38
2 gjm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES PARA UN CASO PARTICULAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

ERICK TREVIÑO AGUILAR

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

MEXICO, D. F. 1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

ANALISIS DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES
PARA UN CASO PARTICULAR

realizado por ERICK TREVIÑO AGUILAR

con número de cuenta 9029474 1 , pasante de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M.C. FRANCISCO PABLO RAMIREZ GARCIA	Fco. Pablo Ramírez
Propietario	M.C. GUILLERMO GOMEZ ALCARAZ	
Propietario	DRA. LOURDES ESTEVA PERALTA	Lourdes Este
Suplente	DR. PEDRO MIRAMONTES VIDAL	Miramontes
Suplente	DR. JESUS LOPEZ ESTRADA	

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. CESAR GUEVARA BRAVO

Quiero agradecer a todos aquellos que en algún momento me brindaron su apoyo y colaboración en el desarrollo de este trabajo de Tesis.

En especial a mis padres por el apoyo moral que siempre me han brindado durante toda mi carrera profesional.

Además al M. en C. Francisco Pablo Ramírez Garcia Jefe del área de Estadística Aplicada y Radiotrazado del Instituto Mexicano del Petróleo, por su tiempo, dedicación y conocimientos.

CONTENIDO.

INTRODUCCIÓN.

La **Mecánica de Fluidos** es una rama de la **Física**, que estudia el comportamiento de los fluidos bajo la influencia de una fuerza total, resultado de la suma de campos de fuerzas como el campo gravitatorio o el campo electromagnético.

En el siglo XVIII se conocían varios principios de Hidrostática como el principio de Arquímedes o el principio de Pascal, sin embargo apenas comenzaba el estudio hacia el aspecto dinámico de los fluidos; y aunque muchos científicos importantes trabajaron en la Mecánica de Fluidos sin lugar a dudas podemos atribuir al matemático **Leonhard Euler** (1707-1783) ser el fundador de los principios básicos para el estudio de la Mecánica de Fluidos, formulados en un lenguaje matemático.

Euler deduce un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden no lineal que relaciona los componentes de un flujo con el parámetro presión, este sistema de ecuaciones es importante por que junto con la ecuación de conservación de la masa sienta las bases para modelar matemáticamente los problemas de la Mecánica de Fluidos.

Las ecuaciones de Euler, son importantes por el desarrollo que se origino apartir de ellas, pero en algunos flujos no modelan por que hay fluidos de ciertas características cuyo comportamiento no es aproximado con la predicción de la ecuación de Euler; afortunadamente esto se puede solucionar con relativa facilidad en el sentido de que aun cuando fue necesario el trabajo de los científicos Navier y George Stokes quienes en forma independiente uno del otro en el siglo XIX deducen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineal que 'generaliza' la ecuación de Euler, conceptualmente solo hay que introducir un termino mas: la viscosidad. Así se llega a la generalización de las ecuaciones de Euler, las ecuaciones de Navier-Stokes.

La ecuación de conservación de la masa, la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de energía son el modelo matemático con que actualmente se cuenta para trabajar con los problemas de la Mecánica de fluidos, mismo que modela el campo vectorial representando el campo de velocidad para fluidos de la clase llamada newtoniana.

Las ecuaciones de Navier-Stokes son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden que relaciona los componentes de un flujo, el parámetro presión y la viscosidad; estas son complicadas pero se ha probado que 'modelan' con aceptable exactitud como para justificar su empleo.

La teoría matemática que se utiliza para analizar las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos es extensa y variada por ejemplo, desde el concepto de cambio de variable hasta la teoría de espacios de Hilbert.

Mi interés en este trabajo de tesis es exponer la deducción de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos y aplicar el concepto de cambio de variable para analizar un flujo con simetría radial

MECANICA DE FLUIDOS.

§1-Periodos.

En la Mecánica de Fluidos se dan cuatro periodos históricos, los cuales tienen relación con los científicos de cada periodo así como el respectivo desarrollo tecnológico.

Primer periodo:

En el siglo XVI se tenia un conjunto de conocimientos del comportamiento de algunos aspectos de los fluidos, principalmente líquidos, reunidos en una disciplina que se puede considerar como la Mecánica de Fluidos en este tiempo. En este siglo la Mecánica de Fluidos es una disciplina basada en hechos experimentales. Su lugar de desarrollo es en el continente europeo, principalmente en los países Inglaterra y Francia.

Segundo periodo:

En los siglos XVII y XVIII la Mecánica de Fluidos que en estos siglos la podemos reconocer como las disciplinas de nombre Hidrodinámica e Hidráulica; debido al trabajo de científicos importantes de la época tomo un carácter mas teórico; esto introduciendo el lenguaje de las Matemáticas para la formulación de las relaciones que se observaban empíricamente, tales como la conservación de la masa.

Tercer periodo:

Durante el siglo XIX, se siguieron desarrollando los hechos experimentales así como la teoría matemática relacionada, dando origen a una teoría clásica la que reunía todos los resultados conocidos hasta aquel tiempo.

Cuarto periodo:

En el siglo XX debido a las dos guerras mundiales un alto desarrollo se dio a la Mecánica de Fluidos para cierto tipo de flujos, aquellos involucrados con el vuelo de un avión, este problema hacia que se desprendiera en forma natural una clase de problemáticas que dieron origen a una teoría llamada Aerodinámica. Uno de los grandes inventos del siglo XX, la computadora electrónica, hizo posible en el ámbito de la Mecánica de Fluidos efectuar cálculos numéricos con los cuales se puede predecir en forma aproximada el comportamiento de ciertos flujos bajo ciertas condiciones y dado un modelo matemático.

§2-Científicos.

Isaac Newton (1642-1727) en el volumen I de su obra *'Principios Matemáticos de la Filosofía Natural'* hace una exposición de su teoría de Mecánica; el Volumen II lo dedica al estudio de los fluidos, en este libro el deduce la ley del seno cuadrado que da la distribución de presiones de un chorro sobre una superficie, esta es una buena aproximación en un flujo importante de la Aerodinámica.

Sobresale en este trabajo de Isaac Newton un postulado que expresa una ley de comportamiento para los fluidos, misma que ahora se sabe es valida para una clase de fluidos suficientemente general, estos son llamados Fluidos Newtonianos.

En el siglo XVIII **Daniel Bernoulli** escribe el libro titulado *'Hydrodynamica'* publicado en el año 1738, en el cual, entre otros temas, trata de encontrar una relacion entre velocidad y presión, la cual daría lugar a la llamada ecuación de Bernoulli, sin embargo es de notarse que esta relación en la forma que se conoce actualmente no esta escrita en este libro.

Posteriormente, en el año 1749 **Jean le Rond d'Alambert (1717-1783)** publica *'Ensayo de una nueva teoría de la resistencia de los fluidos'* en la que aplica el principio de la conservación de la masa a flujos axisimetricos, convirtiéndose en el primer científico en aplicar y en forma adecuada el principio de conservación de la masa, sin embargo la ecuación de continuidad en su forma general tal cual se le conoce en la actualidad no es debida a el. Descubre además una paradoja en la cual0 deduce que un cuerpo inmerso en el flujo de un fluido ideal no experimenta fuerzas de arrastre.

Leonhard Euler (1707-1783) con mucho se puede considerar el fundador de las bases Matemáticas para estudiar la Mecánica de Fluidos. Euler es quien formula en la forma que se conoce actualmente la ecuación de Daniel Bernoulli y la ecuación que expresa el principio de la conservación de la masa. Introduce el concepto de presión como función puntual, que el mismo relaciona con los componentes de velocidad para obtener una ecuación que generaliza la ecuación de Bernoulli (en el sentido de que se puede obtener las ecuación de Bernoulli a partir de la ecuación que Euler deduce), misma que seria muy importante en el desarrollo de la Mecánica de Fluidos, a esta se le llama ecuación de Euler, es una relación de la función vectorial que representa el parámetro presión con el campo de velocidades del fluido. Una función vectorial en el espacio tridimensional tiene tres componentes; la ecuación de Euler da lugar a tres ecuaciones por esto también se puede uno referir a las ecuaciones de Euler.

§3-Índices.

Se puede observar que distintos flujos con distintas condiciones, pueden coincidir en una o mas propiedades.

Los flujos dependen del fluido mismo, de la situación a la cual esta expuesto así como de sus parámetros: temperatura, presión, viscosidad, densidad, velocidad promedio, etc., y la geometría en que se hallan.

¿Como es que pueden compartir una o mas propiedades?

La respuesta fue encontrada por Reynolds quien en sus investigaciones descubre el principio de similitud de un índice al descubrir un parámetro que ahora se llama el número de Reynolds.

Veamos que es un índice:

A un flujo se le quiere asignar un número tal que, según la clase de su valor, se pueda determinar al flujo como miembro de alguna clase. Por ejemplo si uno quiere clasificar a los flujos en fríos y calientes, el numero $\frac{1}{V}\int T$ donde V es el volumen del fluido y T la temperatura, y tomando como flujos 'calientes' aquellos flujos para los cuales este valor sea mayor que un valor predeterminado k en el cual no sea necesario introducir ninguna dimensión de medida (este ejemplo no satisface esta condición lo cual muestra que no es un número que sirva como índice -al menos lo que queremos definir como índice- aunque ilustra la idea del concepto) podría ser un candidato.

El número debe depender de los parámetros del flujo así como de la geometría en que se encuentra.

Se deben hacer dos consideraciones, primero, cuales son los parámetros de que depende el índice y segundo, en que forma.

Definición: C es un Indice si y solo si:

C es una función $C:\Re^q \to \Re$ que depende de los parámetros $p_1, p_2, p_3, ..., p_q$ y sus valores $C(p_1, p_2, p_3, ..., p_q)$ hacen una división en categorías de los flujos cuyas geometría sean similares (en el sentido de la geometría sintética en la cual por ejemplo dos triángulos con vértices respectivos $A_1A_2A_3$ $a_1a_2a_3$ son similares si se puede hacer una correspondencia de vértices digamos $A_i \to a_i$ en la cual la proporción de lados correspondientes $\frac{\overline{A_iA_j}}{\overline{a_ia_j}}$ es constante siendo esta la 'proporción'). Mas aun C debe ser una función que no haga referencia a ningún sistema de dimensiones de medida, esto debido a que C representa una característica.

Escribamos las condiciones que definen a C en la forma:

1- Sea F un conjunto de flujos (seria primero necesario hablar de la representación de un flujo en un modelo matemático, pero esto se hará en el capitulo dos) con geometrías similares, un índice es una función $C:F \to \Re$ a la que asociaremos la interpretación: $F^{-1}(r)$ es una clase de flujos que coinciden en una propiedad especifica también asociada a la función C.

2- Existe una función $A:\Re^q \rightarrow \Re$ y una 'selección ' de parámetros $p_1, p_2, p_3, ..., p_q$ tal que si $f \in F$ entonces $C(f)= A(pp_1, pp_2, pp_3, ... pp_q)$ donde pp_i es el promedio del parámetro p_i del flujo f.

3- C no hace referencia a ninguna dimensión de medida; es un numero adimensional.

El número de Reynolds es un índice que permite determinar si un flujo es laminar o turbulento, así como sus fases de transición. Reynolds estudia distintos flujos en la misma geometría, los cuales aunque eran distintos en los valores de sus parámetros, compartían la propiedad de ser flujos laminares o turbulentos y descubre que para los flujos laminares hay un cociente de algunos de sus parámetros que siempre es inferior a K un valor critico, mientras que para los flujos turbulentos el mismo cociente siempre da valores superiores a K. Este cociente es el número de Reynolds; cumpliéndose así la condición 1 de ser índice.

Además el número de Reynolds satisface las otras dos condiciones de ser índice:

Para verificar las otras dos condiciones con lo que además daré la definición del numero de Reynolds, empleare la tabla:

NOMBRE	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Masa	M	M
Tiempo	T	T
Longitud	l	L
Velocidad	V	$\frac{L}{T}$
Densidad	ρ	$\frac{M}{T^3}$
Viscosidad	η	$\frac{M}{TL}$

2- Reynolds descubre que el índice buscado depende del promedio de los parámetros: velocidad, densidad y viscosidad.

3- La dependencia de los parámetros Reynolds también la descubre, sin embargo se puede deducir esta, con la condición tres. C deberá tener la forma $l^a * V^b * p^c * n^d$, luego al sustituir las dimensiones: $L^{a+b-3c-d} M^{c+d} T^{-b-d}$; como C debe ser adimensional las potencias de las dimensiones deben ser todas ellas cero, es decir: $a+b-3c-d=0$, $c+d=0, -b-d=0$ estas ecuaciones llevan a: $a = b = c = -d$, tomando en particular $a=1$ la expresión para C queda $C(f) = A(l, V, p, n) = \frac{lVp}{n}$ este es el numero de Reynolds.

Este es un índice importante por que:

1- Dio origen al concepto de similitud.

2-Es un numero que se construye fácilmente y es útil.

Así los índices construidos y definidos tienen la propiedad de similitud, esto es, flujos con geometrías similares con índices coincidentes, presentaran un comportamiento idéntico respecto a la propiedad en particular. Esto permite hacer simulaciones a escala, de situaciones reales, así se puede por ejemplo estudiar el comportamiento de un ala en la atmósfera, experimentando en laboratorio con un prototipo a escala. Este es el principio de los túneles de viento.

§4-Laboratorio.

En la investigación de la Mecánica de Fluidos, el modelo matemático, es uno en el que se han hecho simplificaciones al problema real, lo que lleva en el mejor de los casos, a dar una aproximación de la situación física. A este modelo siempre será necesario someterlo a una comparación con modelos de laboratorio, es decir comparar resultados del modelo matemático, con los resultados de experimentación (debe notarse que, aun los experimentos de laboratorio son una aproximación de la situación real). Para el fin de poder tener modelos físicos que permitan hacer investigación experimental es necesario saber que observar de un flujo y desarrollar métodos que permitan visualizarlos.

Un dispositivo llamado *Cámara de Visualización*, hace posible la observación de las curvas llamadas: *Trayectoria de Partícula, Línea de Corriente y Línea de emisión* las cuales dan información acerca del comportamiento del flujo a las cuales están asociadas. La curva *Trayectoria de Partícula* como hace mención su nombre, es la trayectoria debida al flujo que sigue una partícula del fluido; la curva llamada *Línea de Corriente* seria la trayectoria de partícula de cada una de las partículas con posición un punto de esta curva si el flujo se hiciera independiente del tiempo, es decir si fuera un flujo estacionario; la curva llamada *Línea de emisión* es el conjunto de puntos de tal forma que las partículas en un tiempo dado que tengan coordenadas que son un punto en la curva al transcurrir el tiempo en algún instante pasaran todas ellas en un lugar fijo. En el capitulo dos se definirán estas curvas con mayor precisión.

Se logran visualizar estas líneas en una cámara al introducir un elemento con propiedades ópticas distintas en el flujo que se quiere estudiar. En las distintas formas de introducir el elemento, y en su naturaleza, se visualiza una línea o la otra.

El método de experimentación para estudiar los flujos es: implementar observaciones mediante las cámaras de flujo, en las cuales se trata de hacer evidente las curvas de Partículas, de Corriente y de Emisión.

Estos son algunos métodos utilizados:

1-Agua en tanque de poca profundidad.

Cuando la profundidad del agua es suficientemente pequeña, la ecuación del movimiento de un flujo en un canal abierto, es aproximadamente análogo a la ecuación de la dinámica de un gas con valor del índice isentrópico igual a dos. Las ondas de choque generadas en el caso de un gas, corresponden a las ondas de agua. En este caso el flujo de un fluido compresible puede ser investigado observando los patrones en las ondas que se forman.

2-Película de aceite.

Se hace una mezcla de aceite y de pigmento el cual se esparce en la superficie del flujo que se quiere observar. La fuerza de corte, generada por el flujo actúa sobre la capa de aceite observándose las trayectorias de los pigmentos depositados, muestran la dirección del flujo en la superficie del modelo y pueden revelar patrones de transición, separación y patrones secundarios en el flujo.

3-Película sensible a la temperatura.

Una película de un material especial que cambia de color o de fase en relación con su temperatura, se esparce sobre la superficie del flujo. El estado del flujo cerca de la superficie se ilustra con los cambios de esta película. Cristal liquido o pintura sensitiva es lo que se usa en este modelo.

4-Listones en la Superficie.

Muchos listones son colocados en la superficie de un cuerpo inmerso en un flujo, con los cuales se indican las direcciones del flujo cerca de la superficie.

5-Malla de listones.

Se coloca en una red gran cantidad de listones, uniformemente distribuidos, en un plano ortogonal al flujo. Cualquier remolino viajante es detectado, por las formas que toman los listones en la malla.

6-Inyección para evidenciar la Línea de Emisión.

Se inyecta continuamente un fluido con color visible distinto al fluido del flujo, con tubos cuyo radio es pequeño de tal forma que no perturben al flujo estudiado. El estado del flujo es mostrado por las resultantes líneas de emisión visualizadas.

7-Suspención.

Pequeñas partículas de un fluido distinto o partículas de algún sólido se mezclan en todo el volumen de un liquido, en el momento de iniciar el flujo. El régimen del flujo se visualiza por las Trayectorias de Partícula que se forman.

8-Partículas flotantes.

El estado de un flujo es examinado por la observación del movimiento de partículas que son dispersadas para que floten en la superficie de un liquido. Este método también muestra Líneas de Partícula.

9-Línea de tiempo.

Se inyecta un fluido en una línea recta, transversa al flujo. La naturaleza del flujo es investigada observando la transformación de esta línea al transcurrir el tiempo.

10-Precipitación electrolitica.

Este método se usa cuando se trabaja con Agua. Se generan pequeñas partículas blancas por electrólisis, y estas permiten observar las Trayectorias de Partículas. Una aleación de estaño en forma de placa se coloca en la superficie del liquido, esta placa funciona como un ánodo, la cual por electrólisis reacciona, formando pequeñas partículas blancas.

11-Burbuja de hidrogeno.

En flujos de agua, se generan pequeñas burbujas de hidrogeno mediante electrólisis, empleando un alambre que funciona como cátodo, colocado transversalmente al flujo. Estas burbujas son las que se observan para obtener información del flujo. Las Líneas de Emisión se forman usando un voltaje fijo y un alambre doblado en forma de sigsag, o bien aislando el cable en intervalos. Se generan líneas de tiempo, si se usa un alambre recto y pulsos de voltaje.

12-Descargas eléctricas.

Este método sirve para analizar el flujo del aire. Se generan descargas eléctricas usando voltajes muy altos en dos electrodos. La primer descarga eléctrica forma una camino ionizado. Este camino ionizado se mueve junto con el flujo del aire y la segunda descarga eléctrica, se propaga a lo largo de esta trayectoria que tiene muy baja resistencia eléctrica en ese momento. De esta manera, las demás descargas eléctricas, se propagan a lo largo de los caminos ionizados uno tras otro, formando el trazado de líneas de tiempo en el flujo.

13-Humo.

Se utiliza este método en el aire. Se genera humo de color blanco mediante un pulso eléctrico generado en un alambre inmerso en aceite. El humo se emplea para estudiar el flujo del aire.

14-Gráfica de sombra.

Se coloca una fuente, cuya emisión de luz, genera distintas zonas de luminosidad a través del fluido, las cuales son proyectadas sobre una pantalla, o bien directamente a la cámara. El estado del flujo es indicado por las formas de brillantez y oscuridad.

15-Schlieren.

Rayos de luz paralelos, son refractados a través de un flujo, los cuales se hacen converger mediante un lente convexo. El estado del flujo es visualizado por la brillantez en contraste con la oscuridad de las formas que se observan proyectadas sobre una pantalla, o al ser retratadas directamente.

16-Interferometro.

Rayos de luz paralelos se dividen, una parte se hace pasar a través del flujo, para posteriormente mezclarse con la otra parte, la cual ha pasado a través de una sección de compensación. La imagen combinada obtenida se proyecta sobre una pantalla, o se retrata directamente. De esta forma se tiene información del flujo por la interferencia obtenida. Se pueden obtener líneas de nivel de la densidad ajustando una iluminación uniforme en la pantalla.

17-Termografía.

Se detectan rayos infrarrojos de la superficie de un fluido, o de un sólido, obteniendo así la distribución de temperatura de la superficie, visualizada esta como formas claras-oscuras.

18-Hele-Shaw.

Se coloca un fluido viscoso entre dos placas paralelas de vidrio cuya separación es pequeña. El flujo que se genera se puede aproximar como bidimensional. Las Líneas de Corriente se obtienen por la continua inyección de tinta, o de burbujas de hidrogeno en la parte media de las placas.

Referencias:

1-Computational Fluid Dynamics. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.

2-Modern Compressible Flow with historical perspective. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.

3-Nonlinear Funtional Analisys and its aplications Vol IV. Zeidler. Editorial Springer-Verlag.

4- Analytic Element Modeling of Groundwater flow. Haitjema. Editorial Academic press.

5-Fundamental Mechanics of Fluids. Currie. Editorial McGraw Hill.

6-Essential of Fluid Dynamics. Prandtl.

7-Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Prandtl and Jietsen. Editorial Dover.

8-Aerodynamics Theory Vol 1. R.Giacomelli and E.Pistolesi.

9-Visualized Flow. Japan Society of Mechanical Engineers. Editorial Pergamon Press.

10- Aerodynamics Theory. Vol. I. R. Giacomelli and E. Pistolesi. Editado por Durand.

11-Elementary Fluid Mechanics. Vennard y Street . Editorial Wiley.

EL MODELO MATEMATICO.

§1-La representación de un Flujo.

Si se toma en cuenta que un fluido es materia no rígida y esta formada por moléculas, al modelar matemáticamente, se tiene una teoría para los fluidos análoga a la teoría cinética de los gases debida a Boltzmann-Maxwell que en efecto algunos científicos han trabajado, sin embargo debido al orden del diámetro de una molécula comparada con el orden del diámetro del espacio total que ocupa el fluido, se puede aproximar un fluido como si este fuera un continuo, hecho que se ha aplicado con éxito y es comúnmente aceptado como punto de partida para el estudio de los problemas de la Mecánica de Fluidos y será el que se adopte aquí.

Así representemos:

1- Al fluido que le da origen como un conjunto D en $\Re^3$ conexo, igual a la cerradura de su interior.

2- Al flujo, que corresponde al movimiento del fluido, mediante la función:

$$\psi : D\times[0,\infty)\subset\Re^4 \to D\subset\Re^3$$

que representa la posición $\psi(x,t)$ que tomara la partícula en el tiempo t que tiene posición x en el tiempo $t=0$.

Además de la función ψ se puede asignar un campo vectorial V el cual esta relacionado con ψ en la forma:

$$V\circ\psi_{(x,t)} = \frac{\partial}{\partial t}\psi\Big|_{(x,t)}$$

Sea $x\in D$ arbitrario, en el tiempo t, entonces al dejar transcurrir un lapso de tiempo Δt, a partir de t, debido al movimiento del fluido, la partícula localizada en x, cambia de posición a $x + \Delta x = \psi(\psi^{-1}(x,t),t+\Delta t)$, el cociente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\psi(\psi^{-1}(x),t+\Delta t)-\psi(\psi^{-1}(x),t)}{\Delta t}$$

es un vector en $\Re^3$, que indica la dirección del movimiento, y su magnitud indica la velocidad media del movimiento de la partícula, al tomar el limite del cociente cuando Δt tiende a cero, se tendrá cuando ψ es derivable respecto a t, un vector que en magnitud indica la velocidad instantánea, y en ángulo, la dirección instantánea del movimiento de la partícula con posición x, en el tiempo t. Entonces, en cada punto y en cada instante el flujo tiene asociado un vector.

Estudiaremos a los flujos mediante las funciones:

$$\psi : D\times[0,\infty)\subset\Re^4 \to D\subset\Re^3 \text{ y } V : D\times[0,\infty)\subset\Re^4 \to \Re^3.$$

En las deducciones de los siguientes apartados y capítulos será necesario tener condiciones de regularidad para la función $\psi : D\times[0,\infty)\subset\Re^4 \to D\subset\Re^3$ las cuales varían según la deducción correspondiente; para mantener con claridad y uniformidad las discusiones haremos la:

Suposición:

1-ψ es tres veces continuamente diferenciable.

2-ψ es inyectiva en las tres primeras variables: $\psi(x,t)=\psi(y,t)\Rightarrow x=y$.

En general, menos que la condición 1 se necesita para que sean validos los razonamientos en las deducciones siguientes, sin embargo esta condición implica todas las suposiciones que se necesitan hacer y se tomara como valida, desde aquí en adelante. La condición 2 corresponde al hecho de que dos partículas distintas no pueden tomar la misma posición en el mismo tiempo.

§2-Principios de Conservación.

Una vez tenida la representación de un flujo es necesario contar con relaciones que permitan determinar en forma única a esta, dado condiciones especificas del flujo expresadas en la representación de un flujo (estas son condiciones de frontera); estas relaciones las hay en forma de ecuaciones diferenciales parciales que se pueden obtener al expresar en forma matemática tres principios de Física en la representación de un flujo.

Con los tres principios se llegaran a tres relaciones en forma de ecuaciones diferenciales parciales. Euler en forma esencial ya había deducido dos de estas relaciones; la tercera se obtiene aplicando conceptos de la teoría de Termodinámica.

Las relaciones son la expresión matemática de los postulados físicos:

1-Conservación de la Masa.

2-Segunda ley de Newton.

3-Conservación de la Energía.

El primer principio da lugar a la ecuación de continuidad que fue obtenida por Euler en la forma que se conoce actualmente. El segundo principio da lugar a la ecuación de Euler y a la ecuación de Navier-Stokes que al incluir las fuerzas de fricción a nivel molecular (la viscosidad) generaliza la ecuación de Euler. El tercero da lugar a la ecuación de conservación de la energía.

Hay dos distintas formas de expresar estos principios físicos en forma matemática debidas a Euler y Lagrange respectivamente.

Euler procedía de esta forma: Sea $R \subset D$ fijo en el espacio, ¿que implicaciones tienen los principios 1 y 2 en V en el conjunto R?, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler.

Lagrange procedía de esta forma: Sea $R \subset D$ ¿qué implicaciones tienen los principios 1 y 2 en los conjuntos $\psi(R,t)$ al variar el tiempo?, la ecuación de continuidad y la ecuación de Euler, pero expresada en una forma distinta a como Euler las encuentra.

Podemos parafrasear diciendo que Euler fija una posición y observaba la variación respecto al tiempo, mientras que Lagrange fija un volumen y observaba la variación respecto al cambio de posición de este (que también involucra la variación del tiempo aunque en una forma distinta que en la referencia de Euler).

Además para hacer validos los cálculos en la forma que procedía Euler son necesarias condiciones de regularidad distintas a las necesarias para la forma en que procedía Lagrange.

En lo que sigue nos referiremos a la forma de proceder de Euler como el sistema de referencia de Euler o abreviadamente referencia de Euler y similarmente para la forma de proceder de Lagrange, sistema de referencia de Lagrange o abreviadamente referencia de Lagrange.

§3-Variables, Parámetros y Fuerzas.

El dominio de V es $D\times[0,\infty)\subset\Re^4$ se llaman las tres primeras variables las variables espaciales o de posición y a la cuarta variable la variable tiempo.

Físicamente un flujo presenta características y fuerzas a las que se haya sometido; en Euler comienza la representación de ellas mediante funciones puntuales, estas funciones se llaman parámetros del flujo y a estos corresponden por ejemplo: la presión, la densidad, la temperatura, etc. y las fuerzas que se ejercen en el pueden ser: fuerza de gravedad, fuerza electromagnética, etc.

§4-Lineas Especiales.

La función V es un caso particular de las funciones llamadas campos vectorialcs, en la teoría en que se estudian, se definen tres clases de curvas que representan la integración del campo vectorial.

Sea $V:D\times[0,\infty)\subset\Re^4\to\Re^3$ el campo de velocidades de un flujo y sea $x\in D$

La curva llamada **Trayectoria de Partícula** es la 'integral del campo vectorial, variando el tiempo'. Es una curva que esta asociada a un tiempo t_0, a un punto x y a un intervalo de tiempo Δt, esta es el conjunto de puntos por los cuales la partícula con posición en el punto x en el tiempo t_0 tomara posición al variar el tiempo en el intervalo $[t_0,t_0+\Delta t]$.

Esto en notación Matemática:

Sea $T:[t_0,t_0+\Delta t]\to D\subset\Re^3$ derivable tal que $T(t_0)=x$ esta es una trayectoria de partícula respecto al campo vectorial V en el punto x, si se satisface la igualdad:

$$V(T(t),t)=\frac{d}{dt}T(t)\quad\forall t\in[t_0,t_0+\Delta t].$$

Se puede hablar del máximo dominio a la que la función T pueda ser extendida satisfaciendo las condiciones de ser trayectoria de partícula, siendo así que podemos hablar de la trayectoria de una partícula que pase por un punto x sin hacer referencia a ningún intervalo de tiempo en particular.

No siempre existen estas curvas, siendo el problema de existencia complicado y perteneciente al problema de las ecuaciones diferenciales, sin embargo en el caso particular en el que estamos:

$$V \circ \psi\big|_{(x,t)} = \frac{\partial}{\partial t}\psi\Big|_{(x,t)},$$

estas curvas siempre existen y de hecho para un punto x arbitrario en D la curva $T:[0,\infty) \to D \subset \Re^3$ definida como:

$$T(t)=\psi(\psi^{-1}(x,t_0),t)$$

es una parametrizasión de la trayectoria de particula que pasa por el punto x, por que: $T(t_0)=\psi(\psi^{-1}(x,t_0),t_0)=x$ y ψ es diferenciable.

La curva llamada **Línea de Corriente** es la 'integral del campo vectorial, fijando el tiempo'. Tiene asociado un tiempo t_0 y un punto x. Esta es la curva que pasa por el punto x contenida en el dominio del flujo siendo sus vectores tangentes coincidentes con los vectores velocidad del flujo en los puntos de la curva en el tiempo t_0.

Esto en notación Matemática:

Sea $T:[t_0,t_0+\Delta t] \to D \subset \Re^3$ derivable tal que $T(t_0)=x$. Esta es una línea de corriente si se satisface la igualdad:

$$V(T(s),t_o)=\frac{d}{ds}T(s).$$

La curva llamada **Línea de Emisión** esta asociada a un tiempo t_0, a un punto x y a un intervalo de tiempo Δt. Esta es el conjunto de puntos w del flujo que al variar el tiempo en el intervalo $[t_0, t_0+\Delta t]$, la partícula posicionada ahí, pasara por el punto x al seguir el movimiento del flujo.

Esto en notación Matemática:

Sea $T:[t_0,t_0+\Delta t] \to D \subset \Re^3$ derivable esta es una Línea de Emisión si la Trayectoria de la partícula correspondiente al punto $T(s)$, en el tiempo z, con parametrización $P_z:[s,b] \to \Re^3$ satisface la igualdad:

$$P_z(s)=T(s), \quad P_z(b)=x.$$

§5-Derivada Material.

Los parámetros de un flujo dependen de la posición y del tiempo, así se puede obtener la razón cambio que tiene cada uno de ellos respecto al cambio de tiempo o de posición, lo cual se puede interpretar como una 'derivada' según la referencia de Euler o de Lagrange.

Para que sean validos los razonamientos en este apartado y donde se usen las deducciones aquí hechas se debe hacer la siguiente:

Suposición :

> Sea ϕ un Fluido que da origen a un Flujo Φ y sea $P: D\times[0,\infty)\subset\Re^4\to\Re$ un parámetro asociado a Φ; P es *Continuamente Diferenciable.*

Esta suposición se hará de aquí en adelante, aunque en algunos apartados una condición de regularidad menos restrictiva se pueda hacer.

Sea $P: D\times[0,\infty)\subset\Re^4\to\Re$ un parámetro arbitrario asociado de un flujo Φ, (se entenderá al hablar de un parámetro de Φ que puede ser un parámetro del fluido ϕ y este parámetro podría ser: la temperatura, la presión, la densidad, la viscosidad, etc.).

La razón de cambio instantánea de P respecto al tiempo en un punto x en el instante t_0, es

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(x,t_0)}$$

por que por definición:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial t}\right|_{(x,t_0)} = lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(x,t_0+\Delta t)-P(x,t_0)}{\Delta t}$$

y el cociente

$$\frac{P(x,t_0+\Delta t)-P(x,t_0)}{\Delta t}$$

es la razón de cambio promedio respecto al tiempo del parámetro. La variación instantánea se obtiene al tomar el limite de estos promedios cuando $\Delta t\to 0$. Se puede interpretar como la razón de cambio según la referencia de **Euler.**

Para obtener en el punto x en un instante de tiempo t_0 el cambio de P al variar la posición, hay que considerar que la partícula con posición en el punto x al instante t_0 sigue una trayectoria la cual podemos representar mediante una curva T regular, parametrisada en un intervalo *[a,b]*; esta parametrisación es posible por que estamos en la suposición de que la función ψ es derivable (suposición hecha en el apartado **§1**), de hecho tomemos la parametrización:

$$T:[t_0,t_f]\rightarrow D\subset\Re^3$$

definida por la correspondencia:

$$T(t)=\psi(\psi^{-1}(x,t),t)$$

en particular obsérvese que $T(t_0)=\psi(\psi^{-1}(x,t_0),t_0)=x$. Si $V(x,t)$ es el campo de velocidades del flujo, se cumple:

$$\frac{d}{dt}T(t)=V(T(t),t)$$

hecho que será necesario recordar mas adelante.

El cociente: $$\frac{P(T(t_0+\Delta t),t_0+\Delta t)-P(T(t_0),t_0)}{\Delta t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

mide el cambio promedio del parámetro *P* al variar la posición de la partícula en *x*. Obsérvese el hecho importante, de que el cociente *(1)* quedo expresado en función de *t* únicamente, esto muestra que el cambio de la posición depende del cambio del tiempo (no debe confundirse esta afirmación con que, *V* sea una función dependiente de *t*, esto es: puede pasar que el flujo no dependa del tiempo es decir que el flujo sea estacionario y no obstante la trayectoria de una partícula seguirá dependiendo del tiempo). Para obtener el cambio instantáneo del parámetro *P*, al cociente *(1)* se le aplica el limite cuando $\Delta t\rightarrow 0$. Una forma de obtener este limite es observando que se puede aplicar la Regla de la Cadena al expresar el cociente *(1)* como una composición de funciones derivables. Sea $c:[t_0,t_f]\rightarrow\Re^4$ definida por la correspondencia $t\rightarrow(T(t),t)$ resulta cierta la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{dt}c(t)=(V(T(t),t),1).$$

Mas aun, son ciertas las igualdades:

$$\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{P(T(t_0+\Delta t),t_0+\Delta t)-P(T(t_0),t_0)}{\Delta t}$$

$$=$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(P\circ c)(t_0+\Delta t)-(P\circ c)(t_0)}{\Delta t}$$

$$=$$

$$\frac{d}{dt}(P\circ c)\Big|_{t_0}$$

$$=$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P+u\frac{\partial}{\partial x}P+v\frac{\partial}{\partial y}P+w\frac{\partial}{\partial z}P\,.$$

las tres primeras son ciertas por la definición de la función c y la definición de derivada, la ultima igualdad *-(u,v,w)=V-* es verdadera por la Regla de la Cadena la cual es aplicable puesto que P y ψ son diferenciables en todo su dominio.

La ultima expresión en los libros se denota como $\frac{D}{Dt}(P)$ y se le llama *derivada material*. Se puede interpretar como la razón de cambio según la referencia de **Lagrange.**

§6-Integración.

El proceso de integración se emplea para la deducción de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos, ya que en todo momento se necesita tomar una partición de un conjunto y asegurar la convergencia de las sumas de Riemann introduzco las definiciones de partición, sumas de Riemann, integrabilidad y el teorema de Riemann-Lebesgue que da las condiciones necesarias y suficientes para que una función acotada sea integrable .

Sea $E\subset\Re^n$ un conjunto compacto igual a la cerradura de su interior y conexo; por una partición de este definimos una colección de conjuntos $\{E_n\}_n$ $1\le n\le N$ de E que satisfacen:

1- $E=\bigcup_n E_n$.

2- Para cada n E_n es cerrado.

3- Para cada n E_n es conexo.

4- Para cada n E_n es la cerradura de su interior.

5- $E_n\cap E_m=\partial E_n\cap\partial E_m$.

La norma de esta partición es por definición $\sup\{|x-y| \quad tal\ que: x, y \in E_n\ 1 \leq n \leq N\}$.

En forma general el conjunto Ξ denota puntos intermedios arbitrarios de los conjuntos E_n esto es el conjunto Ξ tiene la forma:

$$\Xi = \bigcup_n (\Xi \cap E_n) = \bigcup_n \{\xi_n\}.$$

Sea $F: E \subset \Re^l \to \Re$ acotada, sean $P=\{E_n\}_{0<n<N}$ una partición de E y Ξ puntos intermedios de P denotamos con $S(F,P,\Xi)$ la suma :

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k) m(E_k)$$

donde $m(E_k)$ denota la medida de Jordán del conjunto E_k.

Definimos que F es integrable y designamos el numero llamado su integral en E por el numero real $\int_E F$ en el caso de que:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que para toda partición P de E con norma inferior a δ y conjunto Ξ suceda que:

$$\left| S(F,P,\Xi) - \int_E F \right| < \varepsilon .$$

Ahora que tenemos la definición de que una función es integrable y cual debe ser su Integral es importante saber cuando una función es integrable, el teorema de Riemann-Lebesgue nos da las condiciones necesarias y suficientes.

Teorema de Riemann-Lebesgue.

Sea $F: E \subset \Re^n \to \Re$ acotada F es integrable $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{x \in D$ tal que F es discontinua en $x\}$ tiene medida exterior cero.

Así con las suposiciones hechas, dado que toda función derivable es continua , entonces en todos los procesos de integración en que estén involucrados los componentes de V y los parámetros del flujo sobre dominios compactos, no habrá problema para asegurar la existencia de la integral, por este motivo no se discutirá en los apartados correspondientes el problema de la existencia.

§7-Teorema de la Transportación de Reynolds.

Sea R un conjunto conexo compacto igual a la cerradura de su interior contenido en D, en un tiempo t_o el fluido que se encuentra en R debido al flujo, cambia de posición al transcurrir el tiempo, lo que da lugar a la transformación de R para cada tiempo $t \geq t_o$ en un conjunto distinto $R(t)$ bajo la función ψ, en forma precisa: $R(t) = \psi(\psi^{-1}(R,t_0),t)$. Sea P un parámetro arbitrario del flujo. Cada $R(t)$ debido a la suposición hecha en el apartado §1 es un conjunto conexo compacto, entonces el parámetro P puede ser integrado en $R(t)$; se puede construir una función $INT_P:[t_0,\infty]\rightarrow\Re$, que asigne a cada tiempo $t \geq t_o$ la integral de P en la región $R(t)$: $\iiint_{R(t)} P$ esto es $INT_P(t) = \iiint_{\psi(R,t)} P$, de esta se puede obtener la derivada respecto al tiempo (la existencia de la derivada se prueba abajo junto con la obtención su valor), la cual es el limite: $\lim_{t\rightarrow t_0}\frac{1}{t-t_0}\{\iiint_{R(t)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_0)\}$, esta razón se puede interpretar como el cambio de la función INT_P en la referencia de Lagrange, ya que se debe observar que la región de integración cambia de posición. En los libros es denotado $\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} P$, lo cual hace pensar que se esta extendiendo la definición de $\frac{D}{Dt}$. Calculémosle en términos de P y de V, el parámetro y el campo de velocidades respectivamente.

El símbolo $\Im\psi_{(x,t)}$ denota el *Jacobiano* de ψ evaluado en *(x,t)*. Se usaran los siguientes resultados:

LEMA-1

$\frac{d}{dt}\iiint_R P(x,t) = \iiint_R \frac{\partial}{\partial t}P(x,t)$. La región de integración esta fija.

LEMA-2

Si $\psi(x,t) = x$ entonces $\Im\psi_{(x,t)} = I$

LEMA-3 $\frac{\partial}{\partial t}\Im\psi\Big|_{(x,t)} = (\Im\psi)*(Divergencia\ V(\psi,t))\Big|_{(x,t)}$

REGLA DE LA CADENA (aplicado en particular para la composición $P\circ(\psi,t)$).

$\frac{\partial}{\partial t}P\circ(\psi,t) = V\cdot\nabla P(x,t) + P(x,t)*divV$. Recordemos que $V = \frac{\partial}{\partial t}\psi$.

TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE (aplicado en particular a la función ψ fijando el tiempo).

$$\iiint_{R(t)} P(x,t) = \iiint_{R} \{P(\psi(x,t),t_0) * |\Im\psi'|\}$$ Recordemos que $R(t)=\psi(R,t)$.

Dados como ciertos los resultados anteriores podemos proceder de la siguiente forma.

Es cierta la igualdad (sumando un cero):

$$\iiint_{R(t)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_0) = \iiint_{R(t_0)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_o) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t) + \iiint_{R(t)} P(x,t)$$

Utilizando el **Teorema del cambio de variable:**

$$\iiint_{R(t)} P(x,t) \quad - \quad \iiint_{R(t_0)} P(x,t_0) \quad = \iiint_{R(t_0)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_o) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} P(\psi(x,t),t) * \Im\psi$$

esta ultima igualdad se puede escribir como (sumando un cero):

$$\iiint_{R(t)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_0)$$

$$=$$

$$\iiint_{R(t_0)} P(x,t) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t_o) - \iiint_{R(t_0)} P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} P(\psi(x,t),t) - \iiint_{R(t_0)} P(\psi(x,t),t) + \iiint_{R(t_0)} P(\psi(x,t),t) * \Im\psi$$

Así aplicando el limite cuanto t tiende a t_o:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t-t_0} \left\{ \quad \iiint_{R(t)} P(x,t) \quad - \quad \iiint_{R(t_0)} P(x,t_0) \quad \right\}$$

$$=$$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left\{\iiint_{R(t_0)}P(x,t)-\iiint_{R(t_0)}P(x,t_o)-\iiint_{R(t_0)}P(x,t)+\iiint_{R(t_0)}P(\psi(x,t),t)-\iiint_{R(t_0)}P(\psi(x,t),t)+\iiint_{R(t_0)}P(\psi(x,t),t)*\Im\psi\right\}$$

Ahora asociando términos dos a dos y utilizando la linealidad de la integral, se tiene la igualdad:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left\{\iiint_{R(t)}P(x,t)-\iiint_{R(t_0)}P(x,t_0)\right\}=$$

$$\lim_{t\to t_o}\iiint_{R(t_0)}\frac{P(x,t)-P(x,t_o)}{t-t_0}+\lim_{t\to t_o}\iiint_{R(t_0)}\frac{P(\psi(x,t)\ ,\ t)-P(x,t)}{t-t_0}+\lim_{t\to t_0}\iiint_{R(t_0)}\frac{(\Im\psi-1)}{t-t_0}*P(\psi(x,t),t)$$

ahora si aplicamos el **lema 1**:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left\{\iiint_{R(t)}P(x,t)-\iiint_{R(t_0)}P(x,t_0)\right\}=$$

$$\iiint_{R(t_0)}\lim_{t\to t_o}\frac{P(x,t)-P(x,t_o)}{t-t_0}+\iiint_{R(t_0)}\lim_{t\to t_o}\frac{P(\psi(x,t)\ ,\ t)-P(x,t)}{t-t_0}+\iiint_{R(t_0)}\lim_{t\to t_o}\frac{(\Im\psi-1)}{t-t_0}*P(\psi(x,t),t)$$

recordando que $\psi\ (x,t_0)=x\quad\forall x\in R(t_0)=R$, y aplicando la **regla de la cadena** además el **lema dos:**

$$\lim_{t\to t_0}\frac{1}{t-t_0}\left\{\iiint_{R(t)}P(x,t)-\iiint_{R(t_0)}P(x,t_0)\right\}=$$

$$\iiint_{R(t_0)}\frac{\partial P}{\partial t}+\iiint_{R(t_0)}V\cdot\nabla P(x,t)+\iiint_{R(t_0)}\frac{\partial(\Im\psi)}{\partial t}*P(x,t)$$

Luego aplicando el **lema 3** a la tercer integral se tiene la igualdad:

$$\iiint_{R(t_0)} \frac{\partial P}{\partial t} + \iiint_{R(t_0)} V \cdot \nabla P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} \frac{\partial(\Im\psi)}{\partial t} * P(x,t)$$

$$=$$

$$\iiint_{R(t_0)} \frac{\partial P}{\partial t} + \iiint_{R(t_0)} V \cdot \nabla P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} \Im\psi * (divergencia\ V(\psi,t)) * P(x,t)$$

y finalmente por el **lema 2**

$$\iiint_{R(t_0)} \frac{\partial P}{\partial t} + \iiint_{R(t_0)} V \cdot \nabla P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} \Im\psi * (divergencia\ V(\psi,t)) * P(x,t)$$

$$=$$

$$\iiint_{R(t_0)} \frac{\partial P}{\partial t} + \iiint_{R(t_0)} V \cdot \nabla P(x,t) + \iiint_{R(t_0)} (divergencia\ V(\psi,t)) * P(x,t)$$

ahora observando que:

$$V \cdot \nabla P(x,t) + (divergencia\ V(\psi,t)) * P(x,t) = divergencia(V(x,t) * P(x,t))$$

se llega a la igualdad:

$$\frac{d\ INT_P(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\psi(R,t)} P$$

$$=$$

$$\iiint_{R(t_0)} \{\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) + div(P(x,t) * V(x,t))\}.$$

Esta expresa la derivada de la función INT_P. Este resultado se le conoce como el <u>*Teorema de la Transportación de Reynolds*</u>. La importancia de este Teorema es que permite 'transportar' las expresiones que se obtienen en la referencia de Lagrange a expresiones en la referencia de Euler, siendo así un enlace en un sentido.

§8-Formas de las Ecuaciones de Conservación.

Los principios de conservación (de masa, momento o de energía) se pueden expresar en dos distintas formas según que se haga la referencia de **Euler** o la referencia de **Lagrange**; además se pueden poner en términos de **integrales** o de **derivadas parciales** por este motivo se pueden encontrar cuatro distintas formas para cada una de las ecuaciones de conservación. Se debe señalar que todas estas expresan el mismo principio de conservación aunque son diferentes las condiciones de regularidad en cada ecuación, y mas aun se puede deducir una forma de la otra mediante el teorema de la transportación de Reynolds y los teoremas del calculo vectorial como son el teorema de Gauss y el teorema de Stokes, al hacer las correctas suposiciones de regularidad.

Referencias:

1-A Mathematical introduction to Fluid Mechanics. Chorin.

2-Essentials of Fluid Dynamics. Prandtl.

3-Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Prandtl and Jietsen. Editorial Dover.

3-Elementary Fluid Mechanics. Vennard y Street . Editorial Wiley.

4-Computational Fluid Dynamics. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.

5-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

6-Calculo en Variedades. Spivak. Editorial Reverte.

7-Mecánica de fluidos. Frank M. White. Editorial Mc Graw Hill.

8-Mecanica de Fluidos. Landau y Lifchitz. Editorial Reverte.

9-Mechanics of deformable bodies. Sommerfeld. Editorial Academic press.vol. 2

10-Modern Compressible Flow with historical perspective. Anderson. Editorial Mcgraw Hill

11-Fundamental Mechanics of Fluids. Currie. Editorial McGraw Hill.

12-Fluid Mechanics. Gotfinger-Pnueli. Cambridge.

13-Tratado de Hidrodinamica Teórica. Milne.

14-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

15-Calculo en Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.

16-Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2.L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.

17-Hydrodynamics. Lamb. Dover.

ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.

§1-Ecuación de Conservación de la Masa.

La deducción de la ecuación de continuidad, la ecuación que expresa la conservación de la masa, se deduce en la referencia de Lagrange en forma directa.

La densidad se define como el limite de la razón de cambio de la masa respecto al volumen. Sea $x \in D$ un punto arbitrario, se toma una esfera, se mide la masa contenida y se toma el cociente con el volumen de la esfera, este cociente da una densidad promedio, que al tomar el limite cuando el volumen tiende cero, resulta ser la densidad en x. De esta definición se puede ver que una aproximación para la masa en un volumen pequeño es la densidad en uno de sus puntos, multiplicada por el volumen; así la masa contenida en la región R se expresa como $\iiint_R \rho$, donde ρ denota la densidad. Sea R una región en un instante de tiempo t_o, en general sea $R(t)$ la región en que se transforma la región original R al tiempo t es decir $R(t)=\psi(\psi^{-1}(R,t_0),t)$, la integral $\iiint_{R(t)} \rho$, es la masa en la región $R(t)$ en el tiempo t, por el principio de la conservación de la masa es constante, esto es:

$$\iiint_R \rho = \iiint_{R(t)} \rho \quad \text{para todo } t \geq 0;$$

esta es la ecuación de conservación de la masa, obtenida en la referencia de Lagrange, en forma integral, observemos lo siguiente:

1- Fue directo obtener la ecuación de continuidad.

2- Aparentemente solo se regula el comportamiento del parámetro densidad

3- Es suficiente pedir que ρ sea integrable, aspecto que en las aplicaciones podría parecer una generalización innecesaria. En desarrollos avanzados esta condición en la densidad (y en la demás funciones involucradas) con mayor generalidad se introduce con éxito para analizar ecuaciones diferenciales parciales; esta es una técnica del Análisis Funcional.

Se pueden obtener tres ecuaciones mas, que también reciben el nombre de ecuación de continuidad, que involucran el campo de velocidades V; estas serán obtenidas mediante transformaciones matemáticas, y se obtendrá una en forma independiente.

A la ecuación de continuidad:

$$\iiint_{R(t)} \rho(x,t) = constante$$

la podemos pensar como un caso particular de la función genérica INT_ρ del apartado §7 del capitulo dos, aplicándole a esta el *Teorema de la Transportación de Reynolds* resulta la siguiente igualdad:

$$\iiint_{R(t_0)} \{\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) + div(\rho(x,t) * V(x,t))\} = 0$$

esta forma de la ecuación que expresa el principio de la conservación de la masa es la que se obtiene usando la referencia de Euler expresada en forma integral. Observando que la región de integración, es arbitraria se puede obtener la forma diferencial en la referencia de Euler de la ecuación de la conservación de la masa. Si aplicamos el teorema del valor medio de la integral, tomado en particular sobre una región de integración B_n el interior de una esfera de radio $\frac{1}{n}$, centrada en un punto fijo pero arbitrario x contenida en D entonces podemos escribir la igualdad:

$$volumen(B_n) * \{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\xi_I, t) + div(\rho(\xi_I, t) * V(\xi_I, t) \quad)\} = 0 \quad \xi_I \in B_n$$

siendo el volumen de B_n un número positivo, se debe cumplir que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\xi_I, t) + div(\rho(\xi_I, t) * V(\xi_I, t)) = 0$$

al hacer $n \to \infty$, por la continuidad de las segundas derivadas de las funciones ψ y ρ, se tiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x,t) + div(\rho(x \ , t) * V(x,t) = 0$$

esta es la ecuación de la conservación de la masa expresada en forma diferencial en la referencia de Euler.

Observemos la igualdad $div(\rho V) = \rho \, divV + \mathrm{grad}\rho \cdot V$ y recordemos la definición de derivada material $\frac{D}{Dt}(P) = \frac{\partial}{\partial t} P + u \frac{\partial}{\partial x} P + v \frac{\partial}{\partial y} P + w \frac{\partial}{\partial z} P$, la ecuación de conservación de la masa se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho divV = \ 0$$

esta es la ecuación de conservación de la masa, en forma diferencial en la referencia de Lagrange.

Se deducirá la ecuación de conservación de la masa en forma directa a partir de la referencia de Euler. Se hará esto sin justificar la validez de los razonamientos, por que se quiere ilustrar la forma de proceder en la referencia de Euler, y no tomar a esta como la correcta deducción de la ecuación de conservación de la masa.

Sea R una región y S su frontera, la cual es una superficie. El principio de la conservación de la masa se puede enunciar para la región R como: La razón de crecimiento de la masa en R es igual a la razón de flujo de la masa por la superficie S en la dirección interior. La razón de crecimiento de la masa esta dado por $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_R \rho$ que es igual a $\iiint_R \frac{\partial}{\partial t}\rho$. El flujo de masa sobre una porción pequeña de la superficie S la cual podemos llamar S_i se puede aproximar así: $Area(S_i) * \rho(x_i, t) * V(x_i, t) \cdot n(x_i, t)$, $x_i \in S_i$, donde n es un vector normal de norma uno apuntando en la dirección interior de la región R. Al sumar sobre todas las porciones de superficie, y hacer estas mas pequeñas se obtendrá en el limite la integral de superficie $\oiint_S \rho\ V \cdot dn$, este es el flujo de masa por la superficie S, en la dirección interior, que por el Teorema de Gauss es igual a $-\iiint_R div(\rho V)$, finalmente la ecuación de la conservación de la masa resulta $\iiint_R \frac{\partial}{\partial t}\rho = -\iiint_R div(\rho V)$, la cual se puede escribir:

$$\iiint_R \frac{\partial}{\partial t}\rho + \iiint_R div(\rho V) = 0.$$

Esta es la ecuación que se obtuvo anteriormente.

§2-Ecuación de Conservación del Momento.

La segunda ley de Newton es *Fuerza = Masa * Aceleración*, que para una partícula puntual lleva a la ecuación $F = \frac{d}{dt}(mV(t)) = m*a$ de la cual se puede deducir el principio de la conservación del momento lineal, al ser expresada esta ley en V, se obtiene la ecuación de conservación del momento. Para obtenerla se procederá de la misma forma que con la ecuación de conservación de la masa: utilizar la referencia de Lagrange.

Sean t_0 un tiempo fijo, R un conjunto abierto subconjunto de D denotado también $R(t_0)$, sea S la frontera de R la cual supondremos es una superficie, también denotada $S(t_0)$. Para cada tiempo t la región se esta transformando en una región $R(t)$ debido al flujo, siendo esta $\psi(\psi^{-1}(R, t_0), t)$, sea la frontera de $R(t)$ denotada $S(t)$ la cual supondremos es una superficie. La fuerza que experimenta cada una de las partículas en la región R es igual a su masa por su aceleración, esta es la segunda ley de Newton, la cual se aplica a masas puntuales; sin embargo con el propósito de aplicar esta a conjuntos que representan volúmenes de masa, es razonable pensar que si la masa total de la región de R es la suma de las masas de las partículas que la forman, entonces la fuerza a la que esta sometida esta región, análogamente es la suma de las fuerzas en cada una de las partículas que la forman, esta es una suposición razonable cuya justificación es por consideraciones físicas.

Continuemos siguiendo esta idea.

Hasta ahora se ha impuesto condiciones de regularidad para los parámetros, y para la función ψ ; (que implica condiciones de regularidad para V), como no se había hablado de las fuerzas a que se halla sometido el fluido, no se había impuesto ninguna condición de regularidad a ellas, será necesario para las deducciones siguientes la:

Suposición :

> Sea ϕ un flujo y sea $F: D\times[0,\infty)\subset\Re^4\rightarrow\Re^3$ una fuerza que se ejerce en el; F es *continua*.

Esta es una suposición que se hará de aquí en adelante, la cual implicara que los componentes de F son integrables en todo compacto y respecto a cualquiera de sus variables.

La fuerza total F a la cual esta sometida el fluido, supongamos es la resultante de dos fuerzas F_v y F_s, la primera de ellas representa la fuerza por unidad de volumen, mientras que la segunda la fuerza por unidad de área .

Sea Q una partición de $R(t)$, sea p elemento de Q , la fuerza que actúa en p se puede aproximar como $Masa(p)*F_v(\xi_l,t)$ donde $\xi_l\in p$, a su vez se puede aproximar por $volumen(p)*\rho(\xi_l,t)*F_v(\xi_l,t)\ \xi_l\in p$ al hacer la partición cada vez mas fina, y al sumar sobre todos los elementos de p se obtiene la integral de cada uno de los componentes de F_v, simbólicamente lo podemos escribir:

$$\iiint_{R(t)}\rho\, F_v$$

esta es la fuerza por unidad de volumen en el conjunto $R(t)$.

Sea W una partición de la superficie $S(t)$, y sea s elemento de W la fuerza que se experimenta en este, debido a la fuerza F_s, se puede aproximar por $Area\ (s)*\ F_s(\xi_l,t)\ \xi_l\in s$ al sumar sobre todos los elementos de la partición e ir haciéndolos cada vez mas pequeños, en el limite se obtiene la integral de superficie de cada componente del campo de fuerza F_s, simbólicamente lo podemos escribir:

$$\oiint_{S(t)} F_s$$

esta es la fuerza por unidad de área en el conjunto *S(t)*.

Entonces ya tenemos la fuerza total que actúa en el conjunto *R(t)* en el tiempo *t:*

$$\oiint_{S(t)} F_s + \iiint_{R(t)} F_v .$$

La masa por aceleración en el conjunto *R(t)* la calculamos así: sea *Q* una partición de *R(t)* y sea *p* un elemento de esta, en *p* la masa por la aceleración se aproxima como:

$$Masa(p) * \frac{D}{Dt} V(\xi_i, t),\ \xi_i \in p,$$

a su vez esto se puede aproximar como:

$$Volumen(p) * \rho\,(\xi_i, t) * \frac{D}{Dt} V(\xi_i, t)$$

al sumar sobre todos los elementos, y tomar particiones con elementos cada vez mas finos, se obtiene en el limite la integral que podemos denotar como:

$$\iiint_{R(t)} \rho \frac{D}{Dt} V(x,t)$$

esta es la masa por aceleración total en la región *R(t)*.

Finalmente tenemos la igualdad:

$$\iiint_{R(t)} \rho \frac{D}{Dt} V(x,t) = \oiint_{S(t)} F_s + \iiint_{R(t)} F_v$$

esta es la ecuación de la conservación del momento, expresada en la referencia de Lagrange, en forma Integral.

En el apartado §4 se obtendrá la forma diferencial en la referencia de Euler de una forma de la ecuación de conservación de momento, la ecuación de Euler.

§3-Ecuación de Conservación de la Energía.

La energía no se crea ni se destruye solo se transforma, el principio de la conservación de la energía, expresado para un fluido dará la ultima ecuación, para tener el conjunto de ecuaciones para la representación de un flujo.

Este principio es la primera ley de la Termodinámica, y se enuncia así:

'La razón de cambio en la energía interna = Trabajo + Diferencia de Calor'.

Consideraremos para un fluido que la energía interna es la suma de la energía cinética, con la energía por unidad de volumen debido a la interacción intermolecular. Se hace la suposición de que esta energía es constante y se le denotara con la letra *e*.

Consideraremos de nuevo la situación en la referencia de Lagrange.

Sea Q una partición del conjunto $R(t)$ y sea p un elemento p de ella, la energía debido a la interacción molecular en p es: *masa(p)*e,* que se puede aproximar así: *volumen(p)** $\rho(\xi_i, t)$ **e,* $\xi_i \in p$; al sumar sobre todos los elementos de la partición y hacerla cada vez mas fina se tiene en el limite la integral:

$$\iiint_{R(t)} \rho e .$$

La energía cinética en un elemento p de la partición se puede aproximar como:

$$\frac{1}{2} masa(p) * (V(\xi_i, t)\, V(\xi_i, t))\ \xi_i \in p$$

esto a su vez se puede aproximar por:

$$\frac{1}{2} volumen(p) *\ \rho(\xi_i, t) * (V(\xi_i, t)\, V(\xi_i, t))\ \xi_i \in p$$

al sumar en todos los elementos de la partición y hacer cada vez mas fina la partición, en el limite se obtiene la integral:

$$\frac{1}{2} \iiint_{R(t)} \rho * V \cdot V .$$

Entonces la razón de cambio en la energía interna total, en la región $R(t)$ es:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{R(t)} \{\rho e + \frac{\rho}{2} V \cdot V\}$$

El trabajo realizado en la región $R(t)$ debido a la fuerza F_v se puede aproximar, tomando una partición Q de la región $R(t)$, sea p un elemento de Q, el trabajo en p esta aproximado por: $masa(p) * F_v(x_i,t)V(x_i,t)$, lo cual a su vez se puede aproximar por: $volumen(p) * \rho(x_i,t) * F_v(x_i,t)V(x_i,t)$, al sumar en todos los elementos de la partición, y hacer cada vez mas fina la partición, se tiene en el limite la integral:

$$\iiint_{R(t)} \rho F_v \cdot V$$

esta integral es la cantidad de trabajo que realiza el fluido originalmente en la región R, debido al campo de fuerza F_v en un tiempo t.

El trabajo realizado en la superficie $S(t)$ debido a la fuerza F_s se puede aproximar, tomando una partición; sea W una partición de $S(t)$ y sea s un elemento en ella, el trabajo en s esta aproximado por: $área(s) * F_s(x_i,t)V(x_i,t)$, al sumar sobre todos los elementos de la partición y hacerla cada vez mas fina, se tiene en el limite la integral de superficie:

$$\oint\!\!\oint_{S(t)} F_s \cdot V$$

Esta integral es la cantidad de trabajo que realiza el fluido originalmente en la región R, debido al cambio de fuerza F_s, en un tiempo t.

El trabajo total en la región $R(t)$ es:

$$\iiint_{R(t)} \rho F_v \cdot V + \oint\!\!\oint_{S(t)} F_s \cdot V$$

Sea $H{:}D\times[t_0,\infty]\subset R^4 \to R^3$ el campo vectorial que representa flujo de calor en el fluido.

El flujo del calor en la superficie $S(t)$ es $-\oint\!\!\oint_{S(t)} H\,dn$, esta integral por el teorema de la divergencia es $-\iiint_{R(t)} div\,H$.

Si reunimos todas las expresiones encontradas, en la primera ley de la termodinámica, tenemos la ecuación:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} \rho e+\frac{\rho}{2}V\cdot V = \iiint_{R(t)} \rho F_V\cdot V + \oiint_{S(t)} F_s\cdot V \; -\iiint_{R(t)} div\, H.$$

Esta es la ecuación de energía expresada en la referencia de Lagrange en forma integral.

§4-Ecuación de Euler.

En la ecuación de conservación del momento, obtenida en el apartado §2, la fuerza F_s esta expresada en forma general. Euler deduce la ecuación de conservación del momento, dando una expresión para la fuerza F_s; el supone: $F_s = p*n$ p es el parámetro de presión, y n es un vector normal a la superficie en la cual se este calculando el actuar de la fuerza. A los fluidos los cuales se les puede describir haciendo esta suposición, se les llama fluidos ideales, un ejemplo de estos es el agua (valido para ciertos tipos de régimen de flujo de ella).

La ecuación de conservación del momento es:

$$\iiint_{R(t)} \rho \frac{D}{Dt}V(x,t) = \oiint_{S(t)} F_s + \iiint_{R(t)} \rho\, F_v,$$

en esta ecuación hagamos la sustitución: F_s = p* n. La integral $\oiint_{S(t)} pn$ es igual a $-\iiint_{R(t)} \mathrm{gra}\,d\ p$, así la ecuación de momento es:

$$\iiint_R \rho \frac{D}{Dt}V(x,t) = \iiint_R \{\rho F_v - \mathrm{gra}\,d\,p\}.$$

Esta ecuación se le conoce como ecuación de Euler. Su forma es integral en la referencia de Lagrange, se puede obtener en forma diferencial, observando que la región R es arbitraria, se puede aplicar el mismo argumento que en el caso de la ecuación de continuidad, para así obtener la ecuación diferencial:

$$\rho \frac{D}{Dt}V = \rho\, F_v - \mathrm{gra}\,d\ p$$

escribiendo explícitamente a $\frac{D}{Dt}V$ se obtiene la ecuación de Euler en forma diferencial, en la referencia de Euler.

La ecuación de energía:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} \rho e+\frac{\rho}{2}V\cdot V = \iiint_{R(t)} \rho F_V\cdot V + \oiint_{S(t)} F_s\cdot V \; -\iiint_{R(t)} div\, H,$$

al sustituir $F_s = p^* n$ da lugar a la ecuación:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} \rho e + \frac{\rho}{2} V \cdot V = \iiint_{R(t)} \rho F_V \cdot V + \oiint_{S(t)} p\, n \cdot V \quad - \iiint_{R(t)} div\, H$$

si aplicamos el teorema de la divergencia, a la integral de superficie:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} \rho e + \frac{\rho}{2} V \cdot V = \iiint_{R(t)} \rho F_V \cdot V \quad - \iiint_{R(t)} div\,(pV) \quad - \iiint_{R(t)} div\, H,$$

esta es la ecuación de energía en forma integral en la referencia de Lagrange para fluidos ideales.

Se obtiene la forma integral en la referencia de Euler aplicando el teorema de la Transportación de Reynolds.

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{R(t)} \rho e + \frac{\rho}{2} V \cdot V = \iiint_{R(t)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{\rho}{2} V \cdot V) + \iiint_{R(t)} div(\ (\rho\, e + \frac{\rho}{2}(V \cdot V)\ ) V).$$

La forma diferencial en la referencia de Euler para fluidos ideales es:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e + \frac{\rho}{2} V^2) + div(\rho e + \frac{\rho}{2} V^2) \cdot V = \rho F_v V - div(\rho V) - div H\ .$$

§5-Ecuación de Navier-Stokes.

En la ecuación de conservación del momento la fuerza F_s no se ha dado en forma explícita, la ecuación de Euler es la ecuación del conservación momento dándole una forma particular, a esta fuerza. La forma de Euler modela bien fluidos para los cuales la viscosidad es muy pequeña, sin embargo cantidad de fluidos los cuales son necesarios considerar en la practica, presentan una viscosidad la cual no puede ser despreciada y aun siendo esta pequeña (en algún orden de magnitud) hay fenómenos para la cual sin ser aparente, la viscosidad es determinante, es necesario entonces en la ecuación de conservación del momento y en particular en la fuerza F_s considerar los efectos de la viscosidad. Navier independientemente de Stokes, deducen la ecuación de conservación del momento incluyendo efectos de viscosidad, a esta ecuación se le llama ecuación de Navier-Stokes. La forma de Euler para la fuerza ejercida sobre la superficie es

$F_s = p^* n$ según se vio en el apartado anterior, ahora a esta expresión le vamos a sumar una función σ del vector normal unitario n, con la finalidad de incluir el efecto de la viscosidad, esto es vamos a suponer que la fuerza por unidad de área dada una superficie y sus vectores normales, definida puntualmente es:

$$p(x,t)^* n + \sigma(x,t) \cdot n(x,t)$$

Un resultado muy importante enunciado y demostrado por Cauchy, dice que si se supone la función σ continua, entonces esta es una función lineal, lo cual hace demostrable bajo la hipótesis de continuidad el postulado de Newton: el intercambio de momento en un flujo debido a la interacción molecular es linealmente dependiente de los gradientes de velocidad; los flujos para los cuales es valido este postulado se les llama flujos newtonianos.

En Algebra Lineal se prueba que toda transformación lineal, fijando una base tiene una matriz asociada que la representa, veamos cuales son los componentes de la matriz asociada a la transformación σ en la base canónica (el espacio es $\Re^3$).

Será necesario imponer condiciones a σ para determinarla, que corresponden a la expresión matemática del comportamiento del fenómeno que representa esta función, es decir el intercambio de momento debido a la interacción molecular; estas condiciones son:

1 σ *depende continuamente de los gradientes del campo de velocidades.*

2 σ *es invariante bajo rotaciones de coordenadas.*

3 σ *es simétrica*

La condición *1* es una expresión que 'generaliza' el postulado de Newton acerca de la relación de la disipación de momento en un flujo. La condición *2* expresa que en la rotación rígida de un fluido, no hay difusión de momentos, hecho que es razonable y se confirma con experimentos de laboratorio. La condición *3* expresa la conservación de momento angular.

De la condición *1* se puede demostrar la condición

1' σ *depende linealmente de los gradientes del campo de velocidades.*

esta deducción, es de hecho el teorema de Cauchy acerca de la función σ.

Las condiciones *1' 2 y 3* son suficientes para determinar a la función σ , la cual es:

$$\sigma(x,t) = \lambda\, divV(x,t)I + 2\mu\, O(x,t)$$

donde se ha usado la notación:

los números λ , μ son constantes que se determinan experimentalmente.

V es el campo de velocidades del flujo y u, v, w son sus componentes.

$$divV(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + \frac{\partial}{\partial y}v(x,t) + \frac{\partial}{\partial z}w(x,t)$$

I es la matriz identidad de tres por tres entradas.

$O(x,t) = \frac{1}{2}(\Im(x,t)^T + \Im(x,t))$, $\Im(x,t)$ es la matriz jacobiana del campo de velocidades V y $\Im(x,t)^T$ es su matriz transpuesta.

Ahora recordemos la ecuación general que se dedujo en el apartado §2 que expresa la conservación de momento:

$$\iiint_{R(t)} \rho \frac{D}{Dt}V(x,t) = \oiint_{S(t)} F_s + \iiint_{R(t)} F_v$$

y como se procedió en el apartado §4 para obtener la ecuación de Euler, para poder obtener la forma definitiva de la ecuación de momento que en esta forma se llama ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{D}{Dt}V = \rho F_v - \nabla p + (\lambda+\mu)\nabla(divV) + \mu\, \ell(V)$$

donde se ha usado la notación:

∇ representa el vector gradiente de la función escalar a la cual se esta aplicando.

ℓ representa el laplaciano de la función escalar a la cual se esta aplicando.

Hay un caso importante cuando el fluido es incompresible es decir su parámetro densidad, no cambia en el tiempo y en el espacio, reduciéndose las ecuaciones de Navier-Stokes a las ecuaciones:

$$\frac{D}{Dt}V=F_v-\frac{1}{\rho_0}\nabla p+\frac{\mu}{\rho_0}\ell(V)$$

$$div\ V=0$$

Ahora escribamos las ecuaciones componente a componente:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}u+v\frac{\partial}{\partial y}u+w\frac{\partial}{\partial z}u=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}P+F_x+\frac{\mu}{\rho_0}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u+\frac{\partial^2}{\partial z^2}u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}v+v\frac{\partial}{\partial y}v+w\frac{\partial}{\partial z}v=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}P+F_y+\frac{\mu}{\rho_0}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}v+\frac{\partial^2}{\partial y^2}v+\frac{\partial^2}{\partial z^2}v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}w+v\frac{\partial}{\partial y}w+w\frac{\partial}{\partial z}w=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}P+F_z+\frac{\mu}{\rho_0}(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w+\frac{\partial^2}{\partial y^2}w+\frac{\partial^2}{\partial z^2}w)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v+\frac{\partial}{\partial z}w=0$$

Referencias:

1-A Mathematical introduction to Fluid Mechanics. Chorin. Editorial Springer Verlag

2-Essentials of Fluid Dynamics. Prandtl.

3-Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Prandtl and Jietsen. Editorial Dover.

3-Elementary Fluid Mechanics. Vennard y Street . Editorial Wiley.

4-Computational Fluid Dynamics. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.

5-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático vol. 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

6-Calculo en Variedades. Spivak. Editorial Reverte.

7-Mecánica de fluidos. Frank M. White. Editorial Mc Graw Hill.

8-Mecanica de Fluidos. Landau y Lifchitz. Editorial Reverte.

9-Mechanics of deformable bodies. Sommerfeld. Editorial Academic press. vol. 2

10-Modern Compressible Flow with historical perspective. Anderson. Editorial Mcgraw Hill

11-Fundamental Mechanics of Fluids. Currie. Editorial McGraw Hill.

12-Fluid Mechanics. Gotfinger-Pnueli. Cambridge.

13-Tratado de Hidrodinamica Teórica. Milne.

14-Hydrodynamics. Lamb. Dover.

15-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

16-Calculo en Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.

17-Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2.L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS.

Las ecuaciones de Navier-Stokes no se pueden resolver generalmente en forma analítica; solo en casos donde las ecuaciones se reducen considerablemente. Sin embargo aun cuando no se pueda obtener una solución analítica de las ecuaciones de Navier-Stokes se puede obtener una función que aproxime a la solución, esta función se puede encontrar al utilizar el concepto de diferencias finitas, mismo que introduce por primera vez Leonhard Euler.

Se expondrá el concepto de diferencias finitas, útil este para resolver ecuaciones diferenciales en forma aproximada. Se dan ejemplos de ecuaciones diferenciales que no tienen un buen comportamiento respecto al principio de Existencia-Unicidad, y se muestra como se refleja en los cálculos numéricos. Se presenta el método de resolución de ecuaciones en diferencias finitas de Maccormack.

§1-Ecuaciones en diferencias finitas.

Se explicara para el caso en que las funciones involucradas en las ecuaciones diferenciales dependen de dos variables, dado que para un mayor numero de variables es análogo el razonamiento –aunque es mayor la complejidad -. Supóngase se tiene una ecuación diferencial la cual se desea resolver en un rectángulo del espacio euclidiano $\Re^2$.

Una derivada parcial de una función es una derivada normal fijando la otra variable, y una derivada se define como el limite de la razón del incremento de la función entre el incremento de la variable cuando esta tiende a cero, entonces se puede aproximar a la derivada como este cociente, dado que el incremento de la variable sea suficientemente pequeño.

Si para cada derivada parcial que aparece se sustituye por una aproximación de cocientes, se obtendrá una ecuación que es de tipo algebraico, a esta ecuación se le conoce como ecuación en diferencias finitas. Pero no es conveniente hacer una manipulación algebraica de una ecuación que involucra un conjunto de indeterminadas de la potencia del continuo, entonces se hace necesario hacer una selección de puntos en el dominio. A este conjunto de puntos se le conoce como **malla.** El hecho de que solo se consideren puntos de este conjunto trae como consecuencia, que las aproximaciones que se hagan para las derivadas parciales sean de tres tipos.

Esto se hace claro cuando se introduce un tipo particular muy importante en la practica, de malla que se le conoce como malla rectangular.

Primero veamos la definición de malla:

Sea D un subconjunto igual a la cerradura de su interior, conexo compacto de R^2. Un subconjunto de puntos **m** contenido en D se le llama **malla** de norma ***d*** si se satisface:

1- **m** es un conjunto finito.
2- Para todo elemento de la cerradura de D existe un elemento de la malla **m** tal que la distancia entre ellos dos sea menor o igual a ***d***.
3- ***d*** es el mínimo de todos los que cumplen la condición 2.

Esta es una buena definición debido a la condición 1. De hecho ***d*** es el máximo de las distancias de los elementos de **m**.

Se puede extender la definición a conjuntos D cerrados que no sean compactos, al escribirlos como la unión de conjuntos compactos y aplicarles a estos la definición. En este caso la norma de D se define como el máximo de las normas en cada compacto. Esto es: sean $D=\bigcup_i K_i$ donde cada K_i es compacto y **m** un conjunto discreto contenido en D, este conjunto es malla de norma ***d*** si: el conjunto $K_i \cap \mathbf{m}$ es malla en K_i con d_i su norma, la norma de **m** es ***d***, el supremo del conjunto $\{d_i\}$, (puede bien suceder que este supremo sea infinito, en cuyo caso indica que el conjunto **m** no es bueno para lo que se quiere del concepto de malla). Es fácil ver que esta es una buena definición, es decir, que no depende de la descomposición en compactos: $D=\bigcup_i K_i$.

Una malla rectangular se define en un conjunto que sea un rectángulo. En el rectángulo *[a,b]x[c,d]* sean $\frac{b-a}{m}=\Delta x$ $\frac{c-d}{n}=\Delta y$ dos números positivos arbitrarios con m y n dos números naturales. Considérese el conjunto:

$$\mathbf{m} = \{ (a + \Delta x^*k\,,\, c + \Delta y^*s) \text{ tal que } 0 \le k \le m,\ 0 \le s \le n\}$$

este es una malla con norma igual a:

$$\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{2}.$$

Sea ($a + \Delta x^*k, c + \Delta y^*s$) un punto arbitrario en el interior del rectángulo es decir de tal forma que $0<k<m$, $0<s<n$.

La siguiente tabla muestra las tres únicas distintas aproximaciones para la derivada, digamos respecto a la primera variable, en este punto a la función f, con puntos de la malla **m**:

diferencia sentido positivo	$\dfrac{f(a+\Delta x*(k+1),c+\Delta y*s)-f(a+\Delta x*k,c+\Delta y*s)}{\Delta x}$
diferencia sentido negativo	$\dfrac{f(a+\Delta x*k,c+\Delta y*s)-f(a+\Delta x*(k-1),c+\Delta y*s)}{\Delta x}$
diferencia centrada	$\dfrac{f(a+\Delta x*(k+1),c+\Delta y*s)-f(a+\Delta x*(k-1),c+\Delta y*s)}{2*\Delta x}$

Son estas las únicas tres combinaciones posibles de elegir puntos en la malla para dar un cociente que aproxime la derivada en el punto elegido de la malla tomando dos puntos de ella, respecto a x, de tal forma se tomen dos valuaciones de f.

Se puede abusar de la notación y escribir:

$$\frac{f(a+\Delta x*(k+1),c+\Delta y*s)-f(a+\Delta x*(k-1),c+\Delta y*s)}{2*\Delta x}$$
$$=$$
$$\frac{f(k+1,s)-f(k-1,s)}{2*\Delta x}$$

Es importante el hecho de haber elegidó al punto ($a + \Delta x*k$, $c+ \Delta y*s$) en el interior del conjunto, por que de lo contrario las expresiones de la tabla podrían ni siquiera tener sentido. Por ejemplo no es posible aproximar una derivada respecto a x con una diferencia en sentido positivo en puntos de la malla que tienen la forma (b, $c+\Delta y*s$), esto debido a que se tendrían que tomar puntos que no solo no son elementos de la malla, si no que además ni siquiera son elementos del rectángulo. Tampoco se puede dar una aproximación con una diferencia en sentido negativo en puntos de la forma (a, $\Delta y*s + c$), esto por la misma razón. Similarmente no es posible aproximar una derivada respecto a y con una diferencia en sentido positivo en puntos de la malla de la forma ($a+\Delta x*k$,d); ni tampoco con una diferencia en sentido negativo en puntos de la malla de la forma ($a+\Delta x*k$, c).
La generalización de una malla rectangular en $\Re^3$ es la natural, así como la generalización de malla rectangular en un rectángulo infinito.

§2-Ejemplos de ecuaciones diferenciales.

<u>Una ecuación diferencial de una variable, con una única solución.</u>

Consideremos la ecuación $y'=y$ con la condición inicial $y(0)=1$ de la cual sabemos su solución es la función exponencial. A la derivada y' se le puede sustituir por una diferencia en sentido positivo con lo cual se obtiene la ecuación: $\dfrac{f(k+1)-f(k)}{\Delta x}=f(k)$ esta ecuación es una ecuación algebraica con una infinidad de indeterminadas la cual aproxima a la ecuación diferencial, esta es una ecuación en diferencias finitas. Podemos observar que se tiene un sistema de ecuaciones algebraicas, con una infinidad de indeterminadas y una infinidad de ecuaciones, que debido a la simplicidad del problema se puede resolver fácilmente. Se puede despejar el valor $f(k+1)$ quedando así:

$$f(k+1)=(1+\Delta x)*f(k).$$

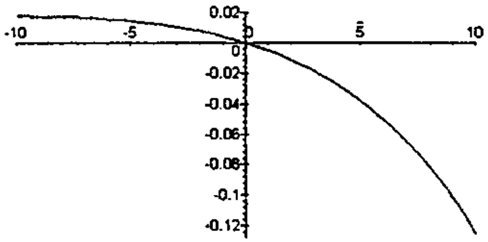
Como conjunto malla tomemos

$$m = \{ \Delta x*k \ \ tal\ que\ \ k \in Z \}, \text{ es cierto que } \ f(k) = (1+\Delta x)^k * f(0),$$

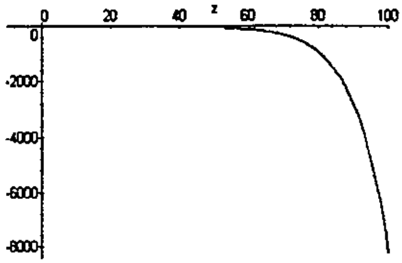
esto se puede probar fácilmente con inducción matemática sobre el índice k. De la condición inicial $y(0) = 1$ se reduce la anterior igualdad a:

$$f(k) = (1+\Delta x)^k \ ,$$

esta es la solución al sistema de ecuaciones que representa la ecuación en diferencias. Comparemos los valores que en efecto toma la función f, y los valores obtenidos mediante la ecuación en diferencias:



La gráfica muestra la diferencia de la solución exacta, con la solución dada mediante una interpolación con los valores que da la ecuación en diferencias finitas. Se uso una división de la unidad de 10, es decir $dx=0.1$. Podemos observar en la siguiente gráfica como el orden de aproximación va siendo menor al tomar valores en el dominio cada vez mayores:



Se evidencia que aun en una ecuación bien comportada, con una solución regular, en la cual no hay problema con el principio de Existencia-Unicidad, existen detalles con los cuales se deben tener cuidado, en este caso el orden de aproximación en los puntos del dominio. Se sabia la solución, de tal forma que a priori se conocía el dominio de ella; todo el conjunto de los reales, no obstante este también es un detalle que es importante considerar.

Ejemplo de una ecuación diferencial sin solución.

La ecuación $(\frac{d}{dx}f)^2 + e^x = 0$ no tiene solución la cual sea una función real evaluada, esto se puede probar fácilmente, observando que la ecuación diferencial tiene dos sumandos que siempre son mayores o iguales que cero, igualadas a cero, y uno de ellos: la función exponencial siempre toma valores positivos, esto en el campo de los números reales no es posible, así pues no hay ninguna función real valuada que satisfaga la ecuación diferencial; sin embargo en el campo de los números complejos la suma de dos números elevados al cuadrado si puede ser cero, debido a esto la ecuación diferencial en principio puede y de hecho tiene solución al tomar la derivación en el sentido complejo, pero esta solución no interesa en lo que se quiere ilustrar aquí. Si utilizamos la misma notación que en el ejemplo anterior y aproximamos la derivada de f mediante una diferencia en sentido negativo resulta: $(\frac{f(k)-f(k-1)}{\Delta x})^2 + e^k = 0$ se puede despejar directamente a *f(k)* en función de *f(k-1)* esto queda:

$$f(k) = f(k-1) + i\Delta x * e^{\frac{1}{2}k},$$

por inducción matemática se puede obtener apartir de esta ultima igualdad la relación:

$$f(k) = f(0) + i\Delta x \sum_{s=1..k} e^{\frac{s}{2}}.$$

Es decir la ecuación en diferencias finitas da como solución valores complejos, no hay una solución aproximada que tome valores en los reales, o al menos no se encontró al usar la aproximación de la derivada mediante una diferencia en sentido negativo. Sabemos que el problema esta en el hecho de que la ecuación diferencial no tiene solución en el campo de los reales, pero si se estuviera en el caso de un problema con una ecuación diferencial mas complicada y se aplica directamente un método numérico, se hubiera llegado a una situación en la que fallaría el método numérico. Es importante saber características de la ecuación diferencial antes de comenzar a aplicarle un análisis numérico.

El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - 2x_2\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2x_1\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - f(x_3)$$
$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + 2x_1\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - 2x_2\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - f(x_3)$$

o escrito en forma compleja:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}-2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=-f(x_3)$$

donde se ha escrito $u=v_1+iv_2$

es un ejemplo no trivial de una ecuación diferencial sin solución.
Este sistema lo encontró y demostró que no tenia solución H. Levy en 1956.

Ejemplo de una ecuación diferencial con una infinidad de soluciones.

Considérese $[0,\infty]\times[0,\infty]$ el cuadrante positivo de $\Re^2$, conjunto en el cual se quiere resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x^2}f(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=f(x,y),$$

con las condiciones de frontera:

$$f(0,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(0,y)+\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)\quad f(x,0)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,0).$$

La ecuación en efecto tiene solución, pero de hecho tiene una infinidad de soluciones, todas las funciones de la forma $f(x,y)=re^x+e^y$ son solución de la ecuación, como se puede comprobar por sustitución.

Fijemos los números Δx y Δy. En el rectángulo $[0,\infty]\times[0,\infty]$ consideremos la malla **m**$=\{(\Delta x*s,\ \Delta y*k)\ s,k\in \mathrm{N}\cup\{0\}\}$.

La derivada parcial de orden dos $\frac{\partial}{\partial x^2}$ es la derivada parcial respecto a la variable x de la función $\frac{\partial}{\partial x}f$, entonces es también una derivada primera, de una cierta función, su aproximación es:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(k+1,s)-\frac{\partial}{\partial x}f(k,s)}{\Delta x}$$

esta es una diferencia en sentido positivo, si sustituimos $\frac{\partial}{\partial x}f$ por la diferencia: $\frac{f(k+1,s)-f(k,s)}{\Delta x}$ en la anterior expresión se tiene para la derivada $\frac{\partial}{\partial x^2}$ la diferencia:

$$\frac{f(k+2,s)-2f(k+1,s)+f\ \ (k,s)}{\Delta x^2}.$$

Si sustituimos estas diferencias finitas, aproximaciones a su respectiva derivada, entonces obtenemos la ecuación en diferencias junto con sus condiciones de frontera que sustituirán a la ecuación diferencial junto con sus condiciones de frontera. Estas son:

$$f(k,s)=\frac{f(k+2,s)-2f(k+1,s)+f\ \ (k,s)}{\Delta x^2}+\frac{f(k,s+1)-f(k,s)}{\Delta y}$$

Las condiciones en la frontera:

$$f(k,0)=\frac{f(k+1,0)-f(k,0)}{\Delta x}+1$$

$$f(0,s)=\frac{f(0,s+1)-f(0,s)}{\Delta y}+\frac{f(1,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

Comencemos haciendo la simplificación $\Delta x=\Delta y=\Delta$, Δ es un numero positivo arbitrario pero que es pequeño (para los siguientes cálculos no importa el orden de magnitud). La estrategia a seguir en este caso es ir resolviendo la ecuación a lo largo de las líneas horizontales $\{\ (k^*\Delta\ ,\ i^*\Delta\ )$ *i* es un numero fijo natural, y *k* es un numero natural que se esta moviendo$\}$ la primer línea $\{\ (k^*d,\ 0)\ \}$ se resolverá con la condición sobre la frontera correspondiente es decir mediante la ecuación:

$$f(k,0)=\frac{f(k+1,0)-f(k,0)}{\Delta x}+1$$

si despejamos a $f(k+1,0)$ queda:

$$f(k+1,0\ )=f(k,0)(1+\Delta\ )-\Delta\ .$$

De esta ultima igualdad recursiva se puede fácilmente deducir que:

$$f(k,0)=\{f(0,0)+1\}^*(1+\Delta\ )^k\ -1.$$

Esta es la solución para la ecuación en diferencias, para los puntos $(k^*\Delta, 0)$. Ahora la ecuación en diferencia que sustituye a la ecuación diferencial se puede resolver en la línea $(k^*\Delta x, 1)$, recordemos la ecuación, pero para estos puntos en particular:

$$f(k,0) = \frac{f(k+2,0)-f(k+1,0)+f(k,0)}{\Delta^2}+\frac{f(k,1)-f(k,0)}{\Delta},$$

esta la podemos reescribir como

$$\Delta *f(k,0)*(1+\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\Delta^2}) - \frac{1}{\Delta} f(k+2)+2f(k+1,0) = f(k,1),$$

podemos observar que el valor $f(k,1)$ esta en función de los valores de f en los puntos $(k,0)$, $(k+1,0)$ y $(k+2,0)$ los cuales ya se obtuvieron, esto significa que también se ha resuelto a la ecuación en los puntos $(k^*\Delta, 1)$. De igual forma en general se puede resolver la ecuación en la línea $(k^*\Delta, s+1)$ una vez que se ha resuelto en la línea $(k^*\Delta, s)$. Observemos que todos los valores de la aproximación estarán dependiendo de los valores de aproximación sobre los puntos de la frontera, La solución de los puntos sobre la frontera depende del valor de f en $(0,0)$ y este valor no fue posible determinarlo hasta ahora, por lo cual no se ha resuelto completamente la ecuación, esto muestra que la ecuación diferencial con las condiciones de frontera dadas, no se resuelve de modo único. Observemos además que no se utilizo de modo alguno la condición de frontera en los puntos de la forma $(0,y)$, esto no debe ser causa de sorpresa, pues en las ecuaciones diferenciales, los problemas de frontera además de ser complicados, son diversos y presentan gran cantidad de comportamientos, en este caso particular lo que sucedió es que para determinar la solución solo fue necesaria la información de un subconjunto de la frontera, la información en el otro pedazo es innecesaria, lo cual se puede comprobar verificando que la solución que se ha obtenido satisface a la condición de frontera en los puntos $(0, \Delta *s)$.

Estos tres ejemplos aunque triviales muestran la importancia de considerar el principio de Existencia-Unicidad y analizar el orden de los errores.

No existe una teoría general que contemple todos los puntos que se necesitan analizar para determinar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales, es una teoria abierta. Sin embargo las ideas son claras, se debe tomar un conjunto de ecuaciones a las cuales se les debe analizar tomando en cuenta ideas de aproximación, de estabilidad, de Existencia-Unicidad, etc.

§3-Algoritmo de Maccormack.

El algoritmo de Maccormack es un esquema de aproximación mediante una diferencia finita a las derivadas correspondientes, la cual se aplica en particular a las ecuaciones de Navier-Stokes.

En las ecuaciones de Navier-Stokes una de las variables es el tiempo, que al variar da la evolución del sistema. El método de Maccormack aplicado a Navier-Stokes es un algoritmo que consiste en discretizar el tiempo, y resolver en un punto del tiempo una vez resuelto en el tiempo anterior, dando aproximaciones mediante diferencias finitas para las derivadas.

Si por ejemplo consideramos un flujo que representamos bidimensionalmente y sin perdida de generalidad nos fijamos en ρ (la densidad), se propone la siguiente aproximación:

$$\rho\,(x,y,t+\Delta) = \rho\,(x,y,t) + Promedio(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,)\,\Delta$$

en donde:

$$Promedio(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,)=\frac{1}{2}\,(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t)+ Aprox(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t+\Delta))).$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t)$$

se obtiene al sustituir en la ecuación de continuidad por cada derivada parcial que aparece una correspondiente diferencia en sentido <u>positivo</u>.

$$Aprox(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t+\Delta))$$

se obtiene al sustituir en la ecuación de continuidad por cada derivada parcial que aparece una correspondiente diferencia en sentido <u>negativo</u>, pero en lugar de poner el valor de las funciones correspondientes se sustituye por un valor predecido, donde este valor predecido para una función f es:

$$\bar{f}(x,y,t+\Delta) = f(x,y,t)+\Delta\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)$$

En realidad no es importante el sentido de las diferencias excepto que $\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t)$ y $Aprox(\frac{\partial}{\partial t}\rho\,(x,y,t+\Delta))$ tengan sentidos opuestos.

§4-Cambio de Dominio.

Al resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en forma aproximada mediante ecuaciones en diferencias, hay un problema en particular muy importante, es la construcción de una malla. En el apartado §1 se mostró un tipo particular de malla, en la cual es relativamente fácil manipular las relaciones algebraicas, que se dan mediante las ecuaciones en diferencias, pero en general los dominios que se deben considerar en las ecuaciones diferenciales son mas generales que rectángulos, en particular los problemas de la Mecánica de Fluidos hacen necesario considerar mallas mas generales; y además habrá puntos del dominio en que se haga necesario que la norma de la malla sea muy fina, como en los puntos de la frontera, pero sin necesidad de que en los demás puntos sea tanto.

Hay un concepto que permite utilizar las ventajas de una malla rectangular, a la vez que simplifica la ecuación en consideración, si es que hay las condiciones necesarias, este es el concepto de cambio de variable.

Referencias:

1-Computational Fluid Dynamics. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.
2-Modern Compressible Flow with historical perspective. Anderson. Editorial Mcgraw Hill
3-A panorama of pure Mathematics. Diudonne. Academic Press.
4-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.
5-Calculo en Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.
6-Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2.L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.
7-Ecuaciones de la Física Matemática. S. K. Godunov. Editorial Mir.
8-Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del calculo variacional. A.P. Kartashov , B.L. Rozhdenstvenski. Editorial Reverte.

CAMBIO DE VARIABLE.

El concepto de cambio de variable es útil para el análisis de las ecuaciones diferenciales, siendo en algunos casos, necesario para los cálculos numéricos y en otros casos, necesario para consideraciones teóricas.

Este concepto esta ligado a uno muy importante y trascendental en toda la Matemática, el concepto de Transformación, que en las diversas ramas de la Matemática por si solo deja mostrar su trascendencia, en este capitulo se considerara su importancia desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales.

Relacionado al concepto de cambio de variable esta el concepto de cambio de coordenadas, que se expone en el primer apartado.

§1-Coordenadas Generalizadas.

Sea D un conjunto no vacío, conexo y abierto. Sean $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_p$ familias de curvas en D que satisfacen:

1) $\forall\, x,y$ elementos de C_i $x \cap y = \phi$

2) $\forall\, v$ elemento de D existen $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, x_3 \in C_3, \ldots\ldots, x_p \in C_p$ tal que $\{v\} = \bigcap x_i$

El conjunto de familias $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_p$ se llaman sistema de coordenadas generalizado para el conjunto D.

Las condiciones uno y dos implican las propiedades triviales:

1- $D = \bigcup\limits_{s \in C_i} s$; D es la unión de las curvas de cualquiera de los conjuntos C_i

2-Si $\{v\} = \bigcap x_i$ y $\{v\} = \bigcap x_i^{*} \Rightarrow x_i^{*} = x_i$; las curvas x_i de la condición dos son únicas.

Esta es <u>una</u> generalización de coordenadas.

Si nos restringimos al caso en que D es subconjunto de un Espacio R^p y las familias de curvas son familias de curvas regulares, estaremos en el caso clásico que se aplica en las ecuaciones diferenciales en que funciones vectoriales se hallan involucradas.

Sean D un conjunto abierto conexo, $\varphi: D \subset \Re^p \to E \subset \Re^p$ una función biyectiva y derivable al igual que su inversa, esto es, es un **difeomormismo.** Supóngase que se tiene un sistema de coordenadas curvilíneas $C_1, C_2, C_3, ..., C_p$ para el conjunto E entonces mediante φ construyamos los conjuntos $A_1, A_2, A_3, ..., A_p$ cuyos elementos consisten en las imágenes de las curvas en el correspondiente C_i bajo el difeomorfismo, esto es $A_i = \{\varphi(x)\ x \in C_i\}$. Estas familias definen un sistema coordenado curvilíneo en el conjunto E.

Si se tiene una función $F: A \subset \Re^s \to D \subset \Re^p$ esta tiene una descomposición en las coordenadas canónicas, es por eso que escribimos $F = (f_1, f_2, .., f_p)$, sin embargo esta misma igualdad se podría escribir pero tomando como coordenadas a las transformadas de las canónicas mediante $\varphi: D \subset \Re^p \to E \subset \Re^p$, y podria ser el caso que entonces la expresión de F se simplifique o varíe de una forma que para el problema en consideración sea conveniente.

§2-Cambio de Variable en Ecuaciones Diferenciales.

Para hacer un cambio de variable en una ecuación diferencial, es necesario utilizar el Teorema de la Regla de la Cadena, es por eso que la función bajo la cual se hace la transformación debe ser derivable, además es necesario que su jacobiano no se anule en el dominio en el que se efectuara el cambio de variable.

Sea $F: E \subset \Re^p \to \Re$ una función diferenciable la cual no es constante.

Sea $T: D \subset \Re^p \to E \subset \Re^p$ un difeomorfismo, definamos la función $G: D \subset \Re^p \to \Re$ por la correspondencia $G = F \circ T$; la igualdad:

$$F = G \circ T^{-1}$$

es la relación necesaria para poder hacer un cambio de variable en una ecuación diferencial y además entender la relación de la solución a la ecuación transformada con la solución de la ecuación original.

La ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = H$$

supongamos la satisface la función F, entonces es cierto también que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(G \circ T^{-1}) = H \,,$$

ahora debido a que se debe derivar una composición de funciones se debe aplicar la regla de la cadena, con lo cual se llega a la igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ T^{-1}) = \sum \frac{\partial\, G(T^{-1})}{\partial\, u_k} \frac{\partial\, u_k}{\partial\, x_i} = H$$

donde se ha usado la notación:

$$T(x_1,\ldots,x_p) = (u_1(x_1,\ldots,x_p),\ldots,u_p(x_1,\ldots,x_p))$$

Lo anterior significa que la expresión:

$$\sum \left(\frac{\partial\, G}{\partial\, u_i} \frac{\partial\, u_i}{\partial\, x} - H\right) \circ T = 0$$

es la transformación de la ecuación inicial:

$$\frac{\partial}{\partial x} f = H \,,$$

bajo el cambio de variable de la transformación T, y que sus soluciones son respectivamente F, G .

Simbólicamente podemos escribir:

$$\frac{\partial}{\partial x}F-H=0\xrightarrow{T}\sum\left(\frac{\partial G}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x}-H\right)\circ T=0 \qquad\qquad F\xrightarrow{T}G$$

Para ecuaciones que involucren derivadas de orden superior se procede de igual forma, aplicando las veces necesarias la Regla de la Cadena.

§3-Variables Cilíndricas.

En el caso de $\Re^2$, la transformación $\varphi:\Re^2\to\Re^2$ definida abajo, será referida como cambio a variables polares; en el caso de $\Re^3$, la transformación $s:\Re^3\to\Re^3$ definida como $s(r,\theta,z)=(\varphi(r,\theta),z)$ será referida como cambio a variables cilíndricas.

Sea $\varphi:\Re^2\to\Re^2$ definida como $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)$ esta Transformación es un difeomorfismo en el conjunto: $[0,R]\times[0,2\pi)$, sus matrices jacobianas son respectivamente:

$$\mathit{Jacobiano}(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\theta\\ \mathrm{sen}\theta & +r\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\mathit{Jacobiano}(\varphi^{-1})\Big|_{\varphi}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \mathrm{sen}\theta\\ -\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{bmatrix}$$

Entonces si se tiene una función $F:\Re^2\to\Re^2$ y llamamos $G:\Re^2\to\Re^2$ a la composición $G=F\circ\varphi$, dado el anterior apartado son ciertas la igualdades:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(\varphi)=\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}G-\frac{\mathrm{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}G$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(\varphi) = \operatorname{sen}\theta \, \frac{\partial}{\partial r} G + \frac{\cos\theta}{r} \, \frac{\partial}{\partial \theta} G$$

y para las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(\varphi) = \cos^2\theta \, \frac{\partial^2}{\partial r^2} G + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \, \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G - \frac{2}{r} \operatorname{sen}\theta \, \cos\theta \, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} G + \frac{1}{r} \operatorname{sen}^2\theta \, \frac{\partial}{\partial r} G + \frac{2}{r^2} \operatorname{sen}\theta \, \cos\theta$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(\varphi) = \operatorname{sen}^2\theta \, \frac{\partial^2}{\partial r^2} G + \frac{1}{r^2} \cos^2\theta \, \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G + \frac{2}{r} \operatorname{sen}\theta \, \cos\theta \, \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} G + \frac{1}{r} \cos^2\theta \, \frac{\partial}{\partial r} G - \frac{2}{r^2} \operatorname{sen}\theta \, \cos$$

Sumando las anteriores expresiones se obtiene el Laplaciano en variables polares :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G + \frac{\partial^2}{\partial r^2} G + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} G$$

y en variables cilíndricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} G + \frac{\partial^2}{\partial r^2} G + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} G + \frac{\partial^2}{\partial z^2} G \, .$$

§4-Ecuaciones de Navier-Stokes en Variables Cilíndricas.

Con las formulas del apartado anterior, se obtiene en variables cilíndricas las ecuaciones de Navier-Stokes.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido no compresible son:

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}u+v\frac{\partial}{\partial y}u+w\frac{\partial}{\partial z}u=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}P+F_x+\frac{\eta}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u+\frac{\partial^2}{\partial z^2}u\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}v+v\frac{\partial}{\partial y}v+w\frac{\partial}{\partial z}v=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}P+F_y+\frac{\eta}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}v+\frac{\partial^2}{\partial y^2}v+\frac{\partial^2}{\partial z^2}v\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}w+v\frac{\partial}{\partial y}w+w\frac{\partial}{\partial z}w=\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}P+F_z+\frac{\eta}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}w+\frac{\partial^2}{\partial y^2}w+\frac{\partial^2}{\partial z^2}w\right)$$

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v+\frac{\partial}{\partial z}w=0$$

Las ecuaciones en variables cilíndricas para un fluido no compresible son:

Navier-Stokes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}u-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}u)+v(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}u+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}u)+w\frac{\partial}{\partial z}u=$$
$$\frac{-1}{\rho_0}(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}P-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}P)+F_x+\frac{\eta}{\rho_0}(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u+\frac{\partial^2}{\partial r^2}u+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}u+\frac{\partial^2}{\partial z^2}u)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}v-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}v)+v(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}v+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}v)+w\frac{\partial}{\partial z}v=$$
$$\frac{-1}{\rho_0}(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}P+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}P)+F_y+\frac{\eta}{\rho_0}(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}v+\frac{\partial^2}{\partial r^2}v+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}v+\frac{\partial^2}{\partial z^2}v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}w-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}w)+v(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}w+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}w)+w\frac{\partial}{\partial z}w=$$
$$\frac{-1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}P+F_z+\frac{\eta}{\rho_0}(\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}w+\frac{\partial^2}{\partial r^2}w+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}w+\frac{\partial^2}{\partial z^2}w)$$

Continuidad:

$$(\cos\theta\ \frac{\partial}{\partial r}u-\frac{1}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta}u)+(\mathrm{sen}\,\theta\ \frac{\partial}{\partial r}v+\frac{1}{r}\cos\theta\ \frac{\partial}{\partial\theta}v)+\frac{\partial}{\partial z}w=0$$

Estas ecuaciones se obtienen al sustituir las derivadas que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes, por las expresiones que se obtuvieron en el apartado anterior aplicados para los casos correspondientes. De lo dicho en ese apartado resulta que la solución (con sus condiciones de frontera y en caso de existir) de las ecuaciones anteriores es solución de las ecuaciones de Navier-Stokes compuesta con la transformación de variables cilíndricas.

Referencias:

1-The Mathematics of Physics and Chemistry. Margenau and Moseley Murphy. Editorial D Van Nostrand Company, Inc.

2-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

3-Calculo en Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.

4-Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2.L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.

FLUJOS C-F (*).

Consideremos un flujo que cumple las condiciones:

1- La densidad del fluido que le da origen es constante, respecto al tiempo y la posición $\rho(x,t)=\rho_0 \quad \forall x \in D \quad \forall t \geq 0$

2- El conjunto D que representa al fluido es simétrico con respecto al eje z.

3- Las fuerzas que actúan en el, son independientes del tiempo y son simétricas respecto al eje z.

En variables cilíndricas (r, θ, z):

2- $(r, \theta_o, z) \in D \Rightarrow (r, \theta, z) \in D \ \forall \theta \in \Re$

3- Las fuerzas que actúan en el flujo tienen la forma:

$(\cos\theta \ F(r,z), \operatorname{sen}\theta \ F(r,z), F_z(r,z))$

La presión debe satisfacer que: $\frac{\partial}{\partial\theta}P=0$. Esto es por que la fuerza de presión actúa por unidad de superficie y lo hace en la dirección de los vectores normales a ella multiplicados por una función escalar que es el parámetro *Presión*.. Entonces si se toma en particular cilindros y se considera la condición 3 se debe concluir que P no depende de θ, o lo que es igual $\frac{\partial}{\partial\theta}P=0$.

Llamemos **C-F** al conjunto de flujos que satisfacen las condiciones 1,2 y 3. Estos flujos son importantes por que aparecen en las aplicaciones.

Consideremos elementos de **C-F** que tengan la forma:

$$(\cos\theta\, u(r,z,t), \operatorname{sen}\theta\, u(r,z,t), w(r,z,t)) \text{.......}(*)$$

Sea M la matriz de rotación en sentido positivo en un ángulo θ del plano *(x, y,0)* en si mismo en $\Re^3$;

esta viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces si V tiene la forma *(*)* se satisface la ecuación: $V(r,\theta, z, t) = M\, V(r,0, z, t)$ es decir:

$$V(r,\theta, z, t) = M(u(r,z,t), 0, w(r,z,t)).$$

Si la igualdad dada en *(*)* la sustituimos en las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad expresadas en variables cilíndricas se obtienen las ecuaciones:

Navier-Stokes en variables cilíndricas y para la forma *(*)*:

$$\cos\theta \frac{\partial}{\partial t} u + u\cos\theta\,(\cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} u) + u\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} u) + w\cos\theta \frac{\partial}{\partial z} u =$$
$$-\frac{1}{\rho_o}\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} P + \cos\theta\, F + \frac{\mu}{\rho_o}(\frac{-\cos\theta}{r^2} u + \cos\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} u + \cos\theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} u)$$

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial t} u + u\cos\theta\,(\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} u - \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} u) + u\operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\cos^2\theta}{r} u) + w\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial z} u =$$
$$-\frac{1}{\rho_o}\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} P + \operatorname{sen}\theta\, F + \frac{\mu}{\rho_o}(\frac{-\operatorname{sen}\theta}{r^2} u + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} u + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} u)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w + u \cos\theta \ \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} w + u \operatorname{sen}\theta \ \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r} w + w \frac{\partial}{\partial z} w =$$
$$-\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} P + F_z + \frac{\mu}{\rho_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w \right)$$

Continuidad en variables cilíndricas y para la forma *(*)*:

$$(\cos^2\theta \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r} u) + (\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\cos^2}{r} u) + \frac{\partial}{\partial z} w = 0$$

Reduciendo las anteriores ecuaciones se tienen las igualdades:

Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial r} u + w \frac{\partial}{\partial z} u = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial r} P + F + \frac{\mu}{\rho_o} \left(\frac{-1}{r^2} u + \frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w + u \frac{\partial}{\partial r} w + w \frac{\partial}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial}{\partial z} P + F_z + \frac{\mu}{\rho_o} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} w + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} w + \frac{\partial^2}{\partial z^2} w \right)$$

Continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial r}u+\frac{1}{r}u+\frac{\partial}{\partial z}w=0$$

Estas son las ecuaciones de Navier-Stokes en variables cilíndricas para los flujos de la clase **C-F** en que se ha hecho la suposición *(*)*

Las tres ecuaciones de Navier-Stokes se han reducido a dos ecuaciones diferenciales que no involucran la variable θ . La ecuación de continuidad no involucra la variable θ .

Se puede obtener la siguiente relación de la ecuación de continuidad.

Si u se anula idénticamente entonces $\frac{\partial}{\partial z}w=0$ y para el flujo estacionario se tiene el flujo de Poiseuille. Si $\frac{\partial}{\partial z}w=0$ entonces la ecuación de continuidad se reduce a: $\frac{\partial}{\partial r}u+\frac{1}{r}u=0$, esta es una ecuación lineal que tiene como solución $u(r,z,t)=\frac{q(z,t)}{r}$. Lo anterior se hará con mas formalidad para obtener una expresión mas precisa, que da una relación.

Será necesario recordar que u es una función de mas de una variable y del teorema fundamental del calculo, la igualdad $F(x)=\int_a^x F'(s)ds+F(a)$ que para una función de dos o mas variables da lugar a:

$$G(x,y,z,..)=\int_a^x \frac{\partial}{\partial s}G(s,y,z,...)ds+G(a,y,z...)$$

En general la ecuación de continuidad (la forma que se ha obtenido) tiene la forma lineal: $\frac{\partial}{\partial r}u + fu + g = 0$, se puede resolver mediante un factor h que haga $h\frac{\partial}{\partial r}u + hfu = \frac{\partial}{\partial r}(hu)$, este factor da lugar a la ecuación $\frac{\partial}{\partial r}(hu) + hg = 0$ de la cual u se puede determinar en su dependencia de r.

En efecto:

$$\int_a^r \frac{\partial}{\partial s}(h(s,z,t)u(s,z,t))ds + (h(s,z,t)g(s,z,t))ds = \int_a^r 0 ds$$

de la linealidad de la integral y del teorema fundamental del calculo es cierta la igualdad:

$$h(r,z,t)u(r,z,t) - h(a,z,t)u(a,z,t) + \int_a^r h(s,z,t)g(s,z,t)ds = 0$$

despejando a la función u se tiene:

$$u(r,z,t) = \frac{-1}{h(r,z,t)}\left(\int_a^r h(s,z,t)g(s,z,t)ds - h(a,z,t)u(a,z,t)\right)$$

Para determinar a h obsérvese que la ecuación $h\frac{\partial}{\partial r}u + hfu = \frac{\partial}{\partial r}(hu)$ implica:

$$hfu = u\frac{\partial}{\partial r}h^{\cdot}u$$

si se elimina a u y se divide entre h se tiene la igualdad $f = \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial r}h$ así pues $f = \frac{\partial}{\partial r}\ln h$ de similar forma que arriba se deduce que:

$$h(r,z,t) = \exp((\int_a^r f(s,z,t)ds)h(a,z,t))$$

ahora sustituyendo $f = \frac{1}{r}$ y $g = \frac{\partial}{\partial z}w$, primero:

$$h(r,z,t) = \frac{r}{a}h(a,z,t)$$

luego sustituyendo en la expresión de u:

$$u(r,z,t)=\frac{-a}{rh(a,z,t)}\left(\int_a^r \frac{s}{a}\,h(a,z,t)\frac{\partial}{\partial z}w(s,z,t)ds-h(a,z,t)u(a,z,t)\right)$$

y simplificando:

$$u(r,z,t)=-\frac{1}{r}\int_a^r s\frac{\partial}{\partial z}w(s,z,t)\,ds+\frac{a}{r}u(a,z,t).$$

Obsérvese que a en las anteriores deducciones no hubiera podido ser cero, sin embargo a la forma a que se ha llegado el cero si es un valor permitido para esta; y como la igualdad anterior es valida para toda a en que la expresión tenga sentido es valida en particular para $a=0$ (pues se esta en la clase C-F donde interesan volúmenes con simetría radial y por tanto hay puntos del dominio en donde la variable del radio se anula), así pues:

$$u(r,z,t)=-\frac{1}{r}\int_0^r s\frac{\partial}{\partial z}w(s,z,t)\,ds$$

así se puede llegar a la conclusión de que:

$$u(r,z,t)=0\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial z}w(s,z,t)=0$$

y además

$$u(0,z,t)=0$$

esto es cierto dado que:

$$lim_{r\to 0}\,u(r,z,t)=lim_{r\to 0}\,-\frac{1}{r}\int_0^r r\frac{\partial}{\partial z}w(s,z,t)\,ds=0$$

y como u es diferenciable con lo que en particular es continua entonces:

$$u(0,z,t)=lim_{r\to 0}\,u(r,z,t)=0,$$

para mostrar que el limite:

$$lim_{r\to 0}\ -\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial}{\partial z}\,w(s,z,t)\,ds = 0$$

simplemente observemos que $\frac{\partial}{\partial z}w$ es continua en su dominio y entonces podemos aplicar el teorema del valor medio para la integral:

$$-\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial}{\partial z}\,w(s,z,t)\,ds = -\frac{1}{r}\,(r)(\xi * \frac{\partial}{\partial z}\,w(\xi,z,t)) \quad \xi\in(0,r)$$

entonces se llega a la igualdad:

$$lim_{r\to 0}\ -\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial}{\partial z}\,w(s,z,t)\,ds = lim_{r\to 0}\ -\xi * \frac{\partial}{\partial z}\,w(\xi,z,t) \quad \xi\in(0,r)$$

que por continuidad permite concluir que:

$$lim_{r\to 0}\ -\frac{1}{r}\int_0^r r\,\frac{\partial}{\partial z}\,w(s,z,t)\,ds = 0 * \frac{\partial}{\partial z}\,w(0,z,t) = 0 \quad \xi\in(0,r)$$

Referencias:

1-Mecanica de Fluidos. Landau y Lifchitz. Editorial Reverte.

2-A Mathematical introduction to Fluid Mechanics. Chorin. Editorial Springer Verlag.

3-Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

4-Calculo èn Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.

5-Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2. L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.

CONCLUSIÓN.

Los flujos en un dominio con simetría radial –dominios que son sólidos de revolución- son importantes por que repetidamente se les encuentra en las aplicaciones.

Desde el punto de vista matemático, estos flujos presentan la oportunidad de aplicar el concepto de cambio de variable y en particular la aplicación de variables cilíndricas, propias para este caso; además de la lógica suposición de la invariancia de la solución bajo el grupo de transformaciones del espacio $\Re^3$ de Rotaciones representado por un grupo de matrices.

Estas dos consideraciones en este trabajo llevaron a reducir notoriamente las ecuaciones de Navier-Stokes y de conservación de la masa y obtener una relación entre los componentes del campo de velocidades, presentándose así un desarrollo cualitativo a las ecuaciones de Navier-Stokes, mediante consideraciones geométricas expresadas con formalidad en un sentido analítico.

BIBLIOGRAFÍA.

Mecánica de fluidos. Frank M. White. Editorial Mc Graw Hill.

The Mathematics of Physics and Chemistry. Margenau and Moseley Murphy. Editorial Van Nostrand Company, Inc.

Visualized Flow. Japan society of Mechanical Engineers. Editorial Pergamon Press.

Analytic Element Modeling of Groundwater flow. Haitjema. Editorial Academic press.

Essential of Fluid Dynamics. Prandtl.

Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics. Prandtl and Jietsen. Editorial Dover.

An introduction to Fluid Dinamics. Batchelor. Editorial Cambridge.

Elementary Fluid Mechanics. Vennard y Street . Editorial Wiley.

Mecanica de Fluidos. Landau y Lifchitz. Editorial Reverte.

Mechanics of deformable bodies. Sommerfeld. Editorial Academic press.vol. 2

Computational Fluid Dynamics. Anderson. Editorial Mcgraw Hill.

Modern Compressible Flow with historical perspective. Anderson. Editorial Mcgraw Hill

Fundamental Mechanics of Fluids. Currie. Editorial McGraw Hill.

A Mathematical introduction to Fluid Mechanics.Chorin. Editorial Springer Verlag.

Mathematical foundations of Elasticity. J.E. Marsden and T.J.R.Hughes. Editorial Prentice Hall.

Fluid Mechanics. Gotfinger-Pneli.

Tratado de Hidrodinámica Teórica. Milne. Editorial limusa

Nonlinear Funtional Analisys and its aplications Vol IV. Zeidler. Editorial Springer-Verlag

Ecuaciones de la Física Matemática. S. K. Godunov. Editorial Mir.

Ecuaciones diferenciales ordinarias y fundamentos del calculo variacional. A.P. Kartashov , B.L. Rozhdenstvenski. Editorial Reverte.

Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático vol. 2. R.Courant-F.John. Editorial Limusa.

Calculo en Variedades. Michael Spivak. Editorial Reverte.

Curso de Análisis Matemático vol. 1 y 2.L.D. Kudriávtsev. Editorial Mir.

A panorama of pure Mathematics. Diudonne. Editorial Academic Press.

Aerodynamics Theory vol. 1. R.Giacomelli and E.Pistolesi. Editado por Durand.

Hydrodynamics. Lamb. Editorial Dover.