

17

2 gm



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Mapeo Bosónico en la Cromodinámica en SU color(2)"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

Angel Alfonso Flores Reyes



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES
DIRECTOR DE TESIS
Dr. Petrus Otto Mess Beekstedt

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1998

263253



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Mapeo Bosónico en la Cromodinámica en $SU_{color}^{(2)}$ "

realizado por FLORES REYES ANGEL ALFONSO

con número de cuenta 9350479-9 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. PETER OTTO HESS BECHSTEDT

Propietario

DR. FERNANDO MATIAS MORENO YNTRIAGO

Propietario

DR. RODOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Suplente

DR. MANUEL TORRES LABANSAT

Suplente

DR. CHRISTOPHER STEPHENS STEVENS

Consejo Departamental de Física

DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA
Coordinador de Licenciatura
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento al Dr. Peter O. Hess Bechstedt por su enorme paciencia conmigo y por permitirme colaborar en su investigación.

Al Dr. Christopher R. Stephens Stevens y al Dr. Fernando Matías Moreno Y. por su lectura cuidadosa de esta tesis y las recomendaciones que me hicieron.

A mi esposa y a mis padres por todo su apoyo.

A mis amigos.

Contenido

Introducción	i
1 Mapeo Bosónico	1
1.1 Métodos de Mapeo	2
1.1.1 Mapeo <i>Holstein-Primakoff</i>	2
1.1.2 Mapeo <i>Dyson-Maleev</i>	5
1.2 Mapeo de los Estados	6
1.3 Un Ejemplo de Aplicación del Método	8
2 Teoría de Campo	13
2.1 Principio de Mínima Acción	13
2.2 Un Sistema de Masas Acopladas con Resortes	16
2.3 La Formulación Lagrangiana para los Campos	19
2.4 Una Aplicación Sencilla	22
3 Técnicas de Mapeo Bosónico Aplicadas a la Teoría Clásica del Campo	25
3.1 Aplicación del Mapeo Bosónico a la Teoría del Campo	26
3.2 Un Ejemplo	28
4 Campo Gluónico de la CD en $SU_{color}(2)$	31
4.1 Teorías de Campo de Yangs - Mills	31
4.2 La Cromodinámica Cuántica	34
4.3 La Densidad Lagrangiana del Campo Gluónico	38
4.4 La Densidad Hamiltoniana del Campo Gluónico	40
4.5 Mapeo Bosónico del Campo Gluónico en $SU_{color}(2)$	41

5	Coordenadas Hiperesféricas	47
5.1	Mapeo a Coordenadas Hiperesféricas	47
5.1.1	El Término Cinético	48
5.1.2	El Término de Campos a la Cuarta Potencia	50
5.1.3	El Término de Campos Impares	51
5.1.4	El Término del Rotacional Cuadrado	52
5.1.5	La Densidad Lagrangiana	53
5.2	El Caso cuando ρ es Constante	54
5.3	Un Breve Resumen	57
6	Mapeo Bosónico de la Densidad Lagrangiana del Campo Gluónico en $SU_{color}(2)$	59
6.1	Preliminares	59
6.2	Mapeo Bosónico	60
6.2.1	Relación con las Coordenadas Hiperesféricas	60
6.2.2	El Término de Campos a la Cuarta Potencia	61
6.2.3	El Término Cinético	62
6.2.4	El Término Rotacional Cuadrado	66
6.3	Un Resumen	68
	Conclusión	69
	Apendices	72
A	Cálculos Complementarios al Capítulo 5	73
A.1	Mapeo a Coordenadas Hiperesféricas	73
A.1.1	El Término Cinético	73
A.1.2	El Término de Campos a la Cuarta Potencia	74
A.1.3	El Término de Campos Impares	75
A.1.4	El Término del Rotacional Cuadrado	77
A.1.5	La Densidad Lagrangiana	79
A.2	El Caso cuando ρ es Constante	79
A.2.1	La Densidad Hamiltoniana	83
B	Cálculos Complementarios al Capítulo 6	85
B.1	Mapeo Bosónico	85
B.1.1	Solución al Sistema de Ecuaciones para ρ_k	85

<i>CONTENIDO</i>	3
B.1.2 El Término Rotacional Cuadrado	87
Referencias	89

Introducción

Las Fuerzas de la Naturaleza

El concepto de fuerza ha sido empleado para dar explicación a la ocurrencia de eventos en la naturaleza. Es por esto, que el conocer las fuerzas, es saber las causas de los cambios. Ello nos permite comprender acerca de la evolución de nuestro objeto de estudio, y por éste, podemos poner cualquier parte del universo.

Es por todos conocido, que la exposición máxima en este sentido de la teoría física para una descripción de la naturaleza, se da con la teoría que formuló Sir Isaac Newton (1686 con su famosa publicación de los *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*) con sus tres leyes de la mecánica para las partículas. Pero la descripción de éstas se encuentra de manera restringida, para estudiar de forma general las fuerzas que experimentan los cuerpos; es un hecho, y además bastante natural, la aceptación de la fuerza que ejerce la Tierra sobre nosotros, la cual se le conoce como nuestro peso. También es conocida la fuerza que experimentan dos imanes uno en presencia y cercanía del otro; la fuerza que experimentan pequeños pedazos de papel y un pedazo de plástico después de ser frotado por nuestro cabello o un trozo de tela; para todos éstos fenómenos perceptibles a simple vista, la descripción de fuerzas es casi suficiente, pero ¿cómo explicar satisfactoriamente la fuerza que experimentan cuerpos que no están en contacto?. El ejemplo más claro a ello es la fuerza de atracción gravitacional, la cual fue resuelta por Newton cuando propuso su Ley Inversa de la Distancia al Cuadrado.

Ahora estamos en posición de emprender un estudio más general de las fuerzas, a éstas hay que considerarlas como las responsables directas de los cambios que podemos observar en la materia, ya sea de una forma directa (con nuestros sentidos) o de manera indirecta (a través de instrumentos). Así ¿cuáles son las fuerzas que hemos distinguido y cuántas son?. Las fuerzas más claras, entendiendo por esto las que son observables por nuestros sentidos -puros-, son la *gravitatoria* y la *electromagnética*. La primera es la responsable del comportamiento de las grandes masas en el Universo, esta fuerza en principio fácil de entender, es aquella que experimentan todos los cuerpos que poseen masa¹, siendo esta fuerza la que ejerce atracción entre ellos. La segunda, la *fuerza electromagnética*, tiene una manifestación más sencilla, y los primeros en percatarse de ella fueron los griegos; éstos se dieron cuenta que al frotar pedazos de ámbar (*elektron*) con lana podían levantar pedazos de papel, esta fuerza es debida a la existencia de cargas, y estas últimas se pueden distribuir de un cuerpo a otro al realizar algún trabajo sobre sus superficies. Otra experiencia común es la existencia de la fuerza magnética, observada también por los griegos, debido a que ciertos minerales llamados *magnetitas* al ser suspendidos por un hilo se orientaban de una forma particular.

Esas fuerzas eran las únicas aceptadas hasta finales del siglo XIX, por lo que se elaboró una descripción común para todos los fenómenos que involucraban fuerzas eléctricas y magnéticas. Por otro lado y posteriormente, aparecería una mejor descripción acerca de la fuerza gravitacional que la que había elaborado Newton, la cual sería dada por Albert Einstein.

Ya el siglo XX traería a escena nuevos fenómenos que no podían ser explicados con las fuerzas conocidas hasta ese momento, es aquí cuando surgen las *fuerzas nucleares*, cuyo entendimiento no se realizaría plenamente sino hasta el último tercio de este siglo. Las manifestaciones de las nuevas fuerzas son observables únicamente de forma indirecta, pero

¹Con más cuidado la energía (el tensor de energía - momento es el que da la métrica en el espacio - tiempo) es la única responsable de la producción del campo gravitatorio.

si fundamentales para el entendimiento de la estructura atómica y aún más, de cómo está constituida la materia misma.

La primer fuerza nuclear observada por los físicos fue la *fuerza nuclear débil*, cuya manifestación se aprecia a través del decaimiento radioactivo de átomos, cuyos núcleos poseen generalmente una mayor cantidad de neutrones que de protones. Su entendimiento completo y su relación con las otras fuerzas ha sido uno de los pasos más decisivos en la empresa del estudio de las partículas.

La otra fuerza, llamada *fuerza nuclear fuerte* y cuya manifestación es aún más compleja e indirecta, es responsable de la estructura de los núcleos, donde partículas como neutrones y protones (nucleones) se encuentran fuertemente unidos. La investigación en torno a esta fuerza nos ha revelado que su manifestación más pura se encuentra a nivel de la estructura de todas las partículas que constituyen los núcleos y otras partículas que se han observado en la radiación cósmica; esta fuerza es en última instancia, la que permite la existencia de los protones, neutrones, mesones..., etc. y su comprensión se ha logrado por experimentos en los cuales se explora a través de colisiones entre partículas, la estructura de éstas mismas. En estas partículas se ha observado una estructura que sugiere la existencia de partes más fundamentales de materia, las cuales constituyen toda la materia *barionica*². Estas nuevas partículas llamadas *quarks*³ son semejantes en principio a los electrones, pero además poseen propiedades nuevas, como carga eléctrica fraccionaria y una nueva carga fuerte llamada *color*.

En este nuevo esquema, un nucleón estará constituido por un conjunto de tres quarks, de tal forma que su combinación la indentificamos como protón o neutrón u otra partícula que constituyen a los *hadrones*. En el caso de partículas compuestas por pares de quarks - antiquarks reciben el nombre de *mesones*. Es aquí donde la fuerza nuclear fuerte tiene su más pura o primera manifestación, siendo ésta la responsable de

²Nombre genérico que se le dan a los hadrones (protones, neutrones, etc.) y a los mesones (piones).

³Término que se acuño a estas partículas en alusión a la obra *Finnegan's Wake* de James Joyce.

mantener unidos a los quarks dentro de un nucleón, y su manifestación secundaria es la de mantener a los nucleones unidos.

La descripción de las fuerzas que conocemos hoy en día requieren de un aparato matemático más general y mucho más amplio que nos pueda dar mayor información respecto al fenómeno físico, que únicamente el hecho de conocer la fuerza que actúa sobre una partícula. Esto se ha logrado de manera amplia con algunas teorías clásicas, como por ejemplo, en el estudio de los fluidos donde tenemos un sistema del cual podemos pensarlo como un continuo; sin embargo, conocer la fuerza que actúa sobre un sólo elemento del fluido no nos serviría de mucho, ya que no describe la evolución global del fluido transcurrido un cierto tiempo. Por esta razón, se construyó una teoría en términos de la velocidad de todos los elementos, ya que si conocemos la velocidad de todos los elementos en todos los puntos del fluido y su posición inicial, conoceremos la evolución de todo el fluido, y en particular, la evolución de un sólo elemento. Esta nueva descripción que involucra conocer la velocidad de todos los elementos se le conoce como un *campo*, y en particular en este caso, se trata de un *campo de velocidades*.

Además de perfeccionar nuestro aparato matemático para estudiar el problema de las fuerzas, será necesario pensar en las fuerzas como resultado de un proceso más básico que llamaremos *interacción*; de tal manera que no nos limitemos únicamente al esquema restringido de la teoría de Newton; la cual dada una fuerza, ésta podría decir todo lo que le ocurría a la partícula ante la acción de ésta misma. Puesto que la matemática involucrada en la teoría de Newton, supone a la fuerza como un vector (por consiguiente con atributos de magnitud y dirección), y esto no es del todo aplicable a la interacción gravitacional⁴, que incluso en su descripción más moderna, es un cambio en la geometría del espacio-tiempo; pero tenemos, que las interacciones no son instantáneas en el sentido de que un cambio en la configuración del sistema en estudio induce un cambio en otra parte del espacio un tiempo después

⁴Es aplicable la noción de campo de fuerzas vectorial a la gravedad en una aproximación (a las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein) conocida como campo débil.

y nunca se verán cambios simultáneos en ambas regiones del espacio⁵; por lo que la descripción matemática de una interacción se realizará ahora con el concepto llamado campo.

El concepto de campo nos permite realizar la conexión entre partículas o elementos mínimos de materia. Es un concepto cuyo surgimiento se puede atribuir a las meditaciones de M. Faraday sobre la interacción eléctrica y magnética. La utilidad de este concepto es clara, en el sentido de que este elemento es el único que hay que conocer para poder explicar como se comporta un partícula que experimenta la interacción y como ésta misma evoluciona en el tiempo.

Los campos matemáticamente que modelan alguna interacción en su construcción se imponen ciertas simetrías para lograr una descripción correcta. Estas simetrías son impuestas por alguna teoría; ejemplo de esto sería la Teoría de la Relatividad, la Teoría Mecánico Cuántica de las partículas con Espín, Invariancia de norma, ... etc.

Por otro lado, existe un aparato matemático conocido como formalismo *Lagrangiano - Hamiltoniano* que se ha utilizado como una generalización de la teoría de Newton, ya que en este formalismo se pueden estudiar problemas con restricciones que no se manifiesten necesariamente como fuerzas. El formalismo propone que cierta integral llamada *acción* se minimiza siempre para la evolución de la partícula (la variación de la acción es nula); este mismo formalismo a su vez, puede ser extendido para darnos una descripción de campos en vez de evolución de partículas; en esta situación, lo que minimiza la integral de acción es la configuración del campo en el espacio-tiempo.

Cromodinámica y el Campo Gluónico

Dentro de este esquema, la descripción de las interacciones fundamentales estará dada por campos, haciendo primeramente la distinción que unos serán los campos de materia, como lo son los campos

⁵Más cuidadosamente se puede decir que las interacciones como perturbaciones se propagan en el espacio a una velocidad finita.

de electrones, partículas que verdaderamente consideramos fundamentales. Estas partículas poseen espín fraccionario y su nombre genérico son fermiones, esto es debido a que la descripción estadística de ellos, la formularon E. Fermi y P. A. M. Dirac (1926), y otros campos serán los responsables de transportar la interacción entre los primeros. Así, el campo de interacción entre los campos de materia estará caracterizado por un comportamiento distinto, debido a que poseen un espín entero, conocidos como campos bosónicos, ya que la descripción obedece a una estadística distinta a la formulada por Fermi y Dirac, que crearon S. N. Bose y A. Einstein (1924).

De esta manera, el campo de interacción entre los quarks (fermiones) es llamado *campo gluónico* (bosones). Este campo es el portador de la interacción fuerte o fuerza fuerte. La interacción está descrita por partículas que tiene un espín entero de valor \hbar y no poseen carga eléctrica; sin embargo, poseen la carga fuerte o "color" a diferencia de otras interacciones como el electromagnetismo, donde el portador de la interacción es el fotón, el cual no tiene carga eléctrica. He aquí, uno de los problemas en la teoría de la interacción fuerte, ya que tenemos una teoría donde los portadores de la interacción a su vez poseen carga y esto provoca que la teoría sea no lineal. Sin embargo la mayor dificultad de la interacción fuerte radica en el hecho de que los grados de libertad a bajas energías no son los mismos que a altas energías (problemas en infrarrojo), esto debido al fenómeno de confinamiento de las cargas de color⁶.

El Mapeo Bosónico

En una teoría clásica de campo para resolver un problema, implica encontrar⁷ las ecuaciones del campo (*Ec. Euler-Lagrange*) y conocer

⁶El confinamiento de las cargas de color es uno de los resultados más importantes en la teoría de las interacciones fuertes y es precisamente este fenómeno el que puede explicar por que existen las familias de bariones que se observan en la naturaleza que son una combinación incolora de cargas de color y la no existencia de una observación de cargas de color libres (quarks).

⁷Entre otras cosas como: el hamiltoniano (la energía del sistema), el tensor de energía - esfuerzo, ..., etc.

las soluciones de éstas. El problema cuántico parte de una función hamiltoniana, que se cuantiza imponiendo las reglas de conmutación entre los campos y los momentos conjugados (variables canónicas), con ello se obtiene el operador hamiltoniano y un conjunto de operadores como: intensidad del campo, momento angular, lineal,... etc.; cuyos eigenvalores y eigenestados caracterizan el estado del sistema. Una vez encontrado éste, se puede resolver el problema. Esto en principio fácil de realizar no lo es en la práctica, puesto que el cálculo de los elementos de matriz es extremadamente largo y complejo; entonces, lo que queda por hacer, es tratar de dar una descripción aproximada del problema, reduciendo grados de libertad⁸ y, de la misma forma, estados accesibles del sistema.

En esta situación, es el enfoque, arriba citado, que se utiliza en problemas de muchas partículas o campos, ampliamente utilizado en física nuclear en los modelos nucleares colectivos. En estos modelos se describe en una aproximación un núcleo compuesto de muchos fermiones (protones y neutrones) por pares o cuasipartículas, las cuales estarán acoplados a espines 1 o 0 \hbar ; éstos pares tienen un comportamiento bosónico y pueden ser descritos más fácilmente (el álgebra de estos campos obedece la estadística de Bose - Einstein que es más sencilla que la involucrada para campos espinoriales que obedecen la estadística de Fermi - Dirac). Este esquema de aproximación, en el formalismo de la segunda cuantización es conocido como *expansión bosónica* o *realización bosónica*, la cual permite describir el comportamiento del espectro del hamiltoniano, de núcleos pares-pares (igual número de protones y neutrones y número par de estos). Sin embargo, estas realizaciones que substituyen estados fermiónicos por estados bosónicos pierden la completa descripción del problema, debido a la existencia de estados fermiónicos que no son posibles de describir por estados bosónicos⁹; y peor aún, hay estados bosónicos que se pueden obtener, pero no se

⁸Entendiéndose la reducción de los grados de libertad para una teoría de campo como la imposición de ciertas constricciones, que restringen los posibles estados físicos descritos.

⁹Caso por ejemplo de un sistema de 3 fermiones, este sistema nunca podrá ser descrito por bosones (no hay forma de acoplar 3 fermiones a un boson).

verifican en la teoría fermiónica.¹⁰ Estos últimos estados, son los estados no físicos y hay que poder identificarlos e incluso removerlos de los cálculos a través de ciertos criterios.

Existen diferentes formas de lograr una descripción de pares de partículas acopladas a ciertos espines, éstos se pueden pensar de una forma general, como un cambio de operadores de cierta álgebra a operadores de creación y aniquilación que actúan sobre otro espacio de estados, los cuales también son mapeados.

En la teoría cuántica del campo, éste es el proceso común que se sigue, así en el caso del campo electromagnético en el vacío en una región determinada del espacio, cuando se procede a la cuantización de éste, se descompone en campos de osciladores, clásicamente es descomponer al campo en una serie de Fourier, en estas coordenadas se puede expresar una teoría que formalmente es de la misma estructura que la descripción de una partícula que oscila, cuantizar en estas coordenadas es trivial y es también natural la introducción de los operadores de creación y aniquilación.

Por lo que la aplicación de estos modelos colectivos a una teoría clásica de campo es posible, y obtener así una teoría efectiva que describa campos con ciertos estados de polarización.

El método del Mapeo Bosónico trata de reescribir, en la formulación *Lagrangiana-Hamiltoniana* para la Teoría Clásica de los Campos, los campos de norma en términos de unos nuevos campos que son pares de éstos. La presunción de la posibilidad de ello traerá como consecuencia una descripción más sencilla, de la cual se piensa sea la más correcta para los campos de norma a bajas energías; esto se verificaría en un futuro desarrollo al cuantizar la función hamiltoniana de estos campos pares.

¹⁰Caso de un sistema que consta de un número par de fermiones idénticos y que se pueden describir por bosones, en un mismo estado, en esta situación se estaría violando el principio de exclusión de Pauli.

Esta Tesis

En esta tesis se aplicará una técnica de mapeo bosónico a una teoría clásica de campo, la cual dará como resultado una teoría efectiva de pares de campos de norma. Dentro del desarrollo de ésta, se expondrá brevemente el mapeo bosónico empleado en la mecánica cuántica de muchas partículas y cómo se puede extender a una teoría clásica de campo, partiendo del hecho de que las transformaciones en los campos no cambien el álgebra impuesta por los conmutadores o los Paréntesis de Poisson.

Posteriormente se desarrollará un estudio de la densidad lagrangiana del campo gluónico, en donde se aplicarán los resultados del mapeo bosónico a una teoría clásica de campo. Se intentará reescribir este campo en estos otros *campos bosónicos*, pero por las razones que se expondrán en los capítulos 1 y 3, se utilizará otro mapeo en *campos o coordenadas hiperesféricas*; éstas serán en principio las coordenadas que permitirán una transformación a coordenadas bosónicas (las cuales se desarrollan previamente) y finalmente, se obtendrá la transformación de coordenadas o campos de norma a campos bosónicos (o pares de campos).

En este punto, se estará en posición de emprender el estudio de la teoría cuántica del campo gluónico; así como ¿qué es lo que ocurre si se desea una mejor teoría física?, ¿sí es posible la renormalización de estos campos? y ¿qué correcciones aparecerán si se considera este caso?.

Capítulo 1

Mapeo Bosónico

La descripción del campo gluónico en el vacío será nuestro objetivo, y para ello hay que pensar cuál será la estructura del estado base. Lo que actualmente sabemos, es que el campo gluónico está constituido por partículas de espín uno (bosones) y que poseen carga de color¹; igualmente sabemos, que en la naturaleza no se observan las cargas de color libres, pero si en el vacío hay gluones, éstos no pueden permanecer solos por mucho tiempo, se tenderán a cubrir por otros de tal forma que no haya una carga neta de color; así mismo, si se formara un condensado² de gluones en el vacío de carga de color cero³ (glueballs) sus espines estarían alineados con un valor total en su espín de dos o contraalineados, con un valor total en el espín de cero⁴. Precisamente son estos casos los que hay que estudiar, y de esta forma poder elaborar una teoría que simplifique la descripción, conteniendo únicamente es-

¹De hecho la carga fuerte de color que poseen no es de un sólo tipo sino una mezcla de 2 de las posibles.

²Semejante y en analogía con lo que ocurren con los electrones en un superconductor [14].

³Al mencionar color cero, hago referencia al hecho de que hay igual cantidad de *carga de color* de todos los colores posibles o hay una combinación, tal que no hay una carga de color neta, es decir, por ejemplo una carga de color con una anticarga de color (conocido también por spin color singlete).

⁴El hecho de que solo haya estados con espines cero o dos, pero no con espín uno, se debe a que son las únicas combinaciones simétricas (en la parte espinorial y de color) bajo el intercambio de dos gluones respetando de esta forma la estadística de Bose-Einstein [12].

tados de carga de color cero y de valor de espín cero o dos unidades de \hbar . Por lo que en este caso, podremos aplicar una técnica simplificadoría a las variables para la descripción.

El concepto de mapeo bosónico es un método aplicable a sistemas de muchos fermiones o bosones, debido a que en ciertas circunstancias tienen un comportamiento los pares de fermiones como bosones y los bosones agrupados en pares siguen conservando su comportamiento bosónico, en particular, cuando la densidad de pares de fermiones es pequeña [1]. El método reemplaza los grados de libertad de pares de fermiones directamente con los exactos grados de libertad de bosones. Para ello estudiaremos la técnica del mapeo bosónico con un ejemplo del álgebra de Lie del grupo $SU(2)$, en términos de operadores bosónicos que obedecen el álgebra de *Heisenberg - Weyl*⁵.

Existen varios métodos, pero principalmente analizaré el método de *Holstein-Primakoff* y el método de *Dyson-Maleev*. Sin embargo, estos dos métodos no son los únicos posibles, ya que entre ellos están el de *Marumori, Yamamura y Tokunaga*; el de *Belyaev y Zelevinsky*, el cual es una aproximación al método de *Holstein-Primakoff* y el método de *Schwinger* [13].

1.1 Métodos de Mapeo

Para comenzar el estudio de los métodos de mapeo consideraré el ejemplo de los operadores de momento angular en su forma esférica, ilustrando la formulación del método en esta situación.

1.1.1 Mapeo *Holstein-Primakoff*

Consideremos los usuales generadores del grupo $SU(2)$, $J_+ = (J_-)^\dagger$ y J_0 que satisfacen las reglas de conmutación:

$$[J_+, J_-] = 2J_0 \quad [J_0, J_\pm] = \pm J_\pm \quad , \quad (1.1)$$

⁵ Álgebra de Lie que obedecen los operadores de creación y aniquilación.

teniendo en cuenta que para la representación de los estados tenemos el ket:

$$|j, m\rangle \quad \text{con} \quad -j \leq m \leq j \quad . \quad (1.2)$$

Así, los elementos de la matriz para los operadores J_0 y J_+ estarán dado por:

$$\langle j, m | J_0 | j, m \rangle = m \quad (1.3)$$

$$\langle j, m + 1 | J_+ | j, m \rangle = [(j - m)(j + m + 1)]^{\frac{1}{2}} .$$

Para realizar el mapeo consideramos la siguiente sustitución, que no es única y sí, de alguna manera, arbitraria:

$$m = -j + n \quad , \quad (1.4)$$

donde n es la nueva variable de estado, y para que tenga sentido la sustitución, sus posibles valores estarán comprendidos por la desigualdad:

$$0 \leq n \leq 2j \quad . \quad (1.5)$$

Este desplazamiento en los números que caracterizan un estado, nos permite representarlo de la siguiente manera para un j fijo:

$$|j, m\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad . \quad (1.6)$$

De esta forma, los elementos de matriz de los operadores dados por la expresiones (1.3) se transforman a las siguientes expresiones:

$$\langle n | J_0 | n \rangle = -j + n \quad , \quad (1.7)$$

$$\langle n + 1 | J_+ | n \rangle = [(n + 1)(2j - n)]^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

podemos ver ahora, que los elementos anteriores pueden ser escritos de manera más sencilla si se introducen los siguientes operadores de creación b^\dagger y aniquilación b que actúan en un espacio de Hilbert para los estados bosónicos con las siguientes propiedades:

$$[b, b^\dagger] = 1 \quad |n\rangle = \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad , \quad (1.8)$$

(a)

(b)

y cuyos elementos de matriz estarán dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (n+1|b^\dagger|n) &= \sqrt{n+1}\delta_{n+1,n} & (n-1|b|n) &= \sqrt{n}\delta_{n-1,n} \quad , \\ (a) & & (b) & \end{aligned} \quad (1.9)$$

además, definimos el operador de número de ocupación \hat{n} como:

$$\hat{n} = b^\dagger b \quad , \quad (1.10)$$

cuyos elementos de matriz serán:

$$(m|\hat{n}|n) = n\delta_{m,n} \quad . \quad (1.11)$$

De tal manera, que los nuevos operadores para el álgebra de $SU(2)$ se pueden expresar en términos de los operadores bosónicos⁶:

$$\begin{aligned} (J_0)_B &= -j + b^\dagger b \quad , \\ (J_+)_B &= (J_-)_B^\dagger = b^\dagger (2j - b^\dagger b)^{\frac{1}{2}} \quad . \end{aligned} \quad (1.12)$$

Estos nuevos operadores deben de actuar en un subespacio de Hilbert, del nuevo espacio de estados de los bosones⁷; pues aunque los operadores (1.12) puedan actuar sobre cualquier estado, hay estados que no son físicamente aceptables. Es fácil percatarse de cuales estados son los aceptables para este caso, ya que para cada valor de j , sólo estarán permitidos los valores para la variable m dados en la expresión (1.2). Además, debe pensarse a la raíz de un operador como un símbolo para representar la suma en serie de Taylor de la expresión.

⁶El subíndice "B" indica los operadores transformados y expresados por operadores de creación y aniquilación bosónicos b^\dagger y b respectivamente.

⁷Debido a que a través de la acción del operador de creación b^\dagger , puede construirse un estado con un número n de ocupación arbitrario, pero carente de interpretación para nuestro caso, ya que si los operadores J_+ , J_- y J_0 son del momento angular n tiene que satisfacer la expresión (1.5), esta desigualdad implica la existencia de un subconjunto de estados.

1.1.2 Mapeo *Dyson-Maleev*

Observando el mapeo de Holstein-Primakoff podemos percatarnos que la raíz de un operador trae como problema el de la convergencia de una serie infinita. Si tratamos de expresar los nuevos operadores por expresiones finitas, tal vez sea necesario relajar las condiciones de hermiticidad impuestas a los nuevos operadores expresados en términos de los operadores bosónicos, y de esta forma es como se puede construir el mapeo de Dyson; para lograr este fin, introducimos los operadores b , b^\dagger con las propiedades anteriormente dadas en las expresiones (1.8), (1.9a) y (1.9b), además, en nuestra representación la matriz del operador J_0 sea diagonal y de la forma:

$$(J_0)_D = -j + b^\dagger b \quad . \quad (1.13)$$

Si quitamos la restricción de hermiticidad de los operadores J_+ , J_- , pero conservamos las reglas de conmutación (1.1) podemos proponer una forma general para los generadores de $SU(2)$ en términos de los operadores de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned} (J_+)_D &= b^\dagger f_+(\hat{n}) \\ (J_-)_D &= f_-(\hat{n}) b \quad , \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde \hat{n} es el operador de número dado por la expresión (1.10), con las reglas de conmutación (1.8a), y sabiendo las siguientes propiedades de los operadores de creación y aniquilación, se impone la condición para las funciones f_+ y f_- :

$$\begin{aligned} b^\dagger f(\hat{n}) &= f(\hat{n} - 1) b^\dagger & b f(\hat{n} - 1) &= f(\hat{n}) b \quad , \\ (a) & & (b) & \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$[(J_+)_D, (J_-)_D] = 2(J_0)_D \quad , \quad (1.16)$$

$$f_+(\hat{n}) f_-(\hat{n}) = 2j - \hat{n} \quad . \quad (1.17)$$

La condición anterior (1.17) nos da la libertad de escoger alguna de las funciones f_+ o f_- , obteniendo el mapeo de Dyson si alguna de ellas es igual al operador unitario, en particular hacemos la siguiente elección:

$$f_-(\hat{n}) = 1 \quad (1.18)$$

y esto implica inmediatamente que:

$$f_+(\hat{n}) = 2j - \hat{n} \quad , \quad (1.19)$$

de esta forma llegamos a los operadores mapeados con el método de Dyson-*Maleev*:

$$(J_+)_D = b^\dagger (2j - \hat{n}) \quad (1.20)$$

$$(J_-)_D = b \quad . \quad (1.21)$$

Observemos que el mapeo de *Holstein-Primakoff* es recuperado si imponemos la condición de hermiticidad $(J_+)_D = (J_-)_D^\dagger$, que es:

$$f_+(\hat{n}) = f_-(\hat{n}) = \sqrt{2j - \hat{n}} \quad . \quad (1.22)$$

El mapeo de Dyson al ser aplicado para la solución de problemas, produce hamiltonianos no hermíticos [1] [13].

1.2 Mapeo de los Estados

Cuando se expresan los operadores del grupo $SU(2)$, en nuestro mapeo hay una cierta arbitrariedad, esto se puede ver, ya que según se defina el estado del vacío, los operadores adquieren una cierta forma, para esto observemos las siguientes definiciones:

$$|j, m\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad \text{y} \quad n = m + j \implies 0 \leq n \leq 2j \quad , \quad (1.23)$$

con esta definición hemos trabajado y el operador de número J_0 tiene la forma de:

$$J_0 = -j + b^\dagger b \quad ,$$

pero no es la única posible y para esto consideremos que el número cuántico n al ser definido como:

$$n = m - j \implies -2j \leq n \leq 0 \quad , \quad (1.24)$$

en esta nueva situación tenemos entonces para el operador J_0 la expresión:

$$J_0 = j + b^\dagger b \quad , \quad (1.25)$$

para el caso del mapeo de Dyson-Maleev, recordemos las propiedades de los operadores de creación y aniquilación (1.15a) y (1.15b), de tal manera que al reimponer las reglas de conmutación que deben de cumplir los operadores mapeados se tiene:

$$b^\dagger b f_+ (\hat{n} - 1) f_- (\hat{n} - 1) - (b^\dagger b + 1) f_- (\hat{n}) f_+ (\hat{n}) = 2 (j + b^\dagger b) \quad , \quad (1.26)$$

de tal forma que análogamente a la expresión (1.17) obtenemos:

$$f_+ (\hat{n}) f_- (\hat{n}) = -2j - \hat{n} \quad , \quad (1.27)$$

con lo cual se puede construir otro mapeo de Dyson-Maleev, dado por los siguientes operadores:

$$(J_+)_D = b^\dagger \quad , \quad (1.28)$$

$$(J_-)_D = (-2j - \hat{n}) b \quad , \quad (1.29)$$

donde se hizo la selección de:

$$f_+ (\hat{n}) = 1 \quad f_- (\hat{n}) = -2j - \hat{n} \quad . \quad (1.30)$$

Selección que puede compararse con las expresiones (1.18) y (1.19), se aprecia que el operador unitario ahora es f_+ y no f_- como originalmente lo era, junto con el cambio del operador f_- en $-4j$ unidades respecto al original operador f_+ , todo esto como resultado de cambiar

el estado de mayor peso (original $|2j\rangle$ por $|0\rangle$). Esta situación permite mostrar que el mapeo depende de como se fije el estado de mayor o menor peso.

1.3 Un Ejemplo de Aplicación del Método

Para ilustrar las ideas anteriores podemos pensar en alguno de los modelos sencillos que se emplean en Física Nuclear en la descripción de los núcleos atómicos, como podría ser el modelo de capas de Lipkin (Lipkin, Meshkov y Glick, LMG) [13], este modelo describe a los nucleones más externos y en la versión más sencilla de éste, se tienen 2 niveles con un mismo valor de j , un nivel justo arriba del nivel de fermi⁸ y otro justo abajo; el nivel de abajo esta lleno por $2j + 1$ nucleones en esta situación tenemos un hamiltoniano que está dado por la expresión:

$$\hat{H} = \varepsilon K_0 - \frac{V}{2} (K_+^2 + K_-^2) \quad , \quad (1.31)$$

donde ε y V son constantes y los tres operadores K_+ , K_- y K_0 están definidos en este modelo por unos operadores de creación C_{+m}^\dagger y C_{-m}^\dagger (fermiónicos), el primero crea un fermión en el nivel $+m$ y el segundo crea uno en el nivel $-m$ respectivamente y los operadores de aniquilación C_{+m} y C_{-m} de partículas :

$$K_+ = \sum_{m=1}^{2j+1} C_{+m}^\dagger C_{-m} \quad (a)$$

$$K_- = \sum_{m=1}^{2j+1} C_{-m}^\dagger C_{+m} \quad (b) \quad (1.32)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2j+1} (C_{+m}^\dagger C_{+m} - C_{-m}^\dagger C_{-m}) \quad (c) \quad ,$$

observemos que estos operadores cumplen con el algebra del grupo $SU(2)$ y que además son hermiticos $(K_+)^\dagger = K_-$, siempre y cuando se cumplan las siguientes reglas de anticonmutación para los operadores fermionicos los cuales son:

⁸El nivel de fermi es la capa completa más externa.

$$[C_{+m}^\dagger, C_{+m}]_+ = 1$$

$$[C_{-m}^\dagger, C_{-m}]_+ = 1$$

y cualquier otro anticonmutador es nulo. Este problema por su estructura tan sencilla puede ser resuelto de una forma exacta, sin embargo para mostrar el empleo de la técnica de mapeo podemos proponer que los operadores K_+ , K_- y K_0 sean mapeados con el método de Dyson-Maleev, en este caso estamos proponiendo que los operadores se pueden expresar por:

$$K_+ = b^\dagger (2j - b^\dagger b) \quad (a)$$

$$K_- = b \quad (b) \quad (1.34)$$

$$K_0 = -j + b^\dagger b \quad (c) \quad ,$$

de tal forma que tenemos para el operador hamiltoniano mapeado con el método de Dyson, utilizando las ecuaciones (1.15a) y (1.15b):

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H}_D = \varepsilon (-j + b^\dagger b) - \frac{V}{2} \left((b^\dagger)^2 (2j - b^\dagger b - 1) (2j - b^\dagger b) + b^2 \right) \quad , \quad (1.35)$$

los estados se mapean como está dado en la siguiente expresión:

$$|j, m\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad , \quad (1.36)$$

con la relación entre los números cuánticos:

$$m = -j + n \quad . \quad (1.37)$$

De manera tal que para ver una aplicación del método de mapeo bosónico podemos encontrar los eigenvalores de la energía y así comparar los resultados con los obtenidos en el cálculo exacto, tenemos entonces, que para un sistema de $2j + 1$ nucleones y $j = \frac{9}{2}$ (10 nucleones) los números cuánticos cumplen con los intervalos que expresan las siguientes desigualdades:

$$-\frac{9}{2} \leq m \leq \frac{9}{2} \implies 0 \leq n \leq 9 \quad . \quad (1.38)$$

El problema de calcular los eigenvalores de la energía se traduce en conocer los elementos de matriz del operador hamiltoniano, para el cálculo exacto tenemos:

$$\begin{aligned} \langle j, m_1 | \hat{H} | j, m \rangle &= \varepsilon m \delta_{m, m_1} \\ &- \frac{V}{2} \sqrt{[(j-m)(j+m+1)][(j-m-1)(j+m+2)]} \delta_{m+2, m_1} \\ &- \frac{V}{2} \sqrt{[(j+m)(j-m+1)][(j+m-1)(j-m+2)]} \delta_{m-2, m_1} \quad , \end{aligned} \quad (1.39)$$

los elementos de matriz del hamiltoniano mapeado con el método de Dyson son de la forma:

$$\begin{aligned} (m | \hat{H}_D | n) &= \varepsilon (-j + n) \delta_{m, n} \\ &- \frac{V}{2} (2j - n - 1) (2j - n) \sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{m, n+2} \\ &- \frac{V}{2} \sqrt{n(n-1)} \delta_{m, n-2} \quad . \end{aligned} \quad (1.40)$$

Para los valores de $\varepsilon = V = 1$, diagonalizando ambas matrices obtenemos de esta forma los eigenvalores, que se tabulan a continuación:

Espectro	
<i>Hamiltoniano</i>	<i>Hamiltoniano</i>
<i>Exacto</i>	<i>Mapeado</i>
1.876	1.876
1.872	1.835
0.850	0.850
0.750	0.711
0.146	0.146
-0.146	-0.124
-0.750	-0.750
-0.850	-0.860
-1.872	-1.812
-1.876	-1.872
(a)	(b)

Estos espectros se grafican a continuación:

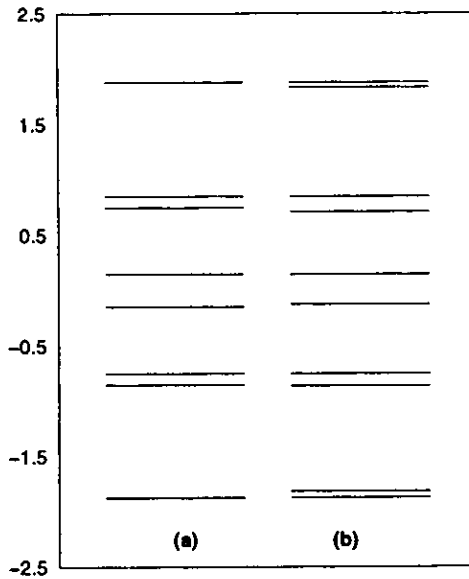


Figura 1.1: Espectro del hamiltoniano exacto (a) y el espectro del hamiltoniano mapeado con el método *Dyson-Maleev* (b).

Para ver de una forma clara en donde queda la aproximación ob-

servemos que el mapeo de Dyson-Maleev no describe perfectamente el espectro de los operadores K_+ y K_- , veamos la expresión para el operador K_+ actuando sobre el estado $|n\rangle$ que es:

$$K_+|n\rangle = (2j - n) \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle \quad , \quad (1.41)$$

si recordamos que en el mapeo se introdujo la definición de n (1.4) y como se asocian los estados bosonicos con los estados fermionicos (1.6), si substituimos estos elementos en la anterior expresión, obtenemos:

$$K_+|jm\rangle = (j - m) \sqrt{m + j + 1} |jm + 1\rangle \quad , \quad (1.42)$$

la expresión exacta para la acción del operador K_+ sobre el estado $|jm\rangle$ es:

$$K_+|jm\rangle = \sqrt{(j - m)(m + j + 1)} |jm + 1\rangle \quad . \quad (1.43)$$

Comparando estas ultimas dos expresiones (1.42) y (1.43) se puede apreciar que difieren por un factor de $\sqrt{j - m}$, pero para j pequeñas (o pocos nucleones en el modelo de LMG 2 o 4), se pueden aproximar muy bien entre sí, los valores de los elementos las matrices.

Capítulo 2

Teoría de Campo

Para estudiar el campo gluónico será necesario recapitular algunas partes fundamentales de la teoría de sistemas continuos y con un número infinito de posibles configuraciones o grados de libertad.

En este capítulo se desarrolla los conceptos básicos de una teoría de campo, entendiéndola siempre como la generalización de una teoría de partículas, para esto es necesario recordar el *principio de mínima acción* aplicado en la teoría de la mecánica de partículas. Continuando el desarrollo de las ideas anteriores, a través de un ejemplo construiré en un límite una teoría clásica de un campo partiendo de una teoría discreta de partículas.

Posteriormente se realizará en analogía con los sistemas de muchas partículas la formulación hamiltoniana en la teoría clásica de los campos.

2.1 Principio de Mínima Acción

La expresión de las leyes del movimiento de una partícula o un cuerpo en su forma más general, será a través de un principio conocido como *principio de mínima acción* (o *principio de Hamilton*); éste establece que cualquier sistema mecánico se caracteriza por una función que depende de las coordenadas, velocidades y del parámetro tiempo,

llamada función lagrangiana o función de Lagrange¹.

$$L(q_1, q_2, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, t) \quad (2.1)$$

Supongamos que en los tiempos t_1 y t_2 el sistema en cuestión tiene las coordenadas q_1 hasta q_i bien definidas, entonces entre estos dos tiempos o estados el sistema evolucionará de tal manera que la integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dots, q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_i, t) dt \quad (2.2)$$

tendrá el menor valor posible. Esta expresión se conoce como la *integral de acción*. Sea q_i la función posición para la i -ésima, coordenada en la cual la integral de acción tiene precisamente el valor mínimo, tal que :

$$q_i = q_i(t : \alpha_i) = q_i(t : 0) + \alpha_i \zeta_i(t) \quad (2.3)$$

y su derivada esté dada por la expresión:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t : \alpha_i) = \dot{q}_i(t : 0) + \alpha_i \dot{\zeta}_i(t) \quad (2.4)$$

donde $\zeta_i(t)$ es una función que se anula en los valores extremos t_1 y t_2 , α_i es un escalar distinto del nulo. Esta trayectoria perturbada nos permitirá encontrar la condición que satisface la coordenada q_i , como función del tiempo en la situación que hace mínimo el valor de la integral de acción. Consideremos ahora la integral de acción en la trayectoria perturbada:

$$I_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \dots, q_i + \alpha_i \zeta_i, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_i + \alpha_i \dot{\zeta}_i, t) dt \quad (2.5)$$

Calculemos el valor crítico de esta integral para la i -ésima coordenada y bastará con ello imponer la siguiente condición:

$$\frac{dI_{\alpha_i}}{d\alpha_i} = 0 \quad (2.6)$$

¹Se considerará el caso no relativista, pero la extensión al caso relativista es sencilla y se procedería en total analogía para obtener las ecuaciones de movimiento.

Esta condición se traduce en la integral (2.5):

$$\frac{dI_{\alpha_i}}{d\alpha_i} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha_i} \right] dt = 0 \quad , \quad (2.7)$$

consideremos el segundo término del integrando y apliquemos sobre él una integración por partes, obteniendo la siguiente expresión:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha_i} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dt \quad . \quad (2.8)$$

Pero observemos que la siguiente derivada cancelará el primer término de la suma anterior, ya que por la condición que se establece para la trayectoria perturbada tenemos:

$$\left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} \right]_{t_1} = \left[\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} \right]_{t_2} = [\zeta_i(t)]_{t_1} = [\zeta_i(t)]_{t_2} = 0 \quad . \quad (2.9)$$

Entonces la integral (2.5) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{dI_{\alpha_i}}{d\alpha_i} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_i} dt = 0 \quad . \quad (2.10)$$

La integral debe ser nula para cualquier valor de $\partial q_i / \partial \alpha_i$ [8]; siendo esto posible, sólo si se cumple para la coordenada q_i de la i -ésima partícula la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Esta es la ecuación de movimiento para la partícula i -ésima, y es conocida como la ecuación de *Euler-Lagrange*. Podemos hacer las siguientes definiciones para el momento generalizado²:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.12)$$

²Esta ecuación se indentificará con el momento de una partícula.

y para la fuerza generalizada³:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.13)$$

2.2 Un Sistema de Masas Acopladas con Resortes

Para poder estudiar la generalización del principio de mínima acción para sistemas con un número infinito de grados de libertad, analicemos como un ejemplo a un sistema de resortes acoplados [2] como el que se muestra en la siguiente figura.

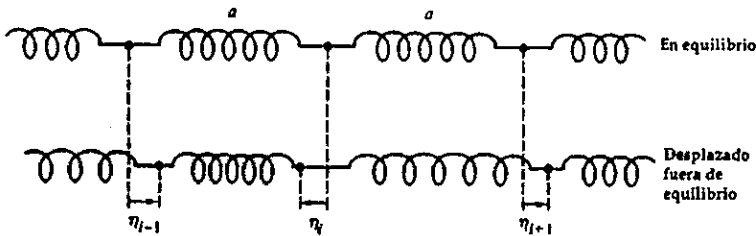


Figura 2.1: Sistema de de masas acopladas con resortes.

Este sistema esta constituido por masas m_i (todas iguales) que están unidas por resortes y todos de igual constante de restitución k . En reposo se encuentran las masas a una distancia a una de otra; ahora desplazemos de su posición de reposo a la partícula i -ésima y también a sus vecinas.

Consideremos ahora el movimiento que realiza esta partícula alrededor de su posición de reposo; así mismo, observemos que se tratan de pequeñas oscilaciones. Describiré a la partícula i -ésima por su coordenada generalizada η_i con respecto a su posición de reposo, así quedarán

³Esta otra ecuación se indentificará con las fuerzas que experimenta la partícula.

las partículas etiquetadas; podemos entonces escribir la función de Lagrange del sistema como:

$$L = T - V \quad , \quad (2.14)$$

donde la energía cinética y la energía potencial están dadas por las siguientes expresiones:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\eta}_i^2 \quad , \quad (2.15)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \left[\frac{k}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 + \frac{k}{2} (\eta_i - \eta_{i-1})^2 \right] \quad , \quad (2.16)$$

quedando así la función de Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i \left[m_i \dot{\eta}_i^2 - \frac{k}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 - \frac{k}{2} (\eta_i - \eta_{i-1})^2 \right] \quad . \quad (2.17)$$

Podemos escribir esta misma función incluyendo la distancia que separa a las partículas en reposo, obteniendo:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i a \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - \frac{ak}{2} \left[\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} \right)^2 \right] \right] \quad , \quad (2.18)$$

de esta forma, la función de Lagrange para el sistema de partículas se podrá expresar en términos de la función Lagrangiana de cada partícula:

$$L = \sum_i a L_i \quad , \quad (2.19)$$

donde L_i estará dada por la siguiente expresión:

$$L_i = \frac{1}{2} \left[\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - \frac{ak}{2} \left[\left(\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 + \left(\frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} \right)^2 \right] \right] \quad , \quad (2.20)$$

siendo esta última expresión la función de Lagrange de la partícula i -ésima.

Para continuar nuestro análisis obtendremos la ecuación de movimiento de la i -ésima partícula que se obtiene al aplicar la ecuación (2.11) en la expresión (2.20):

$$m\ddot{\eta}_i = \frac{k}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i) - \frac{k}{2} (\eta_i - \eta_{i-1}) \quad (2.21)$$

Supongamos ahora a este modelo en el límite, cuando la distancia entre las partículas, a , tienda a cero, describirá un cuerpo semisólido capaz de sufrir pequeñas deformaciones, entonces nuestras expresiones pueden ser identificadas con las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} &\rightarrow \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} , \\ \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} &\rightarrow \frac{\eta(x) - \eta(x-a)}{a} , \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde ahora los índices que identificaban a las partículas son substituidos por las coordenadas de las partículas, y así en el límite considerado, se transforma en la derivada parcial con respecto a la posición:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} = \frac{\partial \eta}{\partial x} , \quad (2.23)$$

además se puede observar que los límites que siguen serán el módulo de Young y la densidad de masa:

$$\lim_{a \rightarrow 0} ka = Y , \quad (2.24)$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m}{a} = \mu . \quad (2.25)$$

Por otra parte, la suma de las funciones lagrangianas de las partículas, se transformará en la integral sobre una nueva función llamada *densidad lagrangiana*, su integral será el lagrangiano del sistema:

$$\lim_{a \rightarrow 0} L_i = \mathcal{L} , \quad (2.26)$$

$$L = \int \mathcal{L} dx \quad , \quad (2.27)$$

donde \mathcal{L} es la función densidad de Lagrange del sistema y estará dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \quad . \quad (2.28)$$

De esta misma forma, en el caso límite referido obtenemos para la ecuación de movimiento del sistema (2.21) lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{Y}{\mu} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad (2.29)$$

observemos que la solución de esta ecuación son ondas longitudinales que se propagan con una velocidad:

$$\sqrt{\frac{\mu}{Y}} \quad . \quad (2.30)$$

2.3 La Formulación Lagrangiana para los Campos

El ejemplo anterior nos sirvió para ver que la generalización de la formulación Lagrangiana, se puede extender naturalmente para el caso de sistemas continuos, introduciendo el concepto de densidad lagrangiana. Entonces será posible ampliar el concepto de ecuaciones de movimiento, pero no para una partícula sino para un campo; esto formulando un principio de mínima acción para la integral de la densidad lagrangiana.

Pero la generalización es de tal forma que el papel que jugaban las “*coordenadas generalizadas*” ahora lo jugarán los campos y las “*velocidades*” serán substituidas por los gradientes de los mismos. Así tendremos una densidad lagrangiana en términos de los campos, de las

derivadas con respecto a las coordenadas y de estas últimas, cabe mencionar que hacen el papel análogo del tiempo.

A continuación procederemos a deducir las ecuaciones de movimiento o ecuaciones del campo, utilizando notación indicial con las convenciones, índices griegos que toman valores del 0 al 3; índices latinos que toman valores del 1 al 3, entonces:

$$\begin{aligned}x_0 &= t \\x_1 &= x \\x_2 &= y \\x_3 &= z \quad .\end{aligned}\tag{2.31}$$

Un campo y un gradiente de éste estarán expresado por:

$$A_\mu = A_\mu(x_\rho) \quad ,\tag{2.32}$$

$$A_{\mu,\rho} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\rho} \quad .\tag{2.33}$$

Así mismo, la definición de los gradientes son con el operador de derivación parcial:

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} = \partial_\rho = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad .\tag{2.34}$$

Consideremos una densidad lagrangiana, dada por la siguiente expresión y con una dependencia funcional:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\rho}, j_\mu) \quad ,\tag{2.35}$$

donde j_μ es una función que representa a las cargas (estáticas y en movimiento o corriente) acopladas al campo, sabiendo que la función de Lagrange del sistema está dada por la integral:

$$L = \int \mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\rho}, j_\mu) d^3x \quad ,\tag{2.36}$$

donde:

$$d^3x = dx_1 dx_2 dx_3 \quad .\tag{2.37}$$

Supongamos que en las coordenadas x_1 y x_2 el campo tiene valores bien definidos, entonces entre estas dos posiciones espacio temporales, variará de una forma continua, tal que la integral de acción:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(A_\mu, A_{\mu,\rho}, j_\mu) d^4x \quad , \quad (2.38)$$

calculada entre estos dos puntos tenga el valor mínimo posible. El imponer que la integral sea mínima, implica que su primer variación sea nula, y esto nos traerá como consecuencia la ecuación que debe satisfacer el campo. Ahora consideremos una línea de evolución perturbada para el campo que se encuentra entre los puntos x_1 y x_2 , de tal forma que si A_μ es el campo que minimiza la anterior integral, entonces una posible trayectoria perturbada sería:

$$\tilde{A}_\mu = \tilde{A}_\mu(x_\rho : \alpha) = \tilde{A}_\mu(x_\rho : 0) + \alpha \Omega_\mu(x_\rho) \quad , \quad (2.39)$$

en donde \tilde{A}_μ está definida como:

$$\tilde{A}_\mu(x_\rho : 0) = A_\mu(x_\rho) \quad (2.40)$$

y la función $\Omega_\mu(x_\rho)$ que perturba tiene la siguiente propiedad de anularse en los extremos de integración, i.e.:

$$\Omega_\mu(x_1) = \Omega_\mu(x_2) = 0 \quad , \quad (2.41)$$

además α es un escalar distinto del nulo.

Al ser la primera variación nula, se impone una condición sobre la integral de la trayectoria perturbada, si es ésta la integral:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_{\mu,\rho}, j_\mu) d^4x \quad , \quad (2.42)$$

la condición será:

$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \quad (2.43)$$

y la condición anterior se manifestará sobre la integral (utilizando la convención de Einstein):

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_\mu} \frac{\partial \tilde{A}_\mu}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_{\mu,\rho}} \frac{\partial \tilde{A}_{\mu,\rho}}{\partial \alpha} \right] d^4x = 0 \quad (2.44)$$

Esta integral se puede realizar por partes en el segundo término del integrando, obteniéndose:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_{\rho,\mu}} \frac{\partial \tilde{A}_\rho}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_{\rho,\mu}} \right) \right] \frac{\partial \tilde{A}_\rho}{\partial \alpha} d^4x = 0 \quad , \quad (2.45)$$

pero calculemos la derivada parcial del campo perturbado con respecto al parámetro de perturbación ($\partial \tilde{A}_\rho / \partial \alpha$), cuya expresión será:

$$\frac{\partial \tilde{A}_\rho}{\partial \alpha} = \Omega_\rho(x_\mu) \quad , \quad (2.46)$$

y por lo tanto, el primer término quedará afectado por una función que siempre se anula en los extremos, quedando así únicamente de la integral (2.44) la siguiente expresión:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{A}_{\rho,\mu}} \right) \right] \frac{\partial \tilde{A}_\rho}{\partial \alpha} d^4x = 0 \quad . \quad (2.47)$$

Esta integral debe ser nula para cualquier función que perturbe la trayectoria, de esto se concluye que el integrando debe ser nulo; entonces se tendrá la ecuación que satisface el campo A_μ , ésta es la ecuación correspondiente a la generalización de la ecuación de *Euler-Lagrange*, las cuales son conocidas en este caso como las ecuaciones del campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\rho,\mu}} \right) = 0 \quad . \quad (2.48)$$

2.4 Una Aplicación Sencilla

Apliquemos el formalismo anteriormente expuesto al caso de nuestro sistema de resortes. Cuando la distancia entre ellos tiende a cero, si

indentificamos a la densidad Lagrangiana del sistema como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] , \quad (2.49)$$

y así mismo realizamos las siguientes sustituciones, considerando que este ejemplo es un caso escalar, unidimensional y no relativista:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x \\ x_0 &\rightarrow t \\ A_\mu &\rightarrow \eta \\ A_{\mu,1} &\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ A_{\mu,0} &\rightarrow \frac{\partial \eta}{\partial t} , \end{aligned} \quad (2.50)$$

entonces la ecuación del campo (2.48) tomará la forma, que expandiendo en notación vectorial será la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} \right) = 0 , \quad (2.51)$$

calculando explícitamente para esta densidad lagrangiana (2.49), obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{Y}{\mu} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 , \quad (2.52)$$

tratándose claramente de la ecuación de onda que se propaga en el eje x con una velocidad v , dada por:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}} . \quad (2.53)$$

Capítulo 3

Técnicas de Mapeo Bosónico Aplicadas a la Teoría Clásica del Campo

En este capítulo desarrollaré los fundamentos del *mapeo bosónico* aplicado a teoría clásica de campo¹; cuál es su importancia y cómo simplifica enormemente el cálculo en diversos problemas; así mismo, mostraré los problemas de cálculo que no se pueden resolver satisfactoriamente con la propuesta del método de mapeo bosónico.

La aplicación del mapeo bosónico ha sido desarrollada para una teoría de operadores y estados en Mecánica Cuántica. Ahora, cómo se puede emplear ese método en una teoría clásica del campo. Esto en principio se podría lograr imponiendo un cambio de espacio de funciones de los campos y respetando las reglas del álgebra que han sido establecidas a través de los paréntesis de Poisson; por lo que si hay una posible transformación que deje invariante esta álgebra, entonces se estará describiendo en principio una situación física compatible con el modelo exacto.

¹Para un tratamiento cuántico, que es fundamento para este método véase [3] [11].

3.1 Aplicación del Mapeo Bosónico a la Teoría del Campo

Consideremos un campo $\Phi_a(x)$ y su densidad de momento asociado $\Pi_a(x)$ y en la densidad hamiltoniana de este campo aparecen expresiones como las siguientes: productos de campos, productos de momentos o productos mixtos de campos y momentos, pero no gradientes de los campos.

$$Q^2 = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{a=1}^N \Phi_a(x) \Phi_a(x) \quad (a)$$

$$P^2 = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{a=1}^N \Pi_a(x) \Pi_a(x) \quad (b) \quad (3.1)$$

$$\hat{N} = \sum_{a=1}^N \Phi_a(x) \Pi_a(x) \quad (c) \quad ,$$

tomemos la definición de paréntesis de Poisson para dos funciones densidades² $A(x)$ y $B(x)$; pero por tener una teoría donde no aparecen gradientes de los campos, así como tampoco gradientes de los momentos, nuestra definición para los parentesis de Poisson cambia de derivadas funcionales a derivadas parciales ordinarias [2], así que tomemos la siguiente definición para los parentesis de Poisson:

$$\{A, B\} = \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial \Pi_a} \frac{\partial B}{\partial \Phi_a} - \frac{\partial A}{\partial \Phi_a} \frac{\partial B}{\partial \Pi_a} \right) \quad (3.2)$$

²A partir de este momento voy a considerar como obvio la dependencia de los campos y sus momentos del espacio y tiempo.

calculando los paréntesis de Poisson de las expresiones (3.1a) definidos tenemos:

$$\begin{aligned}
 \{Q^2, P^2\} &= \frac{1}{4N} \left\{ \sum_{a=1}^N \Phi_a^2, \sum_{b=1}^N \Pi_b^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{4N} \sum_{i,a,b=1}^N \left(\frac{\partial \Phi_a^2}{\partial \Pi_i} \frac{\partial \Pi_b^2}{\partial \Phi_i} - \frac{\partial \Phi_a^2}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Pi_b^2}{\partial \Pi_i} \right) \\
 &= -\frac{1}{4N} \sum_{i,a,b=1}^N \left(\frac{\partial \Phi_a^2}{\partial \Phi_i} \frac{\partial \Pi_b^2}{\partial \Pi_i} \right) = -\frac{1}{N} \sum_{i,a,b=1}^N (\Phi_a \delta_{a i} \Pi_b \delta_{b i}) \\
 &= -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_i \Pi_i = -\frac{1}{N} \hat{N} .
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Análogamente calculamos el otro par de paréntesis para las funciones (3.1b) y (3.1c):

$$\{\hat{N}, P^2\} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \left\{ \sum_{a=1}^N \Phi_a \Pi_a, \sum_{b=1}^N \Pi_b^2 \right\} = -\frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \Pi_i \Pi_i = -P^2 , \tag{3.4}$$

$$\{\hat{N}, Q^2\} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \left\{ \sum_{a=1}^N \Phi_a \Pi_a, \sum_{b=1}^N \Phi_b^2 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \Phi_i \Phi_i = Q^2 . \tag{3.5}$$

Observemos que estas funciones forman un álgebra cerrada entre ellas, expresándose en las relaciones que se cumplen entre sus paréntesis de Poisson:

$$\{Q^2, P^2\} = -\frac{1}{N} \hat{N} , \quad \{\hat{N}, P^2\} = -P^2 , \quad \{\hat{N}, Q^2\} = Q^2 , \tag{3.6}$$

consideremos el mapeo o transformación a unas nuevas "coordenadas generalizadas" pero conservando el álgebra de las expresiones primigias:

$$Q^2 = \frac{1}{\sqrt{2N}} q(x) \tag{a}$$

$$P^2 = \frac{1}{\sqrt{2N}} p(x) q(x) p(x) \tag{b} \tag{3.7}$$

$$\hat{N} = q(x) p(x) \tag{c} ,$$

de esta forma definimos los paréntesis de Poisson en las nuevas coordenadas:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} \quad , \quad (3.8)$$

y observemos que el álgebra se preserva con estas nuevas coordenadas

$$\{Q^2, P^2\} = \frac{1}{2N} \{q, pqp\} = -\frac{1}{N} pq = -\frac{1}{N} \hat{N} \quad , \quad (3.9)$$

$$\{\hat{N}, P^2\} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \{qp, pqp\} = -\frac{1}{\sqrt{2N}} pqp = -P^2 \quad , \quad (3.10)$$

$$\{\hat{N}, Q^2\} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \{qp, q\} = \frac{1}{\sqrt{2N}} q = Q^2 \quad . \quad (3.11)$$

Volvemos a ver que esta operación de mapeo, nos permite conservar las mismas relaciones establecidas en las expresiones (3.6) de conmutación, pero son mucho más fáciles de verificar cuando se calculan.

3.2 Un Ejemplo

Para ilustrar la aplicación de las ideas anteriores pongamos un caso; éste se trata de una densidad lagrangiana que posee sólo una parte cinética y de esta forma podemos expresar el Hamiltoniano de una forma sencilla en términos de la densidad hamiltoniana.

$$T = \int \mathcal{T} d^3x \quad , \quad (3.12)$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_i (\Pi_i)^2 \quad , \quad (3.13)$$

podemos aplicar directamente un mapeo procediendo a realizar la sustitución de la siguiente forma:

$$\sum_i (\Pi_i)^2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2N}} qp^2 \quad , \quad (3.14)$$

este cambio de coordenadas nos permite escribir la densidad hamiltoniana \mathcal{T}' :

$$\mathcal{T}' = \frac{1}{2\sqrt{2N}}qp^2 \quad , \quad (3.15)$$

así también las relaciones formales (ecuaciones de Hamilton) entre los campos y los momentos conjugados se preservan en los nuevos campos y nuevos momentos conjugados:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Pi_i} = \partial_0 \Phi_i \rightarrow \frac{\partial \mathcal{T}'}{\partial p} = \partial_0 q \quad . \quad (3.16)$$

Utilizando las anteriores ecuaciones podemos obtener expresiones para el momento conjugado en términos de las coordenadas:

$$\frac{\partial \mathcal{T}'}{\partial p} = \partial_0 q = \frac{1}{\sqrt{2N}}qp \Rightarrow p = \sqrt{2N} \left(\frac{\partial_0 q}{q} \right) \quad , \quad (3.17)$$

de esta forma podemos expresar la densidad hamiltoniana \mathcal{T}' en términos del nuevo campo y sus derivadas temporales:

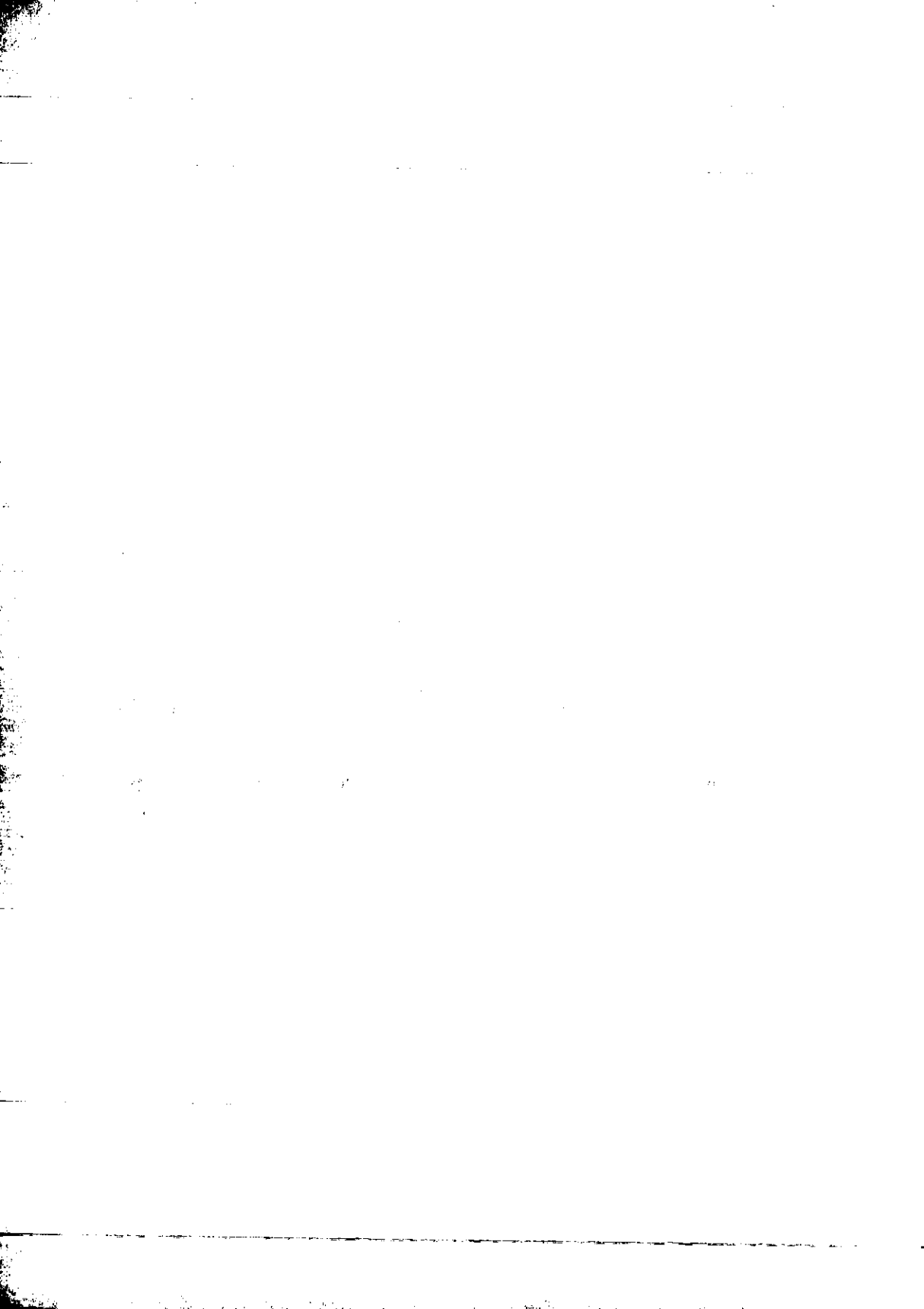
$$\mathcal{T}' = \sqrt{\frac{N}{2}} \left(\frac{(\partial_0 q)^2}{q} \right) \quad . \quad (3.18)$$

Pensando en un principio de equivalencia entre coordenadas temporales y espaciales proponemos un posible mapeo para el operador gradiente, si pensamos que el papel que jugaba la derivadas parcial temporal, es totalmente análogo al que jugará el operador gradiente:

$$\partial_0 \rightarrow -\vec{\nabla} \quad , \quad (3.19)$$

tenemos así la propuesta para los gradientes de los campos como:

$$\sum_i (\vec{\nabla} \Phi_i)^2 \rightarrow \sqrt{2N} \left(\frac{(\nabla q)^2}{q} \right) \quad . \quad (3.20)$$



Capítulo 4

Campo Gluónico de la CD en $SU_{color}(2)$

En este capítulo expondré la teoría de campo para las interacciones fuertes en ausencia de cargas, *i.e.* campos en el vacío; para esto recordaré un poco de la teoría del campo electromagnético, para posteriormente dar una descripción de cómo se realizó una formulación más general para tener teorías dinámicas. Por lo que comenzaré una muy breve reseña histórica de cómo se logró la formulación de una teoría para las interacciones fuertes; entonces se propondrá análogamente a la teoría electromagnética una densidad lagrangiana para el campo gluónico en el vacío y se impondrán ciertas condiciones sobre esta misma como la fijación en la norma del tiempo. Asimismo se aplicarán las propuestas desarrolladas en el capítulo anterior para un mapeo a coordenadas bosónicas del campo de norma gluónico.

4.1 Teorías de Campo de Yangs - Mills

Cuando tenemos una teoría de campo y observamos que hay ciertas transformaciones que dejan invariante a las ecuaciones del campo, así como a su densidad lagrangiana, esta transformación en el caso de la electrodinámica se puede ver cuando realizamos las siguientes sustituciones en el campo A^μ :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x) \quad , \quad (4.1)$$

esta transformación se conoce como *transformación local de norma* [4] [7].

Si además tenemos una teoría dinámica de las partículas, como la que se desarrolla a partir de la densidad lagrangiana del Campo de Dirac, dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i\partial_\mu \gamma^\mu - m) \Psi(x) \quad (4.2)$$

donde Ψ son biespinores, $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ es la conjugada hermitica de Dirac y γ^μ son las matrices 4×4 de Dirac. Cuyas soluciones de la ecuación de movimiento (la ecuación de Dirac) tiene la forma de:

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} e^{-i(Et - px)} \quad \text{con } u \text{ y } v \text{ espinores.} \quad (4.3)$$

Sabemos además que la descripción física es invariante ante cambios de fase locales, estas transformaciones son de la forma:

$$\Psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Psi \quad (4.4)$$

Además, para que la densidad lagrangiana del sistema total sea invariante bajo estas transformaciones tenemos que proponer un *acoplamiento mínimo*¹ con el campo, de tal forma que se sustituirá el operador de momento por el mismo, más un término del campo electromagnético. Esto es la substitución de la derivada ordinaria por una *derivada covariante*, de esta forma tenemos:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu \quad (4.5)$$

La densidad lagrangiana del campo de Dirac que describe partículas con espín $\frac{1}{2}$ y con carga eléctrica, en presencia de un campo electromagnético estará dada por :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(x) (i(\partial_\mu - ieA_\mu) \gamma^\mu - m) \Psi(x) \quad (4.6)$$

¹Es un hecho natural si pensamos que la densidad lagrangiana total del sistema está constituida por 3 partes que son:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Interaccion}$$

y en el término de interacción es donde se encuentra el acoplamiento.

De esta forma la densidad lagrangiana del sistema de partículas y campos será la expresión:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i (\partial_\mu - ieA_\mu) \gamma^\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.7)$$

Observemos que esta expresión no es invariante ante transformaciones de norma del campo A_μ , sino que además se requiere la transformación simultánea de la fase de la función de onda para que se logre la invariancia, de tal forma que ahora para preservar la invariancia de la densidad lagrangiana se precisa de una transformación simultánea en los campos que es:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (4.8)$$

$$\Psi \rightarrow e^{ie\chi} \Psi$$

Es por todos conocido que estas últimas transformaciones forman un grupo conocido como $U(1)$, ¿qué ocurrirá cuando una densidad lagrangiana es invariante ante transformaciones de un grupo como $SU(2)$ y $SU(3)$?. Esta idea la tuvieron Yangs y Mills [6] en 1954, generalizando el concepto de invariancia ante transformaciones de norma y, de esta manera, propusieron que las funciones de onda fueran invariantes antes las transformaciones de la forma:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-\frac{ig}{2} \theta_a(x) \tau_a} \Psi(x) \quad \text{con} \quad a = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

donde τ_a son las tres matrices de Pauli, las cuales son los generadores del grupo $SU(2)$, g es la constante de acoplamiento que en el caso de la electrodinámica es la carga fundamental.

De la misma forma en que cambia el operador de momentos en la teoría de las partículas al introducir un campo electromagnético, cambiando de una derivada ordinaria a una derivada covariante, en forma totalmente análoga al electromagnetismo, introducimos un campo de norma² $W_{\mu a}$ tal que:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + \frac{ig}{2} \tau_a W_{\mu a} \quad (4.10)$$

²En esta situación hay que mencionar que el índice griego μ es para coordenadas espacio temporales y el índice latino a corresponden a índices internos de la teoría debido a que hay tres generadores del grupo $SU(2)$ y se deben sumar sobre todos ellos. El recorrido de los índices será para $\mu = 0, 1, 2, 3$ y para $a = 1, 2, 3$.

Ahora si estamos pensando en el campo de norma covariante bajo estas transformaciones, podemos proponer la transformación de norma para el campo como:

$$W_a^\mu(x) \rightarrow W_a^\mu(x) + \epsilon_{abc} \theta^b W^{\mu c}(x) + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_a, \quad (4.11)$$

donde ϵ_{abc} es la densidad tensorial totalmente antisimétrica de Levi-Civita y son aquí las *constantes de estructura* del grupo. Así la densidad lagrangiana en la teoría estará constituido por un tensor de campo de la siguiente forma:

$$G_{a\mu\nu} = \partial_\mu W_{a\nu} - \partial_\nu W_{a\mu} - g \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (4.12)$$

y así la densidad lagrangiana para el campo de norma sera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Si comparamos esta densidad lagrangiana con la que calculamos para el campo electromagnético nos damos cuenta que contienen un término extra y claramente diferente que es un producto de los campos, a este término le precede la constante de acoplamiento lo cual nos indica que estos campos son autointeractuantes o que poseen una carga. Esto no se observa en el electromagnetismo y es así que los campos de norma del electromagnetismo no poseen carga de ninguna especie. Además como se verá más adelante estos campos no tendrán masa³.

4.2 La Cromodinámica Cuántica

La teoría para las interacciones fuertes fue desarrollada después de muchas observaciones sobre el comportamiento regular de las partículas que se observan en el núcleo o en la radiación cósmica. El primer intento se realizó al estudiar los nucleones. Estas partículas en principio como pensaba W. Heisenberg pueden ser manifestaciones de un orden

³Los campos de norma en ciertas circunstancias si pueden adquirir masa, este fenómeno se conoce con el nombre de *Mecanismo de Higgs* o *Ruptura Espontánea Simetría*.

más simple o "un mismo tipo de partícula" y así fue como nació el concepto de *isoespín*. En esta situación el protón puede ser la partícula con la proyección del isoespín para "arriba" con valor $+\frac{1}{2}$ y el neutrón la partícula con la proyección del isoespín hacia "abajo" con un valor $-\frac{1}{2}$. De esto se puede inferir que hay un álgebra semejante a la que se estudia en la teoría de W. Pauli para partículas con espín fraccionario, es además inmediato encontrar la relación que hay entre la carga eléctrica Q_e y la proyección del isoespín en el eje z I_0 que estará dada por la expresión:

$$Q_e = I_0 + \frac{1}{2} \quad . \quad (4.14)$$

Si desarrollamos el álgebra en la notación de Dirac podemos escribir las operaciones sobre el *estado del protón* o el *estado del neutrón*, representemos los estados por:

$$|p\rangle \quad ; \quad |n\rangle \quad . \quad (4.15)$$

Podemos así también aplicar algunos resultados conocidos en la teoría de partículas con espín fraccionario, de igual manera es posible pensar que un operador I_+ actuando en un estado del neutrón lo cambie a un estado de protón, así mismo tenemos el operador I_- que realiza la operación contraria.

$$I_+ |n\rangle = |p\rangle \quad , \quad (4.16)$$

$$I_- |p\rangle = |n\rangle \quad . \quad (4.17)$$

Además tenemos un operador que nos da la información de la carga del estado I_0 , de tal forma que:

$$I_0 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle \quad I_0 |p\rangle = +\frac{1}{2} |p\rangle \quad . \quad (4.18)$$

También sabemos que los operadores son hermitianos es decir cumplen que $I_+ = (I_-)^\dagger$ estos operadores satisfacen las reglas de conmutación del grupo $SU(2)$. En una posible representación matricial de W. Heisenberg tenemos:

para los estados:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

para los operadores:

$$I_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Estos operadores son una representación de los generadores del grupo $SU(2)$.

En 1964 M. Gell-Mann, Y. Ne'eman y G. Zweig propusieron un modelo que involucraba la existencia de pequeñas partículas constituyentes de los bariones, esto con el fin de simplificar y sistematizar la descripción de éstos. Estas partículas que constituirían a los bariones deberían estar en grupos de tres para formar un hadrón y en pares para formar mesones. A estas partículas le dieron el nombre de *quarks*, y entre sus propiedades figuraban tener carga eléctrica fraccionaria y espín fraccionario de $\frac{1}{2}$, tratándose de esta forma de fermiones; para que la descripción fuera completa se necesitaban tres tipos de *quarks* que son:

tipo (sabor)	carga eléctrica	carga extrañeza
<i>u</i> (up)	$+\frac{2}{3}$	0
<i>d</i> (down)	$-\frac{1}{3}$	0
<i>s</i> (strange)	$-\frac{1}{3}$	-1

con estas partículas podían explicar la formación de los bariones observados.

Sin embargo la existencia de partículas formadas con tres *quarks* idénticos como Δ^{++} (formada por tres *quarks* *u*), viola el principio de exclusión de Pauli, con lo cual se necesita un grado más de libertad en la teoría y este grado fue dado por una nueva carga llamada *carga de color* que podría ser de tres tipos que son: azul, rojo y amarillo.

Ahora la teoría dinámica involucra una descripción de hadrones formados por tres *quarks* y cada uno con la posibilidad de tener tres posibles colores. La simetría para esta descripción fue $SU(3)$ debida a los tipos (o sabores: u,d,s) de *quarks* y una simetría $SU_{color}(3)$ para la carga de color; así que conociendo esto, se propuso una teoría dinámica invariante ante las transformaciones de norma inducidas por el grupo $SU_{color}(3)$. A esta teoría se le conoce como *Cromodinámica Cuántica* (CDC).

Entonces tenemos que las funciones de onda tendrán como transformación de norma:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-ig\theta_a(x)\lambda_a} \Psi(x) \quad \text{con} \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad , \quad (4.21)$$

donde λ_a son las matrices de 3×3 de Gell-Mann, que son la generalización de las matrices de Pauli, siendo éstas los generadores del grupo $SU(3)$. Así mismo nos damos cuenta de que ahora hay 8 índices internos de la teoría que corresponden a los 8 generadores de $SU(3)$ y esto trae como consecuencia la existencia de 8 campos de norma A_a^ν que se llaman *campo gluónico* y cuyo tensor del campo estará dado por:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad , \quad (4.22)$$

donde f_{bc}^a son las constantes de estructura del grupo $SU(3)$ [6].

Sin embargo siendo la teoría de norma en $SU_{color}(3)$ la correcta para modelar la interacción entre los quarks que constituyen a los hadrones, restringiré el posterior desarrollo de mi tesis al estudio de una teoría de norma $SU_{color}(2)$, con lo cual el índice interno en la teoría solo tendrá los primeros 3 valores. Esta restricción no es tan limitante ya que en este modelo se representa toda la estructura importante de la CDC, y es fácil la extensión al grupo de norma $SU_{color}(3)$.

4.3 La Densidad Lagrangiana del Campo Gluónico

Tenemos para la densidad lagrangiana del campo gluónico (campo de norma en $SU_{color}(2)$), como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (4.23)$$

El tensor de campo gluónico estará dado en principio por la expresión (4.22) y la única diferencia será que las constantes de estructura del grupo serán substituidas por la densidad tensorial totalmente antisimétrica de *Levi-Civita* (constantes de estructura de $SU(2)$):

$$\begin{aligned} F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_\nu^a - \partial^\nu A_\mu^a + g\varepsilon_a^{bc} A_b^\mu A_c^\nu ; \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (4.24)$$

Procederemos al desarrollo de la densidad lagrangiana para ver sus partes constitutivas y posteriormente construir una teoría efectiva o un mapeo, de tal forma que se puede escribir la densidad lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \right] \left[\partial^\mu A_\alpha^a - \partial^\alpha A_\mu^a + g\varepsilon_a^{dc} A_d^\mu A_\alpha^c \right] \quad (4.25)$$

Desarrollando la expresión anterior obtenemos en la notación, que llamaré notación tensorial (indicial con la conversión de Einstein):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) \left(\partial^\mu A_\alpha^a - \partial^\alpha A_\mu^a \right) \\ &\quad - \frac{g}{2} \varepsilon_a^{dc} \left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \right) A_d^\mu A_\alpha^c - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_\mu^b A_\nu^c A_d^\mu A_\alpha^e \end{aligned} \quad (4.26)$$

Podemos reescribir la densidad lagrangiana y para esto consideraremos las siguientes partes puramente temporales que la constituyen, esto es $\mu = 0, \nu = 0$:

$$\mathcal{L}_1 = 0 \quad (4.27)$$

Consideremos las partes espacio-temporales de la densidad lagrangiana tomando $\mu = i, \nu = 0$ o $\mu = 0, \nu = i$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2} (\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a) (\partial^i A_a^0 - \partial^0 A_a^i) \\ & - g \varepsilon_a^{de} (\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a) A_d^i A_e^0 - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_i^b A_0^c A_d^i A_e^0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

y tomemos la parte puramente espacial de la densidad lagrangiana que es $\mu = i, \nu = j$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -\frac{1}{2} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) \\ & - g \varepsilon_a^{de} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_d^i A_e^j - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_i^b A_j^c A_d^i A_e^j. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Entonces la densidad lagrangiana será la suma de las 3 anteriores partes, es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3, \\ \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a) (\partial^i A_a^0 - \partial^0 A_a^i) - g \varepsilon_a^{de} (\partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a) A_d^i A_e^0 \\ & - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_i^b A_0^c A_d^i A_e^0 - \frac{1}{2} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) \\ & - g \varepsilon_a^{de} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_d^i A_e^j - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_i^b A_j^c A_d^i A_e^j. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Esta expresión nos permite ver que no hay derivadas temporales de los campos A_0^a y de las ecuaciones de Hamilton, podemos ver que hay un inconveniente en ellas; así, de la definición de momento canónico conjugado tenemos:

$$\Pi_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_a^\mu}. \quad (4.31)$$

Observemos que no está definido Π_a^0 , si imponemos la norma de tiempo, esto es:

$$A_0^a = 0 \implies A_a^\mu = (0, \vec{A}_a). \quad (4.32)$$

Evitamos la aparición del momento canónico Π_a^0 , entonces la densidad lagrangiana del campo gluónico en la norma de tiempo adquiere

la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a) (\partial^0 A_a^i) - \frac{1}{2} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) \\ & - g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_d^b A_e^c - \frac{g^2}{4} \varepsilon_a^{bc} \varepsilon_a^{de} A_i^b A_j^c A_d^e A_e^j \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para simplificar un poco la notación y utilizando la convención vectorial:

$$x^i = \vec{x} \quad y \quad \vec{x}^2 = x^i x_i = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \quad ,$$

se reescribirá de esta forma la densidad lagrangiana en la notación vectorial y en la norma del tiempo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2} (\partial_0 \vec{A}_a)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 - g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) \\ & - \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.4 La Densidad Hamiltoniana del Campo Gluónico

Para continuar con nuestro estudio de la teoría del campo gluónico es necesario construir la densidad hamiltoniana. Es de gran importancia la formulación hamiltoniana si se pretende un tratamiento cuántico al estilo Schrödinger (operadores y eigenestados). En general tenemos una densidad lagrangiana del campo gluónico de la forma :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_0 \vec{A}_a)^2 - \mathcal{V}(\vec{A}) \quad (4.35)$$

Para construir la densidad Hamiltoniana del campo en cuestión, observemos primero, de la definición de momento canónico conjugado que:

$$\Pi_i^a = \frac{\delta \mathcal{L}'}{\delta \partial_0 A_i^a} = -(\partial_0 A_i^a) = \partial_0 A_a^i \quad (4.36)$$

Así, la densidad Hamiltoniana se escribirá por su definición:

$$\mathcal{H} = \Pi_a^i \partial_0 A_a^i - \mathcal{L}' \quad (4.37)$$

Haciendo las sustituciones pertinentes de la ecuación anterior y simplificando obtenemos de esta manera la densidad hamiltoniana en la norma del tiempo y en notación vectorial:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 + g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) + \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (4.38)$$

4.5 Mapeo Bosónico del Campo Gluónico en $SU_{color}(2)$

A continuación estamos en posición de aplicar el mapeo a la densidad hamiltoniana, pero por tratarse de la construcción de una teoría efectiva en pares de campos, es necesario hacer unas simplificaciones evitando la introducción de productos de derivadas con pares de campos⁴.

Por lo que al aplicar el método de mapeo en la densidad hamiltoniana consideremos las partes que sólo involucran pares de campos y por esta razón despreciaremos en esta aproximación el término:

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) \quad (4.39)$$

Trabajaremos con la siguiente densidad hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 + \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (4.40)$$

Procederemos a analizar la parte del término cinético de la densidad hamiltoniana que es:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a \quad (4.41)$$

⁴Es posible tratar estas partes "impares" de campos utilizando otros conceptos como cuasipartículas, para mayor referencia vea [3].

El mapeo que proponemos en total analogía con el sección (3.1) será entonces para el término cinético:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a(x) \cdot \vec{\Pi}_a(x) \rightarrow \mathcal{T}' = \frac{1}{6} \sum_{i,k_1,k_2=1}^m p_{ik_1}(x) q_{k_1k_2}(x) p_{k_2i}(x) \quad , \quad (4.42)$$

y para los productos de los campos de norma A_{ia} , la transformación general a coordenadas bosónicas (no normalizadas) será:

$$A_{ia} A_{ja} \rightarrow q_{ij} \quad . \quad (4.43)$$

Esta transformación se puede interpretar de la siguiente manera: el tensor q_{ij} contiene en su diagonal la norma del campo A_{ia} (la intensidad de este) y fuera de la diagonal, de una manera simétrica componentes como $A_{12}A_{22}$, que tiene una estructura semejante al momento cuadrupolar del campo. Como sabemos las relaciones que se establecen en las ecuaciones de Hamilton se deben de preservar para nuestro mapeo:

$$\frac{\partial \mathcal{T}'}{\partial p_{jk}} = \partial_0 q_{jk} = \dot{q}_{jk} \quad . \quad (4.44)$$

Desarrollando la derivada tendremos:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{jk} &= \frac{1}{6} \sum_{i,k_1,k_2=1}^m q_{k_1k_2} p_{k_2i} (\delta_{ij} \delta_{k_1k} + \delta_{ik} \delta_{k_1j}) + p_{ik_1} q_{k_1k_2} (\delta_{k_2j} \delta_{ik} + \delta_{k_2k} \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k_2=1}^m (q_{kk_2} p_{k_2j} + q_{jk_2} p_{k_2k}) + \frac{1}{6} \sum_{k_1=1}^m (p_{kk_1} q_{k_1j} + p_{jk_1} q_{k_1k}) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k_2=1}^m (q_{kk_2} p_{k_2j} + q_{jk_2} p_{k_2k}) \quad . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Tenemos así el sistema de ecuaciones lineales:

$$\dot{q}_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m (q_{jk} p_{ki} + q_{ik} p_{kj}) \quad . \quad (4.46)$$

Podemos reescribirlo de la siguiente manera factorizando $p_{k_1k_2}$ y así

obtenemos:

$$\begin{aligned} 3\dot{q}_{ij} &= \sum_{k_1, k_2}^m \sum_k^m (q_{jk} \delta_{kk_1} \delta_{ik_2} + q_{ik} \delta_{kk_1} \delta_{jk_2}) p_{k_1 k_2} \\ &= \sum_{k_1, k_2}^m (q_{jk_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_1} \delta_{jk_2}) p_{k_1 k_2} \quad , \end{aligned} \quad (4.47)$$

de tal manera que la expresión anterior se expresa en términos de unas sumas simples que serán:

$$\begin{aligned} 3\dot{q}_{ij} &= \sum_{k_1 < k_2}^m (q_{jk_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_1} \delta_{jk_2}) p_{k_1 k_2} + \sum_{k_1 > k_2}^m (q_{jk_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_1} \delta_{jk_2}) p_{k_2 k_1} \\ &+ \sum_k^m (q_{jk} \delta_{ik} + q_{ik} \delta_{jk}) p_{kk} \quad . \end{aligned} \quad (4.48)$$

Sabemos por otra parte que nuestra expresión es invariante ante la sustitución de $k_1 \rightarrow k_2$ y viceversa. Esto permite algunas simplificaciones de nuestra ecuación por lo que se reescribir como:

$$\begin{aligned} 3\dot{q}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k_1 < k_2}^m (q_{jk_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_1} \delta_{jk_2} + q_{jk_2} \delta_{ik_1} + q_{ik_2} \delta_{jk_1}) p_{k_1 k_2} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_k^m (q_{jk} \delta_{ik} + q_{ik} \delta_{jk}) p_{kk} \quad . \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nuestro sistema de ecuaciones puede escribirse en una forma matricial si consideramos un *vector columna* \dot{q} cuyas componentes sean \dot{q}_{ij} que por simetría de índices $\dot{q}_{ij} = \dot{q}_{ji}$. Si $m = 3$ (grados de libertad del color, que son iguales a los grados de libertad espaciales) para el caso de una teoría de $SU_{color}(2)$ de color, nuestro espacio de fase tendrá una dimensión $m(m+1) = 12$, que toma la forma que se muestra:

Para los vectores:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (\dot{q}_{11}, \dot{q}_{12}, \dot{q}_{13}, \dot{q}_{22}, \dot{q}_{23}, \dot{q}_{33}) \quad , \\ p &= (p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33}) \quad , \end{aligned} \quad (4.50)$$

y de esta forma podemos plantear la ecuación (4.46) como:

$$\dot{q} = M (q_{ij}) p \quad ; \quad (4.51)$$

donde $M(q_{ij})$ es una matriz cuadrada de 6×6 , cuyas componentes se calculan a continuación:

Consideremos el caso $i = j$, entonces nuestra ecuación se transforma a:

$$3\dot{q}_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{k_1 < k_2}^m (q_{ik_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_1} \delta_{ik_2} + q_{ik_2} \delta_{ik_1} + q_{ik_2} \delta_{ik_1}) p_{k_1 k_2} + \frac{1}{2} \sum_k^m (q_{ik} \delta_{ik} + q_{ik} \delta_{ik}) p_{kk} = \sum_k^m q_{ik} p_{ki} \quad (4.52)$$

Ahora tomemos el caso $i > j$ o $i < j$ tenemos:

$$3\dot{q}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k_1 < k_2}^m (q_{jk_1} p_{k_1 i} + q_{ik_1} p_{k_1 j} + q_{jk_2} p_{ik_2} + q_{ik_2} p_{jk_2}) + \frac{1}{2} \sum_k^m (q_{jk} p_{ik} + q_{ik} p_{jk}) \quad (4.53)$$

Por lo que tenemos la matriz $M(q_{ij})$:

$$M(q_{ij}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2q_{11} & 2q_{12} & 2q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & (q_{11} + q_{22}) & q_{23} & 0 & q_{13} & 0 \\ q_{13} & q_{23} & (q_{11} + q_{33}) & 0 & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 2q_{12} & 0 & 2q_{22} & 2q_{23} & 0 \\ 0 & q_{13} & q_{12} & q_{23} & (q_{22} + q_{33}) & q_{23} \\ 0 & 0 & 2q_{13} & 0 & 2q_{23} & 2q_{33} \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Por otra parte es posible reescribir el término de energía cinética en una forma matricial utilizando la definición de los vectores de momento y coordenadas:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{6} \sum_{i, k_1, k_2=1}^m p_{ik_1}(x) q_{k_1 k_2}(x) p_{k_2 i}(x) = \frac{1}{6} p^t Q(q_{ij}) p \quad (4.55)$$

donde la matriz $Q(q_{ij})$ es:

$$Q(q_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{11} & 2q_{12} & 2q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (q_{11} + q_{22}) & 2q_{23} & 2q_{12} + q_{13} & q_{13} & 0 \\ 0 & 0 & (q_{11} + q_{33}) & q_{12} & q_{12} & 2q_{13} \\ 0 & 0 & 0 & (q_{22} + q_{33}) & (q_{22} + q_{25} + q_{33}) & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{33} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Ahora tenemos las expresiones (4.51) y (4.55) en forma matricial y nuestro sistema de ecuaciones (4.46) se puede resolver. Esto nos

permitirá reescribir el término de energía cinética en función de los campos y las derivadas temporales de estos últimos, entonces el término cinético se podrá reescribir sabiendo que:

$$\dot{q} = M(q_{ij})p \implies p = M^{-1}(q_{ij})\dot{q} \implies p^t = \dot{q}^t (M^{-1}(q_{ij}))^t \quad (4.57)$$

Utilizando las ecuaciones (4.57) y (4.55) podemos escribir el término cinético de la densidad lagrangiana en términos de los campo q_{ij} y en notación matricial:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{6} p^t Q p = \frac{1}{6} \dot{q}^t (M^{-1})^t Q M^{-1} \dot{q} \quad (4.58)$$

Es necesario ahora poder escribir los otros términos de la densidad lagrangiana o hamiltoniana. El problema al que nos enfrentamos es que no hay relaciones formales (ecuaciones de movimiento o ecuaciones canónicas) que nos puedan ayudar para lograr el mapeo término a término. El problema principal estará en cómo proponer un mapeo al término que involucra un rotacional en la densidad hamiltoniana:

$$\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 \quad (4.59)$$

Este problema no se puede resolver con sólo la suposición o la postulación de cómo cambian las derivadas, puesto que existen diferentes operadores como gradientes, divergentes y rotacionales, cada uno de éstos debe tener su transformación particular o mapeo. Se sugiere entonces la utilización de otras coordenadas u otro posible mapeo, no de pares de campos (productos de campos de norma) sino del mapeo de un sólo campo a través de unas nuevas coordenadas llamadas hipersféricas. Estas son un mapeo exacto y prometen ser más sencillas de transformar a un mapeo bosónico, como se discutirá en los siguientes capítulos.

A excepción de los términos de los rotacionales del campo \vec{A}_a , el otro término que se puede mapear inmediatamente es el término de los campos a la cuarta potencia. Su realización en coordenadas bosónicas es inmediata, según la propuesta (4.43) aplicada al término (de campos a la cuarta potencia):

$$\left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (4.60)$$

Haciendo las siguientes observaciones:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 \rightarrow \left(\sum_i q_{ii} \right)^2 \quad (4.61)$$

y

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} (A_{ib} A_{jb})^2 \rightarrow \sum_{i,j} q_{ij}^2 \quad , \quad (4.62)$$

de tal forma que el mapeo del término de los campos a la cuarta potencia serán:

$$\left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \rightarrow \left\{ \left(\sum_i q_{ii} \right)^2 - \sum_{i,j} q_{ij}^2 \right\} \quad (4.63)$$

Para el término que falta (el término del rotacional al cuadrado) se desarrollará el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Coordenadas Hiperesféricas

En este capítulo introduciré el mapeo a coordenadas hiperesféricas; dado que éste, se trata de un mapeo del campo de norma, el cual será exacto y permitirá reescribir todas las partes de la densidad lagrangiana del campo gluónico y por consiguiente la densidad hamiltoniana¹. La introducción de este mapeo se hace con la finalidad de diagonalizar la matriz definida en la ecuación (4.43) y cuyos elementos son de la forma: $\sum_b A_b^\dagger A_{jb}$ [10]. Una vez logrado este mapeo procederé a estudiar un caso, más sencillo y particular, que permitirá encontrar un conjunto de ecuaciones que simplifican en gran medida las densidades (lagrangiana y hamiltoniana), que posteriormente permitirá la realización del mapeo a coordenadas bosónicas.

5.1 Mapeo a Coordenadas Hiperesféricas

Tenemos la densidad lagrangiana del campo gluónico en el vacío en la norma del tiempo, que está dada por la expresión (4.34):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \vec{A}_a)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 - g\epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) - \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (5.1)$$

¹Un ejemplo de la utilización de estas coordenadas en otro contexto, como es la física nuclear de modelos colectivos, se puede encontrar en [9].

o en notación tensorial con la expresión (4.33):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a) (\partial^0 A_a^i) - \frac{1}{2} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_j^a - \partial^j A_i^a) \\ & - g \varepsilon_a^{de} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_d^i A_e^j - \frac{g^2}{4} \varepsilon_{bc}^a \varepsilon_a^{de} A_i^b A_j^c A_d^i A_e^j \end{aligned} \quad (5.2)$$

Realizaremos el cambio de “coordenadas” (campos) proponiendo:

$$A_{ia} = \sum_{k=1}^3 \rho_k D_{ki}^{13}(\theta) \Delta_{ka}^{13}(\Phi) \quad , \quad (5.3)$$

donde las matrices cuyos elementos son D_{ki}^{13} y Δ_{ka}^{13} , las que tienen los grados de libertad espaciales y los grados de libertad en el espacio de color respectivamente. Además los ángulos θ y Φ nos indican la orientación del sistema de referencia², tanto en el espacio ordinario como en el espacio de color [10].

Observemos las siguientes propiedades de ortogonalidad de las matrices (obviando índices superiores):

$$\begin{aligned} \sum_i D_{ki} D_{mi} &= \delta_{km} & \sum_a \Delta_{ma} \Delta_{ka} &= \delta_{mk} \end{aligned} \quad (5.4)$$

(a) (b)

A continuación se reescribirá toda la teoría en estas nuevas coordenadas³, es claro que aquí todos los términos tendrán una transformación, de tal forma que no se despreciará a ningún término de la densidad hamiltoniana o lagrangiana.

5.1.1 El Término Cinético

Para comenzar con la teoría del campo gluónico en estas nuevas coordenadas consideremos el término cinético de la densidad lagrangiana dado en la expresión (4.41):

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a) (\partial^0 A_a^i) = \frac{1}{2} \left[\partial_0 \left(\sum_k \rho_k D_{ki} \Delta_{ka} \right) \right]^2 \quad (5.5)$$

²Sistema de referencia donde se diagonaliza la matriz: $\sum_b A_b^i A_{jb}$.

³Véase Apéndice A para cálculos completos.

Las derivadas temporales de las matrices D_{ki} y Δ_{ma} estarán dadas por:

$$\begin{aligned} \partial_0 D_{ki} = \dot{D}_{ki} &= \sum_n \omega_{kn} D_{ni} & \partial_0 \Delta_{ma} = \dot{\Delta}_{ma} &= \sum_k \Omega_{mk} \Delta_{ka} \quad , \\ (a) & & (b) & \end{aligned} \quad (5.6)$$

con ω_{kn} y Ω_{mk} matrices antisimétricas. Desarrollando la expresión (5.5) obtenemos:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m,k} \rho_m^2 (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) - \sum_{m,k} \rho_m \rho_k \Omega_{mk} \omega_{mk} \quad . \quad (5.7)$$

Sabiendo que debido a la simetría de la expresión anterior podemos escribir la siguiente igualdad:

$$\sum_{m,k} \rho_m^2 (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) = \frac{1}{2} \sum_{m,k} (\rho_m^2 + \rho_k^2) (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) \quad , \quad (5.8)$$

y finalmente podemos reescribir la parte cinética como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} (\rho_m^2 + \rho_k^2) (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) - \sum_{m,k} \rho_m \rho_k \Omega_{mk} \omega_{mk} \quad . \quad (5.9)$$

Es también posible calcular los momentos generalizados según las ecuaciones de Hamilton. Tenemos 2 expresiones, una relacionado con el momento angular conjugado del campo en el espacio y otro con el momento angular del campo en el espacio de color:

para el espacio es:

$$L_{mk} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_{mk}} = \sum_{m,k} [(\rho_m^2 + \rho_k^2) \omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \Omega_{mk}] \quad , \quad (5.10)$$

y para el espacio de color es:

$$\mathcal{L}_{mk} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Omega_{mk}} = \sum_{m,k} [(\rho_m^2 + \rho_k^2) \Omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \omega_{mk}] \quad . \quad (5.11)$$

Nuestro interés de buscar un mapeo en coordenadas hiperesférica es para utilizarlas como un paso intermedio en la búsqueda del mapeo

bosónico, y éste tiene que presentar una descripción del sistema por campos de norma en donde no haya carga de color neta. Esto se traduce a que debemos imponer un sistema de referencia donde no haya color. La condición de que haya color cero se impone por:

$$0 = \mathcal{L}_{mk} = \sum_{m,k} \left[(\rho_m^2 + \rho_k^2) \Omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \omega_{mk} \right] \implies \Omega_{mk} = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \omega_{mk} \quad , \quad (5.12)$$

esto implicará necesariamente una relación entre las “*velocidades angulares*” del espacio físico y el de color. De tal forma que utilizando la ecuación anterior se puede escribir la parte cinética de la densidad lagrangiana sin color:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \quad . \quad (5.13)$$

5.1.2 El Término de Campos a la Cuarta Potencia

Para reescribir el término de campos a la cuarta potencia en el mapeo de coordenadas hiperesféricas consideremos a la expresión (4.60) que es:

$$\frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad , \quad (5.14)$$

que aparece como un término restando en la densidad lagrangiana. Consideremos primero:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 = (A_b^i A_{ib})^2 = \left(\sum_{i,b} A_{ib} A_{ib} \right)^2 = \left(\sum_m \rho_m^2 \right)^2 \quad , \quad (5.15)$$

y el otro término es:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} \sum_{b,c} A_{ib} A_{jc} A_c^i A_b^j = \sum_{i,j} \left[\sum_b (A_{ib} A_b^j) \right]^2 \quad . \quad (5.16)$$

Además tenemos por ortogonalidad de las matrices Δ_{kb} , que está dada en la ecuación (5.4b), de tal forma que tenemos la siguiente

relación:

$$\sum_b (A_{ib} A_b^j) = \sum_b \left(\sum_{k,m} \rho_k D_{ki} \Delta_{kb} \rho_m D_{mj} \Delta_{mb} \right) = \sum_k \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \quad . \quad (5.17)$$

Por lo tanto, si utilizamos la ortogonalidad de las matrices D tenemos:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} \sum_{k,m} \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \rho_m^2 D_{mi} D_{mj} = \sum_k \rho_k^4 \quad , \quad (5.18)$$

quedando de esta forma el término de los campos a la cuarta potencia en nuestras nuevas coordenadas de la forma:

$$\frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} = \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad . \quad (5.19)$$

5.1.3 El Término de Campos Impares

Es algo propio del mapeo en coordenadas hiperesféricas la posibilidad de transformar todos y cada uno de los términos que aparecen en la densidad lagrangiana⁴. Aunque no podrán ser mapeados a coordenadas bosónicas por completés transformaremos este término.

Este término de los campos impares es:

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_b^i A_c^j \quad . \quad (5.20)$$

Además se puede escribir de otra forma como:

$$g \varepsilon_a^{bc} \partial_i A_j^a (A_b^i A_c^j - A_b^j A_c^i) \quad , \quad (5.21)$$

conjuntamente con la anterior simplificación, podemos describir el siguiente término:

$$-\varepsilon_{abc} A_b^j A_c^i = \varepsilon_{acb} A_b^j A_c^i = \varepsilon_{abc} A_b^i A_c^j \quad . \quad (5.22)$$

Entonces tenemos para este término una forma mucho más sencilla y fácil de transformar:

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = 2g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j \quad . \quad (5.23)$$

⁴Véase el Apéndice A para los cálculos completos.

Haciendo la transformación a coordenadas hiperesféricas y después de realizar las simplificaciones adecuadas, este término quedará:

$$\begin{aligned}
& 2g\varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j = \\
& g\varepsilon_a^{bc} \sum_{m,n} \partial_i (\rho_m^2) \rho_n D_{ni} \Delta_{ma} \Delta_{mc} \Delta_{nb} \\
& + 2g\varepsilon_a^{bc} \sum_{k,m,n} \partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n D_{mj} D_{ni} \Delta_{ka} \Delta_{mc} \Delta_{nb} \\
& + 2g\varepsilon_a^{bc} \sum_{m,n} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \Delta_{mc} \Delta_{nb} .
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Entre los elementos de la matriz se encuentran las siguientes relaciones, que involucrán a los *coeficientes de Clebsch-Gordan* (C-G):

$$\Delta_{mc} \Delta_{nb} = \sum_{l,d_1,d_2} (1m1n|ld_1) (1c1b|ld_2) \Delta_{d_1 d_2}^l . \tag{5.25}$$

Con estas relaciones⁵ podemos reescribir el término de campos impares en una forma más simple. De esta forma el término de campos impares quedará expresado por:

$$\begin{aligned}
& g\varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = \\
& 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni}] \\
& + 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka}] .
\end{aligned} \tag{5.26}$$

5.1.4 El Término del Rotacional Cuadrado

Este término es en los campo de norma⁶ y se puede expresar por :

$$\begin{aligned}
& (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = \\
& = (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) = 2 (\partial_i A_j^a \partial^i A_a^j - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i) \\
& = 2 \left[(\partial_i A_j^a)^2 - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i \right] .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Procedemos a realizar el mapeo de tal forma que se expresa el rotacional cuadrado por:

⁵Véase Apéndice A para cálculos completos.

⁶Véase Apéndice A para cálculos completos.

$$\begin{aligned}
& (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = \\
& 2 \sum_k \left[(\partial_i (\rho_k))^2 + (\rho_k \partial_i (D_{kj}))^2 + (\rho_k \partial_i (\Delta_{ka}))^2 \right] \\
& + \sum_k \partial_i (\rho_k^2) \left[\partial_i (D_{kj}^2) + \partial_i (\Delta_{ka}^2) \right] \\
& + 4 \sum_{k,m} \left[\partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mj} \right] \\
& - 2 \sum_k \partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 \partial_i (D_{kj}) \partial_j (D_{ki}) + \partial_i (\rho_k^2) D_{kj} \partial_j (D_{ki}) \\
& - 2 \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \partial_i (\Delta_{ka}) \partial_j (\Delta_{ma}) + 2 \partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \\
& + 2 \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \quad .
\end{aligned} \tag{5.28}$$

5.1.5 La Densidad Lagrangiana

Con las partes anteriores transformadas a coordenadas hiperesféricas se puede expresar la densidad lagrangiana como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \\
& - \sum_k \left[(\partial_i \rho_k)^2 + (\rho_k \partial_i D_{kj})^2 + (\rho_k \partial_i \Delta_{ka})^2 \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_k \left[\partial_i (\rho_k^2) \left[\partial_i (D_{kj}^2) + \partial_i (\Delta_{ka}^2) \right] \right] \\
& - 2 \sum_{k,m} \left[(\partial_i D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} (\partial_i \Delta_{ma}) \rho_m D_{mj} \right] \\
& + \sum_k \left[(\partial_i \rho_k) (\partial_j \rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 (\partial_i D_{kj}) (\partial_j D_{ki}) + \partial_i (\rho_k^2) D_{kj} (\partial_j D_{ki}) \right] \\
& + \sum_{k,m} \left[\rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} (\partial_i \Delta_{ka}) + 2 \rho_m D_{mi} D_{kj} \Delta_{ka} (\partial_i \rho_k) \right] (\partial_j \Delta_{ma}) \\
& + 2 \sum_{k,m} \rho_m D_{mi} \rho_k \Delta_{ka} (\partial_i D_{kj}) (\partial_j \Delta_{ma}) \\
& - 2g \sum_{k,m,n} \left[\varepsilon_{nmk} \rho_k \rho_m \rho_n D_{mj} D_{ni} (\partial_i D_{kj}) \right] \\
& - 2g \sum_{k,m,n} \left[\varepsilon_{nmk} \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \Delta_{ka} (\partial_i \Delta_{ma}) \right] - \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad .
\end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2 El Caso cuando ρ es Constante

Para simplificar la cantidad de términos en la densidad lagrangiana dada en la expresión (5.29), podemos utilizar la relación entre derivadas de las matrices D_{kj} y Δ_{ma} como se utilizó en el caso del término cinético donde se hizo uso de las igualdades (5.6a) y (5.6b), cuya generalización la podemos expresar por:

$$\partial_i D_{kj} = \sum_l \underset{(a)}{\partial_i \theta_{kl}} D_{lj} \quad \partial_i \Delta_{ma} = \sum_l \underset{(b)}{\partial_i \Phi_{ml}} \Delta_{la} \quad . \quad (5.30)$$

De esta forma podemos obtener útiles relaciones como:

$$\partial_0 \theta_{kl} = \omega_{kl} \quad \partial_0 \Phi_{ml} = \Omega_{ml} \quad . \quad (5.31)$$

Estas últimas dos igualdades jugarán un papel muy importante para la simplificación de la densidad lagrangiana en el caso de $\rho = cte$. Antes de continuar simplificaremos un poco más la estructura de los términos de campos impares y los del rotacional cuadrado⁷. Tenemos entonces para los campos impares, utilizando las reglas de ortogonalidad de las matrices D_{ij} y Δ_{la} (5.4a) y (5.4b) respectivamente, junto con las expresiones (5.30a) y (5.30b) :

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = 2g \sum_{k,m,n} [\rho_k \rho_m \rho_n (\partial_i \theta_{km}) + \rho_m^2 \rho_n (\partial_i \Phi_{mk})] \varepsilon_{nmk} D_{ni} \quad . \quad (5.32)$$

Ahora apliquemos la misma simplificación al término del rotacional cuadrado, usando las reglas de ortogonalidad de las matrices Δ_{na} y D_{mi} y las ecuaciones (5.30a) y (5.30b), también manipulando y renombrando los índices y haciendo uso de las propiedades de antisimetría de los

⁷Para referencia véase la sección anterior.

ángulos θ_{km} y Φ_{kn} se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 &= 2 \sum_k \left[(\partial_i \rho_k)^2 - D_{kj} D_{ki} (\partial_i \rho_k) (\partial_j \rho_k) \right] \\
&+ 2 \sum_{k,m} \left[\rho_k^2 \left((\partial_i \theta_{km})^2 + (\partial_i \Phi_{km})^2 \right) - 2 \rho_k \rho_m (\partial_i \theta_{mk}) (\partial_i \Phi_{mk}) \right] \\
&+ 2 \sum_{k,m} \left[\partial_i (\rho_k^2) (\partial_j \theta_{mk}) - 2 \rho_m (\partial_i \rho_k) (\partial_j \Phi_{mk}) \right] D_{mi} D_{kj} \\
&+ 2 \sum_{k,m,n} \left[2 \rho_k \rho_m (\partial_i \theta_{nk}) (\partial_j \Phi_{mk}) - \rho_k^2 (\partial_i \theta_{nk}) (\partial_j \theta_{mk}) \right] D_{mi} D_{nj} \\
&+ 2 \sum_{k,m,n} \rho_n \rho_m D_{mi} D_{nj} (\partial_i \Phi_{kn}) (\partial_j \Phi_{mk}) .
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Si ahora consideramos el caso de $\rho = cte$, los términos que forman la densidad lagrangiana se simplifican enormemente, dando como resultado para la densidad lagrangiana la expresión que a continuación sigue:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \\
&- \sum_{k,m} \left[\rho_k^2 \left((\partial_i \theta_{km})^2 + (\partial_i \Phi_{km})^2 \right) - 2 \rho_k \rho_m (\partial_i \theta_{mk}) (\partial_i \Phi_{mk}) \right] \\
&- \sum_{k,m,n} \left[2 \rho_k \rho_m (\partial_i \theta_{nk}) (\partial_j \Phi_{mk}) - \rho_k^2 (\partial_i \theta_{nk}) (\partial_j \theta_{mk}) \right] D_{mi} D_{nj} \\
&- \sum_{k,m,n} \rho_n \rho_m D_{mi} D_{nj} (\partial_i \Phi_{kn}) (\partial_j \Phi_{mk}) \\
&+ 2g \sum_{k,m,n} \left[\rho_m^2 \rho_n (\partial_i \Phi_{mk}) - \partial_i (\theta_{mk}) \rho_k \rho_m \rho_n \right] \varepsilon_{mnk} D_{ni} \\
&- \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} .
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Además de las relaciones que se obtienen cuando se impone que el momento generalizado asociado al color sea nulo, se obtiene la condición de color cero (5.12), esta expresión en nuestra aproximación se puede integrar inmediatamente con respecto al tiempo usando el hecho de que ρ es una constante:

$$\partial_0 (\Phi_{mk}) = \frac{2 \rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0 (\theta_{mk}) \implies \Phi_{mk} = \frac{2 \rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \theta_{mk} + \text{const.} \quad . \tag{5.35}$$

Esta última igualdad nos permite encontrar una relación entre las derivadas espaciales de nuestras variables (5.30a) y (5.30b):

$$\partial_i (\Phi_{mk}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{mk}) \quad (5.36)$$

La relación anterior es sumamente útil para poder simplificar la densidad lagrangiana. Haciendo las substitutiones pertinentes tomará la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0 (\theta_{mk})^2 - \frac{1}{2} \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{km})^2 \\ & + \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2 \rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk}) D_{mi} D_{nj} \\ & - 2g \sum_{k,m,n} \frac{\rho_k^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \rho_n \rho_k \rho_m \varepsilon_{mnk} \partial_i (\theta_{mk}) D_{ni} \\ & - \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad (5.37) \end{aligned}$$

Para reescribir la densidad hamiltoniana con la condición de que ρ es una constante, recordamos la forma que tiene esta expresión en la norma de tiempo que está dada por (4.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 + g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) \\ & + \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (5.38) \end{aligned}$$

Identificando los términos se realizan las substitutiones y entonces queda la expresión para la densidad hamiltoniana en coordenadas hiperesféricas con la condición de color cero y ρ constante:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} (\partial_0 \theta_{mk})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} (\partial_i \theta_{km})^2 \\ & - \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2 \rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] (\partial_i \theta_{nk}) (\partial_j \theta_{mk}) D_{mi} D_{nj} \\ & + 2g \sum_{k,m,n} \frac{\rho_k^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \rho_n \rho_k \rho_m \varepsilon_{mnk} (\partial_i \theta_{mk}) D_{ni} \\ & + \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad (5.39) \end{aligned}$$

5.3 Un Breve Resumen

Teniendo estas expresiones que corresponden al mapeo en coordenadas hiperesféricas estamos en posición de buscar un mapeo que corresponda a las coordenadas bosónicas (objetivo principal de estudiar el mapeo hiperesférico), es de suma importancia en sí mismo el mapeo hiperesférico⁸, por tratarse de un mapeo exacto y que manifiesta el comportamiento colectivo del sistema como se verá en el capítulo siguiente, además el tratamiento cuántico parece ser más factible en la aproximación de " $\rho = cte$ ".

⁸Para el tratamiento del problema de la Cromodinámica Cuántica con este mapeo véase [10], un tratamiento semiclásico de un mapeo semejante a éste se puede ver en [5].



Capítulo 6

Mapeo Bosónico de la Densidad Lagrangiana del Campo Gluónico en $SU_{color}(2)$

En este capítulo se aplicarán los desarrollos hechos en el capítulo anterior para la construcción de la densidad lagrangiana del campo gluónico mapeada en coordenadas bosónicas, partiendo del mapeo en coordenadas hipersféricas dado por la expresión (5.37) siendo este el caso cuando " $\rho = cte$ ".

6.1 Preliminares

Tenemos la densidad lagrangiana del campo gluónico en $SU_{color}(2)$, en el vacío en la norma del tiempo, escrita en notación vectorial:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 \vec{A}_a)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 - g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) - \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad (6.1)$$

A continuación se procederá a escribir los términos de esta densidad lagrangiana en coordenadas bosónicas o de campos pares, teniendo un

mapeo en coordenadas hiperesféricas, en el particular caso donde ρ_k es constante.

6.2 Mapeo Bosónico

6.2.1 Relación con las Coordenadas Hiperesféricas

Para realizar un mapeo a “*coordenadas hiperesféricas*” se propuso la siguiente transformación para los campos de norma A_{ia} expresión(5.3), que es:

$$A_{ia} = \sum_{k=1}^3 \rho_k D_{ki}^{13} \Delta_{ka}^{13} \quad . \quad (6.2)$$

Con las propiedades de ortogonalidad para las matrices D_{ki}^{13} y Δ_{ka}^{13} dadas en las expresiones (5.4a) y (5.4b) y con la definición de las “*coordenadas bosónicas*” obtenemos:

$$q_{ij} = A_{ia} A_{ja} = \sum_{k,l} \rho_k D_{ki} \Delta_{ka} \rho_l D_{lj} \Delta_{la} = \sum_k \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \quad . \quad (6.3)$$

Haciendo la observación que hay suma sobre índices repetidos tenemos:

$$q_{ii} = A_{ia} A_{ia} = \sum_{k,i} \rho_k^2 D_{ki} D_{ki} = \sum_k \rho_k^2 \quad . \quad (6.4)$$

Esta última ecuación se puede expresar de una forma más sencilla definiendo un par de matrices, que son:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} \rho_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3^2 \end{pmatrix} \quad , \quad (6.5)$$

de tal forma que la expresión (6.4) se puede dar en términos de las trazas de las matrices anteriores por:

$$tr(Q) = tr(\rho^2) \quad . \quad (6.6)$$

Si consideramos el caso en donde ρ_k es constante entonces las derivadas de estas trazas también serán nulas.

6.2.2 El Término de Campos a la Cuarta Potencia

El término de los campos a la cuarta potencia es inmediatamente mapeado por simple inspección de las expresiones (6.3) tanto en los campos \vec{A}_b como en el mapeo hipersférico:

$$\frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} = \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad (6.7)$$

Es también posible escribir esta última expresión en notación matricial si observamos que:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 = \left(\sum_m \rho_m^2 \right)^2 = \text{tr}(\rho^2)^2 = \text{tr}(Q)^2 \quad , \quad (6.8)$$

así, el segundo término se puede escribir en campos q_{ij} de la siguiente manera:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} [A_{ib} A_{jb}]^2 = \sum_{i,j} q_{ij}^2 \quad . \quad (6.9)$$

También se puede emplear la notación matricial, obteniendo una expresión que nos permite escribir:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{k,m} \rho_k^2 \rho_m^2 D_{ki} D_{kj} D_{mi} D_{mj} = \sum_k \rho_k^4 = \text{tr}(\rho^4) \quad . \quad (6.10)$$

Finalmente el término a la cuarta potencia se puede escribir en notación matricial por:

$$\begin{aligned} \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} &= \frac{g^2}{4} \left\{ \text{tr}(\rho^2)^2 - \text{tr}(\rho^4) \right\} = \\ \frac{g^2}{4} \left\{ \text{tr}(Q)^2 - \text{tr}(Q^2) \right\} \quad . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Aquí podemos escribir las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q)^2 - \text{tr}(Q^2) &= \text{tr}(\rho^2)^2 - \text{tr}(\rho^4) \\ &= 2(\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{tr}(Q) = \text{tr}(\rho^2) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \quad (6.13)$$

$$\det(Q) = \det(\rho^2) = \rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2 \quad (6.14)$$

6.2.3 El Término Cinético

El término cinético escrito en los campos de norma \vec{A}_a en la norma del tiempo es :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} (\partial_0 \vec{A}_a)^2 \quad (6.15)$$

Este término cinético en coordenadas hiperesféricas después de imponer la condición de color nulo y que ρ_k sea constante quedará mapeado como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \quad (6.16)$$

Sabemos que para las matriz ω (con elementos ω_{mk}), que es antisimétrica y está relacionada con las derivadas de las matriz D cuyos elementos son D_{ki}^{13} :

$$\partial_0 D_{ki} = \sum_n \omega_{kn} D_{ni} \quad (6.17)$$

de esta expresión y por las reglas de ortogonalidad de las matrices involucradas obtenemos:

$$\sum_i D_{mi} \partial_0 (D_{ki}) = \sum_{n,i} \omega_{kn} D_{ni} D_{mi} = \omega_{km} \quad (6.18)$$

Análogamente se tiene para la matriz Δ_{ma} para los grados de libertad del color:

$$\sum_a \Delta_{ka} \partial_0 (\Delta_{ma}) = \sum_{n,a} \Omega_{mn} \Delta_{na} \Delta_{ka} = \Omega_{mk} \quad (6.19)$$

Con la expresión (6.17) se puede obtener una relación útil que permite reescribir al término cinético de una forma más conveniente para

nuestro posterior desarrollo, esta relación es:

$$\begin{aligned} (\partial_0 D_{ki})^2 &= \sum_{k,i} \left(\sum_n \omega_{kn} D_{ni} \right) \left(\sum_m \omega_{km} D_{mi} \right) \\ &= \sum_{k,i,m,n} \omega_{kn} D_{ni} \omega_{km} D_{mi} = \sum_{k,m} \omega_{km}^2 . \end{aligned} \quad (6.20)$$

Desarrollando el término cinético obtenemos, considerando a ρ_k constante:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \left[\sum_k \rho_k \partial_0 (D_{ki} \Delta_{ka}) \right]^2 , \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{4} \sum_{k,m} (\rho_m^2 + \rho_k^2) \left[\partial_0 (D_{mi})^2 + \partial_0 (\Delta_{ma})^2 \right] \\ &+ \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{ki} \Delta_{ma} \partial_0 (D_{mi}) \partial_0 (\Delta_{ka}) . \end{aligned} \quad (6.22)$$

Así la condición de color cero dada por la expresión (5.12) implicará la ecuación:

$$\Delta_{ka} \partial_0 (\Delta_{ma}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)} D_{ki} \partial_0 (D_{mi}) \quad (6.23)$$

y el término cinético se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{1}{4} \sum_{k,m} (\rho_m^2 + \rho_k^2) \left[1 + \left(\frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \right)^2 \right] \partial_0 (D_{ki})^2 \\ &- \frac{1}{4} \sum_{k,m} \frac{8\rho_m^2 \rho_k^2}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)} (\partial_0 D_{ki})^2 = \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} (\partial_0 D_{mi})^2 . \end{aligned} \quad (6.24)$$

Relación de las ρ_k con la Matriz Q

Para poder encontrar el mapeo a coordenadas bosónicas, partiendo de las coordenadas hipersféricas podemos resolver el siguiente sistema con las ecuaciones (6.12), (6.13) y (6.14). Obtenemos así una expresión general en términos de cualquier ρ_k :

$$\rho_k^2 \left(\text{tr}(Q) - \rho_k^2 \right) + \frac{\det(Q)}{\rho_k^2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Q)^2 - \text{tr}(Q^2) \right) \quad (6.25)$$

Cuya solución es para ρ_k^1 estará dada por:

$$\rho_k^2 = \frac{\text{tr}(Q)}{3} + \left[-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (6.26)$$

donde N y M son las expresiones:

$$N = \frac{39\text{tr}(Q)^3 - 27\text{tr}(Q)\text{tr}(Q^2)}{162} - \det(Q) \quad , \quad (6.27)$$

$$M = \frac{1}{6}\text{tr}(Q)^2 - \frac{1}{2}\text{tr}(Q^2) \quad . \quad (6.28)$$

Para continuar la transformación de "coordenadas" hiperféricas a bosónicas del término cinético dado por la expresión (6.24), buscaremos la relación que existe en las matrices D y Q , que a continuación se desarrolla.

Relación de las Matriz D con la Matriz Q

El conjunto de ecuaciones que relacionan las coordenadas bosónicas con las hiperféricas, en particular a la matriz D , cuyos elementos son D_{ki} con la matriz Q , cuyos elementos son q_{ij} está dada por la expresión (6.3) y es:

$$q_{ij} = \sum_k \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \quad . \quad (6.29)$$

En una notación matricial tenemos:

$$Q = D^t \rho^2 D \quad , \quad (6.30)$$

donde $D^t = D^{-1}$ por ser una matriz ortogonal (el superíndice t indica a la matriz transpuesta). Proponemos una solución para las matrices

¹Véase el Apéndice B, en la sección B.1.1 donde se resuelve la ecuación anterior (6.25).

D de este sistema, de la forma:

$$D = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix} , \quad (6.31)$$

donde V_n es un vector columna que es eigenvector de la matriz Q . Con un eigenvalor λ_n tenemos:

$$QV_n = \lambda_n V_n \quad \text{con} \quad V_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ v_{3n} \end{pmatrix} . \quad (6.32)$$

De esta manera, el problema de encontrar los eigenvectores se concreta primero a la búsqueda de los eigenvalores. Pero encontrar los eigenvalores es trivial, pues de la ecuación (6.30) se puede obtener la siguiente ecuación (utilizando el hecho de que la matriz D es ortogonal):

$$DQD^{-1} = \rho^2 . \quad (6.33)$$

La matriz ρ^2 es diagonal y cada componente es un eigenvalor de la matriz Q de tal forma se tiene:

$$\lambda_n = \rho_n^2 . \quad (6.34)$$

Conociendo los eigenvalores procedemos a calcular los eigenvectores. Para evitar soluciones triviales (todas las componentes nulas) consideraremos el subsistema de ecuaciones (formada con la primera y segunda componente de (6.32)) y tomaremos la última componente del vector que queda como parámetro cumpliendo una condición de normalización, el sistema en cuestión será:

$$\begin{aligned} (q_{11} - \lambda_n) v_{1n} + q_{12} v_{2n} + q_{13} v_{3n} &= 0 , \\ & \text{y} \\ q_{12} v_{1n} + (q_{22} - \lambda_n) v_{2n} + q_{23} v_{3n} &= 0 , \end{aligned} \quad (6.35)$$

con la condición de normalización:

$$v_{1n}^2 + v_{2n}^2 + v_{3n}^2 = 1 \implies v_{3n} = \sqrt{1 - v_{1n}^2 - v_{2n}^2} . \quad (6.36)$$

El hecho de escoger algún signo negativo en la raíz incluirá un conjunto más amplio de transformaciones como reflexiones. Las soluciones del sistema anterior (6.35) están dadas por:

$$v_{2n} = \frac{q_{12}q_{13} - q_{23}(q_{11} - \lambda_n)}{(q_{22} - \lambda_n)(q_{11} - \lambda_n) - q_{12}^2} v_{3n} \quad (6.37)$$

$$v_{1n} = \frac{q_{23}q_{12} - q_{13}(q_{22} - \lambda_n)}{(q_{22} - \lambda_n)(q_{11} - \lambda_n) - q_{12}^2} v_{3n} \quad (6.38)$$

Utilizando la condición de normalización obtenemos para v_{3n} :

$$v_{3n} = \frac{(q_{22} - \lambda_n)(q_{11} - \lambda_n) - q_{12}^2}{\sqrt{[q_{23}q_{12} - q_{13}(q_{22} - \lambda_n)]^2 + [q_{12}q_{13} - q_{23}(q_{11} - \lambda_n)]^2 + [(q_{22} - \lambda_n)(q_{11} - \lambda_n) - q_{12}^2]^2}} \quad (6.39)$$

Finalmente, dados los eigenvectores de la matriz Q podemos construir la matriz D y de igual forma se pueden calcular las derivadas con respecto al parámetro tiempo. Con esto se procede a realizar las sustituciones de las ρ_n con la expresión (6.26) y D_{ij} con la expresión (6.31) en la expresión para el término cinético (6.24).

6.2.4 El Término Rotacional Cuadrado

El término del rotacional cuadrado en los campos de norma es:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 &= (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)(\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) = \\ &2(\partial_i A_j^a \partial^i A_a^j - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i) = \\ &2 \left[(\partial_i A_j^a)^2 - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i \right] \end{aligned} \quad (6.40)$$

Para poder simplificar aún más este término empleamos la condición de color cero, que es:

$$\partial_0(\Phi_{mk}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0(\theta_{mk}) \implies \Phi_{mk} = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \theta_{mk} \quad (6.41)$$

Realizando las sustituciones y simplificaciones el término de la densidad lagrangiana o hamiltoniana del rotacional al cuadrado, quedará

en las coordenadas hiperesféricas como:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 &= \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{km})^2 \\ &- 2 \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2 \rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk}) D_{mi} D_{nj} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Proponemos una simetría en derivadas espaciales y temporales:

$$\sum_i D_{mi} \partial_j (D_{ki}) = \sum_{n,i} \partial_j (\theta_{kn}) D_{ni} D_{mi} = \partial_j (\theta_{km}) \quad (6.43)$$

$$\sum_a \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) = \sum_{n,a} \partial_j (\Phi_{mn}) \Delta_{na} \Delta_{ka} = \partial_j (\Phi_{mk}) \quad (6.44)$$

permitiéndonos de esta manera, al utilizar la condición de color cero, encontramos una relación entre las derivadas espaciales :

$$\partial_i (\Phi_{mk}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{mk}) \quad (6.45)$$

Entonces la condición de color nulo y el hecho de que ρ sea constante, nos permite reescribir la expresión anterior utilizando las ecuaciones (6.43) y (6.44):

$$\Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} D_{kj} \partial_i (D_{mj}) \quad (6.46)$$

Ahora con nuestras definiciones, podemos encontrar algunas relaciones útiles que nos permitirán escribir, en términos de las derivadas de las matrices D , el término del rotacional cuadrado:

$$\partial_i D_{kj} = \sum_n \partial_i (\theta_{kn}) D_{nj} \quad (6.47)$$

$$(\partial_i D_{kj})^2 = \sum_{n,m} \partial_i (\theta_{kn}) D_{nj} \partial_i (\theta_{km}) D_{mj} = \partial_i (\theta_{km})^2 \quad (6.48)$$

$$\sum_j (\partial_i D_{kj}) D_{lj} = \sum_{n,j} \partial_i (\theta_{kn}) D_{nj} D_{lj} = \partial_i (\theta_{kl}) \quad (6.49)$$

$$\sum_r (\partial_i D_{nr}) D_{kr} = \partial_i (\theta_{nk}) \quad (6.50)$$

$$\sum_s (\partial_j D_{ms}) D_{ks} = \partial_j (\theta_{mk}) \quad (6.51)$$

Considerando que hay suma sobre índices repetidos obtenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = & \\ \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} (\partial_i D_{kj})^2 & \\ -2 \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2 \rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] & D_{kr} D_{ks} D_{mi} D_{nj} (\partial_i D_{nr}) (\partial_j D_{ms}) \quad (6.52) \end{aligned}$$

Es en este punto donde se precisa el cálculo de la derivadas espaciales de la matriz D , haciendo las substituciones pertinentes tendremos este término en coordenadas bosónicas.

6.3 Un Resumen

Para concretar las ideas anteriores y de esta forma hacer más explícito el método, mencionaré de una forma reducida los pasos que se llevaron a cabo para obtener a la densidad lagrangiana del campo gluónico en coordenadas bosónicas, partiendo de la densidad lagrangiana en coordenadas hiperesféricas. Conociendo el mapeo propuesto para los campos (5.3), es inmediato conocer el mapeo para los pares de los campos (6.3), con estas relaciones básicas se puede proceder directamente al mapeo del término de campos a la cuarta potencia, cuya expresión final es la (6.11), de este término mapeado podemos obtener unas ecuaciones que nos relacionan las ρ_k , con los elementos de las matrices Q ; resolviendo el sistema y así mismo resolviendo el sistema que relaciona las componentes de la matriz D con las componentes de la matriz Q (6.30), conocemos todos los elementos que forman las coordenadas hiperesféricas en terminos de las coordenadas bosónicas. Sustituyendo las primeras en terminos de las segundas, obtendríamos para cada término de la densidad lagrangiana una expresión en coordenadas bosónicas.

Conclusión

Actualmente se acepta que la teoría correcta para la descripción de las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica (CDC). Esta teoría presenta enormes dificultades para el cálculo, aún en el régimen de altas energías (puesto que la descripción por ejemplo de los *jets*² involucra el tratamiento de la CDC a bajas energías y se presentan todos los inconvenientes de este régimen) y no se ha podido dar una confirmación y explicación a toda la fenomenología asociada a ella. Entre algunos de los problemas abiertos en el régimen de bajas energías están: el confinamiento de las cargas de color, el espectro de masa de los hadrones y el estado del vacío: el campo gluónico.

La intención de realizar esta tesis fue lograr la formulación de una teoría efectiva del vacío gluónico de una forma no perturbativa que describiera el estado del sistema (su configuración) y nos permitiera conocer la energía de éste. Para alcanzar esta meta se partió de un modelo que trata de establecer una estructura en el vacío; en este caso se concretó a la descripción del vacío por pares de campos. La idea física detrás de esto, es la esperanza de que el estado más bajo en energía del sistema sea un condensado de gluones, lo cual se piensa como gluones acoplados a espín y color nulo. La teoría de la Cromodinámica Cuántica está realizada con base a las simetrías que se establecen con el grupo $SU(3)$ para los sabores de los quarks y también es el mismo grupo para la carga de color. En el desarrollo de esta tesis lo relevante era la simetría impuesta por el grupo de color; y he aquí donde se hizo la primer simplificación, en vez de considerar el grupo de simetrías de

²Los *jets* son la formación de haces de partículas (hadrones) como resultado de la colisión de otras partículas como protones - antiprotones.

$SU(3)$, para el color se consideró el grupo $SU(2)$ que permite realizar unos cálculos más sencillos, pero que tiene en esencia la misma estructura que la teoría completa.

Se introdujo el concepto de mapeo bosónico como se emplea en la Teoría Cuántica. Este método permite reproducir con cierta exactitud los primeros niveles de los espectros de los sistemas cuánticos; la idea física principal del método radica en el hecho de que los sistemas cuánticos constituidos de partículas (fermiones y bosones) a bajas energías tienden a agruparse (acoplarse), dando lugar a fenómenos como superconductividad, superfluidez o superfluidad en los núcleos. Matemáticamente esto se traduce en que los operadores de nuestra teoría original se pueden desarrollar en serie de potencias de unos operadores bosónicos (con un carácter colectivo). Esta situación es altamente empleada en los tratamientos de sistemas cuánticos de muchas partículas, conocidos por modelos colectivos. Estas ideas nos resultan claras en principio al aplicarse a la teoría del campo gluónico; por lo que se procedió en esta dirección. Pero debido a que toda la descripción se realizó en una teoría clásica hubo la necesidad de ajustar el método a esta situación; entonces los operadores en el método original son ahora los campos y sus momentos conjugados en el formalismo lagrangiano-hamiltoniano.

Se realizó el mapeo bosónico (capítulo 5) en la teoría del campo gluónico cambiando el espacio de funciones y operadores diferenciales. La teoría del campo gluónico en el vacío posee términos que no pueden ser mapeados ya que en su realización se necesita tener expresiones que sean productos de pares de campos o derivadas de pares de campos. Aquí se realizó otra aproximación y se despreció el término llamado de campos impares. Sin embargo, aún quedaba el término del rotacional, con el cual no existe una relación formal que nos indique el posible mapeo de esta expresión.

Esta situación motivó a iniciar el estudio de un mapeo alterno, el mapeo en coordenadas hipersféricas (capítulo 6), que por tratarse de una transformación exacta de cada campo de norma si podía mapear (transformar) todos los términos en la densidad hamiltoniana. En este

nuevo mapeo se pudo analizar el campo gluónico como un sistema colectivo. Este método de mapeo es mucho más "manejable" y permite, previa imposición de ciertas condiciones, describir el sistema con carga de color nula he incluso, se han desarrollado métodos cuánticos como se pueden consultar en la referencia [10]. El empleo del mapeo hiperesférico es sólo un paso intermedio para lograr el mapeo a las coordenadas bosónicas, aún cuando es por sí mismo suficiente para abordar el problema del campo gluónico en el vacío de una manera no perturbativa.

El desarrollo de las coordenadas hiperesféricas nos permitió encontrar el mapeo bosónico (capítulo 7) formalmente, ya que con unas pocas relaciones de los campos de norma y las coordenadas bosónicas se pueden lograr plantear ecuaciones que relacionan las coordenadas hiperesféricas con las coordenadas bosónicas. Se procedió a resolver estos sistemas de ecuaciones y, de esta forma se pudo reescribir el término cinético de la densidad lagrangiana, así como el término del rotacional al cuadrado en las coordenadas bosónicas.

La motivación de buscar un mapeo en coordenadas bosónicas fueron las expectativas que había por obtener una teoría efectiva del campo gluónico en el vacío con alto contenido de interpretación física. Lamentablemente es impracticable el cálculo en estas coordenadas (bosónicas), debido a la cantidad de operaciones algebraicas involucradas para obtener las expresiones, como la densidad lagrangiana, las ecuaciones de movimiento (del campo), entre otras. Sin embargo, no dejan de ser interesantes estos métodos de transformación, puesto que abren un panorama nuevo y poco investigado en la teoría del campo. Es fácil de creer, que técnicas como las empleadas aquí, que junto con otras, nos proporcionen una gran cantidad de información de los sistemas; por ejemplo, que nos permitan indentificar problemas y tal vez removerlos, así como investigar más simetrías o las simetrías existentes en una teoría.

Para un desarrollo futuro, dentro de todo un proyecto de investigación y/o para desarrollo de una tesis doctoral, se deja la introducción de los campos fermionicos (quarks), junto con el correcto grupo de

norma $SU_{color}(3)$ para lograr una mejor descripción del estado base de la CDC, tratando de incorporar a estos a través de una teoría efectiva que tenga los correctos grados de libertad para modelar a los hadrones, esto con la esperanza de reproducir el correcto espectro de masas de estas partículas, entre otras propiedades interesantes como lo serían: los momentos magnéticos, momentos dipolares, secciones de dispersión... etc.

Apéndice A

Cálculos Complementarios al Capítulo 5

A.1 Mapeo a Coordenadas Hiperesféricas

A.1.1 El Término Cinético

Consideremos el término cinético de la densidad lagrangiana dado en la expresión (5.5):

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{2} (\partial_0 A_i^a) (\partial^0 A_a^i) = \frac{1}{2} \left[\partial_0 \left(\sum_k \rho_k D_{ki} \Delta_{ka} \right) \right]^2, \quad (\text{A.1})$$

pero además para las derivadas temporales de las matrices D_{ki} y Δ_{ma} estarán dadas por:

$$\partial_0 D_{ki} = \dot{D}_{ki} = \sum_n \omega_{kn} D_{ni} \quad \partial_0 \Delta_{ma} = \dot{\Delta}_{ma} = \sum_k \Omega_{mk} \Delta_{ka}, \quad (\text{A.2})$$

con ω_{kn} y Ω_{mk} matrices antisimétricas. Desarrollando la expresión (A.1) obtenemos:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{2} \sum_{m,k} \rho_m^2 (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) - \sum_{m,k} \rho_m \rho_k \Omega_{mk} \omega_{mk}. \quad (\text{A.3})$$

Debido a la simetría de la expresión anterior podemos escribir a:

$$\sum_{m,k} \rho_m^2 (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) = \frac{1}{2} \sum_{m,k} (\rho_m^2 + \rho_k^2) (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2). \quad (\text{A.4})$$

Finalmente podemos reescribir la parte cinética como:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} (\rho_m^2 + \rho_k^2) (\Omega_{mk}^2 + \omega_{mk}^2) - \sum_{m,k} \rho_m \rho_k \Omega_{mk} \omega_{mk} \quad . \quad (\text{A.5})$$

También podemos calcular los momentos generalizados según las ecuaciones de Hamilton:

$$L_{mk} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \omega_{mk}} = \sum_{m,k} [(\rho_m^2 + \rho_k^2) \omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \Omega_{mk}] \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L}_{mk} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \Omega_{mk}} = \sum_{m,k} [(\rho_m^2 + \rho_k^2) \Omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \omega_{mk}] \quad . \quad (\text{A.7})$$

La condición de que haya color cero se impone por esto y ello implicará una relación entre las "velocidades angulares":

$$0 = \mathcal{L}_{mk} = \sum_{m,k} [(\rho_m^2 + \rho_k^2) \Omega_{mk} - 2\rho_m \rho_k \omega_{mk}] \implies \Omega_{mk} = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \omega_{mk} \quad , \quad (\text{A.8})$$

de tal forma que se puede escribir la parte cinética de la densidad lagrangiana sin color:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \quad . \quad (\text{A.9})$$

A.1.2 El Término de Campos a la Cuarta Potencia

Para reescribir el término de campos a la cuarta potencia consideremos cualquiera de las ecuaciones (4.60). Tenemos la expresión:

$$\frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} \quad , \quad (\text{A.10})$$

que aparece en la densidad lagrangiana. Consideremos primero:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 = (A_b^i A_{ib})^2 = \left(\sum_{i,b} A_{ib} A_{ib} \right)^2 = \left(\sum_m \rho_m^2 \right)^2 \quad . \quad (\text{A.11})$$

El siguiente término que es:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} \sum_{b,c} A_{ib} A_{jc} A_c^i A_b^j = \sum_{i,j} \left[\sum_b (A_{ib} A_b^j) \right]^2 \quad . \quad (\text{A.12})$$

Por ortogonalidad de las matrices Δ_{kb} tenemos :

$$\sum_b (A_{ib} A_b^j) = \sum_b \left(\sum_{k,m} \rho_k D_{ki} \Delta_{kb} \rho_m D_{mj} \Delta_{mb} \right) = \sum_k \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \quad . \quad (\text{A.13})$$

Por lo tanto, utilizando la ortogonalidad de las matrices D tenemos:

$$(\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 = \sum_{i,j} \sum_{k,m} \rho_k^2 D_{ki} D_{kj} \rho_m^2 D_{mi} D_{mj} = \sum_k \rho_k^4 \quad . \quad (\text{A.14})$$

Quedando de esta forma el término de los campos a la cuarta potencia en nuestras nuevas coordenadas de la forma:

$$\frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} = \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} \quad . \quad (\text{A.15})$$

A.1.3 El Término de Campos Impares

Este término de los campos impares es:

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) A_b^i A_c^j \quad . \quad (\text{A.16})$$

Se puede escribir de otra forma como:

$$g \varepsilon_a^{bc} \partial_i A_j^a (A_b^i A_c^j - A_b^j A_c^i) \quad . \quad (\text{A.17})$$

Además tenemos:

$$-\varepsilon_{abc} A_b^j A_c^i = \varepsilon_{acb} A_b^j A_c^i = \varepsilon_{abc} A_b^i A_c^j \quad . \quad (\text{A.18})$$

Entonces tenemos para este término:

$$g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = 2g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j \quad . \quad (\text{A.19})$$

Haciendo la transformación a coordenadas hiperesféricas donde:

$$\begin{aligned} \partial_i A_j^a &= \sum_k \partial_i (\rho_k D_{kj} \Delta_{ka}) = \\ \sum_k [\partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} + \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} + \partial_i (\Delta_{ka}) \rho_k D_{kj}] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

entonces el término quedará dado por la expresión:

$$2g\epsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j = 2g\epsilon_a^{bc} \sum_{k,m,n} [\partial_i (\rho_k D_{kj} \Delta_{ka}) \rho_m \rho_n D_{mj} D_{ni} \Delta_{mc} \Delta_{nb}] \quad . \quad (\text{A.21})$$

Después de realizar las simplificaciones adecuadas este término quedará:

$$\begin{aligned} 2g\epsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j &= \\ g\epsilon_a^{bc} \sum_{m,n} \partial_i (\rho_m^2) \rho_n D_{ni} \Delta_{ma} \Delta_{mc} \Delta_{nb} & \\ + 2g\epsilon_a^{bc} \sum_{k,m,n} \partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n D_{mj} D_{ni} \Delta_{ka} \Delta_{mc} \Delta_{nb} & \\ + 2g\epsilon_a^{bc} \sum_{m,n} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \Delta_{mc} \Delta_{nb} \quad . & \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Además entre los elementos de la matriz hay las siguiente relaciones, que involucran a los *coeficientes de Clebsch-Gordan* (C-G):

$$\Delta_{mc} \Delta_{nb} = \sum_{l,d_1,d_2} (1m1n|ld_1) (1c1b|ld_2) \Delta_{d_1 d_2}^l \quad (\text{A.23})$$

y así la relación:

$$\begin{aligned} \epsilon_a^{bc} \Delta_{mc} \Delta_{nb} &= \sqrt{2} (1b1c|1a) \Delta_{mc} \Delta_{nb} \\ = \sqrt{2} \sum_{l,d_1,d_2} (1b1c|1a) (1m1n|ld_1) (1c1b|ld_2) \Delta_{d_1 d_2}^l & \\ = \sqrt{2} \sum_{l,d_1,d_2} (1c1b|1a) (1n1m|ld_1) (1c1b|ld_2) \Delta_{d_1 d_2}^l \quad . & \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Por reglas de ortogonalidad de los coeficientes de C-G:

$$\sum_{b,c} (1b1c|1a) (1b1c|ld_2) = \delta_{l1} \delta_{d_2 a} \quad , \quad (\text{A.25})$$

obtenemos así algunas relaciones que nos servirán:

$$\varepsilon_a^{bc} \Delta_{mc} \Delta_{nb} = \sqrt{2} \sum_d (1n1m|1d) \Delta_{da}^1 = \sum_d \varepsilon_{nmd} \Delta_{da}^1 \quad , \quad (\text{A.26})$$

$$\varepsilon_a^{bc} \Delta_{ma} \Delta_{mc} \Delta_{nb} = \sqrt{2} (1n1m|1m) = 0 \quad , \quad (\text{A.27})$$

$$\varepsilon_a^{bc} \Delta_{mc} \Delta_{nb} \Delta_{ka} = \sqrt{2} (1n1m|1k) = \varepsilon_{nmk} \quad . \quad (\text{A.28})$$

Con estas relaciones podemos reescribir el término de campos impares en una forma más simple:

$$\begin{aligned} & 2g \varepsilon_a^{bc} (\partial_i A_j^a) A_b^i A_c^j = \\ & 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni}] \\ & + 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

De esta forma el término de campos impares quedará expresado por:

$$\begin{aligned} & g \varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = \\ & 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni}] \\ & + 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.1.4 El Término del Rotacional Cuadrado

Este término es:

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = \\ & (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) = 2 (\partial_i A_j^a \partial^i A_a^j - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i) \\ & = 2 \left[(\partial_i A_j^a)^2 - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Para transformar este término indentifiquemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} & \partial_i A_j^a = \sum_k \partial_i (\rho_k D_{kj} \Delta_{ka}) = \\ & \sum_k [\partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} + \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} + \partial_i (\Delta_{ka}) \rho_k D_{kj}] \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \partial_j A_a^i &= \sum_m \partial_j (\rho_m D_{mi} \Delta_{ma}) = \\ & \sum_m [\partial_j (\rho_m) D_{mi} \Delta_{ma} + \partial_j (D_{mi}) \rho_m \Delta_{ma} + \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi}] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Continuando con el cálculo consideremos:

$$\begin{aligned} (\partial_i A_j^a)^2 &= \\ & \sum_k [(\partial_i (\rho_k))^2 + (\rho_k \partial_i (D_{kj}))^2 + (\rho_k \partial_i (\Delta_{ka}))^2] \\ & + \frac{1}{2} \sum_k \partial_i (\rho_k^2) [\partial_i (D_{kj}^2) + \partial_i (\Delta_{ka}^2)] \\ & + 2 \sum_{k,m} [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mj}] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

y el término cruzado será:

$$\begin{aligned} \partial_i A_a^a \partial^j A_a^i &= \\ & \sum_{k,m} [\partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} + \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} + \partial_i (\Delta_{ka}) \rho_k D_{kj}] \\ & [\partial_j (\rho_m) D_{mi} \Delta_{ma} + \partial_j (D_{mi}) \rho_m \Delta_{ma} + \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi}] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

que desarrollando es:

$$\begin{aligned} \partial_i A_a^a \partial^j A_a^i &= \\ & \sum_k \partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 \partial_i (D_{kj}) \partial_j (D_{ki}) + \partial_i (\rho_k^2) D_{kj} \partial_j (D_{ki}) \\ & + \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \partial_i (\Delta_{ka}) \partial_j (\Delta_{ma}) + 2 \partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \\ & + 2 \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

de tal forma que se expresa el rotacional cuadrado por:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 &= \\ & 2 \sum_k [(\partial_i (\rho_k))^2 + (\rho_k \partial_i (D_{kj}))^2 + (\rho_k \partial_i (\Delta_{ka}))^2] \\ & + \sum_k \partial_i (\rho_k^2) [\partial_i (D_{kj}^2) + \partial_i (\Delta_{ka}^2)] \\ & - 2 \sum_k [\partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 \partial_i (D_{kj}) \partial_j (D_{ki}) + \partial_i (\rho_k^2) D_{kj} \partial_j (D_{ki})] \\ & - 2 \sum_{k,m} [\rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \partial_i (\Delta_{ka}) \partial_j (\Delta_{ma}) + 2 \partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \\ & + 2 \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi}] - 2 [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mj}] \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

A.1.5 La Densidad Lagrangiana

Con las partes anteriores transformadas a coordenadas hipersféricas se puede expresar la densidad lagrangiana por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_m \dot{\rho}_m^2 + \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \\
 & - \sum_k \left[(\partial_i (\rho_k))^2 + (\rho_k \partial_i (D_{kj}))^2 + (\rho_k \partial_i (\Delta_{ka}))^2 \right] \\
 & - \frac{1}{2} \sum_k \left[\partial_i (\rho_k^2) \left[\partial_i (D_{kj}^2) + \partial_i (\Delta_{ka}^2) \right] \right] \\
 & - 2 \sum_{k,m} \left[\partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mj} \right] \\
 & + \sum_k \left[\partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 \partial_i (D_{kj}) \partial_j (D_{ki}) + \partial_i (\rho_k^2) D_{kj} \partial_j (D_{ki}) \right] \\
 & + \sum_{k,m} \left[\rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \partial_i (\Delta_{ka}) \partial_j (\Delta_{ma}) + 2 \partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \right] \\
 & + 2 \sum_{k,m} \partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi} \\
 & - 2g \sum_{k,m,n} \left[\partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni} \right] \\
 & - 2g \sum_{k,m,n} \left[\partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka} \right] \\
 & - \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} .
 \end{aligned}
 \tag{A.38}$$

A.2 El Caso cuando ρ es Constante

Para simplificar la cantidad de términos en la densidad lagrangiana podemos utilizar la relación entre derivadas de las matrices D_{kj} y Δ_{ma} como se utilizó en el caso del término cinético donde se hizo uso de las siguientes igualdades:

$$\partial_0 D_{ki} = \dot{D}_{ki} = \sum_n \omega_{kn} D_{ni} \quad , \quad \dot{\Delta}_{ma} = \sum_k \Omega_{mk} \Delta_{ka} \quad , \tag{A.39}$$

cuya generalización la podemos expresar por:

$$\partial_i (D_{kj}) = \sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} \quad \partial_i (\Delta_{ma}) = \sum_l \partial_i (\Phi_{ml}) \Delta_{la} \quad . \tag{A.40}$$

De esta forma podemos obtener útiles relaciones como:

$$\partial_0 (\theta_{kl}) = \omega_{kl} \quad \partial_0 (\Phi_{ml}) = \Omega_{ml} \quad . \quad (\text{A.41})$$

Estas últimas dos igualdades jugarán un papel muy importante para la simplificación de la densidad lagrangiana en el caso de $\rho = cte$. Antes de continuar simplificaremos un poco más la estructura de los términos de campos impares y los del rotacional cuadrado. Tenemos para los campos impares:

$$\begin{aligned} & g\varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = \\ & 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (D_{kj}) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni}] \\ & + 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\Delta_{ma}) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka}] = \\ & 2g \sum_{k,m,n} \left[\left(\sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} \right) \rho_k \rho_m \rho_n \varepsilon_{nmk} D_{mj} D_{ni} \right] \\ & + 2g \sum_{k,m,n} \left[\left(\sum_l \partial_i (\Phi_{ml}) \Delta_{la} \right) \rho_m^2 \rho_n D_{ni} \varepsilon_{nmk} \Delta_{ka} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Utilizando la ortogonalidad de las matrices D_{lj} y Δ_{la} tenemos:

$$\begin{aligned} & g\varepsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) = \\ & 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\theta_{km}) \rho_k \rho_m \rho_n + \partial_i (\Phi_{mk}) \rho_m^2 \rho_n] \varepsilon_{nmk} D_{ni} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Ahora apliquemos la misma simplificación al término del rotacional cuadrado:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = & \\
 & + 2 \sum_k \left[(\partial_i (\rho_k))^2 + \left(\rho_k \sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} \right)^2 + \left(\rho_k \sum_l \partial_i (\Phi_{kl}) \Delta_{la} \right)^2 \right] \\
 & + 2 \sum_k \partial_i (\rho_k^2) \left[\sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} D_{kj} + \sum_l \partial_i (\Phi_{kl}) \Delta_{la} \Delta_{ka} \right] \\
 & + 4 \sum_{k,m} \left[\left(\sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} \right) \rho_k \Delta_{ka} \left(\sum_n \partial_i (\Phi_{mn}) \Delta_{na} \right) \rho_m D_{mj} \right] \\
 & - 2 \sum_k \partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} + \rho_k^2 \left(\sum_n \partial_i (\theta_{kn}) D_{nj} \right) \left(\sum_m \partial_j (\theta_{km}) D_{mi} \right) \\
 & - 2 \sum_k \partial_i (\rho_k^2) \left(\sum_m \partial_j (\theta_{km}) D_{mi} \right) D_{kj} \\
 & - 2 \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \left(\sum_l \partial_i (\Phi_{kl}) \Delta_{la} \right) \left(\sum_n \partial_j (\Phi_{mn}) \Delta_{na} \right) \\
 & - 4 \sum_{k,m} \partial_i (\rho_k) D_{kj} \Delta_{ka} \left(\sum_n \partial_j (\Phi_{mn}) \Delta_{na} \right) \rho_m D_{mi} \\
 & - 4 \sum_{k,m} \left(\sum_l \partial_i (\theta_{kl}) D_{lj} \right) \rho_k \Delta_{ka} \left(\sum_n \partial_j (\Phi_{mn}) \Delta_{na} \right) \rho_m D_{mi} .
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

Simplificando, usando las reglas de ortogonalidad de las matrices Δ_{na} y D_{mi} , también reorganizando los índices y haciendo uso de las propiedades de antisimetría de los ángulos θ_{km} y Φ_{kn} se obtiene:

$$\begin{aligned}
 (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 = & 2 \sum_k \left[(\partial_i (\rho_k))^2 - \partial_i (\rho_k) \partial_j (\rho_k) D_{kj} D_{ki} \right] \\
 & + 2 \sum_{k,m} \left[\rho_k^2 \left((\partial_i (\theta_{km}))^2 + (\partial_i (\Phi_{km}))^2 \right) - 2 \rho_k \rho_m \partial_i (\theta_{mk}) \partial_i (\Phi_{mk}) \right] \\
 & + 2 \sum_{k,m} \left[\partial_i (\rho_k^2) \partial_j (\theta_{mk}) - 2 \rho_m \partial_i (\rho_k) \partial_j (\Phi_{mk}) \right] D_{mi} D_{kj} \\
 & + 2 \sum_{k,m,n} \left[2 \rho_k \rho_m \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\Phi_{mk}) - \rho_k^2 \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk}) \right] D_{mi} D_{nj} \\
 & + 2 \sum_{k,m,n} \rho_n \rho_m \partial_i (\Phi_{kn}) \partial_j (\Phi_{mk}) D_{mi} D_{nj} .
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Si ahora consideramos el caso de $\rho = cte$, los términos de la densidad lagrangiana se transforman a:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2 \omega_{mk}^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \\
 & - \sum_{k,m} \left[\rho_k^2 (\partial_i (\theta_{km})^2 + \partial_i (\Phi_{km})^2) - 2\rho_k \rho_m \partial_i (\theta_{mk}) \partial_i (\Phi_{mk}) \right] \\
 & - \sum_{k,m,n} [2\rho_k \rho_m \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\Phi_{mk}) - \rho_k^2 \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk})] D_{mi} D_{nj} \\
 & - \sum_{k,m,n} \rho_n \rho_m \partial_i (\Phi_{kn}) \partial_j (\Phi_{mk}) D_{mi} D_{nj} \\
 & + 2g \sum_{k,m,n} [\partial_i (\Phi_{mk}) \rho_m^2 \rho_n - \partial_i (\theta_{mk}) \rho_k \rho_m \rho_n] \epsilon_{mnk} D_{ni} \\
 & - \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} .
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

Además de las relaciones que se obtienen cuando se impone que el momento generalizado asociado al color sea nulo se obtiene, integrando con respecto al tiempo y usando el hecho de ρ es una constante:

$$\partial_0 (\Phi_{mk}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0 (\theta_{mk}) \implies \Phi_{mk} = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \theta_{mk} . \tag{A.47}$$

De esta manera se permite encontrar una relación entre las derivadas espaciales:

$$\partial_i (\Phi_{mk}) = \frac{2\rho_m \rho_k}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{mk}) . \tag{A.48}$$

Esta última relación sumamente útil para poder simplificar la densidad lagrangiana, que haciendo las substituciones pertinentes toma la

forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0 (\theta_{mk})^2 \\
& - \frac{1}{2} \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{km})^2 \\
& + \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2\rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk}) D_{mi} D_{nj} \quad (\text{A.49}) \\
& - 2g \sum_{k,m,n} \frac{\rho_k^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \rho_n \rho_k \rho_m \epsilon_{mnk} \partial_i (\theta_{mk}) D_{ni} \\
& - \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} .
\end{aligned}$$

A.2.1 La Densidad Hamiltoniana

Para reescribir la densidad hamiltoniana con la condición de que ρ es una constante, recordamos la forma que tiene en la norma de tiempo, que es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{1}{2} \vec{\Pi}_a \cdot \vec{\Pi}_a + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 + g \epsilon_{abc} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a) \cdot (\vec{A}_b \times \vec{A}_c) \\
& + \frac{g^2}{4} \left\{ (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_b)^2 - (\vec{A}_b \cdot \vec{A}_c)^2 \right\} , \quad (\text{A.50})
\end{aligned}$$

donde se identifican los términos. Entonces quedará:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} = & \frac{1}{4} \sum_{m,k} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_0 (\theta_{mk})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,m} \frac{(\rho_k^2 - \rho_m^2)^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \partial_i (\theta_{km})^2 \\
& - \sum_{k,m,n} \left[\rho_k^2 - \frac{4\rho_m^2\rho_k^4}{(\rho_m^2 + \rho_k^2)(\rho_n^2 + \rho_k^2)} \right] \partial_i (\theta_{nk}) \partial_j (\theta_{mk}) D_{mi} D_{nj} \\
& + 2g \sum_{k,m,n} \frac{\rho_k^2 - \rho_m^2}{\rho_m^2 + \rho_k^2} \rho_n \rho_k \rho_m \epsilon_{mnk} \partial_i (\theta_{mk}) D_{ni} \\
& + \frac{g^2}{4} \left\{ \left(\sum_k \rho_k^2 \right)^2 - \sum_k \rho_k^4 \right\} . \quad (\text{A.51})
\end{aligned}$$

Apéndice B

Cálculos Complementarios al Capítulo 6

B.1 Mapeo Bosónico

B.1.1 Solución al Sistema de Ecuaciones para ρ_k

Para poder encontrar el mapeo en coordenadas bosónicas podemos resolver el siguiente sistema con las ecuaciones (6.12), (6.13) y (6.14), obtener así una expresión general que relacione los términos de ρ_k con los términos de la matriz Q que estará dada por la ecuación (6.25), que es:

$$\rho_k^2 (tr(Q) - \rho_k^2) + \frac{\det(Q)}{\rho_k^2} = \frac{1}{2} (tr(Q)^2 - tr(Q^2)) \quad (B.1)$$

Si consideramos la siguiente sustitución y realizamos algunas simplificaciones de la ecuación anterior:

$$\rho_k^2 = \lambda_k \quad , \quad (B.2)$$

$$\lambda_k^3 - \lambda_k^2 tr(Q) + \frac{1}{2} (tr(Q)^2 - tr(Q^2)) \lambda_k - \det(Q) = 0 \quad , \quad (B.3)$$

obtenemos una ecuación de tercer grado en λ_k que se puede resolver inmediatamente, escribiéndola de manera aún más sencilla al hacer las

sustituciones siguientes:

$$\mathcal{P} = -\text{tr}(Q) \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(Q)^2 - \text{tr}(Q^2) \right) \quad \mathcal{R} = -\det(Q) \quad . \quad (\text{B.4})$$

Tenemos para nuestra ecuación:

$$\lambda_k^3 + \mathcal{P}\lambda_k^2 + \mathcal{Q}\lambda_k + \mathcal{R} = 0 \quad . \quad (\text{B.5})$$

Cambiamos la variable λ_k por x de la siguiente manera:

$$\lambda_k = x - \frac{\mathcal{P}}{3} \quad , \quad (\text{B.6})$$

y realizando la sustitución obtenemos:

$$x^3 + \left(\frac{\mathcal{P}^2}{3} - \frac{2\mathcal{P}^2}{3} + \mathcal{Q} \right) x + \mathcal{R} - \frac{\mathcal{P}^3}{27} + \frac{\mathcal{P}^3}{9} - \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{3} = 0 \quad . \quad (\text{B.7})$$

En este último cambio de variable ha desaparecido el término cuadrático y deja una ecuación que se puede resolver con el conocido método de Cardano. Simplificando aún más la notación podemos definir:

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{P}^2}{3} - \frac{2\mathcal{P}^2}{3} + \mathcal{Q} \quad \text{y} \quad \mathcal{N} = \mathcal{R} - \frac{\mathcal{P}^3}{27} + \frac{\mathcal{P}^3}{9} - \frac{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{3} \quad , \quad (\text{B.8})$$

dejándonos de esta forma nuestra ecuación en su forma más simple posible:

$$x^3 + \mathcal{M}x + \mathcal{N} = 0 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Su solución estará dada por la siguiente igualdad:

$$x = \left[-\frac{\mathcal{N}}{2} + \sqrt{\frac{\mathcal{N}^2}{4} + \frac{\mathcal{M}^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\mathcal{N}}{2} - \sqrt{\frac{\mathcal{N}^2}{4} + \frac{\mathcal{M}^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad , \quad (\text{B.10})$$

donde \mathcal{N} y \mathcal{M} están dadas por las expresiones:

$$\mathcal{N} = \frac{39\text{tr}(Q)^3 - 27\text{tr}(Q)\text{tr}(Q^2)}{162} - \det(Q) \quad , \quad (\text{B.11})$$

$$M = \frac{1}{6} \text{tr} (Q)^2 - \frac{1}{2} \text{tr} (Q^2) \quad . \quad (\text{B.12})$$

Para la ρ_k quedará la igualdad:

$$\rho_k^2 = -\frac{P}{3} + \left[-\frac{N}{2} + \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{N}{2} - \sqrt{\frac{N^2}{4} + \frac{M^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad . \quad (\text{B.13})$$

B.1.2 El Término Rotacional Cuadrado

El término del rotacional cuadrado en los campos de norma es:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_a)^2 &= (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a) (\partial^i A_a^j - \partial^j A_a^i) = \\ &2 (\partial_i A_j^a \partial^i A_a^j - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i) = \\ &2 \left[(\partial_i A_j^a)^2 - \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Consideremos a las derivadas que constituyen al término del rotacional al cuadrado:

$$\begin{aligned} (\partial_i A_j^a)^2 &= \sum_k \rho_k^2 \left[\partial_i (D_{kj})^2 + \partial_i (\Delta_{ka})^2 \right] \\ &+ 2 \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{mj} \partial_i (D_{kj}) \Delta_{ka} \partial_i (\Delta_{ma}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

y

$$\begin{aligned} \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i &= \sum_{k,m} \left[\partial_i (D_{kj}) \rho_k \Delta_{ka} + \partial_i (\Delta_{ka}) \rho_k D_{kj} \right] \cdot \\ &[\partial_j (D_{mi}) \rho_m \Delta_{ma} + \partial_j (\Delta_{ma}) \rho_m D_{mi}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Desarrollando la expresión anterior obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_i A_j^a \partial^j A_a^i &= \sum_k \rho_k^2 \partial_i (D_{kj}) \partial_j (D_{ki}) \\ &+ \sum_{k,m} \rho_k \rho_m D_{mi} D_{kj} \partial_i (\Delta_{ka}) \partial_j (\Delta_{ma}) + 2 \rho_k \rho_m D_{mi} \partial_i (D_{kj}) \Delta_{ka} \partial_j (\Delta_{ma}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Referencias

- [1] A. Klein, E. R. Marshalek, "Boson realizations of lie algebra with applications to nuclear physics", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 63, No. 2, April 1991.
- [2] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison Wesley Publishing Company, Second Edition, 1980 ;T.C. Cap. 12.
- [3] J. C. López, "Un posible procedimiento no-perturbativo de muchos niveles en la formulación hamiltoniana de la Cromodinámica Cuántica", Tesis de Doctoral, UNAM, Mayo 1992.
- [4] J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics", (John Wiley & Sons Inc.), Second Edition, New York, 1975.
- [5] J. Koller and P. van Baal. *Nuclear Phys. B273 (1986) 387-412* North-Holland , Amsterdam.
- [6] K. Huang, "QUARKS, LEPTONS & GAUGE FIELDS (2nd edition)", World Scientific Co. Pte. Ltd., Second Edition; Singapore, 1992.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, "Teoría Clásica de los Campos", Vol. 2, (Reverté S.A.), segunda edición, Barcelona, 1987.
- [8] L. Elsgoltz, "Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional" . Editorial Mir. . pp.287-333. pt.432. Parte 2 Cap. 6.
- [9] O. Castaños, A. Frank, E. Chacón, P. Hess, and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.* 23(12), December 1982.
- [10] P. O. Hess and D. Schütte, *Ann. of Phys.* 211, 112-157 (1991).

- [11] P. O. Hess and J. C. López, J. Math. Phys. Vol. 36 (No. 3), March 1995.
- [12] P. O. Hess and R. D. Viollier, Physical Review D, Vol. 34 (No. 1), 258-268, 1986.
- [13] P. Ring and P. Schuck, "The Nuclear Many-Body Problem", Springer-Verlag, 1980, USA pt.716. Chapter 9.
- [14] W. Greiner, A. Schäfer, "QUANTUM CHROMODYNAMICS", Springer-Verlag, Second Edition, New York, 1995.