UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ACCIONES DE GALOIS SOBRE ANILLOS Y CUBIERTAS DE GALOIS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

CARLOS HUMBERTO ALVAREZ SALAS

DIRECTOR DE TESIS: CHRISTOF GEISS

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Acciones de Galois sobre anillos y cubiertas de Galois"

realizado por Carlos Humberto Álvarez Salas

con número de cuenta 9028357-1 , pasante de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Christof Geiss Hahn.	
Propietario	Dr. José Antonio de la Peña Mena.	
Propietario	Dr. José Ríos Montes.	José Ríos M.
Suplente	Dr. Dieter Vossieck Mühlenweg.	Dieter Vossieck
Suplente	Dr. Michael Barot Schlatter.	

Consejo Departamental de Matemáticas

Indice.

Introducción.

Si tenemos que Γ es un subanillo de un anillo Λ y G es un grupo finito de automorfismos de Λ tal que Γ es el subanillo fijo de Λ bajo la acción de G, y Λ es finitamente generado como $\Gamma-$módulo; se dice que Λ es una extensión pregalois de Γ con grupo G, si Λ es un $\Lambda[G]-$generador proyectivo, y entonces decimos que el par (Λ, G) es pregalois. La motivación para estudiar este tipo de extensiones, es que tienen una relación cercana con las cubiertas de Galois de $K-$categorías, y éstas han llegado a ser una herramienta importante en el estudio de la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita sobre un campo algebráicamente cerrado K.

En este trabajo el primer capítulo consiste de algunos de los resultados que vamos a utilizar en los capítulos siguientes, además de dar una idea de cómo son las estructuras que utilizaremos a lo largo del desarrollo. Los resultados más importantes de ete capítulo son el corolario 1.5 y la proposición 1.7, y ellos toman su importancia precisamente en la medida de que son las caracterizaciones de cuándo un anillo Λ es un $\Lambda[G]-$módulo generador, y cuándo es proyectivo, donde G es un grupo de automorfismos de Λ, y siendo así, serán los resultados mas citados posteriormente dado el objetivo del tema. En el capítulo 2 estudiamos el comportamiento de las parejas (Λ, H) y $(\Lambda, G/H)$, donde H es un subgrupo de G, cuando ya sabemos que (Λ, G) es pregalois. En el capítulo 3 nos hacemos una pregunta similar a la del capítulo 2, pero ahora acerca de los ideales del anillo Λ. En el capítulo 4 se presenta la definición de acción de Galois, que es algo más particular que pregalois, y vemos que muchos de los resultados de los capítulos 2 y 3 se pueden extender cuando consideramos este tipo de acciones. En el capítulo 5 se relaciona a una acción de Galois (Λ, G) con el hecho de que la acción inducida naturalmente de G sobre las clases de isomorfía de los $\Lambda-$módulos simples sea libre, y en este respecto se llegan a determinar las condiciones para que ambas nociones sean equivalentes. En el capítulo 6 se presenta el concepto de $K-$categoría, y se le asigna un anillo a cada categoría de este tipo que tenga un número finito de objetos, para después relacionar el hecho de que la proyección de la categoría sobre su cociente con un grupo G que actúa sobre sus objetos, sea una cubierta de Galois, con el de que la acción de G sobre el anillo asignado a esa categoría sea una acción de Galois. En el capítulo 7 se incluye una lista de las definiciones y teoremas necesarios para leer este trabajo. Todo este trabajo está basado en el artículo $[A.R.]$, pero aquí lo hemos reescrito de una forma mas detallada y elemental que lo hace incluso autocontenido, de tal manera que hemos demostrado muchos resultados que en el original se daban sin prueba, y hemos completado otros cuya prueba era muy escueta. Asi creemos que este trabajo podra ser leído por un público mas amplio.

Capítulo 1. Resultados Preliminares.

Definición: Sea Λ un anillo con unidad y G un subgrupo finito del grupo de automorfismos de Λ. Denotaremos como $\Lambda[G]$ al *anillo del grupo oblicuo* de Λ por G; los elementos de $\Lambda[G]$ son las funciones de G a Λ.

Notación. Si f es un elemento de $\Lambda[G]$ tal que $f(g) = \lambda_g$ entonces denotamos
$f = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, con λ_g en Λ, y g en G. Con las siguientes operaciones: con respecto a la suma, es un $\Lambda -$ *módulo* libre, donde la base son los elementos de G, y la multiplicación se define como $\lambda_g g \cdot \lambda_h h = \lambda_g g(\lambda_h) gh$ (gh es la composición de automorfismos de Λ) con la extensión obvia para elementos de la forma $\sum_{g\in G} \lambda_g g$.

Veamos ahora como Λ es un módulo izquierdo sobre el anillo $\Lambda[G]$, con la acción definida por $\lambda g \cdot x = \lambda g(x)$ para λg en $\Lambda[G]$, y x en Λ :

sean $\sum_{g\in G} \lambda_g g$, y $\sum_{g\in G} \mu_g g$ elementos de $\Lambda[G]$, y x, y elementos de Λ :

1) $(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot (x+y) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g g(x+y) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g (g(x)+g(y)) =$
$\sum_{g\in G} (\lambda_g g(x) + \lambda_g g(y)) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g g(x) + \sum_{g\in G} \lambda_g g(y) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot x + \sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot y$

2) $\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g + \sum_{g\in G} \mu_g g\right) \cdot (x) =$
$\sum_{g\in G} (\lambda_g + \mu_g) g \cdot x =$
$\sum_{g\in G} (\lambda_g + \mu_g) g(x) =$
$\sum_{g\in G} (\lambda_g g(x) + \mu_g g(x)) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g g(x) + \sum_{g\in G} \mu_g g(x) =$
$\sum_{g\in G} \lambda_g g \cdot x + \sum_{g\in G} \mu_g g \cdot x$

3) $\left(\sum_{f\in G} \lambda_f f \cdot \sum_{h\in G} \lambda_h h\right) \cdot (x) =$
$(\sum_{f,h\in G} \lambda_f f(\lambda_h)(fh)) \cdot (x) =$
$\sum_{f\in G} \sum_{h\in G} \lambda_f f(\lambda_h) f(h(x)) =$
$\sum_{f\in G} \lambda_f \sum_{h\in G} f(\lambda_h) f(h(x)) =$
$\sum_{f\in G} \lambda_f \sum_{h\in G} f(\lambda_h h(x)) =$
$\sum_{f\in G} \lambda_f f \cdot (\sum_{h\in G} \lambda_h h(x)) =$
$\sum_{f\in G} \lambda_f f \cdot (\sum_{h\in G} \lambda_h h \cdot x)$

4) $1_{\Lambda[g]} \cdot x = 1_\Lambda Id_\Lambda \cdot x = 1_\Lambda Id_\Lambda(x) = 1_\Lambda x = x.$

Definición: Diremos que la acción de G sobre Λ es pregalois, o simplemente que (Λ, G) es una *acción pregalois*, si Λ es un $\Lambda[G] -$ *generador* proyectivo. Si Γ es un subanillo de Λ, tambien diremos que (Λ, Γ) es pregalois, cuando Γ

sea el conjunto fijo $\Lambda^G = \{\lambda \in \Lambda : g(\lambda) = \lambda, g \in G\}$ de un grupo finito G que actúa sobre Λ, con (Λ, G) pregalois.

Cuando G opera como grupo de automorfismos sobre Λ, esa acción induce otra acción de G sobre Λ^{op}. Es decir que si denotamos por $\times$, a la multiplicación en Λ^{op}, tenemos que si $g \in G$, y $\lambda, \mu \in \Lambda^{op}$, entonces
$$g(\lambda \times \mu) = g(\mu\lambda) = g(\mu)g(\lambda) = g(\lambda) \times g(\mu),$$
por tanto podemos hablar del anillo $\Lambda^{op}[G]$, y preguntarnos por las relaciones que haya entre $\Lambda[G]$, y $\Lambda^{op}[G]$. Por otro lado, si le damos una estrucutura de $\Lambda[G] - $*módulo* derecho a Λ de la siguiente manera:

$\lambda \cdot \lambda_g g = g^{-1}(\lambda\lambda_g)$, o en general $\lambda \cdot \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} g^{-1}(\lambda\lambda_g)$, podemos ver que Λ es un $\Lambda[G] - $*módulo* derecho con esa acción:

Sean $\lambda, \mu \in \Lambda$, y $\lambda_g g, \lambda_h h \in \Lambda^{op}[G]$,

1) $(\lambda + \mu) \cdot \lambda_g g =$
$g^{-1}((\lambda + \mu)\lambda_g) =$
$g^{-1}(\lambda\lambda_g + \mu\lambda_g) =$
$g^{-1}(\lambda\lambda_g) + g^{-1}(\mu\lambda_g) =$
$\lambda \cdot \lambda_g g + \mu \cdot \lambda_g g$

2) $\lambda \cdot (\lambda_g g + \lambda_h h) =$
$g^{-1}(\lambda\lambda_g) + h^{-1}(\lambda\lambda_h) =$
$\lambda \cdot \lambda_g g + \lambda \cdot \lambda_h h$

3) $\lambda \cdot (\lambda_g g \cdot \lambda_h h) =$
$\lambda \cdot \lambda_g g(\lambda_h)gh =$
$(gh)^{-1}(\lambda\lambda_g g(\lambda_h)) =$
$h^{-1}g^{-1}(\lambda\lambda_g g(\lambda_h)) =$
$h^{-1}(g^{-1}(\lambda\lambda_g g(\lambda_h)) =$
$h^{-1}(g^{-1}(\lambda\lambda_g)g^{-1}(g(\lambda_h))) =$
$h^{-1}(g^{-1}(\lambda\lambda_g)\lambda_h) =$
$h^{-1}((\lambda \cdot \lambda_g g)\lambda_h) =$
$(\lambda \cdot \lambda_g g) \cdot \lambda_h h$

4) $\lambda \cdot 1_\Lambda Id_\Lambda = Id_\Lambda^{-1}(\lambda 1) = Id_\Lambda(\lambda) = \lambda.$

Y ahora veamos que hay un antiisomorfismo entre Λ visto como $\Lambda[G] - $*módulo* derecho, y Λ^{op} visto como $\Lambda^{op}[G] - $*módulo* izquierdo, a través del isomorfismo de anillos $f : \Lambda[G]^{op} \to \Lambda^{op}[G]$, definido por $f(\lambda g) = g^{-1}(\lambda)g^{-1}$.

Primero veamos que f es isomorfismo de anillos.

Sean λg y μh en $\Lambda[G]^{op}$, entonces:

$f(\lambda g * \mu h) =$
$f(\mu h \cdot \lambda g) =$
$f(\mu h(\lambda) hg) =$
$(hg)^{-1}(\mu h(\lambda))(hg)^{-1} =$
$g^{-1}h^{-1}(\mu h(\lambda))g^{-1}h^{-1} =$
$g^{-1}(h^{-1}(\mu)h^{-1}h(\lambda))g^{-1}h^{-1} =$
$g^{-1}(h^{-1}(\mu)\lambda)g^{-1}h^{-1} =$
$g^{-1}h^{-1}(\mu)g^{-1}(\lambda)g^{-1}h^{-1} =$
$g^{-1}(\lambda) \times g^{-1}h^{-1}(\mu)g^{-1}h^{-1} =$
$g^{-1}(\lambda)g^{-1} \times h^{-1}(\mu)h^{-1} =$
$f(\lambda g) \times f(\mu h)$. Donde $\times$ denota el producto en $\Lambda^{op}[G]$, y $*$ el producto en $\Lambda[G]^{op}$.

Ahora, si le damos una estructura de $\Lambda[G] -$ *módulo* derecho a Λ de la siguiente manera:

$\mu \cdot \lambda g = f(\lambda g) \cdot \mu$ para cada $\mu \in \Lambda$, y $\lambda g \in \Lambda[G]$, vemos que:
$\mu \cdot \lambda g = f(\lambda g) \cdot \mu = g^{-1}(\lambda)g^{-1} \cdot \mu = g^{-1}(\lambda) \times g^{-1}(\mu) =$
$= g^{-1}(\mu)g^{-1}(\lambda) = g^{-1}(\mu\lambda) = \mu \cdot \lambda g$, es decir que la
$\Lambda[G] -$ *estructura* derecha de Λ corresponde a la
$\Lambda^{op}[G] -$ *estructura* izquierda de Λ^{op} por medio del isomorfismo f de anillos.

Algo, que nos podemos preguntar, es: si será cierto que (Λ, G) es una acción pregalois, si y sólo si (Λ^{op}, G) lo es. Por las observaciones anteriores, se ve, que esto se puede reformular como: ¿será cierto que Λ es un $\Lambda[G] -$ *generador* proyectivo izquierdo, si y sólo si, lo es como un $\Lambda[G] -$ *módulo* derecho?; la respuesta es que sí, y esto se probará verificando las dos propiedades involucradas en la definición de pregalois, por separado, y para esto necesitaremos algunos resultados preliminares.

Lema: *a)* $\_^G :_{\Lambda[G]} \mathcal{M} \rightarrow_{\Lambda^G} \mathcal{M}$, *definido naturalmente como:* $M^G = \{m \in M : g \cdot m = m, g \in G\}$, *para cada* M *en* $\Lambda[G] -$ *mód, y para cada morfismo de* $\Lambda[G] -$ *módulos* $f : M \rightarrow N$, *como* $f^G : M^G \rightarrow N^G$, *donde* f^G *es definido como* $f^G(m) = f(m)$, *para cada* m *en* M^G; *es un funtor.*

b)Λ *tiene estructura natural de* $\Lambda[G] - \Lambda^G -$ *bimódulo, induciendo así el funtor*

$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \_) : \Lambda[G] -$ *mód* $\rightarrow \Lambda^G -$ *mód.*

Prueba:

a)Veamos primero que, podemos restringir cada morfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* $f : M \rightarrow N$, a uno de $\Lambda^G -$ *módulos* $f^G : M^G \rightarrow N^G$, definido por $f^G(m) = f(m)$, para cada m en M^G.

Es decir, sólo tenemos que verificar que;

1) $f(M^G) \subset N^G$, para ver que f^G está bien definida; y que;

2) cada conjunto fijo M^G de un $\Lambda[G] - módulo\ M$, es un $\Lambda^G - módulo.$:

1) sea $n \in f(M^G)$, entonces existe $m \in M^G$ tal que $f(m) = n$; y para $g \in G$ tenemos: $g \cdot n = g \cdot f(m) = f(g \cdot m) = f(m) = n$;

2)Para ver que $M^G es$ un $\Lambda^G - módulo$, primero observamos que M es un $\Lambda^G - módulo$, porque Λ^G es un subanillo de $\Lambda[G]$, y ahora veamos que M^G es un subgrupo de M :

1)M^G no es vacío $(1_M \in M^G)$

2)para $m, n \in M^G$ y $g \in$ tenemos:

$g \cdot (m + n) = g \cdot m + g \cdot n = m + n$ y

$g \cdot (-m) = -(g \cdot m) = -m$, es decir que la suma de dos elementos de M^G es otro elemento de M^G, y el inverso de un elemento de M^G también es un elemento de M^G,y finalmente

3)M^G es cerrado bajo la acción de Λ^G;

sean $g \in G$, $\lambda \in \Lambda^G$, $m \in M^G$, entonces;

$g \cdot (\lambda \cdot m) = (g \cdot \lambda) \cdot m = g(\lambda)g \cdot m =$

$= \lambda g \cdot m = \lambda \cdot (g \cdot m) = \lambda \cdot m$

Entonces $\_^G$, es un funtor que va de $\Lambda[G] - mód$, a $\Lambda^G - mód$, que sólo restringe las funciones, por eso es obvio que, manda las identidades en identidades, y que conserva la composición de funciones, es decir que, $(g \circ f)^G = g^G \circ f^G$.

b)También tenemos que Λ es un $\Lambda[G] - \Lambda^G - bimódulo$, porque sabíamos desde antes que Λ era $\Lambda[G] - módulo$ tanto izquierdo como derecho, y Λ^G es un subanillo de $\Lambda[G]$, asi que sólo es preciso verificar la asociatividad de las dos acciones, es decir que $(\lambda g \cdot \mu) \cdot \gamma = \lambda g \cdot (\mu \cdot \gamma)$, para todas $\lambda g \in \Lambda[G]$, $\mu \in \Lambda$, y $\gamma \in \Lambda^G$.

Para $\lambda g, \mu, \gamma$ como anteriormente tenemos:

$(\lambda g \cdot \mu) \cdot \gamma = \lambda g(\mu) \cdot \gamma = \lambda g(\mu) \cdot \gamma Id_\Lambda = Id_\Lambda^{-1}(\lambda g(\mu)\gamma) =$

$= \lambda g(\mu)\gamma = \lambda g(\mu) g(\gamma) = \lambda g(\mu\gamma) = \lambda g \cdot (\mu \cdot \gamma)$.

Ahora que ya sabemos que Λ es un

$\Lambda[G] - \Lambda^G - bimódulo$, observamos que tenemos el funtor

$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda_{\Lambda^G}, \_) : \Lambda[G] - mód \to \Lambda^G - mód$, que manda a cada

$\Lambda[G] - módulo\ M$ a $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \in \Lambda^G - mód$, con la acción:

$(\lambda \cdot f)(\mu) = f(\mu\lambda)$, para cada $\mu \in \Lambda$, $f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M)$, y $\lambda \in \Lambda^G$. Además a cada morfismo de $\Lambda[G] - módulos\ g : M \to N$, lo manda al morfismo de $\Lambda^G - módulos$

$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, g) : Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \to Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, N)$, definido como

$(Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, g))(f) = g \circ f$, para cada $f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M)$. ■

Proposición 1.1:

a) El morfismo evaluación $\phi'_M : Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \to M$, *definido por* $\phi'_M(f) = f(1)$, *induce un isomorfismo funtorial* $\phi_M : Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \to M^G$ *para cada* $\Lambda[G] -$ *módulo izquierdo* M.

b)$\phi_\Lambda : End_{\Lambda[G]}(\Lambda)^{op} \to \Lambda^G$, *es un isomorfismo de anillos.*

Prueba:

a) Primero veamos que $im(\phi'_M) \subset M^G$. Para $g \in G$, y $f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M)$, tenemos:

$g \cdot \phi'_M(f) = g \cdot f(1) = f(g \cdot 1) = f(g(1)) = f(1) = \phi'_M(f)$, asi que ya podemos decir que $\phi_M : Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \to M^G$, está bien definida. Ahora veamos que ϕ_M, es un morfismo de $\Lambda^G - módulos$:

sean $f, g \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M)$, y $\lambda \in \Lambda^G$,

1)$\phi_M(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \phi_M(f) + \phi_M(g)$.

2)$\phi_M(\lambda f) = (\lambda f)(1) = f(1\lambda) = f(\lambda) = \lambda f(1) = \lambda \phi_M(f)$.

Ahora veremos que;

1)ϕ_M es inyectiva, y que

2)ϕ_M es suprayectiva, para tener que ϕ_M es un isomorfismo:

1) sea $f \in nuc(\phi_M)$, entonces $\phi_M(f) = f(1) = 0$, asi que si, $\lambda \in \Lambda$, $f(\lambda) = \lambda f(1) = \lambda \cdot 0 = 0$, por tanto f es el morfismo cero, y asi tenemos que ϕ_M es inyectiva.

2)Para $m \in M^G$ definimos $f : \Lambda \to M$ como $f(\mu) = \mu \cdot m$ para cada $\mu \in \Lambda$. Tendremos que ver ahora que en realidad f pertenece a $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M$. Para esto, sean $\lambda g \in \Lambda[G]$ y $\mu \in \Lambda$, entonces;

$f(\lambda g \cdot \mu) = f(\lambda g(\mu)) = (\lambda g(\mu)) \cdot m = (\lambda g(\mu))(g \cdot m) =$

$= (\lambda g(\mu) g) \cdot m = (\lambda g \cdot \mu) \cdot m = \lambda g \cdot (\mu \cdot m) = \lambda g \cdot f(\mu)$, asi que ϕ_M, también es suprayectiva, y por tanto es un isomorfismo. A continuación, veremos por qué decimos que el isomorfismo que induce ϕ_M es funtorial. Es precisamente porque la clase $\eta = (\phi_M)_{M \in \Lambda[G]-mód}$ de morfismos en $\Lambda^G - mód$ inducidos por ϕ_M, para cada M que pertenece a $\Lambda[G] - mód$, es un isomorfismo natural que compara a los funtores (covariantes) $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \_)$ y $\_^G$, que van de $\Lambda[G] - mód$ a $\Lambda^G - mód$, es decir, η es una transformación natural a través de isomorfismos. Pero mejor veamos la prueba:

Sean $M, N \in \Lambda[G] - mód$, y sea $f : M \to N$, un $\Lambda[G] - morfismo$. Directamente de las definiciones, verificaremos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M) \arrow[r, "Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, f)"] \arrow[d, "\phi_M"'] & Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, N) \arrow[d, "\phi_N"] \\
M^G \arrow[r, "f^G"] & N^G
\end{tikzcd}$$

sea $g \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, M)$, tenemos que:
$(\phi_N \circ Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, f))(g) = \phi_N((Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, f)(g)) =$
$\phi_N(f \circ g) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f^G(g(1)) =$
$= f^G(\phi_M(g)) = (f^G \circ \phi_M)(g)$, por tanto
$\phi_N \circ Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, f) = f^G \circ \phi_M$, y ya habíamos visto que ϕ_M es un isomorfismo para cada M en $\Lambda[G] - mód$, por lo que finalmente tenemos que $\eta = (\phi_M)_{M \in \Lambda[G]-mód}$, es un isomorfismo natural.

b)Para probar que $\phi_\Lambda : End_{\Lambda[G]}(\Lambda)^{op} \to \Lambda^G$, es un isomorfismo de anillos, ya sólo es necesario ver que ϕ_Λ conserva la estructura multiplicativa, porque en (a) ya se vió que ϕ_Λ sí conserva la estructura de módulos, o más particularmente la de grupos abelianos, y que es una función biyectiva; asi que:

sean g, f elementos de $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)^{op}$, tenemos que:
$\phi_\Lambda(g \circ^{op} f) = \phi_\Lambda(f \circ g) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) =$
$= f(g(1)1) = g(1)f(1) = \phi_\Lambda(g)\phi_\Lambda(f)$. por lo que queda demostrada la proposición. ■

Como consecuencia del isomorfismo de anillos
$End_{\Lambda[G]}(\Lambda)^{op} \cong \Lambda^G$, tenemos en la siguiente proposición, una relación entre $Mod\Lambda[G]$, y $Mod\Lambda^G$, las categorías de $\Lambda[G] - módulos$, y $\Lambda^G - módulos$, izquierdos respectivamente, cuando la acción (Λ, G) es pregalois.

Proposición 1.2: *La acción (Λ, G) es pregalois si y sólo si,*
$\Lambda \otimes_{\Lambda^G} - : Mod\Lambda^G \to Mod\Lambda[G]$, *y*
$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, -) : Mod\Lambda[G] \to Mod\Lambda^G$, *son equivalencias inversas de categorías.*

Prueba: Supongamos primero que la acción (Λ, G) es pregalois. Entonces, Λ es un $\Lambda[G] - generador$, finitamente generado (por la identidad) y proyectivo, además sabemos que

$\Lambda^G \cong End_{\Lambda[G]}(\Lambda)^{op}$, ($(\Lambda^G)^{op} \cong End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$), entonces por 7.6, tenemos que, si, ${}_{\Lambda[G]}\Lambda$ es generador, entonces ${}_{\Lambda[G]}\Lambda$ es fiel y balanceado (es decir que ${}_{\Lambda[G]}\Lambda_{End({}_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$ es fielmente balanceado) y que $\Lambda_{End({}_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$ es finitamente generado y proyectivo. Por 7.3 tenemos que si, ${}_{\Lambda[G]}\Lambda$ es finitamente generado y proyectivo, entonces para algunos ${}_{\Lambda[G]}\Lambda'$, y $n \geq 1$ hay un $\Lambda[G] - isomorfismo\ \Lambda \oplus \Lambda' \cong \Lambda[G]^{(n)}$, y con esa n precisamente, tenemos que:

$(\Lambda_{End({}_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}})^{(n)} \cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda[G], \Lambda_{End({}_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}})^{(n)} \cong$
$\cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda[G]^n, \Lambda_{End({}_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}) \cong$

$\cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda \oplus \Lambda', \Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}) \cong$

$\cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}) \oplus Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda', \Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}})$; de hecho este último sumando, ya no importa quién sea; lo importante es que finalmente, tenemos que:

$\Lambda^n \cong End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op} \oplus Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda', \Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}})$, y por 7.4,

$\Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$ es un generador.

Asi que tenemos hasta ahora dos cosas:

1)$_{\Lambda[G]}\Lambda$ y $\Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$, son ambos generadores proyectivos, y finitamente generados, es decir progeneradores. y

2)$_{\Lambda[G]}\Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$, es balanceado.

Obtendremos a continuación que:

$\Lambda \otimes_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} -$, y $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, -)$, son equivalencias inversas:

Sea $M =_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} M$, tenemos que:

$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda \otimes_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} M) \cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda) \otimes_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} M$, por 7.8 ya que $_{\Lambda[G]}\Lambda$, es finitamente generado y proyectivo, pero

$Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda) \otimes_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} M =$

$= End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op} \otimes_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} M \cong M$, por 7.7.

Ahora, tomemos $N =_{\Lambda[G]} N$, entonces tenemos que:

$\Lambda \odot_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, N) \cong$

$\cong Hom_{\Lambda[G]}(Hom_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}(\Lambda, \Lambda), N)$, por 7.9, porque $\Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)}$, es finitamente generado y proyectivo, pero

$Hom_{\Lambda[G]}(Hom_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}(\Lambda, \Lambda), N) \cong Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda\,[G]\,, N)$,

porque

$_{\Lambda[G]}\Lambda_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}}$, es balanceado, y $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda\,[G]\,, N) \cong N$, por tanto $(\Lambda \odot_{End(_{\Lambda[G]}\Lambda)^{op}} -) = F$ y $G = Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, -)$, son equivalencias inversas.

Si ahora suponemos que, F y G, son equivalencias inversas, se sigue directamente de 7.10, que (Λ, G) es una acción pregalois. ■

Para continuar con nuestro objetivo, ahora daremos algunas caracterizaciones de $(\Lambda\,[G])^G$, usando la inclusión natural de Λ en $\Lambda\,[G]$, como un subanillo.

Proposición 1.3: *Para un anillo Λ, y un subgrupo finito G del grupo de automorfismos de Λ,*

a)las siguientes igualdades se dan.

$(\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda = (\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda\,[G] = (\Lambda\,[G]\,)^G = \left\{\sum_{g\in G} g(\lambda)g : \lambda \in \Lambda\right\}.$

b) $(\Lambda\,[G])^G$ es isomorfo a Λ, como $\Lambda-$módulo derecho con $\sum_{g\in G} g$, como generador.

c)las siguientes igualdades también se dan.

$\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g) = \Lambda[G] \cdot (\sum_{g\in G} g) =$
$= \{x \in \Lambda[G] : x \cdot g = x, g \in G\}$, *y este*
$\Lambda[G] - \Lambda^G -$*bimódulo, también es isomorfo a* $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, *a través del morfismo* ϕ, *definido como* $\phi(f) = f(1)$, *donde* Λ *y* $\Lambda[G]$, *son considerados como* $\Lambda[G] -$ *módulos derechos.*

Prueba:

a)Lo haremos con cuatro contenciones simples, las tres primeras en el orden que aparecen los conjuntos, y la última que es la que cerrará el ciclo, para concluir las igualdades:

*1)*la primera es obvia, si vemos a cada elemento $(\sum_{g\in G} g)\lambda$, en $(\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda$, como $(\sum_{g\in G} g)\lambda 1_G$, que pertenece a $(\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda[G]$.

*2)*sea $(\sum_{g\in G} g)\lambda h$ en $(\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda[G]$, si $f \in G$, tenemos que:
$f((\sum_{g\in g} g)\lambda h) = (f(\sum_{g\in G} g))\lambda h = (f \sum_{g\in G} g)\lambda h =$
$= (\sum_{g\in G} fg)\lambda h = (\sum_{g\in G} g)\lambda h$, por tanto
$(\sum_{g\in G} g)\lambda h \in (\Lambda[G])^G$.

*3)*sea $\sum_{g\in G} \lambda_g g \in (\Lambda[G])^G$, sabemos que para todo h en G, se tiene que:
$h \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} h(\lambda_g)hg = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, es decir que si $h \in G$, y $hg = h$, entonces $h(\lambda_g) = \lambda_h$, asi que si $g = 1_G$, entonces $h(\lambda_{1_G}) = \lambda_h$, para toda h en G, por tanto
$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{h\in G} h(\lambda_{1_G})h$, y en consecuencia
$(\Lambda[G])^G \subset \left\{\sum_{g\in G} g(\lambda)g : \lambda \in \Lambda\right\}$.

*4)*sea $\sum_{g\in G} g(\lambda)g$, un elemento del conjunto
$\left\{\sum_{g\in G} g(\lambda)g : \lambda \in \Lambda\right\}$, sabemos que:
$\sum_{g\in G} g(\lambda)g = \sum_{g\in G} g \cdot \lambda = (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda$, y
$(\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda \in (\sum_{g\in G} g) \cdot \Lambda$, con lo cual se tiene la cuarta contención, y por tanto los cuatro conjuntos son iguales.

b)Sea $\phi : \Lambda \to (\Lambda[G])^G$, definida como $\phi(\lambda) = (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda$, probaremos ahora que ϕ es un isomorfismo de $\Lambda -$ *módulos* derechos. Por (a), sabemos que ϕ está bien definida, y además que es suprayectiva; veamos ahora que en verdad, ϕ es un morfismo de $\Lambda -$ *módulos* derechos:

sean $\lambda, \mu \in \Lambda$, tenemos que:
$\phi(\lambda + \mu) = (\sum_{g\in G} g) \cdot (\lambda + \mu) = \sum_{g\in G} g(\lambda + \mu)g =$
$= \sum_{g\in G}(g(\lambda) + g(\mu))g = \sum_{g\in G} g(\lambda)g + \sum_{g\in G} g(\mu)g =$
$= (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda + (\sum_{g\in G} g) \cdot \mu = \phi(\lambda) + \phi(\mu)$, y que
$\phi(\lambda\mu) = (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda\mu = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu)g =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda)g(\mu)g = (\sum_{g\in G} g(\lambda)g) \cdot \mu = \phi(\lambda) \cdot \mu$, por tanto ϕ es aditiva, y saca escalares de Λ por la derecha; finalmente veremos que ϕ es inyectiva:

Sea $\lambda \in \Lambda$, tenemos que:

si $\phi(\lambda) = (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda = \sum_{g\in G} g(\lambda)g = 0$,

entonces $g(\lambda) = 0$, para toda $g \in G$, y por tanto $\lambda = 0$, de donde se concluye que ϕ, es un isomorfismo. Y si $\sum_{g\in G} \lambda_g g \in (\Lambda[G])^G$, entonces existe λ en Λ, tal que $\phi(\lambda) = \sum_{g\in G} g \cdot \lambda = \sum_{g\in G} \lambda_g g$, por ser ϕ suprayectiva, por tanto tenemos que $\sum_{g\in G} g$ es generador de $(\Lambda[G])^G$.

c)lo haremos como en (a), por contenciones simples hasta completar el ciclo para tener las tres igualdades.

*1)*la primera es obvia, si vemos a cada elemento $\lambda(\sum_{g\in G} g)$ en $\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, como $\lambda 1_G(\sum_{g\in G} g)$, que pertenece a $\Lambda[G] \cdot (\sum_{g\in G} g)$.

*2)*sea $\lambda g(\sum_{g\in G} g)$ en $\Lambda[G] \cdot (\sum_{g\in G} g)$, si $h \in G$, tenemos que,

$(\lambda g(\sum_{g\in G} g)) \cdot h = \lambda g((\sum_{g\in G} g)h) =$

$= \lambda g(\sum_{g\in G} gh) = \lambda g(\sum_{g\in G} g)$, por tanto

$\lambda g(\sum_{g\in G} g) \in \{x \in \Lambda[G] : x \cdot g = x, g \in G\}$.

*3)*sea $\sum_{g\in G} \lambda_g g$, en

$\{x \in \Lambda[G] : x \cdot g = x, g \in G\}$, sabemos que para cada $h \in G$, tenemos que:

$(\sum_{g\in G} \lambda_g g) \cdot h = \sum_{g\in G} \lambda_g gh = \sum_{g'\in G} \lambda_{g'} g'$, es decir que para cada h en G, tenemos que si $gh = g'$, entonces $\lambda_g = \lambda_{g'}$; En particular, si $g = 1_G$, tenemos que $gh = h$, y por eso $\lambda_{1_G} = \lambda_h$, por tanto

$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_{1_G} g = \lambda_{1_G} \cdot \sum_{g\in G} g \in \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, y se concluye asi la igualdad de los tres conjuntos.

Y ahora para ver el isomorfismo entre $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, y $\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, primero veamos que ambos, tienen estructura de $\Lambda[G] - \Lambda^G -$ *bimódulos*; el primero la tiene, porque la hereda de las estructuras izquierdas de Λ, y $\Lambda[G]$, respectivamente; (ver capítulo 0) y el segundo también la tiene, porque es un subconjunto de $\Lambda[G]$, no obstante, es preciso verificar que las operaciones son cerradas; para verificar la operación izquierda, es suficiente ver a $\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$ como $\Lambda[G] \cdot (\sum_{g\in G} g)$, por las igualdades anteriores; y para la operación derecha, lo haremos directamente de las definiciones:

sean $\lambda(\sum_{g\in G} g) \in \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, y $\mu \in \Lambda^G$, tenemos que:

$(\lambda(\sum_{g\in G} g))\mu = \lambda((\sum_{g\in G} g)\mu) = \lambda(\sum_{g\in G} g(\mu)g) =$

$= \lambda(\sum_{g\in G} \mu g) = \lambda(\mu \sum_{g\in G} g) = \lambda\mu(\sum_{g\in G} g)$, vuelve a estar en $\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$; y en estas igualdades, se ve por qué es necesario que μ pertenezca a Λ^G, y no solamente a Λ; y que las operaciones izquierda y derecha son asociativas, es obvio, porque $\Lambda[G]$, y Λ^G, son subanillos de $\Lambda[G]$, y $\Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, es un subconjunto de $\Lambda[G]$.

Ahora definimos una función $\phi : Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G]) \to \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, como $\phi(f) = f(1)$, para toda f en $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, y tendremos que verificar que:

1)ϕ está bien definida,

2)ϕ es morfismo de $\Lambda[G] - \Lambda^G - bimódulos$,

3)ϕ es inyectiva, y

4)ϕ es suprayectiva.

Y asi lo haremos,

1) Para ver que ϕ, está bien definida, sea $f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, y sea $f(1) = \sum_{h\in G} \lambda_h h$, entonces utilizando que f saca escalares de $\Lambda[G]$, por la derecha, tenemos en particular, que para toda $g \in G$,

$f(1 \cdot g) = f(1)g = \sum_{h\in G} \lambda_h h \cdot g = \sum_{h'\in G} \lambda_{h'} h'g$, y por otro lado, si operamos con g, antes de aplicar f, tenemos que,

$f(1 \cdot g) = f(g^{-1}(1 \cdot 1)) = f(1) = \sum_{h\in G} \lambda_h h$, asi que, si $h'g = h$ entonces $\lambda_{h'} = \lambda_h$, pero $h'g = h$ sólo cuando $h' = hg^{-1}$, entonces $\lambda_{hg^{-1}} = \lambda_h$ para toda g en G, y en particular para $g = h$, por tanto tenemos que $\lambda_h = \lambda_{1_G}$, por tanto

$f(1) = \sum_{h\in G} \lambda_h h = \sum_{h\in G} \lambda_{1_G} h = \lambda_{1_G} \sum_{h\in G} h \in \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, y finalmente tenemos que $im(\phi) \subset \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$.

2) sean f, g en $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, tenemos que:

$\phi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \phi(f) + \phi(g)$, ahora sean también λg en $\Lambda[G]$, y μ en Λ^G, tenemos que:

$\phi(\lambda g \cdot f) = (\lambda g \cdot f)(1) = \lambda g \cdot f(1) = \lambda g \cdot \phi(f)$, y que

$\phi(f \cdot \mu) = (f \cdot \mu)(1) = f(\mu 1) = f(\mu) = f(1)\mu = \phi(f) \cdot \mu$, utilizando que f saca escalares de $\Lambda[G]$ por la derecha, por tanto ϕ es morfismo de $\Lambda[G] - \Lambda^G - bimódulos$.

3)sea f en el núcleo de ϕ, entonces $\phi(f) = f(1) = 0$, y si λ está en Λ, $f(\lambda) = f(1) \cdot \lambda = 0 \cdot \lambda = 0$, es decir, f es la función constante cero, por tanto ϕ es inyectiva.

4) sea $\lambda \cdot \sum_{g\in G} g \in \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, entonces observamos que;

$f : \Lambda \to \Lambda[G]$, definida como $f(\mu) = \lambda \cdot \sum_{g\in G} g \cdot \mu$, satisface que:

$\phi(f) = f(1) = \lambda \cdot \sum_{g\in G} g$, pero no habremos terminado esta prueba hasta ver que en realidad f pertenece a $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$; para esto, sea λg en $\Lambda[G]$, y μ en Λ, entonces

$f(\mu \cdot \lambda_h h) = f(h^{-1}(\mu\lambda_h)) = (\lambda \cdot \sum_{g\in G} g) \cdot h^{-1}(\mu\lambda_h) =$

$= \lambda \cdot \sum_{g\in G} g(h^{-1}(\mu\lambda_h))g = \lambda \cdot \sum_{gh\in G} gh(h^{-1}(\mu\lambda_h))gh =$

$= \lambda \cdot \sum_{gh\in G} g(\mu\lambda_h)gh = \lambda \cdot \sum_{g\in G} g(\mu\lambda_h)gh =$

$= \lambda \cdot \sum_{g\in G} g(\mu)g(\lambda_h)gh = \lambda \cdot \sum_{g\in G} g(\mu)g \cdot \lambda_h h =$

$= (\lambda \cdot \sum_{g\in G} g \cdot \mu) \cdot \lambda_h h = f(\mu) \cdot \lambda_h h$, por tanto f es un morfismo de $\Lambda[G]$ – *módulos* derechos, y asi ϕ es suprayectiva. Finalmente podemos concluir que ϕ es un isomorfismo de $\Lambda[G] - \Lambda^G$ – *bimódulos.* ■

Definición: *Sean Γ un anillo, y, M,N dos Γ – módulos izquierdos, entonces, al subgrupo generado por $\{im(f) : f \in Hom_\Gamma(M,N)\}$, lo llamaremos la traza de M en N, y lo denotaremos como $\tau_M(N)$.*

Es claro que $\tau_M(N)$ es un Γ – *submódulo* izquierdo de N. Con esta definición, la proposición 1.3 nos da un nuevo resultado.

Corolario 1.4:

a)Consideremos a Λ y a $\Lambda[G]$, como $\Lambda[G]$ – módulos izquierdos. Entonces $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$ es igual al $\Lambda[G]$ – ideal bilateral generado por $\sum_{g\in G} g$, que también es igual al grupo abeliano generado por los elementos del conjunto $\left\{\lambda_1 \cdot \sum_{g\in G} g \cdot \lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda\right\}$.

b)Consideremos ahora, a Λ^{op} y a $\Lambda^{op}[G]$, como $\Lambda^{op}[G]$–módulos izquierdos. Entonces $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = \tau_{\Lambda^{op}}(\Lambda^{op}[G])$ como $\Lambda[G]$ – ideal bilateral.

Prueba:

a)Por definición, $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = gen\left\{im(f) : f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])\right\}$, pero $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G]) \cong \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$ como $\Lambda[G] - \Lambda^G$ – *bimódulos*, a través del isomorfismo ϕ, definido como $\phi(f) = f(1)$, asi que los elementos de $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$, que son los generados por los de la forma $f(\lambda)$, con λ en Λ, y f en $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, son los mismos que los de la forma $f(1)\lambda$, y además sabemos por 1.3(c), que $f(1)$ es de la forma $\mu \cdot (\sum_{g\in G} g)$, asi que finalmente tenemos que cualquier $f(\lambda)$ es de la forma $\mu \cdot (\sum_{g\in G} g) \cdot \lambda$, y en consecuencia

$\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = gen\left\{\mu \cdot \sum_{g\in G} g \cdot \lambda : \mu, \lambda \in \Lambda\right\}$.

b)Si hacemos corresponder, a través del antiisomorfismo de anillos

$f : \Lambda[G] \to \Lambda^{op}[G]$, definido por $f(\lambda g) = g^{-1}(\lambda)g^{-1}$, a la

$\Lambda[G]$ – *estructura* izquierda de $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$ heredada por la

$\Lambda[G]$ – *estructura* izquierda de $\Lambda[G]$, con la $\Lambda^{op}[G]$ – *estructura* derecha de

$Hom_{\Lambda^{op}[G]}(\Lambda^{op}, \Lambda^{op}[G])$, heredada por la $\Lambda^{op}[G]$ – *estructura* derecha de $\Lambda^{op}[G]$, tenemos que:

$\left\{im(f) : f \in Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])\right\} = \left\{im(f) : f \in Hom_{\Lambda^{op}[G]}(\Lambda^{op}, \Lambda^{op}[G])\right\}$

y en consecuencia que $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = \tau_{\Lambda^{op}}(\Lambda^{op}[G])$. ■

Definición: *Sea Γ un anillo, y M un Γ–módulo. Entonces diremos que M es un Γ – generador, en caso de que $\tau_M(\Gamma) = \Gamma$.*

Con esta nueva definición, y con la descripción de $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$ dada en 1.4, daremos en el siguiente resultado, una caracterización por elementos, de Λ

como $\Lambda[G]$ $-$ *generador*, y esta será la que usaremos en el resto de este trabajo.

Corolario 1.5: *Λ es un $\Lambda[G]-$generador, si y sólo si, existen λ_i y μ_i en Λ, tales que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sum_{g\in G} g)\mu_i = 1_{\Lambda[G]}$. Y además, Λ es un $\Lambda[G]$ $-$ generador, si y sólo si, Λ^{op} es un $\Lambda^{op}[G]$ $-$ generador.*

Prueba: Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]$ $-$ *generador*. Sabemos que $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = \Lambda[G]$, y por 1.4(a), tenemos que cualquier elemento de $\Lambda[G]$ se puede escribir como $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sum_{g\in G} g)\mu_i$, para algunas n en los naturales, λ_i, μ_i en Λ, y en particular para el $1_{\Lambda[G]}$. Ahora supongamos que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sum_{g\in G} g)\mu_i = 1_{\Lambda[G]}$, para algunas λ_i, μ_i en Λ, entonces por 1.4(a), el $1_{\Lambda[G]}$ está en $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$, y por tanto todo el generado del $1_{\Lambda[G]}$, está contenido en $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$, es decir que $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = \Lambda[G]$, por tanto Λ es un $\Lambda[G]$ $-$ *generador*. Y la segunda afirmación, se sigue directamente de 1.4(b), y de la definición de $\Lambda[G]$ $-$ *generador*. ■

Proposición 1.6: *Supongamos que* Λ es *un* $\Lambda[G]$ $-$ *generador. Entonces tenemos lo siguiente:*

a)Λ es un Λ^G $-$ módulo izquierdo y derecho finitamente generado y proyectivo.

b)El morfismo natural $\alpha : \Lambda\otimes_{\Lambda^G}\Lambda \longrightarrow \Lambda[G]$, dado por $\alpha(\lambda\otimes\mu) = \lambda\cdot\sum_{g\in G} g\cdot\mu$, para cada $\lambda\otimes\mu$ en $\Lambda\otimes_{\Lambda^G}\Lambda$, es un isomorfismo de $\Lambda[G]$ $-$ bimódulos, donde la $\Lambda[G]$ $-$ estructura izquierda de $\Lambda\otimes_{\Lambda^G}\Lambda$ es inducida por la $\Lambda[G]$ $-$ estructura izquierda de la primera Λ, y la $\Lambda[G]$ $-$ estructura derecha, es inducida por la $\Lambda[G]$ $-$ estructura derecha de la segunda Λ.

c)El morfismo natural $\beta : \Lambda[G] \longrightarrow End_{\Lambda^G}\Lambda$, dado por $\beta(\lambda g)(\mu) = \lambda g(\mu)$, para cada λg en $\Lambda[G]$, y cada μ en Λ,es un isomorfismo de anillos, donde Λ es considerado como un Λ^G $-$ módulo derecho.

d)El morfismo natural $\mu : \Lambda \longrightarrow Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$, dado por $\mu(\lambda) = \sum_{g\in G} g\cdot\lambda$, es un isomorfismo de Λ $-$ módulos derechos, donde Λ y Λ^G son considerados como Λ^G $-$ módulos derechos.

e)El morfismo de multiplicación $\delta : \Lambda\otimes_{\Lambda^G}\Lambda \longrightarrow \Lambda$, es un epimorfismo de $\Lambda - \Lambda$ $-$ bimódulos que se escinde.

Prueba:

a)Por 7.6 tenemos que $\Lambda_{End^{op}(\Lambda[G]\Lambda)}$, es finitamente generado y proyectivo, y por 1.1(b), tenemos que Λ_{Λ^G} es finitamente generado y proyectivo. Asi, tenemos (a), con Λ visto como Λ^G $-$ *módulo* derecho. Para demostrar lo mismo para Λ, visto como Λ^G $-$ *módulo* izquierdo, tendremos que hacer algunas observaciones más. Por el corolario 1.5, sabemos que Λ es un $\Lambda[G]-$

generador, si y sólo si Λ^{op} lo es; y por las observaciones hechas al principio, sabemos que la $\Lambda^{op}[G]-$*estructura* izquierda de Λ^{op}, corresponde a la $\Lambda[G]-$ *estructura* derecha de Λ, asi que por 7.6 aplicado para Λ como $\Lambda[G]-$ *generador* derecho, tenemos que ${}_{End_{\Lambda[G]}(\Lambda_{\Lambda[G]})}\Lambda$ es finitamente generado y proyectivo. Aquí, en los endomorfismos $End_{\Lambda[G]}(\Lambda_{\Lambda[G]})$, Λ es considerado como un $\Lambda[G]-$ *módulo* derecho. Ahora para probar que $End_{\Lambda[G]}(\Lambda_{\Lambda[G]})$ es isomorfo a Λ^G, primero definamos $\phi' : End_{\Lambda[G]}(\Lambda) \to \Lambda$, como $\phi'(f) = f(1)$, para cada f en $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$, y observemos que $f(1)$ está siempre en Λ^G, es decir que podemos definir a $\phi : End_{\Lambda[G]}(\Lambda) \to \Lambda^G$, como $\phi(f) = \phi'(f) = f(1)$, para cada f en $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$: Sea g en G, y f en $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$, tenemos que, $f(1)\cdot g = f(1\cdot g) = f(g^{-1}(1)) = f(1)$, por tanto ϕ está bien definida. Ya sólo hace falta probar que:

1)ϕ es morfismo de anillos.

2)ϕ es inyectiva. y

3)ϕ es suprayectiva.

Lo cual haremos a continuación:

1)Sean f y g, en $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$, tenemos que,

$\phi(g+f) = (g+f)(1) = g(1) + f(1) = \phi(g) + \phi(f)$, y que

$\phi(g \circ f) = (g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(1)f(1) = \phi(g)\phi(f)$, por tanto ϕ es morfismo de anillos.

2)Sea f en el núcleo de ϕ, entonces $f(1) = 0$, por tanto $f = 0$.

3)Sea λ en Λ^G, definamos $f : \Lambda \to \Lambda$, como $f(\mu) = \lambda\mu$, veamos que en verdad f pertenece a $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$; sea $\lambda_g g$ en $\Lambda[G]$ y μ en Λ, tenemos que:

$f(\mu\cdot\lambda_g g) = f(g^{-1}(\mu\lambda_g)) = \lambda g^{-1}(\mu\lambda_g) =$

$= g^{-1}(\lambda)g^{-1}(\mu\lambda_g) = g^{-1}(\lambda\mu\lambda_g) =$

$= \lambda\mu\cdot\lambda_g g = f(\mu)\cdot\lambda_g g$, por tanto f pertenece a $End_{\Lambda[G]}(\Lambda)$, y $\phi(f) = f(1) = \lambda$. Por tanto ϕ es un isomorfismo, y en consecuencia Λ es un

$\Lambda^G -$ *módulo* izquierdo finitamente generado y proyectivo.

b) y c) Probaremos primero que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes_{\Lambda^G} \Lambda \arrow[r, "1\otimes\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Lambda \otimes_{\Lambda^G} Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G) \arrow[d, "\mu'"] \\
\Lambda[G] \arrow[r, "\beta"] & End_{\Lambda^G}(\Lambda)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, y posteriormente que cada uno de los cuatro morfismos involucrados es un isomorfismo, (aunque de diferentes estructuras) haciendo una adaptación de la prueba de $[A.G.1, A.2]$, lo cual implica las afirmaciones (b) y (c). Y lo haremos en el siguiente orden:

1)El diagrama es conmutativo.

2)α es morfismo de $\Lambda[G]-$ *bimódulos.*

3)β es morfismo de anillos.

4) $1\otimes\mu$ es morfismo de $End_{\Lambda^G}(\Lambda)-$ *módulos.*

5)μ' definido como $\mu'(x\otimes f)(y) = xf(y)$, es morfismo de $End_{\Lambda^G}(\Lambda)-$ *módulos.*

6)μ' también es morfismo de $End_{\Lambda^G}(\Lambda)-$ *módulos derechos.*

7)α es un morfismo suprayectivo.

8)μ' y β son morfismos suprayectivos.

9)μ' es un morfismo inyectivo.

10) $1\otimes\mu$ es un morfismo suprayectivo.

11)β es un morfismo inyectivo.

12) $1\otimes\mu$ es un morfismo inyectivo.

13)α es un morfismo inyectivo.

Ahora procederemos con las pruebas.

1)Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, en Λ. Directamente de las definiciones, tenemos que:

$\beta(\alpha(\lambda_1\otimes\lambda_2))(\lambda_3) = \beta(\lambda_1\cdot\sum_{g\in G} g\cdot\lambda_2)(\lambda_3) =$
$= \beta(\sum_{g\in G}\lambda_1 g(\lambda_2)g)(\lambda_3) = \sum_{g\in G}\beta(\lambda_1 g(\lambda_2)g)(\lambda_3) =$
$= \sum_{g\in G}\lambda_1 g(\lambda_2)g(\lambda_3) = \sum_{g\in G}\lambda_1 g(\lambda_2\lambda_3) =$
$= \lambda_1\cdot\sum_{g\in G} g(\lambda_2\lambda_3) = \lambda_1\cdot(\sum_{g\in G} g\cdot\lambda_2)(\lambda_3) =$
$= \mu'(\lambda_1\otimes\sum_{g\in G} g\cdot\lambda_2)(\lambda_3) = \mu'(1(\lambda_1)\otimes\mu(\lambda_2))(\lambda_3) =$
$= \mu'((1\otimes\mu)(\lambda_1\otimes\lambda_2))(\lambda_3)$. por tanto $\beta\circ\alpha = \mu'\circ(1\otimes\mu)$.

2)Sean λ y μ en Λ, y ηh en $\Lambda[G]$, tenemos que:

$\alpha(\eta h(\lambda\otimes\mu)) = \alpha(\eta h(\lambda)\otimes\mu) = \eta h(\lambda)\cdot\sum_{g\in G} g\cdot\mu =$
$= \eta h(\lambda)\cdot\sum_{g\in G} g(\mu)g = \eta h(\lambda)\cdot\sum_{g\in G} hg(\mu)hg =$
$= \sum_{g\in G}\eta h(\lambda)hg(\mu)hg = \sum_{g\in G}\eta h(\lambda g(\mu))hg =$
$= \sum_{g\in G}\eta h\cdot\lambda g(\mu)g = \eta h\cdot\sum_{g\in G}\lambda g(\mu)g =$
$= \eta h\cdot(\lambda\cdot\sum_{g\in G} g(\mu)g) = \eta h\cdot(\lambda\cdot\sum_{g\in G} g\cdot\mu) =$
$= \eta h\cdot\alpha(\lambda\otimes\mu)$. y también;
$\alpha((\lambda\otimes\mu)\eta h) = \alpha(\lambda\otimes h^{-1}(\mu\eta)) =$
$= \lambda\cdot\sum_{g\in G} g\cdot h^{-1}(\mu\eta) = \lambda\cdot\sum_{g\in G} g(h^{-1}(\mu\eta))g =$
$= \lambda\cdot\sum_{g\in G} g(\mu\eta)gh = \lambda\cdot\sum_{g\in G} g(\mu)g(\eta)gh =$
$= \lambda\cdot\sum_{g\in G} g(\mu)g\cdot\eta h = (\lambda\cdot\sum_{g\in G} g\cdot\mu)\cdot\eta h =$
$= \alpha(\lambda\otimes\mu)\cdot\eta h.$

3)Sean λg y μh en $\Lambda[G]$, y η en Λ, tenemos que;
$\beta(\lambda g \cdot \mu h)(\eta) = \beta(\lambda g(\mu)gh)(\eta) = \lambda g(\mu)g(h(\eta)) =$
$= \lambda g(\mu h(\eta)) = \beta(\lambda g)(\mu h(\eta)) = \beta(\lambda g)(\beta(\mu h)(\eta)) =$
$= (\beta(\lambda g) \circ \beta(\mu h))(\eta)$.

4)Sean λ y η en Λ, y ω en $End_{\Lambda^G}(\Lambda)$, tenemos que;
$(1 \otimes \mu)(\omega(\lambda \otimes \eta)) = (1 \otimes \mu)(\omega(\lambda) \otimes \eta) =$
$= \omega(\lambda) \otimes \mu(\eta) = \omega(\lambda \otimes \mu(\eta)) = \omega \cdot (1 \otimes \mu)(\lambda \otimes \eta)$.

5)Sean $\lambda \otimes f$ en $\Lambda \otimes_{\Lambda^G} Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$, y ω en $End_{\Lambda^G}(\Lambda)$, tenemos que; si η está en Λ,
$\mu'(\omega(\lambda \otimes f))(\eta) = \mu'(\omega(\lambda) \otimes f)(\eta) =$
$= \omega(\lambda)f(\eta) = \omega(\lambda f(\eta))$, esta última igualdad, se da porque $f(\eta)$ está en Λ^G, y ω en $End_{\Lambda^G}(\Lambda)$, donde Λ es un Λ^G-*módulo* derecho; es decir que $f(\eta)$ funciona como un escalar, y puede actuar antes o despues de aplicar ω a λ, sin alterar el producto; y finalmente tenemos que;
$\omega(\lambda f(\eta)) = \omega(\mu'(\lambda \otimes f)(\eta))$, para concluir que;
$\mu'(\omega(\lambda \otimes f))(\eta) = \omega(\mu'(\lambda \otimes f)(\eta))$.

6)Sean $\lambda \otimes f$ en $\Lambda \otimes_{\Lambda^G} Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$, y ω en $End_{\Lambda^G}(\Lambda)$, tenemos que; si η está en Λ,
$\mu'((\lambda \otimes f)\omega)(\eta) = \mu'(\lambda \otimes \cdot f \circ \omega)(\eta) = \lambda(f \circ \omega)(\eta) =$
$= \lambda f(\omega(\eta)) = \mu'(\lambda \otimes f)(\omega(\eta)) = (\mu'(\lambda \otimes f) \circ \omega)(\eta) =$
$= (\mu'(\lambda \otimes f) \cdot \omega)(\eta)$.

7)Tenemos por hipótesis que Λ es un $\Lambda[G]-$*generador*, y por el corolario 1.5, existen unos λ_i y μ_i en Λ, tales que; $\sum_{i=1}^n \lambda_i(\sum_{g \in G} g)\mu_i = 1$, entonces tenemos que;

$\alpha(\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes \mu_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\sum_{g \in G} g)\mu_i = 1$, y por ser 1, un generador de $\Lambda[G]$ como $\Lambda[G] -$ *módulo*, se tiene que α es suprayectiva.

8)Ya tenemos que $\alpha(\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes \mu_i) = 1$, y sabemos que β es un morfismo de anillos, asi que

$\beta(\alpha(\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes \mu_i)) = \beta(1) = 1$, y por la conmutatividad del diagrama,

$\mu'(1 \otimes \mu)(\sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes \mu_i) = 1$, pero además sabemos que μ' y $(1 \otimes \mu)$ son morfismos de $End_{\Lambda^G}(\Lambda)-$*módulos*, y que el 1 es un generador de $End_{\Lambda^G}(\Lambda)$, visto como un $End_{\Lambda^G}(\Lambda)-$*módulo*. En consecuencia, tenemos que $\mu' \circ (1 \otimes \mu)$ es un morfismo suprayectivo, y por la conmutatividad del diagrama, también $\beta \circ \alpha$ será una función suprayectiva; en particular, μ' y β son morfismos suprayectivos.

9)Por $[A.G.1, A.1]$, tenemos que si μ' es suprayectiva, entonces es un isomorfismo, y en particular es inyectiva. Además, tenemos que Λ es un $\Lambda^G -$ *módulo* derecho finitamente generado y proyectivo.

10)Definimos $\Psi : End_{\Lambda^G}(\Lambda) \to \Lambda \otimes_{\Lambda^G} \Lambda$, como $\Psi(1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes \mu_i$; con los λ_i y μ_i, definidos en (7), y la extendemos linealmente como morfismo de $End_{\Lambda^G}(\Lambda) - módulos$ izquierdos. Asi, tenemos que $\mu' \circ (1 \otimes \mu) \circ \Psi = Id = \beta \circ \alpha \circ \Psi$. Ahora, sea $\lambda \otimes f$ en $\Lambda \otimes_{\Lambda^G} Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$, tenemos que;

$\mu'(\lambda \otimes f) = (\mu' \circ (1 \otimes \mu) \circ \Psi)(\mu'(\lambda \otimes f)) =$

$= \mu'((1 \otimes \mu)(\Psi(\mu'(\lambda \otimes f))))$, y por ser μ' inyectiva, podemos concluir que;

$(1 \otimes \mu)(\Psi(\mu'(\lambda \otimes f))) = (\lambda \otimes f)$, y en consecuencia que $(1 \otimes \mu)$ es un morfismo suprayectivo.

11)Denotemos como $a(\Lambda)$, al anulador de Λ, visto como $\Lambda[G] - módulo$ izquierdo, y observemos que $a(\Lambda) = núc(\beta)$. Ahora veamos que $a(\Lambda)\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = 0$: sean x en $a(\Lambda) \subset \Lambda[G]$, y y en $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$, tenemos que existen f en $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \Lambda[G])$, y λ en Λ, tales que $f(\lambda) = y$, entonces $xy = xf(\lambda) = f(x\lambda) = f(0) = 0$. Pero por hipótesis sabemos que Λ es un $\Lambda[G] - generador$, es decir que $\tau_\Lambda(\Lambda[G]) = \Lambda[G]$, en consecuencia $a(\Lambda) = núc(\beta) = 0$.

12)Primero veamos que μ es un morfismo inyectivo: sea λ en el núcleo de μ, entonces $\mu(\lambda) = 0$, asi que para cada η en Λ, se tiene que;

$\sum_{g\in G} g(\lambda\eta) = \sum_{g\in G} g(\lambda)g(\eta) = \sum_{g\in G} g(\lambda)g \cdot \eta = 0$, entonces $\sum_{g\in G} g(\lambda)g$ está en $a(\Lambda)$, entonces $\sum_{g\in G} g(\lambda)g = 0$, entonces $g(\lambda) = 0$ para cada g en G, por tanto $\lambda = 0$, y en consecuencia μ es inyectiva. Ahora tenemos que el hecho de que Λ sea un $\Lambda^G - módulo$ proyectivo, junto con que μ es un morfismo inyectivo, nos asegura que $1 \otimes \mu$ también es un morfismo inyectivo.

13)Tenemos que $\mu' \circ (1 \otimes \mu)$ es un morfismo inyectivo, por ser la composición de dos morfismos inyectivos; y sabemos que el diagrama conmuta, asi que $\beta \circ \alpha$ también será una función inyectiva, y en particular lo será α.

d)Ya hemos visto en (12) de (b) y (c), que μ es un morfismo inyectivo, por lo que ya sólo es preciso probar que μ es suprayectivo. Es claro que el morfismo $\tau = \sum_{g\in G} g$ es un $\Lambda^G - morfismo$ bilateral de Λ a Λ^G. Sabemos que Λ es un $\Lambda[G] - generador$, entonces existen elementos x_i y y_i en Λ, tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i\tau y_i = 1$, entonces multiplicando por λ, por la derecha, tenemos que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} x_i\tau(y_i\lambda)$. Ahora, si $f : \Lambda \to \Lambda^G$ es un morfismo de $\Lambda^G - módulos$ derechos, se tiene que; para cada λ en Λ,

$f(\lambda) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\tau(y_i\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i\tau(y_i\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\tau(y_i\lambda)$, aqui, $\tau(y_i\lambda)$ sale de la f por ser un escalar de Λ^G, y

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\tau(y_i\lambda) = \tau \sum_{i=1}^{n} f(x_i)y_i\lambda = (\tau \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)y_i)(\lambda)$, asi que

$f = \tau \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)y_i$, en consecuencia tenemos que $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$ es generado por $\tau = \sum_{g\in G} g$, como un $\Lambda - módulo$ derecho. Y por tanto tenemos que μ es un morfismo suprayectivo.

e)El morfismo $p_1 : \Lambda[G] \rightarrow \Lambda$, definido como $p_1(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \lambda_1$, donde 1 es el neutro del grupo G, es claramente, un $\Lambda - epimorfismo$ que se escinde. Por (a), tenemos que Λ es un $\Lambda - módulo$ proyectivo, y $\delta = p_1 \circ \alpha$, por tanto $\delta : \Lambda \otimes_{\Lambda^G} \Lambda \rightarrow \Lambda$, es un epimorfismo de $\Lambda - bimódulos$ que se escinde. ∎

Ahora veremos en el siguiente resultado, una caracterización de cuando Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo asociado con la existencia de ciertos elementos de Λ que, será junto con la caracterización de Λ como $\Lambda[G] - generador$, uno de los resultados más citados en este trabajo, y entre otras cosas quedará claro de dicha caracterización, que Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo, si y sólo si, Λ^{op} lo es como $\Lambda^{op}[G] - módulo$. Y con esto, una de nuestras primeras preguntas quedará contestada, como corolario de dos proposiciones.

Definimos ahora, un $\Lambda[G] - morfismo$ izquierdo, $\epsilon_i : \Lambda[G] \rightarrow \Lambda$, como: $\epsilon_i(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \sum_{g\in G}\lambda_g$, al que llamaremos, el morfismo aumentación izquierda; y similarmente definimos también un $\Lambda[G] - morfismo$ derecho

$\epsilon_d : \Lambda[G] \rightarrow \Lambda$, como $\epsilon_d(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \sum_{g\in G} g(\lambda_{g^{-1}})$, al que llamaremos el morfismo aumentación derecha.

Proposición 1.7: *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo izquierdo.

ii) ϵ_i es un $\Lambda[G] - epimorfismo$ que se escinde.

iii) Existe una λ en Λ, tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$.

iv) ϵ_d es un $\Lambda[G] - epimorfismo$ que se escinde.

v) Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo derecho.

Prueba: Procederemos de la siguiente manera: primero haremos todas las implicaciones hacia abajo, y después, todas las inversas.

*(i⇒ii)*Supongamos que Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo izquierdo. Entonces, tenemos que para cualquier $\Lambda[G] - epimorfismo$ $\sigma : M \rightarrow N$, y cualquier $\Lambda[G] - morfismo$ $\nu : \Lambda \rightarrow N$, existe un $\Lambda[G] - morfismo$ $\rho : \Lambda \rightarrow M$, tal que, el diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \arrow[dl, dashed, "\rho"'] \arrow[d, "\nu"] & \\ M \arrow[r, "\sigma"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir que, $(\sigma \circ \rho) = \nu$; en particular lo tenemos para el $\Lambda[G] - epimorfismo$ $\epsilon_i : \Lambda[G] \to \Lambda$ y el $\Lambda[G] - morfismo$ $1_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$, es decir, existe un $\Lambda[G] - morfismo$

$\rho : \Lambda \to \Lambda[G]$, tal que, $(\epsilon_i \circ \rho) = 1_\Lambda$. Por tanto ϵ_i es un epimorfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* izquierdos que se escinde.

*(ii⇒iii)*Ahora supongamos que ϵ_i es un $\Lambda[G] - epimorfismo$ que se escinde. Entonces existe un $\Lambda[G] - morfismo$ $\delta : \Lambda \to \Lambda[G]$, tal que, $(\epsilon_i \circ \delta) = 1_\Lambda$. Pero sabemos que, $\delta(1)$ tiene que estar necesariamente en $(\Lambda[G])^G$, porque si g está en G,

$g \cdot \delta(1) = \delta(g \cdot 1) = \delta(g(1)) = \delta(1)$, por ser δ un $\Lambda[G] - morfismo$. Por la proposición 1.3(a), $(\Lambda[G])^G = \left\{\sum_{g\in G} g(\lambda)g : \lambda \in \Lambda\right\}$, asi que

$\delta(1) = \sum_{g\in G} g(\lambda)g$ para alguna λ en Λ, por lo que

$1 = (\epsilon_i \circ \delta)(1) = \epsilon_i(\delta(1)) = \epsilon_i(\sum_{g\in G} g(\lambda)g) = \sum_{g\in G} g(\lambda)$, para alguna λ en Λ.

*(iii⇒iv)*Supongamos ahora que existe una λ en Λ, tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$. Definamos $\delta : \Lambda \to \Lambda[G]$, como $\delta(\mu) = \sum_{g\in G} \lambda g{\cdot}\mu$ para cada μ en Λ. Tenemos que:

$(\epsilon_d \circ \delta)(\mu) = \epsilon_d(\sum_{g\in G} \lambda g \cdot \mu) = \epsilon_d(\sum_{g\in G} \lambda g(\mu)g) =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda g^{-1}(\mu)) = \sum_{g\in G} g(\lambda)gg^{-1}(\mu) = \sum_{g\in G} g(\lambda)\mu =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda)\cdot\mu = \mu$ para cada μ en Λ. Por supuesto que δ es un morfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* derechos, porque si μ está en Λ y νh está en $\Lambda[G]$, tenemos que:

$\delta(\mu \cdot \nu h) = \delta(h^{-1}(\mu\nu)) = \sum_{g\in G} \lambda g \cdot h^{-1}(\mu\nu) =$
$= \sum_{g\in G} \lambda g(h^{-1}(\mu\nu))g = \sum_{g\in G} \lambda gh(h^{-1}(\mu\nu))gh =$
$= \sum_{g\in G} \lambda g(\mu\nu)gh = \sum_{g\in G} \lambda g(\mu)g(\nu)gh =$
$= \sum_{g\in G} \lambda g(\mu)g \cdot \nu h = (\sum_{g\in G} \lambda g \cdot \mu) \cdot \nu h = \delta(\mu) \cdot \nu h$. Por tanto ϵ_d es un epimorfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* derechos que se escinde.

Probar *(iv⇒v)* y *(v⇒iv)*, es *mutatis mutandis,* como probar *(ii⇒i)* (que haremos al final) y *(i⇒ii)*, respectivamente.

*(iv⇒iii)*Supongamos que ϵ_d es un epimorfismo que se escinde. Entonces existe un morfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* derechos $\delta : \Lambda \to \Lambda[G]$, tal que $(\epsilon_d \circ \delta) = 1_\Lambda$. Pero observamos que $\delta(1)$ está en $\{x \in \Lambda[G] : x \cdot g = x, g \in G\}$, porque si g está en G,

$\delta(1) \cdot g = \delta(1 \cdot g) = \delta(g^{-1}(1)) = \delta(1)$, por ser δ un morfismo de $\Lambda[G] -$ *módulos* derechos. Y por la proposición 1.3, sabemos que

$\{x \in \Lambda[G] : x \cdot g = x, g \in G\} = \Lambda \cdot (\sum_{g\in G} g)$, asi que $\delta(1) = \lambda \cdot \sum_{g\in G} g$ para alguna λ en Λ, por lo que

$1 = (\epsilon_d \circ \delta)(1) = \epsilon_d(\delta(1)) = \epsilon_d(\lambda \cdot \sum_{g \in G} g) =$
$= \epsilon_d(\sum_{g \in G} \lambda g) = \sum_{g \in G} g(\lambda)$, para alguna λ en Λ.

*(iii$\Rightarrow$ii)*Supongamos ahora que existe una λ en Λ tal que $\sum_{g \in G} g(\lambda) = 1$. Definamos $\delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda[G]$, como $\delta(\mu) = \mu \cdot \sum_{g \in G} g(\lambda) g$, para cada μ en Λ. De forma analoga a lo que hicimos antes, se ve que δ es un morfismo de $\Lambda[G] - \textit{módulos}$ izquierdos, y además tenemos que: para cada μ en Λ

$(\epsilon_i \circ \delta)(\mu) = \epsilon_i(\delta(\mu)) = \epsilon_i(\mu \cdot \sum_{g \in G} g(\lambda) g) =$
$= \epsilon_i(\sum_{g \in G} \mu g(\lambda) g) = \sum_{g \in G} \mu g(\lambda) = \mu \cdot \sum_{g \in G} g(\lambda) = \mu$, es decir que $(\epsilon_i \circ \delta) = 1_\Lambda$. Por tanto ϵ_i es un epimorfismo de $\Lambda[G] - \textit{módulos}$ izquierdos que se escinde.

Y finalmente, *(ii$\Rightarrow$i)*:Supongamos que ϵ_i es un epimorfismo de $\Lambda[G] - \textit{módulos}$ izquierdos que se escinde. Entonces existe un morfismo $\rho : \Lambda \longrightarrow \Lambda[G]$ tal que $(\epsilon_i \circ \rho) = 1_\Lambda$. Sean M, N dos $\Lambda[G] - \textit{módulos}$ izquierdos, $\sigma : M \longrightarrow N$ un epimorfismo, y $\tau : \Lambda \longrightarrow N$ cualquier morfismo. Tenemos que: $\tau \circ \epsilon_i$ es un morfismo que va de $\Lambda[G]$ a N, $\tau \circ \epsilon_i : \Lambda[G] \longrightarrow N$, y sabemos que $\Lambda[G]$ es un $\Lambda[G] - \textit{módulo}$ proyectivo, por ser libre. Entonces existe un morfismo $\eta : \Lambda[G] \longrightarrow M$, tal que $\sigma \circ \eta = \tau \circ \epsilon_i$, entonces $\sigma \circ \eta \circ \rho = \tau \circ \epsilon_i \circ \rho$, pero $(\epsilon_i \circ \rho) = 1_\Lambda$, asi que $\sigma \circ \eta \circ \rho = \tau$, es decir que $\eta \circ \rho : \Lambda \longrightarrow M$ es un morfismo de $\Lambda[G] - \textit{módulos}$ izquierdos, tal que el diagrama conmuta;

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda[G] \arrow[r, shift right, "\varepsilon_i"'] \arrow[d, dashed, "\eta"'] & \Lambda \arrow[l, shift right, "e"'] \arrow[d, "\tau"] & \\
M \arrow[r, "\sigma"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

4

por tanto Λ es un $\Lambda[G]-$ *módulo* proyectivo izquierdo ■

De esta proposición, podemos resaltar dos cosas interesantes; la primera es que la equivalencia de (i) y (v), nos da una simetría de la propiedad de ser proyectivo, para Λ como un $\Lambda[G]-$*módulo* izquierdo o derecho; y la segunda es que en (iii), ya tenemos una caracterización de Λ como $\Lambda[G]-$ *módulo* proyectivo, que incluso no depende de el lado por el cual se aplica la acción del anillo $\Lambda[G]$.

Enunciaremos ahora como un corolario, lo que fue una de nuestras primeras preguntas sobre la simetría de la propiedad pregalois, y que ya ha quedado demostrado, porque es consecuencia directa de 1.5, y 1.7.

Corolario 1.8: *(Λ, G) es pregalois, si y sólo si, (Λ^{op}, G) lo es.* ■

A continuación daremos una proposición, que será citada mas adelante.

Proposición 1.9: *Si Λ es un $\Lambda[G]-$ módulo proyectivo, entonces $\Lambda^G \subset \Lambda$ es un Λ^G- sumando, de Λ, izquierdo y derecho. Además, si existe λ en el centralizador de Λ^G en Λ, tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$, entonces Λ^G es un sumando bilateral de Λ.*

Prueba: Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]-$ *módulo* proyectivo. Por la proposición 1.7, sabemos que existe λ en Λ, tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$. Definamos $\nu : \Lambda \to \Lambda^G$, como $\nu(\mu) = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu)$, y $\upsilon : \Lambda \to \Lambda^G$, como $\upsilon(\mu) = \sum_{g\in G} g(\mu\lambda)$ para cada μ en Λ.Tenemos que si η está en Λ^G y μ en Λ,

$\nu(\mu \cdot \eta) = \nu(\mu\eta) = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu\eta) = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu)g(\eta) =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda\mu)\eta = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu) \cdot \eta = \nu(\mu) \cdot \eta$, por tanto ν es un $\Lambda^G - morfismo$ derecho, y analogamente se ve que υ es un $\Lambda^G - morfismo$ izquierdo. También observamos que si $i : \Lambda^G \to \Lambda$ es la inclusión, se tiene que para cada μ en Λ^G,

$(\nu \circ i)(\mu) = \nu(i(\mu)) = \nu(\mu) = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu) = \sum_{g\in G} g(\lambda)g(\mu) =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda)\mu = \sum_{g\in G} g(\lambda) \cdot \mu = \mu$, es decir que ν es inverso izquierdo de la inclusión de Λ^G en Λ, y analogamente se ve que υ también lo es; asi que ambos son epimorfismos de Λ^G- *módulos* que se escinden, derecho e izquierdo respectivamente. Por tanto Λ^G es un Λ^G- *sumando* directo de Λ. Si además se puede escoger a λ en el centralizador de Λ^G en Λ tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$, entonces además de que ν y υ llegan a ser la misma, tambien son $\Lambda^G - morfismos$ bilaterales, y entonces Λ^G es un sumando bilateral de Λ. ■

Aqui tenemos algunas caracterizaciones de una acción (Λ, G) pregalois, cuando ya sabemos que Λ es un $\Lambda[G]-$ *generador*.

Proposición 1.10: *Si Λ es un $\Lambda[G]-$ generador, entonces las siguientes* *afirmaciones son equivalentes:*

a) $i : \Lambda^G \to \Lambda$ *es un monomorfismo de* Λ^G *– módulos derechos (izquierdos) que se escinde.*

b) Λ *es un* Λ^G *– generador derecho (izquierdo).*

c) Λ *es un* $\Lambda[G]$ *– módulo proyectivo derecho (izquierdo).*

Prueba:

(a)$\Rightarrow$(b)Supongamos que $i : \Lambda^G \to \Lambda$ es un monomorfismo que se escinde. Entonces existe un morfismo $\sigma : \Lambda \to \Lambda^G$ de Λ^G – *módulos* izquierdos(derechos) tal que $(\sigma \circ i) = 1_{\Lambda^G}$, y evidentemente es suprayectivo; por tanto Λ es un Λ^G – *generador* izquierdo(derecho).

(b)$\Rightarrow$(c)Supongamos que Λ es un Λ^G – *generador*. Tenemos que existe un morfismo suprayectivo $\eta : \Lambda^n \to \Lambda^G$, y en consecuencia también existen morfismos $\eta_i : \Lambda \to \Lambda^G$, y elementos λ_i en Λ, $i = 1, ..., n$; tales que $\sum_{i=1}^n \eta_i(\lambda_i) = 1$. Por la proposición 1.6 sabemos que $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$ es generado como un Λ^G – *módulo* derecho por $\tau = \sum_{g \in G} g$. Entonces para cada i, se tiene que $\eta_i = \tau\mu_i$, para algunos μ_i en Λ, de tal manera que $1 = \sum_{i=1}^n \tau\mu_i(\lambda_i) = \tau(\sum_{i=1}^n \mu_i\lambda_i) = \sum_{g \in G} g(\sum_{i=1}^n \mu_i\lambda_i)$; y por la proposición 1.7 tenemos que Λ es proyectivo como $\Lambda[G]$ – *módulo* izquierdo y derecho.

Y finalmente, (c)$\Rightarrow$(a)Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]$ – *módulo* proyectivo, la proposición 1.9 nos da automáticamente que $i : \Lambda^G \to \Lambda$ es un monomorfismo de Λ^G – *módulos* izquierdos (y derechos) que se escinde ■

Capítulo 2 Correspondencia de Galois.

Hemos mostrado en el primer capítulo, que el concepto de acción pregalois de un grupo finito G sobre un anillo Λ es simétrico. Y en este capítulo mostraremos que, si (Λ, G) es una acción pregalois, entonces para cada subgrupo H de G, se tiene que (Λ, H) es una acción pregalois. También mostraremos que la acción inducida del grupo cociente G/H sobre el subanillo fijo Λ^H de Λ es pregalois para cada subgrupo normal H de G, si (Λ, G) era una acción pregalois.

Lema 2.1. *Sea H un subgrupo de G. Si Λ es un $\Lambda[G]-$módulo proyectivo, entonces Λ es un $\Lambda[H]-$ módulo proyectivo.*

Prueba: Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]-$*módulo* proyectivo. Tenemos que: $\Lambda[G]$ es un $\Lambda[H]-$ *módulo* libre, porque si tomamos un representante g_i de cada clase lateral de G/H, tenemos que; $\Lambda[G] \cong \oplus_{i=1}^{s} \Lambda[H] g_i$, donde s es el número de clases laterales de G/H. Para ser mas explícitos, veamos primero que esos representantes generan a $\Lambda[G]$, como un $\Lambda[H]-$ *módulo* :

Sea $\sum_{g\in G} \lambda_g g$ cualquier elemento de $\Lambda[G]$, tenemos que;

$\sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h g_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h \cdot g_i\right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h\right) \cdot g_i$ con $\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h$ en $\Lambda[H]$, por tanto $\{g_i : i = 1, ..., s\}$ genera a $\Lambda[G]$.

Ahora veamos la independencia lineal:

Sea $\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h\right) \cdot g_i = \sum_{g\in G} \lambda_g g = 0$, entonces $\lambda_g = 0$ para cada g en G, entonces $\lambda_{hg_i} = 0$ para cada i en $\{1, ..., s\}$ y cada h en H, asi que para cada $i = 1, ..., s$; $\sum_{h\in H} \lambda_{hg_i} h = 0$, en consecuencia $\{g_i : i = 1, ..., s\}$ es un conjunto $\Lambda[H]-$ *linealmente independiente*, y por tanto $\Lambda[G]$ es un $\Lambda[H]-$ *módulo* libre. Pero $\Lambda[H] \cong \Lambda[H] g_i$, asi que $\Lambda[G] \cong \oplus_{i=1}^{s} \Lambda[H]$, y por ser Λ un $\Lambda[G]-$ *módulo* proyectivo, existe una sucesión exacta

${}_{\Lambda[G]}\Lambda[G]^n \rightarrow_{\Lambda[G]} \Lambda \rightarrow 0$ que se escinde, pero esa misma sucesión también la podemos ver como

${}_{\Lambda[H]}\Lambda[G]^n \rightarrow_{\Lambda[H]} \Lambda \rightarrow 0$, que también se escinde, asi que Λ es un

$\Lambda[H]-$ *sumando* de $\Lambda[G]^n$, y sabemos que $\Lambda[G]^n \cong \oplus_{i=1}^{sn} \Lambda[H]$ como $\Lambda[H]-$ *módulo*, lo cual quiere decir que $\Lambda[G]^n$ es un $\Lambda[H]-$ *módulo* libre de dimensión sn, en consecuencia, Λ es un $\Lambda[H]-$ *módulo* proyectivo, por ser sumando de uno libre (ver teorema 7.2). ■

Lema 2.2. *Sea H un subgrupo de G. Si Λ es un $\Lambda[G]-$generador, entonces es tambien un $\Lambda[H]-$ generador.*

Prueba: Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]-$ *generador*. Sea N un $\Lambda[H]-$*módulo*. Sabemos que $\Lambda[H]$ es un $\Lambda[H]-$*generador*, asi que existe un conjunto A y un morfismo suprayectivo de $\Lambda[H]-$*módulos* de $\Lambda[H]^A$ a N, y también sabemos que $\Lambda[G] \cong \oplus_{i=1}^{s}\Lambda[H]$, entonces la proyección sobre el primer sumando resulta un morfismo suprayectivo de $\Lambda[H]-$ *módulos*. Y si Λ es un $\Lambda[G]-$*generador*, en particular existe un conjunto B y un morfismo suprayectivo de $\Lambda[G]-$ *módulos* de Λ^B a $\Lambda[G]$, que también puede ser visto como un morfismo de $\Lambda[H]-$ *módulos*. Asi que finalmente, componiendo los tres morfismos, obtenemos un morfismo de $\Lambda[H]-$ *módulos*

$\left(\Lambda^B\right)^A \to (\Lambda[G])^A \to (\Lambda[H])^A \to N$ que empieza en $\left(\Lambda^B\right)^A$ y termina en N, y además es suprayectivo; por tanto Λ es un $\Lambda[H]-$ *generador*. ■

Reformulando y juntando los dos lemas anteriores, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Sea H un subgrupo de G. Si (Λ, G) es una acción pregalois, entonces (Λ, H) es también una acción pregalois.* ■

Como una consecuencia de la proposición anterior, tendremos la siguiente relación entre los anillos Λ^G, Λ^H, y Λ, con H un subgrupo de G, cuando (Λ, G) sea una acción pregalois.

Corolario 2.4. *Sea H un subgrupo de G. Si (Λ, G) es una acción pregalois, entonces Λ es un Λ^H-módulo proyectivo bilateral, y Λ^H es un Λ^G-módulo proyectivo también bilateral.*

Prueba: Supongamos que (Λ, G) es una acción pregalois. La primera afirmación es sólo una consecuencia directa de la proposición 1.6 (a). Para la segunda afirmación, usaremos además la proposición 1.9. Sabemos de la proposición anterior que (Λ, H) también es pregalois, en particular tenemos que Λ es un $\Lambda[H]-$ *módulo* proyectivo. Y por la proposición 1.9, Λ^H es sumando de Λ como un Λ^H- *submódulo* izquierdo, y también derecho. Pero ya sabíamos por la proposición 1.6(a), que Λ es proyectivo izquierdo, y derecho visto como un Λ^G- *módulo*. Sabemos también que cada Λ^H- *sumando* de Λ es también un Λ^G- *sumando*, porque, M es Λ^H- *sumando* de Λ, si y sólo si, existe un Λ^H- *epimorfismo* $\sigma : \Lambda \to M$, que se escinde, pero si vemos a σ como un Λ^G- *morfismo*, sigue siendo un epimorfismo que se escinde. Entonces, ya podemos ver a Λ^H como un Λ^G- *sumando* de Λ, y ya sabíamos que Λ era un Λ^G- *módulo* proyectivo bilateral; en consecuencia Λ^H también lo será. ■

Antes de obtener los resultados finales acerca de los grupos cociente, necesitaremos algunos resultados preliminares. En el siguiente lema veremos a Λ y Λ^H como Λ^G- *módulos* derechos, donde H es un subgrupo de G.

Lema 2.5. *Sea H un subgrupo normal de G. Si (Λ, G) es una acción*

pregalois, entonces $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda^H, \Lambda^G)$ *es generado como un*
Λ^H-*módulo derecho por el morfismo* σ *definido por* $\sigma(x) = \sum_{\tau \in G/H} g_\tau(x)$, *donde cada* g_τ *es un representante de la clase lateral izquierda* τ.

Prueba: Supongamos que (Λ, G) es una acción pregalois. Tenemos que σ es un $\Lambda^G - morfismo$ de Λ^H a Λ^G, porque, si λ está en Λ^G y x en Λ, entonces
$\sigma(x \cdot \lambda) = \sum_{\tau \in G/H} g_\tau(x\lambda) = \sum_{\tau \in G/H} g_t(x) g_t(\lambda) =$
$= \sum_{\tau \in G/H} g_\tau(x)\lambda = (\sum_{\tau \in G/H} g_t(x)) \cdot \lambda = \sigma(x) \cdot \lambda$. Ahora sea $f \in Hom_{\Lambda^G}(\Lambda^H, \Lambda^G)$. De la proposición 1.9 sabemos que Λ^H es sumando de Λ como un $\Lambda^H - módulo$ derecho, entonces el morfismo restricción de $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$ a $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda^H, \Lambda^G)$ es un epimorfismo. Entonces hay un
$\Lambda^G - morfismo$ $f' : \Lambda \to \Lambda^G$ tal que su restricción a Λ^H es f. Por 1.6(d), sabemos que $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda, \Lambda^G)$ es generado como un $\Lambda - módulo$ derecho por el morfismo ϕ definido por $\phi(x) = \sum_{g \in G} g(x)$. Entonces existe λ en Λ tal que $f' = \phi \cdot \lambda$. Entonces, si x está en Λ^H,
$f(x) = f'(x) = (\phi \cdot \lambda)(x) = \phi(\lambda x) =$
$= \sum_{g \in G} g(\lambda x) = \sum_i g_i(\sum_{h \in H} h(\lambda x)) =$
$= \sum_i g_i((\sum_{h \in H} h(\lambda))x) = (\sigma \cdot \sum_{h \in H} h(\lambda))(x)$. Es decir $f = \sigma \cdot (\sum_{h \in H} h(\lambda))$, por tanto σ genera a $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda^H, \Lambda^G)$ como $\Lambda^H - módulo$ derecho. ■

Lema 2.6. *Sea* H *un subgrupo normal de* G. *Entonces* Λ^H *es un* $\Lambda^H[G/H]-$*módulo fiel, si* Λ *es un* $\Lambda[G] - módulo$ *fiel.*

Prueba: Supongamos que Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ fiel. Sea $\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau \tau$ un elemento de $\Lambda^H[G/H]$, diferente de cero. Consideremos el elemento $\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau (\sum_{g \in \tau} g)$ en $\Lambda[G]$, que también es diferente de cero. Por hipótesis, sabemos que Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ fiel, y entonces tenemos que existe un elemento x en Λ, tal que $(\sum_{\tau \in G/H} \lambda_t (\sum_{g \in \tau} g))(x) \neq 0$. Sabemos que $\sum_{h \in H} h(x) \in \Lambda^H$, y si escogemos un representante g_τ de cada clase τ, tenemos que;
$(\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau (\sum_{g \in \tau} g))(x) = (\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau \sum_{h \in H} g_\tau h)(x) =$
$= (\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau g_\tau \sum_{h \in H} h)(x)$. En consecuencia,
$(\sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau g_\tau)(\sum_{h \in H} h(x)) =$
$= \sum_{\tau \in G/H} \lambda_\tau \tau (\sum_{h \in H} h(x)) \neq 0$, con $\sum_{h \in H} h(x)$ en Λ^H. De lo que se concluye que Λ^H es un $\Lambda^H[G/H] - módulo$ fiel. ■

Lema 2.7. Λ *es un* $\Lambda[G] - generador$ *si las siguientes condiciones se cumplen.*

a)Λ *es un* $\Lambda^G - $*módulo proyectivo finitamente generado.*

b)$Hom_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G}, \Lambda^G)$ *es generado por* $\sum_{g \in G} g$ *como un* $\Lambda-$*módulo derecho.*

c)Λ *es un* $\Lambda[G] - $*módulo fiel.*

Prueba: De la condición (a), que Λ sea un $\Lambda^G-módulo$ finitamente generado y proyectivo, se tiene que Λ es un $End_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G}) - generador$, por el teorema 7.1, y el teorema 7.5. Por otro lado, sabemos que la condición (c), de que Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ fiel, es equivalente por definición a que el morfismo de anillos $\Phi : \Lambda[G] \to End_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G})$ dado por $\Phi(\lambda_g g)(\lambda) = \lambda_g g(\lambda)$, sea inyectivo. Finalmente si consideramos cualquier f en $End_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G})$ $f : \Lambda \to \Lambda$, tenemos que f está en $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G}, \Lambda^G)$, entonces, por la condición (b), existe λ en Λ tal que $\sum_{g\in G} g \cdot \lambda = f$, asi que como cualquier f en $End_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G})$ puede ser representado por un elemento $\sum_{g\in G} g \cdot \lambda$ en $\Lambda[G]$, el morfismo Φ es suprayectivo, es decir que

$\Lambda[G] \cong End_{\Lambda^G}(\Lambda_{\Lambda^G})$, y por tanto Λ es un $\Lambda[G] - generador.$ ■

Para probar el resultado principal de este capítulo, aplicaremos ahora este lema al anillo Λ^H con la acción del grupo G/H, para un grupo normal H de G.

Teorema 2.8. *Sea H un subgrupo normal de G. Si (Λ, G) es una acción pregalois, entonces $(\Lambda^H, G/H)$ también es una acción pregalois.*

Prueba: Primero probaremos que Λ^H es un $\Lambda^H[G/H] - generador$, aplicando el lema 2.7. Supongamos que (Λ, G) es una acción pregalois. Por el corolario 2.4, sabemos que Λ^H es un $\Lambda^G - módulo$ proyectivo. En consecuencia, se satisface la condición (a) del lema 2.7, para $(\Lambda^H, G/H)$. Del lema 2.5 tenemos que $Hom_{\Lambda^G}(\Lambda^H, \Lambda^G)$ es generado por $\sum_{\tau\in G/H} \tau$, como un $\Lambda^H - módulo$ derecho, y entonces se satisface la condición (b) del lema 2.7, para el anillo Λ^H y la acción inducida del grupo cociente G/H sobre él. Finalmente por 7.6, Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ fiel, ya que es $\Lambda[G] - generador$, y del lema 2.6 tenemos que Λ^H es un $\Lambda^H[G/H] - módulo$ fiel, que es la tercera condición del lema 2.7. Ahora que tenemos las tres condiciones del lema 2.7, podemos concluir que Λ^H es un $\Lambda^H[G/H] - generador$. Ahora por 1.7, sabemos que si Λ es un $\Lambda[G] - módulo$ proyectivo, entonces existe λ en Λ tal que $\sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$. Pero $\sum_{h\in H} h(\lambda)$ está en Λ^H, y

$\sum_{\tau\in G/H} \tau\left(\sum_{h\in H} h(\lambda)\right) = \sum_{\tau\in G/H} g_\tau(\sum_{h\in H} h(\lambda)) =$
$= \sum_{g\in G} g(\lambda) = 1$. En consecuencia Λ^H es un $\Lambda^H[G/H] - módulo$ proyectivo. Por tanto $(\Lambda^H, G/H)$ es una acción pregalois. ■

Capítulo 3 Anillos factor.

En este capítulo analizaremos lo que sucede con la propiedad pregalois de una acción (Λ, G), despues de hacer el cociente de Λ con un $G-ideal$ I, considerando la acción inducida de G sobre Λ/I, donde un $G-ideal$ bilateral es un ideal bilateral de Λ que ademas es un $\Lambda[G]-subm\acute{o}dulo$ de Λ, o equivalentemente podemos decir que es un ideal bilateral de Λ, invariante bajo la acción de cualquier elemento de G.

Podemos observar que la acción inducida de G sobre el anillo cociente Λ/I, está bien definida; pues si λ y μ están en la misma clase, es decir que $(\lambda-\mu) \in I$, y g está en G, tenemos que

$g(\lambda-\mu) = g(\lambda) - g(\mu) \in I$, por la definición de $G-ideal$; es decir que $g(\lambda)$ y $g(\mu)$, también están en la misma clase.

Primero probaremos que si (Λ, G) es una acción pregalois, entonces $(\Lambda/I, G)$ también lo es, para cada $G-ideal$ I de Λ. El inverso no se cumple, sin embargo funciona parcialmente cuando nos restringimos a los $G-ideales$ que están contenidos en el radical de Λ. Es decir, lo que se cumple es que: si $(\Lambda/rad\Lambda, G)$ es pregalois, entonces (Λ, G) es pregalois.

Para probar el primer resultado, necesitaremos primero otro resultado que conecta a los anillos $\Lambda[G]$ y $(\Lambda/I)[G]$ para un $G-ideal$ I de Λ.

Lema 3.1. *Sea I un $G-ideal$ bilateral de Λ. Entonces*
$\alpha : \Lambda[G] \to (\Lambda/I)[G]$ *definida por* $\alpha(\sum_{g\in G}\lambda_g g) = \sum_{g\in G}\lambda'_g g$ *induce un isomorfismo* $\Lambda[G]/(I\cdot\Lambda[G]) \simeq (\Lambda/I)[G]$ *donde λ' denota la clase residual de λ en Λ/I.*

Prueba: Es obvio que α es suprayectiva. Veamos que α es un morfismo de anillos;

Sean λg y μh $\Lambda[G]$, entonces

$\alpha(\lambda g\cdot\mu h) = \alpha(\lambda g(\mu)gh) =$

$= (\lambda g(\mu))'gh = \lambda' g(\mu)'gh =$

$= \lambda' g(\mu')gh = \lambda' g\cdot\mu' h = \alpha(\lambda g)\cdot\alpha(\mu h)$, por tanto α es morfismo de anillos.

Ahora veamos que el núcleo de α es $I\cdot\Lambda[G]$: primero que

$(I\cdot\Lambda[G] \subset nuc(\alpha))$:

Sean λ en I, y μg en $\Lambda[G]$, entonces

$\alpha(\lambda\cdot\mu g) = \alpha((\lambda\mu)g) = (\lambda\mu)'g = 0$, porque $\lambda\mu$ está en I. Y ahora que

$(nuc(\alpha) \subset I\cdot\Lambda[G])$:

Sea λg en $nuc(\alpha)$, entonces $\alpha(\lambda g) = \lambda' g = 0$, entonces λ está en I, por tanto λg está en $I\cdot\Lambda[G]$.

Asi que $\alpha : \Lambda[G] \to (\Lambda/I)[G]$, es un morfismo suprayectivo de anillos, cuyo núcleo es $I\cdot\Lambda[G]$, por tanto tenemos que

$\Lambda[G]/(I\cdot\Lambda[G])\cong(\Lambda/I)[G]$. ■

Proposición 3.2. *Sea I un $G-$ ideal bilateral en Λ. Entonces:*

a)Λ/I es un $(\Lambda/I)[G]-generador$ si Λ es un $\Lambda[G]-generador$;

b)Λ/I es un $(\Lambda/I)[G]-$ módulo proyectivo si Λ es un $\Lambda[G]-$ módulo proyectivo;

c)$(\Lambda/I,G)$ es una acción pregalois si (Λ,G) es una acción pregalois.

Prueba:

a) Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]-$*generador*. Entonces existen λ_i y μ_i, en Λ tales que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sum_{g\in G}g)\mu_i=1$, entonces λ_i' y μ_i', son elementos de Λ/I, tales que
$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i'(\sum_{g\in G}g)\mu_i'=1$, por tanto Λ/I es un $(\Lambda/I)[G]-$*generador*.

b) Supongamos que Λ es un $\Lambda[G]-$ *módulo* proyectivo. Entonces existe λ en Λ, tal que $\sum_{g\in G}g(\lambda)=1$, en consecuencia, tenemos que λ' es un elemento de Λ/I tal que
$\sum_{g\in G}g(\lambda')=\sum_{g\in G}g(\lambda)'=(\sum_{g\in G}g(\lambda))'=1$.

c) Esta afirmación se sigue sólo de (a) y (b), por definición. ■

El resultado principal de este capítulo es el siguiente.

Teorema 3.3. *Sea (Λ,G) la acción de G sobre Λ, y $rad\Lambda$ el radical de Λ. Entonces, tenemos lo siguiente:*

a)si $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-generador$, entonces Λ es un $\Lambda[G]-generador$.

b)si $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-$módulo proyectivo, entonces Λ es un $\Lambda[G]-$ módulo proyectivo.

c)si la acción inducida de G sobre $\Lambda/rad\Lambda$ es pregalois, entonces (Λ,G) es una acción pregalois.

Prueba:

a) supongamos que $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-$ *generador*. Entonces existen λ_i, y μ_i en Λ tales que $\sum_i\lambda_i'(\sum_{g\in G}g)\mu_i'=1$, donde λ_i' y μ_i' son las imágenes de λ_i y μ_i bajo la proyección natural de Λ a $\Lambda/rad\Lambda$, respectivamente. En consecuencia, si tomamos a $rad\Lambda$ como el ideal I del lema 3.1, tenemos que $1-\sum_i\lambda_i(\sum_{g\in G}g)\mu_i$ está en el núcleo de α, es decir que vale cero en $(\Lambda/rad\Lambda)[G]$, y por el isomorfismo del mismo lema, tenemos que $1-\sum_i\lambda_i(\sum_{g\in G}g)\mu_i$ está en $(rad\Lambda)\cdot\Lambda[G]$, que sabemos que está contenido en $rad(\Lambda[G])$. Asi que $\sum_i\lambda_i(\sum_{g\in G}g)\mu_i$ es una unidad en $\Lambda[G]$. Entonces la traza de Λ en $\Lambda[G]$, $\tau_\Lambda(\Lambda[G])$ contiene una unidad (por el corolario 1.4), y por tanto debe ser todo $\Lambda[G]$. Por tanto Λ es un $\Lambda[G]-$*generador*.

b)supongamos que $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-$ *módulo* proyectivo. Entonces existe λ en Λ tal que $\sum_{g\in G}g(\lambda')=1$ en $\Lambda/rad\Lambda$, donde λ' es la imágen

de λ bajo la proyección natural de Λ a $\Lambda/rad\Lambda.$, es decir, que $1 - \sum_{g\in G} g(\lambda')$ vale cero en $\Lambda/rad\Lambda$, o lo que es lo mismo, que $1 - \sum_{g\in G} g(\lambda)$ está en $rad\Lambda$, y por tanto $\sum_{g\in G} g(\lambda)$ es una unidad bilateral, con inverso único μ. Ademas sabemos que $\sum_{g\in G} g(\lambda)$ está en Λ^G, y por supuesto que también μ, por ser su inverso, entonces $1 = (\sum_{g\in G} g(\lambda))\mu = \sum_{g\in G} g(\lambda\mu)$. En consecuencia, Λ es un
$\Lambda[G] - $*módulo* proyectivo.
c)esta afirmación se sigue sólo de (a) y (b), por definición. ■

Capítulo 4: Acciones de Galois.

En este capítulo presentaremos la noción de Galois y extenderemos los resultados de los capítulos 2 y 3 substituyendo acción pregalois, por acción de Galois.

Definición: Sean Λ y G como anteriormente. Se dice que (Λ, G) es una *acción de Galois izquierda (derecha)* si las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) (Λ, G) es una acción pregalois.

(b) $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}S$ es un anillo semisimple artiniano para cada $\Lambda-$módulo izquierdo (derecho) simple S.

Se dice que (Λ, G) es una *acción de Galois,* si es acción de Galois izquierda, y derecha.

Probaremos que las nociónes de acción de Galois, y acción pregalois, coinciden para anillos básicos, donde entendemos por anillo básico, a un anillo Λ tal que $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo con división para cada $\Lambda-$módulo izquierdo o derecho simple S. En particular ambas nociones coinciden para anillos conmutativos, así como anillos que son semisimples artinianos básicos módulo sus radicales.

En lo sucesivo llamaremos sólo simples o semisimples a los módulos o anillos que sean simples artinianos, o semisimples artinianos respectivamente.

Primero probaremos que los resultados del capítulo 3 se cumplen, cuando substituimos acción pregalois por acción de Galois izquierda (derecha).

Proposición 4.1. *Sea I un G-ideal de Λ. Si (Λ, G) es una acción de Galois izquierda (derecha), entonces $(\Lambda/I, G)$ es una acción de Galois izquierda (derecha).*

Prueba: De la proposición 3.2 sabemos que $(\Lambda/I, G)$ es una acción pregalois. Así que será suficiente probar que $(\Lambda/I)^G/ann_{(\Lambda/I)^G}S$ es semisimple para cada $\Lambda/I-$ módulo simple S. Sea S un $\Lambda/I-$ módulo simple. Tenemos que I está contenido en $ann_\Lambda S$, así que

$I \cap \Lambda^G \subseteq ann_\Lambda S \cap \Lambda^G = ann_{\Lambda^G}S$. No obstante, si (Λ, G) es pregalois, Λ es un $\Lambda[G]$ $-$ *módulo* proyectivo, y por eso el funtor $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \_)$ es exacto, pero por la proposición 1.1(a) los funtores $Hom_{\Lambda[G]}(\Lambda, \_)$ y $\_^G$ son equivalentes, entonces el funtor punto fijo también es exacto, es decir que si

$0 \to I \to \Lambda \to \Lambda/I \to 0$ es una sucesión exacta, tambien

$0 \to I^G \to \Lambda^G \to (\Lambda/I)^G \to 0$ es exacta, de donde se tiene que $\Lambda^G/I^G \cong (\Lambda/I)^G$, ademas $ann_{\Lambda^G}S/I^G = ann_{\Lambda^G/I^G}S$: ya que, $x \in ann_{\Lambda^G}S/I^G$ si y sólo si, existe $y \in I^G$ tal que $(x-y)s = 0$ para todo $s \in S$ si y sólo si, $x \in \Lambda^G/I^G$ es tal que $xs = 0$ para todo $s \in S$, si y sólo si, $x \in ann_{\Lambda^G/I^G}S$; y por definición $I^G = I \cap \Lambda^G$, entonces tenemos que $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}S = (\Lambda^G/(I \cap \Lambda^G))/(ann_{\Lambda^G}S/(I \cap \Lambda^G)) = (\Lambda/I)^G/ann_{(\Lambda/I)^G}S$ ya que $I^G = I \cap \Lambda^G$. Pero $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}S$ es semisimple por hipótesis (Por definición, de acción de Galois para (Λ, G)), entonces $(\Lambda/I, G)$ es una acción de Galois. ■

El siguiente teorema, es el análogo al teorema 3.3, despues de substituir acción pregalois, por acción de Galois.

Teorema 4.2. *Si la acción inducida $(\Lambda/rad\Lambda, G)$ de G sobre $\Lambda/rad\Lambda$ es una acción de Galois izquierda (derecha), entonces (Λ, G) ya era una acción de Galois izquierda (derecha).*

Prueba: Primero veamos que $rad\Lambda$ está contenido en el anulador de cualquier $\Lambda-$módulo izquierdo o derecho simple; Sea S un $\Lambda-módulo$ simple, para cada s en S, nos fijamos en el morfismo $\sigma_s : \Lambda \rightarrow S$, definido por $\sigma_s(\lambda) = \lambda \cdot s$ para cada λ en Λ; sabemos que cada σ_s está en $Hom_\Lambda(\Lambda, S)$, y que $nuc(\sigma_s) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \cdot s = 0\}$, entonces
$\cap_{s \in S} nuc(\sigma_s) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \cdot s = 0, s \in S\} = ann_\Lambda S$, por tanto,
$rad(\Lambda) \subset ann_\Lambda S$ para cada $\Lambda - módulo$ simple S, y lo demás es como la prueba de la proposición anterior. ■

Observación: Tenemos directamente del teorema 4.2 que: si $\Lambda/rad\Lambda$ es semisimple, y Λ es un $\Lambda[G]-$ generador, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) (Λ, G) es una acción de Galois.

b) $(\Lambda/rad\Lambda)^G$ es semisimple.

c)$(\Lambda/rad\Lambda)[G]$ es semisimple.

En este punto es preciso dar un ejemplo, para mostrar que las nociones de acción de Galois y de acción pregalois no coinciden, ni siquiera en el caso de que el anillo sea un álgebra de dimensión finita.

Ejemplo 4.3. Sea K un campo de característica 2, y sea $\Lambda = M_2(K)$, el anillo de matrices de dos por dos con entradas en K. Sea ϕ el automorfismo de Λ que se obtiene al conjugar con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se ve fácilmente sabiendo que K es de característica dos, que la acción de ϕ está dada por $\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ a+b+c+d & b+d \end{pmatrix}$ y que ϕ es de orden dos. Ahora podemos tomar $G = \{id, \phi\}$. Y se ve fácilmente que

$\Lambda^G = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in K\right\}$. Para ver que Λ es un $\Lambda[G]-$ módulo proyectivo, tomamos $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y observamos que

$\sum_{g\in G} g\,(\lambda) = id \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y por la descripción equivalente de proyectividad dada en la proposición 1.7, se tiene la propiedad para Λ. Similarmente, si usamos la descripción equivalente de $\Lambda\,[G]-$ módulo generador dada en el corolario 1.5 , tenemos que para $\lambda_1 = \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $\lambda_2 = \mu_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \left(\sum_{g\in G} g\right) \mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si observamos que

$(\sum_{g\in G} g) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (id + \phi) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+b+2c+d & b+2d \end{pmatrix}$,

y así

$(id+\phi)(\mu_1) = (id+\phi) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y

$(id+\phi)(\mu_2) = (id+\phi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces, substituyendo tenemos que

$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \left(\sum_{g\in G} g\right) \mu_i = \lambda_1(id+\phi)\mu_1 + \lambda_2(id+\phi)\mu_2 =$

$= \lambda_1 + \lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, y por tanto que Λ es un $\Lambda\,[G]-$módulo generador. En consecuencia (Λ, G) es una acción pregalois, no obstante que el $\Lambda-$ módulo simple no es semisimple como Λ^G- módulo, por lo que (Λ, G) no es una acción de Galois de acuerdo a la equivalencia entre (i) y (iv), de la proposición 4.6, que daremos mas adelante.

Para probar que los resultados del capítulo 2 también se cumplen para subgrupos H de G cuando substituimos acción pregalois por acción de Galois, usaremos algunos resultados intermedios.

Proposición 4.4. Supongamos que (Λ, G) es pregalois, y que $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple para cada $\Lambda-$*módulo* simple izquierdo (derecho) S. Entonces tenemos lo siguiente.

a) Si T es un $\Lambda\,[G] -$ *módulo* simple izquierdo (derecho), entonces T es finitamente generado y semisimple como $\Lambda -$ *módulo* izquierdo (derecho).

b) Si T es un $\Lambda^G -$ *módulo* simple izquierdo (derecho), entonces $\Lambda \otimes_{\Lambda^G} T$, ($T \otimes_{\Lambda^G} \Lambda$) es un $\Lambda -$ *módulo* semisimple izquierdo (derecho).

c) $\Lambda[G]/ann_{\Lambda[G]}T$ es un anillo simple para cada $\Lambda[G]-$ *módulo* simple T.

d) $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}T$ es un anillo simple para cada Λ^G- *módulo* simple T.

Prueba:

(a) Sea T un $\Lambda[G]-$ módulo simple. Tenemos que existe una función suprayectiva $\sigma:\Lambda\to T$, por ser Λ un $\Lambda[G]-$ generador, y entonces $T\cong\Lambda/I$ donde I es un $G-$ ideal izquierdo máximo de Λ. Pero entonces existe J un $\Lambda-$ ideal izquierdo máximo de Λ, que contiene a I. Observemos que $\bigcap_{g\in G}gJ$ es un $G-$ ideal izquierdo de Λ. Entonces $I=\bigcap_{g\in G}gJ$ por ser I máximo, ya que evidentemente I está contenido en $\bigcap_{g\in G}gJ$. Por tanto T es un $\Lambda-$módulo semisimple, porque cada gJ es un $\Lambda-$ ideal izquierdo máximo.

(b) Esta afirmación se sigue de (a), por la equivalencia $\Lambda\otimes_{\Lambda^G}\_:Mod\Lambda^G\to Mod\Lambda[G]$, (proposición 1.2).

(c) Sea T un $\Lambda[G]-$ módulo simple. De (a) sabemos que T es semisimple y finitamente generado como $\Lambda-$módulo. Entonces $\Lambda/ann_\Lambda T$ es un anillo semisimple artiniano, porque si vemos a T como la suma $\oplus_{i=0}^{k}T_i$ donde T_i es un $\Lambda-$ *módulo* simple para $i=0,...,k$; en esta situación tenemos que $ann_\Lambda\oplus_{i=1}^{k}T_i=ann_\Lambda\oplus_{i=1}^{k'}T_i$, si suponemos que $T_1,...,T_{k'}$ son un sistema de representantes de las clases de isomorfía, y por el teorema chino de clases residuales que $\Lambda/ann_\Lambda\oplus_{i=0}^{k'}T_i\cong\times_{i=0}^{k'}\Lambda/ann_\Lambda T_i$, pero por hipótesis sabemos que $\Lambda/ann_\Lambda T_i$ es simple artiniano para $i=0,...,k'$. Tenemos entonces que $\Lambda/ann_\Lambda T$ es un $\Lambda/ann_\Lambda T-$ *módulo* de longitud finita, y por ser G un grupo finito, también $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ será un $\Lambda/ann_\Lambda T-$ *módulo* de longitud finita, y por lo tanto también será de longitud finita sobre Λ y sobre $\Lambda[G]$, y por lo tanto $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ es artiniano (ver teorema 7.15). Pero eso quiere decir que $\Lambda[G]/ann_{\Lambda[G]}T$ es un anillo simple artiniano, por ser cociente de $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$, ya que si consideramos las proyecciones $p_1:\Lambda[G]\to\Lambda[G]/ann_{\Lambda[G]}T$ y $p_2:\Lambda[G]\to(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ y observamos que $nuc(p_2)\subseteq nuc(p_1)$, entonces vemos que existe un epimorfismo $\rho:(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]\to\Lambda[G]/ann_{\Lambda[G]}T$.

(d) Esta afirmación se sigue de la afirmación (c) por la equivalencia de Morita de los anillos Λ^G y $\Lambda[G]$. ■

Lema 4.5. Si (Λ,G) es una acción de Galois izquierda (derecha), entonces $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple para cada $\Lambda-$*módulo* izquierdo (derecho) simple S.

Prueba: Sea S un $\Lambda-$ módulo izquierdo simple. Por hipótesis sabemos que $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}S$ es un anillo semisimple. Obviamente, $\Lambda\cdot(ann_{\Lambda^G}S)\cdot\Lambda$ está contenido en el anulador de S como $\Lambda-$módulo. Entonces existe un morfismo suprayectivo de $\Lambda-$ módulos de $\Lambda/\Lambda\cdot(ann_{\Lambda^G}S)\cdot\Lambda$ a $\Lambda/ann_\Lambda S$. Pero $\Lambda/\Lambda\cdot(ann_{\Lambda^G}S)\cdot\Lambda$ es un Λ^G- módulo artiniano, y entonces tambien es artiniano como $\Lambda-$ módulo. Consecuentemente $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo semisimple. ■

A continuación daremos otras caracterizaciones de (Λ, G) como una acción de Galois.

Proposición 4.6. Supongamos que (Λ, G) es pregalois. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) (Λ, G) es una acción de Galois izquierda (derecha).

ii) $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple para cada $\Lambda-$*módulo* izquierdo (derecho) simple S, y $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ es un anillo simple para cada $\Lambda[G]$ − *módulo* izquierdo (derecho) simple T.

iii) $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple para cada $\Lambda-$*módulo* izquierdo (derecho) simple S, y $\Lambda[G]\otimes_\Lambda S$ es un $\Lambda[G]-$*módulo* semisimple para cada $\Lambda-$*módulo* izquierdo (derecho) simple S.

iv) $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple para cada $\Lambda-$*módulo* izquierdo (derecho) simple S, y cada Λ − *módulo* simple S es semisimple como Λ^G − *módulo*.

Prueba:

(i)⇒(ii). Sea S un $\Lambda-$módulo simple. El lema 4.5 nos asegura que $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo simple. Ahora sólo tenemos que probar la segunda parte de (ii). Sea T un $\Lambda[G]-$ módulo izquierdo simple. Entonces T es semisimple como $\Lambda-$ módulo por la proposición 4.4, y entonces por (i) $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}T$ es un anillo semisimple. Por otro lado sabemos que si (Λ, G) es pregalois entonces el funtor punto fijo es exacto, y en consecuencia $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}T \cong (\Lambda/ann_\Lambda T)^G$. Pero por la proposición 3.2, sabemos que $(\Lambda/ann_\Lambda T, G)$ es una acción pregalois, porque $ann_\Lambda T$ es un $G-$ideal en Λ. Entonces, por 1.2 $(\Lambda/ann_\Lambda T)^G$ y $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ son anillos Morita-equivalentes, y entonces uno es semisimple si y sólo si el otro lo es (ver teoremas 7.13 y 7.14). Por lo tanto $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ es un anillo semisimple.

(ii)⇒(iii). La primera parte de (iii) la tenemos también en (ii), por lo que sólo es preciso probar la segunda parte. Sea S un $\Lambda-$ módulo simple. Observamos primero que $\bigcap_{g\in G} g(ann_\Lambda S)$ es un $G-$ ideal de Λ, y sabemos que S es un $\Lambda-$ submódulo de un $\Lambda[G]$ − módulo de longitud finita, entonces S es un Λ-submódulo de un $\Lambda[G]$ −módulo simple T. Ahora vemos que $\Lambda[G]\otimes_\Lambda S$ es anulado por $ann_\Lambda T$, y entonces es un $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ −módulo. Pero sabemos de (ii) que $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ es un anillo semisimple, entonces $\Lambda[G]\otimes_\Lambda S$ es un $\Lambda[G]$ −módulo semisimple.

(iii)⇒(iv). Sea S un $\Lambda-$módulo simple. Entonces $\Lambda[G]\otimes_\Lambda S$ es semisimple como $\Lambda[G]$ −módulo. Consideremos ahora $(\Lambda[G] \otimes_\Lambda S)^G$, que es lo mismo que $(\sum_{g\in G} g) \cdot (\Lambda[G] \otimes_\Lambda S)$, por el corolario 1.12. Pero por la proposición 1.3, eso es igual a $(\sum_{g\in G} g)\Lambda \otimes_\Lambda S$, lo cual es isomorfo a S como Λ^G−módulo. Entonces S es semisimple como Λ^G−módulo.

(iv)$\Rightarrow$(i) se sigue como una consecuencia directa de la proposición 4.4 d). Y con esto queda completa la prueba. ■

Con las equivalencias de esta proposición, podremos decir ahora cuándo coinciden las nociones de acción pregalois, y acción de Galois.

Proposición 4.7. Supongamos que $\Lambda/ann_\Lambda S$ es un anillo con división para cada Λ − *módulo* izquierdo o derecho S, que sea simple. Entonces, (Λ, G) pregalois, si y sólo si (Λ, G) es una acción de Galois.

Prueba: Supongamos que (Λ, G) es pregalois. Usaremos la caracterización de la proposición 4.6 (ii), para verificar que (Λ, G) es una acción de Galois. Sea T un $\Lambda[G]$ −módulo simple. Por la proposición 4.4 (a) (se sigue que $\Lambda/ann_\Lambda T$ es un anillo semisimple, y de ésto, que los conjuntos de Λ-ideales máximos izquierdos, derechos y bilaterales coinciden; porque si I es un ideal máximo izquierdo de Λ, entonces Λ/I es un Λ−módulo simple, observemos ahora que $ann_\Lambda \Lambda/I \subseteq I$: Sea $\lambda \in ann_\Lambda \Lambda/I$, entonces para cada $\mu \in \Lambda$, $\lambda\mu \in I$, en particular para $\mu = 1$, asi que $\lambda \in I$, y por tanto $ann_\Lambda \Lambda/I \subseteq I$; y $\Lambda/ann_\Lambda \Lambda/I$, por la hipótesis, es un anillo con división, entonces, es simple como Λ−módulo izquierdo, entonces $ann_\Lambda \Lambda/I$ es un ideal máximo, por tanto $ann_\Lambda \Lambda/I \cong I$ como Λ−módulo izquierdo, es decir que si $i \in I$ y $\lambda \in \Lambda$, entonces $i\lambda \in I$, y eso quiere decir que I es un ideal derecho. Por tanto $\Lambda/ann_\Lambda T$ es isomorfo a T como $\Lambda[G]$ −módulo. Tambien tenemos que $(\Lambda/ann_\Lambda T, G)$ es una acción pregalois, por la proposición 3.2, ya que $ann_\Lambda T$ es un G−ideal de Λ. Asi que $\Lambda/ann_\Lambda T$ es un $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ −generador. Y así $(\Lambda/ann_\Lambda T)[G]$ es un anillo semisimple, porque tiene un generador simple. Entonces, se cumple la equivalencia (ii) de la proposición 4.6, y consecuentemente (Λ, G) es una acción de Galois. ■

A continuación probaremos los resultados que nos dicen cómo se comporta la noción de acción de Galois izquierda (derecha), con respecto a subgrupos, y grupos cociente.

Teorema 4.8. Sea H un subgrupo de G. Si (Λ, G) es una acción de Galois izquierda (derecha), entonces (Λ, H) es una acción de Galois izquierda (derecha).

Prueba: Por la proposición 2.3, sabemos que (Λ, H) es una acción pregalois. Asi que ahora, por la proposición 4.6 será suficiente probar que $(\Lambda/ann_\Lambda T)[H]$ es un anillo semisimple para cada $\Lambda[H]$ −módulo simple T.

Sea T un $\Lambda[H]$ −módulo simple. Queremos ver que T es un $\Lambda[H]$ −submódulo simple de un $\Lambda[G]$ −módulo simple M, primero observamos que $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T$ es un $\Lambda[G]$ −módulo de longitud finita n, y ahora probaremos lo que queremos por inducción (segundo principio) sobre n : Sea $n = 1$, entonces $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T$ es un $\Lambda[G]$ −módulo simple, y por tanto la afirmación se sigue. Supongamos que la afirmación se cumple para $n = k$. Ahora supongamos que $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T$ es de longitud $k+1$, tomamos a S un $\Lambda[G]$ −submódulo propio de $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T$, y partimos la situación en dos casos: 1) si $T\subseteq S$, y 2) si $T\nsubseteq S$; en el primer caso, definimos $\sigma : T\to S$, como la inclusión, y en el segundo caso definimos
$\rho : T\to(\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T)/S$, como la composición de la inclusión en $\Lambda[G]\otimes_{\Lambda[H]}T$, seguida por la proyección en el cociente. Así tenemos que tanto σ como ρ, son inyectivas, y entonces ya podemos ver a T como un $\Lambda[H]$ −submódulo de un $\Lambda[G]$ −módulo de longitud menor o igual que k, y asi queda demostrado. Ademas, $ann_\Lambda M\subseteq ann_\Lambda T$, asi que $(\Lambda/ann_\Lambda T)[H]$ es un cociente de $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$. Por eso es suficiente probar que $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ es un anillo semisimple. También sabemos que $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]$ contiene a $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ como un $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ −sumando bilateral, porque

$\sum_{g\in G\setminus H}(\Lambda/ann_\Lambda M)g\oplus(\Lambda/ann_\Lambda M)[H] = (\Lambda/ann_\Lambda M)[G]$. De esto se sigue que cualquier $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ −módulo N es un sumando directo de $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]\otimes_{(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]}N$. Entonces $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]\otimes_{(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]}N$ es un $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]$ −módulo proyectivo, ya que $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]$ es un anillo semisimple por hipótesis, por ser (Λ, G) una acción de Galois, (ver 4.6 (ii)). Pero $(\Lambda/ann_\Lambda M)[G]$ también es libre como $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ − *módulo*, entonces todos los $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ −módulos son proyectivos, y consecuentemente $(\Lambda/ann_\Lambda M)[H]$ es un anillo semisimple por el teorema 7.12. Con lo que el teorema queda probado. ■

Teorema 4.9. Sea H un subgrupo normal de G. Si (Λ, G) es una acción de Galois izquierda (derecha), entonces $(\Lambda^H, G/H)$ es una acción de Galois izquierda (derecha).

Prueba: Por el teorema 2.8, sabemos que $(\Lambda^H, G/H)$ es una acción pregalois. Veamos ahora que en realidad es una acción de Galois. Sea S un Λ^H − *módulo* simple. Entonces $\Lambda\otimes_{\Lambda^H}S$ es un $\Lambda[H]$ − *módulo* simple, por ser (Λ, H) una acción pregalois (ver 2.3 y 1.2). Pero entonces $\Lambda\otimes_{\Lambda^H}S$ es semisimple como un Λ−módulo por la proposición 4.4. Entonces, por hipótesis $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}(\Lambda\otimes_{\Lambda^H}S)$ es un anillo semisimple. No obstante S es un submódulo de $\Lambda\otimes_{\Lambda^H}S$ visto como un Λ^H − *módulo*, y en consecuencia también como Λ^G − *módulo*. Pero ya sabíamos que $\Lambda\otimes_{\Lambda^H}S$ era un módulo semisimple. Por tanto S es semisimple como Λ^G-*módulo*, y con esto termina la prueba. ■

Capítulo 5: Acciones Libres.

El objetivo principal de este capítulo es relacionar la noción de acción de Galois con la de acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples.

En la proposición 5.1 probaremos que si $\Lambda/rad\Lambda$ es un anillo semisimple y la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre, entonces (Λ, G) es una acción de Galois. Despues de esto, consideraremos en la proposición 5.2 la situación en la que Λ es una $R-$álgebra, donde R es un anillo conmutativo tal que $m\Lambda_m \subset rad\Lambda_m$, y $\Lambda_m/rad\Lambda_m$ es una $R/m-$álgebra de dimensión finita para cada ideal máximo m de R, donde Λ_m se define como $\Lambda_m = R_m \otimes_R \Lambda$, y G actúa como grupo de $R-$automorfismos de Λ. Observemos que en esa situación el anillo $\Lambda_m/rad\Lambda_m$ es semisimple. Usando ese resultado local, obtendremos en la proposición 5.3 una caracterización de cuándo es (Λ, G) una acción de Galois.

Después consideraremos la situación, cuando R/m es un campo algebráicamente cerrado y que $\Lambda_m/rad\Lambda_m$ es un producto de un número finito de copias del campo R/m, para cada ideal máximo m de R. En esta situación, probaremos que si (Λ, G) es Galois, entonces se tiene que, la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre.

Proposición 5.1: *Supongamos que $\Lambda/rad\Lambda$ es un anillo semisimple. Si la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre, entonces (Λ, G) es una acción de Galois.*

Prueba: Primero probaremos que $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)\,[G]-$módulo proyectivo usando la caracterización por elementos de la proposición 1.7. Sabemos que $rad\Lambda$ es un $G-ideal$, entonces la acción de G sobre Λ puede ser inducida a $\Lambda/rad\Lambda$, y también podemos inducir dicha acción a los idempotentes centrales primitivos de $\Lambda/rad\Lambda$, porque sabemos que un idempotente central siempre va a dar a otro idempotente central bajo la acción de un elemento de G. Por otro lado sabemos que los $\Lambda-módulos$ simples se identifican con los $\Lambda/rad\Lambda-módulos$ simples, y además por ser $\Lambda/rad\Lambda$ un anillo semisimple sabemos que (ver teorema 7.16) es isomorfo a un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos con división, y entonces las clases de isomorfía de los $\Lambda/rad\Lambda-módulos$ están uno a uno con los idempotentes centrales de $\Lambda/rad\Lambda$. Así que la acción inducida de G sobre los idempotentes centrales primitivos $e_1, e_2, .., e_n$ de $\Lambda/rad\Lambda$ es libre, ya que por hipótesis era libre la acción de G sobre las clases de isomorfía de los $\Lambda-$ *módulos* simples. Ahora, escogemos un idempotente e_{i_j} ; $j = 1, ..., m$ de cada una de las órbitas. Es claro entoces que $\sum_{g\in G} g(\sum_{j=1}^{m} e_{i_j}) = \sum_{g\in G}\sum_{j=1}^{m} g(e_{i_j}) = \sum_{i=1}^{n} e_i = 1$, donde $(\sum_{j=1}^{m} e_{i_j}) \in \Lambda/rad\Lambda$, lo cual muestra que $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-$módulo proyectivo.

Ahora usaremos la caracterización por elementos del corolario 1.5, para verificar que $\Lambda/rad\Lambda$ es un $(\Lambda/rad\Lambda)[G]-$generador, y así completar la prueba de que $(\Lambda/rad\Lambda, G)$ es una acción pregalois. Sean $\lambda_i = \mu_i = e_i$; entonces tenemos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\sum_{g\in G} g)\mu_i = 1$. En consecuencia $(\Lambda/rad\Lambda, G)$ es una acción pregalois , y por el teorema 3.3, tambien (Λ, G) es una acción pregalois.

Para completar la prueba de que (Λ, G) es una acción de Galois, sea S un $\Lambda-$módulo simple. Para cada g en G, denotamos con S^g el $\Lambda-$módulo obtenido de S, usando ahora la nueva operación de Λ sobre S definida por $\lambda \cdot s = g(\lambda)s$. Entonces $\coprod_{g\in G} S^g$ es un $\Lambda[G]-$módulo, definiendo la operación como $\lambda_h h \cdot ((s_g)_{g\in G}) = ((g(\lambda_h)s_{h^{-1}g})_{g\in G})$. Se ve fácilmente que este $\Lambda[G]-$módulo es simple. Por tanto, $\left(\coprod_{g\in G} S^g\right)^G$ es un Λ^G-módulo simple; y como el conjunto fijo bajo G es $\{(s_g) : s_g = s, g \in G\}$ donde s pertenece a S, se tiene que $(\amalg_{g\in G} S^g)^G$ es un Λ^G-submódulo de $(\amalg_{g\in G} S^g)$, y la proyección de $(\amalg_{g\in G} S^g)$ a S es un Λ^G-morfismo, donde la imagen de $(\amalg_{g\in G} S^g)^G$ es S. En consecuencia, S es un Λ^G-módulo simple y entonces por la proposición 4.4 $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G} S$ es un anillo simple. ■

Proposición 5.2: *Sean R, Λ y G, como se dijo al principio del capítulo. Si la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre, entonces (Λ, G) es una acción de Galois.*

Prueba: Primero probaremos que (Λ, G) es una acción pregalois probando que $\tau_\Lambda \Lambda[G] = \Lambda[G]$, para ver que Λ es un $\Lambda[G] -$ *generador*, y luego veremos que la función $\sigma : \Lambda \to \Lambda^G$ definida por $\sigma(\lambda) = \sum_{g\in G} g(\lambda)$ es suprayectiva para ver que Λ es un $\Lambda[G] -$ *módulo* proyectivo, de acuerdo a la proposición 1.7. La primera de las afirmaciones se sigue de la proposición anterior, porque de esta se tiene que $(\Lambda[G]/\tau_\Lambda \Lambda[G])_m = 0$ para cada ideal máximo m de R. La segunda afirmación se tiene de la misma forma, porque de la proposición anterior, se tiene que σ_m es suprayectiva para cada ideal máximo m de R. Así que por el teorema 7.11, σ es suprayectiva, y $1 \in \Lambda^G$, entonces existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\sigma(\lambda) = \sum_{g \in G} g(\lambda) = 1$, y por tanto Λ es un $\Lambda[G]-$módulo proyectivo. Ya tenemos de las dos afirmaciones que (Λ, G) es una acción pregalois.

Ahora sea S un $\Lambda-$módulo simple. Entonces S_m no es cero, para algún ideal máximo m de R. En consecuencia S_m es un $\Lambda_m/rad\Lambda_m-$módulo. Entonces S_m tiene que ser un $\Lambda_m/rad\Lambda_m-$módulo simple, y por la versión local de la proposición anterior, se tiene que S es semisimple como $(\Lambda_m/rad\Lambda_m)^G-$módulo. Por tanto S es semisimple como Λ^G-módulo. Y análogamente a la proposición anterior, $\Lambda^G/ann_{\Lambda^G}S$ es un anillo semisimple; por tanto (Λ, G) es una acción de Galois. ■

Proposición 5.3. *Sea Λ un anillo tal que $\Lambda/rad\Lambda$ es una $K-$álgebra básica de dimensión finita, donde K es un campo algebráicamente cerrado, y G actúa como grupo de K-automorfismos de Λ. Entonces (Λ, G) es una acción de Galois, si y sólo si la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre.*

Prueba: Por la proposición anterior, sólo tenemos que probar que si (Λ, G) es una acción de Galois, entonces la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$módulos simples es libre. Directamente de las hipótesis, se tiene que $\Lambda/rad\Lambda$ es isomorfo a un producto de copias de K con la acción inducida de G como grupo de $K-$automorfismos. Al dividir los sumandos del álgebra $\Lambda/rad\Lambda$ en órbitas, puede tratarse una órbita a la vez. Entonces tenemos que $(\Lambda/rad\Lambda)^G$ es igual a un producto de copias de K, una por cada órbita. Ahora, tenemos por la proposición 1.6 que $(\Lambda/rad\Lambda)[G] \cong End_{(\Lambda/rad\Lambda)^G}(\Lambda/rad\Lambda)$, y si nos fijamos en las dimensiones, obtenemos que la dimensión de $End_{(\Lambda/rad\Lambda)^G}(\Lambda/rad\Lambda)$ es igual a la suma de los cuadrados del tamaño de las órbitas. No obstante, ésta es estrictamente menor que $|G| \cdot \dim_K(\Lambda/rad\Lambda)$, a menos que todas las órbitas tengan $|G|$ elementos. Y esto completa la prueba de la proposición. ■

Usaremos ahora esta proposición para probar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 5.4. *Sea K un campo algebraicamente cerrado, R una K-álgebra conmutativa, y Λ una $R-$álgebra. Supongamos ademas que G actúa sobre Λ como un grupo de automorfismos de $R-$álgebras, y* *que $\Lambda_m/rad\Lambda_m$ es una $K-$álgebra de dimensión finita para cada ideal máximo m de R. Entonces (Λ, G) es una acción de Galois, si y sólo si la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de Λ-módulos simples es libre.*

Prueba: Dado el teorema 5.2, sólo tendremos que probar que si (Λ, G) es Galois entonces la acción de G sobre las clases de isomorfía de los Λ – *módulos* simples es libre. Supongamos que (Λ, G) es Galois. En particular (Λ, G) es pregalois, entonces Λ es un $\Lambda[G]$ – *módulo* generador y proyectivo, lo cual implica que también lo será Λ_m como $\Lambda[G]_m$ – *módulo*, y en consecuencia como $\Lambda_m[G]$ – *módulo*, ya que $\Lambda[G]_m \cong \Lambda_m[G]$ porque G actúa sobre Λ como un grupo de automorfismos de $R-$álgebras, así que (Λ_m, G), también es pregalois, y dado que $\Lambda_m/rad\Lambda_m$ es una $K-$álgebra de dimensión finita para cad ideal máximo de R tenemos por 4.7 que (Λ_m, G) es Galois. En esta situación, tenemos por 5.3 que la acción de G sobre las clases de isomorfía de los Λ_m – *módulos* simples es libre. Ahora sea S un Λ – *módulo* simple, entonces existe un ideal máximo m de R, tal que $S_m \neq 0$, y si cualquier elemento s de S era generador para S como Λ – *módulo*, entonces tendremos también que cualquier elemento s/r de S_m será generador de S_m como Λ_m – *módulo*, es decir que S_m es simple, así que también la acción de G sobre las clases de isomorfía de los Λ – *módulos* simples es libre. ■

Capítulo 6. Acciones de Galois y cubiertas de Galois.

Iniciarémos este capítulo con algunas definiciones fundamentales. Sea K un campo algebráicamente cerrado.

Definición: *Una K-categoría* Γ, *es una categoría en la cual los conjuntos de morfismos son K-espacios vectoriales, y la composición es una función K-bilineal*

$(\circ : Mor\,(x,y) \times Mor\,(y,z) \to Mor\,(x,z))$.

Dado el contexto, llamarémos Hom(x,y) al conjunto de morfismos entre x y y, y End(x) cuando sean los de x a x. Las K-categorías que estudiaremos, se llaman *localmente acotadas,* y satisfacen por definición las siguientes propiedades adicionales;

a)para cada objeto x en Γ, End(x) es un anillo local,

b) para cada par de objetos x y y en Γ, $\dim_K (Hom\,(x,y))$ es finita.

c)No hay dos objetos en Γ que sean isomorfos, y

d)para cada objeto x en Γ hay sólo un número finito de objetos y en Γ tales que Hom$(x,y) \neq 0$ o Hom$(y,x) \neq 0$.

Si Γ y Λ son K-categorías localmente acotadas, entonces un funtor K-lineal $F : \Gamma \to \Lambda$ se llama *funtor cubriente* si,

a)F es suprayectivo en los objetos,

b)para cada x en Γ y a en Λ, F induce isomorfismos:

$\amalg_{y\in F^{-1}(a)}\mathrm{Hom}(y,x) \to \mathrm{Hom}(a,F\,(x))$ y

$\amalg_{y\in F^{-1}(a)} Hom\,(x,y) \to Hom\,(F\,(x)\,,a)$.

Ahora consideremos funtores cubrientes donde Γ tiene sólo un número finito de objetos, y en consecuencia Λ también. Entonces asociamos a Γ y a Λ los siguientes anillos:

$\Gamma' = \amalg_{x,y\in\Gamma} Hom(x,y)$

$\Lambda' = \amalg_{x,y\in\Lambda} Hom(x,y)$

vistos como matrices cuadradas donde la entrada (x,y) de la matriz es un elemento de $Hom(x,y)$, la suma se hace por componentes y la multiplicación es la usual para las matrices, donde el producto de dos morfismos es la composición en la categoría, es decir:

$(f_{x,y})_{x,y\in\Gamma} \cdot (f'_{x,y})_{x,y\in\Gamma} = (f''_{x,y})_{x,y\in\Gamma}$, donde $f''_{x,y} = \sum_{z\in\Gamma} f_{x,z} \circ f'_{z,y}$. Entonces se sabe que Γ' y Λ' son unas K-álgebras básicas de dimensión finita. F induce un morfismo K-lineal $F' : \Gamma' \to \Lambda'$. Ademas, los dos isomorfismos inducen dos morfismos $\phi_{\alpha,F} : \Lambda' \to \Gamma'$ y $\phi_{\omega,F} : \Lambda' \to \Gamma'$ definidos como sigue:

$(\phi_{\alpha,F}(f_{a,b}))_{x,y} = g_{x,y}$, donde $\sum_{x\in F^{-1}(a)} F(g_{x,y}) = f_{a,F(y)}$ y
$(\phi_{\omega,F}(f_{a,b}))_{x,y} = h_{x,y}$, donde $\sum_{y\in F^{-1}(b)} F(h_{x,y}) = f_{F(x),b}$.

Obviamente, $\phi_{\alpha,F}$ y $\phi_{\omega,F}$ son K-lineales y coinciden si, y sólo si, para cada $a, b \in \Lambda, x_0 \in F^{-1}(a)$ y $y_0 \in F^{-1}(b)$, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r, "F^{-1}"] \arrow[d, "F^{-1}"'] & \coprod_{y\in F^{-1}(b)} \mathrm{Hom}(x_0, y) \arrow[d, "p_{y_0}"] \\
\coprod_{x\in F^{-1}(a)} \mathrm{Hom}(x, y_0) \arrow[r, "p_{x_0}"] & \mathrm{Hom}(x_0, y_0)
\end{tikzcd}$$

donde p_{x_0} y p_{y_0} son las proyecciones naturales.

Proposición 6.1 *Los morfismos $\phi_{\alpha,F}$ y $\phi_{\omega,F}$ son ambos morfismos de K-álgebras y la estructura de $\Lambda'-$bimódulo inducida por $\phi_{\omega,F}$ sobre Γ' por la izquierda, y por $\phi_{\alpha,F}$ por la derecha, hace a F' un morfismo de $\Lambda'-$bimódulos.*

Prueba: Primero probaremos que $\phi_{\alpha,F}$ y $\phi_{\omega,F}$ son inclusiones de K-álgebras. Es claro que ambas $\phi_{\alpha,F}$ y $\phi_{\omega,F}$ son inclusiones K-lineales, y que mandan la identidad en la identidad. Será suficiente probar entonces que conservan la estructura multiplicativa. Haremos el cálculo para $\phi_{\alpha,F}$. Sean $(f_{a,b})$ y $(f'_{a,b})$ elementos de Λ'. Entonces $(f_{a,b})\cdot(f'_{a,b}) = (f''_{a,b})$, donde

$(f''_{a,b}) = \sum_{c\in\Delta} f_{a,c}\cdot f'_{c,b}$. Ahora consideremos

$\phi_{\alpha,F}(f_{a,b})\cdot\phi_{\alpha,F}(f'_{a,b}) = (g_{x,y})\cdot(g'_{x,y}) = (g''_{x,y})$, donde $g''_{x,y} = \sum_{z\in\Gamma} g_{x,z}g'_{z,y}$. Las fórmulas que conectan estas expresiones están dadas por

$\sum_{x\in F^{-1}(a)} F(g_{x,y}) = f_{a,F(y)}$ y

$\sum_{x\in F^{-1}(a)} F(g'_{x,y}) = f'_{a,F(y)}$ para toda a en Λ y y en Γ . Tenemos que probar que la misma relación se da entre g'' y f'' . Sean a en Λ y y en Γ fijos. Entonces

$\sum_{x\in F^{-1}(a)} F(g''_{x,y}) = \sum_{x\in F^{-1}(a)} F(\sum_{z\in\Gamma}(g_{x,z}g'_{z,y})) =$
$= \sum_{x\in F^{-1}(a)} \sum_{z\in\Gamma} F(g_{x,z})F(g'_{z,y}) =$
$= \sum_{z\in\Gamma}(\sum_{x\in F^{-1}(a)} F(g_{x,z}))F(g'_{z,y}) =$
$= \sum_{z\in\Gamma} f_{a,F(z)}F(g'_{z,y}) =$
$= \sum_{c\in\Lambda} \sum_{z\in F^{-1}(c)} f_{a,F(z)}F(g'_{z,y}) =$
$= \sum_{c\in\Lambda} f_{a,c} \sum_{z\in F^{-1}(c)} F(g'_{z,y}) =$
$= \sum_{c\in\Lambda} f_{a,c}f'_{c,F(y)} = f''_{a,F(y)}$.

Por tanto $\phi_{\alpha,F}$ es un morfismo de anillos.

Sea $(h_{x,y})$ en Γ', y $(f_{a,b})$ y $(f'_{a,b})$ en Λ'. Entonces, con un cálculo sencillo partiendo sólo de las definiciones se muestra que:
$F(\phi_{\omega,F}(f_{a,b})(h_{x,y})\phi_{\alpha,F}(f'_{a,b})) = (f_{a,b})F(h_{x,y})(f'_{a,b})$.

Asi que F' es un morfismo de Λ'-bimódulos donde $\phi_{\omega,F}$ se usa para definir la Λ'-estructura izquierda de Γ' y $\phi_{\alpha,F}$ se usa para definir la Λ'-estructura derecha de Γ'. Asi queda completa la prueba de la proposición. ■

En el resto de este capítulo sólo consideraremos cubiertas de Galois finitas. Sea Γ una K-categoría finita, localmente acotada, y supongamos que G es un grupo finito de K-automorfismos de Γ tal que la acción inducida sobre los objetos es libre. Entonces por $[G, prop.3.1]$, la categoría cociente Γ/G existe y la proyección canónica $\Gamma \to \Gamma/G$ es un funtor cubriente. Los objetos de Γ/G son las órbitas de los objetos de Γ bajo la acción del grupo, y un morfismo $f\colon a \to b$ en Γ/G es una familia $({}_yf_x) \in \Pi_{x\in a, y\in b}\Gamma(x,y)$ tal que

$g(\,{}_yf_x) = {}_{g(y)}\,f_{g(x)}$ para toda $g \in G$. Como la acción de G sobre los objetos es libre, el funtor cubriente inducido hace que el siguiente diagrama conmute para cada y_0 en b y x_0 en a.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(a,b) \arrow[r, "F^{-1}"] \arrow[d, "F^{-1}"'] & \coprod_{g\in G} \mathrm{Hom}(x_0, g(y_0)) \arrow[d, "p_{y_0}"] \\
\coprod_{x\in G} \mathrm{Hom}(g(x_0), y_0) \arrow[r, "p_{x_0}"] & \mathrm{Hom}(x_0, y_0)
\end{tikzcd}
$$

En consecuencia para cubiertas de Galois finitas $\phi_{\alpha,F}$ y $\phi_{\omega,F}$ coinciden. Mas aún, la acción de G sobre Γ induce una acción de G sobre el anillo asociado a Γ (Γ') dada por $g((f_{x,y})) = ((g^{-1}f_{g(x),g(y)})_{x,y})$. El anillo fijo $(\Gamma')^G$ bajo esta acción es el conjunto de morfismos $(f_{x,y})$ tales que $f_{x,y} = g^{-1}f_{g(x),g(y)}$. Esto se puede reformular, como el conjunto de morfismos $(f_{x,y})$ tales que $g(f_{x,y}) = f_{g(x),g(y)}$. Pero esto también es la imagen de Λ', el anillo de Γ/G bajo la función ϕ_F.

De todo esto se sigue que una cubierta finita de Galois $F : \Gamma \to \Lambda$ con grupo de Galois G induce una acción de el grupo finito G sobre el anillo Γ', y que el anillo fijo $(\Gamma')^G$, corresponde al anillo Λ'.

Ahora probaremos que (Γ', G) es una acción de Galois.

Teorema 6.2 *Sea Γ una K-categoría finita localmente acotada, y sea*

$F : \Gamma \to \Lambda$ una cubierta de Galois con grupo de Galois G. Entonces:

a) (Γ', G) es una acción de Galois, donde Γ' y la acción de G sobre Γ son como se ha descrito antes.

b) La acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Gamma'-$módulos simples es libre.

c) El anillo Λ' de Λ se identifica con $(\Gamma')^G$ por medio de la inyección de anillos $\phi_F : \Lambda' \to \Gamma'$.

Prueba: (a) y (b). Obviamente $\Gamma'/rad\Gamma'$ es una K-álgebra básica semisimple y la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Gamma'-$módulos simples, corresponde a la acción de G sobre los objetos de Γ, la cual ya era libre por hipótesis. Y por la proposición 5.3, podemos concluir que (Γ', G) es Galois.

(c). Esta afirmación se verifica fácilmente partiendo de las definiciones, y tomando en cuenta las observaciones hechas antes del teorema. ■

Ahora probaremos un inverso de este teorema.

Sea K un campo algebráicamente cerrado, sea Γ' una K-álgebra básica de dimensión finita, y sea G un grupo de K-automorfismos de Γ' tal que la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Gamma'-$módulos simples es libre.

Teorema 6.3. *Sean Γ' y G como se ha definido antes. Entonce existe una K-categoría finita y localmente acotada Γ, y una acción de G sobre Γ como un grupo de K-automorfismos tal que la acción de G sobre los objetos de Γ es libre. Mas aún, el anillo de Γ es identificado* *con* Γ' *y la acción de* G *sobre* Γ' *inducida por la acción de* G *sobre* Γ *es la misma que la acción original.*

Prueba: Tenemos por hipótesis que la acción de G sobre las clases de isomorfía de $\Gamma'-$módulos simples es libre, asi que G actúa también libremente como grupo de permutaciones sobre los idempotentes primitivos centrales
$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\Gamma'/rad\Gamma'$. En el siguiente lema probaremos que los idempotentes $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ se pueden levantar a un sistema completo de idempotentes ortogonales $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ de Γ' tal que la acción de G permuta este conjunto de idempotentes. Asi, podemos formar la K-categoría Γ cuyos objetos son $E_1, E_2, ..., E_n$ y cuyos conjuntos de morfismos son $(E_i, E_j) = E_j\Gamma E_i$. Hay una acción obvia de G sobre esta K-categoría y se ve facilmente que Γ' es el anillo asociado a Γ y que la acción de G no se altera al ir hacia atrás y hacia adelante. ■

Lema 6.4. *Sea* (Λ, G) *como se definió antes, y sea* I *un* $G-$ *ideal de* Λ *con* $I^2 = 0$. *Si* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *es un conjunto de idempotentes ortogonales en* Λ/I *sobre el cual actúa libremente la acción inducida de* G *sobre* Λ/I, *entonces* $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *se puede levantar a un conjunto de idempotentes ortogonales* $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *en* Λ, *sobre el cual* G *actúa libremente como grupo de permutaciones.*

Prueba: Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ los idempotentes de Λ/I, y supongamos que los tenemos acomodados por órbitas,
$\left\{e_1, e_2, ..., e_{|G|}; e_{|G|+1}, ..., e_{2|G|}; ...; e_{n-|G|+1}, ..., e_n\right\}$. Levantamos a e_1, a un idempotente E_1', y consideramos el elemento $E_1 = E_1' - \sum_{g\in G-\{1\}} E_1' g(E_1')$. Asi, calculandolo directamente, podemos verificar que E_1 es un idempotente, y que $\{g\left(E_1\right) : g \in G\}$ es en verdad un conjunto de idempotentes ortogonales, cuya imagen bajo la proyección canónica de Λ a Λ/I, es precisamente la órbita de e_1 en $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Ahora, consideramos $e_{|G|+1}$, y lo levantamos a un idempotente $E''_{|G|+1}$; y definimos

$E'_{|G|+1} = E''_{|G|+1} - \sum_{g\in G} E''_{|G|+1} g\left(E_1\right) - \sum_{g\in G} g\left(E_1\right) E''_{|G|+1}$. Tenemos que $E'_{|G|+1}$ es un idempotente ortogonal al conjunto $\{g\left(E_1\right) : g \in G\}$. En consecuencia, $g(E'_{|G|+1})$ es ortogonal a $\{g\left(E_1\right) : g \in G\}$, para cada $g \in G$. Ahora, obtenemos los idempotentes correspondientes a la segunda órbita de la misma manera que obtuvimos los de la primera, definimos el primero como
$E_{|G|+1} = E'_{|G|+1} - \sum_{g\in G-\{1\}} E'_{|G|+1} g(E'_{|G|+1})$. Y consideramos el conjunto

$\left\{g(E_{|G|+1}) : g \in G\right\}$, que tiene propiedades análogas a las del conjunto $\{g(E_1) : g \in G\}$. Continuando este proceso se obtiene un sistema completo de idempotentes ortogonales en Λ, el cual es permutado por G. ■

Corolario 6.5. *Sean Λ y G como en el lema, y supongamos que Λ es un álgebra básica artiniana tal que la acción inducida de G sobre las clases de isomorfía de $\Lambda-$ módulos simples es libre. Entonces existe un sistema completo de idempotentes ortogonales en Λ, que son permutados por G. En particular, esto sucede cuando Λ es un álgebra de dimensión finita sobre un campo.*

Prueba: La prueba se hace por inducción sobre la Loewy-longitud de Λ.

Capítulo 7: Definiciones.

Este capítulo *no es para ser leído, sino sólo para ser consultado* en algún caso, además de no ser necesario para el matemático experimentado, y en realidad tampoco para el principiante, ya que sólo haremos un recuento de definiciones, y teoremas que hemos citado textualmente de la bibliografía, además de algunas convenciones acerca de la notación usada a lo largo de todo el trabajo. En cuanto a los teoremas, no incluiremos sus demostraciones por razones didácticas, pero si daremos la referencia bibliográfica o hemerográfica en su caso, ya que la finalidad de este capítulo sólo es agilizar la lectura del trabajo, y hacerlo así autocontenido.

Definición 7.1: Sea Λ un anillo. Entonces el par (σ, M) es un $\Lambda-$*módulo izquierdo*, en caso de que M sea un grupo abeliano, y $\sigma : \Lambda \to End(M)$ un morfismo de anillos.

Un $\Lambda-$*módulo* izquierdo M, también se puede ver como el grupo abeliano M, con una multiplicación escalar del anillo Λ por la izquierda, que cumple las siguientes propiedades, para cada a, b en Λ, y cada x, y en M :

1) $a(x+y) = ax + ay$

2) $(a+b)x = ax + bx$

3) $(ab)x = a(bx)$

4) $1x = x$.

Si M es un $\Lambda-$*módulo* izquierdo entonces $End({}_\Lambda M)$ resulta ser un anillo, en particular, podemos darle a M una estructura de $End({}_\Lambda M)-$*módulo* derecho de una manera natural, explícitamente, si σ es un elemento de $End({}_\Lambda M)$ y m un elemento de M, se define la multiplicación como $m \cdot \sigma = \sigma(m)$.

Definición 7.2: Sea M un $\Lambda-$*módulo* izquierdo. Definimos los *biendomorfismos* de M como $BiEnd({}_\Lambda M) = End(M_{End({}_\Lambda M)})$.

Definición 7.3: Sea M un $\Lambda-$*módulo*. M es un $\Lambda-$*generador*, si para cada $\Lambda-$*módulo* N, existe un epimorfismo $M^{(A)} \to N \to 0$, para algún conjunto A.

Definición 7.4: Sea M un $\Lambda-$*módulo*. M es *proyectivo*, si para cada epimorfismo $g : N \to U \to 0$, y cada morfismo $\gamma : M \to U$, existe un morfismo
$\gamma' : M \to N$, tal que $\gamma = g \circ \gamma'$, es decir que el siguiente diagrama es exacto y conmutativo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "\gamma'"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ N \arrow[r, "g"'] & U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Definición 7.5: Sea Λ un anillo. *El centro de* Λ se denota $Z(\Lambda)$, y se define como $Z(\Lambda) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda\gamma = \gamma\lambda, \gamma \in \Lambda\}$.

Definición 7.6: Sea M un $\Lambda - módulo$ izquierdo (derecho). *El anulador de* M en Λ se denota $ann_\Lambda M$, y se define como

$ann_\Lambda M = \{\lambda \in \Lambda : \lambda m = 0 (m\lambda = 0), m \in M\}$.

Definición 7.7: Sea M un conjunto, y G un grupo actuando sobre M. La acción de G sobre M es *libre,* en caso de que $gm \neq m$, para cada m en M, si $g \neq 1$.

Definición 7.8: Sea M un $\Lambda - módulo$. Diremos que M es *simple,* si M no tiene submódulos propios.

Definición 7.9: Sea M un $\Lambda - módulo$. Diremos que M es *semisimple,* si M es suma de $\Lambda - módulos$ simples.

Definición 7.10: Sean $\mathcal{U}$ una clase de $\Lambda - módulos$, y M un $\Lambda - módulo$. El *rechazo* de $\mathcal{U}$ en M se denota $rej_M(\mathcal{U})$, y se define como

$rej_M(\mathcal{U}) = \cap \{nuc(f) : f : M \to N, N \in \mathcal{U}\}$.

Definición 7.11: Sea φ la clase de los $\Lambda - módulos$ simples. El *radical* de un $\Lambda - módulo$ M se denota $radM$, y se define como $radM = rej_M(\varphi)$.

Definición 7.12: Sea Λ un anillo. El *radical de Jacobson* de Λ se denota $rad\Lambda$, y se define como $rad\Lambda = rad_\Lambda \Lambda$.

Debemos decir que siempre que hagamos referencia al radical de un anillo, a lo largo de este trabajo, nos estaremos refiriendo al *radical de Jacobson.*

Otra cosa que debemos mencionar, es que cuando nos referimos al anillo $End_\Lambda(M)^{op}$, lo que queremos decir, es que la operación está dada por $g \cdot^{op} f = f \circ g$.

Definición 7.13: Sean Λ y Γ anillos, y M un grupo abeliano. Si M es un $\Lambda - \Gamma - bimódulo$ y

$\sigma : \Lambda \to End(M)$, definido por $\sigma(\lambda)(x) = \lambda x$, y

$\rho : \Gamma \to End(M)^{op}$, definido por $\rho(\gamma)(x) = x\gamma$ para cada λ en Λ, γ en Γ, y x en M, son los morfismos canónicos, entonces diremos que ${}_\Lambda M$ (M_Γ) es *fiel* si σ (ρ) es inyectiva. Diremos que ${}_\Lambda M_\Gamma$ es un *bimódulo balanceado,* en caso de que ambas, σ y ρ, sean suprayectivas. Diremos que ${}_\Lambda M_\Gamma$ es un *bimódulo fielmente balanceado,* si σ y ρ son isomorfismos.

Definición 7.14: Sea M un $\Lambda - módulo$ izquierdo. Diremos que M es un *progenerador,* (o un $\Lambda - progenerador$ izquierdo) en caso de que sea un generador proyectivo y finitamente generado.

En diferentes puntos de este trabajo, vemos a $Hom_\Lambda(M, N)$, como un módulo, y es preciso mencionar que la estructura está dada como sigue:

1) Si ${}_{\Lambda}M_{\Gamma}$ y ${}_{\Lambda}N_{\Delta}$ son bimódulos, hay una $\Gamma-estructura$ izquierda, y una $\Delta-estructura$ derecha inducidas sobre $Hom_{\Lambda}(M,N)$, dadas por $(\gamma f)(x) = f(x\gamma)$, y $(f\delta)(x) = f(x)\delta$, para cada γ en Γ, δ en Δ, y x en M.

2) Si ${}_{\Gamma}M_{\Lambda}$ y ${}_{\Delta}N_{\Lambda}$ son bimódulos, hay una $\Delta-estructura$ izquierda, y una $\Gamma-estructura$ derecha inducidas sobre $Hom_{\Lambda}(M,N)$, dadas por $(\delta f)(x) = \delta f(x)$, y $(f\gamma)(x) = f(\gamma x)$, para cada γ en Γ, δ en Δ, y x en M.

Definición 7.15: Sea $\Lambda \neq 0$ un anillo artiniano. La *Loewy longitud* de Λ es n si, $rad^{n-1}(\Lambda) \neq 0$ pero $rad^{n}(\Lambda) = 0$.

Ahora es tiempo de hacer un recuento de los teoremas que son citados en algún momento, a lo largo del trabajo.

Teorema 7.1: *Si M es un $\Lambda-$módulo izquierdo, entonces ${}_{BiEnd({}_{\Lambda}M)}M_{End({}_{\Lambda}M)}$, es un bimódulo fielmente balanceado.*[*A.F.*, 4.12]

Teorema 7.2: *Las siguientes afirmaciones acerca de un $\Lambda-$ módulo izquierdo M, son equivalentes.*

a) M es proyectivo.

b) Cada epimorfismo ${}_{\Lambda}N \rightarrow_{\Lambda} M \rightarrow 0$, se escinde.

c) M es isomorfo a un sumando directo de un $\Lambda-$ módulo izquierdo libre.[*A.F.*, 17.2]

Teorema 7.3: *Un $\Lambda-$ módulo izquierdo M es finitamente generado y proyectivo, si y sólo si, para algún módulo ${}_{\Lambda}M'$ y para algún entero $n \geq 1$, hay un $\Lambda-isomorfismo$ $M \oplus M' \cong \Lambda^{(n)}$.* [*A.F.*, 17.3]

Teorema 7.4: *Un $\Lambda-$ módulo izquierdo M es un generador, si y sólo si, para algún módulo Λ' y algún entero $n \geq 1$ hay un $\Lambda-isomorfismo$*

$M^{(n)} \cong \Lambda \oplus \Lambda'$. [*A.F.*, 17.6]

Teorema 7.5: *Sea ${}_{\Lambda}M_{\Gamma}$ un bimódulo fielmente balanceado. Entonces ${}_{\Lambda}M$ es un generador, si y sólo si, M_{Γ} es finitamente generado y proyectivo.*[*A.F.*, 17.7]

Teorema 7.6: *Un $\Lambda-$ módulo izquierdo M es un generador, si y sólo si,*

i) ${}_{\Lambda}M$ es fiel y balanceado.

ii) $M_{End({}_{\Lambda}M)}$ es finitamente generado y proyectivo.[*A.F.*, 17.8]

Teorema 7.7: *Para cada módulo derecho M_{Λ}, hay un $\Lambda-isomorfismo$*

$\eta : M \otimes_{\Lambda} \Lambda \rightarrow M$, tal que $\eta(m \otimes \lambda) = m\lambda$, y $\eta^{-1}(m) = m \otimes 1$;

Y para cada $\Lambda-$ módulo izquierdo ${}_{\Lambda}N$, hay un $\Lambda-isomorfismo$

$\mu : \Lambda \otimes_{\Lambda} N \rightarrow N$, tal que $\mu(\lambda \otimes n) = \lambda n$, y $\mu^{-1}(n) = 1 \otimes n$.

Además, si ${}_{\Gamma}M_{\Lambda}({}_{\Lambda}N_{\Gamma})$ es un bimódulo, entonces η (μ) es un isomorfismo de bimódulos.[*A.F.*, 19.6]

Teorema 7.8: *Dados los módulos* ${}_{\Lambda}P, {}_{\Lambda}U_{\Gamma}$ *y* ${}_{\Gamma}N$, *hay un homomorfismo natural,*

$\eta : Hom_{\Lambda}(P, U) \otimes_{\Gamma} N \to Hom_{\Gamma}(P, (U \otimes_{\Gamma} N))$, *dado por*

$\eta(f \otimes n)(p) = f(p) \otimes n$. *Y si* ${}_{\Lambda}P$ *es finitamente generado y proyectivo, entonces* η *es un isomorfismo.*[*A.F.*, 27.10]

Teorema 7.9: *Dados los módulos* P_{Λ}, ${}_{\Gamma}U_{\Lambda}$ *y* ${}_{\Gamma}N$, *hay un homomorfismo natural,*

$\mu : P \otimes_{\Lambda} Hom_{\Gamma}(U, N) \to Hom_{\Gamma}(Hom_{\Lambda}(P, U), N)$, *dado por*

$\mu(p \otimes f)(g) = f(g(p))$. *Y si* P_{Λ} *es finitamente generado y proyectivo, entonces* μ *es un isomorfismo.*[*A.F.*, 20.11]

Teorema 7.10: *Sean* Λ *y* Γ *anillos equivalentes, por medio de las equivalencias inversas* $F :_{\Lambda} \mathcal{M} \to_{\Gamma} \mathcal{M}$ *y* $G :_{\Gamma} \mathcal{M} \to_{\Lambda} \mathcal{M}$. *Si* $P = F(\Lambda)$ *y* $Q = G(\Gamma)$. *Entonces* P *y* Q *llegan a ser bimódulos* ${}_{\Gamma}P_{\Lambda}$ *y* ${}_{\Lambda}Q_{\Gamma}$ *naturalmente, y se cumple que:*

1) ${}_{\Gamma}P_{\Lambda}$ *y* ${}_{\Lambda}Q_{\Gamma}$ *son fielmente balanceados.*

2) $P_{\Lambda}, {}_{\Gamma}P, {}_{\Lambda}Q$ *y* Q_{Γ} *son progeneradores.*

3) ${}_{\Gamma}P_{\Lambda} \cong Hom_{\Gamma}(Q, \Gamma) \cong Hom_{\Lambda}(Q, \Lambda)$, *y*

${}_{\Lambda}Q_{\Gamma} \cong Hom_{\Lambda}(P, \Lambda) \cong Hom_{\Gamma}(P, \Gamma)$

4) $F \cong Hom_{\Lambda}(Q, \_)$, *y* $G \cong Hom_{\Gamma}(P, \_)$.

5) $F \cong (P \otimes_{\Lambda} \_)$, *y* $G \cong (Q \otimes_{\Gamma} \_)$. [*A.F.*, 22.1]

Algo que debemos explicar, y que usaremos mas adelante, es la localización. Dados un anillo conmutativo con unidad Λ, un $\Lambda - $*módulo* M, y un subconjunto multiplicativamente cerrado $U \subset \Lambda$, definimos la localización de M en U, como el conjunto de clases de equivalencia de los pares ordenados (m, u), con m en M, y u en U, con la relación $(m, u) \sim (m', u')$, si hay un elemento v en U, tal que $v(u'm - um') = 0$ en M, y la denotamos como $M[U^{-1}]$. La clase de equivalencia de (m, u), es denotada por m/u. Y $M[U^{-1}]$ es un $\Lambda - $*módulo*, con las operaciones:

$m/u + m'/u' = (u'm + um')/uu'$ y $\lambda(m/u) = (\lambda m)/u$, para m, m' en M, u, u' en U, y λ en Λ. Si hacemos esta construcción, con $M = \Lambda$, la localización resulta ser un anillo, con la multiplicación definida por $(\lambda/u)(\lambda'/u') = \lambda\lambda'/uu'$, y de hecho $M[U^{-1}]$ es un $\Lambda[U^{-1}] - $*módulo* con la acción definida por $(\lambda/u)(m/u') = \lambda m/uu'$ para λ en Λ, m en M, y u, u' en U.

En algunas ocasiones, sólo escribiremos Λ_m, donde m es un ideal máximo de Λ, y eso se define como $\Lambda_m = \Lambda[U^{-1}]$, donde U es el complemento de m.

Teorema 7.11: *Si* $\varphi : M \to N$ *es un morfismo de* $\Lambda-$*módulos, entonces* φ *es un monomorfismo (o epimorfismo, o isomorfismo) si y sólo si, para* *cada ideal máximo m de Λ, el morfismo localizado $\varphi_m : M_m \to N_m$, es un monomorfismo (o epimorfismo, o isomorfismo).*$[E., 2.9]$

Teorema 7.12: *Un anillo Λ es semisimple, si y sólo si, cada $\Lambda-$módulo izquierdo es proyectivo.*$[A.F., 17.4]$

Teorema 7.13: *Sean Λ y Γ anillos equivalentes por medio de la equivalencia $F :_\Lambda \mathcal{M} \to_\Gamma \mathcal{M}$ y sean M y M' $\Lambda-$ módulos izquierdos. Entonces*

1. *M es simple (semisimple) si y sólo si $F(M)$ es simple (semisimple).*
2. *M es finitamente generado si y sólo si $F(M)$ es finitamente generado.*
3. *M es artiniano si y sólo si $F(M)$ es artiniano.*$[A.F., 21.8]$

Teorema 7.14: *Sean Λ y Γ anillos equivalentes. Entonces Λ es semisimple, artiniano izquierdo, respectivamente, si y sólo si Γ es semisimple, artiniano izquierdo.*$[A.F., 21.9]$

Teorema 7.15: *Un módulo no trivial M tiene serie de composición, si y sólo si, es artiniano y neteriano.*

Teorema 7.16: *(Wedderburn) Todo anillo semisimple R es isomorfo a un producto finito de anillos de matrices sobre anillos con división.*

Bibliografía:

[*A.F.*] Anderson, Frank W., y Fuller, Kent R.; *Rings and categories of modules.* Springer-Verlag 1973.

[*E*] Eisenbud, David; *Commutative algebra, with a viewpoint toward algebraic geometry.* Springer-Verlag.

[*A.G.*1] Auslander, Maurice and Goldman, O.; *Maximal orders,* Trans. Amer. Math. Soc. 97(1960), 1-24.

[*A.R.*] Auslander, M.; Reiten, Idun and SmalØ, Sverre; *Galois actions on rings and finite galois coverings,* Math. Scand. 65(1989), 5-32.

[*G.*] Gabriel, P; *The universal cover of a representation-finite algebra,* in: Representations of algebras; Proc. of the third int. Conf. on Rep. of Algebras, Puebla, México, 1980. Lecture notes 903, Springer (1981),68-105.