

01173

9
20



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

T E S I S

SIMULACION DEL LLENADO DE MOLDES
MEDIANTE LA TECNICA DEL ELEMENTO FINITO.

is de
me l

P R E S E N T A D A P O R :
ING. JESUS EDMUNDO RUIZ MEDINA
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERIA
(M E C A N I C A)
AREA: DISEÑO Y MANUFACTURA

DIRIGIDA POR: M. I. ARMANDO ORTIZ PRADO.

CIUDAD UNIVERSITARIA.

1998.

263249

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice

1.- Introducción	1
2.- Antecedentes	3
3.- Modelo Matemático	9
Ecuación de Continuidad	10
Ecuación de Cantidad de Movimiento	10
Ecuación de la Energía	12
4.- Método del Elemento Finito	14
Discretización del cuerpo en estudio	14
Selección de las funciones de interpolación	16
Desarrollo del modelo de elemento finito en su forma de peso residual	17
Ensamble de los elementos para la obtención de un sistema global de ecuaciones algebraicas	19
Imposición de las condiciones de frontera	23
Solución del sistema de ecuaciones algebraicas	26
Post-Procesamiento de datos de interés particular	26
5.- Planteamiento de Solución	27
Formulación Mezclada de Velocidad y Presión	28
Formulación de la función de penalización	31
6.- Generación de Funciones	34
7.- Conclusiones y comentarios.	41
Apéndice A	
Pseudocódigo de Solución	44
Apéndice B	
Ejemplo Ilustrativo	
Problema de Líneas de Corriente	58
Referencias	70

1. Introducción

En la actualidad cualquier fenómeno natural ya sea biológico , climático o mecánico, puede ser analizado por medio de un conjunto de leyes físicas, estas leyes pueden estar en términos de ecuaciones de forma integral, en términos de ecuaciones de forma algebraica o en términos de ecuaciones de forma diferencial mediante la relación de variables de interés.

Para el caso específico de los ingenieros y científicos, éstos se dedican al estudio de fenómenos de índole física, lo cual representa dos tareas a resolver, las cuales son :

- 1.- La formulación matemática del fenómeno o proceso físico de interés.*
- 2.- El análisis numérico del modelo matemático.*

Estas dos tareas antes mencionadas son la base para la formulación de la técnica del Elemento Finito, la cual nos permite obtener soluciones aproximadas mediante el uso de técnicas de análisis numérico mediante la discretización de un cuerpo en varios elementos de estudio.

Debido a esto, se decidió realizar una simulación del llenado en moldes mediante la técnica del elemento finito, ya que en la UNAM no existe planteamiento alguno sobre este tema, sin embargo al tratar de resolver el problema en conjunto se observó que el tiempo necesario para la solución del problema en su totalidad y los recursos que se necesitarían para tal efecto no estaban disponibles, por lo cual se procedió a simplificar el problema en forma tal que sólo se tomaría en cuenta el aspecto de mecánica de fluidos para el estado de flujo laminar, con esta simplificación se pensó que el desarrollo de este trabajo llegaría a feliz termino.

Sin embargo al desarrollarse los puntos de análisis establecidos por la técnica del Elemento Finito se encontró los siguientes problemas :

- **La generación y discretización del cuerpo de estudio por medio de elementos geométricos base, el problema en esta fase tiene dos posibilidades :**

- 1.- Si el cuerpo de análisis contiene solo líneas, se procederá a realizar el proceso de mallado de forma directa.
- 2.- Si el cuerpo de análisis contiene elementos curvos, se procede primero a realizar una transformación de elementos a fin de que el cálculo de la solución se facilite, sin embargo, al realizarse todo el proceso de solución se debe realizar otra transformación a fin de volver a las condiciones originales del problema.

- **La generación de un mallado dinámico** que tuviera las mismas características del punto anterior.
- **La obtención de las ecuaciones que describen el fenómeno así como su discretización** : en este caso las ecuaciones que representan al fenómeno de estudio son las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de Continuidad, sin embargo para el proceso de discretización se tuvo que utilizar métodos de peso residual a fin de obtener un sistema matricial a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno de estudio, los cuales pueden ser el método Galerkin, el método Rayleigh-Ritz, el método de los mínimos cuadrados, etc..
- **El proceso de ensamblaje global de los elementos del cuerpo de estudio** : aquí el problema que importaba atacar era la obtención de un sistema matricial global a partir de los sistemas matriciales individuales de cada elemento que formaba al cuerpo en estudio, sin embargo la gran cantidad de memoria necesaria así como el programa que realizara dicha función sobrepasan las expectativas de este trabajo.
- **La incorporación de las condiciones de frontera** : en este punto se deben considerar los siguientes aspectos :
 - 1.- *Condiciones de frontera, las cuales están dadas por la geometría del cuerpo de estudio.*
 - 2.- *Condiciones de frontera libre, en este caso se debe tener en cuenta que esta frontera se presenta en la interfase líquido - gas, en la cual se deben tomar en cuenta los efectos debido a las presiones en ambos estados, así como los efectos causados por la tensión superficial del líquido en movimiento.*
- **Realizar el proceso de solución** : el cual consiste en resolver un sistema matricial de n ecuaciones con n incógnitas de forma iterativa.

2. Antecedentes

En años recientes el interés por obtener un modelo matemático del llenado de moldes a tenido un gran aumento, esto es debido principalmente a los recientes trabajos en el tema, que se han concentrado en la descripción del fenómeno en geometrías mas complejas.

De acuerdo con N. Saluja y O.J. Ilegbusi¹ la simulación del llenado de moldes lleva implícito varios aspectos que pueden resumirse de la siguiente manera :

- 1. El llenado de moldes representa un problema de frontera libre y dependiendo de la representación de las deformaciones o de la distribución de la superficie, es el proceso de descripción del fenómeno.*
- 2. El llenado de moldes es un problema de mecánica de fluidos, el cual puede ser tratado con las ecuaciones constitutivas, sin embargo las etapas de movimiento turbulento y de solidificación presentan comportamiento no Newtoniano.*
- 3. El llenado de moldes y su subsecuente solidificación puede ser representada como procesos de Transferencia de Calor y de Solidificación, mientras que la estructura y los defectos pueden ser obtenidos como resultado de un modo particular de operación.*
- 4. El llenado de moldes debe describir geometrías complejas, lo cual propicia el encuentro con aplicaciones prácticas.*

Sin embargo la exitosa síntesis de éstos aspectos no ha sido resuelta todavía, por lo cual el artículo está enfocado principalmente al aspecto de fluidos en el aspecto de flujo laminar, flujo turbulento, flujo no Newtoniano y condiciones de frontera predeterminadas.

Por otro lado para R.A. Stoehr y C. Wang² el proceso del llenado de moldes implica enfriamientos prematuros, patrones de flujo del metal durante el llenado del molde así como la distribución de temperaturas que pueda tener, la cual influirá en el proceso de solidificación y llenado

¹ N. Saluja, O.J Ilegbusi, J.Szekely, "Fluid-Flow Phenomena in the Filling of Cylindrical Molds Using Newtonian (Turbulent) and Non-Newtonian (Power Law) Fluids", AFS Transactions, Vol. 91, Pags. 291 - 297.

² R.A. Stoehr, C. Wang, "Coupled Heat Transfer and Fluid Flow in the Filling of Castings", AFS Transactions, Vol. 88, Pags 733 - 740.

Los autores explican que durante el llenado de la cavidad del molde se presentan superficies libres, las cuales presentan una posición y velocidad, y estas pueden ser determinadas por la interacción de las fuerzas viscosas, las fuerzas gravitacionales, las fuerzas de Momentum y las condiciones de continuidad.

Para ello se desarrollo una técnica computacional denominada Solution Algorithm-Volume Of Fluid la cual en su forma abreviada se escribe SOLA-VOF, está técnica esta basada en diferencia finitas, en la cual el dominio del flujo es dividido en celdas de forma rectangular.

La localización del metal liquido es representada mediante la función F {función de fluido}, donde F es igual a uno cuando las celdas están llenas y cero cuando están vacías, la dependencia del tiempo de F esta gobernada por la siguiente ecuación en el dominio $0 \leq F \leq 1$.

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{V} F = 0$$

donde :

$$\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y$$

\vec{V} : es el vector velocidad.

u y v : son las componentes en la dirección horizontal y vertical.

e_x, e_y : son los vectores unitarios de las direcciones.

t : es el tiempo.

En este método se presume que el dominio del flujo esta orientado en el plano x-y. Por lo cual las componentes de velocidad u y v son encontradas mediante el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales han sido ligeramente modificadas, debido a la consideración de las fuerzas de arrastre que actúan sobre las paredes paralelas al movimiento del flujo, quedando de la siguiente forma :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla u - \frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\rho \partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\rho \partial y} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\rho \partial z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla v - \frac{\partial P}{\rho \partial y} + g_y - \frac{\partial \tau_{xy}}{\rho \partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\rho \partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\rho \partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

donde :

P : es la presión.

g_x, g_y : son las aceleraciones del cuerpo.

ρ : es la densidad.

$\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: son las componentes de esfuerzo.

asumiendo que el flujo tiene un comportamiento Newtoniano, tenemos que :

$$\sigma_{xx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \tau_{xy} = -\mu \frac{\partial v}{\partial x}, \sigma_{yy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \tau_{yx} = -\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

donde

μ : es la viscosidad.

Debido a la consideración de las fuerzas de arrastre generadas por las paredes paralelas al flujo, se encontró los esfuerzos τ_{xz} y τ_{zy} no son despreciables, lo cual obligo a los investigadores a desarrollar una expresión que relacionara al esfuerzo con la interface, la cual está dada por la siguiente expresión :

$$\tau_{zn} = \rho u_n^2$$

donde :

u_n es obtenida del Número de Reynolds.

El Número de Reynolds está definido como :

$$\text{Re} = \frac{U_o H}{\nu}$$

donde :

U_o es la velocidad promedio en el canal definido como $(u^2 + v^2)^{1/2}$.

H es el espesor de la cavidad del molde.

ν es la viscosidad cinemática.

Para $\text{Re}_H > 2100$ se utiliza la siguiente expresión :

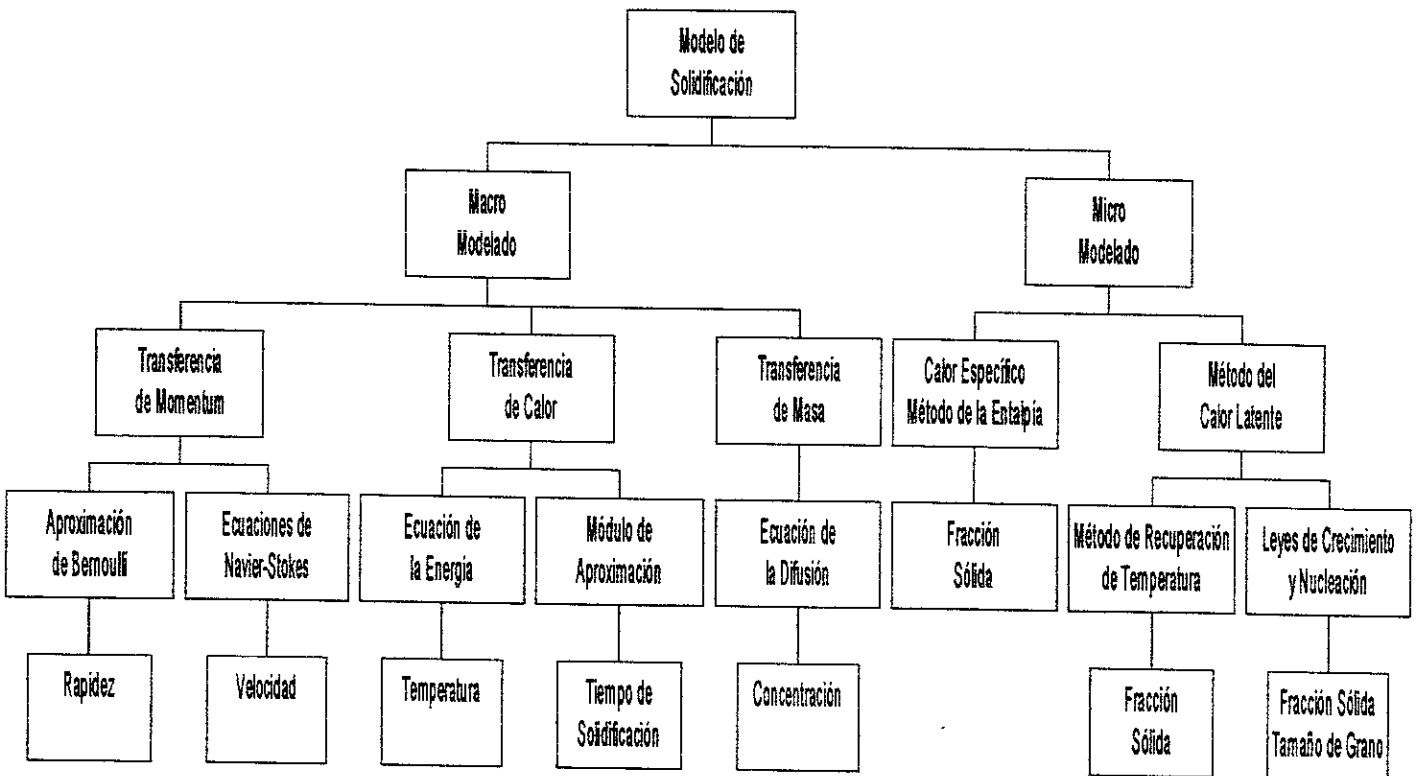
$$u_n = \frac{U_o}{2.5 \ln \frac{u_n H}{\nu} + 6}$$

Para $Re_H < 2100$ se utiliza la siguiente expresión :

$$u_n^2 = \frac{6\nu U_o}{H}$$

Para encontrar los esfuerzos τ_{zx} y τ_{zy} solo se necesita resolver las expresiones anteriores con las correspondientes componentes.

Por otro lado G. Upadhy y A. J. Paul³ enfatizan la importancia de los fenómenos que acontecen en el proceso de fundición, los cuales se pueden resumir en el siguiente diagrama de bloques.



Donde cada termino del diagrama de bloques anterior es representado mediante una ecuación analítica. Para el caso de la aproximación geométrica se utiliza la regla de Chvorinov, la cual relaciona el tiempo de solidificación y el módulo de sección, la cual se expresa :

$$t_f = C \left(\frac{V}{A} \right)^2$$

³ G Upadhy, A.J. Paul, "Comprehensive Casting Analysis Model Using a Geometry-Based Technique Followed by Fully Coupled, 3-D Fluid Flow, Heat Transfer and Solidification Kinetics Calculations", AFS Transactions, Vol. 92, Pags. 925-933.

donde :

C es una constante del material del molde, la cual puede obtenerse mediante la relación :

$$C = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho' H'_f}{T_M - T_o} \right) \left(\frac{1}{k \rho C_p} \right)$$

donde :

T_M es el punto de fusión del metal.

T_o es la temperatura del molde.

k es la conductividad térmica del molde.

ρ es la densidad del molde.

C_p es el Calor específico del molde.

ρ' es la densidad del metal.

H'_f es el calor efectivo de fusión, el cual es obtenido mediante la ecuación :

$$H'_f = H_f + C_p' \Delta T_s$$

donde :

ΔT_s es la temperatura de sobrecalentamiento.

C_p' es el Calor específico del metal.

H_f es el calor latente del metal fundido.

Para el caso del flujo de fluidos o de transferencia de calor fue necesario utilizar las técnicas de Balance de Energía o las técnicas de Balance de Momentum, en el caso de las primeras dan un panorama general del comportamiento del fenómeno en un aspecto global, mientras que las segundas dan una descripción del fenómeno en forma puntual, lo que permite observar el fenómeno en forma de sistemas individuales, los cuales presentan un comportamiento específico en cada punto estudiado.

Las técnicas de Balance de Energía, utilizan la ecuación de Bernoulli o la ecuación de Saint-Venant, las cuales se emplean para determinar las razones de flujo en una dirección establecida.

Las técnicas de balance de Momentum, se utilizan para obtener información sobre los perfiles de velocidad y los patrones de convección en el metal fundido, los cuales se basan en las ecuaciones de Navier-Stokes, las cuales para su solución mediante el paquete denominado SOLA-VOF se pueden expresar de la siguiente manera :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega} \rho F d\Omega \right) = - \int_S \rho F \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \vec{u} \cdot \nabla u - \frac{\partial P}{\rho \partial x} + g_x + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \vec{v} \cdot \nabla v - \frac{\partial P}{\rho \partial y} + g_y + \nu \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

donde :

F es la función de la fracción de volumen.

u, v son las componentes de velocidad en los ejes coordenados.

P es la presión.

Ω es el volumen.

S es el área superficial.

g es la aceleración de la gravedad

ρ es la densidad

ν es la viscosidad

t es el tiempo

\vec{n} es el vector normal unitario de la superficie.

Para la obtención del mapeo de temperaturas en el dominio de la función fue necesario resolver la ecuación de la Energía, la cual fue expresada de la siguiente manera :

$$C_p \rho \frac{dT}{dt} = -C_p \rho \vec{V} \cdot \nabla T - \nabla \cdot \vec{q} + \dot{Q}$$

donde :

C_p es el calor específico

\vec{q} es el flujo de calor

\dot{Q} es la razón de generación de calor.

3. Modelo Matemático

De los artículos previamente mostrados, se puede observar la complejidad que encierra el proceso de fundición, ya que entran en acción varios fenómenos de índole física, los cuales pueden clasificarse en fenómenos de Dinámica de Fluidos, Transferencia de Calor, Transferencia de Masa, Nucleación, Crecimiento de grano, etc..

Sin embargo el estudio se enfocó al aspecto de Dinámica de Fluidos, debido principalmente a la gran complejidad que encierra todo el fenómeno, por lo cual se utilizaron las ecuaciones fundamentales de la Dinámica de Fluidos, las cuales se muestran a continuación :

Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Ecuación de Cantidad de Movimiento

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Ecuación de la Energía

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + P(\nabla \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$

donde :

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

ρ es la densidad.

μ es la viscosidad.

P es la presión.

t es el tiempo.

\vec{V} es el vector velocidad.

\hat{u} es la energía interna.

Al desarrollar las ecuaciones se encuentra que :

3.1 Ecuación de Continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot (\rho u_i + \rho v_j + \rho w_k) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

Debido a que el fluido de trabajo es incompresible, el término $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, esto se debe a que los cambios de densidad en el tiempo no son significativos, por otro lado el estudio del fenómeno se restringirá al llenado del molde sin llegar al proceso de solidificación, lo cual significa que las variaciones en la densidad con respecto a la posición serán también consideradas igual a cero, por lo cual la ecuación resultante será :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Sin embargo para un total estudio del fenómeno se recomienda el uso de los términos de densidad variable ya que éstos términos permiten un mejor entendimiento y estudio del fenómeno de solidificación.

3.2 Ecuación de Cantidad de Movimiento

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

Esta ecuación en particular toma en consideración las componentes de velocidad, presión, fuerzas inerciales y fuerzas viscosas que se presentan dentro del cuerpo de estudio, estas pueden ser representada por un sistema de ecuaciones diferenciales, donde las componentes de velocidad dependen tanto del tiempo como de la posición, mientras que la presión depende solo de la posición, esto se debe principalmente a que la ecuación de cantidad de movimiento surge de un balance entre fuerzas viscosas y fuerzas inerciales entre fluidos de comportamiento Newtoniano.

Al desarrollar toda la ecuación se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \rho g_y - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= \rho g_z - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Sin embargo esta ecuación también puede ser representada de la siguiente forma :

$$\begin{aligned} \rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho g_y - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \rho g_z - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

donde :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

las cuales al ser substituidas en las ecuaciones anteriores dan como resultado las primeras

3.3 Ecuación de la Energía

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + P(\nabla \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (k\nabla T) + \Phi$$

donde :

$$\Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

la cual es también conocida como función de disipación.

Esta ecuación relaciona tanto a velocidades como a temperaturas, sin embargo se debe solucionar primero la ecuación de la cantidad de movimiento para poder resolver la ecuación de la energía

Al desarrollar la expresión encontramos que :

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} + P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi$$

$$\rho \frac{d\hat{u}}{dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi$$

La cual si observamos detenidamente encontramos que el primer termino después de la igualdad nos representa la perdida de calor por medios conductivos, mientras que el segundo miembro de la igualdad nos representa las perdidas por fricción.

Esta ecuación es válida para un fluido Newtoniano en condiciones muy generales de flujo no estacionario, compresible, viscoso y conductor de calor.

Sin embargo mucho autores proponen la siguiente aproximación :

$$d\hat{u} \approx C_v dT$$

por lo que la ecuación toma la forma :

$$\rho C_v \frac{dT}{dt} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi$$

donde :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

que al sustituirlo en la ecuación anterior tenemos que :

$$\rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi$$

quedando la temperatura como variable primaria y la velocidad como variable secundaria.

4. Método del Elemento Finito

El método del elemento finito es una técnica de análisis numérico la cual se emplea para obtener soluciones aproximadas de una gran variedad de problemas ingenieriles.

Los pasos a seguir para llevar a cabo el análisis son :

- 1.- Discretización del cuerpo en estudio.*
- 2.- Selección de las funciones de interpolación.*
- 3.- Desarrollo del modelo de elemento finito en su forma de peso residual.*
- 4.- Ensamble de los elementos para la obtención de un sistema global de ecuaciones algebraicas.*
- 5.- Imposición de las condiciones de frontera.*
- 6.- Solución del sistema de ecuaciones algebraicas*
- 7.- Post-Procesamiento de datos de interés particular.*

4.1 Discretización del cuerpo en estudio

Para el caso unidimensional la discretización se lleva a cabo por medio de líneas, sin embargo para el caso bidimensional se puede utilizar cualquier figura que pueda ser contenida en el plano xy , por ejemplo : el triángulo, el cuadrado, el pentágono, el círculo, etc., mientras que para el caso tridimensional se puede utilizar cualquier figura contenida en el espacio xyz , ejemplo de ello es el tetraedro, el cubo, el prisma, la pirámide, el cilindro, la esfera, etc., la elección del tipo de elemento, del número de elementos, y de la densidad de elementos dependerá de la geometría del dominio, del problema a analizar y del grado de precisión deseada.

Para la obtención de una buena discretización o mallado se recomienda llevar a cabo los siguientes pasos :

- 1. Seleccionar los elementos que caractericen las ecuaciones gobernantes del problema.*
- 2. El número, la forma y el tipo de elementos debe ser tal que la geometría del dominio sea representada con la precisión deseada.*

3. La densidad de los elementos debe ser tal que las regiones de gradiente puedan ser adecuadamente modelados.
4. El refinamiento de malla debe hacerse de manera gradual, de las regiones de alta densidad a las regiones de baja densidad. Si se llegaran a utilizar elementos de transición, éstos deben ser usados fuera de regiones críticas. (los elementos de transición son aquellos que conectan elementos de bajo orden con elementos de alto orden).

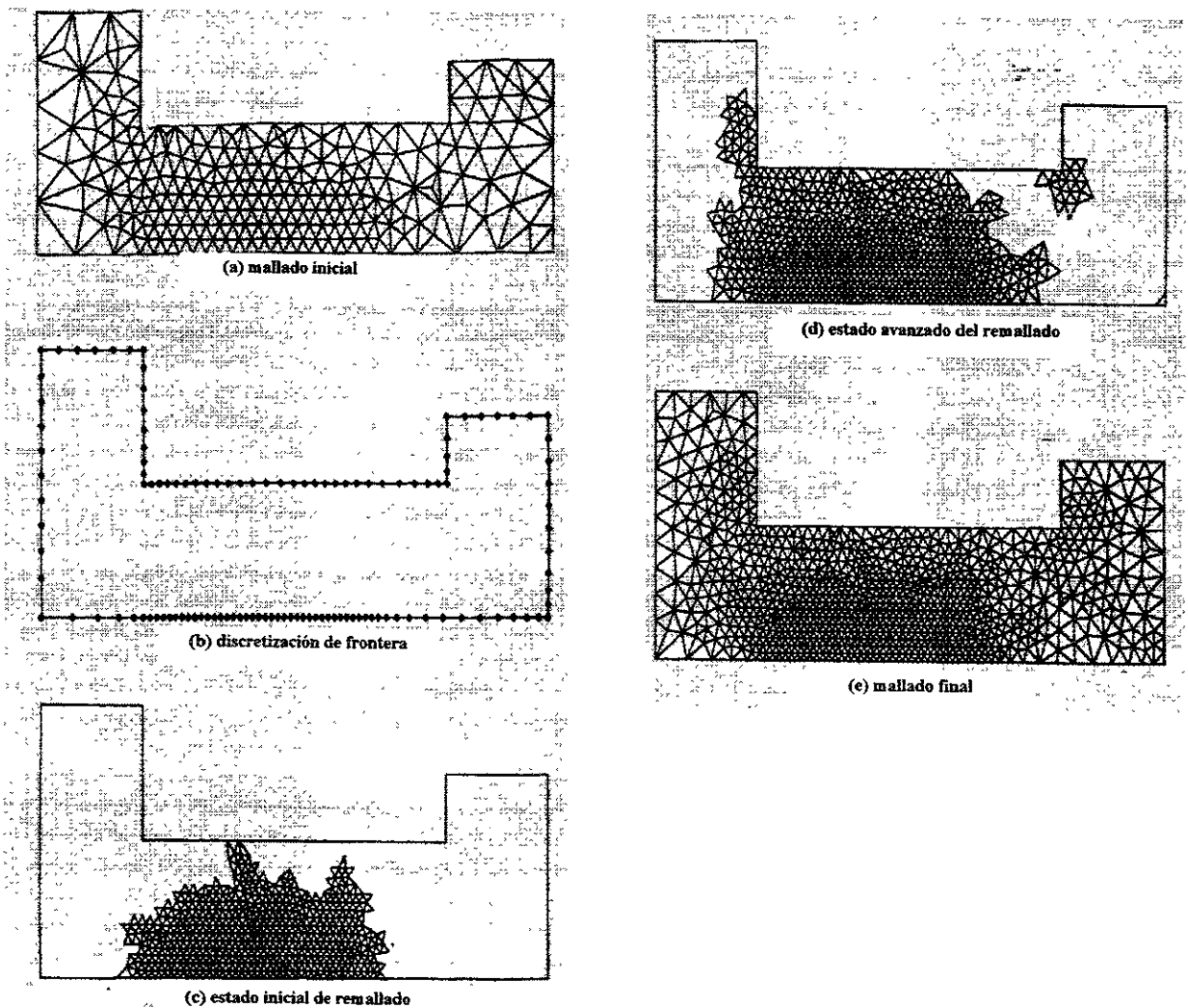


Figura 1.- Proceso de mallado y remallado

4.2 Selección de las funciones de interpolación

En este paso se asigna el número de nodos de cada elemento geométrico, lo cual representará la variación del campo de variables sobre el elemento estudiado. Este campo de variables puede ser un escalar, un vector, un polinomio, o un tensor de orden mayor.

La aproximación mediante elemento finito denominada $U^e(x,y)$ de la función $u(x,y)$ sobre el elemento Ω^e debe satisfacer las siguientes condiciones para que la solución aproximada converja.

1. U^e debe ser diferenciable.
2. El campo de variables empleado para representar U^e debe contener los términos necesarios.
3. Todos los términos del campo de variables deben ser linealmente independientes

El número de términos linealmente independientes en la representación de U^e dictamina la forma y el número de grados de libertad del elemento. Por lo general el campo de variable más socorrido en el elemento finito es el polinomio, debido a esto, las figuras que más se emplean para el estudio bidimensional y tridimensional son triángulos o cuadrados, tetraedros o cubos. Para la selección del polinomio se emplean en el análisis bidimensional el triángulo de Pascal, mientras que para el estudio tridimensional se utiliza el hipercubo.

Por ejemplo si se utilizará un triángulo de primer orden, el polinomio que representaría a dicho elemento sería de la forma :

$$U^e(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y$$

mientras que para un cuadrado de primer orden, el polinomio que representaría a dicho elemento sería de la forma :

$$U^e(x,y) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2y + \alpha_3xy$$

Si el triángulo o el cuadrado fuera de un orden mayor este se obtendría mediante la relación de la figura 2a y 2c.

En caso de utilizar un sistema xyz el polinomio estaría dado en función de las figuras 2b y 2d

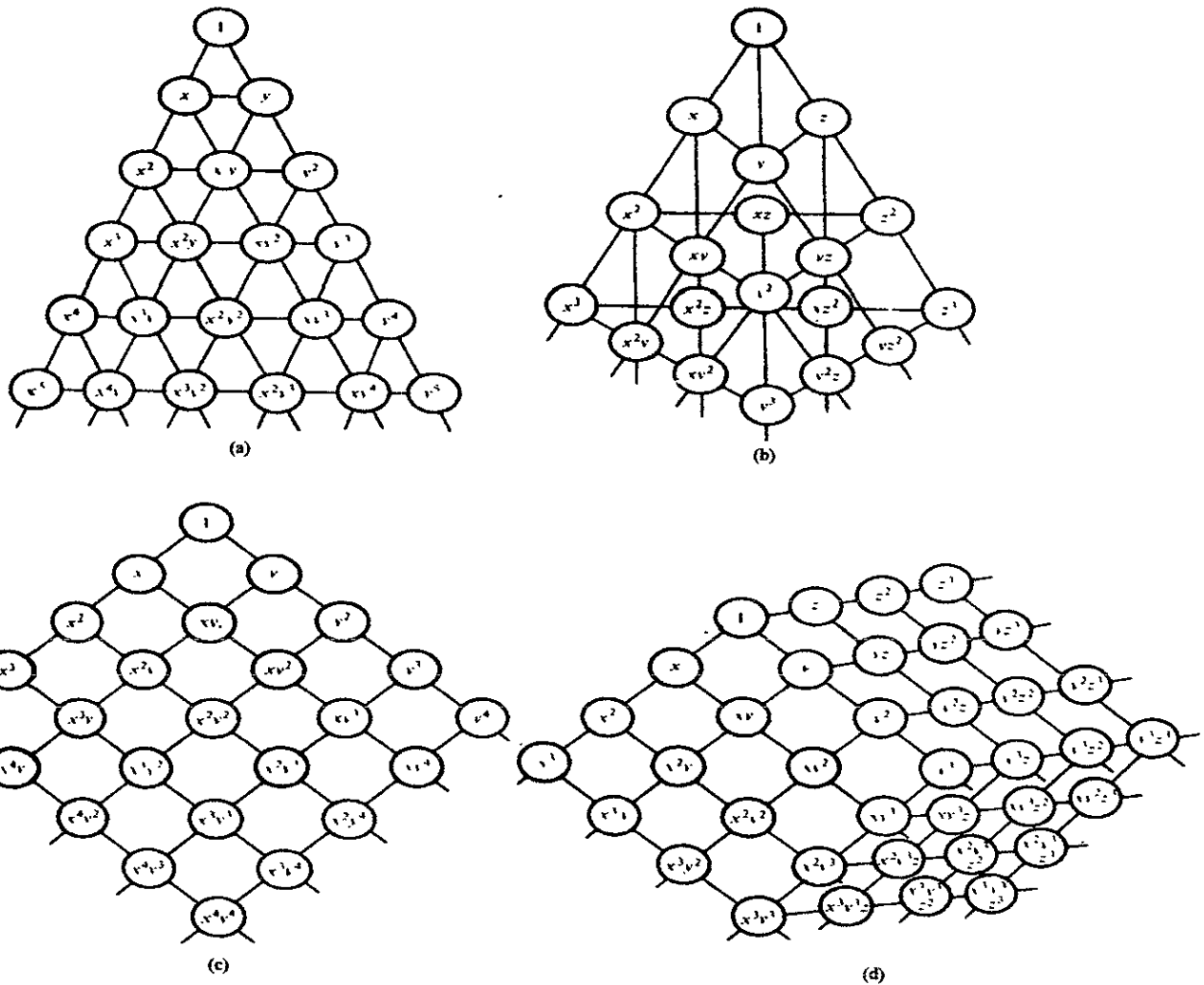


Figura2.- expansiones polinomiales del elemento finito. (a) Triángulo de Pascal, (b) Tetraedro de Pascal, (c) Hipercubo Bidimensional, (d) Hipercubo Tridimensional .

4.3 Desarrollo del modelo de elemento finito en su forma de peso residual

Al generar el mallado del cuerpo en estudio así como las funciones de interpolación, se tienen las bases para el proceso de solución, sin embargo hay que tomar en cuenta que los fenómenos que se estudiarán generalmente están representados por ecuaciones diferenciales, las cuales en su mayoría tienen elementos parciales de orden n, por lo cual es necesario utilizar el método de peso residual.

El método de peso residual (*Weight Method Residual*) nos permite convertir tanto a ecuaciones como a sistemas de ecuaciones diferenciales de grado n en sistemas o ecuaciones de grado 1, lo cual permite una forma de representación mas sencilla dando como resultado un planteamiento de solución mas simple. Este método se basa principalmente en el teorema de Green-Gauss el cual nos permite convertir una integral de superficie sobre un campo de vectores de flujo con la integral de volumen de la divergencia, el cual se expresa de la siguiente forma :

$$\int_{\Gamma} V \cdot n d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot V d\Omega$$

donde :

V es un vector que puede representar ya sea la velocidad, el desplazamiento, el flujo, etc..

n es un vector normal a la superficie.

$d\Gamma$ representa las superficies infinitesimales.

$d\Omega$ representa el volumen infinitesimal del interior.

la cual al ser multiplicada por un escalar queda de la forma:

$$\int_{\Gamma} \alpha V \cdot n d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha V) d\Omega = \int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot V d\Omega + \int_{\Omega} V \cdot \nabla \alpha d\Omega$$

Si sustituimos V por $V_i i_i$ y a n por $n_i i_i$ en la ecuación anterior obtendremos que :

$$\int_{\Gamma} \alpha V_i n_i d\Gamma = \int_{\Omega} (\alpha V_i)_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} \alpha V_{i,i} d\Omega + \int_{\Omega} V_i \alpha_{,i} d\Omega$$

al reacomodar los términos de la expresión anterior tenemos que :

$$\int_{\Omega} \alpha V_{i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha V_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} V_i \alpha_{,i} d\Omega$$

lo cual hace recordar la integración por partes.

Al substituir las funciones de peso integral y realizar la integración por partes, se forman sistemas de ecuaciones. Las cuales estarán definidas por los límites de cada integral, los cuales estarán definidos por el tipo de elemento geométrico previamente escogido.

4.4 Ensamble de los elementos para la obtención de un sistema global de ecuaciones algebraicas

Para encontrar las propiedades de todo el modelado mediante el uso de elementos de red, se debe ensamblar todas las funciones que forman al cuerpo de estudio, lo que genera una ecuación matricial que representa el comportamiento del sistema estudiado. Para poder llevar a cabo este procedimiento es necesario diferenciar entre el elemento **local** del elemento finito y el elemento **global** del elemento finito.

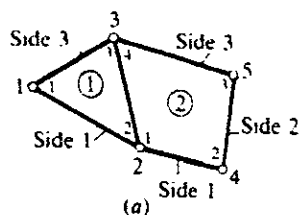
El elemento **local** es el elemento geométrico empleado para representar el cuerpo de estudio, y este tiene sus puntos de intersección bien definidos por los vértices.

El elemento **global** es el conjunto de puntos que determinan la intersección entre elementos (*locales*) del cuerpo en estudio.

Sin embargo hay que hacer notar que el proceso de ensamble de elementos esta basado en dos principios básicos :

- 1.- La existencia de continuidad en la variable primaria.
- 2.- El equilibrio o Balance de las variables secundarias.

En la practica existen dos procedimientos para ensamblar dichos sistemas : el primer sistema de ensamblaje consiste en :



Global →	Local
K_{11}	K_{11}^1
K_{12}	K_{12}^1
K_{22}	$K_{22}^1 + K_{11}^2$
K_{14}	0
K_{15}	0
K_{23}	$K_{23}^1 + K_{14}^2$

- Enumerar el número de elementos así como el número de nodos de la red.
- El proceso de enumeración debe realizarse en el sentido contrario a las manecillas del reloj, teniendo que numerar primero los vértices de las figuras geométricas y después los puntos intermedios entre los vértices.
- Al terminar el proceso de numeración se procede a construir un arreglo matricial que ordena a cada nodo del mallado, esto se logra mediante la siguiente metodología :

1. Seleccione el elemento base (*es el elemento que definimos como # 1*).
2. Escriba el número de cada nodo global en un arreglo de fila y columna por cada elemento de la red.
3. Cada elemento tiene una y solo una fila.

Al realizar éstos pasos se obtiene la siguiente matriz en base a la figura previamente mostrada :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{puntos globales del triangulo} \\ \rightarrow \text{puntos globales del cuadrado} \end{array}$$

Ya obtenido el arreglo matricial se procede a enlazar a los elementos que coincidan en elemento y nodo, esto se logra observando la colindancia entre los nodos así como la composición de los sistemas de ecuaciones generados por cada elemento geométrico.

Para el triángulo el sistema es :

$$\begin{aligned} K_{11}^1 u_1^1 + K_{12}^1 u_2^1 + K_{13}^1 u_3^1 &= f_1^1 \\ K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1 &= f_2^1 \\ K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1 &= f_3^1 \end{aligned}$$

Para el cuadrilátero el sistema es :

$$\begin{aligned} K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2 &= f_1^2 \\ K_{21}^2 u_1^2 + K_{22}^2 u_2^2 + K_{23}^2 u_3^2 + K_{24}^2 u_4^2 &= f_2^2 \\ K_{31}^2 u_1^2 + K_{32}^2 u_2^2 + K_{33}^2 u_3^2 + K_{34}^2 u_4^2 &= f_3^2 \\ K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2 &= f_4^2 \end{aligned}$$

Al observar el arreglo matricial B se encuentra que :

$K_{11}^1, K_{22}^2, K_{23}^2$ son elementos libres

$K_{12}^1 = K_{21}^2, K_{13}^1 = K_{24}^2$ son elementos coincidentes *

Con los pasos anteriores se procede a realizar las siguientes operaciones en los elementos coincidentes para obtener el sistema matricial buscado :

$$(K_{21}^1 u_1^1 + K_{22}^1 u_2^1 + K_{23}^1 u_3^1) + (K_{11}^2 u_1^2 + K_{12}^2 u_2^2 + K_{13}^2 u_3^2 + K_{14}^2 u_4^2) = (f_2^1 + f_1^2)$$

$$(K_{31}^1 u_1^1 + K_{32}^1 u_2^1 + K_{33}^1 u_3^1) + (K_{41}^2 u_1^2 + K_{42}^2 u_2^2 + K_{43}^2 u_3^2 + K_{44}^2 u_4^2) = (f_3^1 + f_4^2)$$

al agrupar se encuentra que :

$$u_1^1 = U_1, u_2^1 = u_1^2 = U_2, u_3^1 = u_4^2 = U_3, u_2^2 = U_4, u_3^2 = U_5$$

por lo que el sistema queda :

$$K_{21}^1 U_1 + (K_{22}^1 + K_{11}^2) U_2 + (K_{23}^1 + K_{14}^2) U_3 + K_{12}^2 U_4 + K_{13}^2 U_5$$

$$K_{31}^1 U_1 + (K_{32}^1 + K_{41}^2) U_2 + (K_{33}^1 + K_{44}^2) U_3 + K_{42}^2 U_4 + K_{43}^2 U_5$$

al agruparlo con el sistema matricial queda :

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & (K_{23}^1 + K_{14}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & (K_{33}^1 + K_{44}^2) & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{24}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{34}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

* el segundo subíndice de los elementos coincidentes denota el renglón a utilizar en las operaciones de obtención del sistema matricial global.

El segundo método se basa en la implementación de la siguiente fórmula :

$$K_{\alpha\beta} = \sum_{e=1}^E (\Delta^e)^T K^e \Delta^e$$

donde :

e representa el elemento finito utilizado

E es el número total de elementos finitos en el cuerpo de estudio

Δ es la matriz de coordinación

La matriz de coordinación puede ser obtenida mediante el uso de la siguiente expresión :

$$z_N^e = \Delta_{Ni}^e Z_i$$

donde :

z_N^e es el nodo local del elemento e

Δ_{Ni}^e es la matriz de coordinación del elemento e

Z_i es el nodo global i del arreglo buscado.

Al realizar el procedimiento anterior en la figura del triángulo y del cuadrilátero encontramos que :

$e=2 \rightarrow$ ya que representa el número total de elementos a ensamblar.

$N=3 \rightarrow$ para el caso del triángulo por sus tres nodos.

$N=4 \rightarrow$ para el caso del cuadrilátero por sus cuatro nodos.

$i=5 \rightarrow$ es el número de puntos de intersección entre elementos y vértices libres.

para el triángulo se tiene :

$$\begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix}$$

para el cuadrilátero se tiene :

$$\begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \\ z_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{bmatrix}$$

Al aplicar la ecuación de ensamblaje se obtiene que :

$$K_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & (K_{22}^1 + K_{11}^2) & (K_{23}^1 + K_{14}^2) & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{31}^1 & (K_{32}^1 + K_{41}^2) & (K_{33}^1 + K_{44}^2) & K_{42}^2 & K_{43}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{24}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{34}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

Si uno observa detenidamente el sistema recién obtenido con el sistema antes calculado, se encontrará que dichos sistemas son idénticos. Por lo cual el uso de cualquier método es factible dependiendo de las herramientas a disposición.

Hay que hacer notar que el uso de dichos métodos también puede implementarse para realizar el ensamble de las matrices **M** y **C** así como de los vectores de fuerza **f**.

4.5 Imposición de las condiciones de frontera

Una vez que el sistema de ecuaciones este listo para ser solucionado, esté debe ser modificado para tomar en cuenta las condiciones de frontera del problema, las cuales estarán dadas por la naturaleza del fenómeno que se este estudiando así como por las geometrías que se presenten en el análisis.

Para llevar a cabo el proceso de solución del sistema anteriormente planteado, es necesario comprender que existen dos tipos básicos de condiciones de frontera, que son: las condiciones de frontera de Neumann o también conocidas como condiciones iniciales y las condiciones de frontera de tipo Dirichlet, las cuales especifican el comportamiento de las variables en estudio en la frontera del cuerpo.

Las condiciones de frontera de Neumann son satisfechas automáticamente al generar las funciones de interpolación que caracterizaran al cuerpo en estudio, mientras que las condiciones de Dirichlet pueden ser impuestas através de la eliminación de ecuaciones o através de los multiplicadores de Lagrange, para el primer método se supone un sistema global establecido en el cual existen un número predeterminado de condiciones de frontera, lo que origina que el sistema global de $n \times n$ ecuaciones sea reducido a un sistema de $(n-1) \times (n-1)$ por cada condición de frontera existente en el cuerpo en estudio por la cual el sistema global de ecuaciones matriciales se puede dividir de la siguiente manera :

$$\begin{bmatrix} A_{(aa)} & A_{(ab)} \\ A_{(ba)} & A_{(bb)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(a)} \\ u_{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix}$$

donde :

a es el subíndice que se refiere a la n incógnitas que han de ser determinadas.

b es el subíndice de los m valores prescritos en las condiciones de frontera.

De tal forma que la solución del sistema se expresa como :

$$u_{(a)} = A_{(aa)}^{-1} [F_{(a)} - A_{(ab)} u_{(b)}]$$

Para el uso de la técnica de los multiplicadores de Lagrange se considera que todas las condiciones de frontera del cuerpo en estudio están dadas por la relación :

$$q_n u_i = b_r$$

donde :

q_r , es conocida como la matriz de condiciones de frontera.

u es la variable a resolver.

b_r es el vector numérico de condiciones de frontera.

r es el número de condiciones de frontera.

i es el número de incógnitas en el sistema.

Al aplicar los multiplicadores de Lagrange se realiza un sistemas de restricciones y fuerzas las cuales mantendrán las condiciones de frontera invariantes en el tiempo, por lo cual el producto de éstos multiplicadores puede ser expresado mediante la siguiente expresión :

$$\lambda_r (q_r u_i - b_r) = 0$$

Para el caso del sistema :

$$A_{ij} u_j = F_i$$

se observa que al realizar el acomodo global de los elementos del cuerpo en estudio el invariante funcional en el elemento finito se define como :

$$\partial I = (A_{ij} u_j - f_i) \partial u_i = 0$$

o

$$\partial I = \partial (0.5 A_{ij} u_i u_j - f_i u_i) = 0$$

la cual al ser sumada con la expresión de los multiplicadores de Lagrange obtenemos que :

$$J = 0.5 A_{ij} u_i u_j - f_i u_i + \lambda_r (q_r u_i - b_r)$$

Esta expresión nos relaciona a la cantidad de energía necesaria para modificar las condiciones de frontera, por lo cual es necesario encontrar el mínimo valor posible entre cada incógnita u_i y λ_r impuestas por las condiciones de frontera, por lo cual :

$$\partial J = \frac{\partial J}{\partial u_i} \partial u_i + \frac{\partial J}{\partial \lambda_r} \partial \lambda_r = 0$$

Debido a que ∂u_i y $\partial \lambda_r$ son arbitrarias encontramos que las parciales con respecto a la variable u y las parciales con respecto a λ son igual a cero por lo que se puede construir el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{bmatrix} A_{ij} & q_{ri} \\ q_{rj} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ b_r \end{bmatrix}$$

lo cual permite incorporar las condiciones de frontera en la matriz global del elemento finito, logrando así un sistema de ecuaciones independientes , los cuales al plantearse el proceso de solución harán que las condiciones de frontera sean respetadas, al mismo tiempo que se obtienen los resultados de las incógnitas en estudio.

4.6 Solución del sistema de ecuaciones algebraicas

Al realizar los pasos anteriores uno llega a obtener un sistema de ecuaciones linealmente independiente de n ecuaciones con n incógnitas, lo que permite realizar operaciones matriciales que permiten el conocimiento de los coeficientes de solución del problema analizado.

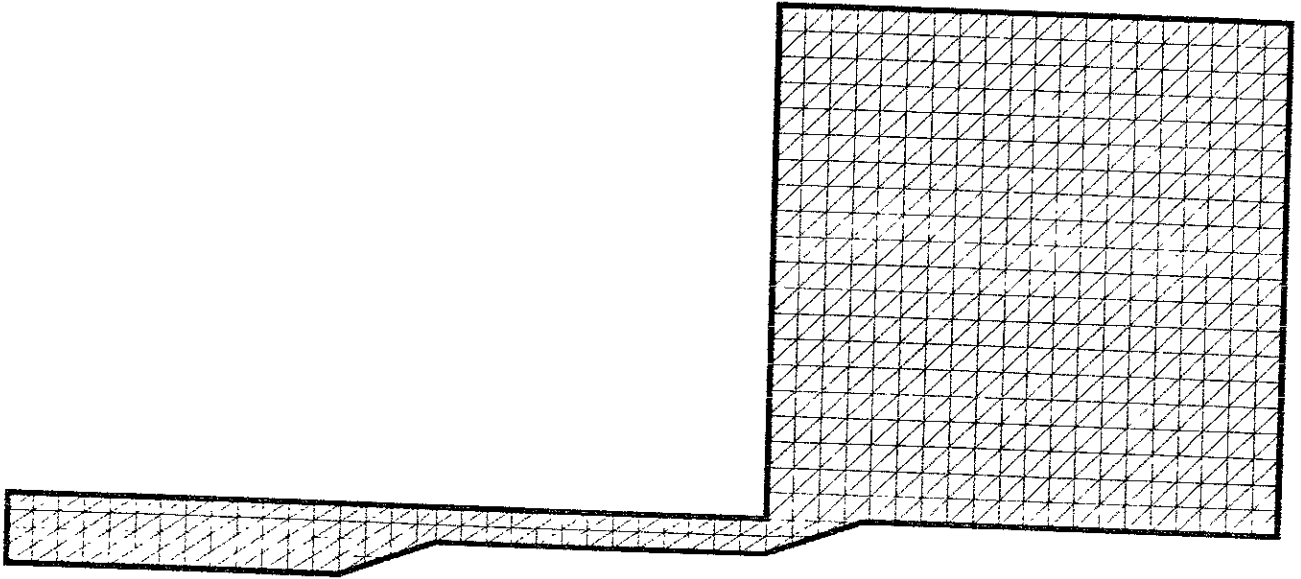
Los procesos o métodos que llegan a determinar éstos coeficientes son : el método de Gauss-Jordan, el método Gauss-Seidel, el método de cofactores, etc., así como el uso de paquetería especializada.

4.7 Post-Procesamiento de datos de interés particular

Este paso se utiliza para obtener una visualización del fenómeno de estudio, lo que permite un mejor entendimiento y/o corrección de los métodos y elementos empleados en el proceso de solución.

5. Planteamiento de Solución

Para poder llevar a cabo el análisis, primero será necesario discretizar el dominio donde se presenta el fenómeno de interés, mediante el uso de elementos geométricos, los cuales para este análisis en particular serán triángulos.



Acto seguido se procederá a buscar las ecuaciones diferenciales que representen al fenómeno de interés, en este caso las ecuaciones que mejor representan al fenómeno son :

Las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

y la ecuación de Continuidad

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Sin embargo debido a la complejidad del fenómeno, el estudio se realizará en **2D**, por lo cual las ecuaciones anteriores se reducen a :

$$\rho g_x - \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Para llegar a obtener el comportamiento de las variables de interés en un comportamiento laminar, se pueden emplear varios procesos de solución, sin embargo para este caso de estudio se emplearan los métodos de “*formulación mezclada de velocidad y presión*” así como el método de la “*formulación de penalización*” para la obtención de resultados.

5.1 Formulación Mezclada de Velocidad y Presión

En este método como en los otros las ecuaciones de Navier-Stokes, así como la ecuación de Continuidad, son empleadas en el planteamiento de solución, sin embargo cada metodología presenta ventajas y desventajas las cuales se discutirán en cada proceso de solución.

Las ecuaciones empleadas en flujos **2D** son :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g_y + \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

donde :

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

las cuales al ser sustituidas en las ecuaciones anteriores obtenemos :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g_y + \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Dichas ecuaciones nos servirán de base para llevar a cabo el método de peso residual con el fin de obtener el modelo matricial que nos permita representar el comportamiento del fenómeno en estudio. Por lo que al aplicar el método de peso residual obtenemos :

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{du}{dt} - \rho g_x + \frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} w_1 dx dy = 0$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{dv}{dt} - \rho g_y + \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\} w_2 dx dy = 0$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} w_3 dx dy = 0$$

donde :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}$$

Las cuales al aplicarles el teorema de Green-Gauss encontramos que :

$$\left\{ \rho w_1 \frac{du}{dt} - w_1 \rho g_x - \frac{\partial w_1}{\partial x} P_x + 2\mu \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial w_1}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dx dx = \int_{\Gamma} w_1 \left\{ \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - P_x \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right\} ds$$

$$\left\{ \rho w_2 \frac{dv}{dt} - w_2 \rho g_y - \frac{\partial w_2}{\partial y} P_y + \mu \frac{\partial w_2}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2\mu \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy = \int_{\Gamma} w_2 \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - P_y \right) n_y \right\} ds$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} w_3 dx dy = 0$$

Al observar las dos primeras ecuaciones en su forma integral, se cae en la cuenta que estas ecuaciones dependen del tiempo por lo que se empleará un modelo de elemento finito semidiscreto, también se puede observar que los términos empleados en el termino de tiempo existen términos de aceleración convectiva no lineales, los cuales pueden ser linealizados, mediante el uso del método Galerkin.

Para ello se utilizaran los siguientes identidades lineales :

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j^e, \quad v = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j^e, \quad P = \sum_{j=1}^n P_j \psi_j^e \quad \text{y} \quad w_i = \psi_i^e$$

dichas identidades son sustituidas dentro de las ecuaciones de forma integral antes mostradas y al desarrollar los productos y agruparlos por variables se obtiene el siguiente arreglo :

$$M_{ij} \frac{\partial \theta_i^e}{\partial t} + C_{ij} \theta_i^e + K_{ij} \theta_i^e - f_i^e = 0$$

por lo cual el arreglo matricial quedara de la siguiente manera :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] & [0] \\ [0] & [M] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{11} + C_{22}] & [0] & [0] \\ [0] & [C_{11} + C_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & [K^{13}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] & [K^{23}] \\ [K^{31}] & [K^{32}] & [K^{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [f^1] \\ [f^2] \\ [0] \end{Bmatrix}$$

donde :

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \rho \psi_i \psi_j dx dy, \quad C_{11} = \int_{\Omega^e} \rho \psi_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} dx dy, \quad C_{22} = \int_{\Omega^e} \rho \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 K^{11} &= 2\mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy + \mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy & K^{12} &= \mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy & K^{13} &= - \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \psi_j dx dy \\
 K^{21} &= \mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy & K^{22} &= \mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy + 2\mu \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy & K^{23} &= - \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \psi_j dx dy \\
 K^{31} &= - \int_{\Omega'} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy & K^{32} &= - \int_{\Omega'} \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy & K^{33} &= \int_{\Omega'} 0 dx dy
 \end{aligned}$$

Para encontrar las fuerzas que actúan dentro del sistema solo se tiene que aplicar las siguientes identidades :

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_{\Omega'} \rho g_x \psi_i dx dy + \int_{\Gamma'} \psi_i \left\{ \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - P \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right\} ds \\
 F_y &= \int_{\Omega'} \rho g_y \psi_i dx dy + \int_{\Gamma'} \psi_i \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - P \right) n_y \right\} ds
 \end{aligned}$$

La ventaja de usar este método, estriba en que el método permite el uso de algoritmos de integración en el tiempo de forma explícita, sin embargo la gran desventaja de este método es que al utilizar el método de aglomeración de masa existe la posibilidad de un deterioro en el proceso de solución, sin embargo en el caso de flujo estable, se puede eliminar la matriz de masa, por lo que la tarea se reduce a la solución de las ecuaciones algebraicas no lineales en forma iterativa.

5.2 Formulación de la función de penalización

En la función de penalización la presión es representada por la siguiente ecuación :

$$P = -\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

donde λ es un parámetro de las condiciones de incomprensibilidad, el cual debe tener un valor mayor a cero, por lo cual la ecuación de la Continuidad es eliminada y solo se emplea las ecuaciones de Navier-Stokes.

La principal ventaja de la formulación de penalización es que la variable adicional \mathbf{P} es eliminada, por lo cual el sistema de ecuaciones queda :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g_x + \frac{\partial \left(-\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho g_y + \frac{\partial \left(-\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

las cuales al aplicarles el método Galerkin y el teorema de Gauss-Green, obtenemos el siguiente sistema :

$$[M] \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + [L] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

este al ser desarrollado queda :

$$\begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{11} + C_{22}] & [0] \\ [0] & [C_{11} + C_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

donde :

$$K_{11} = \int_{\Omega'} \left(2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) dx dy, \quad K_{12} = \int_{\Omega'} \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy$$

$$K_{21} = \int_{\Omega'} \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy, \quad K_{22} = \int_{\Omega'} \left(2\mu \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) dx dy$$

$$L_{11} = \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy, \quad L_{12} = \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy, \quad L_{21} = \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy, \quad L_{22} = \int_{\Omega'} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy$$

$$F_x = \int_{\Omega'} \rho g_x \psi_i dx dy + \int_{\Gamma'} \psi_i \left\{ \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right\} ds$$

$$F_y = \int_{\Omega'} \rho g_y \psi_i dx dy + \int_{\Gamma'} \psi_i \left\{ \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y \right\} ds$$

Para el caso de flujo estable, la matriz de masa puede ser suprimida por lo cual el sistema de ecuaciones resultante es :

$$[[C] + [K] + \lambda[L]] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

Sin embargo para un flujo incompresible $\lambda \rightarrow \infty$, por lo que las matrices **C** y **K** por ser finitas, no toman participación en el proceso de solución por lo cual el sistema a resolver se reduce a :

$$\lambda[L] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

El procedimiento empleado para obtener los coeficientes de la matriz **L** dan por lo general una matriz no singular al evaluar exactamente los elementos de las integrales, independientemente del elemento que se este empleando. Debido a que la matriz **L** es no singular, se encontraría que solo la solución trivial para el flujo de velocidades daría resultado, por lo cual es necesario hacer que la matriz **L** sea singular, la forma de lograr esto es evaluando las integrales de forma numérica con lo cual se asegura que la matriz sea singular.

La principal ventaja de este método es que el almacenamiento de datos así como el número de ecuaciones a resolver es mucho menor a cualquier otro método de solución, esto se debe principalmente a que la presión ha sido eliminada del sistema de ecuaciones

Para calcular la presión en los puntos de interés solo se debe substituir los valores en la expresión de la presión.

Existen muchos otros métodos de solución los cuales tienen ventajas en cálculos de 3D, otros tienen ventajas en capacidad de memoria y almacenamiento de datos, algunos otros en velocidades de convergencia, sin embargo el uso de uno u otro presenta un planteamiento y enfoque distinto, así como requerimientos de velocidad y memoria, los cuales variaran dependiendo de la estructura y potencia del programa empleado.

6. Generación de Funciones

Del capítulo anterior se observa el uso constante de funciones por lo cual será necesario detenerse un poco en el planteamiento y obtención de esas funciones, que al ser combinadas con los sistemas matriciales dan como resultado la representación del fenómeno en estudio.

Para el caso de haber seleccionado un triángulo con tres nodos o vértices se plantea el siguiente sistema matricial :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

de la matriz formada por las coordenadas del triángulo, se procede a realizar la inversa de dicha matriz con lo cual se obtiene el siguiente sistema :

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

donde la matriz con coeficientes α , β y γ es la matriz inversa de las coordenadas del triángulo, debido a que se esta empleando un triángulo de tres nodos se debe utilizar la función de interpolación $U^e(x,y)=\alpha+\beta x+\gamma y$, por lo que la función $\psi_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y$.

Estas funciones ψ deben cumplir las siguientes condiciones :

$$\psi_i^e(x_i^e, y_i^e) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^e = 1$$

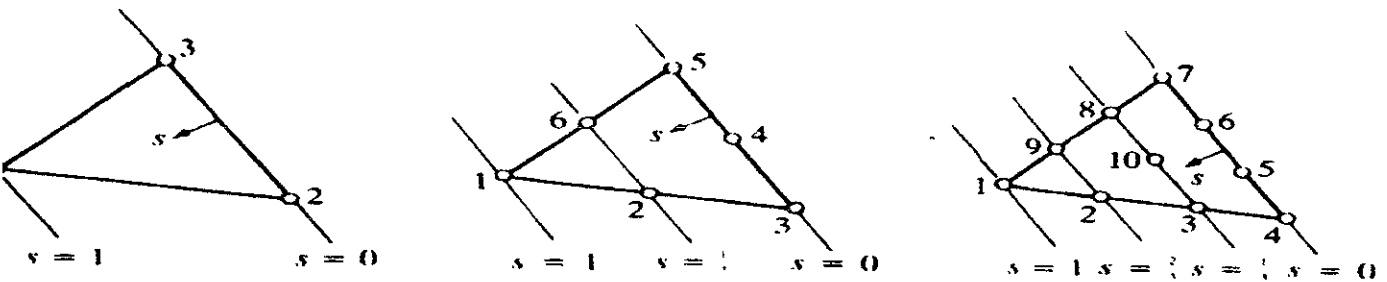
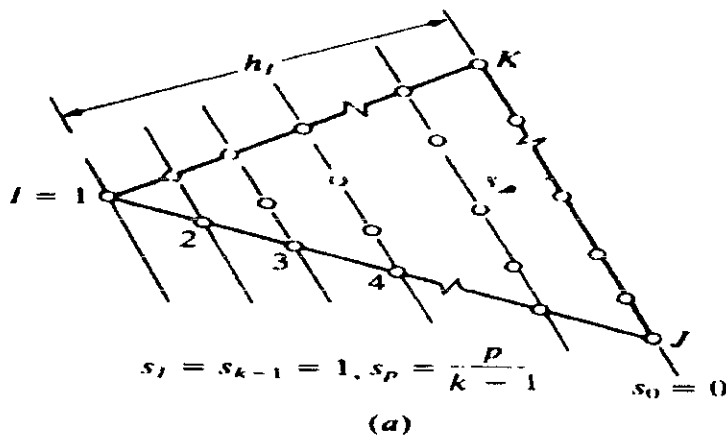
$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i^e}{\partial x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_i^e}{\partial y} = 0$$

Debido a que son tres puntos deben existir tres funciones ψ por cada triángulo existente en el mallado, sin embargo para obtener la representación de las funciones de triángulos con un mayor número de nodos es necesario emplear el método de los "elementos polinomiales de Lagrange", el cual será explicado a continuación :

Los pasos a seguir en el método de los elementos polinomiales de Lagrange son :

1. Dibujar un triángulo con el número de nodos deseado.



2. Asignarles el valor de 1 y 0 a los extremos y dependiendo del número de nodos será la división de fracciones.

3. tomar $s_0 = 0$, $s_l = s_{k-1} = 1$ y $s_p = \frac{p}{k-1}$.

4. Aplicar la formula :
$$\psi_i = \prod_{p=0}^{k-2} \frac{L_l - s_p}{s_l - s_p}$$

Para demostrar como obtener las funciones ψ se utilizaran 2 triángulos, el primer triángulo posee tres nodos, y como se puede observar en la figura anterior el triángulo de tres nodos solo emplea dos

indicadores, los cuales son s_0 y s_1 . Lo que indica que existen 2 nodos por lado, por lo cual $k=2$, con esto podemos decir que p va de cero a uno, otro aspecto que hay que considerar es que el triángulo lineal contiene 3 nodos por lo cual $n=3$

Al aplicar la formula tenemos :

$$\psi_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_1 - s_0} = \frac{L_1 - 0}{1 - 0} = L_1$$

esto se debe a que se está analizando el nodo 1 únicamente, por lo cual las siguientes funciones quedan de la forma :

$$\psi_2 = \frac{L_2 - s_0}{s_1 - s_0} = \frac{L_2 - 0}{1 - 0} = L_2$$

$$\psi_3 = \frac{L_3 - s_0}{s_1 - s_0} = \frac{L_3 - 0}{1 - 0} = L_3$$

donde las funciones ψ fueron previamente determinadas, por el método matricial..

Para el segundo caso utilizaremos un triángulo que posea 3 nodos por lado lo que significaría que $k=3$ y en número de nodos que forman al triángulo seria de $n=6$, por lo cual al aplicar la formula encontramos que :

$$\psi_1 = \frac{L_1 - s_0}{s_2 - s_0} \frac{L_1 - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{L_1 - 0}{1 - 0} \frac{L_1 - 0.5}{1 - 0.5} = L_1(2L_1 - 1)$$

siendo esta función de interpolación la que representa el nodo 1

$$\psi_2 = \frac{L_2 - s_0}{s_1 - s_0} \frac{L_1 - s_0}{s_1 - s_0} = \frac{L_2 - 0}{0.5 - 0} \frac{L_1 - 0}{0.5 - 0} = 4L_2L_1$$

siendo esta función de interpolación la que representa al nodo localizado en el centro de la línea, por lo que las siguientes funciones de interpolación se representan de la forma

$$\psi_3 = L_2(2L_2 - 1), \quad \psi_4 = 4L_2L_3, \quad \psi_5 = L_3(2L_3 - 1), \quad \psi_6 = 4L_3L_1$$

Sabiendo que :

$$L_i = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y$$

cuyos coeficientes están determinados por la matriz inversa de los vértices del triángulo lineal, lo que significa que al realizar el producto de las funciones encontramos que el resultado es similar a la función de interpolación de segundo orden la cual se representa como :

$$U^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

Debido a que las funciones de interpolación necesarias para resolver el modelo varían de acuerdo al tipo de matriz a calcular, se procederá a mostrar el polinomio de trabajo en cada una de las variables que intervienen. Siendo estos :

$$\psi_i = \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}x + \varepsilon_{3i}y + \varepsilon_{4i}x^2 + \varepsilon_{5i}xy + \varepsilon_{6i}y^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \varepsilon_{2i} + 2\varepsilon_{4i}x + \varepsilon_{5i}y$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \varepsilon_{3i} + \varepsilon_{5i}x + 2\varepsilon_{6i}y$$

$$\psi_i \psi_j = A + Bx + \Gamma y + \Delta x^2 + Exy + \Phi y^2 + Hx^3 + Lx^2y + Kxy^2 + My^3 + Nx^4 + Ox^3y + \Pi x^2y^2 + \Theta xy^3 + \Sigma y^4$$

$$\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = A_1 + B_1x + C_1y + D_1x^2 + E_1xy + F_1y^2 + G_1x^3 + H_1x^2y + I_1xy^2 + J_1y^3$$

$$\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = A_2 + B_2x + C_2y + D_2x^2 + E_2xy + F_2y^2 + G_2x^3 + H_2x^2y + I_2xy^2 + J_2y^3$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = g + hx + iy + jx^2 + kxy + ly^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = g_1 + h_1x + i_1y + j_1x^2 + k_1xy + l_1y^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = g_2 + h_2x + i_2y + j_2x^2 + k_2xy + l_2y^2$$

Al desarrollar las funciones ψ se toma en cuenta el orden de numeración de nodos, el cual consiste en numerar en primer termino a los nodos de los vértices y después seguir numerando los nodos interiores de forma escalada hasta terminar de enumerar el número total de nodos en la figura base de análisis, éstos al ser acomodadas en la forma previamente descrita forman el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1^2 - \alpha_1 & 4\alpha_1\beta_1 - \beta_1 & 4\alpha_1\gamma_1 - \gamma_1 & 2\beta_1^2 & 4\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1^2 \\ 2\alpha_2^2 - \alpha_2 & 4\alpha_2\beta_2 - \beta_2 & 4\alpha_2\gamma_2 - \gamma_2 & 2\beta_2^2 & 4\beta_2\gamma_2 & 2\gamma_2^2 \\ 2\alpha_3^2 - \alpha_3 & 4\alpha_3\beta_3 - \beta_3 & 4\alpha_3\gamma_3 - \gamma_3 & 2\beta_3^2 & 4\beta_3\gamma_3 & 2\gamma_3^2 \\ 4\alpha_1\alpha_2 & 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & 4(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) & 4\beta_1\beta_2 & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) & 4\gamma_1\gamma_2 \\ 4\alpha_2\alpha_3 & 4(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) & 4(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) & 4\beta_2\beta_3 & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) & 4\gamma_2\gamma_3 \\ 4\alpha_3\alpha_1 & 4(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) & 4(\alpha_3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_3) & 4\beta_3\beta_1 & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) & 4\gamma_3\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ xy \\ y^2 \end{Bmatrix}$$

al derivar este sistema ψ con respecto a \mathbf{x} se obtendrá el siguiente sistema :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_5}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_6}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha_1\beta_1 - \beta_1 & 4\beta_1^2 & 4\beta_1\gamma_1 \\ 4\alpha_2\beta_2 - \beta_2 & 4\beta_2^2 & 4\beta_2\gamma_2 \\ 4\alpha_3\beta_3 - \beta_3 & 4\beta_3^2 & 4\beta_3\gamma_3 \\ 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & 8\beta_1\beta_2 & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \\ 4(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) & 8\beta_2\beta_3 & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) \\ 4(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) & 8\beta_3\beta_1 & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

y al derivar el sistema ψ con respecto a \mathbf{y} se obtiene el sistema :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_5}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_6}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha_1\gamma_1 - \gamma_1 & 4\beta_1\gamma_1 & 4\gamma_1^2 \\ 4\alpha_2\gamma_2 - \gamma_2 & 4\beta_2\gamma_2 & 4\gamma_2^2 \\ 4\alpha_3\gamma_3 - \gamma_3 & 4\beta_3\gamma_3 & 4\gamma_3^2 \\ 4(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) & 8\gamma_1\gamma_2 \\ 4(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) & 8\gamma_2\gamma_3 \\ 4(\alpha_3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_3) & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) & 8\gamma_3\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Con los sistemas previamente calculados se procede a realizar los productos de funciones que darán forma a la matriz **M** (de masa), **K** (de rigidez) y **C** (términos convectivos no lineales), y mediante el uso de arreglos matriciales(*matriz nodal*) se llegará a formar un sistema matricial global que representará las condiciones del fenómeno en estudio en un instante determinado.

Debido a que el estudio del fenómeno está basado en triángulos, es posible aplicar la siguiente formula de integración numérica :

$$\iint L_1^i L_2^j L_3^k dx dy = \frac{i! j! k!}{(i + j + k + 2)!} 2A$$

la cual al ser aplicada genera la tabla siguiente de coeficientes numéricos dentro de la matriz que se esté calculando.

<p>$n = r + s$ Grado del Polinomio</p>	<p>Ecuación</p>
<p>$n=1$</p>	$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i' y_i'$
<p>$n=2$</p>	$\frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 x_i' y_i'$
<p>$n=3$</p>	$\frac{1}{30} \sum_{i=1}^3 x_i' y_i'$
<p>$n=4$</p>	$\frac{1}{60} \sum_{i=1}^3 x_i' y_i'$

Estas ecuaciones solo son válidas, si es que el sistema de coordenadas empleado para definir los vértices del triángulo se tomaron desde el centroide de la figura, de no ser así, las ecuaciones antes presentadas se modificarían con la adición del termino $3^n \hat{x}' \hat{y}'^s$ para $n > 1$.

Para $n=1$, las ecuaciones son :

$$\hat{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \hat{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

Para $n=2$, las ecuaciones son :

$$\hat{x}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\hat{x}^2 \right), \hat{x}\hat{y} = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\hat{x}\hat{y} \right), \hat{y}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\hat{y}^2 \right)$$

Para $n=3$, las ecuaciones son :

$$\hat{x}^3 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^3 + 27\hat{x}^3 \right), \quad \hat{x}^2 \hat{y} = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i + 27\hat{x}^2 \hat{y} \right), \quad \hat{x} \hat{y}^2 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i^2 + 27\hat{x} \hat{y}^2 \right)$$

$$\hat{y}^3 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^3 + 27\hat{y}^3 \right)$$

Para $n=4$, las ecuaciones son :

$$\hat{x}^4 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^4 + 81\hat{x}^4 \right), \quad \hat{x}^3 \hat{y} = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^3 y_i + 81\hat{x}^3 \hat{y} \right), \quad \hat{x}^2 \hat{y}^2 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i^2 + 81\hat{x}^2 \hat{y}^2 \right)$$

$$\hat{x} \hat{y}^3 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i^3 + 81\hat{x} \hat{y}^3 \right), \quad \hat{y}^4 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^4 + 81\hat{y}^4 \right)$$

Las cuales generarán un arreglo matricial de 18 renglones por 18 columnas, por cada elemento triangular de 6 nodos existente en el mallado.

7. Conclusiones y comentarios

De los capítulos anteriormente expuestos se puede concluir que :

- 1.- El empleo de métodos numéricos como el Elemento Finito, permiten la modelación de fenómenos de índole física, permitiendo así la comprensión de las variables de mayor relevancia que intervienen en el fenómeno de interés.
- 2.- En la simulación del llenado de un molde intervienen varios fenómenos físicos como son : la Transferencia de Masa, la Transferencia de Calor, la Dinámica de Fluidos así como los aspectos relacionados con el Crecimiento y formación de grano, la Porosidad y constitución física del molde, la consideración de una Frontera Libre en la cual se presentan los estados líquido y gaseoso.
- 3.- Para realizar el estudio de fenómenos mediante el método del Elemento Finito es necesario contar con equipos computacionales superiores a una PC, ya que estas reducen en gran medida la obtención de resultados debido principalmente a su limitada memoria y a su velocidad de procesamiento.
- 4.- El grado de exactitud con que se quiera representar el problema de estudio, variará de acuerdo a la densidad de mallado del cuerpo, a la cantidad de nodos asignados al elemento geométrico base y a las ecuaciones de solución empleadas en el planteamiento de solución.
- 5.- Al querer simular un fenómeno dinámico es necesario realizar un proceso dinámico que cambie de acuerdo a las necesidades del problema en estudio.
- 6.- La simulación mediante el uso de técnicas numéricas se va complicando en la medida en que se van incorporando nuevas variables de estudio ya que estas traen consigo un nuevo conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales deben ser acopladas a los sistemas de globalización, a los sistemas de restricción y a los procedimientos de solución.

Debido a que la solución de este problema supero las expectativas de la presente Tesis se da a continuación los siguientes comentarios :

El tema de elemento finito es muy amplio y para el caso de este análisis en particular, quedaron muchos aspectos sin cubrir entre ellos están :

- La generación de mallado automático para cualquier geometría dada, las cuales pueden cubrir los siguientes puntos :

- 1. Generación de geometrías complejas a partir de puntos determinados, los cuales se podrían realizar mediante la especificación de curva y línea o mediante el uso de coordenadas paramétricas, así como un número máximo de nodos en cada curva o línea de la figura construida.*
- 2. Para los puntos donde exista un mayor interés de análisis dar la posibilidad de incrementar el número de nodos.*
- 3. Cuando la geometría a estudiar presente curvas, será necesario realizar cambios de base a fin de facilitar el análisis.*
- 4. Generación de una base de datos que contenga el número de nodos de cada elemento, el número de elementos existentes en el mallado, la forma del elemento, el número de restricciones totales en el mallado, el número de fuerzas o desplazamientos existentes en el momento del análisis.*

- Planteamientos de métodos de resolución y generación , cuyos puntos a resolver son:

- 1. Generación del polinomio característico de acuerdo al número de nodos y a la figura geométrica base.*
- 2. Métodos de integración numérica, método de Newton-Raphson, método de Runge-Kutta para la solución de ecuaciones diferenciales, métodos de solución para sistemas matriciales lineales de $n \times n$, algoritmos de solución para ecuaciones diferenciales parabólicas e hiperbólicas, rutinas iterativas que hagan uso de los métodos antes mencionados.*

- Acoplamiento e imposición de las condiciones de frontera, cuyos principales puntos a resolver son :

- 1. La generación de un algoritmo que permita el acoplamiento de elementos a nivel matricial.*
- 2. La obtención de las condiciones de frontera por medio de un archivo así como un algoritmo que permita ya sea la modificación del sistema global o la adición de columnas y renglones al sistema global a resolver.*
- 3. Realizar un estudio mas detallado sobre las fronteras libres así como los efectos que ocasionan en la interface liquido - gas.*

- Procesamiento de datos, sus puntos a resolver mas importantes son :

- 1. El acoplamiento entre el mallado, la imposición de condiciones de frontera y las técnicas de solución mencionadas con anterioridad.*
- 2. Elaborar algoritmos que permitan definir los intervalos de tiempo máximos permitidos a fin de garantizar convergencia.*
- 3. Diseñar la llamada y salida de datos por medio de archivos fuente - destino o en su defecto realizar el llamado a la memoria principal a fin de economizar tiempo de computo.*
- 4. Eliminación de datos muertos en memoria activa.*

- Post-Procesamiento de los datos generados en el procesamiento, cuyos puntos a resolver mas importantes son :

- 1. Llamado de datos de los archivos fuente - destino.*
- 2. Manejo de interfaz gráfica entre el cuerpo de análisis , el mallado y las variables de interés*

Cada uno de los puntos antes mencionados por su gran extensión pueden ser considerados como temas de Tesis, sin embargo el planteamiento y el desarrollo de herramientas debe hacerse gradualmente así como empezar a fomentar en el estudiantado un cierto interés en la investigación y en el desarrollo de futuras herramientas de trabajo.

Pseudocódigo

Datos de entrada :

densidad del metal fundido → rho [kg/m³]

viscosidad del metal fundido → mu [kg/m s]

gasto volumétrico * → gvol [m³/s]

profundidad del canal → pcnl [m]

profundidad del molde → pml d [m]

puntos del contorno de la figura → x[1],...,x[11] , y[1],...,y[11] [m]

número de divisiones máximas por línea → div[1], div[2], div[3], div[4], div[5],
div[6], div[7], div[8], div[9], div[10], div[11]

(x₈,y₈)

(x₇,y₇)

(x₁₀,y₁₀)

(x₉,y₉)

(x₅,y₅)

(x₆,y₆)

(x₁₁,y₁₁)

(x₃,y₃)

(x₄,y₄)

(x₁,y₁)

(x₂,y₂)

Planteamiento de intervalo

A_i → Area

$$A_1 = \{(x_2 - x_1) * (y_3 - y_1)\}, A_2 = \{(x_3 - x_2) * (y_3 - y_2)\} / 2, A_3 = \{(x_4 - x_1) * (y_9 - y_4)\}, A_4 = \{(x_5 - x_4) * (y_5 - y_4)\} / 2,$$

$$A_5 = \{(x_6 - x_9) * (y_7 - y_6)\}$$

* este dato puede ser obtenido de tablas relacionando el volumen a llenar con la altura del vertedero o puede ser dado por el usuario

Volcanal = $[(A_1+A_2+A_3+A_4)*pcnl]$ → volumen total del canal de alimentación.

Vol1 = $[(A_1+A_2)*pcnl]$

Vol2 = $[(A_3+A_4)*pcnl]$

volumen del molde = $[A_5*pmld]$ → **Vol3**

volumen total = **volcanal** + **volmolde** → **Vtot**

tiempo de llenado = $Vtot/gvol$ → **tllc**

ángulo1 = $atan((y_3-y_2)/(x_3-x_2))$ → **Ang1**

ángulo2 = $atan((y_5-y_4)/(x_5-x_4))$ → **Ang2**

tiempo - volumen :

intervalo de tiempo inicial = $\Delta t = 0.01s$ → **delt**

volumen de entrada = $gvol * delt$ → **Vent**

t es el tiempo transcurrido

t = delt

cont = 0 → contador

Repeat

{

Repeat

{

If (Vent >= 0.1*(Vol1+Vol2) then

{

delt = delt*0.5

Vent = gvol *delt

t = delt

}

} Until (Vent < 0.1*(Vol1+Vol2)

If (Vent <= Vol1) then

{

longitud en dirección x = $Vent/(pcnl*0.001) \rightarrow longx$

el valor de 0.001 se da por suponer un espesor de 1 mm.

If (longx <= (x₂-x₁)) then

{

distancia recorrida en dirección "x" es = **longx** \rightarrow **distx**

altura "y" alcanzada por el fluido en el instante del análisis = **0.001** \rightarrow **disty**

}

else

{

Solver(Vent,Ang1,a) \rightarrow se refiere a la subrutina que calculara el punto de intersección del metal fundido con el molde mediante la técnica de Newton-Raphson de la siguiente ecuación $Vol - [(a * rsin\alpha) + 0.5(r cos\alpha)(rsin\alpha)] * pcnl$, a fin de encontrar las coordenadas de ubicación por lo que las variables **distx** = $a+r cos\alpha$ y **disty** = $(y_1+ rsin\alpha)$, siendo **a** la distancia del punto 1 al punto 2.

cont = cont + 1

}

If ((Vent > vol1) and (Vent <= Vol2)) then

{

Vini = $(Vent - vol1)$ \rightarrow está variable auxiliar se implementara para calcular las variaciones de coordenadas en el volumen2.

longx = $Vini/(0.001 * pcnl)$

}

If (longx <= (x₄-x₁)) then

{

distx = **longx** \rightarrow variable auxiliar de la distancia recorrida en el eje x

disty = $0.001 + (y_3-y_1)$ \rightarrow variable auxiliar de la altura del fluido.

}

else

{

Solucion1(Vini, Ang2,b) → subrutina empleada anteriormente para cálculo de coordenadas de intersección obteniendo que la variable **distx = longx = (b + rcosα)** y que la variable **disty = rsinα + (y₃-y₁)**, siendo **b** la distancia del punto 1 al punto 4.

}

If (Vent > Vol1+Vol2) and (Vent <= Vtot) then

{

Vini = Vent - (Vol1+Vol2)

longx = Vini/(0.001 * pml)

}

If (longx <= (x₆-x₉)) then

{

distx = x₉ + longx

disty = 0.001 + (y₆-y₁)

}

else

{

distx = (x₆-x₉)

dsty = Vent / (pml * distx) → variable auxiliar en la variación de y en el molde

disty = (y₆-y₁)+dsty

}

}

}

delt = delt + incremento de tiempo → increment

t = delt

Vent = gvol * delt

}

}Until (Vent > Vtot)

Coordenadas - tiempo

El uso de esta rutina esta incluida en la subrutina **Coorden(disx, disy)**, donde **disx** → **distx** y **disy** → **disty**

If ((disx <= (x₂-x₁)) then

{

intervalo de coordenadas = $(x_2-x_1)/div[1]$ → **Interv**

número de intervalos de estudio = **Round (disx/Interv)+1** → **estud**

element = 1 → inicialización de conteo de elementos del mallado.

Xmax = disx → variable auxiliar de verificación

Ymax = disy → variable auxiliar de verificación.

X, Y → variables de carácter matricial para el almacenamiento de los elementos triangulares.

X[1]=x₁, Y[1]=y₁, X[2]=X[1], Y[2]=Y[1]+disy, X[3]=x₁+estud, Y[3]=Y[2]

Repeat

{

element = element + 1 → aumento en uno de los elementos a considerar.

If ((element mod 2) = 0) then

{

X[element*3-2]=X[element*3-3], Y[element*3-2]=Y[element*3-3]

X[element*3-1]=X[element*3-5], Y[element*3-1]=Y[element*3-5]

X[element*3]=X[element*3-1] + estud, Y[element*3]=Y[element*3-1]

}

else

{

X[element*3-2]=X[element*3-3], Y[element*3-2]=Y[element*3-3]

X[element*3-1]=X[element*3-2], Y[element*3-1]=Y[element*3-2] + disy

X[element*3]=X[element*3-1] + estud, Y[element*3]=Y[element*3-1]

}

}Until ((X[i]=Xmax) and (Y[i]=y₁))

If $((disx > (x_2 - x_1)) \text{ and } (disx < (x_3 - x_1)))$ then

{

For $vb = 1$ to $div[2]$

{

If $(disy) \leq ((vb/div[2]) * (y_3 - y_1))$ then

{ $Interv = (x_2 - x_1) / div[1]$

$Intery = (disy / vb) \rightarrow$ variable auxiliar que estima el número de intervalos de estudio, en la formación del mallado en dirección y

$z = vb \rightarrow$ variable auxiliar empleada para calcular el número de elementos en el mallado

así como el número de divisiones verticales.

}

$relem = z * (2 * div[1]) + (2 * z - 1) \rightarrow$ variable empleada para el cálculo de elementos geométricos en el mallado.

$element = 1$

$i = 1 \rightarrow$ contador auxiliar

$X_{max} = disx$

$X_{ref} = (x_2 - x_1) \rightarrow$ esta variable señala el cambio de pendiente o el inicio de mallado

$Y_{max} = disy$

$Y_{ref} = Y_{max} \rightarrow$ esta variable señala la altura máxima en el instante de estudio

$X[1] = x_1, Y[1] = y_1 \quad X[2] = X[1], Y[2] = Y[1] + Intery \quad X[3] = X[1] + Interv, Y[3] = Y[2]$

If $(i = 1)$ then

{

Repeat

{

$element = element + 1 \rightarrow$ aumento en uno de los elementos a considerar.

If $((element \bmod 2) = 0)$ then

{

$X[element * 3 - 2] = X[element * 3 - 3], Y[element * 3 - 2] = Y[element * 3 - 3]$

$X[element * 3 - 1] = X[element * 3 - 5], Y[element * 3 - 1] = Y[element * 3 - 5]$

$X[element * 3] = X[element * 3 - 1] + Interv, Y[element * 3] = Y[element * 3 - 1]$

```

If (X[element*3] > Xref) then
  {
    If z=1 then
      {
        interv := disx - (x2-x1)
        X[element*3]= X[element*3-1]+interv
        Xref = X[element*3]
        Yref = Y[element*3]
      }
    else
      {
        r = Y[element*3]/sin(Ang1) → variable auxiliar que permite el calculo de
distribución en el eje x
        Xrx = r cos(Ang1) + (x2-x1) → variable que encuentra punto de intersección entre
el fluido y el molde
        Interv = Xrx - X[element*3-1]
        X[element*3] = X[element*3-1]+Interv
        Xref = X[element*3]
        Yref = Y[element*3]
        i = i+1
      }
    else
      {
        X[element*3-2]=X[element*3-3], Y[element*3-2]=Y[element*3-3]
        X[element*3-1]=X[element*3-2] , Y[element*3-1]=Y[element*3-2] + Intery
        X[element*3]=X[element*3-1] + Interv, Y[element*3]=Y[element*3-1]
        If (X[element*3] > Xref) then
          {
            If z=1 then
              {
                interv := disx - (x2-x1)

```

$$X[\text{element}^*3] = X[\text{element}^*3-1] + \text{interv}$$

$$X_{\text{ref}} = X[\text{element}^*3]$$

$$Y_{\text{ref}} = Y[\text{element}^*3]$$

}

else

{

$r = Y[\text{element}^*3] / \sin(\text{Ang1})$ → variable auxiliar que permite el calculo de distribución en el eje x

$X_{rx} = r \cos(\text{Ang1}) + (x_2 - x_1)$ → variable que encuentra punto de intersección entre el fluido y el molde

$$\text{Interv} = X_{rx} - X[\text{element}^*3-1]$$

$$X[\text{element}^*3] = X[\text{element}^*3-1] + \text{Interv}$$

$$X_{\text{ref}} = X[\text{element}^*3]$$

$$Y_{\text{ref}} = Y[\text{element}^*3]$$

$$i = i + 1$$

}

}

}

} End Repeat (Until i > 1)

If i > 1 then

{

$$\text{rew} = ((i-1) * (2 * \text{div}[1]) + (2 * (i-1) - 1)) - ((i-2) * (2 * \text{div}[1]) + (2 * (i-2) - 1))$$

$$X[\text{element}^*3-2] = X[(\text{element} - \text{rew})^*2]$$

$$Y[\text{element}^*3-2] = Y[(\text{element} - \text{rew})^*2]$$

$$X[\text{element}^*3-1] = X[\text{element}^*3-2]$$

$$Y[\text{element}^*3-1] = Y[\text{element}^*3-2] + \text{Intery}$$

$$X[\text{element}^*3] = X[(\text{element} - \text{rew})^*3]$$

$$Y[\text{element}^*3] = Y[\text{element}^*3-1]$$

Repeat

{

element = element + 1

If (element mod 2 = 0) then

```

{
  X[element*3-2] = X[element*3-3]
  Y[element*3-2] = Y[element*3-3]
  X[element*3-1] = X[element*3-4]
  Y[element*3-1] = Y[element*3-4]
  X[element*3] = X[(element - rew)*3]
  Y[element*3] = Y[element*3-1]
}

```

else

```

{
  X[element*3-2] = X[element*3-3]
  Y[element*3-2] = Y[element*3-3]
  X[element*3-1] = X[element*3-5]
  Y[element*3-1] = Y[element*3-5]
  X[element*3] = X[(element - rew)*3]
  Y[element*3] = Y[(element - rew)*3]
}

```

If (X[element*3] = Xref) and (Y[element*3] = Yref) then

```

{
  element = element+1
  X[element*3-2] = X[element*3-3]
  Y[element*3-2] = Y[element*3-3]
  X[element*3-1] = X[element*3-2]
  Y[element*3-1] = Y[element*3-2] + Intery
  Y[element*3] = Y[element*3-1]
  r = Y[element*3]/sin(Ang1)
  Xrx = r cos(Ang1) + (x2-x1)
  Interv = Xrx - X[element*3-1]
  X[element*3] = X[element*3-1]+Interv
  Xref = X[element*3]
  Yref = Y[element*3]
}

```

$$i = i+1$$

}

element = element +1

Until ((X[(element-1)*3]=Xmax) and (Y[(element-1)*3]=Ymax))

} (End) Repeat

El procedimiento para mallar el resto de la figura es muy similar, solo se tiene que tomar en cuenta el numero de divisiones totales que existen desde el punto 1 al punto 5 para obtener el numero de divisiones totales para el eje x como para el eje y, para el caso del molde este solo debe tomar en cuenta lo punto existentes del punto 9 al punto 6 y realizar el mismo procedimiento antes mostrado.

Generación de matrices

Después de generar el mallado se procede a realizar los siguientes pasos en cada elemento geométrico previamente establecido :

1.- tomar los puntos que forman al elemento, que en este caso por tratarse de triángulos se tomaran los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) con lo cual se forma el siguiente arreglo matricial :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

al obtener dicho sistema se procede a calcular la inversa siendo esta de la forma :

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

donde :

$$\alpha_i = x_j y_k - x_k y_j, \beta_i = y_j - y_k, \gamma_i = -(x_j - x_k), 2A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Acto seguido se procede a calcular los coeficientes que formaran la matriz de coeficientes de un triángulo con 6 nodos aplicando la expresión :

$$\psi_i = \prod_{p=0}^{k-2} \frac{L_i - s_p}{s_i - s_p}$$

con lo que obtenemos el siguiente sistema así como sus respectivas derivadas con respecto a x y a y :

$$\begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1^2 - \alpha_1 & 4\alpha_1\beta_1 - \beta_1 & 4\alpha_1\gamma_1 - \gamma_1 & 2\beta_1^2 & 4\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1^2 \\ 2\alpha_2^2 - \alpha_2 & 4\alpha_2\beta_2 - \beta_2 & 4\alpha_2\gamma_2 - \gamma_2 & 2\beta_2^2 & 4\beta_2\gamma_2 & 2\gamma_2^2 \\ 2\alpha_3^2 - \alpha_3 & 4\alpha_3\beta_3 - \beta_3 & 4\alpha_3\gamma_3 - \gamma_3 & 2\beta_3^2 & 4\beta_3\gamma_3 & 2\gamma_3^2 \\ 4\alpha_1\alpha_2 & 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & 4(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) & 4\beta_1\beta_2 & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) & 4\gamma_1\gamma_2 \\ 4\alpha_2\alpha_3 & 4(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) & 4(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) & 4\beta_2\beta_3 & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) & 4\gamma_2\gamma_3 \\ 4\alpha_3\alpha_1 & 4(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) & 4(\alpha_3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_3) & 4\beta_3\beta_1 & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) & 4\gamma_3\gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_5}{\partial x} \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha_1\beta_1 - \beta_1 & 4\beta_1^2 & 4\beta_1\gamma_1 \\ 4\alpha_2\beta_2 - \beta_2 & 4\beta_2^2 & 4\beta_2\gamma_2 \\ 4\alpha_3\beta_3 - \beta_3 & 4\beta_3^2 & 4\beta_3\gamma_3 \\ 4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & 8\beta_1\beta_2 & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) \\ 4(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) & 8\beta_2\beta_3 & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) \\ 4(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3) & 8\beta_3\beta_1 & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_5}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\alpha_1\gamma_1 - \gamma_1 & 4\beta_1\gamma_1 & 4\gamma_1^2 \\ 4\alpha_2\gamma_2 - \gamma_2 & 4\beta_2\gamma_2 & 4\gamma_2^2 \\ 4\alpha_3\gamma_3 - \gamma_3 & 4\beta_3\gamma_3 & 4\gamma_3^2 \\ 4(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) & 4(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) & 8\gamma_1\gamma_2 \\ 4(\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) & 4(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) & 8\gamma_2\gamma_3 \\ 4(\alpha_3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_3) & 4(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) & 8\gamma_3\gamma_1 \end{bmatrix}$$

al mismo tiempo que se calculan los coeficientes se procede a realizar los siguientes productos entre funciones quedando de la siguiente forma:

$$\psi_i \psi_j = A + Bx + \Gamma y + \Delta x^2 + Exy + \Phi y^2 + Hx^3 + Ix^2 y + Kxy^2 + My^3 + Nx^4 + Ox^3 y + \Pi x^2 y^2 + \Theta xy^3 + \Sigma y^4$$

$$\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = A_1 + B_1 x + C_1 y + D_1 x^2 + E_1 xy + F_1 y^2 + G_1 x^3 + H_1 x^2 y + I_1 xy^2 + J_1 y^3$$

$$\psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = A_2 + B_2 x + C_2 y + D_2 x^2 + E_2 xy + F_2 y^2 + G_2 x^3 + H_2 x^2 y + I_2 xy^2 + J_2 y^3$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = g + hx + iy + jx^2 + kxy + ly^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = g_1 + h_1 x + i_1 y + j_1 x^2 + k_1 xy + l_1 y^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = g_2 + h_2 x + i_2 y + j_2 x^2 + k_2 xy + l_2 y^2$$

para poder calcular las integrales que resultan del producto entre funciones, se aplica la siguiente identidad :

$$\iint L_1^i L_2^j L_3^k dx dy = \frac{i! j! k!}{(i + j + k + 2)!} 2A$$

la cual permite obtener el resultado de la integral sustituyendo sumatorias previamente calculadas en las incógnitas respectivas siendo estas:

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$\bar{x}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9\bar{x}^2 \right), \quad \bar{x}\bar{y} = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9\bar{x}\bar{y} \right), \quad \bar{y}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9\bar{y}^2 \right)$$

$$\bar{x}^3 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^3 + 27\bar{x}^3 \right), \quad \bar{x}^2 \bar{y} = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i + 27\bar{x}^2 \bar{y} \right), \quad \bar{x}\bar{y}^2 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i^2 + 27\bar{x}\bar{y}^2 \right)$$

$$\bar{y}^3 = \frac{1}{30} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^3 + 27\bar{y}^3 \right)$$

$$\bar{x}^4 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^4 + 81\bar{x}^4 \right), \quad \bar{x}^3 \bar{y} = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^3 y_i + 81\bar{x}^3 \bar{y} \right), \quad \bar{x}^2 \bar{y}^2 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 y_i^2 + 81\bar{x}^2 \bar{y}^2 \right)$$

$$\bar{x}\bar{y}^3 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i^3 + 81\bar{x}\bar{y}^3 \right), \quad \bar{y}^4 = \frac{1}{60} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^4 + 81\bar{y}^4 \right)$$

con éstos pasos se puede calcular la matriz **M**, **C** y **K** de cada elemento triangular de 6 nodos que exista en el dominio a analizar.

Para el caso del ensamblaje entre elementos no se ha podido encontrar un algoritmo adecuado que permita realizar el acoplamiento entre elementos, ya que estos métodos por sus características especiales requieren del manejo de expresiones de tipo Booleano, así como de una gran cantidad de memoria, por lo que el arreglo global entre elementos no puede ser efectuado en una PC.

En el caso de la imposición de fronteras solo es necesario modificar el arreglo global mediante uno de los siguientes métodos :

$$\begin{bmatrix} A_{(aa)} & A_{(ab)} \\ A_{(ba)} & A_{(bb)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{(a)} \\ u_{(b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a \\ F_b \end{bmatrix}$$

o de la forma :

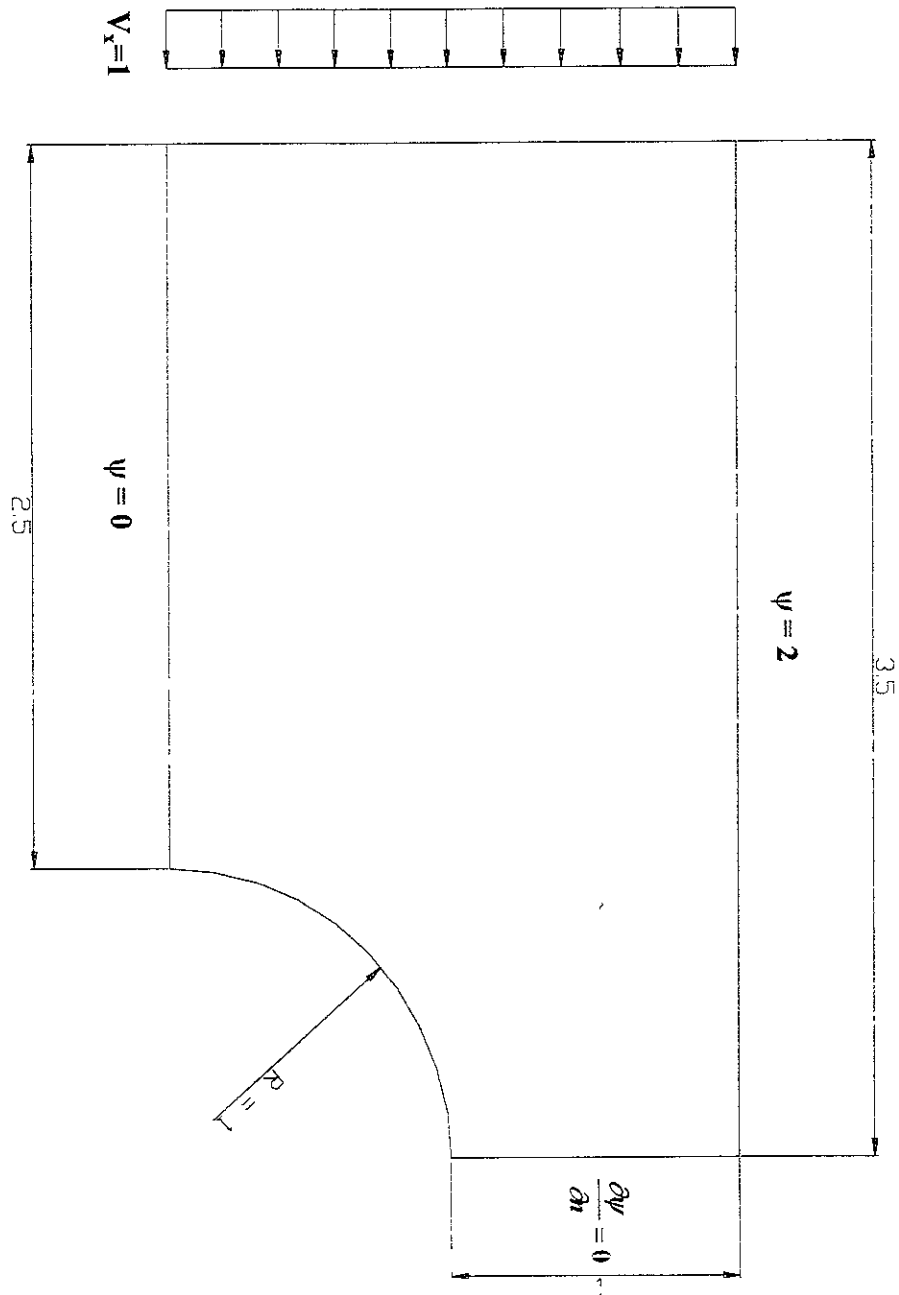
$$\begin{bmatrix} A_{ij} & q_{ri} \\ q_{rj} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ b_r \end{bmatrix}$$

y eso dependerá de la capacidad de computo y de la memoria que se disponga.

Ya realizado el calculo de las matrices, el ensamble de elementos y la imposición de condiciones de frontera lo único que falta por realizar es la solución del sistema mediante procesos tradicionales de solución.

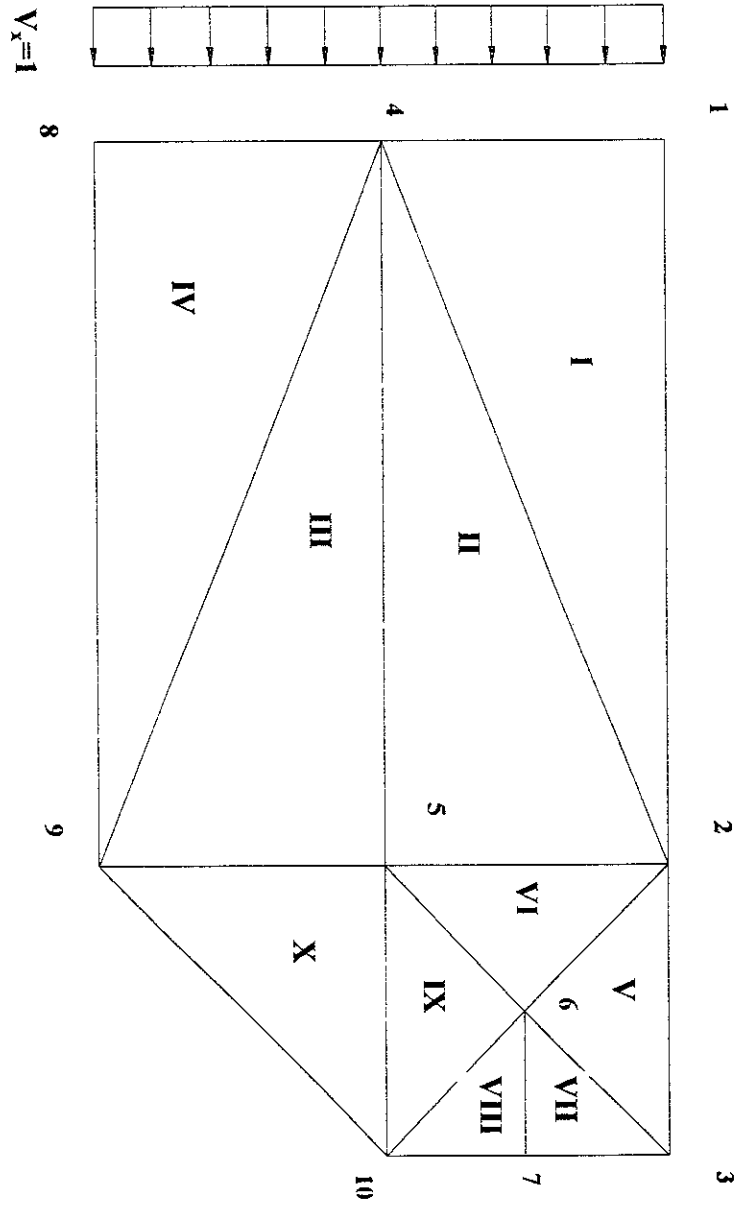
El ejemplo que a continuación se muestra dará una clara idea del planteamiento y desarrollo del Método del Elemento Finito.

El dominio a analizar tiene un flujo permanente ya establecido por lo cual posee las siguientes características :



Los pasos para llevar a cabo el estudio del fenómeno por medio del Método del Elemento Finito son :

1.- Discretización del cuerpo en estudio.



2.- Selección de las funciones de interpolación :

En este caso la figura empleada para discretizar el dominio fue el triángulo simple, por lo cual la función de interpolación de acuerdo al triángulo de pascal será de la forma :

$$U^o(x, y) = \alpha_i + \beta_x x + \gamma_i y$$

3.- Desarrollo del modelo de elemento finito en su forma de peso residual :

La ecuación diferencial que rige este fenómeno es la siguiente : $\nabla^2 \psi = k$ la cual al ser desarrollada tiene la siguiente forma :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} u - f = 0$$

al asignar a :

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \text{ y a } F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}$$

reducimos el sistema a la siguiente expresión :

$$\frac{\partial}{\partial x} (F_1) + \frac{\partial}{\partial y} (F_2) + a_{00} u - f = 0$$

la cual al aplicarle el método del peso residual se encuentra que :

$$\int_{\Omega^e} w \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_1) + \frac{\partial}{\partial y} (F_2) + a_{00} u - f \right] dx dy dz = 0$$

al desarrollar los términos individualmente se tiene :

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial F_1}{\partial x} dx dy dz + \int_{\Omega} w \frac{\partial F_2}{\partial y} dx dy dz + a_{00} \int_{\Omega} w u dx dy dz - \int_{\Omega} w f dx dy dz = 0$$

al aplicar el teorema Green-Gauss se tiene .

$$\int_{\Omega} a v_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} a v_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} v_i a_i d\Omega$$

por lo cual la expresión anterior queda :

$$\int_{\Gamma} w F_1 n_x dV - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} F_1 dx dy dz + \int_{\Gamma} w F_2 n_y dV - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} F_2 dx dy dz + a_{00} \int_{\Omega} w u dx dy dz - \int_{\Omega} w f dx dy dz = 0$$

Al agrupar las ecuaciones anteriores se obtiene que :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x} F_1 + \frac{\partial w}{\partial y} F_2 - a_{00} w u - w f \right] dx dy dz = \int_{\Gamma} w [F_1 n_x + F_2 n_y] dV$$

Debido a que el análisis a realizar se llevará a cabo en 2D se tomará una profundidad unitaria por lo que la ecuación antes presentada cambiará de la siguiente manera :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x} F_1 + \frac{\partial w}{\partial y} F_2 - a_{00} w u - w f \right] dx dy = \int_{\Gamma} w [F_1 n_x + F_2 n_y] ds$$

con este cambio se procede a evaluar la matriz de rigidez mediante los siguientes pasos :

1.- Expresar la ecuación en su forma diferencial o Integrodiferencial

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - a_{00} w u - w f \right] dx dy = \int_{\Gamma} w [F_1 n_x + F_2 n_y] ds$$

donde :

$$\int_{\Gamma} w [F_1 n_x + F_2 n_y] ds = \int_{\Gamma} w \left[\left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right] ds$$

2.- Aplicar Método Galerkin o cualquier otro método de aproximación, ya sea el Método Rayleigh-Ritz, el Método de mínimos cuadrados, etc..

Para el caso Galerkin se elige un polinomio de grado n, el cual dependerá de la figura geométrica base y del número de nodos que esta posea por lo cual la variable de solución estará definida como :

$$U^*(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j^* \psi_j^*(x, y)$$

la cual al ser sustituida dentro de la ecuación anterior nos genera un sistema de la forma :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(a_{11} \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \left(a_{21} \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \sum_{j=1}^n u_j \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) - a_{00} w \sum_{j=1}^n u_j \psi_j - w f \right] dx dy = \int_{\Gamma} w \left[\left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right] ds$$

Debido a que se necesitan plantear n ecuaciones algebraicas independientes se recurre a estandarizar las funciones de peso residual ya que estas pueden tomar el valor de función necesario para crear un sistema lineal independiente por lo que la expresión anterior se transforma en :

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^*} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \left(a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) - a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy \right\} u_j =$$

$$\int_{\Omega} \psi_i dx dy + \int_{\Gamma} \psi_i \left[\left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right] ds$$

que da la apariencia de un sistema de la forma :

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^* u_j = f_i^* + Q_i^*$$

al desarrollar cada producto uno se encuentra con que :

$$\psi_k = \alpha_k + \beta_k x + \gamma_k y$$

$$\psi_i \psi_j = \alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \hat{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \hat{y} + \beta_i \beta_j \hat{x}^2 + (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) \hat{x} \hat{y} + \gamma_i \gamma_j \hat{y}^2$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \beta_i \beta_j \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = \beta_i \gamma_j \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} = \gamma_i \beta_j \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} = \gamma_i \gamma_j$$

y como las figuras geométricas base son triángulos se puede realizar la siguiente simplificación a fin de obtener una matriz numérica mediante las siguientes expresiones :

$$\hat{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \quad \hat{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i \quad \hat{x}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \hat{x}^2 \right) \quad \hat{x} \hat{y} = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \hat{x} \hat{y} \right)$$

$$\hat{y}^2 = \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \hat{y}^2 \right)$$

Sin embargo para nuestro caso de análisis las constantes a₀₀, a₁₂ y a₂₁ son igual a cero por lo cual la matriz de rigidez K se reduce a :

$$K_{ij}^* = (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) A$$

para el caso de las fronteras se plantea la siguiente metodología :

1.- agrupar términos y definiciones a fin de obtener simplificaciones en el análisis.

La ecuación de frontera es el resultado del planteamiento del método del elemento finito sin embargo debido a que el estudio se esta refiriendo a las líneas de corriente encontramos que el termino $\psi_i k = V_i$ por definición, lo que implica que por cada valor de k existirá un nueva frontera de análisis por lo cual la expresión de la integral sobre el cuerpo cambiara por una integral de superficie por lo cual el termino de frontera será :

$$\int_{\Gamma} \psi_s V_i dS + \oint_{\Gamma} \psi_s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) n_y \right] dS$$

para el calculo de ψ_s se plantea un nuevo sistema que relacione la posición con el tiempo en termino de las coordenadas de análisis por lo que se plantea el siguiente sistema :

$$\begin{aligned} x &= a_1 + b_1 s + c_1 t \\ y &= a_2 + b_2 s + c_2 t \end{aligned}$$

con las siguientes condiciones de frontera :

$$\begin{aligned} \text{para } x = x_1 \text{ } y = y_1 \text{ } s = 0, t = 0 \\ \text{para } x = x_2 \text{ } y = y_2 \text{ } s = a, t = 0 \\ \text{para } x = x_3 \text{ } y = y_3 \text{ } s = c, t = b \end{aligned}$$

Al sustituir las condiciones anteriores en las ecuaciones anteriores tenemos que :

$$\begin{aligned} x(s,t) &= x_1 + (x_2 - x_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) x_1 - \frac{c}{a} x_2 + x_3 \right] \frac{t}{b} \\ y(s,t) &= y_1 + (y_2 - y_1) \frac{s}{a} + \left[\left(\frac{c}{a} - 1 \right) y_1 - \frac{c}{a} y_2 + y_3 \right] \frac{t}{b} \end{aligned}$$

estas expresiones nos permites expresar a $\psi_i(x,y)$ como $\psi_i(s,t)$, sin embargo para nuestro análisis solo es necesario $\psi_i(s)$, lo que implica que todas las funciones se analizaran tomando un tiempo $t=0$.

Las expresiones con tiempo $t=0$ al ser sustituidas en cada función de interpolación generan una nueva función de interpolación que depende solo de la posición por lo cual las nuevas funciones de interpolación empleadas en las integrales de frontera serán :

$$\psi_1(s) = 1 - \frac{s}{a} \quad \psi_2(s) = \frac{s}{a} \quad \psi_3(s) = 0$$

Al regresar al estudio de la ecuación integral, se encuentra que el producto interno entre la línea de corriente y el vector normal que la define será siempre cero, mientras que el segundo termino también es cero ya que físicamente los términos derivatorios en x y en y son la cantidad de flujo paralelo que va desde las fronteras.

Al tener realizados los pasos anteriores se procede entonces a armar el sistema matricial global a fin de poder ser modificados por las condiciones de frontera los resultados, por lo cual se muestra a continuación la forma de armado en sus respectivos pasos

- Agrupar el número de elementos individuales con el número de nodos globales.

Nodo Global

Elemento #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nodo 1	1	4	4	4	2	2	6	6	5	5
Nodo 2	4	5	9	8	6	5	7	10	10	9
Nodo 3	2	2	5	9	3	6	3	7	6	10

- Generar la matriz característica de cada elemento del mallado.

$$(A_{ME})_1 = \begin{bmatrix} 1.45 & -1.25 & -0.2 \\ -1.25 & 1.25 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 1.45 & -1.25 \\ 0 & -1.25 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_3 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -0.2 \\ 0 & 1.25 & -1.25 \\ -0.2 & -1.25 & 1.45 \end{bmatrix}$$

$$(A_{ME})_4 = \begin{bmatrix} 1.25 & -1.25 & 0 \\ -1.25 & 1.45 & -0.2 \\ 0 & -0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_5 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_6 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{ME})_7 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_8 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (A_{ME})_9 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_{MN})_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- Acoplar las matrices anteriores en una matriz global mediante la utilización de la fórmula :

$$K_{ij} = \sum_{x=1}^n \Delta_{Mx}^e (A_{MN})_x \Delta_{M\beta}^e$$

lo que da como resultado el siguiente sistema matricial :

$$\begin{bmatrix} 1.45 & -0.2 & 0.00 & -1.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -0.2 & 2.45 & 0.00 & 0.00 & -1.25 & -1.0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & -0.5 & -0.5 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.25 & 0.00 & 0.00 & 2.90 & -0.4 & 0.00 & 0.00 & -1.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1.25 & 0.00 & -0.4 & 4.90 & -1.0 & 0.00 & 0.00 & -1.75 & -0.5 \\ 0.00 & -1.0 & -0.5 & 0.00 & -1.0 & 4.90 & -1.0 & 0.00 & 0.00 & -0.5 \\ 0.00 & 0.00 & -0.5 & 0.00 & 0.00 & -1.0 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & -0.5 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.45 & -0.2 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.75 & 0.00 & 0.00 & -0.2 & 1.95 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.00 & 0.00 & 1.50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Imposición del las condiciones de frontera :

Este procedimiento se realiza de acuerdo con el primer método explicado previamente en el pseudocódigo, el cual consiste en realizar la siguiente operación :

Dado un sistema matricial :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ l \\ \zeta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

cuya condición de frontera sea $A_{22} = a$ crea el siguiente cambio en el sistema matricial :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \iota \\ \varsigma \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - A_{12}a \\ a \\ F_3 - A_{32}a \\ F_4 - A_{42}a \end{bmatrix}$$

lo mismo ocurre para cada condición de frontera por lo que el sistema matricial antes calculado llega a tomar la siguiente forma :

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.90 & -1.0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.0 & 4.00 & -1.0 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.0 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \\ \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2.9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Solución del sistema matricial

:

Como resultado de la imposición de fronteras el sistema matricial resultante es :

$$\begin{bmatrix} 4.9 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

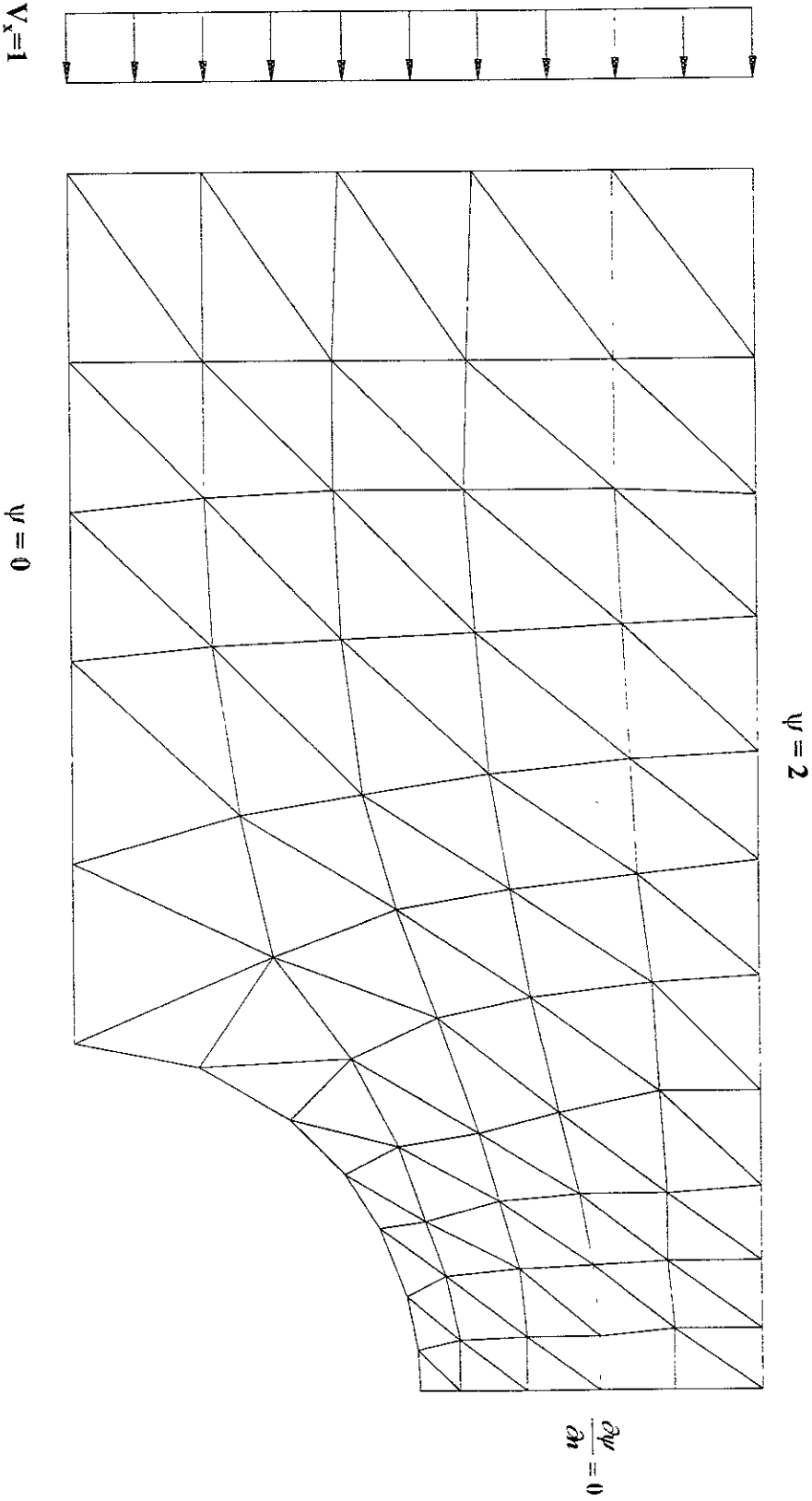
el cual se puede resolver mediante el uso de cualquier paquete matemático que maneje sistemas matriciales lineales lo que da por resultado que :

$$\psi_5 = 0.845$$

$$\psi_6 = 1.241$$

$$\psi_7 = 1.120$$

Al realizar el ejercicio anterior con 111 elementos y 73 nodos globales se encuentra que un posible mallado para el fenómeno de estudio es :



Al aplicar los procedimientos anteriores a este nuevo arreglo se encuentra que la solución al sistema matricial generado es:

$\psi_1 = 2$	$\psi_7 = 2$	$\psi_{13} = 2$	$\psi_{19} = 2$	$\psi_{25} = 2$	$\psi_{31} = 2$
$\psi_2 = 1.6$	$\psi_8 = 1.585$	$\psi_{14} = 1.573$	$\psi_{20} = 1.576$	$\psi_{26} = 1.572$	$\psi_{32} = 1.550$
$\psi_3 = 1.2$	$\psi_9 = 1.173$	$\psi_{15} = 1.151$	$\psi_{21} = 1.12$	$\psi_{27} = 1.106$	$\psi_{33} = 1.092$
$\psi_4 = 0.8$	$\psi_{10} = 0.772$	$\psi_{16} = 0.751$	$\psi_{22} = 0.713$	$\psi_{28} = 0.702$	$\psi_{34} = 0.703$
$\psi_5 = 0.4$	$\psi_{11} = 0.385$	$\psi_{17} = 0.371$	$\psi_{23} = 0.371$	$\psi_{29} = 0.376$	$\psi_{35} = 0.293$
$\psi_6 = 0$	$\psi_{12} = 0$	$\psi_{18} = 0$	$\psi_{24} = 0$	$\psi_{30} = 0$	$\psi_{36} = 0$
$\psi_{37} = 2$	$\psi_{44} = 2$	$\psi_{50} = 2$	$\psi_{56} = 2$	$\psi_{62} = 2$	$\psi_{68} = 2$
$\psi_{38} = 1.56$	$\psi_{45} = 1.543$	$\psi_{51} = 1.538$	$\psi_{57} = 1.517$	$\psi_{63} = 1.541$	$\psi_{69} = 1.501$
$\psi_{39} = 1.079$	$\psi_{46} = 1.072$	$\psi_{52} = 1.116$	$\psi_{58} = 1.147$	$\psi_{64} = 1.157$	$\psi_{70} = 1.150$
$\psi_{40} = 0.709$	$\psi_{47} = 0.71$	$\psi_{53} = 0.713$	$\psi_{59} = 0.737$	$\psi_{65} = 0.731$	$\psi_{71} = 0.722$
$\psi_{41} = 0.307$	$\psi_{48} = 0.314$	$\psi_{54} = 0.288$	$\psi_{60} = 0.288$	$\psi_{66} = 0.307$	$\psi_{72} = 0.277$
$\psi_{42} = 0$	$\psi_{49} = 0$	$\psi_{55} = 0$	$\psi_{61} = 0$	$\psi_{67} = 0$	$\psi_{73} = 0$
$\psi_{43} = 0$					

lo que da una mayor idea de como se está comportando el sistema de estudio.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Referencias

- 1.- **Fluid-Flow Phenomena in the Filling of Cylindrical Molds Using Newtonian(Turbulent) and Non-Newtonian(Power Law) Fluids**,N.Saluja,O.J Ilegbusi, J.Szekely. AFS Transactions, Vol 98 pp.291-297.
- 2.- **Coupled Heat Transfer and Fluid Flow in the filling of Castings**. R.A. Stoehr, C.Wang. AFS Transactions. Vol 88 pp 733-740.
- 3.- **Comprehensive Casting Analysis Model using a Geometry-Based Technique followed by Fully Coupled, 3-D Fluid Flow, Heat Transfer and Solidification Kinetics Calculations**. G.Upadhyya, A.J. Paul. AFS Transactions Vol 92 pag 925-933.
- 4.- **Geometric Modeling of Directional Solidification Based on Section Modulus**. S.J. Neises, J.J.Uiker and R.W. Heine. AFS Transactions Vol 95 pp 25-30.
- 5.- **Computer Simulation for the Filling of Casting**. W.S. Hwang and R.A. Stoehr. AFS Transactions Vol 95 pp. 425-430.
- 6.- **An Easy and Inexpensive Technique to Study Solidification of Casting in Three Dimensions**. R.Kotschi and L. Plutshak. AFS Transactions. Vol 89 pp.601-605.
- 7.- **An Introduction to the Finite Element Method**. J.N. Reddy. Ed. Mc Graw-Hill.
- 8.- **The Variational Methods in Engineering**. R.S. Schechter. Ed. Mc Graw-Hill.
- 9.- **The Finite Element Method for Engineers**. Kenneth H. Huebner, Earl A. Thornton. Ed John Wiley & Sons
- 10.- **Finite Element Analysis in Fluid Dynamics**. T.J. Chung. De Mc Graw-Hill.
- 11.- **Introduction to Mathematical Theory of Finite Element**. J.T. Oden, J.N. Reddy. Ed John Wiley & Sons
- 12.- **Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations**. Vivette Girault, Pierre-Arnaud Raviart. Ed Springer-Verlag.
- 13.- **Finite Element Techniques for Fluid Flow**. J.J Connor, C.A. Brebbia. Ed Newnes-Butterworths.
- 14.- **Boundary Layer Theory**. Schlichting H. Ed Mc Graw-Hill
- 15.- **Automatic Mesh Generation**. P.L. George Ed John Wiley & Sons
- 16.- **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. K.J. Bathe. Ed Prentice-Hall