106

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"VALUACION DE OPCIONES POR EL MODELO BLACK & SCHOLES A PARTIR DEL MODELO BINOMIAL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

JULIO CESAR URQUIZA GARCIA TORRES

DIRECTOR DE TESIS: ACT. MARIA AURORA VALDES MICHEL

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: " Valuación de opciones por el Modelo Black & Scholes a partir del Modelo Binomial ".

realizado por Julio César Urquiza Garcia Torres

con número de cuenta 9450241-3 , pasante de la carrera de Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. María Aurora Valdés Michel.	
Propietario	Act. Laura Miriam Querol González.	
Propietario	Act. Leticia Daniel Orana.	
Suplente	Act. Benigna Cuevas Pinzón.	
Suplente	Act. Noemi Velázquez Sánchez.	Noemi Velazquez Sanchez

Consejo Departamental de Matemáticas
M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes

FACULTAD DE CIENCIAS

AGRADEZCO:

A MIS PADRES:

Adalberto Urquiza Reyes y Julieta Garcia Torres de Urquiza. Por su amor, por su confianza, por su apoyo y por todos esos valores y principios que me inculcaron y que me han formado como ser humano. No encuentro una forma de agradecerles todo este esfuerzo, pero aprovecho para decirles que si de algo estoy orgulloso es de tener unos padres como ustedes.

A MIS HERMANOS:

Tato, Rolando, Juan Carlos, Toño y Roberto. Por su cariño, por sus consejos, por su apoyo y comprensión. Porque en esos momentos difíciles siempre estuvieron a mi lado.

A MI NOVIA:

Nadia. Por todo el amor que me has dado a lo largo de estos dos años, por la confianza, por todos esos bellos momentos que hemos pasado juntos. Amor, por eso y por lo que nos falta por vivir, ¡ Muchas Gracias !

A MI FAMILIA:

Hay una lista interminable de personas a quienes agradecer todo su amor, confianza y enseñanzas que han contribuído a mi formación tanto personal como profesional. A continuación mencionaré tan solo algunas de ellas: Julia Cardoso Viuda. de Garcia Torres, Haroldo Garcia Torres Avelar (q.e.p.d), Ma. Teresa Nava de Urquiza, Mariano Urquiza Espinoza, Ana Cecilia Urquiza Nava, Fam. Bedoya, Fam. Cardoso.

A MI MADRINA YOLA:

Por tus consejos, por estar a nuestro lado cuando más lo hemos necesitado, aprovecho este feliz momento para reiterarte todo éste amor que tanto mi familia como yo te tenemos y que sabemos que saldrás adelante de este pequeño reto al que te estás enfrentando y que estoy seguro que lo lograrás.

A MIS AMIGOS:

A Elisa, Omar y Alejandro, por su amistad incondicional.

De igual forma agradezco a todos los que durante todo este tiempo han estado conmigo, ofreciendome su amistad, sus consejos e impulsándome a concluir con esta meta: Iñigo, Juan, Miguel, David, Vero, Miriam y Cynthia.

A CRISTIAN:

Por ser mi amigo, por tus consejos y por tu apoyo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los mercados financieros se han caracterizado por el importante desarrollo de nuevos productos, los cuales han nacido a consecuencia de la adaptación de numerosos modelos teóricos al entorno actual.

El mercado financiero cumple tres funciones básicas en la economía:

- Canalización de la riqueza de los individuos
- Canalización de la riqueza de las empresas
- Fuente de información

La contribución del mercado de derivados para la realización de estas funciones explica el importante crecimiento del mercado de opciones en los últimos años.

El mercado financiero proporciona la flexibilidad a cada participante de encontrar el nivel de riesgo-rendimiento deseado según sus preferencias.

Otra función de este mercado es la de asignar eficientemente los recursos de las empresas. Una empresa puede obtener capital de diversas fuentes. Por ejemplo, el mercado de acciones se encarga de repartir el capital de forma eficiente entre los competidores.

En cuanto a funcionar como fuente de información podemos mencionar que los precios obtenidos del mercado aportan a los participantes información que les será útil para la toma de decisiones. En este sentido la economía aporta información al mercado de acciones lo cual influye en el comportamiento de los precios.

Los principales objetivos de este trabajo son los siguientes: presentar de una manera breve las principales características de los instrumentos derivados, así como los factores que mayor influencia tienen sobre el precio de las opciones las cuales se han convertido en importantes estrategias de inversión para reducir los riesgos de mercado, dentro de los cuales podemos mencionar el alza en los precios, la volatilidad existente en el tipo de cambio y los cambios que sufren las tasas de interés. En segundo lugar proveeremos un marco teórico por medio del cual se podrán valuar estos instrumentos y con ello se podrán crear estrategias para cubrir la exposición de los participantes ante los riesgos de mercado.

Se analizarán dos modelos para el cálculo de opciones: El modelo binomial y el modelo de Black-Scholes; el primero nos ayudará a conocer los elementos básicos para entender el modelo Black-Scholes.
Uno de los principales problemas a los que se enfrenta este mercado de instrumentos derivados es que en la mayoría de los casos los participantes se enfrentan a problemas generados por la falta de conocimiento e información de los instrumentos financieros

A través de estos instrumentos los inversionistas pueden protegerse de cambios adversos en los precios de un bien, de commodities: metales, granos, etc, de una tasa de interés o del tipo de cambio.

Para poder aprovechar todas las oportunidades que ofrece este mercado, es importante entender el comportamiento de estos instrumentos, los métodos de valuación de opciones, las distintas variables que ejercen influencia sobre su comportamiento y por último, la importancia de la volatilidad por ser la única variable implícita no determinística que influye en el precio de la opción. El conocer la distribución de los rendimientos ayuda al inversionista en la toma de decisiones para aprovechar momentos del mercado con los que pueda obtener beneficios.

Debido a que estos instrumentos tienen una relación estrecha con el riesgo, a continuación mencionaré algunas de las principales características del mismo con el fin de comprender el porque estos instrumentos derivados son tan importantes como estrategias de protección o cobertura.

El riesgo financiero puede asumir muchas formas, como puede ser el riesgo de tasas de interés, el riesgo de tipo de cambio, el riesgo de variación que puede darse en el precio de las materias primas para elaborar ciertos productos, etc.

Estas formas de riesgo también se han internacionalizado por lo que instituciones financieras y otros participantes se ven afectados por lo que sucede en el entorno financiero internacional.

Desde hace algunos años se han tratado de introducir instrumentos que transformen el riesgo en oportunidad, es decir reasignar el riesgo de una manera eficiente. Es por ello que surgen los administradores de riesgos quienes son los que proporcionan los servicios de reasignar con eficiencia el riesgo.

La administración de riesgos se identifica por lo general con lo que se denominan operaciones de cobertura, es decir, con la adquisición de protección contra un movimiento adverso en el precio de un bien, tasa de interés o tipo de cambio. Es importante tomar en cuenta que para poder administrar el riesgo es necesario, en primer lugar, identificarlo, calcularlo y medir el impacto que tiene sobre la riqueza de los participantes.

Existen otras dos maneras de separar el riesgo:

Los riesgos intrínsecos que son los riesgos propios de la actividad de los participantes y los riesgos exógenos que son los riesgos que están fuera del control de los participantes, como por ejemplo la tasa de interés o los precios en el mercado accionario.

El concepto de riesgo puede tener una descripción matemática ya que las variables que lo integran se mueven constantemente de manera aleatoria. Para poder disminuir el riesgo contamos con una herramienta matemática que es la estadística y que permite tratar a la incertidumbre (lo desconocido) de manera matemática.

CAPÍTULO 1.
HISTORIA DE LOS INSTRUMENTOS DERIVADOS

1.1 Antecedentes históricos y el desarrollo del mercado de opciones.

Se sabe que desde el siglo XVIII las opciones se utilizaban en Holanda para la comercialización de tulipanes ya que era una forma de poderse cubrir frente a los cambios en el precio de un cierto tipo de tulipán en el futuro. Así los comerciantes de esta planta, comprando una opción de compra (este concepto lo especificaremos más adelante) aseguraban el peor precio al que comprarían su mercancía en caso de que los precios se incrementaran en forma importante. De la misma forma, los productores a través de la compra de una opción de venta (este concepto lo especificaremos más adelante) podrían asegurar la venta de su producto a un precio mínimo fijado con anterioridad.

En el siglo XIX Russell Sage, uno de los mayores especuladores en el mercado, organizó un sistema de opciones de compra y de venta y comenzó a operarlos en un mercado de mostrador (over the counter market). También introdujo un concepto para convertir las opciones de venta a opciones de compra y viceversa al establecer una relación entre el precio de la opción, el precio del bien subyacente y la tasa de interés. Esta fórmula de conversión es conocida actualmente como la ecuación "Put-Call Parity" (Paridad Put-Call) y establece la relación entre el precio de las opciones.

En 1968 el Chicago Board of Trade (CBT), mejor conocido por sus contratos de futuros, comisionó un estudio para explorar la posibilidad de ofrecer contratos de futuros sobre acciones de la bolsa. Para su sorpresa el estudio no recomendó contratos a futuro, sino opciones sobre acciones; de esta forma en

1972 surge el Chicago Board Options Exchange en donde se comercializaron por primera vez opciones sobre acciones de bolsa.

A partir del estudio realizado en 1968 se crea un mercado de opciones el cual debía contar con las siguientes características:

- Debían de contar con contratos de opciones listadas.
- Debía contar con la intermediación de la Cámara de Compensación de opciones para eliminar el riesgo crediticio y regular la estandarización de las fechas de vencimiento.

En 1973 aparecen las opciones listadas las cuales permiten a los inversionistas contar con estrategias que van desde las más conservadoras hasta estrategias con un alto nivel de riesgo.

Hasta 1973, no existía ningún modelo formal que fijara cual debiera ser el precio de una opción. La enorme varianza en los precios y el spread entre el precio de compra y venta hacían que el mercado de opciones fuera caro y poco líquido.

Fué hasta 1973, cuando los profesores Fisher Black y Myron Scholes publican una fórmula matemática (la fórmula Black-Scholes) que nos permite calcular correctamente el precio de una opción, cuando éste mercado cambió radicalmente. Esta fórmula dió al mercado mayor liquidez y redujo los spreads una vez que los operadores empezaron a realizar arbitraje con las opciones mal valuadas.

En ese mismo año surge el Chicago Board Options Exchange (CBOE). En ese momento el mercado de opciones estaba controlado por operaciones con opciones de compra y venta hechas a la medida. Los operadores anunciaban en el Wall Street Journal sus ofertas, el comprador de la opción se ponía en contacto con el operador y una vez cerrada la operación se realizaba un contrato físico en el que se describían las características de la opción. El tenedor del contrato tenía que ejercer su derecho antes de cierta hora fijada con anterioridad el día de vencimiento en la caja de la empresa que respaldaba el contrato, ya que de no hacerlo el tenedor perdía su derecho. Otro problema de las opciones era que el tenedor del contrato únicamente podía liquidar el contrato antes de la fecha de vencimiento con el intermediario con quien lo había adquirido ya que éste último era el único que conocía al emisor del contrato. Posteriormente, en el año de 1975 se añadieron otras tres bolsas de valores a la negociación de estos instrumentos. Estas fueron la American Stock Exchange, la Philadelphia Stock Exchange y la Pacific Stock Exchange.

La creación de un mercado líquido permitió la realización de estrategias de especulación y de cobertura, una de las características más atractivas del mercado de opciones.

En 1973 aparecen las opciones en los Estados Unidos y en 1992 surge el mercado de opciones en México, permitiendo a los inversionistas contar con nuevas estrategias de inversión y cobertura.

En 1977 el CBOE realiza la primera opción sobre índices accionarios.

En Octubre de 1982 se introducen en Chicago opciones sobre T-Bonds por lo que el CBT comenzó a negociar opciones sobre contratos a futuro de T-Bonds que son los instrumentos que reflejan las tasas de interés a largo plazo en Estados Unidos.

Las opciones comerciadas en bolsa sobre divisas aparecieron en el Philadelphia Stock Exchange (PHLX), en donde se negocian opciones sobre las ocho divisas más importantes en el mercado de cambios interbancario y que son : yen, marco alemán, libra esterlina, franco suizo, franco francés, dólar canadiense, dólar australiano y el ECU (European Currency Unit). Todas éstas divisas se cotizan en términos de USD.

El mercado extrabursátil de opciones de tasas de interés y de divisas se desarrollo en la década de los ochenta, paralelamente a los mercados de opciones bursátiles. Las opciones del mercado extrabursátil constituyen riesgos crediticios de parte a parte y no son tan líquidas como las que se comercian en la bolsa, por lo general tienen plazos al vencimiento mayores y están hechas a la medida de las necesidades del cliente en cuanto a cantidad, precio de ejercicio, fecha de vencimiento, etc. Con frecuencia estos instrumentos no están disponibles a empresas pequeñas, debido a la cantidad crediticia de la que disponen, puesto que la cantidad mínima sobre la que se opera es de un millón de dólares o más.

En 1984 la Singapore Intrernational Monetary Exchange (SIMEX) y la Chicago Mercantile Exchange (CME) formaron un enlace mediante el cual los participantes podían operar contratos intercambiables en ambas bolsas.

Las primas en estos contratos quedaban determinadas por la interacción de la oferta y la demanda en un mercado secundario abierto, competitivo y eficiente.

La introducción de este mercado secundario permitió que floreciera la flexibilidad en estrategias de especulación y cobertura. Los participantes en el mercado de opciones pueden tomar o cuadrar posiciones fácilmente, registrando utilidades o pérdidas sin tener que ejercer la opción o esperar necesariamente a su vencimiento. La clave del desarrollo de este mercado fué la estandarización de los contratos y la existencia de una cámara de compensación, la cual actúa como comprador de cada vendedor y como vendedor de cada comprador; que aunado a los márgenes depositados y a la liquidación diaria de pérdidas y ganancias disminuye de manera importante el riesgo crediticio entre las partes.

En 1987 se introducen en México las coberturas cambiarias de corto plazo, como un mecanismo para evitar los efectos negativos de la incertidumbre cambiaria. Al adquirir una cobertura cambiaria, se adquiere la obligación de comprar o vender dólares en una fecha futura a un tipo de cambio predeterminado. Se trataba simplemente de una operación forward tropicalizada.

El mercado de coberturas cambiarias proporciona a los participantes la oportunidad de cubrir riesgos cambiarios tanto de activos como de pasivos, denominados en USD, a cambio del pago al intermediario de una cantidad en moneda nacional denominada prima de la cobertura.

Las opciones listadas de Telmex L comenzaron a operar en septiembre de 1991 y cotizaban en las principales Bolsas como son las de Chicago, Filadelfia y Nueva York. Como resultado del éxito de dichas opciones, a partir de octubre de 1992 se inició la operación de opciones a largo plazo sobre Telmex L.

La introducción de un mercado de instrumentos derivados puros (warrants) en México, fué evaluada por la Asociación Mexicana de Casas de Bolsa, la Bolsa Mexicana de Valores y la Comisión Nacional de Valores.

Un warrant es un subconjunto de una opción, ya sea de compra o venta y el cual otorga al tenedor el derecho de comprar o vender dentro de un plazo determinado, un número definido de acciones, índices, a un precio especificado en dicho instrumento.

Las diferencias entre las opciones y los warrants son las siguientes:

1. Los warrants son emitidos por casas de bolsa e instituciones financieras, mientras que las opciones son generalmente emitidas por inversionistas.
2. Aunque esta no es una característica fundamental, los warrants tienen vencimiento superior a un año y las opciones son por meses, generalmente.
3. Cada warrant es único, no existe una estandarización de características.

En 1991 la CME y la CBOE ofrecieron un sistema por medio del cual se pueden comprar y vender instrumentos financieros de forma electrónica alrededor de todo el mundo, aún cuando los mercados de Chicago se encuentren cerrados.

En México la emisión de warrants fué autorizada en agosto de 1992 y en octubre del mismo año se introducen en el mercado mexicano las dos primeras emisiones de warrants sobre acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

Finalmente en enero de 1992 la CNV aprobó la primera etapa de la formación de un mercado de opciones; mismas que amplían la gama de combinaciones de riesgo-rendimiento en el mercado. El crecimiento del mercado de opciones en México en 1993 fué muy importante, llegando a cotizar a finales de ese año un total de 49 títulos opcionales, 46 de compra y 3 de venta.

En el mismo año la introducción de las ventas en corto generó un efecto positivo en cuanto a la gama de alternativas que puede ofrecer el mercado de valores. Esto no resolvía el problema de forzar a tomar decisiones extremas en el sentido de que el inversionista únicamente contaba con la realización de operaciones de compraventa de contado y en las cuales el mismo únicamente podía elegir entre invertir en un cierto instrumento o dejar de invertir con todo el riesgo que esto implicaba.

Al introducir opciones tenemos el efecto de que la gama de combinaciones riesgo-rendimiento se amplia de manera cuasi-infinita y permite ampliar la penetración financiera tanto de inversionistas nacionales como extranjeros.

El primer caso de la emisión de un producto derivado en México fué el de los Petrobonos, donde el premio recibido por la tenencia de este instrumento estaba en función del precio del petróleo. Los Petrobonos eran instrumentos de renta fija denominados en dólares con intereses pagaderos en USD. Adicionalmente cuando el precio del petróleo subía a partir de un precio de garantía, el tenedor del bono recibía un ingreso adicional.

En 1993 Operadora de Bolsa Serfín emite las primeras opciones sobre el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores.

Al generarse una amplia gama de combinaciones de elección con la introducción de las opciones, los derivados se convirtieron en un importante instrumento para aumentar la penetración financiera de países del extranjero, con la ventaja adicional de aprovechar a fondo el riesgo-rendimiento de las inversiones y así obtener una mayor eficiencia en la formación de precios con menor volatilidad y un incremento en el bienestar de la economía de los participantes.

CAPÍTULO 2.
INSTRUMENTOS DERIVADOS

2.1 Introducción.

Para poder aprovechar todas las oportunidades que ofrece el mercado de derivados es necesario entender el comportamiento de estos instrumentos, por lo que a continuación se mencionan las principales características de los mismos haciendo énfasis en las opciones que son el principal instrumento financiero derivado a analizar en el presente trabajo.

Una parte del uso de los instrumentos derivados es en operaciones financieras de cobertura o transformación del riesgo de mercado para eliminar riesgos de movimientos adversos que afecten los resultados de una empresa o particular.

De algunos años a la fecha los derivados se han convertido en parte importante de una de las ramas de la economía, las finanzas.

Podemos definir a un derivado como una función de $\Re^n \to \Re$ acotada; tomando en cuenta que el derivado de esta función son n-adas constituídas por las variables subyacentes dentro de las cuales podemos mencionar (tipo de cambio, monedas, índices financieros, bonos, así como otro tipo de mercancías como lana, azúcar, combustible, aluminio, oro, etc.)

El que sea una función acotada en un intervalo [a,b] significa:

$$\forall x \in D_f, a \leq x \leq b$$

$$\Rightarrow \exists M, M \in \Re \ni f(x) \leq M$$

En los mercados actuales los tipos más comunes de títulos derivados son los forwards, futuros, opciones y swaps.

Los forwards, swaps y otras formas de derivados son operados fuera de las bolsas por instituciones financieras con sus clientes. La forma en la que denominamos a estos mercados se conoce como mercados " over the counter " o " mercados de mostrador ".

Otra forma en la que podemos referirnos a los derivados es como activos contingentes ó contingent claims en inglés.

2.2 La cámara de compensación.

Para la regulación de los instrumentos derivados es necesario contar con una institución que sirva como intermediario entre las dos partes por lo que surge la cámara de compensación, la cual definiremos como sigue:

" La cámara de compensación es una entidad legalmente independiente cuyas acciones son propiedad de empresas afiliadas que efectúan la compensación de las operaciones. En esencia, la cámara de compensación rompe el vínculo entre compradores y vendedores al actuar como comprador legal de cada vendedor y a la inversa, como vendedor legal de cada comprador. "

El uso del margen en los mercados de derivados permite a la cámara de compensación asumir el riesgo de incumplimientos de contratos a futuro. Existen 2 tipos de márgenes: el margen inicial y el margen de variación.

El márgen inicial debe depositarse en la cámara de compensación un día después de iniciar una posición y es generalmente de alrededor del 10% del valor de la posición pero puede aumentar o disminuir dependiendo de la volatilidad del bien.

Ante el márgen de variación cada día la cámara de compensación revaloriza todas las posiciones de acuerdo con los precios de cierre. Es decir, calcula las pérdidas y ganancias netas de todos los participantes en el mercado y las carga o las acredita según sea el caso.

Cuando cualquier tipo de márgen no se paga cuando es requerido, la posición se cierra automáticamente, aunque el participante del mercado aún está legalmente obligado a cubrir el pago del márgen que debe.

La tecnología es un punto también importante ya que ha sido clave en el mercado de productos derivados, destacando los sistemas de información como el Reuters, Infosel, Dow Jones y otros, así como ha sido importante la creación de computadoras de alta capacidad que permiten procesar y documentar grandes volúmenes de contratos de derivados.

2.3 Los diferentes participantes en los mercados de productos derivados.

Los diferentes participantes en los mercados de productos derivados son los administradores de riesgos, los especuladores y los intermediarios.

Los administradores de riesgos son instituciones o individuos que compran y venden instrumentos derivados para compensar su exposición neta a los riesgos de mercado. Dentro de dichas instituciones podemos mencionar los bancos comerciales, bancos de inversión, corredores de valores, compañías de seguros, bancos centrales, agencias gubernamentales, así como corporativos privados.

Los especuladores son aquellos que compran o venden derivados precisamente para asumir riesgos a cambio de posibles ganancias. Entre ellos podemos mencionar los "floor traders" que son los especuladores que operan en los pisos de remates de las bolsas.

Los intermediarios que pueden ser intermediarios de derivados y corredores de piso normalmente son divisiones de empresas que prestan servicios financieros internacionales, subsidiarias de bancos comerciales y/o de inversión, los cuales a cambio del pago de una comisión, fungen como intermediarios entre clientes fuera del piso y corredores en el piso de remates. Colocan órdenes, manejan fondos de margen, contabilidad y diseñan estrategias de especulación y cobertura.

Para introducirnos a los conceptos de algunos de los principales (no únicos) tipos de productos o títulos derivados procederemos a analizar brevemente cada uno de ellos.

2.4 Forward.

Es un derivado simple que consiste en un acuerdo entre 2 partes para comprar o vender un bien en un futuro a un cierto precio.

Particularmente estos contratos se celebran entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera con una empresa o particular y generalmente éstos títulos no son cotizados en las distintas bolsas. Como ya lo habíamos mencionado estos contratos se efectúan en un mercado over the counter.

Dentro de estos contratos una de las partes asume una posición larga (compra) y se compromete a comprar un activo a una fecha especificada desde un principio a un cierto precio. Por otro lado la segunda parte asume una posición corta (venta) y se compromete a vender el activo en la fecha y precio estipulados. A dicho precio en los contratos forward se conoce como precio de entrega (delivery price).

Es importante mencionar que en un principio el precio del forward tiene valor cero (0) y conforme transcurre el tiempo el precio del activo puede subir o bajar. Una de las razones por las que el precio sube o baja con el transcurso del tiempo es por los movimientos en el precio ocasionados por la ley de la oferta y la demanda.

2.5 Futuro.

Es un acuerdo entre dos partes para comprar o vender un activo a un cierto periodo y por un cierto precio.

A diferencia de los forwards, los futuros son generalmente operados en las distintas bolsas, las cuales especifican y estandarizan ciertas características del contrato.

Como por lo general las partes que integran dicho contrato no necesariamente se conocen, las bolsas proveen un mecanismo que garantice el cumplimiento de las obligaciones de cada una de las partes.

Como ejemplo de este tipo de instrumentos podemos citar los futuros sobre T-Bills que son futuros sobre la tasa de interés que el gobierno federal estadounidense paga sobre su deuda a corto plazo. Estos futuros se convirtieron en el mercado de contratos a futuro de mayor exito y bursatilidad en el mundo.

Las principales bolsas en las que los contratos de futuros tienen lugar son las siguientes:

1. CBOT o " Chicago Board of Trade "
2. CME o " Chicago Mercantile Exchange "

CAPÍTULO 3.
OPCIONES

3.1 Definiciones básicas.

Las opciones son instrumentos financieros más sencillos que los futuros por lo que son más flexibles y de igual forma que otros instrumentos derivados nos ayudan a administrar riesgos.

Entre los lugares donde las opciones pueden ser comercializadas se encuentran el Chicago Board Options Exchange (CBOE), el Chicago Board of Trade (CBT) y el Philadelphia Stock Exchange (PHLX)

Una opción es un producto derivado; esto significa que su precio se encuentra ligado al precio de un bien o valor subyacente, lo que implica que su precio fluctúa siempre que el precio del bien subyacente varíe. Estos instrumentos pueden ser utilizados como estrategias de inversión y brindan al inversionista la posibilidad de crear posiciones en los mercados asi como de seleccionar estrategias de inversión que reflejan la tolerancia del inversionista hacia el riesgo.

A diferencia de los forwards y futuros las opciones son contratos entre dos partes una de las cuales es el tenedor (comprador) del título quien tiene el derecho mas no la obligación de comprar o vender un activo en un futuro a un determinado precio o nivel.

El contrato establece la obligación por parte del vendedor de cumplir con los términos especificados en dicho contrato.

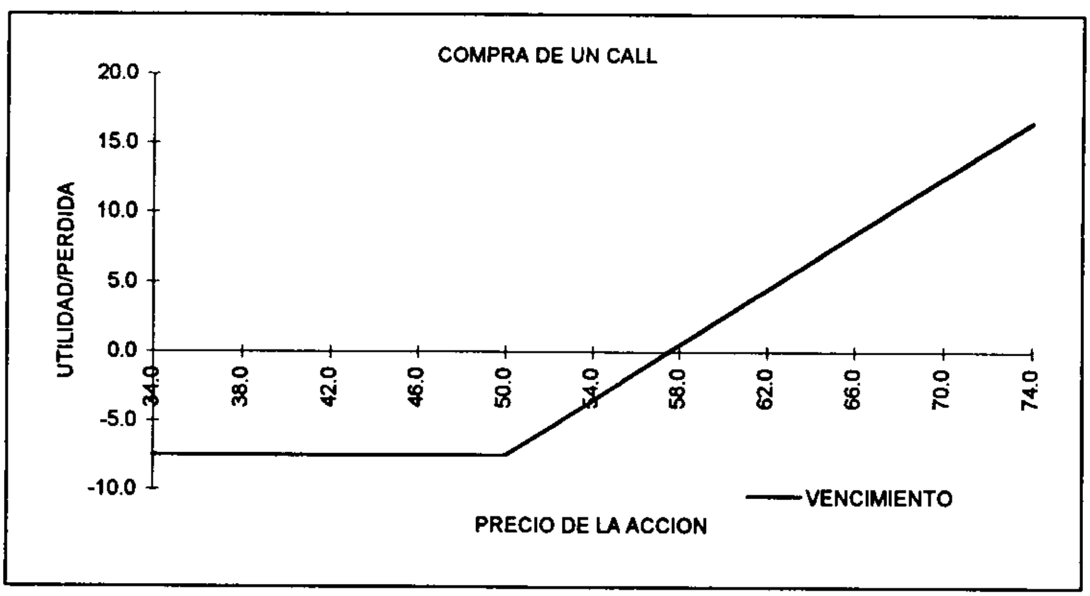
Existen dos tipos de opciones, las cuales explicaremos en la siguiente sección.

3.2 La opción de compra (Call)

- Call: Es la opción que da al tenedor el derecho mas no la obligación de ejercer la opción y comprar el bien subyacente en un futuro, a un determinado precio.

Este instrumento puede ser utilizado tanto para administrar el riesgo como para especular. Es útil para cubrir posiciones largas ya que garantiza el pago a un determinado precio (E) en caso de que el precio de mercado (S) rebase dicho precio. Por lo tanto solo se ejercerá la opción si S>E. Podemos mencionar que este instrumento se puede utilizar cuando el inversionista tiene expectativas de un mercado alcista.

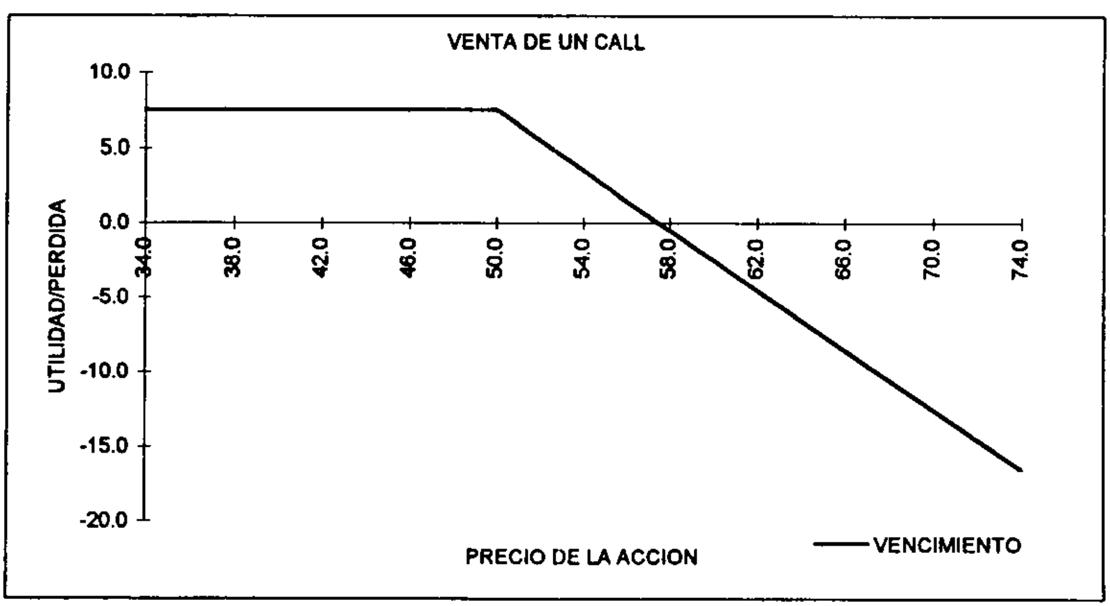
FIGURA NO. 1



Si compramos un call y el valor del bien subyacente cae por debajo del precio de ejercicio, la pérdida máxima siempre estará limitada al costo incial C (prima), pero la ganancia puede ser ilimitada. El precio del bien o activo debe aumentar por encima del precio de ejercicio más el pago de la prima para obtener una ganancia neta.

Si el emisor vende un call se obliga a vender el bien al comprador a un precio dado. Si el emisor también es dueño del bien subyacente, se dice que está cubierto. Si no está cubierto la pérdida al emitir un call puede ser ilimitada ya que el emisor tendrá que adquirir la acción al precio al que se encuentre en el mercado sea cual fuere el mismo y vendérsela al tenedor del contrato al precio de ejercicio. Ya que la ganancia máxima que se puede obtener al emitir un call es la prima obtenida al inicio se puede decir que esta es una estrategia agresiva. El vendedor del call obtendrá una ganancia siempre y cuando el precio del bien subyacente permanezca constante o cuando suba más del precio de ejercicio menos la prima pagada.

FIGURA NO. 2

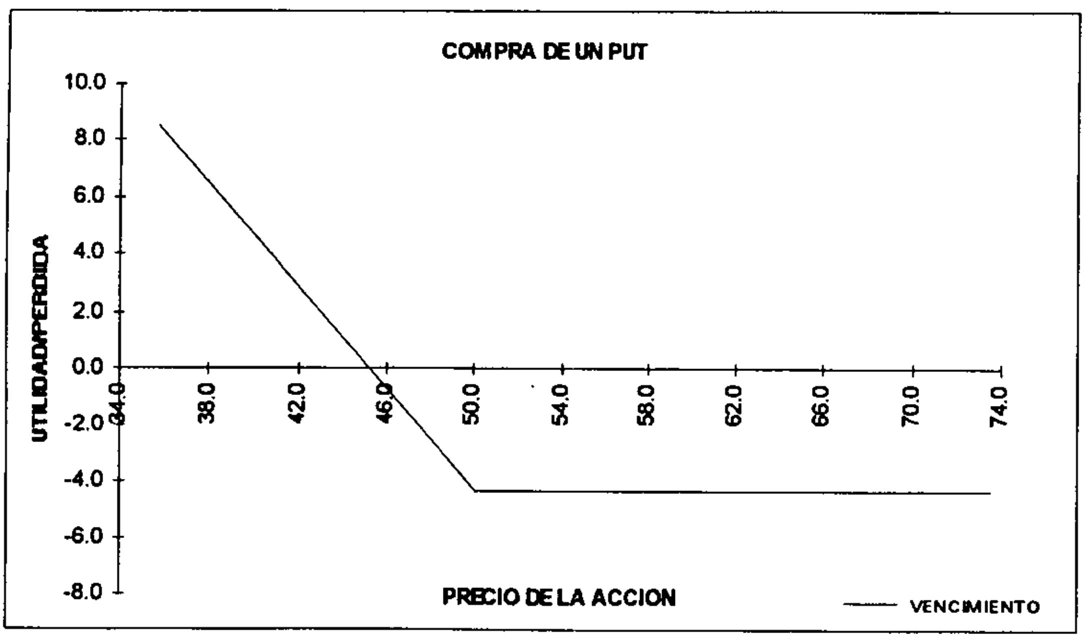


3.3 La opción de venta (Put)

- Put: Es la opción que da al tenedor el derecho mas no la obligación de ejercer la opción y vender el bien subyacente en un futuro a un precio determinado.

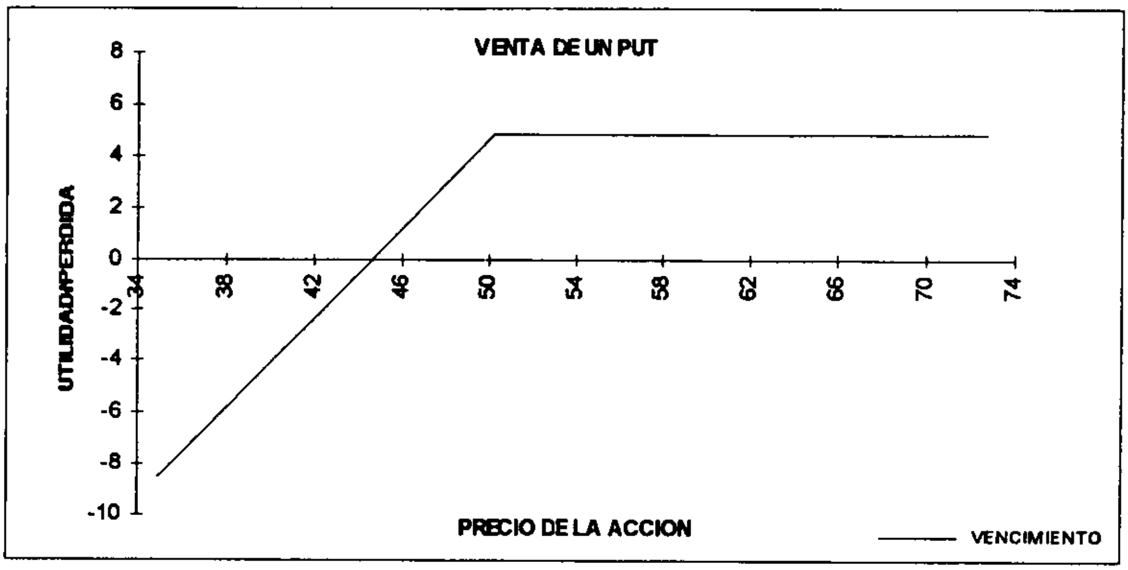
Una estrategia que se utiliza generalmente en un mercado con tendencia a la baja. El tenedor de un put tendrá ganancias siempre y cuando el precio del bien subyacente disminuya por una cantidad mayor que la prima pagada al adquirir el derecho. El comprar un put es una estrategia menos riesgosa que la venta en corto de un bien ya que la pérdida máxima del inversionista sin importar cuanto aumente el precio del bien será la prima pagada.

FIGURA NO. 3



La venta de un put obliga al emisor a comprar el bien al comprador de este contrato a un precio dado. Emitir un put sin estar cubierto es adoptar una posición muy riesgosa ya que el emisor está expuesto a pérdidas importantes y la ganancia potencial está limitada a la prima recibida. La ganancia máxima del emisor en un put es igual al precio del valor subyacente menos el precio de ejercicio del put mas la prima recibida por la venta de la opción.

FIGURA NO. 4



El precio en el contrato se conoce como precio de ejercicio o " strike price " y la fecha en el contrato se denomina fecha de expiración o vencimiento. A este precio lo denotaremos con la letra E.

El activo sobre el que se instrumenta la opción se denomina bien o activo subyacente (stock en inglés) y lo denotaremos como S.

De forma similar a los contratos de forwards, una de las partes asume una posición larga (compra) y tiene la posibilidad de comprar un activo a una fecha especificada desde un principio por un periodo establecido si así lo desea. Por otro lado la segunda parte asume una posición corta (venta) y tiene la obligación de vender el activo en la fecha y precio estipulados si quien adquirió la posición corta desea ejercer su derecho.

3.4 Tipos de opciones.

De acuerdo al tipo de opción existen dos clasificaciones:

- De entrega física: en la cual se le da al tenedor el derecho de recibir físicamente (Call) o de hacer entrega física (Put) del bien subyacente contratado cuando se ejerce la opción.

- De reembolso de efectivo: en la cual se le da al tenedor el derecho de recibir un pago en efectivo que se basa en la diferencia entre el precio de la opción y el valor del bien en el momento en el que se ejerce la opción.

En cuanto al estilo con el que se pueden ejercer las opciones destacan los siguientes:

- Forma Americana: Se permite ejercer la opción o no en cualquier fecha antes de la expiración del contrato.

- Forma Europea: Se puede decidir si se ejerce la opción al vencimiento del contrato.

Las opciones que tienen los mismos términos estándar forman lo que se conoce como una serie de opciones, las cuales pueden ser negociadas en más de un mercado de opciones al mismo tiempo; si esto sucede entonces las llamamos opciones multi-negociadas.

La adquisición de los derechos de éstos instrumentos se realiza mediante el pago de una prima.

El monto de la prima de una opción se encuentra determinado tanto por propiedades del bien subyacente como de la opción misma. Los factores que mayor influencia ejercen sobre el precio de una opción son:

- Precio del bien subyacente
- Precio de ejercicio
- Tiempo hasta la fecha de vencimiento
- La volatilidad del bien subyacente
- La tasa de interés libre de riesgo
- Dividendos del bien subyacente
- La distribución estadística de los rendimientos

El más importante de todos es el precio del bien subyacente, ya que si el precio del bien está muy por encima o por debajo del precio de ejercicio, los otros factores no tendrán suficiente influencia sobre el precio de la opción.

FIGURA NO. 5
PAYOFF EN LA COMPRA DE UN CALL

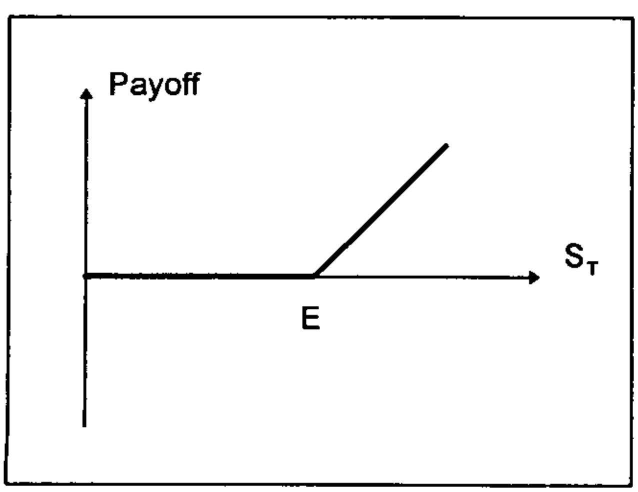


FIGURA NO. 6

PAYOFF EN LA VENTA DE UN CALL

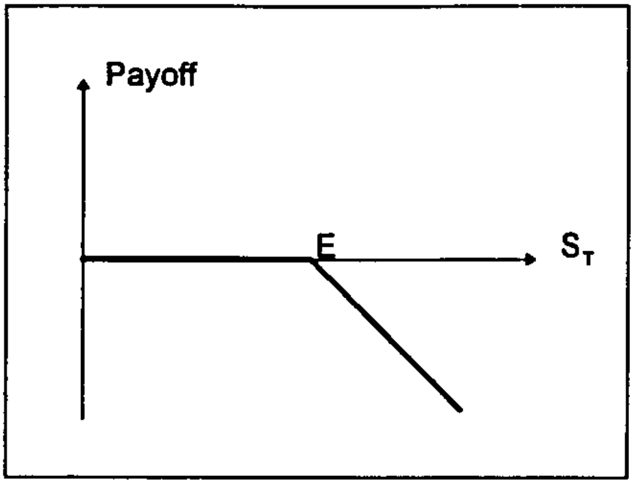


FIGURA NO. 7

PAYOFF EN LA COMPRA DE UN PUT

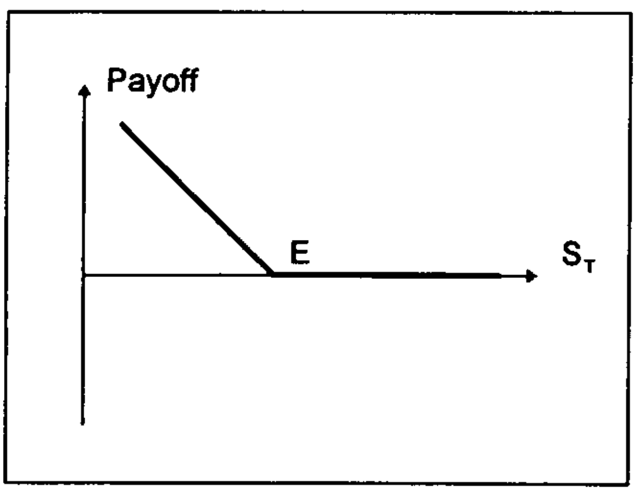
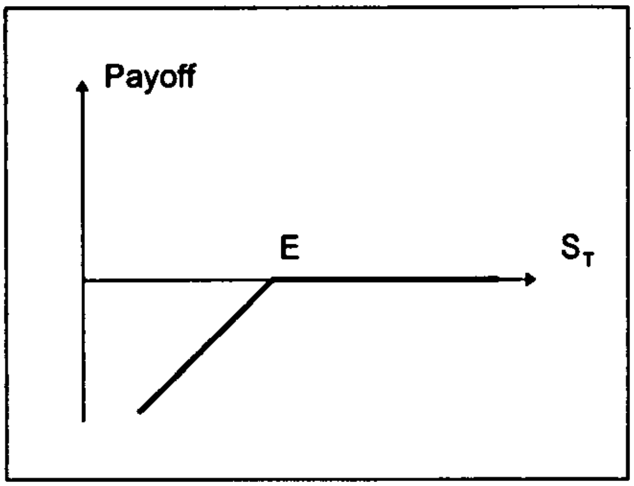


FIGURA NO. 8

PAYOFF EN LA VENTA DE UN PUT



3.5 Análisis de las opciones al vencimiento.

Para hacer más sencillo el análisis de éste tipo de instrumentos de inversión, observemos su valor al vencimiento.

El valor de una opción Call al vencimiento (en expiración) está dado por:

C = MAX [0, S-E]

donde,

C: Valor de la opción call

S: Precio del bien subyacente

E: Precio de ejercicio

El valor de la opción call valdrá cero en el intervalo [0,n] donde n = E. Esto quiere decir que la opción valdrá cero hasta el momento en que el precio del bien subyacente coincida con el precio de ejercicio. Es importante señalar que esto incluye el caso donde S-E<0 ya que al calcular el máximo se obtendrá el valor C=0 (el call no tiene valor), lo cual significa lo siguiente: El tenedor de la opción call no necesita ejercerla porque la diferencia S-E implicaría obtener pérdidas.

Para poder obtener ganancias en una posición larga de un call es necesario que el precio del bien subyacente pueda cubrir tanto el precio de ejercicio como el precio por la adquisición de la opción o prima. Por lo que el resultado de comprar opciones call es el siguiente:

Resultado de Compra Call = MAX [0,S-E] - Prima

En la expiración el tenedor de un put tiene dos alternativas: ejercerla o permitir que la opción expire sin valor alguno. El valor de una opción put al vencimiento es igual a cero cuando el precio de ejercicio menos el precio del bien subyacente nos represente una pérdida. Si el precio del bien subyacente es mayor o igual que el precio de ejercicio al vencimiento la opción put carece de valor.

El valor de una opción Put al vencimiento (en expiración) está dado por:

P = MAX [0, E-S]

donde,

P: Valor de la opción Put
S: Precio del bien subyacente
E: Precio de ejercicio

Al igual que en las opciones de compra, debemos considerar el precio de la opción (prima), por lo que el resultado de comprar opciones put es el siguiente:

Resultado de Compra Put = MAX [0, E-S] - Prima

En general si estamos largos en una opción put tenemos:

Ganancias si $S \in [0, E - \text{Prima})$

Perdidas si $S \in [E - \text{Prima}, \infty)$

Sin ganancias ni pérdidas si S = E - Prima (Punto de equilibrio)

En general si estamos cortos en una opción put tenemos:

Ganancias si $S \in [E - \text{Prima}, \infty)$

Perdidas si $S \in [0, E - \text{Prima})$

Sin ganancias ni pérdidas si S = E - Prima (Punto de equilibrio)

3.6 Variables básicas que determinan el precio de una opción.

Como sabemos las opciones se compran y se venden por un precio o prima la cual se determina mediante la interacción de la oferta y la demanda. Estas primas dependen de ciertas variables básicas.

3.6.1 Plazo al vencimiento

Las opciones son activos que se deprecian con el tiempo. La razón es que mientras más largo sea el plazo al vencimiento mayores serán las oportunidades de que la opción se ejerza tanto en opciones americanas como en europeas.

3.6.2 Precio del bien

Con respecto a la relación entre el precio de ejercicio de la opción y el precio de mercado del bien subyacente, estas se pueden clasificar en:

- Opciones "In the money" (en precio o dentro del dinero "ITM")
- Opciones "Out of the money" (fuera de precio o fuera del dinero"OTM")
- Opciones "At the money" (a precio o en el dinero "ATM")

Para un call tenemos lo siguiente:

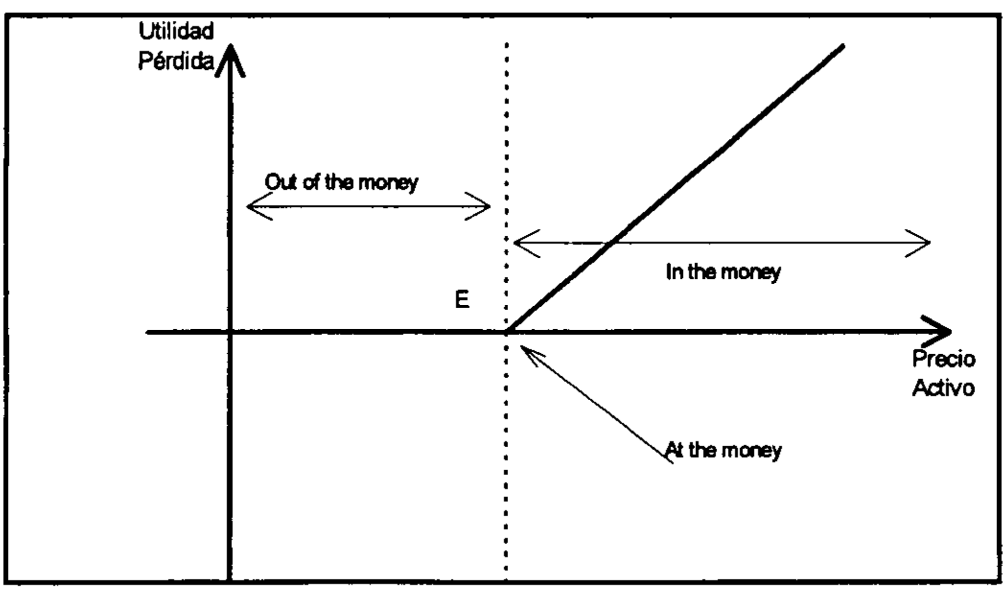
Si S < E la opción no puede ser ejercida y se dice que queda OTM

Si S > E la opción puede ejercerse y obtenemos una utilidad que será mayor en la medida de que el precio del bien subyacente sea mayor en relación con el precio de ejercicio. En este caso estamos ITM.

Si S = E la opción puede ejercerse y no existe beneficio ni pérdida y se dice que la opción está ATM

FIGURA NO. 9

POSICIONES DE UN CALL CON RESPECTO AL PRECIO DE EJERCICIO



Para un put tenemos lo siguiente:

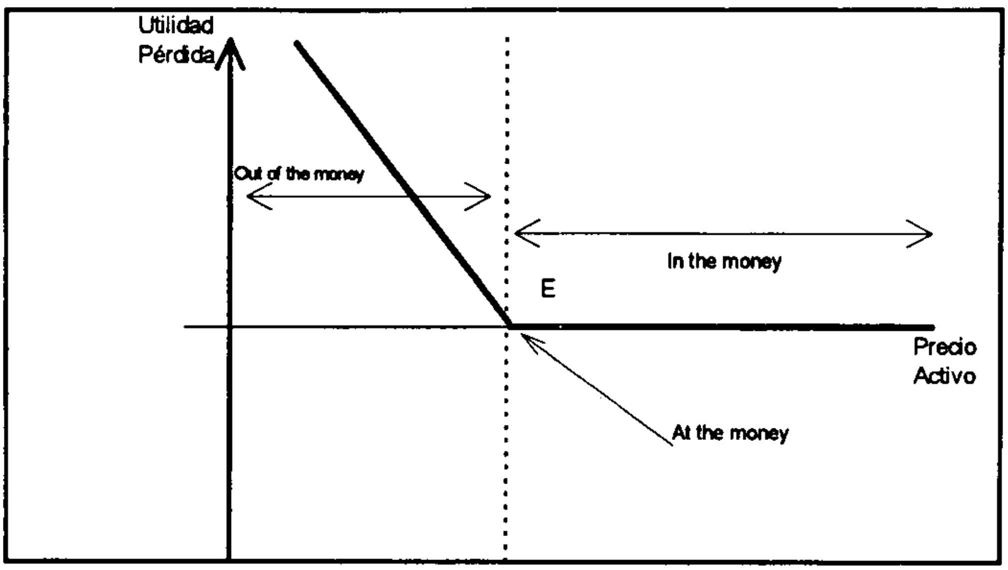
Si S < E la opción puede ser ejercida y se encuentra ITM

Si S > E la opción no puede ejercerse y decimos que en este caso se está OTM.

Si S = E la opción puede ejercerse o no, y no existe beneficio ni pérdida y se dice que la opción está ATM

FIGURA NO. 10

POSICIONES DE UN PUT CON RESPECTO AL PRECIO DE EJERCICIO



3.6.3 Volatilidad

La volatilidad del bien subyacente juega un papel fundamental en el cálculo del valor de una opción.

La volatilidad de un precio representa el potencial del mismo para sufrir cambios en un periodo de tiempo. Mientras mayor sea la probabilidad de observar cambios en el precio de una acción,esta es más volátil.

La volatilidad, que también se explica como la manifestación de la información en el mercado, lleva a cambios en las expectativas del mercado, lo que a su vez genera cambios inesperados en los precios. La volatilidad es una variable estocástica y por lo tanto no es posible predecir su comportamiento.

La volatilidad es una medida de dispersión de los cambios en los precios. En el mercado de opciones se utiliza la desviación estándar de los rendimientos del bien subyacente para medir la volatilidad. Mientras más grande sea la desviación estándar, mas volátil será el precio del bien, al igual que las probabilidades de que se ejerza la opción y, por lo tanto, la prima será mayor.

Si se espera que la volatilidad se reduzca, se espera que las primas de las opciones caigan, por lo que se venden las opciones call y put. Si por el contrario se espera que la volatilidad aumente, es el momento de comprar opciones put y call.

La volatilidad juega un papel muy importante en el cálculo del precio de una opción, ya que es el único de éstos parámetros que no se puede calcular expresamente en el mercado. Generalmente este parámetro se aproxima por una medida de dispersión de los precios futuros de una acción. De igual forma, como ya mencionamos, la volatilidad se puede explicar como la manifestación de información en el mercado, la cual provoca cambios en las expectativas del mercado y por lo tanto cambios en los precios. Entre mayor sea la volatilidad, mayor será el precio de la opción al igual que podremos obtener rendimientos (negativos o positivos) significativos.

Encontrando un método que estime la volatilidad en forma eficiente, permitirá a los operadores en el mercado aprovechar las oportunidades del mismo.

Estimada la volatilidad, existen un gran número de estrategias que se pueden llevar a cabo que permitirán al inversionista reducir su riesgo en forma importante y con condiciones óptimas se logrará obtener rendimientos atractivos sin importar si se está invirtiendo en una acción con una volatilidad alta o baja.

Es importante mencionar como se calcula la volatilidad o desviación estándar, por lo que a continuación tenemos lo siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(P\,i - P\,)^2}{n}}$$

donde,

P: Rendimiento promedio de todas las P_i

P_i: Rendimiento promedio diario del bien subyacente.

i = indice asociado al dia.

n = numero de dias observados

σ = Volatilidad

3.6.4 Valor intrínseco y valor tiempo

Valor tiempo: En el periodo antes de la fecha de vencimiento, existe otro elemento en el precio de una opción además de su valor intrínseco (.relación del precio del bien subyacente frente al precio de ejercicio)

A este elemento lo denominamos valor por tiempo, valor temporal o extrínseco de una opción. Podemos analizar este valor de la siguiente manera:

El comprador de una opción estará dispuesto a pagar un importe superior al valor intrínseco si se espera que hasta el vencimiento los precios en el mercado pueden aumentar de tal forma que obtenga un beneficio superior a dicho valor. El vendedor de una opción exigirá una prima superior al valor intrínseco, para cubrirse del riesgo de una alteración en los precios que le suponga una pérdida superior. A esta diferencia entre la prima y el valor intrínseco se le denomina valor por tiempo, temporal o extrínseco.

Sin importar si la opción se encuentra at the money o out of the money, una opción con mayor plazo de vencimiento tiene un precio mayor que una con menor plazo. El valor tiempo se calcula como:

$$VT = PT - VI$$

donde,

VT: Valor tiempo
PT: Precio de la opción
VI: Valor intrínseco (S-E)

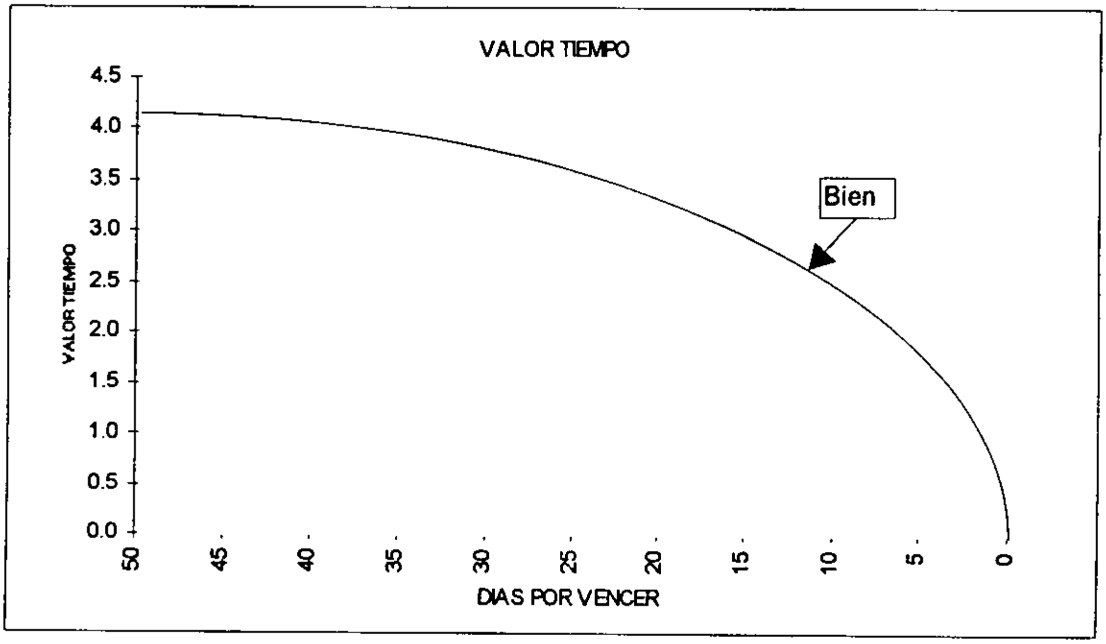
Generalmente un call in the money tiene el mayor valor tiempo, ya que cuando una opción se encuentra out of the money el valor tiempo tiende a disminuir, esto lo podemos entender puesto que el incremento en el plazo de vigencia de una opción permite al tenedor de la misma el tener por más tiempo la protección que brinda este instrumento.

La opción con mayor plazo de vencimiento tendrá el mayor precio debido a que durante este periodo de tiempo puede ocurrir cualquier cosa con el precio del bien subyacente, aun cuando la volatilidad del mismo sea baja.

Una opción in the money y cerca de su fecha de vencimiento tendrá una probabilidad cada vez más alta de ser ejercida.

Una situación muy importante que debemos considerar es la siguiente: Si el tenedor de una opción está seguro de ejercer su derecho con respecto a la misma, se esperará hasta el último momento para hacerlo, esto es porque contará con más tiempo para invertir su dinero y obtener una mayor cantidad de intereses. Por lo que un componente del valor tiempo son los intereses que obtendrá el tenedor de la opción al invertir el precio de ejercicio hasta la fecha de vencimiento, por lo que éste componente del valor tiempo será mayor cuanto mayor sea la tasa de interés y el plazo al vencimiento.

FIGURA NO. 11



El segundo elemento del valor tiempo en el caso de un call es el valor de no tener que comprar el bien subyacente al precio de ejercicio si el precio de mercado del bien al vencimiento es menor. Este valor dependerá de que tan at the money se encuentre la opción, del tiempo antes del vencimiento y de la volatilidad del bien subyacente.

Esto es:

VC = VI + (X - VP(X)) + Valor de no tener que ejercer
donde,

VC: Valor del call
VI: Valor intrínseco
VP(X): Valor presente del precio de ejercicio
X: Precio de ejercicio hoy

En el caso de un put el valor tiempo está formado por componentes de signos contrarios. La diferencia entre recibir el precio de ejercicio hoy y recibirlo al vencimiento será (VP(X) - X).

VP = VI + (VP(X) - X) + Valor de no tener que ejercer

Debemos considerar que una mayor tasa de interés libre de riesgo implica que el precio de la opción se incremente si se trata de un Call o que disminuya en el caso de un Put. En el caso de un call una tasa de interés alta implica un menor valor presente del precio de ejercicio lo que traerá como consecuencia un precio de ejercicio menor y por lo tanto una prima mayor. Con el put ocurre lo contrario, el tenedor pierde intereses mientras espera la fecha de vencimiento para recibir el precio de ejercicio por lo que a mayor tasa implica menor prima para los puts.

3.7 Determinantes del precio de una opción.

El precio de una opción se ve afectado por diversos factores como son el precio del valor subyacente, el tiempo al vencimiento, la volatilidad y la tasa de interés.

La influencia de éstos parámetros sobre el precio de las opciones los podemos cuantificar con los siguientes parámetros:

3.7.1 Delta.

Es una medida de sensibilidad de la opción a cambios en el precio de la acción o bien subyacente; es un parámetro esencial para evaluar el riesgo y cubrir la posición generada por la venta de una opción. En general podemos decir que la delta mide la probabilidad de ejercer una opción.

Si una opción está fuera de precio (out of the money), la probabilidad de ejercer la opción es prácticamente cero, por lo que la delta se encuentra también cerca de cero. De igual manera, la delta de una opción de compra a precio (at the money) presentará un cambio importante cuando aumente o disminuya el precio de la acción. Cuando un call se encuentra próxima a estar en precio la delta se acerca cada vez más a uno, lo cual significa que el precio de la opción se mueve peso a peso igual que la acción.

Una opción de venta o put tiene delta negativa ya que al aumentar el precio del bien subyacente el precio del put disminuye. La delta de las opciones de venta en precio tienden a -1, mientras que la de un call tiende a 1.

Es importante considerar que el precio del valor subyacente, la volatilidad y el tiempo también tienen influencia sobre la delta.

La delta de una opción de compra es la primera derivada del precio de una opción de compra con respecto al precio del bien subyacente. La fórmula para calcular la delta de una opción es la siguiente:

Delta Call = N(d1)

Delta Put = N(d1) - 1

donde N (X) es la función de distribución normal.

y

$$d1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{V^2}{2}\right)t \right]}{V\sqrt{t}}$$

donde,

S = Precio de mercado.

E = Precio de ejercicio.

V = Volatilidad.

t = tiempo al vencimiento.

r = tasa de interés.

$$d2 = d1 - V\sqrt{t}$$

3.7.2 Gamma

La gamma es un parámetro que se utiliza para determinar la tasa a la que la delta cambia cuando aumenta o disminuye el precio del bien subyacente. Mide la sensibilidad de la delta a cambios en el precio de la acción.

Una gamma alta indica que la delta cambiará rápidamente al cambiar el precio del valor subyacente. Por lo general la delta de una opción es más sensible a cambios en el precio del valor subyacente cuando la opción está a precio, ya que cambios en el precio del bien subyacente serán la diferencia para hacer que una opción se encuentre en precio o fuera de precio.

La gamma de las opciones aumenta cuando estas se acercan al vencimiento. Las opciones que se encuentran out of the money tienen una gamma pequeña, lo cual hace que un cambio en el precio del valor subyacente tenga poco efecto sobre la delta.

La delta y la gamma también dependen de la volatilidad del valor subyacente. Mientras menos volátil sea el bien subyacente, las opciones at the money tendrán mayores gammas y deltas. Esto es principalmente porque el valor del bien subyacente cambia poco, por lo que un aumento en el precio provoca un aumento importante en la delta, y por lo tanto en la gamma.

Variaciones en la delta requieren que la cobertura se ajuste para pemanecer neutral al riesgo, el tamaño del ajuste dependerá de cuanto cambie la delta. Es importante hacer mención que tanto los calls como los puts tienen gammas positivas ya que la delta de ambos aumenta en términos absolutos si el precio del bien subyacente aumenta.

La fórmula para calcular la gamma de una opción es la segunda derivada del precio de la opción con respecto al precio del valor subyacente y es la siguiente.

$$\gamma = \frac{e^{-5d_1^2}}{(\sqrt{2\pi} * V * \sqrt{t})}$$

donde,

V = Volatilidad.

t = tiempo al vencimiento.

$\pi = \dfrac{[R(h) - D]}{U - D}$ Esta fórmula la especificaremos más adelante, pero por el momento podemos mencionar que las probabilidades π y $(1-\pi)$ son las probabilidades neutrales al riesgo o martingalas.

3.7.3 Theta

La theta se refiere a la tasa a la que disminuye el valor tiempo de una opción.

La theta es la derivada del valor de la opción con respecto al tiempo, por lo tanto el valor de la derivada con respecto a T (periodo al vencimiento) es negativa, ya que el valor de la opción disminuye conforme va pasando el tiempo.

Las opciones con un plazo de vencimiento muy largo responden poco al paso del tiempo, por lo tanto la theta será cercana a 0.
Las opciones cercanas al vencimiento tienen las thetas más altas, ya que el tiempo tiene un efecto muy importante sobre su valor.

La theta de una opción muy volátil será mayor que una de baja volatilidad ya que una opción sobre un valor muy volátil es mas cara y por lo tanto perderá mas valor tiempo en términos diarios, lo que implica una mayor theta.

La fórmula para calcular la theta es la siguiente:

$$\theta(\text{Call}) = \frac{\left[\dfrac{(-S * e^{-rt} * .5 * d'_2 * V)}{\sqrt{t}} + r + \text{prima del call}\right]}{365}$$

donde,

$$d'_2 = \frac{e^{-5d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

S = Precio de mercado.

V = Volatilidad.

r = tasa de interés.

t = tiempo al vencimiento.

$$\theta(\text{Put}) = \frac{\theta(\text{Call}) * 365 + re^{-rt} * (S - \pi)}{365}$$

donde,

$$\pi = \frac{[R(h) - D]}{U - D}$$

3.7.4 Vega

Se define como el cambio en el precio de una opción dado un cambio en la volatilidad. Este parámetro cuantifica cuanto aumenta o disminuye el precio de una opción cuando se dan movimientos en la volatilidad, considerando que todos los demás factores permanecen constantes.

La vega es positiva tanto para calls como para puts y se expresa en términos monetarios. Las acciones o bienes más volátiles tienen las opciones más caras, por lo tanto si aumenta la volatilidad el precio de una opción se incrementará.

La vega está relacionada también con el valor tiempo y con el precio de ejercicio. Entre mayor sea el número de días por vencer, mayor será la vega, ya que aumenta la probabilidad de que la opción venza en precio y de que haya movimientos en los valores de la acción.

La vega se calcula de la siguiente manera:

$$K = \frac{e^{-rt} * S * \sqrt{t} * d'_2}{100}$$

donde,

$$d'_2 = \frac{e^{-5d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

S = Precio de mercado.

t = tiempo al vencimiento.

r = tasa de interés.

3.7.5 Rho

Es un parámetro que mide el cambio del valor de la opción cuando cambia la tasa de interés. El valor tiempo de una opción viene en parte de los intereses que se pueden ganar al invertir la prima de la fecha inicial a la fecha de vencimiento.

Entre mayor sea la tasa de interés, mayor será el valor de los intereses y el valor tiempo de una opción de compra. Entonces podemos decir que rho es positiva en las opciones de compra y negativa en las de venta debido a que en la opción de venta se están perdiendo los intereses del precio de ejercicio que recibirá al vencimiento.

Es importante conocer el efecto de las variables determinantes del precio de una opción para poder aprovechar ciertos momentos en el mercado. Cuando se conocen todas las variables que acabamos de explicar brevemente, el tenedor de la opción podrá anticipar como se verá afectada su posición al cambiar alguna de estas variables y con ello reducir el riesgo de su portafolio.

CAPÍTULO 4.
EL MODELO BINOMIAL

4.1 Introducción.

El propósito de este capítulo es estudiar la evolución del precio de las acciones. Para dicho análisis, el modelo debe de ser lo suficientemente simple para facilitar su análisis, pero suficientemente complejo para que nos permita obtener una aproximación razonable de la evolución de los movimientos en los precios del bien ó activo.

El modelo seleccionado es el "Modelo de Distribución Lognormal". Es importante mencionar que éste modelo sirve de base para el modelo de Black-Scholes.

El modelo binomial es una herramienta muy útil para la valuación de las opciones.

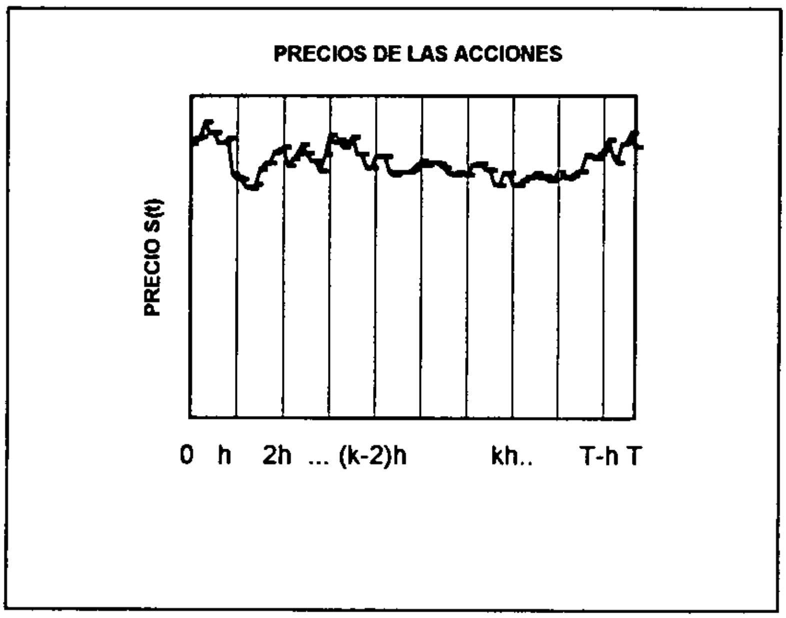
Si el modelo binomial es cuidadosamente construído, es una muy buena aproximación a la distribución lognormal. En la valuación de opciones americanas, la aproximación binomial a la distribución lognormal es el modelo utilizado por muchas instituciones financieras.

El bien subyacente que consideraremos para el desarrollo de este modelo serán acciones (stock), aunque éste modelo lo podemos utilizar sobre cualquier bien subyacente.

4.2 La distribución lognormal.

La distribución lognormal es un modelo estándar utilizado en la economía y finanzas. Dadas algunas suposiciones sobre el comportamiento aleatorio de los rendimientos de las acciones, la distribución lognormal está implícita. Estas suposiciones caracterizan a la distribución lognormal de manera muy intuitiva.

Para comenzar el análisis consideremos los movimientos del precio de una acción como lo muestra el siguiente gráfico.
GRÁFICA NO. 1



La evolución del precio de una acción usualmente es muy dentada (con picos). Como cualquier analista de portafolios sabe, el precio futuro de una acción es incierto y muy difícil de predecir.

Ahora dividiremos el periodo total [0, T] en n subintervalos de longitud h. Si entendemos el proceso de precios en c/subintervalo, entonces podremos entender el proceso en todo el intervalo.

Sea S(t) el precio de la acción en el tiempo t

Entonces procederemos a analizar el rendimiento de la acción en c/subintervalo. Si consideramos el precio de la acción S(T) en el tiempo T, entonces podemos escribir lo siguiente:

$$S(T) = S(T-1)\left[\frac{S(T)}{S(T-1)}\right]$$

donde, (1.1)

$\left[\frac{S(T)}{S(T-1)}\right]$ es el precio relativo en el tiempo T

Definamos a z(n) como el rendimiento continuamente compuesto (RCC) sobre el último subintervalo. Por definición de z(n) en la fecha T = nh

$$S(n) = S[(n-1)]\exp[z(n)] \tag{1.2}$$

Por convención algebraica consideraremos rendimientos continuamente compuestos los cuales escribiremos como RCC. Si repetimos el análisis, Para T - h $\equiv$ (n - 1)h tenemos:

$$S(n-1) = S[(n-2)] \exp[z(n-1)]$$

Substituyendo en (1.2)

$$S(n) = S(n-2) \exp[z(n-1) + z(n)] \tag{1.3}$$

y repitiendo este procedimiento para (n - 2), (n - 3), ... tenemos:

$$S(n) = S(0) \exp[z(1) + z(2) + \ldots + z(n)]$$

lo que establece que S(n) depende del precio de la acción al día de hoy, S(0), y de los RCC sobre los subintervalos de 0 a T

Sea $Z(T) = \ln\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]$ que representa los RCC sobre el periodo $[0, T]$

y utilizando la expresion (1.3) tenemos:

$$Z(T) = \sum_{j=1}^{n} z(j) \tag{1.4}$$

Los RCC de la acción sobre el intervalo [0,T] son la suma de los RCC sobre los n subintervalos.

Esta relación lineal es la razón para utilizar RCC en lugar de utilizar rendimientos en forma discreta.

Hagamos algunos supuestos sobre la distribución de probabilidad de los RCC, z(k) para así generar un modelo que nos de la evolución de los precios de las acciones.

Basados en estudios empíricos, los rendimientos de las acciones son independientes entre si, en cada subintervalo, por lo que los rendimientos de las acciones parecen tener la misma distribución.

Para hacer que nuestro modelo sea consistente con estas observaciones incluyamos dos supuestos.

Sup. 1 Los rendimientos {z(j)} están independientemente distribuídos (A1)

Sup. 2 Los rendimientos {z(j)} están idénticamente distribuídos (A2)

El Sup. A1 implica que el rendimiento en el subintervalo k, z(k) no se utiliza para predecir el rendimiento z(k+1) en el siguiente subintervalo y que esto es verdadero para los siguientes subintervalos.

El Sup. A2 implica que el rendimiento z(t) no depende del precio de la acción S(t-1).

Estos dos supuestos implican que el proceso de precios en la acción sigue una caminata aleatoria, que es un proceso en el cual cambios en el proceso de precios de las acciones son independientes y están idénticamente distribuídas. Esto es lo que en finanzas llamamos un "mercado eficiente".

Dados estos dos supuestos ahora analicemos como los rendimientos cambian cuando el intervalo se reduce. Debemos asegurarnos que los supuestos A1 y A2 permanezcan intactos conforme reduzcamos el intervalo. Así que incluiremos 2 supuestos mas.

El Sup. 3 (A3) señala que el RCC esperado es:

$$E[z(t)] = \mu h$$

donde, (1.5)

El RCC esperado por unidad de tiempo es (μ)
y es independiente de la longitud del intervalo

El Sup. 4 (A4) señala que la varianza del RCC se escribe como:

$$\mathrm{var}[z(t)] = \sigma^2 h$$

(1.6)

donde,

σ^2 es la varianza del RCC por unidad de tiempo y que es independiente de la longitud del intervalo.

El supuesto A3 implica que el valor esperado de los RCC esperados es equivalente a una constante que es μ veces la longitud del subintervalo h.

El supuesto A4 implica que la varianza de los RCC esperados equivale a una constante que es σ veces la longitud del subintervalo h.

Tanto la μ como la σ^2 son proporcionales a la longitud del intervalo, lo que implica que si la longitud del intervalo decrece, estos dos momentos $\left(\mu \text{ y } \sigma^2\right)$ decrecen proporcionalmente.

Dados estos 4 supuestos, los RCC esperados sobre el intervalo [0,T], Z(T) son:

$$E[Z(T)] = \sum_{j=1}^{n} E[z(j)]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu h \qquad \text{Utilizando A2 y A3}$$

$$= \mu nh = \mu T$$

La varianza de los RCC sobre el intervalo $[0, T]$ es:

$$\text{var}[Z(T)] = \sum_{j=1}^{n} \text{var}[z(j)] \qquad \text{usando A1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sigma^2 h \qquad \text{usando A2 y A4}$$

$$= \sigma^2 nh = \sigma^2 T$$

En resumen:

Dado un intervalo [0,T] lo dividimos en n subintervalos de longitud h y analizamos la distribución de los RCC sobre c/subintervalo.

Luego supusimos A1 hasta A4 basándonos en consideraciones empíricas. Estos supuestos implican que para intervalos infinitamente pequeños los rendimientos están normalmente distribuídos.

Como la suma de n variables aleatorias independientes tienen una distribución normal. Utilizando la ec. (1.4) podemos ver que:

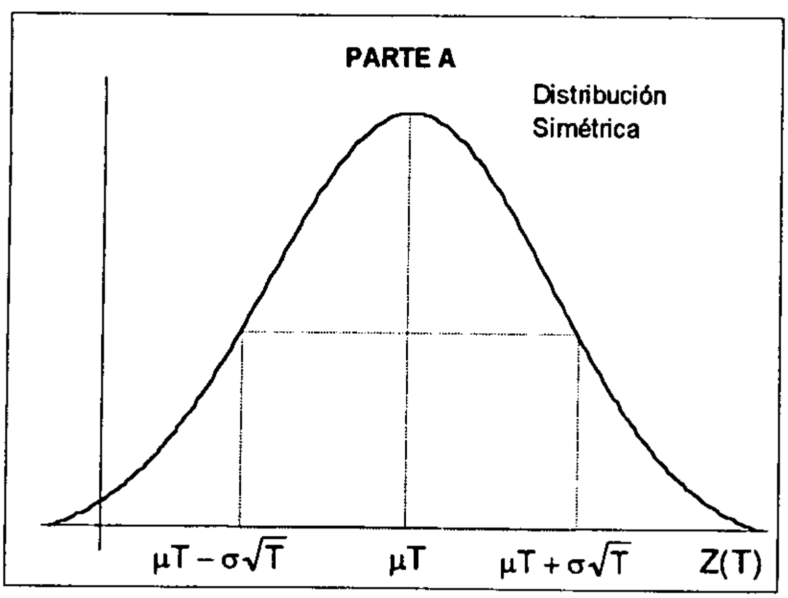
$$\ln\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]$$

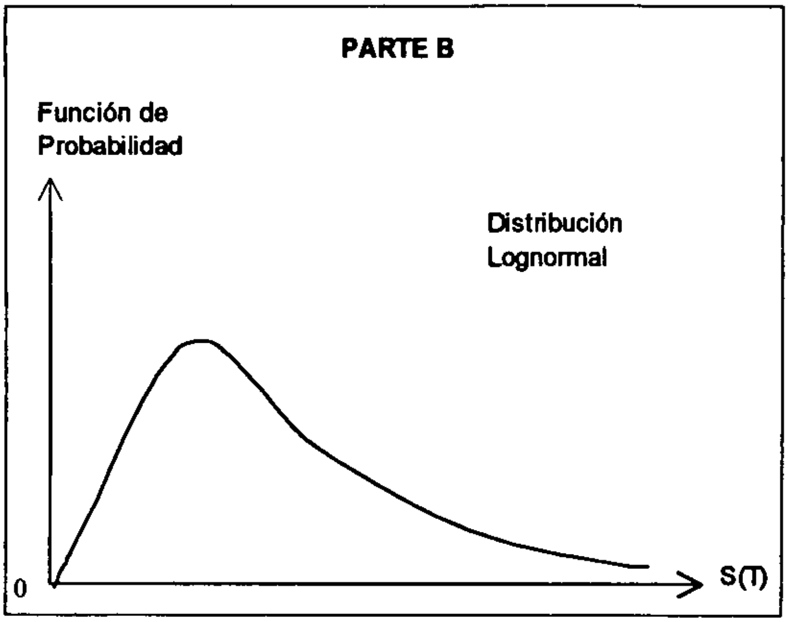
está normalmente distribuído con media = μT y varianza = $\sigma^2 T$

Esto es equivalente a afirmar que el precio de una opción S(T) está lognormalmente distribuído.

Ejemplo: Supongamos que el RCC esperado es del 15% anual y que la volatilidad de los rendimientos es de 25% anual. La distribución de los RCC sobre un periodo de 2 años está normalmente distribuído con media de 15 X 2 = 30% y volatilidad de 25 X $\sqrt{2}$ = 35.36%

GRÁFICA NO. 2
DISTRIBUCIONES DE LOS PRECIOS





En la parte A de la figura anexa (GRÁFICA NO. 2) se muestra la distribución de los RCC. Hay que observar que los rendimientos pueden ser negativos dado que la distribución normal está definida para valores positivos o negativos.

La parte B muestra la distribución del precio de la acción en la fecha T. La distribución lognormal solo está definida para valores positivos. Si el precio de la acción en la fecha T tiene una distribución lognormal, el precio esperado de la acción en la fecha T se puede ver como:

$$E[S(T) / S(0)] = S(0)\ \exp\left[\mu T + \frac{\sigma^2 T}{2}\right] \qquad (A1) \qquad (1.7)$$

Demostración de la ecuación (1.7):

De la ec. (1.4) tenemos: $S(T) = S(0) \exp [Z(T)]$

donde,

$Z(T)$ está normalmente distribuída con media μT y varianza $\sigma^2 T$. La función de densidad de probabilidad para $Z(T)$ es:

$$\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \quad \text{donde,}$$

z es un valor real de Z(T), $\mu_1 = \mu T$ y $\sigma_1^2 = \sigma^2 T$.

El valor esperado de S(T) condicionado a S(0) es:

$$E[S(T)/S(0)] = S(0)\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}\exp(z)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]dz \qquad \text{(A2)}$$

Comple tan do cuadrados obtenemos

$$z-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 = \mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{z-(\mu_1+\sigma_1^2)}{\sigma_1}\right]^2$$

Entonces

$$E[S(T)/S(0)] = S(0)\exp\left(\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)-\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{z-(\mu_1+\sigma_1^2)}{\sigma_1}\right]^2\right\}dz \qquad \text{(A3)}$$

Sea $u = \dfrac{[z-(\mu_1+\sigma_1^2)]}{\sigma_1}$ entonces tenemos

$$E[S(T)/S(0)] = S(0)\exp\left(\mu_1+\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du \qquad \text{(A4)}$$

Ahora el último término del lado derecho es el área bajo la función de densidad de probabilidad normal y equivale a la unidad:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du = 1 \qquad \text{(A5)}$$

La suposición de que los precios están lognormalmente distribuídos nos permite obtener expresiones simples para diferentes tipos de títulos derivados. Por ejemplo esta suposición se utiliza en el modelo Black-Scholes que es el modelo estándar para la valuación de opciones.

4.3 Idea básica del modelo de valuación binomial.

El modelo binomial es útil como una herramienta para entender la valuación de opciones y de la teoría de cobertura. Subsecuentemente relacionaremos el modelo binomial con la distribución lognormal.

Consideremos un ejemplo. Sea el precio de una acción igual a \$100. Estamos interesados en el precio de la acción en un año. Por simplicidad supondremos que la acción no paga dividendos durante este periodo y que al final del año el precio de la acción podrá tomar únicamente dos valores posibles: ya sea \$140.70 con probabilidad de 0.5 ó \$83.30 con probabilidad de 0.5.

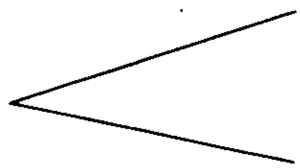
El rendimiento esperado de la acción es de 1.12 (donde el rendimiento se define como el precio relativo (1 + porcentaje de rendimiento).

4.3.1 Valuación binomial simple

GRÁFICA NO. 3 VALUACIÓN BINOMIAL

140.70 con probabilidad 0.5

100



83.30 con probabilidad 0.5

El rendimiento está definido como el precio relativo.

Si la acción vale 140.70 el rendimiento es 1.407

Si la acción vale 83.3 el rendimiento es 0.833

El rendimiento esperado es : (1.407+0.833)*(1/2) = 1.12

La varianza del rendimiento es:

$$= [(1.407 - 1.12)^2 + (0.833 - 1.12)^2](1/2)$$
$$= (0.0824 + 0.0824) * (1/2)$$
$$= 0.0824$$

Podemos representar el precio de una acción al final del año, S_1 de la siguiente manera:

$S_1 = U_0 * S_0$ si el precio de la acción se mueve para arriba (estado 1)

$S_1 = D_0 * S_0$ si el precio de la acción se mueve para abajo (estado 2)

donde,

S_0 es el precio inicial de la acción, \$100

U_0 es el factor de aumento (up factor) con U_0 = 1.407

D_0 es el factor de disminución (down factor) con D_0 = 0.833

Al supuesto de que el precio de la acción solo puede tomar dos valores al final de cada intervalo lo llamamos supuesto binomial.

Pudimos haber supuesto que al final de c/intervalo el precio de la acción pudo haber tomado 1 de 3 o más posibles valores. La restricción de tomar el modelo binomial con dos posibles valores tiene 2 principales razones de ser:

La primera es por simplificar la situación y la segunda es que conforme transcurren los intervalos los movimientos en los precios disminuyen, por lo que ésta suposición no es tan restrinctiva como parece.

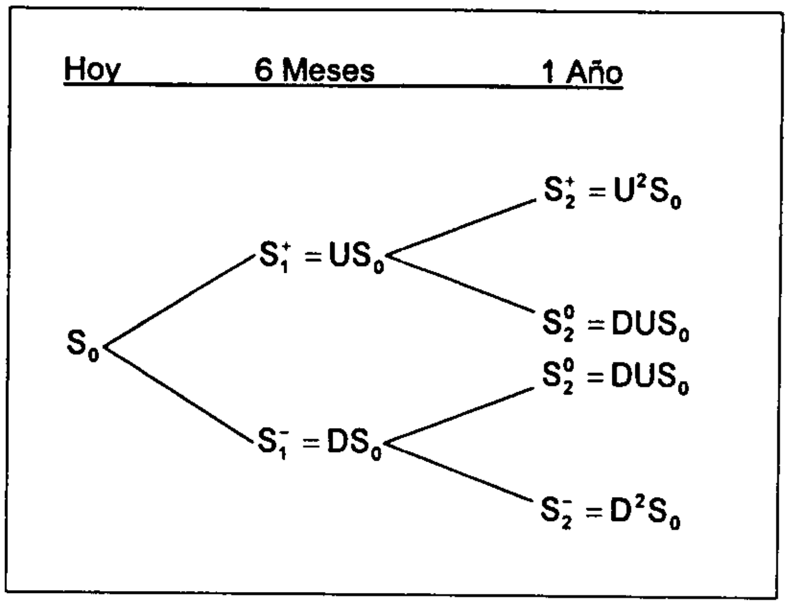
Por ejemplo: Dividamos el año en dos subintervalos de 6 meses cada uno. Al final de los 6 meses se volverá a asumir que el precio de la opción podrá tener dos posibles valores:

$S_{t+1} = U * S_t$ si el precio de la accion se mueve hacia arriba (estado 1)
$S_{t+1} = D * St$ si el precio de la accion se mueve hacia abajo (estado 2)
donde,

S_{t+1} es el precio de la acción en la fecha t+1; S_t es el precio de la acción en la fecha t, y U y D son constantes (U>D). Ahora existen 3 posibles precios al final del año (U^2S_0, UDS_0, D^2S_0). A la figura que nos muestra estas opciones la llamaremos una rejilla de precios de acciones.

4.3.2 Valuación binomial por multiperiodos

GRÁFICA NO. 4 MULTIPERIODOS



Para formalizar la descripción de una rejilla, dividamos el intervalo [0,T] en n periodos de longitud h, donde T=nh.

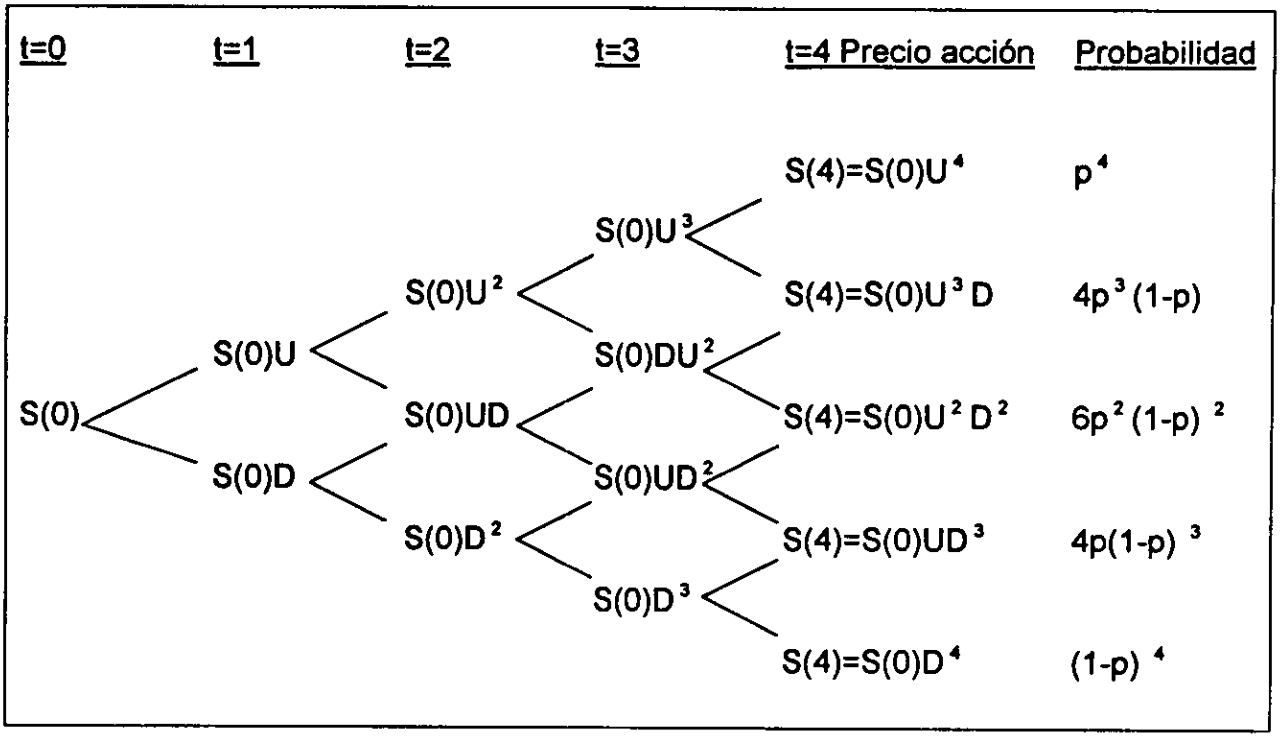
Sea S(t) el precio de la acción en el tiempo t, con $t \in \{0, h, 2h, \ldots. nh\}$. Recordemos que S(0) denota el precio de la acción hoy y que los precios futuros son inciertos.

En alguna fecha intermedia t, el precio de la acción en el el siguiente periodo t+1 tomará los siguientes valores:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= S(t) * U; \text{ con probabilidad } p \\ S(t+1) &= S(t) * D; \text{ con probabilidad } (1-p) \end{aligned} \tag{1.8}$$

GRÁFICA NO. 5

VALUACIÓN DE UN MULTIPERIODO BINOMIAL



En la figura anexa (Gráfica No. 5) una rejilla de 4 intervalos es la que consideraremos para el análisis. Al final del 4 intervalo el precio de la acción S(4) tendrá uno de cinco posibles valores. Las probabilidades están determinadas considerando el número de transiciones (para arriba o para abajo) a lo largo de los caminos factibles.

En la fecha T, después de n intervalos, existen (n+1) posibles valores para el precio de la acción S(T). (Tabla 1.1)

TABLA 1.1

PRECIOS DE LAS ACCIONES EN LA FECHA T CON n INTERVALOS

S(T)	Probability
$S(0)U^n$	p^n
$S(0)U^{(n-1)}D$	$\binom{n}{1}p^{n-1}(1-p)$
$S(0)U^{(n-2)}D^2$	$\binom{n}{2}p^{n-2}(1-p)^2$
$S(0)UD^{n-1}$	$\binom{n}{n-1}p(1-p)^{n-1}$
$S(0)U^{(n-2)}D^2$	$(1-p)^n$

donde el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ se define por:

$$\binom{n}{k}=\frac{nx(n-1)x(n-2)x\ldots x2x1}{[kx(k-1)x\ldots x2x1][(n-k)x(n-k-1)x\ldots x2x1]}$$

Esto completa la descripción formal del modelo binomial. Para aplicar éste modelo, las especificaciones de los factores U y D son cruciales.

Diferentes valores de U y D generarán diferentes modelos para calcular el precio de una acción. Ahora especificaremos a U y a D con el fin de que la rejilla de precios de las acciones se aproxime a una distribución lognormal.

4.4 Aproximación binomial a la distribución lognormal

Mostraremos que podemos utilizar el modelo binomial para aproximarnos a una distribución lognormal. Esto lo logramos escogiendo U's y D's de una manera eficiente.

Recordemos que la representación binomial asume que al final de c/intervalo el rendimiento de la acción podrá tomar dos posibles valores.

Sea la representación binomial como sigue:

$$\ln\left[\frac{S(t+1)}{S(t)}\right] = z(t) = \begin{cases} \mu h + \sigma\sqrt{h} \\ \mu h - \sigma\sqrt{h} \end{cases} \text{ con probabilidad 0.5 c/u} \tag{1.9}$$

Con probabilidad de .5 el rendimiento de la acción puede subir a $\mu h + \sigma\sqrt{h}$ y con probabilidad de .5 el rendimiento de la acción puede bajar a $\mu h - \sigma\sqrt{h}$. Entonces el rendimiento esperado es:

$$E[z(t)] = \left(\mu h + \sigma\sqrt{h}\right)(1/2) + \left(\mu h - \sigma\sqrt{h}\right)(1/2)$$

$$\therefore E[z(t)] = \mu h$$

y la varianza es:

$$\operatorname{var}[z(t)] = \left(\sigma\sqrt{h}\right)^2(1/2) + \left(-\sigma\sqrt{h}\right)^2(1/2)$$

$$\therefore \operatorname{var}[z(t)] = \sigma^2 h$$

El rendimiento esperado es usualmente llamado flujo (tendencia). Esto porque es el valor al que el rendimiento de la acción tiende antes de ser afectado por $\sigma\sqrt{h}$ o por $-\sigma\sqrt{h}$.

La raiz cuadrada de σ^2 es usualmente llamada volatilidad (σ).

Ahora por construcción (1.9) satisface los supuestos A1 hasta A4. Primero z(t) es independiente y está identicamente distribuída dado que la probabilidad es (1/2), el flujo (tendencia) μ y la volatilidad σ no cambian con t. Esto justifica los supuestos A1 y A2. Los supuestos A3 y A4 parecen ser satisfechos por el rendimiento esperado y la varianza de la expresión (1.9). Ambas son proporcionales a la longitud del periodo h. Entonces para intervalos infinitesimales (cuando $h \to 0$), z(t) está normalmente distribuída. Esta observación implica que la representación binomial de la expresión (1.9) se aproxima al proceso de precios de una acción y que de igual forma sigue una distribución lognormal.

Utilizando la expresión (1.9) y considerando el precio de una acción en la fecha t+1:

$$S(t+1) = S(t) = \begin{Bmatrix} \exp\left(\mu h + \sigma\sqrt{h}\right) \\ \exp\left(\mu h - \sigma\sqrt{h}\right) \end{Bmatrix} \quad \text{con probabilidad 0.5 c/u} \qquad (1.10)$$

Dada esta expresión podemos identificar los factores U y D en términos de rendimientos esperados instantáneos por unidad de tiempo, μ, la volatilidad instantánea por unidad de tiempo σ, y la longitud del intervalo h.

$$U = \exp\left(\mu h + \sigma\sqrt{h}\right)$$

y

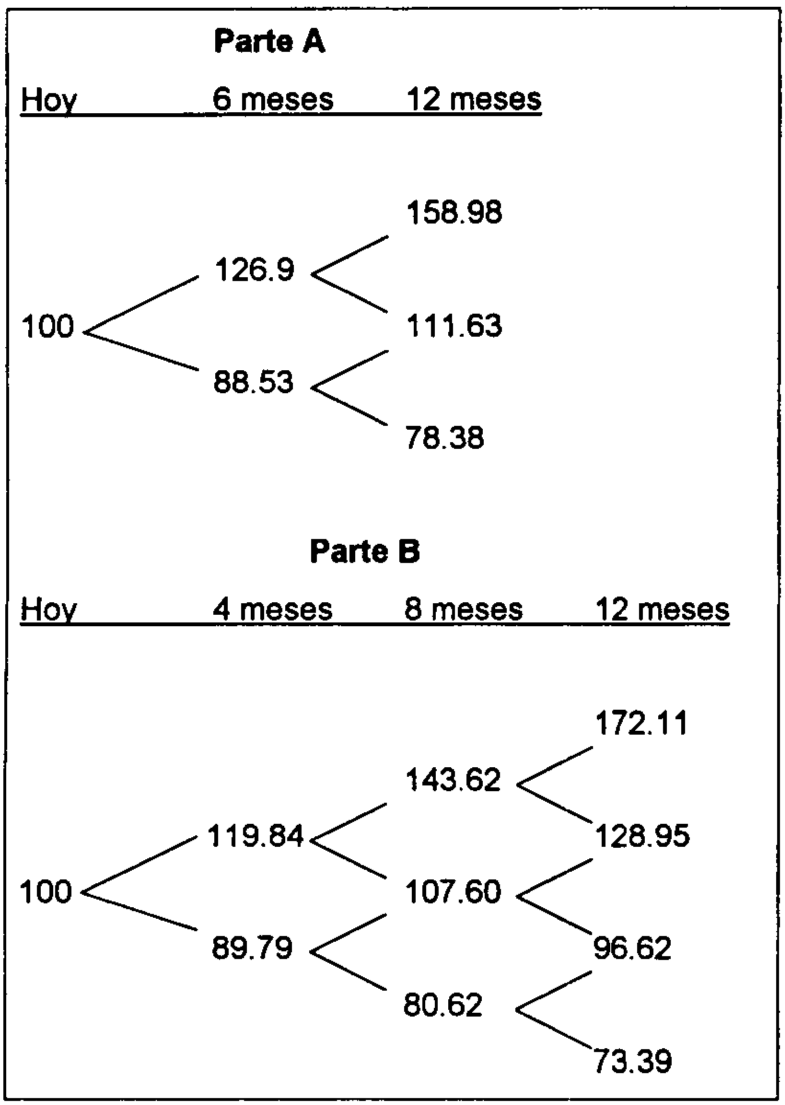
$$D = \exp\left(\mu h - \sigma\sqrt{h}\right)$$

El siguiente ejemplo ilustrará la forma en la que el modelo binomial se aproxima a una distribución lognormal.

Supongamos que el rendimiento esperado μ es 11% anual y que la volatilidad σ es del 25% anual.

GRÁFICA NO. 6

PRECIOS BINOMIALES DE LA ACCIÓN



En la gráfica no: 6 el intervalo es de 1 año y en la parte A dividimos el intervalo en 2 subintervalos de 6 meses c/u $\therefore n=2$ y la longitud de cada intervalo h=1/2=.5 Entonces el flujo esperado es:

$\mu h = .11 * .5 = .055$

y la volatilidad en el intervalo es:

$\sigma\sqrt{h} = .25 * \sqrt{.5} = .1768$

Entonces de la expresión (1.9) los RCC se pueden escribir como:

$$z(t) = \begin{cases} .2318 & \text{con probabilidad de 0.5} \\ -.1218 & \text{con probabilidad de 0.5} \end{cases}$$

y de la expresión (1.10) el modelo binomial es:

$$S(t+1) = \begin{cases} 1.2609\text{:} & \text{con probabilidad de .5} \\ -.8853\text{:} & \text{con probabilidad de .5} \end{cases}$$

Para este ejemplo consideramos que el precio inicial de las acciones es de 100.

En la parte B dividimos el año en 3 subintervalos de 4 meses c/u.

En este caso el modelo binomial es:

$$S(t+1) = S(t) = \begin{cases} 1.1984 \text{ con probabilidad de 0.5} \\ 0.8979 \text{ con probabilidad de 0.5} \end{cases}$$

Ambos casos se aproximan a una distribución lognormal siendo el modelo con n=3 el que mejor se ajusta. Esto implica que conforme n se incrementa, se obtiene una mejor aproximación a la distribución lognormal.

4.5 Representación de la ecuación diferencial estocástica.

Ahora nos introduciremos en forma breve a lo que es la representación de la ec. diferencial estocástica para distribuciones lognormales de los precios de las acciones.

Una manera elegante de representar los supuestos A1 hasta A4 para los RCC es la siguiente:

$$z(t+1) = \mu h + \sigma \Delta W(t)$$

donde,

$\Delta W(t)$ es una variable aleatoria normalmente distribuída con μ =0 y σ^2 =h

Recordemos que:

$$z(t+1) = \ln\left[\frac{S(t+1)}{S(t)}\right]$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} S(t+1) &= S(t)+S(t+1)-S(t) \\ &= S(t)+ \Delta S(t) \end{aligned}$$

donde; Δ S(t) denota el cambio en el precio de la acción en el intervalo [t,t+1]

Substituyendo obtenemos:

$$z(t+1) = \ln\left[1+\frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right]$$

$$\approx \frac{\Delta S(t)}{S(t)}$$

Entonces podemos escribir los supuestos A1 hasta A4 alternativamente como

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu h + \sigma \Delta W(t) \qquad (1.11)$$

Ahora para intervalos infinitésimos la expresión (1.11) se puede escribir en forma general como:

$$\frac{\partial S(t)}{S(t)} = \mu[t, S(t)]\partial t + \sigma[t, S(t)]\partial W(t) \qquad (1.12)$$

donde:

$\partial S(t)$ representa el cambio en el precio de la acción de la fecha t hasta t+∂t siendo ∂t un cambio infinitesimal en el tiempo.

$\mu[t, S(t)]$ es el rendimiento instantáneo esperado por unidad de tiempo.

$\sigma[t, S(t)]$ es la desviación estándar instantánea de los rendimientos por unidad de tiempo.

$\partial W(t)$ es un movimiento Browniano que por definición es una variable aleatoria normalmente distribuída con μ=0 y var=∂t y que tiene incrementos independientes lo que implica que $\partial W(t+1)$ y $\partial W(t)$) son independientes.

En general tanto la media como la volatilidad son funciones del tiempo t y del actual precio de la acción S(t). La expresión (1.12) se llama la ecuación diferencial porque el S(t) solo está definido implicitamente describiendo su comportamiento durante el tiempo.

Diferentes supuestos sobre la volatilidad dan orígen a diferentes soluciones de S(t) para esta ecuación diferencial. El supuesto estándar es asumir que μ y σ son constantes, lo que nos daría la expresión (1.11)

La solución para S(t) en este caso es una distribución lognormal. Esta es la distribución de precios de las acciones en la que se basa el Modelo Black-Scholes.

Hasta éste momento de nuestro análisis podemos citar los siguientes puntos: Para valuar cualquier forma de título derivado necesitamos un camino que represente la evolución de los precios de los activos. Necesitamos un modelo que sea lo suficientemente simple para poder analizarlo y lo suficientemente complejo para obtener una aproximación real del mismo. En éste caso seleccionamos la distribución lognormal. Para facilitar su comprensión utilizamos el método binomial. Mostramos como especificar los factores U y D para que conforme incrementamos el número de intervalos o lo que es lo mismo disminuímos la longitud de c/intervalo, el modelo binomial se aproxime a una distribución lognormal. De igual forma el modelo binomial servirá de base para explicar la valuación y cobertura de capital, índices, divisas y mercancías así como tasas de interés.

El modelo de valuación binomial provee un simple pero fuerte acercamiento para entender la valuación y cobertura de títulos derivados. Para explicar la idea básica del modelo consideremos un call sobre acciones. El modelo binomial asumirá que al final de c/intervalo el precio de la acción podrá tomar 2 posibles valores. Entonces en éste modelo el call podrá tomar 2 posibles valores. Valuaremos el precio del call via una replica (call sintético). Es decir construiremos un portafolio que consistirá en tener la acción y una inversión sin riesgo para minimizar o replicar el valor de la opción.

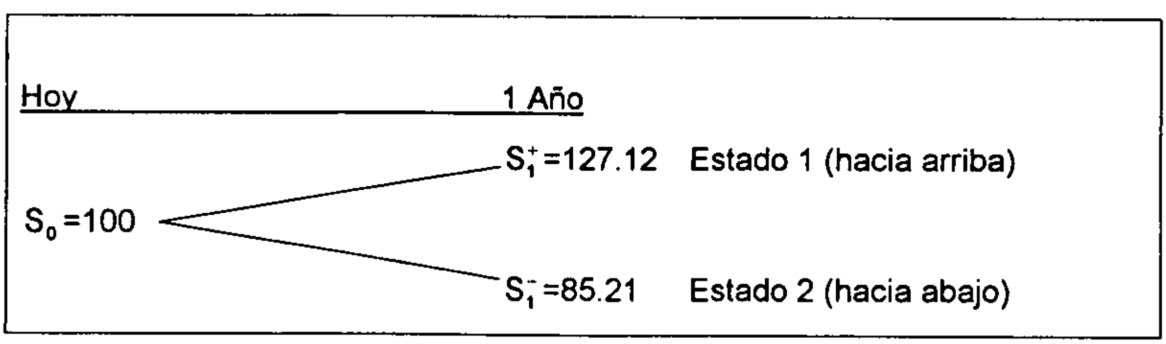
El call sintético deberá igualar el precio de la opción call comerciada. El procedimiento de una replicación sintética no solo nos da el camino para valuar un call, sino que también nos da la pauta para cubrirnos ante el riesgo lo que en el mercado se conoce como hedge ó cobertura.

Como es de nuestro conocimiento, la representación binomial para los precios de las acciones cambia. Para simplificar el estudio consideraremos que no existe el pago de dividendos durante la vida de la opción.

Comenzaremos con un ejemplo considerando un periodo simple. Supongamos que queremos valuar un call (europeo) con vencimiento a un año. El precio de ejercicio es de 110 y el precio actual de la acción es de 100. Asumiremos que al final del año, el precio de la acción podrá tomar 2 posibles valores. Sea 127.12 (estado 1) ó 85.21 (estado 2)

GRÁFICA NO. 7

DINÁMICA DE LOS PRECIOS DE LAS ACCIONES



En un año cuando la opción expire, esto condicionado a saber el precio de la acción, podremos determinar el valor de la opción. Si el precio de la acción es de 127.12, la opción deberá valer 17.12. Esto es porque la opción call te permitirá comprar la acción a un precio de ejercicio de 110. Como el precio de la acción está por arriba del precio de ejercicio, la opción estará in the money y valdrá la diferencia de 127.12 y 110 (i.e. 127.12-100=17.12).

Si el precio de la acción es 85.21 el call expira out of the money y carece de valor.

En la siguiente gráfica se muestran los valores del call.

GRÁFICA NO. 8

PRECIOS DEL CALL

Hoy	Al vencimiento
	C_1^+ = Max [127.12 - 110,0]
C_0 = ?	= 17.12
	C_1^- = Max [85.21 - 110,0]
	= 0

Hemos determinado el valor de la opción al vencimiento, pero aún no sabemos el valor de la opción hoy. Para determinar dicho valor utilizaremos simple argumento de arbitraje.

Consideramos formar un portafolio que minimize o replique lo que pagará el call (payoff). Llamaremos a este portafolio un call sintético. Que activos necesitamos en este portafolio, necesitamos invertir en el activo subyacente (acción) y en un activo sin riesgo. Asumiremos que si invertimos 1 peso en un activo sin riesgo, al final del año obtendremos 1.0618 pesos. Hasta este momento debemos asegurar que la acción y el activo sin riesgo sean valuados correctamente. Esto es, la acción no deberá dominar sobre el activo sin riesgo como una inversión y viceversa. Para hacer esto, notemos que el rendimiento de la acción en el estado 1 (U: hacia arriba) es 127.12/100 = 1.2712 que es mayor al rendimiento del activo sin riesgo 1.0618 que a su vez es mayor al rendimiento de la acción en el estado 2 (D: hacia abajo) 85.21/100= .8521, es decir:

Rendimiento de D<Rendimiento del Activo sin riesgo<Rendimiento de U

Supongamos que compramos m_0 acciones e invertimos B_0 pesos en el activo sin riesgo. El valor del portafolio hoy es:

$$V(0)=m_0*100 + B_0 \qquad (2.1)$$

Cuánto debe de valer m_0 y B_0 para minimizar lo que pagará la opción (payoff). Supongamos que al final del año el precio de la acción es 127.12. El valor de la opción será de 17.12. Por construcción nuestro portafolio deberá valer 17.12. Esto establece la 1a. condición:

$$m_0*127.12 + B_0 1.0618 = 17.12 \qquad (2.2)$$

donde,

$m_0*127.12$ es el valor de la inversión en acciones y

$B_0 1.0618$ es el valor de la inversión en el activo sin riesgo.

Recordemos que cada peso invertido en el activo sin riesgo nos dará 1.0618 pesos al final del año. Si invertimos B_0 pesos el día de hoy, obtendremos B_0 1.0618 pesos al final del año.

Si el precio de la acción es de 85.21 al final del año, el call está out of the money y expira sin valor. Entonces en este caso queremos que nuestro portafolio valga 0. Esto da la 2da. condición que es:

$$m_0 * 85.21 + B_0 * 1.0618 = 0 \qquad (2.3)$$

Notemos que al final del año el valor de nuestra inversión en el activo sin riesgo es aún B_0 *1.0618 ya que el beneficio no es afectado por el precio de la acción. En general tenemos 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Entonces simplificamos para resolver los valores de m_0 y B_0. La solución es:

$$m_0 = 17.12/(127.2-85.21) = 0.4085$$

y

$$B_0 = -m_0 * 85.21/1.0618 = -32.78$$

El signo negativo (-) en B_0 significa que debemos pedir prestados 32.78 a una tasa de interés simple de 6.18%. El valor de nuestro portafolio de replicación o call sintético está determinado sustituyendo nuestros valores en la expresión (2.1)

$$V(0) = (0.4085*100)-32.78 \qquad (2.4)$$

$$V(0) = 8.07$$

Ahora para determinar el valor del call, por construcción hemos diseñado un portafolio con acciones y una inversión sin riesgo que minimiza el payoff del call (lo que paga la opción call). Si el precio de la acción sube a 127.12, la opción vale 17.12 y el call sintético también vale 17.12. Si el precio baja a 85.21, la opción no tiene valor, al igual que el call sintético. Dado que lo que paga tanto la opción como el call sintético es igual, al final del año 1, los dos valores deben ser iguales y de igual forma deben ser iguales al día de hoy. Esto quiere decir que el valor de la opción debe de ser 8.07 ya que de otra forma existiría arbitraje.

Supongamos que este no es el caso y que la opción call es valuada en 10. Entonces la opción está sobrevaluada y tiene valor emitir calls recibiendo 10 por cada uno. Esta es una posición riesgoza. Este riesgo lo podemos reducir construyendo un call sintético que minimize lo que paga la opción call (payoff). Podemos hacer esto comprando .4085 acciones a un costo de 40.85 y pidiendo prestado 32.78. El costo de este call sintético es de 8.07, lo que implica que nuestra posición neta es de 10-8.07 = 1.93 Recibimos un ingreso inmediato en efectivo de 1.93. Al vencimiento si el precio de la acción es de 127.12 la opción vale 17.12. Dado que emitimos una opción call, esto se convierte en obligación. Sin embargo el valor de la opción sintética es de 17.12 por lo que nuestra posición neta es 0.

Si el precio del bien es de 85.21 la opción call no tiene valor y el call sintético tampoco, por lo que de nuevo nuestra posición es cero. Por lo tanto hemos generado 1.93 hoy y nuestros flujos de efectivo futuros son 0, por lo que nuestra posición está fuera de riesgo, y por ello la llamamos una posición cubierta.

Eventualmente los precios se ajustarán hasta que la opción llegue a 8.07 dado un precio inicial de la acción de 100.

Ahora supongamos que el call tiene valor 7 por lo que está subvaluada. Por principio compraremos las opciones call por 7. Aunque esta es una posición riesgoza, podemos construir un call sintético vendiendo en corto 0.4085 acciones lo que provee un ingreso inmediato de 40.85. También debemos invertir 32.78 en el activo sin riesgo.

Por lo tanto la posición neta al día de hoy es el ingreso de 40.85 y un egreso de 39.78 (7+32.78 = 39.78), lo que nos proporcionaría un ingreso neto de 1.07. Debemos considerar el valor de una opción al vencimiento. Si el precio de la acción es de 127.12 el precio del call está in the money y valdrá 17.12. Nuestro portafolio también tiene un valor negativo de 17.12 por lo que nuestra posición vale 0. Si el precio de la acción es de 85.21 el call no tiene valor y el portafolio vale 0, y de nuevo nuestra posición es de 0.

Hemos obtenido un beneficio de 1.07 y los flujos de efectivo futuros valen 0 por lo que nuestra posición está totalmente fuera de riesgo.

Este ejemplo numérico nos señala 3 puntos importantes:

1. El argumento es independiente de la probabilidad de que ocurran movimientos para arriba (U) o para abajo (D) en el precio de las acciones.

Consideremos 2 individuos con diferentes puntos de vista. (uno optimista y otro pesimista). El optimista cree que la probabilidad de que el precio de la acción suba a 127.12 es 90% y la probabilidad de que baje es 10%. Por otro lado el pesimista cree que la probabilidad de que el precio de la acción suba es del 10% y la probabilidad de que baje es del 90%.

Considerando que en ambos casos el precio de la acción hoy es de 100, que el precio de ejercicio en el estado 1 (hacia arriba) es 127.12 y que el precio de ejercicio de la acción en el estado 2 (hacia abajo) es de 85.21, entonces ambos individuos estarán de acuerdo en que el valor de la opción hoy es de 8.07. Esto implica que el argumento actúa independiente de que el precio de la acción suba o baje.

2. En el modelo binomial asumimos que el precio de la acción puede tomar 2 posibles valores al final del año. Esto implica que la opción podrá tomar 1 de 2 posibles valores. Para formar un portafolio de replicación que iguale lo que la opción paga solo necesitamos 2 activos; el activo subyacente (en este caso la acción) y un activo sin riesgo, por lo que sólo tenemos 2 activos en nuestro modelo. El modelo nos permite construir un portafolio de replicación ya que el número de posibles precios de las acciones es menor o igual al número de activos utilizados en el modelo.

3. Valuamos la opción considerando sus posibles valores al vencimiento y luego trabajamos hacia atrás para valuar la opción al día de hoy. En general los modelos para valuar opciones siguen este procedimiento al que llamamos inducción hacia atrás. La única fecha en la que sabemos el valor de una opción es en la fecha de vencimiento, y es éste valor en expiración el que determina el valor de una opción al día de hoy.

Lo que anteriormente analizamos está hecho sobre un modelo con un periodo simple, ahora analizemos un ejemplo con un multiperiodo.

Asumiremos que las tasas de interés son constantes y que la estructura de las mismas es fija.

GRÁFICA NO. 9

DINÁMICA DE LOS PRECIOS DE LAS ACCIONES

Hoy	6 meses	12 meses
		$S_2^+=138.10$
	$S_1^+=117.52$	
$S_0=100$		$S_2^0=104.08$
	$S_1^-=88.57$	
		$S_2^-=78.44$

Considerando que el factor U = 1.1752

y el factor D = 0.8857

R(h) = 1.0304 para h = 6 meses (0.5)

Dado que la distribución lognormal se basa en tiempos contínuos utilizaremos tasas de interés continuamente compuestas.

Si r es la tasa de interés anual continuamente compuesta e invertimos 1 peso en el activo sin riesgo por un periodo h, obtendremos una cierta cantidad o rendimiento R(h), donde

$$R(h) = \exp(rh) \qquad (2.5)$$

Si invertimos un peso en el activo sin riesgo por un año (h=1) y utilizamos una tasa de interés anual compuesta continuamente obtenemos:

exp(0.06) = 1.0618 pesos al final del año.

En forma alterna podemos invertir 1 peso en el activo sin riesgo por 6 meses y hacer (Roll over) nuestra inversión. Dado que la tasa de interés anual compuesta es de 6%, por un periodo de 6 meses (h=.5) entonces:

$R(h) = \exp(0.06 * .5)$

$R(h) = 1.0304$

Finalmente debemos garantizar que sobre cada periodo de 6 meses el posible precio de la acción no sea dominado por el activo sin riesgo o viceversa.

Esto lo verificamos checando que el rendimiento de la acción, en caso de que se mueva hacia arriba, exceda el rendimiento del activo sin riesgo para ese periodo y si el rendimiento de la acción se mueve hacia abajo, el rendimiento debe ser menor al rendimiento del activo sin riesgo durante ese periodo.

Esto es:

$D = .8857 < R(h) = 1.0304 < U = 1.1752$

Esta es una condición de no arbitrariedad.

Ahora para valuar la opción simplemente seguimos la misma lógica. Comenzamos en la fecha de vencimiento del call donde observamos que existen 3 diferentes posibles soluciones. Si el precio es 138.10 la opción call valdrá 28.10, y si el call está out of the money no tendrá valor como sucede cuando el precio de la acción es 104.08 ó 78.44.

Ahora analizemos 6 meses antes del vencimiento. El precio de la acción podrá tener 2 posibles valores (117.52 ó 88.57). si el precio de la acción es de 88.57 la opción call no tendrá valor ya que seis meses después el precio de la acción podrá valer 104.08 ó 78.44. En cualquier caso la opción no tiene valor por lo que está out of the money. Si el precio de la acción es 117.52 utilizamos el mismo procedimiento formando un portafolio para construir una opción sintética comprando m_1^+ acciones e invirtiendo B_1^+ en el activo sin riesgo. El costo de la inversión es:

$$V_1^+ = m_1^+ * 117.52 + B_1^+ \tag{2.6}$$

El portafolio deberá ser construído para crear un call sintético. Si el precio de la acción al vencimiento es de 138.10 entonces el call valdrá 28.10 y el valor de nuestro portafolio deberá ser equivalente a 28.10, lo que nos da una primera condición:

$$m_1^+ * 138.10 + B_1^+ * 1.0304 = 28.10 \tag{2.7}$$

Si el precio de la acción es 104.08 el call no tendrá valor y el valor de nuestro portafolio será 0, lo que nos da una segunda condición:

$$m_1^+ * 104.08 + B_1^+ * 1.0304 = 0 \tag{2.8}$$

Resolviendo obtenemos:

$$m_1^+ = 0.8260$$

y (2.9)

$$B_1^+ = -83.43$$

El costo de construir una opción sintética en la fecha 1 puede ser calculado y es:

$$\begin{aligned} m_1^+ S_1^+ + B_1^+ &= 0.8260 * 117.52 - 83.43 \\ &= 13.64 \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Para evitar la existencia de arbitraje, el valor de la opción en la fecha 1 será:

$$C_1^+ = 13.64$$

Ahora para valuar la opción al día de hoy seguimos la misma lógica y obtenemos:

$$\begin{aligned} m_0 &= 0.4712 \\ B_0 &= -40.50 \end{aligned} \qquad (2.11)$$

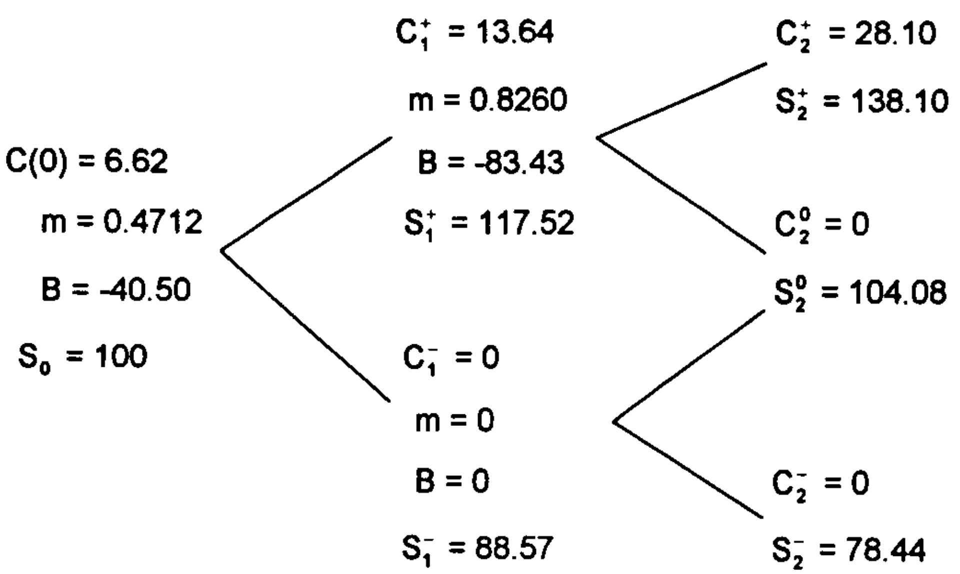
El costo total de construir un call sintético es:

$$m_0 S_0 + B_0 = 0.4712 * 100 - 40.50 = 6.62$$

Por lo que la opción call tendrá un valor $C_0 = 6.62$

GRÁFICA NO. 10

VALORES DE OPCIONES CALL EUROPEAS



R(h) = 1.0304 para h = 6 meses (0.5)

Precio de ejercicio de la opción call = 110

De nuestro ejemplo debemos considerar 3 resultados importantes. Supongamos que al final de los 6 meses en el estado 1 el precio de la acción es 117.52. Nuestro portafolio que fué formado en la fecha 0, consta de .4712 acciones y de un préstamo por 40.50. El valor de este portafolio al final de 6 meses es 13.64.

Rebalanceamos nuestro portafolio en la fecha 1 en el estado 1 y tenemos 0.8260 acciones y pedimos prestados 83.43 , la posición en ese momento de igual forma vale 13.64

Por lo que el costo de construir un call sintético deberá ser igual al valor de la opción.

En segundo lugar notemos que el valor del call sintético en la (gráfica 10) es 6.62. Cuando solo tomamos un intervalo de longitud igual a 12 meses, el valor del call sintético de la expresión (1.4) fué de 8.07. La diferencia se debe a que tomamos diferentes supuestos sobre la distribución del precio de la acción al vencimiento de la opción.

Tercero en la (gráfica 10) notemos que cuando la opción expira existen 3 posibles precios de la acción. Aunque nada más tengamos 2 activos en nuestro portafolio, si lo rebalanceamos en la fecha 1 todavía podemos replicar el valor de la opción en la fecha 2 en los 3 posibles estados.

Podemos generalizar éste modelo para un número arbitrario de periodos. Si dividimos el año en n intervalos con n = 1,2,3,4,... entonces existen n+1 posibles valores de precios al final del año, y n+1 posibles precios de la opción.

Al rebalancear nuestro portafolio al final de cada intervalo de una manera justa (self-financing), podemos replicar el valor de la opción en cada uno de éstos n+1 estados. Entonces con solo dos títulos podemos replicar el valor de la opción durante los n+1 estados. A esto lo denominamos " Dynamically Completing o completar dinámicamente el mercado " en donde dinámicamente se refiere a que existe más de un periodo y completar describe la posibilidad o habilidad de cruzar o netear dos valores de la opción al vencimiento. En nuestro ejemplo el mercado está completado dinámicamente por el modelo binomial ya que al final de cada intervalo tanto el precio de la opción como el valor de la opción tan solo pueden tomar 1 de 2 posibles valores. Necesitamos 2 activos en nuestro portafolio de replicación, uno para cada posible valor. Por lo que tenemos 2 activos: la acción y el activo sin riesgo y entonces podemos construir una opción sintética.

4.6 El modelo de valuación binomial.

Refiriendonos a la (gráfica 9), sea S_0 el precio actual de la acción (=100) y el precio de la acción en 6 meses está representado por S_1 con S_1^+ = 117.52 y S_1^- = 88.57. Cuando la opción expire en 12 meses denotemos el precio de la acción como S_2 con:

$S_2^+ = 138.10$

$S_2^0 = 104.08$

$S_2^- = 78.44$

Ahora sea 1 + la tasa de rendimiento sin riesgo en el periodo de 6 meses igual a R(h); donde h denota el periodo (6 meses), si r es la tasa de interés continuamente compuesta, entonces:

$R(h) = \exp(rh)$

Para evitar que exista arbitraje entre el precio de la acción y el activo sin riesgo, debemos considerar que:

$D < R(h) < U$

Lo que significa que ninguna de las inversiones domina a la otra y no existe posibilidad de arbitraje.

4.7 Construyendo una opción sintética.

Consideremos construir un portafolio de replicación a los 6 meses, cuando el precio de la acción sea S_1^+. El costo de este portafolio es:

$$V_1^+ = m_1^+ S_1^+ + B_1^+ \tag{2.14}$$

Para esta ecuación, m_1^+ es el número de acciones que tiene el portafolio cuando el precio de la acción es S_1^+; y B_1^+ es la inversión en pesos en el activo sin riesgo.

En el siguiente periodo de 6 meses el precio de la acción podrá ser S_2^+ ó S_2^- y el valor de la opción podrá ser C_2^+ ó C_2^-. Si el precio de la acción es S_2^+ el valor del portafolio de replicación deberá ser elegido tal que:

$$m_1^+ S_1^+ + B_1^+ R(h) = C_2^+ \tag{2.15}$$

Si el precio de la acción es S_2^- el valor del portafolio de replicación deberá ser elegido tal que:

$$m_1^+ S_1^0 + B_1^+ R(h) = C_2^0 \tag{2.16}$$

Resolviendo para m_1^+ y B_1^+ tenemos:

$$m_1^+ = \frac{\left(C_2^+ - C_2^-\right)}{\left(S_2^+ - S_2^0\right)} \tag{2.17}$$

y

$$B_1^+ = -\frac{\left(S_2^0 C_2^+ - S_2^+ C_2^0\right)}{\left[R(h)\left(S_2^+ - S_2^0\right)\right]} \qquad (2.18)$$

Para comprobar nuestros valores y estar seguros que no cometimos ningún error substituiremos los valores para S_2^+ y S_2^0, C_2^+ y C_2^0 y R(h) y compararemos nuestros valores con las expresiones (2.9) y (2.10)

Substituyendo en (2.17)

m_1^+ = (28.10 - 0)/(138.10 - 104.08) = 0.8260

Substituyendo en (2.18) tenemos:

B_1^+ = -(104.08*28.10 - 138.10*0)/[1.0304 (138.10 - 104.08)] = -83.43

Por lo que podemos concluír que nuestros números están bien y por lo tanto valuamos de forma eficiente nuestro portafolio.

Ahora necesitamos determinar el costo de construir una opción sintética en la fecha 1 y en estado 1. Substituyendo para m_1^+ y B_1^+ en la expresión (2.14) usando las expresiones (2.17) y (2.18) tenemos:

$$V_1^+ = \left[\left(C_2^+ - C_2^0\right)S_1^+ - \frac{1}{R(h)}\left(S_2^0 C_2^+ - S_2^+ C_2^0\right)\right]\frac{1}{\left(S_2^+ - S_2^0\right)} \qquad (2.19)$$

Esto representa el costo por construir una opción sintética en la fecha 1 cuando el precio de la acción es S_1^+. Para evitar la existencia de arbitraje, la opción debe de tener el siguiente valor:

$$C_1^+ = V_1^+ \tag{2.20}$$

Supongamos que el precio de la opción hubiera sido S_1^-. Entonces siguiendo nuestro argumento:

$$m_1^+ = \frac{(C_2^0 - C_2^-)}{(S_2^0 - S_2^-)} \tag{2.21}$$

y

$$B_1^+ = -\frac{(S_2^- C_2^0 - S_2^0 C_2^-)}{[R(h)(S_2^0 - S_2^-)]} \tag{2.22}$$

y el costo por constuir la opción sintética está dado por:

$$V_1^- = \left[(C_2^0 - C_2^-)S_1^- - \frac{1}{R(h)}(S_2^- C_2^0 - S_2^0 C_2^-)\right]\frac{1}{(S_2^0 - S_2^-)} \tag{2.23}$$

Para evitar la existencia de arbitraje el costo por construcción de una opción sintética deberá igualar el valor de:

$$C_1^- = V_1^- \tag{2.24}$$

Ahora substituyamos los valores de la (gráfica 10) en las expresiones (2.19) y (2.23), entonces tenemos:

V_1^+ = [(28.10-0)*117.52 - (1/1.0304)(104.08*28.10-138.10*0)]*(1/138.10-104.08)

$V_1^+ = 13.64 = C_1^+$

$m_1^- = (0-0)/(104.08-78.44) = 0$

$B_1^- = -(78.44*0)-104.08*0)/[1.0304*(104.08-78.44) = 0$

$V_1^- = [(0-0)*88.57-(1/1.0304)(78.44*0-104.08*0)]*(1/(104.08-78.44)) = 0 = C_1^-$

La expresión (2.19) describe el valor de C_1^+ después de 6 meses y la expresión (2.23) describe a C_1^-. Para determinar el valor de la opción al día de hoy, repetimos la misma lógica. El costo del portafolio de replicación es:

$$V(0) = m_0 S + B_0 \tag{2.25}$$

Por construcción el valor de nuestro portafolio debe ser igual al valor de la opción al final del siguiente intervalo:

$$m_0 S_1^+ + B_0 R(h) = C_1^+$$

y

$$m_0 S_1^- + B_0 R(h) = C_1^-$$

Resolviendo para m_0 y B_0 nos da:

$$m_0 = \frac{\left(C_1^+ - C_1^-\right)}{\left(S_1^+ - S_1^-\right)} \tag{2.26}$$

y

$$B_0 = -\frac{\left(S_1^- C_1^+ - S_1^+ C_1^-\right)}{\left[R(h)\left(S_1^+ - S_1^-\right)\right]} \tag{2.27}$$

Substituyendo estas ecuaciones en la (2.25) el resultado final es:

$$V(0)=\left[\left(C_1^{+}-C_1^{-}\right)S_0+\frac{1}{R(h)}\left(S_1^{-}C_1^{+}-S_1^{+}C_1^{-}\right)\right]\frac{1}{\left(S_1^{+}-S_1^{-}\right)} \tag{2.28}$$

Para evitar que exista arbitraje el costo de construir nuestro portafolio debe ser igual al valor del call:

$$C(0) = V(0) \tag{2.29}$$

Para ilustrar numéricamente los valores de la expresión (2.28) substituyendo tenemos:

V(0)=[(13.64-0)*100-(1/1.0304)(88.57*13.64-117.52*0)]*(1/(117.52-88.57)) =6.62

Por lo tanto este valor concuerda con la expresión (2.12) y por lo tanto concluímos el ejemplo.

4.8 Valuación neutral al riesgo

Este análisis que hicimos nos mostró como construir una opción sintética utilizando acciones junto con una inversión en un activo sin riesgo. Para evitar la existencia de arbitraje, el costo de la opción sintética debe ser igual al valor de la opción. Esta lógica la obtuvimos valuando y obteniendo las expresiones (2.20), (2.24) y (2.29). El manipular estas expresiones nos llevó a obtener una idea o principio muy importante en la valuación de opciones y es lo que se conoce como el principio de valuación neutral al riesgo.

Regresando a la fórmula para valuar un call (2.19 y 2.20) tenemos:

$$V_1^+ = \left[\left(C_2^+ - C_2^0\right)S_1^+ + \frac{1}{R(h)}\left(S_2^0 C_2^+ - S_2^+ C_2^0\right)\right]\frac{1}{\left(S_2^+ - S_2^0\right)}$$

$$C_1^+ = V_1^+$$

Podemos reescribir esta ecuación de forma más compacta:

$$C_1^+ = \frac{1}{R(h)}\left[\pi C_2^+ + (1-\pi)C_2^0\right] \qquad (2.30)$$

donde,

$$\pi \equiv \frac{\left[R(h)S_1^+ - S_2^0\right]}{S_2^+ - S_2^0}$$

El siguiente ejemplo muestra el calculo de π. El valor númerico de π es:

π = (1.0304*117.52-104.08)/(138.10-104.08) = 0.5001

Por construcción, $S_2^+ = S_1^+ * U$ donde U es el factor hacia arriba, y $S_2^0 = S_1^+ * D$ donde D es el factor hacia abajo. Utilizando estas definiciones y eliminando S_1^+ tenemos la siguiente expresión:

π = [R(h) - D]/(U - D) (2.31)

Para evitar la existencia de arbitraje, recordemos que D<R(h)<U. Esto implica que π está entre 0 y 1. Si suponemos que U y D no dependen del nivel del precio de la acción, el valor de π tampoco lo hace. Esto facilita el cómputo. De la expresión (2.23) y (2.24) notemos que:

$$C_1^- = \left[\left(C_2^0 - C_2^-\right)S_1^- - \frac{1}{R(h)}\left(S_2^- C_2^0 - S_2^0 C_2^-\right)\right]\frac{1}{\left(S_2^0 - S_2^-\right)}$$

haciendo álgebra obtenemos:

$$C_1^- = \frac{1}{R(h)}\left[\left(\pi C_2^0 + (1-\pi)C_2^-\right)\right] \qquad (2.32)$$

donde,

$$\pi \equiv \frac{\left[R(h)S_1^- - S_2^-\right]}{S_2^0 - S_2^-} \quad \text{dado que } S_2^0 = S_1^- U \ \text{ y } \ S_2^- = S_1^- D$$

Entonces

$$\pi = \frac{[R(h) - D]}{(U - D)}$$

De las expresiones (2.30) y (2.32) Podemos citar lo siguiente:

1. El valor de la opción tanto en la expresión (2.30) como en la (2.32) dependen del parámetro π. Como puede haber inversionistas optimistas como pesimistas con diferente perspectiva de la probabilidad de ocurrencia del estado de la opción, no existe desacuerdo con el valor de π ya que éste solo depende de U, D y R(h).

2. Generalmente utilizamos las probabilidades π y (1-π) las cuales llamaremos probabilidades neutrales al riesgo o martingalas.

3. Utilizamos C_2^+ y C_2^0 ó C_2^0 y C_2^- para representar el valor de la opción tanto en el estado 1 como en el estado 2.

Debemos tener en cuenta que hemos analizado opciones call, pero pudimos haber hecho lo mismo con opciones put. Esta idea implica que las martingalas π y $(1-\pi)$ no dependen del tipo de opción que estemos valuando

Para ilustrar numéricamente la expresión (2.30) y con el fin de comparar nuestros valores numéricos de la figura estudiada, sustituímos en la expresión (2.30) y obtenemos:

$C_1^+ = (1/1.0304)[\ \pi * 28.10 + (1-\pi) * 0] = 13.64$

Ahora substituímos en la expresión (2.32) y obtenemos:

$C_1^- = 0$, donde $\pi = 0.5001$

Finalmente el valor de la opción en la fecha 0 está dado en la expresión (2.29) como:

$$C(0) = \left[\left(C_1^+ - C_1^-\right)S_0 - \frac{1}{R(h)}\left(S_1^- C_1^+ - S_1^+ C_1^-\right)\right]\frac{1}{S_1^+ - S_1^-}$$

Esta expresión la podemos reescribir como:

$$C(0) = \frac{1}{R(h)}\left[\pi C_1^+ + (1-\pi)C_1^-\right]$$

donde, (2.33)

$$\pi \equiv \frac{\left[R(h)S_1^+ - S_2^0\right]}{S_2^+ - S_2^0}$$

Ahora por construcción $S_1^+ = S_0 U$ y $S_1^- = S_0 D$, lo que implica que:

$$\pi = \frac{[R(h) - D]}{(U - D)} \tag{2.34}$$

la cual es idéntica a la expresión (2.31). El ejemplo de la gráfica no. 10 ilustra la utilización de las expresiones (2.33) y (2.34).

Si substituímos los valores en la expresión (2.33) tenemos:

$C(0) = \frac{1}{1.0304}[0.5001*13.64 + .4999*0] = 6.62$ lo que concuerda con la expresión (2.12).

Si substituímos (2.30) y (2.32) en la expresión (2.33) obtenemos una expresión alterna para el valor de una opción.

$$C(0) = \frac{1}{R(h)^2}\left[\pi^2 C_2^+ + 2\pi(1-\pi)C_2^0 + (1-\pi)^2 C_2^-\right] \tag{2.35}$$

donde,

$\left[\pi^2 C_2^+ + 2\pi(1-\pi)C_2^0 + (1-\pi)^2 C_2^-\right]$ es el valor esperado de la opción al final del 2do. periodo utilizando martingalas. La esperanza es tomada con respecto a estos 3 posibles resultados en la fecha 2 (C_2^+, C_2^0 y C_2^-).

La probabilidad de obtener C_2^+ es π^2.

La probabilidad de obtener C_2^0 es $2\pi(1-\pi)$.

La probabilidad de obtener C_2^- es. $(1-\pi)^2$

Estas probabilidades las podemos obtener multiplicando conjuntamente las probabilidades en los distintos periodos. Para ilustrar numéricamente la expresión (2.35). Dados los valores de C_2^+, C_2^0 y C_2^- y tomando el valor de π obtenemos:

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{(1.0304)^2}(\pi 28.10) \\ &= \frac{1}{1.0618}(7.0178) \\ &= 6.62 \end{aligned}$$

La expresión (2.35) se extiende a modelos con un número arbitrario de intervalos de tiempo.

Para el modelo binomial con n-intervalos podemos concluir lo siguiente:

$$C(0) = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi) \max\left[S_0 U^j D^{n-j} - E, 0\right] \right\} \frac{1}{R(h)^n}$$

donde E es el strike price ó precio de ejercicio y $\binom{n}{j}$ el coeficiente binomial. Esta expresión representa la esperanza de los n+1 resultados para una opción call al vencimiento, valuando en la fecha 0. La esperanza utiliza martingalas; los n+1 resultados para la opción call al vencimiento los identificamos con el $\max\left[S_0 U^j D^{n-j} - E, 0\right]$. Esto corresponde al valor del call en la fecha T dado que el precio de la acción es $S_0 U^j D^{n-j}$.

Si se ejerce, el call valdría $S_0U^jD^{n-j} - E$; de otra forma carece de valor. Este precio de la acción lo obtuvimos comenzando en S_0 y teniendo j movimientos hacia el estado 1 (hacia arriba) y (n-j) movimientos hacia el estado 2 (hacia abajo) , subsecuentemente hacia la fecha 0.

La probabilidad de obtener este valor es $\binom{n}{j}\pi j(1-\pi)^{n-j}$. Esta probabilidad es determinada multiplicando conjuntamente las probabilidades de cada momento de la rejilla. Esta es una solución aproximada a la solución del valor de un call. Ahora junto al modelo Black-Scholes ésta es practicamente la expresión más cercana al valor de una opción call europea.

Asumiendo que las tasas de interés son constantes y tomando como ejemplo el valor de un bono cupón cero de 2 periodos tenemos:

$$B(0,2) = \frac{1}{R(h)^2} = \exp(-r2h)$$

Recordando, una manera de escribir la expresión (2.35) de forma abstracta es:

$C(0) = B(0,2)\ E_0^Q[C(2)]$; donde $E_0^Q[C(2)]$ denota el valor esperado de lo que pagará una opción. Utilizamos Q recordando que estamos calculando este valor esperado utilizando martingalas (π). Esta expresión es una generalización de otros títulos derivados considerando la evolución aleatoria del precio de los activos subyacentes y de la estructura de las tasas de interés

Uno de los conceptos más importantes que la anterior teoría produce es el concepto de la delta de una opción.

Consideremos replicar una opción call europea. El no. de acciones del bien subyacente es de la forma:

$$m_t = \frac{\left(C^+_{t+1} - C^-_{t+1}\right)}{\left(S^+_{t+1} - S^-_{t+1}\right)}$$

Este número es lo que llamamos factor de cobertura (hedge ratio) o delta y es la diferencia en el precio de la opción al final del periodo dividido entre la diferencia en el precio de la acción al final del periodo. Pero otra interpretación se le puede dar a este factor de cobertura; recordemos que el costo de construir una opción sintética está dado por:

$$C(0) = m_0 S_0 + B_0$$

Supongamos que el precio de la opción cambia una infinitésima cantidad ΔS. El cambio en la opción, si todo lo demás permanece constante es:

$$\Delta C(0) = m_0 \Delta S_0$$

Luego,

$$m_0 = \frac{\Delta C(0)}{\Delta S_0}$$

Lo que implica que el hedge ratio m_0 mide el cambio en el precio de la opción ocasionado por un infinitésimo cambio en el precio de la acción, considerando los demás factores fijos. Por esta razón el factor de cobertura lo denominamos delta.

4.9 Parámetros de una rejilla.

Ahora mostremos como los movimientos del parámetro (μ) no son necesarios para valuar una opción.

Como ya mencionamos el modelo binomial puede ser utilizado para aproximar el precio de un acción con una distribución lognormal.

Esta aproximación está descrita en la siguiente expresión:

$$S(t+1) = S(t)\begin{cases} \exp(\mu h + \sigma\sqrt{h}; & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \exp(\mu h - \sigma\sqrt{h}; & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases}$$

la cual depende de la volatilidad de la acción (σ) y el rendimiento esperado de la acción (μ) la cual es difícil de estimar. Afortunadamente nuestra aproximación a la valuación de opciones evade la necesidad de estimar el rendimiento esperado de la acción.

El truco es determinar el rendimiento esperado en la acción utilizando martingalas.

Este es el único rendimiento esperado que se requiere para valuar derivados ya que las probabilidades actuales nunca entran en el cálculo de las opciones. Para aclarar esto, consideremos:

$$C(0) = \frac{1}{R(h)^2}\left[\pi^2 C_2^+ + 2\pi(1-\pi)C_2^0 + (1-\pi)^2 C_2^-\right]$$

Esta expresión funciona para opciones con un precio de ejercicio arbitrario y particularmente funcionan para una opción con precio de ejercicio de 0. Ahora como ya sabemos el precio de un call con precio de ejercicio 0 es simplemente el valor de la acción al día de hoy. Entonces podemos calcular el precio de la acción utilizando solamente el procedimiento de valuación neutral al riesgo. Como sabemos el valor esperado de una acción utilizando martingalas está dado por:

$$E^{Q}[S(T)/S(0)] = S(0)\exp(\overline{\mu}T + \sigma^{2}T/2) \qquad (2.38)$$

donde $\overline{\mu}$ es el rendimiento esperado por unidad de tiempo (bajo π), la valuación neutral al riesgo implica que si descontamos esta cantidad a una tasa de interés libre de riesgo, esto debe ser igual al precio actual de la acción.

Sea $B(0,T)E^{Q}[S(T)/S(0)] = S(0)$ (2.39)

donde B(0,T) es la fecha 0 valuada hoy de un bono cupon cero que paga 1 peso en la fecha T. Representaremos este factor de descuento en términos de una tasa de interés compuesta continuamente r definida por

$$B(0,T) = \exp(-rT) \qquad (2.40)$$

substituyendo (2.38) en la expresión (2.39) y utilizando la expresión (2.40), tenemos:

$$S(0)\ \exp\left[\left(\overline{\mu} + \frac{\sigma^{2}}{2} - r\right)T\right] = S(0)$$

Esto implica que el flujo o tendencia de la acción en un escenario neutral al riesgo debe ser:

$$\bar{\mu} = \sigma - \frac{\sigma^2}{2} \qquad (2.41)$$

Del lado izquierdo tenemos la tasa instantánea de retorno esperada en la acción utilizando las martingalas equivalentes y del otro lado tenemos la tasa libre de riesgo compuesta continuamente menos (1/2) de la varianza del rendimiento de la acción.

Para entender porque esta expresión solo involucra a r y a σ recordemos que el valor terminal esperado de la acción bajo un esquema de martingalas se conoce y se puede calcular con r y con σ^2 solamente. Podríamos pensar que en un escenario neutral al riesgo los activos tendrán una tasa de retorno esperada equivalente a la tasa de interés libre de riesgo. Esto sería cierto excepto que cuando utilizamos procesos estocásticos que tienen la forma $\Delta S(t) / S(t) = \mu h + \sigma \Delta W(t)$ necesitamos de un término de ajuste igual a $\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Entonces para valuar una opción bajo el esquema de una aproximación lognormal, especificamos los movimientos binomiales en los precios utilizando las expresiones (2.41) y (1.10) y tenemos:

$$S(t+1) = S_1 \begin{cases} \exp\left[\left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma\sqrt{h}\right]; & \text{con probabilidad } 1/2 \\ \exp\left[\left(\sigma - \frac{\sigma^2}{2}\right)h - \sigma\sqrt{h}\right]; & \text{con probabilidad } 1/2 \end{cases} \qquad (2.42)$$

Ahora de la expresión (2.31) y utilizando (2.42) la probabilidad π se puede expresar de la forma:

$$\pi = \frac{\left[\exp\left(\frac{\sigma^2 h}{2}\right) - \exp\left(-\sigma\sqrt{h}\right)\right]}{\left[\exp\left(\sigma\sqrt{h}\right) - \exp\left(-\sigma\sqrt{h}\right)\right]}$$

cuando h se aproxima a 0 $\Rightarrow$ π se aproxima a 1/2

Ejemplo: Utilizando composición discreta, el valor de invertir un peso durante un año nos dará un total de 1.0618 pesos. Esto considerando una tasa de interes de r = 0.06

exp (-r*1) = 1.0618

La volatilidad es de 20% (r = 0.02) y el intervalo 1 año, entonces:

$U = \exp\{[0.06-(0.2)^2/2] + 0.2\} = 1.27124$

$D = \exp\{[0.06-(0.2)^2/2] - 0.2\} = 0.85214$

y

$\pi = 0.5003$

En la gráfica 9 el intervalo es 6 meses ó 0.5 entonces:

$U = \exp\{[0.06-(0.2)^2/2]*0.5 + 0.2\sqrt{0.5}\} = 1.17518$

$D = \exp\{[0.06-(0.2)^2/2]*0.5 - 0.2\sqrt{0.5}\} = 0.88566$

y

$\pi = 0.5001$

GRÁFICA NO. 11

CONVERGENCIA

No de intervalos	Precio Call	Factor de cobertura (Hedge Ratio)
1	8.0604	0.409
2	6.617	0.471
3	6.784	0.451
4	6.697	0.47
5	6.52	0.458
6	6.677	0.469
7	6.407	0.461
8	6.649	0.469
9	6.345	0.463
10	6.619	0.469
11	6.305	0.464
12	6.594	0.469
24	6.496	0.468
48	6.407	0.468
96	6.453	0.469
192	6.433	0.469
Black-Scholes	6.437	0.47
Vencimiento:		1 año
Volatilidad:		20%
Tasa de Interes Compuesto:		6%
Precio de ejercicio:		110
Precio del Subyacente:		100

Si dividimos el intervalo [0,T] en n intervalos e incrementamos el valor de n manteniendo T fija (para que h = T/n), sabemos que esta distribución convergerá a una distribución lognormal. En la tabla arriba citada, notamos la convergencia del precio de la opción conforme incrementamos el número de intervalos; n, y disminuímos la longitud de h. Ahora podemos notar que los valores convergen y el factor de cobertura (hedge ratio) también converge. El valor de una opción debe de converger al valor de una opción en una economía con una distribución lognormal para el precio de las acciones.

CAPÍTULO 5.

EL MODELO BLACK & SCHOLES

5.1 Generalización del modelo Black & Scholes a partir del modelo binomial.

El modelo de valuación de opciones Black-Scholes asume que la distribución del precio de una acción está descrita por una distribución de probabilidad lognormal. Calcularemos el valor de un call bajo este escenario; el valor al vencimiento está dado por la siguiente condición:

$$C[S(T),0;E] = \begin{cases} S(T)-E; & \text{si } S(T) \geq E \\ 0; & \text{si } S(T) < E \end{cases}$$

Entonces el valor esperado de una opción, utilizando martingalas para una distribución lognormal es:

$$E_0^Q\{C[S(T),0;E\} = E_0^Q[S(T)-E\,/\,S(T) \geq E]$$

$$= \exp(\,rT\,)\,S(0)\,N(\,d\,) - E\,N(\,d - \sigma\sqrt{T}\,)$$

donde,

$$d \equiv \frac{\left\{\ln[S(0)]\,/\,EB(0,T)] + \dfrac{\sigma^2 T}{2}\right\}}{\sigma\sqrt{T}}$$

B(0,T) es el valor hoy de un bono cupón cero que paga un peso en la fecha T y N(x) es la función de distribución normal. Descontando el valor esperado utilizando la tasa de interés libre de riesgo, obtenemos la fórmula de valuación neutral al riesgo:

$$C[S(0), T; E] = B(0,T)E_0^Q\{C[S(T), 0; E]\}$$

$$= S(0)\, N(d) - E\, B(0,T)\, N(d - \sigma\sqrt{T}) \qquad (2.43)$$

Esta es la fórmula de Black-Scholes. El resultado es análogo a la expresión (1.5). Si consideramos el primer término del lado derecho, tenemos el precio de la acción al día de hoy y el término N (d), comparado con la expresión (2.1) es simplemente el factor de cobertura (hedge ratio), notemos que para el 2do. término tenemos un signo negativo (-). De nuevo comparando con la expresión (2.1) el 2do. término es la cantidad que tenemos que pedir prestada para construir un portafolio de replicación, por lo que de esta forma ya obtuvimos la solución.

El modelo binomial de valuación de opciones utilizando los parámetros de la aproximación lognormal se aproximará al modelo Black-Scholes y el hedge ratio se aproximará a N (d).

5.2 Paridad Put-Call (Put-Call Parity).

Existe una relación importante entre las opciones de compra y venta conocida como la paridad Put-Call ("Put-Call Parity"), la cual se expresa como la relación entre las posiciones larga y corta en los mercados de opciones y posiciones larga y corta en el bien subyacente. Cuando el precio de ejercicio de las opciones es igual, se tiene lo siguiente:

Posición larga en la opción call + Posición corta en la opción put = Posición Larga en el bien subyacente.

O bien,

Posición corta en la opción call + Posición larga en la opción put = posición corta en el bien subyacente.

PROPOSICIÓN: En la relación Put-Call el punto de equilibrio para cualquier posición (larga-corta) del bien subyacente se obtiene cuando:

$$S = E + \beta$$

donde,

E = Precio de ejercicio de las opciones en cuestion
β = Prima de la opcion call - prima de la opcion put

DEMOSTRACIÓN:

Si consideramos la compra de una opción de compra con prima P(1) y la venta de una opción de venta con prima P(2), y considerando que el precio de ejercicio para ambas opciones es el mismo (E) tenemos:

Obtenemos el punto de equilibrio cuando:

$$[\text{Max } (0,S-E) - P(1)] + [P(2) - \text{Max } (0, E-S)] = 0$$

Caso 1: Si S>E (S-E>0), tenemos:

$$[\text{Max } (0,S-E)-P(1)] + [P(2) - \text{Max}(0,E-S)] = [(S-E) - P(1)] + [P(2) - 0]$$

$$= \qquad [(S-E) - (P(1) - P(2))] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S= (P(1) - P(2)) + E$$

Por lo tanto: $S = E + (P(1) - P(2))$

Caso 2: Si S<E (S-E<0), tenemos:

$$[\text{Max } (0,S-E)-P(1)] + [P(2) - \text{Max}(0,E-S)] = [(0 - P(1)] + [P(2) - (E-S)]$$

$$[0 - P(1)] + [P(2)-(E-S)] =- P(1) + [P(2) + (S-E)] =(S-E) - (P(1) - P(2)) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad S = (P(1) - P(2)) + E$$

Por lo tanto: $S = E + (P(1) - P(2))$

Caso 3: S = E (S-E = E-S = 0) Aplicamos algunos de los casos anteriores y obtenemos el mismo resultado.

Para la venta de una opción de compra con prima P(1) y la compra de una opción de venta con prima P(2) la demostración es análoga. Solamente consideremos que el punto de equilibrio se obtiene cuando:

$$[P(1) - \text{Max } (0, S-E)] + [\text{Max } (0, E-S) - P(2)] = 0$$

Una consecuencia importante de la paridad Put-Call es que las opciones de venta pueden convertirse en opciones de compra al combinar éstas (put) con la toma de una posición en el bien subyacente y viceversa.

Como ejemplo podemos citar los siguientes:

Conversión o Call Sintético: Al combinar una opción put larga junto con una posición larga en el bien subyacente es equivalente a comprar una posición larga en un call.

Conversión:

PL + CS = CL

donde,

PL: Put Largo

CS: Compra del subyacente

CL: Call Largo

Reversión o Put Sintético: Al combinar una opción call larga junto con una posición corta en el bien subyacente es equivalente a comprar una posición larga en un put.

Reversión:

CL + VS = PL

donde,

PL: Put Largo

VS: Venta del subyacente

CL: Call Largo

Un inversionista, combinando acciones con opciones podría obtener un portafolio de inversión que a cierto nivel de riesgo tenga rendimientos importantes. El utilizar éstos instrumentos permite al inversionista obtener patrones de rendimiento que serían difíciles de duplicar utilizando acciones y deuda.

5.3 Estrategias para operar con opciones.

Las estrategias para especular con opciones se dividen en tres categorías:

1. Estrategias que se encuentran bajo un escenario optimista (bullish strategies).
2. Estrategias que se encuentran bajo un escenario pesimista (bearish strategies).
3. Estrategias que se basan en las expectativas de volatilidad futura de los precios y a lo que conocemos como compraventa de volatilidad.

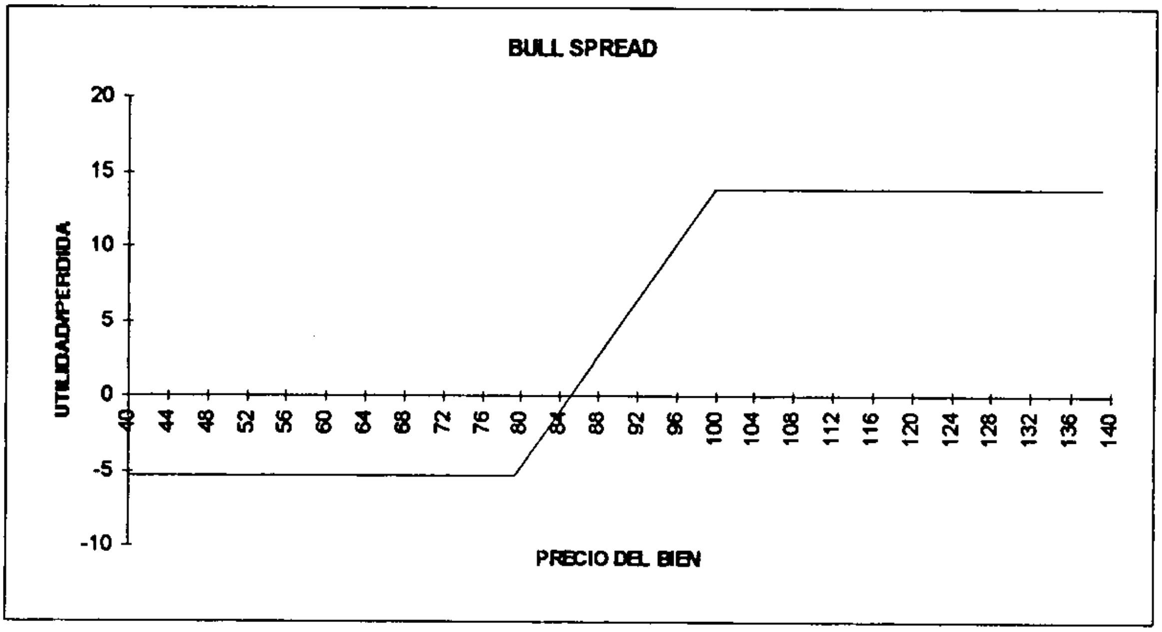
5.3.1 Estrategias Optimistas o Bullish Strategies

Son las estrategias de especulación basadas en la expectativa de precios más altos del bien subyacente y las llamamos "Bullish Strategies" debido a que en el mercado de acciones el toro ("Bull") es el símbolo de precios a la alza.

La estrategia más sencilla bajo este escenario es comprar una opción call en la cual el comprador paga una prima y en caso de que el bien subyacente llegue o sobrepase el precio de ejercicio antes del vencimiento, puede ejercerla, comprando dicho bien al precio de ejercicio.

Si bien el operador considera que el precio aumentará, aunque no más de cierto límite, puede hacer lo que se conoce como un "bull spread " que es una estrategia que consiste en comprar una opción call para especular con un alza en los precios y vender simultáneamente otra opción call con un precio de ejercicio más alto. Al pagar una prima por la primera opción y cobrar por la segunda el costo total neto de la estrategia es menor.

GRÁFICA NO. 12



También se debe de recordar que al tener opciones del mismo tipo pero en diferente posición, la prima de la opción que se compra debe ser mayor o igual que la prima de la opción que se vende.

Sería importante conocer cuando se obtiene el punto de equilibrio en esta estrategia por lo que tenemos:

PROPOSICIÓN: El punto de equilibrio en un "Bull Spread" se obtiene cuando:

$S = E_{\text{compra call}} + (P_{cc} - P_{vc})$

donde,

P_{cc} = Prima de la compra de un call

P_{vc} = Prima de la venta de un call

y sabemos que el precio de ejercicio de la opción call de venta es mayor que el precio de ejercicio de la opción call de compra, o sea:

$$E_{\text{venta call}} > E_{\text{compra call}}$$

Para demostrar ésto tenemos lo siguiente:

Si $S \in [E_{\text{compra call}}, E_{\text{venta call}}]$

Obtenemos el punto de equilibrio cuando:

$$[\text{Max}(0, S - E_{\text{compra call}}) - P_{cc}] - [P_{vc} - \text{Max}(0, S - E_{\text{venta call}})] = 0$$

$$[\text{Max}(0, S - E_{\text{compra call}}) - P_{cc}] = [\text{Max}(0, S - E_{\text{venta call}}) - P_{vc}]$$

Lo que implica que tenemos:

$$S - E_{\text{compra call}} - P_{cc} = 0 - P_{vc}$$

Por lo tanto:

$$S = (P_{cc} - P_{vc}) + E_{\text{compra call}}$$

Las pruebas para los casos

$S < E_{\text{compra call}} < E_{\text{venta call}}$ y $E_{\text{compra call}} < E_{\text{venta call}} < S$

son análogas.

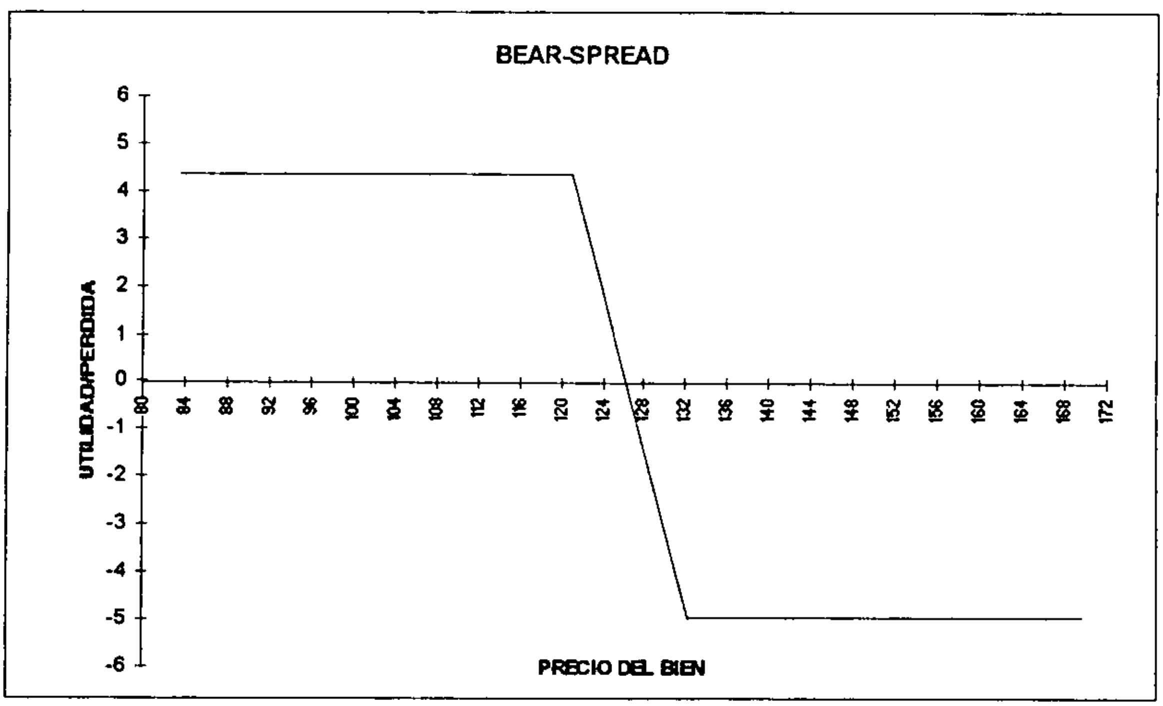
5.3.2 Estrategias pesimistas o Bearish Strategies

Son las estrategias de especulación basadas en la expectativa de precios más bajos del bien subyacente y las llamamos "Bearish Strategies" debido a que en el mercado de acciones el oso ("Bear") es el símbolo de precios a la baja.

La estrategia más sencilla bajo un escenario pesimista es comprar una opción put en la cual el comprador paga una prima y si el precio del bien subyacente cae hasta o por debajo del precio de ejercicio antes del vencimiento, puede ejercerla, vendiendo el bien subyacente al precio de ejercicio. Mientras más bajo sea el precio del mercado en relación al precio de ejercicio, mayores serán las utilidades para el comprador de la opción.

Si el operador supone que el precio de las acciones caerá, aunque no más allá de un cierto límite, puede hacer lo que llamamos un "Bear Spread" que es una estrategia con la cual el operador compra una opción put para especular con una baja de precios y al mismo tiempo vende otra opción put con precio de ejercicio menor. Al pagar una prima al comprar la primera y recibir una prima por la segunda, el costo total neto de la estrategia es menor.

GRÁFICA NO. 13



5.3.3 Estrategias basadas en las expectativas de volatilidad o estrategias de compra-venta de volatilidad

Sabemos que una de las variables básicas que utilizamos para determinar el precio de una opción es la volatilidad del precio del bien subyacente. A mayor volatilidad, mayores probabilidades habrá de que la opción (put o call) se ejerza y mayor será la prima. Entonces en los spreads de volatilidad los agentes tienen como objetivo tomar una posición sobre las variaciones de la volatilidad en el futuro y no sobre los precios.

Estas estrategias son muy variadas por lo que comentaremos solo algunas de ellas. Es importante mencionar que estas estrategias toman su nombre de acuerdo al gráfico de su posición al vencimiento.

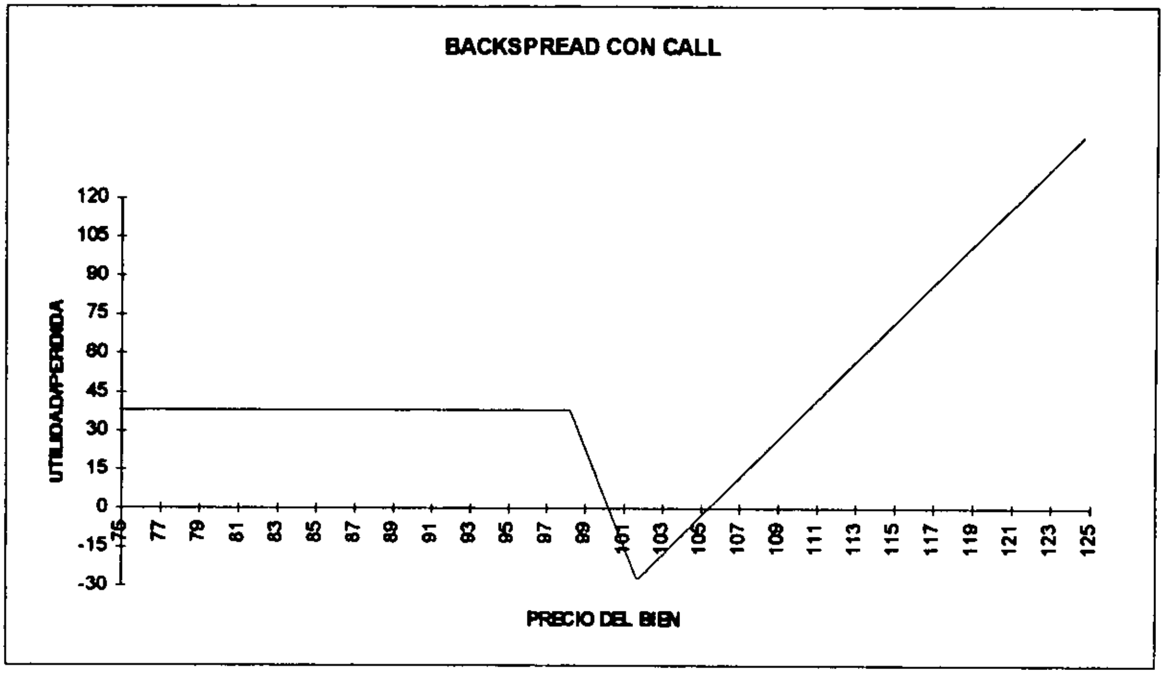
5.3.3.1 Backspread

Consiste en la compra de contratos compensada con la venta de un número menor de contratos que se encuentran más dentro del dinero ("in the money") al mismo vencimiento. Un backspread con calls supone la compra de contratos con un precio de ejercicio superior al correspondiente a las opciones vendidas. En el caso de un backspread con puts, los contratos comprados tendrán un precio de ejercicio menor al de los contratos vendidos.

Las estrategias de backspread generalmente suponen un ingreso neto para el inversionista ya que el importe de las primas cobradas es superior al de las primas pagadas.

En la siguiente figura podemos observar que obtenemos resultados constantes hasta el precio de ejercicio de las opciones put. A partir de éste, se registran pérdidas que tienen como tope el precio de ejercicio de las opciones call por lo que a partir de este momento se registran mejores resultados si se produce una tendencia alcista en los precios.

GRÁFICA NO. 14



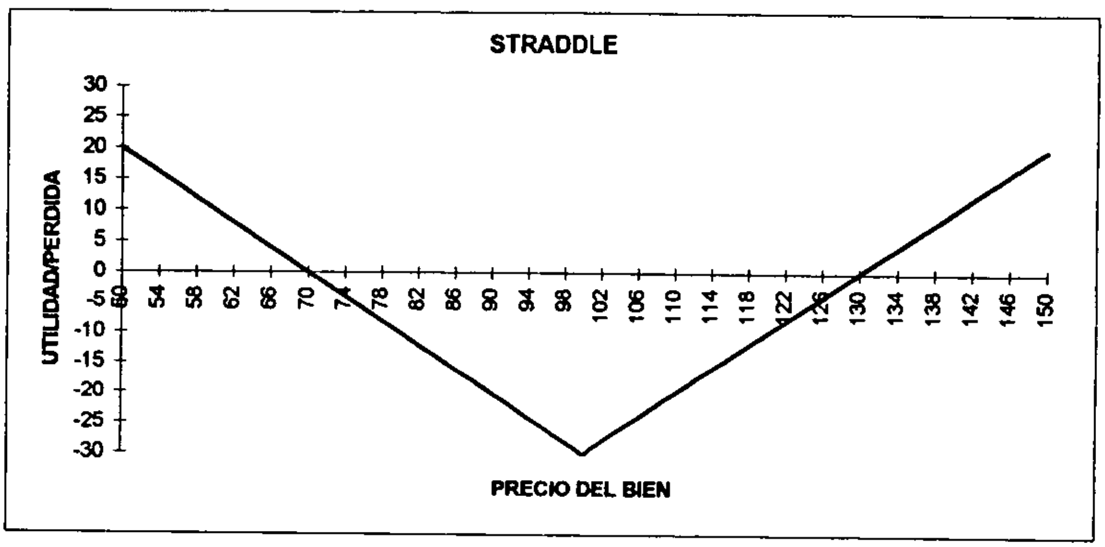
<u>*5.3.3.2 Straddle*</u>

Consiste en la compra o venta simultánea de opciones call y put con el mismo precio de ejercicio y vencimiento.

Para el caso de un straddle de compra (o cono de compra) el operador se beneficia de los aumentos de la volatilidad, es decir, de los movimientos significativos del precio del subyacente. Con poco movimiento, es decir, con baja volatilidad del subyacente esta estrategia no producirá pérdidas.

Para el caso de un straddle de venta, los resultados son los opuestos, es decir, las ganancias se obtienen cuando el precio del subyacente oscila alrededor del precio de ejercicio de las opciones vendidas.

GRÁFICA NO. 15

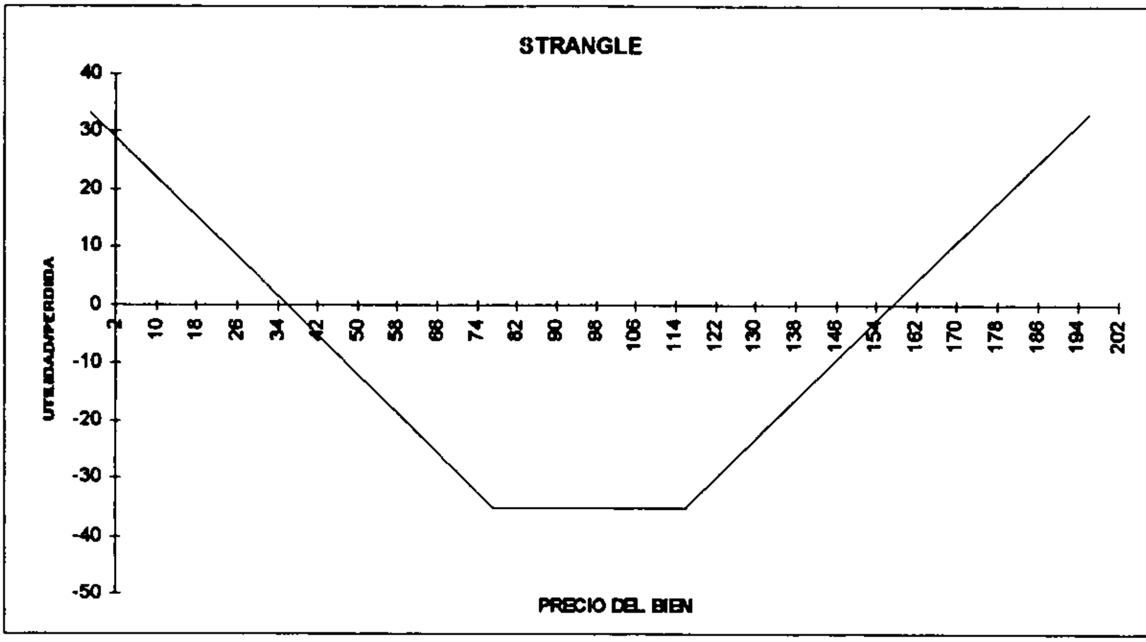


5.3.3.3 Strangle

Esta estrategia es similar al cono. La diferencia es que en un strangle los precios de ejercicio de las opciones call y put difieren. En este tipo de posiciones el precio de ejercicio de las opciones call es mayor que el precio de ejercicio de las opciones put.

Es importante mencionar que las pérdidas presentan un periodo de estabilidad en un rango que comprende el precio de ejercicio de ambas opciones.

GRÁFICA NO. 16



5.3.3.4 Butterfly

Como sabemos la especulación con opciones permite tomar posiciones combinadas en múltiples contratos diferentes para el mismo bien subyacente. Una de éstas estrategias es la que conocemos como "Butterfly" o mariposa. En el caso de que sea una compra de mariposa, ésta la podemos construir con las siguientes combinaciones:

1. Compra de un call con E1, venta de dos calls con E2 y compra de un call con E3
2. Compra de un put con E1, venta de dos puts con E2 y compra de un put con E3
3. Venta de un Straddle con E2, compra de un put con E1 y compra de un call con E3

siempre y cuando E2-E1 = E3-E2

y donde,

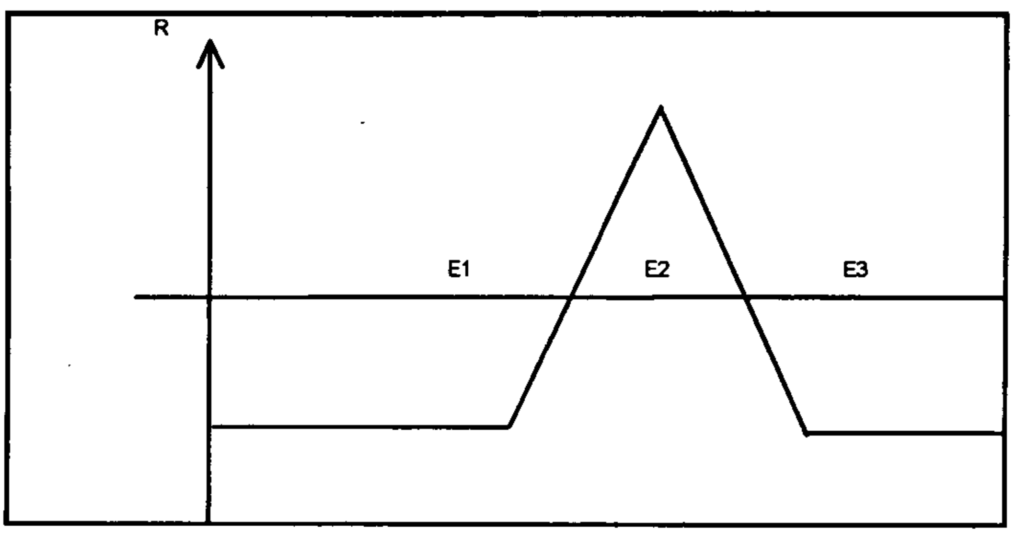
E1: Precio de ejercicio 1 del bien subyacente

E2: Precio de ejercicio 2 del bien subyacente

E3: Precio de ejercicio 3 del bien subyacente

GRÁFICA NO. 17

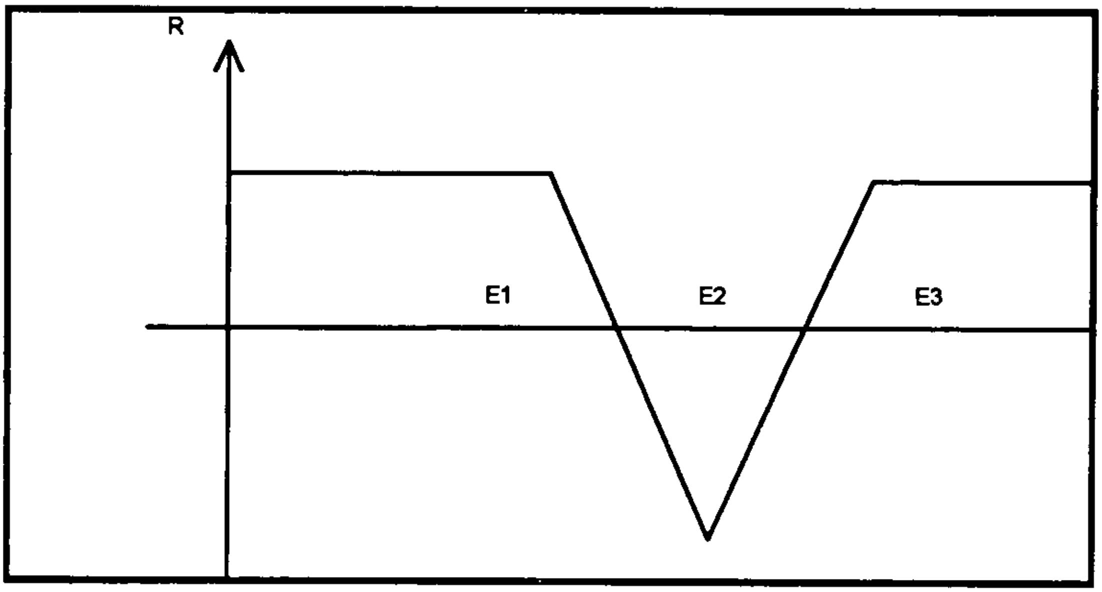
COMPRA DE UNA MARIPOSA



La compra de una mariposa alcanza su máximo beneficio cuando al vencimiento el precio del subyacente es E2. Es decir comprando una mariposa se apuesta por una baja volatilidad en el mercado y presenta la ventaja de tener un riesgo limitado.

En el caso de la venta de una mariposa se admiten las mismas combinaciones únicamente alterando los signos de compra y venta.

GRÁFICA NO. 18
VENTA DE UNA MARIPOSA



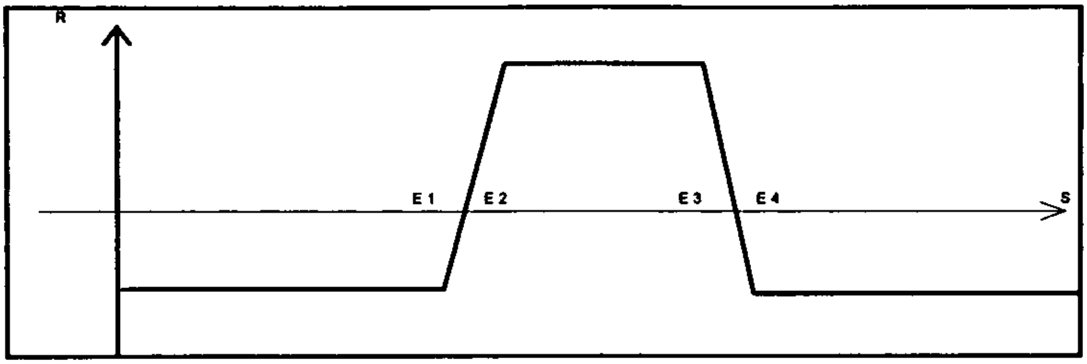
5.3.3.5 Cóndor

Este tipo de estrategia se basa en la combinación de opciones con cuatro precios de ejercicio distintos al mismo vencimiento. Las alternativas de construcción para la compra de un cóndor son las siguientes:

1. Compra de un call con E1, venta de calls con E2 y E3 y compra de un call con E4
2. Compra de un put con E1, venta de puts con E2 y E3 y compra de un put con E4
3. Venta de un strangle con precio de ejercicio igual a E2-E3 y compra de un put con E1 y un call con E4

GRÁFICA NO. 19

COMPRA DE UN CÓNDOR

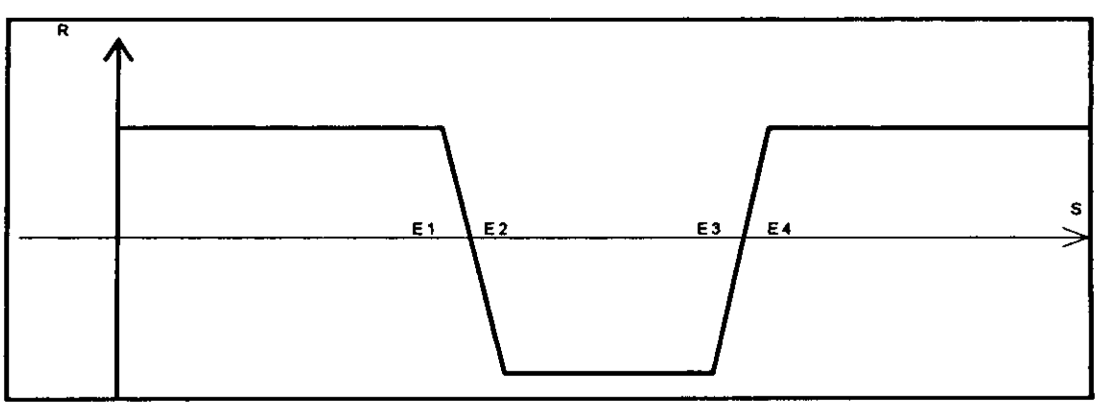


Las alternativas de construcción para la venta de un cóndor son las siguientes:

1. Venta de un call con E1, compra de calls con E2 y E3 y venta de un call con E4
2. Venta de un put con E1, compra de puts con E2 y E3 y venta de un put con E4
3. Compra de un strangle con precio de ejercicio igual a E2-E3 y venta de un put con E1 y un call con E4

GRÁFICA NO. 20

VENTA DE UN CÓNDOR



CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un análisis de la importancia de la volatilidad del bien subyacente en el mercado de productos derivados para calcular la prima y aprovechar las oportunidades que ofrecen estos productos en el mercado. La volatilidad se definió como el potencial del precio de una acción para sufrir cambios en un periodo de tiempo.

Las ventajas que ofrecen los productos derivados son las siguientes:

El uso de este instrumento permite al inversionista obtener patrones de rendimiento que serían difíciles de duplicar usando acciones y deuda.

El comprar una opción es equivalente a mantener un portafolio que se compone de una posición larga o corta en una acción y un préstamo. La tasa a la que se puede fondear el emisor del portafolio puede ser más baja que la de mercado, lo cual beneficiaría al tenedor.

Participando en el mercado de productos derivados el inversionista puede administrar o transferir el riesgo al que está expuesto y alcanzar un mayor número de combinaciones de riesgo-rendimiento.

Para poder aprovechar las oportunidades del mercado, a través de la compra de opciones es importante conocer las propiedades de estos instrumentos y tener un modelo que permita estimar en forma adecuada los parámetros que afectan al precio. En especial a la volatilidad.

La introducción del mercado de productos derivados en México permitirá ampliar de manera infinita la gama de combinaciones de riesgo-rendimiento, permitiendo de esta manera obtener una mayor penetración financiera, tanto de inversionistas nacionales como extranjeros.

Uno de los avances más importantes para el mercado de opciones fué la introducción en 1973 de la fórmula Black-Scholes la cual trajo como consecuencia el desarrollo de una nueva industria de productos basados en éste modelo.

El modelo Black-Scholes es sumamente sensible a la volatilidad del bien subyacente, la cual al ser el único parámetro desconocido del modelo, juega un papel fundamental para el cálculo de la prima de una opción.

Debido a la importancia de este parámetro, los operadores tienen que buscar la manera más eficiente de estimar la volatilidad, para aprovechar las oportunidades del mercado.

La volatilidad generalmente se aproxima por una medida de dispersión de los rendimientos futuros de una acción. La probabilidad de que el rendimiento se aleje de la media es la varianza por lo que la volatilidad se puede estimar usando la varianza de los rendimientos.

El trabajo introdujo al lector a conocer los orígenes, principos y algunas aplicaciones de los instrumentos derivados, centrando su estudio al de las opciones financieras, en donde se expusieron las primeras técnicas para hacer uso de dicho instrumento.

Es importante mencionar que los productos derivados son excelentes instrumentos financieros utilizados para la especulación con el fin de obtener ganancias, así como instrumentos que nos sirven para protegernos contra cambios en los precios, tasas de interés, tipos de cambio y otros, y por lo cual los podemos considerar como un seguro para nuestras inversiones, así como un contrato de seguro para la cobertura de riesgos.

De igual forma podemos apreciar el crecimiento en la implementación de nuevos sistemas y la creación de nuevos instrumentos por parte del mercado de valores mexicano, lo cual permite a nuestro mercado competir con los mercados internacionales, promoviendo una mayor inversión de capitales tanto nacionales como extranjeros al ofrecer mayor seguridad, lo cual contribuye de manera importante al financiamiento de las empresas Mexicanas.

Con la creación de nuevos instrumentos, como las opciones, se abre una nueva cultura sobre la cobertura que pueden obtener los participantes del mercado en contra de los cambios adversos que pueden sufrir con respecto a su posición en los mercados. Es importante mencionar que este año es de suma importancia para nuestro país debido a que se establecerá una nueva bolsa en la que se operarán contratos de futuros y opciones, lo cual contribuirá a la internacionalización de México en éste importante mercado.

BIBLIOGRAFÍA

- Cox, John C. and Rubinstein, Mark
  Option Markets.
  Prentice-Hall International, Inc.
  First Edition, 1985.

- Currency Option Basics
  Curso impartido por Demetri Papacostas, Director de Productos Derivados del Chase Manhattan Bank.

- Damodar N. Gujarati
  Econometría
  McGraw-Hill
  Segunda Edición, 1988.

- Frank J. Fabozzi
  The Handbook of Fixed Income Securities.
  IRWIN Professional Publishing
  Fifth Edition, 1997.

- John C. Hull.
  Options, futures, and other derivative securities.
  University of Toronto.
  Prentice-Hall International, Inc.
  Second Edition, 1993.

- Robert Jarrow and Stuart Turnbull.
  Derivative Securities.
  South-Western College Publishing (An international Thomson Publishing Company.
  First Edition, 1995.

- Stephen A. Ross, Randolph W. Westerfield and Jeffrey F. Jaffe
  Finanzas Corporativas
  IRWIN
  Tercera Edición, 1995.

- Suresh M. Sundaresan.
  Fixed Income Markets and their derivatives.
  South-Western College Publishing (An international Thomson Publishing Company.
  First Edition, 1997.