

31  
24m



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOLENOIDES Y OTROS EJEMPLOS  
RELACIONADOS CON EL  
CONJUNTO DE CANTOR

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
M A T E M A T I C A  
P R E S E N T A :  
PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS



DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

263847



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

Solenoides y otros ejemplos relacionados con el conjunto de Cantor.

realizado por Patricia Fellicer Covarrubias

con número de cuenta 9350402-9 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Alejandro Illanes Mejía.

Propietario

Dr. Sergio Macías Alvarez.

Propietario

M. en C. José Antonio Gómez Ortega.

Suplente

M. en C. Fernando Orozco Zitli.

Suplente

M. en C. Gerardo Acosta García.

Consejo Departamental de Matemáticas

Mat. César Quevera Bravo.

---

## *Gracias a ...*

*Mi familia, muy especialmente a mi abuelo.*

*Rebeca, mi hermana menor.*

*Mis sinodales: Alejandro, Sergio, Toño, Gerardo y Fernando (Cantorcito), por su interés y apoyo en la realización de esta tesis.*

*Manuel (y Paco :]), Gerardo y Carlos, sin los cuales la elaboración de este trabajo habría tomado direcciones insospechadas.*

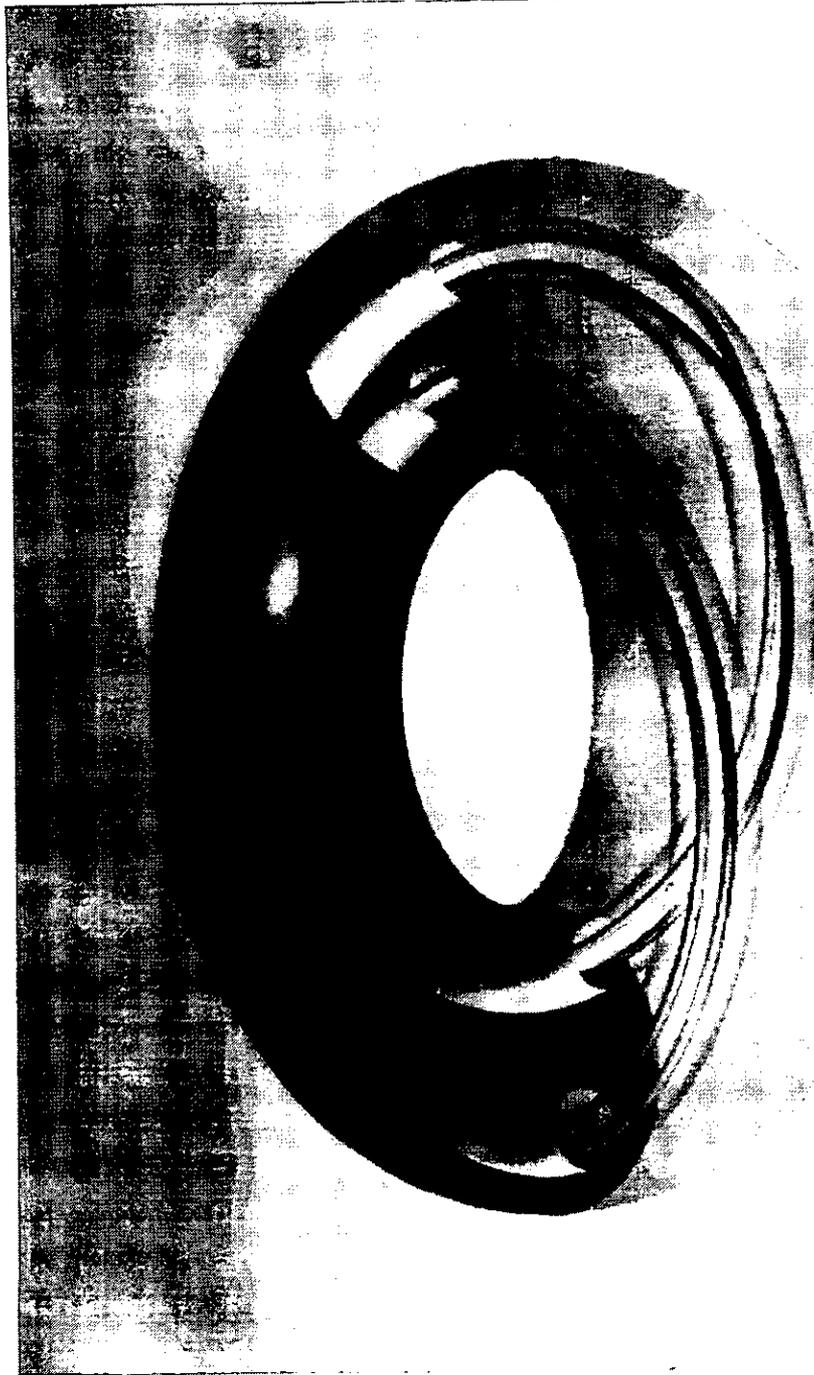
*Sébastien, l'amant des fleurs de cactus et jardins de givre.*

*Mis amigos, que están ahí (y a los que por alguna razón ya no están ... ).*

# Solenoides y otros ejemplos relacionados con el conjunto de Cantor

Patricia Pellicer Covarrubias

Julio 1998



# Índice General

Introducción	iii
Notación	viii
1 Un espacio conexo con un punto de dispersión	1
2 Universalidad de la Curva de Sierpiński	11
3 Identificaciones	32
4 Sobre los solenoides	46
5 Propiedades de compatibilidad	61
6 Compatibilidad y solenoides	70
7 Un ejemplo	84

# Introducción

El conjunto de Cantor está lleno de sorpresas, no sólo tiene más puntos de los que se merece sino que puede llenar continuamente todo el universo, bueno, puede llenar continuamente cualquier espacio métrico compacto. Bajo ese aspecto de polvo esparcido en un segmento, no deja de sorprender su aparición en muchos ejemplos de topología.

Este trabajo nació precisamente con la idea de mostrar ejemplos interesantes de topología en los que aparece. Comenzamos utilizándolo para construir un espacio conexo que tiene un punto que libera a todos los demás de sus ataduras (Capítulo 1). Después vemos una propiedad de universalidad de su hermano mayor -la curva de Sierpinski- (Capítulo 2).

El siguiente paso fue mostrar su presencia en los solenoides y ahí quedamos atrapados. Se podrían hacer varios trabajos como éste para mostrar cómo aparece, se envuelve y se retuerce en los solenoides, pero explicar esto resultaría demasiado extenso para una tesis de este estilo.

Éste es un buen momento para dar una introducción geométrica de los solenoides.

Consideremos una dona o toro sólido  $D_1$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Dentro de  $D_1$  consideremos una dona sólida  $D_2$  que le da dos vueltas a  $D_1$ . Dentro de  $D_2$ , consideremos una dona sólida  $D_3$  que le da dos vueltas a  $D_2$  y, en consecuencia, le da cuatro vueltas a  $D_1$ .

Repetimos esta construcción indefinidamente. Es decir, una vez que tenemos construida la dona  $D_n$ , construimos dentro de ella una dona sólida  $D_{n+1}$  que le da dos vueltas.

Entonces la familia  $D_1, D_2, D_3, \dots$  es una sucesión de continuos anidados, por lo que su intersección  $S = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap \dots$  también es un continuo. A  $S$  se le llama Solenoide Diádico. Se le llama así porque se construye dando vueltas dobles, aunque también se podría dar vueltas de otros órdenes y se obtendrían otros solenoides.

Veamos qué resulta de intersectar el solenoide  $S$  con un plano transversal  $P$  a la primera dona  $D_1$ .

La intersección de  $P$  con  $D_1$  resulta una unión de dos discos, la intersección de  $P$  con  $D_2$  es la unión de cuatro discos, la intersección de  $P$  con  $D_3$  es la unión de ocho discos ..., como se muestra en la figura 2.

Si los centros de dichos discos estuvieran alineados, entonces las intersecciones de  $P$  con las donas se vería como en la figura 3.

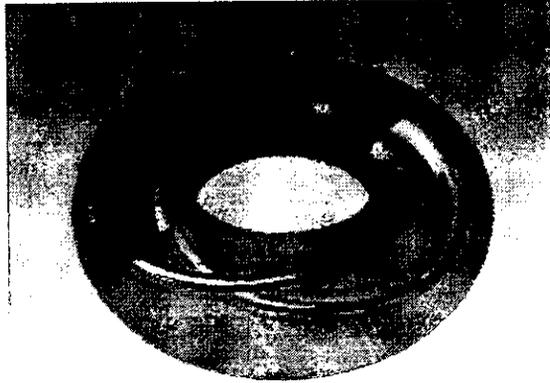


Figura 1: Solenoide

Al final, la intersección de  $P$  con  $S$  quedaría contenida en la recta  $L$ . Llamemos  $C$  a tal intersección. El conjunto  $C$  también se podría obtener intersectando  $L$  con los dos primeros discos y obteniendo un conjunto  $C_1$  que es la unión de dos intervalos.

El segundo paso sería intersectar  $L$  con los cuatro discos siguientes, obteniendo un conjunto  $C_2$  que es la unión de cuatro intervalos.

De forma similar se obtiene  $C_3$  (véase la figura 4).  
 y entonces  $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$

Esta forma de obtener a  $C$  recuerda a la construcción clásica del conjunto de Cantor y, en efecto,  $C$  es el conjunto de Cantor.

Ahora giremos el plano  $P$  sobre la dona  $D_1$ .

Figura 2:

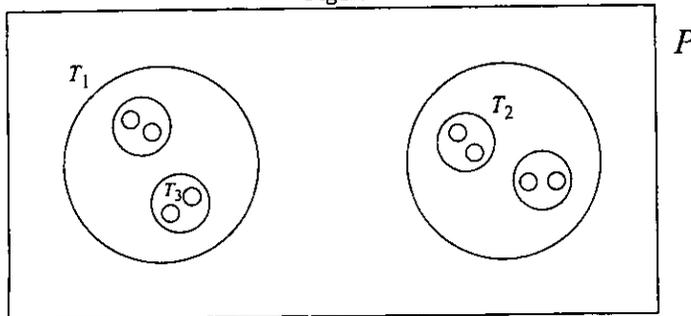


Figura 3:

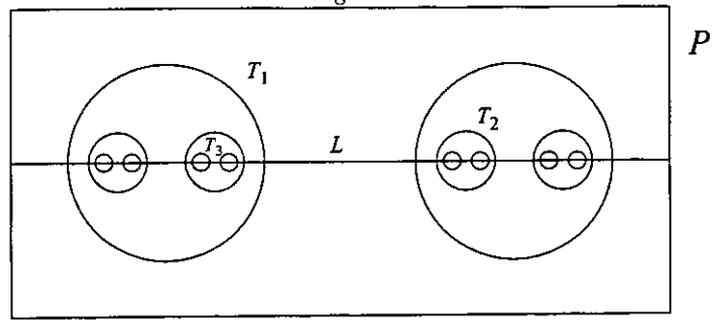
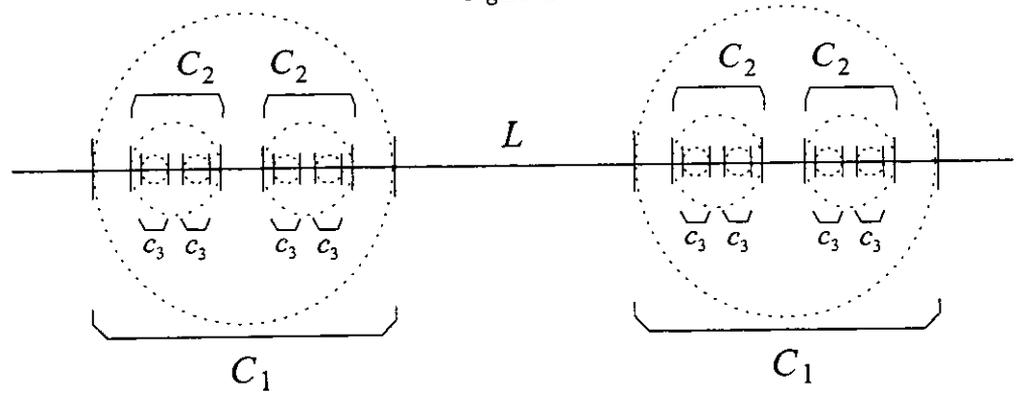


Figura 4:



Por lo que acabamos de ver, la intersección del solenoide con cada posición de  $P$  es un conjunto de Cantor, lo que sugiere que  $S$  se debe poder obtener de rotar al conjunto de Cantor apropiadamente.

Como se ve a lo largo de esta tesis, un solenoide se puede obtener tomando el espacio  $C \times I$ , donde  $C$  es el conjunto de Cantor e  $I$  es el intervalo  $[0, 1]$  y pegando la tapa  $C \times \{0\}$  con la tapa  $C \times \{1\}$  adecuadamente.

El "adecuadamente" del párrafo anterior se traduce en lo siguiente. Cada punto de la forma  $(x, 1)$  tiene que ser pegado con un punto de la forma  $(y_x, 0)$ . No cualquier  $y_x$  que tomemos resulta apropiado; por ejemplo si tomáramos  $y_x = x$ , sólo obtendríamos el espacio  $C \times S^1$ , donde  $S^1$  representa a una circunferencia, el cual no es un continuo y mucho menos un solenoide.

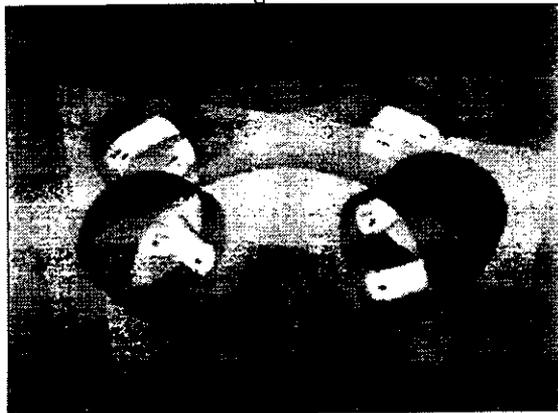
Lo que se hace es dar un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  y hacer  $y_x = f(x)$ .

En el Capítulo 3 se formaliza la idea de pegar utilizando la función  $f$ , a los espacios resultantes se les denota  $C \times I / (\sim f)$ . Además de la teoría básica de estos espacios, en el Capítulo 3 también se ve cómo pueden ser construidos en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

A base de sufrimientos milenarios, los geómetras han descubierto que no todos los problemas de geometría pueden ser tratados efectivamente utilizando sólo geometría. Afortunadamente para los solenoides hay una manera analítica de definirlos y tratarlos. La herramienta que se usa para hacer esto se llama límites inversos. En el Capítulo 4 se definen los solenoides con esta herramienta, se hace ver que constituyen un grupo topológico, se hace un corte -tomando una rebanada- en un solenoide y se ve que se obtiene un conjunto de Cantor. En este mismo capítulo se muestra que con homeomorfismos adecuados todo solenoide es de la forma  $C \times I / (\sim f)$ .

En este momento cabe preguntarse qué le podemos pedir a un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  para que el espacio  $C \times I / (\sim f)$  sea un solenoide.

Figura 5:



En el Capítulo 5 se introduce la noción de homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  compatible con una sucesión de números naturales  $n_1, n_2, n_3, \dots$ , diferentes de 1, y se ven las propiedades básicas relacionadas con este concepto.

Esta noción de compatibilidad permite contestar la pregunta planteada anteriormente. Después de desarrollar la teoría necesaria, en el Capítulo 6 se muestra que si un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  es compatible con una sucesión, entonces  $C \times I / (\sim f)$  es un solenoide.

Finalmente, en el Capítulo 7 se muestra de manera explícita un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  con el cual se puede construir un solenoide. Es interesante analizar este ejemplo en forma separada porque puede definirse de manera muy agradable, haciendo una suma apropiada en  $C$ .

La intención después del Capítulo 7 era probar el recíproco del teorema principal del Capítulo 6, es decir, queríamos ver que si un espacio de la forma  $C \times I / (\sim f)$  es homeomorfo a un solenoide entonces  $f$  es compatible con alguna sucesión. Sin embargo, los detalles de la prueba son muy técnicos y, a causa de su extensión, tuvimos que dejarlos fuera de este trabajo. El lector entusiasta puede revisar el artículo de Andrzej Gutek sobre el particular [AG].

Este trabajo está pensado para que pueda ser leído por alguien con conocimientos básicos de topología.

# Notación

A continuación introducimos ciertas notaciones y definiciones que se utilizarán a lo largo de este trabajo:

(i)  $I$  denotará al intervalo  $[0, 1]$ , asimismo  $C$  denotará al conjunto de Cantor en el intervalo  $I$ .

(ii)  $\mathbb{R}^\infty$  representará un producto numerable de copias de  $\mathbb{R}$ , es decir,

$$\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots$$

(iii) Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $x \in X$  y  $\varepsilon > 0$ . Por  $B(x, \varepsilon)$  entenderemos la bola de radio  $\varepsilon$  alrededor de  $x$ , es decir,

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

(iv) Dados un espacio  $X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y una función  $f : X \rightarrow X$ , denotaremos como  $f^n$  la  $n$ -ésima iteración de  $f$ :

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \text{ (n veces)}.$$

(v) Sean  $X$  un espacio topológico y  $x \in X$ . Definimos la casicomponente de  $x$  en  $X$  como la intersección de los subconjuntos de  $X$ , que son abiertos y cerrados, y que contienen a  $x$ .

(vi) Por un continuo entenderemos un espacio métrico, compacto y conexo.

## Capítulo 1

# Un espacio conexo con un punto de dispersión

En este capítulo discutiremos un subespacio  $X$ , del plano, muy particular. Se trata de un espacio conexo, pero que tiene un punto privilegiado  $p$  tal que  $X \setminus \{p\}$  es totalmente desconexo. Además  $X \setminus \{p\}$  no es de dimensión cero.

La motivación de este ejemplo es la siguiente: es un resultado conocido que todo espacio  $T_2$  de dimensión cero es totalmente desconexo (esto se probará en el Teorema 1.4), y era una interrogante si el recíproco del enunciado era cierto. El ejemplo que discutiremos en este capítulo se debe a Knaster y Kuratowski y muestra que existen espacios  $T_2$  y totalmente desconexos que no son de dimensión cero.

Para precisar lo que esto significa empecemos por las definiciones.

**Definición 1.1.** *Un espacio topológico  $Y$  se dice que es **totalmente desconexo** si para cada punto  $y \in Y$  se tiene que la componente de  $y$  en  $Y$  es  $\{y\}$ .*

**Definición 1.2.** *Dado un espacio topológico  $Y$ , un punto  $p \in Y$  es llamado un **punto de dispersión** si  $Y \setminus \{p\}$  es totalmente desconexo.*

**Definición 1.3.** *Un espacio topológico  $Y$  se dice que es de **dimensión cero** si para cada punto  $x \in Y$  y para cada abierto  $U \subset Y$  que contenga a  $x$ , podemos encontrar un abierto y cerrado  $A$  de  $Y$  tal que  $x \in A \subset U$ .*

Empezaremos por probar el siguiente:

**Teorema 1.4.** *Si un espacio  $T_2$  es de dimensión cero, entonces es totalmente desconexo.*

**Demostración.**

Sea  $X$  un espacio  $T_2$  de dimensión cero y supongamos que no es totalmente desconexo, es decir,  $X$  tiene una componente no degenerada, a la que llamaremos  $Z$ .

Sean  $x, z \in Z$  con  $x \neq z$ .

Como  $X$  es  $T_2$  podemos hallar un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $z \in U$  y  $x \in (X \setminus U)$ .

Por hipótesis  $X$  es de dimensión cero, así que dentro de  $U$  podemos hallar un subconjunto  $A$  de  $X$ , que contenga a  $z$  y que sea abierto y cerrado en  $X$ .

De acuerdo a lo anterior  $A \cap Z$  es un abierto y cerrado en  $Z$ . Además es un subconjunto propio de  $Z$ , ya que no contiene a  $x$ . Esto es una contradicción, ya que habíamos supuesto que  $Z$  era conexo, y como tal, el único subconjunto no vacío, abierto y cerrado de  $Z$  es  $Z$  mismo.

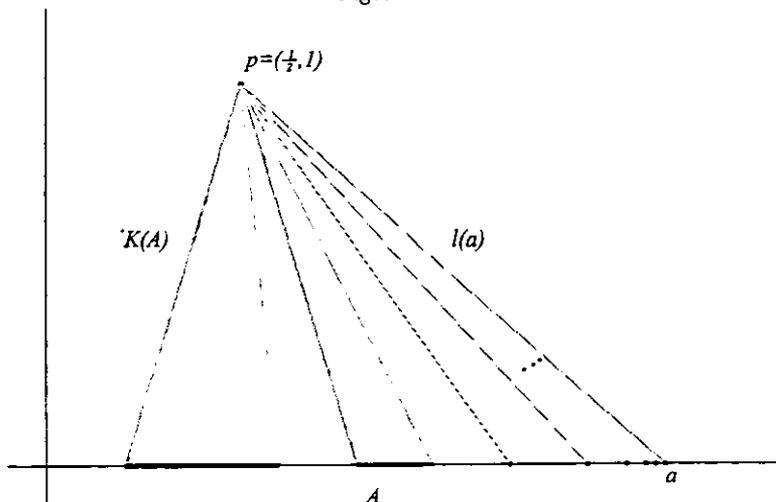
Por tanto  $X$  es totalmente desconexo y terminamos la prueba del Teorema.  $\square$

**Definición 1.5.** Sean  $A$  un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y  $p = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \in \mathbb{R}^2$ . Definimos el cono de  $A$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^2$

$$K(A) = \bigcup \{l(a) \mid a \in A\}$$

donde  $l(a)$  representa el segmento de recta que une  $p$  con  $(a, 0)$ .

Figura 1.1:



**Nota:** por comodidad, un punto  $(a, b) \in K(A)$  representará al punto de  $l(a)$  que tenga altura  $b$ , es decir,  $(a, b) = (1 - b)(a, 0) + bp$ .

**Lema 1.6.** Sean  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión en  $K(A) \setminus \{p\}$  y sea  $(a, b) \in K(A) \setminus \{p\}$ . Entonces  $(a_n, b_n) \rightarrow (a, b)$  si y sólo si  $a_n \rightarrow a$  y  $b_n \rightarrow b$ .

**Demostración.**

Haremos la prueba en dos pasos.

$\Rightarrow$ )

Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle a_n, b_n \rangle &= (1 - b_n) \langle a_n, 0 \rangle + b_n p = (1 - b_n) \langle a_n, 0 \rangle + b_n \left( \frac{1}{2}, 1 \right) \\ &= \left( (1 - b_n) a_n + \frac{1}{2} b_n, b_n \right) \end{aligned}$$

y análogamente :

$$\langle a, b \rangle = (1 - b) \langle a, 0 \rangle + b p = (1 - b) \langle a, 0 \rangle + b \left( \frac{1}{2}, 1 \right) = \left( (1 - b) a + \frac{1}{2} b, b \right)$$

Como  $\langle a_n, b_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ , entonces:

(i)  $(1 - b_n) a_n + \frac{1}{2} b_n \rightarrow (1 - b) a + \frac{1}{2} b$  y

(ii)  $b_n \rightarrow b$ .

Usando (ii) en (i) obtenemos que  $(1 - b_n) a_n \rightarrow (1 - b) a$ .

Ahora bien, como habíamos tomado  $\langle a, b \rangle \in K(A) \setminus \{p\}$  entonces claramente  $b \neq 1$ ,

De aquí que  $\frac{1}{1 - b} (1 - b_n) a_n \rightarrow a$ ,

y usando (ii) otra vez obtenemos que  $a_n \rightarrow a$ .

$\Leftarrow$ )

En el inciso anterior habíamos visto que

$$\langle a_n, b_n \rangle = \left( (1 - b_n) a_n + \frac{1}{2} b_n, b_n \right).$$

De esta expresión es claro que

$$\langle a_n, b_n \rangle \rightarrow \left( (1 - b) a + \frac{1}{2} b, b \right) = \langle a, b \rangle. \quad \square$$

Ahora sí, describiremos el contraejemplo al recíproco del Teorema 1.4, es decir, un espacio  $X$  totalmente desconexo que no sea de dimensión cero.

Así pues, sea  $C$  el conjunto de Cantor en  $I$  y recordemos que  $p = \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$ . Definimos al conjunto  $E$  como el conjunto de todos los puntos extremos de los intervalos que nos quedan en cada paso de la construcción de  $C$ . Es decir, sea  $E = \left\{ x \in C \mid x = \frac{k}{3^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ , y sea  $F$  el complemento de  $E$  en  $C$ .

**Lema 1.7.** *Todo punto de  $C$  es un punto de acumulación de  $E$ . En particular,  $E$  es denso en  $C$ .*

**Demostración.**

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $x \in C$ .

Recordemos que en el primer paso de la construcción de  $C$  tomamos al intervalo  $I$  y le quitamos el intervalo  $\left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$ , de modo que en este paso nos quedaban dos intervalos de tamaño  $\frac{1}{3}$  cada uno. Análogamente, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , en el paso  $n$ -ésimo los intervalos que nos quedan son de tamaño  $\frac{1}{3^n}$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^m} < \varepsilon$  y sea  $[r_m, s_m]$  el intervalo del paso  $m$ -ésimo que contiene a  $x$ . De aquí que  $x \neq r_m$  o bien  $x \neq s_m$ . Supongamos que  $x \neq s_m$ .

De acuerdo a la construcción de  $C$  tenemos que  $s_m - r_m = \frac{1}{3^m} < \varepsilon$ .

En particular  $s_m - x < \varepsilon$ . Como  $s_m$  es un punto extremo de algún intervalo del paso  $m$ -ésimo de la construcción de  $C$ , entonces  $s_m \in E$ .

Por tanto  $x$  es un punto de acumulación de  $E$  y de esta manera concluimos la prueba del lema.  $\square$

**Definición del espacio  $X$ .**

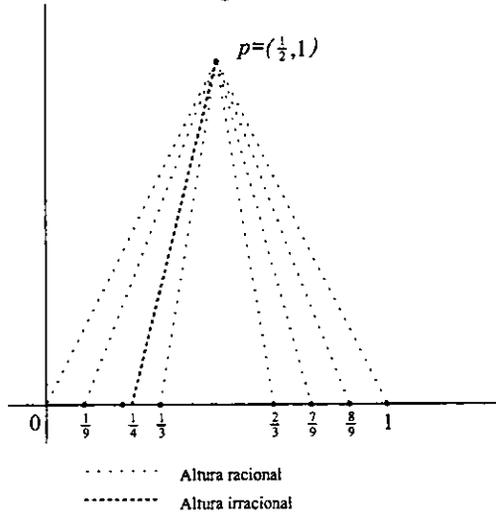
Para definir el espacio que estamos buscando nos fijaremos en dos subespacios de  $K(C)$ .

Empezaremos tomando el cono de  $E$  y nos fijaremos sólo en sus puntos de altura racional. Es decir, definiremos  $X_E = \{(x, y) \in K(E) \mid y \in \mathbb{Q}\}$ , donde  $\mathbb{Q}$  denota a los racionales en  $I$ .

Asimismo nos fijamos en el cono de  $F$  y tomaremos sus puntos de altura irracional para definir:  $X_F = \{(x, y) \in K(F) \mid y \notin \mathbb{Q}\}$ .

Finalmente sea  $X = X_E \cup X_F$ , al cual consideraremos como un subespacio topológico de  $K(C)$ .

Figura 1.2:



**Lema 1.8.** Si  $D$  es un subconjunto denso de  $C$ , entonces

$$\overline{K(D) \cap X^X} = X.$$

**Demostración.**

Claramente  $\overline{K(D) \cap X^X} \subset X$ .

Sea  $\langle x, y \rangle \in X$ ; podemos suponer que  $\langle x, y \rangle \neq p$ . Veremos que  $\langle x, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X^X}$ .

Como  $x \in C$  y  $D$  es denso en  $C$ , existe una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . En consecuencia, usando el Lema 1.6, obtenemos que  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$ .

El resto de la prueba lo haremos en dos pasos.

Paso 1.

Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Veremos que  $\langle x_n, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X}^{K(C)}$ .

Supongamos que  $x_n \in E$ , entonces  $y \in Q$  (para el caso en que  $x_n \in F$  el argumento es completamente análogo).

Sea  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q$  una sucesión tal que  $y_k \rightarrow y$ . Entonces  $\langle x_n, y_k \rangle \in X$  y por el Lema 1.6  $\langle x_n, y_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle$ . Como  $x_n \in D$ , tenemos que  $\langle x_n, y_k \rangle \in K(D) \cap X$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De aquí que  $\langle x_n, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X}^{K(C)}$ .

Paso 2.

Por el paso 1 tenemos que  $\langle x_n, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X}^{K(C)}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Por tanto  $\langle x, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X}^{K(C)}$ . Como habíamos tomado  $\langle x, y \rangle \in X$ , podemos concluir que  $\langle x, y \rangle \in \overline{K(D) \cap X}^X$ .

Así terminamos la prueba del lema.  $\square$

A continuación introducimos algunas definiciones y observaciones, que serán utilizadas en la prueba del Teorema 1.14.

**Definición 1.9.** *Un subespacio  $A$  de un espacio topológico  $Y$  se dice que es denso en ninguna parte en  $Y$  si  $\text{int}_Y(\overline{A}^Y) = \emptyset$ .*

**Definición 1.10.** *Un subespacio  $A$  de un espacio topológico  $Y$  se dice que es de la primera categoría en  $Y$  si se puede expresar como una unión numerable de subespacios densos en ninguna parte en  $Y$ .*

**Observación 1.11.** *La unión numerable de espacios de la primera categoría es de la primera categoría.*

**Proposición 1.12.**  *$E$  es de la primera categoría en  $C$ .*

**Demostración.**

Sabemos que  $C$  no tiene puntos aislados, así que cada conjunto de la forma  $\{x\}$  con  $x$  en  $C$  tiene interior vacío en  $C$ .

Por tanto  $\{x\}$  es denso en ninguna parte en  $C$  para cada  $x \in E \subset C$ .

Ahora bien, claramente  $E$  es numerable, luego lo podemos expresar como la unión numerable de sus puntos, es decir,  $E = \cup_{e \in E} \{e\}$ .

De aquí que  $E$  es de la primera categoría en  $C$ .  $\square$

**Definición 1.13.** *Un espacio  $Y$  se dice que es de la segunda categoría si no es de la primera categoría.*

**Nota:** Claramente un espacio de la segunda categoría puede contener a uno de la primera pero no a la inversa, ya que de ser así, el de la segunda categoría podría ponerse como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, y por tanto sería de la primera categoría, lo cual es una contradicción.

**TEOREMA DE BAIRE.** Si  $Y$  es un espacio con una métrica completa y  $B$  es un abierto no vacío de  $Y$ , entonces  $B$  es de la segunda categoría.

La prueba del Teorema de Baire se puede encontrar en [Mu].

**Teorema 1.14.** El espacio  $X = X_E \cup X_F$  es conexo.

**Demostración.**

Supongamos que  $X$  no es conexo. Entonces existen subconjuntos ajenos y no vacíos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que son abiertos y cerrados y  $U \cup V = X$ . Supondremos que  $p \in U$ .

La idea de la prueba es encontrar un subconjunto denso  $S$  de  $C$  tal que el cono de  $S$  (intersectado con  $X$ ) esté contenido en  $U$ . De este modo, como  $U$  es cerrado en  $X$ ,  $\overline{K(S) \cap X^X}$  estará contenido en  $U$ , pero entonces por el Lema 1.8 tendremos que  $X = \overline{K(S) \cap X^X} \subset U$ . Con esto llegaremos a una contradicción.

Para empezar la prueba del Teorema sea  $c \in C$  y consideremos los puntos de  $l(c)$  que están en  $V$ . Lo que nos interesa es ver hasta qué altura llegan estos puntos.

Entonces para cada  $c \in C$  definimos

$$s(c) = \begin{cases} \sup \{y \in [0, 1] \mid \langle c, y \rangle \in V\} & \text{si } l(c) \cap V \neq \emptyset. \\ 0 & \text{si } l(c) \cap V = \emptyset. \end{cases}$$

**Afirmación 1.14.1.** Si  $c \in C$  es tal que  $s(c) > 0$  entonces

$$\langle c, s(c) \rangle \in \overline{U}^{K(C)} \cap \overline{V}^{K(C)} \subset K(C) \setminus X.$$

**Demostración.**

Haremos la demostración en tres pasos.

Sea  $c \in C$  tal que  $s(c) > 0$ .

(i) Veremos que  $\langle c, s(c) \rangle \in \overline{V}^{K(C)}$ .

Como  $s(c) = \sup \{y \in [0, 1] \mid \langle c, y \rangle \in V\}$  y  $s(c) > 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $z_n \in I$  tal que  $s(c) - \frac{1}{n} < z_n \leq s(c)$  y  $\langle c, z_n \rangle \in V$ .

Claramente  $z_n \rightarrow s(c)$ , así que usando el Lema 1.6 tenemos que

$$\langle c, z_n \rangle \rightarrow \langle c, s(c) \rangle.$$

Por tanto  $\langle c, s(c) \rangle \in \overline{V}^{K(C)}$ .

(ii) Veremos que  $\langle c, s(c) \rangle \in \overline{U}^{K(C)}$ .

Sabemos que para cada  $c \in C$ , se tiene  $\langle c, 1 \rangle = p \in U$ .

Entonces, como  $s(c) = \sup \{y \in [0, 1] \mid \langle c, y \rangle \in V\}$  y  $s(c) \leq 1$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $z_n \in I$  tal que  $s(c) \leq z_n < s(c) + \frac{1}{n}$  y  $\langle c, z_n \rangle \in U$ .

Claramente  $z_n \rightarrow s(c)$ , y por tanto  $\langle c, z_n \rangle \rightarrow \langle c, s(c) \rangle$ .

En consecuencia  $\langle c, s(c) \rangle \in \overline{U}^{K(C)}$ .

(iii) Veremos que  $\overline{U}^{K(C)} \cap \overline{V}^{K(C)} \subset K(C) \setminus X$ .

Si suponemos que existe  $w \in \bar{U}^{K(C)} \cap \bar{V}^{K(C)}$  con  $w \in X$ , entonces se tiene que  $w \in \bar{U}^X \cap \bar{V}^X$ . Recordemos que  $U$  y  $V$  son cerrados en  $X$ , así que  $w \in U \cap V$ . Esto es una contradicción. Por tanto  $\bar{U}^{K(C)} \cap \bar{V}^{K(C)} \subset K(C) \setminus X$ .

De esta manera queda concluida la prueba de la afirmación.

**Consecuencia 1.14.2.** Si  $c \in C$  es tal que  $\langle c, s(c) \rangle \in X$  entonces  $s(c) = 0$ , y en ese caso  $c \in E$ .

**Demostración.**

De acuerdo a la Afirmación 1.14.1, si  $c \in C$  es tal que  $\langle c, s(c) \rangle \in X$  entonces  $s(c) = 0$ .

En ese caso  $\langle c, s(c) \rangle$  no puede estar en  $X_F$ , ya que su altura no es irracional.

Por tanto  $\langle c, s(c) \rangle \in X_E \subset K(E)$ , de donde concluimos que  $c \in E$ .

**Observación 1.14.3.**  $s(c) < 1$  para cada  $c \in C$ .

**Demostración.**

Sea  $c \in C$ .

Podemos suponer que  $s(c) > 0$ .

Por la Afirmación 1.14.1 tenemos que  $\langle c, s(c) \rangle \notin X$ , entonces  $\langle c, s(c) \rangle \neq p = \langle c, 1 \rangle$ .

Por tanto  $s(c) < 1$  para cada  $c \in C$ .

Sea  $\mathbb{Q}$  el conjunto de números racionales en  $I \setminus \{1\}$ .

Para cada  $r \in \mathbb{Q}$  definimos  $F_r = \{c \in F \mid s(c) = r\}$ .

Recordemos que lo que estamos buscando es un subconjunto denso de  $C$  que satisfaga ciertas propiedades. De hecho el subconjunto en cuestión será construido a partir de los  $F_r$ , y esto es lo que veremos más adelante. Por el momento probaremos algunas afirmaciones que tienen que ver con las características de los  $F_r$ .

**Afirmación 1.14.4.**  $F = \bigcup \{F_r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ .

**Demostración.**

Por definición  $F_r \subset F$  para cada  $r \in \mathbb{Q}$ . De aquí que  $\bigcup \{F_r \mid r \in \mathbb{Q}\} \subset F$ .

Ahora probaremos que  $F \subset \bigcup \{F_r \mid r \in \mathbb{Q}\}$ .

Sea  $c \in F$ , entonces tenemos que  $y$  es irracional para cada  $\langle c, y \rangle \in X$ .

Si  $s(c)$  fuera irracional entonces  $\langle c, s(c) \rangle$  estaría en  $X$  y por la Consecuencia 1.14.2 tendríamos que  $s(c) = 0$ , lo cual es un absurdo.

Por tanto  $s(c) \in \mathbb{Q}$ .

Además, en la Observación 1.14.3 vimos que  $s(c) < 1$ , por tanto  $s(c) = r$  para alguna  $r \in \mathbb{Q}$ .

De aquí que  $c \in F_r$  para alguna  $r \in \mathbb{Q}$ .

De esta manera termina la prueba de la afirmación.

**Afirmación 1.14.5.**  $F_r$  es denso en ninguna parte en  $C$  para cada  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ .

**Demostración.**

Supongamos que existe  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  tal que  $F_r$  no es denso en ninguna parte en  $C$ . En este caso tendríamos que  $\text{int}_C(\overline{F_r^C}) \neq \emptyset$ .

Como en el Lema 1.7 vimos que  $E$  es denso en  $C$ , e  $\text{int}_C(\overline{F_r^C})$  es un abierto no vacío de  $C$ , entonces podemos tomar un elemento  $e \in E \cap \text{int}_C(\overline{F_r^C}) \subset E \cap \overline{F_r^C}$ . De acuerdo a esto podemos hallar una sucesión  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F_r$  de manera que  $z_n \rightarrow e$ .

Ahora bien, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

como  $s(z_n) = r > 0$ , entonces por la Afirmación 1.14.1 tenemos que

$$\langle z_n, r \rangle = \langle z_n, s(z_n) \rangle \in \bar{U}^{K(C)} \cap \bar{V}^{K(C)}.$$

Por otro lado, por el Lema 1.6 sabemos que  $\langle z_n, r \rangle \rightarrow \langle e, r \rangle$ .

De aquí que

$$\langle e, r \rangle \in \bar{U}^{K(C)} \cap \bar{V}^{K(C)} \subset K(C) \setminus X.$$

pero  $e \in E$  y  $r \in Q$ , así que  $\langle e, r \rangle \in X$ , lo cual es una contradicción.

En consecuencia  $\text{int}_C(\bar{F}_r^C) = \emptyset$  y termina la prueba de la afirmación.

**Afirmación 1.14.6.**  $E \cup [\cup \{F_r \mid r \in Q \setminus \{0\}\}]$  es de la primera categoría.

**Demostración.**

De acuerdo a la afirmación anterior tenemos que  $\cup \{F_r \mid r \in Q \setminus \{0\}\}$  es de la primera categoría.

Por otro lado, en la Proposición 1.12 vimos que  $E$  es de la primera categoría en  $C$ . En consecuencia (usando la Observación 1.11) tenemos que el conjunto

$$E \cup [\cup \{F_r \mid r \in Q \setminus \{0\}\}]$$

es de la primera categoría en  $C$ , terminando así la prueba de la afirmación.

**Afirmación 1.14.7.**  $F_0$  es denso en  $C$ .

**Demostración.**

Sea  $B$  un abierto no vacío de  $C$ . Como  $C$  es un espacio métrico y compacto, entonces  $C$  es un espacio métrico completo. Por el Teorema de Baire,  $B$  es un espacio de la segunda categoría. Entonces no es posible que  $B$  esté contenido en el conjunto de la primera categoría  $E \cup [\cup \{F_r \mid r \in Q \setminus \{0\}\}]$ .

De modo que  $B \cap F_0 \neq \emptyset$ .

Como esto sucede para cualquier abierto no vacío  $B$  de  $C$  podemos concluir que  $F_0$  es denso en  $C$  y terminar así la prueba de la afirmación.

Finalmente, dada  $c \in F_0$  y dada  $y \in [0, 1)$  tal que  $\langle c, y \rangle \in X$ , como  $s(c) = 0$ , los puntos de la forma  $\langle c, z \rangle \in X$  con  $y < z < 1$  no están en  $V$ . Entonces  $\langle c, y \rangle \in \bar{U}^{X^2} \cap X = \bar{U}^X = U$ . Esto muestra que  $K(F_0) \cap X \subset U$ .

Ahora bien, como  $U$  es cerrado en  $X$  tenemos que:  $\overline{K(F_0) \cap X^X} \subset U$ .

Pero de acuerdo al Lema 1.8 tenemos entonces que

$$X = \overline{K(F_0) \cap X^X} \subset U,$$

y por tanto  $X = U$  y  $V = \emptyset$ .

Esto es una contradicción que nace de la suposición de que  $X$  tiene una disconexión, por tanto concluimos así la prueba de que  $X$  es conexo.  $\square$

**Teorema 1.15.**  $X \setminus \{p\}$  es totalmente desconexo.

**Demostración.**

Haremos la prueba en tres pasos.

**Paso 1.**

Sea  $\langle a, b \rangle \in X \setminus \{p\}$ . Entonces para cada  $\langle c, d \rangle \in X \setminus \{p\}$  tal que  $a \neq c$  podemos dar una separación de  $X \setminus \{p\}$ , digamos  $X \setminus \{p\} = M \cup N$ , tal que  $\langle a, b \rangle \in M$  y  $\langle c, d \rangle \in N$ .

Para hacer esto, sean  $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in X \setminus \{p\}$  con  $a \neq c$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $a < c$ .

Como  $C$  no contiene intervalos, existe  $t \in I \setminus C$  tal que  $a < t < c$ .

Sea  $N = \{\langle x, y \rangle \in X \setminus \{p\} \mid x < t\}$  y  $M = \{\langle x, y \rangle \in X \setminus \{p\} \mid x > t\}$ .

Es fácil ver que estos conjuntos satisfacen:

- (a)  $\langle a, b \rangle \in N$  y  $\langle c, d \rangle \in M$ .
- (b)  $M$  y  $N$  son ajenos.

Además:

(c)  $M$  y  $N$  son cerrados en  $X \setminus \{p\}$ .

Sea  $\{\langle x_n, y_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \subset N$  una sucesión convergente a  $\langle z, w \rangle \in X \setminus \{p\}$ . Veremos que  $\langle z, w \rangle \in N$ .

Usando el Lema 1.6, tenemos que la sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  tiende a  $z$ .

Como  $x_n < t$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $z \leq t$ .

Habíamos tomado  $t \in I \setminus C$  y como  $z \in C$ , obtenemos que  $z < t$ .

Por tanto  $\langle z, w \rangle \in N$  y  $N$  es cerrado en  $X \setminus \{p\}$ .

De manera análoga se prueba que  $M$  es cerrado en  $X \setminus \{p\}$ .

(d)  $N \cup M = X \setminus \{p\}$ .

Claramente  $N \cup M \subset X \setminus \{p\}$ .

Por otro lado, sea  $\langle z, w \rangle \in X \setminus \{p\}$ . Como  $t \notin C$  entonces tenemos que  $z < t$  ó  $z > t$ .

De aquí que  $\langle z, w \rangle$  está en  $N$  o está en  $M$ .

De este modo concluimos que  $X \setminus \{p\} \subset N \cup M$ .

En consecuencia  $N \cup M = X \setminus \{p\}$ .

De los incisos (a), (b), (c) y (d) concluimos que  $M$  y  $N$  constituyen una separación de  $X \setminus \{p\}$  con las características requeridas.

**Paso 2.**

La casicomponente de  $\langle a, b \rangle$  en  $X \setminus \{p\}$  está contenida en  $[(a) \cap (X \setminus \{p\})]$ , para cada  $\langle a, b \rangle \in X$ .

Como consecuencia del Paso 1, si tenemos dos puntos  $\langle a, b \rangle \in X \setminus \{p\}$  y  $\langle c, d \rangle \in X \setminus l(a)$ , entonces existe un abierto y cerrado  $M$  de  $X \setminus \{p\}$  tal que  $\langle a, b \rangle \in M$  y  $\langle c, d \rangle \notin M$ . Entonces  $\langle c, d \rangle$  no está en la casicomponente de  $\langle a, b \rangle$  en  $X \setminus \{p\}$ .

Por tanto la casicomponente de  $\langle a, b \rangle$  en  $X \setminus \{p\}$  está contenida en

$$[l(a) \cap (X \setminus \{p\})].$$

Paso 3.

La componente de  $\langle a, b \rangle$  en  $X \setminus \{p\}$  es  $\{\langle a, b \rangle\}$ , para cada  $\langle a, b \rangle \in X \setminus \{p\}$ .

Es un resultado conocido de topología que la componente de un punto está contenida en su casicomponente (ver [HY]).

De acuerdo a esto y al paso anterior deducimos que la componente de  $\langle a, b \rangle$  en  $X \setminus \{p\}$  está contenida en  $[l(a) \cap (X \setminus \{p\})]$ .

Recordemos ahora que

$$[l(a) \cap (X \setminus \{p\})] = \begin{cases} \{\langle a, y \rangle \in K(C) \setminus \{p\} \mid y \text{ es racional}\}, & \text{o bien} \\ \{\langle a, y \rangle \in K(C) \setminus \{p\} \mid y \text{ es irracional}\} \end{cases}$$

De aquí que  $[l(a) \cap (X \setminus \{p\})]$  es totalmente desconexo para cada  $a \in C$ .

Por tanto la componente de  $\langle a, b \rangle$  es  $\{\langle a, b \rangle\}$  para cualquier  $\langle a, b \rangle \in X \setminus \{p\}$ .

Terminamos así la prueba del Teorema.  $\square$

**Teorema 1.16.**  $X \setminus \{p\}$  no es de dimensión cero.

**Demostración.**

Sean  $x \in X \setminus \{p\}$  y  $W$  un abierto de  $X$  tal que  $p \notin \overline{W}^X$ .

Si  $X \setminus \{p\}$  es de dimensión cero, entonces existe un subconjunto  $A$  de  $X \setminus \{p\}$  que satisface:

- (i)  $A$  es abierto y cerrado en  $X \setminus \{p\}$  y:
- (ii)  $x \in A \subset W$ .

Como  $X \setminus \{p\}$  es abierto en  $X$  y  $A$  es abierto en  $X \setminus \{p\}$ , entonces  $A$  es abierto en  $X$ .

Por otro lado tenemos que  $A$  es cerrado en  $X \setminus \{p\}$  y  $A \subset \overline{W}^X \subset X \setminus \{p\}$ , de modo que  $A$  es cerrado en  $\overline{W}^X$ . Entonces  $A$  es cerrado en  $X$ .

De aquí que  $A$  es un subespacio propio, abierto y cerrado de  $X$ . Esto es una contradicción ya que, por el Teorema 1.14,  $X$  es conexo.

Por tanto  $X \setminus \{p\}$  no es de dimensión cero y terminamos la prueba del Teorema.  $\square$

## Capítulo 2

# Universalidad de la Curva de Sierpiński

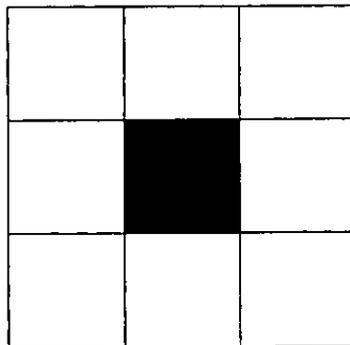
En este capítulo hablaremos de una curva en la que podemos encajar cualquier continuo del plano con interior vacío. O lo que es lo mismo, cualquier continuo contenido en  $\mathbb{R}^2$  con interior vacío es homeomorfo a un subcontinuo de la curva mencionada. Esta curva es conocida como la Curva de Sierpiński.

Una manera geométrica de describir a la Curva de Sierpiński es la siguiente:

Paso 1.

Tomamos el cuadrado unitario  $I \times I$ , lo dividimos en nueve cuadrados iguales y quitamos el del centro (con esto queremos decir que quitamos el interior de dicho cuadrado).

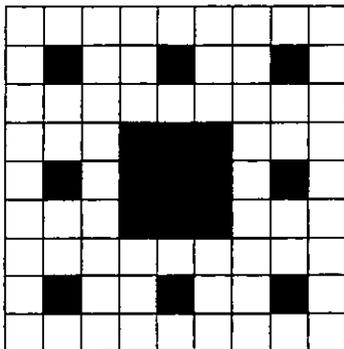
Figura 2.1:



Paso 2.

A los 8 cuadrados que nos quedaron los dividimos a su vez en nueve cuadrados iguales y a cada uno le quitamos su cuadrado del centro; observamos que de esta manera por cada uno de los 8 cuadrados nos quedan otros 8 cuadrados, es decir, al final obtenemos 64 cuadrados.

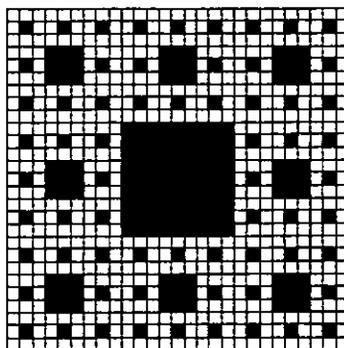
Figura 2.2:



Paso 3.

A los 64 cuadrados que obtenemos del proceso anterior los dividimos otra vez en nueve cuadrados iguales y a cada uno le quitamos el del centro, obteniendo ahora  $8^3$  cuadrados.

Figura 2.3:



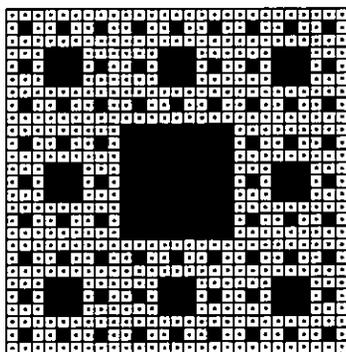
Inductivamente construimos el paso  $n$ :

Supongamos que en el paso  $n - 1$  obtuvimos  $8^{n-1}$  cuadrados, entonces a cada uno de ellos lo dividiremos en nueve cuadrados iguales y le quitaremos el del centro. De esta manera obtendremos 8 nuevos cuadraditos por cada cuadrado de los que teníamos, obteniendo así, en este paso,  $8^n$

cuadrados.

Si realizamos el procedimiento anterior para todos los números naturales  $n$  y tomamos la intersección de los conjuntos que nos quedan en cada paso, entonces el espacio que obtenemos es la llamada Curva de Sierpiński.

Figura 2.4:



Ahora describiremos de una manera más formal los pasos de esta construcción. De acuerdo al procedimiento que acabamos de reseñar, estamos haciendo lo siguiente:

Paso 1.

Tomamos el cuadrado unitario  $I \times I$  y lo dividimos en 9 cuadrados iguales, para hacer esto podemos dividir la base y el lado de  $I \times I$  en tres partes iguales y tomar el producto de estas partes, los productos que obtenemos son:

$$\begin{aligned} & \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[0, \frac{1}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ & \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ & \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{aligned}$$

Observemos que estos productos definen 9 cuadrados y que todos ellos son de la forma  $\left[\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right] \times \left[\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right]$ , donde  $i, k \in \{0, 1, 2\}$ . De acuerdo a la construcción geométrica, ahora tenemos que qui-

tar el interior del cuadrado de en medio, es decir quitamos  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$  y, finalmente, definimos  $C_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Paso 2.

En este paso tomábamos los 8 cuadrados del paso anterior y los dividíamos a su vez en 9 cuadrados. Así pues, tomemos un cuadrado típico del paso 1, que es de la forma  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right) \times \left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$ , para algunas  $i, k \in \{0, 1, 2\}$ .

Una manera de dividir este cuadrado en 9 partes iguales es dividir  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right)$  en tres partes iguales, hacer lo mismo con  $\left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$  y luego tomar el producto de estas terceras partes. Las terceras partes de  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right) = \left(\frac{3i}{9}, \frac{3i+3}{9}\right)$  son:

$$\left(\frac{3i}{9}, \frac{3i+3}{9}\right), \left(\frac{3i+1}{9}, \frac{3i+2}{9}\right) \text{ y } \left(\frac{3i+2}{9}, \frac{3i+3}{9}\right),$$

y las terceras partes de  $\left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right) = \left(\frac{3k}{9}, \frac{3k+3}{9}\right)$  son:

$$\left(\frac{3k}{9}, \frac{3k+3}{9}\right), \left(\frac{3k+1}{9}, \frac{3k+2}{9}\right) \text{ y } \left(\frac{3k+2}{9}, \frac{3k+3}{9}\right),$$

entonces los 9 subcuadrados de  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right) \times \left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$  son de la forma

$$\left(\frac{3i+a}{9}, \frac{3i+a+1}{9}\right) \times \left(\frac{3k+b}{9}, \frac{3k+b+1}{9}\right),$$

donde  $a, b \in \{0, 1, 2\}$ .

Para obtener el cuadrado del centro de  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right) \times \left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$  basta tomar el intervalo del centro de  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right)$  y el de  $\left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$  y multiplicarlos; de este modo obtenemos que el cuadrado del centro de  $\left(\frac{i}{3}, \frac{i+1}{3}\right) \times \left(\frac{k}{3}, \frac{k+1}{3}\right)$  es:

$$\left(\frac{3i+1}{9}, \frac{3i+2}{9}\right) \times \left(\frac{3k+1}{9}, \frac{3k+2}{9}\right).$$

Ahora definimos

$$C_2 = \cup \left\{ \left(\frac{3i+1}{9}, \frac{3i+2}{9}\right) \times \left(\frac{3k+1}{9}, \frac{3k+2}{9}\right) \text{ con } i, k \in \{0, 1, 2\} \right\};$$

es decir,  $C_2$  es la unión de los “cuadrados del centro” del paso 1, que quitaremos en el paso 2.

Paso 3.

Otra vez, dado un cuadrado del paso 2 hay que dividirlo en 9 subcuadrados iguales y quitar el del centro.

Dado que un cuadrado típico del paso 2 es de la forma  $\left(\frac{i}{9}, \frac{i+1}{9}\right) \times \left(\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right)$ , donde  $i, k \in \{0, 1, \dots, 3^2 - 1\}$ . Por un argumento similar al del paso 2 tenemos que los 9 subcuadrados de

$$\left(\frac{i}{9}, \frac{i+1}{9}\right) \times \left(\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right) = \left(\frac{3i}{27}, \frac{3i+3}{27}\right) \times \left(\frac{3k}{27}, \frac{3k+3}{27}\right),$$

son de la forma

$$\left(\frac{3i+a}{27}, \frac{3i+a+1}{27}\right) \times \left(\frac{3k+b}{27}, \frac{3k+b+1}{27}\right)$$

donde  $a, b \in \{0, 1, 2\}$ .

Continuando con el mismo argumento llegamos a que el cuadrado del centro de  $\left(\frac{i}{9}, \frac{i+1}{9}\right) \times \left(\frac{k}{9}, \frac{k+1}{9}\right)$  es el cuadrado

$$\left(\frac{3i+1}{27}, \frac{3i+2}{27}\right) \times \left(\frac{3k+1}{27}, \frac{3k+2}{27}\right).$$

Ahora definimos

$$C_3 = \cup \left\{ \left(\frac{3i+1}{27}, \frac{3i+2}{27}\right) \times \left(\frac{3k+1}{27}, \frac{3k+2}{27}\right) \mid i, k \in \{0, 1, \dots, 3^2 - 1\} \right\}.$$

Análogamente en el paso  $n$ :

Supongamos que un cuadrado del paso  $n-1$  es de la forma:

$$\left(\frac{i}{3^{n-1}}, \frac{i+1}{3^{n-1}}\right) \times \left(\frac{k}{3^{n-1}}, \frac{k+1}{3^{n-1}}\right) = \left(\frac{3i}{3^n}, \frac{3i+3}{3^n}\right) \times \left(\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n}\right),$$

donde  $i, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ . Igual que antes, podemos ver que, al dividirlo en 9 cuadrados, su cuadrado del centro es:

$$\left(\frac{3i+1}{3^n}, \frac{3i+2}{3^n}\right) \times \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right).$$

Entonces definimos

$$C_n = \cup \left\{ \left(\frac{3i+1}{3^n}, \frac{3i+2}{3^n}\right) \times \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right) \mid i, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\} \right\}.$$

**Observación 2.1.** También podemos expresar a  $C_n$  de la siguiente manera:

$$C_n = \bigcup \left\{ \left( \frac{r}{3^n}, \frac{r+1}{3^n} \right) \times \left( \frac{s}{3^n}, \frac{s+1}{3^n} \right) \mid r, s \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\} \text{ y } r, s \equiv 1 \pmod{3} \right\}.$$

**Demostración.**

Si  $r, s \equiv 1 \pmod{3}$  entonces  $r = 3i + 1$  y  $s = 3k + 1$ , para algunas  $i, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Si además  $r, s \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$ , tenemos que:

Dado que  $0 \leq r < 3^n$  entonces  $0 \leq 3i + 1 < 3^n$ . De aquí que  $-1 \leq 3i < 3^n - 1$ . Como  $3i$  es un entero múltiplo de 3, deducimos que  $0 \leq 3i \leq 3^n - 3$ . Por tanto  $0 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ .

Análogamente podemos ver que  $k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ .

Similarmente, cada número  $r$  de la forma  $r = 3i + 1$ , con  $i \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$  es un número que satisface  $r \equiv 1 \pmod{3}$  y  $r \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}$ .

Por tanto, la nueva expresión para  $C_n$  es equivalente a la que ya habíamos definido.  $\square$

De este modo, en el paso 1 obteníamos:  $(I \times I) \setminus C_1$ ,

en el paso 2 obteníamos:  $(I \times I) \setminus \{C_1 \cup C_2\}$ ,

en el paso 3:  $(I \times I) \setminus \{C_1 \cup C_2 \cup C_3\}$ ,

$\vdots$

y así sucesivamente, en el paso  $n$ :  $(I \times I) \setminus \bigcup_{i=1}^n C_i$

Al hacer este proceso para todos los números naturales  $n$ , y tomar lo que sobrevive, obtenemos

$$S = (I \times I) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

Por definición  $S$  es el conjunto que habíamos descrito como la Curva de Sierpiński.

Hasta ahora lo que hemos hecho es dar la definición de la curva  $S$ . Antes de mostrar el teorema principal acerca de  $S$ , deduciremos algunas de sus propiedades elementales.

Empezaremos por definir el siguiente conjunto, sea

$$\Delta = \left\{ x \in I \mid x = \frac{k}{3^n} \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Proposición 2.2.** Si  $c(n, k) = \frac{k}{3^n}$ , entonces se satisfacen las siguientes condiciones para cada número natural  $n$ :

- (i)  $c(n + 1, 3k) = c(n, k)$ , para cada  $k$ .
- (ii)  $c(n, i) < c(n, k)$ , siempre que  $i < k$ .
- (iii)  $\Delta$  es denso en  $[0, 1]$ .

**Demostración.**

(i) Esto es claro, ya que  $c(n+1, 3k) = \frac{3k}{3^{n+1}} = \frac{k}{3^n} = c(n, k)$ .

(ii) Es claro.

(iii) Sean  $x \in I$  y  $\varepsilon > 0$ . Veremos que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  interseca a  $\Delta$ .

Sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{3^m} < \varepsilon$ .

Definimos

$$\Delta_m = \{z \in I \mid z = \frac{k}{3^m} \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \subset \Delta.$$

Observemos que  $0 = \frac{0}{3^m} \in \Delta_m$ .

Sea  $Z = \{z \in \Delta_m \mid z \leq x - \varepsilon\}$ . Analizaremos dos casos.

**Caso 1.**

Si  $0 \notin Z$  entonces  $x - \varepsilon < 0 \leq x$ , por tanto,  $0 \in \Delta_m \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ . De aquí concluimos que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  interseca a  $\Delta$ .

**Caso 2.**

Si  $0 \in Z$  entonces  $Z \neq \emptyset$  y, por tanto, podemos considerar  $z_0 = \max \{z : z \in Z\}$ , digamos que  $z_0 = \frac{k_0}{3^m}$ .

Por construcción, tenemos que  $z_0 < x \leq 1$ , así que  $k_0 \leq 3^m - 1$ .

De aquí que:

(1)  $0 \leq \frac{k_0 + 1}{3^m} \leq 1$  y, por tanto,  $\frac{k_0 + 1}{3^m} \in \Delta_m$ .

(2) Además, dado que  $\frac{k_0}{3^m} = z_0 = \max \{z : z \in Z\}$ , tenemos que  $x - \varepsilon < \frac{k_0 + 1}{3^m}$ .

Por otro lado tenemos que, como  $z_0 \leq x - \varepsilon$ , entonces:

$$0 \leq \frac{k_0 + 1}{3^m} - (x - \varepsilon) \leq \frac{k_0 + 1}{3^m} - \frac{k_0}{3^m} = \frac{1}{3^m}$$

y como habíamos elegido  $m$  de modo que  $\frac{1}{3^m} < \varepsilon$ , se obtiene que

$$0 \leq \frac{k_0 + 1}{3^m} - (x - \varepsilon) < \varepsilon < (x + \varepsilon) - (x - \varepsilon).$$

De aquí que  $\frac{k_0 + 1}{3^m} < (x + \varepsilon)$ .

Por tanto, de acuerdo con (1) y (2), deducimos que:

$$\frac{k_0 + 1}{3^m} \in \Delta_m \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

y, de esta manera, obtenemos que  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  intersecciona a  $\Delta$ .

Así concluimos que  $\Delta$  es denso en  $I$ .  $\square$

Observemos que con esta notación, y de acuerdo a la Observación 2.1, podemos expresar

$$C_n = \bigcup \{ (c(n, i), c(n, i + 1)) \times (c(n, k), c(n, k + 1)) \mid i, k \equiv 1 \pmod{3} \},$$

y como  $S = (I \times I) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ , podemos decir que  $S$  está "inducida" en cierto sentido por  $\Delta \times \Delta$ .

**Nota:** Las condiciones (i), (ii) y (iii) son muy importantes y las usaremos mucho en la prueba de los siguientes teoremas.

En general, también podemos considerar, un conjunto de números

$$\Lambda = \{ a(n, k) \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\} \text{ y } n \in \mathbb{N} \},$$

que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii), es decir:

- (i)  $a(n + 1, 3k) = a(n, k)$  para cada  $k$ .
- (ii)  $a(n, i) < a(n, k)$ , siempre que  $i < k$ .
- (iii)  $\Lambda$  es denso en  $[0, 1]$ .

La expresión que teníamos para la Curva de Sierpiński  $S$  estaba dada por  $S = (I \times I) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ , donde cada  $C_i$  estaba construido a partir de ciertos elementos de  $\Delta \times \Delta$ .

Ahora supongamos que tenemos dos conjuntos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{ a(n, k) \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}, n \in \mathbb{N} \} \text{ y} \\ \Sigma &= \{ b(n, k) \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}, n \in \mathbb{N} \}, \end{aligned}$$

tales que satisfacen las condiciones (i) y (ii).

Definimos la curva  $S(\Lambda, \Sigma)$  de la siguiente manera:

$$S(\Lambda, \Sigma) = (I \times I) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n,$$

donde

$$K_n = \bigcup \{ (a(n, i), b(n, i + 1)) \times (a(n, k), b(n, k + 1)) \mid i, k \equiv 1 \pmod{3} \}.$$

A  $S(\Lambda, \Sigma)$  le llamamos la *curva inducida* por  $\Lambda \times \Sigma$ .

A continuación buscaremos condiciones suficientes para que dados dos conjuntos de números  $\Lambda$  y  $\Sigma$ , la curva inducida por  $\Lambda \times \Sigma$  sea homeomorfa a  $S$ . Esto lo veremos en el Teorema 2.5, pero antes necesitamos probar los siguientes lemas.

**Lema 2.3** Sean  $D$  y  $E$  subconjuntos densos de  $I = [0, 1]$  y  $g : D \rightarrow E$  una función sobre y estrictamente creciente, entonces existe un homeomorfismo estrictamente creciente  $h : I \rightarrow I$  tal que  $h|_D = g$ .

**Demostración.**

Definimos  $h$  de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} \sup\{g(u) \in E : u \leq x\}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Mostraremos las propiedades de  $h$  en una serie de pasos.

(a)  $h$  es una extensión de  $g$ .

Si  $0 \in D$  y  $g(0) > 0$ , por la densidad de  $E$ , existe  $y \in E$  tal que  $0 < y < g(0)$ . Ya que  $g$  es sobre,  $y = g(x)$  para alguna  $x \in D$ . Entonces  $g(x) < g(0)$ , lo cual es absurdo, ya que  $0 \leq x$ . Con esto hemos visto que si  $0 \in D$ , entonces  $g(0) = 0$ .

Ahora tomaremos  $x \in D$ , con  $x > 0$ . Dada  $u \in D$  con  $u \leq x$ , tenemos que  $g(u) \leq g(x)$ . De modo que  $g(x)$  es una cota superior del conjunto  $\{g(u) \in E \mid u \leq x\}$  y, como  $g(x)$  mismo pertenece a este conjunto, podemos concluir que él es el supremo. De aquí que  $g(x) = h(x)$  para toda  $x \in D \setminus \{0\}$ .

Por tanto  $h$  es una extensión de  $g$ .

(b)  $h$  es estrictamente creciente.

Sean  $0 \leq x < w \leq 1$ . Por la densidad de  $D$  existen  $u, v \in D$  tales que  $x < u < v < w$ . En el caso en que  $0 < x$ , ya que  $g$  es creciente,  $g(u)$  es una cota superior de  $\{g(r) \in E \mid r \leq x\}$ , y  $g(v)$  pertenece a  $\{g(r) \in E \mid r \leq w\}$ . Entonces

$$\begin{aligned} h(x) &= \sup\{g(r) \in E \mid r \leq x\} \leq g(u) \\ &< g(v) \leq \sup\{g(y) \in E \mid y \leq w\} = h(w). \end{aligned}$$

Cuando  $x = 0$ ,  $h(x) = 0 \leq g(u) < g(v) \leq h(w)$ .

En cualquier caso  $h(x) < h(w)$ .

Por tanto  $h$  es estrictamente creciente y, en particular, es inyectiva.

(c)  $h(1) = 1$ .

Observemos que  $\{g(u) \in E \mid u \leq 1\} = E$ . Como  $E$  es denso en  $I$ ,  $\sup E = 1$ . De modo que  $h(1) = 1$ .

(d)  $h$  es continua.

Sean  $\varepsilon > 0$  y  $x \in I$ . Sólo analizaremos el caso en que  $0 < x < 1$ . Los otros casos se tratan de manera análoga.

Sea  $y = h(x)$ . Por la inyectividad de  $h$ ,  $0 < y < 1$ . Gracias a la densidad de  $D$  podemos escoger elementos  $v, w \in E$  tales que  $y - \varepsilon < v < y < w < y + \varepsilon$ . Como  $g$  es sobre, existen  $u, s \in D$  tales que  $g(u) = v$  y  $g(s) = w$ . Entonces  $h(u) < h(x) < h(s)$ . Como  $h$  es estrictamente creciente se deduce que  $u < x < s$ .

Sea  $\delta > 0$  tal que  $(x - \delta, x + \delta) \subset (u, s)$ . Dada  $r \in I$  tal que  $|x - r| < \delta$ , se tiene que  $r \in (u, s)$ . Así que  $u < r < s$ . De modo que  $h(u) < h(r) < h(s)$  y entonces  $|h(x) - h(r)| < \varepsilon$ . Esto prueba la continuidad de  $h$  para cada  $x \in I$ .

(e)  $h$  es sobre.

Como  $h$  es continua su imagen es conexa, está contenida en  $I$  y  $0, 1 \in I$ . Entonces la imagen de  $h$  es todo el intervalo  $I$ . Por tanto  $h$  es sobre.

(f)  $h$  es un homeomorfismo.

Esto es consecuencia de que el dominio de  $h$  es compacto, su contradominio es de Hausdorff y  $h$  es biyectiva.

Esto termina la prueba del lema.  $\square$

**Lema 2.4.** *Supongamos que tenemos un conjunto*

$$\Lambda = \{a\langle n, k \rangle \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}, n \in \mathbb{N}\},$$

que satisface las propiedades (i), (ii) y (iii), entonces existe un homeomorfismo estrictamente creciente  $h : I \rightarrow I$  tal que  $h(a\langle n, k \rangle) = \frac{k}{3^n}$ , para toda  $a\langle n, k \rangle \in \Lambda$ .

**Demostración.**

Haremos la demostración por pasos. Recordemos que:

$$\Delta_n = \{x \in I \mid x = \frac{k}{3^n} \text{ con } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \text{ y } \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n.$$

Sea  $g : \Lambda \rightarrow \Delta$ , dada por:  $a\langle n, k \rangle \mapsto \frac{k}{3^n}$ .

(a)  $g$  es sobre.

Dado  $\frac{k}{3^n} \in \Delta$  tenemos que  $\frac{k}{3^n} \in I$  y, por tanto,  $k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}$ , así que si tomamos el respectivo  $a\langle n, k \rangle$ , entonces  $a\langle n, k \rangle \in \Lambda$ . De aquí concluimos que  $g$  es sobre.

(b)  $g$  es estrictamente creciente.

Sean  $a\langle n, k \rangle, a\langle m, i \rangle \in \Lambda$  tales que  $a\langle n, k \rangle < a\langle m, i \rangle$ .

Veremos que entonces  $g(a\langle n, k \rangle) < g(a\langle m, i \rangle)$ . Para ello analizaremos tres casos.

Caso 1.

Supongamos que  $n = m$ . Como  $a\langle n, k \rangle < a\langle m, i \rangle = a\langle n, i \rangle$  entonces  $k < i$ , de donde concluimos que  $\frac{k}{3^n} < \frac{i}{3^m}$ , es decir,  $g(a\langle n, k \rangle) < g(a\langle m, i \rangle)$ .

Caso 2.

Supongamos ahora que  $n < m$ .

Por la condición (i) sabemos que

$$a\langle n, k \rangle = a\langle n+1, 3k \rangle = a\langle n+2, 9k \rangle = \dots \\ \dots = a\langle n+(m-n), 3^{(m-n)}k \rangle = a\langle m, 3^{(m-n)}k \rangle.$$

Como  $a\langle n, k \rangle < a\langle m, i \rangle$ , entonces  $a\langle m, 3^{(m-n)}k \rangle < a\langle m, i \rangle$ .

De aquí que  $3^{(m-n)}k < i$  (por la condición (ii)).

Pero entonces, dividiendo entre  $3^m$ , tenemos que

$$\frac{k}{3^n} = \frac{[3^{(m-n)}k]}{3^m} < \frac{i}{3^m}$$

y, por tanto,  $g(a\langle n, k \rangle) < g(a\langle m, i \rangle)$ .

Caso 3.

Supongamos que  $m < n$ .

De manera análoga a como lo hicimos en el caso anterior, usando la condición (i) tenemos que:

$$a\langle m, i \rangle = a\langle m+1, 3i \rangle = a\langle m+2, 9i \rangle = \dots \\ \dots = a\langle m+(n-m), 3^{(n-m)}i \rangle = a\langle n, 3^{(n-m)}i \rangle.$$

Como  $a\langle n, k \rangle < a\langle m, i \rangle$  entonces  $a\langle n, k \rangle < a\langle n, 3^{(n-m)}i \rangle$ , de donde  $k < 3^{(n-m)}i$  (por la condición (ii)).

Igual que antes, si dividimos entre  $3^n$ , tenemos que  $\frac{k}{3^n} < \frac{[3^{(n-m)}i]}{3^n} = \frac{i}{3^m}$  y, por tanto,  $g(a\langle n, k \rangle) < g(a\langle m, i \rangle)$ .

De lo anterior se deduce que  $g$  es estrictamente creciente.

(c) Por la condición (iii)  $\Lambda$  es denso en  $I$ , y ya vimos que  $\Delta$  también lo es.

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.4.1 y concluir que existe un homeomorfismo  $h: I \rightarrow I$  tal que  $h|_{\Lambda} = g$ ; de esta manera concluimos la prueba del Lema 2.4.  $\square$

**Teorema 2.5.** Sean

$$\Lambda = \{a\langle n, i \rangle \in I \mid i \in \{0, 1, \dots, 3^n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \text{ y} \\ \Sigma = \{b\langle n, k \rangle \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\},$$

tales que satisfagan las condiciones (i), (ii) y (iii). Entonces la curva  $S(\Lambda, \Sigma)$  es homeomorfa a la Curva de Sierpiński  $S$ .

**Demostración.**

Por el Lema 2.4 existen dos homeomorfismos estrictamente crecientes  $h, g: I \rightarrow I$  tales que para cada  $a\langle n, i \rangle \in \Lambda$  se tiene que  $h(a\langle n, i \rangle) = \frac{i}{3^n}$ , y para cada  $b\langle n, k \rangle \in \Sigma$  tenemos que  $g(b\langle n, k \rangle) = \frac{k}{3^n}$ .

Dado que estos homeomorfismos son estrictamente crecientes, se tiene que mandan intervalos en intervalos, en particular, para  $a\langle n, i \rangle \in \Lambda$ , obtenemos que

$$h((a\langle n, i \rangle, a\langle n, i+1 \rangle)) = \left( \frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n} \right)$$

y con  $g$  sucede algo similar.

De aquí podemos ver que el homeomorfismo producto  $h \times g : I \times I \rightarrow I \times I$ , es tal que:

$$(h \times g) ((a\langle n, i \rangle, a\langle n, i+1 \rangle) \times (b\langle n, k \rangle, b\langle n, k+1 \rangle)) = \left( \frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n} \right) \times \left( \frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right).$$

Así pues, recordando cómo habíamos definido  $K_n$ , tenemos que:

$$(h \times g)(K_n) = (h \times g) \left( \bigcup_{i, k \equiv 1 \pmod{3}} \{(a\langle n, i \rangle, a\langle n, i+1 \rangle) \times (b\langle n, k \rangle, b\langle n, k+1 \rangle)\} \right),$$

pero por lo que acabamos de mencionar del homeomorfismo producto, tenemos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(h \times g)(K_n) = \bigcup_{i, k \equiv 1 \pmod{3}} \left[ \left( \frac{i}{3^n}, \frac{i+1}{3^n} \right) \times \left( \frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n} \right) \right] = C_n.$$

De aquí que  $(h \times g)(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ .

Finalmente, usando lo anterior y la inyectividad de  $h \times g$  se tiene que

$$(h \times g)((I \times I) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = (I \times I) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

Por lo tanto  $(h \times g)(S(\Lambda, \Sigma)) = S$ , con lo que el teorema queda demostrado.  $\square$

Gracias al teorema anterior, si queremos encajar un continuo del plano con interior vacío en  $S$ , bastará encajarlo en algún  $S(\Lambda, \Sigma)$ . Lo que haremos a continuación será justamente buscarnos un  $S(\Lambda, \Sigma)$  que nos convenga para eso.

Así pues, dado un continuo con interior vacío en el cuadrado unitario, empezaremos por buscar familias de abiertos cuyo producto evada al continuo en cuestión, y después nos basaremos en ellas para construir  $\Lambda$  y  $\Sigma$ . Esto lo veremos detalladamente en los siguientes lemas.

**Lema 2.6.** *Dados dos intervalos abiertos no vacíos  $A, B \subset I$ , y un continuo  $Y \subset I \times I$  tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ , existen intervalos abiertos no vacíos:  $A' \subset A$  y  $B' \subset B$  tales que  $(A' \times B') \cap Y = \emptyset$ .*

**Demostración.**

Dado que  $Y$  no tiene interior tenemos  $(A \times B) \setminus Y \neq \emptyset$ , por lo que existe  $x \in (A \times B) \setminus Y$ . Como  $Y$  es cerrado en el cuadrado unitario existe una vecindad  $U$  de  $x$  totalmente contenida en  $(I \times I) \setminus Y$ . Sea  $V = U \cap (A \times B)$ , entonces  $V$  es un abierto no vacío en  $I \times I$ . En esta vecindad  $V$  sabemos que podemos meter un cuadrado abierto, es decir, podemos hallar dos intervalos abiertos  $A' \subset A$  y  $B' \subset B$ , tales que  $A' \times B' \subset V \subset (A \times B) \setminus Y$ , con lo que termina la prueba del lema.  $\square$

**Lema 2.7.** Sean  $\{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\{B_1, \dots, B_m\}$  dos familias de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos de  $I$ . Sea  $Y$  un subcontinuo con interior vacío del cuadrado unitario. Entonces existen dos familias  $\{C_1, \dots, C_n\}$  y  $\{D_1, \dots, D_m\}$  de subintervalos abiertos y no vacíos de  $I$  tales que  $C_i \subset A_i$ ,  $D_j \subset B_j$  y  $(C_i \times D_j) \cap Y = \emptyset$  para cada  $i$  y cada  $j$ .

**Demostración.**

Probaremos el lema haciendo una doble inducción. Con esto queremos decir que la prueba se hará por inducción en  $m$  pero que el primer paso inductivo lo haremos por inducción en  $n$ .

Entonces empezamos con  $m = 1$ .

Supongamos que  $n = 1$ . En este caso aplicamos directamente el lema anterior y terminamos.

Ahora supongamos que el Lema 2.7 se cumple para  $n$  (seguimos suponiendo que  $m = 1$ ). Tomemos entonces una familia  $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$  de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos de  $I$ . Para empezar podemos aplicar la hipótesis de inducción a las familias  $\{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\{B_1\}$ . Entonces existen familias  $\{C_1, \dots, C_n\}$  y  $\{D'_1\}$  de subintervalos abiertos y no vacíos de  $I$  tales que  $C_i \subset A_i$ ,  $D'_1 \subset B_1$  y  $(C_i \times D'_1) \cap Y = \emptyset$  para cada  $i \leq n$ . Aplicamos ahora el Lema 2.7 a los conjuntos  $A_{n+1}$  y  $D'_1$ . Entonces existen dos subintervalos abiertos y no vacíos  $C_{n+1}$  y  $D_1$  de  $I$  tales que  $C_{n+1} \subset A_{n+1}$ ,  $D_1 \subset D'_1$  y  $(C_{n+1} \times D_1) \cap Y = \emptyset$ . Entonces las familias  $\{C_1, \dots, C_{n+1}\}$  y  $\{D_1\}$  satisfacen las condiciones requeridas.

Esto termina la inducción en  $n$  y completa la demostración del caso  $m = 1$ .

Ahora haremos el paso inductivo para  $m$ . Entonces supongamos que el Lema 2.7 se cumple para  $m$  y para toda  $n$ . Para demostrar la afirmación para  $m+1$ , tomemos una  $n$  cualquiera y consideremos dos familias de subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos dos a dos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\{B_1, \dots, B_{m+1}\}$  de  $I$ . Aplicamos la hipótesis de inducción a las familias  $\{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\{B_1, \dots, B_m\}$ . Entonces existen dos familias  $\{C'_1, \dots, C'_n\}$  y  $\{D_1, \dots, D_m\}$  de subintervalos abiertos y no vacíos de  $I$  tales que  $C'_i \subset A_i$ ,  $D_j \subset B_j$  y  $(C'_i \times D_j) \cap Y = \emptyset$  para cada  $i \leq n$  y cada  $j \leq m$ . Ahora aplicamos el primer paso de la inducción (cuando  $m$  es igual a 1) a las familias  $\{C'_1, \dots, C'_n\}$  y  $\{B_{m+1}\}$ . Entonces existen dos familias de subintervalos abiertos y no vacíos  $\{C_1, \dots, C_n\}$  y  $\{D_{m+1}\}$  de  $I$  tales que  $C_i \subset C'_i$ ,  $D_{m+1} \subset B_{m+1}$  y  $(C_i \times D_{m+1}) \cap Y = \emptyset$  para cada  $i \leq n$ .

Aseguramos que las familias  $\{C_1, \dots, C_n\}$  y  $\{D_1, \dots, D_{m+1}\}$  satisfacen las condiciones requeridas. Claramente  $C_i$  y  $D_j$  son intervalos abiertos y no vacíos,  $C_i \subset A_i$  y  $D_j \subset B_j$  para cada  $i \leq n$  y cada  $j \leq m+1$ . Si  $i \leq n$  y  $j \leq m$ , entonces  $(C_i \times D_j) \cap Y \subset (C'_i \times D_j) \cap Y = \emptyset$  y, como  $(C_i \times D_{m+1}) \cap Y = \emptyset$ , terminamos de comprobar las propiedades de estos conjuntos y entonces terminamos la inducción y, con esto, la prueba del lema.  $\square$

Antes de continuar definiremos dos funciones que utilizaremos mucho en los siguientes resultados.

Lo que buscamos con estas funciones es que cada vez que tengamos dos puntos en  $I$ , digamos  $x, y \in I$ , con  $x < y$ , tengamos una expresión estándar para los dos puntos interiores del intervalo  $(x, y)$  que lo dividen en tres partes iguales. Así pues:

**Definición 2.8.** Para cada par de puntos  $x < y$  en el intervalo unitario, definimos las funciones  $X, Z : I \times I \rightarrow I$  de la siguiente manera:

$$X(x, y) = \frac{x+1}{3(y-x)} \quad \text{y} \quad Z(x, y) = \frac{y-1}{3(y-x)}$$

y las denotaremos:  $X_{xy}$  y  $Z_{xy}$  respectivamente.

**Teorema 2.9.** *Sea un continuo  $Y \subset I \times I$  tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$  existen dos conjuntos:*

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \{a(n, j) \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\}, & y \\ \Sigma_n &= \{b(n, k) \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\} & \text{tales que} \end{aligned}$$

(1) *cumplen las condiciones (i) y (ii).*

(2)  $(a(n, j), a(n, j+1)) \times (b(n, k), b(n, k+1)) \subset (I \times I) \setminus Y$ ,  
para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1}\}$  tales que  $j, k \equiv 1 \pmod{3}$ .

(3)  $(a(n, 3j+1), a(n, 3j+2)) \subset (X_{a(n-1,j)a(n-1,j+1)}, Z_{a(n-1,j)a(n-1,j+1)})$ , y  
 $(b(n, 3k+1), b(n, 3k+2)) \subset (X_{b(n-1,k)b(n-1,k+1)}, Z_{b(n-1,k)b(n-1,k+1)})$ ,  
para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1}-1\}$ .

(4)  $a(n, 0) = 0$  y  $a(n, 3^n) = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

$$(5) \quad \frac{1}{3} < a(1, 1) < a(1, 2) < \frac{2}{3}.$$

**Demostración.**

La intención es construir  $\Lambda_n$  y  $\Sigma_n$  de una manera similar a

$$\Delta_n = \{x \in I \mid x = \frac{k}{3^n} \text{ con } k \in \mathbb{N}\},$$

aprovechando dicha similitud para establecer las condiciones (i) y (ii) para  $\Lambda_n$  y  $\Sigma_n$ . Así pues, asociaremos los números  $a(n, k)$  y  $b(n, k)$  a los extremos de ciertos intervalos abiertos, que construiremos basándonos en la estructura de  $\Delta_n$ . Esta construcción la realizaremos de manera inductiva.

Empezaremos por definir  $a(1, 0) = \frac{0}{3}$  y  $a(1, 3) = \frac{3}{3} = 1$ , Consideraremos  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3} \in \Delta_1$  y los asociaremos de cierta manera con  $a(1, 1)$  y  $a(1, 2)$ . Esto lo haremos en el:

Paso 1.

Por el Lema 2.6 podemos construir intervalos abiertos no vacíos  $A = (x, y) \subset I$  y  $B = (w, z) \subset I$  tales que  $(A \times B) \subset \left[ \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \times \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right] \setminus Y$ .

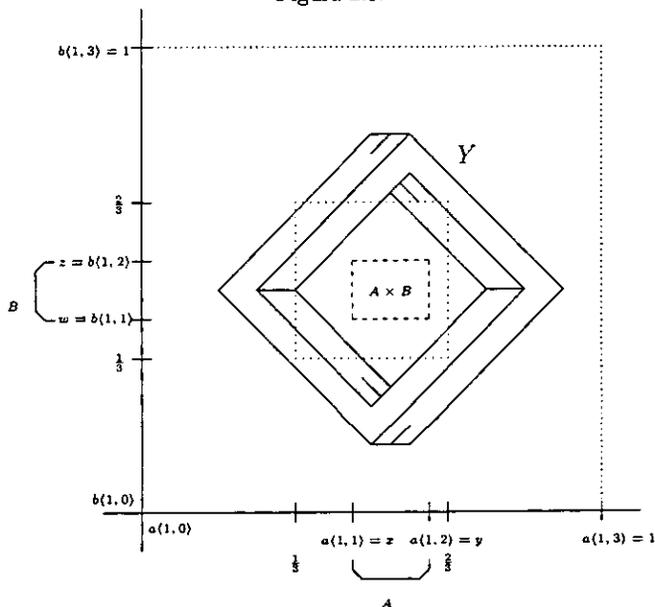
Entonces definimos

$$\begin{aligned} a(1, 0) &= 0 & a(1, 1) &= x \\ a(1, 2) &= y & a(1, 3) &= 1. \end{aligned}$$

También definimos

$$\begin{aligned} b(1, 0) &= 0 & b(1, 1) &= w \\ b(1, 2) &= z & b(1, 3) &= 1. \end{aligned}$$

Figura 2.5:



Finalmente hacemos

$$\Lambda_1 = \{a\langle 1, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, 2, 3\}\} \quad \text{y}$$

$$\Sigma_1 = \{b\langle 1, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, 2, 3\}\}.$$

**Observación 2.9.1**

- (a)  $\Lambda_1$  y  $\Sigma_1$  cumplen la condición (ii).
- (b)  $(a\langle 1, 1 \rangle, a\langle 1, 2 \rangle) \times (b\langle 1, 1 \rangle, b\langle 1, 2 \rangle) = A \times B \subset (I \times I) \setminus Y$ .

Paso 2.

En este paso construiremos los  $a\langle 2, j \rangle$  y los  $b\langle 2, k \rangle$ , y definiremos

$$\Lambda_2 = \{a\langle 2, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^2\}\} \quad \text{y}$$

$$\Sigma_2 = \{b\langle 2, k \rangle \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^2\}\}.$$

Para hacer esta construcción dividiremos en tres partes iguales a los intervalos  $(a\langle 1, 0 \rangle, a\langle 1, 1 \rangle)$ ,  $(a\langle 1, 1 \rangle, a\langle 1, 2 \rangle)$  y  $(a\langle 1, 2 \rangle, a\langle 1, 3 \rangle)$  (usando las funciones  $X_{xy}$  y  $Z_{xy}$ ) y en el "intervalo del centro" de cada uno definiremos los  $a\langle 2, j \rangle$  respectivos de manera similar a como lo hicimos en el paso 1 (para los  $b\langle 2, k \rangle$  haremos algo análogo), entonces:  
definimos los intervalos "del centro" mencionados:

$$\begin{aligned} A_0 &= (X_{a(1,0)a(1,1)}, Z_{a(1,0)a(1,1)}) \subset (a(1,0), a(1,1)) = (0, x), \\ A_1 &= (X_{a(1,1)a(1,2)}, Z_{a(1,1)a(1,2)}) \subset (a(1,1), a(1,2)) = A, \\ A_2 &= (X_{a(1,2)a(1,3)}, Z_{a(1,2)a(1,3)}) \subset (a(1,2), a(1,3)) = (y, 1) \end{aligned}$$

y, análogamente, para  $k \in \{0, 1, 2\}$ ,

$$B_k = (X_{b(1,k)b(1,k+1)}, Z_{b(1,k)b(1,k+1)}).$$

Claramente los  $A_j$  son ajenos entre sí y lo mismo sucede con los  $B_k$ , así que podemos aplicar el Lema 2.7 a las familias  $\{A_j\}_{j=0}^2$  y  $\{B_k\}_{k=0}^2$  para obtener colecciones de subintervalos abiertos no vacíos  $\{C_j\}_{j=0}^2$  y  $\{D_k\}_{k=0}^2$  de  $I$  tales que  $C_j \subset A_j$  y  $D_k \subset B_k$  para cada  $j, k \in \{0, 1, 2\}$  y  $C_j \times D_k \subset (A_j \times B_k) \setminus Y$ , para cada  $j, k \in \{0, 1, 2\}$ .

Ahora, procedemos como en el paso 1:

Para establecer la condición (i) para  $\Lambda_1$ , definimos:  $a(2, 3j) = a(1, j)$ , para cada  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Y para establecer la condición (ii) para  $\Lambda_2$ :

Escribimos cada  $C_j = (x_j, y_j)$ , para algunas  $x_j, y_j \in I$ , definimos  $a(2, 3j + 1) = x_j$ , y  $a(2, 3j + 2) = y_j$ , de donde vemos que, como  $C_j \subset A_j$ , tenemos que:

$$a(1, j) = a(2, 3j) < a(2, 3j + 1) < a(2, 3j + 2) < a(2, 3(j + 1)) = a(1, j + 1),$$

con lo que la condición (ii) queda así establecida para  $\Lambda_2$ .

Realizando un procedimiento análogo para  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , en este paso introducimos la:

### Observación 2.9.2

a)  $\Lambda_1$  y  $\Sigma_1$  cumplen la condición (i), y  $\Lambda_2$  y  $\Sigma_2$  cumplen la condición (ii).

b)  $(a(2, j), a(2, j + 1)) \times (b(2, k), b(2, k + 1)) = C_j \times D_k \subset (I \times I) \setminus Y$ , para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^2 - 1\}$  tales que  $j, k \equiv 1 \pmod{3}$ .

Inductivamente realizamos el Paso m:

Supondremos que ya hemos construido los conjuntos  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-1}$  y  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{m-1}$  satisfaciendo las condiciones 1), 2), 3) y 4).

Como hicimos en el paso 2, dividiremos en tres partes iguales a los intervalos

$$\begin{aligned} &(a(m-1, 0), a(m-1, 1)), \\ &(a(m-1, 1), a(m-1, 2)), \dots, \\ &(a(m-1, 3^{m-1}-1), a(m-1, 3^m-1)) \end{aligned}$$

y una vez más en el "intervalo del centro" de cada uno definiremos los  $a(m, j)$  respectivos como lo hemos venido haciendo:

Definimos los "intervalos del centro" mencionados como sigue:

$$A_0 = (X_{a(m-1,0)a(m-1,1)}, Z_{a(m-1,0)a(m-1,1)}) \subset (a(m-1,0), a(m-1,1)),$$

$$A_1 = (X_{a(m-1,1)a(m-1,2)}, Z_{a(m-1,1)a(m-1,2)}) \subset (a(m-1,1), a(m-1,2)),$$

en general para  $j \in \{0, 1, \dots, 3^{m-1} - 1\}$ , definimos:

$$A_j = (X_{a(m-1,j)a(m-1,j+1)}, Z_{a(m-1,j)a(m-1,j+1)}) \subset (a(m-1,j), a(m-1,j+1)).$$

Análogamente, para  $k \in \{0, 1, \dots, 3^{m-1} - 1\}$ , definimos:

$$B_k = (X_{b(m-1,k)b(m-1,k+1)}, Z_{b(m-1,k)b(m-1,k+1)}) \subset (b(m-1,k), b(m-1,k+1)).$$

Por construcción, los  $A_j$  son disjuntos entre sí y lo mismo pasa con los  $B_k$ , así que podemos, una vez más, aplicar el Lema 2.7 a las familias  $\{A_j\}_{j=0}^{3^{m-1}-1}$  y  $\{B_k\}_{k=0}^{3^{m-1}-1}$  para obtener dos colecciones de subintervalos abiertos no vacíos de  $I$ :  $\{C_j\}_{j=0}^{3^{m-1}-1}$  y  $\{D_k\}_{k=0}^{3^{m-1}-1}$ , tales que  $C_j \subset A_j$  y  $D_k \subset B_k$  para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{m-1} - 1\}$  y  $C_j \times D_k \subset (A_j \times B_k) \setminus Y$ , para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{m-1} - 1\}$ .

Ahora, procediendo como lo hemos hecho:

Para establecer la condición (i) para  $\Lambda_{m-1}$ , definimos:

$$a(m, 3j) = a(m-1, j),$$

para cada  $j \in \{0, 1, \dots, 3^{m-1}\}$ .

Y para establecer la condición (ii) para  $\Lambda_m$ :

como antes, si cada  $C_j = (x_j, y_j)$ , para algunas  $x_j, y_j \in I$ , entonces definimos

$$a(m, 3j+1) = x_j, \quad a(m, 3j+2) = y_j.$$

De aquí vemos que como  $C_j \subset A_j$ , se tiene que:

$$a(m-1, j) = a(m, 3j) < a(m, 3j+1) < a(m, 3j+2) < a(m, 3(j+1)) = a(m-1, j+1),$$

con lo que la condición (ii) queda así establecida para  $\Lambda_m$ .

Si realizamos un procedimiento análogo para  $\Sigma_{m-1}$  y construimos  $\Sigma_m$ , podemos introducir la:

**Observación 2.9.m**

- a)  $\Lambda_{m-1}$  y  $\Sigma_{m-1}$  cumplen la condición (i), y  $\Lambda_m$  y  $\Sigma_m$  la condición (ii).
- b)  $(a(m, j), a(m, j+1)) \times (b(m, k), b(m, k+1)) = C_j \times D_k \subset (I \times I) \setminus Y$ , para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^m - 1\}$  tales que  $j, k \equiv 1 \pmod{3}$ .

Terminada la inducción definimos:  $\Lambda = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_m$  y  $\Sigma = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Sigma_m$ .

Para concluir la prueba del teorema, sólo nos falta ver que se satisface la condición 4). Pero esto resulta de que, por la condición (i):

$$0 = a(1, 0) = a(2, 0) = \dots = a(n, 0) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte, usando otra vez la propiedad (i) para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$1 = a\langle 1, 3 \rangle = a\langle 2, 9 \rangle = a\langle 3, 3^3 \rangle = \dots = a\langle n, 3^n \rangle.$$

De este modo termina la prueba de la conclusión (4) del Teorema 2.9, con lo que finaliza la prueba de éste.  $\square$

Gracias a este teorema, dado un continuo  $Y \subset I \times I$  tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ , podemos hallar dos conjuntos  $\Lambda$  y  $\Sigma$  como antes y que satisfagan las condiciones (i) y (ii); nos gustaría que también satisficieran la condición (iii) y eso lo veremos en el Teorema 2.11, pero antes necesitamos probar un lema.

**Lema 2.10.** Consideremos el intervalo  $I = [0, 1]$  y una colección de conjuntos  $\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ , donde  $\Gamma_n = \{a\langle n, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\}$  contruidos de manera que :

1.  $\frac{1}{3} < a\langle 1, 1 \rangle < a\langle 1, 2 \rangle < \frac{2}{3}$ ,

y para toda  $n \geq 1$ :

2. se satisfacen las condiciones (i) y (ii).

3.  $(a\langle n, 3j+1 \rangle, a\langle n, 3j+2 \rangle) \subset (X_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle}, Z_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle})$ , para cada  $j \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ .

Entonces para toda  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene:

$$\max \{ |a\langle n, j \rangle - a\langle n, j+1 \rangle| : j \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\} \} < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

**Demostración.**

Por inducción. Para  $n = 1$ :

Por la condición 1 tenemos:  $a\langle 1, 1 \rangle, a\langle 1, 2 \rangle \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , además  $a\langle 1, 1 \rangle \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$  y  $a\langle 1, 2 \rangle \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ , de donde:

$$\begin{aligned} & \max \{ |a\langle 1, j \rangle - a\langle 1, j+1 \rangle| : j \in \{0, 1, 2\} \} \\ &= \max \{ |a\langle 1, 0 \rangle - a\langle 1, 1 \rangle|, |a\langle 1, 1 \rangle - a\langle 1, 2 \rangle|, |a\langle 1, 2 \rangle - a\langle 1, 3 \rangle| \} < \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ahora supongamos que la conclusión es cierta para  $n - 1$  y veamos cómo son las diferencias  $|a\langle n, k \rangle - a\langle n, k+1 \rangle|$  con  $k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ .

Bastará ver estas diferencias para números  $k$  de la forma  $3j, 3j+1$  y  $3j+2$ .

Así pues, de acuerdo a la hipótesis 3 tenemos:

$$\begin{aligned} & (1) |a\langle n, 3j+1 \rangle - a\langle n, 3j+2 \rangle| \\ & < |X_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle} - Y_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle}| \\ & = \frac{1}{3} |a\langle n-1, j \rangle - a\langle n-1, j+1 \rangle|. \end{aligned}$$

Usando también la condición (i):

$$\begin{aligned}
 (2) & \quad |a(n, 3j) - a(n, 3j + 1)| \\
 & = |a(n-1, j) - a(n, 3j + 1)| \\
 & < |a(n-1, j) - Y_{a(n-1, j)a(n-1, j+1)}| \\
 & = \frac{2}{3} |a(n-1, j) - a(n-1, j+1)|.
 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
 (3) & \quad |a(n, 3(j+1)) - a(n, 3j+2)| \\
 & = |a(n-1, j+1) - a(n, 3j+2)| \\
 & < |a(n-1, j+1) - X_{a(n-1, j)a(n-1, j+1)}| \\
 & = \frac{2}{3} |a(n-1, j) - a(n-1, j+1)|.
 \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis de inducción a las desigualdades anteriores obtenemos para  $j \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ :

$$\begin{aligned}
 (1') & \quad |a(n, 3j+1) - a(n, 3j+2)| \\
 & < \frac{1}{3} |a(n-1, j) - a(n-1, j+1)| \\
 & < \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2') & \quad |a(n, 3j) - a(n, 3j+1)| \\
 & < \frac{2}{3} |a(n-1, j) - a(n-1, j+1)| \\
 & < \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 (3') & \quad |a(n, 3(j+1)) - a(n, 3j+2)| \\
 & < \frac{2}{3} |a(n-1, j) - a(n-1, j+1)| \\
 & < \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Finalmente, de (1'), (2') y (3') concluimos que

$$\text{máx } \{|a(n, j) - a(n, j+1)| : j \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\}\} < \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

con lo que concluye la prueba del Lema 2.10.  $\square$

**Teorema 2.11.** Dado un conjunto  $\Lambda$ , como lo habíamos construido en el Teorema 2.9, es decir  $\Lambda = \cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ , con  $\Lambda_n = \{a\langle n, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\}$ , tal que para cada  $n \geq 1$ :

- 1)  $\Lambda_n$  cumple las condiciones (i) y (ii).
  - 2)  $(a\langle n, 3j+1 \rangle, a\langle n, 3j+2 \rangle) \subset (X_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle}, Z_{a\langle n-1, j \rangle a\langle n-1, j+1 \rangle})$ , con  $j \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ ,
  - 3)  $a\langle n, 0 \rangle = 0$  y  $a\langle n, 3^n \rangle = 1$ .
- Entonces  $\Lambda$  es denso en  $I$ .

**Demostración.**

Como podemos ver,  $\Lambda_n$  satisface las condiciones 1, 2 y 3 del Lema 2.10. Aplicándolo, obtenemos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\max \{ |a\langle n, j \rangle - a\langle n, j+1 \rangle| \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n - 1\} \} < \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ahora veremos que cualquier abierto básico de  $I$  intersecciona a  $\Lambda_n$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ .

Sean entonces  $\varepsilon > 0$  y  $0 < z < 1$  (los casos  $z = 0$  y  $z = 1$  son análogos).

Tomemos  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\left(\frac{2}{3}\right)^m < \varepsilon$ . Veremos que  $\Lambda_m \cap (z - \varepsilon, z + \varepsilon) \neq \emptyset$ .

Dado que  $a\langle m, 0 \rangle = 0$  y  $a\langle m, 3^m \rangle = 1$ , en particular existen  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^m\}$  tales que  $a\langle m, j \rangle \leq z \leq a\langle m, k \rangle$ . Ahora, si suponemos que  $\Lambda_m$  no intersecciona a  $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  entonces tenemos a  $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$  entre dos elementos consecutivos de  $\Lambda_m$ , es decir:

$$a\langle m, r \rangle < z - \varepsilon < z + \varepsilon < a\langle m, r+1 \rangle,$$

para alguna  $r \in \{0, 1, \dots, 3^m\}$ . Esto no puede ser ya que, por el Lema 2.10, tenemos que

$$|a\langle m, j \rangle - a\langle m, j+1 \rangle| < \left(\frac{2}{3}\right)^m < \varepsilon,$$

para toda  $j \in \{0, 1, \dots, 3^m - 1\}$ .

Por lo tanto,  $\Lambda_m \cap (z - \varepsilon, z + \varepsilon) \neq \emptyset$  y  $\Lambda$  es denso en  $I$ , con lo que termina la prueba del teorema.  $\square$

**Corolario 2.12.** Sea un continuo  $Y \subset I \times I$  tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ , entonces para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existen dos conjuntos:

$$\Lambda_n = \{a\langle n, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\} \quad \text{y} \\ \Sigma_n = \{b\langle n, k \rangle \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\}\}$$

tales que

- 1) cumplen las condiciones (i) y (ii).
- 2)  $\Lambda = \cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  y  $\Sigma = \cup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$  cumplen la condición (iii).
- 3) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a\langle n, j \rangle, a\langle n, j+1 \rangle) \times (b\langle n, k \rangle, b\langle n, k+1 \rangle) \subset (I \times I) \setminus Y$ , siempre que  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1}\}$  tales que  $j, k \equiv 1 \pmod{3}$ .

**Demostración.**

Basta probar que los conjuntos  $\Lambda$  y  $\Sigma$  construidos en el Teorema 2.9 cumplen la condición (iii), pero esto es consecuencia directa del Teorema 2.11.  $\square$

**Teorema 2.13** (de la universalidad). *La Curva de Sierpiński  $S$  es universal entre los continuos con interior vacío del plano. En otros términos: si un continuo  $Y \subset \mathbb{R}^2$  es tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ , entonces existe una función  $f : Y \rightarrow S$  tal que  $f : Y \rightarrow f(Y)$  es un homeomorfismo. Es decir,  $Y$  puede ser encajado en  $S$ . De esta manera se establece la universalidad de la Curva de Sierpiński.*

**Demostración.**

Sea  $Y$  un continuo contenido en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\text{int}(Y) = \emptyset$ . Como  $Y$  es acotado podemos hallar  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $Y \subset [a, b] \times [a, b]$ . Sea  $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  un homeomorfismo y sea  $\bar{Y} = (g \times g)(Y)$ .

Gracias al homeomorfismo  $g \times g$ , tenemos que  $\bar{Y}$  es un subcontinuo del cuadrado unitario con interior vacío, por tanto estamos en condiciones de aplicar el Corolario 2.12 a  $\bar{Y}$ , es decir, existen dos conjuntos

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{a\langle n, j \rangle \in I \mid j \in \{0, 1, \dots, 3^n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\} \text{ y} \\ \Sigma &= \{b\langle n, k \rangle \in I \mid k \in \{0, 1, \dots, 3^n\} \text{ y } n \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

tales que satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) y, además, cumplen la siguiente condición:

$$(a\langle n, j \rangle, a\langle n, j + 1 \rangle) \times (b\langle n, k \rangle, b\langle n, k + 1 \rangle) \subset (I \times I) \setminus \bar{Y},$$

para cada  $j, k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1}\}$  tales que  $j, k \equiv 1 \pmod{3}$ .

Recordemos que para dos conjuntos  $\Lambda$  y  $\Sigma$  como los anteriores habíamos definido:

$$K_n = \cup\{(a\langle n, i \rangle, a\langle n, i + 1 \rangle) \times (b\langle n, k \rangle, b\langle n, k + 1 \rangle) \mid i, k \equiv 1 \pmod{3}, a\langle n, i \rangle \in \Lambda, \text{ y } b\langle n, k \rangle \in \Sigma\}.$$

Del anterior inciso (3) podemos ver que  $K_n \subset (I \times I) \setminus \bar{Y}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , de donde  $\cup_{n=1}^{\infty} K_n \subset (I \times I) \setminus \bar{Y}$  y entonces  $\bar{Y} \subset (I \times I) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ .

Ahora, aplicando el Teorema 2.5 a  $\Lambda$  y  $\Sigma$ , tenemos que la curva inducida  $S(\Lambda, \Sigma)$  por  $\Lambda$  y  $\Sigma$ , es decir  $S(\Lambda, \Sigma) = (I \times I) \setminus \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ , es homeomorfa a la Curva de Sierpiński  $S$ . Sea  $h : S(\Lambda, \Sigma) \rightarrow S$  un homeomorfismo.

Nosotros finalmente queremos un homeomorfismo entre  $Y$  y un subcontinuo de  $S$ . Afirmamos que  $f = h \circ (g \times g)|_Y$  es el homeomorfismo que buscamos.

Por ser composición de homeomorfismos en su imagen,  $f$  es un homeomorfismo en su imagen.

Además  $f(Y) = h \circ (g \times g)(Y) = h(\bar{Y}) \subset S$ , por lo que  $f$  está bien definida y, por tanto,  $Y$  puede ser encajado en  $S$ .

De esta manera concluimos con la prueba de la universalidad de la Curva de Sierpiński.  $\square$

## Capítulo 3

# Identificaciones

En este capítulo introduciremos los espacios  $C \times I / (\sim f)$ , que resultan de identificar el espacio  $C \times I$  utilizando un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$ . Veremos algunas de sus propiedades y construiremos un modelo en  $\mathbb{R}^3$ .

Como en todo este trabajo,  $C$  denota al conjunto de Cantor e  $I$  al intervalo  $[0, 1]$ .

Empezaremos dando algunas definiciones.

**Definición 3.1.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $Y$  un conjunto arbitrario. Sea  $p : X \rightarrow Y$  una función suprayectiva. Definimos la **topología de identificación** en  $Y$  determinada por  $p$  dada por  $\tau(p) = \{U \subset Y \mid p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$ .

**Definición 3.2.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $p : X \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva. Decimos que  $p$  es una **identificación** si la topología de  $Y$  es exactamente  $\tau(p)$ .

Sea  $f : C \rightarrow C$  un homeomorfismo.

Consideremos la siguiente relación en el subespacio  $C \times I$  de  $\mathbb{R}^2$  :

A un punto de la forma  $(x, 1) \in C \times I$  lo relacionamos con el punto  $(f(x), 0)$  en  $C \times I$ . Al resto de los puntos de  $C \times I$  no los relacionamos con ningún otro punto del espacio.

Sea  $C \times I / (\sim f)$  el espacio cociente inducido por dicha relación y sea

$$P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim f)$$

la función cociente natural. Claramente  $P$  es una función suprayectiva, así que podemos darle al espacio  $C \times I / (\sim f)$  la topología de identificación.

A continuación veremos algunas características del comportamiento de  $P$ .

**Observación 3.3** Las fibras de  $P$  constan de uno o dos puntos, es decir, cada  $P^{-1}(z)$  es de la forma  $\{(x, 1), (f(x), 0)\}$  para alguna  $x \in C$ , o bien es de la forma  $\{(x, y)\}$  para algún  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ .

Antes de continuar con las características de  $P$  introducimos algunos conceptos, los cuales estarán muy relacionados con los espacios  $C \times I / (\sim f)$  y el comportamiento de  $P$ .

**Definición 3.4** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{G} = \{A_j : j \in J\}$  una partición del mismo. Decimos que la partición  $\mathcal{G}$  es **semicontinua superiormente** en  $A_j \in \mathcal{G}$  si se cumple lo siguiente:  
 Para cada abierto  $U$  de  $X$ , con  $A_j \subset U$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $A_j \subset V \subset U$  y para cada elemento  $A_k$  de  $\mathcal{G}$  que intersecte a  $V$ , se tiene que  $A_k \subset U$ .

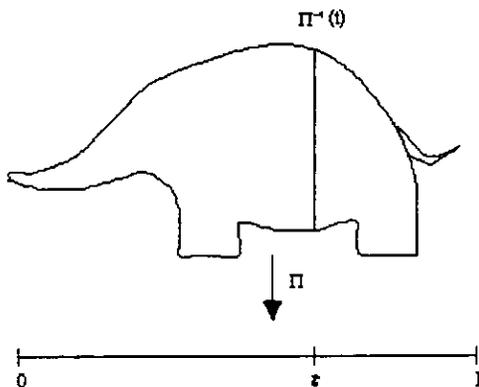
**Definición 3.5** Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{G} = \{A_j : j \in J\}$  una partición del mismo. Decimos que la partición  $\mathcal{G}$  es **semicontinua superiormente** si  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente en  $A_j$  para toda  $A_j \in \mathcal{G}$ .

Para familiarizarnos con este concepto veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 3.6**

Sea  $X$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  que se muestra en la figura 3.1.

Figura 3.1:

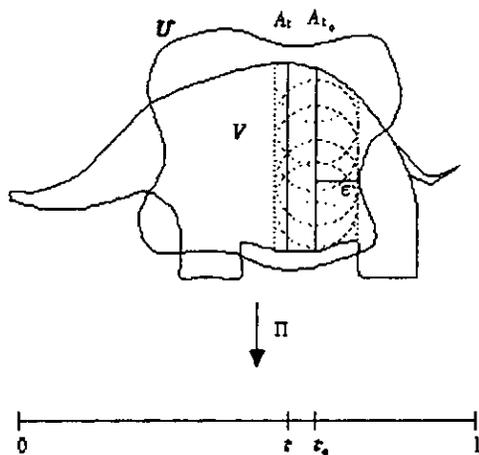


y sea  $\Pi_x : X \rightarrow [0, 1]$  la proyección usual sobre el eje  $X$ .

Sea  $\mathcal{G} = \{\Pi_x^{-1}(t) \mid t \in [0, 1]\}$ , entonces claramente  $\mathcal{G}$  constituye una partición de  $X$ .

Para ver que  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente, tomamos  $A_{t_0} = \Pi_x^{-1}(t_0)$  un elemento de  $\mathcal{G}$  y un abierto  $U$  que lo contenga. Tomamos también  $\varepsilon > 0$  de manera que  $\cup \{B(x, \varepsilon) : x \in A_{t_0}\} \subset U$ , y definimos  $V = \cup \{B(x, \varepsilon) : x \in A_{t_0}\}$  (véase figura 3.2).

Figura 3.2:



Claramente  $A_{t_0} \subset V$ . Además, si  $A_t \in \mathcal{G}$  es tal que  $A_t \cap V \neq \emptyset$ , entonces es fácil ver que  $A_t \subset V \subset U$ . Por tanto  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente.

**Ejemplo 3.7**

Sea  $X$  el subespacio de  $I \times I$  que se muestra en la figura 3.3 y sea  $\mathcal{G} = \{(\{x\} \times I) \cap X \mid x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) \mid y \in I\}$ .

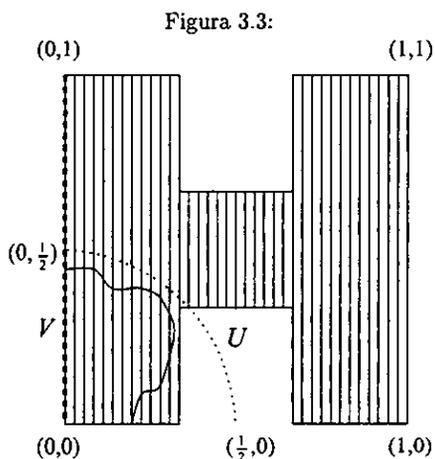
Claramente  $\mathcal{G}$  constituye una partición de  $X$ .

Sea  $U = B\left((0, 0), \frac{1}{2}\right) \cap X$ .

Por construcción, los únicos elementos de  $\mathcal{G}$  que están contenidos en  $U$  son los de la forma  $\{(0, y) \mid 0 \leq y < \frac{1}{2}\}$ , pero cualquier abierto  $V$  de  $X$  que contenga a  $(0, 0)$  necesariamente intersecciona a elementos de  $\mathcal{G}$  de la forma  $\{(\{x\} \times I) \cap X \mid x \in (0, 1]\}$ .

Por tanto  $V$  no puede satisfacer las condiciones pedidas en la Definición 3.4 y, en consecuencia,  $\mathcal{G}$  no es semicontinua superiormente.

A continuación daremos una partición semicontinua superiormente de  $C \times I$ , que nos ayudará a ver algunas de las propiedades del espacio  $C \times I / (\sim f)$ .



**Lema 3.8** Si  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim f)$  es como la definimos anteriormente, entonces la partición  $\mathcal{G} = \{P^{-1}(z) \mid z \in C \times I / (\sim f)\}$  de  $C \times I$  es semicontinua superiormente.

**Demostración.**

Sea  $A_{z_0} = P^{-1}(z_0) \in \mathcal{G}$ , entonces por la Observación 3.3,  $A_{z_0} = \{(x, 1), (f(x), 0)\}$  para algún  $x \in C$ , o bien  $A_{z_0} = \{(x, y)\}$  para algún  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ .

Para ver que  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente en  $A_{z_0}$  analizaremos dos casos.

**Caso 1)**

Supongamos que  $A_{z_0} = \{(x_0, y_0)\}$  para algún  $(x_0, y_0) \in C \times (0, 1)$ , y que  $U$  es un abierto de  $C \times I$  tal que  $A_{z_0} \subset U$ .

Sea  $V = [C \times (0, 1)] \cap U$ , entonces  $V$  es abierto en  $C \times I$  y  $A_{z_0} \subset V$ .

Sea  $A_z \in \mathcal{G}$  tal que  $A_z \cap V \neq \emptyset$  y sea  $(x, y) \in A_z \cap V \subset A_z \cap (C \times (0, 1))$ .

En particular  $y \in (0, 1)$  y por tanto  $A_z = \{(x, y)\} \subset V \subset U$ .

En consecuencia  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente en  $A_{z_0}$ .

**Caso 2)**

Supongamos ahora que  $A_{z_0} = \{(x_0, 1), (f(x_0), 0)\}$  para algún  $x_0 \in C$ , y que  $U$  es un abierto de  $C \times I$  tal que  $A_{z_0} \subset U$ .

Sea  $F : C \times \{1\} \rightarrow C \times \{0\}$  dada por:  $F(c, 1) = (f(c), 0)$ . Como  $f$  es un homeomorfismo, claramente  $F$  también es un homeomorfismo.

Consideremos los conjuntos

$$W_0 = U \cap (C \times \{0\}) \text{ y } W_1 = F^{-1}(W_0) \cap U \subset C \times \{1\}.$$

Es fácil ver que estos conjuntos satisfacen las siguientes propiedades:

- (i)  $W_1 \neq \emptyset \neq W_0$ , ya que  $(f(x_0), 0) \in W_0$  y  $(x_0, 1) \in W_1$ .
- (ii)  $F(W_1) \subset W_0 \subset U$ .
- (iii)  $W_0$  es abierto en  $C \times \{0\}$ , así que  $W_1$  es abierto en  $C \times \{1\}$ .
- (iv)  $W_1 \cup F(W_1)$  es abierto en  $C \times \{0, 1\}$ .

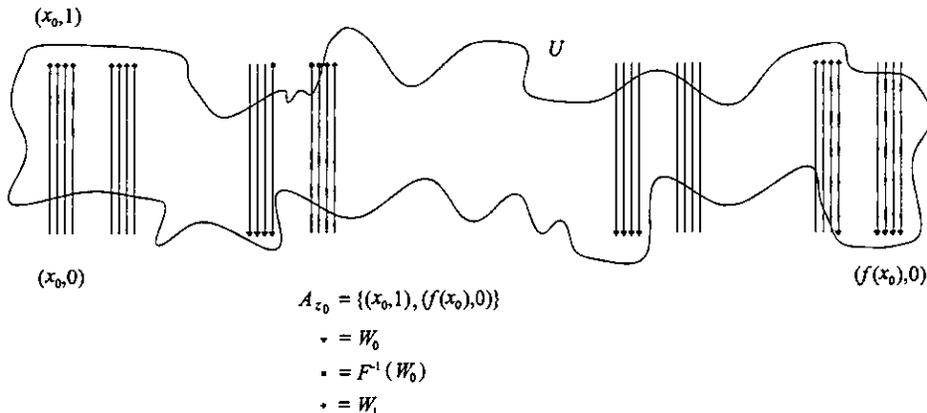


Figura 3.4:

Por la condición (iv) podemos tomar un subconjunto abierto  $W$  de  $C \times I$  tal que

$$W \cap (C \times \{1\}) = W_1 \text{ y } W \cap (C \times \{0\}) = F(W_1).$$

Sea  $V = W \cap U$ . Veremos que  $V$  es un abierto que nos sirve para comprobar la semicontinuidad superior de  $\mathcal{G}$  en  $A_{z_0}$ .

Empezaremos por ver que  $A_{z_0} \subset V$ . Por hipótesis tenemos que  $A_{z_0} \subset U$ , así que basta probar que  $A_{z_0} \subset W$ .

Claramente  $(f(x_0), 0) \in W_0$ , de modo que  $(x_0, 1) \in W_1 \subset W$ . De aquí que

$$(f(x_0), 0) \in F(W_1) \subset W.$$

Por tanto  $A_{z_0} \subset W$  y, en consecuencia  $A_{z_0} \subset V$ .

Ahora, sea  $A_z \in \mathcal{G}$  tal que  $A_z \cap V \neq \emptyset$ .

Si  $A_z$  consta de un solo punto entonces claramente  $A_z \subset V \subset U$ .

Si  $A_z$  es de la forma  $\{(x, 1), (f(x), 0)\}$ , entonces  $(x, 1) \in V$  ó  $(f(x), 0) \in V$ . Supongamos que  $(x, 1) \in V$ , para ver que  $(f(x), 0) \in V$  (el caso en que  $(f(x), 0) \in V$  se trata de manera análoga).

En este caso

$$(x, 1) \in W \cap (C \times \{1\}) = W_1.$$

De aquí que

$$(f(x), 0) \in F(W_1) \subset W.$$

Por el inciso (ii) tenemos que  $F(W_1) \subset U$ , así que

$$(f(x), 0) \in W \cap U = V.$$

Por tanto  $A_z = \{(x, 1), (f(x), 0)\} \subset V$ , con lo que podemos concluir que  $\mathcal{G}$  es semicontinua superiormente en  $A_{z_0}$  y terminamos así la prueba del lema.  $\square$

A continuación veremos ciertos teoremas que nos ayudarán a ver algunas propiedades de los espacios  $C \times I / (\sim f)$ . La demostración de los tres siguientes teoremas es complicada y requiere el uso de herramientas que no desarrollaremos aquí. El lector puede encontrar la prueba del Teorema 3.9 en [HY], la del Teorema 3.10 en [Na] y la del Teorema 3.1 en [Mu].

**Teorema 3.9** Sean  $X$  un espacio de Hausdorff, compacto, y  $p: X \rightarrow Y$  una identificación. Si la partición  $\mathcal{G} = \{p^{-1}(y) \mid y \in Y\}$  de  $X$  es semicontinua superiormente entonces  $Y$  es un espacio de Hausdorff.

**Teorema 3.10** Si  $X$  es un espacio compacto y métrico,  $Y$  es de Hausdorff y  $g: X \rightarrow Y$  es una función continua y sobre, entonces  $Y$  tiene una base numerable.

**Teorema 3.11** Si  $X$  es un espacio regular, de Hausdorff y tiene una base numerable entonces  $X$  es metrizable.

Los teoremas anteriores nos servirán para determinar ciertas propiedades de los espacios  $C \times I / (\sim f)$ , y esto es lo que veremos en el siguiente

**Teorema 3.12** Sea  $f: C \rightarrow C$  un homeomorfismo, entonces  $C \times I / (\sim f)$  es un espacio compacto y métrico.

**Demostración.**

Por la construcción de la topología para  $C \times I / (\sim f)$  se tiene que  $P$  es continua. Además, como  $C \times I$  es un espacio compacto, entonces  $P(C \times I) = C \times I / (\sim f)$  también es compacto.

Por otro lado, en el Lema 3.8 vimos que la partición

$$\mathcal{G} = \{P^{-1}(z) \mid z \in C \times I / (\sim f)\}$$

de  $C \times I$  es semicontinua superiormente.

De acuerdo al Teorema 3.9 tenemos que  $C \times I / (\sim f)$  es un espacio de Hausdorff, y por el Teorema 3.10,  $C \times I / (\sim f)$  tiene una base numerable.

Finalmente, gracias al Teorema 3.11,  $C \times I / (\sim f)$  es metrizable, con lo que concluimos la prueba del Teorema.  $\square$

Hasta ahora sólo hemos visto algunas propiedades muy generales de los espacios  $C \times I / (\sim f)$ .

A fin de que podamos visualizarlos mejor, presentaremos una manera de verlos como subespacios de  $\mathbb{R}^3$  cuando  $f$  es tal que  $f(c) \neq c$  para cada  $c \in C$ .

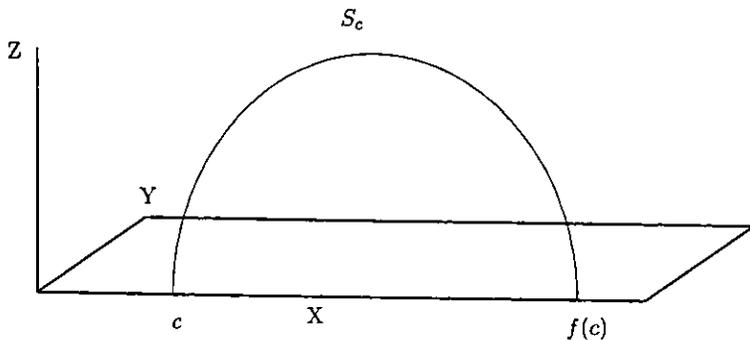
En otras palabras, construiremos un espacio  $W_f \subset \mathbb{R}^3$  y un homeomorfismo  $h : C \times I / (\sim f) \rightarrow W_f$ .

Para ello empezaremos suponiendo que el homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  es tal que  $f(c) \neq c$  para cada  $c \in C$ .

**Construcción de  $W_f$ .**

Para cada  $c \in C$  tomamos el semicírculo  $S_c$  centrado en el punto  $\left(\frac{c+f(c)}{2}, 0, 0\right)$ , que pasa por los puntos  $(c, 0, 0)$  y  $(f(c), 0, 0)$  y que está contenido en el semiplano  $XZ^+ = \{(x, 0, z) \mid z \geq 0\}$ . Como  $c \neq f(c)$ ,  $S_c$  es no degenerado (véase figura 3.5).

Figura 3.5:



Observemos que el radio de  $S_c$  es  $\frac{|c-f(c)|}{2} > 0$ . Entonces para cada  $c \in C$ , podemos parametrizar  $S_c$  de la siguiente manera:

$$S_c = \left\{ \frac{|c-f(c)|}{2} (\cos \theta, 0, \text{sen } \theta) + \left( \frac{c+f(c)}{2}, 0, 0 \right) \mid 0 \leq \theta \leq \pi \right\}$$

$$= \left\{ \frac{|c - f(c)|}{2} \left( \frac{c + f(c)}{|c - f(c)|} + \cos \theta, 0, \sin \theta \right) \mid 0 \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

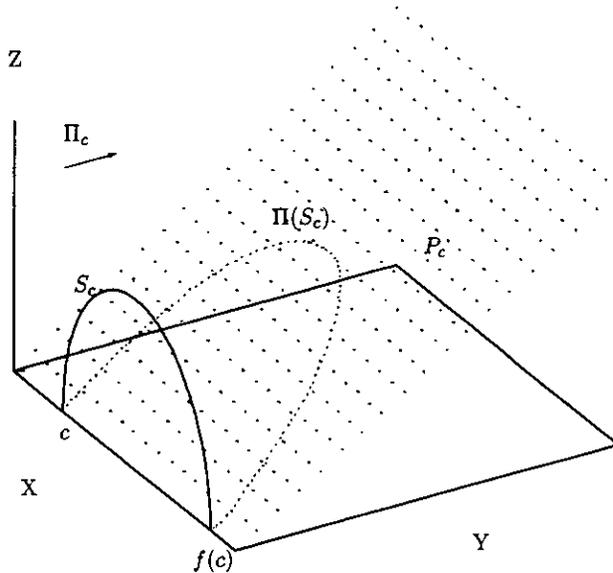
Ahora, para cada  $c \in C$ , denotamos

$$P_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = cz\}.$$

Es fácil ver que  $P_c$  es un plano que contiene al eje  $X$ . Definimos la proyección  $\Pi_c : S_c \rightarrow P_c$  dada por  $\Pi_c(x, 0, z) = (x, cz, z)$ .

Claramente  $\Pi_c(x, 0, z) \in P_c$  para cada  $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3$  (véase la figura 3.7).

Figura 3.6:



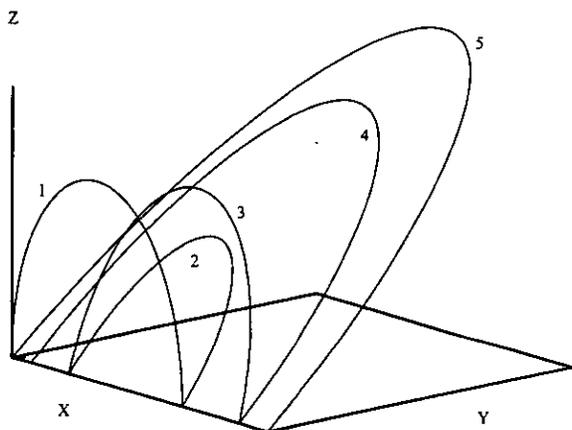
Lo que buscamos ahora es parametrizar  $\Pi_c(S_c)$ . Así pues, de acuerdo a la expresión de  $S_c$  obtenemos:

$$\Pi_c(S_c) = \left\{ \frac{|c - f(c)|}{2} \left( \frac{c + f(c)}{|c - f(c)|} + \cos \theta, c \sin \theta, \sin \theta \right) \mid 0 \leq \theta \leq \pi \right\}.$$

Finalmente definimos el espacio  $W_f = \bigcup \{\Pi_c(S_c) \mid c \in C\}$ .

Lo que nos interesa ahora es ver que  $W_f$  es homeomorfo a  $C \times I / (\sim f)$ . Para ello introducimos antes el siguiente:

Figura 3.7:



- 1  $\Pi_0(S_0)$
- 2  $\Pi_{\frac{2}{3}}(S_{\frac{2}{3}})$
- 3  $\Pi_{\frac{1}{2}}(S_{\frac{1}{2}})$
- 4  $\Pi_{\frac{1}{3}}(S_{\frac{1}{3}})$
- 5  $\Pi_1(S_1)$

**Teorema 3.13** Si  $g : C \times I \rightarrow W_f$  está dada por

$$g(c, t) = \left( \frac{c + f(c)}{2} + \frac{c - f(c)}{2} \cos t\pi, \frac{|c - f(c)|}{2} c \sin t\pi, \frac{|c - f(c)|}{2} \sin t\pi \right),$$

entonces  $g$  es una función continua y sobre.

**Demostración.**

Haremos la prueba en tres pasos.

Paso 1.

Veremos que  $g$  está bien definida.

Sea  $(c, t) \in C \times I$ . Analizaremos dos casos.

(i) Si  $c > f(c)$  entonces claramente

$$\begin{aligned} g(c, t) &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{|c-f(c)|}{2} \cos t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \sin t\pi \right) \\ &= \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos t\pi, c \sin t\pi, \sin t\pi \right) \in \Pi_c(S_c) \subset W_f. \end{aligned}$$

(ii) Si  $c < f(c)$  tenemos que

$$\begin{aligned} g(c, t) &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{c-f(c)}{2} \cos t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \sin t\pi \right) \\ &= \left( \frac{c+f(c)}{2} - \frac{|c-f(c)|}{2} \cos t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \sin t\pi \right) = \\ &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{|c-f(c)|}{2} \cos(\pi - t\pi), \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin(\pi - t\pi), \frac{|c-f(c)|}{2} \sin(\pi - t\pi) \right) \\ &= \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos(\pi - t\pi), c \sin(\pi - t\pi), \sin(\pi - t\pi) \right) \\ &\in \Pi_c(S_c) \subset W_f. \end{aligned}$$

En cualquier caso  $g(c, t) \in W_f$ , por tanto  $g$  está bien definida.

Paso 2.

Claramente  $g$  es continua, ya que lo es en cada una de sus coordenadas.

Paso 3.

Veremos que  $g$  es sobre.

Tomemos  $(x, y, z) \in W_f$ . Queremos poder escribir  $(x, y, z) = g(c, t)$  para algún  $(c, t) \in C \times I$ .

Como  $(x, y, z) \in W_f$ , entonces  $(x, y, z) \in \Pi_c(S_c)$  para alguna  $c \in C$ . Ahora bien, de acuerdo a la parametrización de  $\Pi_c(S_c)$ , tenemos que

$$(x, y, z) = \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos \theta, c \sin \theta, \sin \theta \right)$$

para alguna  $\theta \in [0, \pi]$ .

Analicemos dos casos.

(i) Si  $c > f(c)$ , entonces definimos  $t = \frac{\theta}{\pi}$  y tenemos

$$\begin{aligned} g(c, t) &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{c-f(c)}{2} \cos t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \sin t\pi \right) \\ &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{|c-f(c)|}{2} \cos \frac{\theta}{\pi}, \frac{|c-f(c)|}{2} c \sin \frac{\theta}{\pi}, \frac{|c-f(c)|}{2} \sin \frac{\theta}{\pi} \right) \\ &= \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos \theta, c \sin \theta, \sin \theta \right) = (x, y, z). \end{aligned}$$

(ii) Si  $c < f(c)$ , consideremos  $t = \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)$ . Entonces:

$$\begin{aligned} g(c, t) &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{c-f(c)}{2} \cos t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \operatorname{sen} t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \operatorname{sen} t\pi \right) = \\ &= \left( \frac{c+f(c)}{2} - \frac{|c-f(c)|}{2} \cos \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \operatorname{sen} t\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \operatorname{sen} t\pi \right) \\ &= \left( \frac{c+f(c)}{2} + \frac{|c-f(c)|}{2} \cos \frac{\theta}{\pi}\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} c \operatorname{sen} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\pi, \frac{|c-f(c)|}{2} \operatorname{sen} \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)\pi \right) \\ &= \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos \frac{\theta}{\pi}\pi, c \operatorname{sen} \frac{\theta}{\pi}\pi, \operatorname{sen} \frac{\theta}{\pi}\pi \right) \\ &= \frac{|c-f(c)|}{2} \left( \frac{c+f(c)}{|c-f(c)|} + \cos \theta, c \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y, z). \end{aligned}$$

En cualquier caso obtenemos que  $(x, y, z) \in g(C \times I)$ .

Por tanto  $g$  es sobre y terminamos así la prueba del Teorema.  $\square$

Recordemos que lo que buscamos es un homeomorfismo entre  $W_f$  y  $C \times I / (\sim f)$ . El siguiente Teorema nos será muy útil para hallar dicho homeomorfismo.

**Teorema 3.14 (de la Transgresión).** Sean  $X, Z$  y  $W_f$  espacios topológicos. Sean  $g : X \rightarrow Z$  una función continua y  $p : X \rightarrow W_f$  una identificación. Si  $g$  es constante en cada fibra de  $p$ , entonces existe una función continua  $h : W_f \rightarrow Z$ , dada por  $h = g \circ p^{-1}$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ p \downarrow & \nearrow h & \\ W_f & & \end{array}$$

La prueba de este Teorema puede encontrarse en [Du].

La idea es utilizar el Teorema de la Transgresión para hallar el homeomorfismo  $h : W_f \rightarrow C \times I / (\sim f)$  que estamos buscando. Para esto empezaremos por ver que  $g$  es constante en cada fibra de  $P$ , donde  $g$  es como en el Teorema 3.13, y  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim f)$  es la función cociente natural que hemos venido manejando.

Esto lo veremos en el siguiente

**Teorema 3.15** Si  $g : C \times I \rightarrow W_f$  está dada como en el Teorema 3.13 y  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim f)$  es la función cociente usual, entonces las fibras de  $g$  coinciden con las de  $P$ .

**Demostración.**

Empezaremos por analizar las fibras de  $g$ .

Recordemos que  $P_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = cz\}$ , de donde es fácil ver que si  $c \neq a \in C$ , entonces  $P_c \cap P_a \subset \text{eje } X$ .

Supongamos que  $(c, t), (a, s) \in C \times I$  son tales que  $g(c, t) = g(a, s)$ .

Analizaremos dos casos.

**Caso 1.**

Supongamos que  $c \neq a$ .

Como  $g(a, s) \in P_a$ , entonces  $g(c, t) \in P_a \cap P_c$ , de aquí que  $g(c, t) \in \text{eje } X$ . En particular su tercera coordenada es igual a cero, de donde

$$\frac{|c - f(c)|}{2} \operatorname{sen} t\pi = 0.$$

Por hipótesis tenemos que  $c - f(c) \neq 0$  para cada  $c \in C$ , así que  $\operatorname{sen} t\pi = 0$ . De aquí podemos concluir que  $t \in \{0, 1\}$ .

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $t = 1$ .

Aplicando el mismo razonamiento para  $g(a, s)$ , obtenemos que  $s \in \{0, 1\}$ .

Ahora bien, como  $g(c, t) = g(a, s)$ , en particular tenemos que coinciden en la primera coordenada, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{c + f(c)}{2} - \frac{c - f(c)}{2} &= \frac{c + f(c)}{2} + \frac{c - f(c)}{2} \cos t\pi \\ &= \frac{a + f(a)}{2} + \frac{a - f(a)}{2} \cos s\pi. \end{aligned}$$

Veremos dos subcasos.

(i)  $s = 1$ .

Aquí se tiene que

$$f(c) = \frac{c + f(c)}{2} - \frac{c - f(c)}{2} = \frac{a + f(a)}{2} - \frac{a - f(a)}{2} = f(a).$$

Como  $f$  es un homeomorfismo concluimos que  $c = a$ , lo cual es una contradicción.

(ii)  $s = 0$ .

De acuerdo a esto tenemos

$$f(c) = \frac{c + f(c)}{2} - \frac{c - f(c)}{2} = \frac{a + f(a)}{2} + \frac{a - f(a)}{2} = a.$$

En consecuencia, en este caso obtenemos que

$$(c, t) = (c, 1) \text{ y } (a, s) = (f(c), 0).$$

Por tanto  $P(a, s) = P(c, t)$ .

Caso 2.

Supongamos que  $c = a$ .

Como  $g(c, t) = g(a, s)$ , en particular coinciden en la primera coordenada, es decir,

$$\frac{c+f(c)}{2} + \frac{c-f(c)}{2} \cos t\pi = \frac{a+f(a)}{2} + \frac{a-f(a)}{2} \cos s\pi =$$

$$\frac{c+f(c)}{2} + \frac{c-f(c)}{2} \cos s\pi.$$

De aquí que  $\cos t\pi = \cos s\pi$ , pero como la función coseno es biyectiva en el intervalo  $[0, \pi]$  obtenemos que  $t = s$ .

Así pues en este caso también tenemos que  $P(a, s) = P(c, t)$ .

Por tanto hemos visto que si  $g(a, s) = g(c, t)$ , entonces  $P(a, s) = P(c, t)$ . Ahora veamos la implicación inversa.

Supongamos que  $P(a, s) = P(c, t)$ . Si  $(a, s) = (c, t)$  no hay nada que hacer, entonces supondremos que son diferentes.

Por la forma en que definimos  $P$ , podemos suponer que  $(a, s) = (a, 1)$  y que  $(c, t) = (f(a), 0)$ . Entonces

$$g(a, s) = g(a, 1) = \left( \frac{a+f(a)}{2} + \frac{a-f(a)}{2} (-1), 0, 0 \right) = (f(a), 0, 0)$$

$$= \left( \frac{f(a)+f(f(a))}{2} + \frac{f(a)-f(f(a))}{2}, 0, 0 \right) = g(f(a), 0) = g(c, t).$$

Con esto concluimos que si  $P(a, s) = P(c, t)$  entonces  $g(a, s) = g(c, t)$ .

De esta manera obtenemos que las fibras de  $P$  coinciden con las de  $g$  y terminamos la prueba del lema.  $\square$

Finalmente, en el siguiente Teorema veremos que el espacio  $W_f$  es de la forma que buscamos.

**Teorema 3.16** *El espacio  $W_f$  es homeomorfo a  $C \times I / (\sim f)$ .*

**Demostración.**

Sean  $g : C \times I \rightarrow W_f$  como en el Teorema 3.13 y  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim f)$  la función cociente usual.

Por un lado, en el Teorema 3.13 vimos que  $g$  es continua y, por definición,  $P$  es una identificación.

Por otro lado, en el Teorema anterior vimos que las fibras de  $g$  coinciden con las de  $P$  y, en particular,  $g$  es constante en cada fibra de  $P$ . Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Transgresión, de modo que existe una función continua  $h : C \times I / (\sim f) \rightarrow W_f$ , dada por  $h = g \circ P^{-1}$ , tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 C \times I & \xrightarrow{g} & W_f \\
 P \downarrow & & \nearrow h \\
 C \times I / (\sim f) & & 
 \end{array}$$

conmuta, es decir,  $h \circ P = g$ . Veremos en tres pasos que  $h$  es un homeomorfismo.

Paso 1.

En el Teorema 3.13 vimos que  $g$  es sobre, por tanto  $h$  también lo es.

Paso 2.

$h$  es inyectiva.

Sean  $r, q \in C \times I / (\sim f)$  con  $r \neq q$ . Veremos que  $h(r) \neq h(q)$ .

Claramente las fibras  $P^{-1}(r)$  y  $P^{-1}(q)$  de  $P$  son distintas.

En el Teorema 3.15 vimos que las fibras de  $P$  coinciden con las de  $g$ , de donde obtenemos que  $h(r) = g(P^{-1}(r)) \neq g(P^{-1}(q)) = h(q)$ .

Por tanto  $h$  es inyectiva.

Paso 3.

Por un lado, gracias al paso 1 y al paso 2 tenemos que  $h$  es biyectiva. Por otro lado, el Teorema de la Transgresión nos garantiza que  $h$  es continua.

Finalmente, en el Teorema 3.12 vimos que  $C \times I / (\sim f)$  es un espacio compacto, así que  $h$  es una función cerrada (ya que  $W_f$  es de hausdorff), y por tanto  $h$  es un homeomorfismo.

Terminamos así la prueba del Teorema para concluir que  $W_f$  es un espacio de la forma  $C \times I / (\sim f)$ .  $\square$

## Capítulo 4

# Sobre los solenoides

En este capítulo introduciremos los continuos llamados solenoides y discutiremos algunas de sus propiedades. En particular veremos que dichos continuos son de la forma  $C \times I / (\sim f)$  para algún homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$ . Para ello empezaremos con algunas definiciones y notaciones.

**Definición 4.1** Si tenemos una sucesión de espacios topológicos  $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$  y para cada  $k \in \mathbb{N}$  tomamos una función continua  $f_k^{k+1} : X_{k+1} \rightarrow X_k$ , decimos que la sucesión  $\{X_k, f_k^{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$  es una **sucesión inversa**.

**Definición 4.2** Sea  $\{X_k, f_k^{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$  una sucesión inversa.

Al espacio  $\{(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \prod_{k=0}^{\infty} X_k \mid f_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k\}$  lo llamamos el **límite inverso** de la sucesión  $\{X_k, f_k^{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ , y lo denotaremos  $\lim_{\leftarrow} \{X_k, f_k^{k+1}\}$ .

**Definición 4.3** Dada una sucesión de números naturales  $N = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  definimos el **solenoides asociado** a  $N$  como el límite inverso  $\lim_{\leftarrow} \{X_k, f_k^{k+1}\}$ , donde cada  $X_k$  representa al círculo unitario  $S^1$  -a quien consideramos como subconjunto del plano complejo- y, además,  $f_k^{k+1}(z) = z^{n_k}$  ( $z$  elevado a la potencia  $n_k$ ) para toda  $k \in \mathbb{N}$ .

En otras palabras,

$$S = \left\{ \bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in \prod_{j=0}^{\infty} S^1 \mid (z_k)^{n_k} = z_{k-1} \text{ para toda } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cuando nos sea conveniente denotaremos a los elementos de  $S^1$  en su forma polar; de esta manera, un elemento típico en  $S^1$  es de la forma  $e^{2\pi i \theta}$ , con  $\theta \in \mathbb{R}$ . Para abreviar, simplemente escribiremos  $e(\theta) = e^{2\pi i \theta}$ .

Podemos extender esta notación de la siguiente manera: dada una sucesión de números reales

$$\bar{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty,$$

denotaremos

$$e(\bar{\theta}) = (e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots) \in \prod_{k=0}^\infty S^1.$$

A continuación veremos algunas de las propiedades generales de los solenoides.

**Definición 4.4** Decimos que un espacio topológico  $X$  es un **grupo topológico**, si  $X$  tiene estructura de grupo con respecto a alguna operación  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  y se satisfacen además las siguientes condiciones:

- (i) la operación  $*$  es continua y
- (ii) la función  $\rho: X \rightarrow X$  dada por  $\rho(x) = x^{-1}$  es continua.

**Notación 4.5** Dada una sucesión de números naturales  $N = \{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , al solenoide asociado a  $N$ :

$$S = \{\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in \prod_{k=0}^\infty S^1 \mid (z_k)^{n_k} = z_{k-1} \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\},$$

le damos estructura de grupo topológico multiplicando coordenada a coordenada. Es decir, definimos  $\cdot: S \times S \rightarrow S$  dado por

$$\cdot(\bar{z}, \bar{w}) = (z_0 w_0, z_1 w_1, z_2 w_2, \dots),$$

donde  $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ ,  $\bar{w} = (w_0, w_1, w_2, \dots)$  y  $z_k w_k$  denota el producto de los números complejos  $z_k$  y  $w_k$  para cada  $k$ .

De aquí en adelante escribiremos  $\bar{z} \cdot \bar{w}$  en lugar de  $\cdot(\bar{z}, \bar{w})$ .

A continuación mostraremos que  $S$  es un grupo topológico con este producto.

**Lema 4.6** Sean  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  una sucesión y

$$S = \{\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots) \in \prod_{k=0}^\infty S^1 \mid (z_k)^{n_k} = z_{k-1} \text{ para toda } k \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces  $S$  tiene estructura de grupo topológico con el producto  $\cdot$ .

**Demostración.**

Haremos la prueba en 3 pasos.

Paso 1.

El producto  $\cdot$  está bien definido.

Dados  $\bar{z}, \bar{w} \in S$  queremos ver que  $\bar{z} \cdot \bar{w} \in S$ .

Por definición, claramente tenemos que  $\bar{z} \cdot \bar{w} \in \prod_{k=0}^{\infty} S^1$ .

Ahora, dada  $k \in \mathbb{N}$ , si elevamos a la potencia  $n_k$  la  $k$ -ésima coordenada de  $\bar{z} \cdot \bar{w}$ , tenemos que

$$(z_k w_k)^{n_k} = (z_k)^{n_k} (w_k)^{n_k} = z_{k-1} w_{k-1}.$$

De aquí podemos concluir que  $\bar{z} \cdot \bar{w} \in S$  y, por tanto, el producto  $\cdot$  está bien definido.

Paso 2.

$S$  tiene estructura de grupo con respecto al producto  $\cdot$ .

Claramente el producto  $\cdot$  es asociativo.

Ahora, dada  $\bar{z} \in S$  es fácil ver que:

(i) si  $\bar{1} = (1, 1, 1, \dots)$ , entonces  $\bar{z} \cdot \bar{1} = \bar{z}$ .

(ii) Dada  $\bar{z} = (z_0, z_1, z_2, \dots)$ , definimos  $(\bar{z})^{-1} = ((z_0)^{-1}, (z_1)^{-1}, (z_2)^{-1}, \dots)$ ,  
y entonces claramente tenemos que  $\bar{z} \cdot (\bar{z})^{-1} = \bar{1}$ .

Por tanto  $S$  tiene estructura de grupo con respecto al producto  $\cdot$ .

Paso 3.

Claramente el producto  $\cdot$  es una función continua, ya que lo es en cada una de sus entradas.

Por la misma razón, la función  $\rho: S \rightarrow S$  dada por  $\rho(\bar{z}) = (\bar{z})^{-1}$  también es continua.

De esta manera concluimos que  $S$  es un grupo topológico.  $\square$

Una última observación con respecto a la estructura de grupo topológico de  $S$ . Recordemos que para multiplicar números complejos en el círculo unitario basta sumar sus argumentos. Así pues, dados dos elementos  $\bar{z}, \bar{w} \in S$ , si representamos a  $\bar{z}$  y a  $\bar{w}$  en su notación polar extendida, tendremos que  $\bar{z} = e(\bar{\theta})$  y  $\bar{w} = e(\bar{\alpha})$  para algunas  $\bar{\theta}$  y  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^{\infty}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{w} &= (e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots) \cdot (e(\alpha_0), e(\alpha_1), e(\alpha_2), \dots) \\ &= (e(\theta_0 + \alpha_0), e(\theta_1 + \alpha_1), e(\theta_2 + \alpha_2), \dots) \\ &= e(\bar{\theta} + \bar{\alpha}). \end{aligned}$$

De acuerdo a esto, si

$$e(\bar{0}) = (e(0), e(0), e(0), \dots) = (1, 1, 1, \dots),$$

entonces  $e(\bar{\theta}) \cdot e(\bar{0}) = e(\bar{\theta})$  y, además,

$$e(\bar{\theta}) \cdot e(-\bar{\theta}) = (e(0), e(0), e(0), \dots) = (1, 1, 1, \dots).$$

Por tanto  $e(-\bar{\theta}) = e(\bar{\theta})^{-1}$ .

A continuación introducimos una notación y una función que utilizaremos frecuentemente.

**Notación 4.7**

De ahora en adelante trabajaremos con una sucesión  $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  fija y denotaremos

$$\bar{\xi} = \left(1, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1 n_2}, \frac{1}{n_1 n_2 n_3}, \dots\right) \in \mathbb{R}^{\infty}.$$

También utilizaremos la función  $G : S \rightarrow S$  dada por  $G(s) = s \cdot e(\bar{\xi})$ .

Nótese que si tomamos la  $k$ -ésima coordenada de  $e(\bar{\xi})$  y la elevamos a la potencia  $n_k$  obtenemos que

$$\left[ e\left(\frac{1}{n_1 n_2 n_3 \dots n_k}\right) \right]^{n_k} = e\left(\frac{n_k}{n_1 n_2 n_3 \dots n_k}\right) = e\left(\frac{1}{n_1 n_2 n_3 \dots n_{k-1}}\right).$$

Por tanto podemos concluir que  $e(\bar{\xi}) \in S$ .

Además, en el lema anterior vimos que  $S$  es un grupo topológico, así que el producto de dos elementos de  $S$  también está en  $S$  y en consecuencia  $G$  está bien definida.

**Lema 4.8** Sea  $R = \{e(\bar{\theta}) \in S \mid \theta_0 = 0\} = \{\bar{z} \in S \mid z_0 = 1\} \subset S$ . Entonces la función  $G|_R : R \rightarrow R$  es un homeomorfismo.

**Demostración.**

Haremos la prueba en cuatro pasos.

(a)  $G|_R : R \rightarrow R$  está bien definida.

Sea  $e(\bar{\theta}) \in R$ , entonces  $\theta_0 = 0$  y  $G(e(\bar{\theta})) = e(\bar{\theta}) \cdot e(\bar{\xi})$ . De aquí que la primera entrada de  $G(e(\bar{\theta}))$  es  $e(0)e(1) = e(1) = e^{2\pi i} = e(0)$ . Por tanto  $G(e(\bar{\theta})) \in R$  y  $G|_R$  está bien definida.

(b)  $G|_R$  es continua.

Claramente  $G|_R$  es la composición del encaje  $R \rightarrow R \times \{e(\bar{\xi})\}$ , dado por  $z \rightarrow (z, e(\bar{\xi}))$ , seguido de la restricción del producto  $\cdot|_{R \times \{e(\bar{\xi})\}} : R \times \{e(\bar{\xi})\} \rightarrow R$ , el cual vimos que es continuo en el Lema 4.6. Por tanto  $G|_R$  es continua.

(c)  $G|_R$  es biyectiva.

Sea  $\Gamma : S \rightarrow S$  dada por  $\Gamma(s) = s \cdot e(\bar{\xi})^{-1}$ .

Como  $s, e(\bar{\xi}) \in S$  se sigue que  $s \cdot e(\bar{\xi})^{-1} \in S$ , ya que  $S$  es un grupo topológico. Por tanto  $\Gamma$  está bien definida y podemos considerar la restricción  $\Gamma|_R : R \rightarrow R$ .

Realizando un argumento similar al del inciso (a) es fácil ver que  $\Gamma|_R$  está bien definida. Además, para cada  $r \in R$ :

$$\begin{aligned} (\Gamma|_R \circ G)(r) &= \Gamma|_R(r \cdot e(\bar{\xi})) = r \cdot e(\bar{\xi}) \cdot e(\bar{\xi})^{-1} = r, \text{ y} \\ (G \circ \Gamma|_R)(r) &= G(r \cdot e(\bar{\xi})^{-1}) = r \cdot e(\bar{\xi})^{-1} \cdot e(\bar{\xi}) = r. \end{aligned}$$

De modo que  $\Gamma|_R$  es la inversa de  $G|_R$  y, en consecuencia, ésta es biyectiva.

(d) Usando un argumento similar al del inciso (b) obtenemos que  $\Gamma|_R$  es continua.

Finalmente, de acuerdo a los incisos (a), (b), (c) y (d) concluimos que  $G|_R$  es un homeomorfismo.  $\square$

Antes de continuar con las características de los solenoides veremos una proposición, que nos será útil en la prueba de los siguientes resultados.

**Proposición 4.9** Sea  $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots\} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  y sea  $\bar{n}_k = \{0, 1, 2, \dots, n_k - 1\}$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Al espacio  $\bar{n}_k$  lo consideramos con la topología discreta.

Si  $C' = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \times \bar{n}_3 \times \dots$ , entonces  $C'$  es un espacio métrico, compacto, totalmente desconexo y sin puntos aislados.

**Demostración.**

Usaremos la siguiente notación: un elemento  $(k_1, k_2, k_3, \dots) \in C'$  será representado como  $\bar{k}$ .

Haremos la prueba en cuatro partes.

(a)  $C'$  es un espacio métrico.

Como  $\bar{n}_k$  es un espacio discreto,  $\bar{n}_k$  es métrico para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De aquí que  $C'$  es un espacio métrico, ya que es el producto numerable de espacios métricos (ver [Du]).

(b)  $C'$  es compacto.

Claramente  $\bar{n}_k$  es compacto para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Gracias al Teorema de Tychonoff ([Du]) obtenemos que entonces  $C'$  también es compacto.

(c)  $C'$  es totalmente desconexo.

Sean  $\bar{j}, \bar{k} \in C'$  con  $\bar{j} \neq \bar{k}$ . Veremos que  $\bar{k}$  y  $\bar{j}$  no pueden estar en la misma componente de  $C'$ .

Como  $\bar{j} \neq \bar{k}$  tenemos que  $j_i \neq k_i$  para alguna  $i \in \mathbb{N}$ .

Como  $\bar{n}_i$  es un espacio discreto, es fácil ver que los conjuntos

$$U = \overline{n_1} \times \overline{n_2} \times \dots \times \overline{n_{i-1}} \times \{j_i\} \times \overline{n_{i+1}} \times \dots \text{ y}$$

$$V = \overline{n_1} \times \overline{n_2} \times \dots \times \overline{n_{i-1}} \times (\overline{n_i} \setminus \{j_i\}) \times \overline{n_{i+1}} \times \dots$$

satisfacen lo siguiente:

- (i)  $U$  y  $V$  son subconjuntos abiertos ajenos de  $C'$ ,
- (ii)  $\bar{j} \in U$ ,  $\bar{k} \in V$  y
- (iii)  $U \cup V = C'$ .

Por tanto  $U$  y  $V$  desconectan a  $C'$  de manera que  $\bar{k}$  y  $\bar{j}$  no pueden estar en la misma componente de  $C'$ .

En consecuencia  $C'$  es totalmente desconexo.

(d)  $C'$  no tiene puntos aislados.

Sea  $\bar{k} \in C'$  y sea  $U$  un abierto de  $C'$  tal que  $\bar{k} \in U$ . Veremos que podemos hallar  $\bar{j} \in C'$  tal que  $\bar{j} \in U \setminus \{\bar{k}\}$ .

Por la forma en que se define la topología producto, podemos suponer que  $U$  es de la forma  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_i \times \overline{n_{i+1}} \times \overline{n_{i+2}} \times \dots$ , donde  $U_m$  es abierto en  $\overline{n_m}$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, i\}$ .

Como  $\overline{n_{i+1}}$  tiene al menos dos elementos, podemos tomar  $j_{i+1} \in \overline{n_{i+1}} \setminus \{k_{i+1}\}$ .

Ahora definimos  $\bar{j} = (k_1, k_2, \dots, k_i, j_{i+1}, k_{i+2}, k_{i+3}, \dots)$ .

Claramente  $\bar{j} \in U \setminus \{\bar{k}\}$ , así que podemos concluir que  $C'$  no tiene puntos aislados.  $\square$

**Observación 4.10** *Es un resultado conocido de topología que si un espacio  $X$  es métrico, compacto, totalmente desconexo y sin puntos aislados, entonces  $X$  es homeomorfo al conjunto de Cantor (ver [HY]). Así pues, de acuerdo a la proposición anterior,  $C'$  es un conjunto de Cantor, de modo que de ahora en adelante escribiremos simplemente  $C = \overline{n_1} \times \overline{n_2} \times \overline{n_3} \times \dots$*

El objetivo principal de este capítulo es ver a cualquier solenoide  $S$  como un espacio de la forma  $C \times I / (\sim f)$  (que definimos en el capítulo anterior) para algún homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$ .

Para ello empezaremos por dar un homeomorfismo  $h$  entre el conjunto de Cantor  $C$  y el subespacio  $R$  del solenoide. Más adelante nos basaremos en dicho homeomorfismo para construir un homeomorfismo  $H : C \times I / (\sim f) \rightarrow S$ .

Recordemos que habíamos definido una “rebanada”  $R$  del solenoide  $S$  como

$$R = \{e(\bar{\theta}) \in S \mid \theta_0 = 0\} = \{\bar{z} \in S \mid z_0 = 1\}.$$

Hagamos algunas observaciones.

Sea  $e(\bar{\theta}) \in R$ . Como  $R \subset S$ , en particular tenemos que  $e(\theta_1)^{n_1} = e(\theta_0)$ , es decir,  $e(\theta_1)$  es una raíz  $n_1$ -ésima de  $e(0) = 1$ . De aquí que  $\theta_1$  es de la forma  $\frac{1}{n_1}k_1$  para alguna  $k_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ . Gracias a esta expresión tenemos una manera natural de establecer una biyección entre el conjunto  $\bar{n}_1$  y las raíces  $n_1$ -ésimas de  $e(0)$ , a saber:  $k_1 \mapsto \frac{1}{n_1}k_1$ , para cada  $k_1 \in \bar{n}_1$ .

En general, para  $m \in \mathbb{N}$  tenemos que  $e(\theta_m)^{n_m} = e(\theta_{m-1})$ , así que  $e(\theta_m)$  es una raíz  $n_m$ -ésima de  $e(\theta_{m-1})$  y, por tanto,  $\theta_m$  es de la forma  $\frac{\theta_{m-1}}{n_m} + \frac{k_m}{n_m}$  para alguna  $k_m \in \{0, 1, \dots, n_m - 1\}$ . Una vez más, podemos establecer de manera natural una biyección entre  $\bar{n}_m$  y las raíces  $n_m$ -ésimas de  $e(\theta_{m-1})$ , a saber:

$$k_m \mapsto \frac{1}{n_m}(\theta_{m-1} + k_m), \text{ para cada } k_m \in \bar{n}_m.$$

De acuerdo a lo anterior podemos dar un homeomorfismo natural entre el espacio  $R$  y el espacio  $C = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \times \bar{n}_3 \times \dots$ ; esto es justamente lo que veremos en el siguiente

**Teorema 4.11** Sea  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  una sucesión. Recordemos que

$$S = \{e(\bar{\theta}) \in \prod_{k=0}^\infty S^1 \mid e(\theta_k)^{n_k} = e(\theta_{k-1}), k \in \mathbb{N}\}.$$

Sea  $C = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 \times \bar{n}_3 \times \dots$ . Definimos  $h : C \rightarrow R$  dada por:

$$h(k_1, k_2, k_3, \dots) = (e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots),$$

donde  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = \frac{1}{n_1}k_1$ , y en general  $\theta_m = \frac{1}{n_m}(k_m + \theta_{m-1})$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $h$  es un homeomorfismo.

**Demostración.**

Haremos la prueba en cinco pasos.

(a)  $h$  está bien definida.

Sean  $\bar{k} \in C$  y  $e(\bar{\theta}) = h(\bar{k})$ . Veremos que  $e(\theta_m)^{n_m} = e(\theta_{m-1})$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Así pues, sea  $m \in \mathbb{N}$ .

Por definición tenemos que  $\theta_m = \frac{1}{n_m}(k_m + \theta_{m-1})$ , de donde:

$$\begin{aligned} e(\theta_m)^{n_m} &= e(\theta_m n_m) = e(k_m + \theta_{m-1}) = \\ &= e(k_m) e(\theta_{m-1}) = e(0) e(\theta_{m-1}) = e(\theta_{m-1}). \end{aligned}$$

Por tanto  $e(\bar{\theta}) \in S$  y como  $\theta_0 = 0$ , tenemos que  $e(\bar{\theta}) \in R$ .

De esta manera podemos concluir que  $h$  está bien definida.

(b)  $h$  es inyectiva.

Sean  $\bar{k}, \bar{j} \in C$  tales que  $h(\bar{k}) = e(\bar{\theta}) = e(\bar{\alpha}) = h(\bar{j})$ . Probaremos por inducción que  $k_m = j_m$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Para  $m = 1$ :

Como  $e(\theta_1) = e(\alpha_1)$ , entonces  $\theta_1 = \alpha_1 + r$  para alguna  $r \in \mathbb{Z}$ .

Por definición de  $h$  tenemos que  $\theta_1 = \frac{k_1}{n_1}$  y  $\alpha_1 = \frac{j_1}{n_1}$ .

De aquí que

$$\frac{k_1}{n_1} = \frac{j_1}{n_1} + r,$$

y por tanto

$$k_1 = j_1 + n_1 r.$$

Ahora bien, como  $k_1, j_1 \in \overline{n_1}$ , se tiene que  $r = 0$  y en consecuencia  $k_1 = j_1$ . En particular obtenemos también que  $\theta_1 = \alpha_1$ .

Supongamos ahora que  $k_{m-1} = j_{m-1}$  y  $\theta_{m-1} = \alpha_{m-1}$ . Veremos que  $k_m = j_m$ . Sabemos que

$$\theta_m = \frac{1}{n_m} (k_m + \theta_{m-1}) \text{ y } \alpha_m = \frac{1}{n_m} (j_m + \alpha_{m-1}).$$

Como  $e(\theta_m) = e(\alpha_m)$ , entonces  $\theta_m = \alpha_m + r$  para alguna  $r \in \mathbb{Z}$ . De aquí que

$$\theta_m = \frac{1}{n_m} (k_m + \theta_{m-1}) = \frac{1}{n_m} (j_m + \alpha_{m-1}) + r,$$

y por tanto  $k_m + \theta_{m-1} = j_m + \alpha_{m-1} + r n_m$ .

De esta expresión concluimos que  $k_m = j_m + r n_m$ , ya que  $\theta_{m-1} = \alpha_{m-1}$ .

Ahora bien, como  $k_m, j_m \in \overline{n_m}$ , se tiene que  $r = 0$  y en consecuencia  $k_m = j_m$ , y también  $\theta_m = \alpha_m$ .

Por tanto  $\bar{k} = \bar{j}$  y podemos concluir que  $h$  es inyectiva.

(c)  $h$  es sobre.

Sea  $e(\bar{\theta}) \in R$ .

Queremos hallar  $\bar{k} \in C$  tal que  $h(\bar{k}) = e(\bar{\theta})$ .

Para cada  $m \in \mathbb{N}$ , tomamos  $\beta_m \in [0, 1]$  tal que  $e(\beta_m) = e(\theta_m)$ .

Como  $(e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots) \in R$ , en particular tenemos que

$$e(\beta_1)^{n_1} = e(\theta_1)^{n_1} = e(\theta_0) = e(0) = 1,$$

por tanto  $e(n_1\beta_1) = 1$ . De aquí que  $n_1\beta_1$  es un número entero.

Como  $\beta_1 \in [0, 1)$  deducimos que  $0 \leq n_1\beta_1 \leq n_1 - 1$ , y entonces claramente  $n_1\beta_1 \in \overline{n_1}$ , así que podemos definir  $k_1 = n_1\beta_1$ .

Análogamente, para  $m \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$e(\beta_m)^{n_m} = e(\theta_m)^{n_m} = e(\theta_{m-1}) = e(\beta_{m-1}),$$

es decir,  $e(n_m\beta_m) = e(\beta_{m-1})$ . Por tanto  $n_m\beta_m = \beta_{m-1} + r$  para alguna  $r \in \mathbb{Z}$ .

De modo que  $n_m\beta_m - \beta_{m-1}$  es un número entero, y como  $\beta_{m-1}, \beta_m \in [0, 1)$  se tiene que  $n_m\beta_m - \beta_{m-1} \leq n_m - 1$ .

Además, si suponemos que

$$n_m\beta_m - \beta_{m-1} \leq 0$$

obtenemos que  $n_m\beta_m \leq \beta_{m-1}$ , pero como  $0 \leq n_m\beta_m$  y  $\beta_{m-1} < 1$  deducimos que

$$0 \leq n_m\beta_m < 1.$$

Ahora bien, dado que  $e(n_m\beta_m) = e(\beta_{m-1})$  y  $0 \leq \beta_{m-1} < 1$  y la función exponencial es inyectiva en el intervalo  $[0, 1)$  concluimos que  $n_m\beta_m = \beta_{m-1}$  y en consecuencia  $n_m\beta_m - \beta_{m-1} = 0$ .

Por tanto  $0 \leq n_m\beta_m - \beta_{m-1} \leq n_m - 1$ . Entonces podemos definir  $k_m = n_m\beta_m - \beta_{m-1}$  y obtenemos que  $k_m \in \overline{n_m}$ .

Así pues, definimos  $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots)$ . De acuerdo a esta construcción, obtenemos que  $\bar{k} \in C$ .

Sea  $e(\bar{\alpha}) = h(\bar{k})$ , donde cada  $\alpha_m$  la elegimos en  $[0, 1)$ .

Probaremos por inducción que  $e(\alpha_m) = e(\theta_m)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Por definición de  $h$  tenemos que  $\alpha_0 = 0 = \theta_0$  y

$$e(\alpha_1) = e\left(\frac{k_1}{n_1}\right) = e\left(\frac{n_1\beta_1}{n_1}\right) = e(\beta_1) = e(\theta_1).$$

Supongamos ahora que  $e(\theta_{m-1}) = e(\alpha_{m-1})$ , veremos que  $e(\theta_m) = e(\alpha_m)$ .

Sabemos que  $\alpha_m = \frac{1}{n_m}(k_m + \alpha_{m-1})$ , y como  $k_m = n_m\beta_m - \beta_{m-1}$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} e(\alpha_m) &= e\left(\frac{1}{n_m}(n_m\beta_m - \beta_{m-1} + \alpha_{m-1})\right) \\ &= e\left(\frac{n_m\beta_m}{n_m}\right) e\left(\frac{-\beta_{m-1}}{n_m}\right) e\left(\frac{\alpha_{m-1}}{n_m}\right) \\ &= e(\beta_m) e\left(\frac{\theta_{m-1}}{n_m}\right)^{-1} e\left(\frac{\theta_{m-1}}{n_m}\right) \\ &= e(\beta_m) = e(\theta_m). \end{aligned}$$

De esta manera terminamos la inducción para concluir que  $e(\bar{\alpha}) = e(\bar{\theta})$ , ya que coinciden en cada una de sus entradas.

Por tanto  $h(\bar{k}) = e(\bar{\theta})$  y  $h$  es sobre.

(d)  $h$  es continua.

Sean  $\bar{k} \in C$  y  $\varepsilon > 0$ .

Sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{M-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Es decir,  $\sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Sean  $\delta = \frac{1}{2^M}$  y  $\bar{r} \in C$  tal que  $|\bar{k} - \bar{r}| < \delta$ .

Veremos que entonces  $|h(\bar{k}) - h(\bar{r})| < \varepsilon$ .

Por un lado tenemos que

$$\frac{1}{2^M} = \delta > |\bar{k} - \bar{r}| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k_m - r_m|}{2^m}.$$

Por otro lado tenemos que  $k_m, r_m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , así que  $|k_m - r_m| \in \{0, 1, 2, \dots\}$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Si suponemos que  $|k_{m_0} - r_{m_0}| \geq 1$  para alguna  $m_0 \in \{1, 2, \dots, M\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|k_m - r_m|}{2^m} &= \sum_{m=1}^M \frac{|k_m - r_m|}{2^m} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{|k_m - r_m|}{2^m} \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{m_0}} + \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{|k_m - r_m|}{2^m} \geq \frac{1}{2^{m_0}} \geq \frac{1}{2^M}. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, así que  $|k_m - r_m| = 0$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

De modo que  $k_m = r_m$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

Sean  $h(\bar{k}) = (e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots)$  y  $h(\bar{r}) = (e(\alpha_0), e(\alpha_1), e(\alpha_2), \dots)$ . Veremos que  $\theta_m = \alpha_m$  para cada  $m \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$ , y lo haremos por inducción.

Para  $m = 0$  tenemos que  $\theta_0 = 0 = \alpha_0$ , de acuerdo a la definición de  $h$ . Supongamos que  $\theta_{m-1} = \alpha_{m-1}$ , donde  $m \leq M$ , entonces:

$$\theta_m = \frac{1}{n_m} (k_m + \theta_{m-1}) = \frac{1}{n_m} (k_m + \alpha_{m-1}) = \frac{1}{n_m} (r_m + \alpha_{m-1}) = \alpha_m,$$

ya que  $k_m = r_m$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

De aquí que  $h(\bar{r}) = (e(\theta_0), e(\theta_1), \dots, e(\theta_M), e(\alpha_{M+1}), \dots)$  y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} |h(\bar{k}) - h(\bar{r})| &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|e(\theta_m) - e(\alpha_m)|}{2^m} \\ &= \sum_{m=M}^{\infty} \frac{|e(\theta_m) - e(\alpha_m)|}{2^m} \leq 2 \sum_{m=M}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Concluimos así la prueba de la continuidad de  $h$ .

(e)  $h$  es un homeomorfismo.

Como vimos anteriormente,  $C$  es un conjunto de Cantor.

De aquí que el dominio de  $h$  es compacto y, como  $h$  es continua y biyectiva, podemos concluir que  $h$  es un homeomorfismo pues  $R$  es un espacio de Hausdorff.

Por tanto  $C$  es homeomorfo a  $R$  y terminamos la prueba del Teorema.  $\square$

Ahora que tenemos un homeomorfismo  $h : C \rightarrow R$  podemos considerarlo como un homeomorfismo  $h' : C \times \{0\} \rightarrow R$ . El siguiente paso será extenderlo a una función continua y sobre  $F : C \times I \rightarrow S$ , para luego hallar un homeomorfismo  $H : C \times I / (\sim f) \rightarrow S$ . A continuación daremos la construcción de  $F$ .

**Teorema 4.12** Sea  $h : C \rightarrow R$  un homeomorfismo y sea  $h' : C \times \{0\} \rightarrow R$  definida por  $h'(k, 0) = h(k)$ .

Sea  $F : C \times I \rightarrow S$  dada por  $F(k, t) = h(k) \cdot e(\bar{t})$ , donde

$$\bar{t} = \left( t, \frac{t}{n_1}, \frac{t}{n_1 n_2}, \frac{t}{n_1 n_2 n_3}, \dots \right).$$

Entonces  $F$  es una función continua y sobre que extiende a  $h'$ .

**Demostración.**

(a)  $F$  está bien definida.

Sabemos que  $h(k) \in R \subset S$  y claramente  $e(\bar{t}) \in S$  para cada  $k \in C$  y  $t \in I$ . Por otra parte, en el Lema 4.6 vimos que  $S$  es un grupo topológico con el producto  $\cdot$ ; en particular éste es una operación cerrada en  $S$  y, en consecuencia,  $h(k) \cdot e(\bar{t}) \in S$  para cada  $(k, t) \in C \times I$ . De aquí concluimos que  $F$  está bien definida.

(b)  $F|_{C \times \{0\}} = h'$ .

Sea  $(k, 0) \in C \times \{0\}$ , entonces tenemos que

$$F(k, 0) = h(k) \cdot e(\bar{0}) = h(k) \cdot (e(0), e(0), e(0), \dots) = h(k) = h'(k, 0).$$

(c)  $F$  es continua.

Si  $\gamma : I \rightarrow S$  es la función dada por  $\gamma(t) = e(\bar{t})$ , entonces claramente  $\gamma$  es continua y  $F(k, t) = h(k) \cdot \gamma(t)$ .

Como  $h$  es un homeomorfismo,  $h$  es continua.

Por otra parte, en el Lema 4.6 vimos que  $S$  es un grupo topológico y, en particular, la función  $\cdot$  es continua.

Por tanto, podemos concluir que la función  $F$  es continua.

(d)  $F$  es sobre.

Sea  $e(\bar{\theta}) \in S$ .

Probaremos en dos pasos que existe  $(k, t) \in C \times I$  tal que  $F(k, t) = e(\bar{\theta})$ .

Paso 1.

Veremos que existe  $e(\bar{\alpha}) \in R$  y  $t \in I$  tales que  $e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{t}) = e(\bar{\theta})$ .

Sabemos que  $\alpha_0 = 0$  para cada  $e(\bar{\alpha}) \in R$ . De acuerdo a esto, si queremos satisfacer la ecuación  $e(\alpha_0) e(t) = e(\theta_0)$  necesitamos  $e(0) e(t) = e(\theta_0)$ , es decir  $e(t) = e(\theta_0)$ .

Podemos suponer que  $\theta_0 \in [0, 1]$ , así que podemos proponer  $t_0 = \theta_0$ . En este caso  $t_0 \in I$  y

$$e(\bar{t}_0) = \left( e(\theta_0), e\left(\frac{\theta_0}{n_1}\right), e\left(\frac{\theta_0}{n_1 n_2}\right), e\left(\frac{\theta_0}{n_1 n_2 n_3}\right), \dots \right).$$

Definimos ahora  $e(\bar{\alpha}) = e(\bar{\theta}) \cdot e(\bar{t}_0)^{-1}$ . Claramente  $e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{t}_0) = e(\bar{\theta})$ , así que basta verificar que  $e(\bar{\alpha}) \in R$ .

Claramente  $e(\bar{\alpha}) \in S$ , ya que es el producto de dos elementos de  $S$ , y ya vimos en el Lema 4.6 que  $S$  es un grupo topológico. Por otro lado, de acuerdo a la definición, tenemos que  $e(\alpha_0) = e(\theta_0) e(-\theta_0) = e(0)$ .

En consecuencia  $e(\bar{\alpha}) = (e(0), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \in R$ .

Paso 2.

Estamos suponiendo que  $h : C \rightarrow R$  es un homeomorfismo, así que podemos definir  $k_0 = h^{-1}(e(\bar{\alpha}))$ , donde  $e(\bar{\alpha})$  es como en el paso 1.

Finalmente calculamos

$$F(k_0, t_0) = h(k_0) \cdot e(\bar{t}_0) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{t}_0) = e(\bar{\theta}).$$

De esta manera concluimos que  $F$  es sobre.

Terminamos así la prueba del Teorema.  $\square$

A continuación definiremos un homeomorfismo  $g : C \rightarrow C$  y consideraremos el espacio  $C \times I / (\sim g)$ . Posteriormente veremos que éste es homeomorfo a  $S$ .

**Observación 4.13** Sea  $h : C \rightarrow R$  un homeomorfismo y sea  $g : C \rightarrow C$  dada por

$$g(x) = h^{-1}(G(h(x))),$$

donde  $G$  está definida como en 4.7

En el Lema 4.8 vimos que la función  $G|_R : R \rightarrow R$  es un homeomorfismo, así que  $g$  también lo es.

En el teorema anterior dimos una función continua  $F : C \times I \rightarrow S$ . Por otra parte, si consideramos la función cociente usual  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim g)$ , tenemos por definición que  $P$  es una identificación.

Así pues, casi estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.14 (de la Transgresión) para hallar una función continua  $H : C \times I / (\sim g) \rightarrow S$  (que resultará ser un homeomorfismo), sólo falta ver que se respetan las fibras, y es lo que probaremos en el siguiente

**Teorema 4.14** Sea  $h : C \rightarrow R$  un homeomorfismo.

Si  $F : C \times I \rightarrow S$  está dada como en el Teorema 4.12 y  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim g)$  es la función cociente usual, entonces las fibras de  $P$  coinciden con las fibras de  $F$ .

**Demostración.**

Empezaremos por analizar las fibras de  $F$ .

Supongamos que  $(k, t), (k', t') \in C \times I$  son tales que  $F(k, t) = F(k', t')$ . Denotemos

$$h(k) = (e(\alpha_1), e(\alpha_2), e(\alpha_3), \dots) \text{ y } h(k') = (e(\alpha'_1), e(\alpha'_2), e(\alpha'_3), \dots).$$

Como  $h(k), h(k') \in R$ , podemos tomar  $\alpha_1 = 0 = \alpha'_1$ .

Y como  $F(k, t) = F(k', t')$ , en particular son iguales en su primera coordenada, es decir,

$$e(t) = e(t + \alpha_1) = e(t' + \alpha'_1) = e(t').$$

De aquí obtenemos que  $t = t' + r$  para alguna  $r \in \mathbb{Z}$ .

Consideremos dos casos:

(1)  $t \notin \{0, 1\}$ .

Como  $t, t' \in I$ , tenemos  $t = t'$ , así que

$$h(k) \cdot e(\bar{t}) = F(k, t) = F(k', t') = F(k', t) = h(k') \cdot e(\bar{t}).$$

De aquí que  $h(k) = h(k')$  pero, como  $h$  es un homeomorfismo, obtenemos que  $k = k'$ . Por tanto  $(k, t) = (k', t')$  y, en este caso, la fibra  $F^{-1}(F(k, t))$  consta de un solo elemento.

(ii)  $t \in \{0, 1\}$ .

Si  $t' = t$  usamos el argumento del caso anterior para deducir que  $k = k'$ . Por tanto  $(k, t) = (k', t')$ .

Así pues, podemos suponer que  $t \neq t'$ .

Como  $t = t' + r$  con  $r \in \mathbb{Z}$ , se sigue que  $t' \in \{0, 1\}$ , así que sin pérdida de generalidad supondremos que  $t = 1$  y  $t' = 0$ .

Entonces  $e(\bar{t}) = e(\bar{\xi})$ , donde  $\bar{\xi}$  es como en la Notación 4.7.

De acuerdo a lo anterior obtenemos que

$$h(k) \cdot e(\bar{\xi}) = F(k, t) = F(k', t') = h(k') \cdot e(\bar{0}) = h(k'),$$

así que  $h(k') = G(h(k))$  y, por tanto,

$$k' = h^{-1}(G(h(k))) = g(k).$$

De aquí deducimos que, en este caso, la fibra en cuestión es de la forma

$$F^{-1}(F(k, t)) = \{(k, 1), (g(k), 0)\}.$$

Tomando en cuenta los dos casos considerados, podemos concluir que las fibras de  $F$  son de la forma  $\{(k, t)\}$  para algún  $(k, t) \in C \times (0, 1)$ , o bien de la forma  $\{(k, 1), (g(k), 0)\}$ , para alguna  $k \in C$ .

Recordemos ahora que, de acuerdo a la Observación 3.3, cada fibra de  $P$  es de la forma  $\{(x, 1), (g(x), 0)\}$  para alguna  $x \in C$ , o bien es de la forma  $\{(x, y)\}$  para algún  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ .

De esta manera concluimos que las fibras de  $P$  coinciden con las de  $F$  y terminamos así la prueba del lema.  $\square$

Finalmente probaremos que  $C \times I / (\sim g)$  es un solenoide.

**Teorema 4.15** *Para cualquier homeomorfismo  $h : C \rightarrow R$ , y  $g : C \rightarrow C$  (como en la Observación 4.13), se tiene que  $C \times I / (\sim g)$  es homeomorfo a  $S$ .*

**Demostración.**

Sean  $F : C \times I \rightarrow S$  como en el Teorema 4.12 y  $P : C \times I \rightarrow C \times I / (\sim g)$  la función cociente usual.

Por un lado, en el Teorema 4.12 vimos que  $F$  es continua, por definición  $P$  es una identificación.

Por otro lado, en el Teorema anterior vimos que las fibras de  $F$  coinciden con las de  $P$ . En particular  $F$  es constante en cada fibra de  $P$ , de modo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Transgresión.

Así pues, existe una función continua  $H : C \times I / (\sim g) \rightarrow S$ , dada por  $H = F \circ P^{-1}$ , tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C \times I & \xrightarrow{F} & S \\ P \downarrow & \nearrow H & \\ C \times I / (\sim g) & & \end{array}$$

conmuta, es decir,  $H \circ P = F$ .

Veremos en tres pasos que  $H$  es un homeomorfismo.

Paso 1.

En el Teorema 4.12 vimos que  $F$  es sobre, por tanto  $H$  también lo es.

Paso 2.

$H$  es inyectiva.

Sean  $r \neq q \in C \times I / (\sim g)$ . Veremos que  $H(r) \neq H(q)$ .

Por una parte tenemos que las fibras  $P^{-1}(r)$  y  $P^{-1}(q)$  de  $P$  son distintas.

Por otra parte, en el Teorema 4.14 vimos que las fibras de  $P$  coinciden con las de  $F$ , de donde obtenemos que  $H(r) = F(P^{-1}(r)) \neq F(P^{-1}(q)) = H(q)$ .

Por tanto  $H$  es inyectiva.

Paso 3.

Gracias al paso 1 y al paso 2 tenemos que  $H$  es biyectiva. Además, el Teorema de la Transgresión nos garantiza que  $H$  es continua.

Finalmente, en el Teorema 3.12 vimos que  $C \times I / (\sim g)$  es un espacio compacto, así que  $H$  es una función cerrada y por tanto  $H$  es un homeomorfismo.

Terminamos así la prueba del Teorema, para concluir que  $S$  es un espacio de la forma  $C \times I / (\sim g)$ .

□

## Capítulo 5

# Propiedades de compatibilidad

En este capítulo introducimos el concepto de compatibilidad de un homeomorfismo con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Esta noción nos será muy útil en los siguientes capítulos, así que dedicaremos el presente al análisis de ciertas propiedades básicas de esta clase de funciones. Sin embargo, dado que varias propiedades sólo nos interesan aplicadas al conjunto de Cantor, únicamente las probaremos para éste.

Empezaremos por dar algunas definiciones.

**Definición 5.1** Dadas  $n \in \mathbb{N}$  y una familia  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  de subconjuntos de un espacio métrico  $X$ , definimos la malla de  $K$  como

$$m(\mathcal{K}) = \max \{ \text{diam}(K_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\} \}.$$

**Definición 5.2** Dados un espacio métrico  $X$ , una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , y un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$ , diremos que  $f$  es **compatible** con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  si existe una familia  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  de subconjuntos de  $X$  que satisface las siguientes condiciones para cada  $k \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $A_k$  es abierto y cerrado en  $X$ ,
- (ii) la familia  $\mathcal{A}_k = \{A_k, f(A_k), f^2(A_k), \dots, f^{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}(A_k)\}$  constituye una partición de  $X$ ,
- (iii)  $m(\mathcal{A}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

A partir de ahora denotaremos  $f^0 = 1_X$  (la identidad en  $X$ ).

A continuación veremos uno de los resultados más generales sobre esta clase de homeomorfismos.

**Lema 5.3** Sean  $X, Y$  espacios compactos y métricos y  $G : Y \rightarrow Y$  un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Sea  $g : X \rightarrow X$  un homeomorfismo para el cual existe un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ g = G \circ h$ , entonces  $g$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

**Demostración.**

Como  $G$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , podemos tomar una familia  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  de subconjuntos de  $Y$  tal que para cada  $k \in \mathbb{N}$ :

- (i)  $A_k$  es abierto y cerrado en  $Y$ ,
- (ii) la familia  $\mathcal{A}_k = \{A_k, G(A_k), G^2(A_k), \dots, G^{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}(A_k)\}$  es una partición de  $Y$ .
- (iii)  $m(\mathcal{A}_k)_{k \rightarrow \infty} 0$ .

Ahora, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos  $F_k = h^{-1}(A_k)$  y proponemos la familia  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, \dots\}$  para ver que  $g$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Claramente  $F_k$  es abierto y cerrado en  $X$ .

Tomemos ahora una  $k \in \mathbb{N}$  y consideremos la familia

$$\mathcal{F}_k = \{F_k, g(F_k), g^2(F_k), \dots, g^{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}(F_k)\}.$$

La idea de la prueba es ver, en tres pasos, que  $\mathcal{F}_k$  es una partición de  $X$  para cada  $k$  y que  $m(\mathcal{F}_k)_{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Paso 1.**

Los elementos de la familia  $\mathcal{F}_k$  son ajenos dos a dos.

Por hipótesis tenemos que  $g = h^{-1} \circ G \circ h$ , así que

$$g^j(F_k) = (h^{-1} \circ G \circ h)^j(F_k) = (h^{-1} \circ G^j \circ h)(F_k) = (h^{-1} \circ G^j)(A_k),$$

para cada  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k-1}\}$ .

Por tanto, para cada  $i, j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k-1}\}$  con  $i \neq j$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} g^i(F_k) \cap g^j(F_k) &= h^{-1}(G^i(A_k)) \cap h^{-1}(G^j(A_k)) \\ &= h^{-1}(G^i(A_k) \cap G^j(A_k)). \end{aligned}$$

Pero como  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $Y$  se tiene que  $G^i(A_k) \cap G^j(A_k) = \emptyset$ , de modo que

$$g^i(F_k) \cap g^j(F_k) = \emptyset$$

para cada  $i, j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k-1}\}$  con  $i \neq j$ .

**Paso 2.**

La familia  $\mathcal{F}_k$  cubre a  $X$ .

Sea  $x \in X$  y  $y = h(x)$ .

Dado que  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $Y$ , en particular se tiene que  $y \in G^j(A_k)$  para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k-1}\}$ . De aquí que

$$\begin{aligned} x = h^{-1}(y) \in (h^{-1} \circ G^j)(A_k) &= (h^{-1} \circ G^j)(h(F_k)) = \\ (h^{-1} \circ G^j \circ h)(F_k) &= (h^{-1} \circ G \circ h)^j(F_k) = g^j(F_k). \end{aligned}$$

Por tanto la familia  $\mathcal{F}_k$  cubre a  $X$  y, de acuerdo con el paso 1, podemos concluir que  $\mathcal{F}_k$  es una partición de  $X$ .

Paso 3.

Veremos que  $m(\mathcal{F}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Sea  $\varepsilon > 0$ .

Dado que  $h$  es un homeomorfismo existe  $\delta > 0$  tal que para cada  $L \subset Y$  con  $diam(L) < \delta$  se tiene que  $diam(h^{-1}(L)) < \varepsilon$ .

Como  $m(\mathcal{A}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , existe  $k_\delta \in \mathbb{N}$  tal que

$$diam(G^i(A_n)) \leq m(\mathcal{A}_n) < \delta$$

para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$  y cada  $n > k_\delta$ .

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} diam(g^i(F_n)) &= diam(h^{-1} \circ G^i \circ h)(F_n) \\ &= diam(h^{-1}(G^i(A_n))) < \varepsilon \end{aligned}$$

para cada  $n \geq k_\delta$  y cada  $i \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

Por tanto

$$m(\mathcal{F}_n) = \max \{diam(g^i(F_n)) \mid i \in \{0, 1, 2, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}\} < \varepsilon$$

para cada  $n \geq k_\delta$  y, en consecuencia,  $m(\mathcal{F}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

De esta manera podemos concluir que  $g$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  y terminamos la prueba del lema.  $\square$

A continuación veremos una propiedad básica de los homeomorfismos compatibles con una sucesión.

**Proposición 5.4** Sea  $f : X \rightarrow X$  un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Sean  $k \in \mathbb{N}$  y  $m, r \in \mathbb{Z}$  tales que  $m \equiv r \pmod{n_1 n_2 \cdots n_k}$ , entonces  $f^m(A_k) = f^r(A_k)$ .

**Demostración.**

Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Haremos la prueba en tres pasos.

(a)  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k) = A_k = f^{-n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k)$ .

Empezaremos por ver que  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k) \subset A_k$ .

Supongamos que  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k) \cap (X \setminus A_k) \neq \emptyset$ .

Como la familia  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $X$  se tiene que  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k) \cap f^j(A_k) \neq \emptyset$  para alguna  $j \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

Entonces  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k - 1}(A_k) \cap f^{j-1}(A_k) \neq \emptyset$ , puesto que  $f$  es un homeomorfismo. Pero esto es una contradicción, ya que  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $X$ . Por tanto podemos concluir que

$$f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k) \subset A_k.$$

Ahora veremos que  $A_k \subset f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)$ .

Supongamos que  $A_k \cap (X \setminus f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)) \neq \emptyset$ . Esto implica que

$$f^{-1} (A_k) \cap (X \setminus f^{n_1 n_2 \dots n_k - 1} (A_k)) \neq \emptyset.$$

Como la familia  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $X$  se tiene que  $f^{-1} (A_k) \cap f^j (A_k) \neq \emptyset$  para alguna  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 2\}$ .

Entonces  $A_k \cap f^{j+1} (A_k) \neq \emptyset$ , ya que  $f$  es un homeomorfismo. Pero esto es una contradicción, ya que  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $X$ . Por tanto podemos concluir que

$$A_k \subset f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k).$$

Gracias a lo anterior obtenemos que  $A_k = f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)$ . De acuerdo con esta igualdad concluimos que  $f^{-n_1 n_2 \dots n_k} (A_k) = A_k$ .

Por tanto  $f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k) = A_k = f^{-n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)$ .

(b)  $f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = A_k$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ .

Para  $m \in \mathbb{N}$ , haremos la prueba por inducción.

Para  $m = 1$  :

Por el inciso anterior, tenemos que  $f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k) = A_k = f^{-n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)$ .

Ahora bien, supongamos que  $f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = A_k$  para  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$f^{n_1 n_2 \dots n_k (m+1)} (A_k) = f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (f^{n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)) = f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = A_k.$$

Por tanto,  $f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = A_k$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Ya que para toda  $m \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$f^{-n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = f^{-n_1 n_2 \dots n_k m} (f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k)) = A_k,$$

concluimos que  $f^{n_1 n_2 \dots n_k m} (A_k) = A_k$  para cada  $m \in \mathbb{Z}$ .

(c) Sean  $m, r \in \mathbb{Z}$  tales que  $m \equiv r \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$ , entonces  $f^m (A_k) = f^r (A_k)$ .

Sabemos que  $m = r + z n_1 n_2 \dots n_k$  para alguna  $z \in \mathbb{Z}$ . De aquí que

$$f^m (A_k) = f^{r + z n_1 n_2 \dots n_k} (A_k) = f^r (f^{z n_1 n_2 \dots n_k} (A_k)) = f^r (A_k).$$

Terminamos así la prueba de la proposición.  $\square$

**Nota:** Para fines prácticos, de ahora en adelante restringiremos nuestra atención a los homeomorfismos compatibles con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  que están definidos en el conjunto de Cantor  $C$ .

Consideremos una función  $f : C \rightarrow C$ . Una pregunta interesante es si  $f$  tiene puntos fijos, es decir, si  $f(c) = c$  para alguna  $c \in C$ .

Si  $f^n : C \rightarrow C$  denota la  $n$ -ésima iteración de  $f$ , también podemos preguntarnos por los puntos fijos de  $f^n$ . Es decir, queremos ver cuáles  $c \in C$  cumplen que  $f^n(c) = c$ , o lo que es lo mismo, cuáles puntos vuelven a su lugar en la  $n$ -ésima iteración de  $f$ .

**Definición 5.5** Al conjunto  $\text{per}(f) = \{c \in C \mid f^n(c) = c \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$  lo llamaremos el conjunto de los **puntos periódicos** de  $f$  en  $C$ . Si  $c \in C$  es tal que  $f^n(c) = c$  para alguna  $n \in \mathbb{N}$ , y  $n$  es mínima con esta propiedad, entonces diremos que  $c$  tiene **período  $n$  bajo  $f$** .

En las siguientes proposiciones veremos cómo se comportan en este sentido los puntos de  $C$  bajo los homeomorfismos compatibles con alguna sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

**Proposición 5.6** Si  $f : C \rightarrow C$  es un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , entonces  $f$  no tiene puntos periódicos.

**Demostración.**

Sea  $m \in \mathbb{N}$ . Veremos que  $f$  no tiene puntos periódicos de orden  $m$ .

Sean  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $n_1 n_2 \cdots n_k > m$  y  $c \in C$ . Consideremos la familia

$$A_k = \{A_k, f(A_k), f^2(A_k), \dots, f^{n_1 n_2 \cdots n_k - 1}(A_k)\},$$

donde  $A_k$  es como en la definición 5.2.

Como  $A_k$  es una partición de  $C$ , se tiene que  $c \in f^j(A_k)$  para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

Sea  $r \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k\}$  tal que  $m + j \equiv r \pmod{n_1 n_2 \cdots n_k}$ . Entonces  $r \neq j$ .

De acuerdo a lo anterior y a la Proposición 5.4, tenemos que

$$f^{m+j}(A_k) = f^r(A_k).$$

Finalmente, como  $A_k$  es una partición de  $C$ , se sigue que  $f^j(A_k) \cap f^r(A_k) = \emptyset$ , y entonces

$$f^{m+j}(A_k) \cap f^j(A_k) = \emptyset.$$

De modo que  $c, f^m(c) \in f^{m+j}(A_k)$  y  $c \neq f^m(c)$ .

Por tanto  $f$  no tiene puntos periódicos de orden  $m$ .

De esta manera concluimos la prueba de la proposición.  $\square$

Retomando nuestro análisis, dada una función  $f : C \rightarrow C$ , puede suceder que haya alguna  $c \in C$  tal que, quizá,  $c$  no vuelve a su lugar bajo ninguna iteración de  $f$ , pero que en cambio, las iteraciones

de  $c$  bajo  $f$  se aproximen mucho a  $c$ , es decir: puede ser que  $c$  sea un punto de acumulación de sus imágenes bajo las iteraciones de  $f$ .

De acuerdo a esto introducimos la siguiente

**Definición 5.7** Al conjunto

$$\text{rec}(f) = \{c \in C \mid \text{para toda vecindad } V \text{ de } c \text{ en } X \\ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n(c) \in V\},$$

lo llamaremos el conjunto de **puntos recurrentes** de  $f$  en  $C$ .

**Proposición 5.8** Si  $f : C \rightarrow C$  es un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , entonces todos los puntos de  $C$  son recurrentes bajo  $f$ .

**Demostración.**

Sean  $c \in C$  y  $\varepsilon > 0$ . Veremos que  $f^m(c) \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  para alguna  $m \in \mathbb{N}$ .

Así pues, dado que  $f$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , podemos tomar familias  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  y  $\{\mathcal{A}_k : k \in \mathbb{N}\}$  como en la definición 5.2. En particular se tiene que  $m(\mathcal{A}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $m(\mathcal{A}_k) < \varepsilon$ .

Como  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $C$ , existe  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$  tal que  $c \in f^j(A_k)$ . Por la Proposición 5.4 tenemos que

$$f^{j+n_1 n_2 \cdots n_k}(A_k) = f^j(A_k).$$

De manera que  $f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(c) \in f^j(A_k)$ , y dado que  $\text{diam}(f^j(A_k)) < \varepsilon$ , podemos concluir que  $|c - f^{n_1 n_2 \cdots n_k}(c)| < \varepsilon$ .

Esto termina la prueba de la proposición.

Ahora bien, dado que  $c, a \in f^s(A_k)$ ,  $c > a$  y

$$\text{diam}(f^s(A_k)) \leq m(\mathcal{A}_k) < c - a,$$

se tiene que

$$f^s(A_k) \subset [0, c).$$

Además, como  $\text{diam}(f^s(A_k)) < a - (c - \varepsilon)$  es fácil ver que

$$f^s(A_k) \subset (c - \varepsilon, c).$$

Por tanto  $c \notin f^s(A_k)$  y entonces  $f^r(A_k) \neq f^s(A_k)$ .

Dado que  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $C$ , se sigue que  $f^r(A_k) \cap f^s(A_k) = \emptyset$ .

Ahora bien, sea  $t \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$  con  $t = s - r$  (mód  $n_1 n_2 \cdots n_k$ ). Así pues, de acuerdo a la Proposición 5.4, tenemos que

$$f^t(f^r(A_k)) = f^{s-r}(f^r(A_k)) = f^s(A_k),$$

de modo que

$$f^t(c) \in f^t(f^r(A_k)) = f^s(A_k) \subset (c - \varepsilon, c) \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

Terminamos así la prueba de la proposición.  $\square$

Otra de las características principales de los homeomorfismos que son compatibles con alguna sucesión, es que los  $A_k$  (dados como en la definición 5.2) pueden ser tomados de tal manera que  $0 \in A_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Esto es lo que probaremos a continuación.

**Proposición 5.9** Si  $f : C \rightarrow C$  es un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , entonces podemos suponer que  $0 \in A_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.**

Sea  $A_k \in \mathcal{A}$  tal que  $0 \notin A_k$ . Como  $\mathcal{A}$  es una partición de  $C$  entonces  $0 \in f^m(A_k)$  para alguna  $m \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

Sea  $A'_k = f^m(A_k)$ .

Consideremos la familia

$$\mathcal{A}'_k = \{A'_k, f(A'_k), \dots, f^{n_1 n_2 \cdots n_k - m}(A'_k), \dots, f^{n_1 n_2 \cdots n_k - 1}(A'_k)\}.$$

Por la Proposición 5.4 tenemos que

$$f^{n_1 n_2 \cdots n_k - i}(A'_k) = f^{n_1 n_2 \cdots n_k - i + m}(A_k) = f^{m-i}(A_k)$$

para cada  $i \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

De aquí que

$$\mathcal{A}'_k = \{f^m(A_k), f^{m+1}(A_k), \dots, f^0(A_k), \dots, f^{m-1}(A_k)\}.$$

Por tanto  $\mathcal{A}'_k = \mathcal{A}_k$ , con la condición adicional de que  $0 \in f^m(A_k) = A'_k$ .

Con esto queda demostrada la proposición.  $\square$

En la siguiente proposición veremos una de las propiedades más importantes de los homeomorfismos compatibles con alguna sucesión.

**Proposición 5.10** Sea  $f : C \rightarrow C$  un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Si  $0 \in A_k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , entonces  $A_{k+1} \subset A_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.**

Supongamos que  $A_{k+1} \cap (C \setminus A_k) \neq \emptyset$  para alguna  $k \in \mathbb{N}$ .

Como la familia  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $C$  entonces  $A_{k+1} \cap f^m(A_k) \neq \emptyset$  para alguna  $m \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \cdots n_k - 1\}$ .

Veremos en dos pasos que esto no es posible.

Paso 1.

Sea  $E^m = f^{-m}(A_{k+1}) \cap A_k$ . Entonces  $E^m$  es un subconjunto no vacío de  $A_k$ .

Veremos que  $0 \notin \bigcup \{E^m, f(E^m), f^2(E^m), \dots, f^{n_1 n_2 \dots n_{k+1} - 1}(E^m)\}$ .

Supongamos, por el contrario, que para alguna  $s \in \{0, 1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k+1} - 1\}$  se tiene que  $0 \in f^s(E^m)$ . Entonces  $0 \in f^{s-m}(A_{k+1}) \cap f^s(A_k)$ .

Como estamos suponiendo que  $0 \in A_k \cap A_{k+1}$ , tenemos que  $A_k = f^s(A_k)$ . Por otra parte, dado que  $\mathcal{A}_k$  es una partición, tenemos que  $s = 0$ . Entonces

$$0 \in f^{-m}(A_{k+1}) = f^{n_1 n_2 \dots n_{k+1} - m}(A_{k+1}).$$

Ahora, usando que  $\mathcal{A}_{k+1}$  es una partición, obtenemos que  $0 = n_1 n_2 \dots n_{k+1} - m$ . pero esto es imposible, ya que  $1 \leq m < n_1 n_2 \dots n_k$ .

Por tanto  $0 \notin \bigcup \{E^m, f(E^m), f^2(E^m), \dots, f^{n_1 n_2 \dots n_{k+1} - 1}(E^m)\}$ .

Paso 2.

Sea  $c \in E^m$ .

Dado que  $f^{-m}(A_{k+1})$  y  $A_k$  son abiertos en  $C$ ,  $E^m$  también es abierto en  $C$ .

En particular, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap C \subset E^m$ .

Como  $m(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , y  $\mathcal{A}_n$  es una partición de  $C$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe un número natural  $N$  suficientemente grande de modo que  $m(A_N) < \frac{\varepsilon}{2}$  y  $c \in f^r(A_N)$  para alguna  $r \in \mathbb{N}$ . De aquí es fácil ver que

$$f^r(A_N) \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap C \subset E^m.$$

Ahora, como la familia

$$\mathcal{A}_N = \{A_N, f(A_N), f^2(A_N), \dots, f^{n_1 n_2 \dots n_N - 1}(A_N)\}$$

cubre a  $C$ , en particular se tiene que

$$0 \in f^s(A_N) \subset f^s(f^{-r}(E^m)).$$

para alguna  $s \in \{0, 1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_N - 1\}$ .

Sea  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_{k+1} - 1\}$  tal que  $t \equiv s - r \pmod{n_1 n_2 \dots n_{k+1}}$ .

Por la Proposición 5.4 sabemos que

$$0 \in f^s(f^{-r}(E^m)) = f^t(E^m) \in \bigcup \{E^m, f(E^m), f^2(E^m), \dots, f^{n_1 n_2 \dots n_{k+1}-1}(E^m)\},$$

pero esto es una contradicción con lo que vimos en el paso 1.

Por tanto  $A_{k+1} \subset A_k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  y, terminamos así la prueba de la Proposición.  $\square$

**Proposición 5.11** Si  $f : C \rightarrow C$  es un homeomorfismo compatible con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , y  $0 \in A_k$  para toda  $k \in \mathbb{N}$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes para  $r, s \in \mathbb{N}$ :

- (a)  $f^r(A_{k+1}) \subset f^s(A_k)$ ,
- (b)  $f^r(A_{k+1}) \cap f^s(A_k) \neq \emptyset$ , y
- (c)  $r \equiv s \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

**Demostración.**

Claramente (a) implica (b).

Veremos que (b) implica (c).

Sea  $k \in \mathbb{N}$  y supongamos que  $f^r(A_{k+1}) \cap f^s(A_k) \neq \emptyset$ .

Por la Proposición 5.10 tenemos que  $A_{k+1} \subset A_k$ , de donde obtenemos que  $f^r(A_{k+1}) \subset f^r(A_k)$  y en consecuencia  $f^r(A_k) \cap f^s(A_k) \neq \emptyset$ .

Sean  $r_1, s_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$  tales que  $r_1 \equiv r \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$  y  $s_1 \equiv s \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

Por la Proposición 5.4,  $f^{r_1}(A_k) = f^r(A_k)$  y  $f^{s_1}(A_k) = f^s(A_k)$ . Entonces

$$f^{r_1}(A_k) \cap f^{s_1}(A_k) \neq \emptyset.$$

Como la familia  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $C$  concluimos que  $r_1 = s_1$ , de donde  $r \equiv s \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

Finalmente veremos que (c) implica (a).

Supongamos que  $r \equiv s \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$ .

Aplicando la Proposición 5.4 se sigue que  $f^r(A_k) = f^s(A_k)$ . De modo que usando una vez más la Proposición 5.10, obtenemos que

$$f^r(A_{k+1}) \subset f^r(A_k) \subset f^s(A_k).$$

Terminamos así la prueba de la Proposición.  $\square$

## Capítulo 6

# Compatibilidad y solenoides

En capítulos anteriores definimos los solenoides y el concepto de compatibilidad para homeomorfismos; vimos también ciertas propiedades generales de este concepto. El objetivo principal del presente capítulo es probar que si un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  es compatible con alguna sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , entonces  $C \times I / (\sim f)$  es homeomorfo a un solenoide.

Para alcanzar este objetivo necesitaremos probar una serie de resultados. En el primero de ellos veremos que si dos homeomorfismos  $f, g : C \rightarrow C$  son compatibles con una misma sucesión entonces tienen un comportamiento bastante similar. En particular, empezaremos por ver que dos homeomorfismos con esta característica son conjugados.

### Lema 6.1

Si  $f, g : C \rightarrow C$  son dos homeomorfismos compatibles con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  entonces existe un homeomorfismo  $\varphi : C \rightarrow C$  tal que  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ .

### Demostración.

Dado que  $f$  y  $g$  son compatibles con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , existen familias  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  y  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$  tales que satisfacen la condición (iii) de la definición de compatibilidad y, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , se tiene que

- (a) satisfacen las condiciones (i) y (ii) de compatibilidad,
- (b)  $0 \in A_k \cap B_k$  (por la Proposición 5.9) y
- (c)  $A_{k+1} \subset A_k$  y  $B_{k+1} \subset B_k$  (por la Proposición 5.10).

De aquí que para cada  $p \in C$ , existe  $a_k \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$  tal que  $p \in f^{a_k}(A_k)$ . Además, como el diámetro de los  $A_k$  tiende a cero, es fácil ver que no puede haber dos puntos distintos en  $\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$ .

Por tanto  $p = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$  para alguna sucesión  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Estrictamente hablando deberíamos escribir  $\{p\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$ , creemos que podemos hacer más fácil la lectura si escribimos  $p$  en lugar de  $\{p\}$  y  $\varphi(p)$  en lugar de  $\{\varphi(p)\}$ .

Definimos  $\varphi(p) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)$ .

Veremos, en una serie de pasos, que  $\varphi$  es el homeomorfismo que estamos buscando.

Paso 1.

$\varphi$  está bien definida.

Tenemos que  $p = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$ . En particular  $f^{a_{k+1}}(A_{k+1}) \cap f^{a_k}(A_k) \neq \emptyset$ , así que, aplicando la Proposición 5.11, tenemos que

$$a_{k+1} \equiv a_k \pmod{n_1 n_2 \dots n_k} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Aplicando ahora la Proposición 5.11 al homeomorfismo  $g$ , obtenemos que

$$g^{a_{k+1}}(B_{k+1}) \subset g^{a_k}(B_k)$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Ahora bien, dado que  $B_k$  es compacto para cada  $k \in \mathbb{N}$  y  $g$  es continua, se tiene que  $g^{a_k}(B_k)$  también es compacto para cada  $k \in \mathbb{N}$ . De lo anterior podemos concluir que la intersección  $\bigcap_{k=1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)$  es no vacía.

Por otra parte, como el diámetro de los  $B_k$  tiende a cero, es claro que no puede haber dos puntos distintos en  $\bigcap_{k=1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)$ . En consecuencia concluimos que  $\varphi$  es una función y que está bien definida.

Paso 2.

$\varphi$  es biyectiva.

Si  $p \in C$ , sabemos que  $p = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$  para alguna sucesión  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ . De manera análoga es fácil ver que existe una sucesión  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $p = \bigcap_{k=1}^{\infty} g^{b_k}(B_k)$ .

Sea  $\eta : C \rightarrow C$  dada por  $\eta(p) = \eta(\bigcap_{k=1}^{\infty} g^{b_k}(B_k)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{b_k}(A_k)$ .

Por un argumento similar al del paso anterior tenemos que  $\eta$  es una función bien definida que, además, satisface:

$$(a) \quad (\eta \circ \varphi)(p) = \eta(\varphi(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k))) = \eta(\bigcap_{k=1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k) = p, \quad y$$

$$(b) \quad (\varphi \circ \eta)(p) = \varphi(\eta(\bigcap_{k=1}^{\infty} g^{b_k}(B_k))) = \varphi(\bigcap_{k=1}^{\infty} f^{b_k}(A_k)) = \bigcap_{k=1}^{\infty} g^{b_k}(B_k) = p.$$

De modo que  $\eta \circ \varphi = 1_C = \varphi \circ \eta$  y por tanto  $\eta$  es la inversa de  $\varphi$ . En consecuencia  $\varphi$  es biyectiva.

Paso 3.

$\varphi(f^{a_m}(A_m)) = g^{a_m}(B_m)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Sean  $m \in \mathbb{N}$  y  $p \in f^{a_m}(A_m)$ . Entonces

$$p = (\bigcap_{k=1}^{m-1} f^{a_k}(A_k)) \cap f^{a_m}(A_m) \cap (\bigcap_{k=m+1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)), \text{ y por tanto} \\ \varphi(p) = (\bigcap_{k=1}^{m-1} g^{a_k}(B_k)) \cap g^{a_m}(B_m) \cap (\bigcap_{k=m+1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)) \subset g^{a_m}(B_m).$$

De aquí que  $\varphi(f^{a_m}(A_m)) \subset g^{a_m}(B_m)$ .

Ahora, si  $q \in g^{a_m}(B_m)$  tenemos que

$$q = (\cap_{k=1}^{m-1} g^{a_k}(B_k)) \cap g^{a_m}(B_m) \cap (\cap_{k=m+1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)), \text{ y entonces}$$

$$\varphi^{-1}(q) = \eta(q) = (\cap_{k=1}^{m-1} f^{a_k}(A_k)) \cap f^{a_m}(A_m) \cap (\cap_{k=m+1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)) \subset f^{a_m}(A_m).$$

En consecuencia  $g^{a_k}(B_k) \subset \varphi(f^{a_k}(A_k))$  y concluimos la prueba del paso 3.

Paso 4.

$\varphi$  es continua.

Sea  $U \subset C$  abierto y sea  $x \in \varphi^{-1}(U)$ . Supongamos que  $\varphi(x) = \cap_{k=1}^{\infty} g^{b_k}(B_k)$  para alguna sucesión  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Como  $g^{b_k}(B_k)$  es abierto en  $C$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ , y  $\text{diam}(g^{b_k}(B_k)) \rightarrow 0$ , tenemos que  $\varphi(x) \in g^{b_{k_0}}(B_{k_0}) \subset U$  para alguna  $k_0 \in \mathbb{N}$ . De aquí que

$$x \in \varphi^{-1}(g^{b_{k_0}}(B_{k_0})) \subset \varphi^{-1}(U).$$

Ahora bien, por el paso anterior sabemos que  $\varphi^{-1}(g^{b_{k_0}}(B_{k_0})) = f^{b_{k_0}}(A_{k_0})$ , así que  $x \in f^{b_{k_0}}(A_{k_0}) \subset \varphi^{-1}(U)$ . Finalmente, como  $f^{b_{k_0}}(A_{k_0})$  es abierto en  $C$ , podemos concluir que  $\varphi^{-1}(U)$  es abierto en  $C$  y por tanto  $\varphi$  es continua.

Paso 5.

$\varphi$  es un homeomorfismo.

En los pasos anteriores vimos que  $\varphi$  es biyectiva y continua.

Por otra parte, el dominio de  $\varphi$  es compacto, así que podemos concluir que  $\varphi$  es un homeomorfismo.

Paso 6.

$$\varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Sea  $p \in C$ , con  $p = \cap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)$  para alguna sucesión  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces

$$(\varphi \circ f)(p) = (\varphi \circ f)(\cap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)) = \varphi(\cap_{k=1}^{\infty} f^{a_k+1}(A_k)) = \cap_{k=1}^{\infty} g^{a_k+1}(B_k).$$

Por otra parte

$$(g \circ \varphi)(p) = (g \circ \varphi)(\cap_{k=1}^{\infty} f^{a_k}(A_k)) = g(\cap_{k=1}^{\infty} g^{a_k}(B_k)) = \cap_{k=1}^{\infty} g^{a_k+1}(B_k).$$

De aquí concluimos que  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$  y terminamos la prueba del paso 6.

De esta manera concluimos la prueba del lema.  $\square$

Antes de continuar introduciremos el siguiente Teorema, que será una herramienta muy útil en la prueba de los siguientes resultados.

**Teorema 6.2**

Sean  $X_1$  y  $X_2$  espacios topológicos y  $\Pi_k : X_k \rightarrow Y_k$  una identificación para  $k \in \{1, 2\}$ . Sea  $f : X_1 \rightarrow X_2$  un homeomorfismo tal que  $\Pi_2 \circ f$  es constante en las fibras de  $\Pi_1$  y  $\Pi_1 \circ f^{-1}$  es constante en las fibras de  $\Pi_2$ . Entonces existe un homeomorfismo  $f_* : Y_1 \rightarrow Y_2$  (dado por  $f_* = \Pi_2 \circ f \circ (\Pi_1)^{-1}$ ) tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 X_1 & \rightarrow & X_2 \\
 \Pi_1 \downarrow & & \downarrow \Pi_2 \\
 Y_1 & \xrightarrow{f_*} & Y_2
 \end{array}$$

**Demostración.**

Haremos la prueba en cuatro pasos.

Paso 1.

Para  $k \in \{1, 2\}$  consideremos  $y_k \in Y_k$ , y la fibra  $A_k = \Pi_k^{-1}(y_k)$ .

Veremos que  $f(A_1) = \Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1))$  y  $f^{-1}(A_2) = \Pi_1^{-1}(\Pi_1 \circ f^{-1}(A_2))$ .

Claramente  $f(A_1) \subset \Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1))$ .

Sea ahora  $b \in \Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1))$ .

Como  $\Pi_1 \circ f^{-1}$  es constante en las fibras de  $\Pi_2$ , en particular tenemos que es constante en la fibra  $\Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1))$ , de donde

$$\Pi_1 \circ f^{-1}(b) = \Pi_1 \circ f^{-1}(f(A_1)) = \Pi_1(A_1) = y_1,$$

Por tanto  $f^{-1}(b) \in A_1$  y se sigue que  $b \in f(A_1)$ .

En consecuencia  $f(A_1) = \Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1))$ .

De manera completamente análoga se puede probar que

$$f^{-1}(A_2) = \Pi_1^{-1}(\Pi_1 \circ f^{-1}(A_2)).$$

Paso 2.

Por un lado, tenemos que  $\Pi_1 : X_1 \rightarrow Y_1$  es una identificación y que la función continua  $\Pi_2 \circ f : X_1 \rightarrow Y_2$  preserva las fibras de  $\Pi_1$ . De acuerdo a esto, por el Teorema 3.14 (de la Transgresión) existe una función continua  $f_* : Y_1 \rightarrow Y_2$ , dada por  $f_* = (\Pi_2 \circ f) \circ \Pi_1^{-1}$ , tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 X_1 & \rightarrow & X_2 \\
 \Pi_1 \downarrow & \searrow \Pi_2 \circ f & \downarrow \Pi_2 \\
 Y_1 & \xrightarrow{f_*} & Y_2
 \end{array}$$

Por otro lado, como  $\Pi_2 : X_2 \rightarrow Y_2$  es una identificación y  $\Pi_1 \circ f^{-1} : X_2 \rightarrow Y_1$  es una función continua que preserva las fibras de  $\Pi_2$ , gracias al Teorema 3.14 (de la Transgresión) existe una función continua  $h_* : Y_2 \rightarrow Y_1$ , la cual está dada por  $h_* = (\Pi_1 \circ f^{-1}) \circ \Pi_2^{-1}$ , tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 X_1 & \rightarrow & & & X_2 \\
 \Pi_1 \downarrow & & \swarrow \Pi_1 \circ f^{-1} & & \downarrow \Pi_2 \\
 Y_1 & \leftarrow & & & Y_2 \\
 & & h_* & & 
 \end{array}$$

Paso 3.

Veremos que  $h_* = f_*^{-1}$ .

Para  $k \in \{1, 2\}$  sean  $y_k \in Y_k$ , y  $A_k = \Pi_k^{-1}(y_k)$ .

En el paso 1 vimos que

$$f(A_1) = \Pi_2^{-1}(\Pi_2 \circ f(A_1)) \text{ y } f^{-1}(A_2) = \Pi_1^{-1}(\Pi_1 \circ f^{-1}(A_2)).$$

De aquí que

$$\begin{aligned}
 h_*(f_*(y_1)) &= (h_* \circ \Pi_2 \circ f)(A_1) \\
 &= (\Pi_1 \circ f^{-1} \circ \Pi_2^{-1})(\Pi_2 \circ f(A_1)) \\
 &= \Pi_1(f^{-1}(f(A_1))) = \Pi_1(A_1) = y_1.
 \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
 f_*(h_*(y_2)) &= (f_* \circ \Pi_1 \circ f^{-1})(A_2) \\
 &= (\Pi_2 \circ f \circ \Pi_1^{-1})(\Pi_1 \circ f^{-1}(A_2)) \\
 &= \Pi_2(f(f^{-1}(A_2))) = \Pi_2(A_2) = y_2.
 \end{aligned}$$

Paso 4.

En el paso 2 vimos que  $f_*$  y  $h_*$  son funciones continuas y, en el paso 3, vimos que  $h_* = f_*^{-1}$ . Por tanto  $f_* : Y_1 \rightarrow Y_2$  es un homeomorfismo.

Concluimos así la prueba del Teorema.  $\square$

Como habíamos mencionado antes, si  $g$  y  $f$  son homeomorfismos del conjunto de Cantor en sí mismo y son compatibles con la misma sucesión, entonces tienen un comportamiento bastante similar. De hecho, nuestro siguiente objetivo será ver que, bajo estas condiciones, se tiene que  $C \times I/(\sim f)$  es homeomorfo a  $C \times I/(\sim g)$ .

La prueba de este resultado se basa en el Teorema anterior, pero para llegar a esto necesitamos servirnos del siguiente

**Lema 6.3**

Sean  $f, g : C \rightarrow C$  dos homeomorfismos compatibles con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Sean  $P_f$  y  $P_g$  las funciones cocientes usuales de  $C \times I$  en  $C \times I / (\sim f)$  y  $C \times I / (\sim g)$  respectivamente.

Si  $\lambda : C \times I \rightarrow C \times I$  está dada por  $\lambda(x, y) = (\varphi(x), y)$ , donde  $\varphi$  es un homeomorfismo tal que  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ , entonces

- (i)  $\lambda$  es un homeomorfismo y
- (ii)  $\lambda$  induce una biyección entre las fibras de  $P_f$  y las de  $P_g$ .

**Demostración.**

Haremos la prueba en tres partes.

(a) Empezaremos por ver que  $\lambda$  es un homeomorfismo.

Claramente  $\lambda$  se puede ver como la función producto

$$\lambda = \varphi \times 1_C : C \times I \rightarrow C \times I.$$

Como cada factor es un homeomorfismo, obtenemos que  $\lambda$  también lo es.

(b) Mostraremos que la imagen de cada fibra  $P_f^{-1}(z)$  bajo  $\lambda$  es una fibra de  $P_g$ .

Recordemos que, de acuerdo a la Observación 3.3, las fibras de  $P_f$  constan de uno o dos puntos, es decir:

- (i)  $P_f^{-1}(z)$  es de la forma  $\{(x, 1), (f(x), 0)\}$  para alguna  $x \in C$ , o bien
- (ii)  $P_f^{-1}(z)$  es de la forma  $\{(x, y)\}$  para alguna  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ .

Análogamente,

- (i)  $P_g^{-1}(z) = \{(x, 1), (g(x), 0)\}$  para alguna  $x \in C$ , o bien
- (ii)  $P_g^{-1}(z) = \{(x, y)\}$  para alguna  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ .

Ahora, si  $P_f^{-1}(z) = \{(x, y)\}$  para algún  $(x, y) \in C \times (0, 1)$ , entonces claramente  $\lambda(P_f^{-1}(z)) = \{(\varphi(x), y) \in C \times (0, 1)\}$ . De aquí que  $\lambda(P_f^{-1}(z)) = P_g^{-1}(z)$  para alguna  $z \in C \times I / (\sim g)$ .

En el caso en que  $P_f^{-1}(z) = \{(x, 1), (f(x), 0)\}$  tenemos que

$$\lambda(P_f^{-1}(z)) = \{(\varphi(x), 1), (\varphi(f(x)), 0)\} = \{(\varphi(x), 1), g(\varphi(x)), 0\},$$

ya que por hipótesis  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ .

Así pues, también en este caso,  $\lambda(P_f^{-1}(z))$  es de la forma  $P_g^{-1}(z)$  para alguna  $z \in C \times I / (\sim g)$ .

En consecuencia la imagen de cada fibra  $P_f^{-1}(z)$  bajo  $\lambda$  es una fibra de  $P_g$ .

(c)  $\lambda$  induce una biyección entre las fibras de  $P_f$  y las de  $P_g$ .

Consideremos la función  $\gamma : C \times I \rightarrow C \times I$  dada por  $\gamma(x, y) = (\varphi^{-1}(x), y)$ .

De manera análoga a como lo hicimos con  $\lambda$  en el inciso anterior, podemos probar que  $\gamma$  también manda fibras de  $P_g$  a fibras de  $P_f$ .

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda(x, y)) &= \gamma(\varphi(x), y) = (x, y) \text{ y} \\ \lambda(\gamma(x, y)) &= \lambda(\varphi^{-1}(x), y) = (x, y).\end{aligned}$$

Por tanto  $\gamma \circ \lambda = 1_C = \lambda \circ \gamma$ , y podemos concluir que  $\lambda$  induce una biyección entre las fibras de  $P_f$  y las de  $P_g$ .

De esta manera concluimos la prueba del Lema.  $\square$

Ahora sí, con la ayuda del lema anterior y del Teorema 6.2, mostraremos el siguiente

**Teorema 6.4**

Si  $f, g : C \rightarrow C$  son dos homeomorfismos compatibles con una sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , entonces  $C \times I / (\sim f)$  es homeomorfo a  $C \times I / (\sim g)$ .

**Demostración.**

Por el Lema 6.1 existe un homeomorfismo  $\varphi : C \rightarrow C$  tal que  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ .

Además, como  $P_f$  y  $P_g$  son identificaciones, de acuerdo al Lema 6.3 tenemos que la función  $\lambda : C \times I \rightarrow C \times I$ , dada por  $\lambda(x, y) = (\varphi(x), y)$ , es un homeomorfismo que induce una biyección entre las fibras de  $P_f$  y las de  $P_g$ . En particular se tiene que  $P_g \circ \lambda$  es constante en las fibras de  $P_f$  y  $P_f \circ \lambda^{-1}$  es constante en las fibras de  $P_g$ .

Así pues, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 6.2, y entonces existe un homeomorfismo  $\lambda_* : C \times I / (\sim f) \rightarrow C \times I / (\sim g)$ .

Terminamos así la prueba del Teorema.  $\square$

Recordemos ahora que en el Capítulo 4 definimos un homeomorfismo  $g : C \rightarrow C$  (ver Observación 4.13), tal que el espacio  $C \times I / (\sim g)$  es homeomorfo a un solenoide  $S$  (ver Teorema 4.15).

Si supiéramos que tal homeomorfismo  $g$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , entonces, de acuerdo al Teorema 6.4, cualquier otro homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , tendría la propiedad de que  $C \times I / (\sim f)$  es homeomorfo al solenoide  $S$ .

Así pues, en adelante lo que veremos es que el homeomorfismo  $g$  es, en efecto, compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Para llegar a esto tendremos que pasar por una serie de lemas, en los cuales utilizaremos ciertos resultados y conceptos introducidos en los capítulos anteriores.

Empezaremos por recordar que en el capítulo 4 definimos una rebanada  $R$  del solenoide  $S$  de la siguiente manera  $R = \{e(\bar{\theta}) \in S \mid \theta_0 = 0\}$  (ver Lema 4.8) y probamos que  $R$  es homeomorfo a  $C$  (ver Teorema 4.11).

También definimos una función  $G|_R: R \rightarrow R$  dada por  $G(r) = r \cdot e(\bar{\xi})$ , donde

$$\bar{\xi} = \left(1, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1 n_2}, \frac{1}{n_1 n_2 n_3}, \dots\right),$$

que resultó ser un homeomorfismo (ver Lema 4.8).

Como en adelante la función  $G|_R$  jugará un papel fundamental, a continuación veremos un lema en relación con el comportamiento de esta función.

**Lema 6.5**

Sea  $e(\bar{\alpha}) \in R$ . Entonces

$$G^m(e(\bar{\alpha})) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^m = \left(e(\alpha_0 + m), e\left(\alpha_1 + \frac{m}{n_1}\right), e\left(\alpha_2 + \frac{m}{n_1 n_2}\right), \dots\right)$$

para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.**

Empezaremos viendo por inducción que  $G^m(e(\bar{\alpha})) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^m$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Para  $m = 1$  el resultado se tiene por definición.

Supongamos ahora que  $G^{m-1}(e(\bar{\alpha})) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^{m-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} G^m(e(\bar{\alpha})) &= G(G^{m-1}(e(\bar{\alpha}))) = G\left(e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^{m-1}\right) \\ &= e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^{m-1} \cdot e(\bar{\xi}) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^m. \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$\begin{aligned} e(\bar{\xi})^m &= \left(e(1), e\left(\frac{1}{n_1}\right), e\left(\frac{1}{n_1 n_2}\right), e\left(\frac{1}{n_1 n_2 n_3}\right), \dots\right)^m = \\ &= \left(e(1)^m, e\left(\frac{1}{n_1}\right)^m, e\left(\frac{1}{n_1 n_2}\right)^m, e\left(\frac{1}{n_1 n_2 n_3}\right)^m, \dots\right) = \\ &= \left(e(m), e\left(\frac{m}{n_1}\right), e\left(\frac{m}{n_1 n_2}\right), e\left(\frac{m}{n_1 n_2 n_3}\right), \dots\right). \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} G^m(e(\bar{\alpha})) &= e(\bar{\alpha}) \cdot \left(e(m), e\left(\frac{m}{n_1}\right), e\left(\frac{m}{n_1 n_2}\right), e\left(\frac{m}{n_1 n_2 n_3}\right), \dots\right) \\ &= \left(e(\alpha_0 + m), e\left(\alpha_1 + \frac{m}{n_1}\right), e\left(\alpha_2 + \frac{m}{n_1 n_2}\right), \dots\right). \end{aligned}$$

De esta manera terminamos la prueba del lema.  $\square$

Una vez probado el lema, recordemos que en la Observación 4.13 definimos un homeomorfismo  $g : C \rightarrow C$  dado por

$$g(x) = h^{-1}(G(h(x))),$$

donde  $h : C \rightarrow R$  es un homeomorfismo (ver Teorema 4.11).

La idea ahora es ver que  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  que define el solenoide  $S$ . Si probamos esto, entonces de acuerdo al Lema 5.3, tendremos que el homeomorfismo  $g$  también es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Para esto, introducimos la

**Definición 6.6**

Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

$$A_k = \{e(\bar{\theta}) \in R \mid \theta_i = 0; i \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

La intención es utilizar estos  $A_k$  para ver que  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Así pues, empezaremos por probar que los  $A_k$  inducen particiones de  $R$ . Esto lo veremos en los siguientes lemas.

**Lema 6.7**

Los elementos de la familia

$$A_k = \{A_k, G(A_k), G^2(A_k), \dots, G^{n_1 n_2 \dots n_k - 1}(A_k)\}$$

son ajenos dos a dos.

**Demostración.**

Supongamos que  $G^i(A_k) \cap G^j(A_k) \neq \emptyset$  para algunas  $i \leq j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$ . Entonces claramente  $A_k \cap G^{j-i}(A_k) \neq \emptyset$ .

Sea  $e(\bar{\theta}) \in A_k \cap G^{j-i}(A_k)$ .

Como  $e(\bar{\theta}) \in A_k$ , tenemos que  $\theta_m = 0$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Además  $e(\bar{\theta}) = G^{j-i}(e(\bar{\alpha}))$  para alguna  $e(\bar{\alpha}) \in A_k$ , así que, de acuerdo al Lema 6.5, tenemos que

$$G^{j-i}(e(\bar{\alpha})) = \left( e(\alpha_0 + j - i), e\left(\alpha_1 + \frac{j-i}{n_1}\right), e\left(\alpha_m + \frac{j-i}{n_1 n_2}\right), \dots \right).$$

De este modo, en particular se tiene que

$$e(0) = e(\theta_m) = e\left(\alpha_m + \frac{j-i}{n_1 n_2 \dots n_m}\right) = e\left(\frac{j-i}{n_1 n_2 \dots n_m}\right)$$

para cada  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ , pero la igualdad anterior sólo puede darse cuando  $j - i$  es un múltiplo de  $n_1 n_2 \dots n_m$  para cada  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Dado que  $i \leq j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$ , obtenemos que  $j - i = 0$ .

Por tanto  $G^i(A_k) = G^j(A_k)$  y, en consecuencia, los elementos de  $\mathcal{A}_k$  son ajenos dos a dos.

Así terminamos la prueba del lema.  $\square$

A continuación veremos que los elementos de la familia  $\mathcal{A}_k$ , definida en el lema anterior, cubren a  $R$ . Con este fin, probaremos antes un lema que nos será muy útil.

**Lema 6.8**

Sea  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$  una sucesión y  $R$  como en el Lema 4.8. Entonces, dados  $e(\bar{\theta}) \in R$  y  $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ , podemos hallar  $j_m \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_m - 1\}$  tal que  $e\left(\frac{j_m}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) = e(\theta_i)$  cada vez que  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

**Demostración.**

Haremos la prueba por inducción.

Así pues, para  $m = 1$ :

Como  $e(\bar{\theta}) \in R$ , en particular se tiene que  $e(\theta_1)^{n_1} = e(\theta_0) = e(0)$ , es decir,  $e(\theta_1)$  es una raíz  $n_1$ -ésima de  $e(0)$ . Es fácil ver que entonces  $\theta_1$  es de la forma  $\frac{j_1}{n_1}$  para alguna  $j_1 \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ .

De aquí que  $e(j_1) = e(0) = e(\theta_0)$  y  $e\left(\frac{j_1}{n_1}\right) = e(\theta_1)$ .

Supongamos ahora que para  $1 \leq m - 1 < k$  existe  $j_{m-1} \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_{m-1} - 1\}$  tal que  $e\left(\frac{j_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) = e(\theta_i)$  cada vez que  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

Otra vez, como  $e(\bar{\theta}) \in R$ , en particular se tiene que  $e(\theta_m)^{n_m} = e(\theta_{m-1})$ , es decir,  $e(\theta_m)$  es una raíz  $n_m$ -ésima de  $e(\theta_{m-1})$ . De aquí es fácil ver que  $\theta_m$  es de la forma  $\frac{\theta_{m-1}}{n_m} + \frac{j'_m}{n_m}$  para alguna  $j'_m \in \{0, 1, \dots, n_m - 1\}$ .

Por hipótesis de inducción, podemos suponer que  $\theta_{m-1} = \frac{j_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_{m-1}}$ , así que

$$\theta_m = \frac{\theta_{m-1}}{n_m} + \frac{j'_m}{n_m} = \frac{j_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_m} + \frac{j'_m}{n_m} = \frac{j_{m-1} + j'_m n_1 n_2 \dots n_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_m}$$

Definimos  $j_m = j_{m-1} + j'_m n_1 n_2 \dots n_{m-1}$ .

Entonces claramente

$$e\left(\frac{j_m}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) = e(\theta_m).$$

Como  $0 \leq j_{m-1} \leq n_1 n_2 \dots n_{m-1} - 1$  y  $0 \leq j'_m \leq n_m - 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leq j_m &\leq n_1 n_2 \dots n_{m-1} - 1 + (n_m - 1) n_1 n_2 \dots n_{m-1} \\ &= n_1 n_2 \dots n_m - 1. \end{aligned}$$

Por tanto  $j_m \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_m - 1\}$ . Además, dada  $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} e\left(\frac{j_m}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) &= e\left(\frac{j_{m-1} + j'_m n_1 n_2 \dots n_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) \\ &= e\left(\frac{j_{m-1}}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) e(j'_m n_{i+1} n_{i+2} \dots n_{m-1}) \\ &= e(\theta_i) e(0) = e(\theta_i). \end{aligned}$$

De esta manera concluimos la prueba del lema.  $\square$

Ahora sí, podemos mostrar que  $\mathcal{A}_k$  cubre a  $R$ .

**Lema 6.9**

Si  $G$  es como en el Lema 4.8, entonces la unión de los elementos de la familia

$$\mathcal{A}_k = \{A_k, G(A_k), G^2(A_k), \dots, G^{n_1 n_2 \dots n_k - 1}(A_k)\}$$

cubre a  $R$ .

**Demostración.**

Sean  $k \in \mathbb{N}$ ,  $e(\bar{\theta}) \in R$  y  $A_k \in \mathcal{A}_k$ . Probaremos que  $e(\bar{\theta}) \in G^j(A_k)$  para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$ .

La idea de la prueba es hallar  $e(\bar{\alpha}) \in A_k$  tal que  $e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^j = e(\bar{\theta})$  para alguna  $j \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$ .

Por el lema anterior tenemos una  $j_k \in \{0, 1, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$  tal que

$$e\left(\frac{j_k}{n_1 n_2 \dots n_i}\right) = e(\theta_i)$$

para cada  $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ .

Así pues, definimos  $e(\bar{\alpha}) = e(\bar{\theta}) \cdot e(\bar{\xi})^{-j_k}$ .

Recordemos que

$$e(\bar{\xi})^{-jk} = \left( e(-jk), e\left(\frac{-jk}{n_1}\right), e\left(\frac{-jk}{n_1 n_2}\right), e\left(\frac{-jk}{n_1 n_2 n_3}\right), \dots \right).$$

Veremos que  $e(\bar{\alpha}) \in A_k$ ; para ello basta ver que  $e(\alpha_m) = e(0)$  cada vez que  $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ . Analizaremos dos casos.

Caso 1.

Si  $m = 0$  entonces

$$e(\alpha_0) = e(\theta_0) e(-jk) = e(0) e(0) = e(0).$$

Caso 2.

Sea ahora  $m \in \{1, \dots, k\}$ , entonces

$$\begin{aligned} e(\alpha_m) &= e(\theta_m) e\left(\frac{-jk}{n_1 n_2 \dots n_m}\right) = e(\theta_m) e\left(\frac{jk}{n_1 n_2 \dots n_m}\right)^{-1} \\ &= e(\theta_m) e(\theta_m)^{-1} = e(0). \end{aligned}$$

Así pues, de acuerdo al Lema 6.5

$$G^{jk}(e(\bar{\alpha})) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})^{jk} = e(\bar{\theta}),$$

de donde concluimos que  $e(\bar{\theta}) \in G^{jk}(A_k)$  y terminamos así la prueba del lema.  $\square$

**Lema 6.10**

$A_k$  es abierto y cerrado en  $R$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.**

Haremos la prueba en dos partes. Sea  $k \in \mathbb{N}$ .

(a)  $A_k$  es cerrado en  $R$ .

Sea  $T_k = \{0\}^k \times \prod_{n=k+1}^{\infty} S^1$ . Claramente  $T_k$  es un espacio compacto.

Dado que

$$A_k = \{e(\bar{\theta}) \in R \mid \theta_i = 0; i \in \{1, 2, \dots, k\}\},$$

es fácil ver que  $A_k = T_k \cap R$ , de modo que a  $A_k$  lo podemos ver como la intersección de un cerrado de  $\prod_{n=1}^{\infty} S^1$  con  $R$ .

Por tanto  $A_k$  es cerrado en  $R$ .

(b)  $A_k$  es abierto en  $R$ .

Como consecuencia directa de los lemas 6.7 y 6.9, tenemos que la familia

$$A_k = \{A_k, G(A_k), G^2(A_k), \dots, G^{n_1 n_2 \dots n_k - 1}(A_k)\}$$

es una partición de  $R$ .

En el inciso anterior vimos que  $A_k$  es cerrado en  $R$ , de donde obtenemos que  $G^i(A_k)$  también es cerrado en  $R$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$ . En consecuencia  $\bigcup \{G^i(A_k) : 1 \leq i \leq n_1 n_2 \dots n_k - 1\}$  es cerrado en  $R$ .

Como  $A_k$  es una partición de  $R$  tenemos que

$$A_k = R \setminus \bigcup \{G^i(A_k) \mid 1 \leq i \leq n_1 n_2 \dots n_k - 1\},$$

De aquí se sigue que  $A_k$  es abierto en  $R$ .

Terminamos así la prueba del lema.  $\square$

Dado que nuestro próximo objetivo es ver que  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , únicamente resta ver que  $m(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Esto es lo que mostraremos en el siguiente:

**Lema 6.11**

Si  $A_k$  es como en el Lema 6.7, entonces  $m(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

**Demostración.**

Sea  $k \in \mathbb{N}$ .

Tenemos que

$$A_k = \{e(\bar{\theta}) \in R \mid \theta_i = 0; i \in \{1, 2, \dots, k\}\}.$$

Así pues, si  $e(\bar{\alpha}) \in A_k$ , entonces por el Lema 6.5

$$\begin{aligned} G^m(e(\bar{\alpha})) &= \left( e(\alpha_0 + m), e\left(\alpha_1 + \frac{m}{n_1}\right), e\left(\alpha_2 + \frac{m}{n_1 n_2}\right), \dots \right) \\ &= \left( e(m), e\left(\frac{m}{n_1}\right), e\left(\frac{m}{n_1 n_2}\right), \dots, e\left(\frac{m}{n_1 n_2 \dots n_k}\right), e\left(\alpha_{k+1} + \frac{m}{n_1 n_2 \dots n_{k+1}}\right), \dots \right) \end{aligned}$$

De aquí que

$$G^m(A_k) = \left\{ e(\bar{\theta}) \in R \mid \theta_i = \frac{m}{n_1 n_2 \dots n_i}; i \in \{1, 2, \dots, k\} \right\}.$$

De acuerdo a lo anterior, obtenemos que si  $e(\bar{\theta}), e(\bar{\alpha}) \in G^m(A_k)$ , entonces

$$\begin{aligned} d(e(\bar{\theta}), e(\bar{\alpha})) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{d(e(\theta_n), e(\alpha_n))}{2^n} \\ &= \sum_{n=k+1}^\infty \frac{d(e(\theta_n), e(\alpha_n))}{2^n} \leq 2 \sum_{n=k+1}^\infty \frac{1}{2^n} \leq \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

y, por tanto, podemos concluir que

$$\text{diam}(G^m(A_k)) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

para cada  $m \in \{1, 2, \dots, n_1 n_2 \dots n_m - 1\}$ .

De aquí que  $m(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{1} 0$

Concluimos así la prueba del lema.  $\square$

**Corolario 6.12**

El homeomorfismo  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ .

**Demostración.**

En el Lema 6.7 probamos que los elementos de la familia  $\mathcal{A}_k$  son ajenos dos a dos. Además, en el Lema 6.9 vimos que la unión de los elementos de la familia

$$\mathcal{A}_k = \{A_k, G(A_k), G^2(A_k), \dots, G^{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}(A_k)\}$$

cubre a  $R$ , de donde concluimos que  $\mathcal{A}_k$  es una partición de  $R$ .

Por otra parte, gracias al Lema 6.11 sabemos que  $m(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  y, gracias al Lema 6.10, tenemos que  $A_k$  es abierto y cerrado en  $R$  para cada  $k$ .

De acuerdo a lo anterior podemos concluir que  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ .

De esta manera terminamos la prueba del corolario.  $\square$

Finalmente llegamos al teorema central del capítulo:

**Teorema 6.13**

Si un homeomorfismo  $f$  del conjunto de Cantor en sí mismo es compatible con alguna sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , entonces  $C \times I/(\sim f)$  es homeomorfo a un solenoide.

**Demostración.**

Sea  $f : C \rightarrow C$  un homeomorfismo compatible con alguna sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

En el Corolario 6.12 vimos que el homeomorfismo  $G|_R$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ .

Además, dado que  $g : C \rightarrow C$  y  $h : C \rightarrow R$  son homeomorfismos que satisfacen  $h \circ g = G|_R \circ h$ , estamos en condiciones de aplicar el Lema 5.3. De acuerdo a esto podemos concluir que  $g$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ .

Ahora bien, aplicando el Lema 6.4 a  $f$  y a  $g$ , obtenemos que  $C \times I/(\sim f)$  es homeomorfo a  $C \times I/(\sim g)$ .

Recordemos que, de acuerdo al Teorema 4.15, tenemos que  $C \times I/(\sim g)$  es homeomorfo al solenoide  $S$ .

De este modo concluimos que  $C \times I/(\sim f)$  es homeomorfo al solenoide  $S$ .

Terminamos así la prueba del Teorema.  $\square$

## Capítulo 7

### Un ejemplo

Dedicaremos este capítulo a la presentación de un ejemplo que ilustrará los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

Como en todo este trabajo  $C$  denotará al conjunto de Cantor en  $I$ .

Es un resultado conocido que cada elemento  $c$  de  $C$  puede ser descrito como  $c = (c_1, c_2, c_3, \dots)$ , donde  $c_k \in \{0, 2\}$  para cada  $k$ . Además, si en el paso  $k - 1$  de la construcción de  $C$  tenemos que un punto  $c \in C$  quedó en un intervalo  $[a, b]$ , entonces el valor de la  $k$ -ésima entrada de  $c$  depende solamente de la posición de  $c$  con respecto al intervalo que quitamos en el  $k$ -ésimo paso al intervalo  $[a, b]$ . Es decir, esta entrada será cero si  $c$  está a la izquierda del intervalo que quitamos, y será 2 si está a la derecha del mismo.

Por comodidad, en lugar de considerar  $c_k \in \{0, 2\}$  tomaremos cada  $c_k \in \{0, 1\}$ .

Claramente esto no cambia la interpretación geométrica de esta descripción de los elementos de  $C$ .

Una vez establecido lo anterior, nuestro próximo objetivo será construir un homeomorfismo  $f : C \rightarrow C$  para después considerar sus propiedades principales.

#### DEFINICIÓN DE $f$ .

Así pues, para cada  $c \in C$  consideramos la siguiente suma, donde la suma de cada entrada la tomaremos módulo 2:

$$\begin{array}{rcccccc}
 \dots & c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\
 + & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 \dots & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1
 \end{array}$$

entonces definimos  $f(c) = a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ .

Por ejemplo, si  $c = (1, 1, 0, 1, 1, 1, \dots)$  entonces:

$$\begin{array}{r}
 \dots 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 + \dots 0 \ 0 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

En este caso,  $a_1 = 2 \pmod{2}$ , de modo que  $a_1 = 0$  y llevamos 1. De aquí que  $a_2 = 1 + 0 + 1 = 2 \pmod{2}$  así que, otra vez,  $a_2 = 0$  y llevamos 1.

Procediendo de la misma manera  $a_3 = 0 + 0 + 1 = 1$ .

Como ya no llevamos nada,  $a_4 = 1 + 0 = 1$ ,  $a_5 = 1 + 0 = 1$ , etc.

Así pues, en este caso, obtenemos que  $f(c) = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$ .

En este ejemplo podemos observar que, como al calcular  $a_3$  ya no llevamos nada, entonces  $a_4 = c_4 + 0 = c_4$ ,  $a_5 = c_5 + 0 = c_5$ , etc. En general obtenemos  $a_k = c_k$  para cada  $k \geq 4$ .

La manera en que acabamos de expresar a  $f$  es muy ilustrativa, pero más adelante necesitaremos una expresión más fácil de manejar.

Con este fin, para  $c \neq 1 = (1, 1, 1, \dots)$ , tomamos la primera entrada de  $c$  que sea igual a cero, y definimos  $m(c) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid c_k = 0\}$ .

Ahora sí, definimos  $f : C \rightarrow C$  dada por:

$$f(c) = \begin{cases} (f_1(c), f_2(c), f_3(c), \dots) & \text{si } c < 1 \\ 0 = (0, 0, 0, \dots) & \text{si } c = 1 \end{cases}$$

donde

$$f_k(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{1, 2, \dots, m(c) - 1\} \\ 1 & \text{si } k = m(c) \\ c_k & \text{si } k > m(c) \end{cases}$$

Claramente  $f$  es una función bien definida y, además, es fácil ver que coincide con la primera expresión de  $f$  que dimos.

Como ésta es la función que utilizaremos de aquí en adelante, a continuación veremos algunas de sus características.

Una manera geométrica de ver el comportamiento de  $f$  es la siguiente. Analizaremos dos casos.

Caso 1.

Sea  $c \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ .

De acuerdo a la descripción de  $C$  tenemos que  $c = (0, c_2, c_3, \dots)$ ; entonces claramente  $m(c) = 1$  y por tanto

$$f(c) = (1, c_2, c_3, \dots).$$

Esto quiere decir que  $f|_{[0, \frac{1}{3}]}$  es una traslación, ya que la primera coordenada de  $f(c)$  nos dice que  $f(c)$  está en  $[\frac{2}{3}, 1]$  pero en el resto de sus coordenadas es igual a  $c$ .

Caso 2.  
Si  $c \in [\frac{2}{3}, 1]$  entonces

$$c = (1, 1, 1, \dots, 0, c_{m(c)+1}, c_{m(c)+2}, \dots)$$

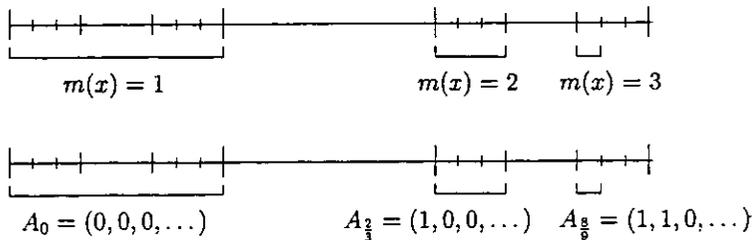
y, en consecuencia,

$$f(c) = (0, 0, 0, \dots, 1, c_{m(c)+1}, c_{m(c)+2}, \dots).$$

Lo que tenemos en este caso no es tan sencillo como la traslación del caso anterior, así que lo analizaremos con más detalle.

Geoméricamente,  $m(c)$  representa la primera vez que  $c$  queda en un intervalo a la izquierda de uno de los intervalos abiertos que quitamos en la construcción de  $C$ . Es decir, el conjunto  $A_c = \{x \in C \mid m(x) = m(c)\}$  representa la intersección de dicho intervalo de la izquierda con  $C$  (véase figura 7.1).

Figura 7.1:



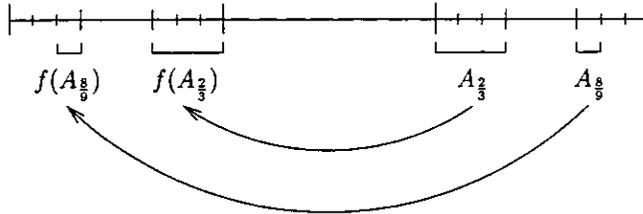
Así pues, dada  $c \in C$ , para el conjunto  $A_c$  se tiene que

$$f(A_c) = \{x \in C \mid x_{m(c)+1} = 1 \text{ y } x_j = 0 \text{ si } 1 \leq j < m(c)\}$$

Es decir,  $f$  restringida a  $A_c$  es una traslación, como se aprecia en la figura 7.2.

De acuerdo lo anterior, se tiene que la posición de  $f(A_c)$  es simétrica a la de  $A_c$  con respecto al  $\frac{1}{2}$ , pero  $f$  no actúa como reflexión, sino como traslación. De aquí que  $f$  se comporta como una isometría local excepto en el 1.

Figura 7.2:



Sin embargo, si un punto está muy cerca del 1 entonces su imagen estará muy cerca del 0, lo cual es congruente con la definición de  $f$ .

Esta descripción geométrica de  $f$  nos sugiere varias cosas. En particular tenemos que  $f$ , localmente, (excepto en el 1) se porta como una isometría, de manera que uno podría pensar que  $f$  es inyectiva y continua.

Además, el comportamiento geométrico de  $f$  sugiere que también es sobre, así que uno podría preguntarse si  $f$  es un homeomorfismo.

De hecho  $f$  sí es un homeomorfismo pero resultará ser más que eso.

A continuación veremos un resultado del cual concluiremos varias propiedades importantes de  $f$ .

A partir de ahora consideraremos  $G : S \rightarrow S$  como en la Notación 4.7, es decir,  $G(s) = s \cdot e(\bar{\xi})$  donde

$$\bar{\xi} = \left( 1, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1 n_2}, \frac{1}{n_1 n_2 n_3}, \dots \right),$$

pero tomaremos el caso particular donde  $n_i = 2$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ , y entonces

$$\bar{\xi} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots \right).$$

También utilizaremos  $h : C \rightarrow R$  como en el Teorema 4.11, es decir,

$$h(k_1, k_2, k_3, \dots) = (e(\theta_0), e(\theta_1), e(\theta_2), \dots),$$

donde  $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{1}{n_1} k_1$ , y en general  $\theta_m = \frac{1}{n_m} (k_m + \theta_{m-1})$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ .

Ahora sí estamos listos para introducir el:

**Teorema 7.1** Si  $G, h$  y  $f$  son como antes, entonces  $h \circ f = G \circ h$ .

**Demostración.**

Sean  $c = (c_1, c_2, c_3, \dots) \in C$  y  $e(\bar{\theta}) = h(f(c))$ .

Veremos que  $h \circ f$  y  $G \circ h$  coinciden coordenada a coordenada y haremos la prueba por inducción, analizando tres casos.

Caso 1.

$i \in \{1, 2, \dots, m(c) - 1\}$ .

En este caso  $f_i(c) = 0$  y, por la definición de  $h$ , tenemos que  $e(\theta_0) = e(0)$ .

Supongamos ahora que  $e(\theta_{i-1}) = e(0)$ , entonces por definición

$$e(\theta_i) = e\left(\frac{1}{2}(f_i(c) + \theta_{i-1})\right) = e\left(\frac{1}{2}f_i(c)\right) e(\theta_{i-1}) = e(0).$$

De manera que la  $i$ -ésima coordenada de  $h(f(c))$  es igual a  $e(0)$  cada vez que  $i \in \{1, 2, \dots, m(c) - 1\}$ .

Calcularemos ahora la coordenada  $i$ -ésima de  $(G \circ h)(c)$  para  $1 \leq i \leq m(c) - 1$ .

Si denotamos  $h(c) = e(\bar{\alpha})$  tenemos que  $\alpha_0 = 0$  y

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(c_i + \alpha_{i-1}) = \frac{1}{2}(1 + \alpha_{i-1}).$$

Veremos por inducción que  $\alpha_i = \frac{2^i - 1}{2^i}$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m(c) - 1\}$ .

Así pues, por construcción tenemos que

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) = \frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}.$$

Supongamos ahora que  $\alpha_{i-1} = \frac{2^{i-1} - 1}{2^{i-1}}$ , entonces

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(1 + \alpha_{i-1}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2^{i-1} - 1}{2^{i-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 \cdot 2^{i-1} - 1}{2^{i-1}}\right) = \frac{2^i - 1}{2^i}.$$

Ahora bien, si llamamos  $G(h(c)) = e(\bar{\beta})$  tenemos que

$$e(\bar{\beta}) = G(h(c)) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})$$

donde

$$e(\beta_0) = e(\alpha_0) \cdot e(1) = e(1).$$

Entonces

$$\begin{aligned} e(\beta_i) &= e(\alpha_i) \cdot e\left(\frac{1}{2^i}\right) = e\left(\frac{2^i - 1}{2^i}\right) \cdot e\left(\frac{1}{2^i}\right) = \\ &= e\left(\frac{2^i - 1}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right) = e(1) = e(0). \end{aligned}$$

Por tanto las  $i$ -ésimas coordenadas de  $G(h(c))$  son iguales a  $e(0)$  cada vez que  $i \in \{1, 2, \dots, m(c) - 1\}$  y, en consecuencia, coinciden con las respectivas de  $h(f(c))$ .

Caso 2.

$$i = m(c).$$

Calculemos la  $m(c)$ -ésima entrada de  $h(f(c))$ .

Así pues, sabemos que

$$\theta_{m(c)} = \frac{1}{2} (f_{m(c)}(c) + \theta_{m(c)-1}) = \frac{1}{2} (1 + \theta_{m(c)-1}).$$

En el caso anterior vimos que

$$e(\theta_{m(c)-1}) = e(0),$$

de modo que

$$e(\theta_{m(c)}) = \frac{1}{2} (1 + \theta_{m(c)-1}) = e\left(\frac{1}{2}\right).$$

Calcularemos ahora la  $m(c)$ -ésima entrada de

$$e(\bar{\beta}) = G(h(c)) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi})$$

usando que

$$\begin{aligned} \alpha_{m(c)} &= \frac{1}{2} (c_{m(c)} + \alpha_{m(c)-1}) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha_{m(c)-1}) = \frac{2^{m(c)-1} - 1}{2^{m(c)}}. \end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo al paso anterior, tenemos que  $e(\beta_{m(c)-1}) = e(1)$  y por tanto obtenemos que

$$\begin{aligned} e(\beta_{m(c)}) &= e(\alpha_{m(c)}) \cdot e\left(\frac{1}{2^{m(c)}}\right) = \\ &= e\left(\frac{2^{m(c)-1} - 1}{2^{m(c)}} + \frac{1}{2^{m(c)}}\right) = \\ &= e\left(\frac{2^{m(c)-1}}{2^{m(c)}}\right) = e\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

De manera que  $G(h(c))$  y  $h(f(c))$  coinciden en la coordenada  $m(c)$ .

Caso 3.

$i > m(c)$ .

Por definición de  $h(f(c))$ , tenemos que

$$\theta_{m(c)} = \frac{1}{2} (f_{m(c)}(c) + \theta_{m(c)-1}).$$

Además, por el caso 2 sabemos que  $e(\theta_{m(c)}) = e\left(\frac{1}{2}\right)$ , de modo que

$$\begin{aligned} e(\theta_{m(c)+1}) &= e\left(\frac{1}{2} (f_{m(c)+1}(c) + \theta_{m(c)})\right) = \\ &= e\left(\frac{1}{2} \left(c_{m(c)+1} + \frac{1}{2}\right)\right) = e\left(\frac{1}{2} \left(c_{m(c)+1} + \frac{1}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que

$$e(\theta_{m(c)+r-1}) = e\left(\frac{1}{2} \left(c_{m(c)+r-1} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-3}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-2}} + \frac{1}{2^{r-1}}\right)\right).$$

y calculemos:

$$\begin{aligned} e(\theta_{m(c)+r}) &= e\left(\frac{1}{2} (f_{m(c)+r}(c) + \theta_{m(c)+r-1})\right) = e\left(\frac{1}{2} (c_{m(c)+r} + \theta_{m(c)+r-1})\right) = \\ &= e\left(\frac{1}{2} \left(c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r}\right)\right). \end{aligned}$$

Calcularemos ahora las  $(m(c) + r)$ -ésimas coordenadas de

$$G(h(c)) = e(\bar{\alpha}) \cdot e(\bar{\xi}) = e(\bar{\beta})$$

para  $r \in \mathbb{N}$ .

Empezaremos probando por inducción que

$$\alpha_{m(c)+k} = \frac{1}{2} \left( c_{m(c)+k} + \frac{c_{m(c)+k-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+k-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{k-1}} + \frac{\alpha_{m(c)}}{2^{k-1}} \right)$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Así pues, sabemos que

$$\alpha_{m(c)+1} = \frac{1}{2} (c_{m(c)+1} + \alpha_{m(c)}).$$

Supongamos ahora que

$$\alpha_{m(c)+k} = \frac{1}{2} \left( c_{m(c)+k} + \frac{c_{m(c)+k-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+k-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{k-1}} + \frac{\alpha_{m(c)}}{2^{k-1}} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \alpha_{m(c)+k+1} &= \frac{1}{2} (c_{m(c)+k+1} + \alpha_{m(c)+k}) = \\ \frac{1}{2} \left( c_{m(c)+k+1} + \frac{1}{2} \left( c_{m(c)+k} + \frac{c_{m(c)+k-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+k-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{k-1}} + \frac{\alpha_{m(c)}}{2^{k-1}} \right) \right) &= \\ \frac{1}{2} \left( c_{m(c)+k+1} + \frac{c_{m(c)+k}}{2} + \frac{c_{m(c)+k-1}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^k} + \frac{\alpha_{m(c)}}{2^k} \right). \end{aligned}$$

Además, sabemos que

$$\alpha_{m(c)} = \frac{2^{m(c)-1} - 1}{2^{m(c)}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} e(\beta_{m(c)+r}) &= e(\alpha_{m(c)+r}) \cdot e\left(\frac{1}{2^{m(c)+r}}\right) = \\ e\left(\frac{1}{2} \left( c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} + \frac{\alpha_{m(c)}}{2^{r-1}} \right) + \frac{1}{2^{m(c)+r}}\right) &= \\ e\left(\frac{1}{2} \left( c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} + \frac{2^{m(c)-1} - 1}{2^{m(c)+r-1}} \right) + \frac{1}{2^{m(c)+r}}\right) &= \\ e\left(\frac{1}{2} \left( c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} \right) + \frac{2^{m(c)-1}}{2^{m(c)+r}}\right) &= \\ e\left(\frac{1}{2} \left( c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} \right) + \frac{1}{2^{r+1}}\right) &= \\ e\left(\frac{1}{2} \left( c_{m(c)+r} + \frac{c_{m(c)+r-1}}{2} + \frac{c_{m(c)+r-2}}{2^2} + \dots + \frac{c_{m(c)+1}}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^r} \right)\right). \end{aligned}$$

En consecuencia  $G(h(c))$  y  $h(f(c))$  coinciden en la coordenada  $m(c) + r$  para toda  $r \in \mathbb{N}$ .

Por tanto  $h \circ f = G \circ h$  y concluimos la prueba del Teorema.  $\square$

Recordaremos ahora que en el Lema 4.8 y en el Teorema 4.11 vimos que  $G|_R: R \rightarrow R$  y  $h: C \rightarrow R$  son homeomorfismos.

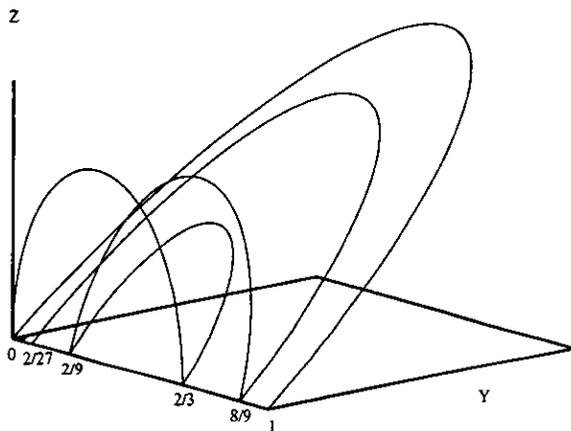
Notemos que en el Teorema anterior  $G \circ h$  de hecho representa  $G|_R \circ h$ , ya que el contradominio de  $h$  es  $R$ . Así pues, utilizando el Teorema 7.1 obtenemos que  $f = h^{-1} \circ G|_R \circ h$  y, por tanto,  $f$  es un homeomorfismo.

Por otra parte, en el Corolario 6.12 probamos que el homeomorfismo  $G|_R$  es compatible con alguna sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Así pues, utilizando el Lema 5.3 y el hecho de que  $f = h^{-1} \circ G|_R \circ h$ , obtenemos que  $f$  es compatible con la sucesión  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Esta situación nos proporciona mucha información sobre  $f$ , por ejemplo, gracias a esto y a las Proposiciones 5.6 y 5.8 obtenemos que  $f$  no tiene puntos periódicos y todos los puntos de  $C$  son recurrentes bajo  $f$ .

En particular obtenemos que  $f$  no tiene puntos fijos, de modo que podemos construir un espacio  $W_f$  como en el capítulo 3, el cual se vería de la siguiente manera:

Figura 7.3:



Finalmente, una última cosa que podemos decir de  $f$  es que como es un homeomorfismo compatible con una sucesión, utilizando el Teorema 6.13 se puede concluir que el espacio  $C \times I / (\sim f)$  es homeomorfo a un solenoide.

# Bibliografia

- [AG] A. Gutek. Solenoids and homeomorphisms on the Cantor set. *Commentationes Mathematicae XXI*. Ann. Soc. Math. Pol., Ser I, (1979) p.299-302.
- [Du] J. Dugundji, *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, EUA, 1966.
- [HY] J.G. Hocking, G.S. Young, *Topology*. Dover Publications, Inc., New York, EUA, 1968.
- [Mu] J. R. Munkres, *Topology, a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, EUA, 1975.
- [Na] Sam B. Nadler Jr., *Continuum Theory*. Marcel Dekker, Inc., New York, EUA, 1992.