

00382
2
29.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios de Posgrado

DEFORMACIONES NUCLEARES Y ESTABILIDAD
DE MODELOS COLECTIVOS

T E S I S

Que para obtener el grado académico de
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

p r e s e n t a

ENRIQUE LOPEZ MORENO

Director de Tesis: DR. OCTAVIO HECTOR CASTAÑOS GARZA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

j

1998



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A *MARIA DEL CARMEN MORENO*
... por siempre en su memoria.

A *ENRIQUE LÓPEZ ROJAS*
... por todo.

A *MARCELA*
por su cariño y apoyo.

A *CARLOS DAVID, HÉCTOR HUGO, Y SANDRA*

A *mis hermanitas: ROSA, MARGARITA, Y CARMEN (TETIS)*

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
SECRETARÍA GENERAL
DIRECCIÓN GENERAL DE ADMINISTRACIÓN ESCOLAR
SOLICITUD PARA EL TRÁMITE DE EXAMEN DE ESPECIALIZACION

DATOS GENERALES

No. de cuenta 6700293-5 No. de expediente 24012
 Nombre López Moreno Enrique
primer apellido segundo apellido nombre(s)
 Dirección Ayume #9, Colonia Ampliación Tepepan
 Población o ciudad México Del. o municipio Xochimilco Estado D. F.
 C.P. 16029 Tel. particular 6-75-61-82 Tel. oficina 6-22-49-36
 Nacionalidad Mexicana Sexo F M
 Lugar de nacimiento México, D. F. Fecha de nacimiento 24/09/1951
 Dirección de origen Sol #148.-2
México D. F. calle y número México Z. P. 3
población o ciudad estado país código postal

ESTUDIOS ANTECEDENTES

LICENCIATURA

Plan de Estudios FISICO
 Institución U.N.A.M. Facultad o escuela FACULTAD DE CIENCIAS
 País MEXICO Estado D. F.
 Promedio 8.2 Fecha de titulación (día/mes/año) 22/02/1979

ESTUDIOS DE POSGRADO

Nivel y plan de estudios MAESTRIA EN CIENCIAS (FISICA)
 Institución U.N.A.M. Facultad o escuela FACULTAD DE CIENCIAS
 País MEXICO Estado D. F.
 Fecha de diplomación o graduación (día/mes/año): 1/10/1982
 Nivel y plan de estudios _____
 Institución: _____ Facultad o escuela _____
 País _____ Estado _____
 Fecha de diplomación o graduación (día/mes/año) _____

DATOS PARA LA REVISIÓN DE ESTUDIOS

Entidad académica Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
 Plan de estudios Doctorado en Ciencias (Física)
 Año y semestre de ingreso 1980-2 Promedio indicado en la última revisión de estudios 9.00
 Año y semestre en que cursó su última asignatura o concluyó los requisitos del plan de estudios 1993-2
 Cursó el plan de estudios con beca sí no Otorgada por _____
 Realizó tesis sí no Con beca sí no Otorgada por _____

Titulo de la tesis:

"DEFORMACIONES NUCLEARES Y ESTABILIDAD DE MODELOS COLECTIVOS"

Grado y nombre del tutor o director de tesis:

DOCTOR, OCTAVIO HECTOR CASTAÑOS GARZA

Institución de adscripción del tutor o director de tesis:

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, U.N.A.M.

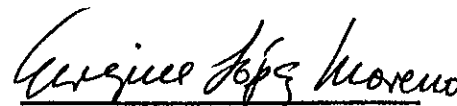
Resumen de la tesis: (Favor de escribir el resumen de su tesis a máquina, como máximo en 25 renglones a un espacio, sin salir de la extensión de este cuadro.)

Hemos utilizado el formalismo de los estados coherentes y la teoría de catástrofes para clasificar las formas y la estabilidad de las superficies de energía de modelos algebraicos y colectivos del núcleo. Consideramos el Modelo Colectivo de Bohr, Mottelson y Greiner y el modelo algebraico de Bosones Interactuantes. Construimos explícitamente la Separatriz para las superficies de energía de ambos modelos, definida por los conjuntos de bifurcación y de Maxwell. El conjunto de bifurcación corresponde a curvas en el espacio de parámetros asociados con puntos críticos degenerados, mientras que los conjuntos de Maxwell constituyen el lugar geométrico para los cuales la superficie de energía toma el mismo valor en dos o más puntos críticos. La Separatriz nos ofrece una clasificación completa de las formas que es posible alcanzar al variar los parámetros del modelo y sus transiciones de fase de forma. En ambos modelos existen únicamente dos parámetros esenciales. Como un ejemplo se estudian las superficies de energía asociadas con las simetrías dinámicas, así como las de varios conjuntos de cadenas de isótopos en el espacio de parámetros del modelo de bosones interactuantes.

For collective and algebraic models the coherent states and catastrophe theory are appropriate to study the energy surfaces of the system. For both, the Bohr-Mottelson-Greiner Collective Model and the Interacting-Boson-Model, the equilibrium configurations are classified by means of the Separatrix of the catastrophe formalism, which is defined by the bifurcation and the Maxwell sets. The bifurcation sets correspond to curves in the parameter space associated to degenerate critical points while the Maxwell sets constitute the locus of points for which the energy surface takes the same value in two or more critical points. The Separatrix give us a complete classification for all the possible nuclear shapes that can be attained as the parameters are changed within these models, as well as for its phase shape transitions. For both model there are only two essential parameters. As an example we study the energy surfaces associated to the dynamical symmetries, as well as for various nuclei chains in the essential parameter space of the interacting boson model.

LOS DATOS ASENTADOS EN ESTE DOCUMENTO CONCUERDAN FIELMENTE CON LOS REALES Y QUEDO ENTERADO QUE, EN CASO DE CUALQUIER DISCREPANCIA, QUEDARÁ SUSPENDIDO EL TRÁMITE DEL EXAMEN

Fecha de solicitud: _____



Firma del alumno

Biblioteca del Plantel

Biblioteca Central

Entrega ejemplares de tesis

Agradecimientos

La realización de este trabajo se completó gracias a la colaboración generosa de varias personas. No puedo nombrarlas a todas aquí, pero quedo gratamente en deuda con todas ellas.

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor, el Dr. Octavio Castaños, por su dirección, por sus enseñanzas, por su gran pasión por el conocimiento, los cuales fueron una guía, un estímulo y fuente de inspiración en estos años. Su amistad y paciencia durante el desarrollo de esta tesis son para mí de un gran valor.

Gracias a Alejandro Frank, por su influencia e inquietud intelectual, por su amor a la física, por la calidez de su afecto, por su interés en mi trabajo académico, por su gran sencillez, y por sus críticas y consejos en momentos cruciales de mi vida.

Agradezco también a los sinodales:

DRA. MARÍA ESTHER ORTÍZ SALAZAR

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

DR. ALEJANDRO FRANK HOEFLICH

DR. EFRAÍN CHÁVEZ LOMELÍ

DR. FERNANDO MATÍAS MORENO YNTRIAGO

DR. ROELOF BIJKER

quienes revisaron esta tesis contribuyendo en gran medida, con sus comentarios y correcciones, para mejorar este trabajo

Hago un reconocimiento al Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, donde se llevó al cabo esta tesis, por todas las facilidades prestadas durante la elaboración de este trabajo. Finalmente, también quiero reconocer el apoyo que recibí por parte de mi lugar de trabajo, el Departamento de Física, de la Facultad de Ciencias, UNAM.

CONTENIDO

1 INTRODUCCIÓN	1
2 EL MODELO COLECTIVO	5
3 EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES	17
4 APLICACIONES A SIMETRÍAS DINÁMICAS Y HAMILTONIANOS EFECTIVOS DEL IBM	48
5 FORMALISMO DE CATÁSTROFES PARA PEDESTRES	91
6 CONCLUSIONES	106
APÉNDICE A. OPERADORES DE CASIMIR DEL IBM	110
APÉNDICE B. TEORÍA DE LAS CATÁSTROFES	113

1 INTRODUCCIÓN

En Física Nuclear se presentan dos aspectos que caracterizan la frontera de investigación. Por una parte se parte de leyes y fuerzas, suponiéndolas establecidas, que gobiernan los fenómenos relevantes, y entonces la investigación consiste en predecir e interpretar fenómenos y procesos como consecuencia de tales principios. Por otra parte, las fuerza nuclear no está totalmente establecida, y es por lo tanto la búsqueda de nuevos principios y la extensión de leyes conocidas la actividad en la que se centra la investigación. En el estudio del núcleo, este doble aspecto juega un papel relevante en el desarrollo de nuevos modelos y teorías, y es así que dentro de esta rama del conocimiento, el concepto de simetría ha representado una idea fundamental en la búsqueda y formulación de nuevas teorías de la estructura nuclear.

Hablando genéricamente, una simetría es un atributo que se refiere a aquella propiedad de algún objeto cualquiera, de nuestra percepción o de nuestro pensamiento, la cual queda invariante después de haber aplicado alguna operación de transformación sobre dicho objeto. Por ejemplo, en el caso de una partícula moviéndose en un potencial central en tres dimensiones, este potencial queda invariante ante rotaciones, y así decimos que el potencial tiene simetría esférica. La teoría de los Grupos, es la herramienta algebraica apropiada para estudiar los conjuntos de transformaciones que dejan invariantes las funciones de un sistema físico.

En el campo de la estructura nuclear se presentan simetrías de tres clases. La primera son las *simetrías geométricas*, las cuales se relacionan con suposiciones sobre la forma de los núcleos deformados y que introducen simplificaciones en su descripción. Las *simetrías cinemáticas* constituyen otra clase de simetría fundamental, tales como lo son la conservación de paridad, la conjugación de carga, o la inversión temporal. El núcleo ha constituido un laboratorio muy útil para examinar estas simetrías, como en los experimentos de dispersión nucleón-núcleo, donde se han medido términos de asimetría indicando la no-conservación de paridad y que contribuyen al entendimiento de la interacción electro-débil [Adelberger (1983)]. Finalmente, las *simetrías dinámicas* son aquellas relacionadas con las propiedades de las interacciones nucleares.

En la espectroscopía nuclear se han distinguido dos tipos de fenómenos, unos son los llamados de partícula independiente, y otros los colectivos. En los primeros, se considera fundamentalmente el comportamiento de un solo nucleón en el campo producido por todos los demás, mientras que en los colectivos se trata con movimientos coherentes de muchos nucleones.

El movimiento rotacional colectivo de los núcleos ha sido estudiado a través de modelos fenomenológicos con parámetros ajustables [Bohr, (1952); Gneuss y Greiner, (1971); Hess, Seiwert, Maruhn y Greiner, (1980)], de teorías basadas en el Modelo Unificado [Bohr y Mottelson, (1953); Nilsson, (1955)], y formalismos que utilizan las simetrías de la interacción nuclear [Heisenberg, (1932); Wigner (1937); Moshinsky, (1968); Flowers, (1952); Elliott, (1958); Arima, Harvey y Shimizu, (1969); Hecht y Adler, (1969); Ratna Raju, Draayer y Hecht, (1973); Arima y Iachello (1976), (1978), (1978); Rosensteel y Rowe, (1980); Castaños, Frank, Chacón, Hess, y Moshinsky, (1982); Moshinsky. (1984)]. En la presente tesis se consideran dos tipos de teorías de núcleo de caracteres distintos: el

modelo colectivo de Bohr y Mottelson, y el modelo algebraico de bosones interactuantes IBM-1, de Arima y Iachello.

El modelo colectivo de Bohr y Mottelson ha permitido la comprensión de los movimientos colectivos vibracionales y rotacionales de muchos de los núcleos en la Tabla Periódica. Este modelo es un modelo macroscópico que describe el núcleo como una gota líquida, con lo cual ha representado un esquema conceptual muy poderoso y de carácter intuitivo, ampliamente aceptado en la interpretación de la espectroscopía nuclear. Aunque existen ciertos avances, este modelo no ha sido establecido dentro de una fundamentación microscópica, basada en los movimientos y fuerzas entre nucleones. El modelo es particularmente simple al considerar núcleos que están próximos a ser vibradores esféricos, o un rotor rígido axialmente simétrico con una deformación bien establecida. En el Capítulo 2 consideramos la superficie de energía potencial (SEP) de una versión simple del modelo colectivo generalizado, y mediante la teoría matemática de las Catástrofes demostraremos que existen solamente dos parámetros esenciales, matemáticamente relevantes, y se lleva a cabo un análisis completo de las configuraciones de equilibrio. Así, encontramos cómo se organizan todas las formas posibles de la SEP dentro de regiones bien delimitadas del espacio de parámetros esenciales del modelo.

Por otra parte, el modelo de bosones interactuantes fue extremadamente exitoso en las últimas tres décadas, dando una descripción fenomenológica de datos espectroscópicos dentro de un amplio alcance de núcleos distintos que exhiben características colectivas. A diferencia del modelo de Bohr-Mottelson, se trata de un modelo algebraico. En este modelo, se consideran parejas de nucleones fuera de capa cerrada, acoplados para constituir un sistema de bosones, cuya descripción en términos de teoría de grupos simplifica considerablemente el estudio del sistema de muchos cuerpos. Los nucleones se describen por medio de estados de fermión en una configuración n, l, j caracterizada por el operador de creación $a_{nljm\tau}^\dagger$, donde $m = -j, \dots, j$ es la proyección del momento angular de una partícula independiente, y $\tau = \pm \frac{1}{2}$ es la proyección del isospín. Por ejemplo, tomando un solo valor de j , el operador de creación de un bosón se define

$$b_{JM,t\tau}^\dagger = \sum_{m_1, m_2} \sum_{\tau_1, \tau_2} \langle jm_1, jm_2 | JM \rangle \langle \frac{1}{2}\tau_1, \frac{1}{2}\tau_2 | t\tau \rangle a_{nljm_1\tau_1}^\dagger a_{nljm_2\tau_2}^\dagger, \quad (1.1)$$

donde $J, M, (t, \tau)$ son los valores del momento angular total, su proyección, (isospín total, y su proyección). Debido a que los operadores fermiónicos a^\dagger y a , anticonmutan, se sigue de las propiedades de simetría de los coeficientes de acoplamiento de Clebsch-Gordan [Rose, (1957)], que

$$b_{JM,t\tau}^\dagger = -(-)^{J+t} b_{JM,t\tau}^\dagger, \quad (1.2)$$

y en consecuencia el operador de creación de bosones se anula, a menos que $(J+t)$ sea impar. En el modelo IBM-1 no se hace distinción entre protones y neutrones, pero se consideran acoplamientos de nucleones del mismo tipo, de donde tenemos $t = 1$, por lo que J debe tomar solamente valores cero o par. En particular, en este modelo, se consideran como elementos fundamentales los bosones de momento angular cero, bosón- s , y momento angular dos, bosón- d .

En el segundo capítulo, veremos cómo puede ser estudiada la geometría de modelos algebraicos por medio del principio variacional dependiente del tiempo [Hecht, (1987); Gilmore, (1979)]. Este formalismo nos permite tener un límite clásico del modelo nuclear, y particularmente estaremos interesados con las propiedades estáticas de la función Hamiltoniana, esto es, con la superficie de energía (SE) asociada a este modelo algebraico. Esta función depende de variables de estado y de un conjunto de parámetros, por lo que adoptaremos como herramienta de análisis a la teoría de Catástrofes [Gilmore, (1981)]. Veremos que existe una conexión entre el modelo IBM y la

aproximación geométrica de Bohr-Mottelson, si se expresa la función Hamiltoniana del IBM en términos de variables de forma. Esto es llevado a cabo mediante los correspondientes estados coherentes [Gilmore, (1979)]. El análisis de las formas y las transiciones de fase de forma dentro de este modelo ha sido considerada en el pasado [Feng, Gilmore y Deans, (1981); Dieperink, Scholten, y Iachello, (1980)]. En esta tesis aplicaremos estos procedimientos al modelo de bosones interactuantes, pero lo realizaremos para el Hamiltoniano más general de la interacción central de uno y dos cuerpos el cual involucra los bosones s y d .

Todavía en este mismo capítulo, veremos que las configuraciones de equilibrio pueden ser clasificadas por dos parámetros, suficientes para determinar el desarrollo de la superficie de energía más general. Esta SE, quedará organizada dentro de este espacio bi-dimensional de parámetros esenciales dentro regiones delimitadas por una curva *Separatriz*, con la cual podremos saber: (i) Cuántas configuraciones de equilibrio ofrece el sistema, (ii) si la conducta del modelo alrededor de los puntos críticos puede o no aproximarse por un oscilador armónico. (iii) Se describe la conducta de las simetrías dinámicas del modelo IBM-1 dentro del espacio de los dos parámetros esenciales. (iv) Se define la clase y el orden de las transiciones de fase de forma en el modelo general en función de los parámetros esenciales.

En el tercer capítulo se hacen algunas aplicaciones de los resultados desarrollados en el capítulo previo. Primero se considera la clase y el orden de la transición de fase de forma más general en este modelo. Con este análisis se generaliza el estudio de las transiciones de fase de forma presentados en el pasado, en los cuales se consideran solamente transiciones entre parejas de límites de simetría exacta $SU(5)$, $O(6)$, y $SU(3)$. También desde la década pasada se utilizaron Hamiltonianos efectivos del IBM-1 en la descripción de los espectros de energía y las probabilidades de transición de varias cadenas de isótopos e isótonos [Castaños, Federman, Frank, y Pittel, (1982); Frank, (1989); Gómez, Castaños, Frank, (1995); González (1990)]. El análisis de la estabilidad y las transiciones de fase de forma en estos casos requiere de las generalizaciones desarrolladas en la presente tesis.

En el capítulo cuarto hacemos un ataque intuitivo de los problemas de análisis desarrollados en el capítulo precedente. Esto podría resultar importante en un caso de mayor complejidad, donde si bien no podríamos alcanzar la generalidad matemática, por lo formidable del problema, las ideas básicas de la teoría de catástrofes nos pueden guiar para realizar un ataque del problema mediante una aproximación numérica, como la que presentamos en ese capítulo. Finalmente, también se incluye el cálculo de las transiciones de fase de los operadores invariantes del modelo IBM, esto es, de sus operadores de Casimir.

BIBLIOGRAFIA

- Adelberger, E. G., *Comm. on Nucl. and Part. Phys.* **11** (1983) 189.
 Arima, A., Harvey M., y Shimizu, K., *Phys. Lett.* **B30** (1969) 517.
 Arima, A. y Iachello, F., *Ann. of Phys.* **99** (1976) 253; **111** (1978) 201; **115** (1978) 325.
 Bohr, A., *Dan. Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **26** (1952) 14.
 Bohr, A. y Mottelson, B., *Dan. Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **27** (1953) 16.
 Castaños, O., Federman, P., Frank, A. y Pittel, S., *Nucl. Phys.* **A379**, (1982) 61-76.
 Castaños, O., Frank, A., Chacón, E., Hess, P. O., y Moshinsky, M., *J. Math. Phys.* **23** (1982) 2537.
 Dieperink, A. E. L., Scholten, O., y Iachello, F., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1747.
 Elliott, J. P., *Proc. Roy. Soc.* **A245** (1958) 128, 562.
 Feng, D. H., Gilmore, R., y Deans, S. R., *Phys. Rev. C* **23** (1981) 1254.
 Flowers, B. H., *Proc. Roy. Soc.* **A212** (1952) 248.

- Frank A, *Phys. Rev. C*, **39**, (1989) 652-657.
- Gilmore, R., *J. Math. Phys.* **20** (1979) 891.
- Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientist and Engineers*, Wiley (1981).
- Gneuss, G. y Greiner, W., *Nucl. Phys.* **171** (1971) 449.
- Gómez, A., Castaños, O., Frank, A., *Nucl. Phys. A* **589** (1995) 267-292.
- González, E. L., *El Modelo de Bosones Interactuantes y su Aplicación a Cadenas de Isótopos e Isótonos Par-Par*, tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (1990).
- Hecht, K. T. y Adler, A., *Nucl. Phys.* **A137** (1969) 129.
- Hecht, K. T., *The Vector Coherent State Method and Its Applications to Problems of Higher Symmetries*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1987).
- Heisenberg, W., *Z. Phys.* **77** (1932) 1.
- Hess, P. O., Seiwert, M., Maruhn, J., y Greiner, W., *Z. Phys.* **A269** (1980) 147.
- Moshinsky, M., *Group Theory and The Many Body Problem*, Gordon and Breach, New York (1968).
- Moshinsky, M., *J. Math. Phys.* **25** (1984) 1555.
- Nilsson, S. G., *Dan. Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.* **29** (1955) 16.
- Ratna Raju, R. D., Draayer, J. P., y Hecht, K. T., *Nucl. Phys.* **A202** (1973) 433.
- Rosensteel, G. y Rowe, D. J., *Ann. of Phys.* **126** (1980) 343.
- Wigner, E., *Phys. Rev.* **51** (1937) 106.

2 EL MODELO COLECTIVO

El Modelo Colectivo fue introducido hacia la mitad de este siglo para describir propiedades nucleares tales como los momentos cuadrupolares observados experimentalmente, los cuales en la mayoría de los casos resultan mucho mayores que los predichos por el modelo de capas, especialmente en las regiones intermedias a las capas cerradas (ver p. ej. la introducción en: [J. M. Eisenberg and W. Greiner, (1987)]). Así también, muchas veces las probabilidades de transición de estados de baja energía exceden las estimaciones de modelos de partícula independiente hasta en dos órdenes de magnitud; así mismo, en otro tipo de fenómenos, se pueden obtener estructuras de bandas rotacionales y vibratorias las cuales no es fácil explicar por medio del modelo de capas. Notablemente, debemos mencionar también la observación de las resonancias gigantes fotonucleares como un fenómeno que ha dado un gran ímpetu al desarrollo del modelo colectivo, las cuales se han interpretado como vibraciones colectivas de protones *vs.* neutrones en respuesta al campo eléctrico del fotón- γ incidente, el cual desplaza los protones en dirección del campo dando lugar al recule de los neutrones para conservar fijo el centro de masa del núcleo.

En el modelo geométrico del núcleo se supone que éste tiene una superficie bien definida, capaz de llevar a cabo pequeñas oscilaciones de forma y de superficie. Usualmente se considera que el modo más importante en el movimiento colectivo es la deformación cuadrupolar, y así, resumiremos las características de los espectros asociados con las deformaciones de la superficie nuclear de simetría cuadrupolar. Este grado de libertad exhibe espectros rotacionales, vibratorias, y de rotación-vibración. Esto puede mostrarse mediante la transformación a un conjunto de coordenadas de forma intrínsecas y las de orientación del sistema.

Considerando oscilaciones pequeñas alrededor de la forma esférica, el Hamiltoniano corresponde a un oscilador armónico en cinco dimensiones. La cuantización de este Hamiltoniano se realiza introduciendo operadores bosónicos cuadrupolares de creación y aniquilación. De esta manera, en el orden más bajo, el Hamiltoniano es proporcional al operador de número de bosones, con lo cual se predice la degeneración dentro de cada multiplete fonónico y una separación equidistante entre multipletes, lo cual caracteriza un espectro vibracional.

El modelo que aquí consideramos describe las rotaciones del núcleo suponiendo una deformación nuclear elipsoidal permanente. En este caso se elige el sistema fijo en el cuerpo, también llamado el sistema intrínseco, como un marco de referencia natural. Los ejes principales del elipsoide se escogen como los ejes fijos al cuerpo, y uno introduce las nuevas variables β , y γ , con la primera de ellas asociada con una medida de la deformación nuclear, y la segunda asociada con su simetría de forma, la cual puede ser la de un elipsoide axialmente simétrico prolato u oblató, o la de uno deformado sin un eje de simetría (deformación triaxial). En la expresión cuantizada del Hamiltoniano, la parte colectiva de la energía cinética puede expresarse como la suma de las energías vibratorias de dos modos normales en el plano $\beta - \gamma$, y la del movimiento rotacional que involucra en general tres

grados de libertad. Para refinar el acuerdo con los resultados experimentales se pueden agregar términos de corrección perturbativa, los cuales representan un débil acoplamiento entre los modos vibracionales y el movimiento rotacional.

2.1 COORDENADAS COLECTIVAS

Las coordenadas colectivas se introducen usualmente teniendo una imagen clásica del núcleo, tal que la elección más apropiada de estas coordenadas facilita de alguna manera la manipulación matemática del problema de la descripción del movimiento coherente de muchos nucleones. Así, en vez de dar la descripción del núcleo en términos de las coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_{3A})$ de los A nucleones, se introducen las *coordenadas colectivas* $\alpha^{[\lambda]}(x_1, x_2, \dots, x_{3A})$, las cuales son funciones de las $3A$ coordenadas nucleares. En la discusión que haremos en esta parte, consideraremos solamente las coordenadas colectivas que describen la superficie nuclear, aunque existen otras clases de coordenadas colectivas, tales como las que describen las fluctuaciones de la densidad nuclear.

Variables de deformación

Suponiendo que el núcleo tiene una superficie claramente delimitada, consideraremos que éste lleva a cabo movimientos colectivos que se pueden contemplar como oscilaciones de superficie, o cambios en su forma, los cuales se definen mediante una expansión de la superficie en términos de los armónicos esféricos. La forma de la superficie nuclear se define por medio de los parámetros de deformación $\alpha_{\lambda, -\mu}$, los cuales describen la longitud del radio vector que apunta desde el origen hasta la superficie:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0[1 + \sum_{\lambda, \mu} (-)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi)]. \quad (2.1.1)$$

Debido a la invariancia de la superficie ante rotaciones del sistema de coordenadas, se debe cumplir

$$R(\theta, \phi, t) = R(\theta', \phi', t), \quad (2.1.2)$$

donde las primas denotan las direcciones después de la rotación. Esta invariancia implica que las $\alpha_{\lambda, -\mu}$ sean las componentes de un tensor irreducible de rango λ , el cual se transforma de acuerdo con la representación $(2\lambda + 1) - \text{dimensional}$ del grupo $SO(3)$, esto es,

$$a_{\lambda, \mu} = \sum_{\lambda, \mu} D_{\mu\nu}^{\lambda}(\theta_j) \alpha_{\lambda, \mu}, \quad (2.1.3)$$

donde las $a_{\lambda, \mu}$ definen la superficie nuclear en el sistema rotado y las (θ_j) son los ángulos de Euler que conectan los dos sistemas.

Además, la condición de realidad del radio $R(\theta, \phi)$, junto con las propiedades de los armónicos esféricos, implican

$$\alpha_{\lambda, \mu}^* = (-)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu}. \quad (2.1.4)$$

Finalmente, debido a que $R(\theta, \phi)$ es un escalar, las $\alpha_{\lambda, \mu}$ deben tener la misma paridad que los armónicos esféricos, esto es $\hat{P} \alpha_{\lambda, \mu} \hat{P}^{-1} = (-)^{\lambda} \alpha_{\lambda, \mu}$, donde \hat{P} es el operador de paridad.

En la expansión de la superficie $R(\theta, \phi)$, la constante R_0 corresponde al radio de una esfera de volumen idéntico al del núcleo. α_{00} describe los cambios en el volumen nuclear, y en la medida que consideramos al núcleo como un fluido incompresible, el cual lleva a cabo deformaciones pequeñas, podremos omitir esta α_{00} . Del mismo modo, las $\alpha_{1\mu}$ se pueden asociar a traslaciones del centro de masa, en la medida que permanezcan pequeñas, y así, las podemos excluir también. Esto deja los

términos $\alpha_{2\mu}$, correspondientes a la deformación cuadrupolar, como los de mayor relevancia. Así, la superficie nuclear se aproxima por

$$R(\theta, \phi, t) = R_0[1 + \sum_{\mu} \alpha_{2,\mu}^* Y_{2\mu}(\theta, \phi)]. \quad (2.1.5)$$

La forma elipsoidal se puede ver claramente si expresamos los armónicos esféricos en coordenadas cartesianas

$$Y_{20} = \frac{1}{\sqrt{16\pi/5}} \left(\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} \right), \quad (2.1.6)$$

$$Y_{2\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{8\pi/15}} \left(\frac{xz \pm iyz}{r^2} \right), \quad (2.1.7)$$

$$Y_{2\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{32\pi/15}} \left(\frac{x^2 - y^2 \pm ixy}{r^2} \right), \quad (2.1.8)$$

con los cuales obtenemos

$$R = R_0 \left(1 + \alpha_{xx} \frac{x^2}{r^2} + \alpha_{yy} \frac{y^2}{r^2} + \alpha_{zz} \frac{z^2}{r^2} + 2\alpha_{xy} \frac{xy}{r^2} + 2\alpha_{xz} \frac{xz}{r^2} + 2\alpha_{yz} \frac{yz}{r^2} \right), \quad (2.1.9)$$

más la restricción

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz} = 0. \quad (2.1.10)$$

Del mismo modo se encuentra

$$\alpha_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\alpha_{xx} - \alpha_{yy} \pm 2i\alpha_{xy}), \quad (2.1.11a)$$

$$\alpha_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{xz} \pm i\alpha_{yz}), \quad (2.1.11b)$$

$$\alpha_{20} = \sqrt{\frac{4\pi}{45}} (2\alpha_{zz} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy}). \quad (2.1.11c)$$

Por medio de una rotación de los ejes es posible describir la forma nuclear respecto al sistema de los ejes principales fijos al cuerpo. En este sistema de ejes principales se tiene $\alpha'_{xy} = \alpha'_{xz} = \alpha'_{yz} = 0$. Entonces la forma nuclear queda expresada como

$$R = R_0 \left(1 + \alpha'_{xx} \left(\frac{x'}{r} \right)^2 + \alpha'_{yy} \left(\frac{y'}{r} \right)^2 + \alpha'_{zz} \left(\frac{z'}{r} \right)^2 \right). \quad (2.1.12)$$

Mientras que las nuevas variables quedan

$$a_{2,\mu} = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \alpha_{2,\nu}, \quad (2.1.13a)$$

$$a_{2,2} = -a_{2,-2}, \quad a_{2,\pm 1} = 0. \quad (2.1.13b)$$

De este modo aún tenemos cinco variables, de las cuales tres corresponden a los ángulos de Euler relativos a la orientación en el espacio de los ejes principales, y las dos restantes, $a_{2,0}$ y $a_{2,2}$

describen la deformación *intrínseca*. En este sistema intrínseco la deformación a lo largo de cada uno de los ejes principales puede visualizarse muy fácilmente, si se introducen las variables de Bohr:

$$a_{2,0} = \beta \cos \gamma, \quad a_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (2.1.14)$$

En las variables de Bohr la superficie nuclear queda expresada como

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left(1 + \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \beta \left(\cos \gamma (3 \cos^2 \theta - 1) + \sqrt{3} \sin \gamma \sin \theta^2 \cos 2\phi \right) \right). \quad (2.1.15)$$

La deformación nuclear se puede ahora expresar en términos de las elongaciones δR_k , a lo largo de cada uno de los ejes principales $k = 1, 2, 3$, de la siguiente manera

$$R(90^\circ, 0^\circ) = R_0(1 + \delta R_1), \quad (2.1.16a)$$

$$R(90^\circ, 90^\circ) = R_0(1 + \delta R_2), \quad (2.1.16b)$$

$$R(0^\circ, 0^\circ) = R_0(1 + \delta R_3), \quad (2.1.16c)$$

donde

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right). \quad (2.1.17)$$

Notamos que el núcleo es axialmente simétrico si $\gamma = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Por ejemplo, si $\beta = 0$, entonces el núcleo es esférico. Para β arbitrario, y $\gamma = 0$, el núcleo es prolato. Si β es arbitrario y $\gamma = \frac{\pi}{3}$, la deformación corresponde a un núcleo oblató. Finalmente, si el valor de γ es intermedio, por ejemplo, β arbitrario, $\gamma = \frac{\pi}{6}$, se tiene una deformación triaxial (sin un eje de simetría). En la Figura 1, se ilustran los anteriores ejemplos.

2.2 EL HAMILTONIANO COLECTIVO

En la sección anterior se definieron las propiedades de las variables colectivas o de deformación de la superficie nuclear. Suponiendo que la superficie únicamente puede sufrir deformaciones de tipo cuadrupolar, el Hamiltoniano puede dividirse en una energía cinética y en una energía potencial de la superficie. Para garantizar que el Hamiltoniano sea invariante ante rotaciones, las energías cinética y potencial se construyen como desarrollos en series de potencias de las coordenadas colectivas α_{2m} y sus correspondientes momentos canónicamente conjugados π_{2m} , esto es,

$$T(\hat{\pi}^{[2]}, \hat{\alpha}^{[2]}) = \frac{\sqrt{5}}{2B_2} [\hat{\pi}^{[2]} \times \hat{\pi}^{[2]}]^{[0]} + B_3 \left[[\hat{\pi}^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[2]} \times \hat{\pi}^{[2]} \right]^{[0]} + B_4 [\hat{\pi}^{[2]} \times \hat{\pi}^{[2]}]^{[0]} [\hat{\pi}^{[2]} \times \hat{\pi}^{[2]}]^{[0]} + \dots \quad (2.2.1)$$

$$V(\hat{\alpha}^{[2]}) = \frac{\sqrt{5}}{2} C_2 [\hat{\alpha}^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[0]} + C_3 [[\hat{\alpha}^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[0]} + C_4 [\hat{\alpha}^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[0]} \cdot [\hat{\alpha}^{[2]} \times \hat{\alpha}^{[2]}]^{[0]} \dots \quad (2.2.2)$$

La energía potencial de superficie determina principalmente las propiedades especiales de los núcleos, así describe si un núcleo es esférico o deformado en su estado base o para estados excitados.

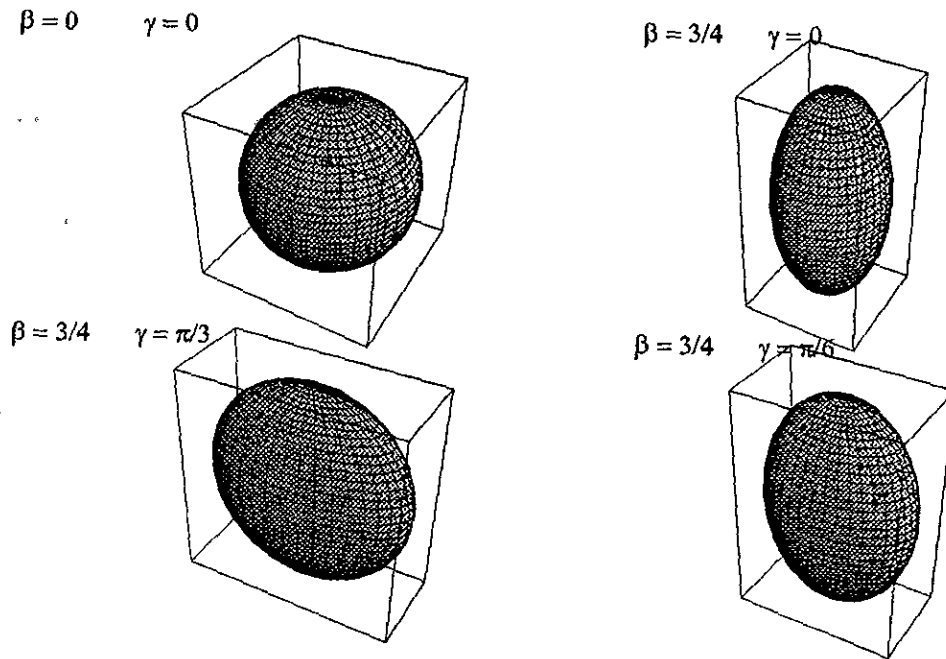


Figura 1. Formas cuadrupolares representadas por la expansión multipolar de la Ec. (2.1.15). En el primer caso se considera una forma esférica, con $\beta = 0, \gamma = 0$. En los otros tres casos, se supone la misma deformación $\beta = 3/4$, la cual se exageró con propósitos de ilustración. Estas últimas formas corresponden a las deformaciones cuadrupolares de un núcleo deformado prolato, $\gamma = 0$, un núcleo deformado oblató, $\gamma = \pi/3$, y uno deformado triaxial, $\gamma = \pi/6$.

Considerando el desarrollo de la energía potencial de superficie hasta términos de orden cuarto en las coordenadas cuadrupolares, se encontrarán las características principales que pueden ocurrir en la estructura de la superficie. Así si expresamos $\mathcal{V}(\hat{\alpha}^{[2]})$ en términos de los ángulos de Euler y de las coordenadas intrínsecas, obtendremos la nueva función

$$V(a_0, a_2) = \frac{1}{2}C_2(a_0^2 + a_2^2) + \sqrt{\frac{2}{35}}C_3 a_0(6a_2^2 - a_0^2) + \frac{1}{5}C_4(a_0^2 + 2a_2^2)^2 \quad (2.2.3)$$

Al estudiar los diferentes tipos de superficie descritos por la ecuación anterior, encontramos conveniente expresar las variables a_0 y a_2 en términos de las variables β, γ de Bohr-Mottelson:

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma; \quad (2.2.4)$$

y describimos los parámetros como

$$C_2 = \frac{1}{2}C_2, \quad C_3 = \sqrt{\frac{2}{35}}C_3, \quad C_4 = \frac{1}{5}C_4, \quad (2.2.5)$$

quedando

$$V(\beta, \gamma) = C_4 \beta^4 - C_3 \beta^3 \cos 3\gamma + C_2 \beta^2. \quad (2.2.6)$$

La expresión anterior es capaz de describir una amplia variedad de formas y estructuras, las cuales incluyen un vibrador esférico, un rotor deformado, núcleos con deformación γ -inestable, entre otras que pueden realizarse para los núcleos en diferentes regiones de la tabla periódica. La energía potencial de superficie es una función que depende tanto de un conjunto de variables $\{\beta, \gamma\}$, como de un conjunto de parámetros, $\{C_2, C_3, C_4\}$, y así, para evaluar su estabilidad, usaremos el formalismo de catástrofes en la próxima sección.

2.3 FORMAS Y ESTABILIDAD DE LA SUPERFICIE ENERGÍA POTENCIAL

Para analizar las configuraciones de equilibrio de la energía potencial de superficie mediante el formalismo de catástrofes, es necesario determinar la Separatriz del sistema. La Separatriz es el lugar geométrico en el espacio de parámetros del sistema, y está constituida por los conjuntos de Bifurcación y de Maxwell.

En estos conjuntos, y por lo tanto en la separatriz, ocurren inestabilidades estructurales de la forma nuclear. Los conjuntos de Bifurcación son aquellos lugares geométricos en el espacio de parámetros en los cuales ocurre que los puntos críticos de la energía potencial de superficie coalescen, esto es, son degenerados. Mientras que, por otra parte, los conjuntos de Maxwell son lugares geométricos en el espacio de parámetros en los que la energía potencial de superficie, al evaluarse sobre puntos críticos aislados, toma el mismo valor.

Simetrías de la SEP

Resulta conveniente iniciar el análisis de la superficie de energía del modelo colectivo considerando sus simetrías. En primer lugar, notamos que la *SEP* en la Ec.(2.2.6) tiene una dependencia en el ángulo γ de la forma $\cos 3\gamma$. De aquí se implica inmediatamente una forma general de la *SEP* con invariancia ante rotaciones de $2\pi/3$ radianes; así como ante reflexiones en los tres ejes: $\gamma = 0$, $\gamma = 2\pi/3$ y $\gamma = 4\pi/3$. Esas tres rotaciones y estas tres reflexiones representan las seis operaciones del grupo llamado C_{3V} . Gracias a esta simetría es posible restringir el análisis a la región comprendida entre los ángulos $\gamma = 0$ y $\gamma = \pi/3$.

Puntos Críticos de la SEP

Los puntos críticos (β_c, γ_c) de la *SEP* de la Ec.(2.2.6) los podremos obtener calculando las derivadas con respecto a las variables β y γ :

$$\nabla V(\beta, \gamma)|_{(\beta_c, \gamma_c)} = 0. \quad (2.3.1)$$

Derivando parcialmente respecto a la variable γ , observamos inmediatamente que éstos se localizan únicamente sobre las semi-rectas dadas por los valores $\gamma_c = 0$ (caso prolato) ó $\gamma_c = \pi/3$ (caso oblató). Claramente aquellos puntos críticos (así como todos los demás puntos) sobre la semi-recta $\gamma_c = \pi/3$, se repiten exactamente sobre las semi-rectas $\gamma_c = \pi$ y $\gamma_c = 5\pi/3$. Así también, aquellos puntos críticos sobre la semi-recta $\gamma_c = 0$, se repiten exactamente sobre las semi-rectas $\gamma_c = 2\pi/3$ y $\gamma_c = 4\pi/3$. Expresemos esto en términos de las variables cartesianas (x, y) , obtenidas a partir de las polares como:

$$x = \beta \cos \gamma, \quad y = \beta \operatorname{sen} \gamma. \quad (2.3.2)$$

Podemos observar que la totalidad de los puntos críticos de la *SEP*, salvo sus repeticiones simétricas, se encuentra sobre el eje-X cartesiano; el semieje-X positivo contiene los valores críticos de los núcleos prolatos y el semieje-X negativo los valores críticos de aquellos oblatos. De esta manera concluimos, sin pérdida de generalidad, que se puede restringir la búsqueda de puntos críticos al eje-X cartesiano. En este sistema de coordenadas cartesianas, la *SEP* se expresa:

$$V(x, y) = C_4(x^2 + y^2)^2 - C_3(x^3 - 3xy^2) + C_2(x^2 + y^2). \quad (2.3.3)$$

Como se puede demostrar (ver Ec.(3.4.11)), en el sistema cartesiano la función $V(x, y)$ es una combinación de los polinomios invariantes ante el grupo C_{3V} , hasta el cuarto grado. Además, hemos optado por un sistema cartesiano debido a que, como veremos en seguida, el origen del espacio (β, γ) , representa un punto crítico ante cualquier elección de los parámetros de control C_2 , C_3 , y C_4 , pero en las coordenadas esféricas dicho punto no tiene un valor definido de la variable γ .

De la Ec. (2.3.3) concluimos que el hecho de fijar tres parámetros, $C_2 = C_3 = C_4 = 0$, sobredetermina la energía potencial de superficie, y por lo tanto introducimos los parámetros de control $c_2 = C_2/C_4$, y $c_3 = C_3/C_4$, i. e.,

$$V(x, y) \equiv \frac{V(x, y)}{C_4} = (x^2 + y^2)^2 - c_3(x^3 - 3xy^2) + c_2(x^2 + y^2). \quad (2.3.4)$$

Ecuación de los puntos críticos

Los puntos críticos (x_c, y_c) de la SEP en la Ec.(2.3.3) los obtenemos resolviendo la siguiente ecuación:

$$\nabla V(x, y) |_{(x_c, y_c)} = 0. \quad (2.3.5)$$

Las derivadas respectivas resultan:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - c_3(3x^2 - 3y^2) + 2c_2x, \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 6c_3xy + 2c_2y. \quad (2.3.7)$$

La rama básica $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

De la Ecs.(2.3.6) y (2.3.7) resulta inmediato que $(x_c = 0, y_c = 0)$ es un punto crítico en todo el espacio de parámetros. Al variar los parámetros este punto crítico describe lo que llamaremos una rama básica. Para ciertos valores de los parámetros, esta rama básica puede degenerar y bifurcarse sobre un subconjunto de puntos del espacio de parámetros B_0 , desarrollándose otros puntos críticos $\beta_c \neq 0$, en lo que llamaremos ramas primarias. Estas ramas primarias también podrían bifurcarse sobre otros subconjuntos $B_i \subset B$, generándose ramas secundarias, y así sucesivamente. Más adelante encontraremos los correspondientes subconjuntos B_i para los cuales cada valor crítico β_c se bifurca.

Otras raíces

Al considerar las demás raíces, resulta conveniente obtener primero las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (2.3.8)$$

Sin embargo, como ya se mencionó al referirnos a la simetría C_{3V} , otras raíces están asociadas a repeticiones simétricas de la raíz $y_0 = 0$, y por lo tanto no las consideraremos en toda la discusión

restante. Así, tomamos la Ec.(2.3.6) con $y = 0$:

$$4x^3 - 3c_3x^2 + 2c_2x = 0. \quad (2.3.9)$$

Además de la raíz $x_0 = 0$, resultan los puntos críticos:

$$x_1^c = \frac{3c_3 + \sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8}, \quad (2.3.10)$$

$$x_2^c = \frac{3c_3 - \sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8}. \quad (2.3.11)$$

Conjuntos de bifurcación

A continuación hacemos una determinación de los conjuntos de bifurcación y de la degeneración de los puntos críticos [R. Gilmore, (1981)]. Sea $\mathcal{V}(x, y)$ la SE , entonces la matriz de segundas derivadas parciales respecto a las variables x, y se denota por $\mathcal{H}_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x_i \partial x_j}$ y se le llama la matriz de estabilidad Hessiana. Si se satisfacen las condiciones

$$\nabla \mathcal{V}(x, y) |_{(x_c, y_c)} = 0, \quad (2.3.12)$$

$$\det \mathcal{H}_{i,j}(x, y) |_{(x_c, y_c)} \neq 0, \quad (2.3.13)$$

entonces se garantiza el Lema de Morse y los puntos críticos (x_c, y_c) asociados a la superficie de energía permanecen no degenerados. Lo anterior significa que el sistema se encontrará en equilibrio estable en los mínimos de la superficie de energía, y alrededor de ellos $\mathcal{V}(x, y)$ se puede aproximar por una forma cuadrática no degenerada. La estabilidad de estos mínimos ante variaciones en los parámetros del sistema se observará sobre toda aquella región del espacio de parámetros que cumpla con estas condiciones.

Las propiedades de estabilidad de las configuraciones de equilibrio también pueden determinarse a partir de los eigenvalores de la matriz Hessiana $\mathcal{H}_{i,j}$:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n. \quad (2.3.14)$$

Los eigenvalores del Hessiano también dependerán de los parámetros c_k que aparecen en la superficie de energía. Por lo tanto, al variar estos parámetros, uno ó más eigenvalores podrían anularse para ciertos conjuntos, $B_l = \{c_k\}$, de valores de los parámetros. A éstos conjuntos B_l se les denomina *conjuntos de bifurcación*, y describen hipercurvas en el espacio de parámetros que forman parte de lo que se llama la *Separatriz* de la superficie de energía ($B = \cup_l B_l + \cup_m B_m^M$). Es importante señalar que la Separatriz incluye otros conjuntos de bifurcación llamados de Maxwell B_m^M , sobre los cuales la superficie de energía toma el mismo valor en dos ó más puntos críticos.

Sobre los conjuntos de bifurcación B_l , no se cumple el Lema de Morse y entonces tendremos que

$$\nabla \mathcal{V}(x, y) |_{(x_c, y_c)} = 0 \quad \text{y} \quad \det \mathcal{H}_{i,j}(x, y) |_{(x_c, y_c)} = 0. \quad (2.3.15)$$

Considerando variaciones aun muy pequeñas de los parámetros, el sistema podría cruzar algún conjunto de bifurcación B_l y cambiar radicalmente la forma y estabilidad de los puntos críticos del sistema. En efecto, sobre el conjunto B y solamente sobre él, cambia el número y naturaleza de

los puntos críticos. La Superficie de Energía $\mathcal{V}(x, y)$ ya no se podrá aproximar por una forma cuadrática sobre B ; sin embargo, bajo ciertas condiciones, resulta posible reemplazarla por alguna cierta forma canónica, *v. gr.*, por una función de Catástrofe. Aunque las Catástrofes Elementales solamente aparecen en ausencia de simetrías, las ideas y aplicaciones más importantes del formalismo matemático de las catástrofes pueden extenderse para funciones con simetría, resultando la posibilidad de reemplazarla por alguna *i.e.*, *Catástrofe restringida por simetría*.

Conjunto eje- c_3

Evaluada sobre la rama básica, la matriz de estabilidad Hessiana $\mathcal{H}_{x,y}$ resulta igual a:

$$2 \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{2.3.16}$$

Así, la rama básica degenera solamente si se cumple la igualdad $c_2 = 0$; esto es, degenera sobre el eje horizontal, y se bifurca al cruzarlo. Vemos que esta rama básica de la superficie de energía es estable siempre que $c_2 \neq 0$, pero degenera simultáneamente en ambas variables a todo lo largo del eje- c_3 , ya que se anulan los dos eigenvalores en la Ec. (2.3.16). Más todavía, es directo demostrar que si $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$ entonces el punto crítico resulta triplemente degenerado y localizado en $\beta = 0$, ya que en la Ec. (2.3.4) encontramos $\mathcal{V} = (x^2 + y^2)^2$. Las Catástrofes Elementales con dos variables degeneradas se desarrollan con al menos tres parámetros; en efecto, ya hemos visto que en este caso tenemos una catástrofe con simetría, no-elemental, y por lo tanto aparecen sólo dos parámetros.

Estudiemos el comportamiento de la rama básica cuando varían los parámetros. Inicialmente recorremos el eje vertical ($c_3 = 0$). En estas condiciones, como es fácil ver de su expresión general en la Ec. (2.3.4), la superficie de energía es invariante ante rotaciones en el plano, *i.e.*, ante el grupo $SO(2)$. La superficie de energía del núcleo sufrirá una transición de fase de forma, como veremos en seguida. Para $c_2 > 0$, es claro que la superficie de energía solamente tiene un mínimo en el origen. Cuando $c_2 < 0$, la superficie siempre tiene un máximo en el origen y existen además otros valores críticos:

$$(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-c_2/2}, \gamma_0), \tag{2.3.17}$$

con γ_0 arbitraria.

Este mínimo en la Ec. (2.3.17), corresponde a un extremo no-local de la superficie de energía (caso γ -inestable). Además, este mínimo es invariante ante el grupo de reflexiones en los tres ejes de simetría, en las direcciones de los vectores $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathbf{c} = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Esta reducción de simetría al pasar de un mínimo local en el origen, a otro no-local fuera del origen, en $(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-c_2/2}, \gamma_0)$, representa un *rompimiento espontáneo de simetría*. Al cruzar el conjunto de bifurcación $c_2 = 0$, tiene lugar una transición de fase de forma, y en este caso corresponde a una transición de segundo orden (como demostraremos más adelante). El núcleo se transforma de esférico a γ -inestable.

Conjuntos de bifurcación asociados a las raíces x_1^c, x_2^c

Evaluada sobre las raíces x_1^c, x_2^c , en las Ecs. (2.3.10) y (2.3.11), la matriz de estabilidad Hessiana

resulta respectivamente igual a:

$$\mathcal{H}(x_1^c, 0)_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{9c_3^2 - 32c_2 + 3c_3\sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8} & 0 \\ 0 & \frac{9c_3(3c_3 + \sqrt{9c_3^2 - 32c_2})}{8} \end{pmatrix}. \quad (2.3.18)$$

$$\mathcal{H}(x_2^c, 0)_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{9c_3^2 - 32c_2 - 3c_3\sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8} & 0 \\ 0 & \frac{9c_3(3c_3 - \sqrt{9c_3^2 - 32c_2})}{8} \end{pmatrix}. \quad (2.3.19)$$

De las matrices en (2.3.18) y (2.3.19), podemos obtener los conjuntos de bifurcación para estas raíces. Así, por la anulación de alguno de sus eigenvalores, tenemos que resultan singularidades sobre los conjuntos enumerados a continuación:

i) Sobre la parábola en el espacio de parámetros

$$9c_3^2 - 32c_2 = 0, \quad (2.3.20)$$

donde las raíces x_1^c , x_2^c degeneran, ya que entonces se tiene

$$\mathcal{H}_{x,y}(x_{1,2}, 0) \Big|_{9c_3^2 - 32c_2 = 0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{27}{8}c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.3.21)$$

ii) Sobre los puntos que cumplen con las siguientes relaciones en el espacio de parámetros

$$c_3 = 0 \quad y \quad c_2 < 0, \quad (2.3.22)$$

tenemos el punto crítico $(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-c_2/2}, \gamma_0)$, con γ_0 arbitraria, y en éste la matriz Hessiana $\mathcal{H}_{x,y}$ resulta

$$\mathcal{H}_{x,y}(x_{1,2}, 0) \Big|_{c_3=0} = -4 \begin{pmatrix} c_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3.23)$$

Entonces solamente ocurre degeneración en la segunda variable de la *SE*, esto es en la variable γ . Por lo tanto, el semieje- c_2 -negativo es un conjunto de bifurcación para la variable γ , y al cruzar este semieje ocurre una transición de fase de forma, la cual corresponde a una transición de forma de prolato, en puntos $c_3 > 0$, a oblato en los puntos $c_3 < 0$.

Conjuntos de Maxwell

Existen otros conjuntos de puntos en el espacio de los parámetros que representan inestabilidades estructurales de la forma nuclear, y que son llamados los conjuntos de Maxwell. Estos son curvas en el espacio de parámetros en donde la SEP toma el mismo valor en dos o más puntos críticos de mínima, o de máxima profundidad, respectivamente.

Para encontrar estos conjuntos, debemos determinar los puntos críticos aislados que dan el mismo valor de la superficie de energía para una elección dada de los parámetros. Utilizamos en primer lugar la rama básica $(\beta_0, \gamma_0) = (0, 0)$, sobre de la cual claramente la SEP toma siempre el valor cero:

$$\beta^2 (\beta^2 - c_3 \beta + c_2) = 0, \quad (2.3.24)$$

donde tomamos el valor $\gamma = 0$, y el rescalamiento como en (2.3.4).

También existe la posibilidad de que otros puntos críticos $\beta_c \neq 0$ den un valor nulo en la Ec. (2.3.4), esto es así cuando anulan el factor entre los paréntesis en (2.3.24). Resolviendo esta última expresión obtenemos las intersecciones sobre el eje- β

$$\beta = \frac{c_3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{c_3^2 - 4c_2}, \quad (2.3.25)$$

y es claro que entre estos dos cortes hay siempre un valor extremo. Así, el conjunto de Maxwell queda definido por la curva

$$c_2 = \frac{1}{4} c_3^2. \quad (2.3.26)$$

Este extremo está localizado en $\beta = c_3/2$, y utilizando la ecuación anterior, se puede verificar que satisface la ecuación de puntos críticos Ec.(2.3.10).

Al considerar las otras raíces x_1^c y x_2^c en las ecuaciones (2.3.10) y (2.3.11), donde la SEP toma valores distintos de cero, requerimos que se cumpla

$$V\left(\frac{3c_3 + \sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8}, 0; c_2, c_3\right) - V\left(\frac{3c_3 - \sqrt{9c_3^2 - 32c_2}}{8}, 0; c_2, c_3\right) = 0. \quad (2.3.27)$$

Esta expresión implica dos condiciones sobre los parámetros de control, una de las cuales se asocia con la degeneración los puntos críticos, por lo que no resulta de utilidad porque estamos considerando puntos de Morse. La otra condición nos da el conjunto de Maxwell $c_3 = 0$, el cual se localiza en $\beta_c = \sqrt{-c_2/2}$.

De esta manera, hemos construido la *Separatriz* del sistema, la cual queda constituida por el conjunto de bifurcación y el de Maxwell que presentamos arriba. Estas curvas se muestran en la Figura 2, y dividen el espacio de parámetros de control en distintas regiones, cada una de las cuales caracteriza una forma particular ofrecida por el modelo. Podemos así identificar cuatro regiones: i) Por arriba de la parábola sólida, donde la SEP tiene solamente un mínimo en $\beta = 0$, describiendo de esta manera núcleos esféricos. ii) Entre la parábola sólida y la punteada, donde la SEP exhibe dos mínimos, siendo aquel con $\beta = 0$ el mínimo global, caracterizando así núcleos esféricos con estados excitados deformados. iii) Entre la parábola punteada y el eje c_3 , donde la SEP exhibe dos mínimos, siendo aquel con $\beta \neq 0$ el mínimo global, caracterizando así núcleos deformados con estados excitados esféricos. iv) Por debajo del eje c_3 la SEP tiene un mínimo en $\beta \neq 0$, un máximo en $\beta = 0$ y un punto de silla, caracterizando en consecuencia núcleos deformados. La SEP puede ser aproximada por un oscilador armónico alrededor de estos puntos críticos. Notemos que la SEP puede exhibir el fenómeno de coexistencia de formas entre núcleos esféricos y deformados cuando $0 < c_2 < (9/32)c_3^2$. Otra región de interés es el eje- c_2 ; para valores $c_2 > 0$, la SEP describe núcleos esféricos, mientras que para $c_2 < 0$, la SEP caracteriza núcleos γ -inestables. Cuando se cruza este último semi-eje, existe una transición de forma desde oblato a prolato y viceversa.

Sobre el lugar geométrico que define la *Separatriz* en el espacio de parámetros, podemos tener transiciones de forma, y sobre los puntos críticos degenerados, la SEP no puede ser aproximada por funciones cuadráticas. Es importante señalar que la SEP tiene simetría de espejo a lo largo del eje- c_2 , lo cual físicamente representa transiciones de forma de prolato a oblato.

Finalmente, la SEP puede escribirse en la forma canónica de una Catástrofe Cuspidal en la variable β , mediante la transformación $\beta = y + c_3/4$, con lo cual podemos determinar los parámetros matemáticos

$$a = \frac{c_2}{2} - \frac{3c_3^2}{16}, \quad (2.3.28a)$$

$$b = \frac{c_3}{8} \left(c_2 - \frac{c_3^2}{4} \right). \quad (2.3.28b)$$

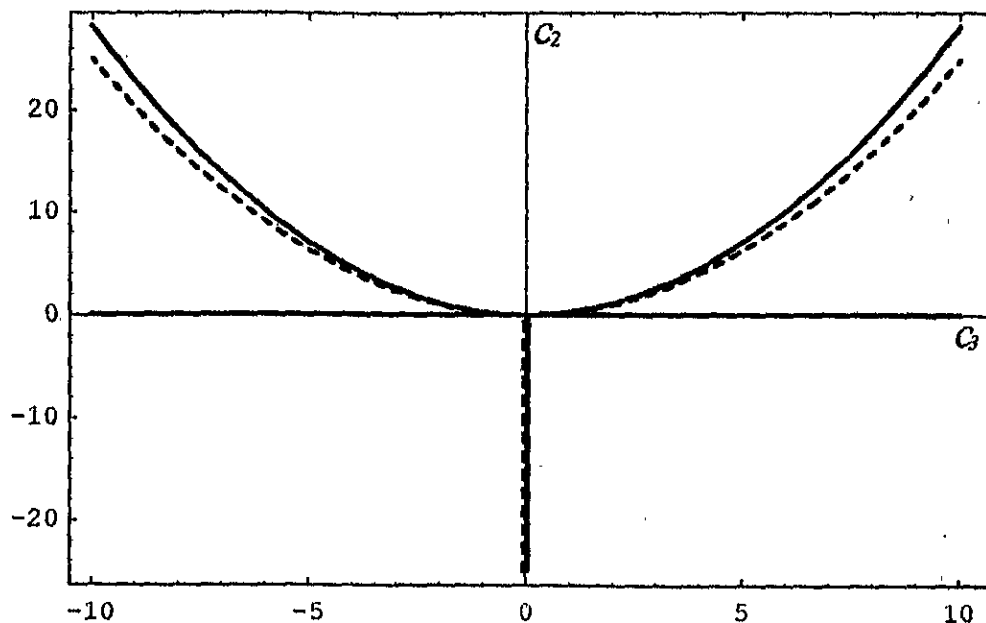


Figura 2. La Separatriz de la SEP definida en la Ec. (2.3.4), se exhibe en el espacio de los parámetros esenciales (c_3, c_2) . Los conjuntos de bifurcación se indican con una línea continua, mientras que los conjuntos de Maxwell son indicados por una línea punteada.

En términos de estos parámetros matemáticos los conjuntos de bifurcación se expresan de una manera simple por la ecuación de una cúspide

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0. \quad (2.3.29)$$

Notemos que para la Catástrofe Cuspidal la condición $b = 0$ en la Ec.(2.3.28b) implícitamente da los dos conjuntos de Maxwell calculados anteriormente.

REFERENCIAS

- Eisenberg, J. M. and Greiner, W., *Nuclear Theory. Vol. 1, Nuclear Models*. North Holland. Amsterdam, Oxford, New York, Tokyo. (1987)
- Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientist and Engineers*, Wiley (1981)
- López-Moreno, E., y Castaños, O., *Energy Surfaces of Algebraic Models*. Rev. Mex. Fís. **42**, Suplemento, 1 (1996)163-174

3 EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES

El modelo de bosones interactuantes intenta describir en una forma unificada las propiedades colectivas de los núcleos. El modelo tiene conexión con el modelo de capas esférico, además de tener propiedades similares a las del modelo colectivo basado sobre el concepto de variables de forma. Este modelo ha sido investigado y extendido para cubrir muchos de los aspectos relacionados con el entendimiento de la estructura nuclear. El modelo de bosones interactuantes *IBM - 1* fue introducido en 1974 [Arima y Iachello, (1974)] para describir las propiedades colectivas de los núcleos par-par en las regiones lejanas de capa cerrada a través de las interacciones entre dos clases de bosones: uno con momento angular $L = 0$ (el bosón-s) y otro con momento angular $L = 2$ (el bosón-d). Por lo tanto, las excitaciones colectivas de los núcleos son descritas por bosones y el formalismo de segunda cuantización es apropiado para representar al modelo. Así, se introducen operadores bosónicos de creación y aniquilación con momentos angulares cero y dos. Habiendo definido a estos operadores, se puede obtener mucha información del sistema explotando sus propiedades algebraicas. El estudio de las propiedades algebraicas permite principalmente construir estados base y evaluar elementos de matriz de operadores relevantes. En este modelo los productos bilineales de los operadores de creación b_α^\dagger y aniquilación b_α , dan lugar, bajo la operación de conmutación, a una estructura de un grupo unitario en seis dimensiones $U(6)$. Los bosones representan parejas de fermiones, el bosón-s refleja la fuerte atracción de apareamiento (pairing) de nucleones idénticos; mientras que el bosón-d es el resultado de la atracción $J = 2^+$, más débil [Arima y Iachello (1974)]. Así, los núcleos son esquematizados como un sistema de bosones s y bosones d, cuyo número resulta igual a la mitad del número de nucleones de valencia, mientras que el carozo permanece inerte. Cuando una capa se encuentra llena mas allá de la mitad, se cuentan parejas de agujeros en vez de parejas de partículas.

3.1 INTRODUCCIÓN

Para construir el hamiltoniano y otros operadores físicos del modelo *IBM*, resulta conveniente introducir los operadores de creación y aniquilación de bosones s (s^\dagger, s) y d (d_μ^\dagger, d_μ) con $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$. La base se genera por la aplicación de los seis operadores de creación sobre el estado del vacío $|0\rangle$. Resulta de gran importancia que estos seis operadores, denotados genéricamente como b_α^\dagger y los correspondientes operadores de aniquilación b_α donde $\alpha = 0, 1, \dots, 6$, al constituirse en los productos bilineales

$$\mathcal{G} : G_{\alpha\beta} = b_\alpha^\dagger b_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$$

resultan ser 36 operadores que forman los elementos de un álgebra de Lie $u(6)$. Así, el álgebra $u(6)$ se dice que genera el espectro en el problema del modelo-IBM. Todos los operadores físicos son construídos a partir de estos productos bilineales $G_{\alpha\beta}$ dentro de lo que se llama una teoría algebraica. El conocimiento de ésta nos permite estudiar de una manera directa sus simetrías dinámicas y, como veremos más tarde, en el caso en el cual los valores de los parámetros del hamiltoniano H_{IBM} son tales que este hamiltoniano queda expresado en términos de los operadores de Casimir de una sola cadena de subgrupos de $U(6)$, resulta directo el cálculo de los valores de expectación del hamiltoniano

en términos de los números cuánticos que etiquetan las representaciones de grupo de esa cadena. Al procedimiento matemático que nos permite hacer esto se le conoce con el nombre de *reglas de ramificación* las cuales estudian todas las posibles particiones de un álgebra \mathcal{G} dentro de sus distintas subálgebras. Como en el caso del problema del núcleo los estados del sistema deben estar caracterizados por números cuánticos dentro de las cuales esté incluido el momento angular total, el álgebra del momento angular $o(3)$ debe estar contenida. Existen solamente tres cadenas de $U(6)$ que contienen el álgebra de momento angular y que se les llama de $U(5)$, $U(3)$ y $O(6)$. Estas subálgebras incluyen tres cadenas de grupos de $U(6)$:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2), \quad (3.1.1a)$$

$$U(6) \supset \left\{ \begin{array}{c} U(3) \\ \bar{U}(3) \end{array} \right\} \supset O(3) \supset O(2), \quad (3.1.1b)$$

$$U(6) \supset \left\{ \begin{array}{c} O(6) \\ \bar{O}(6) \end{array} \right\} \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (3.1.1c)$$

En las cadenas (3.1.1b) y (3.1.1c) aparecen dos grupos unitarios en tres dimensiones y dos grupos ortogonales de seis dimensiones. La razón de esto es que existen dos diferentes, físicamente significativas, realizaciones de sus generadores [Arima y Iachello (1974); Castaños et al., (1979)].

Un álgebra unitaria de tres dimensiones tiene nueve generadores y están constituidos por el operador de número, el momento angular y el operador cuadrupolar. La diferencia entre el álgebra $u(3)$ y $\bar{u}(3)$ se encuentra en la definición de los operadores cuadrupolares, esto es

$$Q_\mu = (s^\dagger \tilde{d}_\mu + s d_\mu^\dagger) - \frac{\sqrt{7}}{2} [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{[2]},$$

$$\bar{Q}_\mu = (s^\dagger \tilde{d}_\mu + s d_\mu^\dagger) + \frac{\sqrt{7}}{2} [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu^{[2]},$$

respectivamente. Esta diferencia da lugar a la existencia de distintos tipos de interacciones cuadrupolares, cuyas expresiones están dadas en el Apéndice A. Posteriormente veremos que estas interacciones están relacionados con la forma de los núcleos. El $u(3)$ es adecuado para describir núcleos prolatos, mientras que $\bar{u}(3)$ lo es para núcleos oblatos.

Un álgebra ortogonal de seis dimensiones tiene quince generadores y están constituidos por los diez de $o(5)$ más cinco restantes. La diferencia entre el álgebra $o(6)$ y $\bar{o}(6)$ se encuentra en estos últimos cinco, a saber

$$\Lambda_\mu = s^\dagger \tilde{d}_\mu + s d_\mu^\dagger,$$

$$\bar{\Lambda}_\mu = i(s^\dagger \tilde{d}_\mu - s d_\mu^\dagger),$$

respectivamente. Esta diferencia da lugar a la existencia de diferentes interacciones multipolares, dadas en el Apéndice A, que están relacionados con la forma de los núcleos. El $o(6)$ da lugar a una superficie de energía asociada a la descripción de núcleos γ -inestable, mientras que $\bar{o}(6)$ produce una superficie de energía constante.

Estos resultados serán demostrados más adelante, sin embargo es importante señalar que modificando el estado coherente en forma apropiada los papeles de las parejas de grupos ($u(3)$, $\bar{u}(3)$) y ($o(6)$, $\bar{o}(6)$) podrían intercambiarse. Esto no es el caso para la separatriz del modelo de bosones interactuantes ya que las formas posibles de las superficies de energía son invariantes.

Para construir el Hamiltoniano, primero se consideran las interacciones de bosón independiente resultando naturalmente los operadores de número de bosones d , N_d , y s , N_s . Después construimos

las interacciones bosón-bosón que mantienen constante el número total de bosones, de estas estamos interesados en considerar solamente aquellas que son escalares, esto es invariantes ante rotaciones. Por lo tanto el Hamiltoniano más general de uno y dos cuerpos, que conserva el número total de bosones y es invariante ante rotaciones es:

$$\begin{aligned}
 H_{IBM} = & \epsilon_s N_s + \epsilon_d N_d \\
 & + \sum_{L=0,2,4} \frac{c_L}{2} \sqrt{2L+1} [(\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger)^{[L]} \times (\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}})^{[L]}]^{[0]} \\
 & + \frac{v_2}{\sqrt{2}} ([(\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger)^{[2]} \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[0]} s + s^\dagger [\mathbf{d}^\dagger \times (\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}})^{[2]}]^{[0]}) \\
 & + \frac{v_0}{2} ([(\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger)^{[0]} s^2 + s^{\dagger 2} (\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}})^{[0]}) \\
 & + u_2 s^\dagger s [\mathbf{d}^\dagger \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[0]} + \frac{u_0}{2} s^{\dagger 2} s^2, \tag{3.1.2}
 \end{aligned}$$

donde los operadores bosónicos s , s^\dagger , d_μ y d_μ^\dagger , satisfacen las siguientes reglas de conmutación diferentes de cero:

$$[s, s^\dagger] = 1, \quad [d_\mu, d_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu, \mu'}. \tag{3.1.3}$$

Los coeficientes enfrente de los términos de interacción son parámetros ajustables, que indican las intensidades de las interacciones.

Ahora el problema que se plantea es el de caracterizar los estados base

$$b_\alpha^\dagger b_{\alpha'}^\dagger \dots |0\rangle$$

según sus propiedades de transformación ante los conjuntos de grupos correspondientes a las tres cadenas mencionadas en (3.1.1). En principio podríamos construir bases que se transformarán según las representaciones de los grupos apropiados y etiquetarlos con los números cuánticos correspondientes a las distintas representaciones. En el caso de un número fijo N de bosones, la función de onda del sistema tiene que ser completamente simétrica, esto es, se debe partir de la representación totalmente simétrica $[N]$

3.2 SIMETRÍAS DINÁMICAS

Cuando el Hamiltoniano del núcleo puede ser escrito en términos de ciertos operadores C (llamados los operadores de Casimir o los invariantes) para una de estas cadenas de grupos, entonces se puede diagonalizar el Hamiltoniano en forma exacta. Estas situaciones, llamadas simetrías dinámicas, han jugado un papel muy importante en el desarrollo del modelo *IBM*. Se podrán obtener soluciones analíticas solamente si el Hamiltoniano se logra escribir en términos de los operadores de Casimir de una sola de las cadenas. Sus eigenvalores pueden entonces ser encontrados analizando los eigenvalores de los correspondientes invariantes de Casimir [Popov y Perelomov, (1967); Nwachuku y Rashid, (1977)]. Estas soluciones de los límites exactos de simetría, espectros de energía y transiciones electromagnéticas, recuerdan los resultados obtenidos con modelos geométricos. Así, a la simetría $U(5)$ se le denominó de vibrador anarmónico, la de $SU(3)$ la de rotor axial y finalmente a la $O(6)$ la de un rotor γ -inestable.

El hamiltoniano (3.1.2) puede ser expresado en términos de operadores de Casimir de las cadenas de grupos, (3.1.1), como:

$$H_{IBM} = k_1 N_d + k_2 N_d^2 + k_3 N_d N + k_4 L^2 + k_5 \Lambda^2 + k_6 P^2 + k_7 Q^2 + k_8 N + k_9 N^2, \tag{3.2.1}$$

donde N_d es el operador de número de bosones d , L^2 es el cuadrado del momento angular, Λ^2 es el operador de Casimir de $O(5)$, P^2 está relacionado con el operador de Casimir de $O(6)$ a través de $P^2 = \frac{1}{4}(N^2 + 4N - L^2)$ y cuenta el número de pares de bosones acoplados a momento angular cero. Finalmente Q^2 está definido por $Q^2 = \frac{1}{2}G - \frac{3}{8}L^2$, donde G es el operador de Casimir de $SU(3)$. Conteniendo entonces nueve términos independientes y otros tantos parámetros. Sin embargo, este Hamiltoniano no sería diagonalizable en forma cerrada, puesto que algunas invariantes de Casimir son diagonales en una cadena, y otras en alguna otra. La mayoría de los núcleos no se encuentran en la situación ideal de una simetría dinámica perfecta, y así se hace necesario tratar con el Hamiltoniano completo. Existen relativamente pocos cálculos disponibles para este caso general.

$U(5)$

Considerando en (3.2.1) $k_6 = k_7 = 0$ se tiene un Hamiltoniano constituido por operadores de Casimir de la cadena (3.1.1a). Una base que porta las representaciones irreducibles de la cadena (3.1.1a) está definida por los números cuánticos

$$| N \nu \Lambda s L M \rangle, \quad (3.2.2)$$

donde N denota el número total de bosones, ν es el número de bosones con momento angular dos y satisface la reglas de ramificación

$$\nu = N, N-1, \dots, 0,$$

toma todos los valores entre 0 y N . El número Λ caracteriza al grupo $O(5)$ y se conocen bien cuáles son sus valores posibles para una ν fija, esto es [Castaños et al. (1979)]

$$\Lambda = \nu, \nu-2, \dots, 1 \text{ ó } 0,$$

o sea, los valores de Λ son todos pares o impares. Los números cuánticos L y M denotan el momento angular y su proyección, respectivamente. El índice s denota el número de veces que puede aparecer el momento angular L contenido en la representación Λ y es tal que

$$s = 1, 2, \dots, d(\Lambda, L).$$

Esta etiqueta se define en términos del parámetro μ , que es un entero no-negativo que esta restringido por las desigualdades

$$\Lambda - L \leq 3\mu \leq \Lambda - \frac{L}{2} \quad \text{si } L \text{ es par,} \quad (3.2.3a)$$

$$\Lambda - L \leq 3\mu \leq \Lambda - \frac{L+3}{2} \quad \text{si } L \text{ es impar.} \quad (3.2.3b)$$

Definiendo μ_0 como el valor mínimo de μ , entonces se tiene que

$$s = \mu - \mu_0 + 1.$$

En este límite, el Hamiltoniano es diagonal en la base (3.2.2) y su espectro de energía está determinado por la expresión

$$E_{N\nu\Lambda L} = k_1\nu + k_2\nu^2 + k_3N\nu + k_4L(L+1) + k_5\Lambda(\Lambda+3) + k_8N + k_9N^2. \quad (3.2.4)$$

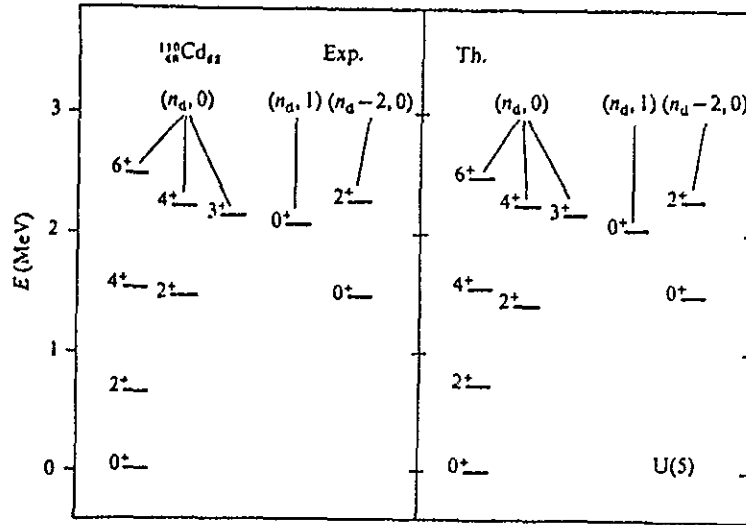


Figura 1. Espectro teórico del núcleo $^{110}_{48}\text{Cd}$. Denotamos entre paréntesis los números cuánticos Λ y s . A la izquierda de los niveles de energía se indica su correspondiente momento angular y paridad.

Este espectro ofrece una descripción de núcleos vibratoriales con una amplia variedad de anarmonicidades. Sin embargo, para identificar este límite es conveniente restringirse a espectros cuasi-armónicos. Los núcleos vibratoriales son caracterizados por niveles de energía igualmente espaciados con estructuras de uno, dos, ... fonones. Estos existen en la naturaleza y el núcleo $^{110}_{48}\text{Cd}$ es el ejemplo típico de núcleo vibracional. El espectro del Cadmio con $A \approx 110$ es mostrado en la Fig. 1.

El operador cuadrupolar eléctrico está constituido por dos términos, esto es,

$$T_{\mu}^{E2} = e_0 \left[d^{\dagger} \times \tilde{s} + s^{\dagger} \times \tilde{d} \right]_{\mu}^{(2)} + e_2 \left[d^{\dagger} \times \tilde{d} \right]_{\mu}^{(2)}.$$

Para calcular las razones y momentos electromagnéticos se utiliza el teorema de Wigner-Eckart, El primer término del operador tiene propiedades bien definidas de transformación y exhibe para los núcleos vibratoriales las reglas de selección siguientes:

$$\Delta\nu = \pm 1, \quad \Delta\Lambda = \pm 1, \quad |\Delta L| \leq 2.$$

El segundo término no cambia el número de bosones- d , $\Delta\nu = 0$, y por supuesto también debe satisfacerse que $|\Delta L| \leq 2$.

Otras cantidades importantes que son de utilidad para identificar espectros de energía experimentales son las razones entre valores $BE2$ siguientes

$$R' = \frac{B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}, \quad R'' = \frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}, \quad R''' = \frac{B(E2; 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}.$$

Así, las condiciones básicas para la observación de una simetría $U(5)$ en las transiciones electromagnéticas son que tienden a cero cuando $\nu = 2$ y que las razones R' , R'' , R''' , son aproximadamente iguales.

$SU(3)$

Considerando en (3.2.1) $k_1 = k_2 = k_3 = k_5 = k_6 = 0$ se obtiene un Hamiltoniano constituido por operadores de Casimir de la cadena (3.1.1b). Una base que porta las representaciones irreducibles de la cadena (3.1.1b) está definida por los números cuánticos

$$|N(\lambda, \mu)\kappa LM\rangle, \quad (3.2.5)$$

donde (λ, μ) denotan los números cuánticos que caracterizan las representaciones irreducibles de $SU(3)$. Los valores de (λ, μ) que están contenidos en la representación totalmente simétrica $[N]$ de $U(6)$ son de la forma:

$$(\lambda = 2N - 4x - 6y, \mu = 2x), \quad (3.2.6a)$$

donde x y y son enteros que satisfacen las desigualdades

$$0 \leq x \leq [N/2], \quad 0 \leq y \leq [(N - 2x)/3], \quad (3.2.6b)$$

con $[]$ significando el valor entero menor al número dentro del paréntesis.

La κ es un índice que resuelve las ocurrencias multiples del momento angular L en la representación (λ, μ) de $SU(3)$. Una elección común es la κ de Elliott, que está definida por el algoritmo

$$L = \kappa, \kappa + 1, \kappa + 2, \dots, \lambda + \mu + 1 - \kappa, \quad (3.2.7a)$$

$$\kappa = \min\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\} - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0, \quad (3.2.7b)$$

si $\kappa \neq 0$. Para $\kappa = 0$ tenemos que

$$L = \lambda + \mu, \lambda + \mu - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0. \quad (3.2.7c)$$

En este límite, el Hamiltoniano es diagonal en la base (3.2.5) y su espectro de energía está determinado por la expresión

$$E_{N(\lambda, \mu)L} = (k_4 - \frac{3k_7}{8})L(L+1) + \frac{k_7}{2}(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu) + k_8N + k_9N^2, \quad (3.2.8)$$

donde se substituyó la interacción cuadrupolo-cuadrupolo por su expresión en términos de los operadores de Casimir de segundo orden G y el momento angular; utilizando además sus respectivos eigenvalores. El eigenvalor de G está dado por la expresión $\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu)$.

Este espectro ofrece una descripción de núcleos rotacionales y sus niveles de energía son los de un rotor, esto es, siguen la ley $L(L+1)$. Estos espectros existen en la naturaleza y el núcleo ${}_{64}^{156}\text{Gd}$ es el ejemplo típico de núcleo rotacional. El espectro del Gadolinio con $A = 156$ es mostrado en la Fig. 2. Las propiedades de decaimiento de los niveles de energía de núcleos rotacionales exhiben la regla de selección siguiente: Las bandas β y γ pertenecen a una representación de $SU(3)$ diferente de aquella que caracteriza la banda base y por lo tanto las transiciones cuadrupolares

$$\beta \rightarrow g.s., \quad \gamma \rightarrow g.s..$$

están prohibidas. Este resultado tiene como consecuencia que las razones R'' y R''' tienden a cero. $O(6)$

Considerando en (3.2.1) $k_1 = k_2 = k_3 = k_7 = 0$ se tiene un Hamiltoniano constituido por operadores de Casimir de la cadena (3.1.1c). Una base que porta las representaciones irreducibles de la cadena (3.1.1c) está definida por los números cuánticos

$$|N\rho\Lambda sLM\rangle, \quad (3.2.9)$$

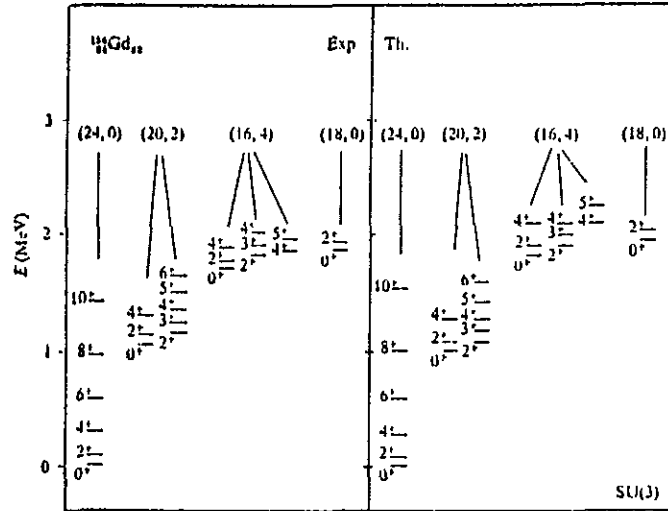


Figura 2. Espectro teórico del núcleo $^{156}_{64}\text{Gd}$. Denotamos entre paréntesis los números cuánticos λ y μ . A la izquierda de los niveles de energía se indica su correspondiente momento angular y paridad.

donde ρ caracteriza al grupo $O(6)$ y se conocen bien cuales son sus valores posibles para una N dada, esto es

$$\rho = N, N - 2, \dots, 1 \text{ ó } 0,$$

donde los valores de ρ son todos pares o impares. El número Λ ya fue definido antes y para una ρ fija sus valores posibles son

$$\Lambda = \rho, \rho - 1, \dots, 1, 0.$$

La reducción del grupo $O(5)$ hacia abajo ya se discutió en el caso $U(5)$.

El Hamiltoniano (3.2.1), en este límite, es diagonal en la base (3.2.9) y su espectro de energía está determinado por la expresión

$$E_{N\nu\Lambda LM} = k_4 L(L + 1) + k_5 \Lambda(\Lambda + 3) - k_6 / 4 \rho(\rho + 4) + (k_8 + k_6 / 4) N + (k_9 + k_6 / 4) N^2. \quad (3.2.10)$$

El parámetro k_6 controla la separación entre estados pertenecientes a diferentes familias ρ , k_5 establece el espaciamiento entre diferentes valores del número cuántico Λ y k_4 separa los momentos angulares dentro de cada multiplete Λ . Este límite existe en la naturaleza y el núcleo $^{196}_{78}\text{Pt}$ es el ejemplo típico de núcleo γ -inestable. El espectro del Platino es mostrado en la Fig. 3. Las transiciones cuadrupolares entre los niveles de energía de núcleos γ -inestable exhiben las reglas de selección siguientes (considerando en el operador cuadrupolar $e_2 = 0$):

$$\Delta\rho = 0, \quad \Delta\Lambda = \pm 1.$$

Es importante notar que este límite es análogo al Modelo de Wilets-Jean o del rotor γ -inestable, y así la banda γ de su espectro presenta el aglutinamiento regular del tipo $2^+, (3^+, 4^+), (5^+, 6^+)$, etc. Este aglutinamiento es opuesto al presentado por el rotor asimétrico rígido (Modelo de Davydov) y este es por cierto una de las pocas distinciones entre estos dos tipos de rotores asimétricos. Las características de las transiciones electromagnéticas de esta simetría son que tienden a cero cuando $\Delta\Lambda = 2$, que las razones R' y R'' son aproximadamente iguales y la razón R''' tiende a cero.

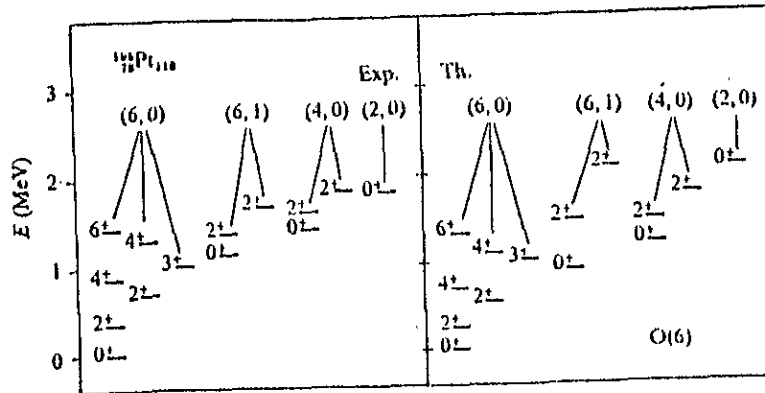


Figura 3. Espectro teórico del núcleo $^{196}_{78}\text{Pt}$. Denotamos entre paréntesis los números cuánticos ρ y s . A la izquierda de los niveles de energía se indica su correspondiente momento angular y paridad.

3.3 SUPERFICIES DE ENERGÍA

El modelo IBM tiene asociada una estructura geométrica intrínseca. Esta es una propiedad de cualquier modelo con una estructura de grupo bien definida [Gilmore, (1974); Gilmore y Feng, (1978)]. Las propiedades geométricas del IBM son de particular importancia debido a que permiten relacionar este modelo nuclear con la descripción de los estados colectivos en los núcleos por medio de las variables de forma β y γ , introducidas por Bohr y Mottelson en su modelo colectivo [Bohr, (1952); Bohr y Mottelson, (1975)]. En el modelo colectivo las variables β y γ especifican la forma de la deformación intrínseca elipsoidal. La β representa la deformación radial de la forma esférica y la γ indica la asimetría axial del núcleo. Así la β es cero para un núcleo esférico, mientras que resulta distinto de cero para núcleos deformados. La γ es cero para núcleos prolatos axialmente simétricos e igual a $\pi/3$ para núcleos oblatos axialmente simétricos; mientras que para valores entre 0 y $\pi/3$, los núcleos son triaxiales.

Si para un modelo algebraico del núcleo obtenemos una expresión de la energía como función de β y γ , estaremos entonces interesados en los mínimos de esta función sobre el plano- (β, γ) , i. e., en los mínimos de la Superficie de Energía (SE), ya que estos valores corresponderán a las formas de equilibrio del núcleo. En el límite geométrico, las propiedades del estado base estarán dadas por las configuraciones de equilibrio de la SE .

A pesar de que las simetrías dinámicas del modelo dan información de parte de sus capacidades y lo relacionan con las soluciones de modelos geométricos, existe la necesidad de tener un procedimiento para discutir sistemas algebraicos en términos de conceptos geométricos. Este procedimiento puede ser extremadamente importante cuando son introducidas extensiones del modelo IBM-1, porque aparecen posibles entonces muchas interacciones nuevas y parámetros libres. En estos casos el tener una visión más amplia o una interpretación física del modelo es fundamental para reducir en lo posible el número de parámetros libres. La mayoría de los estudios para lograr ésto se han centrado en buscar realizaciones geométricas del modelo a través del formalismo de estados intrínsecos (estados coherentes proyectivos) o por un análisis clásico [Ginocchio, Kirson, (1980); Dieperink, Scholtén

y Iachello, (1980)]. Las superficies de energía que resultan de estos estudios queremos analizarlas mediante la teoría de catástrofes como veremos más adelante.

Los estados coherentes de Weyl para un sistema de bosones s y d están dados por una función exponencial en términos de los bosones de creación s^\dagger y d^\dagger actuando sobre el estado de vacío. Sin embargo, para el IBM el número total de bosones se conserva, el grupo asociado es compacto y entonces en la expresión general exponencial contribuye sólo un término que depende del número total de bosones

$$|N; \alpha_\mu\rangle = A_N (s^\dagger + \sum_\mu \alpha_\mu d_\mu^\dagger)^N |0\rangle, \quad (3.3.1a)$$

donde las α_μ son en general cinco variables (son complejas, pero se les pide la condición de realidad $\alpha_\mu^* = \alpha^\mu$) y

$$A_N = (1 + \beta^2)^{-\frac{N}{2}} \quad (3.3.1b)$$

es la constante de normalización. En el caso estático que a nosotros nos interesa analizar, la correspondiente superficie de energía del modelo se calcula a partir de la expresión

$$E(\alpha) = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \frac{\langle N; \alpha' | H_{IBM} | N; \alpha \rangle}{\langle \alpha' | \alpha \rangle}, \quad (3.3.2)$$

donde H_{IBM} es el Hamiltoniano más general del modelo $IBM - 1$, Ec.(3.1.2). Para este caso, obtenemos la SE :

$$E(\beta, \gamma) = N\epsilon \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)} + \frac{N(N-1)}{(1 + \beta^2)^2} (a_1 \beta^4 + a_2 \beta^3 \cos 3\gamma + a_3 \beta^2 + \frac{u_0}{2}), \quad (3.3.3)$$

donde se restó el valor constante $N\epsilon_s$, $\epsilon = \epsilon_d - \epsilon_s$, y se utilizó el hecho de que las variables del laboratorio α_μ pueden expresarse en términos de los tres ángulos de Euler $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, los cuales definen la orientación en el espacio del sistema de referencia intrínseco, más dos variables intrínsecas que se denotan β y γ , porque están relacionadas con las variables de forma de Bohr y Mottelson. Las variables α_μ se asocian con las variables intrínsecas a través de la transformación

$$\alpha_\mu = \sum_\nu a_\nu D_{\mu\nu}^{(2)}(\Omega), \quad (3.3.4)$$

donde $\Omega \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $D_{\mu\nu}^{(2)}$ representa una función- D de Wigner, y se cumple

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_{\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma, \quad a_{\pm 1} = 0.$$

Más todavía, como la SE es un invariante rotacional, toda la dependencia con los ángulos de Euler desaparece. Los parámetros a_1 , a_2 y a_3 de la SE anterior, están dados por las siguientes combinaciones de aquellos que aparecen en el hamiltoniano $IBM - 1$ general

$$a_1 = \frac{c_0}{10} + \frac{c_2}{7} + \frac{9c_4}{35}, \quad (3.3.5a)$$

$$a_2 = -\frac{2}{\sqrt{35}} v_2, \quad (3.3.5b)$$

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (v_0 + u_2). \quad (3.3.5c)$$

3.4 FORMAS Y ESTABILIDAD DE LAS SUPERFICIES DE ENERGÍA

La SE en la Ec.(3.3.3) se ha utilizado para analizar la estructura de la forma nuclear en los límites exactos correspondientes a las tres simetrías dinámicas de $U(6)$ descritas en la Ec.(3.1.1) [Dieperink, Scholten y Iachello, (1980)]. También se han estudiado las transiciones de fase de forma de las tres clases transicionales asociadas con parejas de simetrías dinámicas [Dieperink, Scholten, y Iachello, (1980); Gilmore, (1979)]. En la presente sección presentaremos un análisis para el caso más general, en el cual no se tiene necesariamente una de las tres simetrías dinámicas. En este caso general, las superficies de energía definen una familia de funciones con variables β y γ . Esta familia es obtenida al variar el conjunto de parámetros asociados a este modelo algebraico. La teoría matemática de Catástrofes será utilizada para analizar las configuraciones de equilibrio y nos permitirá: i) determinar el número de parámetros esenciales del modelo, ii) organizar todas las formas posibles de las superficies de energía en regiones bien definidas en el espacio de parámetros esenciales, y iii) clasificar el orden de las transiciones de fase de forma de una manera general.

El procedimiento para utilizar el formalismo de catástrofes es el siguiente:

i) Los parámetros de control esenciales y el germen de la superficie de energía son determinados. Esto se logra obteniendo las configuraciones de equilibrio

$$\nabla E(\beta, \gamma) |_{(\beta_c, \gamma_c)} = 0,$$

esto es, los puntos críticos (β_c, γ_c) de la superficie de energía. De éstos, aquel con mayor degeneración es seleccionado y es llamado la raíz fundamental. Posteriormente, se efectúa un desarrollo en serie de Taylor alrededor de la raíz fundamental. El germen de la SE de $IBM - 1$ es el primer término del desarrollo que no puede cancelarse por una selección arbitraria de los valores de los parámetros.

ii) Se construyen los conjuntos de bifurcación de la SE , los que se definen como el lugar de puntos en el espacio de parámetros de control esenciales en los cuales una transición ocurre de un mínimo local a otro. Los conjuntos de bifurcación se obtienen de la condición $\det \mathcal{H} = 0$, donde \mathcal{H} , es la matriz de segundas derivadas de la SE evaluada en los puntos críticos

$$\det \mathcal{H}_{i,j} = \frac{\partial^2 \varepsilon(x_k)}{\partial x_i \partial x_j} |_{(x_1^c, x_2^c)},$$

con $x_1^c = \beta$ y $x_2^c = \gamma$, donde el superíndice c en las variables x_1, x_2 denota que son puntos críticos.

En los pasos anteriores el gradiente de la SE se utiliza para obtener información sobre sus puntos críticos, mientras que la matriz \mathcal{H} define su naturaleza, si $\det \mathcal{H} \neq 0$, definiendo si sus puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de silla. Si $\det \mathcal{H} = 0$, la naturaleza y número de puntos críticos cambia, significando que (x_1^c, x_2^c) es al menos doblemente degenerado. Entonces los conjuntos de bifurcación definen regiones en espacio de parámetros donde la naturaleza cualitativa de la SE cambia, porque configuraciones de equilibrio son creadas o destruidas. El determinante de la matriz de estabilidad es igual al producto de sus eigenvalores y están asociados a las variables β_c, γ_c de la SE . Un eigenvalor cero indica que su variable asociada no está bien comportada, significando que la SE en ese punto crítico no puede aproximarse por una expresión cuadrática en esa variable.

iii) Se determinan los conjuntos de Maxwell, los que constituyen el lugar de puntos en el espacio de parámetros esenciales para los cuales la SE toma el mismo valor en dos o más puntos críticos aislados. Estos conjuntos pueden encontrarse a través de las ecuaciones de Clausius-Clapeyron. Si suponemos que para el conjunto $\{c_k^0\}$ de parámetros esenciales se tienen p puntos críticos degenerados, las ecuaciones Clausius-Clapeyron están definidas por

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \dots = \varepsilon^p$$

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \varepsilon^{(k)}}{\partial c_{\alpha}^0} - \frac{\partial \varepsilon^{(k+1)}}{\partial c_{\alpha}^0} \right) \delta c_{\alpha}^0.$$

iv) Finalmente, se reconstruye la separatriz del IBM1, la cual está formada por la unión de los conjuntos de bifurcación y de Maxwell. La separatriz divide al espacio de parámetros en regiones de estabilidad e identifica los sitios en los que ocurren transiciones de fase de forma, junto con su orden.

Sobre los conjuntos de bifurcación B_l no se cumple el Lema de Morse y tendremos

$$\nabla E(\beta, \gamma) |_{(\beta_c, \gamma_c)} = 0 \quad \text{y} \quad \det \mathcal{H}_{i,j}(\beta, \gamma) |_{(\beta_c, \gamma_c)} = 0.$$

Considerando variaciones aun muy pequeñas de los parámetros, el sistema podría cruzar algún conjunto de bifurcación B_l y cambiar radicalmente la forma y estabilidad de los puntos críticos del sistema. En efecto, sobre el conjunto B y solamente sobre él, cambia el número y naturaleza de los puntos críticos. La Superficie de Energía $E(\beta, \gamma)$ ya no se podrá aproximar por una forma cuadrática sobre B ; sin embargo, bajo ciertas condiciones, resulta posible reemplazarla por alguna cierta forma canónica, *v. gr.*, las Catástrofes Elementales. Aunque las Catástrofes Elementales solamente aparecen en ausencia de simetrías, las ideas y aplicaciones más importantes del formalismo matemático de las catástrofes pueden extenderse cuando las funciones tienen alguna simetría, *i.e.*, *Catástrofes restringidas por simetría*.

Simetrías de la Superficie de Energía

Resulta conveniente iniciar el análisis de la superficie de energía del hamiltoniano del modelo IBM - 1 considerando sus simetrías. En primer lugar, notamos que la SE en la Ec.(6) tiene una dependencia en el ángulo γ de la forma $\cos 3\gamma$. De aquí se implica inmediatamente una forma general de la SE con invariancia ante rotaciones de $2\pi/3$ radianes; así como ante reflexiones en los tres ejes: $\gamma = 0$, $\gamma = 2\pi/3$ y $\gamma = 4\pi/3$. Esas tres rotaciones y estas tres reflexiones representan las seis operaciones del grupo llamado C_{3v} . Esta simetría tiene su origen en la limitación de las interacciones a uno y dos cuerpos; concretamente en la interacción $Q \cdot Q$. Gracias a la simetría mencionada antes, es posible restringir el análisis a la región comprendida entre los ángulos $\gamma = 0$ y $\gamma = \pi/3$.

Puntos Críticos de la Superficie de Energía

Los puntos críticos (β_c, γ_c) de la SE de la Ec.(3.3.3) los podremos obtener calculando las derivadas con respecto a las variables β y γ :

$$\nabla E(\beta, \gamma) |_{(\beta_c, \gamma_c)} = 0. \tag{3.4.1}$$

Haremos un tratamiento completo de los puntos críticos más adelante; sin embargo, derivando parcialmente respecto a la variable γ observamos inmediatamente que éstos se localizan únicamente sobre las semi-rectas dadas por los valores $\gamma_c = 0$ (caso prolato) ó $\gamma_c = \pi/3$ (caso oblato) en este modelo. Claramente aquellos puntos críticos (así como todos los demás puntos) sobre la semi-recta $\gamma_c = \pi/3$, se repiten exactamente sobre las semi-rectas $\gamma_c = \pi$ y $\gamma_c = 5\pi/3$. Así también, aquellos puntos críticos sobre la semi-recta $\gamma_c = 0$, se repiten exactamente sobre las semi-rectas $\gamma_c = 2\pi/3$

y $\gamma_c = 4\pi/3$. Expresemos esto en términos de las variables cartesianas (x, y) , obtenidas a partir de las polares como:

$$x = \beta \cos \gamma, \quad y = \beta \operatorname{sen} \gamma. \quad (3.4.2)$$

Podemos observar que la totalidad de los puntos críticos de la SE , salvo sus repeticiones simétricas, se encuentra sobre el *eje-X* cartesiano; el *semieje-X* positivo contiene los valores críticos de los núcleos prolatos y el *semieje-X* negativo los valores críticos de aquellos oblatos. De esta manera concluimos que, sin pérdida de generalidad, se puede restringir la búsqueda de puntos críticos al *eje-X* cartesiano.

Ecuación de los puntos críticos

Los puntos críticos respecto de la variable polar β los obtendremos derivando parcialmente la Ec.(3.3.3) respecto a esta variable. Encontraremos así que esta primera derivada se anula si y solo si se satisface la ecuación:

$$\beta \left[a_2 \beta^3 + 2 \left(a_3 - 2a_1 - \frac{\epsilon}{(N-1)} \right) \beta^2 - 3a_2 \beta + 2 \left(u_0 - a_3 - \frac{\epsilon}{(N-1)} \right) \right] = 0, \quad (3.4.3)$$

La raíz fundamental $\beta_c = 0$

De la Ec.(3.4.3) resulta inmediato que el valor $\beta_c = 0$, es un punto crítico en todo el espacio de parámetros. Al variar los parámetros tal punto crítico describe lo que llamaremos una *rama básica*. Para ciertos valores de los parámetros, esta *rama básica* puede degenerar y bifurcarse sobre un subconjunto B_0 de puntos del espacio de parámetros, desarrollándose otros puntos críticos $\beta_c \neq 0$, lo que llamaremos ramas primarias. Estas ramas primarias también podrían bifurcarse sobre otros subconjuntos $B_i \subset B$ generándose ramas secundarias, y así sucesivamente. Más adelante encontraremos los correspondientes subconjuntos B_i para los cuales cada valor crítico β_c se bifurca.

Determinación del Germen

Sobre la Separatriz tendremos que la Superficie de Energía $E(\beta, \gamma)$ ya no podrá aproximarse por una forma cuadrática no degenerada alrededor del punto crítico correspondiente. Uno puede entonces preguntarse si las propiedades cualitativas de la función $E(\beta, \gamma)$ quedarán completamente bien determinadas cuando la expansión en serie de Taylor alrededor de los puntos críticos degenerados es cortada para términos más allá de un cierto orden p , con p finita. Si este fuera el caso, diremos que la función es *p-determinada* en ese punto. Determinar si una función puede en efecto ser cortada y para qué orden p de su serie de Taylor puede así quedar truncada, se conoce como el problema de la *determinación* [Gilmore, (1981); Poston y Stewart, (1978)].

Mather ha desarrollado un algoritmo para decidir la *determinación* de una función analítica en los casos típicos. Lo anterior supone que no existe constricción alguna sobre los coeficientes de la serie de Taylor de la función alrededor del punto crítico. Cuando el punto crítico degenerado está en el origen, la simetría C_{3v} impuesta sobre el sistema implica restricciones sobre los términos de su serie de Taylor alrededor de este punto. El programa de la Teoría de Catástrofes se ha extendido para casos en los que tenemos funciones restringidas por simetría. A continuación describimos [Gilmore, (1981)] y aplicaremos esta extensión a nuestro problema:

1. Se arreglan los coeficientes de la serie de Taylor en orden creciente.
2. Se utilizan los k-grados de libertad de los parámetros de control para eliminar los primeros k coeficientes de Taylor distintos de cero.
3. Se eliminan los términos de grado más alto de la serie de Taylor por medio de una transformación continua y diferenciable que preserve la simetría. La función que permanece será el germen de la función, invariante ante el grupo de simetría.
4. Al desarrollo de términos que fueron eliminados por la elección apropiada de los parámetros de control se le llama perturbación universal.

Siguiendo este procedimiento, desarrollamos la superficie de energía de la Ec. (3.3.3), hasta cuarto orden en serie de Taylor alrededor del origen $(x, y) = (0, 0)$, en coordenadas cartesianas, y así encontramos

$$E(x, y) = (a_3 - u_0 + w)(x^2 + y^2) + a_2(x^3 - 3xy^2) + (a_1 - 2a_3 + \frac{3u_0}{2} - w)(x^2 + y^2)^2 + O(5), \quad (3.4.4)$$

donde $w = \epsilon/(N - 1)$. En este punto, señalamos un hecho sumamente relevante: Si bien es cierto que el hamiltoniano más general en la Ec. (3.3.3) depende de siete parámetros, la SE se puede sobredeterminar con sólo tres parámetros. En efecto, si en el primer paso del procedimiento antes descrito, para eliminar los primeros términos de la serie de la Ec.(3.4.4) elegimos los valores:

$$a_3 - u_0 + w = 0, \quad (3.4.5a)$$

entonces el término cuadrático se anula. Si además elegimos el valor:

$$a_2 = 0, \quad (3.4.5b)$$

encontraremos que el término cúbico también se anula. En estas condiciones (3.4.5a) y (3.4.5b) implican $u_2 = (a_3 + w)/2$, de modo que el coeficiente del término cuártico se vuelve

$$(2a_1 - a_3 + w). \quad (3.4.5c)$$

Este último no se puede anular en estas mismas condiciones. En efecto, si pedimos que (3.4.5c) se anule, la SE de la Ec. (3.3.3) se vuelve independiente de las variables β y γ y toma un valor constante igual a:

$$E_C = \epsilon N + a_1 N(N - 1). \quad (3.4.6)$$

Definición de los parámetros r_1 y r_2

Por esta razón, elegimos el valor en (3.4.5c) distinto de cero y formamos con (3.4.5a) y (3.4.5b) los siguientes parámetros independientes :

$$r_1 = \frac{a_3 - u_0 + \epsilon/(N - 1)}{2a_1 + \epsilon/(N - 1) - a_3}, \quad r_2 = -\frac{2a_2}{2a_1 + \epsilon/(N - 1) - a_3}, \quad (3.4.7a, b)$$

y entonces la SE toma la forma:

$$\varepsilon(\beta, \gamma) = \frac{1}{(1 + \beta^2)^2} (\beta^4 + r_1 \beta^2 (\beta^2 + 2) - r_2 \beta^3 \cos 3\gamma), \quad (3.4.8)$$

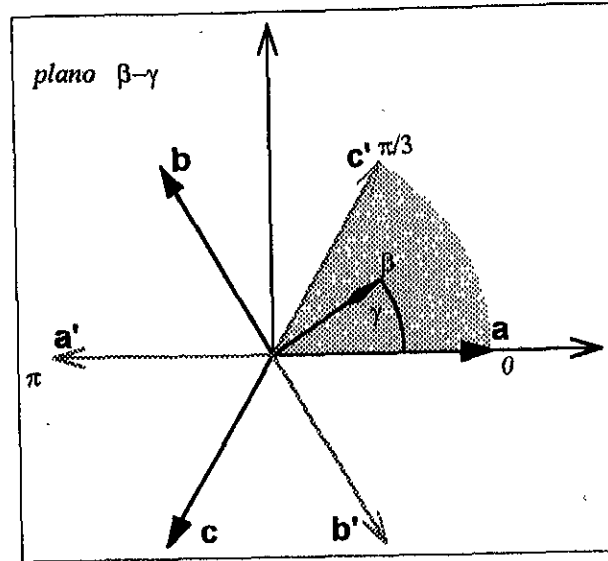


Figura 4. Acción de los elementos del grupo C_{3v} sobre los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} ; así como sobre $\mathbf{a}' = (-1, 0)$, $\mathbf{b}' = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ y $\mathbf{c}' = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

donde

$$\left(\frac{2/(N-1)}{2a_1 + w - a_3} \right) \left(E(\alpha)/N - \epsilon_s - \frac{u_0}{2}(N-1) \right) \equiv \varepsilon(\beta, \gamma). \quad (3.4.9)$$

En el desarrollo de la función alrededor del origen disponemos de dos parámetros de control esenciales, *i. e.*, r_1 y r_2 . Esta conclusión la podemos entender como una consecuencia de la simetría C_{3v} de la siguiente manera: Estudiando el efecto de las transformaciones del grupo puntual C_{3v} sobre el vector unitario en el plano $\mathbf{a} = (1, 0)$ se encuentran los vectores

$$\mathbf{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

(ver Fig. 4) y se concluye que se transforman entre sí bajo C_{3v} . Esto sugiere que se consideren los polinomios de primer orden en las variables (x, y) del plano cartesiano:

$$p_a(x, y) = x, \quad p_b(x, y) = \frac{-x + \sqrt{3}y}{2}, \quad p_c(x, y) = \frac{-x - \sqrt{3}y}{2}. \quad (3.4.10)$$

La acción de los elementos del grupo C_{3v} sobre estos polinomios es exhibida en la Tabla 1 siguiente:

Tabla 1. Acción de los elementos del grupo C_{3v} sobre los polinomios p_a , p_b y p_c

	E	C_3	C_3^2	σ_1	σ_2	σ_3
p_a	p_a	p_b	p_c	p_a	p_c	p_b
p_b	p_b	p_c	p_a	p_c	p_b	p_a
p_c	p_c	p_a	p_b	p_b	p_a	p_c

Es inmediato mostrar que los polinomios (3.4.10) no son linealmente independientes ya que:

$$p_a(x, y) + p_b(x, y) + p_c(x, y) = 0$$

y entonces cualesquiera dos de ellos sirven como base para generar polinomios que portan la representación irreducible bidimensional, que denotamos $\{\lambda_3\}$, del grupo C_{3v} . Por ejemplo, el polinomio de grado d más general esta dado por el desarrollo

$$p_d^{\{\lambda_3\}}(x, y) = \sum_{p,q} A_{p,q} p_a^p p_b^q,$$

donde $p + q = d$. Para demostrar lo mencionado arriba utilizamos los operadores de proyección asociados a las tres representaciones irreducibles del grupo:

$$\begin{aligned} P^{\{\lambda_1\}} &= \frac{1}{6} (E + C_3 + C_3^2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ P^{\{\lambda_2\}} &= \frac{1}{6} (E + C_3 + C_3^2 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3), \\ P^{\{\lambda_3\}} &= \frac{1}{6} (2E - C_3 - C_3^2). \end{aligned}$$

La aplicación de estos operadores de proyección sobre los polinomios (3.4.10) da el resultado siguiente:

$$P^{\{\lambda_1\}} p_\alpha = P^{\{\lambda_2\}} p_\alpha = 0, \quad P^{\{\lambda_3\}} p_\alpha = \frac{1}{2} p_\alpha,$$

donde $\alpha = a, b, c$. De la Tabla I es inmediato mostrar que el polinomio de grado d dado por

$$J(d) = \frac{1}{3} (p_a^d + p_b^d + p_c^d), \tag{3.4.11}$$

donde d representa el grado del polinomio, es invariante ante el grupo C_{3v} . A continuación calculamos los polinomios invariantes hasta de cuarto grado:

$$\begin{aligned} J(0) &= 1, \quad J(1) = 0, \quad J(2) = \frac{(x^2 + y^2)}{2}, \\ J(3) &= \frac{1}{4} (x^3 - 3xy^2), \quad J(4) = \frac{3}{8} (x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

Para estudiar los polinomios posibles que se pueden generar con los invariantes basta considerar la región de la recta $\gamma = 0$ a la recta $\gamma = \pi/3$ en la Fig. 4. Así, vemos que en el desarrollo de la serie de Taylor alrededor del origen Ec. (3.4.4) ya se había restado el término constante y podremos dividir toda la serie por el factor distinto de cero en la Ec.(3.4.5c). Los términos lineales son cero por tratarse de un punto crítico. Los cuadráticos y cúbicos se eliminan por una adecuada elección de los parámetros (ver Ecs. (3.4.5a) y (3.4.5b)). El primer término que permanece, invariante ante el grupo de simetría, es el germen de la función. Esto es, podemos concluir que el germen de la superficie de energía resulta la cuártica: $(x^2 + y^2)^2$. Por la expresión calculada para $J(4)$, notamos que el germen es efectivamente invariante ante el grupo C_{3v} . Así, no requerimos de una transformación que preserve la simetría y podremos simplemente despreciar los términos de grado más alto de la serie de Taylor.

En conclusión, en ausencia de toda simetría, cuando un punto crítico degenera es posible aproximar la función alrededor de ese punto por alguna de las catástrofes elementales si el número de

EL MODELO DE BOSONES INTERACTUANTES

Tabla 2. Catástrofes elementales de Thom

Nombre	k	Germen	Perturbación
A_2	1	x^3	a_1x
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
A_4	3	x^5	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
A_6	5	x^7	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
D_{-4}	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_{+4}	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_5	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
D_{-6}	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
D_{+6}	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

parámetros esenciales resulta menor o igual a cinco. En la Tabla 2 sobre las catástrofes elementales, tenemos que para dos variables se requieren tres o más parámetros asociados con alguna forma canónica. De este modo, no será posible asignar una catástrofe elemental en nuestro problema si el punto crítico en el origen degenera, ya que existen solamente los dos parámetros: r_1 y r_2 .

Hemos visto que lo anterior se debe a las restricciones impuestas por la simetría C_{3v} . Sin embargo, extendiendo el procedimiento, hemos podido asignar una forma canónica, determinando el germen y sus términos de desarrollo universal alrededor de la rama básica cuando esta degenera. La bifurcación de la rama básica da lugar a otros puntos críticos los cuales tendrán por lo general una reducción de simetría. En lo que sigue, daremos la solución de todos los puntos críticos en términos de los parámetros r_1 y r_2 . Posteriormente, analizaremos la degeneración de cada uno de estos puntos críticos construyendo los conjuntos de bifurcación correspondientes a cada uno de ellos.

Solución de los puntos críticos en términos de los parámetros r_1 y r_2

Para encontrar los puntos críticos de la superficie de energía en la Ec. (3.4.8), derivamos ésta parcialmente en la variable β y así tenemos una ecuación de la forma

$$\beta(r_2\beta^3 + 4\beta^2 - 3r_2\beta + 4r_1) = 0. \quad (3.4.12)$$

El cambio de un núcleo prolato a uno oblató, i. e., el cambio de $\gamma = 0$ a $\gamma = \pi/3$ es equivalente al cambio de r_2 a $-r_2$ (ver Ec. (3.4.8)). Equivalentemente, se pueden asociar núcleos prolotos con las raíces positivas de la Ec. (3.4.12) y las negativas con núcleos oblatos. Esto también se puede ver si consideramos el cálculo de los puntos críticos en coordenadas cartesianas. Salvo repeticiones simétricas, como ya sabemos, la totalidad de los puntos críticos se encuentra sobre el eje- X ; los prolotos sobre los valores positivos y los oblatos sobre los negativos. El cálculo de la primera derivada parcial respecto a la variable x , tomando el valor $y = 0$ para la variable cartesiana, resulta en una ecuación idéntica a la Ec. (3.4.12) si se substituye β por x . Con lo anterior en mente, de una manera elemental, revisamos todos los puntos críticos dentro de los siguientes casos:

i) $r_1 = 0, r_2 = 0$.

En este caso la Ec. (3.4.12) trivialmente se vuelve: $\beta^3 = 0$; con $\beta_c = 0$ como la única raíz. Evidentemente que la degeneración del punto crítico es triple. Esta es la máxima degeneración que presentan los puntos críticos, por esa razón el germen es β^4 , en la aproximación del IBM - 1 que estamos tratando, en la cual se incluyen interacciones hasta de dos cuerpos.

ii) $r_1 = 0, r_2 \neq 0$.

En este caso la Ec. (3.4.12) se vuelve:

$$\beta^2 (r_2 \beta^2 + 4\beta - 3r_2) = 0. \quad (3.4.13)$$

La raíz $\beta_c = 0$ es doblemente degenerada para todos los posibles valores de los parámetros. Las otras dos raíces, para r_2 real, son

$$\beta_{r_2}^{\pm} = \frac{1}{r_2} (-2 \pm \sqrt{4 + 3r_2^2}), \quad (3.4.14)$$

donde $\beta_{r_2}^+$ da lugar a un mínimo de la SE , mientras que $\beta_{r_2}^-$ corresponde a un máximo.

iii) $r_1 \neq 0, r_2 = 0$.

Este es claramente el caso γ -inestable, ya que tenemos $a_2 = 0$, desapareciendo toda dependencia en la variable γ . La Ec. (3.4.12) resulta

$$4\beta(\beta^2 + r_1) = 0, \quad (3.4.15)$$

con las raíces $\beta_c = 0$ y

$$\beta_{r_1}^{\pm} = \pm \sqrt{-r_1}, \quad (3.4.16)$$

estas últimas dan lugar a mínimos en la superficie de energía. Notese que si $r_1 > 0$ se tiene solamente la raíz real $\beta_c = 0$, correspondiendo a un mínimo, mientras que si $r_1 < 0$, se tienen tres raíces reales y $\beta_c = 0$ da lugar a un máximo de la SE .

iv) $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$.

En este caso $\beta_c = 0$ es también una raíz. Las otras raíces se obtienen del factor entre paréntesis en la Ec. (3.4.12):

$$(r_2 \beta^3 + 4\beta^2 - 3r_2 \beta + 4r_1) = 0. \quad (3.4.17)$$

Mediante el siguiente cambio de variable

$$y = \beta + \frac{4}{3r_2}$$

transformamos la Ec. (3.4.17) a la ecuación reducida

$$y^3 + ay + b = 0, \quad (3.4.18a)$$

donde

$$a = -3 - \frac{16}{3r_2^2}, \quad (3.4.18b)$$

$$b = 4 \left(\frac{r_1 + 1}{r_2} + \frac{32}{27r_2^3} \right). \quad (3.4.18c)$$

La naturaleza de las raíces depende del valor numérico del discriminante

$$D = 4a^3 + 27b^2. \quad (3.4.19)$$

Obviamente, \mathcal{D} será positiva, cero ó negativa. Supongamos primero que $\mathcal{D} > 0$; entonces la ecuación reducida, Ec. (3.4.18) tiene una raíz real:

$$y_1 = \mathcal{A}^{1/3} + \mathcal{B}^{1/3}, \quad (3.4.20)$$

donde $\mathcal{A}^{1/3}$ significa la raíz cúbica real de

$$\mathcal{A} = -b/2 + \sqrt{\mathcal{D}/108}, \quad (3.4.21)$$

y asimismo $\mathcal{B}^{1/3}$ significa la raíz cúbica real de

$$\mathcal{B} = -b/2 - \sqrt{\mathcal{D}/108}. \quad (3.4.22)$$

Las otras dos raíces son complejas y conjugadas una de la otra.

Supongamos ahora que $\mathcal{D} = 0$; entonces

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = -b/2, \quad (3.4.23)$$

y las raíces de la ecuación reducida son

$$y_1 = 2 \sqrt[3]{-b/2}, \quad y_2 = y_3 = \sqrt[3]{b/2}. \quad (3.4.24)$$

Así, y_2 y y_3 son raíces doblemente degeneradas, a menos que $b = 0$, lo cual implicaría que $a = 0$, y entonces todas las raíces en la ecuación reducida Ec.(3.4.18a) serían iguales a cero. Sin embargo, el valor $a = 0$ implica $r_2 = \pm i4/3$. Así, físicamente no se realiza la triple degeneración en este caso.

Finalmente, sea $\mathcal{D} < 0$ (llamado *caso irreducible*). Aunque en este caso todas las raíces de la ecuación reducida resultan reales, se expresan por medio de raíces cúbicas de números imaginarios. A pesar de las dificultades algebraicas inherentes en el caso irreducible, es posible presentar las raíces en una forma adecuada al cálculo numérico:

$$y_1 = 2 \sqrt{-a/3} \cos(\phi/3), \quad (3.4.25a)$$

$$y_2 = -2 \sqrt{-a/3} \cos\left(\frac{\pi - \phi}{3}\right), \quad (3.4.25b)$$

$$y_3 = -2 \sqrt{-a/3} \cos\left(\frac{\pi + \phi}{3}\right), \quad (3.4.25c)$$

donde ϕ esta determinada por

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{27} b}{(2a \sqrt{-a})}, \quad (3.4.26)$$

ó

$$\tan \phi = \frac{-\sqrt{-\mathcal{D}}}{\sqrt{27} b}. \quad (3.4.27)$$

3.5 CONSTRUCCIÓN DE LA SEPARATRIZ

La *Separatriz B* en el modelo *IBM - 1*, está definida por curvas en el espacio de parámetros (r_2, r_1) . Estas curvas resultan de la unión de los conjuntos de bifurcación asociados a los puntos críticos analizados anteriormente. En lo que sigue, construiremos uno a uno dichos conjuntos de bifurcación.

i) *Conjunto de bifurcación: recta $r_1 = 0$.*

El valor de la variable $\beta = 0$, de la superficie de energía en coordenadas polares, no tiene un valor bien definido de la variable γ . Los núcleos esféricos, aquellos con $\beta = 0$, corresponden claramente al punto $x = 0, y = 0$ en las coordenadas cartesianas. Si $x \neq 0$, el valor $y = 0$ corresponde al caso prolato (con $\gamma = 0$) para $x > 0$ y oblató (con $\gamma = \pi$) para $x < 0$. Por esta razón resulta conveniente expresar las variables de forma en coordenadas cartesianas y así asociar la rama básica al origen cartesiano $(x, y) = (0, 0)$.

La superficie de energía de la Ec. (3.4.8) en coordenadas cartesianas resulta

$$\varepsilon(x, y) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} \left((x^2 + y^2)^2 + r_1(x^2 + y^2)(2 + x^2 + y^2) - r_2(x^3 - 3xy^2) \right). \quad (3.5.1)$$

Evaluada sobre la rama básica, la matriz de estabilidad Hessiana $\mathcal{H}_{x,y}$ resulta igual a:

$$\begin{pmatrix} 4r_1 & 0 \\ 0 & 4r_1 \end{pmatrix}. \quad (3.5.2)$$

Por lo tanto la rama básica degenera solamente si el parámetro $r_1 = 0$; esto es, se bifurca al cruzar el eje- r_2 del espacio de parámetros. Vemos que esta rama básica de la superficie de energía es estable siempre que $r_1 \neq 0$, pero degenera simultáneamente en ambas variables a todo lo largo del eje- r_2 , ya que se anulan los dos eigenvalores en la Ec. (3.5.2). Las Catástrofes elementales con dos variables degeneradas se desarrollan con al menos tres parámetros; en efecto, ya hemos visto que en este caso tenemos una catástrofe no-elemental con simetría.

A continuación estudiaremos el comportamiento de la rama básica ($\beta_0 = 0$) cuando nos movemos en el espacio de parámetros. Inicialmente recorremos la recta $r_2 = 0$, en estas condiciones, la superficie de energía es invariante ante rotaciones en el plano, i.e., ante el grupo *SO*(2), ya que no existe la dependencia en la variable γ , como puede verse en la Ec. (3.4.8). En las condiciones mencionadas arriba, la superficie de energía del núcleo sufre una transición de fase de forma: Para $r_1 > 0$, la superficie de energía siempre tiene un mínimo en el origen. Cuando $r_1 < 0$, la superficie tiene un máximo en el origen y existen además otros valores críticos: $(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-r_1}, \gamma_0)$, con γ_0 arbitraria. Este corresponde a un mínimo no local de la superficie de energía (caso γ -inestable). Este mínimo no-local de la superficie de energía es invariante ante el grupo de reflexiones en los tres ejes de simetría, Ec. (3.4.10). Esta reducción de simetría al pasar de un mínimo local en el origen, a otro no-local en $(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-r_1}, \gamma_0)$, representa un *rompimiento espontáneo de simetría*. La transición de fase de forma al cruzar el conjunto de bifurcación $r_1 = 0$, en este caso corresponde a una transición de segundo orden (como demostraremos más adelante) y el núcleo pasará, a través de la rama básica, de ser esférico a γ -inestable.

ii) *Conjunto de bifurcación: recta $r_2 = 0$ con $r_1 \leq 0$.*

Como hemos visto, el punto crítico $(\beta_c, \gamma_c) = (\sqrt{-r_1}, \gamma_0)$ es una de las ramas primarias que se bifurcan a partir de la rama básica al cruzar el origen a lo largo del eje- r_1 . Evaluada en este punto crítico, la matriz Hessiana $\mathcal{H}_{x,y}$ resulta singular:

$$\begin{pmatrix} \frac{8r_1(r_1-1)}{(1-r_1)^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5.3)$$

lo cual corresponde a una degeneración en la variable γ . Por lo tanto, el semieje- r_1 negativo es un conjunto de bifurcación para la variable γ , esto es al cruzar este semieje ocurre una transición de fase de forma, que corresponde a una transición de forma de prolato, en puntos $r_2 > 0$, a oblato en los puntos $r_2 < 0$.

iii) *Conjuntos de bifurcación: curvas r_{11} y r_{12} .*

En el caso de los restantes puntos críticos, el criterio de la degeneración del Hessiano resulta en un problema mayor de álgebra, el cual involucra resolver simultáneamente ecuaciones de tercero y quinto grado. El cálculo del conjunto de bifurcación resulta más simple utilizando la condición equivalente de singularidad del mapeo desde la variedad de puntos críticos hasta el espacio de parámetros. En el lenguaje de la Teoría de las Catástrofes, una Catástrofe se asocia con las singularidades en el mapeo desde la variedad de puntos críticos hasta el espacio de los parámetros

$$(\mathbf{x}_{cr}; \mathbf{C}_k) \rightarrow \mathbf{C}_k. \quad (3.5.4)$$

Al variar los parámetros \mathbf{C}_k , los puntos críticos \mathbf{x}_{cr} cambiarán. Así, en virtud de este cambio, cuando dos o más puntos críticos coinciden el mapeo se hace singular. En estas condiciones el Hessiano se anula al ser evaluado sobre los puntos críticos. Las singularidades del mapeo descrito, bajo las hipótesis del teorema de Thom, resultan estructuralmente estables y se dividen en clases de equivalencia; estas clases de equivalencia son llamadas las Catástrofes Elementales [Gilmore. (1981), Poston y Stuart (1978)] (ver Tabla 2).

Como sabemos, todos los puntos críticos se encuentran sobre el eje- X cartesiano, con repeticiones simétricas que ya hemos analizado. Así, nos limitamos a los puntos $\mathbf{x}_{cr} = (x_{cr}, 0)$. Para encontrar los puntos críticos de la superficie de energía en la Ec. (3.5.1), derivamos ésta parcialmente en la variable x y así tenemos una ecuación equivalente a la Ec. (3.4.12) para β ; donde las x_{cr} satisfacen la ecuación:

$$x(r_2 x^3 + 4x^2 - 3r_2 x + 4r_1) = 0. \quad (3.5.5)$$

Como los conjuntos de bifurcación asociados a los puntos críticos $x = 0$ ya se han obtenido, nos restringimos a $x \neq 0$. En este caso definiendo $x_{cr} \equiv \lambda_1$, la Ec. (3.5.5) se vuelve:

$$r_2 \lambda_1^3 + 4\lambda_1^2 - 3r_2 \lambda_1 + 4r_1 = 0.$$

Esta relación permite determinar el mapeo

$$(\mathbf{x}_{cr}, r_2, r_1) \rightarrow \left(\lambda_2, -\lambda_1 \left[\frac{\lambda_2}{4} (\lambda_1^2 - 3) + \lambda_1 \right] \right), \quad (3.5.6)$$

que explícitamente toma la forma:

$$r_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2, \quad (3.5.7a)$$

$$r_1(\lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2(\lambda_1^2 - 3)}{4} \right). \quad (3.5.7b)$$

Este mapeo es singular si el determinante Jacobiano de la transformación en las Ecs.(3.5.7):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial r_2}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial r_1}{\partial \lambda_2} \end{vmatrix} = 2\lambda_1 - \frac{3}{4}\lambda_2(1 - \lambda_1^2), \quad (3.5.8)$$

se anula. Esto da lugar a la condición:

$$\lambda_2 = -\frac{8\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)}. \quad (3.5.9)$$

En este caso, si sustituimos (3.5.9) en las Ecs. (3.5.7), podemos obtener una ecuación paramétrica del conjunto de bifurcación en términos del parámetro λ_1 :

$$r_1 = \frac{-\lambda_1^2(\lambda_1^2 + 3)}{3(\lambda_1^2 - 1)}, \quad r_2 = -\frac{8\lambda_1}{3(\lambda_1^2 - 1)}. \quad (3.5.10)$$

Eliminando el parámetro λ_1 en las Ecs. (3.5.10), encontramos la función del conjunto de bifurcación en el plano (r_2, r_1)

$$r_{11}(r_2) = -\frac{(9r_2^2 + 16)^{3/2}}{54r_2^2} - \frac{32}{27r_2^2} - 1, \quad (3.5.11a)$$

$$r_{12}(r_2) = \frac{(9r_2^2 + 16)^{3/2}}{54r_2^2} - \frac{32}{27r_2^2} - 1. \quad (3.5.11b)$$

Como demostramos en la parte final del análisis de este caso, la deformación β resultará ser la degenerada, mientras que la γ se mantiene no-degenerada. Los valores críticos de la variable β se obtienen de los valores x_{cr} cartesianos, que son soluciones de (3.5.5) sobre el conjunto de bifurcación r_{11} de la Ec.(3.5.11a), esto es se reemplaza $r_1 \rightarrow r_{11}(r_2)$ teniendo en cuenta que el discriminante $D = 0$ y entonces usando las ecuaciones (3.4.23) y (3.4.24)

$$x_{11} = -\frac{4}{3r_2} + \frac{2\sqrt{(9r_2^2 + 16)}}{3r_2}, \quad (3.5.12a)$$

$$x_{12} = -\frac{4}{3r_2} - \frac{\sqrt{(9r_2^2 + 16)}}{3r_2}. \quad (3.5.12b)$$

donde el punto crítico x_{12} es doblemente degenerado. Análogamente sobre el conjunto de bifurcación r_{12} de la Ec.(3.5.11b), se obtienen los valores críticos de la variable β

$$x_{21} = -\frac{4}{3r_2} - \frac{2\sqrt{(9r_2^2 + 16)}}{3r_2}, \quad (3.5.13a)$$

$$x_{22} = -\frac{4}{3r_2} + \frac{\sqrt{(9r_2^2 + 16)}}{3r_2}, \quad (3.5.13b)$$

donde nuevamente es el punto x_{22} el que presenta degeneración doble.

Los valores x_{11} y x_{21} no degeneran, como lo demuestra un cálculo directo evaluando los eigenvalores del Hessiano sobre estos puntos. En cambio el punto crítico x_{12} degenera, ya que la matriz Hessiana resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{r_{11}} \end{pmatrix}, \quad (3.5.14)$$

donde

$$\Lambda_{r_{11}} = \frac{-486r_2^4(4 + \sqrt{9r_2^2 + 16})^2\sqrt{9r_2^2 + 16}}{\{9r_2^2 + (4 + \sqrt{9r_2^2 + 16})^2\}^3}. \quad (3.5.15)$$

El punto crítico x_{22} también degenera, ya que la matriz Hessiana resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{r_{12}} \end{pmatrix}, \quad (3.5.16)$$

donde

$$\Lambda_{r_{12}} = \frac{486r_2^4 (4 - \sqrt{9r_2^2 + 16})^2 \sqrt{9r_2^2 + 16}}{\{9r_2^2 + (4 - \sqrt{9r_2^2 + 16})^2\}^3} \quad (3.5.17)$$

Transformando los parámetros físicos r_1 y r_2 a los matemáticos a y b , definidos anteriormente en las ecuaciones:

$$a = -3 - \frac{16}{3r_2^2}, \quad b = 4 \left(\frac{r_1 + 1}{r_2} + \frac{32}{27r_2^3} \right), \quad (3.4.18b, c)$$

la función del conjunto de bifurcación dado en las Ecs. (3.5.11) toma la forma de una cúspide; i.e., en estos parámetros, las Ecs. (3.5.11) cumplen con

$$\left(\frac{a}{3} \right)^3 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 = 0. \quad (3.5.18)$$

Para demostrar que en efecto se obtiene la catástrofe de la Cúspide en la variable β , se tendría que efectuar la determinación y desarrollo en serie de Taylor de la Superficie de Energía alrededor de estos puntos críticos degenerados, aunque a esta altura de la discusión podemos considerar este punto como un mero formalismo y no lo llevaremos a cabo. En la Fig. (5) se ilustran con líneas continuas los conjuntos de bifurcación B_1 : eje- r_2 , semieje- r_1 negativo y las curvas r_{11} y r_{12} .

Para terminar con la construcción de la Separatriz nos dedicaremos al estudio de los conjuntos de Maxwell.

Conjuntos de Maxwell.

Sobre los conjuntos de Maxwell la Superficie de Energía toma el mismo valor en dos o más puntos mínimos ó máximos. En la descripción de sistemas físicos cuyo estado es gobernado por el mínimo global del potencial, al cruzar los conjuntos de Maxwell habrá un cambio cualitativo del sistema debido a que la estructura del mínimo global cambia, es decir se asocia a un punto crítico diferente.

En la descripción de la forma de los núcleos, los conjuntos de Maxwell que nos interesan son aquellos sobre los cuales degeneran los valores de los mínimos de la superficie de energía. Sin embargo, al considerar la estabilidad de los núcleos ante fisión, veremos que también resultan de importancia los conjuntos de Maxwell donde degeneran los valores de los máximos de la superficie de energía. En el caso del IBM-1, existen tres conjuntos de Maxwell; uno está asociado al caso γ -inestable y otros dos a la rama básica $\beta_c = 0$.

Para la rama básica, $\beta_c = 0$, la superficie de energía vale cero. Entonces para encontrar los conjuntos de Maxwell de (3.4.8), se utiliza la ecuación $E(\beta \neq 0, \gamma_c) = 0$; con $\gamma_c = 0$ ó $\gamma_c = \pi/3$; la cual, después de simplificarla se reduce a

$$(r_1 + 1)\beta^2 \mp r_2\beta + 2r_1 = 0, \quad (3.5.19)$$

Esta ecuación nos da dos intersecciones de la superficie de energía con el eje- β y entre ellas siempre se encuentra un punto externo de la energía. Por lo tanto, cuando las soluciones de (3.5.19) son únicas encontramos $E(\beta_c \neq 0, \gamma_c) = 0$, i.e., los conjuntos de Maxwell asociados a la rama básica. Esto sucedrá cuando degeneran las soluciones de la Ec.(3.5.19) :

$$\beta = \frac{r_2 \pm \sqrt{r_2^2 - 8r_1(r_1 + 1)}}{2(r_1 + 1)}, \quad (3.5.20)$$

esto es, si se anula el el término de la raíz

$$r_2^2 - 8r_1(r_1 + 1) = 0. \quad (3.5.21)$$

Despejando r_1 como función de r_2 en esta última ecuación encontramos los conjuntos de Maxwell que denotaremos como r_{13}^\pm

$$r_{13}^\pm(r_2) = \frac{\pm\sqrt{1+r_2^2/2}-1}{2} \quad (3.5.22)$$

El valor $r_{13}^+(r_2)$ corresponde al conjunto de Maxwell para la rama básica $\beta_c = 0$, donde degenera el valor de la energía cuando esta es mínima. El conjunto r_{13}^- corresponde a la degeneración de la energía también asociada a la rama básica, pero para un máximo. El valor crítico de β correspondiente a $r_{13}^\pm(r_2)$ se calcula directamente de (3.5.20)

$$\beta_{13}^\pm = \frac{r_2}{\pm\sqrt{1+r_2^2/2}+1} \quad (3.5.23)$$

los valores positivos de β_{13}^\pm corresponden a los núcleos prolatos y los negativos a los oblatos.

El tercer conjunto de Maxwell que nos interesa está asociado al límite γ -inestable, es decir el conjunto de parámetros donde la variable γ degenera. Este límite resulta, como sabemos, cuando se tiene el valor del parámetro $r_2 = 0$, dando como resultado una superficie de energía axialmente simétrica con un mínimo no-local en $\beta_c = \sqrt{-r_1}$ y cualquier valor de la variable γ . Obviamente para todos los valores de γ el valor de la energía es degenerado, siendo así el *semieje*- r_1 negativo otro de los conjuntos de Maxwell.

En la Figura 5 se grafican con líneas punteadas los conjuntos de Maxwell. El conjunto por encima del *eje*- r_2 corresponde a r_{13}^+ ; los conjuntos por debajo del *eje*- r_2 están asociados con el *semieje*- r_1 negativo y r_{13}^- .

La *Separatriz* de la superficie de energía del modelo IBM-1, está constituida por los conjuntos de Maxwell y de bifurcación sobre el espacio de parámetros (r_2, r_1) .

Tabla 3. Puntos críticos en la variable β asociados a la *Separatriz* del IBM.

	β_1	β_2	β_3	β_4
r_{12}	0	β_{22}	β_{22}	β_{21}
r_{13}^+	0	β_{13}^+	β_M^+	β_M^-
<i>eje</i> - r_2	0	β_{13}^+	$\beta_{r_2}^+$	$\beta_{r_2}^-$
r_{13}^-	0	β_{13}^-	β_m^+	β_m^-
r_{11}	0	β_{12}	β_{12}	β_{11}
<i>eje</i> - r_1 ($r_1 < 0$)	0	$\beta_{r_1}^+$	$\beta_{r_1}^-$	—

En la tabla 3 se muestran los conjuntos de bifurcación y de Maxwell que forman la *Separatriz* del sistema de bosones interactuantes, junto con sus correspondientes puntos críticos.

Para el conjunto r_{12} se tienen superficies de energía que presentan un mínimo en $\beta = 0$, un máximo en $\beta = \beta_{21}$, y un punto crítico degenerado en $\beta = \beta_{22}$. Notar que $\beta_{21} = x_{21}$ y $\beta_{22} = x_{22}$ fueron definidos en las ecuaciones (3.5.13).

Para el conjunto de Maxwell r_{13}^+ la superficie de energía presenta dos mínimos de la misma profundidad en $\beta = 0$ y $\beta = \beta_{13}^+$, esta última definida en la Ec. (3.5.23). También tiene dos máximos que están denotados por β_M^\pm .

Para el *eje*- r_2 degenera la rama básica $\beta = 0$, y la superficie de energía tiene un mínimo absoluto en $\beta = \beta_{r_2}^+$ y un máximo en $\beta = \beta_{r_2}^-$, puntos críticos definidos en las ecuaciones (3.4.14).

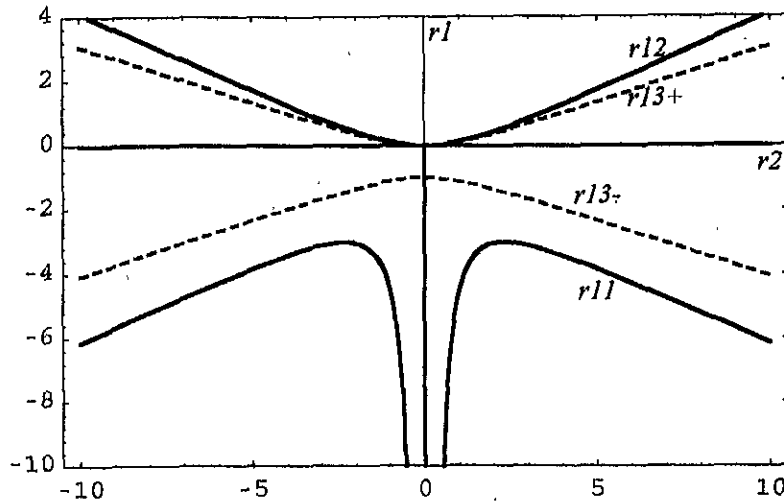


Figura 5. Separatriz del Modelo de Bosones Interactuantes.

En el conjunto de Maxwell r_{13}^- la superficie de energía tiene dos máximos de la misma altura en $\beta = 0$ y $\beta = \beta_{13}^-$, esta última definida en la Ec. (3.5.23). La superficie de energía también exhibe dos mínimos que están denotados por β_m^\pm . Uno de ellos es un mínimo absoluto y el otro es un punto de silla de la SE, esto es resulta un máximo en la dirección γ .

En el conjunto de bifurcación r_{11} , la superficie de energía presenta un máximo en $\beta = 0$ y un mínimo en β_{11} . En este conjunto se tiene un punto crítico doblemente degenerado en $\beta = \beta_{12}$, definido en la Ec. (3.5.12)

En los conjuntos anteriores es conveniente recordar que valores negativos en la variable β están asociados a puntos sobre el eje $\gamma = \pi/3$ a una distancia igual al valor absoluto de β .

El eje- r_1 ($r_1 < 0$) es un conjunto de Maxwell en la variable β , ya que la superficie de energía tiene dos mínimos de la misma profundidad en $\beta = \beta_{r_1}^\pm$, definidos en (3.4.16). En $\beta = 0$ la superficie asociada presenta un máximo.

Con respecto a la variable γ , el eje- r_1 ($r_1 < 0$) es un conjunto de bifurcación infinitamente degenerado, ya que está representando núcleos γ -inestable.

Superficies de Energía Típicas

Las formas típicas de las superficies de energía son estables dentro de las seis regiones divididas por la Separatriz. El aspecto cualitativo de las superficies de energía dentro de cada una de estas seis regiones puede determinarse graficando un corte, tomando el valor constante $y = 0$, de $\varepsilon(x, y)$ definida en (3.5.1). Los resultados se presentan en las Figs. 6 a 9 en todas las regiones al moverse sobre la recta $r_2 = 4\sqrt{2}/3$ y en la Fig. 10 se ilustran las energías sobre la recta $r_2 = 0$, en el espacio de parámetros. Las formas posibles de las superficies de energía en las regiones con $r_2 = -4\sqrt{2}/3$ se obtienen de las anteriores a través de una reflexión en el eje $\varepsilon(x, 0)$.

En cambio sobre los conjuntos de puntos que constituyen la Separatriz, las superficies de energía presentan inestabilidades, esto es, al variar los parámetros, aun en forma infinitesimal, se observa un cambio cualitativo en la superficie de energía. En las Figs. 6 a 10 se ilustra el comportamiento de las superficies de energía sobre los conjuntos de bifurcación y de Maxwell que constituyen la Separa-

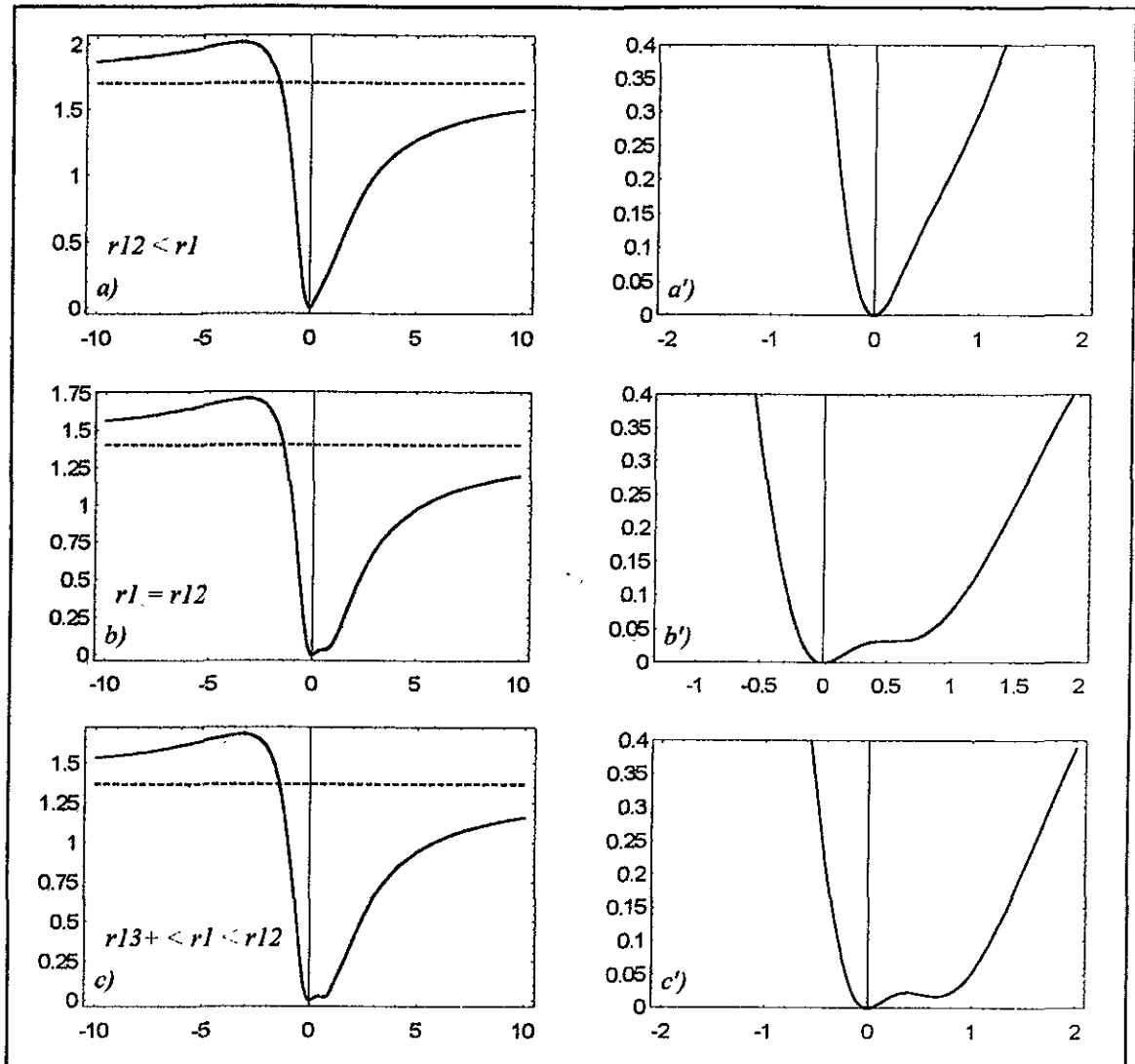


Figura 6. Gráficas $\epsilon(x,0)$ vs x de las superficies de energía para la region por encima del conjunto de Maxwell, esto es $r_1 > r_{13}^+$. En a) presentamos la superficie de energía con $r_1 > r_{12}$. En b) se muestran la superficie de energía sobre el conjunto de bifurcación r_{12} . En c) se ilustra el comportamiento de la superficie de energía entre los conjuntos de bifurcación r_{12} y r_{13}^+ .

triz. Es importante señalar que todas las superficies de energía tienen el siguiente comportamiento asintótico: Cuando $\beta \gg 1$ entonces $\epsilon(\beta, \gamma) = 1 + r_1$. Es importante señalar que en todas las figuras se muestra con una línea punteada el valor asintótico de la energía y en cada caso se muestra en el lado derecho un acercamiento en el origen.

Transiciones de fase de forma

En esta sección se realizará un análisis de las transiciones de forma de los núcleos. El procedimiento de análisis para cada uno de los conjuntos de bifurcación y de Maxwelles el siguiente:

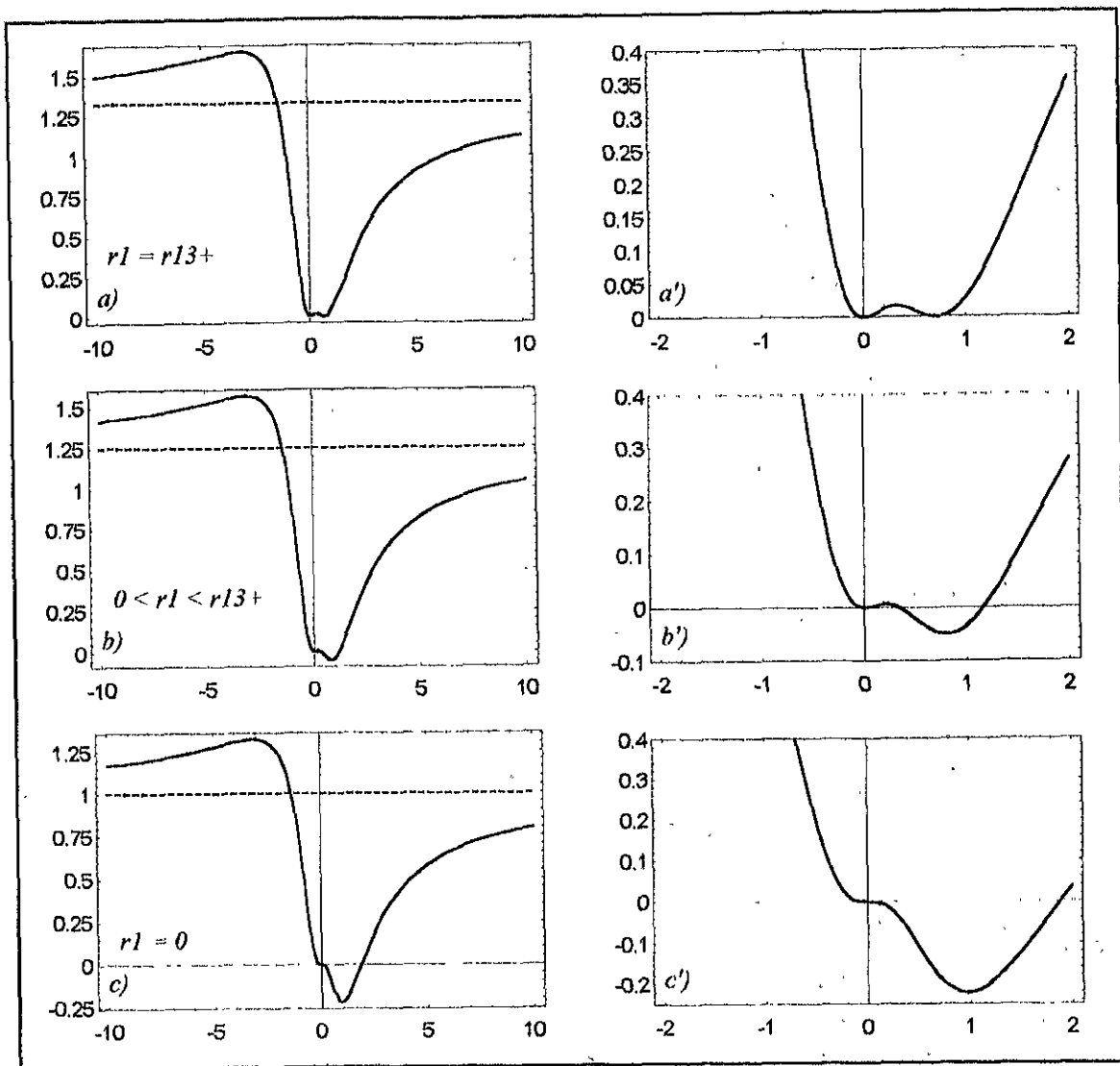


Figura 7. Gráficas $\varepsilon(x,0)$ vs x de las superficies de energía para la región: $0 \leq r_1 \leq r_{13}^+$. En a) presentamos la superficie de energía sobre r_{13}^+ . En b) se muestra la superficie de energía entre los conjuntos de bifurcación $r_1 = 0$ y r_{13}^+ . En c) se ilustra el comportamiento de la superficie de energía en $r_1 = 0$.

1. Se considera la superficie de energía en cada una de las regiones separadas por el conjunto de bifurcación o de Maxwell.
2. Se identifica la pareja de puntos críticos sobre el conjunto de bifurcación o de Maxwell que corresponden a mínimos de la superficie de energía $E(\beta_m, \gamma_m)$ en las regiones adyacentes.
3. Finalmente con el propósito de establecer el orden de la transición de fase, estudiamos el comportamiento de la superficie de energía evaluada en esta pareja de puntos críticos y sus derivadas con respecto a s , $\frac{\partial^n E(\beta_m, \gamma_m)}{\partial s^n}$.

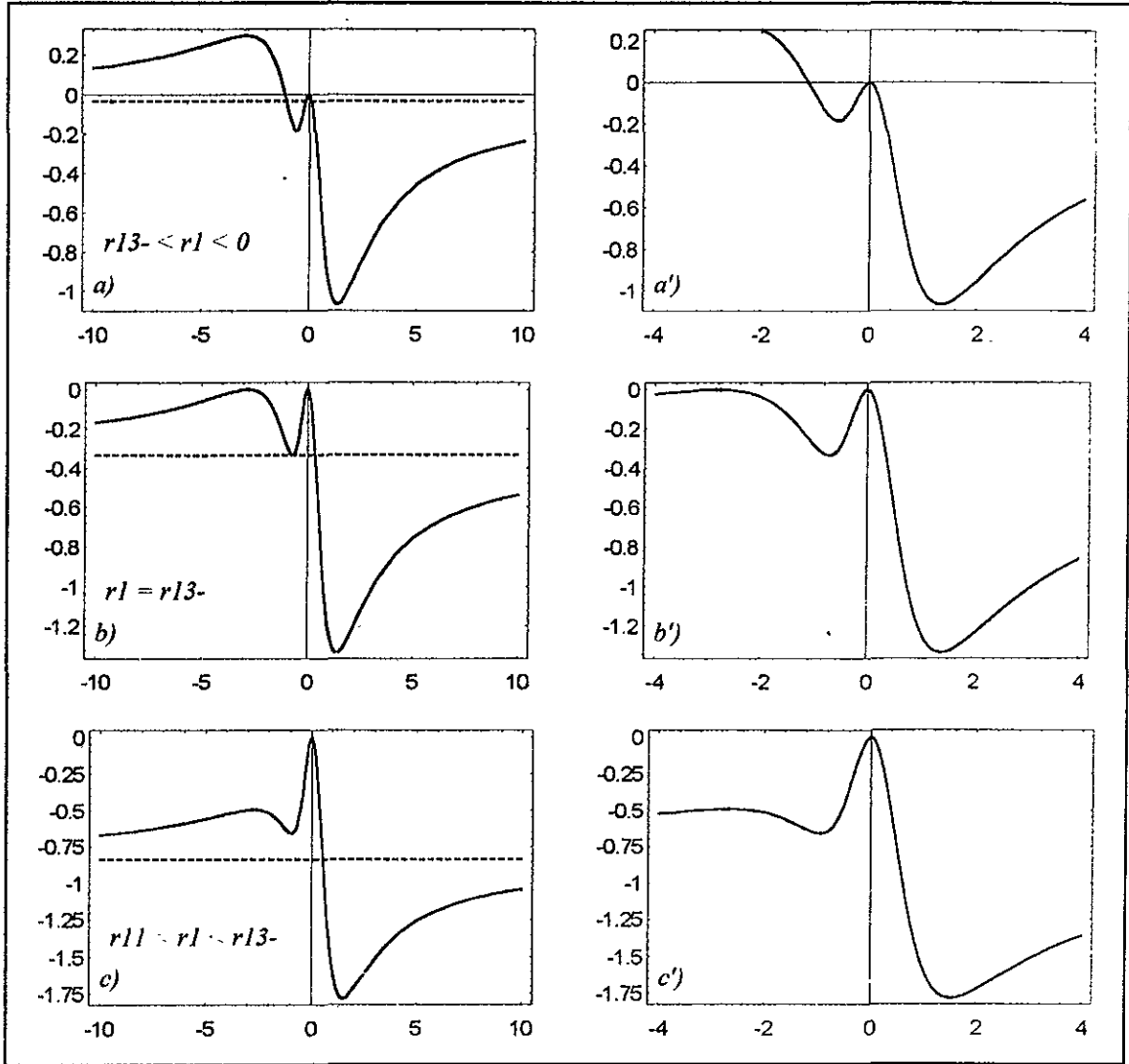


Figura 8. Gráficas $\epsilon(x,0)$ vs x de las superficies de energía para la región: $r_{11} \leq r_1 \leq 0$. En a) presentamos la superficie de energía entre los conjuntos de bifurcación $r_1 = 0$ y r_{13}^- . En b) se muestran la superficie de energía sobre r_{13}^- . En c) se ilustra el comportamiento de la superficie de energía entre los conjuntos r_{11} y r_{13}^- .

La evolución de la variable s describe una curva en el espacio de parámetros: $(r_2(s), r_1(s))$. Las transiciones de fase se clasifican por su *orden-n*. La transición de fase sucede cuando el estado del sistema descrito por un mínimo de la rama p se desplaza a otra rama q al cruzar un conjunto de bifurcación para el valor s_0 .

La transición es de *orden-n* si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^i E^{(p)}(s)}{\partial s^i} \Big|_{s_0 - \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^i E^{(q)}(s)}{\partial s^i} \Big|_{s_0 + \epsilon}, \quad (3.5.24)$$

para $i = 0, 1, 2, 3, \dots, (n - 1)$, pero no se cumple para $i = n$.

Sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ el valor de la energía mínima degenera, ya que, como sabemos, se debe cumplir

$$\epsilon(\beta_p = 0) = 0, \quad \epsilon(\beta_{13}^+) = 0, \quad (3.5.31)$$

siendo continuo el paso de una rama a la otra al pasar a través de r_{13}^+ ; sin embargo, como demostraremos a continuación, existe una discontinuidad en la primera derivada, *i.e.*,

$$\left. \frac{\partial \epsilon(\beta_{13}^+)}{\partial s} \right|_{r_{13}} \neq 0. \quad (3.5.32)$$

Por simplicidad, supongamos que pasamos a través del conjunto de Maxwell r_{13}^+ recorriendo el espacio de parámetros sobre la recta

$$r_1 = (\tan \theta)r_2 + r_{10}, \quad (3.5.33)$$

entonces en (3.5.24) tomamos $s = r_2$ y encontramos el resultado escrito en términos de β_{13} en (3.5.23):

$$\left. \frac{\partial \epsilon(\beta_{13}^+)}{\partial r_2} \right|_{r_{13}} = \frac{\beta_{13}^{+2}}{(1 + \beta_{13}^{+2})^2} [(2 + \beta_{13}^{+2}) \tan \theta - \beta_{13}^+]. \quad (3.5.34)$$

Además, sobre la misma recta en (3.5.32), obviamente tenemos que

$$\left. \frac{\partial \epsilon(\beta_c = 0)}{\partial r_2} \right|_{r_{13}} = 0. \quad (3.5.35)$$

Esto prueba que la transición es de primer orden, existiendo una discontinuidad en la primera derivada la cual depende de la posición, definida por r_2 y de la dirección, definida por el ángulo θ de la pendiente con la cual se cruza este conjunto de Maxwell.

Volveremos a calcular la discontinuidad de la primera derivada, pero en términos del número de bosones N , como un nuevo parámetro. Este parámetro lo hemos elegido debido a que, más adelante, daremos una interpretación física de esta transición de fase, en términos de las energías de separación de dos neutrones o de dos protones, para cadenas de isótopos e isótonos, respectivamente.

Aunque en principio los términos de interacción entre bosones del hamiltoniano del núcleo podrían depender explícitamente del número N de bosones, como se menciona en la sección 1.7, ha sido posible utilizar varios hamiltonianos efectivos dentro del modelo *IBM*, para describir los espectros de energía y las probabilidades de transición de cadenas de isótopos e isótonos [Castanos, O., et al., (1982); Gómez, A., Castanos, O., Frank, A., (1995)]. Estos hamiltonianos efectivos representan un ajuste simultáneo dentro de una misma cadena de núcleos, con la consecuencia de que los parámetros promedian los efectos de muchos cuerpos, y así, dentro de una misma cadena, solamente varía el número de bosones, esto es, para una determinada cadena, podemos escribir los parámetros independientes en la Ec. (3.4.7) como función del número de bosones exclusivamente

$$r_1 = r_1(N), \quad r_2 = r_2(N). \quad (3.5.36)$$

Calculamos la transición de fase sobre el conjunto de Maxwell variando ahora el parámetro $s = N$. Naturalmente se siguen cumpliendo la Ec. (3.5.31), pero ahora la ecuación (3.5.35) se vuelve

$$\left. \frac{\partial \epsilon(\beta_{13}^+)}{\partial N} \right|_{r_{13}} = \frac{\beta_{13}^{+2}}{(1 + \beta_{13}^{+2})^2} \left[(2 + \beta_{13}^{+2}) \frac{\partial r_1}{\partial N} - \beta_{13}^+ \frac{\partial r_2}{\partial N} \right]. \quad (3.5.37)$$

Que en general es distinta de cero, y nos será de gran utilidad, como se adelantó, en la sección 1.7, donde se calculan transiciones de fase de varias cadenas de núcleos.

Ahora calculemos las demás transiciones de fase, las cuales resultarán de orden cero.

El eje- r_2 .

$$\varepsilon(\beta_c = 0) \Big|_{r_1=0} = 0,$$

mientras que

$$\varepsilon(\beta_{r_2}^{\pm}) \Big|_{r_1=0} = \pm r_2^2 \frac{(\beta_{r_2}^{\pm})^3}{16(r_2 - \beta_{r_2}^{\pm})}, \quad (3.5.38)$$

donde hemos expresado el resultado en términos de $\beta_{r_2}^{\pm}$ en (3.5.25), y así la discontinuidad en la propia función depende solamente de la posición r_2 donde se cruce el eje- r_2 y no de la dirección θ con la cual se cruce.

El conjunto r_{12} .

$$\varepsilon(\beta_c = 0) \Big|_{r_1=r_{12}} = 0,$$

mientras que

$$\varepsilon(\beta_{r_{12}}^{\pm}) \Big|_{r_1=r_{12}} = \frac{-72r_2^2 + (64 + 9r_2^2)(-4 + \sqrt{16 + 9r_2^2})}{216r_2^2}, \quad (3.5.39)$$

BIBLIOGRAFIA

- Arima, A., y Iachello, F., *Phys. Lett.*, **B53**, (1974) 309.
- Arima, A., y Iachello, F., *Ann. Phys. (N. Y.)*, **99**, (1976) 253, y **111**, (1978) 201, y **123**, (1979) 468.
- Bohr, A., *Math. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **26**, No. 14 (1952) 1.
- Bohr, A. Y Mottelson, B. R., *Nuclear Structure, Vol II*, Benjamin, Reading, Massachusetts, (1975).
- Castaños, O., Chacón, E., Frank, A., y Moshinsky, M., *J Math. Phys.*, **20**, (1979) 35.
- Castaños, O., Federman, P., Frank, A., y Pittel, S., *Nucl. Phys.*, **A379**, (1982) 61-76.
- Castaños, O., Frank, A., Hess, P. O., y Moshinsky, M., *Phys. Rev. C*, **24**, (1981) 1367.
- Dieperink, A. E. L., y Scholten, O., *Nucl. Phys.*, **A346**, (1980) 125-138.
- Dieperink, A. E. L., y Scholten, y Iachello, F., *Phys. Rev. Lett.*, **44**, (1980) 1747.
- Gilmore, R. y Feng, D. H., *Nucl. Phys.*, **A301**, (1978) 189.
- Gilmore, R., *J. Math. Phys.*, **20**, (1979) 891.
- Gilmore, R., *Catastrophe Theory for Scientist and Engineers*, John Wiley & Sons, New York. (1981).
- Ginocchio, J. y Kirson, M. W. *Nucl. Phys.*, **A350**, (1980) 31.
- Gómez, A., Castaños, O., Frank, A., *Nucl. Phys.*, **A 589**, (1995) 267-292.
- Leviatan, A., *Phys. Letters*, **143B**, (1984) 25.
- Leviatan, A., *Z. Physik*, **A321**, (1985) 467.
- Nwachuku, C. O. y Rashid, M. A., *J. Math. Phys.*, **18**, (1977) 1387.
- Popov, V. S. y Perelomov, A. M., *Sov. J. Nucl. Phys.*, **5**, (1967) 489.
- Poston, T. y Stuart, I. *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman. London. San Francisco. Melbourne. (1978).

4 APLICACIONES A SIMETRÍAS DINÁMICAS Y HAMILTONIANOS EFECTIVOS DEL IBM

En este capítulo se utiliza el formalismo de la teoría de catástrofes, presentado anteriormente, para localizar en el espacio de parámetros esenciales las simetrías dinámicas del modelo de bosones interactuantes y el comportamiento de Hamiltonianos efectivos. Finalmente, se discute en procedimiento general numérico por medio del cual se determinan los conjuntos de bifurcación y de Maxwell, así como las transiciones de fase de forma y los valores esperados de los operadores, N_d , $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}$ y P^2 , L^2 , Λ^2 .

Los espectros de energía y transiciones electromagnéticas en los límites exactos de simetría, recuerdan los resultados obtenidos con modelos geométricos. Así, a la simetría $U(5)$ se le asocia un vibrador anarmónico, a la de $SU(3)$ o $\overline{SU}(3)$ un rotor axial, y finalmente a la $O(6)$ un rotor γ -inestable. En el caso de $\overline{O}(6)$ demostraremos que su Casimir contribuye a una constante en la superficie de energía, por lo que a este caso le llamaremos límite $O(5)$. Se ha utilizado una representación esquemática de las simetrías del IBM por medio de un triángulo equilátero [Feng, Gimorc, y Deans, (1981)]. Cada uno de los vértices del triángulo tiene asociado uno de los límites exactos. Existen núcleos que siguen cada una de estas simetrías en forma aproximada, los cuales confirman el valor del modelo IBM, sin embargo la mayoría de los núcleos son transicionales, y se representan fuera de estos vértices.

En general, el hamiltoniano (3.1.2) debe diagonalizarse numéricamente en una de las bases que caracterizan las cadenas de grupos (3.1.1). Sin embargo, se ha logrado un mayor entendimiento de la naturaleza de las soluciones en circunstancias especiales en las que el problema de eigenvalores puede resolverse en forma cerrada. Procederemos a continuación de la misma forma, pero para estudiar ahora las superficies de energía que tiene asociadas y lo que nos dice al respecto el formalismo de la teoría de catástrofes.

4.1 SIMETRÍAS DINÁMICAS

Un hamiltoniano constituido con los operadores de Casimir de primero y segundo orden, escrito en términos de operadores bosónicos de $U(6)$ tiene $D_N = (N+5)(N+4)(N+3)(N+2)(N+1)/5!$ niveles de energía degenerados, donde D_N es la dimensión de la representación totalmente simétrica $[N]$ del grupo. Este hamiltoniano produce una superficie de energía constante. Esta degeneración se rompe introduciendo operadores de Casimir de los subgrupos de $U(6)$, así consideraremos los operadores de Casimir de primer orden de $U(5)$ y los de segundo orden de $SU(3)$ ($\overline{SU}(3)$) y los de $O(6)$ ($\overline{O}(6)$). Para conocer cómo se rompe la degeneración, necesitamos las correspondientes reglas de ramificación [Castaños, *et al.*, (1979)] para cada subgrupo.

Si al hamiltoniano del IBM, construido con los operadores de Casimir de $U(6)$, se le agrega el operador de primer orden de $U(5)$, de número de bosones d , N_d , se rompe la degeneración y se separan los niveles de energía en las diferentes representaciones de $U(5)$ que están contenidas en $[N]$. Esto se muestra para $N = 6$ en la Fig. 1. Este hamiltoniano produce una superficie de energía

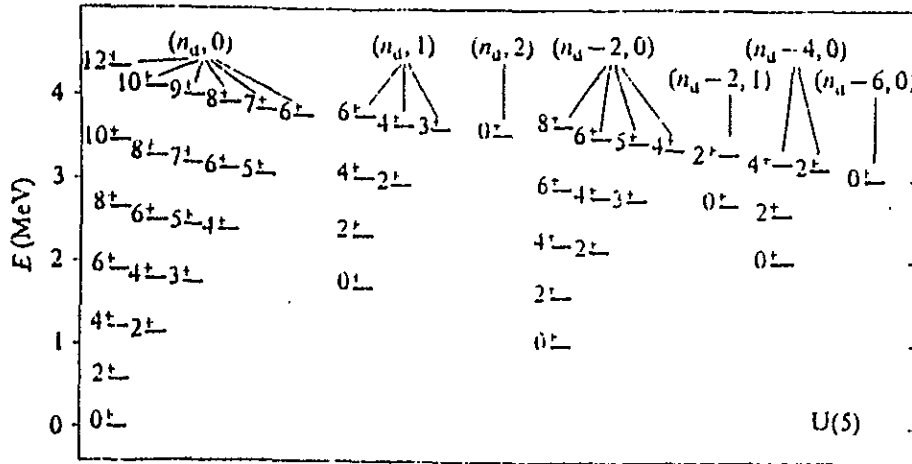


Figura 1. Rompimiento de la degeneración de un estado con N bosones al introducir en el Hamiltoniano el operador N_d .

con parámetros

$$r_2 = 0, \quad r_1 = 1, \quad (4.1.1)$$

independientemente del signo y la intensidad de la interacción del operador de número de bosones d . De acuerdo a la discusión presentada después de la Ec. (3.4.15), la superficie de energía tiene un solo punto crítico en $\beta_0 = 0$, que corresponde a un mínimo. Esto significa que la interacción describe núcleos esféricos.

En el caso de incluir al operador de Casimir \bar{L}^2 obtenemos un rompimiento de la degeneración en las diferentes representaciones de $\bar{O}(6)$ como se ilustra en la Fig. 2. Este hamiltoniano produce una superficie de energía constante, donde no se pueden definir r_1 y r_2 , resultado que concuerda con estudios anteriores [Kirson y Leviatan, (1985)]. En este trabajo se separa el hamiltoniano del modelo de bosones interactuantes en dos partes, una llamada *intrínseca*, y otra *colectiva*, siendo esta última la que produce una superficie de energía independiente de β y γ . Por lo tanto, en este lenguaje, el hamiltoniano considerado es puramente colectivo.

Si agregamos el operador \bar{C} , se rompe la degeneración en las diferentes representaciones de $\bar{SU}(3)$ que están contenidas en $[N]$, y como ilustración indicamos el caso $N = 6$ en la Fig. 3. En este caso la superficie de energía está caracterizada por los parámetros

$$r_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad r_1 = -\frac{4}{3}, \quad (4.1.2)$$

y también es independiente del signo y la intensidad de la interacción. Para estos parámetros, la superficie de energía presenta cuatro puntos críticos:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 2\sqrt{2}, \quad \beta_3 = -\sqrt{2}, \quad \beta_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.3)$$

de los cuales el mínimo absoluto se encuentra cuando $\beta = -\sqrt{2}$, por lo que la interacción describe núcleos oblatos.

Cuando consideramos además al operador de Casimir L^2 , se rompe la degeneración de acuerdo a las reglas de ramificación de $U(6) \rightarrow O(6)$ y el hamiltoniano produce una superficie de energía

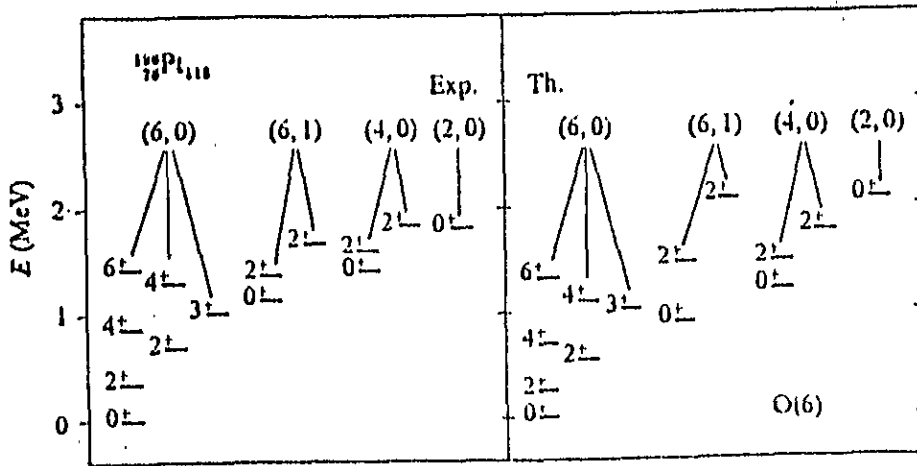


Figura 2. Rompimiento de la degeneración de un estado con N bosones al introducir en el Hamiltoniano el operador de Casimir de $O(6)$.

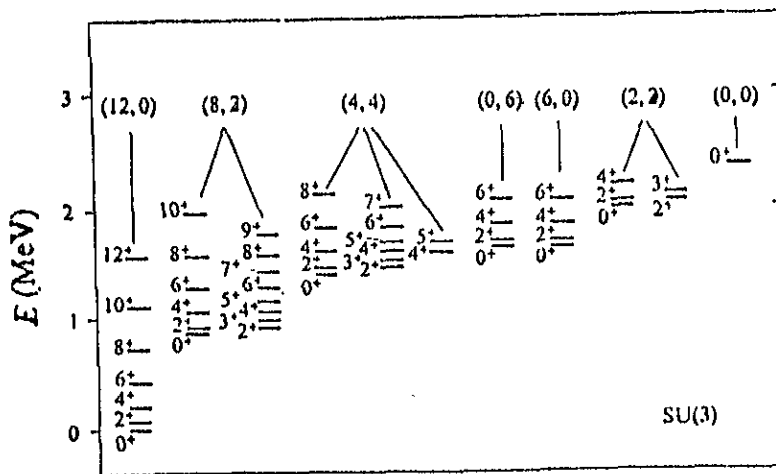


Figura 3. Rompimiento de la degeneración de un estado con N bosones al introducir en el Hamiltoniano el operador de Casimir de $SU(3)$.

determinada por los parámetros siguientes:

$$r_2 = 0, \quad r_1 = -1, \tag{4.1.4}$$

que corresponde a un núcleo con deformación definida $\beta_0 = \pm 1$, e independiente de gamma. Además la superficie de energía tiene un máximo en $\beta = 0$.

Finalmente agregamos el operador G que rompe la degeneración de acuerdo a las reglas de ramificación de $U(6) \rightarrow SU(3)$ y se obtiene una superficie de energía con parámetros

$$r_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad r_1 = -\frac{4}{3}. \tag{4.1.5}$$

Este resultado también es independiente de la intensidad y signo de la interacción. Nuevamente la

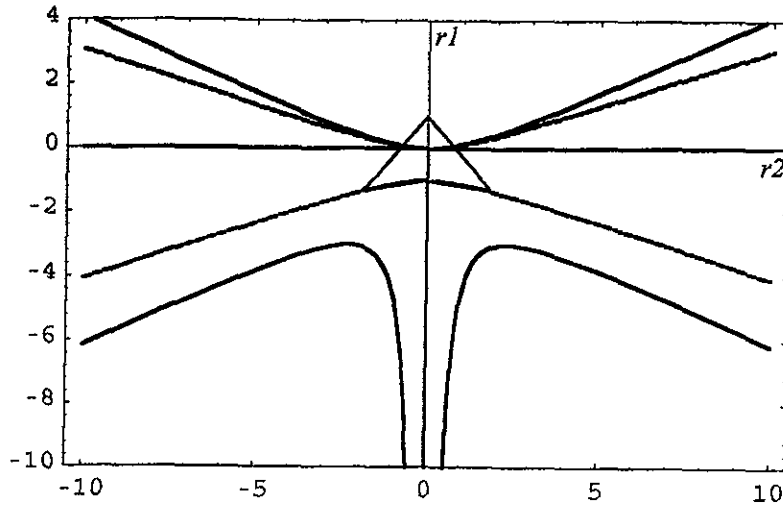


Figura 4. Simetrías dinámicas en el espacio de parámetros (r_2, r_1) .

superficie presenta cuatro puntos críticos,

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -2\sqrt{2}, \quad \beta_3 = \sqrt{2}, \quad \beta_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.1.6)$$

sin embargo en este caso el mínimo absoluto se encuentra para $\beta = \sqrt{2}$, indicando que la interacción describe núcleos prolatos.

Es importante señalar que el Hamiltoniano constituido por operadores de Casimir de los grupos unitarios en tres dimensiones dan lugar a superficies de energía que caen sobre uno de los conjuntos de Maxwell que constituyen la separatriz, esto es, aquel que corresponde al caso en el cual dos máximos tienen el mismo valor. En la Fig. 4, se establece la región en el espacio de parámetros que cubren hamiltonianos constituidos por los operadores descritos arriba y la separatriz del hamiltoniano de bosones interactuantes.

Ahora estudiaremos las simetrías dinámicas o límites exactos, éstos se obtienen cuando en el Hamiltoniano del IBM nos restringimos a considerar operadores de Casimir asociados a una sola cadena de grupos (ver Ec. (3.1.1)) [Castaños, *et al.*, (1982)].

i) El límite vibracional está descrito por el Hamiltoniano

$$H = k_1 N_d + k_2 N_d^2 + k_3 N N_d + k_4 L^2 + k_5 A^2 + k_9 N^2. \quad (4.1.7)$$

Utilizando el Apéndice A, específicamente las ecuaciones (A.5), encontramos las energías de bosón independiente y los elementos de matriz de dos cuerpos en términos de los parámetros k_i . Sustituyendo estos valores en la Ec. (3.3.5) se tiene

$$a_1 = k_2 + k_3 + k_9, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = k_3 + 2k_9.$$

Finalmente utilizamos estas expresiones de los parámetros de la superficie de energía, junto con la intensidades de las interacciones,

$$\epsilon = k_1 + k_2 + k_3 + 6k_4 + 4k_5, \quad u_0 = 2k_9,$$

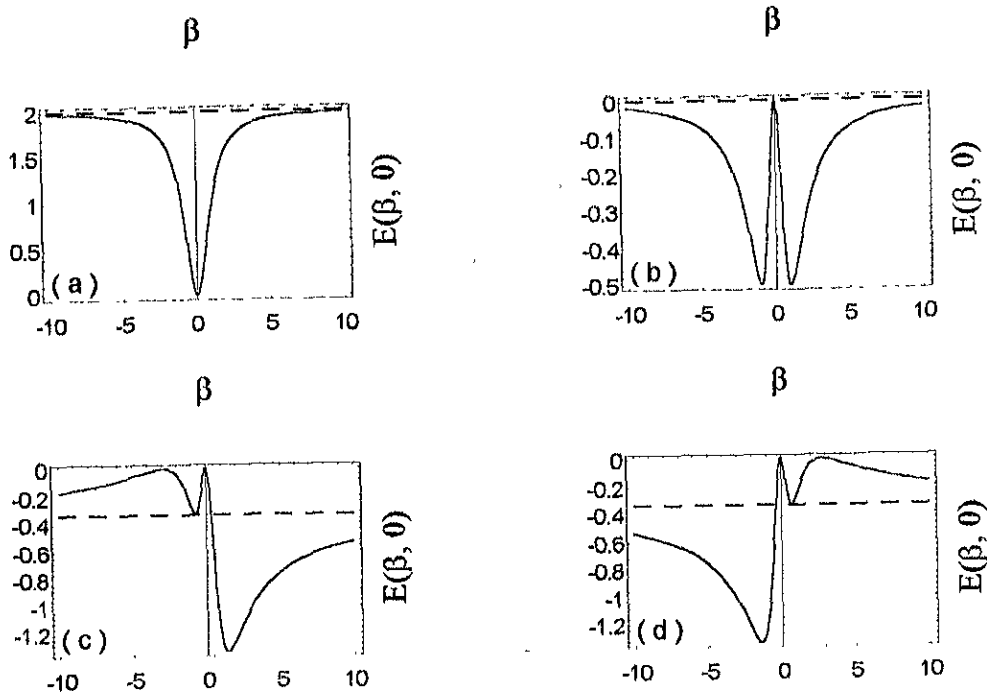


Figura 5. Superficies de energía evaluadas en los punto del espacio de parámetros correspondientes a los límites exactos. (a) Sobre el punto $(r_2, r_1) = (0, 1)$, el mínimo corresponde a núcleos esféricos $\beta_c = 0$. (b) Sobre $(r_2, r_1) = (0, -1)$, el mínimo corresponde a núcleos con deformaciones $\beta_c = 1$ y γ -inestable. (c) Sobre $(r_2, r_1) = (4\sqrt{2}/3, -4/3)$, el mínimo corresponde a núcleos con deformación prolata con $\beta_c = \sqrt{2}$, $\gamma = 0$, y la SE también tiene un punto de silla con $\beta_c = 1/\sqrt{2}$, $\gamma = \pi/3$, y dos máximos de alturas iguales, uno en $\beta_c = 2\sqrt{2}$, $\gamma = \pi/3$, y otro en el origen. (d) Sobre $(r_2, r_1) = (-4\sqrt{2}/3, -4/3)$, la SE es rotada π rad sobre un eje vertical en el origen, respecto a aquella del inciso anterior.

para calcular los parámetros de control:

$$r_1 = \frac{k_1 + k_2 + 6k_4 + 4k_5 + k_3N}{k_1 - k_2 + 6k_4 + 4k_5 + 2k_2N + k_3N}, \quad r_2 = 0. \quad (4.1.8)$$

Si en la expresión anterior tomamos k_2 igual a cero, representa un solo punto $(r_2, r_1) = (0, 1)$ en el espacio de parámetros sugerido por la teoría de catástrofes. La forma de la SE en este punto se presenta en la Fig. 5(a). En general, en este límite las superficies de energía posibles están caracterizadas solamente por puntos sobre el eje r_1 de acuerdo a la ecuación anterior.

ii) El límite $\bar{O}(6)$ está definido por el hamiltoniano

$$H = k_4L^2 + k_5\Lambda^2 + k_6\bar{I}^2 + k_9N^2. \quad (4.1.9)$$

Procediendo en la misma forma que para el caso anterior se encuentran los parámetros de la superficie de energía siguientes:

$$a_1 = \frac{k_6}{4} + k_9, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{k_6}{2} + 2k_9,$$

los que junto con los valores

$$\epsilon = 6k_4 + 4k_5, \quad u_0 = \frac{k_6}{2} + 2k_9,$$

permiten calcular los valores $(r_2, r_1) = (0, 1)$, resultado que es independiente de las intensidades de las interacciones. Es importante señalar que estamos obteniendo la misma superficie de energía que para el límite vibracional. La razón de este hecho es que los operadores L^2 y Λ^2 que aparecen en el hamiltoniano tienen contribuciones de un cuerpo proporcionales a N_d . Si en el hamiltoniano anterior cancelamos estos términos de un cuerpo es inmediato probar que obtenemos una superficie de energía constante. Por estos resultados llamamos a esta cadena de grupos, el límite $O(5)$.

iii) El límite $O(6)$, cuyo hamiltoniano está definido por

$$H = k_4 L^2 + k_5 \Lambda^2 + k_6 P^2 + k_9 N^2. \quad (4.1.10)$$

Encontramos en este caso

$$a_1 = \frac{k_6}{4} + k_9, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{k_6}{2} + 2k_9,$$

y junto con los valores

$$\epsilon = 6k_4 + 4k_5, \quad u_0 = \frac{k_6}{2} + 2k_9,$$

calculamos los parámetros de control

$$r_1 = \frac{6k_4 + 4k_5 + k_6 - k_6 N}{6k_4 + 4k_5 - k_6 + k_6 N}, \quad r_2 = 0. \quad (4.1.11)$$

Nótese que, nuevamente, si cancelamos las contribuciones de un cuerpo de los operadores de momento angular total y del Casimir de $O(5)$ se tiene $(r_2, r_1) = (0, -1)$. La forma de la SE en este punto se presenta en la Fig. 5(b). Es directo encontrar de las ecuaciones (4.1.11), que dependiendo del valor que toma $\xi = k_6(N - 1)/\epsilon$, la superficie de energía está caracterizada por los valores siguientes:

$$\begin{aligned} -\infty < \xi \leq -1 &\Rightarrow r_1 < -1, \\ -1 < \xi \leq 0 &\Rightarrow 1 < r_1, \\ 0 < \xi \leq 1 &\Rightarrow 0 < r_1 < 1, \\ 1 < \xi < \infty &\Rightarrow -1 < r_1 < 0. \end{aligned}$$

Si $r_1 > 0$ se tiene que la superficie de energía tiene un solo mínimo en $\beta = 0$, mientras que si $r_1 < 0$ tendrá un máximo en $\beta = 0$ y dos mínimos de la misma profundidad en $\beta = \pm\sqrt{r_1}$, esto sucede para cualquier valor de γ porque $r_2 = 0$. Es también importante señalar que para valores de $0 < \xi < \infty$ las superficies de energía están determinadas por la desigualdad siguiente del parámetro de control $-1 < r_1 < 1$.

iv) El límite $\overline{SU}(3)$ está definido por el hamiltoniano

$$H = k_4 L^2 + k_7 \bar{Q}^2 + k_9 N^2. \quad (4.1.12)$$

Encontramos en este caso

$$a_1 = \frac{k_7}{2} + k_9, \quad a_2 = -2\sqrt{2}k_7, \quad a_3 = 4k_7 + 2k_9,$$

con las intensidades

$$\epsilon = 6k_4 - \frac{9}{4}k_7, \quad u_0 = 2k_9.$$

Estas expresiones sirven para calcular los parámetros de control

$$r_2 = \frac{16\sqrt{2}k_7(N-1)}{24k_4 + 3k_7 - 12k_7N}, \quad r_1 = \frac{24k_4 - 25k_7 + 16k_7N}{24k_4 + 3k_7 - 12k_7N}. \quad (4.1.13)$$

Es importante señalar que independientemente de los valores de k_4 y k_7 , si $N = 1$ únicamente tenemos contribución a la superficie de energía de las interacciones de un cuerpo. Esto es N_d y por lo tanto se tienen los parámetros de control $(r_2, r_1) = (0, 1)$. Al aumentar el número de bosones, tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ domina la parte de dos cuerpos del hamiltoniano y entonces se tiene que $(r_2, r_1) = (-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{3})$ que son los parámetros correspondientes al límite $\overline{SU}(3)$. Esto se demuestra cancelando las contribuciones de un cuerpo de los operadores de momento angular total y de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, y encontrar una superficie de energía caracterizada por la Ec. (4.1.2).

Por lo tanto concluimos que dependiendo de los valores relativos de k_4 y k_7 las superficies de energía estarán determinadas por los valores de los parámetros de control que se encuentran sobre la recta que une los puntos $(r_2, r_1) = (0, 1)$ y $(r_2, r_1) = (-\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{4}{3})$. La forma de la SE en este punto se presenta en la Fig. 5(d).

v) El límite $SU(3)$ está definido por el hamiltoniano

$$H = k_4L^2 + k_7Q^2 + k_9N^2. \quad (4.1.14)$$

Encontramos los parámetros de la superficie de energía siguientes:

$$a_1 = \frac{k_7}{2} + k_9, \quad a_2 = 2\sqrt{2}k_7, \quad a_3 = 4k_7 + 2k_9,$$

y los valores

$$\epsilon = 6k_4 - \frac{9}{4}k_7, \quad u_0 = 2k_9,$$

con estas expresiones calculamos los parámetros de control

$$r_2 = -\frac{16\sqrt{2}k_7(N-1)}{24k_4 + 3k_7 - 12k_7N}, \quad r_1 = \frac{24k_4 - 25k_7 + 16k_7N}{24k_4 + 3k_7 - 12k_7N}. \quad (4.1.15)$$

Es importante señalar que independientemente de los valores de k_4 y k_7 , si $N = 1$, únicamente tenemos contribución a la superficie de energía de las interacciones de un cuerpo. Esto es N_d y por lo tanto se tienen los parámetros de control $(r_2, r_1) = (0, 1)$. Al aumentar el número de bosones, tomando el límite cuando $N \rightarrow \infty$ domina la parte de dos cuerpos del hamiltoniano y entonces se tiene que $(r_2, r_1) = (4\sqrt{2}/3, -4/3)$ que son los parámetros correspondientes al límite $SU(3)$. Esto se demuestra nuevamente cancelando las contribuciones de un cuerpo de los operadores de momento angular total y de la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, y encontrar una superficie de energía caracterizada por la Ec. (4.1.5).

En efecto, si usando la Ec.(4.1.13), para cualquier valor del número de bosones N , consideramos la razón $m = \frac{r_1(N+1) - r_1(N)}{r_2(N+1) - r_2(N)}$, es directo demostrar que resulta una constante, independiente de N , e igual a $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. Por lo tanto concluimos que dependiendo de los valores relativos de k_4 y k_7 las superficies de energía estarán determinadas por los valores de los parámetros de control que se

encuentran sobre la recta que une los puntos $(r_2, r_1) = (0, 1)$ y $(r_2, r_1) = (4\sqrt{2}/3, -4/3)$. La forma de la SE en este punto se presenta en la Fig. 5(c).

De los estudios realizados arriba sobre los límites exactos, concluimos lo siguiente: Las únicas superficies de energía posibles son aquellas que se encuentran sobre las rectas

$$r_1 = \frac{7}{4\sqrt{2}} r_2 + 1, \quad (4.1.16a)$$

$$r_1 = \frac{-7}{4\sqrt{2}} r_2 + 1, \quad (4.1.16b)$$

$$r_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}} r_2 - 1, \quad (4.1.16c)$$

$$r_1 = \frac{-1}{4\sqrt{2}} r_2 - 1, \quad (4.1.16d)$$

$$r_2 = 0. \quad (4.1.16e)$$

Estas rectas construyen el triángulo doble que aparece dibujado en la Fig. 4, cuyos vértices caracterizan las superficies de energía de los operadores de Casimir de $U(5)$, Ec. (4.1.1), $\bar{S}U(3)$, Ec. (4.1.2), $O(6)$, Ec. (4.1.4), y $SU(3)$, Ec. (4.1.5).

Finalmente, es importante considerar el valor esperado del número de bosones-d, evaluado sobre los vértices del doble triángulo de la Fig. 4, al cual llamamos el *doble triángulo de Casten*. El cálculo de esta cantidad lo podemos realizar mediante los estados coherentes para un sistema de bosones s y d , los cuales han sido considerados para el modelo *IBM* en la Ec. (3.3.1):

$$|N; \alpha_\mu\rangle = A_N (s^\dagger + \sum \alpha_\mu d_\mu^\dagger)^N |0\rangle, \quad (3.3.1a)$$

donde las α_μ son en general cinco variables (son complejas, pero se les pide la condición de realidad $\alpha_\mu^* = \alpha^\mu$) y

$$A_N = (1 + \beta^2)^{-\frac{N}{2}}, \quad (3.3.1b)$$

es la constante de normalización. La representación del operador del número de bosones-d, N_d , calculado a partir de la expresión:

$$N(\alpha) = \lim_{\alpha' \rightarrow \alpha} \frac{\langle N; \alpha' | N_d | N; \alpha \rangle}{\langle \alpha' | \alpha \rangle}. \quad (4.1.17)$$

Para este caso, obtenemos:

$$N_d(\beta) = N \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)}, \quad (4.1.18)$$

donde se considera el valor crítico de la variable β que minimiza globalmente la SE.

En el límite $U(5)$, correspondiente al vértice superior $(r_2, r_1) = (0, 1)$, en la Fig. 4, tenemos el valor crítico $\beta_0 = 0$, de donde $N_d = 0$. En el límite $SU(3)$, correspondiente a los vértices inferiores $(r_2, r_1) = \frac{4}{3}(\pm\sqrt{2}, -1)$, en la Fig. 4, tenemos el valor crítico $\beta_{min} = \pm\sqrt{2}$, de cuyo valor obtenemos $N_d = \frac{2}{3}N$. En el límite $O(6)$, correspondiente al vértice intermedio inferior $(r_2, r_1) = (-1, 0)$, en la Fig. 4, tenemos el valor crítico $\beta_{min} = \pm 1$, de cuyo valor obtenemos $N_d = \frac{1}{2}N$.

Transiciones entre límites exactos

De acuerdo a nuestro conocimiento, el estudio de las transiciones de fase se ha restringido al paso de un límite exacto a otro, esto es, variando la razón de dos coeficientes asociados con los vértices del triángulo de Casten; así, cada lado del triángulo representa una transición entre dos límites. Existen varias cadenas de isótopos en los que se ilustran este tipo de transiciones [Gómez, Castaños, y Frank, (1995)]. A continuación consideraremos estas transiciones entre dos límites exactos y las estudiaremos con el formalismo de catástrofes desarrollado en la sección anterior.

i) Transición $U(5)$ a $\overline{SU}(3)$.

Para este caso tenemos un Hamiltoniano constituido por los operadores de Casimir de cada uno de los grupos mencionados, esto es

$$H = \alpha_1 N_d - \alpha_2 \bar{G}. \quad (4.1.19)$$

Las superficies de energía asociada a este hamiltoniano están caracterizadas por los puntos del espacio de parámetros de control que se encuentran sobre la recta paramétrica:

$$r_1 = \frac{-8\eta + 1}{6\eta + 1}, \quad r_2 = \frac{-8\sqrt{2}\eta}{6\eta + 1}, \quad (4.1.20a, b)$$

donde $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(N - 1)$. Así las superficies cambian de tener un solo mínimo en $\beta = 0$, si $r_2 = 0$, a tener cuatro puntos críticos con un mínimo global para una deformación $\beta = -\sqrt{2}$, si $r_2 = -4\sqrt{2}/3$. La recta (4.1.20), forma paramétrica de la definida en la Ec. (4.1.16a), atraviesa dos conjuntos de Maxwell, y tres conjuntos de bifurcación. En cada una de estas últimas tres intersecciones, la superficie de energía sufre un cambio cualitativo. Aparecen en estos cruzamientos transiciones de orden cero que son de importancia cuando el sistema se encuentra en un estado excitado y esta prohibido su decaimiento al estado base. Estas transiciones representan la necesidad del decaimiento al estado base debido a que ya no se presentan más estos estados excitados de energía. Estas transiciones suceden cuando la recta (4.1.20) intersecciona los conjuntos: i) r_{12} , Ec. (3.5.11b), para $\eta = 0.109487$. Para mostrar que es una transición de orden cero, basta con comparar el valor de la superficie de energía en las ramas $\beta_0 = 0$ y $\beta_q = \beta_{22}$ definido en la Ec. (3.5.13b), antes de la intersección sólo se tiene un mínimo en $\beta_0 = 0$, y después aparece adicionalmente un mínimo excitado oblató en $\beta = \beta_{22}$. y ii) $r_1 = 0$ para $\eta = 1/8$, nuevamente es suficiente con comparar los valores de la superficie de energía para las ramas $\beta_0 = 0$ y $\beta_q = (-2 + \sqrt{4 + 3r_2^2})/r_2$, en ésta transición se observa que el estado base no cambia, manteniéndose oblató, los estados excitados con deformación cero desaparecen, debido a que aunque todavía existen puntos críticos que en la variable β representan un mínimo, en la variable γ son máximos, es decir en la SE el mínimo relativo se ha transformado en un punto de silla.

También se presentan transiciones de primer orden, entre ellas la más importante es la que aparece al cruzar el conjunto de Maxwell r_{13}^+ para $\eta = 1/9$. Esto se demuestra calculando la primera derivada con respecto a r_2 de la superficie de energía $H(\beta_{13}^+, \gamma = \pi/3)$, y comparándola con la correspondiente derivada de $H(\beta_0 = 0, 0)$ para valores de (r_2, r_1) determinados por la recta (4.1.20) con $\eta = 1/9$. En la transición anterior ocurre un cambio cualitativo en la superficie de energía, en el cual el núcleo en su estado base (excitado) pasa de esférico (oblató) a oblató (esférico).

Al continuar moviéndose sobre la recta (4.1.20), se intersecciona el conjunto de Maxwell r_{13}^- donde la energía de dos máximos degenera. Las superficies de energía caracterizan núcleos oblatos y todavía existen puntos críticos que en la variable β representan un mínimo, pero en la variable γ son máximos, es decir son puntos de silla de la SE. Finalmente tenemos el cruzamiento con r_{11} , Ec.(3.5.11a), donde desaparecen estos puntos de silla, y la superficie de energía presenta únicamente un mínimo oblató y un máximo global.

ii) Transición $U(5)$ a $SU(3)$.

Para este caso tenemos un Hamiltoniano constituido por los operadores de Casimir de cada uno de los grupos mencionados, esto es

$$H = \alpha_1 N_d - \alpha_2 G. \quad (4.1.21)$$

Las superficies de energía asociada a este hamiltoniano están caracterizadas por los puntos del espacio de parámetros de control que se encuentran sobre la recta paramétrica:

$$r_1 = \frac{-8\eta + 1}{6\eta + 1}, \quad r_2 = \frac{8\sqrt{2}\eta}{6\eta + 1}, \quad (4.1.22a, b)$$

donde $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(N - 1)$. Es importante señalar que esta recta paramétrica coincide con aquella dada en Ec. (4.1.20), si cambiamos $r_2 \rightarrow -r_2$. Entonces las superficies cambian de tener un solo mínimo en $\beta = 0$, si $r_2 = 0$, a tener cuatro puntos críticos con un mínimo global para una deformación $\beta = \sqrt{2}$, si $r_2 = 4\sqrt{2}/3$.

La recta (4.1.22), forma paramétrica de la definida en la Ec. (4.1.16b), también cruza dos conjuntos de Maxwell y tres conjuntos de bifurcación. Aparecen transiciones de orden cero en los conjuntos: i) r_{12} para $\eta = 0.109487$ en las ramas $\beta_0 = 0$ y $\beta_q = \beta_{22}$, antes de la intersección sólo se tiene un mínimo en $\beta_0 = 0$, y después aparece adicionalmente un mínimo excitado prolato en $\beta = \beta_{22}$. y ii) $r_1 = 0$ para $\eta = 1/8$, para las ramas $\beta_0 = 0$ y $\beta_q = (-2 + \sqrt{4 + 3r_2^2})/r_2$, en esta transición se observa que el estado base no cambia, manteniéndose prolato, los estados excitados con deformación cero desaparecen y aparecen puntos de silla en la región de los núcleos en estados excitados oblatos.

También se presenta la transición de primer orden al cruzar el conjunto de Maxwell r_{13}^+ para $\eta = 1/9$ y analizando las ramas $\beta_0 = 0$ y β_{13}^+ . En ésta ocurre un cambio cualitativo en la superficie de energía, en el cual el núcleo en su estado base (excitado) pasa de esférico (prolato) a prolato (esférico).

Al continuar moviéndose sobre la recta (4.1.22) se intersecta el conjunto a Maxwell r_{13}^- , donde las superficies de energía caracterizan núcleos prolotos, con los puntos de silla en la región de los núcleos oblatos, sumergidos en el continuo. Finalmente, tenemos el cruzamiento con r_{11} , donde desaparecen estos puntos de ensilladura de la SE y esta presenta únicamente un mínimo prolato y un máximo global.

iii) Transición $U(5)$ a $O(6)$.

Para este caso tenemos un Hamiltoniano constituido por los operadores de Casimir de cada uno de los grupos mencionados, esto es

$$H = \alpha_1 N_d - \alpha_2 \mathcal{L}. \quad (4.1.23)$$

Las superficies de energía asociada a este hamiltoniano están caracterizadas por los puntos del espacio de parámetros de control que se encuentran sobre la recta paramétrica:

$$r_1 = \frac{-4\eta + 1}{4\eta + 1}, \quad r_2 = 0, \quad (4.1.24a, b)$$

donde $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(N - 1)$. Las superficies de energía cambian de tener un solo mínimo en $\beta = 0$, si $\eta = 0$, a tener un mínimo global cuando $\eta \rightarrow \infty$, con una deformación $\beta = 1$.

La recta (4.1.24) intersecta el conjunto de bifurcación en el origen $(r_2, r_1) = (0, 0)$. En este caso el sistema sufre una transición de segundo orden, y se observa que el estado base cambia de esférico a γ -inestable, en el punto $\eta = 1/4$. Para demostrar que es una transición de segundo orden se eligen las ramas $\beta_0 = 0$ y $\beta_q = \sqrt{-r_1}$, calculándose la función y sus derivadas, según el procedimiento discutido anteriormente en la Ec. (3.5.24).

iv) Transición $\overline{SU}(3)$ a $O(6)$.

Para este caso tenemos un Hamiltoniano constituido por los operadores de Casimir de cada uno de los grupos mencionados, esto es

$$H = \alpha_1 \tilde{G} - \alpha_2 \mathcal{L} . \quad (4.1.25)$$

Las superficies de energía asociada a este hamiltoniano están caracterizadas por los puntos del espacio de parámetros de control que se encuentran sobre la recta paramétrica:

$$r_1 = \frac{2\eta - 4}{-2\eta + 3} , \quad r_2 = \frac{4\sqrt{2}}{2\eta - 3} , \quad (4.1.26a, b)$$

donde $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Esta recta es la forma paramétrica de aquella definida en la Ec. (4.1.16c). Las superficies de energía cambian de tener un mínimo global en $\beta = -\sqrt{2}$, si $\eta = 0$, a tener un mínimo global cuando $\eta \rightarrow \infty$, con una deformación $\beta = -1$.

Se presentan tres intersecciones en los conjuntos de bifurcación r_{13}^- , otra en $r_2 = 0$ y la tercera en $r_1 = 0$. En éstas suceden dos transiciones de primer orden y una de orden cero. La transición de orden cero ocurre en $r_1 = 0$, y la superficie de energía, arriba del eje r_2 , tiene estados excitados esféricos y por debajo desaparecen, quedando en cambio puntos de silla en la región de núcleos oblatos, manteniéndose el estado base con la forma de un núcleo prolato. De las transiciones de primer orden, tomaremos en cuenta solamente aquella que involucra estados estables. Así, consideraremos únicamente la intersección en $r_2 = 0$, y la transición de primer orden se determina entre los puntos críticos $\beta_c = \sqrt{-r_1}$ y $\beta_c = -\sqrt{-r_1}$. Si se comparan los valores de la energía mínima cuando $r_2 \rightarrow 0$, se encuentra que éstos naturalmente coinciden, sin embargo, esta misma función presenta una discontinuidad en su primera derivada al cruzar el eje vertical $r_2 = 0$. En la sección 4.3 presentaremos graficada numéricamente esta discontinuidad.

v) Transición $SU(3)$ a $O(6)$.

Para este caso tenemos un Hamiltoniano constituido por los operadores de Casimir de cada uno de los grupos mencionados, esto es

$$H = \alpha_1 \tilde{G} + \alpha_2 \mathcal{L} . \quad (4.1.27)$$

Las superficies de energía asociada a este hamiltoniano están caracterizadas por los puntos del espacio de parámetros de control que se encuentran sobre la recta paramétrica:

$$r_1 = \frac{2\eta - 4}{-2\eta + 3} , \quad r_2 = \frac{4\sqrt{2}}{-2\eta + 3} , \quad (4.1.28a, b)$$

donde $\eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, forma paramétrica de la recta dada en la Ec. (4.1.16d). Las superficies de energía cambian de tener un mínimo global en $\beta = \sqrt{2}$, si $\eta = 0$, a tener un mínimo global cuando $\eta \rightarrow \infty$, con una deformación $\beta = 1$.

Nuevamente tenemos tres intersecciones en los mismos conjuntos de bifurcación del caso anterior, con resultados simétricos a los de la sección previa, cambiando r_2 por $-r_2$, y consecuentemente, β por $-\beta$.

4.2 HAMILTONIANOS EFECTIVOS DEL MODELO IBM

En esta sección se analizan las características de las formas y estabilidad de cadenas de isótopos e isótonos. En particular se estudian los isótopos de los núcleos:

$${}_{44}Ru, {}_{56}Ba, {}_{62}Sm, {}_{64}Gd, {}_{76}Os, {}_{78}Pt, \text{ y } {}_{92}U.$$

También la cadena de isótonos con $N = 88$ que denotamos *ISO88* e incluye

$${}_{56}^{144}Ba, {}_{58}^{146}Ce, {}_{60}^{148}Nd, {}_{62}^{150}Sm, {}_{64}^{152}Gd, {}_{66}^{154}Dy, {}_{68}^{156}Er, {}_{70}^{158}Yb;$$

y la cadena de isótonos con $N = 90$ que denotamos *ISO90* incluyendo

$${}_{56}^{146}Ba, {}_{58}^{148}Ce, {}_{60}^{150}Nd, {}_{62}^{152}Sm, {}_{64}^{154}Gd, {}_{66}^{156}Dy, {}_{68}^{158}Er, {}_{70}^{160}Yb.$$

En principio el hamiltoniano podría contener interacciones de muchos bosones y sus parámetros podrían depender explícitamente del número N de bosones; esta dependencia en N se heredaría al hamiltoniano. En esta situación estaríamos obligados a realizar un ajuste por mínimos cuadrados de los parámetros del hamiltoniano núcleo por núcleo. Como el número de niveles de cada núcleo es generalmente muy reducido, aun si consideramos solamente interacciones de uno y dos cuerpos la búsqueda de los parámetros resulta difícil. Es por esto que se ha adoptado la misma filosofía que Talmi realizó hace tiempo en el caso del modelo de capas para calcular la interacción efectiva de los núcleos cerca de capa cerrada [Talmi, (1962)], es decir, se hizo un ajuste simultáneo de los espectros de varios isótopos e isótonos, promediando sobre todos los posibles efectos de muchos cuerpos para determinar los elementos de matriz efectivos de la interacción nucleón- nucleón.

De esta forma, en la última década se han utilizado varios hamiltonianos efectivos del *IBM - 1* para describir los espectros de energía y las probabilidades de transición de cadenas de isótopos e isótonos [Castaños, *et al.*, (1982)], [Frank, (1989)], [González, (1990)], [Gómez, Castaños, y Frank, (1995)].

En estos trabajos se construyeron las matrices del hamiltoniano utilizando soluciones analíticas obtenidas en la cadena $U(5)$ descrita en la Ec.(3.1.1a). Se consideraron los isótopos e isótonos mencionados arriba. Los hamiltonianos fueron determinados por medio de la construcción y diagonalización de las matrices de energía implementando un programa de cómputo el cual realiza un ajuste por el método de mínimos cuadrados de los parámetros $k_i, i = 1, \dots, 7$, del hamiltoniano expresado en términos de los operadores de Casimir, Ec.(A.1b) y que mejor reproduce los espectros de energía experimentales de todos los miembros de cada cadena. En algunos casos: *Sm, U, Pt, Os, Ru*, e *ISO88*, cuando se efectuó la búsqueda por mínimos cuadrados con todos los parámetros $k_i, i = 1, \dots, 7$, la convergencia a veces se hace sumamente difícil.

Esta dificultad, sin embargo, se logró superar si se mantiene constante ya sea k_2 ó k_3 . En la Ec.(A.5) estos dos parámetros entran en la combinación $(k_2 + k_3)$ dentro de los términos de dos cuerpos, siendo así razonable elegir arbitrariamente el valor $k_2 = 0$ y fijar k_3 por medio del proceso de ajuste. Así también, para lograr convergencia, se encontró que se necesitan aproximadamente unos 25 niveles de energía experimental para realizar el ajuste.

Finalmente, un programa de computadora (*op. cit.*) para calcular los parámetros de las transiciones electromagnéticas ($E2$) el cual ajusta también por el método de mínimos cuadrados los datos experimentales. La raíz cuadrada de la desviación cuadrática media σ entre los valores de las energías experimentales y teóricas (*r.m.s.*) en estos ajustes es generalmente de unos 100 keV. Los valores ajustados de los parámetros $k_i, i = 1, \dots, 7$ para cada uno de los casos mencionados arriba aparecen en la Tabla 1.

Tabla 1. Parámetros del Hamiltoniano (3.2.1) [keV]

Cadena	σ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
<i>Sm</i>	105	2248.00	0.00	-197.00	-2.23	24.70	1.73	-15.20
<i>U</i>	27	165.00	0.00	4.07	9.61	-3.47	2.42	-18.3
<i>Gd</i>	91	2749.00	0.00	-234.00	2.82	9.86	-17.80	-12.20
<i>Pt^a</i>	34	298.00	12.70	8.70	4.00	-9.00	-6.20	-8.50
<i>Pt^b</i>	88	1028.70	211.20	-301.04	9.90	-132.40	-399.89	-1.94
<i>Ru[†]</i>	122	1073.40	93.12	-146.20	5.50	-15.80	-93.20	0.00
<i>Os</i>	71	591.4	92.9	-163.70	10.50	-42.50	-166.40	-6.80
<i>Ba</i>	73	962.00	0.00	-56.10	7.69	10.10	237.00	13.50
<i>ISO88^a</i>	132	211.80	0.00	-2.70	4.20	-15.7	-121.70	-5.60
<i>ISO88^b</i>	88	544.50	0.00	-36.40	5.40	-13.50	-123.30	-4.40
<i>ISO90^a</i>	92	418.70	93.00	-89.90	8.10	-59.10	-168.20	-13.60
<i>ISO90^b</i>	69	1099.70	1.90	-88.50	3.70	-5.20	-80.40	-6.10

Los parámetros de las intensidades de los operadores de uno y dos cuerpos del hamiltoniano H_{IBM} en (3.1.2) se obtienen a partir de las ecuaciones (A.5) del Apéndice A. Los resultados calculados a partir de los valores de la Tabla 1, se indican en la Tabla 2. Substituyendo estos parámetros dentro de las ecuaciones (3.3.5) obtenemos los valores de a_1, a_2 y a_3 y finalmente, de las ecuaciones (3.4.7), se calculan los parámetros esenciales r_2 y r_1 .

Tabla 2. Intensidades de uno y dos cuerpos del Hamiltoniano (3.1.2) [keV]

Cadena	ϵ	c_0	c_2	c_4	u_0	u_2	v_0	v_2
<i>Sm</i>	2170.62	-613.715	-319.82	-377.64	0.865	-508.482	-66.042	127.17
<i>U</i>	165.73	240.13	-31.93	70.58	12.10	9.17	-54.78	153.11
<i>Gd</i>	2598.81	-667.92	-456.05	-437.92	-8.90	-577.80	-74.46	102.07
<i>Pt^a</i>	326.52	21.55	7.17	48.30	-3.10	-18.56	-44.94	71.12
<i>Pt^b</i>	473.02	-245.79	-502.42	-367.22	-199.94	-681.82	-455.77	16.23
<i>Ru</i>	990.20	-185.40	-77.40	-0.40	46.60	-118.51	-104.20	0.00
<i>Os</i>	428.90	-367.40	-284.50	-149.40	-83.20	-396.45	-216.451	56.89
<i>Ba</i>	1377.32	-476.05	-563.52	563.7	118.5	65.07	325.35	-112.95
<i>ISO88^a</i>	184.1	-254.05	-57.80	-8.80	-60.85	-31.08	-161.11	46.85
<i>ISO88^b</i>	496.40	-353.25	-128.90	-61.00	-61.65	-101.07	-157.53	36.81
<i>ISO90^a</i>	264.60	-86.30	-150.40	-60.80	-84.10	-261.84	-248.87	113.79
<i>ISO90^b</i>	1028.22	-398.35	-201.22	-160.10	-40.20	-225.17	-117.17	51.04

Al variar las intensidades de las interacciones encontraremos que los valores de los parámetros de la Ec. (3.4.7) generan una curva en el espacio (r_2, r_1) . Para un conjunto de núcleos, cadenas de isótopos e isótonos, donde se fijan todas las intensidades de las interacciones excepto el número N de bosones, dicha curva $(r_2(N), r_1(N))$, describe una recta paramétrica. Eliminando N , la recta resulta de la forma

$$r_1 = \frac{(a_3 - a_1) - u_0/2}{u_2} r_2 + 1. \quad (4.2.1)$$

Como se puede ver de esta última expresión, todas las rectas tienen la misma ordenada al origen, que de acuerdo a la discusión presentada anteriormente caracteriza el límite vibracional, y una pendiente

Tabla 3. Número de bosones para las cadenas de Isótopos e Isótonos

	Z	N	N_π	N_ν	N
<i>Ru</i>	44	52 → 66	3*	1 → 8	4 → 11
<i>Ba</i>	56	66 → 78	3	2* → 8*	5* → 11*
<i>Sm</i>	62	86 → 98	6	2 → 8	8 → 14
<i>Gd</i>	64	86 → 96	7	2 → 7	9 → 14
<i>Os</i>	76	104 → 122	3*	11* → 2*	14* → 5*
<i>Pt^a</i>	78	104 → 108	2*	11* → 9*	13* → 11*
<i>Pt^b</i>	78	110 → 122	2*	8* → 2*	10* → 4*
<i>U</i>	92	136 → 148	5	5 → 11	10 → 16
<i>ISO88^a</i>	56 → 66	88	3 → 8	3	6 → 11
<i>ISO88^b</i>	66 → 72	88	8* → 5*	3	11 → 8
<i>ISO90^a</i>	56 → 66	90	3 → 8	4	7 → 12
<i>ISO90^b</i>	66 → 70	90	8* → 6*	4	12 → 10

particular a cada cadena. En la discusión que hacemos a continuación de todas las cadenas, se elige un orden de presentación que considera prioritariamente la región del plano de parámetros y como segundo criterio el valor del número atómico, a excepción del Samario, que discutimos primero y el cual se eligió como ilustración debido que cubre una región muy basta de este plano. En la presentación de las Superficies de Energía para cada cadena de núcleos, graficaremos la energía $\epsilon(x, y)$, tomando un corte $y = 0$, de acuerdo con la expresión dada en coordenadas cartesianas en la Ec.(3.5.1), que depende de los parámetros (r_2, r_1) . Esta energía se relaciona con la expresión de la SE, $E(\alpha)$, originalmente obtenida a partir de los estados coherentes en la Ec. (3.3.2), mediante una magnificación M y un corrimiento S , $E(x, y) = M\epsilon(x, y) + S$, dados por

$$M = \frac{1}{2}(2a_1 + \frac{\epsilon}{(N-1)} - a_3)N(N-1), \quad S = \frac{1}{2}u_0N(N-1) + N\epsilon_s.$$

Sin pérdida de generalidad, en cada cadena de núcleos tomaremos el valor para la energía $\epsilon_s = 0$.

Tabla 4. Parámetros a_1, a_2, a_3 , [keV], y pendiente m en (4.2.1), para cadenas de Isótopos e Isótonos

	a_1	a_2	a_3	m
<i>Ru</i>	-29.7	0	-99.59	∞
<i>Ba</i>	9.9	38.18	116.40	-1.23756
<i>Sm</i>	-204.17	-42.99	-256.93	-1.23732
<i>Gd</i>	-244.55	-34.51	-291.70	-1.23744
<i>Os</i>	-115.80	-19.23	-274.10	-6.0676
<i>Pt^a</i>	15.60	-24.04	-28.40	-1.76569
<i>Pt^b</i>	-190.78	-5.49	-508.75	-39.7086
<i>U</i>	37.60	-51.76	-20.40	-1.23744
<i>ISO88^a</i>	-35.93	-15.84	-85.95	-1.23705
<i>ISO88^b</i>	-69.42	-12.44	-115.65	-1.23834
<i>ISO90^a</i>	-45.75	-38.46	-228.40	-3.65488
<i>ISO90^b</i>	-109.75	-17.25	-153.10	-1.34756

FORMAS Y ESTABILIDAD DE CADENAS DE NÚCLEOS

A continuación determinamos el número de bosones para cada cadena. En el conteo de este número, sólo se consideran excitaciones de protones y neutrones de valencia, esto es, partículas fuera de capa cerrada. El carozo se toma como inerte y debido a la conjugación partícula-agujero, se cuentan solamente partículas en la primera mitad de capa semillena, y agujeros en la segunda mitad de esta. Como se mencionó en el párrafo anterior, consideraremos primero la cadena de los Samarios, dando algunos detalles; para todas las demás cadenas daremos sólo los resultados en la Tabla 3.

En la cadena de *Sm* tenemos el número atómico $Z = 62$, con doce protones fuera de capa cerrada y así el número de bosones de protón es $N_\pi = 6$. Considerando los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 148 \rightarrow 160$, tenemos que el número de bosones de neutrón corre desde $N_\nu = 2$ hasta $N_\nu = 8$. El número total de bosones varía de $N = 8 \rightarrow 14$. Ambos bosones son de tipo partícula, pero en otros casos podría resultar que uno o ambos fueran de tipo agujero y los marcamos mediante un asterisco en la Tabla 3.

Cadena de isótopos de *Sm*

En esta cadena se ajustaron un total de 52 energías experimentales. Es interesante notar que en la descripción a bajas energías se encontró que el hamiltoniano efectivo puede truncarse a solamente cuatro términos: k_1, k_3, k_5, k_7 ; con k_5 siendo importante en la descripción de los estados de mayores momentos angulares. Así también hacemos notar que el núcleo ^{148}Sm exhibe un espectro vibracional correspondiente a la simetría $U(5)$, mientras que el núcleo ^{158}Sm exhibe un espectro rotacional correspondiente a la simetría $U(3)$.

Las superficies de energía asociadas a estos isótopos se determinan calculando las constantes ϵ , u_0 , a_1 , a_2 y a_3 . Las dos primeras están dadas en la Tabla 2, y las últimas se obtienen de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 6 un corte de la *SE* para valores de $\gamma = 0^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. Esto es equivalente a considerar las curvas $\epsilon(x, 0)$, con $x = \beta \cos \gamma$, en la expresión cartesiana dada en la Ec. (3.5.1). Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = -75.70N^2 + 1161.01N, \quad S = 0.43N(N - 1).$$

Sm

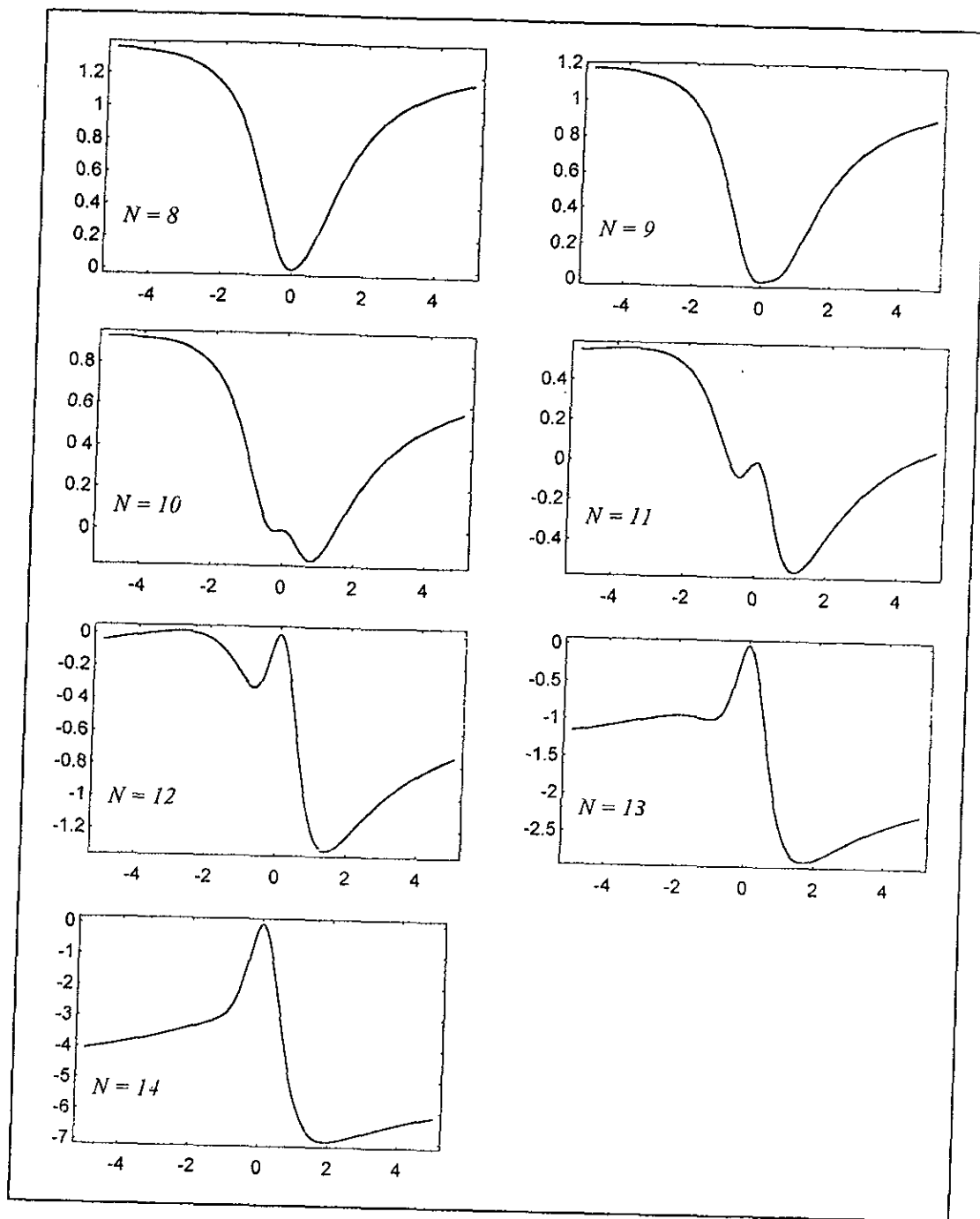


Figura 6. Superficies de Energía de los isótopos del Samario. La estructura de estas superficies cambia de tener un mínimo esférico para los más ligeros ($N = 8$ y $N = 9$) a tener un estado base deformado prolato ($N \geq 10$).

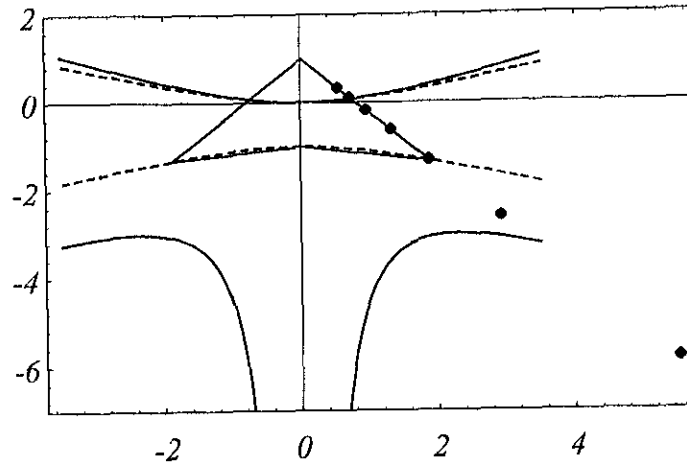


Figura 7. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.2) de los isótopos del Samario para valores del número de bosones $N = 8$ a $N = 14$. Además se incluye la Separatriz de IBM con la descripción de las simetrías dinámicas.

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{85.98}{-151.40 + \frac{2170.62}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-257.80 + \frac{2170.62}{(N-1)}}{-151.40 + \frac{2170.62}{(N-1)}}. \quad (4.2.2)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 7, donde se puede apreciar que todos se alinean a lo largo de la recta (4.2.1) cuya pendiente m se encuentra calculada en la Tabla 4. En esta figura notamos que los isótopos del S_m exhiben una transición de espectro tipo vibracional a rotacional conforme se incrementa el número de bosones de neutrón, de acuerdo con la información experimental sobre los niveles de energía de los Samarios [Scholten, Iachello, y Arima, (1978)].

De la localización de los puntos en la Fig. 7, se encuentra que los núcleos ^{148}Sm y ^{150}Sm están en la región de parámetros $r_1 > r_{12}$, correspondiente a las formas esféricas. Mientras que los núcleos ^{152}Sm , ^{154}Sm y ^{156}Sm están en la región entre el eje- r_2 y el conjunto de Maxwell r_{13} , por lo tanto presentan un mínimo absoluto con deformación prolata y un punto de silla en $\gamma = \pi/3$. Es importante señalar que el núcleo ^{156}Sm está justo en al vértice del doble triángulo correspondiente a la simetría dinámica $SU(3)$. El núcleo ^{158}Sm cae en la región entre el conjunto de bifurcación de Maxwell r_{13} y el conjunto r_{11} , esto significa que la SE presenta un estado base prolata como los anteriores, sin embargo son estados menos estables.

Finalmente el núcleo ^{160}Sm cae en la región debajo del conjunto r_{11} y por lo tanto solamente tiene estados prolatos y débilmente amarrados. Todos los puntos caen en la región prolata del triángulo doble correspondiente a la transición vibracional-rotacional.

Cadena de isótopos del Gd

Consideremos ahora los isótopos del Gadolinio, para el cual se logró un ajuste satisfactorio de

Gd

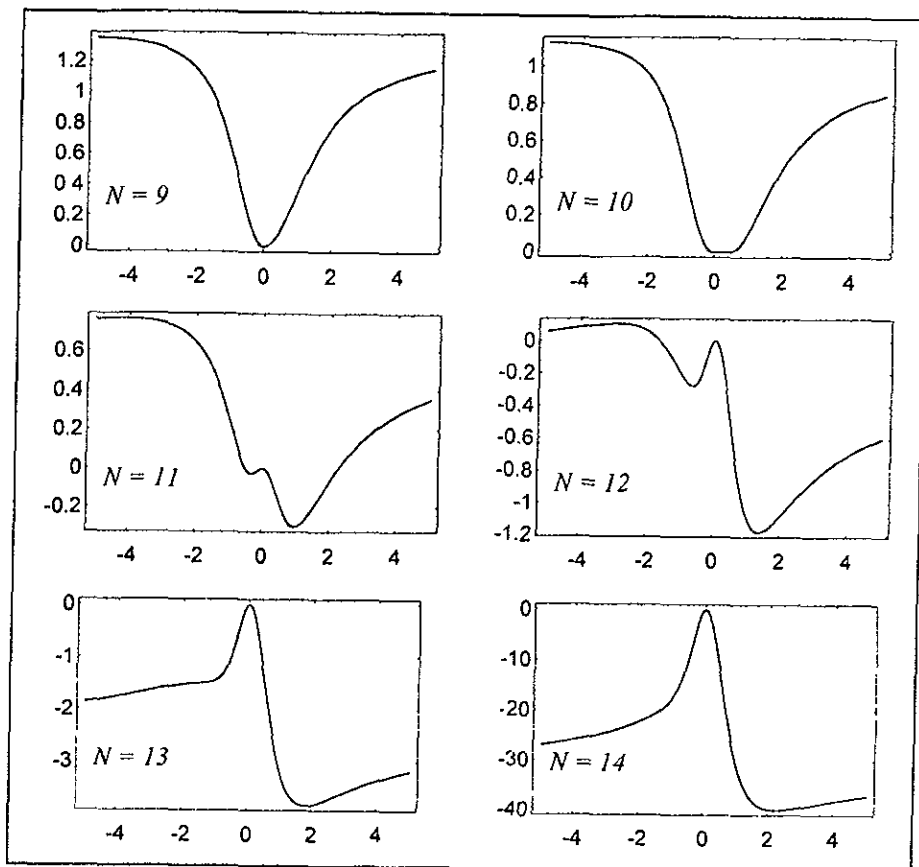


Figura 8. Superficies de Energía de los isótopos del Gadolinio. La estructura de estas superficies cambia de tener un mínimo esférico para los más ligeros ($N = 9$ y $N = 10$) a tener un estado base deformado prolato ($N \geq 11$). Para $N = 10$ se puede apreciar que el mínimo se extiende a una deformación prolata.

los parámetros en la Tabla 1 usando un total de los sesenta y un niveles de energía más bajos, en los isótopos pares desde ^{150}Gd hasta ^{160}Gd , lográndose una desviación r.m.s. de 91 keV. Para la cadena de Gd tenemos el número atómico $Z = 64$, con catorce protones fuera de capa cerrada y así el número de bosones de protón es $N_\pi = 7$. Considerando los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 150 \rightarrow 160$, tenemos que el número de bosones de neutrón corre desde $N_\nu = 2$ hasta $N_\nu = 7$. El número total de bosones varía de $N = 9 \rightarrow 14$. Ambos bosones son de tipo partícula. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2 donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes, en la Fig. 8 para cada isótopo se exhibe un corte $\varepsilon(x, 0)$ de la SE , donde se consideró la variable cartesiana $x = \beta \cos \gamma$ en la expresión dada en la Ec. (3.5.1). Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = -98.7N^2 + 1398.10N, \quad S = -4.45N(N - 1).$$

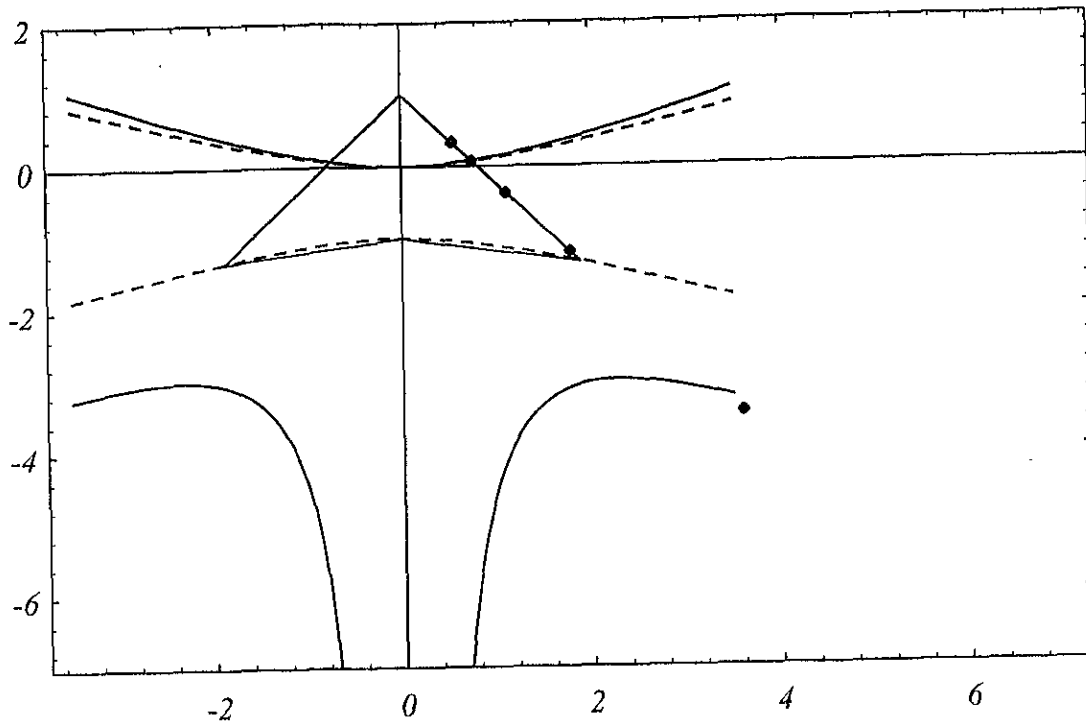


Figura 9. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.3) de los isótopos del Gadolinio para valores del número de bosones $N = 9$ a $N = 13$. Además se incluye la Separatriz de IBM con la descripción de las simetrías dinámicas. En la segunda figura se presenta un acercamiento exhibiendo $N = 10$ sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+

Los parámetros esenciales de las superficies de energía, de las Ecs. (3.3.12), resultan

$$r_2 = \frac{69.02}{-197.40 + \frac{2598.81}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-282.8 + \frac{2598.81}{(N-1)}}{-197.40 + \frac{2598.81}{(N-1)}}. \quad (4.2.3)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 9, y la pendiente de la recta (4.2.1) sobre la cual se alinean está dada en la Tabla 4. En esta figura notamos que los isótopos del Gd exhiben una transición de un espectro del tipo vibracional a otro rotacional, conforme se incrementa el número de bosones de neutrón, de una manera muy semejante a la de los Samarios.

De la localización de los puntos de la Fig. 9 se encuentra que el núcleo ^{150}Gd está en la región de parámetros $r_1 > r_{12}$, correspondiente a las formas esféricas. El núcleo ^{152}Gd está sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , el cual se caracteriza por tener, además del mínimo esférico, otro prolato de la misma profundidad. El ^{154}Gd está en la región entre el eje- r_2 y el conjunto de Maxwell r_{13}^- , por lo tanto presenta un mínimo absoluto con deformación prolata y un punto de silla oblato. El núcleo ^{156}Gd está muy próximo al vértice del doble triángulo correspondiente a la simetría dinámica $SU(3)$, donde los dos valores máximos de la SE alcanzan igual altura y la profundidad del mínimo secundario es igual a la energía asintótica $\epsilon_\infty = r_1 + 1$. Los dos últimos, ^{158}Gd y ^{160}Gd , caen en la región por debajo del conjunto r_{11} y por lo tanto tiene estados prolatos débilmente amarrados. Como en el caso del Sm , todos los puntos caen también en el lado derecho del triángulo doble, correspondiente a la transición vibracional-rotacional.

Pt a)

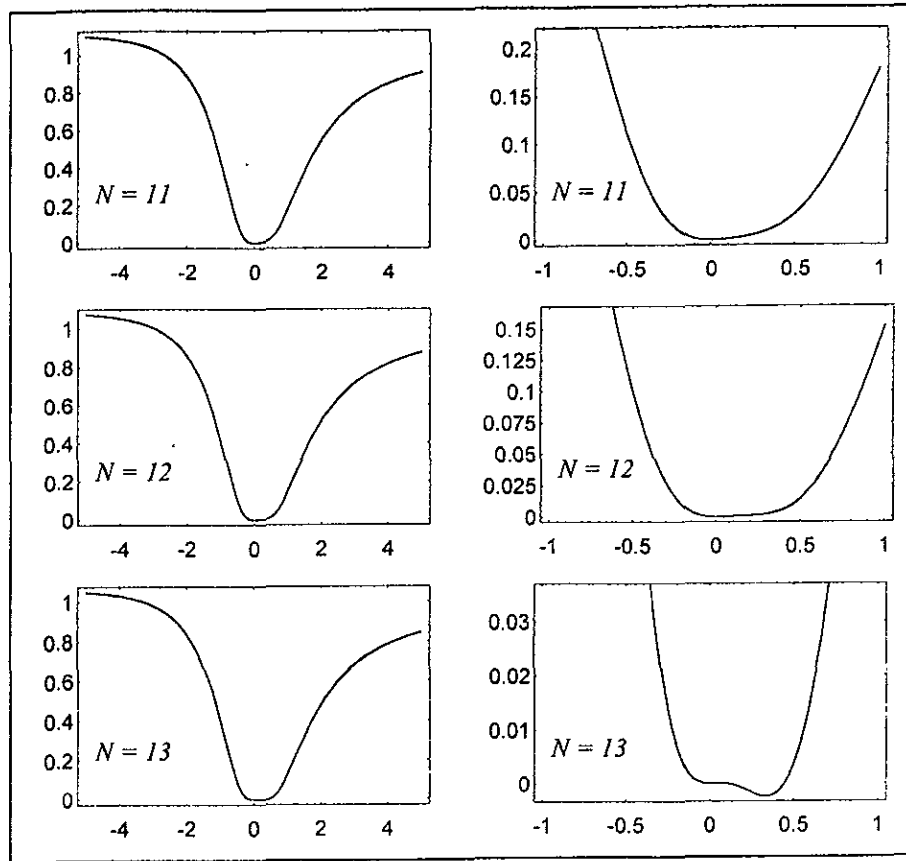


Figura 10. Superficies de Energía de los isótopos del Platino^a. La estructura de estas superficies cambia de tener un mínimo deformado para el más ligero ($N = 13^*$) a tener un estado base esférico para los más pesados: $N = 12^*$ y $N = 11^*$.

Cadena de isótopos del Pt^a

Para los isótopos del Platino, con número de masa desde $A = 182 \rightarrow 198$, los parámetros k_i se ajustaron inicialmente de un total de 82 niveles experimentales, sin embargo la desviación del ajuste resulta relativamente grande: 140 keV ; por esta razón se consideró conveniente partir la cadena para lograr un mejor ajuste. La primera parte la designaremos como Pt^a y consiste de los isótopos desde ^{182}Pt hasta ^{186}Pt . Discutiremos estos en esta sección. Los restantes se denotan como Pt^b y su discusión la haremos más tarde debido a que caen en una región muy diferente del espacio de parámetros esenciales.

Para la cadena de Pt^a tenemos el número atómico $Z = 78$, con cuatro huecos de protón en la semi-capa y así el número de huecos bosónicos de protón es $N_\pi = 2^*$. Considerando los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 182 \rightarrow 198$, tenemos que el número de huecos de bosón para los neutrones corre desde $N_\nu = 11^*$ hasta $N_\nu = 9^*$. El número total de bosones varía de $N = 13^* \rightarrow 11^*$. Ambos bosones son de tipo hueco.

Las constantes ϵ , u_0 , están dadas en la Tabla 2, así como las restantes, con las cuales se

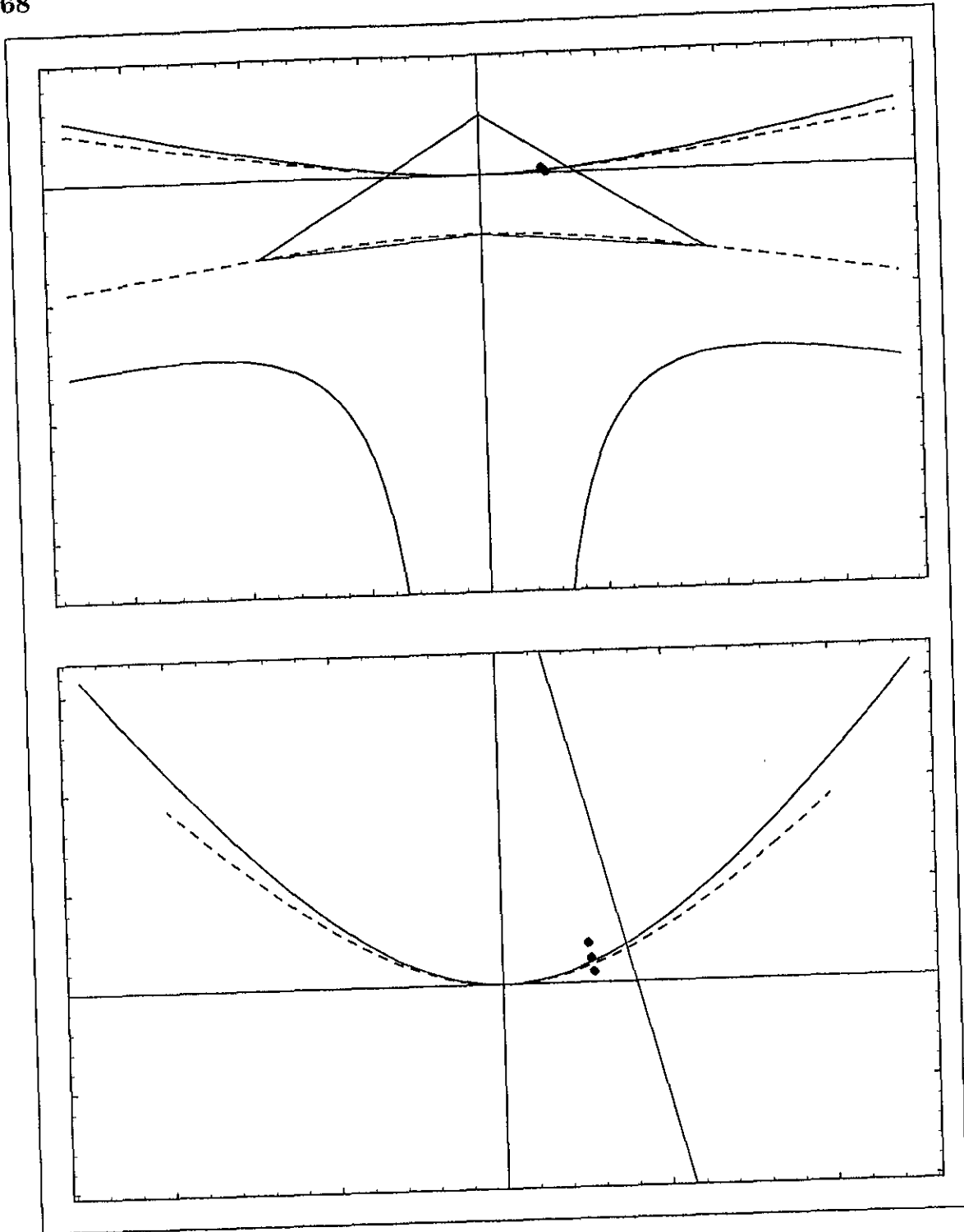


Figura 11. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.4) de los isótopos del Platino^a para valores del número de bosones $N = 11$ a $N = 13$. Además se incluye la Separatriz de IBM con la descripción de las simetrías dinámicas.

determinan a_1 , a_2 y a_3 a partir de las Ecs. (3.3.5) con las cuales calculamos las superficies de energía asociadas a estos isótopos. De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 10 un corte de la SE para valores de $\gamma \approx 0^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. Como antes se ha mencionado, esto es equivalente a considerar $\beta > 0$ y $\beta < 0$, respectivamente. El núcleo del ^{182}Pt , con $N = 13$ huecos de bosón, es deformado con $\beta \cong 1/3$. Los otros dos, ^{184}Pt y ^{186}Pt , con $N = 12$ y $N = 11$ respectivamente, son esféricos.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 29.80N^2 + 133.46N, \quad S = -1.55N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía, de las Ecs. (3.4.7), resultan

$$r_2 = \frac{48.08}{59.60 + \frac{326.52}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-25.3 + \frac{326.52}{(N-1)}}{59.60 + \frac{326.52}{(N-1)}}. \quad (4.2.4)$$

Al sustituir cada valor de N se obtiene una serie de puntos alineados según la recta (4.2.1), con la pendiente m asociada en este caso dada en la Tabla 4. La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 11. En esta figura notamos que los isótopos del Pt^a recorren ascendentemente el espacio de parámetros conforme aumenta el número de masa, exhibiendo así una transición de forma de rotacional a vibracional, ya que en los puntos de la Fig. 11 se encuentra que el núcleo ^{182}Pt está en la región de parámetros entre el eje- r_2 y el conjunto r_{13}^+ , por lo tanto presenta un mínimo absoluto con deformación prolata y otro mínimo relativo correspondiente a un estado excitado esférico. Los núcleos ^{184}Pt y ^{186}Pt están por arriba del conjunto r_{12} , y por lo tanto presentan un solo mínimo correspondiente a un estado esférico.

Cadena de isótopos del U

Para los isótopos del Uranio los parámetros k_i se ajustaron un total de 47 niveles experimentales lográndose una desviación *r.m.s.* de tan sólo 27 keV, según se indica en la Tabla 1. Para la cadena de U tenemos el número atómico $Z = 92$, con diez protones fuera de capa cerrada, y así el número de bosones de protón es $N_\pi = 5$. Considerando los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 228 \rightarrow 240$, tenemos que el número de bosones de neutrón corre desde $N_\nu = 5$ hasta $N_\nu = 11$. El número total de bosones varía de $N = 10 \rightarrow 16$. Ambos bosones son de tipo partícula. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 12 un corte de la SE para valores de $\gamma = 0^\circ$ y $\gamma = 60^\circ$. Como antes se ha mencionado, esto es equivalente a considerar $\beta > 0$ y $\beta < 0$, respectivamente. La forma de la superficie de energía se mantiene casi sin cambios, presentando un mínimo absoluto correspondiente a una deformación prolata un punto de silla de escasa profundidad.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 47.80N^2 + 35.07N, \quad S = 6.05N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía, de las Ecs. (3.4.7), resultan

$$r_2 = \frac{103.52}{95.60 + \frac{165.73}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-32.5 + \frac{165.73}{(N-1)}}{95.60 + \frac{165.73}{(N-1)}}. \quad (4.2.5)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 13, y el valor de la pendiente m de la recta que los contiene se da en la Tabla 4. En esta figura notamos que los isótopos del U están en la región entre el eje- r_2 y el conjunto de Maxwell r_{13}^- ; por esto es que presentan un mínimo absoluto con deformación prolata y otro mínimo relativo en la dirección β correspondiente a un punto de silla en la región prolata. La proximidad al eje- r_2 corresponde a la profundidad relativamente menor de este punto de ensilladura.

Cadena de isótonos ISO88

Para los isótonos par-par con un número de 88 neutrones, definidos por el conjunto de los ocho núcleos dados al principio de la presente sección,

$${}_{56}^{144}\text{Ba}, \quad {}_{58}^{146}\text{Ce}, \quad {}_{60}^{148}\text{Nd}, \quad {}_{62}^{150}\text{Sm}, \quad {}_{64}^{152}\text{Gd}, \quad {}_{66}^{154}\text{Dy}, \quad {}_{68}^{156}\text{Er}, \quad {}_{70}^{158}\text{Yb};$$

se tienen tres bosones de neutrón del tipo partícula en todos los casos. En cambio, los primeros seis bosones de protón son del tipo partícula, mientras que los últimos tres son del tipo agujero. Nótese que el núcleo ${}_{66}^{154}\text{Dy}$ está considerado en ambos casos. En efecto, el número de bosones de protón desde el ${}_{56}^{144}\text{Ba}$ hasta el ${}_{66}^{154}\text{Dy}$ corre desde $N_\nu = 3$ hasta $N_\nu = 8$. A este primer subconjunto se le denomina $ISO88^a$. El segundo subconjunto, formado por los núcleos ${}_{66}^{154}\text{Dy}$, ${}_{68}^{156}\text{Er}$, ${}_{70}^{158}\text{Yb}$, tiene bosones de protón con los valores respectivos desde $N_\pi = 8^*$ hasta $N_\pi = 6^*$. A este segundo subconjunto se le denomina $ISO88^b$.

ISO88^a

Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 14 un corte de la $SE \epsilon(x, 0)$. Para $N = 6$ y $N = 7$ existe un solo mínimo esférico. Cuando $N = 8$ se observa la coexistencia de dos mínimos esférico-prolato, con este último como el más profundo. Los tres restantes, $N = 9$, $N = 10$ y $N = 11$ tienen un solo mínimo prolato, un máximo en el origen y un punto de silla cercano al origen así como otro máximo más alejado en la dirección prolata.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 7.05N^2 + 85N, \quad S = -30.42N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{31.68}{14.10 + \frac{184.10}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-25.10 + \frac{184.10}{(N-1)}}{14.10 + \frac{184.10}{(N-1)}}. \quad (4.2.6)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$ sigue la recta (4.2.1) con la pendiente m escrita en la Tabla 4. Estos puntos se muestran en la Fig. 15. En esta figura notamos que la estructura de las superficies de energía tiene un solo mínimo esférico para los dos más ligeros y un solo mínimo prolato para los tres más pesados, más uno intermedio el cual presenta una coexistencia esférico-prolato entre sus mínimos.

ISO88^b

Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 16 un corte $\epsilon(x, 0)$ de la *SE*. Debemos recordar en este punto que los bosones de protón son del tipo hueco en este caso, de manera que para $N = 9$ el núcleo es más pesado que para $N = 10$ y $N = 11$. El primero es esférico y el último es deformado prolato con un punto de silla sobre SE en la región oblata. El núcleo intermedio $N = 10$ presenta coexistencia de los mínimos esférico y prolato.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = -11.60N^2 + 259.80N, \quad S = -30.82N(N - 1).$$

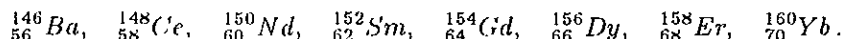
Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{24.89}{-23.2 + \frac{496.40}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-54.00 + \frac{496.40}{(N-1)}}{-23.2 + \frac{496.40}{(N-1)}}. \quad (4.2.7)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 17. También tenemos a todos estos puntos alineados en una recta predicha en (4.2.1) con un valor de su pendiente m dada en la Tabla 4. En esta figura notamos que todos los puntos se ubican sobre uno de los lados del doble triángulo, correspondiendo a transición esférico-deformado prolato.

Cadena de isótonos ISO90

Para los isótonos par-par con un número de 90 neutrones, definidos por el conjunto de los ocho núcleos dados al principio de la presente sección,



se tienen cuatro bosones de neutrón del tipo partícula en todos los casos. En cambio, los primeros seis bosones de protón son del tipo partícula, mientras que los últimos tres son del tipo agujero. Nótese que el núcleo ${}_{66}^{156}\text{Dy}$ está considerado en estos dos casos. En efecto, el número de bosones de protón desde el ${}_{56}^{146}\text{Ba}$ hasta el ${}_{66}^{156}\text{Dy}$ corre desde $N_p = 3$ hasta $N_p = 8$. A este primer subconjunto se le denomina *ISO90^a*. El segundo subconjunto, formado por los núcleos ${}_{66}^{156}\text{Dy}$, ${}_{68}^{158}\text{Er}$, ${}_{70}^{160}\text{Yb}$, tiene bosones de protón con los valores respectivos desde $N_p = 8^*$ hasta $N_p = 6^*$. A este segundo subconjunto se le denomina *ISO90^b*. Discutimos primero el segundo subconjunto porque, como veremos, sus puntos en el espacio de parámetros se mapean en una región similar a los discutidos hasta ahora, en tanto que el primer subconjunto se tratará más adelante.

Isótonos ISO90^b

Esta cadena se forma con los núcleos ${}_{66}^{156}\text{Dy}$, ${}_{68}^{158}\text{Er}$, ${}_{70}^{160}\text{Yb}$. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótonos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores que están dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo, en la Fig. 18, un corte $\epsilon(x, 0)$ de la *SE*. Debemos recordar en este punto que los bosones de protón son del tipo hueco dentro de esta cadena. Así, con $N = 10$, el núcleo ${}_{70}^{160}\text{Yb}$ es más pesado que para $N = 11$ y $N = 12$, ${}_{68}^{158}\text{Er}$, ${}_{66}^{156}\text{Dy}$, respectivamente. El ${}_{70}^{160}\text{Yb}$ presenta coexistencia de los mínimos esférico y prolato, con el prolato ligeramente más profundo. Para el ${}_{66}^{156}\text{Dy}$ y el ${}_{68}^{158}\text{Er}$ la forma es prolata, con un punto de silla sobre SE en la región oblata.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = -33.20N^2 + 547.31N, \quad S = -20.1N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{34.50}{-66.40 + \frac{1028.22}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-112.90 + \frac{1028.22}{(N-1)}}{-66.40 + \frac{1028.22}{(N-1)}}. \quad (4.2.8)$$

Los puntos $(r_2(N), r_1(N))$ caen dentro de la recta (4.2.1) cuya pendiente se encuentra dada en la Tabla 4, y se muestran en la Fig. 19. En esta figura notamos que estos isótonos se mapean fuera del doble triángulo, pero muy próximos su lado derecho. El punto superior se encuentra en la región de coexistencia prolato-esférico, mientras que los otros dos están en la región con un mínimo prolato y un punto de silla oblato.

Cadena de isótopos de Ru

En esta cadena se ajustaron un total de 34 niveles experimentales para los isótopos en la región ${}^{96}\text{Ru} \rightarrow {}^{112}\text{Ru}$. Es interesante notar que en la descripción a bajas energías se encontró que en el hamiltoniano efectivo se tiene que el parámetro de la interacción cuadrupolar es nulo, esto es, $k_7 = 0$. Para la cadena de Ru tenemos el número atómico $Z = 44$, con seis huecos de protón fuera de capa cerrada, y así el número de bosones de protón es $N_\pi = 3^*$. Debemos notar que los núcleos de capa cerrada, y así el número de bosones de neutrones desde el punto de vista del modelo IBM-1, ya que tienen el mismo número de bosones. De este modo, consideramos sólo los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 96 \rightarrow 110$ y así tenemos que el número de bosones de neutrones corre desde $N_\nu = 1$ hasta $N_\nu = 8$. El número total de bosones varía de $N = 4 \rightarrow 11$. Estos bosones son de tipo partícula. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes, para cada isótopo se exhibe en la Fig. 20 un corte $\varepsilon(x, 0)$ de la SE. Es importante darse cuenta de que en este caso los núcleos deformados son del tipo γ -inestable, ya que el parámetro que factoriza la dependencia en γ de la SE en la Ec. (3.3.3) se ha anulado.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 20.10N^2 + 475N, \quad S = 23.30N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = 0, \quad r_1 = \frac{-146.2 + \frac{990.2}{(N-1)}}{40.12 + \frac{990.2}{(N-1)}}. \quad (4.2.9)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 21. En esta figura notamos que los isótopos del Ru se localizan todos sobre el eje vertical. Progresando en la dirección negativa al incrementarse el valor de N , observamos una transición de forma esférico \rightarrow γ -inestable. Los núcleos ${}^{96}\text{Ru} \rightarrow {}^{102}\text{Ru}$, están en la región esférica y aquellos en la región ${}^{104}\text{Ru} \rightarrow {}^{110}\text{Ru}$ son más y más deformados. La transición de forma tiene lugar entre los valores $N = 7$ y $N = 8$ [Frank, (1989)]. La deformación se incrementa, según los valores críticos dados en la Ec. (3.4.16), desde

$\beta = 0.16$ para ^{104}Ru hasta $\beta = 0.58$ para ^{110}Ru . Nótese que el tamaño de la deformación alcanza el valor $\beta = 1$, citado como el valor clásico del límite $O(6)$, si $N = 20$. El límite, para los valores del ajuste del Ru , dado por la Ec. (4.2.9) en el caso $N \rightarrow \infty$, es

$$r_1 = \frac{a_3 - u_0/2}{2a_1 - a_3},$$

y así el valor de la deformación tiende al valor $\beta = 1.90$.

Cadena de isótopos de Os

Para la cadena de Os tenemos el número atómico $Z = 76$, con seis huecos de protón fuera de capa cerrada, por lo que el número de bosones de protón es $N_\pi = 3^*$. El número de bosones de neutrón desde ^{180}Os hasta ^{198}Os , se calcula de la capa más próxima $N = 126$. Así, $N_\nu = 11^*N_\nu = 2^*$. Por lo tanto, en esta cadena todos los bosones son del tipo hueco y disminuyen al aumentar el número de masa. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4.

Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 22 el corte $\epsilon(x, 0)$ de la SE . En todas las superficies de energía el origen $\beta = 0$ tiene un máximo, de modo que nunca se obtiene una forma esférica para estos núcleos. Solamente se tiene un mínimo con deformación prolata y un punto de ensilladura. Así, para los dos más pesados, el ^{196}Os y ^{198}Os , el punto crítico de silla es muy profundo y accesible. Sobre estos puntos existe la posibilidad dinámica de oscilaciones prolato-oblato en las que el núcleo vuelve al fondo del pozo prolato, habiendo transitado por el punto silla oblato. Para los núcleos restantes, a partir del ^{194}Os , el amarre se vuelve más y más débil, por lo que el continuo se torna más accesible que el punto de silla.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 21.25N^2 + 193.20N, \quad S = -41.60N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{38.47}{42.5 + \frac{428.90}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-190.90 + \frac{428.90}{(N-1)}}{42.5 + \frac{428.90}{(N-1)}}. \quad (4.2.10)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$ se ubica dentro de la recta (4.2.1) cuya pendiente m se da en la Tabla 4. Todos ellos se muestran en la Fig. 23. En esta figura notamos que los dos puntos de la parte superior, donde se mapean los dos de mayor peso como se mencionó antes, corresponden a superficies próximas al eje-vertical negativo de la deformación γ -inestable. El tercer punto está casi sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , por lo cual, a partir de este el amarre se vuelve cada vez menor.

Cadena de isótopos de Pt^b

La segunda parte de los isótopos del Pt la designamos como Pt^b y consiste de los isótopos desde ^{188}Pt hasta ^{200}Pt . Discutiremos estos en esta sección. Para esta cadena tenemos el número atómico $Z = 78$, con cuatro huecos de protón en la semi-capa y así el número de huecos bosónicos de protón es $N_\pi = 2^*$. Considerando los valores dentro de esta cadena para el número de masa: $A = 188 \rightarrow 200$, tenemos que el número de huecos de bosón para los neutrones corre desde $N_\nu = 8^*$ hasta $N_\nu = 2^*$. El número total de bosones varía de $N = 10^* \rightarrow 4^*$. Ambos bosones son de tipo hueco.

Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 24 un corte $\epsilon(x, 0)$ de la SE. Como se puede apreciar de estas curvas, en todas las superficies de energía el origen $\beta = 0$ presenta un máximo, de modo que nunca se obtiene una forma esférica para estos núcleos. Además, en todas ellas se tiene solamente un mínimo prolato y un punto de ensilladura. El punto crítico de silla es muy profundo y accesible. Sobre todas estas superficies existe la posibilidad dinámica de oscilaciones prolato-oblato en las que el núcleo vuelve al fondo del pozo prolato, habiendo transitado por el punto silla oblato.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 63.59N^2 + 172.92N, \quad S = -99.97N(N - 1).$$

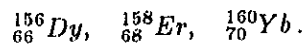
Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{10.98}{127.19 + \frac{473.02}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-308.81 + \frac{473.02}{(N-1)}}{127.19 + \frac{473.02}{(N-1)}}. \quad (4.2.11)$$

Al sustituir los valores de N para esta cadena, tenemos una serie de puntos en el espacio (r_2, r_1) alineados en la recta (4.2.1) con pendiente m dada en la Tabla 4. La localización de estos puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 25. En esta figura notamos que en los isótopos del Pt^b los puntos de la parte superior, donde se mapean los de mayor peso, como se mencionó antes, corresponden a superficies muy próximas al eje-vertical negativo de la deformación γ -inestable. El tercer punto está casi sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , por lo cual, a partir de este el amarre se vuelve cada vez menor, pero debido a la proximidad al semi-eje vertical en todos los casos los núcleos en esta cadena son casi γ -inestables.

Isótonos $ISO90^a$

Esta cadena, cuya primera parte presentamos anteriormente, consiste de los núcleos:



Se tienen cuatro bosones de neutrón del tipo partícula en todos los casos, mientras que los bosones de protón son del tipo agujero y cuentan desde $N_\pi = 8^*$ hasta $N_\pi = 6^*$, respectivamente. Nótese que el núcleo ${}_{66}^{156}Dy$ está considerado en estas ambas partes de la cadena. Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1 , a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 26 un corte $\epsilon(x, 0)$ de la SE. En la totalidad de esta cadena, desde $N = 7$ hasta $N = 12$, las SE tienen un solo mínimo prolato, un máximo en el origen y en la dirección prolata un punto de silla cercano al origen así como otro máximo más alejado. El punto crítico de silla es muy profundo y accesible. Sobre estas superficies existe la posibilidad dinámica de oscilaciones prolato-oblato, en las cuales el núcleo vuelve al fondo del pozo prolato habiendo transitado por el punto silla oblato.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = 68.45N^2 + 63.85N, \quad S = -42.05N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{76.93}{136.90 + \frac{264.60}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-144.30 + \frac{264.60}{(N-1)}}{136.90 + \frac{264.60}{(N-1)}}. \quad (4.2.12)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 27. En esta figura notamos que todos los puntos se localizan muy próximos entre sí, en una misma región dentro del doble-triángulo: entre el eje- r_2 horizontal y el conjunto r_{13} . La ubicación anterior sugiere una deformación establemente prolata, pero con la posibilidad de acceder inestablemente al punto de ensilladura de la SE en la región oblata de manera transitoria.

Cadena de isótopos de Ba

Para los isótopos del Bario, con número de masa desde $A = 128 \rightarrow 130$, los parámetros k_i se ajustaron inicialmente de un total de 39 niveles experimentales, sin embargo la desviación del ajuste resulta relativamente pequeña: $73keV$.

Para esta cadena de tenemos el número atómico $Z = 56$, con seis protones fuera de capa cerrada; y así el número de bosones de protón es $N_\pi = 3$. Considerando los valores del número de masa dentro de esta cadena, tenemos que el número de bosones tipo neutrón corre desde $N_\nu = 2$ hasta $N_\nu = 8$. El número total de bosones varía de $N = 5 \rightarrow 11$.

Las constantes de las superficies de energía asociadas a estos isótopos se obtienen de la Tabla 2, donde ϵ y u_0 están dadas directamente, mientras que a_1, a_2 y a_3 se calculan de las Ecs. (3.3.5). De esta forma encontramos los valores dados en la Tabla 4. Utilizando estas constantes se exhibe para cada isótopo en la Fig. 28 un corte $\epsilon(x, 0)$ de la SE.

En todos los casos se puede observar que existe únicamente un mínimo esférico y que el pozo se deforma un poco y se hace mucho más profundo al aumentar el número de bosones. De todos los casos que estudiamos en el presente trabajo, este es el único en el cual existe un máximo en la dirección de deformación prolata. En las dirección de deformación oblata el pozo de potencial crece asintóticamente, lo cual sugiere que a energías más grandes estos núcleos se rompen pasando por deformaciones oblatas.

Los valores de la energía tienen una magnificación M , y un corrimiento S , respecto a los valores del ajuste inicial, dados por

$$M = -48.30N^2 + 736.96N, \quad S = 59.25N(N - 1).$$

Los parámetros esenciales de las superficies de energía se calculan por medio de las Ecs. (3.4.7), obteniéndose

$$r_2 = \frac{-76.36}{-96.60 + \frac{1377.32}{(N-1)}}, \quad r_1 = \frac{-2.10 + \frac{1377.32}{(N-1)}}{-96.60 + \frac{1377.32}{(N-1)}}. \quad (4.2.13)$$

La localización de los puntos $(r_2(N), r_1(N))$, se muestra en la Fig. 29. En esta figura notamos que los isótopos del Ba se encuentran en una sola región, por encima del conjunto de bifurcación r_{12} y, notablemente, en la parte superior del doble triángulo. Es así que, a pesar de la gran extensión que recorren los puntos de estos isótopos sobre el espacio de parámetros, no se observan cambios de forma en ningún caso. También es interesante señalar que la recta sobre la que se ubican todos los puntos en este caso es una continuación del brazo derecho del triángulo doble, asociado a los vértices de los límites $U(5)$ y $SU(3)$.

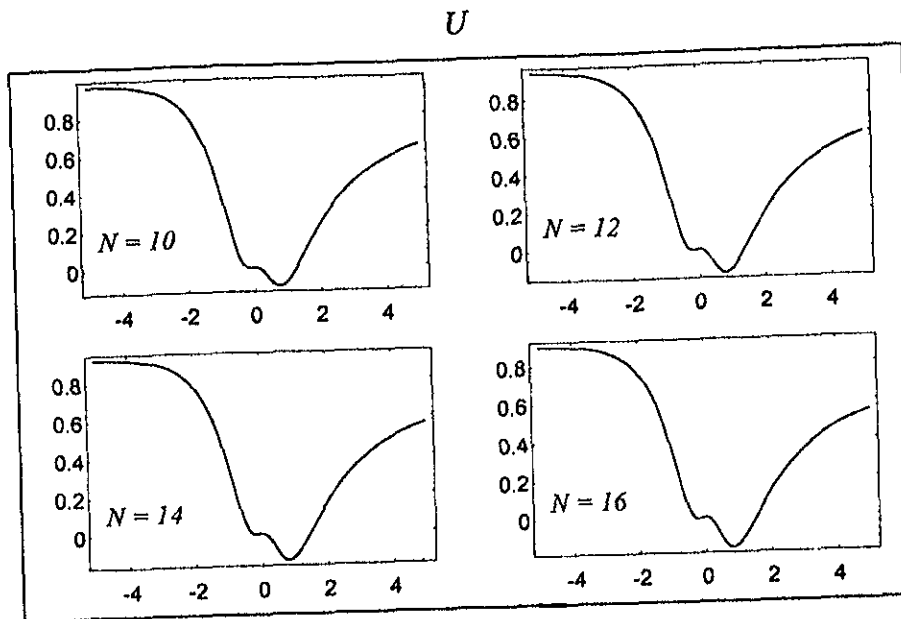


Figura 12. Superficies de Energía de los isótopos del Uranio. Todos los núcleos presentan un mínimo absoluto con deformación prolata y otro mínimo relativo en la variable β correspondiente a un punto de silla de profundidad relativamente menor.

BIBLIOGRAFIA

- Castaños, O., Chacón, E., Frank, A., y Moshinsky, M., *J Math. Phys.*, **20**, (1979) 35.
 Castaños O., Federman P., Frank A. y Pittel S., *Nucl. Phys.* **A379**, (1982) 61-76.
 Frank A, *Phys. Rev. C*, **39**, (1989) 652-657.
 Feng, D. H., Gilmore, R., y Deans, S. R. *Phys. Rev.*, **C23**, (1981) 1254.
 Gómez A., Castaños O., Frank A., Alonso, C. y Arias, J. M., *Nucl. Phys.* **A 589** (1995) 267-292.
 González E. L., *El Modelo de Bosones Interactuantes y su Aplicación a Cadenas de Isótopos e Isótonos Par-Par*, tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (1990).
 Kirson, M. W., y Leviatan, A., *Phys. Rev. Lett.*, No. 26, **55**, (1985) 2846-2849.
 Scholten O., Iachello F., y Arima A., *Ann. of Phys.* **115** (1978) 325.
 Talmi, I., *Rev. Mod. Phys.*, **34**, (1962) 704.

ANEXO. OTRAS FIGURAS

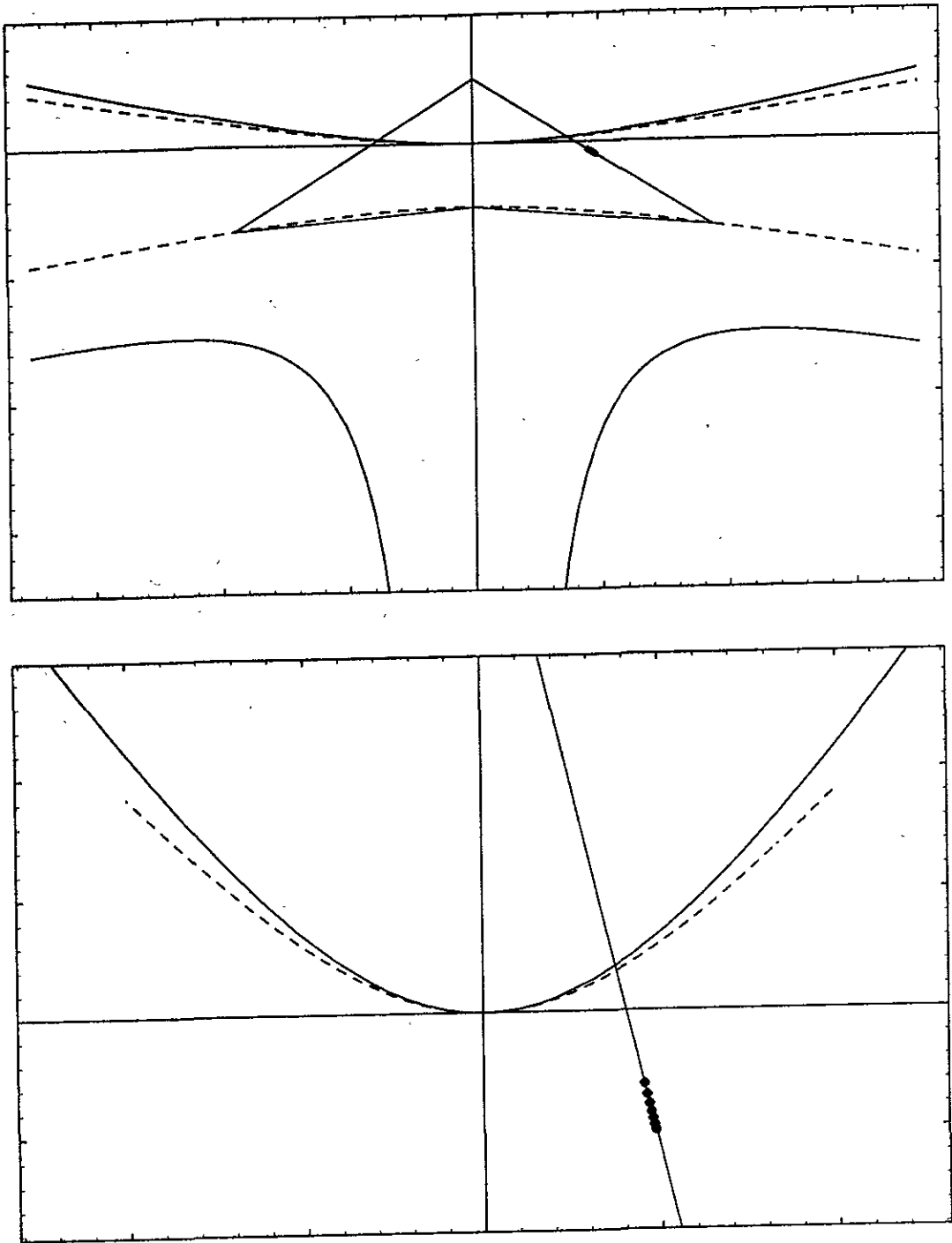


Figura 13. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.5) de los isótopos del Uranio para valores del número de bosones $N = 10$ a $N = 16$. Todos los núcleos están en la región entre el eje- r_2 y el conjunto de Maxwell r_{13} .

88a

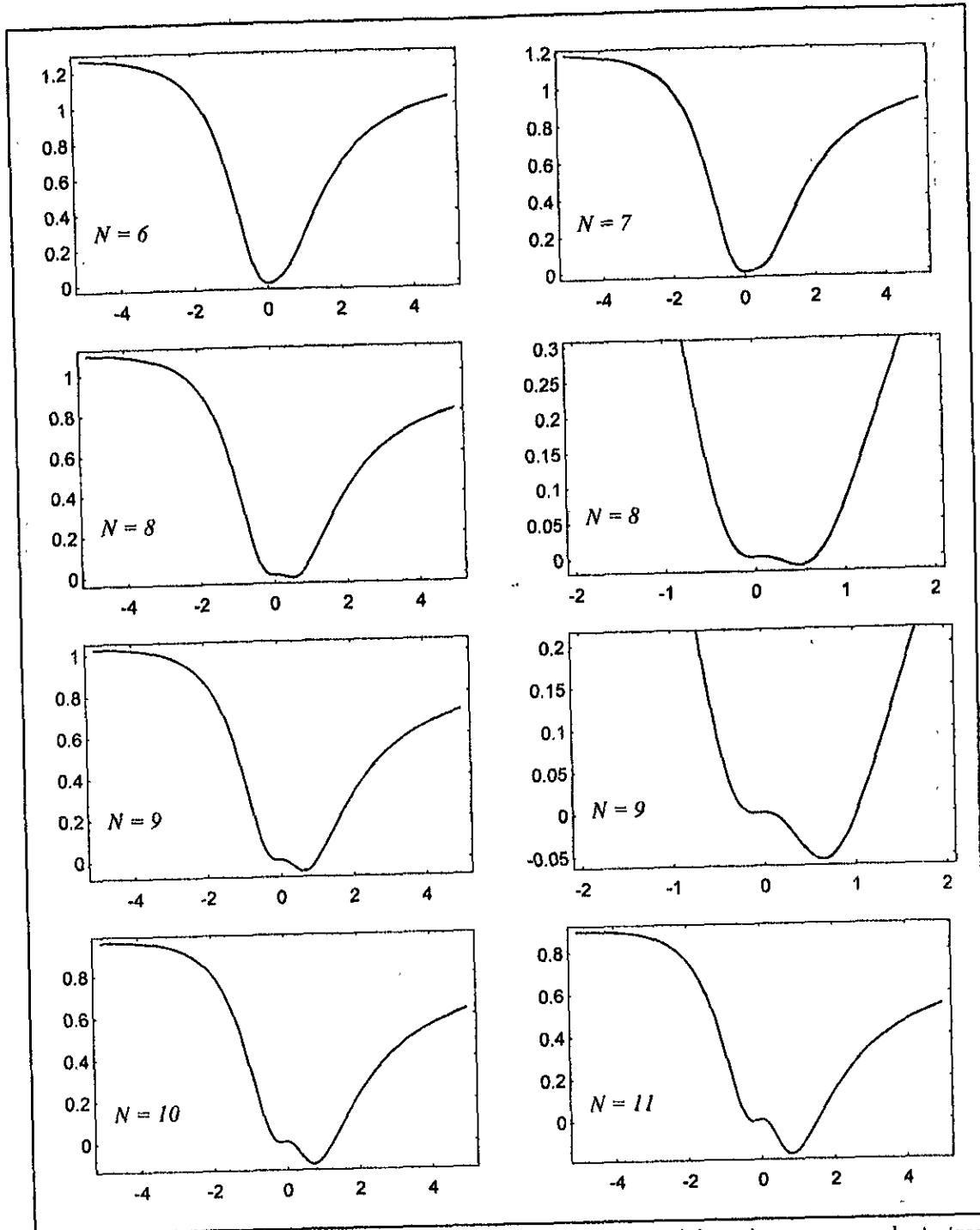


Figura 14. Superficies de Energía de los isótonos $ISO88^a$. Estos núcleos siguen una conducta transicional de esférico a rotacional. Para $N = 8$ se grafica un acercamiento en mayor detalle alrededor del origen exhibiendo una coexistencia esférico-prolato. El mínimo relativo en $N = 9, 10$ y 11 corresponde a un punto de silla de la superficie.

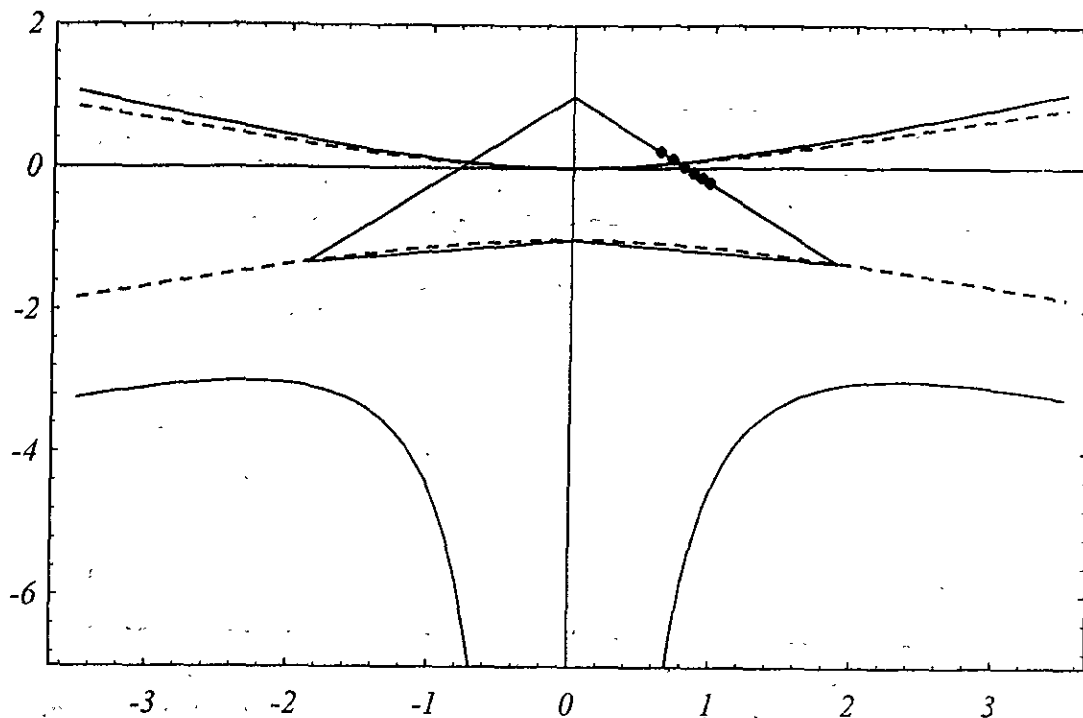


Figura 15: Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.6) de los isótonos $ISO88^a$, donde la graficación de éstos recorre descendientemente uno de los lados del doble triángulo. Los dos primeros están en la región de las formas esféricas; el tercero, con $N = 8$, está en la región que representa estados excitados esféricos en coexistencia con el estado base prolato y para los tres más pesados el mínimo en el origen desaparece, quedando un estado prolato.

88b

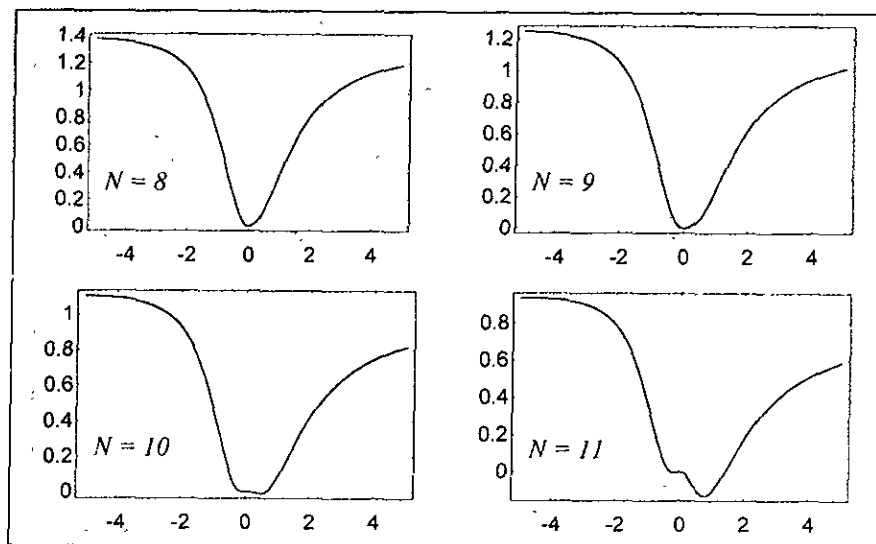


Figura 16. Superficies de Energía de los isótonos $ISO88^b$, Estos núcleos siguen una conducta transicional de rotacional a esférico. Para $N = 10$ se exhibe una coexistencia esférico-prolato. El mínimo relativo en $N = 11$ corresponde a un punto de silla de la superficie.

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

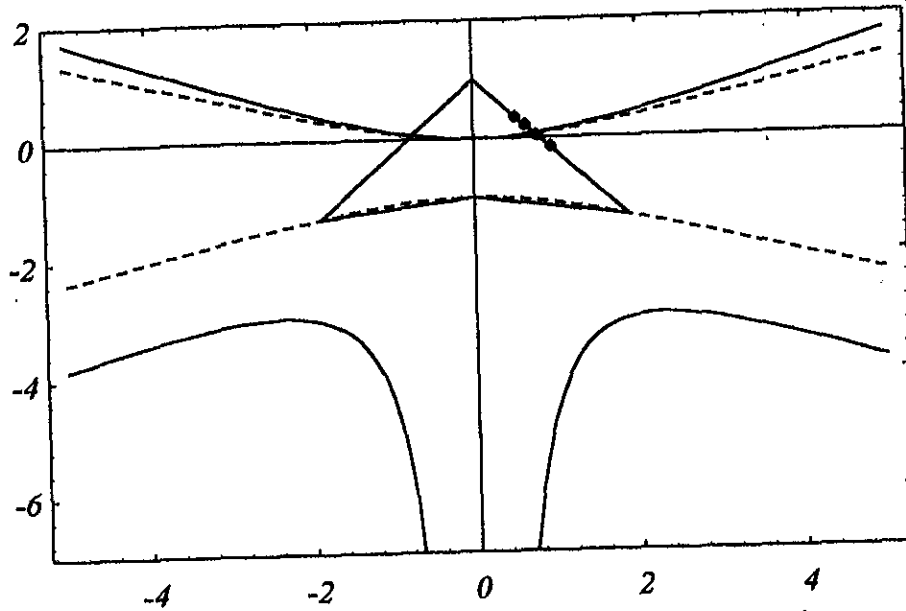


Figura 17. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.7) de los isótonos $ISO88^b$, donde la graficación de éstos recorre ascendentemente uno de los lados del doble triángulo. El punto de arriba está en la región de las formas esféricas; el segundo, con $N = 10$, está en la región que representa estados excitados esféricos en coexistencia con el estado base prolato; y para el más ligero, con $N = 11$, el mínimo en el origen desaparece, quedando un solo mínimo prolato.

ISO90 b)

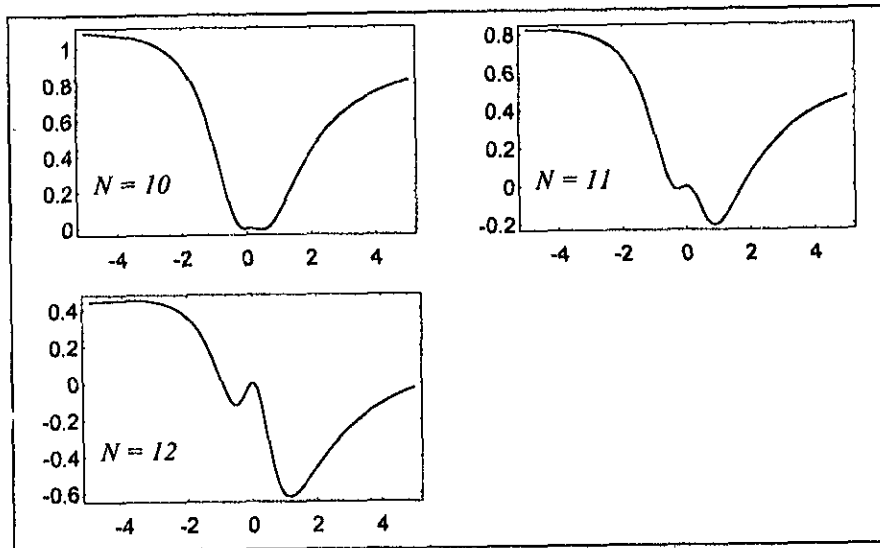


Figura 18. Superficies de Energía de los isótonos $ISO90^b$. Para el más pesado $N = 10$ se observa que coexisten los mínimos esférico y deformado prolato, pero para los más ligeros la deformación es solamente prolata

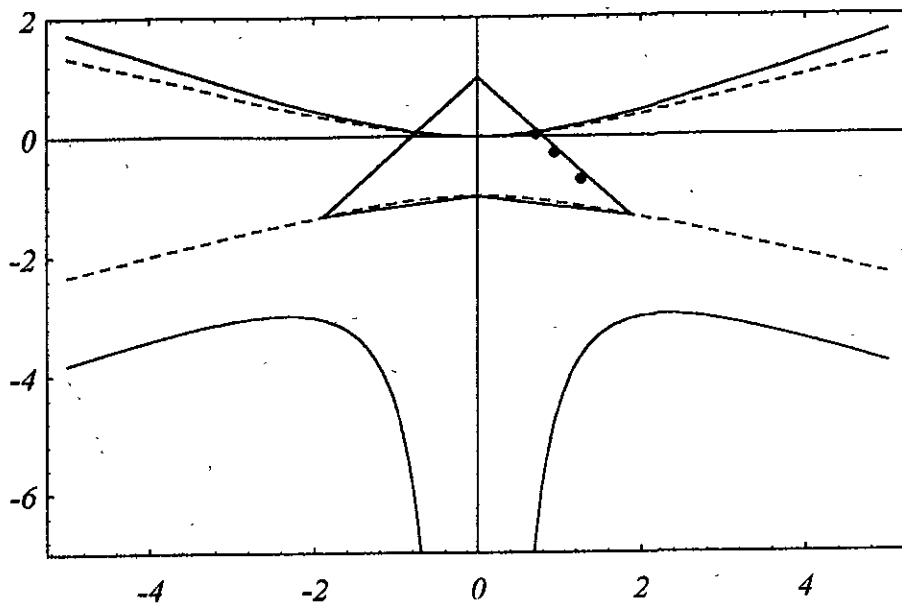


Figura 19. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.8) de los isótonos $ISO90^b$. Estos núcleos siguen una conducta transicional de rotacional a esférico. Para $N = 10$ el punto está en la zona de coexistencia de formas esférico-prolato. El mínimo absoluto en $N = 11$ y 12 se encuentra en la región donde la SE tiene solamente un mínimo prolato y un punto de silla en la dirección de deformaciones oblatas.

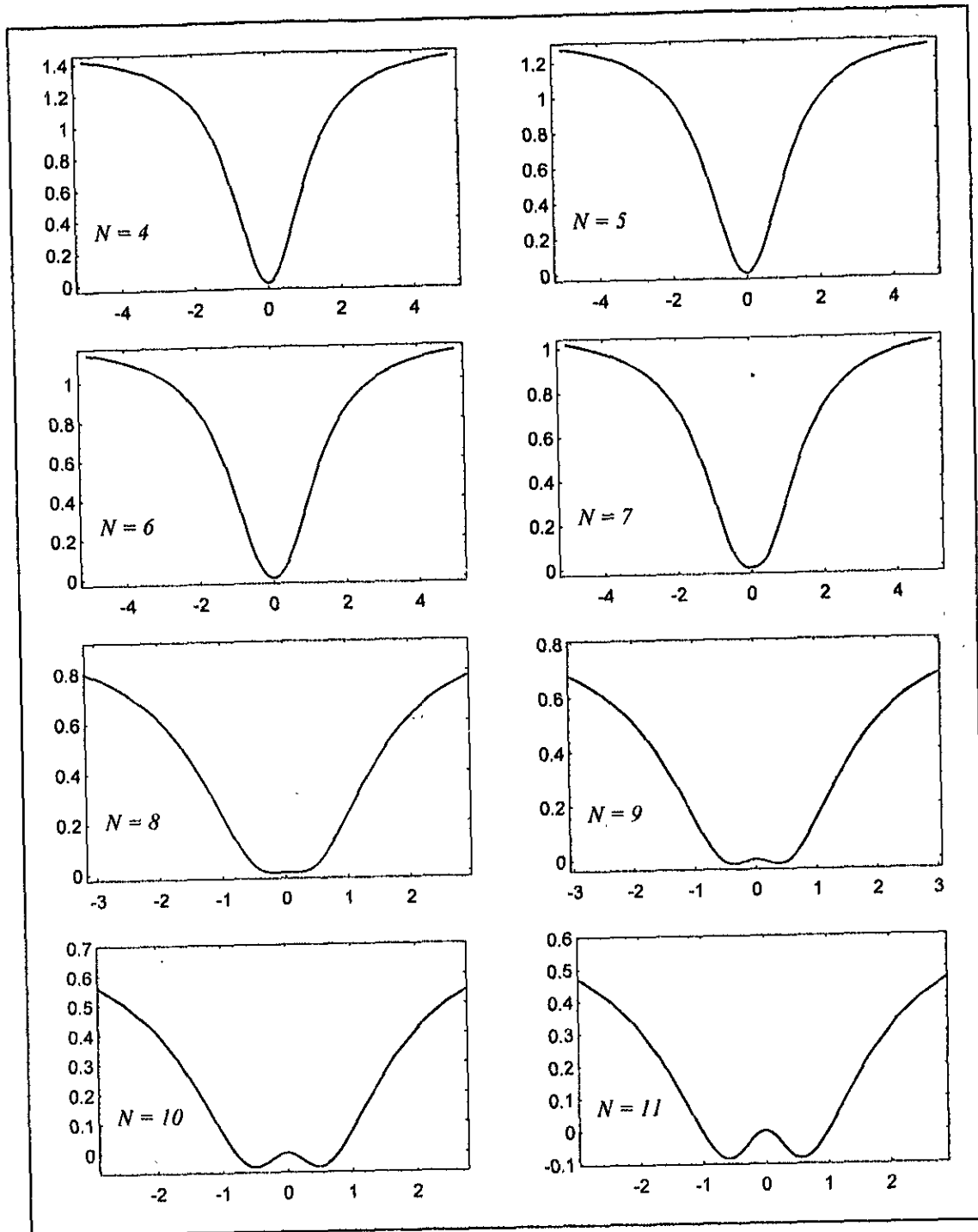


Figura 20. Superficies de Energía de los isótopos del Rutenio. La estructura de estas superficies cambia de tener un mínimo esférico para los más ligeros, de $N = 4$ a $N = 7$, a una deformación γ -inestable si $N \geq 8$.

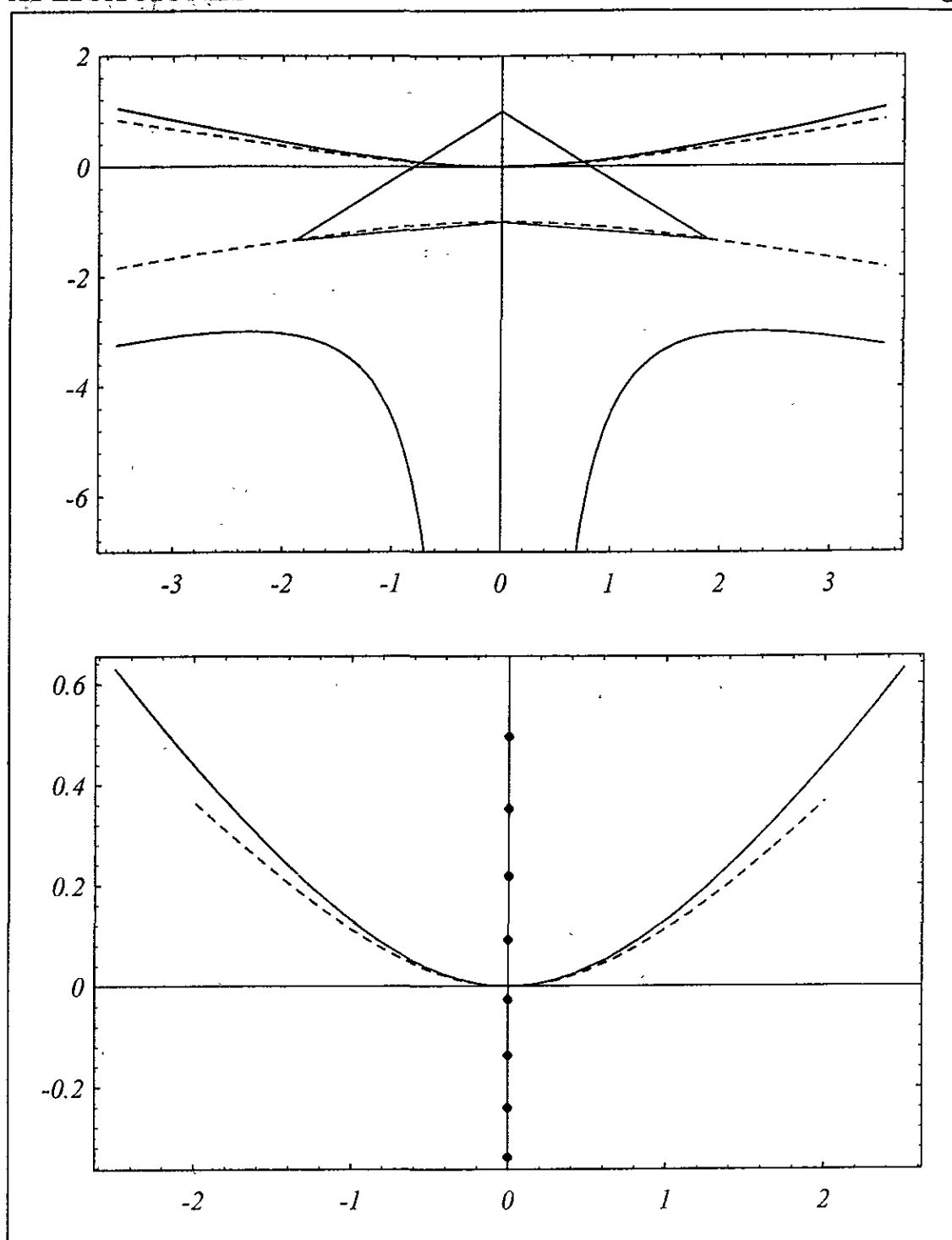


Figura 21. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.9) de los isótopos del Rutenio para valores del número de bosones $N = 4$ a $N = 11$. Además se incluye la Separatriz de IBM con la descripción de las simetrías dinámicas.

Os

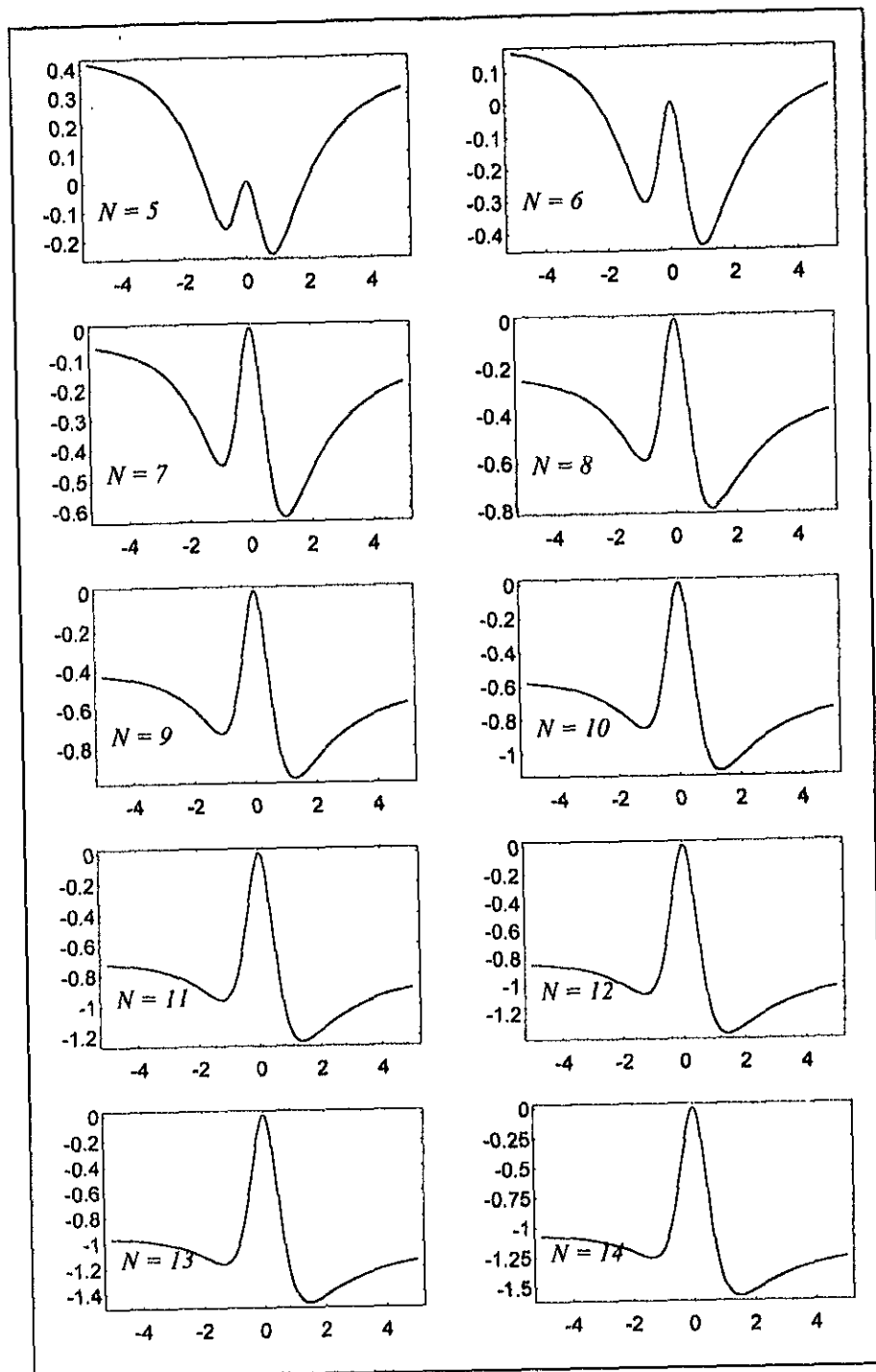


Figura 22. Superficies de Energía de los isótopos de Os. En estas superficies no se tienen formas esféricas, solamente existe un mínimo prolato y un punto de silla oblató. Como los bosones son del tipo agujero, el peso disminuye con el valor de N

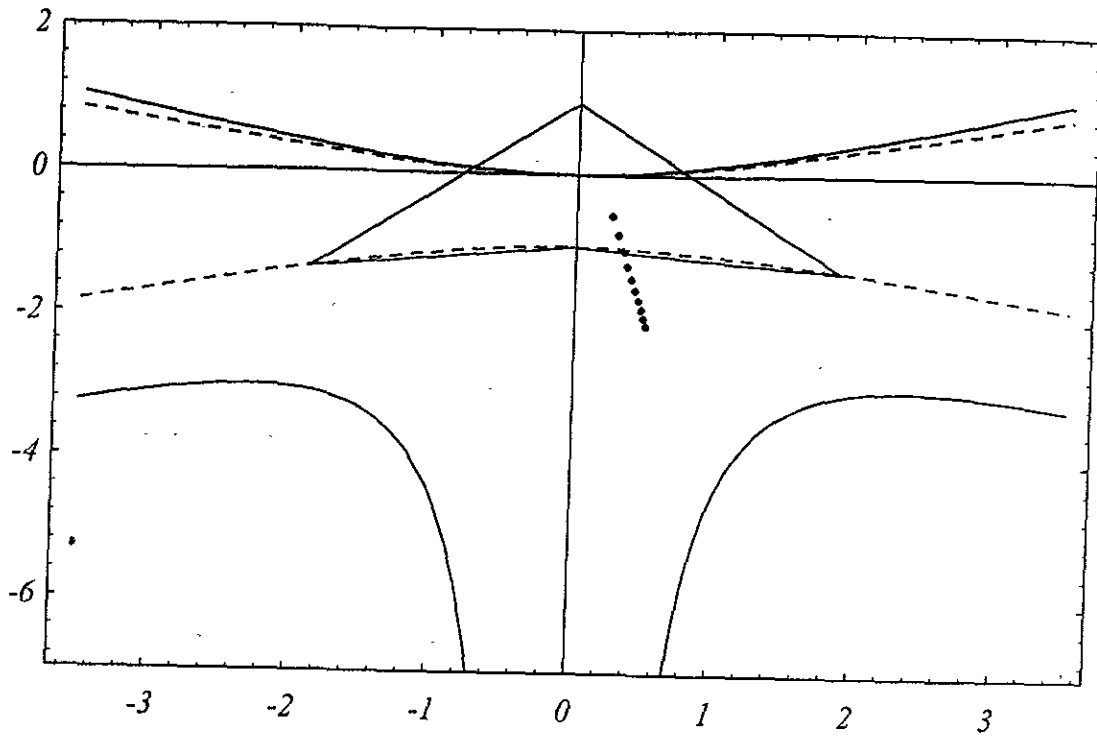


Figura 23. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.10) de los isótopos de Os. La ubicación de estos puntos sugiere una deformación establemente prolata con la posibilidad de alcanzar inestablemente al punto de ensilladura de la SE en la región oblata de manera transitoria.

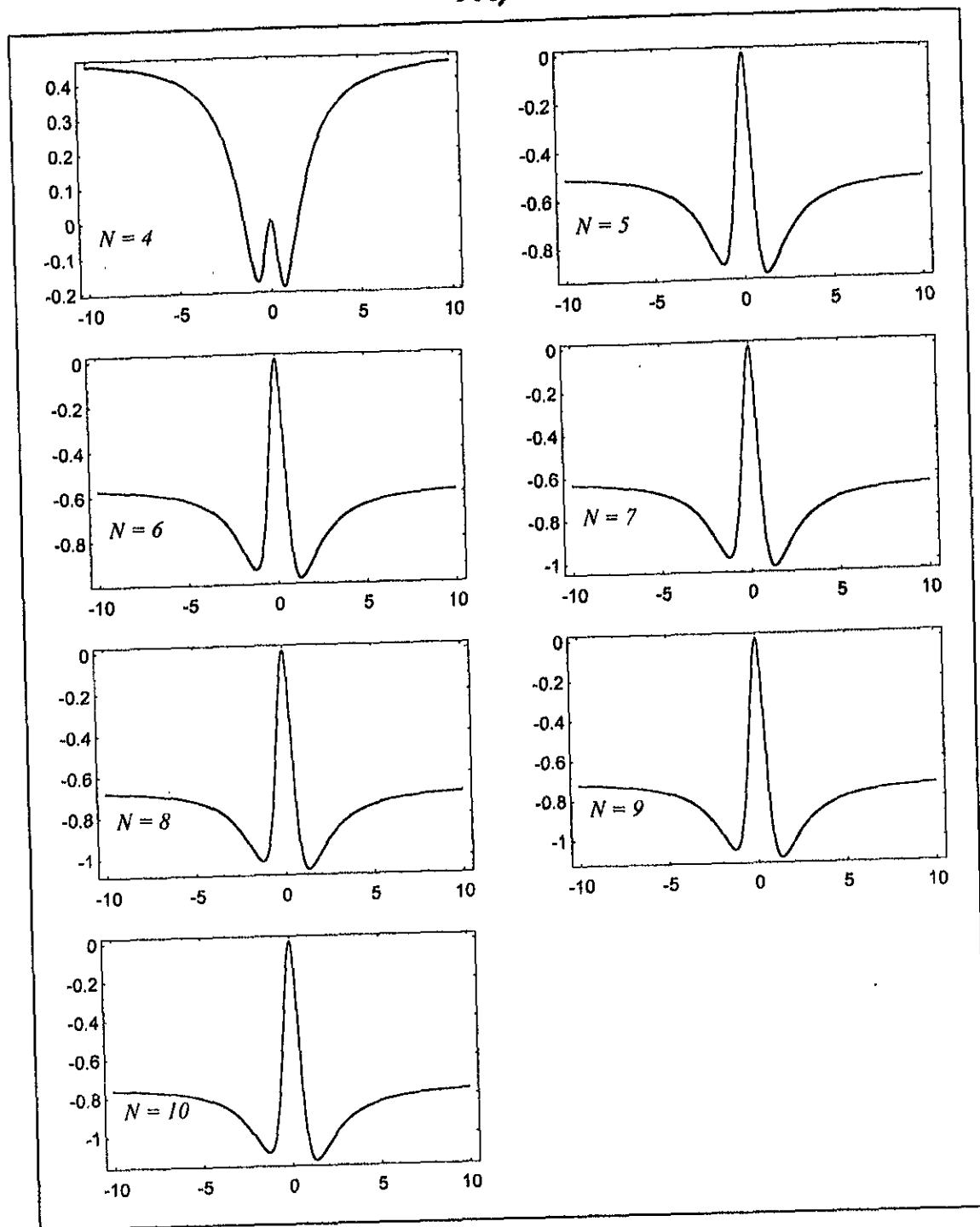
Pt^b

Figura 24. Superficies de Energía de los isótopos Pt^b . En estas superficies no se tienen formas esféricas, solamente existe un mínimo prolato y un punto de silla oblató. Como los bosones son del tipo agujero, el peso disminuye con el valor de N . Como se puede apreciar, la deformación es muy próxima al caso γ -inestable en todos los casos.

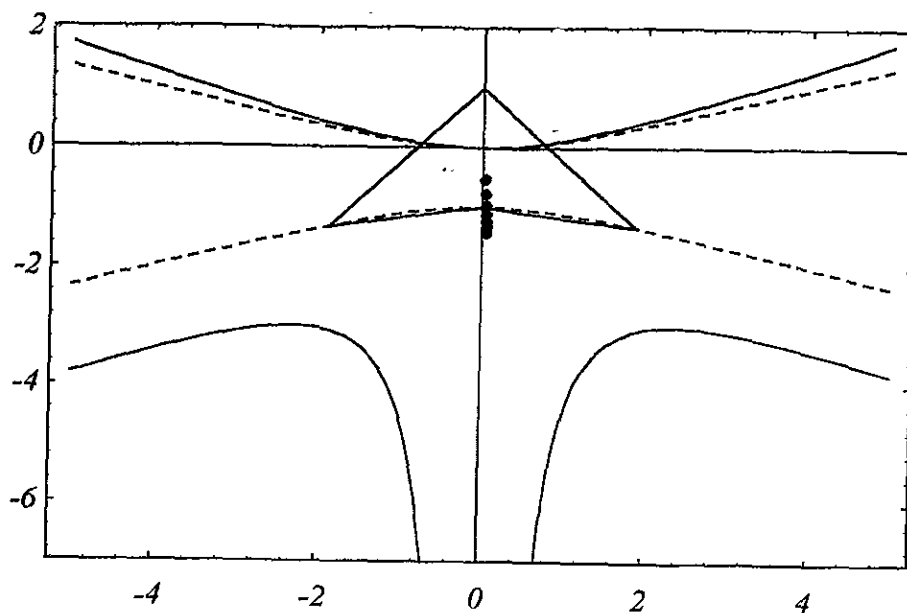


Figura 25. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.11) de los isótopos Pt^b . La ubicación de estos puntos sugiere una deformación prolata muy laxa, con la posibilidad de alcanzar fácilmente al punto de ensilladura de la SE en la región oblata.

ISO90 a)

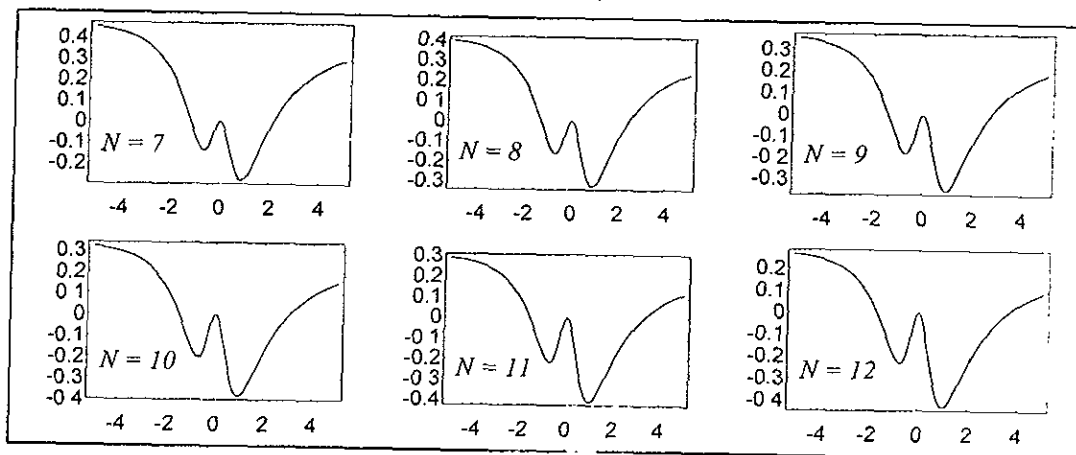


Figura 26. Superficies de Energía de los isótonos $ISO90^a$. En estas superficies no se tienen formas esféricas ya que en el origen se presenta un máximo. Otro máximo muy alejado se encuentra en la dirección oblata, y los puntos críticos restantes corresponden a un mínimo prolato y un punto de silla oblato relativamente profundos. Aunque esta profundidad aumenta con el número de bosones, la forma de la SE no cambia apreciablemente su forma cualitativa.

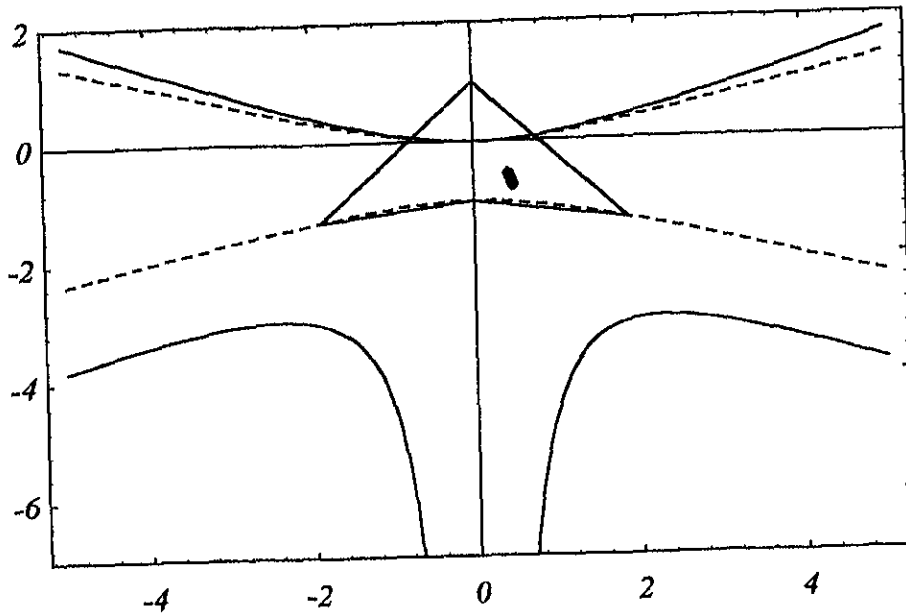


Figura 27. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.12) de los isótonos $ISO90^a$. La ubicación de estos puntos sugiere una deformación establemente prolata con la posibilidad de alcanzar inestablemente al punto de ensilladura de la SE en la región oblata de manera transitoria. La relativa proximidad de todos los puntos explica que las formas de las SE en todos los caso sean cualitativamente muy semejantes.

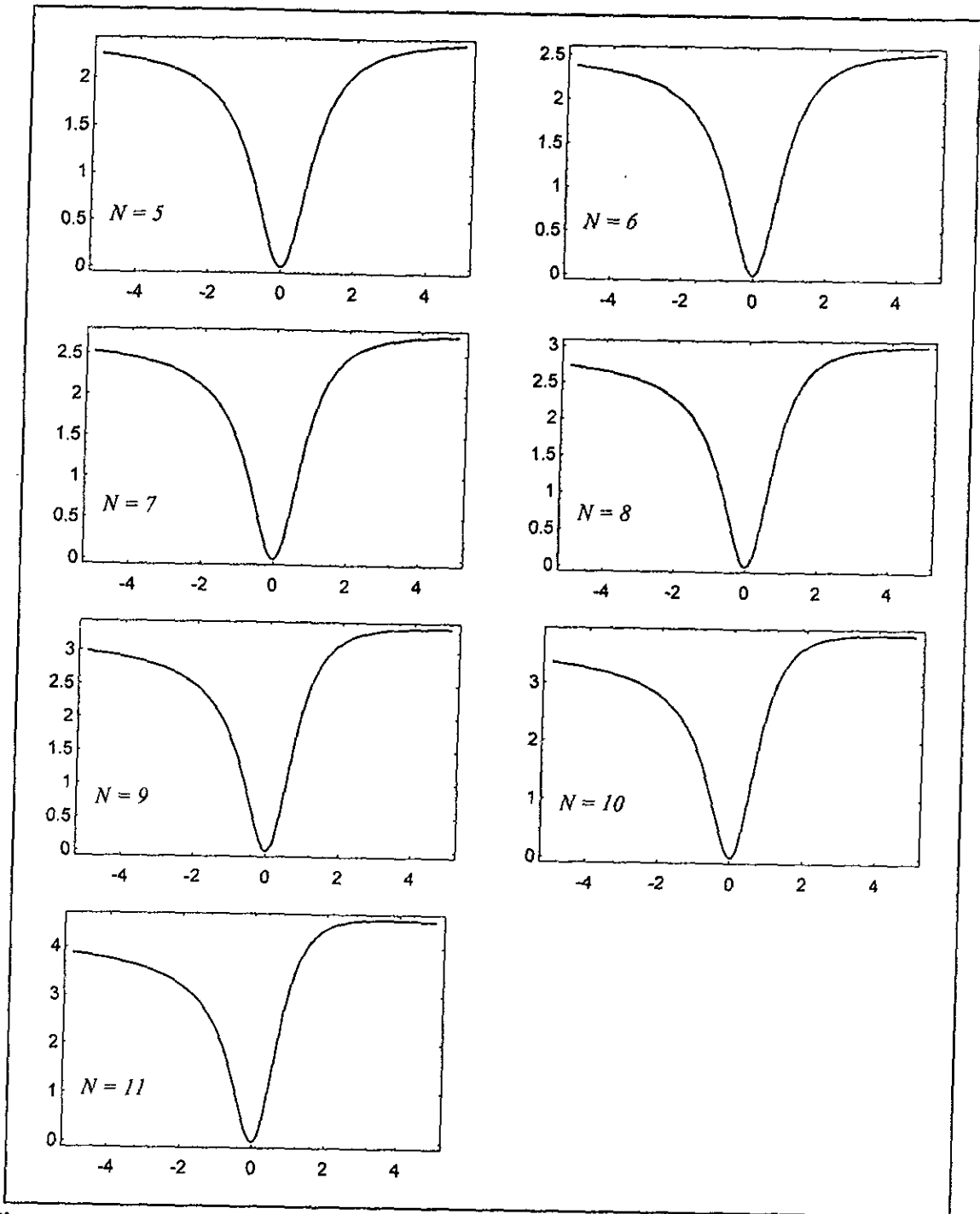


Figura 28. Superficies de Energía de los isótopos de Ba. Todos los núcleos presentan un mínimo absoluto con deformación esférica y ningún otro mínimo.

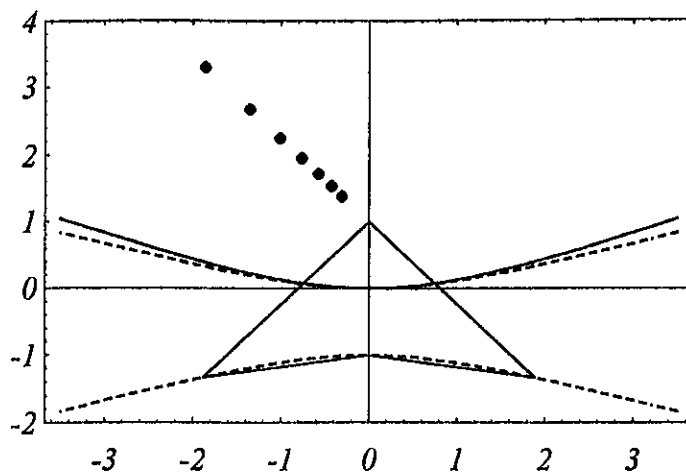


Figura 29. Puntos de la recta paramétrica Ec. (4.2.13) de los isótopos de Ba. La ubicación de estos puntos indica que no existen transiciones de forma a pesar de la gran extensión que se cubre en este espacio.

5 FORMALISMO DE CATÁSTROFES PARA PEDESTRES

En este capítulo evaluaremos numéricamente las transiciones de fase de forma de los núcleos. En contraste con los cálculos presentados anteriormente, donde se hace uso de la maquinaria de la teoría de las Catástrofes, aquí usaremos un método intuitivo, el cual se basa en la evaluación numérica de la variedad de puntos críticos. A partir de estos valores, haremos la evaluación de otras cantidades, tales como el valor esperado de la energía, sus derivadas respecto a los parámetros, el valor esperado del número de bosones-d, $\langle N_d \rangle$, el cual podemos asociar físicamente con el corrimiento isotópico. También se incluyen los valores esperados de los operadores del cuadrado del momento angular $\langle L^2 \rangle$, del operador $\langle \Lambda^2 \rangle$, el de pairing $\langle P^2 \rangle$, y cuadrupolar $\langle Q^2 \rangle$. Las expresiones de estos valores esperados las podemos evaluar mediante el formalismo de los estados coherentes del IBM.

En esencia, recurriremos a nuestra intuición geométrica, la cual nos permite obtener la posición de la Separatriz a partir de la coalescencia de los puntos críticos, esto es, donde el plano tangente de la variedad de estos se hace vertical, o también, donde se corta esta misma variedad con el plano horizontal $\beta = 0$, para el caso del conjunto de bifurcación. Para el caso de los conjuntos de Maxwell, tomaremos la igualdad numérica de los valores de la superficie de energía en dos mínimos o en dos máximos. Si bien este método numérico no tiene toda la generalidad y elegancia que nos ofrece la obtención de la *Separatriz* mediante la teoría de las Catástrofes, sí nos permitirá obtener resultados cuando, con algún otro modelo de una complejidad mayor, se nos dificulte o aún imposibilite obtener esta *Separatriz*. En la parte final aplicaremos estos resultados a Hamiltonianos Efectivos, en las cadenas de núcleos de la Tabla Periódica presentados en la sección 4.2. Esta alternativa al método analítico presentado anteriormente motiva el título de la presente sección.

Las evaluaciones mencionadas anteriormente se pueden dar para una curva cualquiera sobre el espacio de parámetros esenciales (r_2, r_1) . Sin embargo, será suficiente con incluir trayectorias rectilíneas sobre este espacio. Primero consideraremos la recta que une los límites $U(5)$ y $SU(3)$ del doble triángulo de Casten en la Fig. 4, de la sección 4.1. Después consideraremos la recta que une los límites $U(5)$ y $O(6)$ del mismo triángulo. También consideraremos la recta que une los límites $O(6)$ y $SU(3)$ del doble triángulo mencionado. Estas tres pendientes resultan de gran importancia debido a que conectan los vértices del triángulo doble de Casten, asociado a las simetrías dinámicas del modelo. Si se incluyen todas las pendientes posibles, cubriendo así todo el espacio, sería posible hacer un mapeo de la Separatriz completa en el espacio de los parámetros (r_2, r_1) de esta manera numérica.

Al tratar con los Hamiltonianos Efectivos, tomaremos las rectas $(r_2(N), r_1(N))$, donde N es el número total de bosones de una cadena de núcleos, el cual nos servirá de parámetro para definir una trayectoria en el espacio (r_2, r_1) , mientras que todos los demás parámetros se encuentran ajustados a una cadena de núcleos particular, como en la sección 4.2. Aquí, las transiciones de fase se pueden asociar a las discontinuidades observadas con cantidades tales como las energías de separación de parejas de neutrones, o de protones, según la cadena sea de isótopos o de isótonos, respectivamente.

5.1 EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LAS TRANSICIONES DE FASE EN EL ESPACIO (r_2, r_1)

Consideremos inicialmente la recta entre los vértices correspondientes a los límites $U(5)$ y $SU(3)$

$$r_1 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}r_2 + 1. \quad (5.1.1)$$

Como ya hemos mencionado en secciones anteriores, las transiciones que se realizan sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ resultan de particular importancia debido a que el mínimo global $\beta = 0$, que describe un núcleo esférico, se observa solamente en la región del espacio de parámetros $r_1 > r_{13}^+$, y este mínimo global cambiará a otro deformado, $\beta \neq 0$, al pasar a la región por debajo de este mismo conjunto.

Primero, con propósitos de referencia, obtendremos analíticamente el lugar geométrico de los puntos de intersección entre la recta mencionada y la *Separatriz*. Estos puntos resultan de la solución de la ecuación (5.1.1), la cual representa la recta, simultáneamente con: la ecuación $r_1 = 0$, que describe el eje horizontal; los conjuntos de bifurcación r_{12} y r_{11} en las Ecs.(3.5.11); y los conjuntos de Maxwell r_{13}^+ y r_{13}^- en las Ecs.(3.5.22). De esta manera, encontramos que esta recta interseca la *Separatriz* en los puntos enumerados en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores numéricos en las intersecciones de la recta (5.1.1) y la *Separatriz*.

	r_{12}	r_{13}^+	$r_1 = 0$	r_{13}^-	r_{11}
r_2	0.7476	0.7542	0.8081	1.8856	3.4022
r_1	0.07449	0.0666	0	-1.3333	-3.2100

Ahora, mediante una graficación numérica de la variedad de puntos críticos, recuperamos los valores anteriores para r_2 , correspondientes a los conjuntos de bifurcación sobre el espacio de parámetros (r_2, r_1) . En la Fig. 1a, se presenta un corte de la variedad de puntos críticos β_i vs. r_2 , sobre la recta (5.1.1) en el espacio de parámetros. Esta gráfica presenta los valores críticos de la variable de deformación β_i vs. r_2 , para los tres puntos críticos $\beta_i \neq 0$, obtenidos numéricamente, a partir de las Ecs.(3.4.17-27). También se grafica la raíz fundamental $\beta = 0$.

En la misma figura 1a, se incluyen las líneas verticales punteadas en los valores calculados anteriormente, $r_2 = 0.7476$, $r_2 = 4\sqrt{2}/7$, y $r_2 = 3.4022$; como se puede apreciar ahí, estas coinciden en los lugares donde las diferentes ramas del conjunto de puntos críticos coalescen, ofreciendo así una verificación del método numérico. La parte superior de la curva, β_1 , con pendiente positiva, representa una raíz asociada a mínimos de la SE. La parte intermedia de la curva, β_3 , con pendiente negativa, se asocia con máximos de la SE para valores positivos, esto es, arriba del eje horizontal, y con puntos de silla de la SE, por debajo del mismo eje. La tercera parte, β_2 , inferior en la curva, también con pendiente positiva, representa una raíz asociada a un máximo. La recta horizontal representa la rama básica $\beta = 0$. Los subíndices de las distintas β_i corresponden a aquellos de las raíces en las Ecs. (3.4.25). Las líneas punteadas se grafican sobre los valores calculados correspondientes a los conjuntos de bifurcación.

En resumen, mediante una graficación, se pueden obtener numéricamente los valores de los parámetros (r_2, r_1) asociados con los conjuntos de bifurcación, esto es, la localización de los conjuntos de bifurcación se puede obtener por la coalescencia de las ramas de puntos críticos: en los lugares

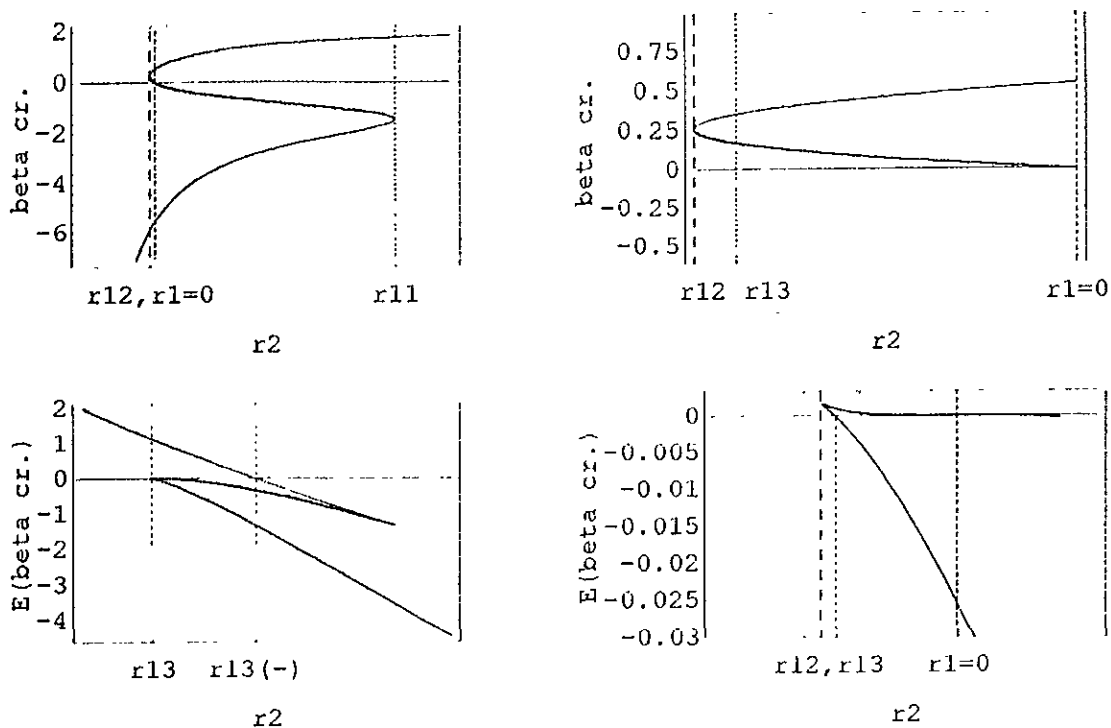


Figura 1. a) Gráfica de la variedad de puntos críticos β_i vs. r_2 , sobre la recta: $r_1 = -\frac{7}{4\sqrt{2}} r_2 + 1$, en el espacio de parámetros. b) Gráfica de la energía evaluada en los puntos críticos, $\epsilon(\beta_i)$ vs. r_2 , sobre la misma recta en el espacio de parámetros.

para los cuales la tangente de la variedad crítica se vuelve vertical, o en donde se interseca la rama fundamental con alguna de las otras tres ramas, según se aprecia en la Fig. 1a.

De una manera numérica similar, podemos recuperar el lugar geométrico de los conjuntos de Maxwell. Los conjuntos de Maxwell están asociados a la degeneración de la energía en dos máximos, o en dos mínimos de la SE. Si se recorre el espacio de parámetros sobre la misma recta dada en la Ec. (5.1.1), entonces mediante una graficación de la energía como una función del parámetro r_2 , evaluada sobre cada uno de los puntos críticos anteriormente obtenidos, podemos recuperar los puntos correspondientes a los conjuntos de Maxwell observando dónde se cortan dos máximos o dos mínimos de la gráfica.

Así, en la Fig. 1b se grafica la energía evaluada sobre los puntos críticos, $\epsilon(\beta_i)$ vs. r_2 , sobre la

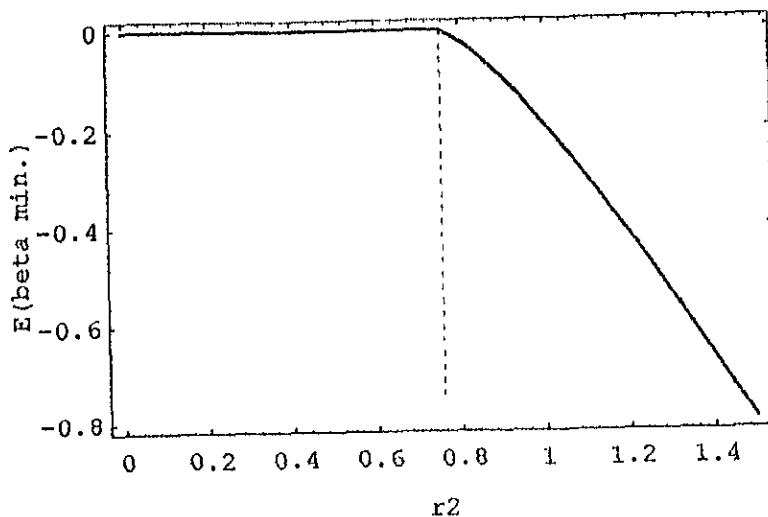


Figura 2. Energía evaluada en el mínimo global de la SE, sobre la recta: $r_1 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}r_2 + 1$, en el espacio de parámetros. Sobre el valor de r_2 correspondiente al conjunto de Maxwell r_{13}^+ , marcado por una línea de puntos, la pendiente experimenta una discontinuidad.

recta $r_1 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}r_2 + 1$ en el espacio de parámetros. La parte superior de la curva, $\varepsilon(\beta_2)$, representa siempre a un máximo. La recta horizontal representa el valor de la energía evaluada sobre la rama básica $\varepsilon(\beta = 0) = 0$. La primera línea punteada se grafica sobre el valor $r_2 = 8\sqrt{2}/15$, correspondiente al calculado para el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , dado en la Tabla 1. A la izquierda de esta línea, la rama básica representa un mínimo, y a la derecha a un máximo. Este valor de la energía degenera con el máximo anterior sobre la segunda línea punteada, en $r_2 = 4\sqrt{2}/3$, correspondiente al calculado para el conjunto de Maxwell r_{13}^- (ver Tabla 1). En la parte intermedia se grafica $\varepsilon(\beta_3)$, quien solamente presenta máximos y sillars de la SE. $\varepsilon(\beta_1)$ es, naturalmente, el mínimo global a la derecha de la primera línea punteada, ya que claramente es el de menor valor en esta gráfica. Como se puede apreciar, estas líneas coinciden exactamente con los lugares donde la energía evaluada sobre la rama básica $\beta_c = 0$ degenera con otro mínimo global, o con otro máximo absoluto.

La transición de fase sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , resulta claramente de primer orden, ya que, si nos restringimos a observar el mínimo global, la energía resulta continua sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , mientras que su primera derivada cambiará de manera discontinua. En la Fig. 2, se exhibe lo anterior en un acercamiento a la gráfica del mínimo absoluto de la Fig. 1b. La magnitud de la transición de fase la podemos evaluar utilizando la Ec. (3.5.34)

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(\beta_{13}^+)}{\partial r_2} \right|_{r_1=r_{13}^+} = \frac{-5}{12\sqrt{2}},$$

la cual resulta, después de sustituir los valores correspondientes, $\beta_{13} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, y $m = -7/4\sqrt{2}$, con un valor aproximado igual a -0.2946 . En la Fig. 3 se presenta una gráfica de la primera derivada: $\left. \frac{\partial \varepsilon(\beta_{13}^+)}{\partial r_2} \right|_{r_1=r_{13}^+}$ vs. r_2 . Podemos apreciar que el valor de la discontinuidad de fase calculado anteriormente, se puede obtener también numéricamente, midiendo directamente el salto de la discontinuidad en la presente gráfica.

Consideremos ahora otra trayectoria sobre el espacio de parámetros, la cual recorre el eje vertical $r_2 = 0$. Este camino pasa por el origen, el cual representa la degeneración más grande en

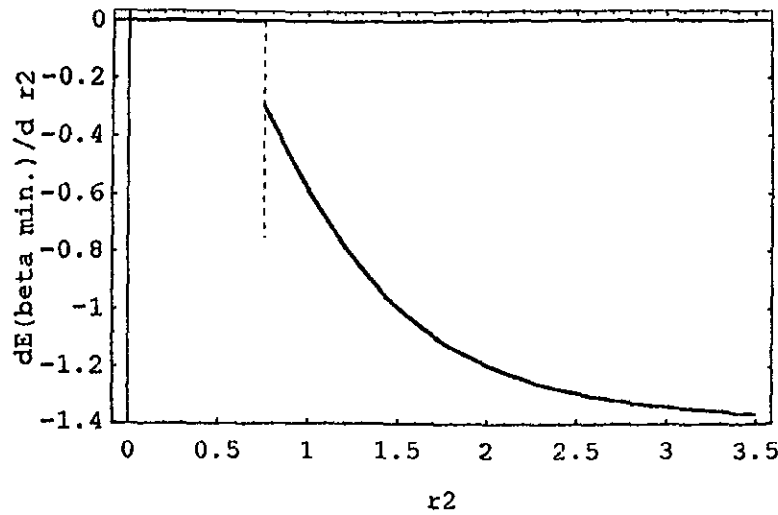


Figura 3. Derivada de la energía evaluada en el mínimo global de la SE, sobre la recta $r_1 = -\frac{7}{4\sqrt{2}}r_2 + 1$ en el espacio de parámetros. Sobre el valor de r_2 correspondiente al conjunto de Maxwell r_{13}^+ y marcado por una línea de puntos, la primera derivada cambia en un salto discontinuo, cuya magnitud coincide con el valor calculado, igual a $\frac{-5}{12\sqrt{2}} \cong -0.294628$.

los puntos críticos. Como ya hemos visto anteriormente, la Ec. (3.5.30), en ese punto se presenta una transición de fase de forma de segundo orden, cuya magnitud es numéricamente igual a -2 . En la Fig. 4a, se grafica la variedad de puntos críticos, la cual exhibe una bifurcación en el origen. En la región $r_1 > 0$, solamente existe un mínimo $\beta_0 = 0$. Sobre la región $r_1 < 0$, $\beta_0 = 0$ es un punto correspondiente a un máximo relativo, y los otros dos puntos críticos representan los valores de la deformación β , γ -inestable. En la Fig. 4b, se grafica el valor de la energía evaluada sobre cada uno de los anteriores puntos críticos. Como se puede apreciar, el mínimo absoluto de la energía cambia de la rama esférica, sobre la región $r_1 > 0$, a la rama deformada, sobre la región $r_1 < 0$, de manera continua. En este caso, la transición se manifiesta en el origen de coordenadas como una discontinuidad en la curvatura de esta gráfica de energía mínima, correspondiente a un segundo orden, esto es, hasta la segunda derivada.

Finalmente, la recta $r_1 = -\frac{1}{4\sqrt{2}}r_2 - 1$, la cual une los vértices del doble triángulo correspondientes a los límites $O(6)$ y $SU(3)$, no corta al conjunto de Maxwell r_{13}^+ . Solamente corta al eje horizontal $r_1 = 0$ en $r_2 = -4\sqrt{2}$, y al conjunto Maxwell en $r_2 = 0$ y $r_2 = 4\sqrt{2}/3$. El primero es el único punto de coalescencia entre β 's críticas en este caso, como lo demuestra el gráfico de la variedad de puntos críticos en la Fig. 5a. Es importante notar que a la derecha de este punto de coalescencia, los valores correspondientes al parámetro r_1 son siempre negativos, de modo que particularmente en el punto $r_2 = 0$, el valor absoluto de las β 's críticas se iguala por parejas. Esto expresa precisamente que tenemos un potencial γ -inestable, y así, dos de estas ramas críticas se extienden asintóticamente al infinito (ver Fig. 10c, sección 3.5), y la variable γ_c es ahora un punto crítico degenerando no-local.

En la Fig. 5b se grafica la energía evaluada sobre cada uno de los puntos críticos anteriores. En esta figura existen cuatro puntos de intersección. El que se encuentra en la parte negativa del eje horizontal, reproduce el punto de bifurcación anterior y no es un punto de degeneración de Maxwell porque ahí coalescen un máximo y un punto de silla, el mínimo absoluto está aislado y

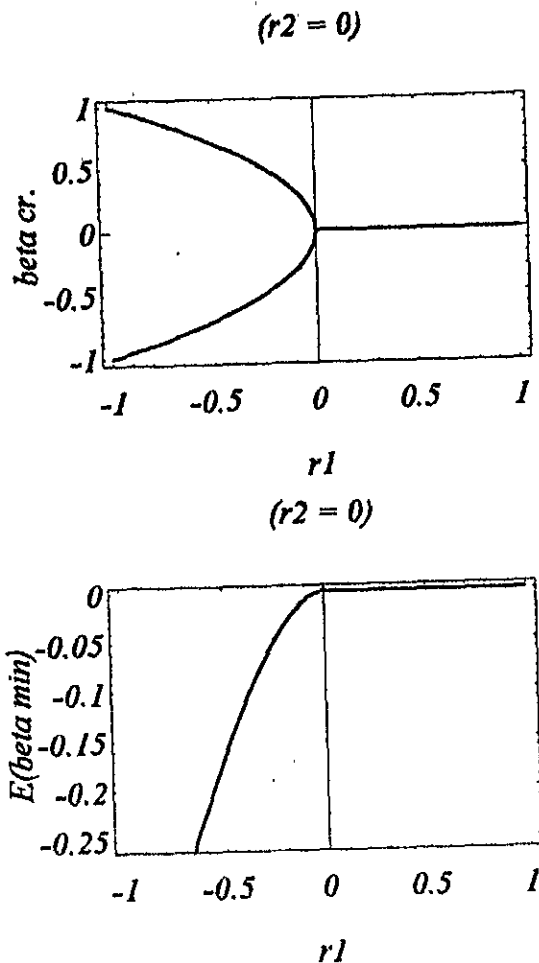


Figura 4. (a) Gráfica de la variedad de puntos críticos β_i vs. r_1 , sobre la recta $r_2 = 0$ en el espacio de parámetros. (b) Gráfica de la energía evaluada en los puntos críticos, $\varepsilon(\beta_i)$ vs. r_1 , sobre la misma recta en el espacio de parámetros.

corresponde a una deformación de núcleos oblatos. En esa misma figura, sobre el eje vertical existen dos puntos de corte de la energía, de los cuales, el de la parte superior representa la degeneración de los máximos asintóticos con la raíz fundamental $\beta = 0$, y el de la parte inferior representa la profundidad constante γ -inestable. En este último punto es claro de esta figura que el mínimo global de la energía experimenta una transición de fase de oblatos a prolato de primer orden, esto es, al pasar de una rama a la otra, la energía cambia continuamente, pero su primera derivada resulta discontinua en este punto. Finalmente, el corte de los valores de la energía en la parte positiva del eje del eje horizontal, corresponde al conjunto de Maxwell r_{13}^- calculado independientemente en el valor de la línea de puntos en $r_2 = 4\sqrt{2}/3$ (ver Fig. 8b, sección 3.5).

Resulta interesante observar la simetría que resulta en la figura anterior, si se elige la trayectoria

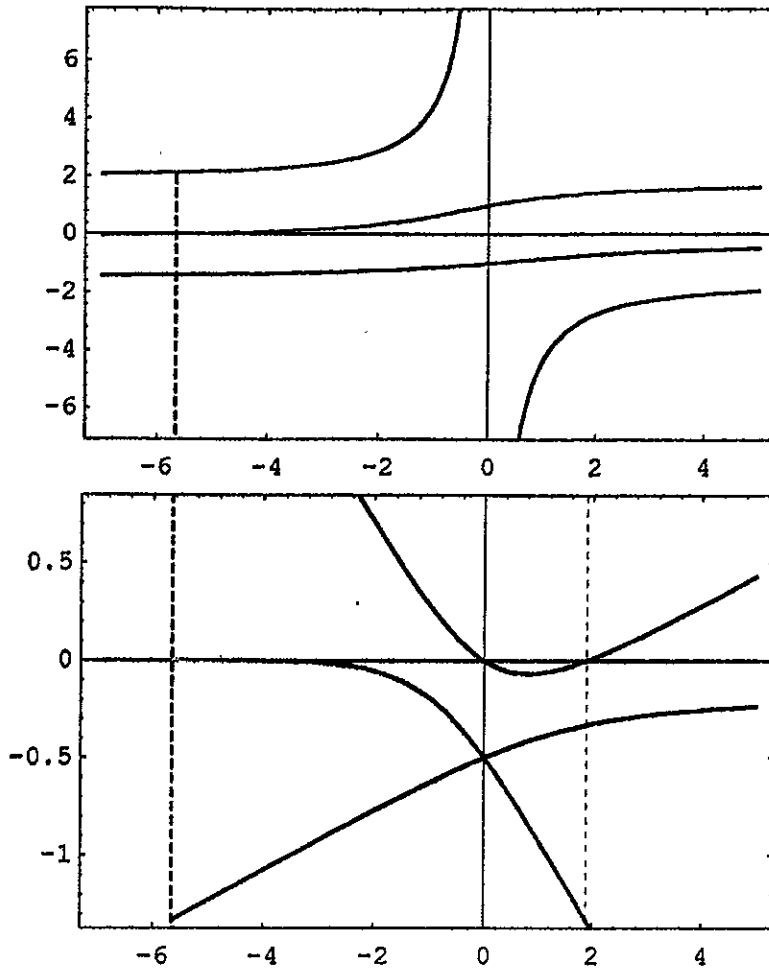


Figura 5. a) Gráfica de la variedad de puntos críticos β_i vs. r_2 , sobre la recta: $r_1 = -\frac{1}{4\sqrt{2}} r_2 - 1$, en el espacio de parámetros. b) Gráfica de la energía evaluada en los puntos críticos, $\varepsilon(\beta_i)$ vs. r_2 , sobre la misma recta en el espacio de parámetros.

en el espacio de parámetros sobre la recta horizontal $r_1 = -1$, la cual une los vértices del doble triángulo correspondientes a los límites $\overline{SU(3)}$ y $SU(3)$. El resultado se presenta en la Fig. 6.

5.2 EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LAS TRANSICIONES DE FASE DE HAMILTONIANOS EFECTIVOS

En esta parte calcularemos numéricamente las transiciones de fase de forma para las cadenas de núcleos descritos en la sección 4.2, en la cual se trataron sus Hamiltonianos efectivos. En aquella sección se determinó la SE asociada a cada cadena y se estudió su estabilidad en el espacio de parámetros esenciales (r_2, r_1) . Estos Hamiltonianos efectivos representan un ajuste simultáneo dentro de una misma cadena de núcleos, con la consecuencia de que los parámetros promedian los

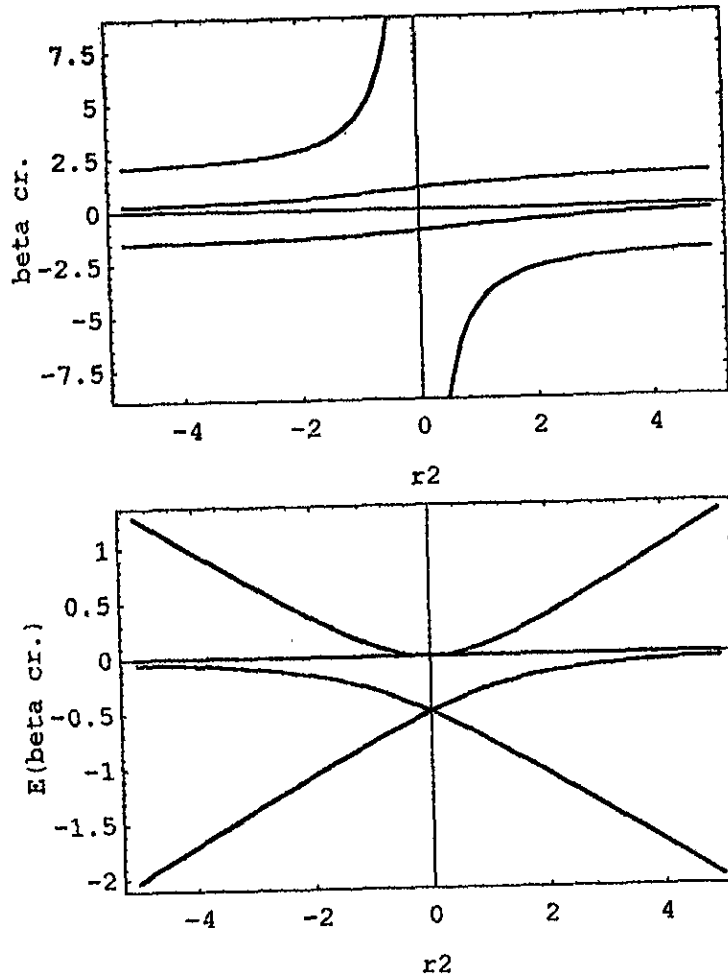


Figura 6. (a) Gráfica de la variedad de puntos críticos β_i vs. r_1 , sobre la recta: $r_1 = -1$, en el espacio de parámetros. (b) Gráfica de la energía evaluada en los puntos críticos, $\epsilon(\beta_i)$ vs. r_1 , sobre la misma recta en el espacio de parámetros.

efectos de muchos cuerpos, y así, dentro de una misma cadena varía solamente el número N de bosones, esto es, para una determinada cadena se tiene un conjunto de puntos alineados sobre una recta $(r_2(N), r_1(N))$, según se puede encontrar en las Ecs. (4.2.1-13).

Para realizar la evaluación numérica que nos interesa, notemos en primer lugar que los puntos críticos de la SE fueron obtenidos de manera general en la Secc. 3.4, los cuales incluyen la rama básica $\beta = 0$, más las raíces de la ecuación (3.4.17):

$$(r_2\beta^3 + 4\beta^2 - 3r_2\beta + 4r_1) = 0.$$

Es claro que las raíces β_i de esta ecuación estarán dadas en términos de sus coeficientes, esto es, $\beta_i = \beta_i(r_2, r_1)$. Así, utilizando las Ecs. (4.2.1-13) para cada cadena de núcleos, los puntos

críticos de la SE también pueden expresarse en función del número de bosones: $\beta_c(N)$. De esta forma, si identificamos la rama $\beta_c(N)$ que corresponde al mínimo absoluto para cada región de la *Separatriz* del espacio de parámetros, entonces dentro de cada cadena de núcleos podrá calcularse numéricamente el valor esperado de la energía en la Ec. (3.4.8), evaluada sobre un mínimo global, $\varepsilon_{min}(N)$. Las transiciones de fase de forma se manifiestan entonces en la gráfica $\varepsilon_{min}(N)$ vs N , como discontinuidades en esta función, o en alguna (la más pequeña) de sus derivadas.

Las anteriores discontinuidades, las cuales se pueden medir directamente en las gráficas mencionadas, también pueden, alternativamente, ser calculadas de las expresiones en la sección 3.5 acerca de la Construcción de la *Separatriz*, como se describe en seguida. Si la transición de fase es de primer orden, y tiene lugar sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ , entonces dicha discontinuidad es igual al valor de la primera derivada respecto a un parámetro, del mínimo de la energía. Para obtener este resultado necesitamos primero calcular en número del bosón, N_c , para cada cadena particular el cual corresponde al punto donde la recta paramétrica que la contiene, intersecta el conjunto de Maxwell r_{13}^+ . Esto se logra resolviendo la Ec. (3.5.21), la cual describe el conjunto de Maxwell, utilizando en ella los valores $(r_2(N), r_1(N))$ particulares del ajuste del Hamiltoniano efectivo. Así, obtenemos los valores del número N_c para cada cadena en la Tabla 2. En seguida, con este valor, se calcula el correspondiente valor $r_2(N_c)$ de los valores del ajuste correspondiente a cada cadena de núcleos, así como el de β_{13}^+ usando la Ec. (3.5.23). Finalmente, también se calculan los valores de las derivadas $\partial r_2/\partial N$, y $\partial r_1/\partial N$, las cuales podemos calcular en general a partir de la Ec. (3.4.7), como

$$\frac{\partial r_2}{\partial N} = \frac{-2a_2\epsilon}{\left((2a_1 - a_3)(N - 1) + \epsilon\right)^2}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{\left(2(a_3 - a_1) - u_0\right)\epsilon}{\left((2a_1 - a_3)(N - 1) + \epsilon\right)^2}. \quad (5.2.1)$$

La discontinuidad de fase, $\left.\frac{\partial \varepsilon(\beta_{13}^+)}{\partial N}\right|_{r_{13}^+}$, dada en la Ec. (3.5.37), se denota como Δ en la Tabla 2, donde se dan todos estos valores.

Un caso especial es el de la transición de fase de segundo orden, la cual es del mayor orden posible en este modelo, y tiene lugar sobre el origen de coordenadas del espacio de parámetros como un único punto. Así, sobre una trayectoria a lo largo del eje vertical, la transición de forma de esférico a γ -inestable para una cadena de núcleos resulta una transición de segundo orden. La magnitud de esta transición la calculamos partiendo de las expresiones $r_2 = 0$, y de la Ec. (3.5.27), para la energía sobre el mínimo $\beta_r = \sqrt{-r_1(N)}$. De aquí, encontramos

$$\frac{\partial^2 \varepsilon(\beta_r)}{\partial N^2} = 2 \left(\left. \frac{\partial r_1}{\partial N} \right|_{N_c} \right)^2. \quad (5.2.2)$$

Dentro de los ejemplos considerados, solamente el de los isótopos del *Ru* se apega a esta clase de transiciones de forma, y muy particularmente, uno de ellos, el ^{104}Ru , se ubica en el punto de máxima degeneración de puntos críticos de la SE.

Las cantidades usualmente medidas no son las energías mismas, sino las energías de separación de dos nucleones, $S_2(N)$ [Iachello y Arima, (1987)]. Estas se definen como la diferencia en las energías de amarre entre núcleos que difieren por dos nucleones, es decir, por un bosón en nuestro caso. Las energías de amarre, ε_B , son el negativo de las energías del estado base, $\varepsilon(\beta_c)$,

$$\varepsilon_B = -\varepsilon(\beta_c), \quad (5.2.3)$$

donde β_c corresponde aquí al mínimo absoluto de la SE. Así, tenemos

$$S_2(N) = \varepsilon_B(N+1) - \varepsilon_B(N). \quad (5.2.4)$$

Las transiciones de fase de forma en los núcleos pueden ser estudiadas experimentalmente mediante la conducta de las energías del estado base para una cadena de isótopos, o una cadena de isótonos [Dieperink y Scholten, (1980)]. Esto lo podemos expresar de la siguiente forma

$$S_2(N) = \varepsilon_N(\beta_c) - \varepsilon_{N+1}(\beta_c). \quad (5.2.5)$$

En el límite clásico esto lo escribimos de manera continua

$$S_2(N) = -\frac{\partial \varepsilon(\beta_c)}{\partial N}. \quad (5.2.6)$$

En conclusión, las transiciones de fase de primer orden se manifiestan como discontinuidades en la gráfica $S_2(N)$ vs. N , mientras que las transiciones de fase de segundo orden, se esperan como discontinuidades en la derivada de $S_2(N)$ respecto a N

$$\frac{\partial S_2(N)}{\partial N} = -\frac{\partial^2 \varepsilon(\beta_c)}{\partial N^2} = S_2(N+1) - S_2(N). \quad (5.2.7)$$

Tabla 2. Transición de fase Δ sobre r_{13}^+ , y valores asociados a cadenas de núcleos

Cadena	N_c	$r_2(N_c)$	β_{13}^+	Δ
<i>Ru</i>	7.7747	0	0	0.0268*
<i>Sm</i>	9.1788	0.7543	0.3535	-0.0632
<i>Gd</i>	9.9955	0.7543	0.3535	-0.0780
<i>Pt^a</i>	12.4700	0.5459	0.2635	-0.003659
<i>Pt^b</i>	2.5315	0.0252	0.0126	-0.0001
<i>ISO88^a</i>	7.5985	0.7544	0.3536	-0.0224
<i>ISO88^b</i>	9.8330	0.7537	0.3533	-0.0428

* Δ de 2° orden.

Como un ejemplo, consideremos la transición de fase de forma de los isótopos del *Sm*, los cuales han sido considerados desde hace tiempo como un ejemplo de núcleos transicionales. En la figura 7 se grafica el valor mínimo de su Superficie de Energía cuando se recorre el espacio de parámetros sobre la recta paramétrica (4.2.2) que les corresponde. Las energías de separación de dos neutrones, $S(2n)$, para estos isótopos reportadas por Möller y Nix [Möller et al., (1995)] se encuentran graficadas en la Fig. 8.

5.3 EVALUACIÓN NUMÉRICA DE LAS TRANSICIONES DE FASE EN LOS OPERADORES DE CASIMIR

Consideremos ahora el valor esperado de los operadores asociados a los de Casimir del modelo IBM, presentados en la Ec. (3.2.1), esto es, del operador de número de bosones-d $\langle N_d \rangle$, del cuadrado del momento angular $\langle L^2 \rangle$ del operador de Casimir $\langle \Lambda^2 \rangle$ de $O(5)$, el de $O(6)$ $\langle \mathcal{L}^2 \rangle$ y del cuadrado del momento cuadrupolar $\langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \rangle$. Veremos que estas cantidades también experimentan un transiciones

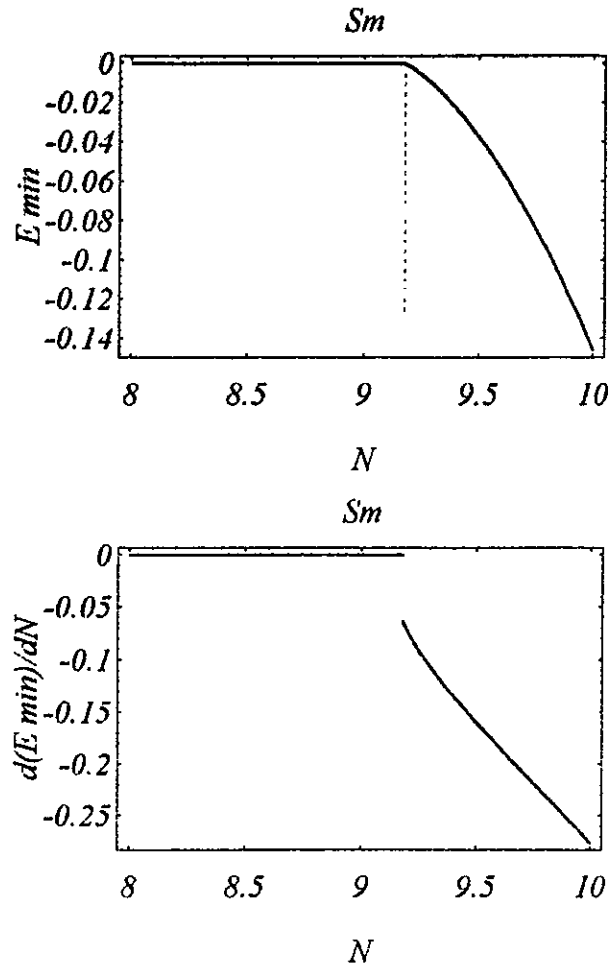


Figura 7. (a) Mínimo global de la SE vs. N , sobre la recta en el espacio de parámetros correspondiente a los isótopos del Sm . Sobre el valor de N_c , correspondiente al conjunto de Maxwell r_{13}^+ marcado por una línea de puntos, la pendiente experimenta una discontinuidad. (b) Discontinuidad de fase en la pendiente de la gráfica en (a).

de fase. La representación de los generadores de $U(6)$ con respecto a los estados coherentes del modelo IBM dados por la Ec. (3.3.1), resultan dados por las siguientes expresiones

$$\langle N_d \rangle = \frac{1}{6} \langle L^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \Lambda^2 \rangle = N \frac{\beta^2}{(1 + \beta^2)}, \quad (5.3.1)$$

donde se debe tomar el valor crítico de la variable β que minimiza globalmente la SE .

El valor de espectación para el cuadrado del momento cuadrupolar, resulta dado por la expresión

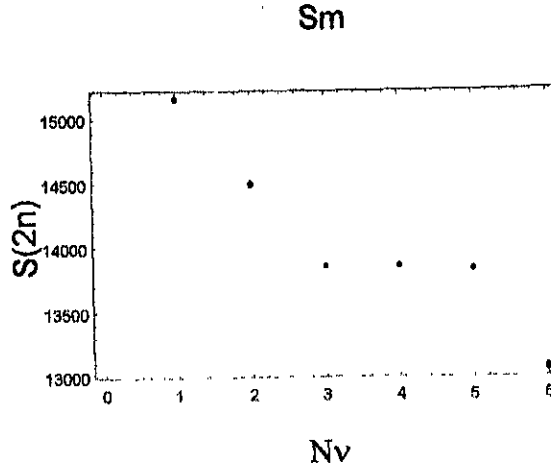


Figura 8. Energías de separación de dos neutrones en ${}_{62}\text{Sm}$. La variable $N\nu$ representa el número de bosones de neutrón fuera de capa cerrada. $N\nu = 1$ corresponde a ${}_{62}^{146}\text{Sm}$, y $N\nu = 8$ a ${}_{62}^{160}\text{Sm}$.

siguiente

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{Q}} \rangle &= \frac{N}{4(1+\beta^2)} (11\beta^2 + 20) + N(N-1) \frac{\beta^4 - 4\sqrt{2}\beta^3 \cos 3\gamma + 8\beta^2}{2(1+\beta^2)^2}, \\ \langle \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \rangle &= \frac{N}{4(1+\beta^2)} (11\beta^2 + 20) + N(N-1) \frac{\beta^4 + 4\sqrt{2}\beta^3 \cos 3\gamma + 8\beta^2}{2(1+\beta^2)^2}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

donde se debe tomar el valor crítico de la variable β que minimiza globalmente la SE .

Finalmente, para los operadores de $O(\bar{6})$ y $O(6)$, respectivamente tenemos

$$\begin{aligned} \langle \bar{\mathcal{L}}^2 \rangle &= 5N, \\ \langle \mathcal{L}^2 \rangle &= 5N + 4N(N-1) \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Tomemos nuevamente la recta que une los vértices correspondientes a los límites $U(5)$ y $SU(3)$, dada en la Ec. (5.1.1). Debido a que en el límite $U(5)$, y en toda la región del espacio de parámetros por arriba del conjunto de Maxwell r_{13}^+ , el mínimo global es esférico, el valor esperado de $\langle N_d \rangle$, y todos los demás expresados en la Ec. (5.1.2), resultan nulos para el estado base. El valor esperado de $\langle N_d \rangle$ observa una transición de fase sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ . Si nos restringimos a evaluar sobre el mínimo global, la gráfica del valor esperado de $\langle N_d \rangle$ resulta discontinua sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ . La magnitud de la transición de fase la evaluamos con la Ec. (5.1.2), sustituyendo el valor correspondiente, $\beta_{13}^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. El resultado es

$$\langle N_d \rangle \Big|_{r_1=r_{13}^+} = \frac{1}{9}N. \quad (5.3.4)$$

En la Fig. 4, se presenta una gráfica de la densidad de bosones-d, $(\langle N_d \rangle / N)$ vs. r_2 . Podemos apreciar que el valor de la discontinuidad de fase calculado anteriormente también se puede recuperar numéricamente, midiendo el salto en la discontinuidad directamente de la presente gráfica.

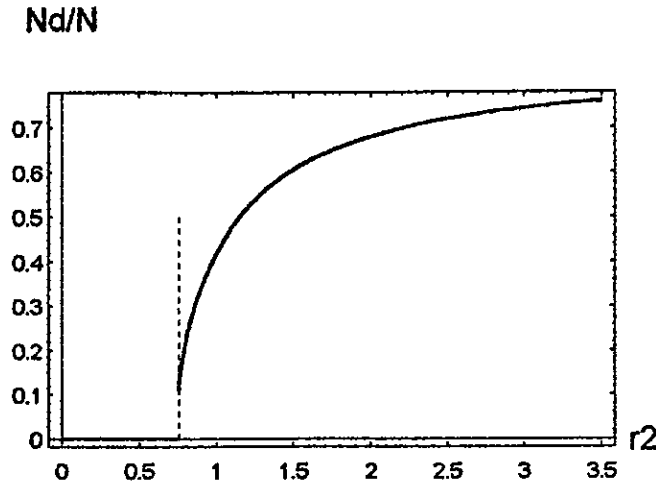


Figura 9. Número relativo de bosones-d, $\frac{\langle N_d \rangle}{N}$ como función de r_2 , sobre la recta $r_1 = -7/4\sqrt{2}r_2 + 1$ en el espacio de parámetros. Sobre el valor de r_2 correspondiente al conjunto de Maxwell r_{13}^+ , el cual es marcado por una línea de puntos, la función resulta con una discontinuidad, cuya magnitud coincide con el valor calculado, e igual a $\frac{1}{9}$.

Resulta interesante calcular también el valor del número de bosones-d sobre el punto del espacio de parámetros que corresponde al límite rotacional, $SU(3)$, esto es, cuando la recta se extiende al punto $(r_2, r_1) = (\frac{4}{3}\sqrt{2}, -4/3)$. En este punto encontramos el valor

$$\langle N_d \rangle \Big|_{r_1=r_{13}^-} = \frac{2}{3}N. \tag{5.3.5}$$

La recta que une los vértices del doble triángulo en el espacio de parámetros (r_2, r_1) correspondientes a los límites $U(5) \rightarrow O(6)$ es la recta sobre el eje vertical la cual intersecta la Separatriz en el origen. En este punto, como ya sabemos, se observa la máxima degeneración en los puntos críticos y la transición de fase, como también ya hemos estudiado en la sección 3.5, es de segundo orden, siendo este el mayor que es posible obtener en el modelo *IBM-1*. En este caso, la graficación de las soluciones numéricas de los puntos críticos evaluados sobre la trayectoria presente, exhibe una bifurcación.

Es importante observar también que $\langle N_d \rangle$ experimenta una transición de fase al recorrer la recta que une los puntos correspondientes a los límites $U(5)$ y $O(6)$. Lo anterior corresponde a movernos sobre el eje- r_1 , verticalmente de arriba hacia abajo, cruzando el conjunto de Maxwell en el origen. La transición tiene lugar entre los puntos críticos siguientes: el mínimo esférico $\beta_0 = 0$, para valores $r_1 > 0$, y el mínimo deformado γ -inestable, $\beta_c = \sqrt{-r_1}$, para valores $r_1 < 0$. Con estos valores, encontramos que el valor esperado del número de bosones-d experimenta una transición de fase sobre el origen del espacio de parámetros. Esta transición es de un orden distinto de cero. Que esto es así, lo podemos ver evaluando primero:

$$\langle N_d(\beta_0) \rangle \Big|_{r_1=0} = 0, \tag{5.3.6}$$

y

$$\langle N_d(\beta_c) \rangle \Big|_{r_1=0} = \frac{r_1}{r_1 - 1} \Big|_{r_1=0} = 0. \tag{5.3.7}$$

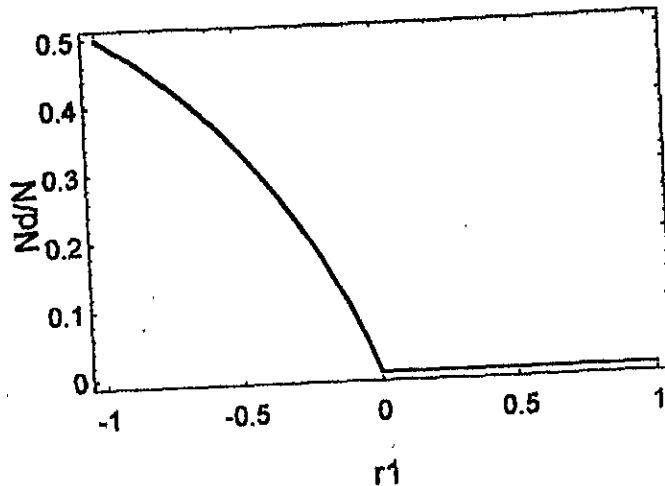


Figura 10. Densidad de bosones-d, $\frac{\langle N_d(\beta_c) \rangle}{N}$ como función de r_1 , en la región transicional $U(5) \rightarrow O(6)$, al recorrer la recta $r_2 = 0$ en el espacio de parámetros. Sobre el valor de $r_1 = 0$ correspondiente al conjunto de Maxwell r_{13}^+ , la curva resulta con una discontinuidad en su pendiente, cuya magnitud coincide con el valor calculado, igual a -1 , significando una transición de fase de primer orden en el número de bosones de una clase.

Y posteriormente, comparamos con los resultados siguientes:

$$\frac{\partial \langle N_d(\beta_c) \rangle}{\partial r_1} = -\frac{1}{(r_1 - 1)^2}, \quad (5.3.8)$$

y por lo tanto encontramos

$$\frac{\partial \langle N_d(\beta_c) \rangle}{\partial r_1} \Big|_{r_1=0} = 0, \quad \frac{\partial \langle N_d(\beta_c) \rangle}{\partial r_1} \Big|_{r_1=0} = -1. \quad (5.3.9)$$

Esto es, la curva correspondiente a la gráfica de densidad de bosones-d, $\langle N_d \rangle / N$ vs. r_1 , resulta continua en el origen; sin embargo, esta misma curva, sobre ese mismo punto, presenta una discontinuidad en su pendiente. De este modo, encontramos que la transición de fase es de primer orden. En esta transición de fase, inicialmente el núcleo es esférico y está constituido exclusivamente por bosones-s. Después, al cruzar la Separatriz, adquiere una deformación γ -inestable, gradualmente desde cero, con un número de bosones-d, el cual, también gradualmente desde cero, crece continuamente, tendiendo asintóticamente al 100% de bosones-d, si $r_1 \rightarrow \infty$. Podemos apreciar esta discontinuidad en la pendiente en la Figura 6.

Es interesante evaluar la discontinuidad de fase en el valor esperado de bosones-d sobre toda la curva que define el conjunto de Maxwell, $r_1 = r_{13}^+(r_2)$, dada en la Ec. (3.5.22). Así, encontraremos el valor esperado del número de bosones-d como una función de r_2 :

$$\langle N_d(r_2) \rangle \Big|_{r_1=r_{13}^+} = \frac{r_2^2}{2 + \frac{3r_2^2}{2} + \sqrt{4 + 2r_2^2}}. \quad (5.3.10)$$

La expresión anterior tiene los límites siguientes

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \langle N_d(r_2) \rangle \Big|_{r_1=r_{13}^+} = 0, \quad (5.3.11)$$

$$\lim_{r_2 \rightarrow \infty} \langle N_d(r_2) \rangle \Big|_{r_1=r_{13}^+} = \frac{2}{3}N. \quad (5.3.12)$$

BIBLIOGRAFIA

- Castaños, O., Chacón, E., Frank, A., y Moshinsky, M., *J Math. Phys.*, **20**, (1979) 35.
- Castaños O., Federman P., Frank A. y Pittel S., *Nucl. Phys.* **A379**, (1982) 61-76.
- Dieperink, A. E. L., and Scholten, O., *Nucl. Phys.* **A346**, (1980) 125-138.
- Feng, D. H., Gilmore, R., y Deans, S. R. *Phys. Rev.*, **C23**, (1981) 1254.
- Frank A, *Phys. Rev. C*, **39**, (1989) 652-657.
- Gómez A., Castaños O., Frank A., Alonso, C, y Arias, J. M., *Nucl. Phys.* **A 589** (1995) 267-292.
- González E. L., *El Modelo de Bosones Interactuantes y su Aplicación a Cadenas de Isótopos e Isótonos Par-Par*, tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México (1990).
- Iachello, F., and Arima, A., *The Interacting Boson Model*. Cambridge University Press (1987). Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney.
- Kirson, M. W., y Leviatan, A., *Phys. Rev. Lett.*, No. 26, **55**, (1985) 2846-2849.
- Möller, P., Nix, J. R., Myers, W. D., and Swiatecki, W. J., *Atomic Data Nucl. Data Tables* **59**, (1995)185-381.
- Scholten O., Iachello F., y Arima A., *Ann. of Phys.* **115** (1978) 325.
- Talmi, I., *Rev. Mod. Phys.*, **34**, (1962) 704.

6 CONCLUSIONES

En esta tesis hemos utilizado el formalismo de los estados coherentes y la teoría de catástrofes para clasificar las formas y las propiedades de estabilidad de las superficies de energía de modelos del núcleo. En un primer ejemplo consideramos el modelo geométrico, el Modelo Colectivo de Bohr, Mottelson y Greiner. En éste se supone que el núcleo tiene una superficie bien definida, capaz de llevar a cabo pequeñas oscilaciones de forma. En un segundo ejemplo tomamos el modelo algebraico de Bosones Interactuantes, el cual fue desarrollado para describir propiedades colectivas de núcleos par-par en regiones lejanas de capa cerrada mediante la introducción de las interacciones entre dos clases de bosones, el bosón s y el bosón d . En este modelo, la idea de *Simetrías Dinámicas* y su tratamiento algebraico, juega un importante papel en la descripción del movimiento nuclear colectivo.

En particular, nosotros hemos construido explícitamente la *Separatriz* para la superficie de energía potencial del Modelo Colectivo y para la superficie de energía del Modelo de Bosones Interactuantes. Ésta nos da información acerca de las intensidades de los parámetros de los modelos para las cuales las configuraciones de equilibrio pueden aproximarse por una forma cuadrática, y los valores para los cuales esto no es posible. Así mismo, nos ofrece una clasificación completa de las formas que es posible alcanzar al variar los parámetros del modelo.

El modelo Colectivo, representa una fuerte herramienta en el tratamiento de la estructura nuclear colectiva. El Hamiltoniano tiene una parte de energía cinética, la cual incluye dos parámetros. Suponiendo que la superficie nuclear puede sufrir únicamente deformaciones de tipo cuadrupolar, se tiene una segunda parte, de energía potencial, la cual incluye tres parámetros más, así como las variables de deformación β y γ . Este modelo resulta capaz de describir una gran variedad de formas y estructuras, las cuales incluyen al vibrador esférico, el rotor deformado, la co-existencia de formas, y los núcleos γ -inestables. Mediante un análisis fundamentado en la teoría de las Catástrofes, hemos podido establecer que existen solamente dos parámetros esenciales, matemáticamente relevantes en la descripción de la SEP. Es decir, el espacio de parámetros de control es bi-dimensional, y dentro de este espacio de parámetros se observan todas las posibles formas de la SEP.

La variedad de formas y estructuras nucleares mencionadas, se organizan en este espacio dentro de regiones distintas, delimitadas por la *Separatriz* del sistema, la cual se calcula con las técnicas del análisis de catástrofes. Sobre la *Separatriz*, degeneran los puntos críticos de la SEP del Modelo Colectivo, y no se puede aproximar localmente esta superficie mediante una forma cuadrática no-degenerada. Particularmente en el caso de los mínimos, éstos no se representan bien mediante un potencial de oscilador. Sin embargo, en estos puntos críticos degenerados se puede asignar una forma canónica, representada por una función de Catástrofe.

Todavía dentro del Modelo Colectivo, cuando la degeneración radica en la variable de deformación β , el origen del espacio de parámetros esenciales es la sede de un mínimo global degenerado de la SE, de forma cuártica, asociado a la catástrofe de la Cúspide. Este es un punto único, y sobre de él la SE tiene la degeneración más grande. Los otros puntos de la *Separatriz*, relacionados todavía

con los puntos críticos β -degenerados, parten de este origen describiendo dos curvas. Una de estas resulta una curva parabólica con su vértice en el origen extendida hacia la parte superior, y simétrica izquierda-derecha en el espacio de parámetros. Los puntos críticos degenerados correspondientes a este conjunto están asociados a la catástrofe del Doblez, con un grado menor de degeneración, y ya no involucran al mínimo global de la SE. Esta parábola de la *Separatriz* la podemos llamar la *parábola de bifurcación*, ya que ahí se observa una bifurcación de las raíces críticas en la variable β .

Por arriba de la *parábola de bifurcación* solamente existe un mínimo esférico en la SE. El segundo conjunto de bifurcación asociado a los puntos críticos β -degenerados, también parten del origen, ubicándose a todo lo largo del eje horizontal del espacio de parámetros esenciales. Sobre este segundo conjunto, los puntos críticos degenerados también se asocian a la catástrofe del Doblez, e involucran al mínimo relativo, $\beta = 0$ de la SE. En la región comprendida entre la *parábola de bifurcación* y el eje horizontal, coexisten dos mínimos de la SE. En toda la región por debajo del eje horizontal, el valor $\beta = 0$ representa un máximo de la SE.

Cuando consideramos que la degeneración radica en la variable de deformación γ , el origen del espacio de parámetros esenciales es aún la sede del mismo mínimo global, el más degenerado de la SE. Sin embargo, al desarrollar uno de los parámetros, manteniéndose la variable γ degenerada, se obtienen otros puntos de la *Separatriz*, los cuales ya no son descritos por una catástrofe elemental. Su ubicación está a lo largo de todo el semi-eje vertical negativo del espacio de parámetros esenciales, y es la sede de las formas nucleares γ -inestables; estos puntos involucran un mínimo global no-local de la SE. Esta parte de la *Separatriz* la podemos llamar el *semi-eje de bifurcación*. Este *semi-eje de bifurcación* de la variable γ , resulta también un conjunto de Maxwell para la variable β , el *semi-eje de Maxwell*. Esto es así debido a que la SE tiene una profundidad constante en la dirección de la variable γ , pero sobre ese mismo conjunto la SE tiene un mínimo aislado, no-degenerado en la dirección de la variable β .

Adicionalmente, la *Separatriz* del Modelo Colectivo contiene otros conjuntos de Maxwell, esto es, todos aquellos otros puntos en el espacio de parámetros esenciales sobre los cuales degenera el valor de la energía en dos mínimos aislados, no-degenerados. La SE del Modelo Colectivo presenta esta situación para la variable β , sobre la *parábola de Maxwell*. Esta es una parábola próxima a la *parábola de bifurcación*, también con su vértice en el origen, y por debajo de ella. La *parábola de Maxwell* establece una separación en dos regiones: por encima de ella el mínimo global es esférico, y por debajo, deformado.

En el Modelo de Bosones Interactuantes, mediante un análisis semejante hemos podido establecer también que existen dos parámetros esenciales únicamente. Estos fueron denotados r_2 y r_1 . Es decir, dentro del espacio de parámetros de control (r_2, r_1) , se observan todas las posibles formas de la Superficie de Energía. La *Separatriz* está constituida por varios conjuntos, los cuales fueron denominados como conjuntos de bifurcación: r_{12} , r_{11} , el eje- r_2 y el semi-eje r_1 negativo; y conjuntos de Maxwell: r_{13}^+ , r_{13}^- y nuevamente el semi-eje r_1 negativo.

El conjunto de Maxwell r_{13}^+ , divide el espacio de parámetros en dos regiones: Para $r_1 > r_{13}^+$ la SE describe núcleos esféricos, mientras que para $r_1 < r_{13}^+$ ésta caracteriza núcleos deformados; prolatos cuando $r_2 > 0$ y oblatos cuando $r_2 < 0$. El fenómeno de coexistencia de formas, entre formas esféricas y deformadas, se observa en la SE para valores de r_1 dentro de la región $0 < r_1 < r_{12}$, lo cual se acentúa sobre el conjunto de Maxwell r_{13}^+ . Aunque la SE no presenta simultáneamente mínimos locales oblatos y prolatos, para la región $r_{13}^- < r_1 < 0$ existe la posibilidad de tener fluctuaciones entre las formas oblatas y prolatas. Dentro del modelo IBM-1, las transiciones de fase de forma son a lo más de segundo orden en la clasificación de Eherenfest.

Las simetrías dinámicas del modelo IBM-1 se describen en el espacio de parámetros esenciales mediante un triángulo doble mostrado en la Fig. 4, del capítulo 4. Se encontró que el límite $SU(3)$

puede describir formas oblatas y prolatas, mientras que los grupos $O(6)$ y $SU(5)$ aparecen cuando $r_2 = 0$. Las intersecciones entre el triángulo doble y las curvas que conforman la *Separatriz* indican fuertes cambios cualitativos en la SE.

Es importante notar que esta formulación nos permite obtener la interacción más general, la cual da lugar a una SE constante. Esto fué extensivamente utilizado en el pasado para separar las partes colectiva e intrínseca de un Hamiltoniano algebraico [Leviatan, (1987)]. Particularmente, nosotros encontramos que para el límite $O(6)$ la realización que llamamos $O(6)$ produce una superficie de energía constante, y la que llamamos $O(6)$ produce superficies γ -inestables. Sin embargo, debemos señalar que esto último se debe a que usamos una definición particular de los estados coherentes del modelo, y que podríamos tener el resultado opuesto si se lleva a cabo una transformación de norma en los bosones s y d que constituyen estos estados coherentes.

Para los dos modelos considerados en esta tesis, las transiciones de fase de forma tienen lugar sobre la *Separatriz*. La transición de orden máximo se registra de manera singular sobre el origen de coordenadas del espacio de parámetros esenciales, resultando de segundo orden. Sobre el resto del conjunto de bifurcación el orden de las transiciones es de orden cero. Sobre los conjuntos de Maxwell las transiciones resultan de primer orden, salvo en el origen, donde es de segundo. Al cruzar la Parábola de Maxwell la transición de fase de forma del núcleo es de esférico a deformado. Sobre la recta de Maxwell el núcleo experimenta una transición de forma de prolato a oblato. Si la transición tiene lugar cruzando verticalmente el origen del espacio de parámetros, resulta ser la más singular, y esta es de esférico a γ -inestable. Las transiciones sobre los conjuntos de Maxwell revisten particular interés debido a que involucran al mínimo global de la SE.

La relación entre los dos modelos anteriores ha sido extensamente estudiada en el pasado [Moshinsky, (1980); Elliott, Evans, y Park, (1986); Ginocchio y Kirson, (1980); Dieperink, Scholten y Iachello, (1980); van Isacker y Chen, (1981)], y con el presente trabajo esperamos contribuir también en la fundamentación de la estrecha semejanza que en algunos aspectos existe entre estos dos modelos, los cuales sin embargo tienen planteamientos esencialmente distintos.

Finalmente, mencionamos algunas perspectivas de trabajo futuro. Esta clase de análisis, y particularmente la aproximación numérica que presentamos en el último capítulo, puede ser explotado en situaciones más complicadas, donde los modelos bajo consideración involucran Hamiltonianos de mayor complejidad, con un número grande de parámetros, y cuya solución general representa un problema formidable, como es por ejemplo el modelo IBM-2, donde se distigue la interacción protón-neutrón [Arima, Otsuka, Iachello, y Talmi, (1977)], o en otros modelos algebraicos más recientes como el modelo pseudo- $SU(3)$ [Hecht y Adler, (1969)], o el modelo pseudo-simpléctico [Trottenier, Draayer, Hess, Castaños, (1994)]. Esto es particularmente cierto si podemos aplicar a la función SE el lema de la partición de Rene Thom, obteniendo de esta forma un conjunto reducido de variables degeneradas, y determinando sus parámetros esenciales que definen el espacio de control. En el caso de que el espacio de control sea de cinco o menos dimensiones, como hemos visto, será posible clasificar completamente la conducta de la SE. En un caso de mayor complejidad, si bien no tendríamos la generalidad matemática, las ideas básicas de la teoría de catástrofes nos pueden guiar para realizar un ataque del problema mediante una aproximación numérica, como la que presentamos en el capítulo anterior.

BIBLIOGRAFIA

- Arima, A., Otsuka, T., Iachello, F., y Talmi, I., *Phys. Lett.* **66B** (1977) 205.
 Dieperink, A. E. L., Scholten, O., y Iachello, F., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1747.
 Elliott, J. P., Evans, J. A., y Park, P., *Phys. Lett. B* **169** (1986) 309.
 Ginocchio, J. N. y Kirson, M. W., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1744; *Nucl. Phys. A* **350** (1980) 31.

- Hecht, K. T. y Adler, A., *Nucl. Phys. A* **137** (1969) 129.
- Van Isacker, P., y Chen, J. Q., *Phys. Rev. C* **24** (1981) 684.
- Leviatan, A., *Ph. D. thesis, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel*, 1986.
- Leviatan, A., *Ann. Phys. (N. Y.)* **179** (1987) 201.
- Moshinsky, M., *Nucl. Phys. A* **338** (1980) 156.
- Troltenier, D., Draayer, J. P., Hess, P. O., Castaños, O., *Nucl. Phys. A* **576**(1994) 351.

APÉNDICE A. OPERADORES DE CASIMIR DEL IBM

En este capítulo establecemos el hamiltoniano descrito en la Ec. (3.1.2) en términos de las interacciones de uno y dos bosones, y mostramos que alternativamente puede escribirse en función de los operadores de Casimir asociados a las cadenas de grupos $U(5)$, $\overline{O}(6)$ y $\overline{SU}(3)$, es decir

$$H_{IBM} = \epsilon_s N_s + \epsilon_d N_d + \frac{c_0}{2} A_0 + \frac{\sqrt{5}c_2}{2} A_2 + \frac{3c_4}{2} A_4 + \frac{v_2}{\sqrt{2}} E + \frac{v_0}{2} D + u_2 B + \frac{u_0}{2} C, \quad (A.1a)$$

$$= k_1 N_d + k_2 N_d^2 + k_3 N_d N_s + k_4 L^2 + k_5 \Lambda^2 + k_6 \bar{P}^2 + k_7 \bar{Q}^2 + k_8 N_s + k_9 N_s^2, \quad (A.1b)$$

donde se definieron los operadores

$$A_L = [[\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger]^{[L]} \times [\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[L]}]^{[0]}, \quad L = 0, 2, 4, \quad (A.2a)$$

$$B = s^\dagger s [\mathbf{d}^\dagger \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[0]}, \quad (A.2b)$$

$$C = s^{\dagger 2} s^2, \quad (A.2c)$$

$$D = [[\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger]^{[0]} s^2 + s^{\dagger 2} [\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[0]}], \quad (A.2d)$$

$$E = [[\mathbf{d}^\dagger \times \mathbf{d}^\dagger]^{[2]} \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[0]} s + s^\dagger [\mathbf{d}^\dagger \times [\tilde{\mathbf{d}} \times \tilde{\mathbf{d}}]^{[2]}]^{[0]}, \quad (A.2e)$$

$$N_s = s^\dagger s, \quad (A.2f)$$

$$N_d = \mathbf{d}^\dagger \cdot \mathbf{d}. \quad (A.2g)$$

En la Ref. [Castaños et al J. Math. Phys. 1979] se desarrollaron las interacciones de uno y dos bosones, definidas en (A.2), en términos de los operadores de Casimir de los límites $U(5)$, $\overline{O}(6)$ y $\overline{SU}(3)$, esto es

$$A_0 = \frac{1}{5} N_d(N_d + 3) - \frac{1}{5} \Lambda^2, \quad (A.3a)$$

$$A_2 = \frac{1}{7\sqrt{5}} \{-L^2 + 2\Lambda^2 + 2N_d(N_d - 2)\}, \quad (A.3b)$$

$$A_4 = \frac{1}{7} \left\{ \frac{1}{3} L^2 - \frac{1}{5} \Lambda^2 + \frac{6}{5} N_d(N_d - 2) \right\}, \quad (A.3c)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{5}} (N - N_d) N_d, \quad (A.3d)$$

$$C = (N - N_d)(N - N_d - 1), \quad (A.3e)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{5}} \{\Lambda^2 - \bar{L}^2 + 2N N_d - 2N_d^2 + 5N - 4N_d\}, \quad (A.3f)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{35}} \{\bar{Q}^2 - \frac{1}{2} \Lambda^2 + \bar{L}^2 - \frac{1}{8} L^2 + \frac{7}{2} N_d^2 + \frac{11}{2} N_d - 2N(2N_d + 5)\}. \quad (A.3g)$$

La relación inversa a la Ec.(A.3) permite escribir los operadores de Casimir mencionados arriba en términos de las interacciones de uno y dos cuerpos y el resultado es el siguiente:

$$N N_d = A_0 + \sqrt{5} A_2 + 3A_4 + \sqrt{5} B + N_d, \quad (A.4a)$$

$$L^2 = -6A_0 - 3\sqrt{5} A_2 + 12A_4 + 6N_d, \quad (A.4b)$$

$$\Lambda^2 = -4A_0 + \sqrt{5} A_2 + 3A_4 + 4N_d, \quad (A.4c)$$

$$\bar{L}^2 = -4A_0 + \sqrt{5} A_2 + 3A_4 + 2\sqrt{5} B - \sqrt{5} D + 5N_d + 5N_s, \quad (A.4d)$$

$$\bar{Q}^2 = \frac{7}{4}A_0 - 3\frac{\sqrt{5}}{8}A_2 + \frac{3}{2}A_4 + 2\sqrt{5}B + \sqrt{5}D + \sqrt{35}E + \frac{11}{4}N_d + 5N_s, \quad (A.4e)$$

$$N_d^2 = A_0 + \sqrt{5}A_2 + 3A_4 + N_d, \quad (A.4f)$$

$$N^2 = A_0 + \sqrt{5}A_2 + 3A_4 + 2\sqrt{5}B + C + N_d + N_s, \quad (A.4g)$$

donde es importante señalar que el operador cuadrupolar $\bar{Q} = \frac{\sqrt{3}}{2}Q_M$, siendo este último el utilizado en la Ref. [Castaños et al J. Math. Phys. 1979].

Substituyendo las ecuaciones (A.4) en la expresión del hamiltoniano H_{IBM} (A.1b) y factorizando los coeficientes de los operadores de uno y dos cuerpos se obtiene su conexión con los parámetros k_i definidos en (A.1),

$$c_s = 5k_7 + k_8 + k_9, \quad (A.5a)$$

$$c_d = k_1 + k_2 + k_3 + 6k_4 + 4k_5 + \frac{11}{4}k_7 + k_8 + k_9, \quad (A.5b)$$

$$c_0 = 2(k_2 + k_3) - 12k_4 - 8k_5 + \frac{5}{2}k_6 + \frac{7}{2}k_7 + 2k_9, \quad (A.5c)$$

$$c_2 = 2(k_2 + k_3) - 6k_4 + 2k_5 - \frac{3}{4}k_7 + 2k_9, \quad (A.5d)$$

$$c_4 = 2(k_2 + k_3) + 8k_4 + 2k_5 + k_7 + 2k_9, \quad (A.5e)$$

$$u_2 = \sqrt{5}(k_3 + 2k_7 + 2k_9), \quad (A.5f)$$

$$u_0 = \frac{1}{2}k_6 + 2k_9, \quad (A.5g)$$

$$v_0 = \sqrt{5}\left(\frac{1}{2}k_6 + 2k_7\right), \quad (A.5h)$$

$$v_2 = \sqrt{70}k_7. \quad (A.5i)$$

Nuevamente como en ocasiones resulta útil tener la transformación inversa de las expresiones anteriores, la damos a continuación:

$$k_1 = \epsilon + \frac{3}{10}c_0 - \frac{2}{7}c_2 - \frac{18}{35}c_4 + \frac{11}{2\sqrt{70}}v_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}v_0 + \frac{1}{2}u_0, \quad (A.6a)$$

$$k_2 = \frac{1}{10}c_0 + \frac{1}{7}c_2 + \frac{9}{35}c_4 + \frac{7}{2\sqrt{70}}v_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}v_0 + \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{\sqrt{5}}u_2, \quad (A.6b)$$

$$k_3 = -\frac{4}{\sqrt{70}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}v_0 - u_0 + \frac{1}{\sqrt{5}}u_2, \quad (A.6c)$$

$$k_4 = \frac{1}{14}(c_4 - c_2) - \frac{1}{8\sqrt{70}}v_2, \quad (A.6d)$$

$$k_5 = -\frac{1}{10}c_0 + \frac{1}{7}c_2 - \frac{3}{70}c_4 - \frac{1}{2\sqrt{70}}v_2 + \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0, \quad (A.6e)$$

$$k_6 = -\frac{4}{\sqrt{70}}v_2 + \frac{2}{\sqrt{5}}v_0, \quad (A.6f)$$

$$k_7 = \frac{1}{\sqrt{70}}v_2, \quad (A.6g)$$

$$k_8 = c_s - \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0 - \frac{6}{\sqrt{70}}v_2, \quad (A.6h)$$

$$k_9 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2\sqrt{5}}v_0 + \frac{1}{\sqrt{70}}v_2. \quad (A.6i)$$

Las expresiones (A.5) y (A.6) son útiles para comparar ajustes de espectros y transiciones de energía que se obtuvieron en términos de las interacciones de uno y dos cuerpos con aquellos que utilizan la formulación de operadores de Casimir. Así como para la determinación y estudio de las superficies de energía.

También mencionamos en este capítulo que existen dos realizaciones de los generadores de los grupos unitarios en tres dimensiones y ortogonales en seis dimensiones del modelo de bosones interactuantes. Los operadores de Casimir de $U(3)$ y $O(6)$ están definidos en términos de los operadores de uno y dos bosones (A.2) como sigue:

$$\mathcal{L}^2 = -4A_0 + \sqrt{5}A_2 + 3A_4 + 2\sqrt{5}B + \sqrt{5}D + 5N_d + 5N_s, \quad (\text{A.7})$$

$$Q^2 = \frac{7}{4}A_0 - 3\frac{\sqrt{5}}{8}A_2 + \frac{3}{2}A_4 + \frac{\sqrt{5}}{2}B + 2\sqrt{5}D - \sqrt{35}E + \frac{11}{4}N_d + 5N_s. \quad (\text{A.8})$$

Comparando estas expresiones con (A.4d) y (A.4e) es inmediato concluir que:

$$Q^2 = \bar{Q}^2 - 2\sqrt{35}E \quad \mathcal{L}^2 = \bar{\mathcal{L}}^2 + 2\sqrt{5}D.$$

Por lo tanto es evidente que no son diagonales en la base que porta las representaciones irreducibles de $\overline{SU}(3)$ y $\overline{O}(6)$, respectivamente.

Utilizando los resultados (A.7) y (A.8) es directo construir el operador de Casimir G de $SU(3)$,

$$\begin{aligned} G &= 2Q^2 + \frac{3}{4}\mathcal{L}^2, \\ &= 10N - A_0 - 3\sqrt{5}A_2 + 12A_4 + 4\sqrt{5}B + 2\sqrt{5}D - 2\sqrt{35}E, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

y el operador de apareamiento, P^2 . Para este último obtenemos

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4} \{ N(N+4) - \mathcal{L}^2 \}, \\ &= \frac{5}{4}A_0 + \frac{1}{4}C - \frac{\sqrt{5}}{4}D. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

que difiere de \bar{P}^2 en que para este último el factor del operador D , tiene signo positivo.

Finalmente demostramos que los operadores de Casimir de $SU(3)$ y $O(6)$ no son operadores diagonales en las cadenas $\overline{SU}(3)$ y $\overline{O}(6)$, respectivamente escribiéndolos como sigue:

$$G = -22N_d - 14N_d^2 + 16NN_d + \frac{5}{4}L^2 + 2\lambda^2 + 16\bar{P}^2 - 2\bar{Q} - 4N^2, \quad (\text{A.11a})$$

$$\bar{\mathcal{L}}^2 = -8N_d - 4N_d^2 + 4NN_d + 2\lambda^2 + 4\bar{P}^2 - N^2. \quad (\text{A.11b})$$

APÉNDICE B. TEORÍA DE LAS CATASTROFES

El programa de la teoría de las catástrofes puede presentarse de la siguiente manera. Supongamos que el estado de un sistema físico está descrito por las *variables de estado* $\psi_j(t, x_i; c_\alpha)$, donde t y x_i juegan el papel de las variables, y podrían ser, respectivamente, el tiempo y la posición; mientras que las c_α representan un conjunto de parámetros, los cuales describen la influencia o las perturbaciones del medio donde se encuentra el sistema. Debido a que estos parámetros pueden controlar cualitativamente las propiedades de las soluciones $\psi_j(t, x_i; c_\alpha)$, las c_α son llamadas *parámetros de control*. Las variables de estado resultan ser las soluciones de ecuaciones que expresan las leyes dinámicas del sistema físico considerado. Nosotros nos ocuparemos solamente de aquellos casos en los cuales el sistema dinámico es un sistema gradiente, esto es, cuando por ejemplo, tenemos fuerzas derivables de un potencial $F = -\nabla V$:

$$\frac{d\psi_i}{dt} + \frac{\partial V(\psi_j; c_\alpha)}{\partial \psi_i} = 0. \tag{B.1}$$

La Teoría de las Catástrofes estudia la dependencia y la naturaleza del equilibrio del sistema, respecto a los parámetros de control, conforme estos parámetros cambian.

Las propiedades locales, tanto de los potenciales $V(\psi_j)$ como de las familias de potenciales $V(\psi_j; c_\alpha)$, están determinadas por una secuencia de teoremas y resultados del análisis funcional los cuales involucran un creciente acercamiento con la Topología. Entre estos resultados, destacan el Teorema de la Función Implícita del Cálculo Avanzado, el Lema de Morse, y finalmente, el Teorema de Thom, el cual es el resultado central de la Teoría de las Catástrofes.

B.1. EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Considere una superficie F

$$\{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}. \tag{B.2}$$

El teorema de la función implícita nos permite encontrar las condiciones bajo las cuales la superficie tiene una representación única en términos de una función implícita f . Según este teorema, en las vecindades de un punto \mathbf{x}_0 sobre la superficie, sobre el cual el plano tangente no es vertical, es decir sobre el cual $D_3 F(\mathbf{x}_0) \neq 0$, podremos encontrar una vecindad de \mathbf{x}_0 sobre tal que la superficie tiene una representación única de la forma

$$\{(x, y, z) | z = f(x, y)\}. \tag{B.3}$$

Considere por ejemplo la esfera

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}. \tag{B.4}$$

Tomemos un punto (x_0, y_0, z_0) sobre el hemisferio superior ($z_0 > 0$). Entonces, para una vecindad del punto (x_0, y_0) en el plano XY , la ecuación de la esfera define implícitamente una función continua f , única en el dominio de esa vecindad, y que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica. Esta función está dada por la regla de correspondencia

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \tag{B.5}$$

Si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre el hemisferio inferior ($z_0 < 0$), entonces se obtiene un resultado semejante con la función implícita f dada por la regla de correspondencia

$$f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad (B.6)$$

Sin embargo, si el punto (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la esfera pero con $z_0 = 0$, entonces no es posible encontrar una vecindad en el plano XY para la cual haya una función implícita única, continua, que tenga esta vecindad como dominio y que contenga al punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica. Los puntos $(x_0, y_0, 0)$ difieren de los demás puntos de la esfera en que en estos puntos el plano tangente a la esfera es paralelo al eje- Z .

En el ejemplo anterior, determinar explícitamente la función f resultó fácil; sin embargo, en general, esta tarea podría ser muy difícil, o aún más, podría no ser factible. Precisamente entonces, el Teorema de Función Implícita nos permite asegurar su existencia, y bajo ciertas circunstancias, nos ofrece fórmulas para las derivadas parciales de esta función.

B.2. EL LEMA DE MORSE

Formas cuadráticas.

Una forma cuadrática general

$$q(x) = \sum_{ij} \lambda_{ij} x_i x_j, \quad (B.7)$$

en general podrá ponerse en una forma canónica [Poston, (1978)]

$$\tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{x}_r^2 - \tilde{x}_{r+1}^2 - \dots - \tilde{x}_s^2, \quad (B.8)$$

donde $s \leq n$. El número s es llamado el *rango* de la forma cuadrática y $(s - r)$ el *índice* de la forma cuadrática q , y cualquier forma cuadrática está determinada de manera única por su rango e índice. Una forma cuadrática resulta ser degenerada siempre que su rango sea menor que el número n de variables. La diferencia $(n - r)$ es el *co-rango*, y mide el número de direcciones independientes en el espacio de dimensión n de las variables, en las cuales la forma cuadrática resulta degenerada. Podemos representar la forma cuadrática $q(x)$ de la Ec. (B.7) en forma matricial mediante la matriz Λ_{ij} , y así, tenemos

$$q(x) = x \Lambda x^T, \quad (B.9)$$

donde T denota la trasposición del vector. Debido a que se cumple la relación: $x_i x_j = x_j x_i$, podemos reemplazar la matriz Λ por $\frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^T) = M$, siendo ahora M una matriz simétrica, esto es, tendremos la igualdad: $M = M^T$. Por lo tanto, toda forma cuadrática se puede expresar en términos de una matriz simétrica

$$q(x) = x M x^T. \quad (B.10)$$

La degeneración de una forma cuadrática tiene lugar si y sólo si el determinante de su matriz se anula.

Por ejemplo, en dos dimensiones reales, la forma cuadrática

$$q(x, y) = a x^2 + 2b x y + c y^2, \quad (B.11)$$

tiene asociada la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \quad (B.12)$$

Puntos Críticos no degenerados o de Morse.

Si el sistema físico está en equilibrio, tendremos que sobre un punto particular \mathbf{x}_c del espacio de estados, se cumple $\nabla V = 0$. A dichos puntos se les llama puntos críticos de la función V . Las propiedades de estabilidad sobre estos puntos críticos, bajo las condiciones que presentamos a continuación, pueden ser determinadas por los eigenvalores de la matriz de estabilidad, o matriz Hessiana $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$. Claramente, ya no se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implícita, sin embargo, si se cumple la condición: $\det V_{ij} \neq 0$, entonces los puntos críticos se llaman *no-degenerados*, y el Lema de Morse garantiza la existencia de una forma localmente cuadrática, no-degenerada [Castrigiano y Hayes, (1993)]

$$V \cong \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2. \tag{B.13}$$

Aquí, las λ_i son los eigenvalores de la matriz de estabilidad V_{ij} , evaluados en el punto crítico. Por medio del cambio de coordenadas siguiente: $\tilde{y}_i = |\lambda_i|^{1/2} y_i$, la forma cuadrática anterior se puede expresar en forma canónica [Gilmore, (1981)]

$$V \cong -\tilde{y}_1^2 - \tilde{y}_2^2 \cdots - \tilde{y}_i^2 + \tilde{y}_{i+1}^2 + \cdots + \tilde{y}_n^2 \equiv M_i^n(\tilde{y}). \tag{B.14}$$

La forma $M_i^n(\tilde{y})$ es llamada una *silla-i de Morse*.

La matriz Hessiana determina si un punto crítico *no-degenerado* resulta un máximo, un mínimo, o un punto de silla.

Ejemplo. En las siguientes funciones en dos variables el origen resulta un punto crítico no-degenerado, representando un ejemplo de un máximo, un mínimo, y un punto de silla, respectivamente,

$$f(x, y) = -x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 - y^2. \tag{B.15}$$

Además, el punto crítico es aislado, *i.e.*, en una vecindad de puntos alrededor de él, no existen otros puntos críticos. Se puede demostrar que los puntos críticos no-degenerados tienen que ser aislados [Poston, (1978)].

B.3. FORMAS DE THOM

Si el sistema físico está en equilibrio, esto es, si sobre un punto particular \mathbf{x}_c del espacio de estados, se cumple $\nabla V = 0$, pero la matriz de estabilidad resulta tal que $\det V_{ij} = 0$, entonces claramente ya no se cumplen las condiciones del Teorema de Morse, y tenemos que los puntos críticos resultan *degenerados*. Por sí misma, la matriz Hessiana ya no puede determinar la naturaleza del punto crítico *degenerado*, si este resulta un máximo, un mínimo, un punto de silla, o de alguna otra forma más elaborada.

Ejemplo. Considerada en una sola variable, la función $f(x) = x^2$, tiene en el origen un punto crítico aislado y no-degenerado. En cambio, para todas las funciones siguientes, el origen resulta todavía un punto crítico aislado, pero degenerado

$$f(x) = x^n, \quad n = 3, 4, 5, 6, 7. \tag{B.16}$$

El criterio de la segunda derivada no puede determinar por sí mismo la naturaleza del punto crítico. Por ejemplo, para el caso $n = 3$ en la ecuación anterior, la segunda derivada en el origen se anula, y

tenemos un punto de inflexión, pero para $n = 4$, la segunda derivada en el origen también se anula, y sin embargo tenemos un mínimo.

Ejemplo. La siguiente función, considerada en dos variables, (x, y) , tiene sus puntos críticos degenerados y no-aislados

$$f(x, y) = x^2. \quad (B.17)$$

Su matriz Hessiana resulta

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (B.18)$$

De esta manera observamos que el eigenvalor de la matriz, asociado a la variable x , nunca se anula. En cambio, en la variable y siempre se tiene un punto crítico degenerado. La función anterior tiene un mínimo en la dirección del eje- X , cuando $x = 0$, y este punto crítico resulta degenerado y no-aislado en la dirección del eje- Y .

Ejemplo. La siguiente función tiene en el origen un punto crítico degenerado y aislado

$$f(x, y) = x^2 y - y^3. \quad (B.19)$$

Su derivada resulta

$$\nabla f = (2xy, x^2 - 3y^2). \quad (B.20)$$

Su matriz Hessiana resulta

$$\begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -6y \end{pmatrix}. \quad (B.21)$$

Ejemplo. La función

$$f(x) = x^3 + c_1 x + c_0, \quad (B.22)$$

tiene en el origen un mínimo aislado y no degenerado. Este punto de Morse resulta estable, sin importar la variación que sufran los parámetros c_1 y c_0 . Sin embargo esto no es así para otras funciones, para las cuales se incluyen puntos no-de-Morse, como veremos a continuación. Por ejemplo, la estabilidad del punto crítico de la función

$$f(x) = x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0. \quad (B.23)$$

dependerá de la elección de los parámetros. Sin pérdida de generalidad, podemos llevar la expresión anterior a la forma

$$g(x) = x^3 + px + q, \quad (B.24)$$

donde

$$p = c_1 - c_2^2/3, \quad q = c_0 - c_1 c_2/3 + 2(c_2/3)^3. \quad (B.25)$$

Para esta función tenemos que sus derivadas resultan

$$g'(x) = 3x^2 + p, \quad g''(x) = 6x. \quad (B.26)$$

Así, vemos que si $p > 0$, no existen puntos críticos. Si $p < 0$, entonces existen dos puntos críticos aislados, no-degenerados, con un máximo en $x_{cr} = -\sqrt{-p/3}$, y un mínimo en $x_{cr} = \sqrt{-p/3}$. Si

$p = 0$, entonces existen un solo punto críticos aislado, degenerado, en $x_{cr} = 0$, como ya vimos en el ejemplo de la Ec (B.16).

En este último ejemplo podemos apreciar cómo es controlado el sistema por los parámetros; de hecho debemos apreciar que existe en realidad un solo parámetro, p , matemáticamente relevante, el cual involucra a los dos parámetros físicos, c_2 y c_1 , los cuales son los que manejan la conducta cualitativa del sistema físico descrito por el potencial $f(x)$ en (B.23).

Si el potencial $V(x_i; c_\alpha)$, depende de uno o más parámetros de control c_α , entonces la matriz de estabilidad Hessiana $V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ y sus eigenvalores λ_i , también dependerán de estos parámetros de control. Entonces uno o más de los eigenvalores podrían anularse para ciertos valores de los parámetros, y así tendríamos el resultado: $\det V_{ij} = 0$, al evaluarse sobre alguno de los puntos críticos, resultando estos degenerados. Ya no sería posible, sobre de estos puntos, asignar localmente una forma cuadrática no-degenerada, puesto que no se cumplen las hipótesis del Lema de Morse. Sin embargo, sobre un punto crítico degenerado resulta posible asignar una forma canónica para el potencial. Este es el importante resultado conocido como Lema de la Partición de Thom [Gromoll, (1969)], [Poston, (1978)], [Castrigiano, (1993)]

Lema. Sea $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ una función lisa, con $Df = 0$, cuyo Hessiano en 0 tiene rango r (y co-rango $n - r$). Entonces f es equivalente, alrededor de 0, a una función de la forma

$$\pm x_1^2 \pm \dots \pm x_r^2 + f(x_{r+1}, \dots, x_n), \tag{B.27}$$

donde

$$f : \mathbf{R}^{n-r} \rightarrow \mathbf{R},$$

es lisa.

Este Lema nos dice que alrededor de un puto crítico degenerado, una función f , lisa, de n variables, puede expresarse mediante coordenadas adecuadas, como la suma de dos tipos diferentes de funciones, una en la forma cuadrática no-degenerada en r variables, más otra función totalmente degenerada \hat{f} en $n - r$ variables. De esta forma, el estudio de una función en un punto crítico degenerado se reduce al análisis de la conducta de la parte totalmente degenerada con un número reducido de variables, igual al co-rango del Hessiano. Por ejemplo, si en un punto crítico degenerado una función tiene 12 variables y es de co-rango 2, se requerirá estudiar solamente una función en dos variables. Esta drástica reducción en el número de variables es lo que hace tan importante y sorprendente este Lema.

Así, si sobre uno de los puntos críticos del potencial $V(x_i; c_\alpha)$ se anulan $l = n - r$ de los eigenvalores de su Hessiano: $\lambda_1(c), \dots, \lambda_l(c)$, sobre cierto punto del espacio de parámetros, $c = c^0$, entonces el Lema de Partición de Thom puede ser utilizado para partir la función en una parte de Morse, asociada con los r eigenvalores distintos de cero, y una parte totalmente degenerada de $l = n - r$ variables y de los c_α parámetros.

Teorema de Thom

Bajo ciertas condiciones, que incluyen la limitación a un número de parámetros $k \leq 5$, y la ausencia de restricciones impuestas por simetría en la familia de funciones $V(x_i; c_\alpha)$, el teorema de Thom [Thom, (1972)] establece la existencia de una transformación de variables lisa, de manera que

la función se puede escribir de una forma canónica

$$V \cong \tilde{G}(l) + \sum_{j=l+1}^n \lambda_j y_j^2. \tag{B.28}$$

La función $\tilde{G}(l)$ es llamada *el germen de la catástrofe*. En la Tabla.1 se presentan todos los gérmenes de catástrofes para $k \leq 5$, en el caso de $l \leq 2$ eigenvalores nulos del Hessiano.

Tabla 1. Catástrofes elementales de Thom

Nombre	k	Germen	Perturbación
A_2	1	x^3	$a_1 x$
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1 x + a_2 x^2$
A_4	3	x^5	$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$
A_6	5	x^7	$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$
D_{-4}	3	$x^2 y - y^3$	$a_1 x + a_2 y + a_3 y^2$
D_{+4}	3	$x^2 y + y^3$	$a_1 x + a_2 y + a_3 y^2$
D_5	4	$x^2 y + y^4$	$a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2$
D_{-6}	5	$x^2 y - y^5$	$a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 y^3$
D_{+6}	5	$x^2 y + y^5$	$a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1 x + a_2 y + a_3 x y + a_4 y^2 + a_5 x y^2$

En conclusión, en ausencia de toda simetría, cuando degenera un punto crítico de una cierta función, entonces es posible aproximar dicha función alrededor de ese punto, por medio de alguna de las catástrofes elementales, cuando el número de parámetros esenciales resulta menor o igual a cinco. En la Tabla.1, se presentan estas catástrofes elementales, y tenemos que para dos variables se requieren tres o más parámetros asociados con alguna forma canónica.

BIBLIOGRAFIA

Castrigiano, Domenico P.L. y Hayes, Sandra A., *Catastrophe Theory*, Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts. New York. Mexico City. (1993).

Gilmore, Robert, *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, John Wiley & Sons, New York. (1981).

Gromoll, D. y Meyer, W., *On Differentiable Functions with Isolated Critical Points*, *Topology* 8, (1969)361-370.

Poston, T. y Stuart, I. *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman. London. San Francisco. Melbourne. (1978).

Thom, R., *Stabilité Structurelle et Morphogénèse*. New York: Benjamin (1972); traducido en *Structural Stability and Morphogenesis*, Reading: Benjamin, (1975).