

51
2 ejm



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CABELLO DE AGUJEROS NEGROS CON CAMPOS
ESCALARES QUE NO RESPETAN LAS SIMETRIAS
DEL ESPACIO-TIEMPO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A

I G O R P E N A I B A R R A



DIRECTOR: DR. DANIEL SUDARSKY SAIONZ



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR
7998



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Cabello de agujeros negros con campos escalares que no respetan las simetrías
del espacio-tiempo"

realizado por PEÑA IBARRA IGOR

con número de cuenta 9251794-1 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. DANIEL SUDARSKY SAIONZ

Propietario

DR. ECHEHARD MIELKE

Propietario

DR. AXEL DE LA MACORRA PETERSSON

Suplente

DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA

Suplente

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A Lupita y Conrado, por ser tan padres

A Daniela y a la pequeña Fer

A Fanny

Índice

Introducción	2
1 Relatividad General y Agujeros Negros	6
§1.1 Propiedades geométricas del espacio-tiempo	6
§1.1.1 Métrica y Operador Derivada	6
§1.1.2 Geodésicas	8
§1.1.3 Curvatura	9
§1.1.4 Campos de Killing	10
§1.1.5 Transformaciones conformes	11
§1.2 Ecuaciones de Einstein	12
§1.2.1 El tensor de energía-momento	12
§1.2.2 Ecuación de Einstein, formulación lagrangiana	13
§1.3 La solución de Schwarzschild	16
§1.3.1 Espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos	16
§1.3.2 Solución de Schwarzschild y coordenadas de Kruskal	18
§1.4 Causalidad	22
§1.5 Infinito Asintótico	25
§1.6 Agujeros Negros	29
2 Cabello escalar estacionario	33
§2.1 Campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad	34
§2.1.1 Caso estacionario con potencial convexo	34
§2.1.2 Caso estático y esféricamente simétrico	36
§2.2 Teoremas para campo no mínimamente acoplado a la gravedad	39
§2.2.1 Acople no mínimo general	39
§2.2.2 Acople del tipo $\frac{1}{2\kappa} + \xi\phi^2$	43

3	No <i>pelo</i> para campo escalar con dependencia armónica de la coordenada temporal	53
§3.1	Soluciones regulares	54
§3.2	Un teorema de no pelo	58
§3.3	Campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad	61
§3.4	Campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad	62
§3.5	El teorema de no “pelo” en otros casos	65
	Comentarios finales	69
A	Tensor de energía-momento y ecuación de movimiento del campo escalar acoplado a la gravedad	71
§A.1	Tensor de energía-momento	71
§A.2	Ecuación de movimiento del campo escalar complejo	74
	Bibliografía	76

Introducción

Un año después de que se formulara la Relatividad General, en 1916 Schwarzschild encontró la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, pasó casi medio siglo para que se comprendieran por completo la geometría y las implicaciones físicas de esta solución. Una de éstas es la idea de *agujero negro*, esto es, una región de “no escape” en la que, como su nombre lo indica, a cualquier observador que logre entrar a ella le será imposible salir de ahí. La solución de Schwarzschild representa el espacio-tiempo en el exterior de un cuerpo aislado, estático y esféricamente simétrico y si éste se colapsa hasta cierto punto presenta un agujero negro. Basta conocer la masa total del objeto para que la métrica del espacio-tiempo quede totalmente determinada.

¿Podrían existir agujeros negros que mantuvieran campos físicos no triviales en su exterior? La respuesta para campo electromagnético no se hizo esperar, ya en 1918 se había encontrado la solución de Reissner-Nordström para el caso de agujeros negros con las mismas simetrías espaciales y temporales que el espacio-tiempo de Schwarzschild pero con carga. Para determinar por completo esta solución sólo bastan dos parámetros: la masa y la carga eléctrica total asociada al espacio-tiempo.

No fue sino hasta 1963 cuando aparece la siguiente solución que representa agujeros negros en vacío: la familia de agujeros negros de Kerr. Estos espacio-tiempos son estacionarios (no estáticos) y tienen simetría axial. De nuevo, la generalización a campo electromagnético debida Newmann surgió casi inmediatamente. La familia de soluciones de Kerr-Newmann es una familia de tres parámetros: la carga, la masa y el momento angular. Cuando éste último parámetro es nulo se reduce a la solución de Reissner-Nordström y cuando además la carga es nula se reduce a la de Schwarzschild.

El estudio de los agujeros negros en esos años fue muy intensa y se obtuvieron resultados notables. En particular, se demostró que la totalidad

de las soluciones estacionarias que representan agujeros negros en los casos electromagnético y el vacío deben corresponder necesariamente a las soluciones de Kerr-Newmann. Esto es, quedan completamente determinados por la especificación de tres parámetros. La carga, la masa y el momento angular totales de un espacio-tiempo tienen en común que están sujetos a leyes de conservación y que se pueden medir desde regiones lejanas al agujero negro; matemáticamente se calculan mediante una integral sobre cualquier 2-esfera situada en la región lejana del agujero negro. A este tipo de parámetros se les llaman *cargas*.

Este resultado le pareció definitivo a mucha gente y se pensó que era general: Todos los agujeros negros estacionarios con cualquier tipo de campo debían de ser completamente determinados sólo por cargas. Esta conjetura se expresa coloquialmente diciendo que los agujeros negros “no tienen cabello” pensando tal vez en que para especificar a cierta persona, además del color de ojos, complexión o tez uno necesita especificar las características de su cabello que, como todos sabemos, pueden ser muy variadas. Los intentos que se hicieron en esa época (hasta mediados de los setentas) para encontrar nuevos agujeros negros para campos distintos al electromagnético resultaron en que éstos se debían de reducir a la familia de Kerr-Newmann. Aunque sólo se buscó para campos muy específicos estos resultados apoyaban a la conjetura de “no cabello”. En particular, Bekenstein [5] demostró en 1972 que campos escalares reales con potenciales de autointeracción convexos no pueden coexistir con agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos.

El primer problema serio al que se enfrentó la conjetura de “no cabello” surgió hasta 1990¹, cuando se descubrieron numéricamente nuevos agujeros negros con “cabello” en la forma de campos de Yang-Mills. Este fue el primer caso de varias soluciones de agujeros negros en otras teorías acopladas a la de gravedad de Einstein: Skyrme, Yang-Mills con dilatón, Yang-Mills-Higgs y Proca no abeliana².

Sin embargo, no cualquier campo puede estar asociado a un agujero negro. Al mismo tiempo que se descubrían nuevos agujeros negros surgieron varios teoremas de “no pelo” para campo escalar. El caso de agujeros negros estáticos y con simetría esférica asociados a campos escalares estacionarios

¹ A mediados de los setentas ya se conocía un posible agujero negro con campo escalar sin potencial, el agujero negro BMBB [8, 3]. Esta “solución” es muy polémica pues el campo escalar es divergente en el horizonte del agujero negro (en la sección §2.2.2 discutimos este punto).

² Ver las referencias dadas en la sección §1.6

mínimamente acoplados con potencial arbitrario (no negativo) está completo y la conclusión es que el campo debe ser constante en todo el exterior del agujero negro por lo que estos agujeros negros se deben de reducir a la solución de Schwarzschild; en la sección §2.1.2 presentamos esta demostración. El caso de campo escalar real estacionario no mínimamente acoplado no ha sido resuelto en general. En la sección §2.2.1 demostramos un teorema de "no pelo" que abarca acoples no mínimos de campo escalar tales que el coeficiente del escalar de curvatura que resulta en la acción es positivo. El análisis de cuando este coeficiente es de la forma $1 + \xi|\phi|^2$ y la constante de acople es negativa, $\xi < 0$, (exceptuando el valor que genera una ecuación de campo que es invariante ante transformaciones conformes) ha sido tratado bajo ciertas suposiciones muy fuertes, además de que aún permanece incompleto; en la sección §2.2.2 discutimos con detalle estos puntos.

Las teorías de campos no escalares que admiten agujeros negros también admiten soluciones estáticas, con simetría esférica y regulares (que no presentan un región de "no escape"). Uno puede imaginarse una solución de éstas como un objeto compacto estático y esférico que se mantiene ligado por el campo gravitacional que genera él mismo, semejando una *estrella de neutrones*. Este tipo de soluciones también se pueden encontrar en teorías de campos escalares complejos de la forma $\phi e^{-i\omega t}$, a estas soluciones se les denomina *estrellas de bosones* [13], [39], [24], [30]. Hasta ahora ninguna partícula escalar fundamental ha sido encontrada en experimentos con aceleradores, no se conoce su masa ni su interacción con la demás materia. Sin embargo, la materia escalar adquiere mucha importancia en el contexto cosmológico pues se piensa que partículas escalares pueden estar presentes en el universo y formar parte de la *materia oscura* [23, 31].

El propósito fundamental de este trabajo es investigar la posibilidad de que existan agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos con campos escalares mínima y no mínimamente acoplados que tienen una dependencia armónica de la coordenada temporal. La pregunta resulta interesante dado que se han encontrado nuevas soluciones de agujeros negros en teorías (no exclusivamente de campo escalar) que admiten soluciones regulares y que se han encontrado soluciones regulares para campos escalares de la forma $\phi e^{-i\omega t}$. Aquí cabe hacer un comentario, todas las nuevas soluciones de agujero negro que se han encontrado han resultado ser inestables mientras que las estrellas de bosones pueden, dependiendo de sus parámetros, ser configuraciones de equilibrio estable (ante perturbaciones radiales).

La idea del primer capítulo es llegar de manera más o menos continua a la

definición de agujero negro y al final de éste damos un panorama general de los agujeros negros estacionarios. También explicamos las transformaciones conformes de la métrica, que serán de gran utilidad en los siguientes capítulos. Como siempre, el libro *General Relativity* de R. M. Wald [46] es la mejor fuente para los temas tratados en este capítulo. En el capítulo 2 revisamos el caso de agujeros negros asociados a campos escalares reales y estacionarios enfocándonos en aquéllos teoremas que consideran potenciales arbitrarios. En particular, no profundizamos en los teoremas para campo conforme, que requieren que el potencial sea nulo. Finalmente, en el capítulo 3 trabajamos el caso de campo escalar con dependencia armónica de la coordenada temporal.

Capítulo 1

Relatividad General y Agujeros Negros

§1.1 Propiedades geométricas del espacio-tiempo

En esta sección presentamos un breve resumen de los aspectos más importantes de la geometría diferencial que aparecen en la teoría de la Relatividad General. Nos basamos en los capítulos 1, 2 y 3 de libro de Wald [46], donde se encuentran ampliamente explicados los conceptos y se realizan formalmente todas las demostraciones.

§1.1.1 Métrica y Operador Derivada

Definimos formalmente el espacio-tiempo como una variedad diferenciable M de cuatro dimensiones sobre la que está definida una métrica Lorentziana g_{ab} , esto es, un espacio-tiempo es la pareja (M, g_{ab}) . En general, todas las cantidades físicas y geométricas que usaremos serán tensores o campos tensoriales definidos sobre M ¹. Una métrica Lorentziana es un campo tensorial 2-covariante suave, no degenerado y simétrico con signatura $-+++$ definido sobre la variedad, esto es, la métrica define un producto interno de vectores tangentes a M . La *métrica inversa* es un tensor 2-contravariante g^{ab} que cumple

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$$

¹Sea T un tensor l -covariante y k -contravariante. En general, lo denotaremos por $T_{b_1, \dots, b_l}^{a_1, \dots, a_k}$, cuando se haya especificado un sistema de coordenadas usaremos índices griegos. Usaremos de ahora en adelante la notación de índices abstractos.

REPORT OF THE COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE

IN RESPONSE TO A RESOLUTION PASSED BY THE HOUSE OF REPRESENTATIVES
ON FEBRUARY 21, 1890

ALBANY: J. B. WHITTAKER, STATE PRINTER, 1890.

THE LAND OFFICE HAS THE HONOR TO ACKNOWLEDGE THE RECEIPT OF THE REPORT OF THE COMMISSIONERS OF THE LAND OFFICE, IN RESPONSE TO A RESOLUTION PASSED BY THE HOUSE OF REPRESENTATIVES ON FEBRUARY 21, 1890.

ALBANY, N. Y., FEBRUARY 21, 1890.

donde δ_c^a es la delta de Kronecker. Toda la manipulación de índices se hará con g_{ab} y g^{ab} excepto cuando se indique.

Debido a que la métrica no es positiva definida se pueden dividir los vectores tangentes v^a a M en tres tipos, *temporales* cuando el cuadrado de su norma sea negativa, $g_{ab}v^av^b < 0$, *espaciales* cuando es mayor que cero y *nulos* cuando es igual a cero. La curva que siga en el espacio-tiempo una partícula con masa no nula siempre tendrá vectores tangentes temporales, las trayectorias de partículas que se mueven a la velocidad de la luz (como fotones o neutrinos, que tienen masa en reposo igual a cero) tienen vectores tangentes nulos.

Denotemos por $\mathcal{T}(k, l)$ el espacio de todos los tensores l -covariantes y k -contravariantes. Decimos que un operador $\nabla_a : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l+1)$ es un *operador derivada* si (i) es lineal, (ii) satisface la regla de Leibnitz para la "diferenciación de productos", (iii) conmuta con la contracción:

$$\nabla_a (T_{b_1, \dots, c, \dots, b_l}^{a_1, \dots, c, \dots, a_k}) = \nabla_a T_{b_1, \dots, c, \dots, b_l}^{a_1, \dots, c, \dots, a_k},$$

y (iv) dadas una curva γ con vector tangente t^a y una función f sobre la variedad, la acción del vector sobre la función está dada por:

$$t(f) = t^a \nabla_a f. \quad (1.1)$$

De ahora en adelante trabajaremos solamente con operadores derivada libres de torsión, esto es, aquéllos para los que dada cualquier función f sobre M satisfacen $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$.

Al haber asignado coordenadas a una variedad existe un operador ∂_a , llamado *derivada ordinaria*, asociado de manera natural a las coordenadas. Supongamos que un campo tensorial sobre la variedad tiene como componentes en cierto sistema coordenado $\{x^\mu\}$ a $T_{b_1, \dots, b_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k}$; definimos ∂_a como el operador que al actuar sobre el campo tensorial produce otro campo con componentes (en ese sistema de coordenadas) $\partial(T_{b_1, \dots, b_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k})/\partial x^\mu$. Este operador depende, como hemos visto, del sistema de coordenadas en el que estemos trabajando y satisface todas la propiedades de los operadores derivada.

Por otro lado, se puede demostrar que, dados dos operadores derivada ∇_a y $\tilde{\nabla}_a$ existe un campo tensorial C_{ab}^c simétrico en los índices ab ² tal que

$$\nabla_a w_b = \tilde{\nabla}_a w_b - C_{ab}^c w_c. \quad (1.2)$$

²Esta propiedad se cumple sólo para operadores derivada libres de torsión.

En particular, cuando $\bar{\nabla}_a = \partial_a$ el campo C_{ab}^c se denota por Γ_{ab}^c y se denomina *símbolo de Christoffel*. Notemos que éstos están asociados a ∂_a y, por lo tanto, dependen del sistema de coordenadas en cuestión; al cambiar de coordenadas dejando fijo ∇_a estamos cambiando Γ_{ab}^c por un nuevo campo tensorial Γ'_{ab}^c .

Finalmente, mencionamos otro resultado que resulta fundamental en el formalismo matemático con el que se trabaja la Relatividad General. Dada una métrica g_{ab} existe un único operador derivada ∇_a libre de torsión asociado de manera natural a la métrica y tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$. De ahora en adelante trabajaremos con este operador derivada. Se puede calcular este operador ∇_a en términos de ∂_a sustituyendo la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \} \quad (1.3)$$

en la ecuación 1.2. Al trabajar con espacio-tiempos específicos necesitamos expresar todas las cantidades físicas y geométricas en términos de coordenadas, en las siguientes subsecciones haremos hincapié en la expresión en coordenadas de las fórmulas más importantes.

§1.1.2 Geodésicas

Una de las tantas interpretaciones de los vectores tangentes a una variedad es que actúan como derivadas direccionales sobre funciones. De acuerdo a la ecuación 1.1 si la función f es constante sobre la curva con vectores tangentes t^a tenemos que $t^a \nabla_a f = 0$. También existe una noción de lo que sería que un campo vectorial v^a restringido a la curva γ "no cambiara al movernos sobre ésta". En estos casos decimos que v^a es *transportado paralelamente* a lo largo de γ y debe satisfacer $t^a \nabla_a v^b = 0$.

Las *geodésicas* son curvas tales que su vector tangente t^a es transportado paralelamente sobre ella misma, esto es,

$$t^a \nabla_a t^b = 0. \quad (1.4)$$

Sin embargo, existen parametrizaciones en las cuales esta condición se transforma en $t^a \nabla_a t^b = \alpha t^b$ para cierta constante α . La parametrización de la curva para la cual se tiene 1.4 se llama *parametrización afín*.

Como vemos, se puede hablar intuitivamente de las geodésicas como las curvas más rectas posibles sobre una variedad. Cuando las geodésicas son

curvas temporales, esto es, que todos sus vectores tangentes tienen carácter temporal³ un parámetro afín resulta ser el *tiempo propio*, definido por

$$\tau = \int -g_{ab} t^a t^b dt, \quad (1.5)$$

donde t es un parámetro arbitrario de la curva y t^a es el vector tangente en esa parametrización. Cuando se ha fijado un sistema de coordenadas la ecuación de las geodésicas (1.4) resulta

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (1.6)$$

Por hipótesis de la teoría, las trayectorias en el espacio-tiempo de cuerpos en caída libre son geodésicas, por ejemplo, las trayectorias de satélites orbitando algún planeta son soluciones de la ecuación anterior. Las partículas que viajan a la velocidad de la luz se mueven sobre geodésicas nulas. Un resultado interesante de la Relatividad General es que rayos de luz pueden quedar atrapados orbitando algún cuerpo en regiones de campo gravitacional (*curvatura*) fuerte.

§1.1.3 Curvatura

Se puede demostrar que el operador $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$ define una transformación lineal de vectores duales (1-covariantes) a tensores 3-covariantes, esto es, existe un campo tensorial R_{abc}^d , llamado *tensor de curvatura de Riemann*, tal que para cualquier vector dual w_c se tiene

$$\nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c = R_{abc}^d w_d. \quad (1.7)$$

Este tensor aparece como el único factor dependiente de la métrica en la expresión del cambio de un vector al ser transportado paralelamente alrededor de una curva cerrada "pequeña" en la variedad. El tensor de curvatura cumple la *identidad de Bianchi*:

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}^e = 0, \quad (1.8)$$

donde los símbolos $[\]$ significan anti-simetrizar respecto a los índices que encierran. Otras cantidades importantes que se generan a partir del tensor de Riemann son el *tensor de Ricci*,

$$R_{ab} = R_{adb}^d \quad (1.9)$$

³Análogamente se definen las curvas espaciales y nulas.

y el *escalar de curvatura*

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (1.10)$$

La expresión en coordenadas del tensor de curvatura se puede obtener usando las ecuaciones 1.3 en 1.2 ($\nabla_a = \partial_a$) y éstas, a su vez, en 1.7, obteniéndose

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\sigma}. \quad (1.11)$$

Se puede probar que dadas dos geodésicas infinitamente cercanas su aceleración relativa depende del tensor de Riemann, de hecho, es cero si $R_{abc}^d = 0$. Entonces, se puede asociar la fuerza de marea gravitacional con el tensor de Riemann. Haciendo una analogía con el caso Newtoniano en la que las fuerzas de marea dependen de un potencial se puede obtener una ecuación para R_{abc}^d que describe el espacio-tiempo en vacío. Ésta se generaliza a una ecuación en términos de los campos de materia que estén presentes en el espacio-tiempo: la ecuación de Einstein (ver, por ejemplo, en [36]), que veremos mas adelante. Dado que el tensor de Riemann se puede obtener directamente de la métrica mediante la ecuación anterior, la ecuación de Einstein es en realidad un ecuación diferencial tensorial que involucra a g_{ab} y a los campos de materia y los relaciona con el contenido material del espacio-tiempo.

§1.1.4 Campos de Killing

Una noción muy importante que ocurre en muchas teorías físicas es la de simetría. En el caso de un espacio-tiempo éstas se describen en términos de los así denominados campos vectoriales de Killing o "vectores de Killing".

Consideremos difeomorfismos del espacio-tiempo en si mismo, $\varphi : M \rightarrow M$ y algún campo tensorial arbitrario T definido en M . Si $\varphi^* T = T$ decimos que φ es una *transformación de simetría* del campo T . Si nos referimos al tensor métrico, $T = g_{ab}$, decimos que φ es una *isometría* del espacio-tiempo. Ahora, supongamos que tenemos un grupo uniparamétrico de isometrías $\phi_t : M \rightarrow M$. El campo vectorial ξ^a que genera se denomina *campo de Killing*. De su definición se puede ver que este campo cumple que

$$\mathcal{L}_{\xi} g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0, \quad (1.12)$$

donde \mathcal{L}_{ξ} es la derivada de Lie en la dirección del vector ξ^a . Estos campos vectoriales indican direcciones sobre las cuales el espacio-tiempo es invariante.

§1.1.5 Transformaciones conformes

Dadas dos métricas \tilde{g}_{ab} y g_{ab} sobre una variedad M diremos que una se obtiene de la otra mediante una *transformación conforme* si existe una función Ω^2 positiva y diferenciable sobre toda la variedad tal que⁴ :

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^{-2} g_{ab}. \quad (1.13)$$

Debido a que el factor conforme es positivo, las dos métricas tienen la misma signatura. Como está demostrado en [46], dos espacio-tiempos (M, g_{ab}) y (M, \tilde{g}_{ab}) tienen la misma estructura causal, esto es, sus conos de luz contienen los mismos vectores si y sólo si sus métricas están relacionadas por una transformación conforme.

Cuando consideramos isometrías conformes de M , esto es, difeomorfismos $\psi : M \rightarrow M$ tales que $\tilde{g}_{ab} = (\psi^* g)_{ab} = \Omega^{-2} g_{ab}$ las dos métricas están relacionadas por una transformación conforme. Sin embargo, también consideramos casos en los que \tilde{g}_{ab} definida por 1.13 no está asociada a ningún difeomorfismo de M .

La métrica inversa de \tilde{g}_{ab} la denotaremos por \tilde{g}^{ab} , observemos que para que se cumpla la condición

$$\tilde{g}^{ab} \tilde{g}_{bc} = g^{ab} g_{bc} = \delta_c^a$$

se tiene que

$$\tilde{g}^{ab} = \Omega^2 g^{ab}. \quad (1.14)$$

Sea ∇_a el operador derivada asociado con g_{ab} y $\tilde{\nabla}_a$ el asociado a \tilde{g}_{ab} ($\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{ab} = 0$ y lo análogo para g_{ab}). En espacio-tiempos ($\dim(M) = 4$) el escalar de curvatura R asociado a la métrica g_{ab} y al operador derivada ∇_a está dado por [46]:

$$\begin{aligned} \Omega^2 R &= \tilde{R} - 6\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \ln \Omega - 6\tilde{g}^{ab} (\tilde{\nabla}_a \ln \Omega) \tilde{\nabla}_b \ln \Omega \\ &= \tilde{R} - 6\Omega^{-1} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Esta ecuación será muy útil en los siguientes capítulos puesto que mediante transformaciones conformes se han obtenido varios resultados acerca de la posibilidad de que existan agujeros negros en teorías de campo escalar.

⁴Aquí hemos seguido la convención de Wald [46], otros autores las denominan *cambios conformes* [29], [17].

§1.2 Ecuaciones de Einstein

§1.2.1 El tensor de energía-momento

La energía de una partícula con masa (en reposo) m y velocidad u^a en un punto p del espacio-tiempo medida por un observador con velocidad v^a que coincide con la partícula al pasar por p está definida por

$$E = -mu^a v_a = -p^a v_a \quad (1.16)$$

donde p^a es el momento de la partícula. Notemos que en espacio-tiempos planos, donde es válida la teoría de la Relatividad Especial, esta ecuación coincide con la energía de la partícula medida por un observador en reposo respecto a ella ($u^a = v^a$): $E = m$. En la ecuación 1.16 y de ahora en adelante usaremos unidades geometrizadas definidas por $G = c = 1$. Si el observador se encuentra en otro punto q del espacio-tiempo podríamos definir la energía de la partícula medida por él si hubiera una manera única de caracterizar su vector velocidad correspondiente en p . Esto se lograría uniendo p con q con una curva suave y transportando paralelamente v_q^a hasta p . Sin embargo, en espacio-tiempos generales, debido a la curvatura, el transporte paralelo de vectores depende de la curva por la que se realice por lo que esta caracterización no es única y no se puede definir la energía de la partícula para un observador que no coincide con ella en el mismo punto.

Las distribuciones continuas de materia (o energía) se describen mediante el *tensor de energía-momento* T_{ab} . A la cantidad $j^a = -T^{ab}v_b$ se le asocia con la densidad de momento de la distribución de materia que mide un observador con velocidad v^a . La densidad de energía medida por este observador es $\rho = T_{ab}v^a v^b$. El tensor de energía-momento es simétrico y satisface la ecuación

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (1.17)$$

Esperamos que el tensor de energía-momento sea diagonalizable en la misma base que diagonaliza a la métrica. Una excepción a éste comportamiento es el caso de un fluido perfecto⁵. El valor propio ρ del vector propio temporal se interpreta como la densidad de energía de la distribución de materia y los valores propios p_i corespondientes a los vectres propios espaciales se les denomina *presiones principales*.

⁵Los fluidos perfectos son una descripción macroscópica de la materia y su tensor de energía-momento asociado no se puede obtener de una acción por métodos variacionales (ver la sección §1.2.2).

Si el espacio-tiempo admite un vector de Killing ξ^a de esta ecuación se puede obtener una ley de conservación. Definimos el vector $j^a = -T^{ab}\xi_b$ entonces, tenemos

$$-\nabla_a j^a = \xi_b \nabla_a T^{ab} + T^{ab} \nabla_a \xi_b = 0. \quad (1.18)$$

El primer término del lado derecho es cero por la ec. 1.17 y el segundo es cero debido a que, ξ^a es campo de Killing (ecuación 1.12) y T^{ab} es simétrico. Ahora, integrando la ec. 1.18 sobre un volumen V del espacio-tiempo con frontera ∂V y aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\int_V \nabla_a j^a dV = \oint_{\partial V} j^a dS_a = 0, \quad (1.19)$$

donde dS^a es el elemento de superficie normal a ella. Entonces, el flujo total de la proyección de T_{ab} sobre ξ^a es nulo sobre superficies cerradas. Cuando el volumen está delimitado por dos hipersuperficies $t = cte$ la ecuación 1.19 implica que para observadores que se muevan sobre las curvas integrales del campo de Killing $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ se conserva la densidad de energía de la distribución de materia.

La expresión 1.19 no representa una ecuación de estricta conservación de energía. En general no se pueden saber de antemano si un espacio-tiempo admite campos de Killing de manera que para observadores que se muevan sobre sus curvas integrales se conserve la energía. Sin embargo, localmente uno puede encontrar coordenadas en las que la métrica es de Minkowski a primer orden y siempre en estas vecindades localmente hay conservación de energía.

§1.2.2 Ecuación de Einstein, formulación lagrangiana

Dada cierta distribución de materia en el espacio-tiempo descrita por un tensor de energía-momento T_{ab} , la teoría de la Relatividad General postula que

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa T_{ab}, \quad (1.20)$$

que es la llamada *ecuación de Einstein*. La constante κ es igual $8\pi G$ donde G es la constante gravitacional newtoniana, en las unidades que usamos $G = 1$. Las distribuciones de materia están descritas en términos de los campos físicos $\Psi_{(i)}$, entonces, de acuerdo a la ecuación de Einstein la geometría del espacio-tiempo (M, g_{ab}) está asociada con los campos $\Psi_{(i)}$.

Se puede llegar a la ecuación de Einstein mediante un principio variacional escogiendo adecuadamente las densidades lagrangianas para la métrica y los campos de materia. Definimos la acción de Einstein-Hilbert como

$$S_g = \int_M \frac{1}{2\kappa} R \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.21)$$

La cantidad $\sqrt{-g} d^4x$ representa el elemento de volumen en las coordenadas $\{x^\mu\}$. En el apéndice A se demuestra que al hacer variaciones de la métrica y aplicar el principio de acción extrema $\delta S = 0$ (o equivalentemente, las ecuaciones de Euler-Lagrange) obtenemos las ecuaciones de Einstein para el vacío ($T_{ab} = 0$).

Las configuraciones de los campos de materia y su influencia en el espacio-tiempo también están gobernadas por un principio variacional. La acción correspondiente resulta de agregar una densidad lagrangiana de materia Λ_m que depende de los campos $\Psi_{(i)}$, sus derivadas y de la métrica al integrando de la ec. 1.21:

$$S = \int_V \left(\frac{1}{2\kappa} R + \alpha_m \Lambda_m \right) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.22)$$

Las variables de esta acción son los campos $\Psi_{(i)}$ y g_{ab} . Al hacer variaciones respecto a la métrica obtenemos la ecuación de Einstein acoplada 1.20, donde

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_m}{\kappa} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \Lambda_m}{\partial g^{ab}}. \quad (1.23)$$

La constante α_m depende del tipo de materia que se esté considerando. Al hacer variaciones respecto a los campos $\Psi_{(i)}$, el principio de acción extrema nos da la *ecuación del campo*.

Por ejemplo, la acción del campo de Klein-Gordon acoplado a la gravedad es

$$S = \int \left\{ \frac{1}{2\kappa} R - \frac{1}{2} (\nabla^c \phi \nabla_c \phi + m^2 \phi^2) \right\} \sqrt{-g} d^4x,$$

usando 1.23 obtenemos el tensor de energía-momento asociado a este campo ($\alpha_{KG} = 16\pi$):

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} (\nabla^c \phi \nabla_c \phi + m^2 \phi^2)$$

y al hacer variaciones de la acción respecto al campo ϕ obtenemos su ecuación de movimiento:

$$\nabla^a \nabla_a \phi = m^2 \phi.$$

El campo de Klein-Gordon es un ejemplo de campo escalar. En los capítulos siguientes trabajaremos con campos escalares con potenciales de autointeracción arbitrarios.

El problema fundamental de la Relatividad General es resolver las ecuaciones de Einstein para las configuraciones que se estén estudiando. Pero es necesario establecer condiciones de lo que se considera un tensor de energía-momento físicamente plausible pues uno podría proponer como distribución de materia un tensor de energía-momento igual al lado izquierdo de la ecuación de Einstein y así tener una solución para cualquier configuración geométrica. En esta tesis consideraremos en diversas situaciones las siguientes:

1. Se dice que T_{ab} satisface la *condición dominante de energía* (DEC) si para todo vector temporal orientado a futuro ξ^a el vector $-T_b^a \xi^b$ debe ser temporal o nulo orientado a futuro. Esta condición se interpreta como que la densidad de energía no puede fluir a una velocidad mayor que la de la luz.
2. T_{ab} satisface la *condición fuerte de energía* (SEC) si para todo vector temporal unitario ξ^a se debe cumplir

$$T_{ab} \xi^a \xi^b \geq -\frac{1}{2} T$$

donde T es la traza de T_{ab} .

3. T_{ab} satisface la *condición débil de energía* (WEC) si para todo vector temporal ξ^a la densidad de energía

$$T_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0.$$

Supongamos que en un sistema coordenado $\{t^\mu, x^\mu, y^\mu, z^\mu\}$, donde t^μ es temporal, el tensor $T_{\mu\nu}$ es diagonal y que u^μ es cualquier vector temporal de la forma $u^\mu = (u^t, u^x, 0, 0)$ con norma

$$u^\mu u_\nu = u^t u_t + u^x u_x = -k, \quad k > 0. \quad (1.24)$$

Si el sistema satisface WEC tenemos:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu &= T_\mu^\nu u^\mu u_\nu = T_t^t u^t u_t + T_x^x u^x u_x \\ &= -T_t^t (k + u^x u_x) + T_x^x u^x u_x \\ &= -k T_t^t + u^x u_x (T_x^x - T_t^t) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Cómo $u^x u_x = g^{xx} u_x^2 \geq 0$ entonces

$$-T_t^t \geq 0 \quad (1.26)$$

y $T_x^x - T_t^t \geq 0$; en general, para un sistema que satisface WEC tenemos:

$$T_x^x, T_y^y, T_z^z \geq T_t^t. \quad (1.27)$$

Nos interesa en particular la condición débil de energía porque, como veremos en el último capítulo, los campos escalares mínimamente acoplados a la gravedad satisfacen WEC.

§1.3 La solución de Schwarzschild

§1.3.1 Espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos

En general, un sistema es estacionario si su configuración no cambia ante traslaciones temporales, definimos un *espacio-tiempo estacionario* como aquél en el que existe un grupo uniparamétrico de isometrías ϕ_t cuyas órbitas son curvas temporales, que es equivalente a que exista un campo de Killing temporal ξ^a . En estos casos podemos asociar la coordenada temporal t con el parámetro de las curvas integrales del campo de Killing de manera que $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$, entonces,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu} = 0.$$

Esto es, existen sistemas de coordenadas en los que la métrica no depende de t y las curvas integrales del campo de Killing serán las que sigan observadores con sus coordenadas espaciales fijas.

Definimos un *espacio-tiempo estático* como aquél que es estacionario y que además contiene una hipersuperficie Σ ortogonal al campo de Killing temporal. Esta definición es equivalente al requisito de que la métrica sea invariante ante transformaciones $t \rightarrow -t$. Por ejemplo, el espacio-tiempo asociado al exterior de un cuerpo uniforme con simetría axial rotando respecto a su eje con velocidad angular constante resulta ser estacionario. Sin embargo, este sistema no es estático porque no es invariante al cambiar la dirección de la coordenada temporal ($t \rightarrow -t$) ya que el tres-vector de velocidad angular apuntaría en sentido opuesto.

Consideremos un espacio-tiempo estático y sea Σ la superficie ortogonal al campo de Killing. Por ser estacionario existe un sistema de coordenadas $\{t, x^i\}$ ($i = 1, 2, 3$) en las que la métrica no depende de t . Reparametrizamos las curvas integrales del campo de Killing de manera que en $t = 0$ intersecten a Σ , que de esta manera queda parametrizada por las coordenadas $\{x^i\}$. Dado cualquier punto $q \in M$ le asociamos como coordenada temporal el valor del parámetro t que hace que $\gamma_q(t) = q$ donde γ es una curva integral del campo de Killing y como coordenadas espaciales $\{x^i\}$ las del punto $\gamma_q(0) \in \Sigma$. Observemos que como ξ^a es ortogonal a Σ :

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu v^\nu = g_{ti}v^i = 0$$

para cualquier vector v^ν tangente a Σ , entonces $g_{ti} = 0$ para toda i . Se puede probar que la métrica más general posible de este espacio-tiempo se puede escribir como:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + \sum_{i,j=1}^3 g_{ij}(dx^i)(dx^j). \quad (1.28)$$

donde $-V^2 = \xi^a \xi_a$. En efecto, como se puede ver, los coeficientes de la métrica son invariantes ante transformaciones $t \rightarrow -t$.

Normalmente decimos que un objeto tiene simetría esférica si al fijar un centro es invariante ante todas las 3-rotaciones posibles alrededor de ese centro. Para espacio-tiempos damos la siguiente definición: Un espacio-tiempo es *esféricamente simétrico* si admite como grupo de isometrías al grupo $SO(3)$ (o a uno isomorfo a él) y sus órbitas son 2-esferas. Notemos que no necesariamente debe existir en la variedad el "centro" respecto al cual se hacen las rotaciones.

Consideremos un espacio-tiempo esféricamente simétrico, las 2-esferas S que son órbitas de $SO(3)$ son ortogonales a las curvas integrales del campo de Killing estático ξ^a , de hecho, cada S está contenida en alguna $\Sigma_t = \{p \in M \mid t = cte\}$. Entonces, debido a la simetría de rotación se pueden dar coordenadas θ, φ sobre las 2-esferas que no dependen de t de manera que la métrica restringida a ellas sea proporcional a la métrica de una 2-esfera de radio uno, esto es,

$$ds^2|_S = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.29)$$

El factor de proporción debe depender del área de la 2-esfera en cuestión. Vamos a definir la función $r = r(A)$ como

$$r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}. \quad (1.30)$$

Sea $q \in \Sigma_t$, aplicándole $SO(3)$ generamos una 2-esfera $S_q \subset \Sigma_t$ y sean θ, φ las coordenadas a asociadas a q sobre esta 2-esfera. Desde q podemos "tirar" una geodésica espacial ortogonal a S_q y a los puntos p sobre ésta les asociamos las coordenadas (r, θ, φ) . Así asignamos coordenadas a cada hipersuperficie Σ_t . La coordenada r está asociada, de acuerdo a la ecuación 1.30 con el área de la 2-esfera a la que pertenece p y está bien definida sólo en aquéllas regiones en las que $\nabla_a r \neq 0$. De esta manera, a cada punto en la variedad le asociamos, finalmente, las coordenadas (t, r, θ, φ) . La métrica más general de un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico es, entonces,

$$ds^2 = -V^2(r)dt^2 + f(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.31)$$

Las funciones V^2 y f deben depender únicamente de r ya que si fuesen funciones de θ y φ la métrica no resultaría invariante ante rotaciones. Con la ecuación 1.31 ya tenemos un punto de partida para analizar (siempre que $V^2 \neq 0$ y $\nabla_a r \neq 0$) cualquier distribución de materia que presente simetría esférica y que además sea estática. Dados los campos de materia T_{ab} , las ecuación de Einstein se reduce a ecuaciones para cada uno de los coeficientes V^2 y f en términos de los campos de materia.

§1.3.2 Solución de Schwarzschild y coordenadas de Kruskal

Al considerar un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico y resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío $R_{ab} = 0$ para esta configuración obtenemos la llamada *solución de Schwarzschild*. En las coordenadas en las que la métrica se expresa como 1.31 la métrica de este espacio-tiempo se escribe:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.32)$$

donde M es una constante de integración. Como se puede observar, los coeficientes métricos presentan singularidades en $r = 0, 2M$ y en $\theta = 0, \pi$. Además presenta otra propiedad interesante: cuando $r \rightarrow \infty$ los coeficientes tienden a los de la métrica del espacio de Minkowski, que tiene curvatura nula. Se dice que este espacio-tiempo es *asintóticamente plano*, más adelante daremos una definición general que no depende de las coordenadas. Como la interacción gravitacional está asociada a la curvatura del espacio-tiempo podemos interpretar este comportamiento asintótico como que la métrica

describe el exterior de un objeto estático y esféricamente simétrico que se encuentra aislado, por ejemplo, una estrella. Así, la única interacción gravitacional a grandes distancias se debe a él. En esta región de campo débil se puede relacionar la métrica con el potencial gravitacional Newtoniano Φ :

$$g_{tt} = -(1 + 2\Phi).$$

De aquí que podamos identificar M con la masa gravitacional del objeto.

Como ya mencionamos, la métrica de Schwarzschild es singular en las hipersuperficies $r = 0$, $r = 2M$ y $\theta = 0, \pi$; como veremos, algunas de éstas se deben simplemente a que las coordenadas no están bien definidas en los puntos de esas regiones. Podemos hacer esta distinción evaluando en esos puntos cantidades escalares (puesto que son invariantes ante cambios de coordenadas) a las que se les puedan asociar propiedades físicas del sistema. De las ecuaciones de Einstein, tenemos que $R = 0$ y $R_{ab}R^{ab} = 0$ en todo el espacio-tiempo. Sin embargo,

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{48M^2}{r},$$

de donde se ve que el sistema tiene una singularidad física en $r = 0$. Las otras son removibles mediante adecuados cambios de coordenadas, en efecto, $\theta = 0, \pi$ son las singularidades que presentan las coordenadas esféricas en el polo norte de cualquier esfera $r = cte$; siempre podemos escoger otras coordenadas $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ sobre una 2-esfera respecto a las cuales podemos representar unívocamente a los puntos $\theta = 0, \pi$.

En la singularidad $r = 2M$ los coeficiente métricos y los de la métrica inversa divergen. Ésto sólo nos indica que el espacio-tiempo definido por 1.32 está restringido a $0 < r < 2M$ y $r > 2M$. Vamos a hacer un cambio de coordenadas que nos permita entender el comportamiento del espacio-tiempo de Schwarzschild en $r = 2M$. Para ésto definimos un nuevo conjunto de coordenadas, llamadas *coordenadas de Kruskal*, $\{T, X, \theta, \varphi\}$ mediante las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = X^2 - T^2 \quad (1.33)$$

$$\frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{T + X}{X - T} \right|. \quad (1.34)$$

Preservaremos las mismas θ, φ para representar la métrica sobre las 2-esferas. Así, la métrica 1.32 queda:

$$ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.35)$$

donde $r = r(T, X)$ está definido por 1.33. La coordenada r tiene significado físico sólo para valores positivos (en $r = 0$ hay una singularidad física) entonces, de la ecuación 1.33 tenemos:

$$X^2 - T^2 > -1. \quad (1.36)$$

De 1.35 se puede ver que la métrica ahora está bien definida para cualquier valor de las coordenadas X y T siempre que satisfagan la condición 1.36 (conservamos el mismo problema en $\theta = 0$). La singularidad $r = 0$ queda representada por la hipersuperficie

$$X^2 - T^2 = -1.$$

Podemos hacer un esquema que ilustre la relación de estas coordenadas con las anteriores (ver Figura 1.1) representando el comportamiento de r y t en el plano TX y tomando en cuenta que cada punto de éste corresponde a una 2-esfera. Consideremos primero las curvas $r = cte$; si $r > 2M$ son las hipérbolas $X^2 - T^2 = k, k > 0$ y si $r < 2M$ son las hipérbolas $X^2 - T^2 = k, -1 < k < 0$. Todas éstas tienen como asíntotas a las rectas $X^2 - T^2 = 0$, que corresponden a la hipersuperficie $r = 2M$. La curva $X^2 - T^2 = -1$ no pertenece al espacio-tiempo y representa la singularidad física $r = 0$.

De 1.34 podemos ver que las curvas $t = cte$ son rectas que pasan por el origen:

$$T = X \left(\frac{1 - e^{t/2M}}{1 + e^{t/2M}} \right) \quad r > 2M$$

$$T = X \left(\frac{e^{t/2M} - 1}{1 + e^{t/2M}} \right) \quad r < 2M.$$

Es claro que la coordenada t no es univaluada (y por lo tanto no está bien definida) en el punto del espacio-tiempo que corresponde a $X = T = 0$. Observemos también que la curva $t = 0$ corresponde a $T = 0$ si $r > 2M$ y a $X = 0$ si $r < 2M$. La curva $t = \pm\infty$ corresponde a $T = \pm X$ donde el signo depende de la región en que nos encontremos, entonces t tampoco

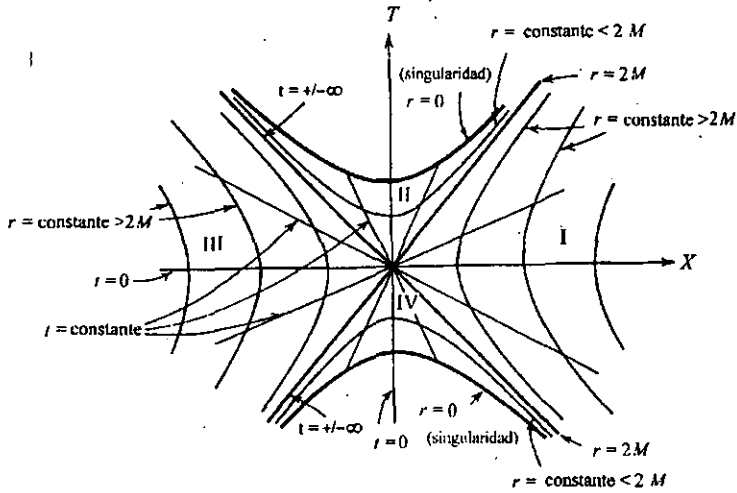


Figura 1.1: Plano XT del espacio-tiempo de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal.

está bien definida sobre la hipersuperficie $r = 2M$. Si un observador pudiera mantener constante su coordenada radial r , por ejemplo, usando unos cohetes, se movería sobre hipérbolas $r = cte$ ($\neq 2M$) y nunca atravesaría la hipersuperficie $T = \pm X$.

Como se puede ver en la Figura 1.1, la hipersuperficie $r = 2M$ separa cuatro regiones del espacio-tiempo. Rayos de luz radiales ($\theta, \varphi = cte$) están descritos por la condición

$$0 = \frac{32M^3 e^{r/2M}}{r} (-dT^2 + dX^2),$$

que a su vez implica $\frac{dT}{dX} = \pm 1$, esto es, en el plano TX son rectas con pendientes ± 1 . Entonces, si un observador cruza de la región I a la región II no podrá regresar a ésta, de hecho, todas las señales que pueda emitir una vez en II permanecerán en II. Además, se puede probar que una vez adentro de II caerá en la singularidad $r = 0$ en un tiempo propio finito. Notemos que el campo de Killing estacionario es de carácter espacial en la

región $0 < r < 2M$ por lo que es imposible para observadores materiales mantener sus coordenadas espaciales fijas en esta región. A la región II se le llama *agujero negro* y a la superficie $r = 2M$ *horizonte de eventos* del agujero negro. En la sección §1.6 daremos definiciones generales de estos conceptos.

La región IV presenta las mismas características que II pero "invirtiendo" la coordenada temporal. Esto es, un observador en IV se debió de haber originado en $r = 0$ un tiempo propio finito atrás e inevitablemente saldrá de IV en un tiempo propio finito posterior. A esta región se le ha denominado *agujero blanco*. La región III es idéntica a I salvo la misma inversión temporal, éstas dos son las regiones asintóticamente planas del espacio-tiempo.

Como ya mencionamos, se puede interpretar a la solución de Schwarzschild como el espacio-tiempo exterior a un objeto estático y esféricamente simétrico e identificar M con la masa gravitacional del objeto mediante el comportamiento en la región de campo débil. En el interior del objeto habría que resolver las ecuaciones de Einstein con algún campo de materia $T^{ab} \neq 0$. Entonces, si el radio del objeto es mayor que $2M$ el espacio-tiempo exterior a él no presentará un *horizonte*. Sin embargo, si el cuerpo se colapsara hasta que su radio sea menor que $2M$ entonces aparecería un horizonte y por lo tanto, una región de no escape o un agujero negro.

En los capítulos posteriores trataremos el caso de agujeros negros bajo la presencia de materia en forma de campos escalares. A pesar de que podrían ser producidos por colapsos gravitacionales no analizaremos este proceso y sólo los consideraremos como posibles estados finales.

§1.4 Causalidad

En el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ cada evento $p \in \mathbb{R}^4$ tiene asociado un cono cuyas generatrices son las geodésicas nulas (rectas con pendientes ± 1 respecto a planos $t = cte$, en este caso) que pasan por p llamado *cono de luz de p* . Se puede etiquetar arbitrariamente cada rama de este cono como "futuro" o "pasado". Esto se puede extender a todo el espacio de Minkowski: se puede transportar paralelamente cualquier vector v^a en el cono futuro de p a otro punto q , y etiquetar como el cono de luz futuro de q a la rama de su cono de luz a la cual apunte el transporte paralelo de v^a . De esta manera se determina unívocamente la dirección positiva de la coordenada temporal.

En espacios curvos hay que redefinir el concepto de cono de luz. El espacio tangente $T_p M$ a un punto p de un espacio-tiempo general (M, g_{ab}) es isomorfo

al espacio-tiempo de Minkowski. Definimos el cono de luz de p como el cono que forman en $T_p M$ los vectores tangentes a las geodésicas nulas que pasan por p . Cuando se puede hacer una designación continua de las ramas futuras de los conos de luz decimos que el espacio-tiempo es *orientable en el tiempo*. En general, esto no es posible; una condición necesaria y suficiente es que exista un campo vectorial temporal continuo sobre (M, g_{ab}) .

Si un vector tangente temporal o nulo en p apunta hacia la rama futura del cono de luz de p diremos que es un vector que está *dirigido hacia futuro*. Asimismo, si todos los vectores tangentes a una curva diferenciable $\gamma \subset M$ están dirigidos hacia futuro diremos que γ es una curva temporal dirigida hacia futuro si todos sus vectores son temporales o causales dirigida hacia futuro si alguno de sus vectores tangentes es nulo. De la misma manera se definen los vectores y las curvas temporales o causales que están dirigidos hacia el pasado.

En el espacio de Minkowski los eventos contenidos en el cono de luz futuro de p son aquéllos a los cuales se les puede transmitir información desde p y los contenidos en el cono de luz pasado de p aquéllos que pueden influenciar a p . Ahora queremos generalizar estos conceptos a espacio-tiempos arbitrarios y caracterizar aquellos espacios que sean bien comportados físicamente; por ejemplo, de éstos esperamos que su estructura causal sea tal que un observador no pueda regresar a un evento en su pasado (en el espacio-tiempo de Minkowski esto es imposible a menos de que el observador pueda viajar a una velocidad mayor que la de la luz). Otra propiedad que esperamos es que podamos asignar una coordenada temporal a la variedad que intuitivamente se comporte como el tiempo que mide un observador en el espacio de Minkowski en el sentido de que sea creciente sobre las curvas que describen a otros observadores. Todo esto se logra definiendo los espacio-tiempo globalmente hiperbólicos, pero antes de esto necesitamos precisar varios conceptos.

Sea $p \in (M, g_{ab})$, definimos el *futuro cronológico* de p como el conjunto de eventos en M que pueden ser alcanzados por curvas temporales dirigidas a futuro que empiecen en p , lo denotamos como $I^+(p)$. Análogamente se define el *pasado cronológico* de p , $I^-(p)$. Notemos que en general p no está en su futuro o pasado cronológico a menos que el espacio-tiempo admita curvas temporales cerradas. El *futuro* y *pasado causal* de p , $J^+(p)$ y $J^-(p)$ respectivamente, se definen análogamente intercambiando curvas temporales por curvas causales. Cuando un conjunto $S \subset M$ es tal que ninguno de sus puntos pertenece al futuro cronológico de otro de sus puntos decimos que es un conjunto *acronal*.

Una curva $\gamma \subset M$, no necesariamente diferenciable, tiene un *punto final futuro* $p \in M$ si para cualquier vecindad U de p existe t_0 tal que si $t > t_0$ entonces $\gamma(t) \in U$, esto es, si la curva no se sale de ella. La curva γ será *inextensible al futuro* si no tiene punto final futuro. Análogamente se definen los puntos finales pasados de una curva y las curvas inextensibles al pasado.

Sea $S \subset M$ un conjunto cerrado y acronal. El *dominio de dependencia futuro* de S es el conjunto $D^+(S)$ de eventos $p \in M$ tales que cualquier curva causal inextensible al pasado que pasa por p intersecta a S . Análogamente se define el dominio de dependencia pasado de S , $D^-(S)$. El *dominio de dependencia* de S es el conjunto

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S).$$

Si $p \in D^+(S)$ cualquier señal que llegue a p debió de haberse registrado antes en algún punto de S , si $p \in D^-(S)$ cualquier señal emitida en o que haya pasado por p llegará a S . El dominio de dependencia de S representa al conjunto de eventos que pueden ser determinados por condiciones en S .

Sea $\Sigma \subset M$ un subconjunto cerrado y acronal de M , decimos que Σ es una *hipersuperficie de Cauchy* de M si $D(\Sigma) = M$. Cuando un espacio-tiempo (M, g_{ab}) contiene al menos una hipersuperficie de Cauchy decimos que es *globalmente hiperbólico*.

Es generalmente aceptado que en espacio-tiempos físicamente razonables un observador no puede alterar eventos pasados. Esto sucede si el espacio-tiempo en el que vive no acepta curvas causales cerradas. Una caracterización de espacio-tiempos sin anomalías causales es la siguiente: El espacio-tiempo (M, g_{ab}) es *fuertemente causal* si para todo $p \in M$ y toda vecindad O de p existe una vecindad $V \subset O$ de p tal que ninguna curva causal intersecta V más de una vez.

Sin embargo, en espacio-tiempos que sean fuertemente causales podría ocurrir que bajo pequeñas perturbaciones de la métrica como, por ejemplo, la presencia de una onda gravitacional el espacio-tiempo acepte curvas causales que estén muy proximas a ser cerradas convirtiéndose en un espacio-tiempo causalmente inestable. Si existe sobre M un campo de vectores temporales t^a no nulo podemos definir una nueva métrica

$$\tilde{g}_{ab} = g_{ab} - t_a t_b.$$

Notemos que los conos de luz de g_{ab} están contenidos en los conos de luz de \tilde{g}_{ab} . Decimos que el espacio-tiempo (M, g_{ab}) es *causalmente estable* cuando

(M, \tilde{g}_{ab}) no posee curvas causales cerradas. Se puede demostrar que (ver [46], pp199) causalidad estable implica causalidad fuerte.

Los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos son bien comportados causalmente, en particular satisfacen el siguiente:

Teorema 1.1 *Sea (M, g_{ab}) un espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Entonces es causalmente estable y existe una función t que es estrictamente creciente a lo largo de curvas causales dirigidas a futuro. Además, cada superficie $t = \text{cte}$ es una superficie de Cauchy.*

A la función t se le suele llamar *tiempo global*. Como consecuencia de este teorema la variedad M puede ser foliada con hipersuperficies de Cauchy Σ_t y la topología de M es $\mathbb{R} \times \Sigma$.

§1.5 Infinito Asintótico

Como ya vimos, la solución de Schwarzschild se puede interpretar como el exterior de un objeto aislado tomando en cuenta que cuando la coordenada $r \rightarrow \infty$ la métrica se reduce a la métrica de Minkowski. Ahora quisiéramos dar una definición general de que un espacio-tiempo sea asintóticamente plano. Para ésto estudiaremos el comportamiento en infinito del espacio-tiempo de Minkowski.

En coordenadas esféricas la métrica de Minkowski es de la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.37)$$

Podemos expresar esta métrica en términos de coordenadas que etiquetan las geodésicas nulas radiales de este espacio (las rectas con pendiente ± 1 respecto al plano $t = 0$). Haciendo $ds^2 = 0$ en la ecuación 1.37 y resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$\begin{aligned} v &= t + r \\ u &= t - r, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde u, v son constantes de integración que vamos a interpretar como coordenadas. La coordenada v ($\frac{dr}{dt} = -1$) representa rayos de luz que vienen de infinito y llegan en $t = v$ al punto $r = 0$ y la coordenada u ($\frac{dr}{dt} = 1$) representa rayos de luz radiales "salientes" que parten de $r = 0$ al tiempo $t = u$.

Queremos analizar el "infinito" del espacio de Minkowski en las siguientes regiones: 1) Futuro temporal infinito ($t \rightarrow \infty$, $r = cte$), 2) Pasado temporal infinito ($t \rightarrow -\infty$, $r = cte$), 3) Infinito espacial ($r \rightarrow \infty$, $t = cte$), 4) Futuro nulo infinito ($v \rightarrow \infty$, $u = cte$) y 5) Futuro pasado infinito ($u \rightarrow -\infty$, $v = cte$).

En estas nuevas coordenadas u, v la métrica del espacio-tiempo es

$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(v-u)^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1.39)$$

Propiamente, los puntos $u, v \rightarrow \infty$ no pertenecen al espacio-tiempo de Minkowski. Vamos a construir un nuevo espacio-tiempo $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ en el que estos puntos estén contenidos naturalmente en él.

Para ésto definimos $\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$ donde

$$\Omega^2 = \frac{4}{(1+v^2)(1+u^2)}$$

y η_{ab} es la métrica del espacio-tiempo de Minkowski. Notemos que en la región física $u, v \in (-\infty, \infty)$ tenemos $0 < \Omega^2 < \infty$ y la nueva métrica

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{4}{(1+v^2)(1+u^2)} \left(-dudv + \frac{1}{4}(v-u)^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2) \right)$$

está bien definida.

En las coordenadas T, R, θ, φ , donde

$$\begin{aligned} T &= \tan^{-1}v + \tan^{-1}u \\ R &= \tan^{-1}v - \tan^{-1}u, \end{aligned} \quad (1.40)$$

tenemos

$$\tilde{ds}^2 = -dT^2 + dR^2 + \text{sen}^2 R (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1.41)$$

Con esta métrica no encontramos ningún problema al extender de manera maximal las nuevas coordenadas a los intervalos $R \in [-\pi, \pi]$, $T \in (-\infty, \infty)$. El espacio-tiempo $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ tiene topología $S^3 \times \mathbb{R}$ y se le conoce como el *Universo estático de Einstein* (ver figura 1.2).

La región física está mapeada a la región $O \subset \tilde{M}$ definida por los intervalos:

$$-\pi < T + R < \pi$$

$$-\pi < T - R < \pi.$$

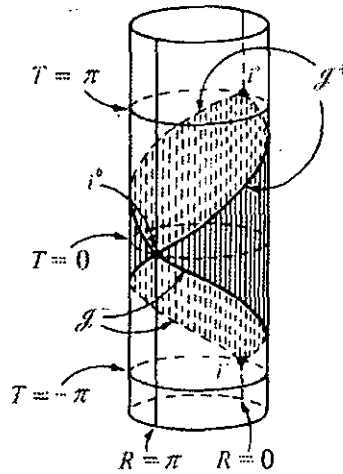


Figura 1.2: Esquema del espacio-tiempo de Minkowski contenido en el espacio-tiempo no físico $S^3 \times \mathbb{R}$.

Como se ve de la métrica 1.41 los puntos $u, v \rightarrow \infty$ ($T \pm R = \pm\pi$), que corresponden a "infinito" en el espacio-tiempo de Minkowski están contenidos en \bar{M} .

Pareciera que en $R = \pm\pi$ hay una singularidad en la métrica. Las hipersuperficies $T = cte$ representan 3-esferas y $R = \pm\pi$ son puntos (no superficies) sobre ellas. Ésta es una singularidad coordenada análoga a la de las coordenadas esféricas sobre 2-esferas.

Al extender de manera maximal las coordenadas R y T hemos obtenido un espacio-tiempo (\bar{M}, \bar{g}_{ab}) tal que el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ es mapeado a $O \subset \bar{M}$ bajo la transformación 1.40. En otras palabras, hemos encontrado una isometría conforme⁶ $\psi : M \rightarrow O \subset \bar{M}$ entre ambos espacio-tiempos.

Nos interesa la frontera de O que, como ya vimos, es a donde se mapea el "infinito" del espacio de Minkowski. Está formada por las siguientes regiones:

⁶Las isometrías conformes son difeomorfismos $\psi : M \rightarrow M'$ tales que $(\psi^*g)_{ab} = \Omega^2 g_{ab}$.

1. El punto i^+ determinado por $R = 0, T = \pi$, llamado *infinito futuro temporal*, que es a donde convergen todas las geodésicas temporales dirigidas a futuro.
2. El punto i^- , determinado por $R = 0, -\pi$, llamado *infinito pasado temporal*, donde comienzan todas las geodésicas temporales extendibles al pasado.
3. La 3-superficie \mathcal{J}^+ llamada *infinito futuro nulo*, dada por $T = \pi - R$ con $0 < R < \pi$, que es donde empiezan las geodésicas nulas.
4. *Infinito pasado nulo*, \mathcal{J}^- , definido por $T = -\pi + R$ con $0 < R < \pi$ llamado infinito espacial, que es donde comienzan y terminan todas las geodésicas espaciales.

La idea de extender este concepto de ser "plano en infinito" a espacio-tiempos generales consiste en poder construir un nuevo espacio-tiempo no físico que contenga vía una isometría conforme al espacio original y a su frontera, misma que deberá tener una estructura semejante a la del espacio-tiempo de Minkowski. Sin embargo, sólo nos interesa la estructura de infinito causal e infinito espacial y no la de infinito temporal puesto que se quiere poder describir objetos aislados que puedan afectar la curvatura del espacio-tiempo cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

La definición formal de que un espacio-tiempo sea asintóticamente plano precisa la manera en que se deben "pegar" los espacio-tiempos físico y no físico para garantizar que existan coordenadas en M en las que la métrica sea de la forma 1.37 mas correcciones que dependen de $1/r$ al acercarnos a i^0 y de la forma 1.39 mas correcciones que dependen de $1/v$ y $1/u$ al acercarnos a \mathcal{J}^+ y a \mathcal{J}^- respectivamente. Para nuestros propósitos basta con lo siguiente:

Un espacio-tiempo (M, g_{ab}) es *asintóticamente plano* si existe un espacio-tiempo no físico $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ y una isometría conforme $\psi : M \rightarrow \psi(M) \subset \tilde{M}$ con factor conforme $\Omega^2 (\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 (\psi^* g)_{ab})$ tal que

$$\Omega : \psi(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

En \tilde{M} debe existir un punto i^0 tal que no existan puntos de M en el futuro o pasado causal de i^0 , esto es,

$$\overline{\mathcal{J}^+(i^0)} \cup \overline{\mathcal{J}^-(i^0)} = \tilde{M} - \psi(M)^7$$

⁷La barra indica la cerradura del conjunto.

La frontera ∂M de M en \widetilde{M}^8 es $\partial M = i^0 \cup \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-$, donde $\mathcal{J}^+ = \partial(J^+(i^0)) - i^0$ y $\mathcal{J}^- = \partial(J^-(i^0)) - i^0$. Además, ∂M , que representa la región en infinito de M , debe ser causalmente bien comportada, es decir, esperamos que en la región asintótica de M no existan curvas causales cerradas.

En el límite cuando nos acercamos a infinito en un espacio-tiempo asintóticamente plano las soluciones de la ecuación de Einstein deben de corresponder a un espacio-tiempo plano (Minkowski). Entonces, si el espacio-tiempo contiene materia su tensor de energía-momento debe tender a cero suficientemente rápido en infinito. Esta propiedad es de gran importancia en las demostraciones de teoremas de existencia de agujeros negros.

§1.6 Agujeros Negros

Por los trabajos de Israel [20], Müller zum Hagen *et. al.* y Robinson [38] (ver más adelante) la solución de Schwarzschild es la única solución estática con simetría esférica en vacío de las ecuaciones de Einstein. Birkhoff demostró sin suponer estaticidad que la solución de Schwarzschild seguía siendo la única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío con simetría esférica. De esto se puede concluir que el colapso gravitacional de cualquier cuerpo aislado esféricamente simétrico produce, invariablemente, el espacio-tiempo de Schwarzschild, el cual presenta una región de no escape o agujero negro. El propósito de esta sección es especificar cuando consideramos que un espacio-tiempo "cualquiera" contiene un agujero negro.

Consideraremos a los agujeros negros como objetos aislados, por lo que los espacio-tiempos que los contienen son asintóticamente planos, además, esperamos que sean causalmente bien comportados.

Decimos que un espacio-tiempo (M, g_{ab}) asintóticamente plano es *fuerte y asintóticamente predecible* si existe una región abierta \tilde{V} en el espacio-tiempo conforme $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ tal que $\overline{M} \cap J^-(\mathcal{J}^+) \subset \tilde{V}$ y $(\tilde{V}, \tilde{g}_{ab})$ es globalmente hiperbólico. A menos que se especifique lo contrario, e ahora en adelante nos referiremos sólo a este tipo de espacio-tiempos.

Básicamente, la idea de la definición general de que un espacio-tiempo contenga un agujero negro es precisar qué sería un región de no escape análoga a la de la solución de Schwarzschild.

Un espacio-tiempo fuerte y asintóticamente predecible contiene un *agujero*

⁸Estamos hablando de la frontera de $\psi(M) \subset \widetilde{M}$.

negro si M no está contenida en $J^-(\mathcal{J}^+)$. La región del agujero negro es $B = M - J^-(\mathcal{J}^+)$. En otras palabras, un espacio-tiempo contiene un agujero negro si hay puntos de M que no pertenecen a ninguna curva causal que tenga punto final en \mathcal{J}^+ . La frontera de B en M se denomina *horizonte de eventos (futuro)* del agujero negro y es la región $H = \partial[J^-(\mathcal{J}^+)] \cap M$.

Se puede demostrar (ver [46], pág. 301) que la región $(\tilde{V} \cap M, g_{ab})$ es globalmente hiperbólica y que, por lo tanto, se puede foliar con hipersuperficies de Cauchy. Entonces, cualquier evento $q \in \tilde{V} \cap M$ se puede alcanzar por una curva causal inextensible a pasado que pase por q interseca a alguna superficie de Cauchy. Cuando el espacio-tiempo contiene un agujero negro, la región $\tilde{V} \cap M$ contiene al exterior del agujero y al horizonte de eventos. Entonces, un observador que se encuentre en $\tilde{V} \cap M$ no puede detectar singularidades en "su futuro". Sin embargo, como sucede con la singularidad que se encuentra en la región IV (ref la figura) del espacio-tiempo de Schwarzschild curvas inextendibles al pasado en $\tilde{V} \cap M$ pueden tener puntos finales en la singularidad.

Han habido muchas evidencias teóricas de que si un objeto se colapsa para formar un agujero negro la singularidad que se genera con este colapso debe de estar contenida dentro del agujero negro, en otras palabras, nunca podría ser detectada por observadores en el exterior de éste. Esta es la llamada *Conjetura de censura cósmica*.

Aunque fue encontrado casi 50 años antes e independientemente, el espacio-tiempo de Schwarzschild resultó ser un caso particular de la familia de espacio-tiempos de Kerr-Newmann. Éstos son soluciones estacionarias, axisimétricas y asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein acopladas al campo electromagnético. La métrica y el potencial electromagnético que los representa son:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 + \Delta)}{\Sigma} dt d\varphi \\
 &\quad + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 + \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\
 A_a &= - \frac{er}{\Sigma} ((dt)_a - a \sin^2 \theta (d\varphi)_a),
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

y

$$\Delta = r^2 + a^2 + e^2 + 2Mr.$$

Estas soluciones están totalmente especificadas por los tres parámetros e , a y M . En efecto, notemos que cuando $e = a = 0$ obtenemos la métrica de Schwarzschild. Cada uno de estos parámetros se puede interpretar en términos de integrales de superficie en infinito, así, a e se le interpreta como la carga eléctrica total del espacio-tiempo, como en la métrica de Schwarzschild a M se le interpreta como la masa total y $a = J/M$, donde J se interpreta como el momento angular total del espacio-tiempo. A estos parámetros se les denominan en general *cargas*. Otra propiedad interesante de este espacio-tiempo es que presenta *ergoesfera*, esto es, una región en la cual el campo de Killing estacionario $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ es espacial (¡Un observador en esta región debe de viajar a una velocidad mayor que la de luz para mantener fijas sus coordenadas espaciales!).

Se ha demostrado que *todos* los agujeros negros estacionarios en vacío o con campo electromagnético se reducen a los espacio-tiempos de Kerr-Newmann. Hawking demostró [16] que un agujero negro estacionario (con materia que satisface la condición de energía dominante DEC) debe de ser necesariamente estático o axisimétrico. Como el campo de Killing estacionario ξ^a debe ser espacial o nulo en el horizonte sólo hay tres posibilidades:

La primera es que el espacio-tiempo no presente ergoesfera, es decir, que ξ^a sea temporal o nulo en el exterior del agujero negro. Hawking probó que en este caso el espacio-tiempo debe de ser estático. Este resultado también es válido en el caso vacío o electromagnético [11]. La segunda posibilidad es que exista una ergoesfera pero que no intersecte al horizonte. Esta posibilidad no se cree físicamente plausible, en este sentido, a principios de los noventa Sudarsky y Wald [42] probaron que no existen agujeros negros con esta propiedad en el caso electromagnético. La tercera posibilidad corresponde a agujeros negros que presentan ergoesfera que intersecta al horizonte, como es el caso de Kerr-Newmann. Este caso también se generaliza al caso electromagnético.

Cuando se consideran espacio-tiempos estáticos y esféricamente simétricos Israel [20], Müller zum Hagen *et. al.* [49] y Robinson [38] probaron que éstos se reducen al espacio-tiempo de Schwarzschild. Israel [21] demostró que el caso electromagnético se reduce al espacio-tiempo de Reissner-Nordström (este espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico resulta de considerar $a = 0$ en la solución de Kerr-Newmann). Respecto a la tercera posibilidad Carter [10] y Robinson [37] demostraron que todos se reducen la misma familia de dos parámetros de Kerr ($e = 0$ en las soluciones 1.42) y Mazur [33] y Bunting

[9] generalizaron este resultado a Kerr-Newmann en electrovacío.

El hecho de que la totalidad de los agujeros negros estacionarios en vacío o con campo electromagnético estén determinados por tres parámetros resulta sorprendente. Aún más, resultados de este tipo se encontraron para otros tipos de campos clásicos [15, 44]. Para campos escalares ϕ Bekenstein [5] demostró que cuando se consideran potenciales de autointeracción V convexos ($\phi \frac{\partial V}{\partial \phi} > 0$) tampoco se producen nuevas soluciones de agujeros negros.

Todos estos resultados llevaron a Wheeler a conjeturar que no podían existir otros tipos de agujeros negros mas que los de Kerr-Newmann o, en otras palabras, que "los agujeros negros no tienen cabello".

Tiempo después, en 1990, se descubrió numéricamente [6, 45, 25] la existencia de una serie de agujeros negros con campos de Yang Mills (acoplados a la gravitación de Einstein), soluciones que resultaron ser inestables. Después aparecieron otras soluciones también inestables en las teorías de Einstein-Skyrme [7, 12], Einstein-Yang-Mills dilaton [27], Einstein-Yang-Mills-Higgs [14], y Einstein-Proca no Abelian [14]. Con esto es claro que la conjetura de no cabello no es válida en general y que necesita una revisión.

Recientemente se han demostrado bastantes teoremas que descartan el cabello con campos escalares, sin embargo, también se encontró una posible solución que representa agujeros negros para campos escalares, el agujero negro BMBB, sin embargo, según un análisis reciente resulta no ser solución de las ecuaciones de Einstein en el horizonte [43]. En los capítulos siguientes nos avocaremos al estudio de cabello de agujeros negros estáticos y con simetría esférica con campo escalar estacionario y con campo escalar que depende armónicamente de la coordenada temporal. Este último caso es particularmente interesante ya que esta configuración del campo también genera soluciones sin horizonte, así como, por ejemplo, la teoría Einstein-Yang-Mills.

Capítulo 2

Cabello escalar estacionario

Desde que se enunció la conjetura de “no cabello” han habido muchos intentos de establecer nuevos teoremas de no cabello para campos escalares. Por un lado, como hemos visto al final del capítulo anterior, se han descubierto nuevas soluciones que representan agujeros negros asociados a campos no escalares¹. Sin embargo, para campos escalares estacionarios muchos de estos intentos han sido exitosos. Una excepción para espacio-tiempos con simetría esférica es el agujero negro BMBB (que mencionaremos más adelante), sin embargo, esta solución no es del todo satisfactoria [43].

En 1972 Bekenstein demostró que no pueden coexistir agujeros negros estáticos con campos escalares que tienen un potencial de autointeracción convexo, en la primera sección del capítulo hacemos un esbozo de esta demostración. Pero el caso estacionario con potenciales arbitrarios aún está abierto, excepto cuando se consideran simetrías extras [19]. Cuando el agujero negro es estático y tiene simetría esférica existen teoremas de no pelo para potenciales arbitrarios [41, 18]. En la sección §2.1.2 nos referiremos al de Sudarsky [41]. Después presentamos un teorema de “no pelo” para campos escalares reales con acople no mínimo general y potencial no negativo arbitrario. Finalmente presentamos unos resultados de “no pelo” debidos a Bekenstein y Mayo [28].

En todo este capítulo supondremos que

$$\mathcal{L}_\zeta \phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \phi = 0,$$

¹En [22] Bekenstein da argumentos de por qué podríamos haber esperado nuevos agujeros negros en teorías de norma

donde ξ^a es el campo de Killing estático y t es la coordenada temporal asociada a él.

§2.1 Campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad

§2.1.1 Caso estacionario con potencial convexo

La acción que describe una teoría de campo escalar ϕ mínimamente acoplado a la gravedad es:

$$S = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R - (1/2) \nabla^a \phi \nabla_a \phi - V \right] d^4x \quad (2.1)$$

donde R es el escalar de Ricci y ∇_a la derivada covariante asociados a la métrica g_{ab} y $V = V(\phi)$ es el potencial de autointeracción del campo. En el apéndice A se demuestra que la ecuación de movimiento para este campo es:

$$\nabla^a \nabla_a \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.2)$$

Vamos a hacer un esbozo de la demostración de Bekenstein presentada en [5]. Supongamos que el potencial V es convexo, esto es,

$$\phi \frac{\partial V}{\partial \phi} > 0 \quad (2.3)$$

en todo el espacio-tiempo y que existe un agujero negro estacionario bajo la presencia de este campo escalar. Se puede demostrar que en general [35] el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario tiene una estructura análoga a la del horizonte del espacio-tiempo de Kruskal en el sentido de que posee una superficie bidimensional S_B que es la intersección de las dos hipersuperficies $X = \pm T$. A este tipo de horizontes se les conoce como horizontes de Killing bifurcantes y a la 2-superficie S_B como *superficie de bifurcación*.

Multiplicamos por ϕ ambos lados de la ecuación 3.28:

$$\phi \nabla^a \nabla_a \phi = \phi \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Usando que

$$\phi \nabla^a \nabla_a \phi = \nabla^a (\phi \nabla_a \phi) - \nabla^a \phi \nabla_a \phi$$

tenemos

$$\nabla^a \phi \nabla_a \phi + \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} - \nabla^a (\phi \nabla_a \phi) = 0. \quad (2.4)$$

Vamos a integrar esta ecuación sobre una región $\Omega \subset M$ que tiene como frontera dos superficies $t = \text{cte}$, Σ_{t_0} y Σ_{t_1} respectivamente, una 3-superficie Σ contenida en infinito asintótico y la 2-superficie de bifurcación S_B del horizonte. Usando la ley de Gauss, tenemos:

$$\int_{\Omega} (\nabla^a \phi \nabla_a \phi + \phi \frac{\partial V}{\partial \phi}) \sqrt{(-g)} d^4 x - \int_{\partial \Omega} \phi \nabla_a \phi d\Sigma^a = 0. \quad (2.5)$$

Fijémonos en la segunda integral del lado derecho de 2.5. Como el campo es estacionario los valores absolutos de las integrales del campo sobre Σ_{t_0} y sobre Σ_{t_1} son los mismos. Pero los vectores normales $d\Sigma_{t_0}^a$ y $d\Sigma_{t_1}^a$ apuntan en direcciones opuestas por lo que

$$\int_{\partial \Omega} \phi \nabla_a \phi d\Sigma^a = \int_{\Sigma_{t_0}} \phi \nabla_a \phi d\Sigma^a + \int_{\Sigma_{t_1}} \phi \nabla_a \phi d\Sigma^a = 0.$$

El tensor de energía-momento debe ser nulo en infinito para que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano por lo que esperamos que $\phi \nabla_a \phi = 0$ en infinito (más adelante ponemos la expresión de T_{ab} para este campo escalar, que depende de ϕ y de sus derivadas $\nabla_a \phi$), por lo que la integral sobre Σ es nula. Finalmente, la superficie S_B tiene medida cero y, por lo tanto, la integral sobre ésta es nula.

Como el potencial es convexo, ecuación 2.3 y

$$\nabla^a \phi \nabla_a \phi \geq 0$$

para campos estacionarios el primer integrando del lado izquierdo de 2.5 es no negativo. Entonces, el campo escalar debe ser nulo en todo el exterior del agujero negro y este debe corresponder a la solución de Kerr.

Este resultado es interesante por su simplicidad y por el hecho de que no se necesitan las ecuaciones de Einstein para obtenerlo sino la estructura topológica del horizonte de eventos y la ecuación del campo.

§2.1.2 Caso estático y esféricamente simétrico

Consideremos un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano que contiene un agujero negro. Podemos darle coordenadas de manera que la métrica para el exterior del agujero negro se exprese de la forma:

$$ds^2 = -\mu e^{-2\delta} dt^2 + \mu^{(-1)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}(\theta)^2 d\varphi^2), \quad (2.6)$$

donde $\mu \equiv 1 - \frac{2m}{r}$. Las funciones m y δ sólo dependen de la coordenada radial. Para que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano pedimos que m y δ tiendan a un valor finito cuando $r \rightarrow \infty$, de esta manera la métrica 3.29 tiende a la del espacio-tiempo de Minkowski.

Pediremos también que el agujero negro presente un horizonte regular en $r = r_H$, para ésto es necesario que $m(r_H) = r_H/2$ y que $m(r) < r/2$ para toda $r > r_H$ y que la función δ tome un valor finito en el horizonte. Notemos que $\mu(r_H) = 0$.

Como se demuestra en el apéndice A, el tensor de energía-momento asociado al campo escalar que se deriva de la acción 3.26 es:

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla^c \phi \nabla_c \phi + V \right). \quad (2.7)$$

Las ecuaciones de Einstein $G_{\nu}^{\mu} = 8\pi T_{\nu}^{\mu}$ para la métrica 3.29 resultan en las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden para las funciones μ y δ :

$$\mu' = 8\pi r T_t^t + (1 - \mu)/r \quad (2.8)$$

$$\delta' = (4\pi r/\mu)(T_t^t - T_r^r), \quad (2.9)$$

donde ' denota derivada respecto a r .

Debido a la estaticidad y a la simetría esférica pudimos dar coordenadas en las que la métrica es diagonal. Entonces, el tensor de Ricci en estas coordenadas es diagonal y de la ecuación de Einstein se tiene que el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ también es diagonal.

Ahora vamos a seguir a Sudarsky en [41], supongamos que existe un agujero negro estático y esféricamente simétrico bajo la presencia de un campo escalar ϕ con potencial de autointeracción V que es *no negativo*. Las ecuaciones de Einstein 3.17 y 3.18 para los coeficientes de la métrica 3.29 toman la forma:

$$\delta' = -\kappa \frac{r}{2} \phi'^2 \quad (2.10)$$

$$m' = \kappa \frac{r^2}{4} [\mu \phi'^2 + V]. \quad (2.11)$$

para que la métrica se plana en infinito las funciones m y δ deben tender a un valor finito cuando $r \rightarrow \infty$. Esto, en particular implica que:

$$\int_{r_H}^{\infty} m' dr < \infty.$$

Para garantizar esta convergencia $m' = O(r^{-(1+\epsilon)})$ y de la ecuación 2.11 tenemos que $\phi'^2 = O(r^{-(3+\epsilon)})$ y que $V(\phi) = O(r^{-(3+\epsilon)})$ cuando $r \rightarrow \infty$.

La ecuación del campo en estas coordenadas se escribe

$$(\mu \phi')' + \mu \left(\frac{2}{r} - \delta' \right) \phi' = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.12)$$

Multiplicando esta ecuación por ϕ' tenemos

$$\left(\frac{1}{2} \mu \phi'^2 \right)' + \left[\frac{1}{2} \mu' + \left(\frac{2}{r} - \delta' \right) \mu \right] \phi'^2 = \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi' \quad (2.13)$$

Sea $U(\phi) = -V(\phi)$, definimos la "energía" E del sistema como²

$$E := \frac{1}{2} \mu \phi'^2 + U. \quad (2.14)$$

Vamos a analizar el comportamiento de las soluciones guiándonos por el caso de una partícula en un pozo de potencial. Para ésto derivamos el análogo del teorema del trabajo-energía de este sistema. La ecuación 2.13 se puede escribir

$$E' = -b \phi'^2, \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \mu' + \left(\frac{2}{r} - \delta' \right) \mu \\ &= \frac{\kappa}{2} r E + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{3m}{2r} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para obtener la última igualdad hemos usado las ecuaciones de Einstein. Observemos que la "masa" μ del sistema es variable y la energía se disipa debido al "coeficiente de fricción" b .

² E coincide con la componente T_r^r del tensor de energía-momento del campo escalar. En el capítulo 3 generalizamos este teorema valiéndonos de este hecho.

De nuevo, usando la ecuación de Einstein 2.10 podemos escribir la ec. 2.15 como

$$\frac{d}{dr}(Ee^{-\delta}) = -\frac{2}{r} \left(1 - \frac{3m}{2r}\right) e^{-\delta} \phi'^2. \quad (2.17)$$

De la condición

$$\mu = 1 - \frac{2m}{r} \geq 0$$

tenemos

$$\frac{m}{r} \leq \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$$

para toda $r \geq r_H$. De aquí que el lado derecho de la ecuación 2.17 es negativo o nulo en el exterior del agujero negro por lo que la función $Ee^{-\delta}$ es no creciente en toda esta región. Además,

$$(Ee^{-\delta})(r_H) = -V(r_H)e^{-\delta(r_H)} < 0.$$

Entonces la función $Ee^{-\delta}$ es siempre menor o igual que su valor en el horizonte. Pero esto es una contradicción pues para que la métrica sea asintóticamente plana es necesario que $Ee^{-\delta} = O(r^{-(3+\epsilon)})$ al acercarnos a infinito. La única manera de salvar la contradicción es que $\phi \equiv cte$ en todo el exterior del agujero negro y que este valor corresponda a un cero del potencial. De esta manera el tensor de energía-momento es nulo. Por la unicidad de las soluciones estáticas y esféricamente simétricas el espacio-tiempo debe corresponder a la solución de Schwarzschild. Entonces podemos establecer el siguiente

Teorema 2.1 *Un agujero negro estático y esféricamente simétrico con horizonte regular que satisface las ecuaciones de Einstein con campos de materia asociados a un campo escalar (de clase C^2 en el horizonte), con potencial no negativo, mínimamente acoplado a la gravedad y que satisface su correspondiente ecuación de movimiento corresponde a la solución de Schwarzschild y el campo escalar corresponde a un cero del potencial.*

En el artículo original se presenta este teorema con una superposición de campos escalares $\phi_{(i)}$ dada por la acción

$$S = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R - (1/2) \sum \nabla^a \phi_{(i)} \nabla_a \phi_{(i)} - V \right].$$

La generalización de la demostración que presentamos a esta serie de campos no causa problemas debido a que cada campo ϕ_i satisface independientemente su respectiva ecuación de movimiento 2.12.

Aparte de este resultado hay otros teoremas que excluyen *cabello* escalar mínimamente acoplado en agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos con potencial arbitrario (ver las referencias que se hacen al respecto en [19], pág.206).

§2.2 Teoremas para campo no mínimamente acoplado a la gravedad

La densidad lagrangiana de materia para una teoría de campo escalar mínimamente acoplada no depende directamente de la curvatura del espacio-tiempo (aunque sí involucra a la métrica). En una teoría de gravitación "estándar" se involucra a la curvatura mediante el escalar de Ricci R de manera lineal; en éstas la forma más general de la acción de una teoría de campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad es [40]:

$$S = \int [f(\phi)R - h(\phi)\nabla^a\phi\nabla_a\phi - V] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.18)$$

donde $f(\phi) > 0$. Por ejemplo, la teoría de campo *dilatónico* está dada por $f(\phi) = \frac{1}{4}h(\phi) = e^{-2\phi}$ y la teoría de Brans-Dicke con $f(\phi) = \phi$ y $h(\phi) = \omega/\phi$, ambas con potencial nulo.

Después de estudiar el caso general en la siguiente sección, cuando hablemos de acople no mínimo del campo escalar nos referiremos al acople del tipo $f(\phi) = 1/2\kappa + \xi\phi^2$ y $h(\phi) = 1/2$. Para este tipo de acople no existen teoremas de no *cabello* para el caso puramente estacionario.

§2.2.1 Acople no mínimo general

Vamos a demostrar que la acción 2.18 se puede reducir mediante una transformación conforme de la métrica a una acción de Einstein-Hilbert con campo escalar $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\phi)$ mínimamente acoplado a la gravedad. Este método resulta muy útil para analizar las soluciones de las ecuaciones de Einstein con campos no mínimamente acoplados, en particular, cuando se conoce el comportamiento de las soluciones del caso mínimamente acoplado. Sin embargo, no siempre la aplicación de éste método es directa porque en particular hay

que garantizar que el factor conforme este bien definido y sea positivo en toda la región donde se realice la transformación.

Usando el teorema 2.1 vamos a hacer una demostración de que no existen soluciones que representen agujeros negros con horizonte regular (no extremo) estáticos y con simetría esférica en una teoría de campo escalar sujeta a la acción 2.18 donde $f(\phi) > 0$, $h(\phi) > 0$ y el potencial $V = V(\phi)$ es no negativo. Haciendo un desarrollo análogo al del apéndice A con esta integral de acción se obtienen las ecuaciones de Einstein para este tipo de materia:

$$f(\phi)G_{ab} = h(\phi)\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}(h(\phi)\nabla^c\phi\nabla_c\phi + V) + \nabla_a\nabla_b f(\phi) - g_{ab}\nabla^c\nabla_c f(\phi). \quad (2.19)$$

y la ecuación de movimiento del campo:

$$\frac{df(\phi)}{d\phi}R + 2h(\phi)\nabla^c\nabla_c\phi + \frac{dh(\phi)}{d\phi}\nabla^c\phi\nabla_c\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi}. \quad (2.20)$$

Vamos a realizar la transformación conforme de la métrica

$$g_{ab} = \Omega^2\tilde{g}_{ab} \quad (2.21)$$

donde

$$\Omega^{-2} = f(\phi). \quad (2.22)$$

Como vimos en la sección §1.1.5 el escalar de curvatura \tilde{R} asociado a la nueva métrica está dado por:

$$R = \Omega^{-2}\tilde{R} - 6\Omega^{-3}\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega. \quad (2.23)$$

Y el rango de validez de la transformación conforme está determinado por el requisito

$$0 < \Omega^2 < \infty.$$

En particular, en nuestro caso requerimos que la función $f(\phi)$ permanezca acotada en el exterior del agujero negro (recordemos que $f(\phi) > 0$).

Tomando en cuenta que

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\Omega^8\tilde{g}} = \Omega^4\sqrt{-\tilde{g}}$$

y la ecuación 2.23, la acción 2.18 se convierte en:

$$S = \int_M \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} - \frac{6}{\Omega}\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b\Omega - h(\phi)\Omega^2\tilde{g}^{ab}\tilde{\nabla}_a\phi\tilde{\nabla}_b\phi - V] d^4x. \quad (2.24)$$

Donde hemos usado que $\tilde{g}^{ab} = \Omega^2 g^{ab}$ y hemos definido un nuevo potencial por $\tilde{V}(\phi) = f(\phi)^{-2} V(\phi)$.

El segundo término del integrando lo podemos expresar como:

$$\frac{6}{\Omega} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega = 6[\tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \ln \Omega - \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \frac{1}{\Omega} \tilde{\nabla}_b \Omega]$$

El término de la acción que corresponde a la integral de éste se puede reducir usando el teorema de Gauss:

$$\int_M \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \ln \Omega] d^4 x = \int_{\partial M} \tilde{\nabla}_a \ln \Omega d\Sigma^a. \quad (2.25)$$

Este es un término de frontera por lo que no contribuye a las ecuaciones de campo. Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción 2.18 son las mismas que las de la acción:

$$\begin{aligned} S &= \int_M \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} + 6\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega^{-1} \tilde{\nabla}_b \Omega - h(\phi) \Omega^2 \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \tilde{V}] d^4 x \\ &= \int_M \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} - \left(\frac{3}{2} \left(\frac{d}{d\phi} \ln f(\phi) \right)^2 + \frac{h(\phi)}{f(\phi)} \right) \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \tilde{V}] d^4 x \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si definimos el campo $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\phi)$ como

$$\tilde{\phi}(\phi) = \int_a^\phi d\xi \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{d}{d\xi} \ln f(\xi) \right)^2 + \frac{h(\xi)}{f(\xi)}}, \quad (2.27)$$

donde la constante a está determinada por las condiciones de frontera del campo, la acción 2.26 se puede escribir como

$$S = \int_M \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} - \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\phi} \tilde{\nabla}_b \tilde{\phi} - \tilde{V}] d^4 x. \quad (2.28)$$

Que es la acción de Einstein-Hilbert más un campo escalar $\tilde{\phi}$ mínimamente acoplado a la gravedad con potencial de autointeracción no negativo. La ecuación de Einstein para esta acción es:

$$\tilde{G}_{ab} = \nabla_a \tilde{\phi} \nabla_b \tilde{\phi} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} (\tilde{\nabla}^c \tilde{\nabla}_c \tilde{\phi} + \tilde{V}).^3 \quad (2.29)$$

³Para obtener esta expresión basta hacer $f(\phi) \equiv h(\phi) \equiv 1$ en la ecuación 2.19.

y la respectiva ecuación del campo es

$$\bar{\nabla}^a \bar{\nabla}_a \bar{\phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\phi}}. \quad (2.30)$$

Estas dos últimas expresiones son mucho más sencillas que las ecuaciones respectivas para el caso no mínimamente acoplado.

Observemos que debido a la suposición de que f y h son positivas en todo el espacio tiempo el integrando de la ecuación 2.27 es no negativo y, por lo tanto, el "nuevo" campo $\bar{\phi}$ es una función monótona creciente de ϕ y existe su inversa $\phi(\bar{\phi})$. Entonces, la transformación dada por las ecuaciones 2.21 y 2.27 transforma uno a uno soluciones de las ecuaciones de Einstein del sistema (g_{ab}, ϕ) bajo la acción 2.18 a soluciones en el sistema $(\bar{g}_{ab}, \bar{\phi})$ bajo la acción 2.28.

Por otro lado, cuando el espacio-tiempo admite un campo de Killing ξ^a tal que el factor conforme Ω^2 de la transformación presenta la misma simetría, esto es $\mathcal{L}_\xi \Omega^2 = 0$, entonces ξ^a también es un vector de Killing de la métrica \bar{g}_{ab} , como se puede ver de

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{L}_\xi \Omega^2 \bar{g}_{ab} = \bar{g}_{ab} \mathcal{L}_\xi \Omega^2 + \Omega^2 \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab} = \Omega^2 \mathcal{L}_\xi \bar{g}_{ab}.$$

En nuestro caso $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$ para el campo de Killing estacionario ξ^a y el factor conforme es función sólo de ϕ , por lo que el espacio-tiempo (M, \bar{g}_{ab}) tiene la misma simetría temporal que (M, g_{ab}) .

Como las transformaciones conformes de la métrica preservan la estructura causal del espacio-tiempo el infinito futuro nulo \mathcal{J}^+ de (M, g_{ab}) coincide con el de (M, \bar{g}_{ab}) . Si (M, g_{ab}) contiene un agujero negro, es decir, una región $B \neq \emptyset$ tal que $B = M - \mathcal{J}^-(\mathcal{J}^+)$ esta región debe satisfacer la misma propiedad en (M, \bar{g}_{ab}) y, por lo tanto, una solución que represente un agujero negro en (M, g_{ab}) debe ser transformada a una solución del mismo tipo en (M, \bar{g}_{ab}) .

El teorema 2.1 es válido para cualquier potencial mientras éste sea no negativo por lo que se aplica a la teoría descrita por la acción 2.28. Esto es, no existen soluciones que representen agujeros negros con horizonte regular (no extremo), estáticos y esféricamente simétricos salvo cuando el campo es constante en todo el espacio-tiempo y la solución debe corresponder a la solución de Schwarzschild. Si existiera un agujero negro con las mismas propiedades que sea solución en el sistema $[\bar{g}_{ab}, \bar{\phi}]$, ésta sería transformada a una solución asintóticamente plana, estática y esféricamente simétrica con

un horizonte de Killing en $[g_{ab}, \phi]$. Sin embargo, como ya explicamos, esto no es posible. Entonces podemos afirmar que

Teorema 2.2 *La única solución que representa un agujero negro asintóticamente plano, esféricamente simétrico y con horizonte regular del sistema descrito por la acción 2.18 donde $f(\phi), h(\phi) > 0$ con potencial no negativo y que el campo satisface su respectiva ecuación de movimiento en todo el espacio-tiempo resulta en la solución de Schwarzschild.*

La demostración que presentamos de este teorema está basada en una análoga debida a Saa [40], quien considera la acción 2.18 *sin potencial* y demuestra que no existen agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos. Para esto utiliza la solución exterior general del sistema descrito por la acción 2.28 sin potencial debida a Bekenstein (en [47] hay varias referencias al respecto) y por lo que su teorema abarca no solamente los agujeros negros no extremos.

El método de la transformación conforme que usamos para la demostración de este resultado se basa en la suposición de que $f(\phi)$ debe permanecer acotada en el exterior del agujero negro. Este comportamiento no se puede garantizar *a priori*. En general, hay que obtener esta información a partir de las mismas ecuaciones de Einstein y de la ecuación del campo. En el acople usual $f(\phi) = \frac{1}{2\kappa} + \xi\phi^2$ se debe garantizar en particular que ϕ permanezca finito en todo el exterior del agujero negro. Sin embargo, notemos que si llegase a diverger en algún punto entonces no sería formalmente una solución de la ecuación de campo en ese punto, pues ahí no está definida.

§2.2.2 Acople del tipo $\frac{1}{2\kappa} + \xi\phi^2$

Cuando se considera la acción 2.18 con el acople usual y $h(\phi) = \frac{1}{2}$ obtenemos la acción

$$S = \int_M \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \xi\phi^2 R - (1/2) \nabla^a \phi \nabla_a \phi - V \right]. \quad (2.31)$$

El grado de acoplamiento del campo con la gravedad está medido por la constante ξ . El teorema 2.2 se aplica directamente a esta teoría cuando $\xi > 0$ siempre que el campo escalar no diverja en el exterior del agujero negro. Siguiendo a Bekenstein y Mayo vamos a probar explícitamente que este no es el caso. Además, vamos a presentar algunos resultados con $\xi < 0$.

Para esta teoría no se tienen hasta el momento teoremas de "no pelo" ni se han encontrado soluciones salvo para el caso estático. La restricción

al caso estático y esféricamente simétrico ha sido ampliamente estudiada y sin embargo el análisis no está completo aún: los resultados no cubren todo posible valor de ξ y como veremos, algunos de ellos no son del todo satisfactorios.

El tensor de energía-momento para la acción 2.31 está dado por (ver el apéndice A)

$$T_{ab} = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi\phi^2} [2\xi T_{ab}^{(\xi)} + T_{ab}^{(min)}], \quad (2.32)$$

donde

$$T_{ab}^{(\xi)} = \nabla_a \nabla_b \phi^2 - g_{ab} \nabla^c \nabla_c \phi^2 \quad (2.33)$$

y $T^{(min)}$ corresponde al tensor de energía-momento del campo escalar mínimamente acoplado, ecuación 3.41. La ecuación del campo para este caso es

$$\nabla^a \nabla_a \phi + 2\xi R \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (2.34)$$

Cuando la constante de acople toma el valor $\xi = -\frac{1}{12}$ y se considera $V \equiv 0$ la ecuación del campo 2.34,

$$(\nabla^a \nabla_a - \frac{1}{6} R) \phi = 0$$

es invariante conforme bajo la transformación conforme de la métrica

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab},$$

esto es, existe un número real s tal que si ϕ es solución de 2.34 entonces $\Omega^s \phi$ es solución de la ecuación correspondiente en (M, \tilde{g}_{ab}) . En este caso particular $s = -1$ [47]. Este caso es interesante porque se encontró una "solución" de agujero negro estático y esféricamente simétrico de la acción 2.31 sin potencial. A esta se le conoce como el agujero negro Bocharova-Bronnikov-Melnikov-Bekenstein (BMBB) [8], [3] o simplemente como el agujero negro de Bekenstein.⁴ En las coordenadas usuales la métrica y el campo escalar están dados por [22]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.35)$$

$$\phi = \pm \frac{3}{4\pi} \frac{M}{r - M} \quad (2.36)$$

⁴Como dice Bekenstein en [22], esta solución fue encontrada primero en la ex URSS y luego redescubierta por él poco tiempo después.

donde la constante $M > 0$. Como podemos observar la métrica es independiente del campo y tiene una singularidad en $r = M$ que corresponde al horizonte de eventos.

Esta solución, que es bastante simple en su forma algebraica, sólo tiene una deficiencia: el campo escalar diverge en el horizonte. Esto parecía inofensivo en los análisis iniciales que mostraron que como la métrica es suave en el horizonte las partículas que no estén acopladas al campo no tienen manera de detectar la divergencia de éste y para partículas acopladas al campo, el horizonte se alcanza en un tiempo propio infinito hacia futuro y las fuerzas de marea al acercarnos al horizonte no divergen [4]. Sin embargo, recientemente se ha demostrado [43] que el tensor de energía-momento del campo no está bien definido en el horizonte, por lo que esta expresión no es solución de las ecuaciones de Einstein en el horizonte, esto es, no puede considerarse como una solución representando un agujero negro con horizonte regular.

Xanthopoulos y Zannias demostraron [47] que la solución de Bekenstein es la única estática, esféricamente simétrica y asintóticamente plana de la acción de campo escalar conforme fuera del horizonte.

Después, Zannias [48] demuestra que no existen nuevos agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos con horizonte *no extremo* para campo conforme (sin potencial) y donde el campo es finito en todo el exterior (incluido en horizonte) del agujero negro. La demostración de Zannias es interesante por su ingeniosidad, sin embargo, no abundamos en ella porque queremos explorar los casos que incluyen potenciales (no negativos) arbitrarios.

Pruebas de no pelo para $\xi > 0$ y $\xi \leq -\frac{1}{4}$

En [28] Bekenstein y Mayo excluyen posibles agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos no mínimamente acoplados para los valores $\xi < 0$ y $\xi \leq -\frac{1}{4}$. Consideraremos la acción de materia del campo escalar:

$$S_{SM\xi} = \int_M \sqrt{-g} d^4x \left[\xi R\phi^2 - \frac{1}{2} \nabla^a \phi \nabla_a \phi + V \right] \quad (2.37)$$

El potencial $V = V(\phi)$ es no negativo. Nótese que la constante de acople es el doble de la que estábamos utilizando.

Supondremos que la métrica que describe al exterior del agujero negro es

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.38)$$

dónde $\nu = \nu(r)$ y $\lambda = \lambda(r)$ son no negativas y por las condiciones asintóticas $\nu(r), \lambda(r) = O(r^{-1})$ cuando $r \rightarrow \infty$. El horizonte ocurre en $r = r_H$, donde $e^{-\lambda(r_H)} = 0$, si esta función tiene más de un cero el horizonte corresponde al de máxima r .

En términos de la métrica 2.38 el tensor de energía-momento para el campo escalar es:

$$T_{\mu}^{\nu}(1 + 2\kappa\xi\phi^2) = \nabla_{\nu}\phi\nabla_{\mu}\phi - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}(\nabla^{\sigma}\phi\nabla_{\sigma}\phi + 2V) + 2\xi(\nabla^{\nu}\nabla_{\mu}\phi^2 - \delta_{\mu}^{\nu}\nabla^{\sigma}\nabla_{\sigma}\phi^2). \quad (2.39)$$

Recordemos que debido a la simetría esférica $T_{\theta}^{\theta} = T_{\varphi}^{\varphi}$. En particular, utilizaremos las expresiones:

$$T_t^t = e^{-\lambda} \frac{[(-4\xi - 1/2)\phi'^2 - 4\xi\phi\phi'' - 2\xi((4/r) - \lambda')\phi\phi'] - V}{1 + 2\kappa\xi\phi^2} \quad (2.40)$$

$$T_t^t - T_{\theta}^{\theta} = -2\xi e^{-\lambda} \frac{(2/r - \nu')\phi\phi'}{1 + 2\kappa\xi\phi^2} \quad (2.41)$$

$$T_t^t - T_r^r = e^{-\lambda} \frac{(-4\xi - 1/2)\phi'^2 - 4\xi\phi\phi'' + 2\xi(\nu' + \lambda')\phi\phi'}{1 + 2\kappa\xi\phi^2} \quad (2.42)$$

Las ecuaciones de Einstein para los coeficientes de la métrica son:

$$\kappa T_t^t = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2}$$

$$\kappa T_r^r = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}$$

De estas últimas expresiones se tiene:

$$e^{-\lambda}(\nu' + \lambda') = -\kappa r(T_t^t - T_r^r) \quad (2.43)$$

Usando ésta expresión para despejar $\nu' + \lambda'$ obtenemos una expresión equivalente de 2.42:

$$T_t^t - T_r^r = e^{-\lambda} \frac{(-4\xi - 1)\phi'^2 - 4\xi\phi\phi''}{1 + 2\kappa\xi\phi^2 + 2\kappa\xi r\phi\phi'} \quad (2.44)$$

La ecuación del campo escalar toma la forma

$$\nabla^{\alpha}\nabla_{\alpha}\phi + 2\xi R\phi = \frac{\partial V}{\partial\phi} \quad (2.45)$$

Las componentes mixtas del tensor de energía-momento deben ser regulares pues el escalar $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = (T_t^t)^2 + (T_r^r)^2 + 2(T_\theta^\theta)^2$ debe ser regular en todo el espacio-tiempo para que la solución sea posible físicamente (su divergencia implicaría la divergencia de $G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$, quien debe ser regular debido a la regularidad de la métrica). En el siguiente capítulo abundamos en esta restricción y partiendo de ella demostramos que $T_t^t(r_H) = T_r^r(r_H)$ cuando hay simetría esférica y el tensor de energía-momento es estático.

Como vimos en las sección §1.2.2 un tipo de materia satisface la *condición de energía dominante* (DEC) si el vector de flujo de energía que un observador con cuatro-velocidad u^b asocia al tensor de energía-momento T_{ab} ,

$$j^a = -T_b^a u^b, \quad (2.46)$$

debe ser un vector temporal dirigido a futuro o nulo [46]. Esta condición puede ser interpretada diciendo que la velocidad del flujo de energía de la materia siempre es menor que la velocidad de la luz. En particular, implica que la densidad de energía

$$\rho \equiv T_{ab}u^a u^b \quad (2.47)$$

es no negativa, como es el caso de teorías de campo escalar mínimamente acoplado (en efecto, de la ecuación 3.35 se puede ver claramente que satisfacen WEC). Sin embargo, de la expresión 2.40, no se puede garantizar que la densidad de energía $\rho = -T_t^t$ del campo no mínimamente acoplado sea no negativa.

Si $\rho < 0$ en algún punto p entonces el vector de flujo de energía, ecuación (2.46), no se encuentra en el cono de luz futuro de p . Bekenstein y Mayo suponen que debe seguir siendo un vector de carácter temporal o nulo (que pertenece al cono de luz pasado de p), a esta condición la llamaremos la *condición de Bekenstein*. Supongamos que el observador se mueve sobre una hipersuperficie $\varphi = 0$, entonces, $u^\mu = (u^t, u^r, u^\theta, 0)$, donde

$$u^\mu u_\mu = u^t u_t + u^r u_r + u^\theta u_\theta = -1$$

La condición de Bekenstein implica que

$$T_\mu^\nu u_\nu T_\sigma^\mu u^\sigma = (T_t^t)^2 u^t u_t + (T_r^r)^2 u^r u_r + (T_\theta^\theta)^2 u^\theta u_\theta \leq 0, \quad (2.48)$$

debido a que $u^t u_t = g_{tt}(u^t)^2 < 0$ y $u^r u_r = g_{rr}(u^r)^2 \geq 0$, $u^\theta u_\theta = g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 \geq 0$, esta condición se cumple si y sólo si

$$|T_r^r|, |T_\theta^\theta| = |T_\varphi^\varphi| \geq |T_t^t|,$$

o equivalentemente, si

$$\operatorname{sgn}(T_t^t) = \operatorname{sgn}(T_t^t - T_r^r) = \operatorname{sgn}(T_t^t - T_\theta^\theta) \quad (2.49)$$

donde $\operatorname{sgn}()$ denota el signo de su argumento.

En el desarrollo que haremos en el capítulo 3 supondremos que el campo satisface su ecuación de movimiento y por lo tanto es C^2 y está bien definido en todo el espacio-tiempo. Cuando $\xi > 0$ y bajo estas restricciones el factor conforme

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi\phi^2}$$

es finito en $[r_H, \infty)$ y, por lo tanto, por el teorema 2.2 no existen agujeros negros con horizonte regular (no extremo) estáticos y esféricamente simétricos para la acción 2.37 cuando $\xi > 0$.

Bekenstein y Mayo no suponen en principio que el campo es finito. Supongamos que diverge en $r = r_c$. Tomando en cuenta que ν , λ , y R son regulares en todo el espacio-tiempo de la ecuación de campo 2.45 se puede ver que si ϕ diverge entonces

$$\frac{\phi'^2}{\phi^2} \text{ y } \frac{\phi''}{\phi}$$

se comportan como $(r - r_c)^{-2}$ al acercarnos a r_c . Entonces, de las expresiones 2.41 y 2.40 tendríamos que las componentes de T_ν^μ divergen en es punto. Si $r_c = r_H$ y el horizonte no es extremo, esto es, $e^{-\lambda} \sim (r - r_H)$ cuando $r \rightarrow r_H$ las expresiones para $T_t^t - T_\theta^\theta$ y T_t^t , ecuaciones 2.41 y 2.40 respectivamente, también divergen. Esto no es posible para soluciones físicamente aceptables, entonces, el campo ϕ permanece finito y por lo tanto la transformación conforme está bien definida. Aplicando el teorema 2.2 a la acción 2.37 concluimos que si $\xi > 0$ no existen agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos no triviales⁵ para la acción 2.37.

Cuando el horizonte es extremo, situación que está caracterizada por el comportamiento $e^{-\lambda} \sim (r - r_H)^2$ cuando $r \rightarrow r_H$ no se producen inconsistencias. En particular $T_t^t(r_H)$ es finito y se cumple la condición

$$\lim_{r \rightarrow r_H} T_t^t - T_r^r = 0. \quad ^6$$

⁵Por no triviales nos referimos a que no sean del tipo Kerr-Newmann

⁶En el artículo de Bekenstein y Mayo se afirma incorrectamente que

$$\lim_{r \rightarrow r_H} T_t^t - T_r^r < 0.$$

El caso cuando el horizonte es extremo continua abierto.

La demostración para $\xi \leq -\frac{1}{4}$ no involucra una transformación conforme de la métrica sino la consistencia de las soluciones con el comportamiento asintótico del espacio-tiempo y las condiciones de causalidad 2.49.

Hemos probado que cualquier divergencia del campo en el horizonte o fuera de él implica que la solución no es físicamente aceptable. Si sucediera que el campo también diverge en infinito las componentes de T_{μ}^{ν} no se anularían y el espacio-tiempo fallaría en ser asintóticamente plano, entonces el campo ϕ debe de converger a cierto valor $\phi(\infty)$.

Como se puede observar de la ecuación 2.39, cuando uno escribe las ecuaciones de Einstein el término

$$\Omega^{-2} = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi\phi^2}$$

se puede factorizar del tensor de energía-momento. Este término proviene del acople no mínimo del campo y en las ecuaciones de Euler-Lagrange para la acción 2.37 aparece multiplicando al tensor $G_{\mu\nu}$ de manera que las ecuaciones de Einstein se pueden expresar de la siguiente manera:

$$G_{\mu\nu} = \kappa G_{ef} T_{\mu\nu}^{ef}$$

donde

$$G_{ef} = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi\phi^2}$$

La contribución al campo gravitacional de cualquier otro tipo de materia que se agregue al sistema como un término extra al tensor $T_{\mu\nu}$ o al lagrangiano de materia del campo escalar (mientras no involucre al escalar de curvatura, es decir, que esté mínimamente acoplada a la gravedad) se verá afectada por el factor G_{ef} . En este sentido es que se le interpreta como la constante gravitacional *efectiva* del sistema.

Supongamos que $G_{ef} < 0$ en alguna región y que agregamos al sistema una pequeña masa positiva (por ejemplo, agregamos *polvo*). En dicha región esta masa contribuirá al campo gravitacional como si fuera negativa y repelerá a partículas de prueba con masa positiva. En la región asintótica del agujero negro no podemos esperar este comportamiento pues al menos en una vecindad de la Tierra esto no sucede así. Entonces, $\phi(\infty)$ debe ser tal que $\lim_{r \rightarrow \infty} G_{ef} > 0$.

En particular, tenemos que

$$\int_{r_H}^{\infty} \phi \phi' dr = \frac{1}{2} [\phi^2(\infty) - \phi^2(r_H)] < \infty$$

por lo que $\phi \phi' = O(\frac{1}{r^{1+\epsilon}})$ cuando $r \rightarrow \infty$. Con un argumento como el anterior se puede demostrar que al menos ϕ'' , $\phi' = O(\frac{1}{r^{1+\epsilon}})$ por lo que en el límite $\phi''(\infty) = \phi'(\infty) = 0$. Usando este resultado y el hecho de que V es no negativo obtenemos que $T_i^t \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ implica que $\phi'(\infty) = V(\phi(\infty)) = 0$. Esto es, el valor asintótico del campo es un cero del potencial.

Por el comportamiento asintótico de $\phi \phi'$ y de $1 + 2\kappa \xi \phi^2$ el denominador de la ecuación 2.44 es asintóticamente positivo. Bekenstein y Mayo suponen en principio que ϕ^2 es asintóticamente decreciente, esto es, $\phi \phi' < 0$ para todo r mayor que cierto r^* (en particular, suponen que el campo no se anula en esta región) y además que

$$\phi \phi'' > 0 \quad (2.50)$$

en la misma región. Con esta última condición tenemos que ϕ^2 es asintóticamente convexa pues

$$\phi^{2''} = \phi \phi'' + \phi'^2 > 0$$

para todo $r > r^*$. De acuerdo a la suposición 2.50 y a que $\phi \phi' < 0$ tendríamos que si el campo ϕ es positivo en la región asintótica entonces decae de manera convexa o que si es negativo crece de manera cóncava.

Entonces, de la expresión 2.41 tenemos que $T_i^t - T_\theta^t < 0$ y de la ecuación 2.44 tenemos que $T_i^t - T_r^t > 0$ en la región asintótica. Este comportamiento contradice las condiciones de causalidad de Bekenstein (ecuación 2.49) por lo que debe de ser excluido.

Supongamos ahora que ϕ^2 es creciente y cóncava en la región asintótica, esto es, $(\phi^2)' > 0$ y $(\phi^2)'' < 0$ para toda $r > r^*$. La ecuación 2.44 la podemos reescribir como

$$T_i^t - T_r^t = -e^{-\lambda} \frac{2\xi \phi^{2''} + \phi'^2}{1 + 2\kappa \xi \phi^2 + \kappa \xi (\phi^2)'} \quad (2.51)$$

De aquí que $T_i^t - T_r^t < 0$ mientras que $T_i^t - T_\theta^t > 0$, situación que también contradice las condiciones de causalidad de Bekenstein.

La función ϕ^2 no puede comportarse sólo asintóticamente creciente y convexa ($\phi^{2'} > 0$, $\phi^{2''} > 0$) o sólo decreciente y cóncava ($\phi^{2'} < 0$, $\phi^{2''} < 0$) en la región asintótica puesto que en estos casos divergería en infinito (por ejemplo, si decrece y es cóncava entonces su derivada crecería monótonamente).

Sin embargo, la función también podría decrecer monótonamente mientras que su segunda derivada oscila entre valores negativos y positivos de manera que cuando $\phi^{2''} = \phi\phi'' + \phi'^2 > 0$ suceda que $\phi\phi'' < 0$. Un ejemplo de este comportamiento decreciente se encuentra en la función $\sin^2 x$ en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. En la demostración de Bekenstein y Mayo no es claro que pasa en este caso.

Ahora, si la función no es exclusivamente monótona creciente o decreciente en la región asintótica tendría oscilar indefinidamente hasta alcanzar $\phi^2(\infty)$. En este caso, es claro que en algún momento debe crecer de manera convexa para que pueda alcanzar un máximo, esto es, tenemos la situación en la que $\phi^{2'} > 0$ y $\phi^{2''} < 0$ que contradice las condiciones de Bekenstein. En cada una de éstas regiones podemos aplicar los argumentos anteriores para concluir que el campo debe ser constante en la región asintótica $r > r^*$.

La ecuación del campo 2.45 sólo tiene puntos singulares en $r = r_H$ y $r = \infty$ (el potencial y los coeficientes de la métrica son regulares en todo el espacio-tiempo) por lo que una expansión de ϕ en serie de Taylor alrededor de $r = r^*$ converge para toda $r > r_H$. Como el campo es constante en (r^*, ∞) entonces debe ser constante en todo el exterior del agujero negro y éste debe de corresponder a la solución de Schwarzschild.

Podemos expresar los resultados obtenidos hasta ahora de la siguiente manera: No existen agujeros negros no triviales estáticos y esféricamente simétricos con horizonte no extremo con campo escalar estacionario descrito por la acción 2.37 para los valores $\xi > 0$ de la constante de acople. Asumiendo las condiciones de causalidad de Bekenstein podemos concluir también que no existen agujeros negros con éstas propiedades para $\xi \leq -\frac{1}{4}$. Insistimos en que la demostración de estos autores para este caso no es del todo clara a menos de que se pueda garantizar que el campo tenga el comportamiento considerado por estos autores (que si $\phi^{2'} < 0$ necesariamente $\phi\phi'' > 0$).

El análisis basado en la condición de causalidad de Bekenstein no es satisfactorio por dos razones: Primero, no es justificable físicamente puesto que, si estamos dispuestos a considerar que j^a pueda ser un vector temporal dirigido al pasado no habría manera de evitar que se produzcan casos con j^a total de carácter espacial. Por ejemplo, si a uno de estos sistemas se le agrega "polvo" éste aportaría un vector de flujo de energía, digamos j_a^* , también de carácter temporal pero dirigido a futuro que puede escogerse de tal manera que al sumarse al vector del tensor de energía-momento del campo

se produzca un vector de flujo de energía total

$$j^a + j^a \quad (2.52)$$

que resulte de carácter *espacial*, lo que contradiría la condición de Bekenstein.

Segundo, es una condición externa ya que no hay manera de garantizar *a priori* que una teoría particular como, por ejemplo, la de campo escalar con acople no mínimo satisfaga automáticamente la condición de Bekenstein. Las demostraciones que acabamos de presentar se aplican para los casos muy particulares en los que se cumplen las restricciones de causalidad. Sin embargo, queda la pregunta de que se puedan demostrar los mismos resultados con suposiciones menos fuertes. En este sentido es que el caso de campo no mínimamente acoplado con potencial de autointeracción no negativo no está completo, además de que en el análisis de Bekenstein falta la demostración para $0 > \xi > -\frac{1}{4}$.

Capítulo 3

No *pelo* para campo escalar con dependencia armónica de la coordenada temporal

En este capítulo presentamos resultados nuevos sobre la posible existencia de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en teorías con un campo escalar que tiene una dependencia armónica de la coordenada temporal:

$$\phi(r, t) = \phi(r)e^{-i\omega t}. \quad (3.1)$$

Como hemos visto, cuando se consideran teorías de campo escalar estático, esto es, que la derivada de Lie del campo en la dirección del campo de Killing estacionario ξ sea nula,

$$\mathcal{L}_\xi \phi = 0, \quad (3.2)$$

no existen nuevas soluciones de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos. En particular, para campos de la forma 3.1 en general tenemos:

$$\mathcal{L}_\xi \phi(r, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha \phi(r, t) = -i\omega \phi(r, t) \neq 0.$$

La presencia de este tipo de campo escalar es compatible con espacio-tiempos estáticos ya que si la métrica es estática (esto es, se pueden encontrar coordenadas en las que sus coeficientes no dependen de la coordenada temporal) el tensor de energía-momento asociado al campo escalar no depende de la coordenada temporal. De hecho, este tipo de dependencia temporal del campo escalar es la única compatible con configuraciones estáticas [13].

Las teorías de campo escalar complejo aceptan soluciones regulares estáticas y esféricamente simétricas para las configuraciones de equilibrio, dadas por 3.1. En la primera sección discutimos el comportamiento general de estas soluciones. Como vimos al final del capítulo 1, se han encontrado nuevas soluciones de agujeros negros en las teorías de Einstein-Yang-Mills, Einstein-Skyrme, Einstein-Yang-Mills-Higgs, y Einstein-Procca no abeliana. Todas éstas teorías también aceptan soluciones regulares o sin horizonte. Un ejemplo es la solución regular encontrada en la teoría de Einstein-Yang-Mills por Bartnik y McKinnon en 1988 [2] (poco tiempo después, en 1990, Bizon encontró numéricamente soluciones de agujero negro para la misma teoría). En este sentido se podría pensar en la posibilidad de que si una teoría acepta soluciones regulares entonces también debe aceptar soluciones de agujeros negros. En las últimas tres secciones del capítulo mostramos que para algunos casos esta conjetura no es cierta en general.

§3.1 Soluciones regulares

Como hemos visto, campos escalares reales y estáticos no son compatibles con agujeros negros no triviales. Es fácil ver que tampoco pueden generar configuraciones regulares (esto es, sin horizonte) asintóticamente planas, estáticas y esféricamente simétricas. Para demostrarlo utilizaremos la herramienta desarrollada en la sección §2.1.2.

Supongamos que existe una solución de este tipo en un teoría descrita por la acción

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \nabla^a \phi \nabla_a \phi - V(\phi) \right] \quad (3.3)$$

donde $\phi = \phi(r)$ es real y $V(\phi)$ es no negativo. La métrica del espacio-tiempo que generaría una de estas soluciones se puede escribir como

$$ds^2 = -\mu e^{-2\delta} dt^2 + \mu^{(-1)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.4)$$

donde $\mu(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r} > 0$. Como condición de frontera pediremos que en estas coordenadas la métrica sea regular en $r = 0$, de donde tenemos en particular que $\mu(0) = 0$. Para el campo escalar requerimos que $\phi(0) = cte$, $\phi'(0) = 0$ y que $\phi(\infty) = \phi'(\infty) = 0$ (de la ecuación de movimiento para el campo escalar 2.12 se sigue que si $\phi''(0)$ no diverge es necesario que $\phi'(0) = 0$).

De la ecuación 2.14 tenemos que

$$E(0) = \frac{1}{2}\mu\phi'^2(0) + U(0) = -V(0) \leq 0 \quad (3.5)$$

y la ecuación 2.17 se sigue satisfaciendo para esta configuración:

$$\frac{d}{dr}(Ee^{-\delta}) = -\frac{2}{r}\left(1 - \frac{3m}{2r}\right)e^{-\delta}\phi'^2 \leq 0. \quad (3.6)$$

Esto es, $Ee^{-\delta}$ es negativa en $r = 0$ y decreciente para toda $r \geq 0$. Pero esto es una contradicción ya que la función $Ee^{-\delta}$ debe ser nula en infinito para que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano. De aquí que el campo ϕ es constante y $T_{\mu}^{\nu} \equiv 0$ en todo el espacio-tiempo y, por lo tanto, no existe solución regular no trivial con estas condiciones de frontera.

Cuando se consideran campos escalares complejos, descritos por la acción

$$S_{\phi} = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R - (1/2) \nabla^{\alpha} \phi^{*} \nabla_{\alpha} \phi - V \right], \quad (3.7)$$

donde $V = V(|\phi|)$, existe una corriente conservada debido a que esta acción es invariante ante transformaciones del tipo

$$\phi \rightarrow \phi e^{-i\alpha} \quad (3.8)$$

como se puede comprobar fácilmente sustituyendo esta expresión en 3.7.

El teorema de Noether aplicado a la transformación 3.8 nos lleva a la ecuación de conservación

$$\nabla_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (3.9)$$

para la corriente

$$J^{\mu} = \frac{i\alpha}{2} \sqrt{-g} (\phi^{*} \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^{*}). \quad (3.10)$$

El número de partículas del sistema que determina J^{μ} es una cantidad conservada. Está dado por:

$$N = \int_{\Sigma_t} J^t d^3x = -\alpha\omega \int_{\Sigma_t} \frac{|\phi^2(\tau)| r^2 \sin\theta}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) e^{-\delta}} d^3x. \quad (3.11)$$

La última igualdad corresponde al caso esféricamente simétrico usando la métrica 3.4.

En [13] se demuestra que para un número fijo de partículas la configuración esféricamente simétrica del campo que minimiza la energía es $\phi(r, t) = \phi_0(r)e^{-i\omega t}$. Usando esta configuración para el campo se han encontrado soluciones numéricas regulares en teorías de campo escalar mínimamente acoplado, campo escalar mínimamente acoplado con campo electromagnético¹ (que es invariante ante la transformación 3.8) y para campo escalar no mínimamente acoplado (en esta sección seguiremos a [23], que hace una extensa revisión de estos resultados, en [31] se da un panorama general sobre la teoría de estrellas de bosones). En general, se emplea un potencial de autointeracción de la forma

$$V = m^2|\phi|^2 + \bar{\lambda}|\phi|^4. \quad (3.12)$$

A estas configuraciones que son mantenidas por su autointeracción gravitacional se les llama *estrellas de bosones* en analogía a las estrellas de neutrones.

La masa de ADM total M de una estrella de bosones se define asintóticamente por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} g^{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.13)$$

El comportamiento genérico de la masa total M y del número total de partículas N como funciones del valor inicial del campo $\phi_0(0)$ es el siguiente: Ambas cantidades crecen con $\phi_0(0)$ cuando es pequeño hasta alcanzar un valor máximo (no necesariamente simultáneo), después M y N decrecen, oscilan y tienden a un valor constante independiente de $\phi_0(0)$ cuando $\phi_0(0) \rightarrow \infty$. Cuando hay campo electromagnético se observa que al aumentar la carga e del campo la masa total M y el número de partículas N aumentan preservando el mismo comportamiento descrito arriba. Sin embargo, e debe ser menor que cierto valor crítico e_{crit} para que las soluciones sean regulares. Intuitivamente podemos argumentar que si $e > e_{crit}$ la repulsión Coulombiana entre las partículas es mayor que la atracción gravitacional. La energía de enlace del sistema, definida por $E_E = M - mN$, se vuelve positiva para un valor finito de la densidad central del campo mayor que el valor $\phi_c(0)$ que corresponde al máximo de la masa total.

¹Esta acción está dada por

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{R}{2\kappa} - (D^\mu \phi)^* D_\mu \phi - V(|\phi|) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}$$

donde $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ieA_\mu \phi$ es la derivada covariante de norma, e es la carga asociada al campo y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Faraday y A_ν el potencial electromagnético.

El caso no mínimamente acoplado también ha sido estudiado numéricamente. El comportamiento de la masa total y del número de partículas es similar al del las mismas cantidades en el caso mínimamente acoplado. Se encuentra que la energía de enlace para $\phi(0)$ fijo aumenta con el valor de $|\xi|$. Como vimos en la sección §2.2.2, en el caso no mínimamente acoplado se puede definir una constante gravitacional efectiva dada por

$$G_{\text{ef}} = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi\phi^2}.$$

Cuando $\xi < 0$ y el valor $\phi(0)$ del campo es muy cercano al valor para el cual $G_{\text{ef}} \rightarrow \infty$ el escalar de curvatura R diverge en el centro de la estrella produciendo una solución no física.

Cuando el campo escalar es real la acción no es invariante ante la transformación 3.8 y por lo tanto la teoría no tiene asociadas corrientes conservadas. En estos casos la teoría no puede admitir soluciones estáticas regulares. Sin embargo, cuando se propone un campo real que depende del tiempo $\phi = \phi(\tau, t)$ es posible construir soluciones regulares no estáticas (la métrica de estos espacio-tiempos debe depender de la coordenada temporal) que son periódicas en el tiempo, a éstas se les llama *estrellas de bosones oscilantes*.

Las estrellas de bosones resultan ser estables ante perturbaciones radiales para cierto rango del parámetro $\phi(0)$. Cuando se consideran perturbaciones radiales infinitesimales de soluciones de equilibrio que preservan el número total de partículas, soluciones con $\phi(0)$ menor que el valor $\phi_c(0)$ que produce la masa total máxima son soluciones en equilibrio estable mientras que si $\phi_c(0) < \phi(0)$ su equilibrio es inestable. En [26] se obtienen resultados sobre la estabilidad de las estrellas de bosones mediante el uso de la teoría de sistemas dinámicos en lugar de la tradicional teoría de perturbaciones.

También existen soluciones de sistemas mixtos de bosones y fermiones, en particular, neutrones descritos por una ecuación de estado. Se considera que los bosones y fermiones sólo actúan entre sí gravitacionalmente. En estos casos, el comportamiento de la masa total y del número de partículas es cualitativamente análogo al de las estrellas que sólo están formadas por bosones o sólo por fermiones, esto es, tienen un máximo como funciones del valor central del campo después del cual decrecen y tienden a un valor asintótico. Las soluciones ahora están parametrizadas por las densidades centrales de ambos campos.

Las estrellas de bosones y en general la materia que está asociada a campos escalares han sido consideradas como posibles candidatas de la materia

oscura. De aquí que el resultado del eventual colapso de una estrella de bosones resulte de interés.

§3.2 Un teorema de no pelo

Consideremos un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano que contiene un agujero negro con horizonte regular. Como ya vimos en la sección §2.1.2 podemos encontrar coordenadas de manera que la métrica para el exterior del agujero negro se exprese de la forma:

$$ds^2 = -\mu e^{-2\delta} dt^2 + \mu^{(-1)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.14)$$

donde $\mu(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r}$, $\delta = \delta(r)$ y $m = m(r)$. Dado que el espacio-tiempo debe ser asintóticamente plano las funciones m y δ tienden a un valor finito cuando $r \rightarrow \infty$. La condición de que el horizonte, que se presenta en $r = r_H$ sea regular es que $m(r_H) = r_H/2$ y que $m(r) < r/2$ para toda $r > r_H$ y que la función δ tome un valor finito en el horizonte. Recordemos que $\mu(r_H) = 0$.

Supondremos que en este espacio-tiempo existe materia cuyo tensor de energía momento T_{ab} satisface la condición de energía débil (WEC). Como vimos en la sección §1.2.2 esto implica que la densidad de materia:

$$\rho \equiv -T_t^t \geq 0. \quad (3.15)$$

En espacios-tiempos estáticos y esféricamente simétricos el tensor de energía-momento asociado a la presencia de materia sólo tiene a las componentes $T_t^t, T_r^r, T_\theta^\theta, T_\varphi^\varphi$ distintas de cero; además $T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi$ en todo el espacio-tiempo. Recordemos de la sección §1.2.2 que la condición 3.15 implica

$$T_r^r, T_\theta^\theta, T_\varphi^\varphi \geq T_t^t. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones de Einstein $G_\nu^\mu = 8\pi T_\nu^\mu$ para la métrica 3.29 resultan en las siguientes ecuaciones para las funciones μ y δ :

$$\mu' = 8\pi r T_t^t + (1 - \mu)/r \quad (3.17)$$

$$\delta' = (4\pi r/\mu)(T_t^t - T_r^r), \quad (3.18)$$

donde ' denota derivada respecto a r .

La ecuación de conservación $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$ para configuraciones esféricamente simétricas y estáticas sólo tiene una componente no trivial, a saber:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu T^\mu_r &= \partial_\mu T^\mu_r - \Gamma^\rho_{\mu r} T^\mu_\rho + \Gamma^\mu_{\mu\rho} T^\rho_r \\ &= T^r_r' - \left(\frac{\mu}{2\mu} - \delta'\right)[T^t_t - T^r_r] - \frac{1}{r}[2T^\theta_\theta - 2T^r_r] = 0.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Usando las ecuaciones de Einstein 3.17 y 3.18 de esta ecuación se puede obtener:

$$e^\delta (e^{-\delta} T^r_r)' = \frac{1}{2\mu r} [(1 + \mu)(T^t_t - T^r_r) + 2\mu(4T^\theta_\theta - T)], \quad (3.20)$$

donde

$$T = T^t_t + T^r_r + 2T^\theta_\theta$$

es la traza de T^ν_μ .

La distancia propia radial x definida por $dx = \mu^{-1/2} dr$ es una buena coordenada en vecindades del horizonte; expresamos la ecuación 3.20 en términos de x :

$$\frac{d}{dx} (e^{-\delta} T^r_r) = \frac{1}{2r} [\mu^{-1/2} (T^t_t - T^r_r) + \mu^{1/2} \{T^t_t - T^r_r + 2(4T^\theta_\theta - T)\}]. \quad (3.21)$$

Para que soluciones de las ecuaciones de Einstein sean físicamente aceptables el escalar que se genera al contraer $T_{\mu\nu}$ consigo mismo:

$$T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = (T^t_t)^2 + (T^r_r)^2 + 2(T^\theta_\theta)^2$$

debe ser regular para todo $r \geq r_H$, en particular en el horizonte; divergencia de cualquiera de estas componentes implicaría la divergencia del escalar $G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$. De aquí que cada una de las componentes mixtas T^ν_μ son regulares en el horizonte (esto no se cumple necesariamente para las componentes de $T_{\mu\nu}$). Entonces, el lado derecho de la ecuación 3.21 debe permanecer finito cuando nos acercamos a $r = r_H$. Como $\mu(r_H) = 0$ esto sucede si y sólo si

$$T^r_r(r_H) = T^t_t(r_H) = -\rho(r_H) \leq 0. \quad (3.22)$$

Este resultado lo habían obtenido previamente Quevedo, Núñez y Sudarsky en [32].

Por comodidad llamemos $E = e^{-\delta} T^r_r$ y notemos que por la ecuación 3.22 $E(r_H) \leq 0$. Como el espacio-tiempo es asintóticamente plano las soluciones

correspondientes a los campos de materia deben ser tales que las componentes del tensor de energía momento deben de anularse en el infinito, entonces, para algún $r_0 \geq r_H$ $E'(r_0) > 0$. Ahora bien, *supongamos* que las presiones radiales y angulares satisfacen

$$T_\theta^\theta = T_\theta^\theta \leq T_r^r \quad (3.23)$$

para todo $r \geq r_H$.

De la ecuación 3.20 tenemos:

$$\begin{aligned} e^\delta (e^{-\delta} T_r^r)' &= \frac{1}{2\mu r} [\mu(4T_\theta^\theta - 3T_r^r - T_t^t) - (T_r^r - T_\theta^\theta)] \\ &= \frac{1}{2\mu r} [\mu(T_\theta^\theta - T_t^t - 3T_r^r + 3T_\theta^\theta) - T_\theta^\theta + T_t^t - T_r^r - T_\theta^\theta] \\ &\equiv \frac{1}{2\mu r} [(\mu - 1)(T_\theta^\theta - T_t^t) - (1 + 3\mu)(T_r^r - T_\theta^\theta)]. \quad (3.24) \end{aligned}$$

De esta última expresión tenemos que WEC y la condición 3.23 implican que $E'(r_H) \leq 0$ en toda la región exterior $r \geq r_H$ del agujero negro pues $(1 + 3\mu) > 0$ y $\mu - 1 = -\frac{2m}{r} < 0$. Pero requeríamos $E'(r_0) > 0$, de aquí que la única solución posible es que $E \equiv 0$ y en particular $T_r^r \equiv 0$ en el exterior del agujero negro. De 3.24 tenemos entonces que $T_\theta^\theta - T_t^t = 0$ y $T_r^r - T_\theta^\theta = 0$ para todo $r \geq r_H$ de donde se ve que en esta región todas las componentes mixtas del tensor de energía-momento son nulas:

$$T_r^r \equiv T_\theta^\theta \equiv T_t^t \equiv 0.$$

Por la unicidad de las soluciones estáticas, esféricamente simétricas y asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein en el vacío este espacio tiempo debe de corresponder a la solución de Schwarzschild.

Hemos demostrado el siguiente [34]:

Teorema 3.1 *Un espacio-tiempo estático, esféricamente simétrico y asintóticamente plano que contiene un agujero negro con horizonte regular no extremo y que satisface las ecuaciones de Einstein acopladas a campos de materia que satisfacen las condición de energía débil (WEC) y la condición:*

$$T_\theta^\theta \leq T_r^r \quad (3.25)$$

en el exterior del agujero negro es necesariamente trivial. Esto es, T_μ^ν es idénticamente nulo y el espacio-tiempo corresponde a la solución de Schwarzschild.

§3.3 Campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad

Ahora vamos a aplicar el teorema anterior a una acción que describe una teoría que consiste de una superposición de campos escalares ϕ_i complejos mínimamente acoplados a la gravedad:

$$S = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R - (1/2) \sum_i \nabla^a \phi_i^* \nabla_a \phi_i - V \right], \quad (3.26)$$

supondremos que el potencial $V = V(|\phi_i|)$ $i = 1, \dots$ es no negativo.

Como se demuestra en el apéndice A, el tensor de energía-momento asociado al campo escalar que se deriva de la acción 3.26 es:

$$T_{ab} = \sum_i \nabla_a \phi_i^* \nabla_b \phi_i - g_{ab} \left(\sum_i \frac{1}{2} \nabla^c \phi_i^* \nabla_c \phi_i + V \right) \quad (3.27)$$

La ecuación de movimiento para cada uno de estos campos resulta:

$$\nabla^a \nabla_a \phi_i = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}. \quad (3.28)$$

Consideremos un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico que contiene un agujero negro. Para el exterior del agujero negro proponemos la métrica que usamos en la sección anterior:

$$ds^2 = -\mu e^{-2\delta} dt^2 + \mu^{(-1)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.29)$$

Para calcular las componentes mixtas T_ν^μ tenemos:

$$\begin{aligned} T_\nu^\mu &= g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \sum_i (\nabla_\sigma \phi_i^* \nabla_\nu \phi_i + \nabla_\sigma \phi_i \nabla_\nu \phi_i^*) \\ &\quad - \delta_\nu^\mu \left(\sum_i \frac{1}{2} \nabla^\sigma \phi_i^* \nabla_\sigma \phi_i + V \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Supondremos que cada campo escalar es de la forma

$$\phi(\tau, t)_{(j)} = \phi_i(\tau) e^{-i\omega_j t}, \quad (3.31)$$

entonces tenemos que

$$\sum_i \nabla^\sigma \phi_i^* \nabla_\sigma \phi_i = g^{\sigma\mu} \sum_i \nabla_\mu \phi_i^* \nabla_\sigma \phi_i = \sum_i \left(-\frac{\omega_i^2}{\mu e^{-2\delta}} \phi_i^2 + \mu \phi_i'^2 \right). \quad (3.32)$$

Para simplificar la notación definimos las siguientes funciones:

$$A \equiv \frac{1}{2\mu e^{-2\delta}} \sum_i \omega_i^2 \phi_i^2 \quad (3.33)$$

$$K \equiv \frac{1}{2\mu} \sum_i \phi_i'^2 \quad (3.34)$$

que son positivas semidefinidas al menos en el exterior del agujero negro ($r \geq r_H$). En términos de éstas las componentes de T_μ^ν resultan ser:

$$T_t^t = -A - K - V, \quad (3.35)$$

$$T_r^r = A + K - V, \quad (3.36)$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = A - K - V. \quad (3.37)$$

Notemos que de acuerdo a esto el tensor T_μ^ν tiene entradas reales y además resulta ser estático. Estas componentes satisfacen las condiciones del teorema de la sección §3.2, en efecto, satisfacen WEC:

$$\rho = -T_t^t = A + K + V \geq 0$$

y la condición 3.25 para las presiones:

$$T_r^r - T_\theta^\theta = 2K \geq 0.$$

Entonces *no existen agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos bajo la presencia de campos escalares que tienen una dependencia armónica de la coordenada temporal.*

§3.4 Campo escalar no mínimamente acoplado a la gravedad

Consideraremos ahora que el campo no está mínimamente acoplado a la gravedad y que su acople es del tipo:

$$S = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \xi |\phi|^2 R - (1/2) \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right]. \quad (3.38)$$

Mantenemos la misma condición para el potencial $V = V(|\phi|) \geq 0$.

Como está demostrado en el apéndice, el tensor de energía-momento asociado al campo no mínimamente acoplado es

$$T_{ab} = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi|\phi|^2} [2\xi T_{ab}^{(\xi)} + T_{ab}^{(min)}], \quad (3.39)$$

donde

$$T_{ab}^{(\xi)} = \nabla_a \nabla_b |\phi|^2 - g_{ab} \nabla^c \nabla_c |\phi|^2 \quad (3.40)$$

$$T_{ab}^{(min)} = \nabla_a \phi^* \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla^c \phi^* \nabla_c \phi + V \right). \quad (3.41)$$

Notemos que el término 3.41 corresponde al tensor de energía-momento del campo escalar mínimamente acoplado. La ecuación de movimiento del campo (ver el apéndice) se escribe

$$\nabla^a \nabla_a \phi + 2\xi R \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.42)$$

Vamos a efectuar una transformación conforme de la métrica:

$$g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \quad (3.43)$$

con factor conforme

$$\Omega^2 = \frac{1}{1 + 2\kappa\xi|\phi|^2}. \quad (3.44)$$

La norma de campos escalares del tipo $\phi(r, t) = \phi(r)e^{-i\omega t}$ no depende de la coordenada temporal (la asociada al campo de Killing estacionario) y es esféricamente simétrica. Como el factor conforme depende únicamente de la norma del campo el espacio-tiempo (M, \tilde{g}_{ab}) posee las mismas simetrías que (M, g_{ab}) .

Queremos expresar en términos de la nueva métrica \tilde{g}_{ab} a la acción 3.38. De manera análoga a como se obtuvo la acción $S[\tilde{g}_{ab}]$ en el caso en el que el campo era real llegamos a:

$$S[\tilde{g}_{ab}] = \int_M \left[\frac{1}{2\kappa} \tilde{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{-24\kappa\xi^2|\phi|^2}{(1 + 2\kappa\xi|\phi|^2)^2} \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a |\phi| \tilde{\nabla}_c |\phi| \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{1 + 2\kappa\xi|\phi|^2} \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a \phi^* \tilde{\nabla}_c \phi - \tilde{V} \right] \sqrt{(-\tilde{g})} d^4x \quad (3.45)$$

donde $\tilde{V}(|\phi|) = \Omega^4(|\phi|) V(|\phi|)$.

Al hacer una transformación conforme de la métrica cuando el campo es complejo en el integrando de la acción aparece un término que sólo depende de $|\phi|$. En este caso no es trivial encontrar un nuevo campo $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(\phi)$ tal que la acción 3.45 corresponda a la acción del campo $\tilde{\phi}$ mínimamente acoplado a la gravedad. Sin embargo, en esta nueva acción 3.45 el acople del campo original ϕ es mínimo y presenta también un potencial \tilde{V} de autointeracción no negativo. Usando la ecuación 1.23 para la densidad lagrangiana de materia

$$\Lambda^{(\tilde{g})} = -\sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2} \frac{-24\kappa\xi^2|\phi|^2}{(1+2\kappa\xi|\phi|^2)^2} \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a |\phi| \tilde{\nabla}_c |\phi| + \frac{1}{1+2\kappa\xi|\phi|^2} \tilde{g}^{ac} \tilde{\nabla}_a \phi^* \tilde{\nabla}_c \phi \right] - \tilde{V} \quad (3.46)$$

obtenemos el tensor de energía-momento de este sistema:

$$\Omega^{-2} T_{ab}^{(\tilde{g})} = -\tilde{g}_{ab} \left[\frac{1}{2} (24\kappa\xi^2|\phi|^2) \Omega^2 \tilde{g}^{cd} \tilde{\nabla}_c |\phi| \tilde{\nabla}_d |\phi| + \frac{1}{2} \Omega^2 \tilde{g}^{cd} \tilde{\nabla}_c \phi^* \tilde{\nabla}_d \phi + \Omega^{-2} \tilde{V} \right] + 24\kappa\xi^2|\phi|^2 \Omega^2 \tilde{\nabla}_a |\phi| \tilde{\nabla}_b |\phi| + \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_a \phi^* \tilde{\nabla}_b \phi + \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi^*). \quad (3.47)$$

De aquí podemos calcular las componentes mixtas del tensor de energía-momento T_a^b :

$$T_a^b(\tilde{g}) = \tilde{g}^{bc} T_{ca}^{(\tilde{g})} = 24\kappa\xi^2|\phi|^2 \Omega^4 \left[-\frac{1}{2} \delta_a^b \tilde{\nabla}^d |\phi| \tilde{\nabla}_d |\phi| + \tilde{\nabla}^b |\phi| \tilde{\nabla}_a |\phi| \right] + \Omega^2 \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{ac} (\tilde{\nabla}_c \phi^* \tilde{\nabla}_b \phi + \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}_b \phi^*) - \delta_a^b \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^d \phi^* \tilde{\nabla}_d \phi + \frac{1}{2} \tilde{V} \right) \right]. \quad (3.48)$$

Observemos que el último término del lado derecho de la ecuación anterior corresponde al tensor de energía-momento de un campo escalar mínimamente acoplado a la gravedad, ecuación 3.30.

Buscamos soluciones de las ecuaciones de Einstein acopladas a materia descrita por un campo no mínimamente acoplado a la gravedad de la forma:

$$\phi(r, t) = \phi(r) e^{-i\omega t}$$

y que describan espacio-tiempos que contienen agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, descritos por la métrica 3.29. En términos de los componentes de esta métrica cada una de las componentes de 3.48 son:

$$T_t^t(\tilde{g}) = -\Omega^2 [12\kappa\xi^2|\phi|^2 \Omega^2 \mu \phi'^2 + A + K + \frac{1}{2} \tilde{V}] \quad (3.49)$$

$$T_r^r(\bar{g}) = \Omega^2[12\kappa\xi^2|\phi|^2\Omega^2\mu\phi'^2 + A + K - \frac{1}{2}\bar{V}] \quad (3.50)$$

$$T_\theta^\theta(\bar{g}) = T_\varphi^\varphi(\bar{g}) = \Omega^2[-12\kappa\xi^2|\phi|^2\Omega^2\mu\phi'^2 + A - K - \frac{1}{2}\bar{V}] \quad (3.51)$$

Este campo de materia satisface WEC:

$$\bar{\rho} \equiv -T_t^t(\bar{g}) \geq 0$$

y la condición 3.25 para las presiones:

$$T_r^r(\bar{g}) - T_\theta^\theta(\bar{g}) = \Omega^2[24\kappa\xi^2|\phi|^2\Omega^2\mu\phi'^2 + 2K] \geq 0$$

siempre y cuando la transformación conforme sea válida, esto es, en la región

$$0 < \Omega^2 < \infty.$$

En particular, $\Omega^2 \neq 0$ si el campo (en nuestro caso su norma) es finito en todo punto,

$$\phi(r) < \infty \quad \forall r \geq r_H.$$

Si el campo satisface su ecuación de movimiento 3.42 en todo el exterior del agujero negro garantizamos esta situación pues debe estar bien definido para todo punto. Si $\xi > 0$ es claro que $1 + 2\kappa\xi\phi^2 > 0$. Entonces, de acuerdo al teorema 3.1 *no existen agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en una teoría descrita por la acción 3.38 con campo escalar $\phi(r, t) = \phi(r)e^{-i\omega t}$ que satisface su ecuación de movimiento en todo el exterior del agujero negro cuando la constante de acople $\xi > 0$.*

Cuando $\omega = 0$ este resultado se reduce al de Bekenstein y Mayo. Actualmente queremos estudiar el caso en el que los valores de ξ son negativos pero sin suposiciones *extras* como serían las condiciones de causalidad de Bekenstein, con las que se descartó cierto rango para $\xi < 0$ en el caso estacionario $\omega = 0$.

§3.5 El teorema de no "pelo" en otros casos

En esta sección queremos discutir la posible aplicación del teorema 3.1 a un par de casos. El primero consiste en una teoría de campo electromagnético y

de campo escalar no acoplados entre sí, la acción para esta teoría está dada por

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2\kappa} - \nabla^a \phi \nabla_a \phi - V(|\phi|) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (3.52)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ es el tensor de Faraday y A_ν el potencial electromagnético.

En este caso $T_{ab} = T_{ab}^{(em)} + T_{ab}^{(\phi)}$ y como los campos escalar y electromagnético no están acoplados se satisfacen independientemente las ecuaciones de conservación

$$\nabla_a T_b^{a (em)} = 0, \quad (3.53)$$

$$\nabla_a T_b^{a (\phi)} = 0. \quad (3.54)$$

El espacio-tiempo lo describiremos por la métrica de agujero negro estático y esféricamente simétrico que ya es usual:

$$ds^2 = -\mu e^{-2\delta} dt^2 + \mu^{(-1)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (3.55)$$

Usando esta métrica y suponiendo que $A_\mu = (A(r), 0, 0, 0)$ se encuentra que

$$T_t^{t (em)} = T_r^{r (em)} = -T_\theta^{\theta (em)} = -T_\varphi^{\varphi (em)} = -\frac{A'^2 e^{2\delta}}{8\pi} \leq 0. \quad (3.56)$$

Primero notemos que si no tenemos campo escalar (basta con que $\dot{\phi} \equiv cte$), $T_b^{a (\phi)} = 0$, las ecuaciones de Einstein tienen una solución de agujero negro estático y esféricamente simétrico: la solución de Reissner-Nordstrom. Es por esto que el tensor de energía-momento del campo electromagnético no puede satisfacer las condiciones del teorema. En efecto, este campo sí satisface WEC pero

$$T_\theta^{\theta (em)} - T_r^{r (em)} = 2 \frac{A'^2 e^{2\delta}}{8\pi} \geq 0,$$

lo que contradice la condición 3.25.

Cuando el campo escalar no es nulo el tensor de energía-momento total sí satisface WEC pero tenemos

$$T_\theta^{\theta} - T_r^r = -\mu \phi'^2 + 2 \frac{A'^2 e^{2\delta}}{8\pi}.$$

No es directo garantizar que esta expresión sea menor o igual a cero (pedir esto nos lleva a una relación entre las derivadas de ϕ , A y los coeficientes

de la métrica). Podemos intentar ir un poco más adelante para obtener sólo una condición para las componentes de $T_b^{a(em)}$. Para esto, a partir de 3.54 calculamos

$$\begin{aligned} e^\delta (e^{-\delta} T_r^r(\phi))' &= \quad (3.57) \\ &= \frac{1}{2\mu r} [(\mu - 1)(T_\theta^\theta(\phi) - T_t^t(\phi)) - (1 + 3\mu)(T_r^r(\phi) - T_\phi^\phi)] \\ &\quad - 8\pi r^2 (T_t^t(em) T_r^r(\phi) - T_t^t(\phi) T_r^r(em)) \end{aligned}$$

El último término de esta expresión, que incluye componentes del tensor de energía-momento electromagnético es positivo (de acuerdo a 3.56 y a que el campo escalar satisface WEC) por lo que una construcción como la que nos llevó a demostrar el teorema 3.1 no sirve para analizar este caso.

Por otro lado, ahora veamos que pasa si conocemos una solución exacta de las ecuaciones de Einstein. Sólo como un ejemplo tomaremos la solución dada en [1] para la acción:

$$S = \int \sqrt{(-g)} \left[\frac{1}{2\kappa} R + (1/2) \nabla^a \phi \nabla_a \phi \right]. \quad (3.58)$$

Notemos que tenemos un signo positivo en el lagrangiano de campo escalar. Una solución exacta estática y esféricamente simétrica para las ecuaciones de Einstein correspondientes a esta acción está dada por el campo escalar

$$\phi(r) = \frac{1}{\kappa} \left[B \pm \sqrt{2} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{C}{r} \right) \right] \quad (3.59)$$

donde B y C son constantes de integración y la métrica:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C^2}{r^2}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.60)$$

Esta métrica no corresponde a un agujero negro pues no presenta un horizonte de Killing. Los escalares formados con el tensor de Riemann presentan una singularidad en $r = 0$, por ejemplo, el escalar de curvatura

$$R = -2 \frac{C^2}{r^4}.$$

Notemos también que el campo de Killing estacionario $\frac{\partial}{\partial t}$ tiene norma constante.

Las componentes mixtas del tensor de energía momento están dadas por

$$T_t^t = -T_r^r = T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = \frac{C^2}{\kappa^4 r^4} \quad (3.61)$$

Notemos que $T_r^r < 0$ para todo $r > 0$ y que esta solución no satisface WEC. En la demostración del teorema usábamos WEC para garantizar que para algún r_0 (el del horizonte) $T_r^r(r_0) < 0$; esta solución satisface este requerimiento automáticamente. Ahora, tenemos

$$T_\theta^\theta - T_t^t = 0$$

y

$$T_r^r - T_\theta^\theta = -2 \frac{C^2}{\kappa^4 r^4} < 0$$

por lo que, de acuerdo a la ecuación 3.24 se tiene que

$$\frac{d}{dr}(e^{-\delta} T_r^r) \geq 0$$

para toda $r > 0$.

Esta expresión es contraria a la que se pide en el teorema. La componente T_r^r tiene el comportamiento correcto para que la solución sea asintóticamente plana y no se presenta ninguna contradicción.

Comentarios finales

Ante las nuevas soluciones de agujero negro encontradas durante esta década es claro que la "conjetura de no cabello" necesita ser reformulada. De cualquier forma, parece ser que para agujeros negros estáticos con simetría esférica en teorías de campo escalar esta conjetura podría ser válida. El único contraejemplo que se conocía es el agujero negro BMBB pero ya hemos mencionado por qué no se puede considerar una solución de agujero negro. Para campos escalares reales y estacionarios mínimamente acoplados la conjetura es cierta. Cuando el campo es real y no mínimamente acoplado hemos visto que si el coeficiente del escalar de curvatura que aparece en la acción es positivo no existen nuevas soluciones de agujeros negros. De este teorema concluimos que para el acople usual cuando $\xi > 0$ tampoco se encuentran nuevas soluciones. Para campo conforme ($\xi = -\frac{1}{12}$ y sin potencial) tenemos un teorema de "no pelo" debido a Zannias. Para valores $\xi < 0$ diferentes al que produce el caso conforme sólo existen las demostraciones de Bekenstein y Mayo que, como ya discutimos, presentan problemas. Para estos casos hace falta una demostración con mayor precisión y que sólo dependa del comportamiento del campo y de la métrica (de acuerdo a la ecuación del campo y a la de Einstein) y no de consideraciones externas al sistema.

Pero de acuerdo a los resultados del capítulo 3 podemos generalizar la conjetura a campos escalares complejos del tipo $\phi(r)e^{-i\omega t}$. En el caso mínimamente acoplado la conjetura es cierta y en el caso no mínimamente acoplado cuando la constante de acople ξ es positiva también hemos demostrado su validez. Logramos ésto bajo la suposición de que el campo permanezca finito en el exterior del agujero negro y aunque hay evidencias de que divergencias del campo producen comportamientos anómalos en las soluciones (como sucedió con el agujero negro BMBB [43]) hace falta probar explícitamente que el campo no diverge. El caso $\xi > 0$ es directo pues mediante una transformación conforme siempre se puede transformar la acción a

una de campo mínimamente acoplado.

En suma, aún se necesita demostrar que no hay "cabello" escalar no mínimamente acoplado para valores negativos de ξ . Esta demostración no parece ser tan directa como para el caso $\xi > 0$. Las demostraciones que presentamos en este trabajo se aplican a agujeros negros con horizonte no extremo, vale la pena considerar la generalización de todos estos resultados a agujeros con horizonte extremo.

Pero, ¿por qué los agujeros negros no presentan "cabello" escalar? Podemos asegurar que, en efecto, no se generan nuevos agujeros negros al considerar campos escalares pero no somos capaces de explicar qué es exactamente lo que impide que estos campos coexistan con agujeros negros. De hecho, uno quisiera poder determinar *a priori* si cierta teoría admite o no soluciones de agujero negro. Al menos, como hemos probado en el capítulo 3, no es suficiente que la teoría también admita soluciones regulares. En este sentido todavía hace falta mucho por hacer.

Referencias

- [1] P. Baekler, E. W. Mielke, R. Hecht, and F. W. Hehl. Kinky torsion in a Poincare gauge model of gravity coupled to a massless scalar field. *Nucl. Phys. B*, 288:800-812, 1987.
- [2] R. Bartnik and J. McKinnon. *Phys. Rev. Lett.*, 61:141, 1988.
- [3] J. D. Bekenstein. *Ann. Phys. (NY)*, 82:535, 1974.
- [4] J. D. Bekenstein. *Ann. Phys. (NY)*, 91:72, 1975.
- [5] J.D. Bekenstein. Non existence of baryon number for static black holes. *Phys. Rev. D*, 5:1239-1246, 1972.
- [6] P. Bizon. Colored black holes. *Phys. Rev. Lett*, 64:2844-2847, 1990.
- [7] P. Bizon and T. Chmaj. *Phys. Lett*, B297:55, 1992.
- [8] N. Bocharova, K. Bronnikov, and V. Melnikov. *Vestn. Mosk. Univ. Fiz. Atron.*, 6:706, 1970.
- [9] G. L. Bunting. *Proof of the Uniqueness Conjecture for Black Holes*. PhD thesis, University of New England, 1983.
- [10] B. Carter. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Phys. Rev. Lett.*, 26:331-332, 1971.
- [11] B. Carter. In C. De Witt and B.S. de Witt, editors, *Black Holes*. Gordon and Breach, 1973.
- [12] S. Droz, M. Heusler, and N. Straumann. New black hole solutions with hair. *Phys. Lett*, B268:371-376, 1991.

- [13] R. Friedberg, T. D. Lee, and Y. Pang. Mini-soliton stars. *Phys. Rev. D*, 35:3640–3657, 1987.
- [14] B.R. Greene, S.D. Mathur, and C.M. O'Neill. Eluding the no-hair conjecture: Black holes in spontaneously broken gauge theory. *Phys. Rev.*, D47:2242–2259, 1993.
- [15] J.B. Hartle. Can a Schwarzschild black hole exert long-range neutrino forces? In J. Klauder, editor, *Magic without magic*. Freeman, San Francisco, 1972.
- [16] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [17] F.W. Hehl, J.D. McCrea, E.W. Mielke, and Y. Ne'eman. Metric-affine gauge theory of gravity: Field equations, noether identities, world spinors and breaking of dilaton invariance. *Phys. Rep.*, 258, 1995.
- [18] M. Heusler. A no-hair theorem for self-gravitating nonlinear sigma models. *J. Math. Phys.*, 33:3497–3502, 1992.
- [19] Markus Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Number 6 in Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [20] W. Israel. *Phys. Rev.*, 164:107–110, 1967.
- [21] W. Israel. Event horizons in static electrovac space-times. *Commun. Math. Phys.*, 8:245–260, 1968.
- [22] Bekenstein J. D. Black-hole hair: twenty-five years after. *Racah Inst. of Phys. preprint*, 1996.
- [23] P. Jetzer. Boson stars. *Phys. Rep.*, 220:165–227, 1992.
- [24] D. J. Kaup. Klein-Gordon geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968.
- [25] H.P. Künzle and A.K.M. Masood ul Alam. Spherically symmetric static $SU(2)$ Einstein-Yang-Mills fields. *J. Math. Phys.*, 31:928–935, 1990.
- [26] F. V. Kusmartsev, E. W. Mielke, and F. E. Schunck. Gravitational stability of boson stars. *Phys. Rev.*, D43:3895–3901, 1991.

- [27] G. Lavrelashvili and D. Maison. Regular and black hole solutions of Einstein-Yang-Mills-Dilaton theory. *Nucl. Phys.*, B410:407-422, 1993.
- [28] A. E. Mayo and J. D. Bekenstein. No hair for spherical black holes: Charged and nonminimally coupled scalar field with self-interaction. *Phys Rev. D*, 54:5059, 1996.
- [29] E. W. Mielke. Conformal changes of metrics and the initial value problem of General Relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 8:321-345, 1977.
- [30] E.W. Mielke and R. Scherzer. Geon-type solutions of the nonlinear Heisenberg-Klein-Gordon equation. *Phys Rev*, D24, 1981.
- [31] E.W. Mielke and F.E. Schunck. Boson stars: Early history and recent prospects. In T. Piran, editor, *Proc. 8th M. Grossman Meeting*. World Scientific, 1998.
- [32] D. Núñez, H. Quevedo, and D. Sudarsky. Black holes have no short hair. *Phys. Rev. Lett*, 76:571, 1996.
- [33] Mazur P. O. Proof of uniqueness of the kerr-newman black hole solution. *J. Phys A*, 15:3173-3180, 1982.
- [34] I. Peña and D. Sudarsky. Do collapsed boson stars result in new types of black holes? *Class. Quantum. Grav.*, 14:3131, 1997.
- [35] I. Racz and R.M. Wald. Extensions of spacetimes with killing horizons. *Class. Quantum. Grav*, 9:2643, 1992.
- [36] Wolfgang Rindler. *Essential Relativity. Special, general and cosmological*. Springer Verlag, 2 edition, 1977.
- [37] D.C. Robinson. Uniqueness of the Kerr black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 34:695-698, 1975.
- [38] D.C. Robinson. *Gen Rel. Grav.*, 8:695-698, 1977.
- [39] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of self-gravitating particles in General Relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev*, 187:1767-1783, 1969.

- [40] A. Saa. New no-scalar-hair theorem for black holes. *J. Math. Phys.*, 37:2346-2351, 1996.
- [41] D. Sudarsky. A simple proof of a no-hair theorem in Einstein-Higgs theory. *Class. Quantum. Grav.*, 12:579, 1995.
- [42] D. Sudarsky and R. M. Wald. *Phys. Rev. D*, 47:R5209-R5213, 1993.
- [43] D. Sudarsky and T. Zannias. Spherical black holes cannot support conformal scalar hair. gr-qc/9712083, 1997.
- [44] C. Teitelboim. Nonmeasurability of the quantum numbers of a black hole. *Phys. Rev.*, D5:2941-2954, 1972.
- [45] M.S. Volkov and D.V. Gal'tsov. Non-abelian Einstein-Yang-Mills black holes. *JETP Lett.*, 50:346-350, 1989.
- [46] Robert M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago, Chicago, 1984.
- [47] B. C. Xanthopoulos and T. Zannias. The uniqueness of the Bekenstein black hole. *J. Math. Phys.*, 32:1875-1880, 1991.
- [48] T. Zannias. Black holes cannot support conformal scalar hair. *J. Math. Phys.*, 36:6970, 1995.
- [49] H. Muller zum Hagen, D.C. Robinson, and H.J. Seifert. *Gen. Rel. Grav.*, 4, 1973.

Apéndice A

Tensor de energía-momento y ecuación de movimiento del campo escalar acoplado a la gravedad

§A.1 Tensor de energía-momento

Vamos a obtener el tensor de energía-momento del campo escalar complejo ϕ a partir de variaciones de la métrica en la acción:

$$S = \int_M \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \xi |\phi|^2 R - (1/2) \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right] d^4 x. \quad (\text{A.1})$$

Donde ∇_a es el operador derivada asociado a la métrica g_{ab} , $\kappa = 8\pi G$, ϕ es el campo escalar y $V = V(|\phi|)$ es el potencial de autointeracción del campo.

Queremos encontrar una condición necesaria y suficiente para que variaciones de la acción δS sean nulas al hacer variaciones en la métrica δg_{ab} manteniendo el campo ϕ constante. Todas las integrales, excepto donde se indique son sobre toda la variedad M y para ahorrar espacio suprimiremos el $d^4 x$ de las integrales de volumen. Tenemos:

$$\delta S = \int \delta \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) R \right] + \int \delta \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V(\phi) \right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación lo podemos expandir de

la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int \delta \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) R \right] &= \int \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) [\sqrt{-g} \delta(g^{ab} R_{ab}) + R \delta \sqrt{-g}] \\ &= \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} \\ &\quad + \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) g^{ab} \delta R_{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Donde hemos usado que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g \delta g_{ab} g^{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \quad (\text{A.4})$$

Se puede demostrar que existe una forma v_a tal que (ver [46], pág 453)

$$g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla^a v_a = \nabla^a (\nabla^b (\delta g_{ab}) - g^{cd} \nabla_a (\delta g_{cd})). \quad (\text{A.5})$$

Integrando esta expresión, por el teorema de Gauss tenemos:

$$\int_M \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = \int_M \sqrt{-g} \nabla^a v_a = \int_{\partial M} v_a d\Sigma^a = 0, \quad (\text{A.6})$$

esta última integral es nula ya que estamos efectuando variaciones δg^{ab} que son nulas en la frontera de M . Por otro lado, usando

$$\nabla^a (|\phi|^2 v_a) = |\phi|^2 \nabla^a v_a + v_a \nabla^a |\phi|^2$$

y el teorema de Gauss para eliminar el término $\nabla^a (|\phi|^2 v_a)$ tenemos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-g} |\phi|^2 \nabla^a v_a &= - \int \sqrt{-g} v_a \nabla^a |\phi|^2 \\ &= - \int \sqrt{-g} \nabla_a |\phi|^2 [\nabla^b (\delta g_{ab}) - g^{cd} \nabla_a (\delta g_{cd})]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Notemos que

$$\nabla^b (\delta g_{ab}) \nabla^a |\phi|^2 = \nabla^b [\delta g_{ab} \nabla^a |\phi|^2] - \delta g_{ab} \nabla^a \nabla^b |\phi|^2; \quad (\text{A.8})$$

multiplicando esta expresión por g_{ab} obtenemos una ecuación análoga para $\nabla_a (\delta g_{cd}) \nabla^a |\phi|^2$. Sustituyendo A.8 en A.7, integrando y usando de nuevo

el teorema de Gauss se eliminan los términos correspondientes a las divergencias. Usando ésto obtenemos finalmente para la última integral de la expresión A.3:

$$\int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) g^{ab} \delta R_{ab} = \int \sqrt{-g} \xi [g_{ab} \nabla_c \nabla^c |\phi|^2 - \nabla_a \nabla_b |\phi|^2] \delta g^{ab}. \quad (\text{A.9})$$

El segundo término del lado derecho de la ec. A.2 corresponde a la variación de la acción de materia del campo mínimamente acoplado. Toda la contribución del acople no mínimo del campo escalar con la gravitación al tensor de energía-momento proviene de la ecuación A.9. Observemos que agrega derivadas del campo del tipo $\nabla_a(\phi \nabla_b \phi)$.

Para el último término de la ecuación A.2 tenemos:

$$\begin{aligned} \delta \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right) \right] &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} \nabla_a \phi^* \nabla_b \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g_{ab} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right) \right] \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Entonces, haciendo $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R$, la variación de la acción a primer orden, ecuación A.2 queda

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) G_{ab} + \xi (g_{ab} \nabla_c \nabla^c |\phi|^2 - \nabla_a \nabla_b |\phi|^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \nabla_a \phi^* \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right) \right] \delta g^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Esta variación es nula si y sólo si

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2\kappa} + \xi |\phi|^2 \right) G_{ab} &= \xi (\nabla_a \nabla_b |\phi|^2 - g_{ab} \nabla_c \nabla^c |\phi|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_a \phi^* \nabla_b \phi + \frac{1}{2} g_{ab} \left(-\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

que se puede expresar como

$$G_{ab} = \frac{\kappa}{1 + 2\kappa\xi|\phi|^2} \left[2\xi T_{ab}^{(\xi)} + T_{ab}^{(min)} \right] = \kappa T_{ab} \quad (\text{A.13})$$

donde

$$T_{ab}^{(\xi)} = \nabla_a \nabla_b |\phi|^2 - g_{ab} \nabla_c \nabla^c |\phi|^2 \quad (\text{A.14})$$

es la contribución al tensor de energía-momento asociada al acople no mínimo ($\xi \neq 0$), y

$$T_{ab}^{(min)} = \nabla_a \phi^* \nabla_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla^a \phi^* \nabla_a \phi - V \right). \quad (\text{A.15})$$

Cuando el acople es mínimo ($\xi = 0$) esta última expresión corresponde al tensor de energía-momento del campo escalar. Al término

$$\frac{1}{1 + 2\kappa\xi|\phi|^2}$$

se le interpreta como la constante gravitacional efectiva (ver la sección §2.2.2).

§A.2 Ecuación de movimiento del campo escalar complejo

La condición que hace que la variación a primer orden de la acción A.1 respecto a variaciones del campo manteniendo la métrica constante sea nula es la *ecuación de movimiento del campo*. Consideraremos variaciones independientes de la parte real $\delta\phi_1$ e imaginaria $\delta\phi_2$ del campo $\phi = \phi_1 + i\phi_2$.

Usando que

$$\nabla^a \phi^* \nabla_a \phi = \nabla^a \phi_1 \nabla_a \phi_1 + \nabla^a \phi_2 \nabla_a \phi_2$$

y aplicando el teorema de Gauss tenemos

$$\delta S = \int \sqrt{-g} [2\xi R(\phi_1 \delta_1 \phi_1 + \phi_2 \delta \phi_2) + \nabla^a \nabla_a \phi_1 \delta \phi_1 + \nabla^a \nabla_a \phi_2 \delta \phi_2 - \delta V]. \quad (\text{A.16})$$

El potencial es función de ϕ_1 y ϕ_2 , entonces

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial V}{\partial \phi_2} \delta \phi_2. \quad (\text{A.17})$$

La variación de la acción, ecuación A.16, la podemos escribir ahora como

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \sqrt{-g} \left[2\xi R \phi_1 + \nabla^a \nabla_a \phi_1 - \frac{\partial V}{\partial \phi_1} \right] \delta \phi_1 \\ & + \left[2\xi R \phi_2 + \nabla^a \nabla_a \phi_2 - \frac{\partial V}{\partial \phi_2} \right] \delta \phi_2 \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Como las variaciones $\delta\phi_1$ y $\delta\phi_2$ son independientes la variación δS será nula si y sólo si

$$\nabla^a \nabla_a \phi_i + 2\xi R \phi_i = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \quad (\text{A.19})$$

para $i = 1, 2$ simultáneamente, esto es, si:

$$\nabla^a \nabla_a \phi + 2\xi R \phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (\text{A.20})$$

que es la ecuación de movimiento del campo escalar.