la forma $F_k\rho_k$ (donde los factores F_k son diferentes para cada columna y cada elemento de la misma, pero funciones unicamente de los ángulos) y utilizando la propiedades lineales de los determinantes, encontramos que el jacobiano que buscamos debe tener la siguiente forma, el producto de un binomio de grado 2 y uno de grado 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & (\rho_3^2 - \rho_2^2)(f_1\rho_1^4 + f_2\rho_2^4 + f_3\rho_3^4 + f_4\rho_1^3\rho_2 + f_5\rho_1^3\rho_3 + f_6\rho_2^3\rho_3 + f_7\rho_1\rho_2^3 \\ & + f_8\rho_1\rho_3^3 + f_9\rho_2\rho_3^3 + f_{10}\rho_1^2\rho_2^2 + f_{11}\rho_1^2\rho_3^2 + f_{12}\rho_2^2\rho_3^2) \end{aligned} \quad (3.90)$$

Los coeficientes f_i son sumas de determinantes de 9×9 , estos determinantes son los que resultan de tomar todas las combinaciones posibles entre los sumandos de cada una de las 4 columnas restantes que dependen de ρ después de sacar del determinante la dependencia de ρ ; es decir estos coeficientes f_i dependen exclusivamente de los angulos Φ y Θ (en lo siguiente veremos que en realidad tampoco dependes de los ángulos).

Para calcular el jacobiano procedemos de otro modo, utilizamos la métrica del espacio de las coordenadas curvilíneas. Para obtener el tensor métrico utilizamos lo siguiente [84]:

$$2P_x P_x = 2T = G^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \quad (3.91)$$

Donde P_μ y P_ν son los momentos conjugados de las coordenadas curvilíneas, T la energía cinética y P_x los momentos conjugados de las coordenadas cartesianas. El Jacobiano de la Transformación esta relacionado con el tensor anterior por lo siguiente ($\det(G^{\mu\nu}) \equiv G$)

$$\mathcal{J} = G^{-1/2} \quad (3.92)$$

Al hacer la cuantización (sustituir $P_x \rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}$), T es sustituido por el negativo del laplaciano, el cual se ve en términos de las coordenadas curvilíneas así:

$$2\hat{T} = -G^{1/2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} G^{-1/2} G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} \quad (3.93)$$

Lo anterior no es más que 2 veces la parte cinética del Hamiltoniano cartesiano expresado en términos de las coordenadas curvilíneas (lo que se obtuvo en la ec. (3.32) para el caso particular de las coordenadas polares). Como vimos en la sección anterior para obtener la parte cinética del Hamiltoniano curvilíneo (\bar{H} ec. (3.40)), tenemos que multiplicar lo anterior por $\mathcal{J}^{1/2} = G^{-1/4}$ por la izquierda y por $\mathcal{J}^{-1/2} = G^{1/4}$ por la derecha, con lo que obtenemos:

$$2\bar{T} = -G^{1/4} \frac{\partial}{\partial q_\mu} G^{-1/2} G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} G^{1/4} \quad (3.94)$$

Para el caso simple del apartado anterior vimos que la parte cinética del Hamiltoniano clásico en términos de los momentos conjugados curvilíneos era con $m=1$ (ec. (32)):

$$2T = \frac{P_\phi^2}{q^2} + P_q^2 \quad (3.95)$$

De donde obtenemos el tensor métrico:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{q^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

con $\mu = 1 = \phi$ y $\mu = 2 = q$.

De lo anterior obtenemos el Jacobiano:

$$\mathcal{J} = G^{-1/2} = \left(\frac{1}{q^2}\right)^{-1/2} = q$$

Y con esto podemos calcular directamente el Hamiltoniano curvilíneo.

Con el ejemplo ilustrativo anterior hemos visto que calcular el Jacobiano a través del tensor métrico resulta más sencillo que recurrir a la definición del Jacobiano como hicimos en un principio para las coordenadas hiperesféricas. Para calcular el tensor métrico de las coordenadas hiperesféricas consideremos:

$$2T = \sum_{i,a}^3 \partial_0 A_{ia} \partial_0 A_{ia} = \sum_{i,a}^3 \partial_0 (\rho_k D_{ki} \Delta_{ia}) \partial_0 (\rho_{k'} D_{k'i} \Delta_{k'a}) \quad (3.97)$$

En la cc. (2.4) expresamos lo anterior en términos de las derivadas temporales de los campos ρ , Θ y Φ . Para expresar la energía cinética en términos de los momentos conjugados hay que hacer algunas manipulaciones más utilizando las propiedades de las matrices ortogonales (ver Apéndice C.2). Lo que se obtiene es:

$$2T = \sum_k \dot{\rho}_k^2 + \sum_{t < k} \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2)}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 4 \sum_{t < k} \frac{\rho_k \rho_t}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \quad (3.98)$$

donde :

$$P_{\rho_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}_k} = \dot{\rho}_k \quad (3.99)$$

$$P_{\Theta_{kt}} \equiv L_{kt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}_{kt}} \quad (3.100)$$

$$P_{\Phi_{kt}} \equiv \mathcal{L}_{kt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Phi}_{kt}} \quad (3.101)$$

son los momentos conjugados de las coordenadas hiperesféricas.

De la expresión anterior podemos encontrar fácilmente el tensor métrico:

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} & 0 & 0 & \frac{2\rho_1 \rho_2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_1^2 + \rho_3^2}{(\rho_1^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 & \frac{2\rho_1 \rho_3}{(\rho_1^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_2^2 + \rho_3^2}{(\rho_2^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho_2 \rho_3}{(\rho_2^2 - \rho_3^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho_1 \rho_2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} & 0 & 0 & \frac{\rho_1^2 + \rho_3^2}{(\rho_1^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho_1 \rho_3}{(\rho_1^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 & \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\rho_2 \rho_3}{(\rho_2^2 - \rho_3^2)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_2^2 + \rho_3^2}{(\rho_2^2 - \rho_3^2)^2} \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Obtener el determinante de la matriz anterior es muy fácil, dada la estructura en bloques de la misma. Obtenemos:

$$\det G^{\mu\nu} \equiv G = \prod_{k < t} \left[\frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2)^2}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} - 4 \frac{\rho_k^2 \rho_t^2}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \right] = \prod_{k < t} \frac{1}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} \quad (3.103)$$

Que explícitamente es:

$$G \equiv \frac{1}{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2} \frac{1}{(\rho_1^2 - \rho_3^2)^2} \frac{1}{(\rho_2^2 - \rho_3^2)^2} \quad (3.104)$$

A partir de este resultado es fácil encontrar el Jacobiano de la Transformación:

$$\mathcal{J} \equiv G^{-1/2} = \prod_{k < t} (\rho_k^2 - \rho_t^2) = (\rho_1^2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 - \rho_3^2)(\rho_2^2 - \rho_3^2) \quad (3.105)$$

Nótese que el resultado anterior no está en contradicción con lo obtenido calculando el Jacobiano directamente de su definición (ec. (3.90)). La diferencia es que esta vez obtuvimos la expresión exacta y de un modo más sencillo.

El Jacobiano encontrado se limita al caso en que el grupo de simetría de los campos de norma es $SU(2)_{color}$, de un modo similar podemos encontrar el Jacobiano para el caso general del grupo $SU(n)_{color}$ con $p = (n^2 - 1)$ generadores:

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 - \rho_3^2)(\rho_2^2 - \rho_3^2)(\rho_1 \rho_2 \rho_3)^{(p-3)} \quad (3.106)$$

Para $SU(3)$ $p = 8$ y para $SU(2)$ $p = 3$. Sustituyendo p para el caso $SU(2)$ recuperamos la ecuación (3.105).

3.4 Dando paso al final

Habiendo entonces calculado el Jacobiano de la transformación debemos calcular el Hamiltoniano hiperesférico, multiplicando el Hamiltoniano cartesiano expresado en las coordenadas hiperesféricas, por la raíz cuadrada (y su inversa) del Jacobiano, es decir debemos aplicar la ecuación (3.40) o equivalentemente la ec. (3.94). Esta tarea es justamente la que se realiza en el siguiente capítulo, dentro de un modelo del Hamiltoniano de la QCD, que nos permite obtener y clasificar el espectro de energía de estados ligados de gluones (glueballs). Como un anticipo a ello mencionemos que en el siguiente

capítulo no multiplicamos el Hamiltoniano cartesiano por la raíz cuadrada (y su inversa) del Jacobiano:

$$[(\rho_1^2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 - \rho_3^2)(\rho_2^2 - \rho_3^2)]^{1/2}(\rho_1\rho_2\rho_3)^{(n-3)/2}$$

sino por lo siguiente :

$$(\rho_1\rho_2\rho_3)^{(n-3)/2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)^2 \quad (3.107)$$

De este modo el elemento de volumen, que de absorber el jacobiano en el Hamiltoniano sería simplemente $d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3 d\Omega_\Phi d\Omega_\Theta$, queda en la siguiente forma:

$$b^4 \text{sen}(3c) d\rho db dcd\Omega_\Phi d\Omega_\Theta \quad (3.108)$$

para valores pequeños de b . Y donde las variables ρ , b y c son definidas, como en la ref. [48], a través de:

$$\rho_k(x)^2 = \frac{\rho(x)^2}{3} \left(1 + 2b(x) \cos\left(c(x) - \frac{2\pi}{3}k\right)\right) \quad (3.109)$$

La ventaja de trabajar con el elemento de volumen mencionado estriba en el hecho de que éste es bien conocido en problemas de física nuclear [80], lo que nos permitirá avanzar en el estudio de la QCD apoyandonos en resultados bien establecidos de la física nuclear. Dicha tarea es el tema del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Un modelo del Hamiltoniano de la QCD usando coordenadas hiperesféricas

En el presente capítulo calculamos el espectro de los átomos gluónicos (glueballs) a partir de un modelo del Hamiltoniano de la QCD. Este modelo, dado en términos de campos hiperesféricos, es obtenido a partir de consideraciones generales acerca de la estructura del Hamiltoniano en modos constantes. Es decir, suponemos que en la integral de trayectoria de la QCD podemos hacer la integración de los modos no constantes (dependientes de las coordenadas espacio temporales) y obtener un hamiltoniano que este dado exclusivamente en términos de los modos constantes (dominantes en el regimen de bajas energías). Un modelo similar en este sentido se encuentra en la ref. [79], en donde se hace un estudio de los campos de norma con condiciones a la frontera periódicas (lo que topologicamente corresponde a un toro) y donde los modos no constantes son incluidos como perturbaciones a la teoría en modos constantes.

El modelo que se mostrara no es exacto, en el sentido de que no se deriva rigurosamente del Hamiltoniano de la QCD. Lo que se hace es encontrar la forma general de la parte cinética mediante el análisis de los grados de libertad de los campos gluónicos. Por su parte suponemos que la parte potencial puede ser desarrollada alrededor de un mínimo global. Con estas suposiciones obtenemos un Hamiltoniano de una forma especialmente simple que nos permite el cálculo del espectro de los estados ligados de gluones.

4.1 Los grados de libertad y su clasificación

De principio mostraremos los grados de libertad de los campos gluónicos, y como estos pueden ser ordenados dentro de representaciones irreducibles del grupo $O(8)$, el punto de partida es las representaciones totalmente simétricas del grupo $U(24)$ [85]. Esto significa que nos ocupamos exclusivamente de partículas bosónicas. El grupo $U(24)$, resulta del producto de los grupos $U(8)$ y $U(3)$, el primero representando la libertad de color (en este capítulo trabajamos con la simetría $SU(3)_{color}$ que implica 8 campos gluónicos) mientras que el segundo grupo representa los grados de libertad espaciales (es decir el espín). El hecho de que estos dos grupos deban dar lugar a irreps tot. sim. de $U(24)$, impone una restricción para los irreps de $U(8)$: sus diagramas de Young no pueden tener más de 3 renglones [62]. Finalmente la reducción de los dos grupos anteriores a los grupos de color $SU(3)$ y rotacional $SO(3)$ respectivamente es realizada a través de $O(8)$ para el color y a través de $SU(3)$ para la parte rotacional. Las reducciones mencionadas son bien conocidas y me limitaré a utilizar los resultados de las referencias. El procedimiento a seguir consistirá en encontrar los irreps de $U(8)$ que contengan singuletes de color, es decir puesto que estamos considerando unicamente la teoría de norma pura, los glueballs, deberán tener color cero. En el caso general donde se consideren también los cuarks, esto no deberá hacerse así, puesto que entonces podríamos acoplar glueballs con color y cuarks a color cero. Así pues la cadena de grupos a través de la cual clasificaremos el espectro de los glueballs es la siguiente [85], se muestran los números cuánticos necesarios y suficientes para tal fin (los número que representan las multiplicidades en las reducciones aparecen también):

$$\begin{array}{ccccccc}
 [N] & & & [h_1 h_2 h_3] & & & \\
 U(24) & \supset & U_c(8) & \times & U_L(3) & & \\
 & \xi & \cup & & \cup & & \\
 & (\omega_1 \omega_2 \omega_3 0) & O(8) & & SU_L(3)(p, q) & & (4.1) \\
 & & \cup & & \cup & K & \\
 & (0, 0) & SU_c(3) & & SO(3) & L, M &
 \end{array}$$

Las representaciones de $U(8)$ que nos interesan, son aquellas que contienen un escalar de color $(0,0)$. Puesto que la reducción de $U(8)$ a $SU(3)_{color}$ es conocida (ver por ejemplo la Ref. [86] para irreps arbitrarios ó Ref. [85] para diagramas de Young de hasta 5 casillas) y lo mismo ocurre para la reducción de $U(8)$ a $O(8)$ [87], es sencillo conocer la reducción de $O(8)$ a $SU(3)_{color}$ y en

particular hallar los irreps de $O(8)$ $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, 0)$ que contengan un singulete de color. Para lo anterior se procede recursivamente:

Partimos del irrep $[0]$ de $U(8)$, la reducción a $O(8)$ y $SU(3)$ respectivamente, es (0000) y $(0,0)$, el resultado (trivial) es que el irrep (0000) de $O(8)$ contiene un singulete de color. El siguiente irrep de $U(8)$ $[1]$ se reduce a los irreps (1000) y $(1,1)$ de $O(8)$ y $SU(3)$ respectivamente, de esto se deduce que el irrep (1000) de $O(8)$ se reduce al $(1,1)$ de color. Así hemos identificado un irrep de $O(8)$ que carece de singuletes de color, lo que nos ayudara a identificar a los irreps con singulete de color en irreps de $U(8)$ de orden ($\#$ de casillas) superior. Por ejemplo un irrep de 2 casillas (gluones), puede ser $[1^2]$ ó $[2]$, éste último se reduce a $SU(3)$ como $(2,2)+(1,1)+(0,0)$ mientras que para $O(8)$ se reduce a $(2000)+(0000)$. Entonces, utilizando resultados anteriores, vemos que (2000) de $O(8)$ se reduce a $(2,2)+(1,1)$ de $SU(3)$, con el singulete de color proveniente de la reducción de (0000) de $O(8)$. Como último ejemplo consideremos el irrep antisimétrico $[1^2]$, el cual se reduce a $(1,1)+(3,0)+(0,3)$ de $SU(3)$ y a (1100) de $O(8)$. Hemos encontrado la reducción de (1100) de $O(8)$ en irreps de $SU(3)$, en particular hemos encontrado que éste no contiene singuletes de color. Del modo anterior se continua para los siguientes irreps de $U(8)$. Conociendo su reducción a $O(8)$ y a $SU(3)$ y con los resultados que se vayan obteniendo, podemos encontrar la reducción a $SU(3)$ para un irrep arbitrario de $O(8)$. El procedimiento anterior no nos permite encontrar una fórmula inmediata para irreps de orden muy alto, sin embargo para los fines del presente modelo es muy útil pues tratamos con glueballs de pocos gluones (N).

El hecho relevante de hallar la reducción de $U(8)$ a $SU(3)$ con mediación de $O(8)$, radica en que las propiedades de conjugación de carga y paridad de los glueballs, vienen dadas por los números cuánticos de $O(8)$ $(\omega_1, \omega_2$ y $\omega_3)$ como se verá más adelante.

Por otro lado la reducción de la parte espacial al grupo de espín $SO(3)$ a través de $SU(3)$ (con $p = h_1 - h_2$ y $q = h_2 - h_3$) es muy sencillo de obtener, considerando las siguientes reglas [88]:

$$\begin{aligned}
 K &= \min(p, q), \min(p, q) - 2, \dots 0 \text{ ó } 1 \\
 K = 0 : L &= \max(p, q), \max(p, q) - 2, \dots 0 \text{ ó } 1 \\
 K \neq 0 : L &= K, K + 1, \dots K + \max(p, q) \quad . \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, para el irrep $[2] \equiv [2, 0, 0]$ (que ya hemos visto contiene un singulete de color asociado con el irrep (0000) de $O(8)$) tenemos que

$p = 2$ y $q = 0$ y $K=0$ por lo que el irrep tendrá $L = 2$ ó $L = 0$. Para irreps superiores la aplicación de las reglas (4.2) no es más complicada.

Con los procedimientos anteriores construimos la tabla 4.1, donde enlistamos unicamente los irreps de $U(8)$ (ó $U(3)$) que contienen singuletes de color, en la 2a columna se muestran los irreps de $O(8)$ que contienen dicho singulete, la tercera columna indica el número de singuletes; la cuarta indica la reducción al grupo de espín $SO(3)$ (subíndices indican multiplicidades en L correspondientes a diferentes valores de K); las últimas dos columnas muestran, finalmente, las propiedades de paridad y conjugación de carga de los irreps. (En la siguiente sección mostramos como se obtienen tales propiedades):

4.2 Propiedades de Paridad y Conjugación de Carga

Los estados de la sección anterior, pueden ser obtenidos a partir de estados que tengan números cuánticos $U(8)$ iguales a los correspondientes $O(8)$ ($[h_1 h_2 h_3] = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]$). Para ello se aplican los siguientes operadores:

$$q_m^\dagger = \sum_a [b_a^\dagger \times b_a^\dagger]_m^{|l|} \quad (4.3)$$

El símbolo $[A \times B]$, da el acoplamiento de dos tensores a espín l [78] y b_a^\dagger son operadores de creación del campo A_{ia} . Puesto que el operador (4.3) consiste de sumas de pares de operadores de creación de la misma carga de color, su aplicación no modifica las propiedades de paridad y conjugación de carga. De este modo las propiedades CP de un estado cualquiera, vendrán dadas por el irrep $[h_1 h_2 h_3] = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]$, a partir del cual se obtiene por aplicación de los operadores (4.3). Puesto que cada campo gluónico A_{ia} tiene paridad -1 , la paridad de un estado con N gluones ($N = h_1 + h_2 + h_3$) estará dada por lo siguiente:

$$P = (-1)^{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \quad (4.4)$$

Las propiedades de conjugación de carga son un poco más complicadas y no pueden obtenerse a partir de una expresión simple como en (4.4). Un irrep dado arbitrario de $O(8)$ no tiene necesariamente una propiedad de conjugación de carga definida. Que esto es cierto puede verse inmediatamente

$U(8)$ ($U(3)$)	$O(8)$	$\#(0,0)$	$SO(3)$ (L)	P	C
[2]	(0000)	1	0,2	+1	+1
[4]	(0000)	1	0,2,4	+1	+1
[2 ²]	(0000)	1	0,2	+1	+1
[6]	(0000)	1	0,2,4,6	+1	+1
[4, 2]	(0000)	1	0,2 ₂ ,3,4	+1	+1
[2 ³]	(0000)	1	0	+1	+1
[3]	(3000)	1	1,3	-1	-1
[5]	(3000)	1	1,3,5	-1	-1
[4, 1]	(3000)	1	1,2,3,4	-1	-1
[3, 2]	(3000)	1	1,2,3	-1	-1
[1 ³]	(1110)	1	0	-1	+1
[3, 1 ²]	(1110)	1	0,2	-1	+1
[2, 1 ²]	(2110)	1	1	+1	-1
[4, 1 ²]	(2110)	1	1,3	+1	-1
[3, 2, 1]	(2110)	1	1,2	+1	-1
[2 ²]	(2200)	1	0,2	+1	+1
[4, 2]	(2200)	1	0,2 ₂ ,3,4	+1	+1
[3, 2, 1]	(2200)	1	1,2	+1	+1
[2 ³]	(2200)	1	0	+1	+1
[2 ² , 1]	(2210)	1	1	-1	-1
[3, 1 ²]	(3110)	1	0,2	-1	-1
[6]	(6000)	1	0,2,4,6	+1	+1
[4, 2]	(4200)	1	0,2 ₂ ,3,4	+1	+1
[4, 1 ²]	(4110)	1	1,3	+1	-1
[3 ²]	(3300)	1	1,3	+1	-1
[2 ³]	(2220)	1	0	+1	+1

Tabla 4.1: Irreps de $U(8)$ ($U(3)$) que contienen singuletes de color, se muestra la reducción a $O(8)$ que contiene dicho singulete y la reducción al grupo de espín $SO(3)$. Asimismo se muestran las propiedades de Paridad y Conjugación de Carga.

para el caso de un gluón (que pertenece al irrep (1000) de $O(8)$). Las propiedades de conjugación de carga para cada uno de los 8 diferentes campos gluónicos están dadas por [89]:

$$\hat{C}A_{ia} = \eta_a A_{ia} \quad ,$$

sin suma sobre el índice a y

$$\begin{aligned} \eta_a &= -1; \quad a = 1, 3, 4, 6, 8 \\ \eta_a &= +1; \quad a = 2, 5, 7 \quad . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Sin embargo contrario a lo que sucede con el caso de un gluón, estados acoplados a color cero (que implica contracción sobre el índice de color) tienen una propiedad de carga definida.

Para encontrar las propiedades de conjugación de carga (C) para estados de color cero utilizaremos los llamados diagramas elementales permisibles (epd) [90], es decir aquellos estados que no pueden ser obtenidos por productos directos de otros estados con color cero. Un estado cualquiera de color cero puede obtenerse a partir de productos de epd's. De este modo la propiedad C de cada estado estará dada por el producto de las propiedades C de los epd's de los que puede ser obtenido.

El problema consiste, entonces, en encontrar todos los epd's de color cero y sus propiedades C. En principio existen procedimientos para realizar lo anterior, sin embargo para nuestros propósitos (pocos gluones) bastará adoptar un método más sencillo. El primer epd es el primer irrep de $O(8)$ sin color (ver tabla 4.1), adoptando la siguiente notación para los epd's ($N, [\omega_1\omega_2\omega_3], L$) donde $N = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, este epd se escribe en términos de operadores de creación gluónicos b_a^\dagger del siguiente modo:

$$(2, [2], L_1 = 0, 2) = [b_a^\dagger \times b_a^\dagger]_{L_1}^{[L_1]} \quad (4.6)$$

Los operadores de creación se acoplan al máximo peso en espín ($M = L$), lo que implica que el producto de dos epd's con espines L y L' tendrá espín $L + L'$. La propiedad C del anterior epd es muy fácil de obtener, ya que la contracción sobre el índice de color implica que las propiedades de cada b_a^\dagger se eleva al cuadrado lo que da por resultado que el anterior epd tiene $C=1$. Los irreps de $U(8)$ ($U(3)$) que tienen el mismo irrep de $O(8)$ (0000) que [2]

pueden ser obtenidos por elevar al cuadrado y al cubo el epd anterior. De este modo llegamos al siguiente epd que no puede ser obtenido como producto del anterior . Este es el estado que pertenece al irrep [3] y (3000) de $U(8)$ y $O(8)$ respectivamente. Para encontrar su forma en términos de operadores de creación consideremos los siguientes dos diagramas de Young de dos gluones.

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = f_{abc}[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]_1^{[1]} \equiv \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array}_a^{L=1}$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = d_{abc}[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]_L^{[L=0,2]} \equiv \begin{array}{|c|} \hline * \\ \hline \end{array}_a^{L=0,2}$$

Los coeficientes f_{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$ totalmente antisimétricas, mientras que los d_{abc} son totalmente simétricos. Para reproducir el irrep [3] de $U(8)$ debemos acoplar simetricamente un gluón al segundo de los diagramas de Young anteriores que además contraiga el índice de color es decir:

$$(3, [3], L_2) = d_{abc}[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[2]} \times b_a^\dagger]_{L_2}^{[L_2]} \quad (4.7)$$

Como se muestra en el apéndice D.1 las propiedades C de los epd's está dada por el número de veces (n_c) que en él aparecen coeficiente tot. simetricos d_{abc} :

$$C = (-1)^{n_c} \quad (4.8)$$

Así el epd anterior tiene $C = -1$. Con los dos epd's encontrados podemos seguir reproduciendo irreps mayores al mismo tiempo que detectamos más epd's. El resultado final es que todos los epd's necesarios para obtener estados de hasta seis gluones (tabla 4.1) son los siguientes, donde se muestran expresados en términos de operadores de creación:

$$\begin{aligned} (2, [2], L_1) &= [b_a^\dagger \times b_a^\dagger]_{L_1}^{[L_1]} \\ (3, [3], L_2) &= d_{abc}[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[2]} \times b_a^\dagger]_{L_2}^{[L_2]} \\ (3, [1^3], L_3) &= f_{abc}[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[1]} \times b_a^\dagger]_{L_3}^{[L_3]} \\ (4, [2^2], L_4) &= \hat{Y}_{[2^2]} * d_{abc}d_{ab'c'}[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[2]} \times [b_{b'}^\dagger \times b_{c'}^\dagger]^{[2]}]_{L_4}^{[L_4]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4, [2, 1^2], L_5) &= \hat{Y}_{[2,1^2]} * d_{abc} f_{ab'c'} [b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[0]} [b_{b'}^\dagger \times b_{c'}^\dagger]_{L_5}^{[L_5]} \\
(5, [3, 1^2], L_6) &= \hat{Y}_{[3,1^2]} * f_{abc} f_{a'a''} d_{a'b'c'} [[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[1]} \times [b_{b'}^\dagger \times b_{c'}^\dagger]]^{[L_6]} \times b_{a''}^\dagger]_{L_6}^{[L_6]} \\
(5, [2^2, 1], L_7) &= \hat{Y}_{[2^2,1]} * f_{abc} f_{a'a''} d_{a'b'c'} [[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{[1]} \times [b_{b'}^\dagger \times b_{c'}^\dagger]]^{[L_7]} \times b_{a''}^\dagger]_{L_7}^{[L_7]} \\
(6, [3^2], L_8) &= \hat{Y}_{[3^2]} * d_{a_1 a_2 a_3} f_{a_1 b_1 c_1} f_{a_2 b_2 c_2} f_{a_3 b_3 c_3} [[b_{b_1}^\dagger \times b_{c_1}^\dagger]^{[1]} \times \\
&\quad [b_{b_2}^\dagger \times b_{c_2}^\dagger]^{[L_8]} \times [b_{b_3}^\dagger \times b_{c_3}^\dagger]^{[L_8]}]_{L_8}^{[L_8]} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

En el lado derecho aparecen operadores de Young que proyectan a estados con una simetría definida y un definido irrep $O(8)$ con $[h_1 h_2 h_3] = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]$.

El espín de los epd's esta limitado a lo siguiente (tabla 4.1): $L_1 = 0, 2, L_2 = 1, 3, L_3 = 0, L_4 = 0, 2, L_5 = 1, L_6 = 0, 2, L_7 = 1, L_8 = 1, 3$.

Con los epd's anteriores pueden reproducirse estados con más de 6 giuónes, como es el caso del estado 0^{+-} el cual puede ser obtenido por multiplicar los epd's $(3, [1^3], 0)$ y $(5, [31^2], 0)$ lo cual da los irreps $[42^2]$ (4220) de $U(8)$ y $O(8)$ con propiedades de paridad y carga dadas por el producto de las propiedades de los epd's haciendo el cálculo da, efectivamente $P = +$ y $C = -$.

Los resultados para cada estado se resumen en la tabla 4.1, en donde puede apreciarse que las propiedades C y P son las misma para estados que pertenecen al mismo irrep de $O(8)$.

4.3 Un Hamiltoniano Colectivo

La densidad Hamiltoniana de la QCD en la norma del tiempo, tiene la siguiente forma general:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{ia} (\partial_0 A_{ia})^2 + \mathcal{V}(A) \quad (4.10)$$

El primer término es la densidad de energía cinética y el segundo la densidad de energía potencial. Como ya se ha mencionado el presente modelo considerará unicamente modos constantes que son el caso extremo de los modos dominantes de la teoría a bajas energías. Una ventaja de eliminar la dependencia espacial de los campos es que, como ya se ha dicho, el problema se reduce a uno con un número finito de grados de libertad, que es el caso que se ha estudiado extensamente en la física nuclear, los resultados allí obtenidos serán muy utilizados en lo siguiente.

El modo en que el hamiltoniano (4.10) se convierte al pasar al caso de modos constantes, puede en principio obtenerse utilizando la integral de Feyn-

man correspondiente, partiendo de la integral completa podemos expresar los modos no constantes en terminos de los constantes y otra parte que, en principio, puede ser integrada. El resultado sería un Hamiltoniano efectivo en modos constantes. Esta labor se hace en la ref. [79] para el caso de un toro. En vez de intentar la difícil tarea anterior para el caso actual, supondremos que, como en la Ref. [79], la energía cinética es cuadrática en los momentos conjugados y multiplicada por un factor que debe ser función de la constante de acoplamiento g . Obtener la forma exacta de esta función requiere de hacer la integración mencionada antes, lo que hacemos en el presente es modelarla por un parámetro $(\frac{1}{B_p})$.

El término potencial puede ser también modelado, bajo la suposición de que éste puede ser desarrollado alrededor de un mínimo global, en esto también apareceran parámetros que junto con el anterior pueden ser ajustados, utilizando para ello resultados obtenidos en teoría de redes [51].

Con las suposiciones anteriores la forma general del Hamiltoniano efectivo en modos constantes sería:

$$H_{\text{ef}} = -\frac{1}{2B_p} \sum_{ia} \frac{\partial^2}{\partial A_{ia}^2} + V_{\text{eff}}(A) \quad (4.11)$$

Expresamos el término de energía cinética de la ecuación anterior, en términos de las variables hipersféricas:

$$A_{ia} = \sum_{k=1}^3 \rho_k D_{k,i}^{13}(\Theta) \Delta_{5+k,a}^{1s}(\Phi) \quad (4.12)$$

La energía cinética en términos de las nuevas coordenadas se muestra para el caso de SU(2) en el capítulo anterior (ec. (3.98)), para el caso SU(3) el resultado se modifica un poco, pues hay que considerar 5 grados de libertad más. Una vez obtenida la energía cinética clásica se cuantiza según la siguiente regla:

$$2T = G^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \quad (\text{clásico}) \quad (4.13)$$

$$2\hat{T} = -(\hbar)^2 G^{1/2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} G^{-1/2} G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \quad (\text{cuántico})$$

donde P_μ son los momentos conjugados de las nuevas coordenadas, $G^{\mu\nu}$ el tensor métrico (con $G = \det(G^{\mu\nu})$ el jacobiano es $G^{-1/2}$), se utiliza la convención de Einstein para los índices repetidos. La tarea anterior ya ha

sido realizada [91, 92], y se muestra el resultado en la Ref. [48], la única diferencia con el caso presente es que el número A denota el número de campos de norma mas uno y no el número de Nucleones, por lo tanto, ahora, el grupo ortogonal es $O(8)$. El elemento de volumen en términos de las nuevas variables es :

$$\mathcal{J}d\rho_1d\rho_2d\rho_3d\Omega_\Theta d\Omega_\Phi = \quad (4.14)$$

$$(\rho_1^2 - \rho_2^2)(\rho_1^2 - \rho_3^2)(\rho_2^2 - \rho_3^2)(\rho_1\rho_2\rho_3)^5 d\rho_1d\rho_2d\rho_3d\Omega_\Theta d\Omega_\Phi$$

Como ya hemos anticipado en el final del capítulo anterior (y similar a lo que se realiza en la Ref. [48]) parte del Jacobiano de la transformación lo incluimos en el Hamiltoniano, al tiempo que definimos nuevos estados en la imagen de Schrödinger:

$$\Phi = (\rho_1\rho_2\rho_3)^{5/2}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)^2\Psi \quad (4.15)$$

Con esta transformación el elemento de volumen toma una forma particularmente útil ya que se ha estudiado en la física nuclear [80], para ver esto explícitamente se definen como en la ref. [48] nuevas variables:

$$\rho_k^2 = \frac{\rho^2}{3}(1 + 2b\cos(c - \frac{2\pi}{3}k)) \quad (4.16)$$

donde $k = 1, 2, 3$.

El sector de c que va desde 0 hasta 60 grados representa todas las posibilidades físicas, el resto de los puntos estan relacionados con alguno en este sector, además la variable b tiene un límite superior que depende de c . En términos de estas nuevas variables el elemento de volumen, para valores pequeños de b se aproxima a:

$$b^4\text{sen}(3c)d\rho dbdc d\Omega_\Theta d\Omega_\Phi \quad (4.17)$$

que es igual a uno estudiado en la Ref. [80].

Por su parte el Hamiltoniano (con la inclusión de parte del Jacobiano) expresado en términos de estas nuevas variables ($b, c, y \rho$) toma la siguiente forma general:

$$T = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\mathbf{R}^2}{\rho^2}\right) \quad (4.18)$$

El operador R^2 es mostrado explícitamente en la Ref. [48], en esa referencia se hace una expansión en términos de potencias inversas de la variable

$\sigma^2 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \frac{3}{2}(A - 5)$, donde A es el numero de nucleones. Para ello se utiliza la siguiente variable (β).

$$\begin{aligned} 1 + 2\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2 &= \frac{1 - b^2}{1 - 3b^2 + 2b^3 \cos(3c)} \\ &= 1 + 2b^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

La expansión del Hamiltoniano es realizada en términos de $\frac{\beta}{\sigma}$, y se hace así para reducir el Hamiltoniano a una expresión simple a primer orden cuando el número de nucleones (y por tanto σ^2) es muy grande. En nuestro caso esto no es así ya que nuestro equivalente al número de nucleones (# de campos de norma $+1 = 9$) no es muy grande, por eso a diferencia de la Ref. [48], expandemos R^2 hasta el siguiente orden, con lo cual obtenemos para \mathbf{R}^2 en términos de β y σ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{R}^2 &= \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^2 + \frac{1}{2}\mathbf{R}_2^2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{R}_1^2 &\approx \sigma^2 \left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2 \sin(3c)} \frac{\partial}{\partial c} \sin(3c) \frac{\partial}{\partial c} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{J}_k^2}{4\beta^2 \sin(c - \frac{2\pi}{3}k)} \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\sigma^4 - \frac{9}{8} \right) \left(1 + 2\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2 \right) + 6 \\ \frac{1}{2}\mathbf{R}_2^2 &\approx \mathcal{C}_2(\lambda, \mu) - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^3 \mathcal{L}_k^2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k &= \mathbf{L}_k + \mathcal{L}_k \\ \mathcal{C}_2(\lambda, \mu) &= \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3(\lambda + \mu) \\ \lambda &= \omega_1 - \omega_2, \quad \mu = \omega_2 - \omega_3 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Despreciando los términos que vayan como $\frac{1}{\sigma}$ ó mayores obtenemos los mismos resultados de la Ref. [48]. En nuestro caso las potencias inversas del factor de escala σ , no pueden simplemente despreciarse. A pesar de que hemos tomado en cuenta explícitamente la expresión a orden más bajo de $\frac{1}{\sigma}$

nuestra aproximación no es lo suficientemente buena. Para asimilar las contribuciones de orden más alto redefinimos los parámetros del Hamiltoniano, como usualmente se hace en problemas de física nuclear [80].

En conclusión la parte cinética queda como lo mostrado en (4.20) y (4.18), con la única diferencia de que los sumandos deberán estar multiplicados por parámetros a determinar posteriormente con resultados obtenidos “experimentalmente” en cálculos de redes.

Para la parte del potencial, realizando la integración de los modos no constantes, deberán aparecer términos muy complicados, como puede apreciarse en la ref [79], donde se realiza esta integración para el caso particular de un toro. Sin embargo, podemos obtener un potencial de oscilador armónico suponiendo que el potencial puede ser expandido alrededor de un mínimo global, es decir el potencial sería de la forma:

$$\frac{C_\rho}{2} \rho^2 \quad . \quad (4.22)$$

Así, finalmente, con las suposiciones discutidas, el Hamiltoniano efectivo que obtenemos es:

$$H_{eff} = -\frac{1}{2B_\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\mathbf{R}^2}{2B_\rho \rho^2} + \frac{C_\rho}{2} \rho^2 \quad (4.23)$$

Sustituyendo este hamiltoniano en la ecuación de Schrödinger, y considerando que el Hamiltoniano efectivo y \mathbf{R}^2 conmutan por lo que podemos sustituir \mathbf{R}^2 por su eigenvalor R_x^2 ; obtenemos una ecuación diferencial separable que tiene la siguiente solución para la parte de ρ :

$$\mathcal{F}_{n_\rho}^\lambda(\rho) = \left[\frac{2(n_\rho)!}{\Gamma(n_\rho + \lambda + 4)} \right]^{\frac{1}{2}} (C_\rho B_\rho)^{\rho\lambda + \frac{7}{2}} L_{n_\rho}^{\lambda+3} \left((C_\rho B_\rho)^{\frac{1}{2}} \rho^2 \right) e^{-\frac{1}{2}(C_\rho B_\rho)^{\frac{1}{2}} \rho^2} \quad (4.24)$$

Con los polinomios de Laguerre L_n^α y

$$\lambda = \sqrt{R_x^2 + \frac{1}{4}} - 3 \quad . \quad (4.25)$$

Los eigenvalores estan dados por:

$$E_{n_\rho \lambda}^X = \sqrt{\frac{C_\rho}{B_\rho}} \left(2n_\rho + \sqrt{R_x^2 + \frac{1}{4}} + 1 \right) \quad (4.26)$$

Donde χ denota el conjunto de números cuánticos que faltan.

Para encontrar la forma explícita del eigenvalor R_χ observemos que el operador \mathbf{R}^2 es una suma de términos, los tres primeros constituyen un oscilador armónico para el grado de libertad cuadrupolar (que puede expresarse en términos del operador de número N_2 de bosones cuadrupolares), los siguientes 2 son un término proporcional a σ^4 y otro constante; finalmente los dos últimos términos (los términos de \mathbf{R}_2) son el eigenvalor C_2 del operador de Casimir de $SU(3)$ y el operador \mathcal{L}^2 del grupo $SO(3)$. Todos estos sumandos van multiplicados por coeficientes indeterminados que modelan tanto los términos de orden superior en la sustitución b a $\frac{\beta}{\sigma}$ como los términos similares que pudieran aparecer en la expansión de la parte del potencial. Así la forma del operador \mathbf{R}^2 es :

$$\mathbf{R}^2 = 4\sqrt{\frac{C_2}{B_2}}\frac{\sigma^2}{6}N_2 + k_1(\sigma^4 - 36) + k_2C_2(\lambda, \mu) + k_3\hat{\mathcal{L}}^2 + (k_4 - 9) \quad (4.27)$$

Se han introducido algunos valores que no afectan la forma, pues pueden ser absorbidos dentro de los coeficientes, su introducción es sólo por conveniencia. Notemos que las funciones antes obtenidas son eigenestados de este operador \mathbf{R} como habíamos mencionado. En la expresión anterior se han introducido cinco parámetros que junto con el introducido anteriormente al pasar al caso de modos constantes, dan un total de seis:

$$\sqrt{\frac{C_\rho}{B_\rho}}, \sqrt{\frac{C_2}{B_2}}, k_1, k_2, k_3, k_4 \quad (4.28)$$

El eigenvalor de \mathbf{R}^2 , que tiene la misma forma que el operador, es sustituido en la ec. (4.26). Finalmente para encontrar el espectro de energías restamos a la expresión obtenida el eigenvalor para el vacío. El cual tiene los siguientes números cuánticos $n_\rho = 0, N_2 = 0$ y $\omega_k = 0$. El resultado es:

$$\begin{aligned} E_{n_\rho, N_2}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \mathcal{L}} &= \sqrt{\frac{C_\rho}{B_\rho}}(2n_\rho + [4\sqrt{\frac{C_2}{B_2}}\frac{\sigma^2}{6}N_2 \\ &+ k_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 12) \\ &+ k_2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) + k_3\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1) + k_4]^{1/2} \\ &- \sqrt{k_4}) \quad . \quad (4.29) \end{aligned}$$

En la siguiente sección de este capítulo, se ajustan los parámetros de la función anterior con resultados de teorías de redes en QCD [51]

4.4 El espectro de los glueballs

El espectro obtenido desde el modelo discutido en lo anterior, se ajusta al obtenido en la Ref. [51]. Para ello se utiliza la rutina CERN-MINUIT [93] para obtener en promedio el mejor acuerdo a los 16 estados de la Ref. [51]. La ecuación (4.29) con los parámetros determinados y la energía en MeV 's es:

$$E_{n_\rho, N_2}^{(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \mathcal{L}} = 774.4(2n_\rho + [1.27\sigma^2 N_2 + 0.15(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 12) + 1.16(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) + 0.45\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1)]^{\frac{1}{2}}) \quad (4.30)$$

En la tabla 4.2 se muestran los resultados para el espectro, unicamente para los estados que aparecen en la Ref. [51], Los estados con un signo de multiplicación (\times) aparecen en la Ref. [51] como límites superiores. Como los cálculos de redes suponen cajas finitas aparecen varios valores para estados con espín diferente de cero. En estos casos para comparar con los resultados obtenidos por el modelo presentado se toma un promedio de los valores dados en [51]. De igual modo se compara el espectro obtenido desde nuestro modelo con el obtenido en cálculos recientes por M. Pearson [52]. Como se puede observar existe acuerdo de los resultados tanto con los de la Ref. [51] como con los de [52]. Esto indica que las suposiciones hechas, apesar de lo restrictivas que parecieran, son capaces de conducir a resultados correctos, sin embargo hace falta estudiar con mas detalle dichas suposiciones y dejar más claro el porque de su efectividad. Queda como tarea futura.

Finalmente en la tabla 4.3 se muestran algunos estados más para el espectro de glueballs, estos estados no aparecen en la Ref. [51], sin embargo debe ser posible obtenerlos en cálculos de redes. Los estados que se muestran son los de más baja energía para L (=4,5,6) y PC (++, +-, -+, ---), del mismo modo se muestran estados excitados para combinaciones de L^{PC} ya tomadas en cuenta en su nivel de energía más bajo. Se comparan algunos resultados con los de la Ref. [52].

$[h_1 h_2 h_3]$	$(\omega_1 \omega_2 \omega_3)$	$\mathcal{L}(\lambda, \mu)$	n_ρ	N_2	L^{PC}	energía (MeV)	Ref. [51] Ref. [52]
[2]	(0000)	0 (0,0)	1	0	0 ⁺⁺	1548.8	1549± 53 —
[2]	(0000)	0 (0,0)	0	1	2 ⁺⁺	2137.7	2271± 132 2390± 120
[4, 2]	(0000)	0 (0,0)	0	3	3 ⁺⁺	3702.6	3916± 484 3690±180
[1 ³]	(1110)	0 (0,0)	0	0	0 ⁻⁺	2012.0	2332± 264 2590± 130
[3, 1 ²]	(1110)	0 (0,0)	0	1	2 ⁻⁺	3301.9	3014± 242 3070± 150
[5, 3, 1]	(1110)	0 (0,0)	0	3	3 ⁻⁺	4961.0	× 5869± 673 4684± 105
[2 ² , 1]	(2210)	1 (1,0)	0	0	1 ⁻⁻	3311.9	4356± 484 3850± 190
[3]	(3000)	3 (3,0)	0	0	3 ⁻⁻	4450.6	× 5776± 897 4132± 158
[2, 1 ²]	(2110)	1 (1,0)	0	0	1 ⁺⁻	3013.2	2904± 264 2940± 140
[3, 2, 1]	(2110)	1 (1,0)	0	1	2 ⁺⁻	4086.0	3894± 1166 4100± 200
[4, 1 ²]	(2110)	1 (1,0)	0	1	3 ⁺⁻	4086.0	× 6187± 860 3540±170
[3, 2 ²]	(3220)	1 (1,0)	0	0	1 ⁻⁺	3909.8	× 3757± 374 4211±53
[4, 2, 1]	(2210)	1 (0,1)	0	1	2 ⁻⁻	4398.4	3938± 242 × 3947± 53
[3, 2, 1]	(2200)	2 (0,2)	0	1	1 ⁺⁺	4685.0	3960± 308 4132± 105
[3, 1 ²]	(3110)	0 (2,0)	0	0	0 ⁻⁻	3821.3	5346± 2243 4947± 105
[4, 2, 2]	(4220)	0 (2,0)	0	0	0 ^{+−}	4620.5	3065± 374 4737± 105

Tabla 4.2: Espectro en MeV's para los glueballs de menor energía calculado según el modelo y los cálculos de redes (lattice gauge theories)

$(\omega_1\omega_2\omega_3)$	$\mathcal{L}(\lambda, \mu)$	n_ρ	N_2	L^{PC}	energía (MeV)	Ref. [52]	
(0000)	0 (0,0)	0	2	4 ⁺⁺	3023.1		
(0000)	0 (0,0)	0	4	5 ⁺⁺	4275.4		
(0000)	0 (0,0)	0	3	6 ⁺⁺	3702.6		
(1110)	0 (0,0)	0	2	4 ⁻⁺	4213.9		
(1110)	0 (0,0)	0	4	5 ⁻⁺	5609.5		
(1110)	0 (0,0)	0	3	6 ⁻⁺	4961.0		
(3000)	3 (3,0)	0	1	4 ⁻⁻	5163.6		
(3000)	3 (3,0)	0	1	5 ⁻⁻	5163.6		
(3110)	2 (2,0)	0	2	6 ⁻⁻	5742.6		
(2110)	1 (1,0)	0	2	4 ^{+ -}	4930.7		
(2110)	1 (1,0)	0	2	5 ^{+ -}	4930.7		
(0000)	0 (0,0)	0	2	0 ⁺⁺⁺	3023.1		3640 ± 180
(0000)	0 (0,0)	1	0	0 ^{+++*}	3097.6		
(1110)	0 (0,0)	0	1	0 ^{-+*}	3301.9		
(2110)	1 (1,0)	0	1	1 ^{+ -*}	4086.0		
(3000)	1 (3,0)	0	0	1 ^{--*}	4136.3		
(2210)	1 (0,1)	0	0	1 ^{--*}	3311.9		
(0000)	0 (0,0)	0	2	2 ^{+++*}	3023.1	3290 ± 160	
(1110)	0 (0,0)	0	1	2 ^{-+++*}	3301.9	3937 ± 53	

Tabla 4.3: Otros estados con espín y energía mayores

A diferencia de los cálculos de redes, en el presente modelo no sólo es posible reproducir el espectro de los glueballs sino, también, clasificar los estados, según los grupos de simetría de los grados de libertad. Así por ejemplo, la degeneración entre los estados 1^{++} y 3^{++} puede entenderse en el modelo como una consecuencia de que cada estado pertenece a dos diferentes irreps del grupo $O(8)$.

Las posibilidades que representa el hecho de haber encontrado un modelo capaz de reproducir el espectro de glueballs y dar un esquema de clasificación para los mismos son muchas. Por ejemplo la extensión a un modelo que incluya a los cuarks, o la inclusión de los modos no constantes, quizá perturbativamente, para el estudio a mayores energías. De cualquier modo estas son tareas futuras que quedan fuera de este trabajo de tesis.

Conclusiones

La descripción del estado base de la CDC (y en general de las teorías de norma no abelianas) es un problema no resuelto aún. Sin embargo se tiene ya mucha información acerca de sus características. Por ejemplo se sabe que el vacío perturbativo ¹ es inestable. En su lugar hay indicios de un estado base con un campo cromomagnético diferente de cero, sin embargo este esquema no está del todo resuelto. El entendimiento del vacío de la CDC es un punto muy importante para entender algunos fenómenos como el confinamiento de Cuarks y el espectro hadrónico. En la presente tesis se hizo un estudio de la CDC para la parte de los campos de norma únicamente. En el caso real habrá una combinación con los campos de materia (cuarks). Aún así el estudio de la teoría de norma pura puede enseñarnos mucho acerca de lo que podemos esperar en la teoría completa, a sabiendas de que esta debe ser más complicada. Uno de los problemas iniciales con la presencia de un campo magnético no nulo en el estado base es que éste parece romper la simetría de Lorentz y en particular la simetría rotacional del vacío. El uso de las coordenadas hipersféricas en su generalización como campos permite, en principio, obtener soluciones invariantes ante rotaciones con un campo cromomagnético no nulo. Estas coordenadas usadas en un principio en modelos nucleares están asociadas con grados de libertad colectivos de los nucleones. En la primera parte de esta tesis intentamos, usando coordenadas hipersféricas, encontrar soluciones clásicas para las ecuaciones de movimiento de los campos. Podemos concluir que usando coordenadas hipersféricas para resolver las ecuaciones de movimiento de una teoría de norma $SU(2)_{color}$, para el caso sencillo de ρ 's constantes y acoplamiento de los campos a color cero, conduce a una solución incompatible con un campo magnético intrínseco. Bajo las mismas suposiciones anteriores y suponiendo,

¹el "vacío" de las altas energías donde la constante de acoplamiento es casi cero y los cuarks se comportan como partículas libres (partones)

además, una simetría en el plano (12) “intrínseco”, obtuvimos un conjunto de condiciones para los campos hiperesféricos que implican un campo cromomagnético intrínseco y uno eléctrico nulo:

$$\begin{aligned}
 g(\rho_1\rho_2 - 2\rho_3^2) &= g(\rho_1^2 - \rho_3^2) = h \\
 \bar{\partial}_i\Theta_{jk} &= g\epsilon_{ijk}\rho_3\frac{\rho_j^2 + \rho_k^2}{(\rho_j - \rho_k)^2} \text{ con } j \text{ ó } k = 3 \\
 \bar{\partial}_i\Phi_{jk} &= -\epsilon_{ijk}\frac{2g\rho_3\rho_j\rho_k}{(\rho_j - \rho_k)^2} \text{ con } j \text{ ó } k = 3 \\
 \bar{\partial}_\mu\Theta_{12} \text{ y } \bar{\partial}_\mu\Phi_{12} &\text{ arbitrarias } (\mu=0,1,2,3)
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Existen diferentes conjuntos de condiciones para los campos hiperesféricos que conducen al mismo resultado que las condiciones arriba expuestas. Esto es una consecuencia de la libertad de norma “remanente” a la norma del tiempo (en la cual se trabajo en toda la tesis).

La incompatibilidad entre la solución a las ecs. de movimiento clásicas para los campos de norma y las condiciones que implican un campo cromomagnético “intrínseco” nos condujo a considerar la teoría cuántica. En un principio se pensó que el estudio cuántico de la transformación a campos hiperesféricos sería mas directo y claro utilizando el formalismo desarrollado por Feynman en términos de integrales de camino (“path integrals”). Para evaluar esta creencia se estudió una transformación a coordenadas curvilíneas sencilla (a coordenadas polares). Se evaluó la integral de Feynman para la partícula libre planteandola en coordenadas cartesianas para después hacer la transformación y se comparó con lo obtenido planteando la integral de camino directamente en coordenadas curvilíneas[4]. Ambos métodos dan el mismo resultado confirmando lo ya obtenido por otros autores [50]. Sin embargo, a diferencia de lo hecho por los autores mencionados, aquí realizamos la integración en el espacio de Minkowski y no en el de Euclides. La comparación de ambas opciones indica que el cálculo en el espacio Euclideo, al menos para el caso estudiado, es más directo que haciendolo en el de Minkowski. A pesar de ello, se vió que las integrales de trayectoria no eran muy convenientes para el estudio cuántico de la transformación de los campos de norma a campos hiperesféricos. Se optó por trabajar en la imagen de Schrödinger, en donde el paso a coordenadas hiperesféricas implica multiplicar el operador Hamiltoniano por el Jacobiano de la transformación del

siguiente modo:

$$\tilde{H} = \sqrt{\mathcal{J}} \hat{H} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{J}}} \right)$$

Se calculó dicho Jacobiano para el caso de coordenadas hipersféricas.

De este modo se tuvieron los elementos necesarios para, en la imagen de Schrödinger, obtener un Hamiltoniano de la QCD en coordenadas hipersféricas. Se propuso un esquema de clasificación para los estados ligados de QCD sin cuarks (los llamados “glueballs”) basado en la reducción del grupo $U(24)$ a los grupos $SU(3)_{color}$ y $SO(3)_{espin}$ del siguiente modo: el grupo $U(24)$ se reduce al producto directo de $U(8)$ y $U(3)$ el primero de ellos se reduce a $SU(3)$ a través de $O(8)$, el segundo, por su parte, se reduce a $SO(3)$ a través de un grupo $SU(3)$. La condición color cero impone restricciones para los irreps de $U(8)$ y $O(8)$. Sólo se consideran irreps que contengan el irrep $(0,0)$ de $SU(3)$ color. Las propiedades de conjugación de carga y paridad de los estados se obtienen considerando únicamente los números cuánticos correspondientes al grupo $O(8)$ del estado. Esta clasificación resulta del análisis de los grados de libertad de la teoría mientras que los grupos intermedios se eligieron de tal modo que permitieron obtener los números cuánticos necesarios para calcular el espectro de energía de los glueballs utilizando un modelo para el Hamiltoniano en coordenadas hipersféricas.

El trabajo extenso en el uso de las coordenadas hipersféricas en la física nuclear permitió conducirnos más fácilmente en el uso de estas coordenadas para describir bajas energías en QCD. Pero antes se hizo la siguiente suposición: el Hamiltoniano de la QCD puede expresarse exclusivamente en términos de los modos dominantes a bajas energías (modos constantes de longitud de onda infinita), es decir que en la integral de Feynman de la QCD los modos no constantes pueden ponerse en término de los constantes y una parte oscilante que puede ser integrada, con lo que se obtiene un Hamiltoniano efectivo en donde los modos no constantes se manifiestan en la parte del potencial y como una constante indeterminada multiplicando la parte cinética.

Con la suposición anterior, se realizó la transformación de la parte cinética, procediendo de modo enteramente similar como en algunos trabajos de física nuclear [48]. A diferencia del trabajo mencionado, en nuestro caso el factor de expansión (que depende del número de campos de norma) no es muy grande por lo que se debieron considerar términos extras que en el caso de la ref. [48] se desprecian. Sin embargo estos término extra pueden modularse por factores que multipliquen a los de orden más bajo. Finalmente

suponiendo una forma sencilla para el potencial se obtuvo un Hamiltoniano efectivo para los campos de norma a bajas energías, determinado hasta 6 parámetros y dependiente de operadores de Casimir de los grupos envueltos en la clasificación de los glueballs. Resolviendo la ecuación de Schrödinger se obtuvo una función analítica para los eigenvalores de los estados ligados de los campos de norma (“glueballs”) que depende de 6 parámetros.

Fijando estos parámetros con valores obtenidos en cálculos de redes, se llegó a un espectro para glueballs que coincide muy bien con estos cálculos de redes, es decir se obtuvo un modelo consistente con los resultados conocidos.

Se consiguió, pues, un modelo que bajo suposiciones muy simples reproduce los resultados “experimentales” de los cálculos de redes y que a diferencia de éstos provee de un esquema de clasificación para los glueballs. Esquema que permite entender el porque de las degeneraciones observadas en el espectro y en general de la estructura del mismo. El acuerdo de los resultados del modelo con los de teorías de redes indica que las coordenadas hipersféricas son buenas candidatas para la descripción del sector de bajas energías de la Cromodinámica Cuántica. Por otro lado el acuerdo mencionado también impone la tarea de revisar con más cuidado los razonamientos que condujeron al modelo. Con el fin de entender mejor sus implicaciones para el comportamiento de los campos gluónicos a bajas energías, así como para poder extenderlo como un modelo que incluya a los Cuarks.

En el futuro se trabajará en dos líneas principales, la primera ya se mencionó y consiste en la extensión de la técnicas usadas en esta tesis para describir los campos fermiónicos (cuarks). La parte de Color parece más sencilla que en el caso gluónico ya que los cuarks transforman según la representación fundamental de la simetría de norma ($SU(3)_{color}$) mientras que los gluones lo hacen con la representación adjunta (de dimensión 8), sin embargo la naturaleza espinorial de los campos fermiónicos frente a la vectorial de los campos gluónicos, hace necesario revisar con más cuidado lo esencial de las técnicas empleadas a lo largo de la tesis. La otra línea de trabajo se restringe como en el presente trabajo a la parte gluónica de la CDC y consiste en intentar una derivación más rigurosa del potencial efectivo para los modos constantes, como se menciona en la tesis, en principio esto puede realizarse utilizando integrales de trayectoria de Feynman. Dentro de esta misma línea se pretende, también, dejar los modos constantes e intentar manejar explícitamente fluctuaciones alrededor de estos (en términos de las coordenadas hipersféricas esto significa $\rho(x) = \rho_0 + \epsilon\rho_{\epsilonpsilon}(x)$ y no $\rho = \rho_0 = \text{etc.}$). Asimismo se pretende dejar el acoplamiento de los campos gluónicos a color cero, teniendo

a la vista que, eventualmente, se llegará a estudiar la interacción entre los campos gluónicos y los campos de cuarks, en ese caso la parte gluónica y la de cuarks no debe, necesariamente, estar acoplada a color cero de modo separado, sino las dos partes en conjunto.

Apéndice A

A.1 Matrices de Gell-Mann y constantes de estructura de $SU(3)$

Cualquier miembro del grupo $SU(3)$ puede expresarse del siguiente modo :

$$U = \exp\left\{-i \sum_{a=1}^8 \lambda_a \omega_a\right\}$$

donde ω_a son los parámetros que caracterizan a cada miembro del grupo y λ_a los generadores del grupo, que en la representación fundamental son las llamadas matrices de Gell-Mann.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Las constantes de estructura pueden obtenerse fácilmente de la representación explícita anterior, para ello se toman los conmutadores:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k$$

suma sobre índices repetidos

Estas constantes de estructura son totalmente antisimétricas para el intercambio de índices.

Las constantes totalmente simétricas se obtienen de los anticonmutadores:

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} I + 2d_{ijk} \lambda_k$$

Los valores de f_{ijk} y d_{ijk} a partir de los cuales pueden conocerse todos las constantes no nulas son:

ijk	f_{ijk}
123	1
147	$\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$
257	$\frac{1}{2}$
345	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
678	$\sqrt{3}/2$

ijk	d_{ijk}
118	$1/\sqrt{3}$
146	$1/2$
157	$1/2$
228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
247	$-\frac{1}{2}$
256	$\frac{1}{2}$
338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
344	$\frac{1}{2}$
355	$\frac{1}{2}$
366	$-\frac{1}{2}$
377	$-\frac{1}{2}$
448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
888	$-1/\sqrt{3}$

Apéndice B

B.1 Cálculo de las parciales $\partial_\mu D$

En el presente apéndice se encuentra una expresión para las derivadas parciales de las matrices ortogonales D y Δ .

Partimos de la propiedad de ortogonalidad de las matrices D (el resultado lo derivamos utilizando D , pero es igualmente válido para la matriz Δ):

$$DD^T = 1$$

Derivando lo anterior:

$$(\partial_i D)D^T + D(\partial_i D^T) = 0$$

de donde:

$$(\partial_i D)D^T = -D(\partial_i D^T) = -((\partial_i D)D^T)^T \quad (\text{B.1})$$

Definimos.

$$\alpha_i \equiv (\partial_i D)D^T$$

Entonces (B.1) se escribe:

$$\alpha_i = -\alpha_i^T$$

Es decir α_i es antisimétrica. Por otro lado:

$$\alpha_i D = (\partial_i D)D^T D = \partial_i D \quad (\text{B.2})$$

Así puede obtenerse la derivada parcial de una matriz D simplemente multiplicándola por la matriz α . Esta última tiene un significado simple, para verlo, supongamos un vector fijo en el sistema intrínseco (Z'), el cual

esta relacionado con el vector fijo al sistema del laboratorio del siguiente modo:

$$Z' = DZ$$

Puesto que Z' es un vector fijo al sistema intrínseco en todo punto del espacio-tiempo (hay que recordar que en cada punto del espacio tiempo esta definido un sistema intrínseco) se cumple lo siguiente:

$$\partial_i Z' = (\partial_i D)Z + D\partial_i Z = 0$$

utilizando (B.2) obtenemos:

$$\partial_i Z = -D^T \alpha_i D Z$$

Podemos expresar $\partial_i Z$ de otro modo. En analogía con el caso de un cuerpo rígido, en donde la velocidad debida a la rotación esta dada por $V_r = \Omega \times Z$, expresamos $\partial_i Z$:

$$\partial_i Z = \Omega^i \times Z$$

Ω^i es un vector "velocidad" (la velocidad no es respecto al tiempo sino a las coordenadas espaciales). Las componentes de este vector (Ω^i) estan dirigidas paralelas al eje q fijo al laboratorio, por ejemplo la componente 3 de Ω^i es perpendicular al plano (12) del sistema fijo al laboratorio.

Igualando las dos expresiones para $\partial_i Z$ y en términos de componentes (suma sobre índices repetidos):

$$-(D^T)_{jp} \alpha_{pa}^i D_{ak} Z_k = \epsilon_{jtk} \Omega_t^i Z_k$$

Entonces:

$$D_{pj} \alpha_{pa}^i D_{ak} = \epsilon_{jkt} \Omega_t^i$$

Contrayendo ambos lados con ϵ_{jkq} obtenemos.

$$\epsilon_{jkq} D_{pj} \alpha_{pa}^i D_{ak} = 2\Omega_q^i$$

Podemos "acoplar" los dos D a uno solo de orden superior utilizando coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) (ver apéndice siguiente):

$$D_{pj} D_{ak} = (1p1a|\lambda s)(1j1k|\lambda s') D_{ss'}^\lambda$$

Por otro lado $\epsilon_{jkq} = \sqrt{2}(1j1k|1q)$. Utilizando estos dos resultados obtenemos:

$$\sqrt{2}(1j1k|1q)(1p1a|\lambda s)(1j1k|\lambda s')D_{ss'}^\lambda \alpha_{pa}^i = 2\Omega_q^i$$

que usando la ortogonalidad de los CCG se escribe:

$$\sqrt{2}(1p1a|1s)D_{sq}\alpha_{pa}^i = \epsilon_{pas}D_{sq}\alpha_{pa}^i = 2\Omega_q^i$$

Multiplicando ambos lados por D_{kq} :

$$\epsilon_{pak}\alpha_{pa}^i = 2D_{kq}\Omega_q^i$$

Supongamos $k=3$ entonces lo anterior es:

$$\alpha_{12}^i = D_{3q}\Omega_q^i$$

Algo similar se cumple cuando $k = 1$ y $k = 2$. Es decir α_{jk}^i es el vector Ω_q^i transformado al sistema intrínseco. O dicho en otros términos:

$$\alpha_{jk}^i = \partial_i \Theta_{jk}$$

Donde Θ_{jk} es el ángulo de rotación en el plano (jk) fijo al sistema intrínseco.

El razonamiento anterior se aplica, igual, para las derivadas temporales, entonces:

$$\partial_0 D = \omega D$$

Con ω una matriz antisimétrica:

$$\omega_{ij} = \partial_0 \Theta_{ij}$$

En el caso de las rotaciones de color, la única diferencia es que el espacio real es cambiado por el espacio de color y las Θ 's por Φ 's:

$$\partial_i \Delta = \beta^i \delta$$

Con β^i antisimétrica : $\beta_{jk}^i = \partial_i \Phi_{jk}$

Para las derivadas temporales:

$$\partial_0 \Delta = \Omega \Delta$$

con Ω una matriz antisimétrica:

$$\Omega_{jk} = \partial_0 \Phi_{jk}$$

B.2 Coeficientes de Clebsch-Gordan cartesianos

En el presente apéndice derivamos algunas relaciones útiles para las representaciones del grupo de rotaciones ($SO(3)$). Calculamos explícitamente los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) ($1i1j|iK$) para el caso de índices cartesianos.

Usualmente en los libros, las representaciones se hacen utilizando una base esférica. Del mismo modo los CCG son expresados en términos de estas bases. De principio derivamos algunos resultados que igual se aplican para cualquier tipo de base para después hacer el cálculo explícito de los CCG en coordenadas cartesianas. Supongamos 2 partículas cuya interacción no altera el momento angular de cada una de ellas. En ese caso tenemos:

$$J_i^2 |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = j_i(j_i + 1) |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle,$$

$$j_i z |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = m_i |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

donde $i = 1, 2$ y $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$

De cualquier modo puede resultar mas conveniente utilizar otra base completa formada por estados que sean combinaciones lineales de la base anterior y que sean eigenestados de la suma de los operadores de momento angular, es decir de $\mathbf{J}^2 = (J_1 + J_2)^2$ y de $\mathbf{J}_z = j_1 z + j_2 z$. A esta nueva base la escribimos del siguiente modo: $|j_1 j_2 JM\rangle$ o simplemente como $|JM\rangle$. Podemos obtener la relación entre estas dos base utilizando el hecho de que ambas son bases completas:

$$|JM\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle$$

ó

$$|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle = \sum_{JM} |JM\rangle \langle JM | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$$

la última de las sumatorias corre desde $J = |j_1 - j_2|$ hasta $J = j_1 + j_2$, de acuerdo a la regla del triángulo [64]. Mientras que las m 's corren desde $-j$ hasta j . Los coeficientes que relacionan las dos bases reciben el nombre de coeficientes de Clebsch-Gordan. En lo siguiente los denotaremos del siguiente modo:

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM\rangle \equiv (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)$$

y por lo tanto el complejo conjugado es:

$$\langle JM | j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \equiv (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)^*$$

Los coeficientes de Clebsch-Gordan anteriores relacionan dos bases que, de modo independiente, son eigenestados de la componente z del operador momento angular correspondiente. Esto indica que la base no se comporta como una base cartesiana (cualquiera de las tres componenetes del momento angular expresada en una base cartesiana no es diagonal [64]), de hecho la base es esférica. Esto se manifiesta, también en el hecho de que los índices corren desde $-j$ hasta j , en una base cartesiana corren desde 1 hasta $2j+1$. Derivamos a continuación algunos resultados importantes para los coeficientes de Clebsch-Gordan que igual se aplican para una base esférica que para una cartesiana.

La base $|JM\rangle$ es una base ortonormal, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle JM|J'M'\rangle &= \sum_{m_1 m_2} \langle JM|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2|J'M'\rangle \equiv \\ &\sum_{m_1 m_2} (j_1 m_1 j_2 m_2|JM)^* (j_1 m_1 j_2 m_2|J'M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \end{aligned}$$

Del mismo modo de la ortonormalidad de $|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle$ y la completez de $|JM\rangle$ obtenemos:

$$\sum_{JM} (j_1 m_1 j_2 m_2|JM) (j_1 m'_1 j_2 m'_2|JM)^* = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}$$

Los CCG estan determinados hasta una fase arbitraria, en nuestro caso la elegiremos de tal modo que los CCG cartesianos sean reales (es por eso que en el capítulo 2 se prescinde totalmente de la conjugación compleja).

Lo que hemos hecho hasta ahora (desde el punto de vista de la teoría de grupos [63]) es reducir el producto de dos irreps del grupo $SO(3)$ a una suma de irreps :

$$\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{D}_J$$

Cada uno de los eigenestados $|jm\rangle$ transforma bajo una rotación de acuerdo a la representación \mathcal{D}^j . Los elementos de matriz de dicha transformación, suponiendo una transformación arbitraria D , es :

$$\mathcal{D}_{MN}^J = \langle JM|D|JN\rangle$$

Podemos relacionar las representaciones j_1, j_2 y J de cualquier rotación arbitraria \mathcal{D} utilizando CCG:

$$\mathcal{D}_{MN}^J = \langle JM|D|JN\rangle = \sum_{m_1 m_2 n_1 n_2} \langle JM|j_1 j_2 m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2 m_1 m_2|D|j_1 j_2 n_1 n_2\rangle \langle j_1 j_2 n_1 n_2|JN\rangle =$$

$$\sum_{m_1 m_2 n_1 n_2} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM)^* \mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1} \mathcal{D}_{m_2 n_2}^{j_2} (j_1 n_1 j_2 n_2 | JN)$$

Utilizando como antes el hecho de que $|JM\rangle$ forman una base completa, podemos derivar la relación inversa:

$$\mathcal{D}_{m_1 n_1}^{j_1} \mathcal{D}_{m_2 n_2}^{j_2} = \sum_{JMN} (j_1 m_1 j_2 m_2 | JM) (j_1 n_1 j_2 n_2 | JN)^* \mathcal{D}_{MN}^J \quad (\text{B.3})$$

De la relación anterior podemos derivar una relación entre los CCG cartesianos en términos de los correspondientes esféricos.

La transformación desde componentes esféricas a componentes cartesianas, puede hacerse por una transformación unitaria (ver [64]):

$$\xi = Ue$$

Donde ξ y e son una base ortogonal de vectores esféricos y cartesianos respectivamente y U una transformación unitaria. Explícitamente:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_0 \\ \xi_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Así las rotaciones de "espín" 1 ($J=1$), en cada una de las bases están relacionados por :

$$\mathcal{D} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^\dagger$$

donde \mathcal{D} es la rotación en la base esférica, \mathbf{D} en la cartesiana y $\mathbf{V} = U^*$ con U definida explícitamente en (B.4).

De los resultados anteriores obtenemos una expresión similar a (B.3) para las rotaciones en coordenadas cartesianas de "espín" 1, y de allímismo obtenemos los CCG cartesianos de la forma $(1i1j|1k)$ (con $i, j, k = 1, 2, 3$) en términos de lo CCG esféricos correspondientes:

$$\mathbf{D}_{ij}^{J_1} \mathbf{D}_{i'j'} = V_{i\mu}^\dagger \mathcal{D}_{\mu\mu'} V_{\mu'j} V_{i'\nu}^\dagger \mathcal{D}_{\nu\nu'} V_{\nu'j'} = V_{i\mu}^\dagger V_{i'\nu}^\dagger (1\mu 1\nu | JM) V_{\mu'j} V_{\nu'j'} (1\mu' 1\nu' | JN)^* \mathcal{D}_{MN}^J$$

donde $\mu, \nu, \mu', \nu', M, N = 1, 0, -1$ son índices esféricos, $i, i', j, j' = 1, 2, 3$ son cartesianos y se utilizó la relación (B.3).

La representación esférica \mathcal{D}_{MN}^J está relacionada con la cartesiana a través de una transformación unitaria:

$$\mathcal{D}_{MN}^J = V_{MK}^J \mathbf{D}_{KK'}^J V_{K'N}^{J\dagger}$$

La transformación V^J se reduce a la matriz 3×3 ya mencionada cuando $J = 1$. Utilizando la relación anterior obtenemos entonces:

$$\mathbf{D}_{\nu_j} \mathbf{D}_{\nu'_j} = V_{\nu\mu}^\dagger V_{\nu'\nu}^\dagger (1\bar{1}1s|JM) V_{MK}^J \times V_{\mu'j} V_{\nu'j'} (1\mu'1\nu'|JN)^* V_{K'N}^J \times \mathbf{D}_{kk'}$$

Por otro lado la relación entre dos representaciones cartesianas de orden diferente está dada por una expresión similar a (B.3), con la diferencia de que los CCG son ahora cartesianos.

$$\mathbf{D}_{\nu_j} \mathbf{D}_{\nu'_j} = (1\bar{1}1\nu'|JK)(1\bar{1}1\nu'|JK') D_{kk'}^J$$

Comparando con lo obtenido anteriormente tenemos finalmente que:

$$(1\bar{1}1\nu'|JK) = V_{\nu\mu}^\dagger V_{\nu'\nu}^\dagger V_{MK}^J (1\mu 1\nu|JM) \quad (\text{B.5})$$

sin suma sobre J

En el caso particular de $J = 1$ calculamos los CCG cartesianos utilizando los CCG esféricos que resultan de acoplar a 1 dos espines 1. Escogiendo la fase adecuadamente estos CCG esféricos son:

		(1\mu 1\nu 1M)							
$M \setminus \mu\nu$	(11)	(10)	(1-1)	(01)	(00)	(0-1)	(-11)	(-10)	(-1-1)
1	0	$-i/\sqrt{2}$	0	$\nu/\sqrt{2}$	0	0	0	0	0
0	0	0	$-\nu/\sqrt{2}$	0	0	0	$i/\sqrt{2}$	0	0
-1	0	0	0	0	0	$-i/\sqrt{2}$	0	$i/\sqrt{2}$	0

La forma explícita de las matrices V para el caso $J = 1$:

$$V^\dagger = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -\nu/\sqrt{2} & 0 & -\nu/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & \nu/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & \nu/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Así con los CCG esféricos y la forma explícita de V y V^\dagger pueden calcularse directamente los CCG cartesianos utilizando (B.5). El resultado final es:

$$(1\bar{1}1\nu'|1K) = \frac{\epsilon_{\nu'k}}{\sqrt{2}}$$

con $\nu, \nu', K = 1, 2, 3$.

B.3 $F^{ij} = \tilde{F}^{ij}$, caso ρ_k 's ctes.

Partimos de la ecuación (2.27) y de la reescritura del término dependiente de g , con lo cual tenemos que la condición $F^{ij} = \tilde{F}^{ij}$ es:

$$\begin{aligned} F_a^{ij} &= \Delta_{ka} \left\{ \rho_k \left((\partial_i \Theta_{kk'}) D_{k'j} - (\partial_j \Theta_{kk'}) D_{k'i} \right) + \rho_{k'} \left((\partial_i \Phi_{kk'}) D_{k'j} - (\partial_j \Phi_{kk'}) D_{k'i} \right) \right\} \\ &\quad - g \sqrt{2} \rho_k \rho_{k'} (1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p') D_{pp'}^\lambda \Delta_{qa} = \\ \tilde{F}_a^{ij} &= \epsilon^{ijm} F_a{}_{0m} = \epsilon^{ijm} (\rho_k \partial^0 \Theta_{kk'} D_{k'm} \Delta_{ka} + \rho_{k'} D_{km} \partial^0 \Phi_{kk'} \Delta_{k'a}) = \\ &\quad \epsilon^{ijm} \Delta_{ka} (\rho_k \partial_0 \Theta_{kk'} D_{k'm} + \rho_{k'} D_{k'm} \partial_0 \Phi_{k'k}) \end{aligned}$$

En la última de las igualdades simplemente intercambiamos índices mudos. Utilizamos ahora la condición color cero que implica (suponiendo $f(X^i) = 0$):

$$\Phi_{kk'} = \frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \Theta_{kk'}$$

Sustituyendo esto en la condición obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{ka} \left\{ \rho_k [\partial_i \Theta_{kk'} D_{k'j} - \partial_j \Theta_{kk'}] + \rho_{k'} \left[\frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \partial_i \Theta_{k'k} D_{k'j} - \frac{2\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \partial_j \Theta_{k'k} D_{k'i} \right] \right\} \\ - g \sqrt{2} \rho_k \rho_{k'} (1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p') D_{pp'}^\lambda \Delta_{qa} = \\ \epsilon^{ijm} \Delta_{ka} \left(\rho_k \partial_0 \Theta_{kk'} D_{k'm} + 2\rho_{k'} D_{k'm} \frac{\rho_k \rho_{k'}}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \partial_0 \Theta_{k'k} \right) \end{aligned}$$

Factorizando se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta_{ka} \rho_k \left(1 - \frac{2\rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \right) \left\{ \partial_i \Theta_{kk'} D_{k'j} - \partial_j \Theta_{kk'} D_{k'i} \right\} \\ - g \sqrt{2} \rho_k \rho_{k'} (1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p') D_{pp'}^\lambda \Delta_{qa} = \\ \epsilon^{ijm} \Delta_{ka} \rho_k \partial_0 \Theta_{kk'} D_{k'm} \left(1 - \frac{2\rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \right) \end{aligned}$$

En el último paso se ha usado la antisimetría de $\partial_0 \Theta_{kk'} = -\partial_0 \Theta_{k'k}$.

De la última expresión reordenando términos obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \Delta_{ka} \rho_k \frac{\rho_k^2 - \rho_{k'}^2}{\rho_k^2 + \rho_{k'}^2} \left\{ \partial_i \Theta_{kk'} D_{k'j} - \partial_j \Theta_{kk'} D_{k'i} - \epsilon^{ijm} \partial_0 \Theta_{kk'} D_{k'm} \right\} = \\ g \sqrt{2} \rho_k \rho_{k'} (1k1k'|1q)(1k1k'|\lambda p)(1i1j|\lambda p') D_{pp'}^\lambda \Delta_{qa} \end{aligned}$$

B.4 B_a^k , cálculo complementario al capítulo 2

Para encontrar la transformación del campo cromomagnético al sistema intrínseco partimos de la definición del campo cromomagnético en términos del tensor de campo (ec. 2.46) y sustituimos en ella la ecuación (2.14):

$$B_a^k = -\frac{1}{2}\epsilon^{kij}F_a{}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon^{kij}\left\{\Delta_{ma}[D_{mj}\partial_i\rho_m - D_{mi}\partial_j\rho_m + \rho_m(\partial_i\Theta_{mm'}D_{m'j} - \partial_j\Theta_{mm'}D_{m'i}) + \rho_m(\partial_i\Phi_{m'm}D_{m'j} - \partial_j\Theta_{m'm}D_{m'i})] - g\epsilon_{bca}D_{mi}D_{m'j}\Delta_{mb}\Delta_{m'c}\rho_m\rho_{m'}\right\}$$

El último de los términos entre corchetes es el mismo que el de la ecuación (2.28) que como vimos es igual a la expresión (2.33), es decir:

$$\begin{aligned} & -g\epsilon_{bca}D_{mi}D_{m'j}\Delta_{mb}\Delta_{m'c}\rho_m\rho_{m'} = \\ & -\frac{1}{2}g\rho_m\rho_{m'}\epsilon_{mm'q}\epsilon_{mm'p'}\epsilon_{ijp}D_{pp'}\Delta_{qa} \end{aligned}$$

En este caso el término anterior esta contraído con $-\frac{1}{2}\epsilon^{kij}$, lo que dá:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}g\epsilon^{kij}\epsilon_{ijp}\rho_k\rho_{k'}\epsilon_{kk'q}\epsilon_{kk'p'}D_{p'p}\Delta_{qa} = \\ & \frac{1}{2}g\delta_{kp}\rho_k\rho_{k'}\epsilon_{kk'q}\epsilon_{kk'p'}D_{p'p}\Delta_{qa} = \frac{g}{2}\epsilon^{nn'm}\epsilon^{nn'b}\rho_n\rho_{n'}D_{mk}\Delta_{ba} \end{aligned}$$

en el último paso se hizo un cambio de índices mudos.

Se puede explotar más el intercambio de índices mudos. Así podemos escribir el siguiente término:

$$\begin{aligned} \epsilon^{kij}\Delta[D_{mj}\partial_i - D_{mi}\partial_j]\rho_m &= \Delta_{ma}(\epsilon^{kij}D_{mj}\partial_i\rho_m - \epsilon^{kij}D_{mi}\partial_j\rho_m) = \\ & \Delta_{ma}(\epsilon^{kij}D_{mj}\partial_i\rho_m + \epsilon_{kji}D_{mi}\partial_j\rho_m) \end{aligned}$$

Pero como i y j son índices mudos lo anterior es:

$$2\Delta_{ma}D_{mj}\partial_i\rho_m\epsilon_{kij}$$

Del mismo modo los otros términos son:

$$\epsilon^{kij}\rho_m(\partial_i\Theta_{mm'}D_{m'} - \partial_j\Theta_{mm'}D_{m'i}) = 2\Delta_{ma}\rho_m\epsilon_{kij}\partial_i\Theta_{mm'}D_{m'j'}$$

Y el término restante:

$$\epsilon^{kij} \rho_m (\partial_i \Phi_{m'm} D_{m'j} - \partial_j \Phi_{m'm} D_{m'i}) = 2\delta_{ma} \rho_m \partial_i \Phi_{m'm} D_{m'j} \epsilon^{kij}$$

Reuniendo todos los resultados anteriores tenemos que:

$$B_a^k = \epsilon^{kij} (D_{mi} \partial_j \rho_m + \rho_m \partial_j \Theta_{mm'}) D_{m'i} + \rho_m \partial_j \Phi_{m'm} D_{m'i} + \frac{g}{2} \epsilon^{nn'm} \epsilon^{nn'b} \rho_n \rho_n' D_{nk} \Delta_{ba}$$

Factorizando en lo anterior $D_{m'i}$ y cambiando en el primer sumando los índices mudos $m \mapsto b$ y $m' \mapsto m$ tenemos que:

$$B_a^k = h_{mb} D_{mk} \Delta_{ba} = \epsilon^{kij} \Delta_{ba} D_{mi} (\delta_{bm} \partial_j \rho_b + \rho_b \partial_j \Theta_{bm} + \rho_b \partial_j \Phi_{mb}) + \frac{g}{2} \epsilon^{nn'm} \epsilon^{nn'b} \rho_n \rho_n' D_{mk} \Delta_{ba}$$

Con lo cual casi tenemos ya la transformación del campo cromomagnético al sistema intrínseco. Esta labor continúa y se termina en el capítulo 2.

B.5 Otras condiciones para las coord. hiperesféricas

En este apéndice se muestran otras condiciones para los campos hiperesféricos que implican un campo cromomagnético intrínseco y uno cromoelectrico nulo ($h_{ik} = \delta_{i3} \delta_{k3} h$ y $e_{i3} = 0$). En todas se supone ρ_k 's constantes y el campo cromomagnético dirigido en la dirección (33) intrínseca. Las condiciones para los campos Φ pueden obtenerse de la condición color cero (2.25). La barra sobre la parciales indica que la derivación es respecto a las coordenadas del sistema intrínseco ($\bar{Z}_i = D_{ij} Z_j$).

1.- Suposición : $\bar{\partial}_\mu \Theta_{mb} = 0$

Resultado: $\rho_3 = 0$ $g\rho_1\rho_2 = h$

2.-Suposición: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

Resultado: $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

3.- Suposición: $\rho_3 = 0$, $\rho_1 \neq \rho_2$, ρ_1 y $\rho_2 \neq 0$

Resultado:

$$\begin{array}{llll} g\rho_1\rho_2 = h & & & \\ \bar{\partial}_0 \Theta_{12} = 0 & \bar{\partial}_1 \Theta_{12} = 0 & \bar{\partial}_2 \Theta_{12} = 0 & \bar{\partial}_3 \Theta_{12} = -\frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \bar{\partial}_1 \Theta_{32} \\ \bar{\partial}_0 \Theta_{31} = 0 & \bar{\partial}_1 \Theta_{31} = 0 & \bar{\partial}_2 \Theta_{31} = \bar{\partial}_1 \Theta_{32} = 0 & \bar{\partial}_3 \Theta_{31} = \text{libre} \\ \bar{\partial}_0 \Theta_{32} = 0 & \bar{\partial}_1 \Theta_{32} = \bar{\partial}_1 \Theta_{31} & \bar{\partial}_2 \Theta_{32} = 0 & \bar{\partial}_3 \Theta_{32} = \text{libre} \end{array}$$

4.- Suposición $\rho_3 = 0$ $\rho_1 = \rho_2$, ρ_1 y $\rho_2 \neq 0$

Resultado:

$$g\rho_1^2 = g\rho_2^2 = h$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{12} = \text{libre}$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{31} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad \bar{\partial}_3 \Theta_{31} = \text{libre}$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{32} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad \bar{\partial}_3 \Theta_{32} = \text{libre}$$

5.-Suposición: $\rho_3 = \rho_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$ todos los $\rho_k \neq 0$

Resultado:

$$g \frac{\rho_3}{\rho_1} (\rho_1^2 - \rho_2^2) + g\rho_1\rho_2 = h$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{12} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2) \quad \bar{\partial}_3 \Theta_{12} = g\rho_1 \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_2 - \rho_1)^2}$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{31} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 3) \quad \bar{\partial}_2 \Theta_{31} = g \frac{\rho_3^2 - \rho_1^2}{\rho_1(\rho_3 - \rho_1)^2}$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{32} = \text{libre} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

6.-Suposición: $\bar{\partial}_i \Theta_{32} = 0$, $\rho_k \neq 0$, $\rho_i \neq \rho_j$ ($i \neq j$)

Resultado

$$g \frac{\rho_3}{\rho_1 \rho_2} (\rho_1^2 - \rho_2^2) + g\rho_1\rho_2 = h$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{i3} = 0$$

con la excepción de:

$$\bar{\partial}_2 \Theta_{31} = \frac{g\rho_3}{\rho_1 \rho_2} \frac{(\rho_3^2 + \rho_1^2)(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(\rho_3 - \rho_1)^2}$$

$$\bar{\partial}_3 \Theta_{12} = \frac{g\rho_1\rho_3}{\rho_2} \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2}$$

7.- Suposición: $\rho_2 = 0$

Resultado:

$$\rho_1 = 0 \quad \rho_3 \neq 0 \quad \rho_3(\partial_1 \Theta_{32} - \bar{\partial}_2 \Theta_{31}) = h$$

$$\bar{\partial}_\mu \Theta_{12} = \text{libre} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

$$\bar{\partial}_0 \Theta_{31} = 0$$

$$\bar{\partial}_1 \Theta_{31} = \text{libre}$$

$$\bar{\partial}_2 \Theta_{31} = \bar{\partial}_1 \Theta_{32} - \frac{h}{\rho_3} \quad \bar{\partial}_3 \Theta_{31} = 0$$

$$\bar{\partial}_0 \Theta_{32} = 0$$

$$\bar{\partial}_1 \Theta_{32} = \bar{\partial}_2 \Theta_{31} + \frac{h}{\rho_3}$$

$$\bar{\partial}_2 \Theta_{32} = \text{libre} \quad \bar{\partial}_3 \Theta_{32} = 0$$

Apéndice C

C.1 Función de Bessel asintótica

En el presente apéndice derivamos el comportamiento asintótico de la función de Bessel de orden integral cero cuando $x \rightarrow \infty$ (ó $\Delta \rightarrow 0$ con $x = \Delta^{-1}$). En los libros de texto aparece comunmente el comportamiento asintótico pero despreciando los términos que van como x^{-1} (ó Δ). En nuestro caso, la aproximación debe llegar hasta términos de un orden más alto ya que la función de Bessel aparece dentro de una integral de Feynman y los términos de orden más alto que van como Δ (ó x^{-1}) cuando se toma el límite se convierten en la diferencial de integración. Los término de orden mayor Δ^2 (x^{-2}), por otro lado, se anulan aún dentro de la integral.

El comportamiento asintótico general de la funciones de Bessel es [83]:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m)}{(2x)^{2m}} - \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\nu, 2m+1)}{(2x)^{2m+1}} \right] \quad (\text{C.1})$$

con los parentesis:

$$(\nu, p) = \frac{\{4\nu^2 - 1\} \{4\nu^2 - 3^2\} \dots \{4\nu^2 - (2p-1)^2\}}{2^{2pp}!}$$

En nuestro caso $\nu = 0$. Las sumatorias que aparecen en la expansión son entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^{2m} (1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2(2m)-1)^2)}{2^{4m} (2m)! (2x)^{2m}} &= \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2(2m)-1)^2)}{(2m)! (8x)^{2m}} &\approx \cos\left(\frac{1}{8x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (-1)^{2m+1} (1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2(2m+1) - 1)^2)}{2^{2(2m+1)} (2m+1)! (2x)^{2m+1}} =$$

$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (1 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2(2m+1) - 1)^2)}{(2m+1)! (8x)^{2m+1}} \approx -\text{sen}\left(\frac{1}{8x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right)$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la expresión para la función de Bessel asintótica (C.1), se tiene:

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{1}{8x}\right) + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{1}{8x}\right) \right]$$

de donde finalmente obtenemos que:

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8x}\right) \right]$$

cuando $x \rightarrow \infty$.

C.2 Energía cinética en coordenadas hiperesféricas

En este apéndice se calcula la energía cinética de los campos de norma en función de los momentos conjugados a los campos hiperesféricos a partir de los resultados obtenidos en la ref. [75] :

$$2T = \sum_{i,a} \partial_0 A_{ia} \partial_0 A_{ia} = \sum_k \dot{q}^2 + \sum_k \rho_k^2 \left(\sum_t \omega_{kt}^2 + \sum_t \Omega_{kt}^2 \right) - 2 \sum_{kt} \rho_k \rho_t \omega_{kt} \Omega_{kt}$$

Donde $\omega_{kt} = \partial_0 \Theta_{kt}$ y $\Omega_{kt} = \partial_0 \Phi_{kt}$. Los momentos conjugados se obtiene facilmente derivando T respecto a las derivadas temporales:

$$P_{\rho_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}_k} = \dot{\rho}_k$$

$$P_{\Theta_{kt}} \equiv L_{kt} = \frac{\partial T}{\partial \omega_{kt}} = (\rho_k^2 + \rho_t^2) \omega_{kt} - 2\rho_k \rho_t \Omega_{kt}$$

$$P_{\Phi_{kt}} \equiv \mathcal{L}_{kt} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_{kt}} = (\rho_k^2 + \rho_t^2) \Omega_{kt} - 2\rho_k \rho_t \omega_{kt}$$

Despejando ω y Ω obtenemos:

$$\omega_{kt} = \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2) L_{kt} + 2\rho_k \rho_t \mathcal{L}_{kt}}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2}$$

$$\Omega_{kt} = \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2) \mathcal{L}_{kt} + 2\rho_k \rho_t L_{kt}}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2}$$

Sustituyendo en la parte correspondiente de la energía cinética obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_k \rho_k^2 \left(\sum_t \omega_{kt}^2 + \sum_t \Omega_{kt}^2 \right) - 2 \sum_{kt} \rho_k \rho_t \omega_{kt} \Omega_{kt} = \\
& \sum_{kt} \left\{ \frac{\rho_k^2}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left[[\rho_k^4 + 6\rho_k^2 \rho_t^2 + \rho_t^4] [L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2] + 8\rho_k \rho_t (\rho_k^2 + \rho_t^2) L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \right] \right. \\
& \left. - \frac{2\rho_k \rho_t}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left[[\rho_k^4 + 6\rho_k^2 \rho_t^2 + \rho_t^4] L_{kt} \mathcal{L}_{kt} + 2\rho_k \rho_t (\rho_k^2 + \rho_t^2) (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) \right] \right. = \\
& \sum_{kt} \frac{1}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left\{ (\rho_k^6 + 6\rho_k^4 \rho_t^2 + \rho_k^2 \rho_t^4 - 4\rho_k^4 \rho_t^2 - 4\rho_k^2 \rho_t^4) (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + \right. \\
& \quad \left. (8\rho_k^5 \rho_t + 8\rho_k^3 \rho_t^3 - 2\rho_k^5 \rho_t - 12\rho_k^3 \rho_t^3 - 2\rho_k \rho_t^5) L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \right\} = \\
& \sum_{kt} \frac{1}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left\{ (\rho_k^6 + 2\rho_k^4 \rho_t^2 - 3\rho_k^3 \rho_t^4) (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 2\rho_k \rho_t (3\rho_k^4 - 2\rho_k^2 \rho_t^2 - \rho_t^4) L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \right\} \tag{C.2}
\end{aligned}$$

Si intercambiamos los índices de la sumatoria y la agregamos a la sumatoria anterior tendremos dos veces esa sumatoria es decir:

$$\sum_{kt} S_{kt} = \frac{1}{2} \left(\sum_{kt} S_{kt} + \sum_{kt} S_{tk} \right)$$

Haciendo esto con (C.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{kt} \frac{1}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left\{ \frac{1}{2} (\rho_k^6 - \rho_k^4 \rho_t^2 - \rho_k^2 \rho_t^4 + \rho_t^6) (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + \rho_k \rho_t (2\rho_k^4 - 4\rho_k^2 \rho_t^2 + 2\rho_t^4) L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \right\} = \\
& \sum_{kt} \frac{1}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^4} \left\{ (\rho_k^2 - \rho_t^2)^2 (\rho_k^2 + \rho_t^2)^2 (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 2\rho_k \rho_t (\rho_k^2 - \rho_t^2)^2 L_{kt} \mathcal{L}_{kt} \right\}
\end{aligned}$$

De donde finalmente:

$$\frac{1}{2} \sum_{kt} \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2)}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 2 \sum_{kt} \frac{\rho_k \rho_t}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} L_{kt} \mathcal{L}_{kt}$$

Agregando el término dependiente de $\dot{\rho}_k$, la energía cinética es:

$$2T = \sum_k \dot{\rho}_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{kt} \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2)}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 2 \sum_{kt} \frac{\rho_k \rho_t}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} L_{kt} \mathcal{L}_{kt}$$

Podemos expresar lo anterior de otro modo aprovechando que $\sum_{kt} P_{kt} = 2 \sum_{k < t} P_{kt}$:

$$2T = \sum_k \dot{\rho}_k^2 + \sum_{k < t} \frac{(\rho_k^2 + \rho_t^2)}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} (L_{kt}^2 + \mathcal{L}_{kt}^2) + 4 \sum_{k < t} \frac{\rho_k \rho_t}{(\rho_k^2 - \rho_t^2)^2} L_{kt} \mathcal{L}_{kt}$$

Del resultado anterior podremos obtener facilmente el Jacobiano de la transformación a coordenadas hipersféricas.

Apéndice D

D.1 Conjugación de Carga de los estados con escalares de Color

Para la clasificación de los estados obtenidos en el capítulo 4 se obtuvo que las propiedades de Paridad estaban dadas por los números cuánticos correspondientes al grupo $O(8)$. De igual modo se vió que los estados acoplados a color cero pueden expresarse como producto de los llamados epd's y que la propiedad C de cada estado está dada por el producto de las propiedades C de los epd's a partir de los cuales se expresa. Así conociendo la propiedad de carga de cada epd podemos conocer la de todos los estados de color cero.

Consideremos el ejemplo de un polinomio de orden dos acoplado a color cero:

$$d_{abc}f_{ade}[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{L_1} \times [b_d^\dagger \times b_e^\dagger]^{L_2}]_M^L \quad (\text{D.1})$$

Las propiedades C del anterior polinomio estan dadas por las de los operadores de creación gluónicos de acuerdo al índice de color. Denotando este valor por η_a obtenemos que la conjugación de carga del polinomio anterior es:

$$(\eta_a \eta_b \eta_c d_{abc})(\eta_a \eta_d \eta_e f_{ade})[[b_b^\dagger \times b_c^\dagger]^{L_1} \times [b_d^\dagger \times b_e^\dagger]^{L_2}]_M^L \quad (\text{D.2})$$

donde agregamos $\eta_a^2 = 1$

Con los valores de η_a dados en la ec.(4.5) y aplicando a cada una de las constantes antisimétricas f_{ade} enlistadas en el apéndice A.1, encontramos que:

$$(\eta_a \eta_d \eta_e f_{ade}) = f_{ade}$$

Haciendo lo mismo para las constantes simétricas d_{abc} enlistadas en el apéndice A.1 encontramos que:

$$(\eta_a \eta_b \eta_c d_{abc}) = -d_{abc}$$

Así puesto que las constantes f no cambian de signo y las d sí, las propiedades de conjugación de carga del polinomio (y en general de cualquiera acoplado a color cero) están dadas por el número de veces que en él aparecen constantes d_{abc} . Denotando este número por n_C la propiedad de conjugación de Carga del epd será:

$$C = (-1)^{n_C}$$

Referencias

- [1] Aristoteles "Física", Ed. Gredos (1995).
- [2] Edward Grant [tr. Adalberto Weinberger] "La ciencia física en la edad media", Breviarios del Fondo de Cultura Económica, 1a Edición, México (1983).
- [3] Galileo Galilei [tr. (al inglés) Stillman Drake] "Dialogue Concerning the Two Chief World Systems", University of California Press, 2a edición, Los Angeles (1967).
- [4] T.D. Lee " Particle Physics and introduction to Field Theory", en Contemporary Concepts in Physics, harwood academic publishers (1981).
- [5] H.B.G.Casimir, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap Proc.* **51** (1948), 793.
- [6] Stephen F, Mason [tr. Carlos Solís Santos] "Historia de las Ciencias, tomo 3: La Ciencia del siglo XVIII", Alianza Editorial, 1a edición, México (1988).
- [7] N. Papanicolau, *Phys. Rep.* **24C** No. 4 (1976), 229.
- [8] G.K. Savvidy, *Phys Lett* **B77** (1977), 133
- [9] J.D. Bjorken S D. Drell "Relativistic Quantum Fields", Mc Graw-Hill (1965).
- [10] N.N. Bogoliubov "Introduction to the Theory of Quantized Fields, 3a Edición, John Wiley and sons, Nueva York (1980).
- [11] E Noether, *Göttinger Nachrichtung* **5** (1918), 235.
- [12] F. Bloch y A. Nordsieck, *Phys Rev.* **52** (1937), 54.

- [13] R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367; *Phys. Rev.* **74** (1948), 939 y 1430; *ibid.* **76** (1949), 749 y 769 ; *ibid.* **80** (1950), 440.
- [14] R.P. Feynman, "QED the strange theory about light and matter", Princeton University Press, Nueva Jersey (1988).
- [15] Heisenberg W. en A.I. Miller, "Early Quantum Electrodynamics", Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [16] W.E. Lamb and R.C. Retherford, *Phys. Rev.* **72** (1947), 241.
- [17] E.A. Uehling, *Phys. Rev* **48** (1935), 55.
- [18] F.J. Dyson, *Phys. Rev* **75** (1949), 486 y 1736.
- [19] L.P. Fulcher, J. Rafelski y A. Klin, *Scient. Am.* **241** (1979), 6,120.
- [20] I.J.R. Atichison, *Contemp. Phys.* **26** No. 4 (1985), 333.
- [21] G. t' Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971), 173; *ibid* **B35** (1971), 167.
- [22] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964), 214.
- [23] V.E Barnes et al., *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964), 8.
- [24] S. Okubo, *Prog. Theor. Phys.* **27** (1962), 949
- [25] O.W. Greenberg y A. Nelson, *Phys. Rep.* **32C** (1977), 71.
- [26] S.L. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani, *Phys Rev* **D2** (1970), 1285.
- [27] J.E. Augustin et al., *Phys Rev Lett* **33** (1974),1406.
- [28] J.J. Aubert et al., *Phys Rev Lett* **33** (1974), 1404.
- [29] S.W. Herb et al, *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977), 252.
C.W. Darden et al, *Phys. Lett.* **76B** (1978), 246; *ibid* **78B** (1978), 364.
J.L. Rosner, C. Quigg y H.B. Tacker, *Phys. Lett.* **74B** (1978), 350.
- [30] CDF Colaboración, F. Abe et al., *Phys. Rev.D* **50** (1994), 2966; *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994), 225.
D0 colaboración, S. Abache et al., *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995), 2422.

- [31] D.J. Gross y F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1343; *Phys. Rev. D* **8** (1973), 3633.
- [32] H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973), 1346.
- [33] E.D. Bloom et al., *Phys Rev Lett* **23** (1969), 930.
- [34] R.P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 1415.
- [35] J.D. Bjorken y E.A. Paschos, *Phys. Rev.* **158** (1969), 1975.
- [36] H. Sagawa et al., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988), 93.
- [37] Hansen et al., *Phys. Rev. Lett.* **35** (1975), 1609.
- [38] MARK J colaboración: D.P. Barber et al., *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979), 830.
- [39] A. Chodos, R.L. Jaffe, K. Johnson, C.B. Thorn y V.F. Weisskopf, *Phys. Rev. D* **9** (1974), 3471.
- [40] R.J. Hughes, *Nucl. Phys. B* **186** (1981), 376.
- [41] N.K. Nielsen, *Am. J. Phys.* **49** (1981), 1171.
- [42] W. Dittrich y M. Reuter, *Phys. Lett.* **128B** No. 5 (1983), 321.
- [43] P.O. Hess y J.C. López, *J. Math. Phys.* **36**(3) (1995), 1123.
- [44] T.H. Hanson, K. Johnson y C. Peterson, *Phys. Rev. D* **26** (1982), 2069.
- [45] S.L. Adler y T. Piran, *Phys. Lett* **113B** (1982), 405.
- [46] E.V. Shuryak, *Phys. Rep.* **115** (1984), 151.
- [47] M. Reuter y C. Wetterich, *Phys. Lett.* **334B** (1994), 412.
- [48] O. Castaños, A. Frank, E. Chacón, P. O. Hess and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* **23** (1982), 2537
- [49] A. Ya. Dzublik, V. I. Ovcharenko, A. I. Steshenko y G. F. Filippov, *Yad. Fiz.* **15** (1972), 487 [*Sov. J Nucl. Phys.* **15** (1972), 487
W. Zickendraht, *J. Math. Phys.* **10** (1969), 30; *ibid* **12** (1971), 1663.

- [50] S.F. Edwards e Y.V. Gulyavev, *Proc. Roy. Soc.* **1A279** (1964), 229.
- [51] G.S. Bali, K. Schilling, A. Hulsebos, A.C. Irving, C. Michael y P.W. Stephenson, *Phys. Lett.* **B309** (1993), 378.
- [52] M. Pearson, hep-lat/9710029 7 Oct. (1997)
- [53] C.N. Yang y R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954), 191.
- [54] S.H. Neddermayer y C.D. Anderson, *Phys. Rev.* **51** (1937), 884.
- [55] H. Yukawa, *Proc. Physico-Math. Soc. Japón* **17** (1935), 48; *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949), 474.
- [56] M.L. Perl et al., *Phys Rev. Lett.* **73B** (1978), 109.
- [57] R.N. Cahn y G. Goldhaber, "The experimental foundations of particle Physics", Cambridge University Press (1991), capítulo 5.
- [58] W. Heissenberg, *Zeitschrift für Physik* **77** (1932), 1.
- [59] A. Pais y R. Jost, *Phys. Rev.* **87** (1952), 871.
- [60] T. Nakano y K. Nishijima *Prog. theoret. Phys.* **10** (1953), 581.
M. Gell-Man, *Phys. Rev.* **82** (1953), 833.
- [61] K. Huang "Quarks, Leptons and gauge fields", World Scientific, Singapur (1992).
- [62] M. Hamermesh, "Group Theory and its Application to Physical Problems", Dover Publications, New York (1989).
- [63] D.M. Brink y G.R. Satchler. "Angular Momentum", 3a edición, Clarendon Press, Oxford (1993).
- [64] W. Greiner y B. Müller, "Quantum Mechanics Symetries", Springer Verlag, (1989).
- [65] F Gurse y L.A. Radicati, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 173.
- [66] B. Sakita, *Phys. Rev.* **136** (1964), B1756.
- [67] O.W. Greenberg *Phys. Rev. Lett* **13** (1964), 598.

- [68] M.Y. Han y Y. Nambu, *Phys Rev.* **139** (1965), B1006
- [69] M. Gell-Mann, *Acta Phys. Austriaca* Supp. 9 (1972), 733.
- [70] J.C. Pati y A. Salam, *Phys. Rev. D* **8** (1973), 1240.
- [71] H.J. Lipkin, *Phys. Rev. D* **7** (1973), 1850.
- [72] R.N. Mohaparta, *Lett. Nuovo Cimento* **6** (1973), 53.
- [73] W. Greiner y A. Schäfer “Quantum Chromodynamics”, Springer Verlag, (1994).
- [74] J. Ambjorn y P. Olesen, *Nucl. Phys* **B170** (1980), 60.
- [75] Tesis profesional del estudiante Alfonso Flores (Fac. de Ciencias, UNAM), México (1998).
- [76] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz y Y.S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59** (1975), B85.
- [77] G. t’Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976), 8.
- [78] A. R. Edmonds, “Angular Momentum in Quantum Mechanics”, Princeton University Press, New Jersey (1974).
- [79] M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B219** (1983), 233
M. Lüscher y G. Münster, *Nucl. Phys.* **B232** (1984), 445
J. Koller y P. v. Baal, *Nucl. Phys.* **B273** (1986), 387
P. v. Baal and A. Auerbach, *Nucl. Phys.* **B275** (1986), 93
P. v. Baal, *Nucl. Phys.* **B351** (1991), 183
- [80] J. M. Eisenberg and W. Greiner, “Nuclear Theory: Nuclear Models”, 3rd edition, North-Holland, Amsterdam (1987).
- [81] R.P. Feynman y A.R. Hibbs, “Quantum Mechanics and path integrals”. Mc Graw-Hill, New York (1965).
- [82] L. de la Peña, “Introducción a la Mecánica Cuántica” en ediciones Científicas Universitarias, UNAM y FCE, México (1991).
- [83] Z.X. Wang y D.R. Guo, “Special Functions”, ed. World Scientific, Singapur (1987).

- [84] B. Podolsky, *Phys Rev.* **32** (1928), 812.
- [85] P. O. Hess y R. D. Viollier, *Phys. Rev.* **D34** (1986), 258.
- [86] R. López, P.O. Hess, P. Rochford y J.P. Draayer, *J. Phys.* **G23** (1990), L229.
- [87] B. G. Wybourne, "Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy", Wiley, New York (1969)
B. G. Wybourne, Schur-computer program, version 1.2-IBM-PC (1984)
- [88] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc.* **A245** (1958), 128 y 562.
- [89] A. Weber , "Tesis doctoral", Universidad de Heidelberg (1995).
- [90] T. Molien, *Berliner Sitzungsberichte* **11** (1898), 1152
R. Gaskell, A. Peccia y R.T. Sharp, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 727
- [91] V. Vanagas, "The Microscopic Nuclear Theory" en *Lecture Notes in Physics*, University of Toronto Press, Toronto (1977); V. Vanagas, "The Microscopic Theory of the Collective Motion in Nuclei" en *Group Theory and its Applications in Physics* (1980), editado por T.H. Seligman AIP, New York (1980), p. 220.
- [92] G.F. Filippov, V. I. Ovcharenko y Yu. F. Smirnov, *Teoría microscópica de excitaciones colectivas en el núcleo (en ruso)* Naukova Dumka, Kiev (1981).
- [93] CERN-routine Minuit, Cern library (1995)