12
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"SOBRE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A

MARÍA ELENA GÓMEZ PÉREZ

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. JUAN MORALES RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias
de la UNAM

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

SOBRE CONSTRUCCIONES GEOMETRICAS CON REGLA Y COMPAS

realizado por MARIA ELENA GOMEZ PEREZ

con número de cuenta 7286714-9 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Juan Morales Rodríguez	Juan Morales
Propietario	M. en C. Mary Glazman Nowalsky	Mary Glazman
Propietario	Dr. Emilio Lluis Puebla	Emilio Lluis Puebla
Suplente	M. en C. Ma. del Carmen Gómez Laveaga	
Suplente	Actuario Humberto Santillana Loyo	

Consejo Departamental de Matemáticas

MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

A mi ***Dios****:*

Porque Jehová da la sabiduría

y de su boca viene

el conocimiento y la inteligencia

Prov. 2.6

PREFACIO

En el presente trabajo se hacen construcciones elementales con regla y compás, se construyen, con regla y compás, polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 10, 15 y 17 lados, se demuestra la imposibilidad de resolver con regla y compás los problemas clásicos griegos de la duplicación del cubo, de la cuadratura del círculo, y el de la trisección de un ángulo, que consisten respectivamente en construir con regla y compás un cubo de volumen el doble al de un cubo dado, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado y trisectar un ángulo dado. También se da una solución a estos problemas usando otras herramientas.

Se han incluido cuatro apéndices. En los tres primeros se comenta sobre el posible origen de los problemas clásicos griegos y se mencionan algunos matemáticos griegos que intentaron resolverlos, o que propusieron diversas formas de cómo resolver estos problemas. Para la elaboración de estos apéndices se consultó [4], [8], [9], [14], y [16]. En el cuarto apéndice se hace una breve reseña histórica de la vida y obra del matemático Karl Friedrich Gauss, ya que fue él quien dió una caracterización de los polígonos regulares que son construibles con regla y compás. El material de este apéndice se tomó de [1] y [17].

El contenido de esta tesis está presentado de tal forma que pueda ser consultado tanto por estudiantes de licenciatura, así como por estudiantes de bachillerato. Además intenta proporcionar a los interesados en el tema un conocimiento que va más allá de lo elemental, sin abrumarlo con teoría excesiva.

Agradezco especialmente al Dr. Juan Morales Rodríguez por haberme asesorado en el desarrollo de este trabajo, así como también por su paciencia y dedicación. También agradezco a la M. en C. Mary Glazman Nowalski, a la M. en C. Ma. del Carmen Gómez Laveaga, al Dr. Emilio Lluis Puebla, y al Actuario Humberto Santillana Loyo por los comentarios y valiosas sugerencias que me hicieron al revisar este trabajo y que hicieron posible el mejoramiento del mismo.

Al Colegio de Ciencias y Humanidades (Plantel Oriente) de la Universidad Nacional Autónoma de México le agradezco el apoyo brindado al haberme dado el tiempo necesario para elaborar este trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN

En las construcciones geométricas con regla y compás, la regla es un instrumento con el cual sólo se pueden trazar rectas que pasen por puntos dados del plano, y el compás es un instrumento con el que sólo se puede trazar circunferencias que tienen su centro en un punto dado y cuyo radio es la distancia entre dos puntos dados del plano.

Con estas restricciones se puede construir el punto medio de un segmento, ó dividir un segmento dado en n partes iguales, trazar la bisectriz de un ángulo, trazar una paralela a una recta dada por un punto exterior dado, se pueden construir segmentos de longitud $p + q$, $p - q$ $(p > q)$, $p\,q$ y p / q, si los segmentos de longitud p y q son dados o son construibles; también se puede inscribir en una circunferencia un pentágono regular, etc.

Los antiguos geómetras griegos desarrollaron construcciones de ciertos polígonos regulares usando solamente regla y compás. Dichas construcciones se basan en la construcción del cuadrado, del triángulo equilátero y del pentágono regular. Por ejemplo, la construcción del polígono regular de 15 lados fue obtenida por medio de una combinación de construcciones del triángulo y pentágono, un octágono regular fue construido, a partir de un cuadrado, bisectando ángulos.

El proceso de duplicar el número de lados de un polígono regular permitió a los antiguos geómetras de la antigua Grecia, trazar polígonos regulares de 4, 8, 16, 32, ...; 3, 6, 12, 24, ...; 5, 10, 20, 40,... ; 15, 30, 60, 120, ..., lados.

En los tiempos de Euclides (325 a.c.) , los únicos polígonos regulares construíbles con regla y compás de un número primo de lados eran el triángulo y el pentágono.

Es importante mencionar que durante varios siglos, ninguna construcción con regla y compás de polígonos regulares de un número primo de lados fue anexada a las ya conocidas en la antigua Grecia, hasta que en marzo de 1796, Karl Friedrich Gauss probó, que es posible construir un polígono regular de 17 lados con regla y compás. Se dice que este hecho hizo que Gauss se dedicara a las matemáticas, pues hasta ese momento no se había decidido entre las matemáticas y la filología [1].

Durante más de 2000 años no se pudieron resolver los problemas clásicos griegos de la duplicación del cubo, el de la cuadratura del círculo y el de la trisección del ángulo, que consisten respectivamente en construir con regla y compás un cubo de volumen el doble al de un cubo dado, un cuadrado de área igual a la de un círculo dado y trisectar un ángulo dado En el siglo XIX se probó que es imposible realizar dichas construcciones si sólo se utiliza regla y compás.

CAPÍTULO 1

CONSTRUCCIONES ELEMENTALES CON REGLA Y COMPÁS

En este capítulo se define cuando un punto **P** del plano es construible con regla y compás a partir de un subconjunto **X** del plano y se realizan algunas construcciones elementales.

Definición 1.1. Si **X** es un subconjunto de R^2, se dice que un punto **P** de R^2 es *construible con regla y compás en un paso a partir de* **X**, si **P** es la intersección de dos rectas que pasan por puntos de **X** o la intersección de una recta que pasa por puntos de **X** con un círculo con centro en un punto de **X** y radio igual a la distancia entre dos puntos de **X** o de la intersección de dos círculos con centro en puntos de **X** y radio igual a la distancia entre dos puntos de **X**.

Definición 1.2. Un punto **P** de R^2 *es construible con regla y compás a partir de un subconjunto* **X** de R^2 si, y sólo si, existen $\mathbf{P_1, P_2, \ldots, P_n = P}$, puntos de R^2, tales que, $\mathbf{P_1}$ es construible en un paso a partir de $\mathbf{X_0 = X}$ y $\mathbf{P_i}$ es construible en un paso a partir de $\mathbf{X \cup \{P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}\} = X_{i-1}}$ para cada $\mathbf{i = 2, 3, \ldots n}$.

Ejemplos de construcciones con regla y compás:

Ejemplo 1.1

Dados los puntos R_1 y R_2 en el plano, con R_1 diferente de R_2 construir un segmento de longitud $2d(R_1, R_2)$, con $d(R_1, R_2)$ la distancia entre los puntos R_1 y R_2.

Construcción:

1. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos R_1 y R_2. (ver fig. 1.1).
2. Con centro en R_2 y radio $r = d(R_1,R_2)$ trazar la circunferencia C.
3. Sea R_3 el punto de intersección de C con la recta ℓ.

Se afirma que, el segmento $\overline{R_1R_3}$ tiene longitud $2d(R_1, R_2)$.

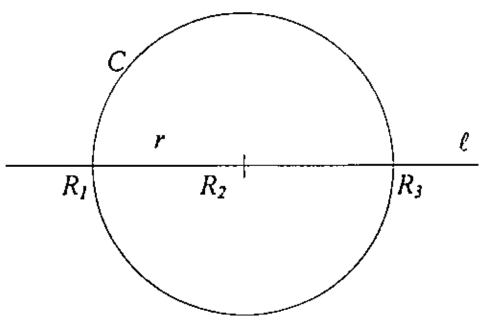

Figura 1.1

Justificación. Como R_1R_3 es un diámetro de la circunferencia con centro en R_2 y radio $r = d(R_1, R_2)$, entonces la $d(R_1, R_3) = 2r = 2d(R_1, R_2)$. ■

Ejemplo 1.2

Dados dos puntos R_0 y R_1 en el plano, con R_0 diferente de R_1 construir el punto medio del segmento $\overline{R_0R_1}$.

Construcción:

1. Trazar la recta l que pasa por los puntos R_0 y R_1. (ver fig. 1.2).
2. Con centro en R_1 y radio $r = d(R_0, R_1)$ trazar la circunferencia C.
3. Con centro en R_0 y radio r trazar la circunferencia C_1.
4. Sean R_2 y R_3 los puntos de intersección de C y C_1.
5. Trazar la recta l_1 que pasa por los puntos R_3 y R_2.
6. Sea R_4 el punto de intersección de l con la recta l_1.

Se tiene que, R_4 es el punto medio del segmento $\overline{R_0R_1}$.

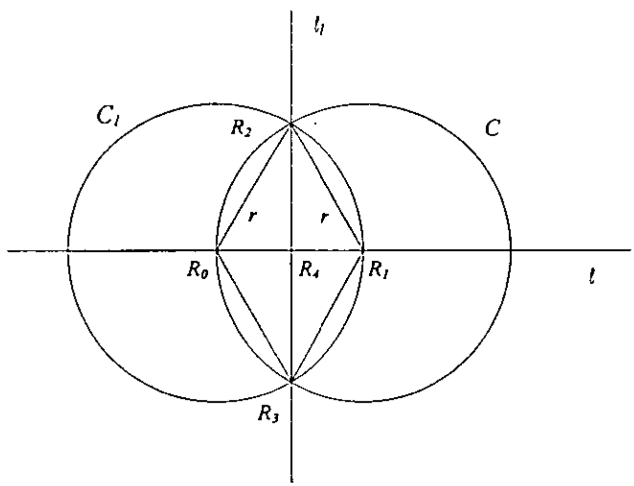

Figura 1.2

Justificación. Como $d(R_1, R_2) = d(R_0, R_2) = r$,

$$d(R_1, R_3) = d(R_0, R_3) = r \text{ y}$$

$$d(R_2, R_3) = d(R_2, R_3),$$ los triángulos

$\Delta\, R_1R_2R_3$ y $\Delta\, R_0R_2R_3$ son congruentes, por consiguiente

$\angle R_0R_2R_3 = \angle R_1R_2R_3$, esto es $\angle R_0R_2R_4 = \angle R_1R_2R_4$.

Como $d(R_1, R_2) = d(R_0, R_2)$, $d(R_2, R_4) = d(R_2, R_4)$ y $\angle R_0R_2R_4 = \angle R_1R_2R_4$, los triángulos $\Delta\, R_1R_2R_4$ y $\Delta\, R_0R_2R_4$ son congruentes,

por lo tanto $d(R_0, R_4) = d(R_4, R_1)$ y R_4 es el punto medio del segmento $\overline{R_0R_1}$. ■

Ejemplo 1.3

Dada la recta ℓ y un punto R_0 sobre la recta, trazar una perpendicular a ℓ que pase por el punto R_0.

Construcción:

1. Sea R_1 un punto sobre ℓ, con $R_1 \neq R_0$. (ver fig. 1.3).
2. Con centro en R_0 y radio $r = d(R_0, R_1)$ trazar la circunferencia C.
3. Sea R_2 el punto de intersección de C y ℓ, con $R_2 \neq R_1$.
4. Con centro en R_1 y radio $r_1 = d(R_1, R_2)$ trazar la circunferencia C_1.
5. Con centro en R_2 y radio r_1 trazar la circunferencia C_2.
6. Sea R_3 un punto de intersección C_2 y C_1.

Se afirma que , la recta que pasa por R_3 y R_0 es la perpendicular a ℓ.

Justificación. El $\Delta R_2R_0R_3$ es congruente al $\Delta R_1R_0R_3$ ya que

$$d(R_2, R_3) = d(R_1, R_3) = d(R_2, R_1),$$

$$d(R_2, R_0) = d(R_1, R_0) = \frac{1}{2}\, d(R_1, R_2) \text{ y}$$

$$d(R_0, R_3) = d(R_0, R_3).$$

Por lo tanto, $\angle R_2R_0R_3 = \angle R_1R_0R_3$ y siendo ángulos suplementarios, entonces $\angle R_2R_0R_3$ es recto. Esto es, la recta que pasa por R_0 y R_3 es perpendicular a ℓ. ■

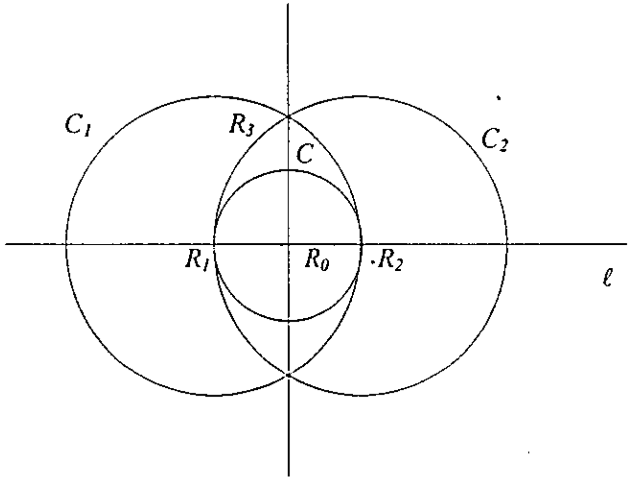

Figura 1.3

Ejemplo 1.4

Dada la recta ℓ y un punto R_0 en el plano que no pertenezca a ℓ, trazar una perpendicular a ℓ que pase por el punto R_0.

Construcción:

1. Sea R_1 un punto sobre ℓ. (ver fig 1.4).
2. Con centro en R_0 y radio $r = d(R_0, R_1)$ trazar la circunferencia C.
3. Sean R_1 y R_2 los puntos de intersección de C y ℓ.
4. Si $R_1 = R_2$, se puede probar fácilmente que la recta que pasa por R_0 y R_1 es la perpendicular a ℓ.
5. Si $R_1 \neq R_2$, con centro R_1 y radio r trazar la circunferencia C_1.
6. Con centro en R_2 y radio r trazar la circunferencia C_2.
7. Sea R_3 el punto de intersección de C_2 y C_1, con $R_3 \neq R_0$.

8. Trazar la recta ℓ_1 que pasa por R_0 y R_3 y sea R_4 la intersección ℓ_1 y ℓ.

Se afirma que , la recta ℓ_1 es perpendicular a ℓ y pasa por R_0.

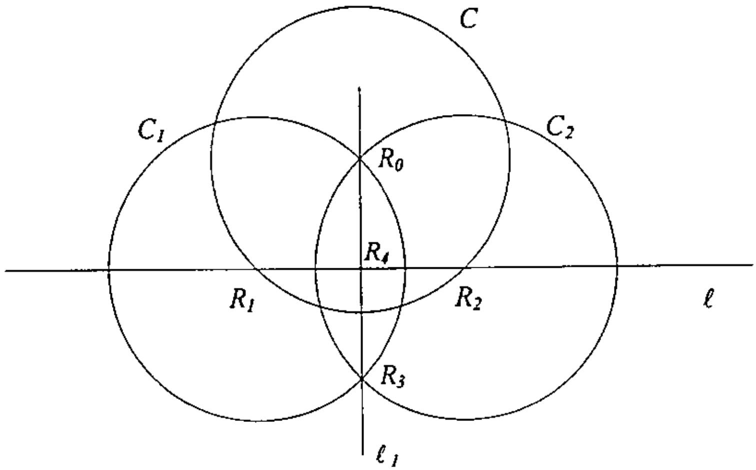

Figura 1.4

Justificación. $\Delta\, R_1R_0R_3$ es congruente al $\Delta\, R_2R_0R_3$ porque

$$d(R_1, R_0) = d(R_2, R_0),$$
$$d(R_1, R_3) = d(R_2, R_3),$$
$$d(R_0, R_3) = d(R_0, R_3).$$

Por lo tanto $\angle R_1R_0R_4 = \angle R_2R_0R_4$.

Luego $\Delta\, R_1R_0R_4$ es congruente al $\Delta\, R_2R_0R_4$

por tener respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido

entre esos dos lados.

Como $d(R_1, R_0) = d(R_2, R_0)$, esto implica que

$\angle R_1R_4R_0 = \angle R_2R_4R_0$. Como son ángulos suplementarios, entonces

$\angle R_1R_4R_0$ es un ángulo recto. ■

Ejemplo 1.5

Dada la recta ℓ y un punto R_0 en el plano que no pertenezca a ℓ, construir una recta paralela a ℓ que pase por R_0.

Construcción:

1. Por R_0 trazar la recta ℓ_1 perpendicular a ℓ.
2. Sea R_1 el punto de intersección de ℓ_1 y ℓ.
3. Por R_0 trazar la recta ℓ_2 perpendicular a ℓ_1.

Se afirma que, la recta ℓ_2 es paralela a ℓ y pasa por R_0.

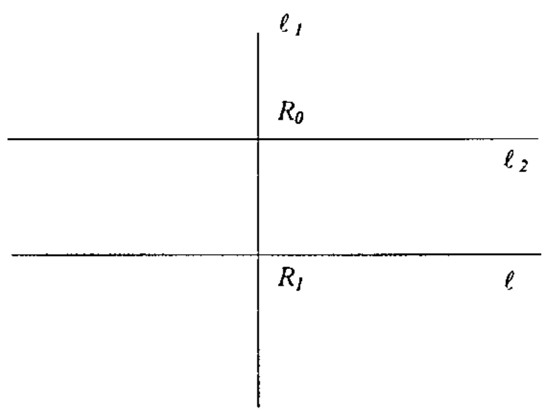

Figura 1.5

Justificación. Ya que el ángulo que forman las rectas ℓ y ℓ_1 es recto y el ángulo que forman las rectas ℓ_2 y ℓ_1 es recto, entonces ℓ y ℓ_2 son paralelas. ■

Ejemplo 1.6

Dados dos segmentos de longitudes p y q con $q \leq p$, construir un segmento cuya longitud sea $p + q$.

Construcción:

1. Sea $\overline{PR}$ el segmento dado de longitud p.
2. Sea $\overline{QS}$ el segmento dado de longitud q.
3. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos P y R.
4. Con centro en R y radio dado $d(Q, S) = q$, trazar la circunferencia C. Sea R_1 el punto de intersección de C y ℓ que no está en el segmento $\overline{PR}$.(ver fig. 1.6).

Se afirma que, el segmento $\overline{PR_1}$ tiene longitud $p + q$.

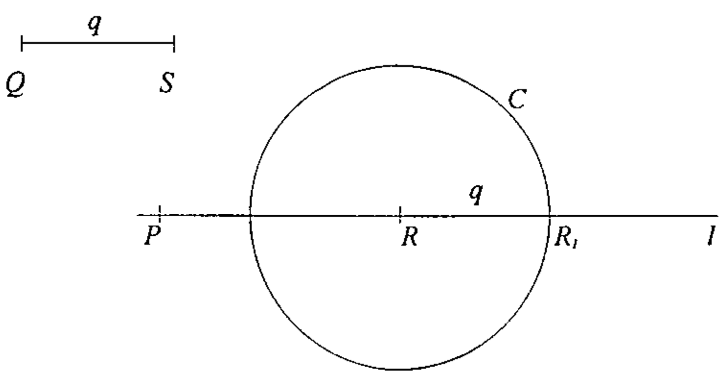

Figura 1.6

Justificación. $d(P, R) = p$ y $d(R, R_1) = q = radio\ de\ C$.

Por lo tanto, $d(P, R_1) = d(P, R) + d(R, R_1) = p + q$. ■

Observación. Cuando se dice que se tiene un segmento $\overline{PR}$ de longitud p, se supone que se tiene dos puntos A y B cuya distancia se toma como unidad.

Ejemplo 1.7

Dados dos segmentos de longitudes p y q, con $q < p$, construir un segmento cuya longitud sea $p - q$.

Construcción:

1. Sea $\overline{PR}$ el segmento cuya longitud es p. (ver fig. 1.7).
2. Sea $\overline{QS}$ el segmento cuya longitud es q.
3. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos P y R
4. Con centro en R y radio dado $d(Q, S) = q$

   trazar la circunferencia C. Sea R_1 el punto de intersección de C y ℓ

   tal que R_1 es un punto del segmento $\overline{PR}$.

Se afirma que, el segmento $\overline{PR_1}$ tiene longitud $p - q$.

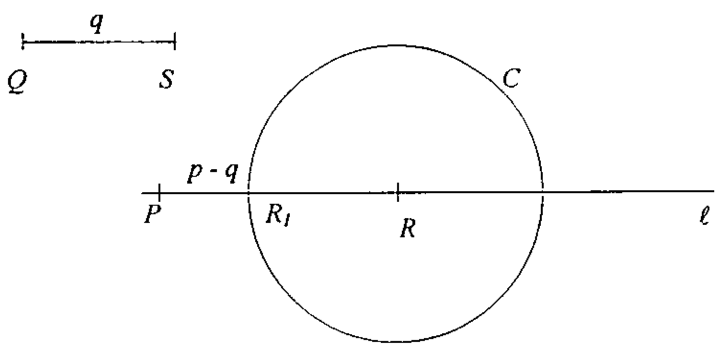

Figura 1.7

Justificación. $d(P, R) = p$ y $d(R_1, R) = q$ = radio de C.

Por lo tanto, $d(P, R_1) = d(P, R) - d(R_1, R) = p - q$. ■

Ejemplo 1.8

Dados dos segmentos en el plano $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ de longitud p y q respectivamente, construir un segmento de longitud $p\,q$.

Construcción:

1. Si $q = 1$ el problema es trivial, supóngase que $q \neq 1$
2. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos P y Q
3. Por el punto P trazar la recta ℓ_1 perpendicular a ℓ
4. Sobre la recta ℓ_1 construyamos el segmento $\overline{PR_1}$, tal que $d(P, R_1) = 1$
5. Sobre la misma recta ℓ_1 tracemos el segmento $\overline{PR_2}$,

   de modo que $d(P, R_2) = q$.
6. Trazar la recta ℓ_2 que pasa por los puntos R_1 y Q
7. Por el punto R_2 trazar la recta ℓ_3 que sea paralela a ℓ_2

   y sea R_3 el punto de intersección de ℓ_3 y ℓ.

Se afirma que, el segmento $\overline{PR_3}$ tiene longitud pq.

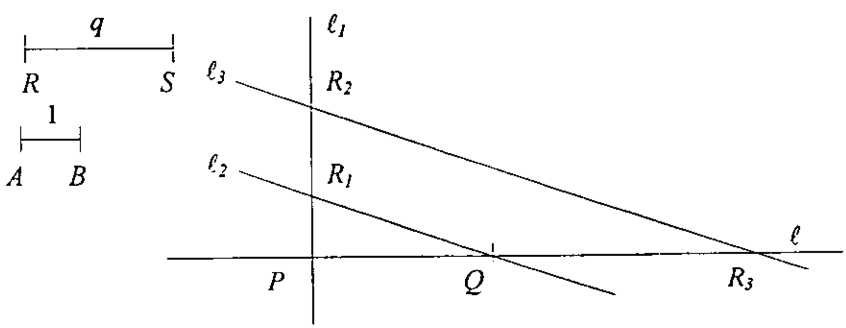

Figura 1.8

Justificación. Por construcción $\Delta R_1PQ \sim \Delta R_2PR_3$, ya que sus ángulos correspondientes son iguales.

Por lo tanto, sus lados son proporcionales, esto es :

$$\frac{1}{q} = \frac{p}{d(P,R_3)}$$

de donde

$$d(P,R_3) = pq \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.9

Dados dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ en el plano de longitud p y q respectivamente, con $q \neq 0$, construir un segmento de longitud $\frac{p}{q}$.

Construcción:

1. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos P y Q. (ver fig. 1.9).
2. Por el punto P trazar la recta ℓ_1 perpendicular a ℓ.
3. Trazar sobre la recta ℓ_1 el segmento $\overline{PR_1}$, tal que $d(P, R_1) = 1$.
4. Sobre la misma recta ℓ_1, trazar el segmento $\overline{PR_2}$,

   de modo que $d(P, R_2) = q$.
5. Trazar la recta ℓ_2 que pasa por los puntos R_2 y Q.
6. Por el punto R_1 trazar la recta ℓ_3 que sea paralela a ℓ_2, sea R_3

   el punto de intersección de ℓ_3 y ℓ.

Se afirma que, el segmento $\overline{PR_3}$ tiene longitud $\frac{p}{q}$.

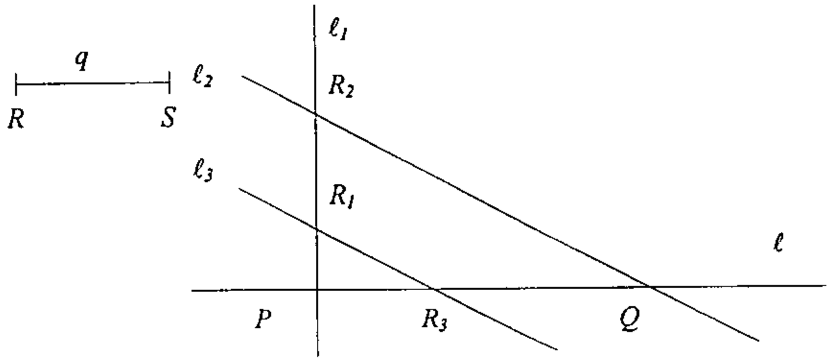

Figura 1.9

Justificación. Por construcción $\Delta R_1PR_3 \sim \Delta R_2PQ$, ya que sus ángulos correspondientes son iguales y en consecuencia sus lados correspondientes proporcionales, esto es:

$$\frac{1}{q} = \frac{d(P,R_3)}{p}$$

de donde

$$d(P,R_3) = \frac{p}{q} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1.10

Construir la bisectriz de un ángulo θ.

.**Construcción:**

1. Sea A el vértice del ángulo θ.
2. Con centro en A, trácese la circunferencia de C de radio 1.
3. Sean R_1 y R_2 los puntos de intersección de la circunferencia C con los lados del ángulo θ.

4. Trazar la circunferencia C_1 con centro en R_1 y radio 1.
5. Trácese la circunferencia C_2 con centro en R_2 y radio 1.
6. Sea R_3 el punto de intersección de C_1 y C_2 con $R_3 \neq A$.
7. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos A y R_3.

Se afirma que, la recta ℓ es la bisectriz del ángulo θ.

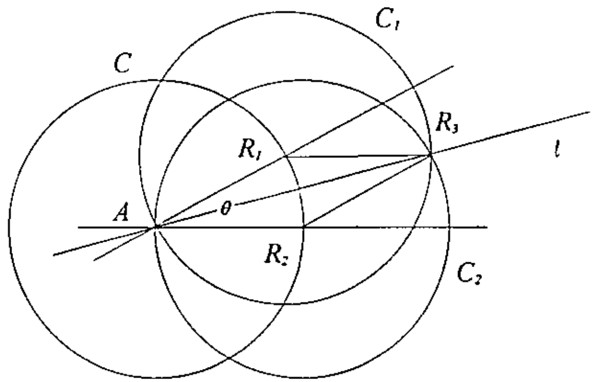

Figura 1.10

Justificación. Como $d(A, R_1) = d(A, R_2)$, $d(A, R_3) = d(A, R_3)$ y $d(R_1, R_3) = d(R_2, R_3)$, los triángulos ΔR_1AR_3 y ΔR_2AR_3 son congruentes,

por consiguiente $\angle R_1AR_3 = \angle R_3AR_2$,

por lo tanto al recta ℓ es la bisectriz del ángulo θ. ■

Ejemplo 1.11

Dado el segmento $\overline{R_0R_1}$ en el plano de longitud p, construir un segmento de longitud $\sqrt{p}$.

Construcción:

1. Trazar la recta ℓ que pasa por los puntos R_0 y R_1.
2. Construir sobre la recta ℓ el segmento $\overline{R_1R_2}$, tal que $d(R_1,R_2) = 1$ como se muestra en la fig. 1.11.
3. Por R_1 trazar la recta ℓ_1 perpendicular a ℓ.
4. Construir R_3 punto medio del segmento $\overline{R_0R_2}$.
5. Con centro en R_3 y radio $r = d(R_0, R_3)$, trazar la circunferencia C y sea R_4 el punto de intersección de C con ℓ_1.

Se afirma que, el segmento $\overline{R_1R_4}$ tiene longitud $\sqrt{p}$.

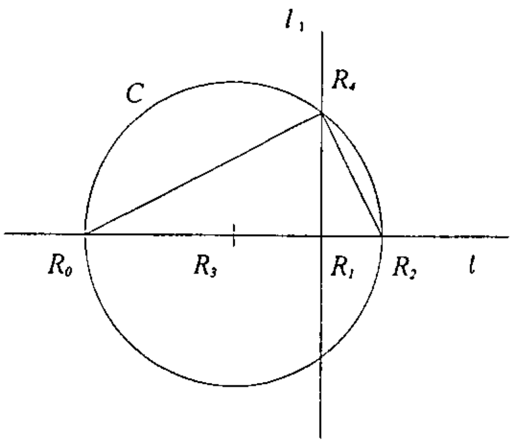

Figura 1.11

Justificación. El $\angle R_0R_4R_2$ es un ángulo inscrito en la circunferencia C y abarca un diámetro, por lo tanto es un ángulo recto y el $\Delta R_0R_4R_2$ es triángulo rectángulo.

La altura $\overline{R_1R_4}$ del triángulo rectángulo $\Delta R_0R_4R_2$ divide a éste en los triángulos $\Delta R_0R_1R_4$ y $\Delta R_4R_1R_2$ que son semejantes, por lo tanto $\dfrac{d(R_0,R_1)}{d(R_4,R_1)} = \dfrac{d(R_4,R_1)}{d(R_1,R_2)}$.

Si $x = d(R_4, R_1)$, como $d(R_0, R_1) = p$ y $d(R_1, R_2) = 1$, entonces se tiene que

$$\frac{p}{x} = \frac{x}{1}, \text{ luego}$$

$$x^2 = p, \text{ es decir}$$

$$x = \sqrt{p} \quad \blacksquare$$

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS DE POLÍGONOS REGULARES DE 3, 4, 5, 6, 10 , 15 y 17 LADOS

En este capítulo se construye con regla y compás un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, un decágono, un pentadecágono y un heptadecágono.

2.1 Dada la circunferencia C con centro en R_0 y radio r, construir un cuadrado inscrito en la circunferencia C.

Construcción:

1. Sea l una recta que pasa por R_0.
2. Sean R_1 y R_2 los puntos de intersección de C y l .(ver fig. 2.1).
3. Trazar l_1 la perpendicular a l que pase por R_0.
4. Sean R_3 y R_4 los puntos de intersección de l_1 con C.

Se tiene que, los puntos R_1, R_3, R_2 y R_4 son los vértices del cuadrado.

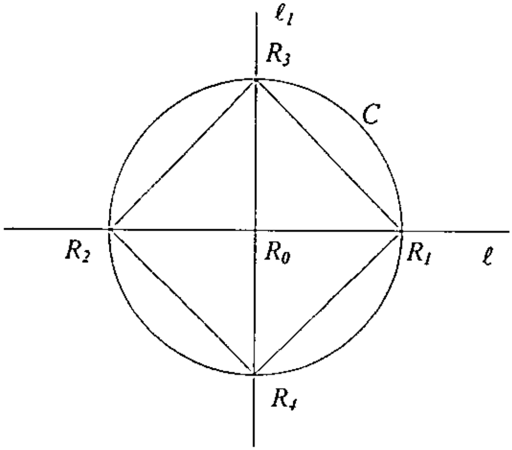

Figura 2.1

Justificación. Los triángulos $\Delta R_0R_1R_3$, $\Delta R_0R_3R_2$, $\Delta R_0R_2R_4$ y $\Delta R_0R_4R_1$ son isósceles, puesto que, $d(R_0, R_1) = d(R_0, R_3) = d(R_0, R_2) = d(R_0, R_4) = radio\ de\ C$.

Por lo tanto, los $\Delta R_0R_1R_3$, $\Delta R_0R_3R_2$, $\Delta R_0R_2R_4$ y $\Delta R_0R_4R_1$ son congruentes, porque tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Por lo tanto, $d(R_1, R_3) = d(R_3, R_2) = d(R_2, R_4) = d(R_4, R_1)$,

y en consecuencia los puntos R_1, R_3, R_2 y R_4 son los vértices del cuadrado. ■

2.2 Dada la circunferencia C con centro en R_0 y radio r, construir un hexágono regular inscrito en la circunferencia C.

Construcción:

1. Sea R_1 un punto sobre C. (ver fig. 2.2.).
2. Con centro en R_1 y radio r trazar la circunferencia C_1 y sea R_2. un punto de la intersección de C_1 con C.

Se tiene que, el segmento $\overline{R_1R_2}$ es un lado del hexágono.

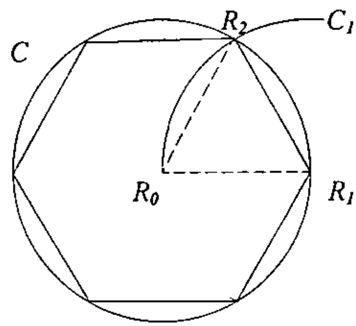

Figura 2.2

Justificación. El $\Delta\, R_0\, R_1\, R_2$ es equilátero puesto que,

$d(R_0, R_1) = d(R_0, R_2) = radio\ de\ C = r = radio\ de\ C_1 = d\,(R_1, R_2)$

Por lo tanto, el $\angle R_2R_0R_1 = \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}2\pi$ y el segmento $\overline{R_1R_2}$

es uno de los lados del hexágono regular. ∎

2.3 Dada la circunferencia C con centro en R_0 y radio dado, construir un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia C.

Construcción:

1. Se construye un hexágono regular inscrito en la circunferencia C. (ver fig. 2.3).
2. Sean R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 y R_6 los vértices consecutivos del hexágono.

Se tiene que, los puntos R_1, R_3, y R_5 son los vértices del triángulo equilátero.

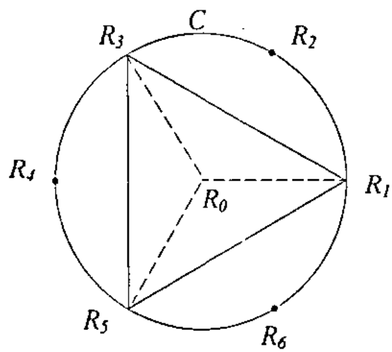

Figura 2.3

Justificación. El $\Delta R_1R_0R_3$ y el $\Delta R_3R_0R_5$ son congruentes porque

$d(R_0, R_1) = d(R_0, R_3) = d(R_0, R_5)$ y $\angle R_1R_0R_3 = \angle R_3R_0R_5$,

por lo tanto $d(R_1, R_3) = d(R_3, R_5)$.

Análogamente $d(R_3, R_5) = d(R_5, R_1)$,

por consiguiente el $\Delta R_1R_3R_5$ es equilátero. ■

2.4 Construcción con regla y compás de un decágono regular.

Supóngase que se tiene inscrito un decágono regular en un círculo con centro en O de radio $r = 1$, con vértices $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ (ver fig. 2.4).

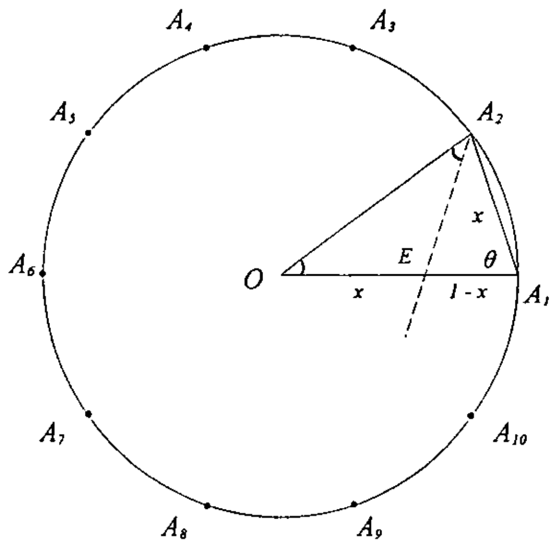

Figura 2.4

El ángulo que forman los radios OA_1 y OA_2 es de 36 ° .

El triángulo $\Delta\, OA_1A_2$ es isósceles, por consiguiente

$$\angle OA_1A_2 = \angle A_1A_2O = \theta,$$

como $\quad 2\,\theta + 36\,° = 180\,°,$ entonces

$$2\,\theta = 144\,°$$

$$\theta = 72\,°$$

Si trazamos la bisectriz del ángulo $\angle A_1A_2O$ y si E es la intersección de ésta con el radio OA_1 , como el ángulo $\angle A_1A_2E = 36\,°$, entonces

$$\angle A_2EA_1 = \angle EA_1A_2 = 72\,°$$

Y por consiguiente $d(A_2, E) = d(A_1, A_2)$.

Como el $\angle EA_2O = \angle A_2OE = 36°$, el triángulo ΔOEA_2 es isósceles y por consiguiente $d(O, E) = d(A_2, E)$ y por lo tanto $d(O, E) = d(A_1, A_2)$.

Si $x = d(A_1, A_2)$, como $x = d(O, E)$, $x < 1$, y $d(E, A_1) = 1 - x$.

Como los triángulos ΔA_1A_2E y ΔA_2OA_1 son semejantes, entonces

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \text{y esto se cumple, si, y sólo si,}$$

$$x^2 = 1 - x \quad \text{si, y sólo si,}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{si, y sólo si,}$$

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Inversamente si se tiene un segmento de longitud x, tal que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$, es decir un segmento de longitud $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, que es menor que 1 y construible con regla y compás, probaremos que se puede construir con regla y compás un polígono regular de 10 lados inscrito en un círculo de radio uno, con x la longitud de cada lado del polígono.

2.5 Si x es la longitud de un segmento tal que $\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$. Construir con regla y compás un decágono regular de lado x, inscrito en un círculo de radio 1.

Construcción

1. Sea O el centro de la circunferencia C de radio 1 y A un punto de C.
2. Con centro en A trazamos un círculo de radio x, y sea B un punto de intersección de este círculo con el círculo dado.(ver fig. 2.5).

Se tiene que, $\overline{AB}$ es el lado de un decágono regular inscrito en C.

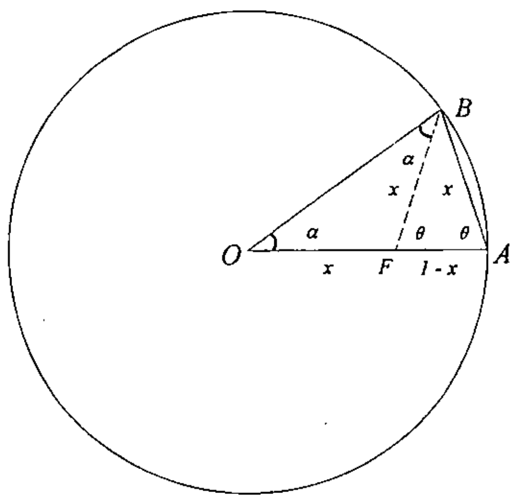

Figura 2.5

Justificación. Sea F un punto entre el segmento $\overline{OA}$ tal que $d\,(O,\,F\,) = x$

El triángulo $\Delta\, OAB$ y el triángulo $\Delta\, BAF$ tienen un ángulo en común,

$\angle BAF = \angle OAB$, además $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AB}}$ porque $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{x}$.

Por lo tanto, los triángulos $\Delta\, OAB$ y $\Delta\, BAF$ son semejantes

y como el triángulo $\Delta\, OAB$ es isósceles, entonces el triángulo $\Delta\, BAF$ es isósceles,

por tanto $d\,(\,B,\,F\,) = d\,(\,A,\,B\,) = x$ y $\angle FAB = \angle BFA = \theta$.

Ya que el $\Delta\, OFB$ es isósceles, entonces $\angle BOF = \angle FBO = \alpha$.

Se tiene que $\quad 2\,\alpha \;= \theta,$

y como $\quad 2\,\theta + \alpha \;= 180\,°,$

entonces $\quad 5\,\alpha \;= 180\,°,$

$\alpha \;= 36\,°$ y por lo tanto, $\overline{AB}$ es el lado del decágono. ■

Observación. De la fig. 2.4

se tiene que $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\phi = 36°$

$$\overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 - 2\cos\phi = \overline{A_1A_2}^2 = x^2$$

$$2\cos\phi = \overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 - x^2$$

$$= 1 + 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4}$$

luego $\cos\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$ es decir, $\cos 36° = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$

Observación. La función coseno es inyectiva, continua en $[\,0, \pi]$, toma valores de $[\,-1\,,\,1\,]$, y por consiguiente para cada $y \in [\,-1\,,\,1\,]$, existe un ángulo, y sólo un $\alpha \in [\,0\,,\,\pi]$, tal que $\cos\,\alpha = y$.

De la figura 2.5, para probar que $\overline{AB}$ es el lado del decágono, basta hacer ver que

$\cos\,\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$, con $\alpha = \angle BOA$.

En efecto, $2\cos\alpha = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - x^2$

$$= 1 + 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4},$$

entonces $\cos\,\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$ y $\alpha = 36°$.

2.6 Otra construcción con regla y compás de un decágono regular.

Construcción:

1. Sea C un círculo de radio 1 con centro en O, A un punto de C y P el punto medio de $\overline{OA}$.(ver fig. 2.6).
2. Trazar el circulo C_1 con centro en P y radio $\frac{1}{2}$.
3. Sea $\overline{OB}$ un radio de C, perpendicular a $\overline{OA}$.
4. Trazar la recta l que pasa por B y P.
5. Sean R y S los puntos de intersección de l con C_1.
6. Con centro en B, trazar un círculo C_2 de radio $d(B, R)$ y sean M y N las intersecciones de C_2 con C.

Se tiene que, el segmento $\overline{BM}$ es uno de los lados de un decágono inscrito en la circunferencia C.

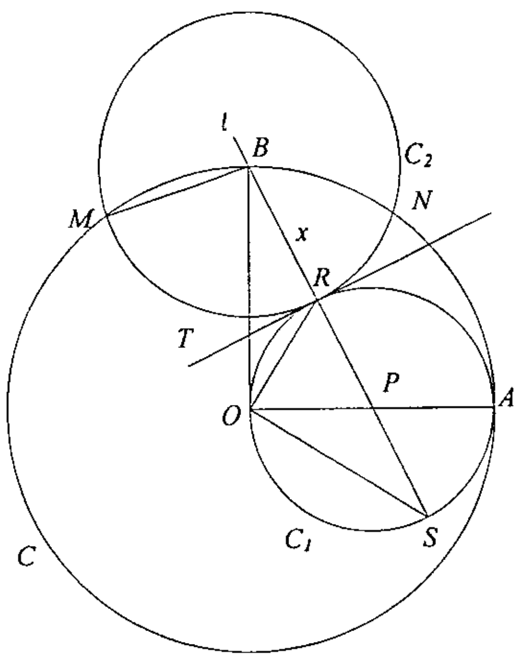

Figura 2.6

Justificación. Si x es la longitud del segmento $\overline{BR}$, probaremos que $\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}$, y por consiguiente $\overline{BR}$ es un lado del decágono.

Los triángulos $\Delta\, BRO$ y $\Delta\, BSO$ son semejantes porque los ángulos $\angle\, SBO$, $\angle\, BOS$ y $\angle\, OSB$ del triángulo $\Delta\, BSO$ son respectivamente iguales a los ángulos $\angle\, RBO$, $\angle\, ORB$, y $\angle\, BOR$ del triángulo $\Delta\, BRO$.

En efecto $\angle\, RBO = \angle\, SBO$, ahora veamos que $\angle\, BOS = \angle\, ORB$.

Si T es la intersección de la recta tangente al círculo C_1 en el punto R con el radio d(O, B) se tiene que $\angle\, TOR = \angle\, TRO$,

Como $\angle\, ROS = \angle\, TRB = 90°$

entonces $\angle\, TOR + \angle\, ROS = \angle\, TRO + \angle\, TRB$

Por lo tanto, $\angle\, ORB = \angle\, BOS$, lo que implica que $\angle\, BOR = \angle\, OSB$

Como los triángulos $\Delta\, BRO$ y $\Delta\, RSO$ son semejantes, se tiene

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{BR}}$$

Por lo tanto $\frac{x+1}{1}=\frac{1}{x}$

De donde $x=\frac{1}{x}-1$

$$x=\frac{1-x}{x}$$

$$\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x} \qquad \blacksquare$$

2.7 Construcción con regla y compás de un pentágono.

Si $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}$ son los vértices consecutivos de un decágono y se trazan los segmentos $\overline{A_1A_3}, \overline{A_3A_5}, \overline{A_5A_7}, \overline{A_7A_9}, y\ \overline{A_9A_1}$, estos segmentos son los lados de un pentágono regular y por consiguiente se tiene una construcción con regla y compás de un pentágono regular.

A continuación daremos una construcción con regla y compás de un pentágono regular la cual se le atribuye a Ptolomeo [3].

2.8 Inscribir un pentágono regular en una circunferencia C de radio 1 con centro O.

Construcción:

1. Sea A un punto de C y P el punto medio de OA.(ver fig. 2.8).
2. Sea $d\,(O, B)$ un radio de C, perpendicular a OA.
3. Trazar el círculo C_1 con centro en P y radio $d\,(P, B)$ y sea F el punto de intersección de C_1 con la recta OA en el interior de C.
4. Con centro en B se traza un círculo C_2 con radio $d\,(B, F)$.

Si Q es un punto de intersección de C_2 con C, el segmento $\overline{BQ}$ es uno de los lados de un pentágono inscrito en el círculo C.

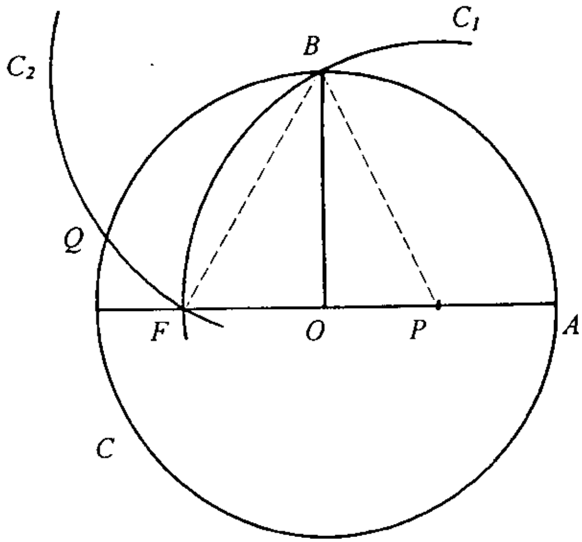

Figura 2.8

Justificación. Probaremos que el ángulo $\phi = \angle BOQ$ es igual a $72\,°$.
(ver fig. 2.8a).

Si y es la longitud del segmento $\overline{BQ}$, y es la longitud del segmento $\overline{BF}$.

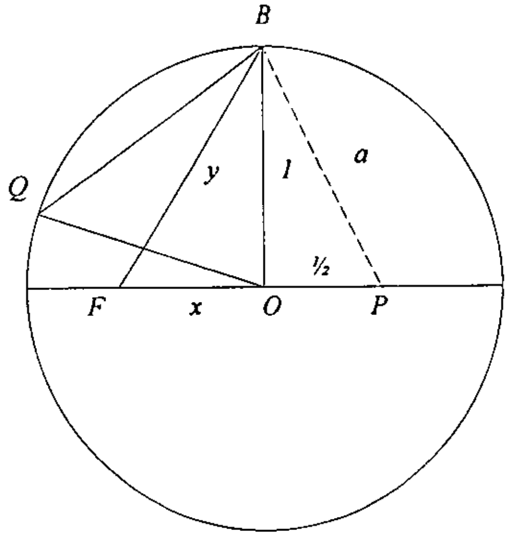

Figura 2.8a

Si a es la longitud del segmento $\overline{BP}$, a es la longitud del segmento $\overline{PF}$,

entonces $x = a - \frac{1}{2}$ es la longitud del segmento $\overline{FO}$.

Como $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$y^2 = 1 + x^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} .$$

Por la ley de los cosenos, en el triángulo $\Delta\, BOQ$, se tiene que :

$$y^2 = 1 + 1 - 2 \cos \phi ,\; 2 \cos \phi = 2 - y^2 = 2 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}$$

entonces $\cos \phi = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Hemos visto que $\cos 36^o = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, lo que

implica que $\cos 72^o = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

como $0 \leq \phi \leq \pi$, y , $\cos \phi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

esto implica que $\phi = 72^o$ ■

2.9 Dada la circunferencia C con centro en R_0 y radio r, construir un pentadecágono regular inscrito en la circunferencia C.

Construcción:

1. Se construye un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia C (ver fig. 2.9).
2. Sean A, B y H los vértices consecutivos de este triángulo.
3. Se construye un pentágono regular inscrito en la circunferencia C de tal forma que A sea uno de sus vértices.
4. Sean A, D, E, F, y G los vértices consecutivos del pentágono.
5. Sea Q un punto sobre C que se obtiene al restar tres veces el *arco AD* del doble del *arco AB*.

Se afirma que, el segmento $\overline{AQ}$ es uno de los lados del pentadecágono regular.

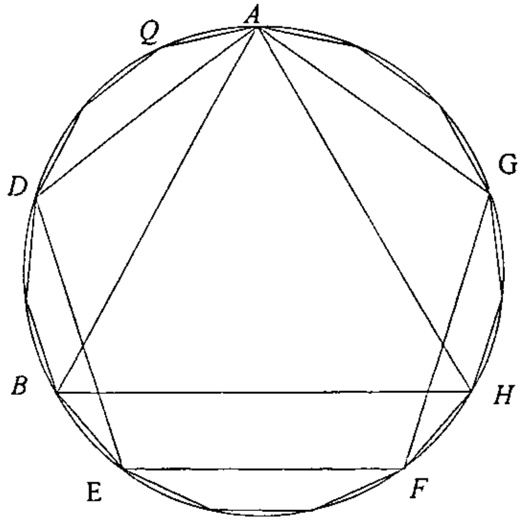

Figura 2.9

Justificación. El *arco AB* es un $\frac{1}{3}$ del total de la circunferencia C y el *arco AD* es un $\frac{1}{5}$ de la circunferencia C.

Ya que la circunferencia es de radio r, el perímetro de C es igual $2\pi r$ y entonces el *arco AB* es de longitud $\frac{2}{3}\pi r$, y el *arco AD* tiene longitud $\frac{2}{5}\pi r$,

por lo tanto, el *arco AQ* mide 2 $\frac{2}{3}\pi r$ - 3 $\frac{2}{5}\pi r$ =

$$= 2\pi\frac{(2)r}{3} + 2\pi\frac{(-3)r}{5}$$

$$= 2\pi\, r\left(\frac{2(5) + 3(-3)}{15}\right) = \frac{2\pi r}{15}$$

y por lo tanto el segmento $\overline{AQ}$ es uno de los lados del pentadecágono regular. ■

2.10 Construcción del heptadecágono regular con regla y compás.

Sea C el círculo con centro en $(0, 0)$ y radio 1.

Se quiere contruir un polígono regular de 17 lados con vértices

$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{16} \in \mathrm{C}$, $P_0 = (1, 0)$ y $P_1 = P = (\cos \frac{2\pi}{17}, \operatorname{sen} \frac{2\pi}{17})$.

Sea $\theta = \frac{2\pi}{17}$, $X = \{(0, 0) \, y \, (1, 0)\}$.

Para construir con regla y compás el punto $P = (\cos \frac{2\pi}{17}, \operatorname{sen} \frac{2\pi}{17})$ a partir de X, es equivalente a construir el punto $Q = (\cos \frac{2\pi}{17}, 0)$ a partir de X.

Para construir Q a partir de X es suficiente construir un segmento de longitud $\cos \frac{2\pi}{17}$.

Si $\theta = \frac{2\pi}{17}$, sean

$\varepsilon_0 = \cos 0\,\theta + i \operatorname{sen} 0\,\theta$, $\varepsilon_1 = \cos 1\,\theta + i \operatorname{sen} 1\,\theta$,

$\varepsilon_2 = \cos 2\,\theta + i \operatorname{sen} 2\,\theta, \ldots, \varepsilon_{16} = \cos 16\,\theta + i \operatorname{sen} 16\,\theta$.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}$ son las raíces de $t^{17} - 1 = 0$.

$\varepsilon_k = \cos K\,\theta + i \operatorname{sen} k\,\theta$ y

$\varepsilon_{17-k} = \cos(17-k)\,\theta + i \operatorname{sen}(17-k)\,\theta$ son conjugados

para cada $1 \le k \le 16$, en efecto,

$\varepsilon_{17-k} = \cos(17-k)\,\theta + i \operatorname{sen}(17-k)\,\theta$

$$= \cos\,(17 - k)\,\frac{2\pi}{17} + i\,\mathrm{sen}\,(17 - k)\,\frac{2\pi}{17}$$

$$= \cos\,(-k\,\frac{2\pi}{17} + 2\,\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(-k\,\frac{2\pi}{17} + 2\,\pi)$$

$$= \cos\,(-k\,\frac{2\pi}{17}) + i\,\mathrm{sen}\,(-k\,\frac{2\pi}{17})$$

$$= \cos\,(k\,\frac{2\pi}{17}) - i\,\mathrm{sen}\,(k\,\frac{2\pi}{17}) = \bar{\varepsilon}_k = \cos k\,\theta - i\,\mathrm{sen}\,k\,\theta$$

$\varepsilon_{17-k} = \bar{\varepsilon}_k$, de donde $\cos k\,\theta = \cos\,(17 - k)\,\theta$, y si

$1 \leq k \leq 16$, entonces

$\varepsilon_{17-k} + \varepsilon_k = 2\cos k\,\theta$.(1)

Sean $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, y_4 \in$ C tales que :

$$x_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_9 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{15} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_8 + \varepsilon_4 + \varepsilon_2$$

$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_{16}) + (\varepsilon_8 + \varepsilon_9) + (\varepsilon_4 + \varepsilon_{13}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_{15})$$

$$x_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_{10} + \varepsilon_5 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{14} + \varepsilon_7 + \varepsilon_{12} + \varepsilon_6$$

$$= (\varepsilon_3 + \varepsilon_{14}) + (\varepsilon_7 + \varepsilon_{10}) + (\varepsilon_5 + \varepsilon_{12}) + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_6)$$

$$y_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{16} + \varepsilon_4$$

$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_{16}) + (\varepsilon_{15} + \varepsilon_4)$$

$$y_2 = \varepsilon_9 + \varepsilon_{15} + \varepsilon_8 + \varepsilon_2$$

$$= (\varepsilon_9 + \varepsilon_8) + (\varepsilon_{15} + \varepsilon_2)$$

$$y_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_{14} + \varepsilon_{12}$$

$$= (\varepsilon_3 + \varepsilon_{14}) + (\varepsilon_5 + \varepsilon_{12})$$

$$y_4 = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_7 + \varepsilon_6$$

$$= (\varepsilon_{10} + \varepsilon_7) + (\varepsilon_{11} + \varepsilon_6)$$

Por (1) se tiene que:

$$x_1 = 2\,(\cos\theta + \cos 8\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta)$$

$$x_2 = 2\,(\cos 3\theta + \cos 7\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta)$$

$$y_1 = 2\,(\cos\theta + \cos 4\theta)$$

$$y_2 = 2\,(\cos 8\theta + \cos 2\theta)$$

$$y_3 = 2\,(\cos 3\theta + \cos 5\theta)$$

$$y_4 = 2\,(\cos 7\theta + \cos 6\theta)$$

Como $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{16}$ son la raíces de $t^{17} - 1$, se tiene que

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{16} = 0$$

Por lo tanto $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{16} = -1$

de donde se sigue que $x_1 + x_2 = -1$

Si $m \geq n$, se tiene que

$$2\cos m\theta \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \quad (2)$$

Como $x_1 x_2 =$ $2\,(\,2\cos 3\theta\,\cos\theta + 2\cos 3\theta\,\cos 8\theta + 2\cos 3\theta\cos 4\theta +$

$+ 2\cos 3\theta\cos 2\theta + 2\cos 7\theta\cos\theta + 2\cos 7\theta\cos 8\theta +$

$+ 2\cos 7\theta\cos 4\theta + 2\cos 7\theta\cos 2\theta + 2\cos 5\theta\cos\theta +$

$+ 2\cos 5\theta\cos 8\theta + 2\cos 5\theta\cos 4\theta + 2\cos 5\theta\cos 2\theta +$

$+ 2\cos 6\theta\cos\theta + 2\cos 6\theta\cos 8\theta + 2\cos 6\theta\cos 4\theta +$

$+ 2\cos 6\theta\cos 2\theta\,)$

Por (2) se tiene que

$= \quad 2\,[\,(\cos 4\theta + \cos 2\theta) + (\cos 11\theta + \cos 5\theta) + (\cos 7\theta + \cos\theta) +$

$+ (\cos 5\theta + \cos\theta) + (\cos 8\theta + \cos 6\theta) + (\cos 15\theta + \cos\theta) +$

$+ (\cos 11\theta + \cos 3\theta) + (\cos 9\theta + \cos 5\theta) + (\cos 6\theta + \cos 4\theta) +$

$+ (\cos 13\theta + \cos 3\theta) + (\cos 9\theta + \cos\theta) + (\cos 7\theta + \cos 3\theta) +$

$+ (\cos 7\theta + \cos 5\theta) + (\cos 14\theta + \cos 2\theta) + (\cos 10\hat{\theta} + \cos 2\theta)$

$+ (\cos 8\theta + \cos 4\theta)\,]$

$= \quad 2\,[\,(\cos 4\theta + \cos 2\theta) + (\cos 6\theta + \cos 5\theta) + (\cos 7\theta + \cos\theta) +$

$+ (\cos 5\theta + \cos\theta) + (\cos 8\theta + \cos 6\theta) + (\cos 2\theta + \cos\theta) +$

$+ (\cos 6\theta + \cos 3\theta) + (\cos 8\theta + \cos 5\theta) + (\cos 6\theta + \cos 4\theta) +$

$+ (\cos 4\theta + \cos 3\theta) + (\cos 8\theta + \cos\theta) + (\cos 7\theta + \cos 3\theta) +$

$+ (\cos 7\theta + \cos 5\theta) + (\cos 3\theta + \cos 2\theta) + (\cos 7\theta + \cos 2\theta)$

$+ (\cos 8\theta + \cos 4\theta)\,]$

$= \quad 2\,[\,4\,(\cos 4\theta + \cos 2\theta + \cos 6\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos\theta +$

$+ \cos 8\theta + + \cos 3\theta)\,]$

$= \quad 4\,[\,2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 5\theta +$

$+ 2\cos 6\theta + 2\cos 7\theta + 2\cos 8\theta\,]$

$$= \quad 4\,[\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_{16}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_{15}) + (\varepsilon_3 + \varepsilon_{14}) + (\varepsilon_4 + \varepsilon_{13}) +$$

$$+ (\varepsilon_5 + \varepsilon_{12}) + (\varepsilon_6 + \varepsilon_{11}) + (\varepsilon_7 + \varepsilon_{10}) + (\varepsilon_8 + \varepsilon_9)\,]$$

$$= \quad 4\,(-1) = -4$$

Por lo tanto, $x_1 x_2 = -4$ y como se tiene que $x_1 + x_2 = -1$, entonces

x_1, x_2 son raíces del polinomio:

$t^2 + t - 4$ (3), y además $x_1 > x_2$ porque $x_2 < 0$

ya que $\cos 7\theta + \cos 3\theta < 0$.

$$y_1 + y_2 = 2\,(\cos\theta + \cos 4\theta + \cos 8\theta + \cos 2\theta) = x_1$$

$$y_1 y_2 = \quad 2\,(2\cos 8\theta\cos\theta + 2\cos 8\theta\cos 4\theta + 2\cos 2\theta\cos\theta +$$

$$+ 2\cos 2\theta\cos 4\theta)$$

$$= \quad 2\,(\cos 9\theta + \cos 7\theta + \cos 5\theta + \cos 4\theta + \cos 3\theta + \cos\theta +$$

$$+ \cos 6\theta + \cos 2\theta)$$

$$= \quad 2\,(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta +$$

$$+ \cos 8\theta)$$

$$= \quad (\varepsilon_1 + \varepsilon_{16}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_{15}) + (\varepsilon_3 + \varepsilon_{14}) + (\varepsilon_4 + \varepsilon_{13}) +$$

$$+ (\varepsilon_5 + \varepsilon_{12}) + (\varepsilon_6 + \varepsilon_{11}) + (\varepsilon_7 + \varepsilon_{10}) + (\varepsilon_8 + \varepsilon_9) = -1$$

Por lo tanto $y_1 y_2 = -1$,

entonces y_1, y_2 son raíces del polinomio

$t^2 - x_1 t - 1$, con $y_1 > y_2$.

Análogamente y_3 y y_4 son raíces del polinomio

$t^2 - x_2 t - 1$, con $y_3 > y_4$, como

$$y_1 = 2\cos\theta + 2\cos 4\theta$$

$$y_3 = 2(\cos 5\theta + \cos 3\theta)$$

$$y_3 = 2(2\cos 4\theta \cos\theta)$$

$$y_3 = (2\cos 4\theta)(2\cos\theta).$$

Si $z_1 = 2\cos\theta$, $z_2 = 2\cos 4\theta$, entonces

$z_1 + z_2 = y_1$

$z_1 z_2 = y_3$

de donde se sigue que z_1 y z_2 son raíces del polinomio

$t^2 - y_1 t + y_3$ con $z_1 > z_2$

Se tiene que

$x_1, x_2 \in R$ son raíces de $t^2 + t - 4$ con $x_1 > x_2$

$y_1, y_2 \in R$ son raíces de $t^2 - x_1 t - 1$ con $y_1 > y_2$

$y_3, y_4 \in R$ son raíces de $t^2 - x_2 t - 1$ con $y_3 > y_4$

$z_1, z_2 \in R$ son raíces de $t^2 - y_1 t + y_3$ con $y_1 > y_2$

Si $z_1 \in R$ es construible a partir de $X = \{(0,0) \text{ y } (1,0)\}$, como $\cos\theta = \frac{z_1}{2}$, entonces $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{17}$ es construible.

Ya que x_1 y x_2 son construibles a partir de X

porque $x_1, x_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$, entonces

y_1, y_2 son construibles a partir de X,

porque $y_1, y_2 = \frac{x_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + 4}$.

Análogamente y_3, y_4 son construibles a partir de X

porque $y_3, y_4 = \frac{x_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{x_2^2 + 4}$, entonces

z_1 es construible a partir de X porque $z_1 = \frac{y_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{y_1^2 + 4y_3}$, que es construible.

Haciendo los cálculos necesarios a partir de las ecuaciones anteriores,

se obtiene que

$$z_1 = \frac{1}{8}\Big\{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+\sqrt{68 + 2\sqrt{17} - 2(1 - \sqrt{17})(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) - 16\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\Big\}$$

de donde $\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\Big\{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$

$$+\sqrt{68 + 2\sqrt{17} - 2(1 - \sqrt{17})(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}) - 16\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\Big\}.$$

Y así, tenemos la construcción del punto $P_1 = (\cos \frac{2\pi}{17}, \operatorname{sen} \frac{2\pi}{17})$ y por consiguiente se tiene la construcción del polígono de 17 lados. ■

En 2.11 daremos una construcción del polígono regular de 17 lados debida a Richmond [12] y [15], pero antes, demostraremos un lema en el que utilizaremos tanto la notación como los resultados obtenidos en la construcción anterior.

Lema. Sea $\theta = \frac{2\pi}{17}$, y $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tal que $\tan x = 4$. Si $\phi = \frac{x}{4}$, entonces

$$2(\cos 3\theta + \cos 5\theta) = \tan \phi \quad \text{y} \quad 4(\cos 3\theta \cos 5\theta) = \tan(\phi - \frac{\pi}{4}).$$

Demostración. $0 < \phi < 2\phi < 4\phi = x < \frac{\pi}{2}$.

$t^2 + t - 4 = t^2 + 4t \cot 4\phi - 4.$

Las raíces de $t^2 + 4t \cot 4\phi - 4$ son $2 \tan 2\phi$ y $-2 \cot 2\phi$

y como las raíces de $t^2 + t - 4$ son x_1 y x_2 con $x_1 > x_2$,

por lo tanto $x_1 = 2 \tan 2\phi$ y $x_2 = -2 \cot 2\phi$.

$t^2 - x_1 t - 1 = t^2 - 2 \tan 2\phi - 1$ que tiene como raíces a

$\tan(\phi + \frac{\pi}{4})$ y $\tan(\phi - \frac{\pi}{4})$ y como y_1 y y_2 son las raices de $t^2 - x_1 t - 1$ con $y_1 > y_2$, entonces $y_1 = \tan(\phi + \frac{\pi}{4})$, $y_2 = \tan(\phi - \frac{\pi}{4})$.

Análogamente $y_3 = \tan \phi$ y $y_4 = -\cot \phi$.

Como se tiene que

$$y_3 = 2\,(\cos 3\,\theta + \cos 5\,\theta)\text{, entonces}$$

$$\tan\phi = 2\,(\cos 3\,\theta + \cos 5\,\theta)\,.$$

Como $\quad 2\,(\cos 3\,\theta \cos 5\,\theta) = \cos 8\,\theta + \cos 2\,\theta$, entonces

$$4\,(\cos 3\,\theta \cos 5\,\theta) = 2\,(\cos 8\,\theta + \cos 2\,\theta) = y_2$$

Por lo tanto, $\quad 4\,(\cos 3\,\theta\,\cos 5\,\theta) = \tan\,(\phi - \frac{\pi}{4})\,.$ ■

2.11 Construir un polígono regular de 17 lados con regla y compás inscrito en una circunferencia C de radio 1 con centro en $O = (0, 0)$.

Construcción:

1. Sean $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ radios perpendiculares de la circunferencia C.
2. Sea I un punto en $\overline{OB}$ tal que $d(O, I) = \frac{1}{4}\, d(O, B)$.
3. Sea E un punto sobre $\overline{OA}$ tal que $\angle OIE = \frac{1}{4}\,\angle OIA$.
4. Construir un punto F en $\overline{QO}$, con $\overline{QA}$ diámetro de C,

   de modo que $\angle EIF = \frac{\pi}{4}$.
5. Trazar la circunferencia C_1 con diámetro $\overline{AF}$. Sea K el punto de

   intersección de C_1 con $\overline{OB}$.
6. Con centro en E y radio $d(E, K)$ trazar la circunferencia C_2.

   Sean N_3 y N_5 los puntos de intersección de C_2 con $\overline{QA}$.

7. Trazar perpendiculares a $\overline{QA}$ que pasen por los puntos N_3 y N_5 respectivamente. Sean P_3 y P_5 las intersecciones de estas perpendiculares con la circunferencia C (ver fig. 2.11).
8. Sea P_4 la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle P_3OP_5$ con el *arco* P_3P_5.

Se tiene que, el segmento $\overline{P_3P_4}$ es el lado de un polígono regular de 17 lados inscrito en la circunferencia C.

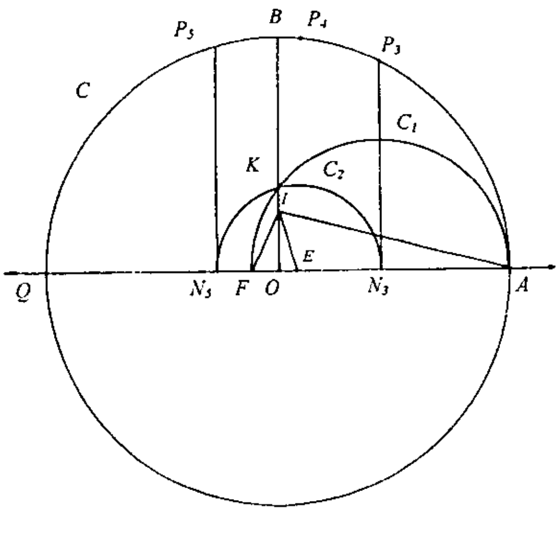

Figura 2.11

Justificación. Como ángulo OIA es menor que $\frac{\pi}{2}$ y $tan\ \angle OIA = 4 = tan\ 4\ \phi$, entonces $4\ \phi = \angle OIA$ y por consiguiente $\angle\ OIE = \phi$.

Se tiene que $\quad 2\ (cos\ \angle AOP_3 + cos\ \angle AOP_5) = 2\ (\frac{\overline{ON_3}}{\overline{OP_3}} - \frac{\overline{ON_5}}{\overline{OP_5}})$ (ver fig. 2.11)

Como $\overline{OP_3} = \overline{OA}$ y $\overline{OP_5} = \overline{OA}$, entonces

$$2\,(\cos\angle AOP_3 + \cos\angle AOP_5) = 2\,(\frac{\overline{ON_3}}{\overline{OA}} - \frac{\overline{ON_5}}{\overline{OA}}) = 2\,(\frac{\overline{ON_3} - \overline{ON_5}}{\overline{OA}})$$

Como $\overline{N_5E} = \overline{EN_3}$ y $\overline{N_5E} = \overline{N_5O} + \overline{OE}$, entonces $\overline{N_5O} = \overline{EN_3} - \overline{OE}$.

$\overline{ON_3} = \overline{OE} + \overline{EN_3}$, de donde

$$2\,(\cos\angle AOP_3 + \cos\angle AOP_5) = 2\,\frac{\left((\overline{OE} + \overline{EN_3}) - (\overline{EN_3} - \overline{OE})\right)}{\overline{OA}}$$

$$= 2\,\frac{(2\,\overline{OE}\,)}{\overline{OA}} = 4\,\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}$$

Como $\overline{OI} = \frac{1}{4}\overline{OA}$, $4\,\overline{OI} = \overline{OA}$, entonces

$$2\,(\cos\angle AOP_3 + \cos\angle AOP_5) = 4\,\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} = \frac{4\,\overline{OE}}{4\,\overline{OI}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OI}} = \tan\phi\ .$$

También se tiene que

$$4\,(\cos\angle AOP_3 \cos\angle AOP_5) = -4\,\frac{\overline{ON_3}\cdot\overline{ON_5}}{\overline{OA}\cdot\overline{OA}} = -4\,\frac{(\overline{OK})^2}{(\overline{OA})^2}$$

$$= -4\,\frac{(\overline{OF})(\overline{OA})}{(\overline{OA})^2} = -4\,\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}}$$

$$= \frac{-4\,\overline{OF}}{\frac{1}{4}\overline{OI}} = \frac{-\overline{OF}}{\overline{OI}} = \tan(\phi - \frac{\pi}{4})$$

Si $\theta = \frac{2\pi}{17}$, hemos visto que las parejas $S_1 = (\cos 3\,\theta, \cos 5\,\theta)$ y

$S_2 = (\cos \angle AOP_3, \cos \angle AOP_5)$ son soluciones del sistema de ecuaciones

$$x + y = \tan \frac{\phi}{2}$$

$$4\,xy = \tan\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right),$$

que sólo tiene una solución $S = (r, t) \in R^2$, con $r > 0$, $t < 0$. Por lo tanto $\cos 3\,\theta = \cos \angle AOP_3$ y $\cos 5\,\theta = \cos \angle AOP_5$.

Como $0 < 3\,\theta < \frac{\pi}{2}$ y $0 <$ *ángulo* $AOP_3 < \frac{\pi}{2}$, entonces $\angle AOP_3 = 3\theta$.

Ya que $\frac{\pi}{2} < 5\,\theta < \pi$ y $\frac{\pi}{2} <$ *ángulo* $AOP_5 < \pi$, se tiene que $\angle AOP_5 = 5\theta$, por lo tanto, A, P_3 y P_5 son el primero, cuarto y sexto vértices de un polígono regular de 17 lados inscrito en la circunferencia C.

Como $\angle AOP_5 - \angle AOP_3 = 2\theta$, y P_4 es la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle P_3OP_5$ con el arco $P_3\,P_5$, entonces el ángulo $\angle P_3OP_4 = \theta$, por lo tanto, el segmento $\overline{P_3P_4}$ es uno de los lados de un polígono regular de 17 lados, inscrito en la circunferencia C. Los otros vértices se construyen fácilmente. ■

Es importante hacer resaltar que la construcción con regla y compás de un polígono regular de 15 lados es posible porque se pueden construir con regla y compás polígonos regulares de 3 y 5 lados, además de que los números 3 y 5 son primos diferentes.

Como se pueden construir con regla y compás polígonos regulares de 3 lados, de 5 lados y 17 lados, y como 51 es el producto de 3 y de 17, 85 es el producto de 5 y 7, y 255 es el producto de 3, 5, y 17, entonces los polígonos regulares de 51 lados, de 85 lados y de 255 lados se pueden construir con regla y compás.

El siguiente resultado se debe a Gauss.

Teorema. Un polígono regular de n lados se puede inscribir en un círculo dado C con regla y compás si, y sólo si, $n = 2^r p_1 p_2 \ldots p_s$ con $r \geq 0$ y $s \geq 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ primos diferentes de la forma

$$p_i = 2^{2^{r_i}} + 1$$

La demostración de este teorema se puede ver en [15]. ■

En 1640 P. Fermat observó que los números $F(n) = 2^{2^n} + 1$ con $n = 0, 1, 2, 3, 4$ eran primos ($F(0) = 3$, $F(1) = 5$, $F(2) = 17$, $F(3) = 257$, $F(4)=65537$), y conjeturó que todos los números $F(n)$ eran primos para todo $n \geq 0$. Euler probó en 1732 que $F(5)$ no era primo, mostrando que $F(5)= (641)(6\ 700\ 417)$. Hasta ahora no se ha encontrado un primo de la forma $F(n)$ para $n > 4$.

En virtud del Teorema anterior, es posible construir polígonos regulares de *257* y *65 537* lados. Si la construcción del polígono regular de 17 lados es mucho más complicado que la del pentágono, la construcción del polígono regular de 257 lados es aún más complicada. En 1832 F.J. Richelot [6] publicó una investigación sobre la construcción del polígono regular de 257 lados. El profesor Hermes [6] de Lingen trabajó sobre la construcción del polígono regular de 65537 lados; él trabajó durante 10 años en dicha construcción y con los desarrollos algebraicos asociados con éste. Los originales de este trabajo, que llenaron un cajón de buen tamaño, aún se encuentra en la Universidad de Göttingen.

CAPÍTULO 3

IMPOSIBILIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS CLÁSICOS DE LOS GRIEGOS SOBRE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS

El objetivo principal de este capítulo es demostrar la imposibilidad de resolver con sólo regla y compás los problemas siguientes: duplicación del cubo, trisección de un ángulo de 60° y la cuadratura del círculo.

Sea $\phi \neq X \subset R^2$

Se recuerda que $\mathbf{P} \in R^2$ es construible con regla y compás en un paso a partir de **X**, si **P** es la intersección de dos rectas que pasan cada una de ellas por dos puntos de **X**, o si **P** es la intersección de una recta que pasa por dos puntos de **X** y de un círculo con centro en un punto de **X** y radio la distancia entre dos puntos de **X**, o si **P** es la intersección de dos círculos como los descritos anteriormente.

Recordemos también que $\mathbf{P} \in R^2$ es construible a partir de **X**, si existen $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_n} \in R^2$ tales que

$\mathbf{P} = \mathbf{P_n}$ y $\mathbf{P_i}$ es construible en un paso a partir de $\mathbf{X_{i-1}}$ para cada i = 1, 2, ..., n

con $\mathbf{X_0} = \mathbf{X}$; $\mathbf{X_i} = \mathbf{X_{i-1}} \cup \{\mathbf{P_i}\} = \mathbf{X} \cup \{\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \ldots, \mathbf{P_i}\}$ para cada i = 1, 2, ..., n.

Si $\mathbf{Y}_i = \{x \in \mathbf{R} \,/\, \text{existe } z \in \mathbf{R} \text{ con } (x, z) \in \mathbf{X}_i \text{ ó } (z, x) \in \mathbf{X}_i\}$, sea $\mathbf{F}_i$ el subcampo de $\mathbf{R}$ generado por $\mathbf{Y}_i$ para cada i = 0, 1, 2, ..., n.

Debe ser claro que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{F}_0 \subset \mathbf{F}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{F}_n \subset \mathbf{R}$.

Definición . Un número real positivo *r es construible a partir* de **X**, si *r* es la distancia entre dos puntos construibles a partir de X.

Sean $\phi \neq X \subset \mathbf{R}^2$, y **F** el subcampo de **R** generado por el conjunto formado por las componentes de las parejas que pertenecen a X .

Sea $P = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ construible en un paso a partir de X, entonces $P = (u, v)$ es solución de un sistema de ecuaciones de alguno de los siguientes tipos :

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f, \end{array}\right. \quad (1) \qquad \text{con } a, b, c, d, e, f \in F$$

$$\left.\begin{array}{l} ax + by = c \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \end{array}\right. \quad (2) \qquad \text{con } a, b, c, d, e, f \in F$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \end{array}\right. \quad (3) \qquad \text{con } a, b, c, d, e, f \in F$$

Si $P = (u, v)$ es una solución del sistema (3), entonces como

$$u^2 + v^2 + au + bv + c = 0$$

$$u^2 + v^2 + du + ev + f = 0$$

Se tiene que (u, v) satisface

$$(a - d)u + (b - c)v + (c - f) = 0$$ y por lo tanto el caso (3)

se reduce al caso (2).

En el caso (1), u y v se obtienen a partir de a, b, c, d, e y f aplicando a estos números un número finito de operaciones del campo **F**, y en este caso $u, v \in \mathbf{F}$.

En el caso (2) u ó v se obtienen resolviendo una ecuación de grado 2 con coeficientes en el campo **F** que se obtiene a partir de a, b, c, d, e y f realizando operaciones del campo **F** , por lo tanto, u y v se obtienen a partir del campo **F** realizando operaciones del campo **F** y extrayendo una raíz cuadrada de un número positivo del campo **F**, en este caso u y $v \in$ **F** ó $u \notin$ **F** y $v \notin$ **F** .

Si $\mathbf{P} = (u , v) \in \mathrm{R}^2$ donde u y v se obtienen a partir del campo **F** realizando operaciones del campo **F** y extrayendo raíces cuadradas de números reales positivos construibles, entonces **P** es construible a partir **X**. De lo dicho anteriormente se sigue el siguiente resultado .

Teorema . Sea $\phi \neq \mathbf{X} \subset \mathrm{R}^2$ y **F** el subcampo de R generado por el conjunto formado por las componentes de las parejas que pertenecen a **X** . Una condición necesaria y suficiente para que un punto $\mathbf{P} \in \mathrm{R}^2$ sea construible con regla y compás a partir de **X**, es que las coordenadas del punto P se obtengan a partir de F, mediante sucesivas combinaciones de operaciones de campo y de extracción de raíces cuadradas de números reales positivos construibles a partir de **X**.

Definición. Si **F** es un subcampo del campo **E** , se dice que **E** es una extensión del campo **F** y se denota como **E : F** .

Observación. Si **E : F** es una extensión de campos, **E** resulta ser un espacio vectorial sobre el campo **F** con las operaciones de suma y producto de **E**.

Definición. El *grado de la extensión* **E : F** denotado por [**E : F**], es la dimensión del espacio vectorial **E** , sobre el campo **F**.

Lema. Si **L** es un subcampo de **M** y **M** es un subcampo de **N**, entonces

$$[\mathbf{N} : \mathbf{L}] = [\mathbf{N} : \mathbf{M}]\ [\mathbf{M} : \mathbf{L}]$$

Demostración. Si $\beta = \{ x_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{I} \}$ es base **N** sobre **M** y $\delta = \{ y_\gamma \mid \gamma \in \mathbf{J} \}$ es base de **M** sobre **L**, entonces $\Delta = \{ x_\alpha y_\gamma \mid \alpha \in \mathbf{I}, \gamma \in \mathbf{J} \}$ es base de **N** sobre **L** . ■

Teorema. Sea $\phi \neq \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^2$ y **P** construible a partir de **X**, siguiendo las definiciones y notaciones anteriores, se tiene que $[\mathbf{F}_i : \mathbf{F}_{i-1}] = 1$ ó $[\mathbf{F}_i : \mathbf{F}_{i-1}] = 2$.

Demostración. Recuérdese que $\mathbf{F}_i$ es el subcampo de **R** generado por las componentes de las parejas de $\mathbf{X}_i$.

Sea $\mathbf{P}_i = (u_i, v_i)$. Si $u_i, v_i \in \mathbf{F}_{i-1}$, entonces $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i-1}$ y en este caso $[\mathbf{F}_i : \mathbf{F}_{i-1}] = 1$,

si $u_i \notin \mathbf{F}_{i-1}$, entonces $u_i = a + b\sqrt{c}$ con a, b, c $\in \mathbf{F}_{i-1}$, $\sqrt{c} \notin \mathbf{F}_{i-1}$, entonces

u_i satisface una relación de la forma

$u_i^2 + Au_i + B = 0$ con A, B $\in \mathbf{F}_{i-1}$

y como $v_i = r + su_i$ con $r, s \in \mathbf{F}_{i-1}$,

el subcampo $\mathbf{F}_i$ de **R** que es generado por $\mathbf{F}_{i-1} \cup \{ u_i, v_i \}$ coincide con el subcampo de **R** generado por $\mathbf{F}_i \cup \{ u_i \}$. Por lo tanto, cada elemento de $\mathbf{F}_i$ es de la forma $\alpha + \beta u_i$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_{i-1}$. Además $\{ 1, u_i \}$ es un subconjunto de $\mathbf{F}_i$ linealmente independiente sobre $\mathbf{F}_{i-1}$ y por lo tanto $\{ 1, u_i \}$ es base de $\mathbf{F}_i$ sobre $\mathbf{F}_{i-1}$ y por consiguiente $[\mathbf{F}_i : \mathbf{F}_{i-1}] = 2$ ■

Corolario. Con las anotaciones anteriores $[\mathbf{F}_n : \mathbf{F}_0] = 2^s$ para algún $0 \leq s \leq n$.

Notación. el subcampo generado por $\mathbf{F} \cup \mathbf{Y}$ se denota por $\mathbf{F}(\mathbf{Y})$ y por $\mathbf{F}(u)$.

Si $\mathbf{Y} = \{ u \}$.

Corolario. Si $\mathbf{P} = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ es construible con regla y compás a partir de $\phi \neq \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^2$ y $\mathbf{F}_0$ es el campo generado por las coordenadas de los puntos de **X**, entonces $[\mathbf{F}_0(u) : \mathbf{F}_0]$ y $[\mathbf{F}_0(v) : \mathbf{F}_0]$ son potencias de 2.

Teorema. Si F es subcampo de $\mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbf{F}[x]$ es un polinomio irreducible sobre **F** y $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de $f(x)$ entonces $[\mathbf{F}(\alpha):\mathbf{F}]$ = grado de $f(x)$.

Demostración. Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, entonces $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ es una base para el **F** - espacio vectorial **F** (α). ■

Teorema. Si **E : F** es una extension de campos, [**E : F**]es finito y $\alpha \in \mathbf{E}$, entonces existe $f(x) \in F[x]$, $f(x) \neq 0$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir α es algebraico sobre **F**.

Demostración. Si $[E:F] = n$, esto implica que $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\} \subset E$ es linealmente dependiente, por lo tanto existen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in F$ no todos cero tales que $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$, esto es α es raíz de $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, y $f(x) \neq 0$ ■

La imposibilidad de duplicar el cubo.

Teorema. Dado un cubo, no es posible construir con regla y compás el lado de un cubo que tenga el doble del volumen del cubo original.

Demostración. Sean (0, 0) y (1, 0) los puntos extremos del lado del cubo dado. Sean (0, 0), y (α , 0) los puntos extremos del lado del cubo cuyo volumen sea el doble, lo que implica que $\alpha^3 = 2$ y $\alpha^3 - 2 = 0$.

Como α es una raíz del polinomio irreducible (2) $m(x) = x^3 - 2$ sobre Q, esto implica que $[Q(\alpha): Q] = 3$, por lo tanto (α , 0) no es construible a partir de $X = \{(0,0), (1,0)\}$.

---

(2) $f(x) = x^3 - 2$ es irreducible sobre Q porque no tiene raíces racionales .

La imposibilidad de la trisección de un ángulo.

Se sabe que existen algunos ángulos como el de 90° y 180° que pueden ser trisectados con regla y compás. Se va a demostrar que no siempre es posible trisectar con regla y compás un ángulo dado. Por ejemplo, el ángulo $\frac{\pi}{3}$ no puede ser trisectado con regla y compás.

Teorema. Es imposible , usando sólo regla y compás, trisectar el ángulo $\frac{\pi}{3}$.

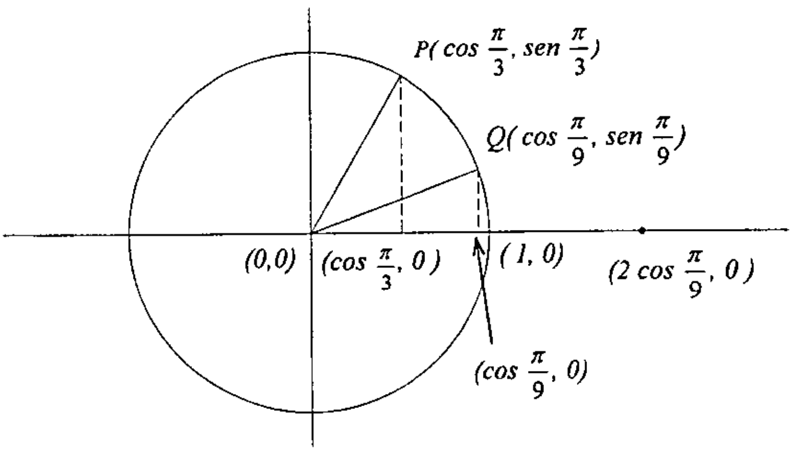

Figura 3.1

Si $X = \{ (0,0), (1,0), (\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) \}$

Si se quiere construir con regla y compás un punto P a partir de X , esto es equivalente a construir con regla y compás un punto P a partir de

$X' = \{ (0,0), (1,0), (\cos\frac{\pi}{3}, 0) \}$.

A partir de X' se quiere construir el punto Q = (cos $\frac{\pi}{9}$, sen $\frac{\pi}{9}$) , pero esto es equivalente a construir el punto

Q' = (cos $\frac{\pi}{9}$, 0) , que es equivalente a construir el punto (2 cos $\frac{\pi}{9}$, 0) .

Sea $\beta = 2\cos\frac{\pi}{9}$, se sabe que

$\cos 3\theta = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$

Si $3\theta = \frac{\pi}{3}$, entonces

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{9}$$
$$\frac{1}{2} = 4\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{9}$$
$$1 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 - 3\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right)$$

$\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right)^3 - 3\left(2\cos\frac{\pi}{9}\right) - 1 = 0$, entonces

$\beta^3 - 3\beta - 1 = 0$ lo que implica que

β es raiz del polinomio $f(x) = x^3 - 3x - 1$, que es irreducible sobre Q , lo que implica que [Q (β) : Q]= 3 , de donde se sigue que (β , 0) no es construible con regla y compás a partir de X' = { (0 , 0) , (1 , 0) , (cos $\frac{\pi}{3}$, 0) }, por lo tanto $\frac{\pi}{3}$ no puede trisectarse con regla y compás. ■

La imposibilidad de cuadrar el círculo con regla y compás.

El matemático alemán **Karl Louis Ferdinand von Lindeman** (1852-1939), demostró [16] que el número π es un número trascendente, o no algebraico; esto es, no existe un polinomio con coeficientes enteros cuya raíz sea π .

Este resultado que obtuvo Lindeman resolvió uno de lo tres famosos problemas de construcción con regla y compás que se habían planteado los antiguos griegos, el de la cuadratura del círculo.

Teorema. No es posible construir con regla y compás un cuadrado que tenga área igual a la de un círculo dado.

Demostración. Supóngase que el radio del círculo dado es 1, entonces el círculo dado tiene área π.

Construir con regla y compás un cuadrado de área π a partir del círculo dado, es equivalente a construir con regla y compás un cuadrado de área π a partir de $X = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Construir con regla y compás un cuadrado de área π a partir de X, es equivalente a construir con regla y compás el punto $(\sqrt{\pi}, 0)$ a partir de X.

$(\sqrt{\pi}, 0)$ es construible con regla y compás a partir de X si, y sólo si, $(\pi, 0)$ es construible con regla y compás a partir de X.

Si $(\pi, 0)$ es construible con regla y compás a partir de X, entonces el grado de la extensión $Q(\pi){:}Q$ es una potencia de 2, lo que implica que π es algebraico lo que es una contradicción. Por lo tanto, no es posible construir con regla y compás un cuadrado de área π. ■

Imposibilidad de construir con sólo regla y compás un heptágono.

Teorema. Es imposible dividir una circunferencia en siete partes iguales usando regla y compás.

Para demostrar este Teorema, primero probaremos el siguiente Lema.

Lema. Si $B = \frac{2\pi}{7}$, $y = 2 \cos B$, entonces y es raíz del polinomio

$p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ y $p(x)$ es irreducible sobre Q.

Demostración del Lema. $P(x)$ es irreducible sobre Q porque $p(x)$ no tiene raíces racionales, así que solo falta probar que y es raíz de $p(x)$.

$$\begin{aligned} \cos 4B &= 2(\cos 2B)^2 - 1 \\ &= 2(2(\cos B)^2 - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\cos 4B = \cos(2\pi - 4B) = \cos(7B - 4B) = \cos 3B$$

Como $\cos 3B \;=\; 4(\cos B)^3 - 3\cos B$ por lo tanto,

$$\begin{aligned} 2(2(\cos B)^2 - 1)^2 - 1 &= 4(\cos B)^3 - 3\cos B \\ (2^2(\cos B)^2 - 2)^2 - 2 &= 2^3(\cos B)^3 - 3(2\cos B) \\ ((2\cos B)^2 - 2)^2 - 2 &= (2\cos B)^3 - 3(2\cos B) \end{aligned}$$

Si $y = 2\cos B$ tenemos que

$$\begin{aligned} (y^2 - 2)^2 &= y^3 - 3y + 2 \\ y^4 - 4y^2 &= y^3 - 3y - 2 \\ y^2(y^2 - 4) &= (y-2)(y^2 + 2y + 1) \\ y^2(y-2)(y+2) &= (y-2)(y^2 + 2y + 1) \end{aligned}$$

y como $y - 2 \neq 0$ porque $y = 2\cos B = 2\cos\dfrac{2\pi}{7} \neq 2$,

entonces $y^2(y+2) = y^2 + 2y + 1$

$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$ es decir

y es raíz de $x^3 + x^2 - 2x - 1 = p(x)$. ■

Demostración del Teorema. Si pudiéramos construir dicho polígono, entonces se podría construir el punto $P(\cos\dfrac{2\pi}{7}, sen\,\dfrac{2\pi}{7})$, y esto es equivalente a construir un segmento de longitud $y = 2\cos\dfrac{2\pi}{7}$ y como y es raíz de $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ que es irreducible sobre Q, entonces $[\,Q(y) : Q\,] = 3$ lo que implica que y no es construible. ■

Imposibilidad de construir con sólo regla y compás un eneágono.

Teorema. Usando regla y compás es imposible dividir una circunferencia en nueve arcos iguales.

Demostración. Si pudiéramos dividir la circunferencia en nueve partes iguales, entonces tendríamos un ángulo de 40° y como los ángulos se pueden bisectar con regla y compás, entonces habríamos construido con regla y compás un ángulo de 20°, esto es, habríamos trisectado con regla y compás un ángulo de 60°, lo que es imposible. ■

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS CLÁSICOS DE LOS GRIEGOS DE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON EL USO DE OTRAS HERRAMIENTAS

Si bien los problemas clásicos de los griegos de construcción con regla y compás (duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo) no se pueden resolver usando solamente regla y compás, si se aceptan algunos procedimientos adicionales, estos problemas se pueden resolver.

En este capítulo presentaremos algunas soluciones clásicas de estos problemas.

Sobre la duplicación del cubo.

Hipócrates de Quíos (460 a.c.) célebre matemático griego, descubrió que el problema de la duplicación del cubo se podía reducir a la construcción de dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta dados, es decir, a encontrar dos segmentos de recta de longitud x e y tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ con a y b la longitud de los segmentos de recta dados. Veamos el porque de esta afirmación.

Sea a, b dos segmentos dados; x e y segmentos tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b} \quad (1)$$

De (1) se sigue que :

$$x^2 = a y \quad (2),$$

$$y^2 = b x \quad (3) \quad \text{y}$$

$$xy = a b \quad (4)$$

De (2) y (4) , se tiene:

$$(x^2)(x y) = (a y)(a b)$$

$$x^3 y = a^2 b y$$

$$x^3 = a^2 b \quad (5)$$

Si tomamos $b = 2a$, entonces de (5), se tiene:

$$x^3 = a^2 (2a)$$

Por lo tanto, $x^3 = 2a^3$ y $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = 2$

Veamos como utilizando lo anterior se puede resolver el problema de la duplicación del cubo.

Si c es el lado de un cubo dado y se quiere encontrar un cubo de lado d, de volumen el doble que el cubo dado, entonces se necesita que

$d^3 = 2c^3$, y esto se cumple si, y sólo si, $\left(\frac{d}{c}\right)^3 = 2$.

Como $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = 2$, si encontramos d tal que $\frac{d}{c} = \frac{x}{a}$, entonces se obtiene

$$\left(\frac{d}{c}\right)^3 = \left(\frac{x}{a}\right)^3 = 2$$

y se tiene el problema resuelto de la duplicación del cubo.

Observación. Si se tuviera un instrumento que nos permitiera trazar parábolas ó hipérbolas y parábolas, al intersectar las parábolas $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$ o al intersectar la parábola $x^2 = ay$ y la hipérbola $xy = 2a^2$ tendríamos un punto (x, y) tal que $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = 2$ y por lo visto en el párrafo anterior tendríamos resuelto el problema de la duplicación del cubo.

Resolución del problema de la duplicación del cubo por medio de la Cisoide de Diocles (180 a.c.)

Construcción de la Cisoide de Diocles.

La Cisoide se puede construir de la siguiente manera

1. Trazar la circunferencia C_0 con centro en el punto O. (ver fig. 4.1)
2. Sean AB y CD diámetros perpendiculares de la circunferencia C_0
3. Sea $r = d(O, B)$ la longitud del radio de la circunferencia C_0
4. Sea E un punto que se mueve en el *arco AB* , y F un punto del *arco AB* tal que *arco EC* = *arco CF*.
5. Trazar los segmentos perpendiculares $\overline{EH}$ *y* $\overline{FG}$ al diámetro AB de la circunferencia C_0 con H y G en $\overline{AB}$.
6. Trazar el segmento que pasa a través de los puntos A y F.
7. Sea K el punto de intersección de los segmentos $\overline{EH}$ *y* $\overline{AF}$.

La *Cisoide* es el lugar geométrico de todos los puntos K que se obtienen al recorrer E el *arco AB* .

Observación. La recta ℓ tangente C_0 en B es una asíntota de la ***Cisoide.***

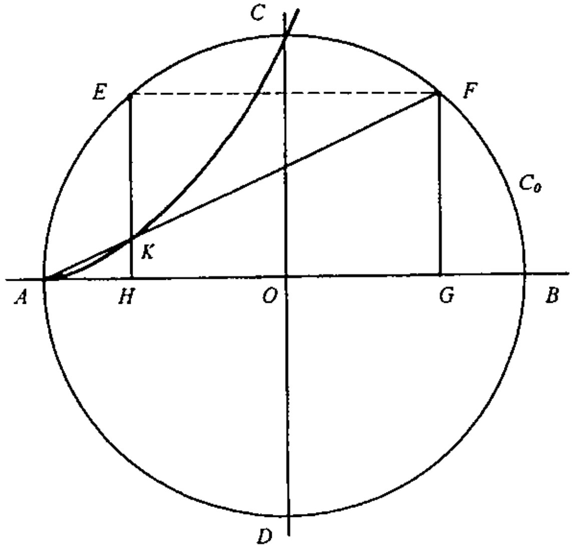

Figura 4.1

Con la ayuda de la *Cisoide* se puede resolver el problema de ***la duplicación del cubo***; veamos como:

Sea M punto medio de OC, $d(O, M) = \frac{1}{2}r$ (ver fig. 4.2).

Sea P la intersección de la recta que pasa por B y M con la Cisoide.

Trazar un segmento que pase a través de los puntos A y P, y prolongarlo hasta que intersecte a la circunferencia C_0 en el punto Q y a la recta ℓ en R.

A través de los puntos P y Q , trazar las rectas ℓ_1 y ℓ_2 perpendiculares al segmento $\overleftrightarrow{AB}$ y sean S y L la intersección de ℓ_1 con C_0 , y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente y T la intersección de ℓ_2 con $\overleftrightarrow{AB}$.

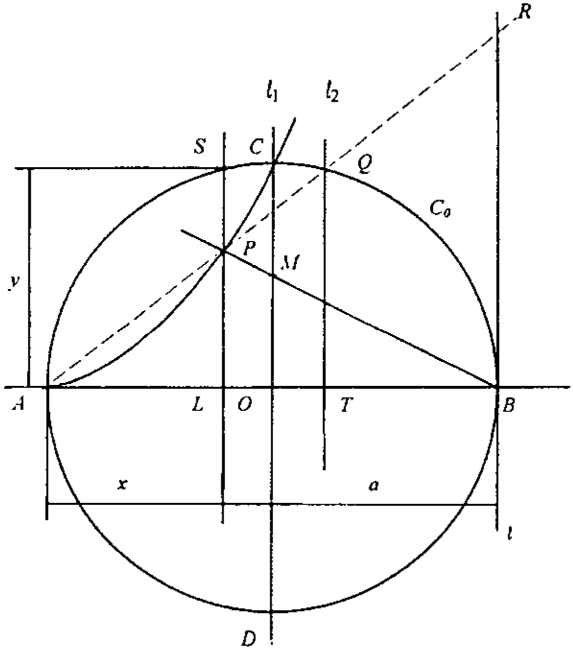

Figura 4.2

Sea $d(B, L) = a$, $d(S, L) = y$, $d(A, L) = x$.

Por construcción los triángulos ΔBOM y ΔBLP son semejantes, entonces sus lados son proporcionales .

Esto es,

$$\frac{\overline{PL}}{\overline{BL}} = \frac{\frac{1}{2}r}{r}$$

$$\frac{\frac{1}{2}r}{r} = \frac{\overline{PL}}{a}$$

$$\overline{PL} = \frac{a(\frac{1}{2}r)}{r}$$

$$\overline{PL} = \frac{1}{2}a$$

Se tiene que : $\Delta APL \sim \Delta AQT$

$$\Delta AQT \sim \Delta BSL$$

$$\Delta ASL \sim \Delta BSL$$

$\Delta ALP \sim \Delta ASL$ lo que implica

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{SL}} = \frac{\overline{SL}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{PL}}$$

$$\frac{a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{1}{2}a}$$

Como $\quad \frac{a}{y} = \frac{y}{x}, \quad \frac{a}{y} = \frac{x}{\frac{1}{2}a}$

entonces $\quad y^2 = ax, \quad xy = \frac{a^2}{2} \quad$ de donde

$$\frac{y^2}{a}y = \frac{a^2}{2}, \quad 2y^3 = a^3, \quad \left(\frac{a}{y}\right)^3 = 2$$

Si l es el lado del cubo dado y se quiere encontrar un cubo con lado k, tal que, $k^3 = 2\,l^3$, y encontramos un segmento de longitud k, tal que,

$$\frac{k}{l} = \frac{a}{y}, \text{ entonces } \left(\frac{k}{l}\right)^3 = \left(\frac{a}{y}\right)^3 = 2$$

como $k = \frac{a\,l}{y}$, entonces $k^3 = 2\,l^3$

y se tiene la duplicación del cubo. ■

Trisección de un ángulo dado usando una regla graduada y un compás.

Este método se debe a Arquímedes(225 a.c.) [14].

Si $\theta = \angle EOF$, construir un ángulo x tal que $3x = \theta$.

Construcción:

1. Trazar la recta ℓ_0 que pasa por los puntos O y E.(ver fig. 4.3).
2. Trazar una circunferencia C_0 con centro en O y radio $r = d(O, F)$. Sean A y B las intersecciones de C_0 con la recta ℓ_0.

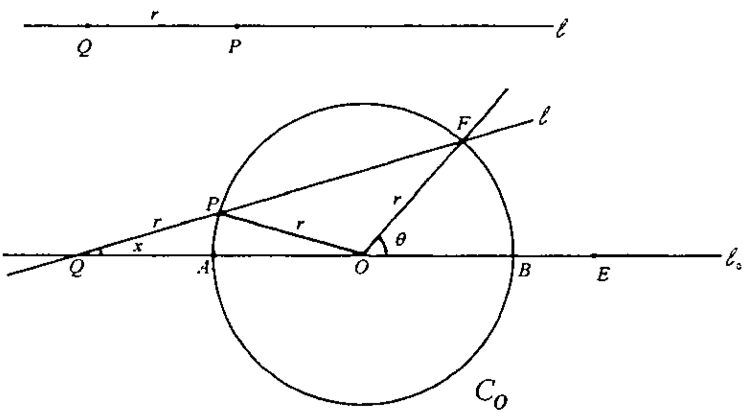

Figura 4.3

3. Sea ℓ una regla dada sobre la cual elegimos dos puntos Q y P tales que $d(Q, P) = r$
4. Sobreponer esta regla ℓ en la circunferencia C_0, y deslizarla de tal forma que el punto P coincida con un punto de C_0 diferente de F que este en el

arco AF y el punto Q coincida con un punto de la recta l_0 y que, al mismo tiempo la regla l pase por el punto F.

Al poner es esta posición a la regla l, se construye el ángulo $\angle FQA$ que es un tercio del ángulo dado $\angle EOF$.

Sean x y θ las medidas correspondientes a los ángulos $\angle FQA$ y $\angle EOF$.

Por demostrar que $x = \frac{1}{3}\,\theta$

Demostración. Por construcción el ΔQPO es isósceles ya que ,

$d(Q, P) = d(P, O) = r$ que es el radio de la circunferencia C_0.

Por lo que

$$\angle PQO = \angle POQ = x \quad (1)$$

Por lo tanto, $\angle QPO = 180° - 2x \quad (2)$

Puesto que $\angle OPF$ es un ángulo exterior del ΔQPO, tenemos que $\angle OPF = 2x$.

El ΔPOF es isósceles porque $d(P, O) = d(O, C) = r$, que es el radio de la circunferencia C_0. En consecuencia

$$\angle OPF = \angle PFO, \text{ y entonces } \angle PFO = 2x$$

Por lo tanto , $\angle POF = 180° - 4x \quad (3)$

Como los puntos A, O y B son colineales, podemos establecer que :

$$\angle POQ + \angle POF + \angle FOB = 180° \quad (4)$$

sustituyendo (1) , (2) y (3) en (4), obtenemos :

$$\begin{aligned} x + 180° - 4x + \theta &= 180° \\ -3x + \theta &= 180° - 180° \\ -3x + \theta &= 0 \\ \theta &= 3x \\ x &= \frac{1}{3}\,\theta \end{aligned}$$

Por lo tanto , $\angle CQA = \frac{1}{3}\angle EOF$. ■

Resolución de la cuadratura del círculo usando la Cuadratriz de Hippias.

Construcción de la Cuadratriz de Hippias [3].

La Cuadratriz se puede construir de la siguiente forma:

1. Consideremos un cuadrado con vértices *A, B, C* y *D.* (ver fig. 4.4).
2. Sea *BED* un *arco* de un círculo C_0 con centro en *A* y radio $r = d(A, B)$
3. Para generar el lugar geométrico de la Cuadratriz, se parte de las siguientes condiciones:
   i) El radio del círculo C_0 que es $r = d(A, B)$, se mueve a una velocidad uniforme de la posición *AB* a la posición *AD* alrededor del punto *A*
   ii) Al mismo tiempo *BC*, también se mueve a velocidad uniforme, de la posición *BC* a la posición *AD*, siempre en forma paralela.
4. El radio *r* y la recta *BC* empiezan a moverse en el mismo instante y en su última posición coinciden con *AD* al mismo tiempo.

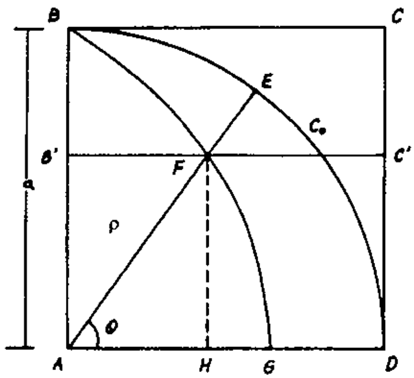

Figura 4.4

[3] **Hippias de Elis**, nació hacia el año 460 a.c. y fue contemporáneo de Sócrates. El inventó una curva especial llamada Cuadratriz, que sirve para resolver el problema de la trisección del ángulo y el de la cuadratura del círculo.

5. Sea $B'C'$ la posición de la recta BC y AE la posición del radio r durante este movimiento en un tiempo t. Sea F la intersección de $B'C'$ con AE.

El Lugar geométrico de estos puntos F determinado por el tiempo t se llama ***Cuadratriz***.

Se sigue de la definición anterior que

$$\frac{arco\ BED}{arco\ ED} = \frac{AB}{FH} \quad (1)$$

y como

$$\frac{\angle BAD}{\angle EAD} = \frac{arcoBED}{arcoED}$$

entonces

$$\frac{\angle BAD}{\angle EAD} = \frac{arcoBED}{arcoED} = \frac{AB}{FH}$$

con H en AD tal que FH es perpendicular a AD en cada instante t.

Sea $G = \lim_{t \to t_0} F$, donde G es un punto sobre el segmento AD con t_0 el tiempo que tarda AB en llegar a AD que coincide con el tiempo que tarda BC en llegar a AD.

El **teorema de Dinóstrato** [4] afirma que :

$$\frac{arcoBED}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

Esta afirmación la podemos justificar ahora de la siguiente forma:

Si en la figura 3.4 la $d(A, F) = \rho$, $a = d(A, B)$ y $\theta = \angle FAD = \angle EAD$,

entonces $FH = \rho\, Sen\ \theta$ y en virtud de (1) se tiene que

[4] **Dinóstrato** (c. 350 a.c.) utilizó la Cuadratriz de Hipias para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{\theta} = \frac{a}{\rho\, Sen\, \theta}$$ lo que implica el **Teorema de Dinóstrato.**

De la igualdad anterior tenemos que

$$\frac{Sen\,\theta}{\theta} = \frac{a}{\rho \frac{\pi}{2}}$$, si $\theta \to 0$ es claro que $\rho \to \overline{AG}$ y como

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{Sen\,\theta}{\theta} = 1$$ entonces

$$1 = \frac{a}{\overline{AG}\frac{\pi}{2}}$$ lo que implica que $\pi = \frac{2a}{\overline{AG}}$. ■

Teorema. Si tenemos un círculo de radio a, podemos construir un cuadrado de área πa^2, usando la **Cuadratriz de Hippias.**

Demostración. Siguiendo las notaciones anteriores se tiene que $\pi = \frac{2a}{\overline{AG}}$, de donde se sigue que $a\sqrt{\frac{2a}{\overline{AG}}}$ es el lado del cuadrado. ■

Observación. Usando la Cuadratriz de Hippias, podemos trisectar un ángulo dado θ. En efecto si θ es el ángulo $\angle FAD$, si trisectamos AB' y $AX = \frac{1}{3} AB'$, si trazamos una paralela a AD por el punto X y Q es la intersección de esta paralela con el arco BFD, entonces arco QD es un tercio del arco ED .

Sobre la duplicación del cubo.

El origen de la *duplicación del cubo* está relacionado, según se dice, con una carta que escribió *Eratóstenes a Tolomeo III Evergetes* (245 a.c.). En esta supuesta carta, Eratóstenes señala que la duplicación del cubo ya era conocido en esa época en Atenas.

Sin embargo, existen dos anécdotas más relacionadas con este problema, las cuales han sido vinculadas con el posible origen de la duplicación del cubo.

Una de éstas plantea que un antiguo poeta griego, llevó a escena una tragedia, en la que se representó al mítico Rey Minos, quien habiendo quedado muy descontento con el diseño cúbico de la tumba construida para su hijo Glauco, ordenó que se construyera otra tumba con el doble de las dimensiones de la original, afirmando que esto podía realizarse si se duplicaba cada una de sus dimensiones.

Este error cometido por el poeta por falta de conocimientos matemáticos, llevó a los antiguos geómetras griegos a estudiar el problema con más profundidad, planteándose, cómo se podía duplicar el tamaño de un sólido dado conservando su forma.

La otra anécdota relacionada con el mismo problema, cuenta que los habitantes de Atenas en año 430 a.c. estaban siendo consumidos por una terrible epidemia o plaga, que los llevó a consultar al oráculo en Delos, con la finalidad de saber cómo librarse de ella. El oráculo contestó que si querían eliminar la epidemia que asolaba la ciudad tenían que duplicar el altar con forma cúbica de Apolo.

Para los atenienses la petición del oráculo les pareció razonable de llevar a cabo y construyeron otro altar cúbico de iguales dimensiones y lo colocaron junto al ya existente.

Como los atenienses no entendieron la petición del dios Apolo, la epidemia se volvió más severa por lo que volvieron por segunda vez a consultar al oráculo, y éste les dijo que el dios Apolo estaba muy indignado con ellos, por que su deseo no había sido cumplido, ya que su nuevo altar debía conservar su forma, pero tener el doble del volumen del ya existente.

La construcción de tal altar causó problemas para los atenienses, por lo que recurrieron a la *Academia de Platón* para que los ayudase, y éste los remitió con los geómetras de su tiempo.

Es importante mencionar que este problema fue resuelto de diferentes formas. Por ejemplo:

Hipócrates (440 a.c.) demostró que duplicar el cubo es equivalente a encontrar dos medias proporcionales entre dos líneas rectas dadas.

Arquitas de Tarento (400 a.c.) dá una ingeniosa construcción en tres dimensiones, determinando un punto obtenido de la intersección de tres superficies, (1) un cono recto, (2) un cilindro, (3) un toro de diámetro interior cero. La intersección de las superficies (2) y (3) generan cierta curva, la cual al intersectarse con el cono se obtiene el punto requerido

Eudoxio (370 a.c.) plantéo una solución que lamentablemente se perdió. *Menelao* (350 a.c.) dió dos soluciones del problema y según parece inventó las secciones cónicas para este propósito.

Eratóstenes (230 a.c.) da una construcción mecánica, y al mismo *Platón* se le atribuye una solución.

Otras soluciones para este problema fueron dadas por *Nicodemus*, *Apolonio* (225 a.c.), y *Diocles* (180 d.c.) inventó la curva llamada Cisoide para este fin.

Sobre la trisección del ángulo

Los antiguos geómetras griegos conocían que un segmento de recta se podía dividir en un número entero de partes iguales con sólo regla y compás, también sabían como bisectar un ángulo dado. Posiblemente estos hechos los llevaron al problema de la trisección de un ángulo dado con regla y compás como un caso particular del problema de dividir un ángulo dado en un número entero de partes iguales. También es probable que el problema de la trisección del ángulo surgió al tratar de construir un polígono de nueve lados. Ya que ellos sabían construir un triángulo equilátero, entonces para construir un polígono regular de nueve lados era suficiente dividir en tres partes iguales un ángulo de 120°.

El problema de trisectar con sólo regla y compás un ángulo de 120° es equivalente a trisectar con sólo regla y compás un ángulo de 60°.

Pappus, matemático griego que vivió a finales del siglo III d.c. hace un comentario acerca de la trisección del ángulo, que sus predecesores no tuvieron éxito en la resolución de este problema, porque probaron métodos "planos" (esto es, con recta y círculo solamente), y el problema no es "plano", sino, "sólido" (por lo que se requiere el uso de cónicas ó de algo equivalente).

Es importante mencionar que los antiguos geómetras griegos, al no estar relacionados con las cónicas, ellos reducen el problema de la trisección del ángulo a uno de tipo conocido como de *"aproximación"*, y después descubren la solución de este problema por método de cónicas.

En la búsqueda de la solución de los *"tres problemas famosos de la antigua Grecia"*, se desarrollaron curvas planas entre las cuales están *la cuadratriz* de

Hippias (425 a.c.) y *la espiral* de Arquímedes. Estas se usaron para resolver el problema de la trisección del ángulo como el de la cuadratura del círculo.

Nicomedes (240 d.c.) inventó una curva llamada concoide, con el propósito de resolver el problema de la trisección del ángulo.

Pappus (300 d.c.) es el primero que usa un cono para trisectar un ángulo.

Al paso de los años se inventaron otros instrumentos relacionados con el problema de la trisección del ángulo como lo fue el *tomahawk* (una hacha de guerra de los indios) se desconoce quien fue el inventor, pero este instrumento fue descrito en un libro en el año de 1835 d.c.

Otro ejemplo es la construcción dada en 1525 d.c. por el famoso Albrecht Dürer.

Sobre la cuadratura del círculo

El problema de la cuadratura del círculo es muy antiguo y ejerció una grande atracción para matemáticos y no matemáticos a través de los siglos. Es importante mencionar que el valor de π se encuentra estrechamente relacionado con este problema.

Los primeros intentos por resolverlo se tienen como empíricos, los cuales se dieron antes de que se desarrollase la antigua matemática griega.

Los antiguos egipcios (c. 1800 a.c.) intentaron resolver el problema, tomando el lado del cuadrado igual a $\frac{8}{9}$ del diámetro del círculo dado. El valor que obtienen los egipcios para π es de $\frac{256}{81} = 3.1604\ldots$ Esto se encuentra registrado en *el Papiro de Ahmes* (1550 a.c.) .

Con el florecimiento de la antigua matemática griega, los geómetras griegos no aceptan las soluciones empíricas dadas a este problema, y se dan a la tarea de buscar una solución que sea "exacta" matemáticamente. Primeramente ellos trataron de resolver el problema usando sólo regla y compás, y se dieron cuenta que no era posible, aunque no probaron su imposibilidad. Después lo intentaron empleando curvas planas, como la *Cuadratriz de Hippias*, la *Espiral de Arquímedes, las Lúnulas de Hipócrates*, con estas curvas se puede decir que ellos tuvieron éxito. Otra forma en que trataron de resolver el problema fue por medio de inscribir suscesivos polígonos regulares en el círculo.

Según Plutarco el primer griego que trató de resolver el problema de la *cuadratura del círculo*, fue *Anaxágoras* (c. 499-427 a.c.), pero se desconoce el desarrollo de su trabajo.

Hipócrates de Chios (c. 460 a.c.) contemporáneo de *Anaxágoras*, es el primero que cuadra ciertas lúnulas o figuras en forma de lunas acotadas por dos arcos circulares, con la finalidad de probar la *cuadratura del círculo*.

Antifón (c. 430 a.c.), trató de probar la cuadratura del círculo, inscribiendo polígonos regulares en un círculo y duplicando sucesivamente el número de lados del polígono inscrito, de esta manera se llegaría a construir un polígono cuyos lados coincidirían con la circunferencia del círculo y cuyas áreas sean iguales. De esta forma se podría construir un cuadrado de área igual al del polígono inscrito, y por lo tanto, construir un cuadrado de área igual a la del círculo.

Hippias de Elis (c. 425 a.c.) inventó una curva especial, llamada Cuadratriz, ésta fue utilizada para resolver el problema de la trisección de un ángulo y el problema de la cuadratura del círculo.

El problema de cuadrar el círculo, consiste en construir un cuadrado que tenga la misma área de un círculo dado. Esto se debe hacer solamente con regla y compás. Esta construcción no fue encontrada en la antigüedad, ni en la edad media, ni en los tiempos modernos. Después de tantos esfuerzos por buscar la demostración de que este problema podía ser resuelto, se empezó a conjeturar que tal construcción era imposible sólo con regla y compás.

Al inicio del siglo XIX la *Academia de París*, declara que ya no aceptará más demostraciones de posibles soluciones de este problema, aunque no se había demostrado su imposibilidad.

En 1882 el matemático *Karl Louis Ferdinand Lindemann* prueba que la solución buscada del problema de la cuadratura del círculo desde los tiempos de los antiguos geómetras griegos es imposible. El trabajó con conceptos que eran desconocidos para los antiguos geómetras griegos, para los matemáticos de la Edad Media y para sus contemporáneos, su desarrollo estuvo basado en las importantes propiedades del número π. Lindemann probó que π es un número trascendente, es decir, no existe un polinomio diferente del polinomio cero con coeficientes enteros que tenga a π como raíz. Cuando él hizo este descubrimiento tenía 30 años de edad.

En una de las salas de la *Universidad de Munich* hay un busto *de Ferdinand Lindemann*. Abajo del nombre aparece el símbolo π enmarcado con un círculo y un cuadrado en honor a su descubrimiento.

Karl Friedrich Gauss

Karl Friedrich Gauss nació el 30 de Abril de 1777, en Brunswick, Alemania. Hijo de Gerhard Diederich, cuyo oficio era realizar trabajos de jardinería, constructor de canales y albañil y de Dorothea Benz. Se dice que su padre fue un hombre brusco, extremadamente honrado y demasiado rudo con él. Su madre poseía un carácter firme, gran inteligencia y sentido del humor. Karl Friedrich era, el mayor orgullo de su madre.

Gauss desde muy pequeño empezó a dar muestras de su talento matemático. A él le agradaba decir que supo contar antes de aprender a hablar. Durante toda su vida tuvo una gran habilidad para los cálculos mentales.

Antes de cumplir los 7 años ingresó a la escuela primaria. El instructor era un tal Büttner. Al cumplir los 10 años ingresó a la clase de Aritmética. En las primeras clases el instructor planteaba un extenso problema de sumas y restas cuya respuesta la podía encontrar fácilmente (el instructor) por medio de una fórmula.

Cuando Büttner terminó de plantear el problema, Gauss inmediatamente escribió la respuesta correcta en su pizarra. Cuando ésta fue revisada por Büttner, el quedó asombrado de que Gauss la hubiera obtenido sin tener conocimientos previos de ello. Este acontecimiento tuvo como consecuencia que su instructor Büttner le obsequiara a Gauss un manual de Aritmética y al ver cómo lo estudiaba y comprendía, su instructor expresó, "Es superior a mí, nada puedo enseñarle".

En ese tiempo Büttner tenía como ayudante en su clase a Johann Martin Bartels (1769-1836), un joven de 17 años muy interesado en el estudio de las Matemáticas. A este joven Bartels le fue asignada la tarea de ayudar y supervisar los estudios de Gauss. Este fue el inicio de una sólida amistad entre Bartels y Gauss que duró hasta el fallecimiento del primero, ellos estudiaron juntos los manuales de Álgebra y Análisis Elemental que poseían, ayudándose mutuamente en las dificultades.

Durante estos años Gauss empieza a adquirir algunas de las ideas y formas de ver las matemáticas, que lo caracterizarán a él posteriormente.

Al inicio de su actividad matemática, Gauss muestra interés por el teorema del binomio.

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots$$

Y se da cuenta que n no necesariamente tiene que ser un número entero positivo, sino que puede ser un número (racional) cualquiera. Al analizar Gauss la demostración de este teorema en los libros, percibe el poco rigor matemático en la que está fundamentada la demostración. Insatisfecho con esto, él dá una nueva demostración, iniciándose así en el Análisis Matemático.

Este rigor que dá Gauss al Análisis tuvo repercusión sobre toda la Matemática, esto influye en su trabajo como también en la de sus contemporáneos —Abel, Cauchy y sus sucesores - Weiertrass , Dedekind. Gauss fue el primero de los "rigoristas".

"En el sentido constructivo Gauss fué un revolucionario. Antes de que terminara su enseñanza secundaria, el mismo espíritu crítico que le impidió quedar satisfecho con el teorema del binomio le llevó a discutir las demostraciones de la Geometría Elemental. A la edad de 12 años ya miraba con recelo los fundamentos de la Geometría Euclidiana y teniendo 16, tuvo la primera intuición de una geometría diferente de la de Euclides. Un año más tarde comenzó a someter a la crítica las demostraciones de la teoría de números que habían dejado satisfecho a sus predecesores, y se entregó a la tarea extraordinariamente difícil de llenar las lagunas existentes y lo que había sido hecho a medias" [1].

Su amigo Bartels conocía a algunos de los hombres más influyentes de Brunswick en esa época, los cuales impresionados por el genio de Gauss hicieron posible que el Duque de Karl Withelm Ferdinand de Brunswick se interesara en él. Gauss tenía 14 años cuando el Duque Ferdinand lo conoció en 1791, logrando que el Duque pagara los gastos de la educación de Gauss hasta que ésta terminara.

En 1792, Gauss se inscribe en el Colegio Carolino de Brunswick y durante su estancia en ese Colegio, que fue de tres años, estudia y analiza las obras más importantes de Euler, Lagrange y sobre todo los *"Principia"* de Newton e inicia sus estudios en la Teoría de Números, obteniendo resultados muy importantes. Uno de ellos, es el redescubrimiento de "La Joya de la Aritmética", el Theorema Aureum, al cual también llegó Euler, y que es conocido como la Ley de la Reciprocidad Cuadrática.

Habiendo Gauss terminado sus estudios en el Colegio Carolino en Octubre de 1795 y disponiéndose a continuar éstos en la Universidad de Göttinga, aún no decidía si estudiar Filología o Matemáticas. Un hecho importante y decisivo en la elección fue el descubrimiento de que es posible construir con regla y compás un polígono regular de 17 lados. Esto es, primero transformó el problema en uno aritmético y algebraico, y posteriormente demostró que los únicos polígonos regulares, con un número primo p de lados , que pueden construirse con sólo regla y compás son aquellos que cumplan que p - 1 sea una potencia de 2. Este descubrimiento hecho el 30 de marzo de 1796 fue determinante para decidirse por la Matemática. A partir de este día comienza a escribir su diario científico, el cual no se conoció públicamente sino hasta el año de 1898, cuarenta y tres años después de su fallecimiento. Este contiene 146 exposiciones muy breves de descubrimientos o resultados que obtuvo de sus cálculos, la última anotación la hizo el 9 de Julio de 1814.

Una de las anotaciones de este diario es la del 19 de Marzo de 1797 en donde Gauss muestra que ya había descubierto la doble periodicidad de ciertas funciones elípticas. Así, otra de sus anotaciones es el caso general de la doble periodicidad.

Este descubrimiento fue uno más de los trabajos que Gauss jamás publicó. Toda la obra de Gauss tiene tal perfección que no fué fácil para sus seguidores descubrir el camino que él siguió. Si hubiera aceptado la sugerencia de sus contemporáneos de que abandonara tal perfección en su obra y si hubiere publicado sus trabajos es posible que la Matemática se hallara medio siglo más allá de donde está. Un ejemplo de esto es que Abel y Jacobi podrían haber iniciado donde Gauss terminó y no volver a descubrir conocimientos que Gauss ya conocía antes de que ellos nacieran. Lo mismo ocurrió con los creadores de la Geometría no Euclidiana.

En 1799 Gauss obtiene el Doctorado en la Universidad de Helmstedt con la disertación titulada "Una nueva prueba de que toda función algebráica racional entera de una variable puede ser descompuesta en factores reales de primero o segundo grado". A este resultado se le conoce actualmente como el Teorema Fundamental del Álgebra. Es importante hacer notar que, Gauss dá la primara demostración completa y correcta de este Teorema.

En 1801 aparece publicada Las *Disquisitiones Arithmetical* (Discusiones Ariméticas) de Gauss. Esta obra es un tratado de la teoría de Números y consta de 7 secciones. El contenido es sobre la teoría de congruencias, teoría de los residuos y formas cuadráticas. En la última sección de esta obra Gauss muestra su trabajo sobre la ecuación $x^n = 1$, donde n es un número entero cualquiera. Dicho trabajo sobre esta ecuación es la solución algebraica del problema geométrico de construir un polígono regular de n lados, o de dividir un círculo en n partes iguales.

En 1801 Gauss incursiona en el campo de la Astronomía. Su interés surgió cuando *Giuseppe Piazzi* (1746-1826) descubre un cuerpo celeste al que le llama Ceres, que hoy sabemos que pertecene al conjunto de asteroides que forman el cinturón que se encuentra entre los planetas Marte y Júpiter. Gauss calcula la trayectoria de este cuerpo celeste, partiendo de los escasos datos disponibles y al final de ese año fue nuevamente observado Ceres de acuerdo con lo que predijo Gauss. En 1802 Gauss nuevamente logra determinar la trayectoria de otro asteroide llamado Palas que había sido descubierto primero por Wilhelm Olbers. En 1809 publica su segunda obra maestra a la que llama *"Teoría de Movimiento de los*

Cuerpos Celestes" . Fue director del *Observatorio de Göttinga* aproximadamente 50 años y profesor de Astronomía.

Gauss también se interesó por la geodesia y el electromagnetismo, tanto en el aspecto teórico como el práctico.

La actividad científica de Gauss a partir de 1800 a 1855 la podemos dividir por períodos:

De 1800 - 1820	Astronomía;
De 1820 - 1830	Geodesia;
De 1830 - 1840	Se distingue por sus trabajos sobre electromagnetismo, magnetismo terrestre y la teoría de la atracción de acuerdo a la Ley de Newton;
De 1840 - 1855	Análisis situs (Geometría de Posición) y la Geometría asociada con funciones de una variable compleja.

Gauss muere el 23 de Febrero de 1855 a la edad de 78 años.

A Gauss se le conoce con el título de *"Príncipe de las Matemáticas"*.

Lista de símbolos

$a + b$	*a* más *b*
$a - b$	*a* menos *b*
R^2	plano cartesiano
$A \cup B$	unión de los conjuntos A y B
Δ	triángulo
$\angle$	ángulo
$d(R_1, R_2)$	distancia del punto R_1 al punto R_2
■	fin de una demostración
$\overline{PR}$	segmento de recta entre los puntos P y R
$a > b$	*a* mayor que *b*
$a < b$	*a* menor que *b*
$a \geq b$	*a* mayor ó igual *b*
$a \leq b$	*a* menor ó igual *b*
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$	triángulo *ABC* semejante a triángulo *DEF*
$x = y$	*x* igual a *y*
$\neq$	diferente
$\sqrt{}$	raíz cuadrada
π	número π
$x \in A$	*x* pertenece al conjunto A
$x \notin A$	*x* no pertenece al conjunto *A*
sen	función trigonométrica seno
cos	función trigonométrica coseno
tan	función trigonométrica tangente
cot	función trigonométrica cotangente
i	número complejo i
R	conjunto de los números reales
Q	conjunto de los números racionales
C	conjunto de los números complejos
$A \subset B$	*A* subconjunto *B*
$E{:}F$	*E* extensión del campo *F*
$[E{:}F]$	grado de E:F

Bibliografía

1. Bell, E.T. , Los Grandes Matemáticos
Editorial Lozada, S.A. , Buenos Aires, 1948

2. Birkhoff, George David, Basic Geometry
3a. Edición. Chelsea Publishing Company, New York, 1959

3. Boyer, Carl B., Historia de la Matemática
Editorial Alianza Universidad Textos, España, 1996
4ª. Reimpresión.

4. Collette, Jean-Paul, Historia de las Matemáticas I
Siglo XXI Editores, 1985

5. Courant, Richard,¿ Qué es la Matemática ?
5a. Edición. Editorial Aguilar, 1979

6. Coxeter, H.S.M., Introduction to Geometry
Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.,U.S.A., 1969

7. Dickson, L. Eugene , New First Course in The Theory of Equations
John Wiley & Sons, Inc. New York, U.S. 1939

8. Eves, Howard, An Introduction to the History of Mathematics
3a. Edición. Holt Rinehart and Winston, New York, 1969

9. Heath, Sir Thomas L., A Manual of Greek Mathematics
Editorial Dover, New York, 1963

10. Klein, Felix, Famous Problems of Elementary Geometry
Dover, New York, 1956

11. Moise, Edwin y Downs, Floyd, Geometría Moderna
Fondo Educativo Interamericano, S.A., México, 1970

12. Richmond, H.W., Quart. J. Math., 26.1893 y Math. Ann., 67.1909

13. Shively, Levi, Introdución a la Geometría Moderna
C.E.C.S.A., Compañía Editorial Continental, S.A., 1970

14. Smith, David E. History of Mathematics Vol. II
Dover Publications, Inc., New York, 1958

15. Stewart, Ian, Galois Theory
New York, Chapman and Hall , 1973

16. Struik, Dirk Jan, Historia Concisa de las Matemáticas
Consejo Editorial del Instituto Politécnico Nacional
Méxco, D.F., 1980

17. Tietze, Heinrich, Famous Problems of Mathematics
Baltimore, Graylock Press, 1965

18. Weisner, Louis, Introduction to Theory of Equations
New York, The Mac. Millan Company, 1938