

1  
2 ej.

# Universidad Nacional Autónoma de México

## Facultad de Ingeniería



Regiones Geométricas de Solución del Espacio Operacional de un  
Robot Manipulador en Ambiente Limpio.

Tesis  
Que para obtener el título de  
Ingeniero Mecánico Electricista  
(Área Mecánica)  
presenta:  
Armando Acosta Rodríguez

Director de Tesis: M. en I. Ignacio Juárez Campos  
México D.F. 1998

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

262417



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia y amigos.

Quiero hacer un especial agradecimiento al M. en I. Ignacio Juárez Campos por su gran apoyo para la realización de este trabajo.

También quiero agradecer a los sinodales por sus comentarios y correcciones sobre el trabajo terminado mismos que sirvieron para su mejor presentación.

# CONTENIDO

Lista de símbolos	1
Objetivos	9
Definición del problema	10
Justificación	11
Establecimiento de la Hipótesis	14
Metodología de la Investigación	15
1). Introducción	16
2). Modelación	22
2.1). Existencia y unicidad de soluciones	37
2.2). Singularidades	46
2.3). Región geométrica de la singularidad	51
3). Espacio operacional	61
3.1). Subespacio operacional de posición	63
3.2). Subespacio operacional de orientación	66
4). Regiones de solución del espacio operacional	70
4.1). Conjuntos de solución de la posición	72
4.2). Conjuntos de solución de la velocidad	91
4.3). Conjuntos de solución de la aceleración	108
5). Las regiones de solución y su efecto en la trayectoria	137
6). Resultados y conclusiones	160
7). Bibliografía	161
8). Anexos	162

# LISTA DE SIMBOLOS

## ESCALARES

- $l_1$  Longitud entre los ejes 2 y 3.  $l_1=150$  mm.  
 $l_2$  Longitud entre los ejes 2 y 3.  $l_2=150$  mm.  
 $l_3$  Longitud entre el eje 4 (o el punto M) y el punto OT.  $l_3=180$  mm.  
 $e_1$  Es el espesor del segundo eslabón desde una vista lateral.  
 $e_2$  Es la distancia existente en el eje Z entre los puntos H y C restando el espesor del segundo eslabón.  
 $e_3$  Es la distancia existente sobre el eje Z entre el punto C y el punto M.  
 $\alpha$  Determina la posición angular del órgano terminal alrededor del eje  $Z_0$   
 $\alpha_j$  Posición angular del órgano terminal en el punto operacional j.  
 Det J Determinante de la matriz del Jacobiano.  
 Det $_{i,j}$  Determinante de la matriz del Jacobiano para la solución  $i=1, 2$   
 $j=1, \dots, \infty$   
 $d_m$  Indica la distancia variable entre el primer eje prismático y el punto M  
 $d_1$  Magnitud de la primer variable articular.  
 $\theta_1$  Magnitud de la segunda variable articular  
 $\theta_2$  Magnitud de la tercer variable articular .  
 $\theta_3$  Magnitud de la cuarta variable articular.  
 ${}_i d_1$  Magnitud de la primer variable articular para la solución  $i=1, 2$  (que para esta variable la solución 1 es igual a la solución 2).  
 ${}_i \theta_1$  Magnitud de la segunda variable articular para la solución  $i=1, 2$ .  
 ${}_i \theta_2$  Magnitud de la tercera variable articular para la solución  $i=1, 2$ .  
 ${}_i \theta_3$  Magnitud de la cuarta variable articular para la solución  $i=1, 2$ .  
 $d_{1max}$  Valor del máximo recorrido de la segunda variable.

## VECTORES

- $X^+$  Elemento  $6 \times 1$  que pertenece al espacio operacional. Los primeros tres elementos indican la posición del órgano terminal y los tres restantes indican la orientación angular del mismo.  $X^+ = [{}^oOT \ \alpha {}^oZ_5]^T = [{}^oOT_x \ {}^oOT_y \ {}^oOT_z \ 0 \ 0 \ \alpha]^T$ . Como función del subespacio articular resolutivo del espacio operacional  $X^{RG}$ ,  $X^+ = [x({}_i T^+) \ y({}_i T^+) \ z({}_i T^+) \ 0 \ 0 \ \alpha]^T$ , donde  $i=1, 2$  y  ${}_i T^+ \in T \subseteq \cup T^{RG} \subseteq \Theta^{RG}$ .
- $\Theta^+$  Elemento  $4 \times 1$  que forma al espacio articular  $\Theta^{RG}$ .  $\Theta^+ = [d_1 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ .

- $\Psi^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular que no satisface ningún estado operacional.  $\Psi^+ \subseteq R^{RG} \subseteq \Theta^{RG}$ .  $\Psi^+ = \Theta^+$  Si no se tiene ningun estado operacional por satisfacer.
- ${}_i T^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular que satisface a un estado operacional.  $i=1, 2$  y  ${}_i T^+ \in T \subseteq {}_U T^{RG} \subseteq \Theta^{RG}$ .  ${}_i T^+ = \Theta^+$  si se tiene algún estado operacional por satisfacer, esto es  ${}^0_5 R = G({}_i T^+)$  y  $OT = H({}_i T^+)$ .
- ${}_i \xi^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular de velocidad que no satisface ningún estado operacional.  $\xi^+ \subseteq \xi^{RG} \subseteq \dot{\Theta}^{RG}$ .  $\xi^+ = \dot{\Theta}^+$  Si no se tiene ningun estado operacional por satisfacer.
- ${}_i H^+$  Elemento 3x1 cuyos tres elementos son las variables articulares exceptuando a  $d_1$ .  ${}_i H^+ = [{}_i \theta_1 \quad {}_i \theta_2 \quad {}_i \theta_3]$ . Donde los tres elementos pertenecen a una configuración de T.
- ${}_i \zeta^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular de velocidad que satisface a un estado operacional.  $i=1, 2$  y  ${}_i \zeta^+ \in \zeta \subseteq {}_U \zeta^{RG} \subseteq \Theta^{RG}$ .  ${}_i \zeta^+ = \Theta^+$  si se tiene algún estado operacional por satisfacer, esto es  ${}_i \zeta^+ = J^{-1}({}_i H^+) \dot{X}$
- ${}_i Y^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular de aceleración que no satisface ningún estado operacional.  $Y^+ \subseteq \ddot{\Theta}^{RG} \subseteq \ddot{\Theta}^{RG}$ .  $Y^+ = \ddot{\Theta}^+$  Si no se tiene ningún estado operacional por satisfacer.
- ${}_i K^+$  Elemento 6x1 cuyos primeros tres elementos son las variables articulares exceptuando a  $d_1$  y las tres restantes son las derivadas de estas  ${}_i K^+ = [{}_i \theta_1 \quad {}_i \theta_2 \quad {}_i \theta_3 \quad {}_i \dot{\theta}_1 \quad {}_i \dot{\theta}_2 \quad {}_i \dot{\theta}_3]$ . Donde los primeros tres elementos pertenecen a una configuración de T y los últimos tres pertenecen a una configuración  $\Xi$ .
- ${}_i \Xi^+$  Elemento 4x1 constitutivo del espacio articular de aceleración que satisface a un estado operacional.  $i=1, 2$  y  ${}_i \Xi^+ \in \Xi \subseteq {}_U \Xi^{RG} \subseteq \ddot{\Theta}^{RG}$ .  ${}_i \Xi^+ = \ddot{\Theta}^{RG+}$  si se tiene algún estado operacional por satisfacer, esto es  ${}_i \Xi^+ = \dot{J}^{-1}({}_i K^+) \dot{X} + J^{-1}({}_i H^+) \ddot{X}$

## MATRICES

- ${}^0_1R$  Cualidad de orientación entre el referencial {1} y el inercial {0}. Esta cualidad es invariable en cuanto a rotación ya que se trata de una relación de eslabonamiento con articulación prismática.  ${}^0_1R=I_{3 \times 3}$ .
- ${}^1_2R$  Cualidad de orientación entre el referencial {2} y el inercial {1}.  ${}^0_1R=Rot[z, \theta_1]$ .
- ${}^2_3R$  Cualidad de orientación entre el referencial {3} y el inercial {2}.  ${}^0_1R=Rot[z, \theta_2]$ .
- ${}^3_4R$  Cualidad de orientación entre el referencial {4} y el inercial {3}.  ${}^0_1R=Rot[z, \theta_3]$ .
- ${}^4_5R$  Cualidad de orientación entre el referencial {5} y el inercial {4}.  ${}^0_1R=Rot[z, \alpha]$ .
- J Matriz del Jacobiano analítico de orden 4x4.
- ${}_iJ_j$  Matriz del Jacobiano analítico de orden 4x4 correspondiente a la solución  $i=1, 2$  y al estado operacional  $j=1, \dots, \infty$ .  ${}_iJ_j=J({}_iH_j^+)$ .

Adj J Adjunta de la matriz del jacobiano.

## PUNTOS.

- B Punto que define la base del manipulador.
- H Punto que define el hombro del manipulador.
- C Punto que define el codo del manipulador.
- M Punto que defina la muñeca del manipulador.
- OT Punto que define la parte operativa del órgano terminal.

## LÍNEAS.

- [M-OT] Línea entre los puntos M y OT.

## BASES.

- {0} Base inercial fija al eslabón 0. Su origen coincide con el punto B.  $\{0\} = \{x_0 \ y_0 \ z_0\}$ .
- {1} Base móvil fija al eslabón 1. Su origen coincide con el punto H.  $\{1\} = \{x_1 \ y_1 \ z_1\}$ .
- {2} Base móvil fija al eslabón 2. Su origen coincide con el punto C.  $\{2\} = \{x_2 \ y_2 \ z_2\}$ .
- {3} Base móvil fija al eslabón 3. Su origen coincide con el punto M.  $\{3\} = \{x_3 \ y_3 \ z_3\}$ .
- {4} Base móvil fija al eslabón 4. Su origen coincide con el punto OT.  $\{4\} = \{x_4 \ y_4 \ z_4\}$ .

## DESCRIPCIÓN ENTRE BASES

- ${}^0\{1\}$  Es la relación que guarda la base {1} con la base{0}.  
 ${}^0\{1\} = \left\{ I_{3 \times 3}; [0 \ 0 \ d_1]^T \right\}$ .
- ${}^1\{2\}$  Es la relación que guarda la base {2} con la base{1}.  
 ${}^1\{2\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_1); [0 \ 0 \ 0]^T \right\}$
- ${}^2\{3\}$  Es la relación que guarda la base {3} con la base{2}.  
 ${}^2\{3\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_2); [l_1 \ 0 \ (e_1 + e_2)]^T \right\}$
- ${}^3\{4\}$  Es la relación que guarda la base {4} con la base{3}.  
 ${}^3\{4\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_3); [l_3 \ 0 \ e_3]^T \right\}$
- ${}^4\{5\}$  Es la relación que guarda la base {5} con la base{4}.  
 ${}^4\{5\} = \left\{ I_{3 \times 3}; [l_3 \ 0 \ 0]^T \right\}$

---

## CONJUNTOS

- $X^{RG}$  Región geométrica del espacio operacional que colecciona a todas las configuraciones posibles del manipulador.
- $\Theta^{RG}$  Espacio articular de posición que contiene a todos los estados articulares.
- ${}_U T^{RG}$  Región geométrica universal de solución que contiene a todos los elementos articulares resolutivos del espacio operacional y que es un subconjunto del espacio articular de posición.
- $R^{RG}$  Subconjunto del espacio articular de posición que colecciona elementos vectoriales articulares que no satisfacen una necesidad específica del espacio operacional.
- $T$  Subconjunto de la región geométrica universal de solución que contiene los dos elementos vectoriales articulares que permiten alcanzar un y sólo un estado operacional deseado, según las reglas G y H.
- ${}_1 T^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a las reglas G y H empleando la solución 1.
- ${}_2 T^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a las reglas G y H empleando la solución 2.
- ${}_i \Lambda_{d1}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas las configuraciones posibles para la primera variable articular para las solución  $i=1=2$
- ${}_1 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares  $k=1, 2, 3$  en su primera solución.
- ${}_2 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares  $k=1, 2, 3$  en su segunda solución.
- ${}_U \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica universal que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares  $k=1, 2, 3$ .
- $\dot{\Theta}^{RG}$  Espacio articular de velocidad que contiene a todos los estados articulares de velocidad.

- ${}_U \zeta^{RG}$  Región geométrica universal de solución que contiene a todos los elementos articulares resolutivos del espacio operacional de velocidad y que es un subconjunto del espacio articular de velocidad.
- $\xi^{RG}$  Subconjunto del espacio articular de velocidad que colecciona elementos vectoriales articulares que no satisfacen una necesidad específica del espacio operacional de velocidad.
- $\zeta$  Subconjunto de la región geométrica universal de solución que contiene los dos elementos vectoriales articulares que permiten alcanzar un y sólo un estado operacional deseado, según  ${}_i \zeta^+ = J^{-1}({}_i H^+) \dot{X}$
- ${}_1 \zeta^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a  ${}_1 \zeta^+ = J^{-1}({}_1 H^+) \dot{X}$  empleando la solución 1.
- ${}_2 \zeta^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a  ${}_2 \zeta^+ = J^{-1}({}_2 H^+) \dot{X}$  empleando la solución 2.
- H Conjunto que contiene a las tres variables articulares  $\theta_1, \theta_2$  y  $\theta_3$ . Y cuya configuración pertenece a una configuración de T.
- ${}_i \Lambda_{d1}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas las configuraciones posibles para la primera variable articular de velocidad para las solución  $i=1=2$
- ${}_1 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de velocidad  $k=1, 2, 3$  en su primera solución.
- ${}_2 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de velocidad  $k=1, 2, 3$  en su segunda solución.
- ${}_U \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica universal que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de velocidad  $k=1, 2, 3$ .
- $\ddot{\Theta}^{RG}$  Espacio articular de velocidad que contiene a todos los estados articulares de aceleración.

- ${}_U \Xi^{RG}$  Región geométrica universal de solución que contiene a todos los elementos articulares resolutivos del espacio operacional de aceleración y que es un subconjunto del espacio articular de aceleración.
- ${}^{\circ} \ddot{\Theta}^{RG}$  Subconjunto del espacio articular de aceleración que colecciona elementos vectoriales articulares que no satisfacen una necesidad específica del espacio operacional de aceleración.
- $\Xi$  Subconjunto de la región geométrica universal de solución que contiene los dos elementos vectoriales articulares que permiten alcanzar un y sólo un estado operacional deseado, según  ${}_i \Xi^+ = J^{-1}({}_i K^+) \dot{X} + J^{-1}({}_i H^+) \ddot{X}$ .
- ${}_1 \Xi^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a  ${}_1 \Xi^+ = J^{-1}({}_1 K^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1 H^+) \ddot{X}$  empleando la solución 1.
- ${}_2 \Xi^{RG}$  Región geométrica que reúne a todos los elementos vectoriales articulares que satisfacen a  ${}_2 \Xi^+ = J^{-1}({}_2 K^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2 H^+) \ddot{X}$  empleando la solución 2.
- K Conjunto que contiene a las tres variables articulares  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  cuya configuración pertenece a T y también contiene a las derivadas de estas variables cuya configuración pertenece a V.
- $\Lambda_{d1}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas las configuraciones posibles para la primera variable articular de aceleración para las solución  $i=1=2$
- ${}_1 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de aceleración  $k=1, 2, 3$  en su primera solución.
- ${}_2 \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de aceleración  $k=1, 2, 3$  en su segunda solución.
- ${}_U \Lambda_{\theta k}^{RG}$  Región geométrica universal que contiene a todas la configuraciones posibles para las variables articulares de aceleración  $k=1, 2, 3$ .

- $\Delta J$  Conjunto universal de los elementos obtenidos al evaluar el determinante de la matriz del Jacobiano para cualquier configuración posible.
- ${}_1\Delta J$  Conjunto universal de los elementos obtenidos al evaluar el determinante de la matriz del Jacobiano para la primer solución.
- ${}_2\Delta J$  Conjunto universal de los elementos obtenidos al evaluar el determinante de la matriz del Jacobiano para la segunda solución.
- $\Delta J^{-1}$  Conjunto universal de los elementos obtenidos al evaluar el inverso del determinante de la matriz del Jacobiano para cualquier configuración posible.
- ${}_1\Delta J^{-1}$  Conjunto de los elementos obtenidos al evaluar el inverso del determinante de la matriz del Jacobiano para la primer solución.
- ${}_2\Delta J^{-1}$  Conjunto de los elementos obtenidos al evaluar el inverso del determinante de la matriz del Jacobiano para la segunda solución.

## FUNCIONES

- $G=G({}_i T^+)$  Regla que relaciona al subespacio operacional de orientación con el espacio articular cuando se emplea la configuración resolutive del espacio operacional.  ${}^0_5R[\alpha, [0 \ 0 \ 1]^T]=G({}_i T^+)$
- $H=H({}_i T^+)$  Regla que relaciona al subespacio operacional de posición con el espacio articular cuando se emplea la configuración resolutive del espacio operacional.  ${}^oOT=H({}_i T^+)$

## ABREVIATURAS.

OT Órgano terminal.

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$c\theta$  Función trigonométrica  $\cos\theta$

$s\theta$  Función trigonométrica  $\sen\theta$

$aTan(u,v)$  Función arco tangente de dos argumentos  $u$  y  $v$ .

## OBJETIVOS

- Determinar la forma geométrica del conjunto universal de las variables articulares contenidas en el espacio de trabajo de un manipulador para ambiente limpio.
- Visualizar el efecto de la no linealidad de los conjuntos universales de solución sobre la trayectoria.
- Proponer una optimización de la trayectoria en base a la forma de las regiones geométricas de solución del espacio operacional.

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En el Centro de Diseño y Manufactura (CDM) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM se está desarrollando un robot manipulador para ambientes limpios, este tiene como función el transporte de disco de silicio que son utilizadas en la fabricación de circuitos integrados o comúnmente llamados CHIPS. Entre otras características que se pretende tenga el robot es su alta productividad, que se puede traducir como el mayor número de discos transportados por unidad de tiempo.

Para lograr este objetivo es importante tomar en cuenta las características dinámicas a que se somete el robot y las cualidades para desarrollarlas. Las características dinámicas son precisamente el perfil de trayectoria y el lugar geométrico por donde circula el elemento del robot que transporta al disco de silicio, así, las características dinámicas se traducen como la severidad del movimiento y la severidad del movimiento se reflejará directamente en esfuerzos hechos en rodamientos de lo que resultará desprendimientos de partículas las cuales son indeseables para el cuarto con ambiente limpio.

Además de que la severidad del movimiento influye en la excitación armónica de la estructura del manipulador generando las partículas contaminantes.

En resumen las características dinámicas tienen que hacer eficiente el funcionamiento del manipulador tomando en cuenta su presencia en un cuarto limpio. Para tal fin se creará en el presente trabajo un marco teórico que permita determinar el lugar donde se presentan mayores velocidades y aceleraciones y, por lo tanto grandes niveles de vibraciones.

En este trabajo se pretende determinar *la forma y situación de las regiones geométricas del conjunto de solución de las variables articulares que satisfacen al espacio operacional y, con esto, establecer un marco teórico para optimizar la trayectoria del transporte de discos de silicio en ambiente limpio.*

## JUSTIFICACIÓN

A continuación se presenta una breve justificación para el desarrollo del trabajo y la motivación clara de alcanzar los objetivos. Los extractos de artículos científicos se exponen como justificación:

[Pastel, R.V.; Lin, Z. Advanced Topics In Trajectory Planning. In Consise International Encyclopedia of Robotics. Applications and Automation (1990)]

*For practicals reasons, it is also desirable sometimes to have continuos or even smooth acceleration profiles. Jerks in the motion of a manipulator should be avoided as they lend to cause vibrations in the manipulator and excessive wear on the gears.*

**Discusión:** Aquí se presenta la importancia de conservar perfiles con aceleración discreta y se destaca que el desgaste es provocado por las vibraciones que son producidas por perfiles no planeados.

[G. Sahar and J.M. Hollerbach. *Planning of Minimum-Time Trajectories for Robots Arms*. Int. Journal of Robotics Research, 90-100 (1986).]

*... the problem therefore involves the determination of the geometric path through these points which a manipulator can traverse in minimum time. This is a rather difficult problem and a general tractable solution is not yet available.*

**Discusión:** En este artículo se plantea la necesidad de reducir el tiempo de las trayectorias y resalta el hecho de que aún no haya sido creada.

[Craig. L. Stevens. *The Design of a Room Robot for Wafer Handling*. 17 International Symposium on Industrial Robot. April 26-30, 1987, Chicago, USA].

*To insure smooth and vibration free wafer handling, the robot was designed to be as stiff as economically possible by using precision instrument bearing and optimally designed aluminium monocoque links...*

*Another concern during the transport of wafers is the amount of vibrations to which the wafers are subjected. Indexers and elevators subjects wafers to varying degrees of vibration which particles to fall from the backside of the wafer and contaminase other wafers. Here the cassettes remains stationary on their platforms and wafers are removed by the wafer handler. The mechanical components of the robot as well as the acceleration and deceleration times for the wafer handler movement were carefully chosen to subject the wafer to a minimal amount of vibration.*

**Discusión:** Aquí se destaca la necesidad de reducir las vibraciones para algún robot ya creado y en el segundo párrafo se plantea la idea de reducir las vibraciones mediante la optimización de trayectorias.

[Craig, J.J. *Introduction to Robotics. Mechanics and Control*. Second Edition. Addison Wesley, 1989]

[pag. 229]

*Usually, it is desirable for the motion of the manipulator to be smooth. For our purposes, we will define a smooth function as one which is continous and has a continuous first derivative. Sometimes, a continuous second derivative is also desirable. Rough, jerky motions tend to cause increased wear on the mechanism, and cause vibrations by exiting resonance in the manipulator. In order to guarantee smooth paths, we must put some sort of constraints on the spatial and temporal qualities of the ...*

**Discusión:** Aquí se vuelve a tocar el punto de el movimiento que se desea tener y el desgaste producido por las vibraciones que se producen en el manipulador cuando éste entra en resonancia.

[pag. 169]

*The transition should be characterized by motion laws requiring the actuators to exert joint generalized forces which do not violate the saturation limits and do not excite the typically unmodeled resonant modes of the structure. It is then necessary to devise planning algorithms that generate suitably smooth trajectories.*

**Discusión:** En esta parte se plantea la necesidad de crear trayectorias suaves que no excedan los límites de saturación y no caigan en los modos típicos de resonancia.

En resumen los anteriores artículos plantean las siguientes situaciones:

- El desgaste es causado por las vibraciones.
- Las vibraciones son causadas por perfiles no planeados.
- Hasta ahora se ha incurrido muy poco en la creación de un sistema práctico al cual recurrir para la planificación de perfiles.

Este último punto nos muestra el móvil principal; que es crear un sistema para poder cuantificar y localizar las zonas con puntos singulares que son los que crearán conflicto con la estructura del robot manipulador y por lo tanto causarán vibraciones.

## ESTABLECIMIENTO DE HIPOTESIS

Tomando en cuenta la no linealidad de las leyes que rigen el movimiento de manipuladores con articulaciones rotacionales y presencia de singularidades, así como su efecto en las cercanías a ellas, **debe existir un camino en donde el movimiento de los elementos del manipulador consuma menos energía y, por tanto, se aproveche al máximo el par motriz de los actuadores, disminuyendo el tiempo de proceso, pero, ¿de qué manera se encuentra accidentado el camino?**

Esta es básicamente la pregunta a contestar en este trabajo.

## METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

- a) Definir y analizar exactamente el problema.
- b) Resumir todas las hipótesis fundamentales.
- c) Desarrollar una investigación documental extensa en bibliotecas, centros de información de libros , revistas, artículos, red internet, etc. con las posibles palabras clave: **robot, manipulador, trayectorias, generación de trayectorias, cinemática, dinámica de manipuladores, formulación de Lagrange, cuarto limpio, trajectory planning, path, joint space trajectories, operacional space trajectories, optimización of path planning, etc.**
- d) Resumir las ideas de solución.
- e) Justificar las mejores ideas de solución posibles.
- f) Obtener resultados y evaluarlos.
- g) Concluir.

# 1. INTRODUCCIÓN

El proceso de manufactura de semiconductores, o circuitos integrados (comúnmente llamados ICs, ó chips) típicamente está constituido de más de cien pasos, durante los cuales se forma tan solo un disco o también llamado oblea.

Generalmente, el proceso incluye la creación de ocho a veinte capas patrón una encima de otra, formando al final el circuito integrado completo. Este proceso de poner capas crea regiones eléctricamente activas sobre la superficie de la oblea semiconductor. El proceso que a continuación se describe pertenece a la empresa manufacturera Harris.

El primer paso en la manufactura de semiconductores comienza con la producción de una oblea; una delgada y redonda rebanada de un material semiconductor, comúnmente silicio. En este proceso, silicio policristalino purificado, hecho de arena derretida, es calentado hasta fundirse. Una pieza pequeña de silicio sólido (semilla) es colocada en el silicio fundido, y posteriormente la semilla es lentamente jalada del silicio fundido enfriándose para dar forma a un lingote de cristal. La tensión superficial entre la semilla y el silicio derretido causa una pequeña elevación de este, logrando con esto reducir su temperatura.

El lingote de cristal es puesto en un diámetro uniforme y una sierra corta al lingote en delgadas obleas. Cada oblea se procesa a través de series de máquinas donde se alisa y químicamente se le hace un pulido espejo. En este momento las obleas están listas para ser enviadas al área de fabricación donde el circuito integrado es formado en la oblea. El proceso de fabricación, el cual se lleva a cabo en un cuarto limpio, incluye una serie de pasos que se mostrarán a continuación.

Normalmente se toma de 10 a 30 días para completar el proceso de fabricación.

## **Oxidación térmica ó deposición.**

Las obleas son pre-limpiadas usando alta pureza (bajo contenido de partículas químicas). Las obleas de silicio son calentadas y expuestas a oxígeno ultra-puro en los hornos de difusión bajo condiciones extremadamente controladas formando una película de bióxido de silicio de grosor uniforme en la superficie del agua.

## **Foto resistivo ó mascarillas.**

La parte de mascarillas es usada para proteger un área de la oblea mientras se esta trabajando en otra. Este proceso recurre al uso de fotolitografía ó “photo-masking”.

Una fotoresistencia es colocada en la oblea, dándole características similares a la de un pedazo de papel fotográfico. Un fotoalineador alinea la oblea a un recubrimiento y proyecta una luz intensa a través de la mascarilla y a través de lentes reductores, exponiendo a la fotoresistencia con la mascarilla patrón.

## **Fotograbado.**

La oblea es entonces descubierta (la fotoresistencia expuesta es removida) y horneada para endurecer los residuos de fotoresistencia patrón. Se expondrá entonces a una solución química o plasma (descarga de gas) así esas áreas no cubiertas por la película endurecida son grabadas.

La fotoresistencia es removida usando químicos adicionales o plasma y la oblea es inspeccionada para que mantenga la imagen transferida del recubrimiento a la capa de arriba.

## **Dopaje.**

Átomos con un electrón menos que el silicio (tales como el boro), o un electrón más que el silicio (tales como el fósforo), son introducidos al área expuesta en el proceso de fotograbado para alterar el carácter eléctrico del silicio. Esas áreas son llamadas tipo-P (boro) o tipo-N (fósforo) para reflejar sus características conductoras.

## **Repitiendo los pasos.**

Los pasos de oxidación térmica, mascarilla, fotograbado y dopaje son repetidos muchas veces hasta que la capa “front end” es terminada (todos los recursos activos han sido formados).

## **Deposición dieléctrica y metalización.**

Después de terminar la capa “front end”, los recursos individuales son interconectados usando una serie de deposiciones de metal y pasos patrón de películas dieléctricas (aisladores).

La fabricación de semiconductores actual incluye tres capas de metal separadas por capas dieléctricas.

## **Pasivación.**

Después de que la última capa de metal cumple con los patrones, una capa dieléctrica final (pasivación) es colocada para proteger al circuito de algún daño ó contaminación. Las aperturas son grabadas en esta película para prevenir acceso a la capa metálica de arriba por pruebas eléctricas y cadenas de alambre.

## **Prueba eléctrica.**

Un sistema de prueba eléctrica automático dirigido por computadora checa la funcionalidad de cada chip en la oblea. Los chips que no pasan la prueba son marcados con tinta para ser rechazados.

## **Ensamble.**

Una sierra de diamante corta en rebanadas a la oblea en chips sencillos. Los chips marcados son descartados, y los chips que aún permanecen son visualmente inspeccionados bajo un microscopio antes de ser empacados.

Después el chip es puesto en una envoltura que es la que lleva los leads. Una máquina encadenadora de alambre une los alambres, que son una fracción del ancho de una porción de cabello humano, a los leads de la envoltura. Encapsulado con un recubrimiento para protección, el chip es probado una vez más. Ocasionamente, es usada una envoltura cerámica para ciertas aplicaciones militares.

Después de la descripción del proceso de fabricación de un chip se puede dar una idea de las múltiples tareas que se tienen que efectuar, además de que todas se llevan a cabo en un espacio que simplemente no se puede imaginar; una partícula que llegue a medir  $0.1\mu\text{m}$  ó  $0.5\mu\text{m}$  puede fácilmente dañar miles de compuertas electrónicas.

Un cuarto con ambiente limpio es medido por el máximo permisible de partículas. Los máximos son llamados "Clases". Por ejemplo un cuarto limpio clase 10,000 puede tener un promedio de 10,000 partículas con un promedio de .05 micrómetros o más grandes en un pie cúbico de aire.

Por estas razones la indumentaria en un cuarto con ambiente limpio deben de estar libres de la emisión de partículas. Esta necesidad se acentúa día con día debido a la creciente producción de circuitos integrados y a la tendencia a la minaturización de estos.

La emisión de partículas en un robot manipulador es debida, en primer lugar al efecto producido por el roce entre dos piezas y en segundo lugar al efecto que tienen las vibraciones de la estructura del manipulador; este efecto produce la propagación de las partículas. Estos dos problemas básicos son debidos a efectos que tienen origen en la no-linealidad de las ecuaciones que rigen el movimiento del manipulador. La no-linealidad crea puntos que son, debido a la arquitectura del manipulador, difíciles de efectuar. Pero ¿dónde se localizan estos puntos?.

El localizar estos puntos y saber como evitarlos es la función de este trabajo en donde se recurrirá a la creación de regiones geométricas de solución. Las regiones geométricas de solución son básicamente la representación gráfica de conjuntos que dan solución a las ecuaciones que rigen el movimiento del manipulador. De esta manera se podrá observar la localización de los puntos que producen efectos desfavorables en el movimiento del manipulador para el ambiente.

Al tener un análisis adecuado de la arquitectura de las regiones geométricas de solución se podrá predecir y entonces controlar el comportamiento de las trayectorias del manipulador haciendo posible el incremento de la eficiencia y la reducción de la contaminación.

A continuación se presenta la arquitectura del trabajo, donde se explicará qué cubre cada uno de los puntos.

En primer lugar en el capítulo de "Modelación" se dará a conocer la estructura así como el modelado directo y el modelado inverso. De aquí se partirá a estudiar las variaciones que tiene el manipulador para alcanzar puntos operacionales en la parte "existencia y unicidad de soluciones", y finalmente se estudiará en "Singularidades" la relación que dará la base para la localización de los puntos llamados singulares.

El capítulo de "Espacio operacional" mostrará las especificaciones del espacio que el manipulador está destinado a cubrir. Los dos diferentes conjuntos parámetros se mostrarán correspondientemente en las partes "Subespacio operacional de posición" y "Subespacio operacional de orientación".

El capítulo “Regiones de solución del espacio operacional” presentará a los conjuntos de solución para la posición, velocidad y aceleración. En estos conjuntos se encontrarán los elementos de cada variable articular que cumplen con ciertas reglas que restringirán al movimiento del manipulador. Aquí es donde se podrá ver donde se localizan la zonas conflictivas para el movimiento del manipulador.

En “Las regiones geométricas y su efecto en la trayectoria” se presenta la influencia que tienen las regiones geométricas sobre la trayectoria haciendo una simulación y comparándola con la región geométrica correspondiente para de esta manera dar el marco teórico para la creación de trayectorias adecuadas.

En “Resultados y conclusiones” se muestran las conclusiones a la que se llegó después del análisis que se efectuó durante el trabajo. En “Bibliografía” se lista los libros a los que se consultó y finalmente en “Anexos” se podrán encontrar variaciones de las regiones geométricas de solución así como los programas que se efectuaron para la creación de todos los conjuntos y trayectorias que se muestran a lo largo del trabajo.

## 2. MODELACIÓN

### MODELADO MATEMÁTICO DIRECTO

El manipulador consta de 1 articulación prismática y 3 articulaciones rotacionales, es decir es un manipulador P-R-R-R. La figura 2.1 representa al manipulador en funcionamiento.

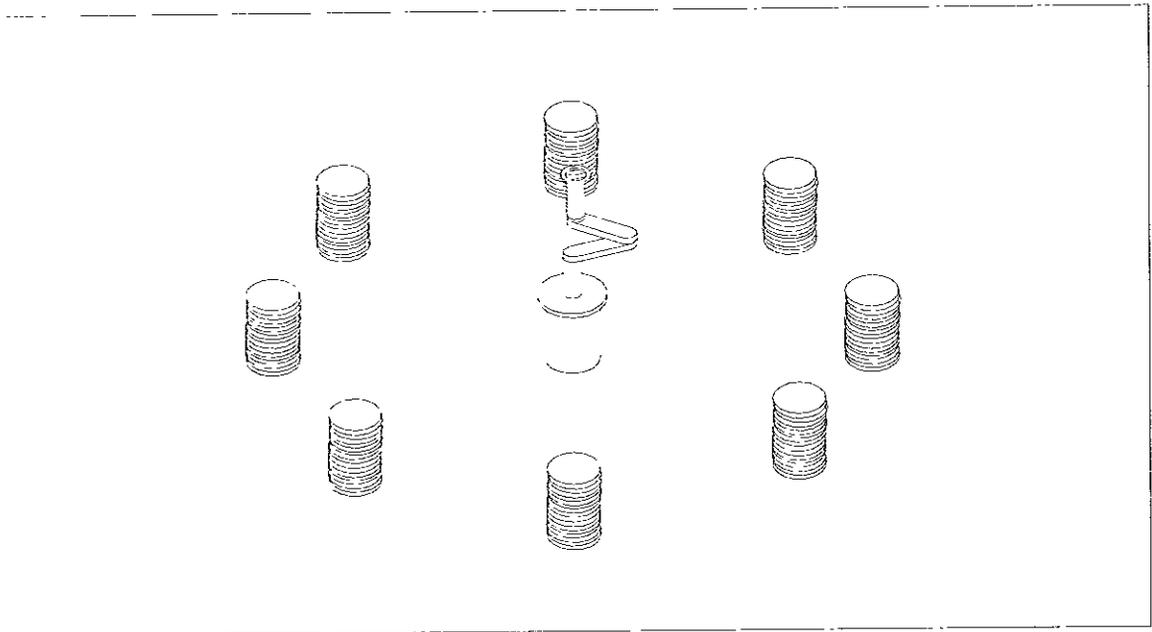


Figura 2.1 El robot manipulador funcionando, a cada  $45^\circ$  hay columnas de discos que son manipulados por el robot manipulador.

Las siguientes figuras (2.2-2.3) muestran el esquema cinemático:

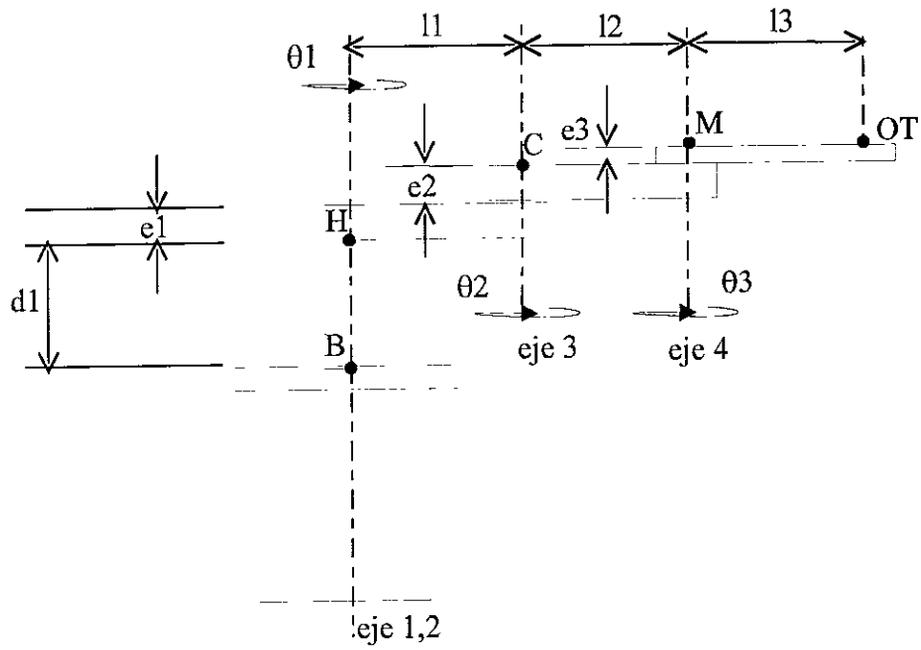


Figura 2.2 El esquema cinemático del manipulador P-R-R-R

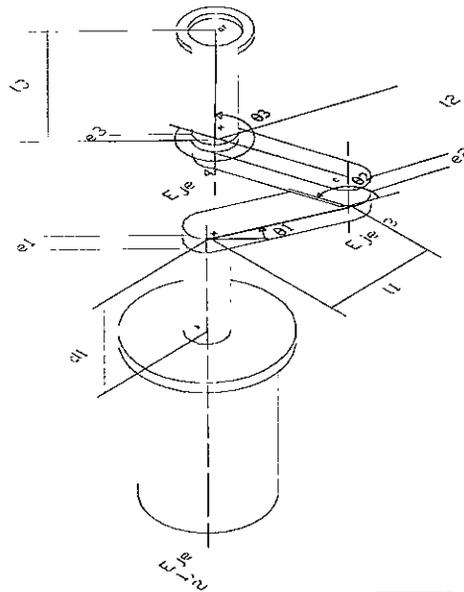


Figura 2.3 Es el mismo esquema cinemático pero en una vista isométrica.

Viendo el esquema cinemático y sabiendo que magnitud de desplazamiento de la última articulación depende de las 2 anteriores, ya que ésta debe mantenerse radial al eje 1 y 2 (M-OT debe apuntar en dirección hacia el centro), se puede afirmar que el manipulador tiene 3 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los rangos de desplazamiento en cada articulación.

Articulación	Rango de desplazamiento
Primera(lineal)	0-210mm
Segunda (rotacional)	0-360°
Tercera(rotacional)	0-180°
Cuarta(rotacional)	0-90°

Tabla 2.1 Rango de desplazamiento de las articulaciones.

En la tabla 2.2 se muestran los parámetros de eslabonamiento según la convención de Denavit-Hartenberg.

i	$a_{i-1}$	$\alpha_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0°	$d_1$	0°
2	0	0°	0	$\theta_1$
3	$l_1$	0°	$e_1+e_2$	$\theta_2$
4	$l_2$	0°	$e_3$	$\theta_3$
5	$l_3$	0°	0	0°

Tabla 2.2 Parámetros de eslabonamiento del manipulador P-R-R-R según Denavit-Hartenberg.

Usando la siguiente relación de eslabonamiento (2.1) y con una adecuada descripción espacial se determina la situación de cada sistema de referencia.

$${}^{i-1}\{i\} = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} c\theta_i & -s\theta_i & 0 \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} a_{i-1} \\ -s\alpha_{i-1}d_i \\ c\alpha_{i-1}d_i \end{array} \right) \right\} \quad (2.1)$$

Los sistemas de referencia se toman según la siguiente figura (2.4), Cabe mencionar que el sistema de referencia  $Z_0, X_0$  (punto B) será el sistema de referencia base del espacio operacional.

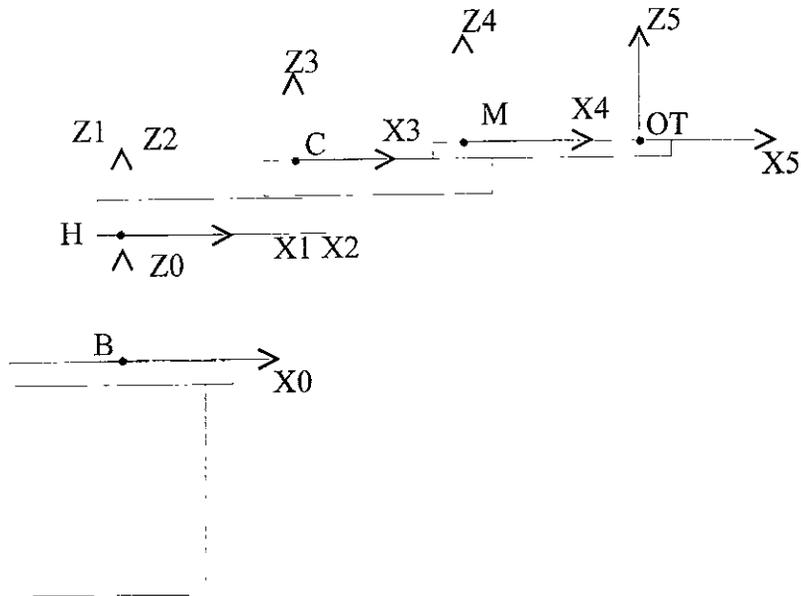


Figura 2.4. Descripción espacial de eslabonamiento.

Las siguientes relaciones (ec.2.2-2.6) representan la relación que guarda cada sistema de referencia con su sistema anterior.

$${}^0\{1\} = \left\{ I_{3 \times 3}; [0 \ 0 \ d_1]^T \right\} \quad (2.2)$$

$${}^1\{2\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_1); [0 \ 0 \ 0]^T \right\} \quad (2.3)$$

$${}^2\{3\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_2); [l_1 \ 0 \ (e_1 + e_2)]^T \right\} \quad (2.4)$$

$${}^4\{4\} = \left\{ Rot(\hat{z}, \theta_3); [l_3 \ 0 \ e_3]^T \right\} \quad (2.5)$$

$${}^4\{5\} = \left\{ I_{3 \times 3}; [l_3 \ 0 \ 0]^T \right\} \quad (2.6)$$

La siguiente ecuación (2.7) nos muestra la descripción espacial general del sistema de referencia del órgano terminal con respecto del sistema de la base.

$${}^0\{5\} = \left\{ Rot(\hat{z}, (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)); \begin{bmatrix} c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 + c(\theta_1 + \theta_2)l_2 + c\theta_1 l_1 \\ s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 + s(\theta_1 + \theta_2)l_2 + s\theta_1 l_1 \\ e_1 + e_2 + e_3 + d_1 \end{bmatrix} \right\} \quad (2.7)$$

## MODELADO MATEMÁTICO INVERSO

Como las figuras (2.5-2.6) nos muestran, la variable articular lineal  $d_1$  se encuentra definida entre las líneas de acción de los vectores  $x_i$  y  $x_{i+1}$

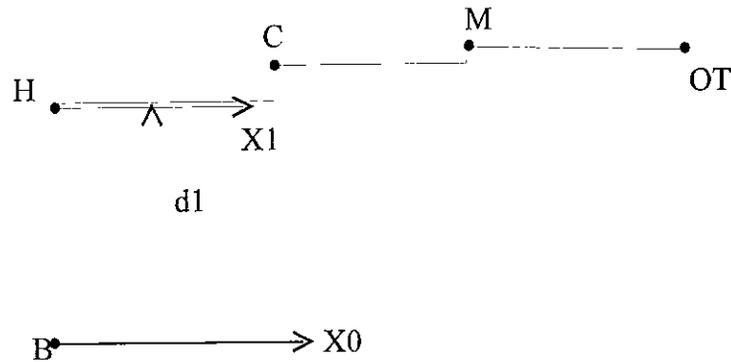


Figura 2.5 Definición de la primera variable articular

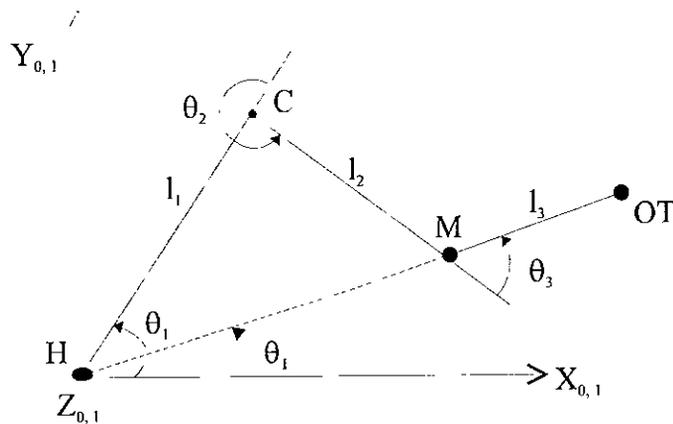


Figura 2.6 Definición de las variables giratorias

## Definición de la primera variable articular (posición)

La posición z del órgano terminal está dada por la siguiente ecuación (2.8), esto medido en el sistema referencial {0} como se muestra en la figura (2.7).

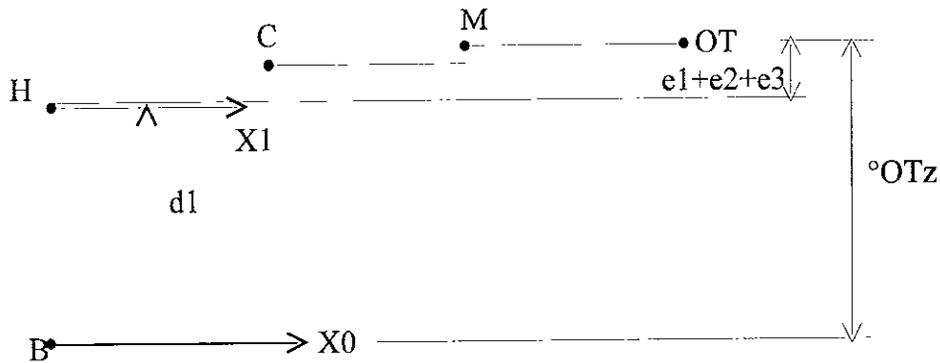


Figura 2.7 Definición de la primer variable articular

$${}^0OT_z = (e_1 + e_2 + e_3) + d_1 \quad (2.8)$$

Se pone  $d_1$  en función de las otras variables conocidas y queda la siguiente ecuación (9):

$$d_1 = {}^0OT_z - (e_1 + e_2 + e_3) \quad (2.9)$$

## Definición de la segunda variable articular (posición)

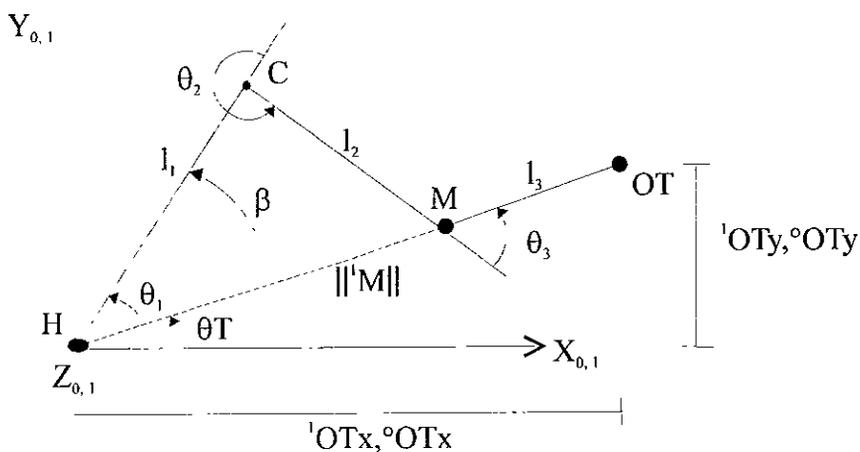


Figura 2.8 Definición de la segunda variable articular

Como se puede apreciar en la figura anterior (2.8)  $\theta_1$  se define como muestra la ecuación (2.10):

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (2.10)$$

Donde:

$$\alpha = 2a \tan({}^0OT_y, {}^0OT_x) \quad (2.11)$$

$$\beta = a \cos \left( \frac{l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2 - l_2^2}{2l_1(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)} \right) \quad (2.12)$$

Analizando el ángulo  $\alpha$  es necesario realizar unos ajustes. Existen 8 posibilidades: los ejes  $\pm X \pm Y$  y los cuadrantes de los sistemas de referencia  $\{0\}$  y  $\{1\}$ . Las ecuaciones (2.13)-(2.20) nos proporcionan estas consideraciones.

Para el primer lugar geométrico, que es el cuadrante comprendido entre +x e -y

$$\alpha = a \tan({}^0OT_y, {}^0OT_x) \quad (2.13)$$

Para el segundo lugar geométrico, que es el cuadrante comprendido entre -x e +y

$$\alpha = 180^\circ + a \tan({}^0OT_y, {}^0OT_x) \quad (2.14)$$

Para el tercer lugar geométrico, que es el cuadrante comprendido entre -x e -y

$$\alpha = 180^\circ + a \tan({}^0OT_y, {}^0OT_x) \quad (2.15)$$

Para el cuarto lugar geométrico, que es el cuadrante comprendido entre +x e -y

$$\alpha = 360^\circ + a \tan({}^0OT_y, {}^0OT_x) \quad (2.16)$$

Además, los ejes  $\pm x$  e  $\pm y$ .

Para el quinto lugar geométrico, que es el eje  $+x$

$$\alpha = 0^\circ \quad (2.17)$$

Para el sexto lugar geométrico, que es el eje  $+y$

$$\alpha = 90^\circ \quad (2.18)$$

Para el séptimo lugar geométrico, que es el eje  $-x$

$$\alpha = 180^\circ \quad (2.19)$$

Para el octavo lugar geométrico, que es el eje  $-y$

$$\alpha = 270^\circ \quad (2.20)$$

### Definición de la tercer variable articular (posición).

En la siguiente figura (2.9) se muestra la definición de la tercer variable articular: es un ángulo definido alrededor del eje 3, medido en  $z$ , angularmente, desde la prolongación de  $x_2$  y hasta  $x_3$ .

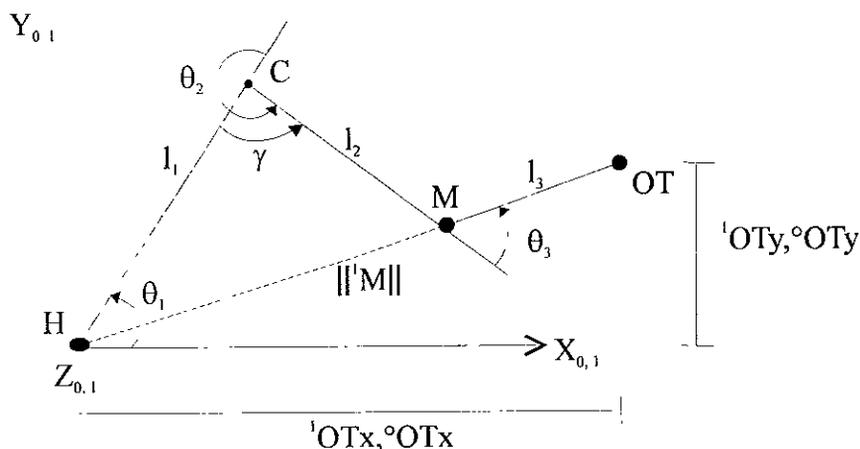


Figura 2.9 Definición de la tercer variable articular

Como podemos ver en la figura anterior (2.7) la tercer variable articular se encuentra definida por la siguiente ecuación(2.21):

$$\theta_2 = 180^\circ + \gamma \quad (2.21)$$

En donde:

$$\gamma = a \cos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2}{2l_1l_2}\right) \quad (2.22)$$

### Definición de la cuarta variable articular(posición)

Esta variable es dependiente de las otras dos ( $\theta_1$  y  $\theta_2$ ) de tal manera que la línea (M-OT) debe de mantenerse siempre radial al primer eje giratorio (eje 2). Esto se muestra gráficamente en la figura siguiente (2.10):

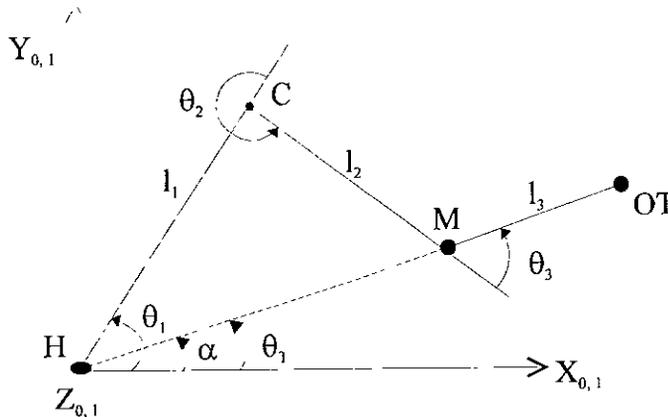


Figura 2.10 Definición de la cuarta variable dependiente

Como se puede observar en la figura anterior  $\theta_T$  se entiende como la ecuación (2.23) siguiente.

$$\theta_T = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (2.23)$$

Tomando en cuenta que  $\theta_T = \alpha$ ,  $\theta_3$  queda definida como:

$$\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2 \quad (2.24)$$

## Velocidad lineal de la primera articulación

La velocidad lineal con que debe moverse la primer articulación, en función de la posición y la velocidad con que viaja el órgano terminal, se obtiene derivando temporalmente la ecuación (2.9), y se muestra en la siguiente ecuación(2.25):

$$\dot{d}_1 = {}^0v_{OT_1} \quad (2.25)$$

## Velocidad angular de la segunda articulación.

La siguiente definición (ec.(2.26)) se encuentra derivando la ecuación (10).

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \quad (2.26)$$

Donde:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{{}^0v_{OT_1} {}^0OT_x - {}^0v_{OT_1} {}^0OT_y}{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} \quad (2.27)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\frac{{}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy}}{l_1 \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2 - l_2^2}{2l_1(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)} \right)^2}} * \left( \frac{l_2^2 - l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2}{2(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2} \right) \quad (2.28)$$

## Velocidad angular de la tercer articulación

La ecuación (2.21) es derivada con respecto al tiempo y se obtiene la expresión que relacionará la velocidad angular de la tercer articulación en función de la posición y velocidad con que viaja el órgano terminal, esto es (ecuación (2.29)):

$$\dot{\theta}_2 = \frac{(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)({}^0OT_x {}^0v_x + {}^0OT_y {}^0v_{OTy})}{l_1 l_2 \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}} * \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2}{2l_1 l_2} \right)^2}} \right) \quad (2.29)$$

## Velocidad angular de la cuarta articulación

Como  $\theta_3$  depende de las dos variables previas a ella como lo marca la ecuación (2.24), la ecuación de la velocidad angular (2.30) está definida por:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{d\alpha}{dt} - \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \quad (2.30)$$

## Aceleración lineal de la primer articulación.

Derivando la ecuación (25) se obtiene la aceleración con que viaja el eslabonamiento a lo largo del eje 1, y el resultado sería (ecuación (2.31)):

$$\ddot{d}_1 = {}^0 a_{OTz} \quad (2.31)$$

## Aceleración angular de la segunda articulación

Derivando la ecuación (2.26) se obtiene la velocidad con que debe desplazarse la segunda articulación (ecuación (2.32)):

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{d^2 \beta}{dt^2} \quad (2.32)$$

Donde:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = \frac{{}^0 OT_x {}^0 a_{OTy} - {}^0 OT_y {}^0 a_{OTx}}{{}^0 OT_x^2 + {}^0 OT_y^2} - 2 \frac{({}^0 v_{OTy} {}^0 OT_x - {}^0 v_{OTx} {}^0 OT_y) ({}^0 v_{OTx} {}^0 OT_x + {}^0 v_{OTy} {}^0 OT_y)}{({}^0 OT_x^2 + {}^0 OT_y^2)^2} \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} = -\beta_1 \quad (2.34)$$

$$\beta_1 = \beta_{11} \beta_{12} + \beta_{13} \beta_{14} \beta_{15} \beta_{16} \quad (2.35)$$

$$\beta_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{l_1^2 + (\sqrt{{}^0 OT_x^2 + {}^0 OT_y^2} - l_3)^2 - l_2^2}{2l_1(\sqrt{{}^0 OT_x^2 + {}^0 OT_y^2} - l_3)} \right)^2}} \quad (2.36)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21}\beta_{122} + \beta_{123}\beta_{24} \quad (2.37)$$

$$\beta_{21} = \frac{{}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy}}{l_1 \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}} \quad (2.38)$$

$$\beta_{22} = \frac{({}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy})(l_1^2 - l_2^2)}{(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^3 \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}} \quad (2.39)$$

$$\beta_{23} = \left( \frac{1}{l_1} \right) \left( \frac{{}^0OT_x {}^0a_{OTx} + {}^0v_{OTx}^2 + {}^0OT_y {}^0a_{OTy} + {}^0v_{OTy}^2}{\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}} - \frac{({}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy})^2}{\sqrt{({}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2)^3}} \right) \quad (2.40)$$

$$\beta_{24} = \frac{l_2^2 - l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2}{2(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2} \quad (2.41)$$

$$\beta_{13} = \beta_{21} \quad (2.42)$$

$$\beta_{14} = \beta_{24} \quad (2.43)$$

$$\beta_{15} = \frac{-1}{\left( \sqrt{1 - \left( \frac{l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2 - l_2^2}{2l_1(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)} \right)^2} \right)^2} \quad (2.44)$$

$$\beta_{16} = \frac{(-1) \left( l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2 - l_2^2 \right) \left( {}^0OT_x^0v_{OTx} + {}^0OT_y^0v_{OTy} \right)}{2l_1 \left( \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3 \right)^2 \left( \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} \right)} \cdot \frac{\left( l_2^2 - l_1^2 + (\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3)^2 \right)}{\sqrt{4l_1^2 \left( \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3 \right)^2 - \left\{ l_1^2 - l_2^2 + \left[ \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3 \right]^2 \right\}}} \quad (2.45)$$

## Aceleración angular de la tercer articulación

Al igual que la determinación de la aceleración de la anterior articulación, el cambio de velocidad angular de la tercer articulación con respecto al tiempo está definido por la ecuación siguiente (2.46):

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\gamma_1}{l_1 l_2} \quad (2.46)$$

$$\gamma_1 = \gamma_{11} \gamma_{12} + \gamma_{13} \gamma_{14} \quad (2.47)$$

$$\gamma_{11} = \left( \sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3 \right) \left( {}^0OT_x^0v_{OTx} + {}^0OT_y^0v_{OTy} \right) \quad (2.48)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{121} - \gamma_{122} \quad (2.49)$$

$$\gamma_{121} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(l_1^2 + l_2^2 - \left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)^2\right)\left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)\left({}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy}\right)}{l_1^2 l_2^2 \left({}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2\right) \left( \sqrt{1 - \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)^2}{2l_1 l_2}\right)^2} \right)^3} \quad (2.50)$$

$$\gamma_{122} = \frac{{}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy}}{\sqrt{\left({}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2\right)^3} \sqrt{1 - \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)^2}{2l_1 l_2}\right)^2}} \quad (2.51)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} \sqrt{1 - \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - \left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)^2}{2l_1 l_2}\right)^2}} \quad (2.52)$$

$$\gamma_{14} = \left(\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2} - l_3\right)\left({}^0OT_x {}^0a_{OTx} + {}^0v_{OTx}^2 + {}^0OT_y {}^0a_{OTy} + {}^0v_{OTy}^2\right) + \frac{\left({}^0OT_x {}^0v_{OTx} + {}^0OT_y {}^0v_{OTy}\right)^2}{\sqrt{{}^0OT_x^2 + {}^0OT_y^2}} \quad (2.53)$$

### Aceleración angular de la cuarta articulación

Como la aceleración de la cuarta articulación depende de las otras dos anteriores, su relación es (ecuación 2.54):

$$\ddot{\theta}_3 = \ddot{\alpha} - \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 \quad (2.54)$$

## 2.1.1 EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES

Al tener un manipulador redundante tendremos para cada punto operacional dos configuraciones como muestra la figura (2.1.1):

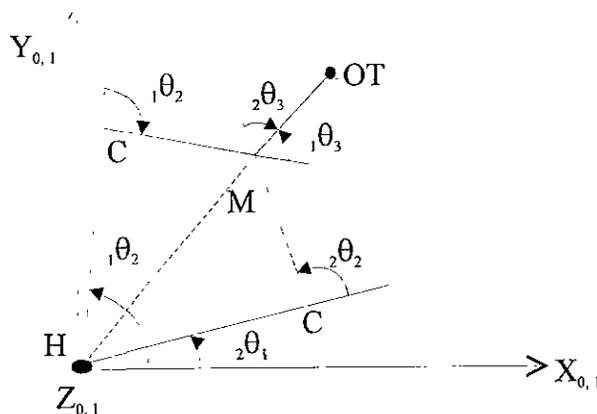


Figura 2.1.1. Para el mismo estado operacional existen dos conjuntos de soluciones

Como se puede observar en la figura anterior (2.1.1) para un punto operacional existirá una configuración que caerá en el rango de  $0^\circ < \theta_2 < 180^\circ$  y  $180^\circ < \theta_3 < 0^\circ$ , y existirá otra configuración en la que  $-180^\circ < \theta_2 < 0^\circ$  y  $0^\circ < \theta_3 < 180^\circ$ .

Entonces para el espacio operacional existirán dos conjuntos de solución, entendiéndose por solución la existencia de un(os) elemento(s) que pertenecen al espacio articular que producen un elemento del espacio operacional deseado. De tal manera que región geométrica de solución se entiende como el conjunto de elementos vectoriales articulares que cumplen con ciertas reglas que se explicarán más adelante.

Para empezar se tratará la región geométrica de solución de la posición de la segunda variable articular que como en todas las variables articulares rotacionales de este manipulador existen dos conjuntos de solución que se nombrarán en este caso como  ${}_1\Delta\theta_1$  y  ${}_2\Delta\theta_1$ . En las siguientes figuras (2.1.2 y 2.1.3) se muestran estos dos conjuntos:

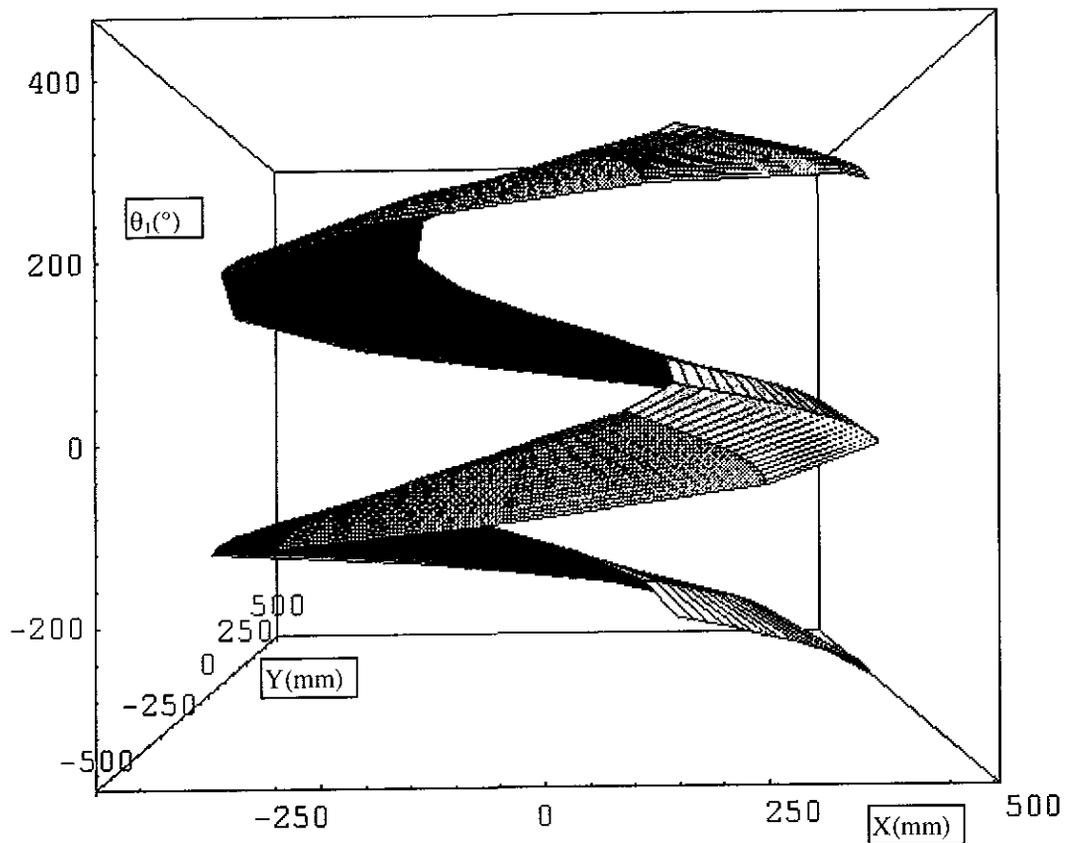


Figura 2.1.2 Muestra la vista lateral de la región geométrica de solución del conjunto  ${}_1\Delta\theta_1$ .

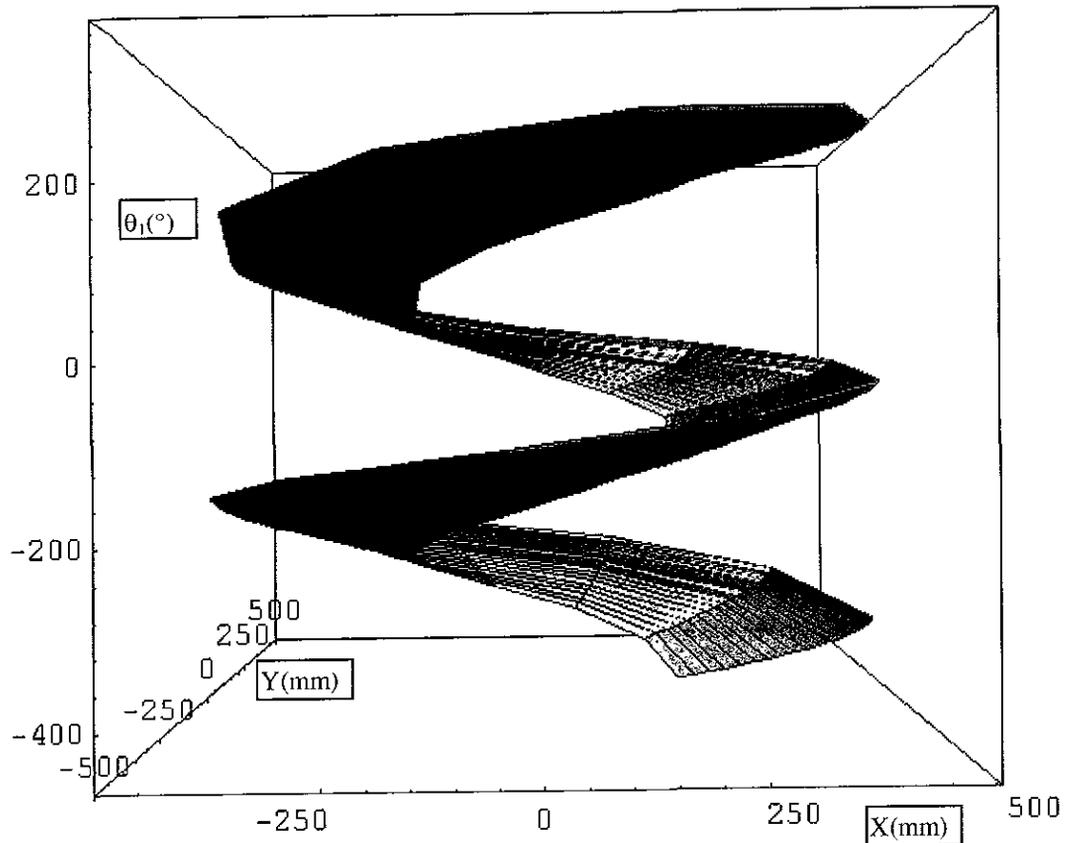


Figura 2.1.3 Muestra la vista lateral de la región geométrica de solución del conjunto  ${}_2\Delta\theta_1$ .

El conjunto universal  $\Delta\theta_1$  se obtiene con la unión de los conjuntos  ${}_1\Delta\theta_1$  y  ${}_2\Delta\theta_1$  como muestra la siguiente ecuación(2.1.1):

$$\Delta\theta_1 = {}_1\Delta\theta_1 \cup {}_2\Delta\theta_1 \quad (2.1.1)$$

Es importante mencionar que los conjuntos  ${}_1\Delta\theta_1$  y  ${}_2\Delta\theta_1$  tienen su intersección en los extremos externos del volumen de trabajo como se observará en la figura (2.1.4).

La siguiente figura (2.1.4) mostrará la existencia y unicidad de la articulación  $\theta_1$  que es como ya se mostró en la ecuación (2.1.1) la unión de los dos conjuntos anteriormente mostrados.

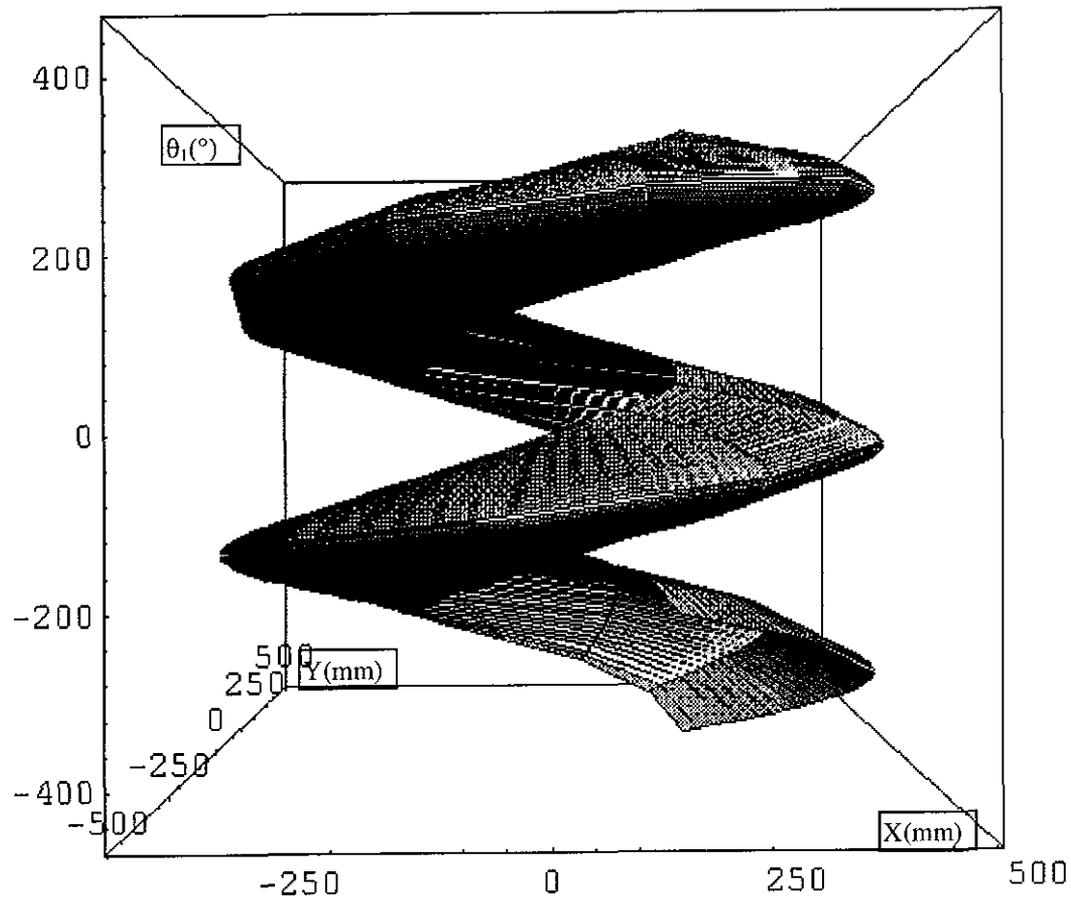


Figura 2.1.4 Muestra la vista lateral de la región geométrica del conjunto universal de solución de  $\theta_1$ . Este conjunto engloba las dos posibles soluciones al espacio operacional.

De la misma manera se presentará el caso de la tercera variable articular mostrando los dos conjuntos de solución (figuras 2.1.5 - 2.1.7) y la existencia y unicidad de solución (figura 2.1.8).

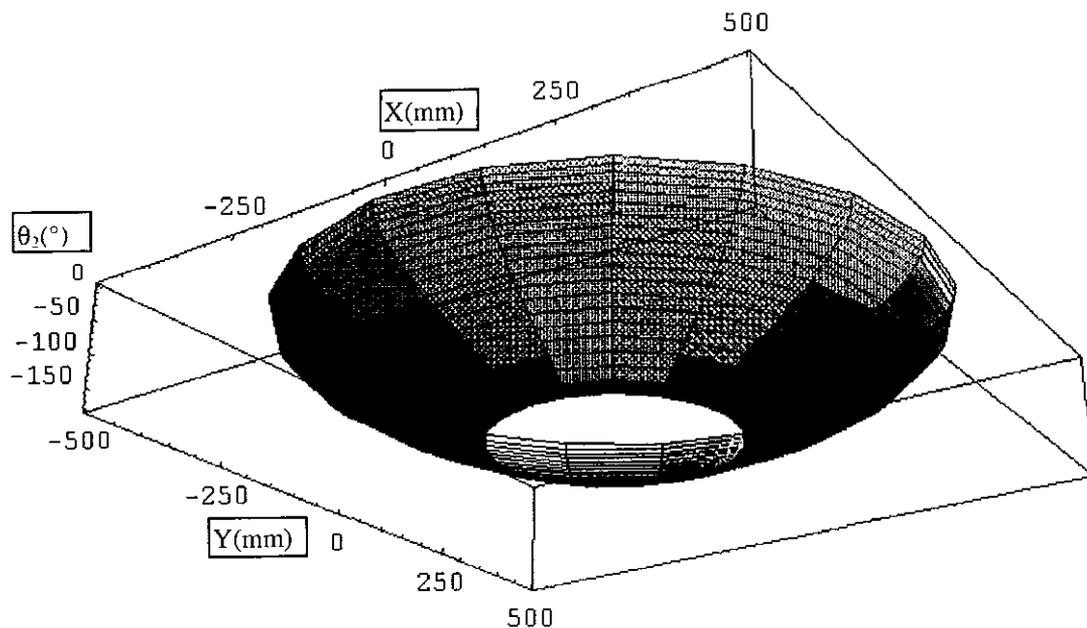


Figura 2.1.5 Muestra una vista inferior del conjunto  ${}_1\Delta\theta_2$  que se forma de todas las configuraciones posibles de la solución primera para la tercera variable articular.

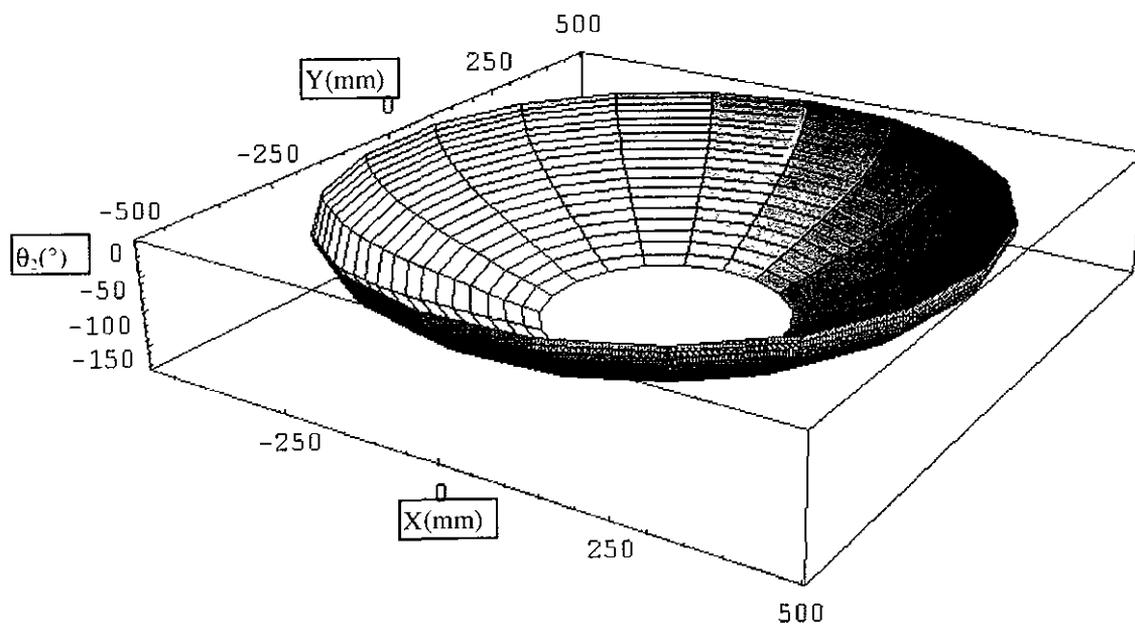


Figura 2.1.6. Es el mismo conjunto que se muestra en la figura anterior pero ahora desde una vista superior.

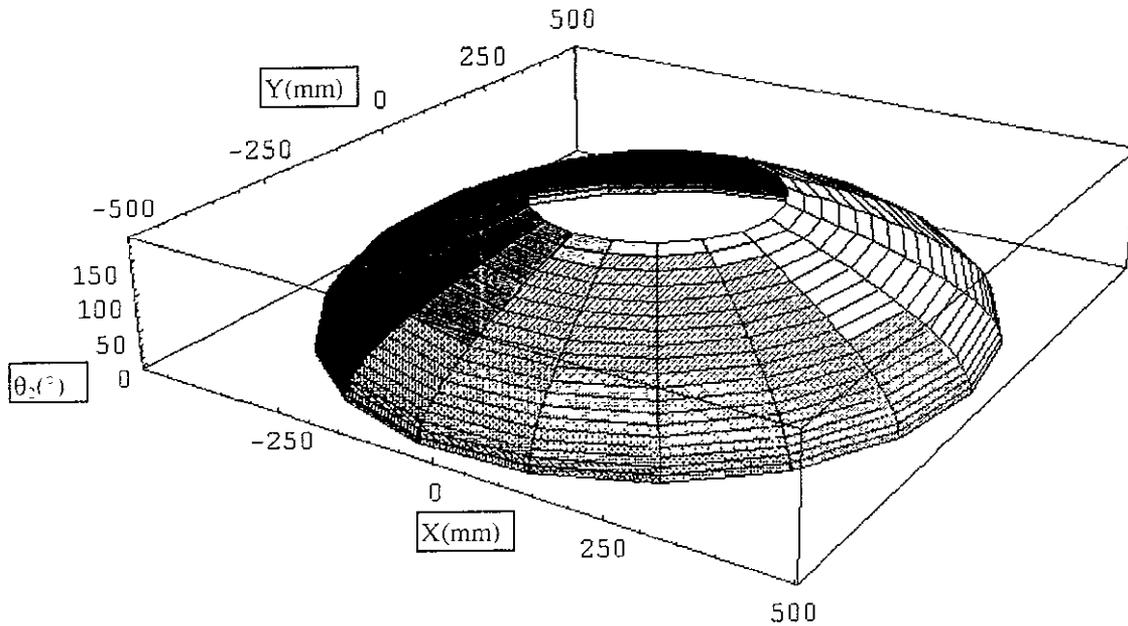


Figura 2.1.7. Es una vista superior del conjunto  ${}_2\Delta\theta_2$  que contiene todas las posibles configuraciones para la segunda solución de la tercera variable articular.

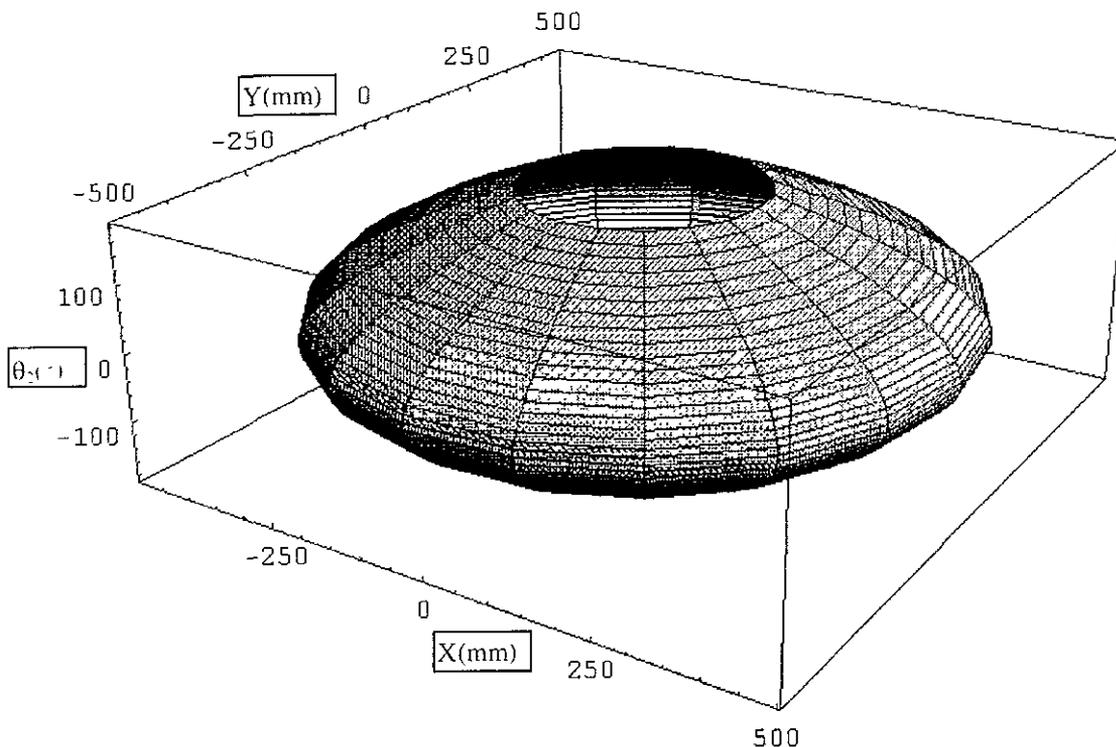


Figura 2.1.8 Es la vista superior del conjunto que es la unión de los dos conjuntos de solución anteriormente mostrados. Aquí se tiene contenida a cualquier solución posible para la tercera variable articular.

Finalmente se mostrará el mismo caso para la cuarta variable articular, los conjuntos de solución separados (figuras 2.1.9-2.1.12) y la existencia y unicidad de solución (figura 2.1.13-2.1.14).

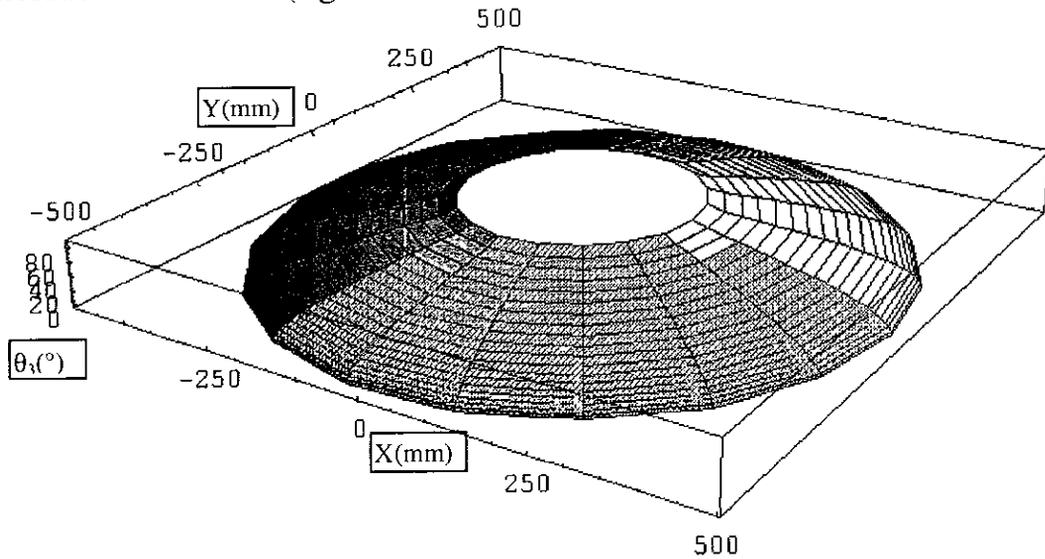


Figura 2.1.9 Es la vista superior del conjunto que reúne a los elementos que cumplen con la primera solución de la cuarta variable articular, es decir el conjunto  ${}_1\Delta\theta_3$ .

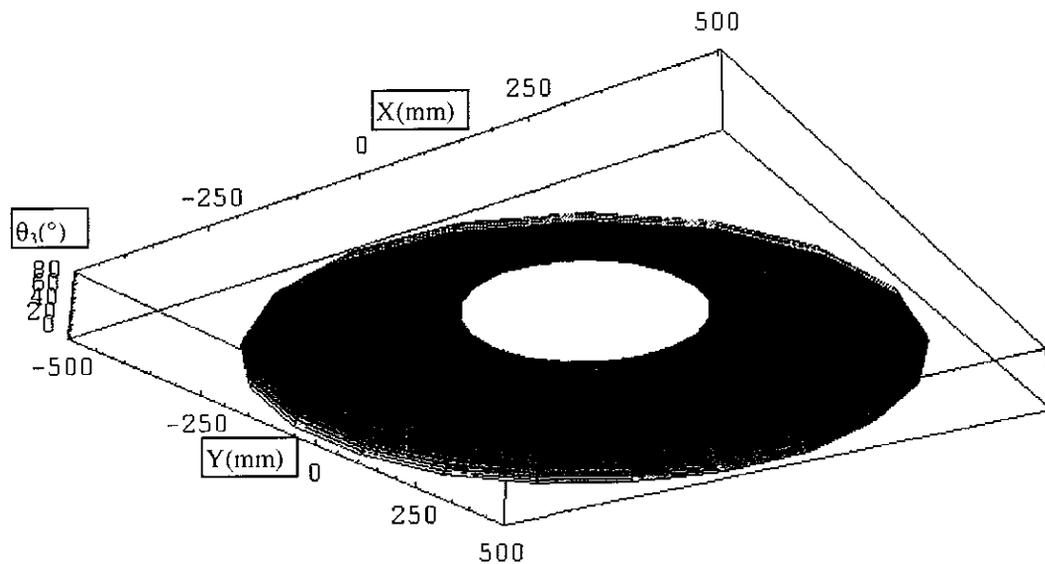


Figura 2.1.10 Es la vista inferior del mismo conjunto de solución mostrado en la figura anterior.

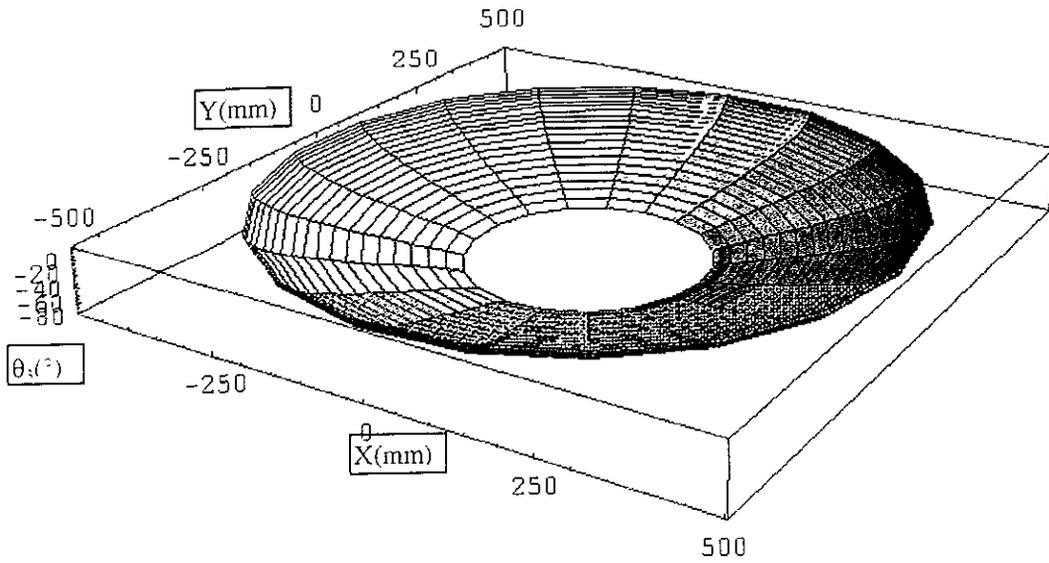


Figura 2.1.11 Es el conjunto de solución que contiene a los elementos de la segunda solución de la cuarta variable articular y se le llama  ${}_2\Delta\theta_3$ .

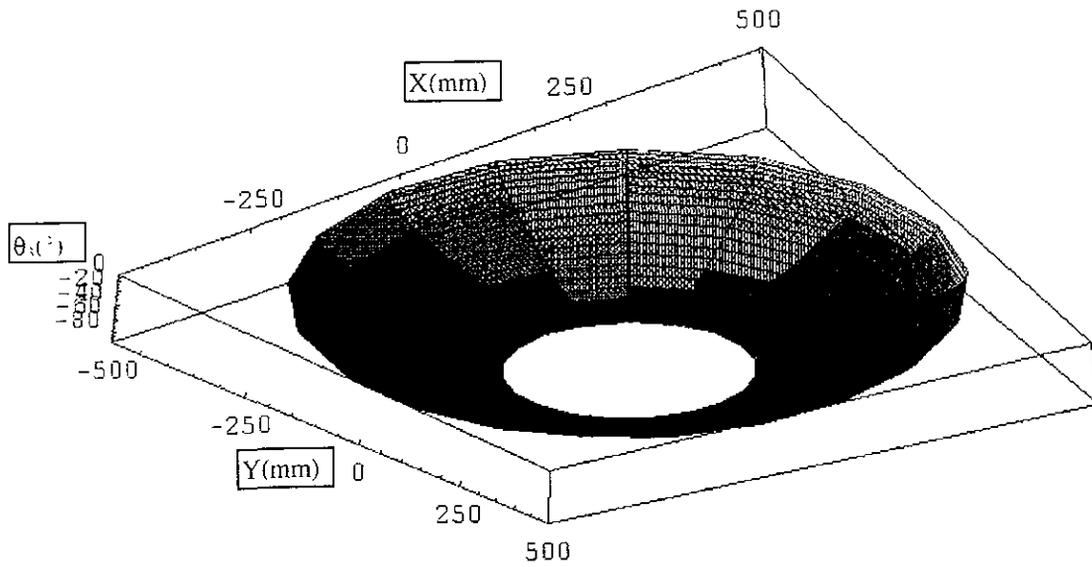


Figura 2.1.12. Es la vista inferior del mismo conjunto  ${}_2\Delta\theta_3$ .

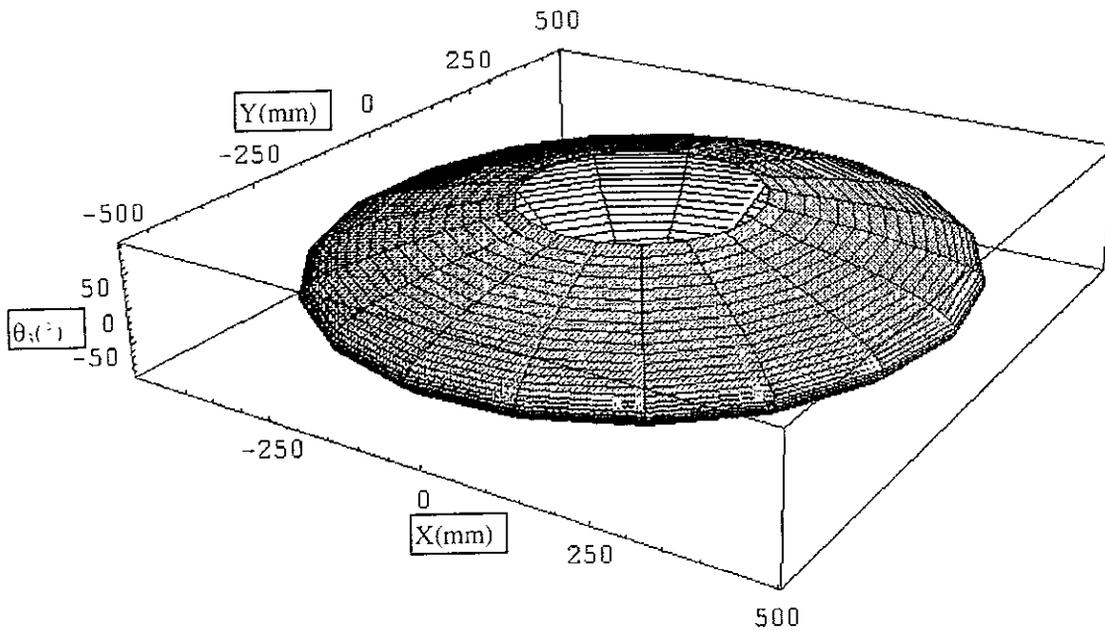


Figura 2.1.13 Es la vista superior de la existencia y unicidad de solución de la cuarta variable articular.

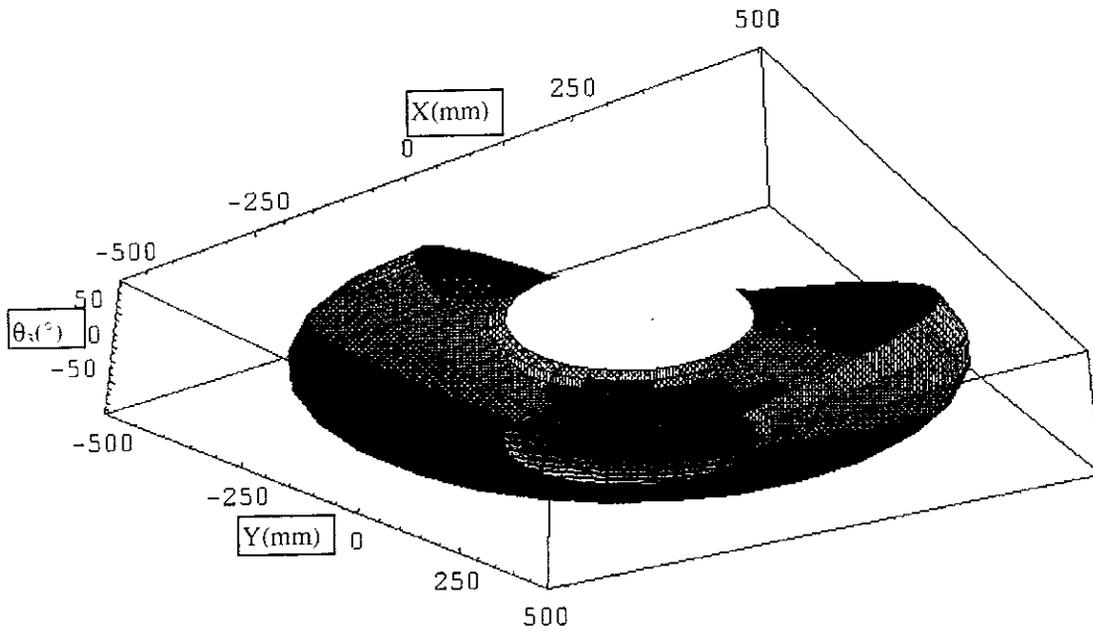


Figura 2.1.14 Es el mismo conjunto de la figura anterior pero con un corte del cuarto cuadrante y en una vista diferente. Reúne a todos la posibles soluciones para la cuarta variable articular.

## 2.2 SINGULARIDADES

El jacobiano es una transformación lineal que ayudará a visualizar las regiones donde se concentran los llamados puntos singulares.

El jacobiano resuelve la cuestión en la que teniendo dos regiones  $D$  y  $D^*$  en  $\mathbb{R}^n$ , una función diferenciable  $T$  en  $D^*$  con imagen  $D$ , esto es,  $T(D^*)=D$  y cualquier función integrable con valores reales,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , se quiere expresar  $\int_D f(x, y) dA$  como una integral sobre  $D^*$  de la función compuesta  $f \circ T$ .

El jacobiano básicamente relacionará el estado de la velocidad del manipulador en los espacios articular y operacional (2.2.1). Al ser una matriz (2.2.2) de orden  $4 \times 4$  y no singular en la mayor parte de las configuraciones del mecanismo, se pueden obtener las velocidades articulares en función de las velocidades operacionales al invertir  $J$ , pero existen puntos operacionales en donde no es posible realizar esta operación y se les llama *singulares*.

$$\dot{X} = J\dot{\Theta} \quad (2.2.1)$$

Al ser la definición del jacobiano la matriz adjunta de  $J$  entre el escalar determinante de  $J$  podemos deducir que las indeterminaciones que se presentan en los puntos singulares son debidas a que el escalar determinante es cero. Al conocerse esto el siguiente paso sería simplemente evitar estos puntos, sin embargo surge lo que se muestra en la siguiente figura (2.2.1):

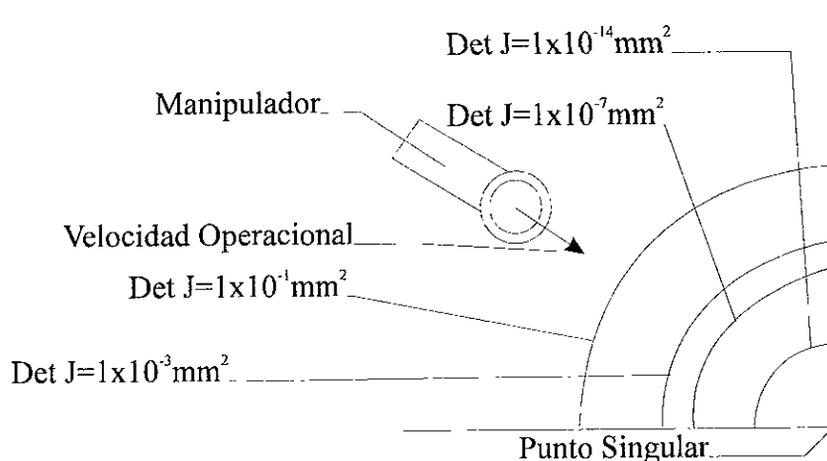


Figura 2.2.1 En la cercanía a los puntos singulares el determinante tiende a cero.

Como podemos observar en la figura anterior (2.2.1) la cercanía a los puntos singulares nos produce una disminución a gran escala del determinante lo que producirá un aumento violento de velocidad articular es decir, una alta aceleración que es precisamente lo que se quiere evitar y la única forma en la que se podría evitar sería formando una estrategia perfectamente delimitada de trayectoria, para lo cual se debe conocer muy bien la estructura y localización de estos puntos, así como la forma de las regiones geométricas de la posición, velocidad y aceleración.

Teniendo las ecuaciones que definen la posición del órgano terminal en función de las variables articulares podemos obtener el jacobiano del manipulador que es (ecuación 2.2.2).

$$J(d_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial d_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial d_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_4}{\partial \theta_3} \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

En donde:

$$f_1 = l_1 c \theta_1 + l_2 c(\theta_1 + \theta_2) + l_3 c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.3)$$

$$f_2 = l_1 s \theta_1 + l_2 s(\theta_1 + \theta_2) + l_3 s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.4)$$

$$f_3 = e_1 + e_2 + e_3 + d_1 \quad (2.2.5)$$

Y entonces la matriz queda:

$$J(\Theta) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

En donde:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} = -l_1 s \theta_1 - l_2 s (\theta_1 + \theta_2) - l_3 s (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} = -l_2 s (\theta_1 + \theta_2) - l_3 s (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} = -l_3 s (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} = l_1 c \theta_1 + l_2 c (\theta_1 + \theta_2) + l_3 c (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} = l_2 c (\theta_1 + \theta_2) + l_3 c (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} = l_3 c (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (2.2.11)$$

y el determinante:  $Det J = l_1 l_2 s \theta_2 \quad (2.2.12)$

Teniendo el determinante se puede deducir que las singularidades se darán cuando  $\theta_2 = 0^\circ, 180^\circ, -180^\circ$  y la siguiente gráfica (2.2.2) nos da la idea de su comportamiento.

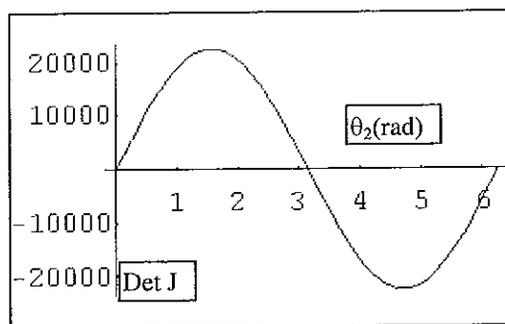


Figura 2.2.2 Evolución de Det J

Como ya se mencionó la cercanía a los puntos tiene efectos dinámicos que se deben tomar en cuenta para los objetivos que se han fijado y se comprenderán más fácilmente estos efectos si se toman en cuenta las leyes de Newton-Euler (2.2.13):

$$F = ma; \quad N = I\alpha + \omega \otimes (I\omega) \quad (2.2.13)$$

Para movimientos rotacionales la aceleración en la ley de Newton (2.2.14)

$$a = \alpha \otimes r + \omega \otimes (\omega \otimes r) \quad (2.2.14)$$

De las ecuaciones anteriores podemos observar que conforme crecen las aceleraciones y velocidades angulares crecen al igual las fuerzas y momentos.

A continuación se mostrará la definición de aceleración angular articular (2.2.15):

$$\ddot{\Theta}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\Theta}(t + \Delta t) - \dot{\Theta}(t)}{\Delta t} \quad (2.2.15)$$

En donde:

$$\dot{\Theta}(t + \Delta t) = J^{-1}(t + \Delta t)^0 v_{or} = \frac{adjJ(t + \Delta t)^0}{\det J(t + \Delta t)} v_{or} \quad (2.2.16)$$

y,

$$\dot{\Theta}(t) = J^{-1}(t)^0 v_{or} = \frac{adjJ(t)^0}{\det J(t)} v_{or} \quad (2.2.17)$$

La diferencia entre estos dos vectores de velocidad articular separados por un pequeño incremento en el tiempo será muy grande cuando esté en las cercanías de una singularidad. Este efecto se debe a que el  $\det J$  disminuye con una pendiente muy grande al acercarse el manipulador a el límite lateral del volumen de trabajo (como se verá más adelante).

Derivando la ecuación 2.2.1 se obtiene la siguiente ecuación (2.2.18) en la que se puede observar la relación inversamente proporcional del Det J con la aceleración angular.

$$\ddot{\Theta}(t) = \left( \frac{{}^0v_{or}}{\det J(t)} \right) \frac{d(\text{adj}J(t))}{dt} + \left( \frac{{}^0a_{or}}{\det J(t)} \right) \text{adj}J(t) - \left( \frac{{}^0v_{or}}{\det^2 J(t)} \right) \text{adj}J(t) \frac{d(\det J(t))}{dt} \quad (2.2.18)$$

Al tener en el tercer sumando en el denominador el det J elevado al cuadrado, cuando este sea muy pequeño, aumentará considerablemente la aceleración angular.

El conocer todos estos efectos es de gran importancia para que en combinación con el resultado de las regiones geométricas se les pueda dar a estas una correcta interpretación.

## 2.2.1 REGIÓN GEOMÉTRICA DE LA SINGULARIDAD.

Después de estudiar la localización de los puntos singulares esta parte complementará el análisis mostrando diferentes regiones geométricas que ayudarán a interpretar los efectos dinámicos que se producen en este manipulador.

La siguiente figura (2.2.1.1) muestra la solución 1 del determinante de la matriz del jacobiano (ecuación 2.2.1.1):

$${}_1\Delta J = \{ \text{Det} J_1, \dots \}_{i=0,1,2,\dots,\infty} = \{ \text{Det} J(\theta_2), \dots \}_{-180^\circ \leq \theta_2 \leq 0^\circ} \quad (2.2.1.1)$$

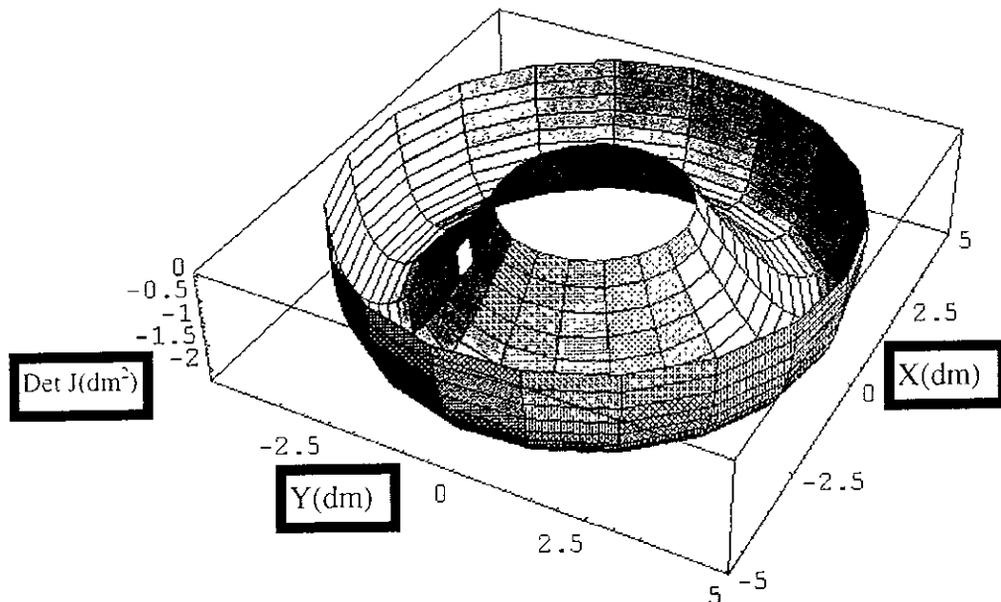


Figura 2.2.1.1 La región geométrica del determinante de la matriz del Jacobiano de la solución 1.

Ahora en la siguiente figura (2.2.1.2) se muestra el inverso del determinante (ec.2.2.1.2) donde se puede observar que en los extremos del volumen de trabajo existe un crecimiento muy grande.

$${}^1\Delta J^{-1} = \left\{ \frac{1}{\text{Det}J_i}, \dots \right\}_{i=1,2,\dots,\infty} = \left\{ \frac{1}{\text{Det}J_i} \right\}_{-180^\circ \leq \theta \leq 0^\circ} \quad (2.2.1.2)$$

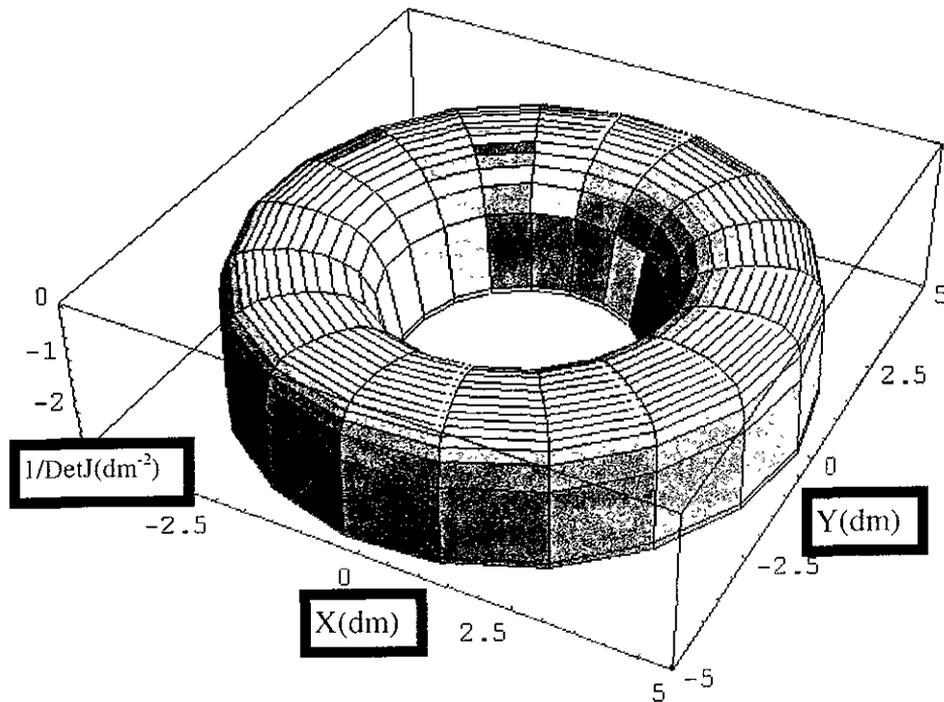


Figura 2.2.1.2 Inverso del determinante para todas las configuraciones de la solución 1.

Como se puede observar en los extremos del volumen de trabajo existe un crecimiento de lo cual se puede deducir que la pendiente del escalar (2.2.1.3) del determinante crecerá en los extremos y se comprueba en la siguiente figura (2.2.1.3) :

$${}_{1,2}\Delta J' = \{d(\text{Det}J_1), \dots\}_{i=0,1,2, \dots, \infty} = \{d(\text{Det}J(\theta_2)), \dots\}_{-180^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ} \quad (2.2.1.3)$$

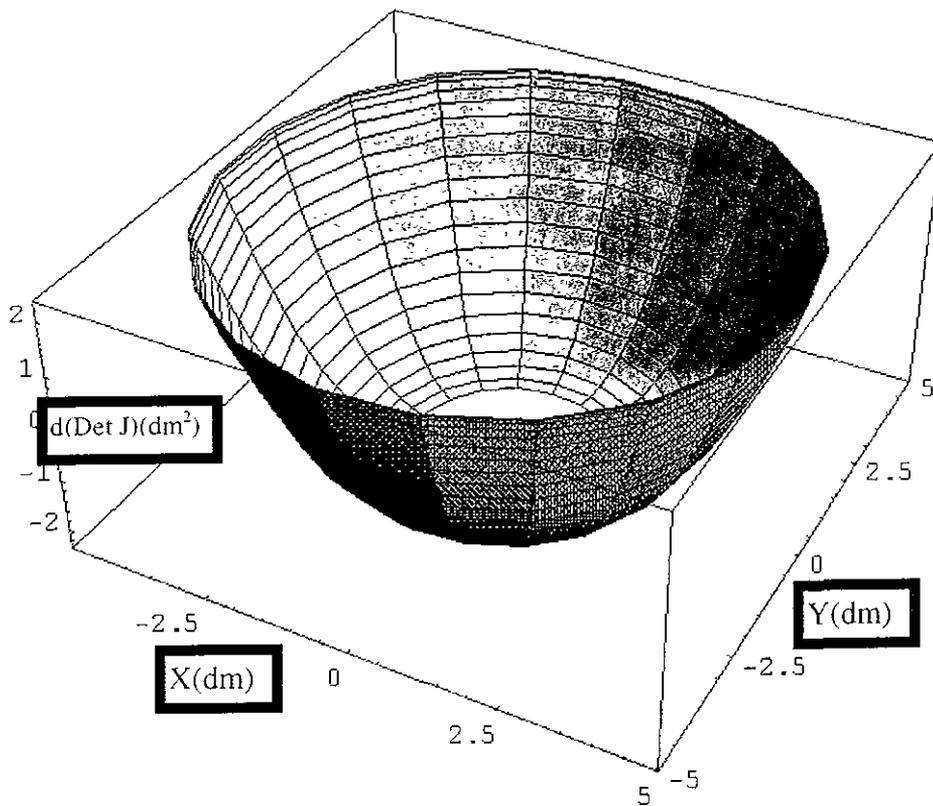


Figura 2.2.1.3 Solución universal de la región geométrica de la pendiente del determinante Det J

La siguiente figura (2.2.1.4) muestra el conjunto de solución 2 (ecuación 2.2.1.4):

$${}_2\Delta J = {}_2\{Det J_1, \dots\}_{i=0,1,2,\dots,\infty} = \{Det J(\theta_2), \dots\}_{0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ} \quad (2.2.1.4)$$

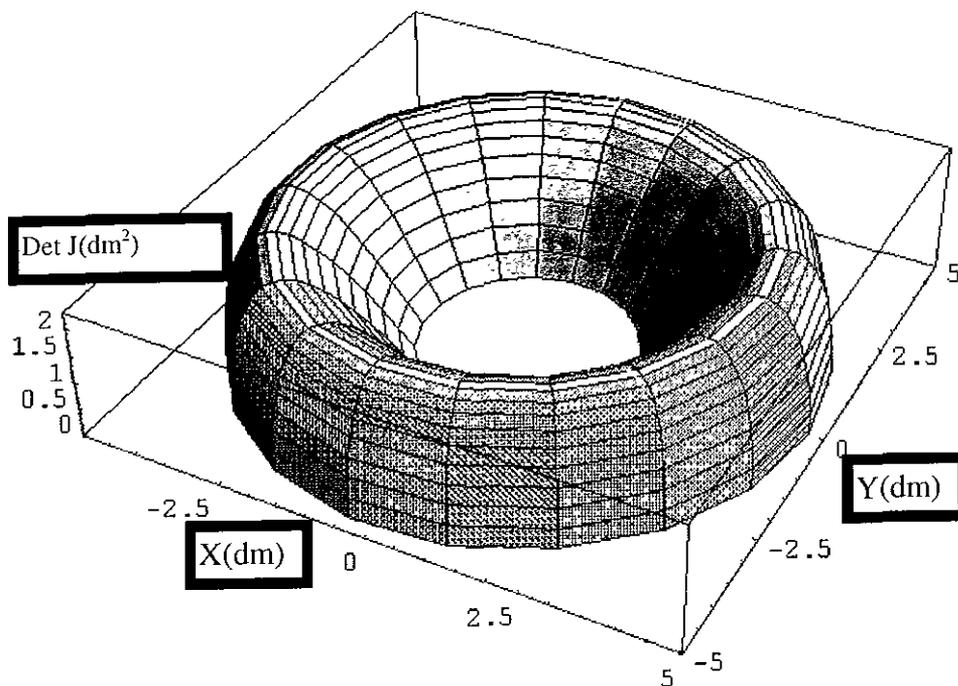


Figura 2.2.1.4 Representa el conjunto de escalares del determinante para la solución 2.

A continuación se muestra el conjunto del inverso del determinante (ecuación 2.2.1.5) para la solución 2 (figura 2.2.1.5):

$${}_2\Delta J^{-1} = \left\{ \frac{1}{\text{Det}J_i}, \dots \right\}_{i=0,1,2, \dots, \infty} = \left\{ \frac{1}{\text{Det}J(\theta_2)}, \dots \right\}_{-180^\circ \leq \theta_2 \leq 0^\circ} \quad (2.2.1.5)$$

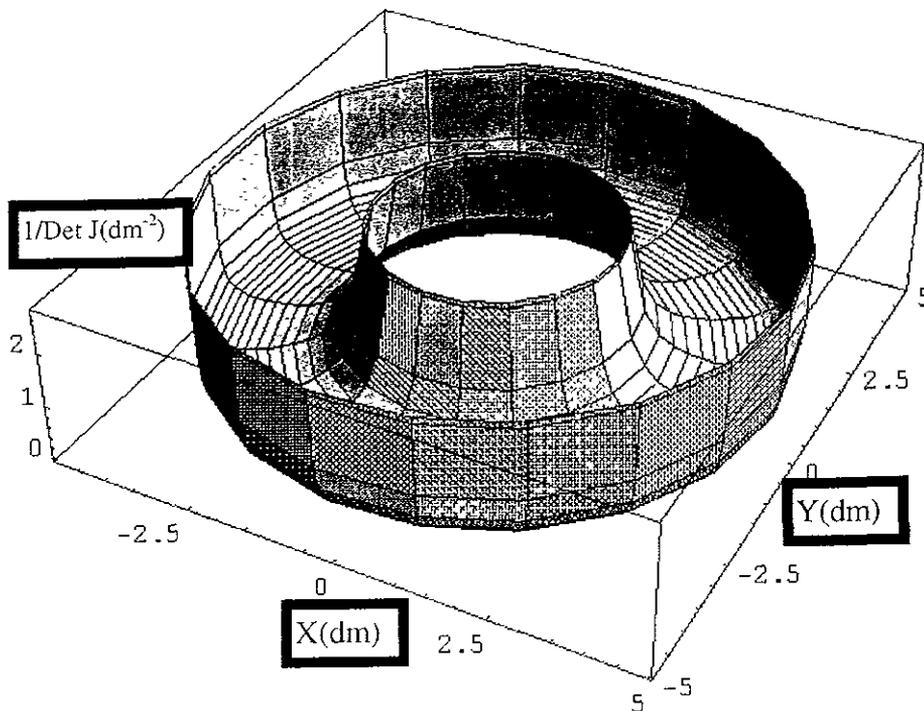


Figura 2.2.1.5 Conjunto de escalares del determinante de la matriz del jacobiano para la solución 2.

Como ya se mencionó en la parte 2.2 de singularidades en la ecuación (2.2.18) que es la que relaciona la aceleración articular con las condiciones cinemáticas del espacio operacional, existe un denominador que contiene el determinante  $\text{Det } J$  elevado al cuadrado. Al acercarse el manipulador a los puntos singulares el  $\text{Det } J$  al cuadrado decrecerá en demasía lo que provocará un efecto dinámico que causará vibración en la estructura del manipulador. En la siguiente figura (2.2.1.6) se muestra el  $\text{Det } J$  al cuadrado para la solución 2 (ecuación 2.2.1.6) y se observa su comportamiento ya mencionado en los extremos.

$$[{}_2\Delta J]^2 = \left\{ (\text{Det } J_i)^2, \dots \right\}_{i=0,1,2, \dots, \infty} = \left\{ (\text{Det } J(\theta_2))^2, \dots \right\}_{0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ} \quad (2.2.1.6)$$

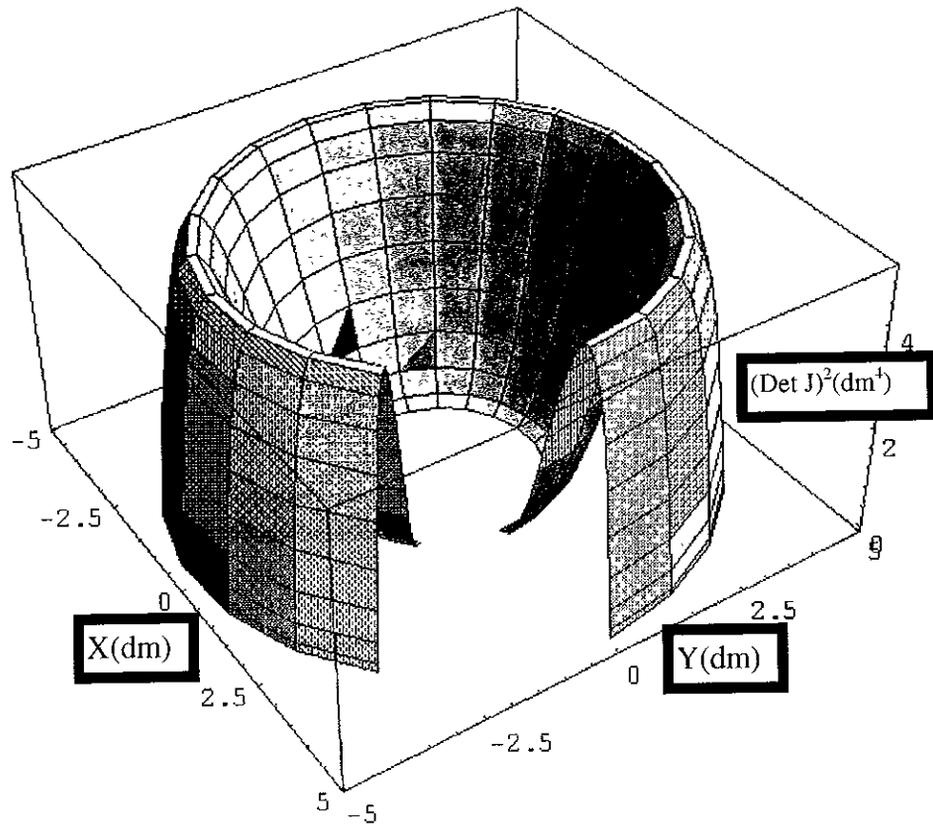


Figura 2.2.1.6 Colección de  $\text{Det } J$  al cuadrado solo para la segunda solución.

La figura (2.2.1.7) a continuación muestra el inverso del cuadrado del determinante (ecuación 2.2.1.7) donde se puede observar más claramente que es lo que pasa en los extremos del volumen de trabajo con el miembro de la ecuación (2.2.18) ya mencionado.

$${}_2[\Delta J^{-1}]^2 = \left\{ \frac{1}{(\text{Det}J_i)^2}, \dots \right\}_{i=0,1,2,\dots,\infty} = \left\{ \frac{1}{(\text{Det}J(\theta_2))^2}, \dots \right\}_{0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ} \quad (2.2.1.7)$$

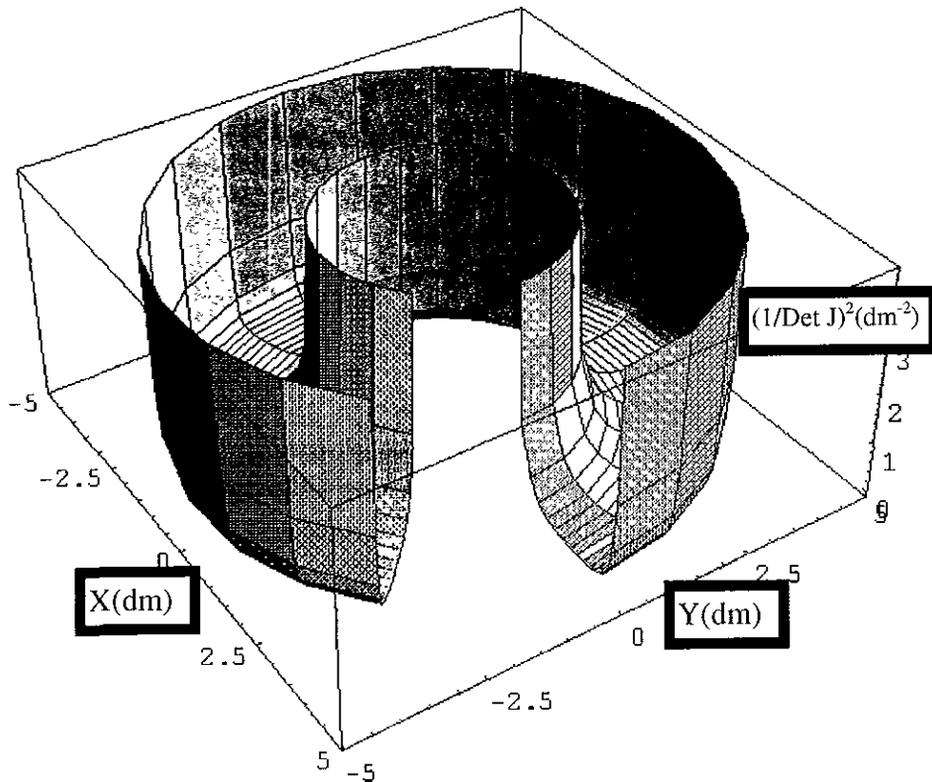


Figura 2.2.1.7 Muestra el conjunto del inverso del determinante al cuadrado. Esta región es de suma importancia ya que en ella se puede ver como el inverso del cuadrado del determinante afecta a la aceleración articular.

En la siguiente figura (2.2.1.8) se puede observar el cuadrado de la derivada del determinante para la solución 2 (ecuación 2.2.1.8) y se nota como afecta a la aceleración articular la cual será sumamente grande en los extremos. Incluso se puede ver que tan solo en el medio del volumen de trabajo la pendiente es nula.

$${}_2[\Delta J']^2 = \left\{ \left( d(\text{Det}J_i) \right)^2, \dots \right\}_{i=0,1,2,\dots,\infty} = \left\{ \left( d(\text{Det}J(\theta_2)) \right)^2, \dots \right\}_{0^\circ \leq \theta_2 \leq 180^\circ} \quad (2.2.1.8)$$

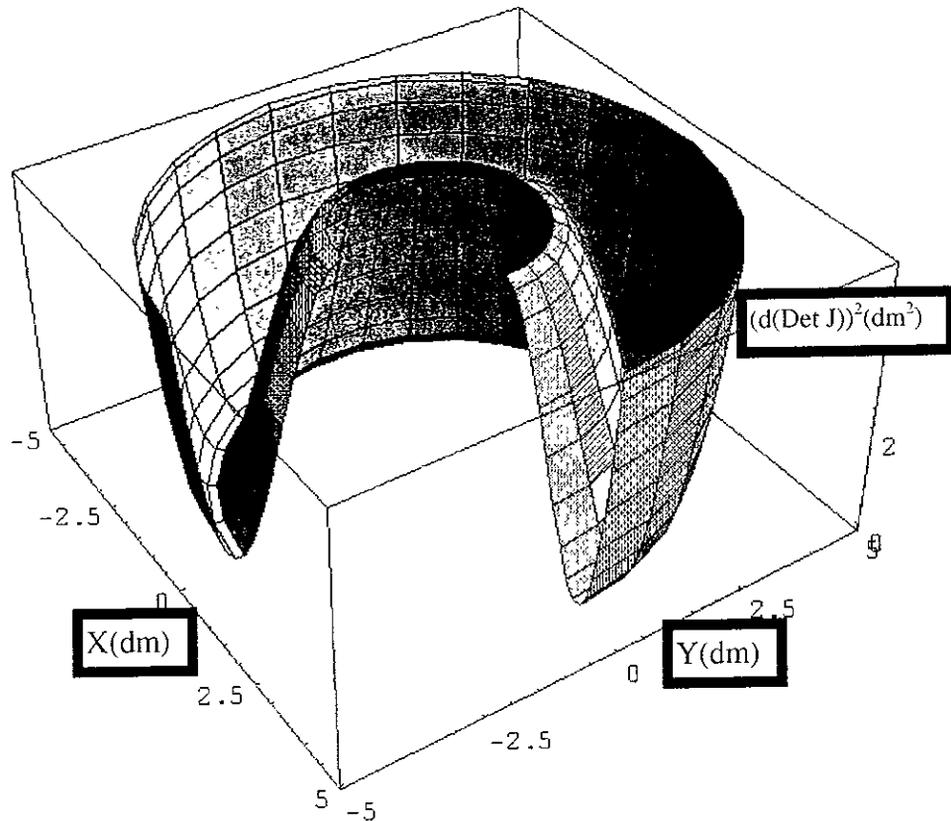


Figura 2.2.1.8 Donde se muestra el cuadrado de la pendiente del Det J

En la siguiente figura (2.2.1.9) se presenta el conjunto universal de soluciones del  $\text{Det } J$  (ecuación 2.2.1.9), es decir los dos conjuntos  ${}_1\Delta J$  y  ${}_2\Delta J$  que como se puede ver en la figura se intersectan en los extremos.

$$\Delta J = {}_1\Delta J \cup {}_2\Delta J \quad (2.2.1.9)$$

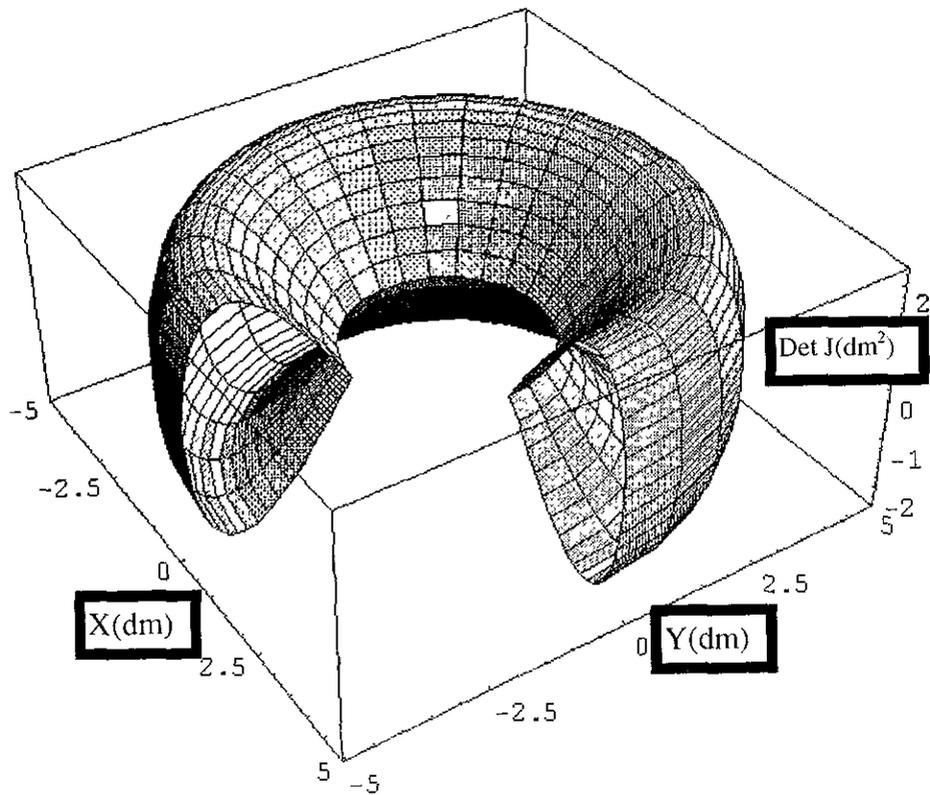


Figura 2.2.1.9 Se muestran las dos soluciones posibles del  $\text{Det } J$ , es decir es un conjunto de todos los posibles escalares  $\text{Det } J$ .

En la siguiente figura (2.2.1.10) se muestra la unión del inverso de los dos conjuntos de solución anteriormente mostrados (2.2.1.10) y es importante destacar que no existe intersección en esta unión debido a la división entre cero.

$$\Delta J^{-1} = \Delta J^{-1} \cup \Delta J^{-1} \quad (2.2.1.10)$$

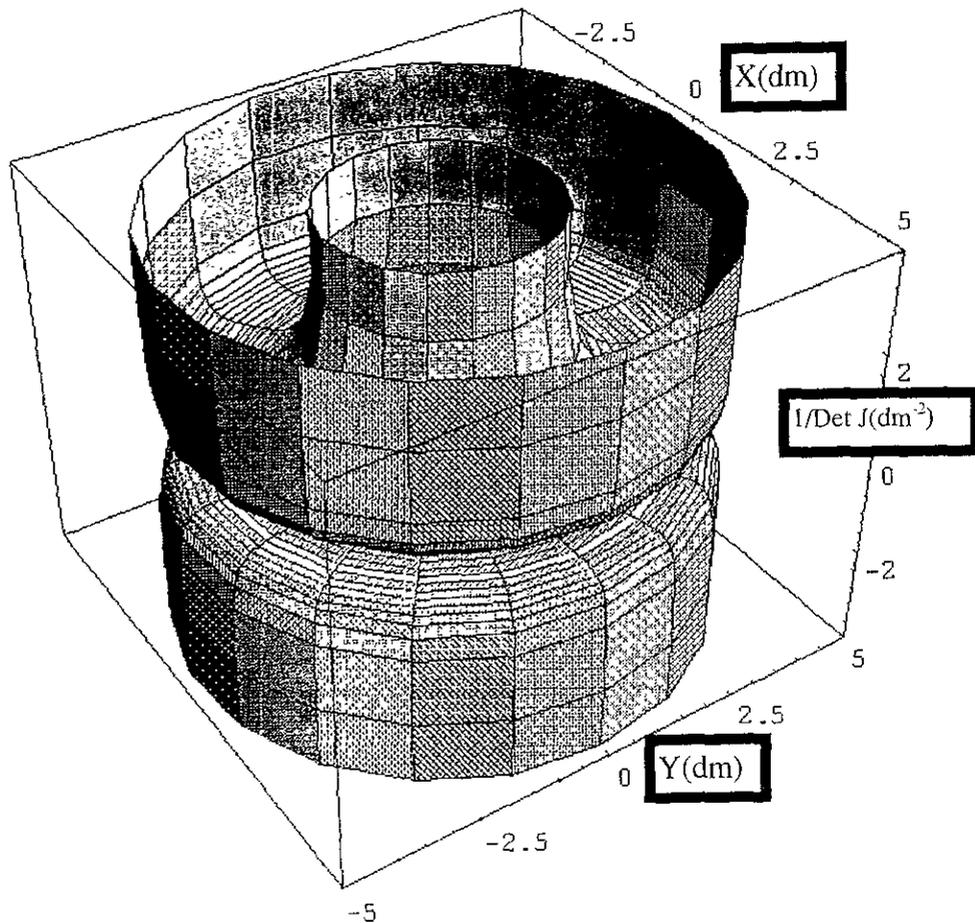


Figura 2.2.1.10 Muestra el conjunto de las dos soluciones posibles del inverso del Det J.

### 3. ESPACIO OPERACIONAL

El espacio operacional son todas las posiciones y orientaciones que pueden ser alcanzados por el órgano terminal, Y vectorialmente se puede representar como (ecuación 3.1):

$$X^+ = {}^0_5R[\alpha, [0 \ 0 \ 1]^T, {}^0OT] = \begin{bmatrix} {}^0OT_x \\ {}^0OT_y \\ {}^0OT_z \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

La ecuación 3.1 nos muestra las formas en las que puede ser representado el espacio operacional: las primeras dos como descripción del sistema de referencia {5} con respecto del inercial {0} y como la tercera un vector de seis elementos. Cuando se representa como un vector de seis elementos los primeros tres dan las coordenadas cartesianas mientras que los últimos tres representan al vector de giro. Es decir los primeros tres representan el *subespacio de posición* y los últimos tres el *subespacio de orientación*.

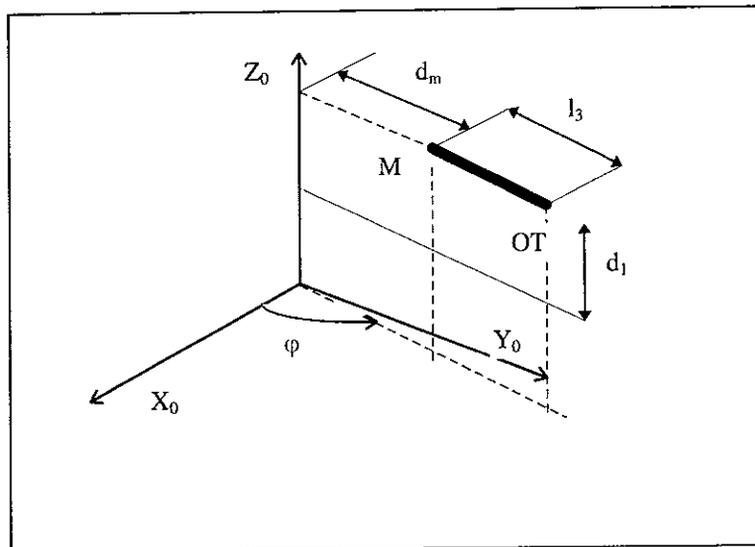


Figura 3.1 Muestra la posición y orientación del órgano terminal.

En la figura 3.1 se puede observar que el espacio operacional  $X^{RG}$  es generado debido a la evolución de:

$$\begin{aligned} &\varphi[-2\pi, 2\pi] \\ &d_m[0, l_1+l_2] \\ &d_1[0, d_{lmax}] \end{aligned}$$

Entonces para un elemento  $j$ ,  $X_j^+$  sería (ecuación 3.2):

$$X_j^+ = \begin{pmatrix} {}^0OT_x \\ {}^0OT_y \\ {}^0OT_z \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_m + l_3) \cos \varphi \\ (d_m + l_3) \text{sen } \varphi \\ d_1 + e_1 + e_2 + e_3 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

El siguiente conjunto  $X^{RG}$  colecciona la cantidad infinita de elementos  $X_j^+$  ( $j=0, \dots, \infty$ ):

$$X^{RG} = \left\{ X_j^+ \left| \begin{array}{l} \forall \varphi = -2\pi, \dots, 2\pi; \forall d_m = 0, \dots, l_1 + l_2; \forall d_1 = 0, \dots, d_{lmax} \\ \alpha_j = \varphi \\ {}^0OT_x = (d_m + l_3) \cos \varphi \\ {}^0OT_y = (d_m + l_3) \text{sen } \varphi \\ {}^0OT_z = d_1 + e_1 + e_2 + e_3 \end{array} \right. \right\}_{j=0, \dots, \infty} \quad (3.3)$$

### 3.1 SUBESPACIO OPERACIONAL DE POSICIÓN

El subespacio operacional de posición contiene todas las posiciones que pueden ser alcanzadas por el órgano terminal del manipulador, es decir, es tan solo una parte del conjunto  $X^{RG}$  que puede situar a la herramienta sin importar la orientación de ésta. Vectorialmente se representa como (ecuación 3.1.1):

$$Xp^+ = \{ {}^0OT \} = \begin{bmatrix} {}^0OT_x \\ {}^0OT_y \\ {}^0OT_z \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

Como se observa en la ecuación anterior el subespacio operacional de posición se representa por la descripción del sistema de referencia  $\{0\}$  ó como una matriz de 3 elementos. Estos tres elementos evolucionan de la siguiente manera:

$$Xp_j^+ = \begin{bmatrix} {}^0OT_x \\ {}^0OT_y \\ {}^0OT_z \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} (d_m + l_3) \cos \varphi \\ (d_m + l_3) \text{sen } \varphi \\ d_1 + e_1 + e_2 + e_3 \end{bmatrix}_j \quad (3.1.2)$$

En donde:

$$\varphi[-2\pi, 2\pi]$$

$$d_m[0, l_1 + l_2]$$

$$d_1[0, d_{1\max}]$$

Las siguientes figuras (3.1.1-3.1.3) muestran la región de la existencia de la posición del órgano terminal y se podrá notar que coincide con el volumen de trabajo.

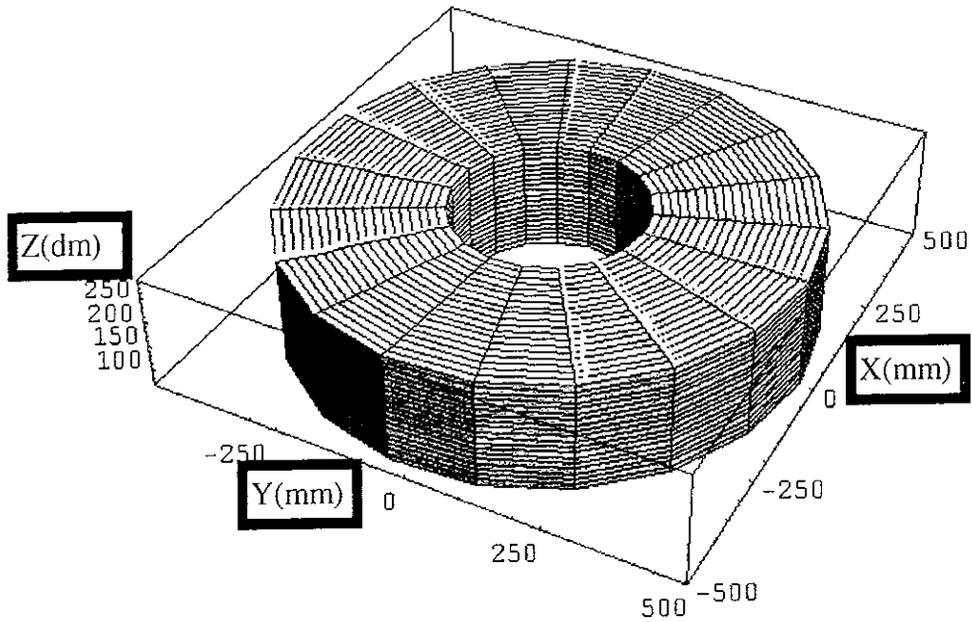


Figura 3.1.1 Representa al subespacio operacional de posición, este subespacio solo abarca la posición del órgano terminal sin tomar en cuenta su orientación.

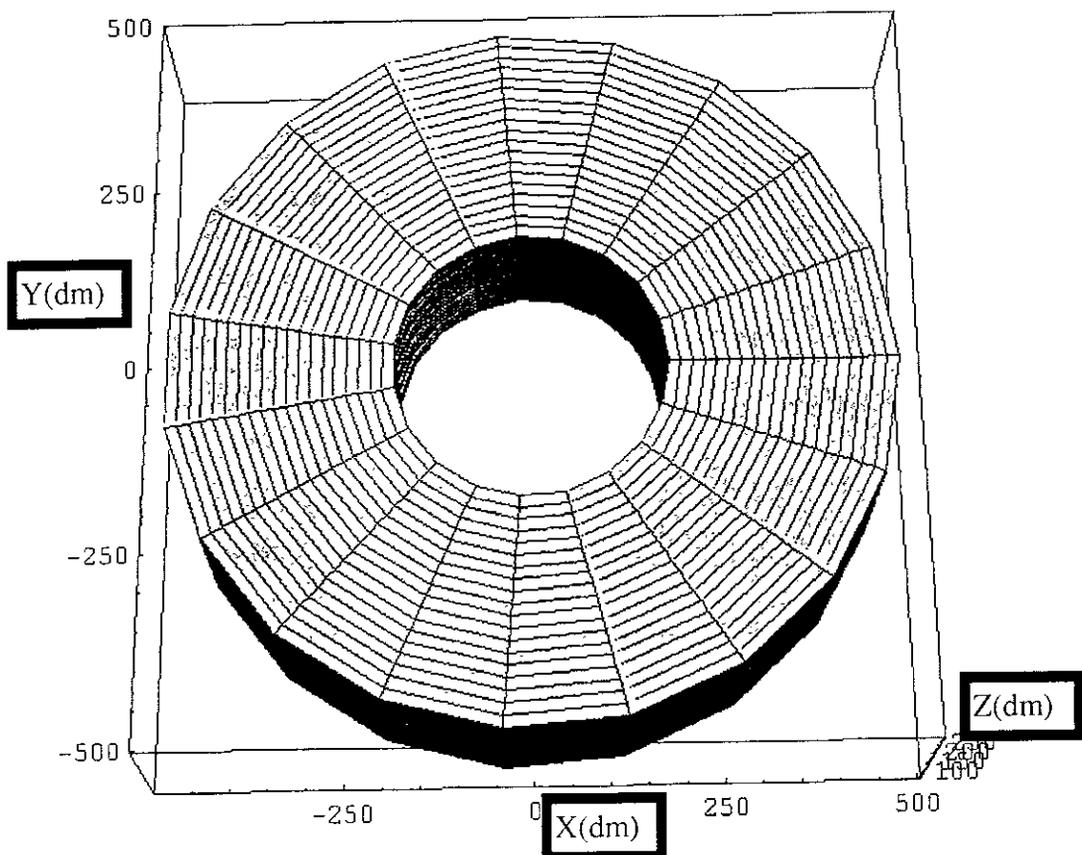


Figura 3.1.2 Vista superior del subespacio operacional de posición.

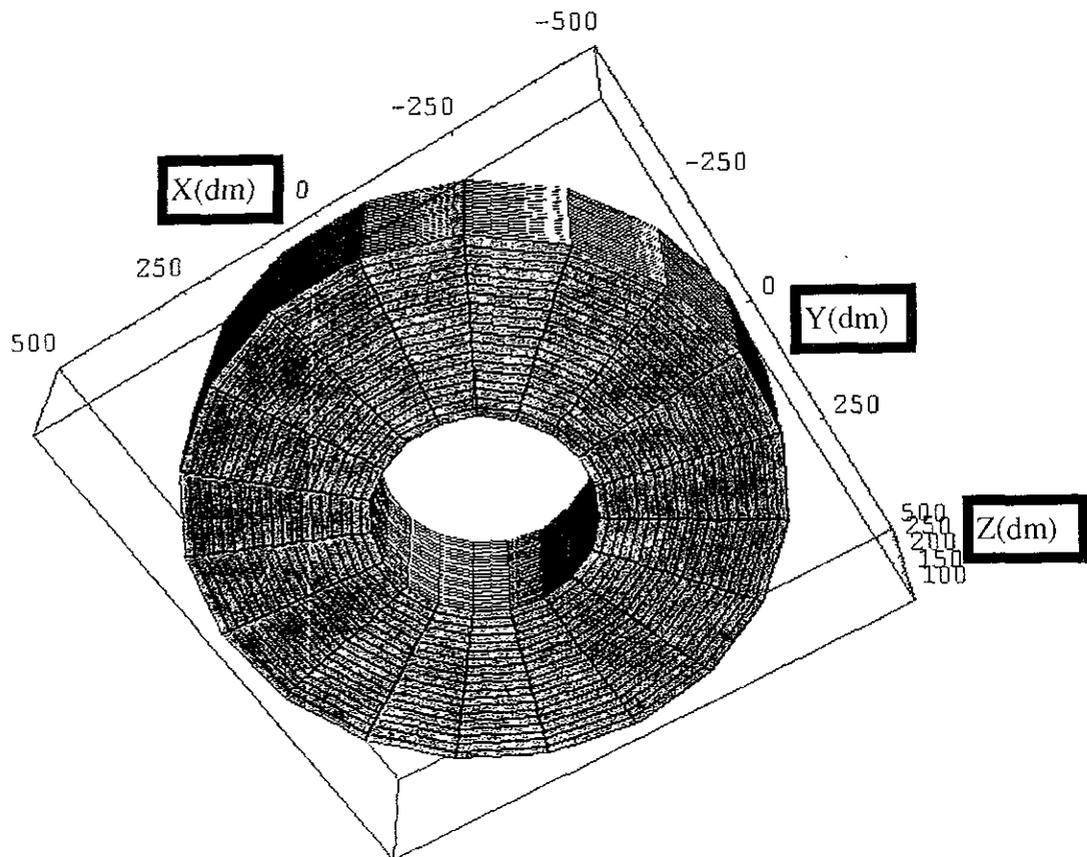


Figura 3.1.3 Vista inferior del subespacio operacional de posición. Es importante recordar que este espacio se genera de la evolución de las variables:

$$\varphi[-2\pi, 2\pi], d_m[0, l_1 + l_2], d_l[0, d_{lmax}].$$

## 3.2 SUBESPACIO OPERACIONAL DE ORIENTACIÓN

El subespacio operacional de orientación es el otro subespacio del espacio operacional en el que se toma en cuenta la orientación de la herramienta. Se representa vectorialmente como (ecuación 3.2.1):

$$X_{o^+} = {}^0_5R[\alpha, [0 \ 0 \ 1]^T] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

Como se nota en la ecuación anterior el subespacio operacional de orientación se representa por la descripción del sistema de referencia  $\{5\}$  con respecto del inercial  $\{0\}$  ó como un vector de tres elementos, de los cuales los dos primeros son nulos ya que el manipulador solo tiene rotación en el eje Z. Este subespacio se generará como muestra la siguiente ecuación (3.2.2):

$$X_{o^+} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{bmatrix}_j \quad (3.2.2)$$

En donde:  $\varphi[-2\pi, 2\pi]$

Las siguientes figuras (3.2.1-3.2.3) muestran al subespacio operacional de orientación.

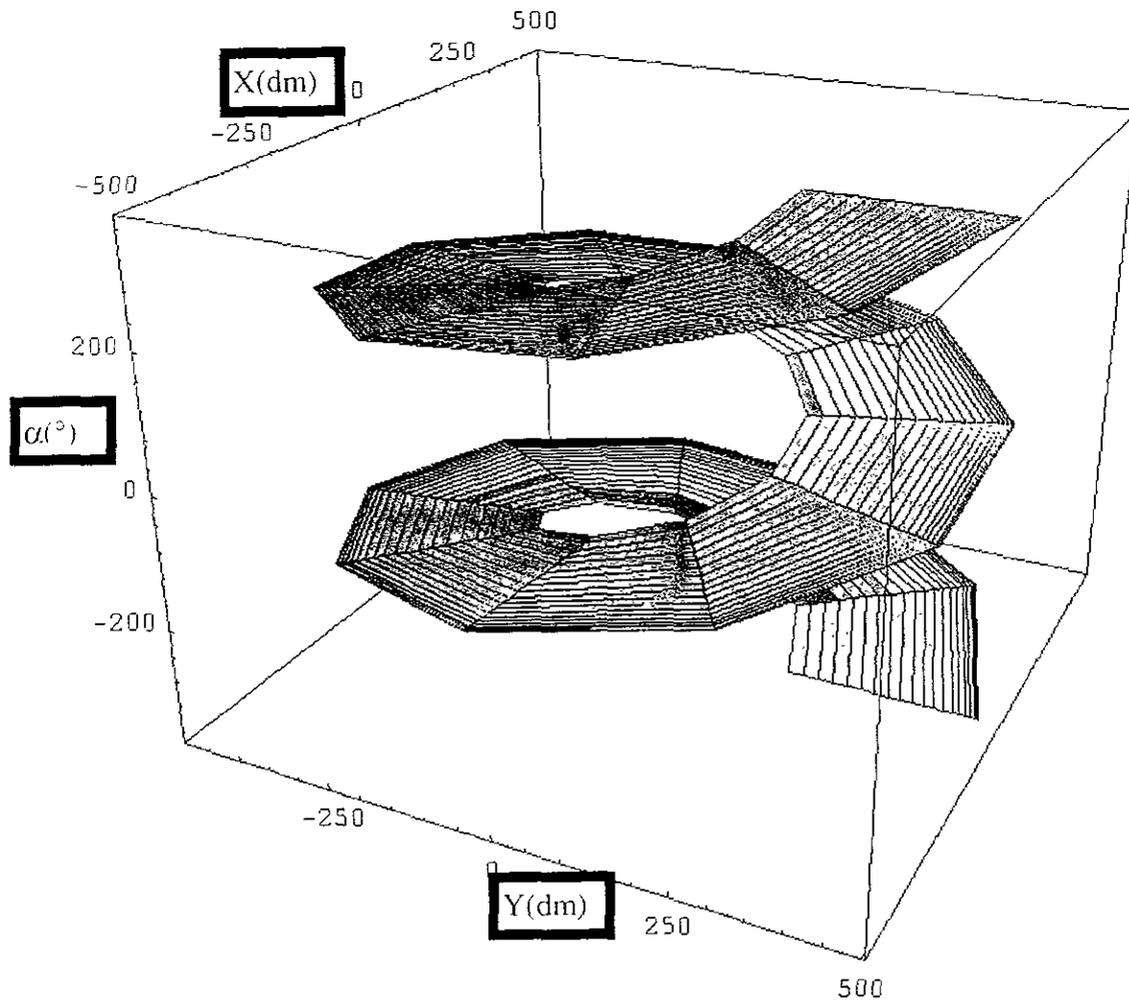


Figura 3.2.1 Representa al subespacio operacional de orientación que es generado por la evolución de  $\alpha=\varphi$  como resultado de la evolución de las tres articulaciones.

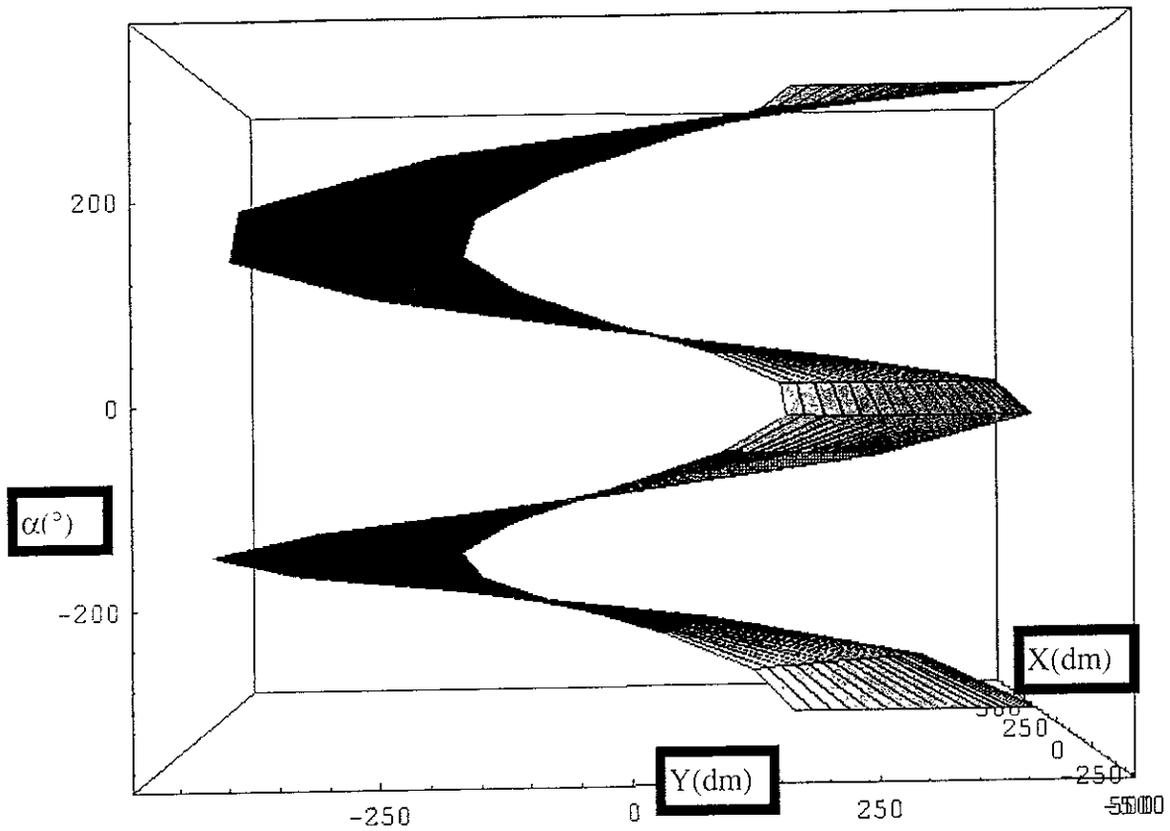


Figura 3.2.2 Vista lateral del subespacio operacional de orientación. La orientación aquí mostrada tiene un sentido de giro normal y antihorario, esto es:  $\varphi[-2\pi, 2\pi]$ .

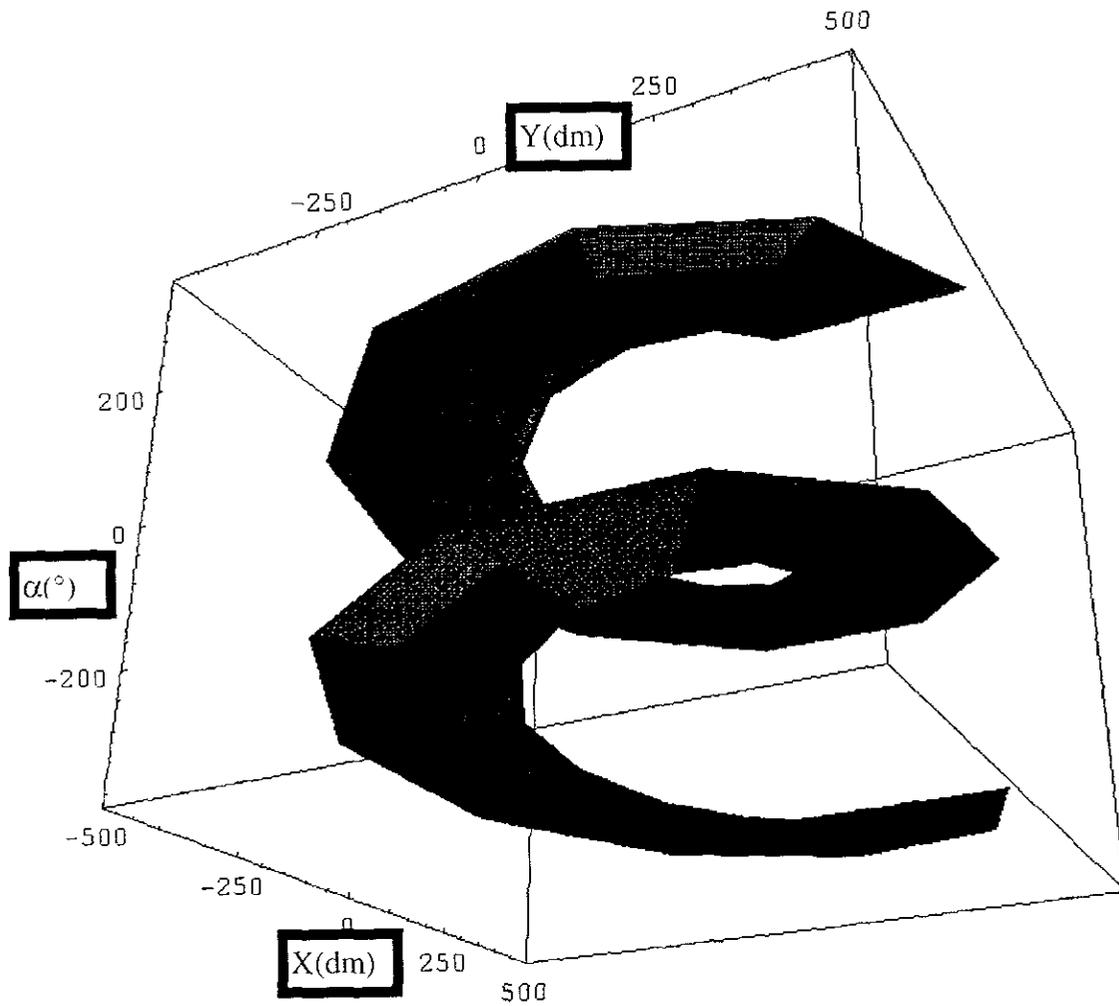


Figura 3.2.3 Vista inferior del subespacio operacional de orientación. Este subespacio representa al espacio operacional  $X^{\text{RG}}$  tan solo en la orientación y para todo  $d_i[0, d_{i\text{max}}]$ .

## 4. REGIONES DE SOLUCIÓN DEL ESPACIO OPERACIONAL.

Paralelo al espacio operacional existe el espacio articular el cual contiene a una configuración  $j$ -ésima (ecuación 4.1) de los cuatro elementos articulares correspondiente a una posición en el espacio operacional. Vectorialmente el espacio articular se compone de cuatro escalares que corresponden a cada una de los elementos articulares como muestran las siguientes ecuaciones (4.1 y 4.2):

$$\Theta^{RG} = \{\Theta_j^+\}_{j=1, \dots, \infty} \quad (4.1)$$

$$\Theta_j^+ = \begin{pmatrix} d_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}_j \quad (4.2)$$

Teniendo definidos al espacio operacional y al espacio articular se puede concluir que una solución será una regla de correspondencia que logre una imagen del espacio articular en el espacio operacional. Esta regla de correspondencia está dada por las reglas G y H. Se le llamarán reglas G y H a las reglas que restringen las configuraciones del manipulador para alcanzar un punto. Estas restricciones son las que definen como el elemento M-OT siempre será radial al eje 1 ó 2 (figura 2.1, Capítulo 2). Estas reglas se basan en la descripción espacial general del órgano terminal (ecuación 2.7, capítulo 2) y están en función de los cuatro escalares que componen el espacio articular. A continuación se muestran las reglas G y H (ecuaciones 4.3 y 4.4):

$$G(d_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = Rot(\hat{z}, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$H(d_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} c(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 + c(\theta_1 + \theta_2)l_2 + c\theta_1l_1 \\ s(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3 + s(\theta_1 + \theta_2)l_2 + s\theta_1l_1 \\ e_1 + e_2 + e_3 + d_1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Como se puede observar como la regla G especifica la orientación del órgano terminal mientras que la regla H le da la posición en coordenadas cartesianas, las configuraciones del manipulador deben cumplir con estas dos reglas para alcanzar cualquier punto operacional.

## 4.1 CONJUNTOS DE SOLUCIÓN DE LA POSICIÓN

Como región universal de solución entenderemos a un subconjunto del espacio articular que cumplen con las reglas G y H. Esto es (ecuación 4.1.1):

$${}_{\cup}T^{RG} \subseteq \Theta^{RG} \quad (4.1.1)$$

Ahora se supondrá otro subconjunto del espacio articular que se llama  $R^{RG}$  y contiene elementos que no tendrán una configuración útil.

$$R^{RG} \subseteq \Theta^{RG} \quad (4.1.2)$$

$$R^{RG} = \left\{ \Psi_j^+ \in \Theta^{RG} \mid \Psi_j^+ \notin {}_{\cup}T^{RG} \right\}_{j=1, \dots, \infty} \quad (4.1.3)$$

Y entonces se hace notar que los conjuntos  $R^{RG}$  y  ${}_{\cup}T^{RG}$  son ajenos, es decir su intersección forma un conjunto vacío (ecuación 4.1.4):

$$R^{RG} \cap {}_{\cup}T^{RG} = \emptyset \quad (4.1.4)$$

Se forma un subconjunto del espacio articular el cual contiene elementos que permiten alcanzar un y solo un estado operacional. Y queda como:

$$T \subseteq {}_{\cup}T^{RG} \quad (4.1.5)$$

$$T = \left\{ {}_i T^+ \in \Theta^{RG} \mid \left\{ \begin{array}{l} \text{y} \\ {}^0_5 R \left[ \alpha, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right] = G({}_i T^+), {}^0 OT = H({}_i T^+) \end{array} \right\} \right\}; \quad (4.1.6)$$

$$\forall {}^0_5 R \quad \forall {}^0 OT \quad \forall i \exists {}_i T^+ \quad {}^0_5 R = G({}_i T^+) \quad \text{y} \quad {}^0 OT = H({}_i T^+)$$

En donde el conjunto  ${}_i T^+$  se define como:

$${}_i T^+ = \left[ \left[ d_1 \quad {}_i \theta_1 \quad {}_i \theta_2 \quad {}_i \theta_3 \right]^T \right]^0 \left\{ {}^0 R[\alpha, [001]^T] = G \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_i \theta_1 \\ {}_i \theta_2 \\ {}_i \theta_3 \end{pmatrix}, {}^0 OT = H \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_i \theta_1 \\ {}_i \theta_2 \\ {}_i \theta_3 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.1.7)$$

Como se explicó en la parte de existencia y unicidad existen dos soluciones que satisfacen las reglas G y H para un mismo estado operacional por lo tanto este conjunto se compone de dos subconjuntos (ecuaciones 4.1.8-4.1.9):

$${}_1 T^+ = \left[ \left[ d_1 \quad {}_1 \theta_1 \quad {}_1 \theta_2 \quad {}_1 \theta_3 \right]^T \right]^0 \left\{ {}^0 R[\alpha, [001]^T] = G \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_1 \theta_1 \\ {}_1 \theta_2 \\ {}_1 \theta_3 \end{pmatrix}, {}^0 OT = H \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_1 \theta_1 \\ {}_1 \theta_2 \\ {}_1 \theta_3 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.1.8)$$

$${}_2 T^+ = \left[ \left[ d_1 \quad {}_2 \theta_1 \quad {}_2 \theta_2 \quad {}_2 \theta_3 \right]^T \right]^0 \left\{ {}^0 R[\alpha, [001]^T] = G \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_2 \theta_1 \\ {}_2 \theta_2 \\ {}_2 \theta_3 \end{pmatrix}, {}^0 OT = H \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_2 \theta_1 \\ {}_2 \theta_2 \\ {}_2 \theta_3 \end{pmatrix} \right\} \quad (4.1.9)$$

Donde cada uno tiene una serie de elementos infinitos (4.1.10-4.1.11):

$${}_1 T^{RG} = \left\{ {}_1 T^+_j \in \Theta^{RG} \mid {}^0 R[\alpha, [0 \ 0 \ 1]^T] = G({}_1 T^+_j), {}^0 OT = H({}_1 T^+_j) \right\}_{j=0, \dots, \infty} \quad (4.1.10)$$

$${}_2 T^{RG} = \left\{ {}_2 T^+_k \in \Theta^{RG} \mid {}^0 R[\alpha, [0 \ 0 \ 1]^T] = G({}_2 T^+_k), {}^0 OT = H({}_2 T^+_k) \right\}_{k=0, \dots, \infty} \quad (4.1.11)$$

Y la unión de estos dos subconjuntos tienen como resultado el universo de soluciones:

$${}_U T^{RG} = \left\{ {}_1 T^+_j \right\}_{j=0, \dots, \infty} \cup \left\{ {}_2 T^+_k \right\}_{k=0, \dots, \infty}; \begin{cases} j = k, G({}_1 T^+_j) = G({}_2 T^+_k), H({}_1 T^+_j) = H({}_2 T^+_k) \\ j \neq k, G({}_1 T^+_j) \neq G({}_2 T^+_k), H({}_1 T^+_j) \neq H({}_2 T^+_k) \end{cases} \quad (4.1.12)$$

$${}^U T^{RG} = \left\{ {}_1 T_j^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_j = G({}_1 T_j^+), {}^0 OT_j = H({}_1 T_j^+) \right\}, {}_2 T_k^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_k = G({}_2 T_k^+), {}^0 OT_k = H({}_2 T_k^+) \right\} \right\}_{j=1, \dots, K=1, \dots, \infty} \quad (4.1.13)$$

$${}^U T^{RG} = \left\{ {}_1 T_j^+, {}_2 T_k^+ \right\}_{j=1, \dots, K=1, \dots, \infty} \quad (4.1.14)$$

Y generalizando:

$${}^U T^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}_1 T_1^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_1 = G({}_1 T_1^+), {}^0 OT_1 = H({}_1 T_1^+) \right\}, {}_1 T_2^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_2 = G({}_1 T_2^+), {}^0 OT_2 = H({}_1 T_2^+) \right\}, \\ {}_2 T_1^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_1 = G({}_2 T_1^+), {}^0 OT_1 = H({}_2 T_1^+) \right\}, {}_2 T_2^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_2 = G({}_2 T_2^+), {}^0 OT_2 = H({}_2 T_2^+) \right\}, \dots \end{array} \right\} \quad (4.1.15)$$

$${}^U T^{RG} = \left\{ {}_1 T_1^+, {}_1 T_2^+, \dots, {}_1 T_2^+, {}_2 T_2^+, \dots \right\} \quad (4.1.16)$$

Y si se agrupan por soluciones queda (4.1.17):

$${}^U T^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ {}_1 T_1^+, {}_2 T_1^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_1 = G({}_1 T_1^+) = G({}_2 T_1^+), {}^0 OT_1 = H({}_1 T_1^+) = H({}_2 T_1^+) \right\} \right\}, \\ \left\{ {}_1 T_2^+, {}_2 T_2^+ \mid {}^0 \left\{ {}_5 R_2 = G({}_1 T_2^+) = G({}_2 T_2^+), {}^0 OT_2 = H({}_1 T_2^+) = H({}_2 T_2^+) \right\} \right\}, \dots \end{array} \right\} \quad (4.1.17)$$

$${}^U T^{RG} = \left\{ \left\{ {}_1 T_1^+, {}_2 T_1^+ \right\}, \left\{ {}_1 T_2^+, {}_2 T_2^+ \right\}, \dots \right\} \quad (4.1.18)$$

La intersección de los subconjuntos  ${}_1 T_j^{RG}$  y  ${}_2 T_k^{RG}$  no forman un conjunto vacío ya que en los extremos del volumen de trabajo el manipulador solo puede tomar una y solo una configuración. Esta configuración, alrededor de todo el volumen de trabajo, forma el conjunto de intersección de los subconjuntos como se muestra a continuación (ecuación 4.1.19):

$${}_1 T^{RG} \cap {}_2 T^{RG} = \left\{ T_m^{+ \text{ frontera}} \mid T_m^{+ \text{ frontera}} \in {}_1 T^{RG} \text{ y } T_m^{+ \text{ frontera}} \in {}_2 T^{RG} \right\}_{m=1, \dots, \infty} \quad (4.1.19)$$

Para comprender mejor el conjunto de frontera basta con ver la definición del espacio operacional donde podemos ver que en los extremos del volumen de trabajo  ${}^0OT_x = (l_1+l_2+l_3)\cos(\varphi)$  y  ${}^0OT_y = (l_1+l_2+l_3)\sin(\varphi)$  donde  $\varphi \in [-2\pi, 2\pi]$  para cualquier  ${}^0OT_z$  en cualquiera de las dos soluciones.

$$T_m^{+ \text{ frontera}} = \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_1\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_m = \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_2\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_m ; \forall m = 1, \dots, \infty \quad (4.1.20)$$

Como ya se mencionó para cualquier punto operacional se requiere de la combinación de 4 escalares para alcanzar cualquier punto operacional para cualesquiera de las dos soluciones. A continuación se muestra el elemento j-ésimo de  ${}_i T^+$ :

$${}_i T^+ = \begin{pmatrix} d_1 \\ {}_i\theta_1 \\ {}_i\theta_2 \\ {}_i\theta_3 \end{pmatrix}_j ; \forall i = 1, 2; \forall j = 1, \dots, \infty \quad (4.1.21)$$

Si agrupamos a estos elementos escalares según su naturaleza en un conjunto quedaría el articular prismático y en otro los rotacionales:  ${}_i \Lambda_{d1}^{RG}$  que contiene todas las configuraciones de la primer variable articular para el espacio operacional y para las dos soluciones en cada punto y se le llamará “región geométrica escalar de la primer variable articular”; y  ${}_i \Lambda_{0k}^{RG}$  donde  $\theta_k$  engloba tres escalares ( $k=1,2,3$ ) para cualquier configuración en el espacio operacional en cualquiera de las dos soluciones y se le llamará “región geométrica escalar de la variable k para la configuración i”. A continuación se muestran los dos conjuntos:

$${}_i \Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 \end{pmatrix}_j \right\}; \forall i = 1, 2; \forall j = 1, \dots, \infty \quad (4.1.22)$$

$${}_i\Lambda_{\theta_k}^{RG} = \left\{ ({}_i\theta_k)_j \right\}; \forall i = 1,2; \forall j = 1, \dots, \infty; \forall k = 1,2,3 \quad (4.1.23)$$

Hablando de la primera variable articular la solución 1 y 2 son iguales (ecuación 4.1.24):

$${}_i\Lambda_{d1}^{RG} = {}_2\Lambda_{d1}^{RG} = \Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ (d_1)_1, (d_1)_2, \dots \right\} \quad (4.1.24)$$

La primera solución para las demás variables articulares (ecuaciones 4.1.25-4.1.27):

$${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG} = \left\{ ({}_1\theta_1)_1, ({}_1\theta_1)_2, \dots \right\} \quad (4.1.25)$$

$${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG} = \left\{ ({}_1\theta_2)_1, ({}_1\theta_2)_2, \dots \right\} \quad (4.1.26)$$

$${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG} = \left\{ ({}_1\theta_3)_1, ({}_1\theta_3)_2, \dots \right\} \quad (4.1.27)$$

Y para la solución 2:

$${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG} = \left\{ ({}_2\theta_1)_1, ({}_2\theta_1)_2, \dots \right\} \quad (4.1.28)$$

$${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG} = \left\{ ({}_2\theta_2)_1, ({}_2\theta_2)_2, \dots \right\} \quad (4.1.29)$$

$${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG} = \left\{ ({}_2\theta_3)_1, ({}_2\theta_3)_2, \dots \right\} \quad (4.1.30)$$

Y uniendo estas dos series de conjuntos obtendremos “la región geométrica universal escalar de solución de la variable k”(ecuación 4.1.31):

$${}_U\Lambda_{\theta_k}^{RG} = {}_U\Lambda_{\theta_k}^{RG} \cup {}_U\Lambda_{\theta_k}^{RG}; \forall k = 1,2,3 \quad (4.1.31)$$

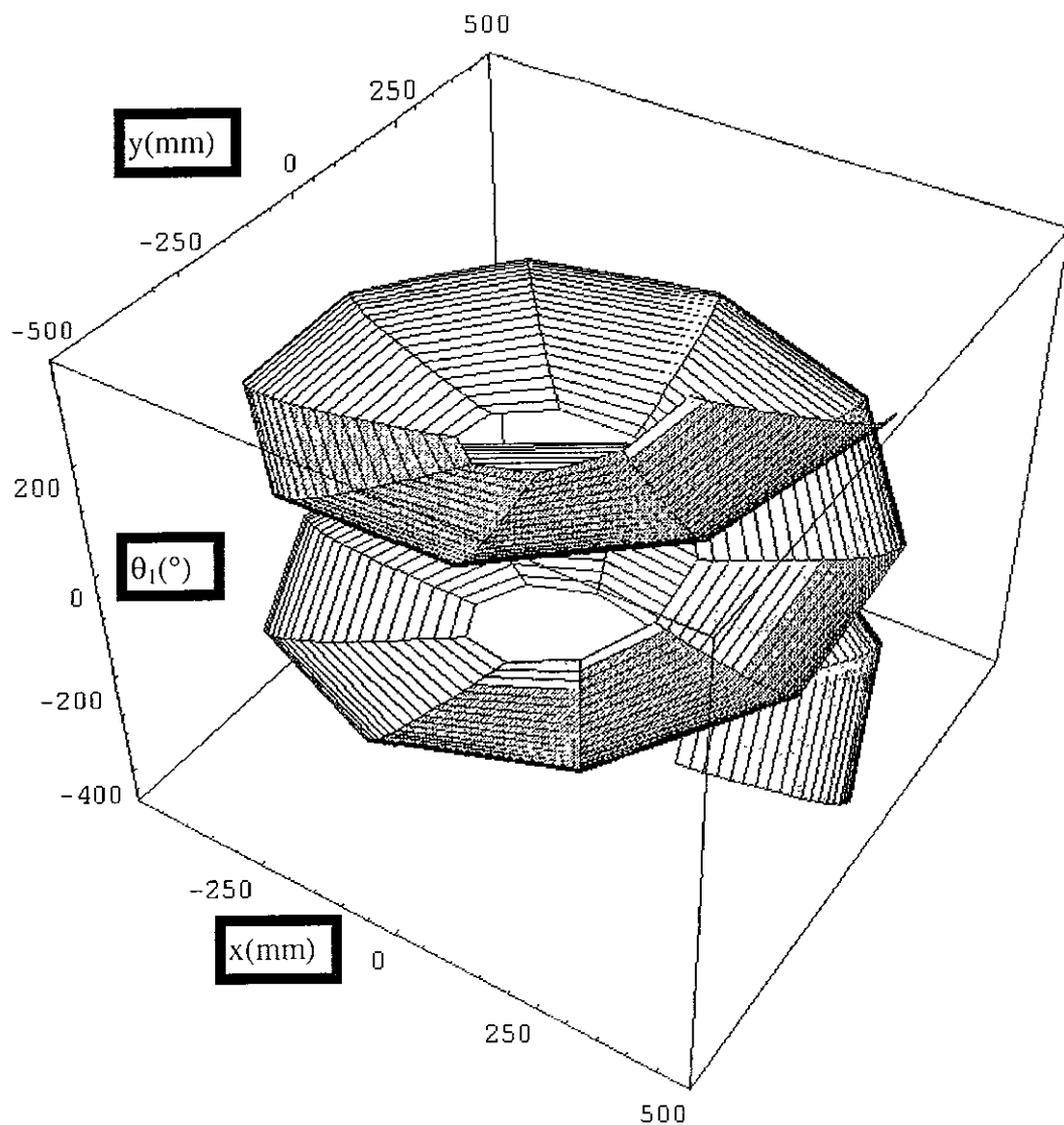


Figura 4.1.1 Muestra al conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$ , es decir, contiene a los elementos que cumplen con la segunda solución para la variable  $\theta_1$  cubriendo el rango  $[-360^\circ, 360^\circ]$ .

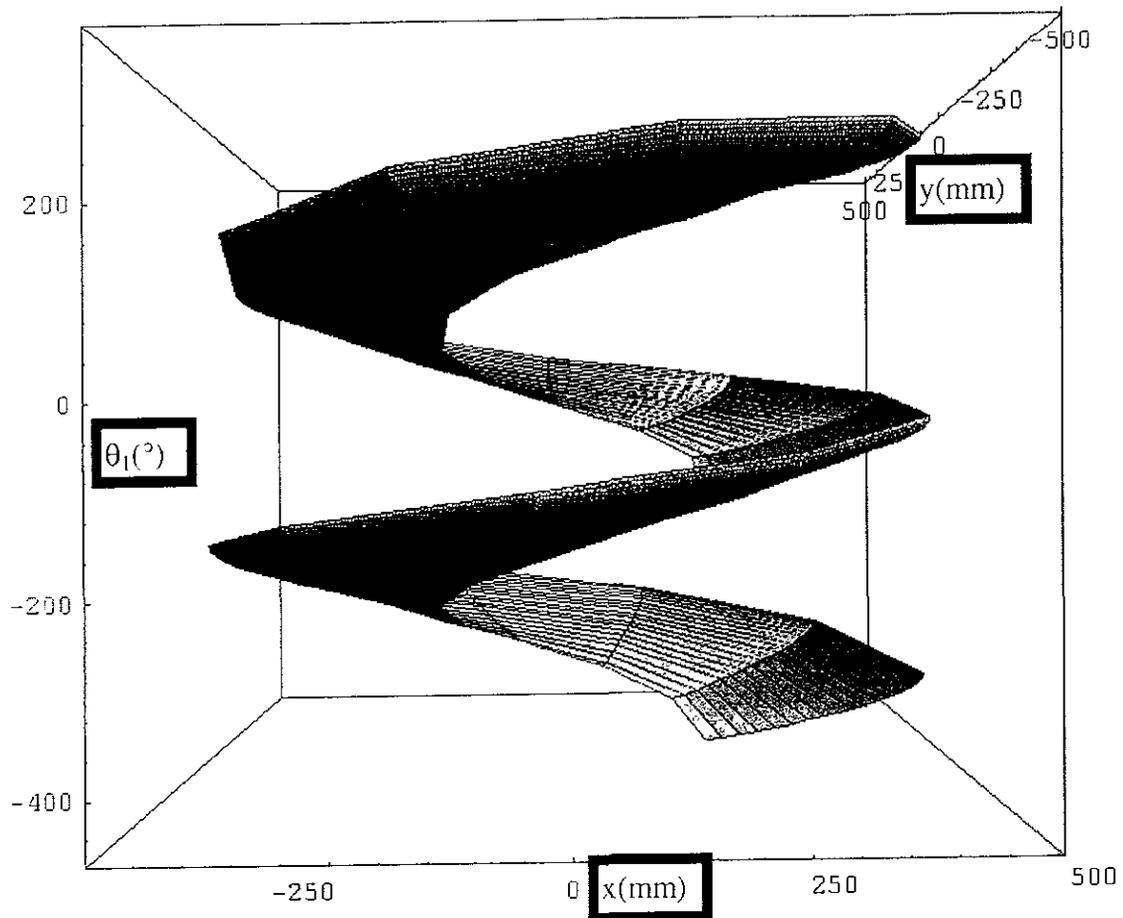


Figura 4.1.2 Muestra la vista lateral del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  cubriendo el rango  $[-360^{\circ}, 360^{\circ}]$ .

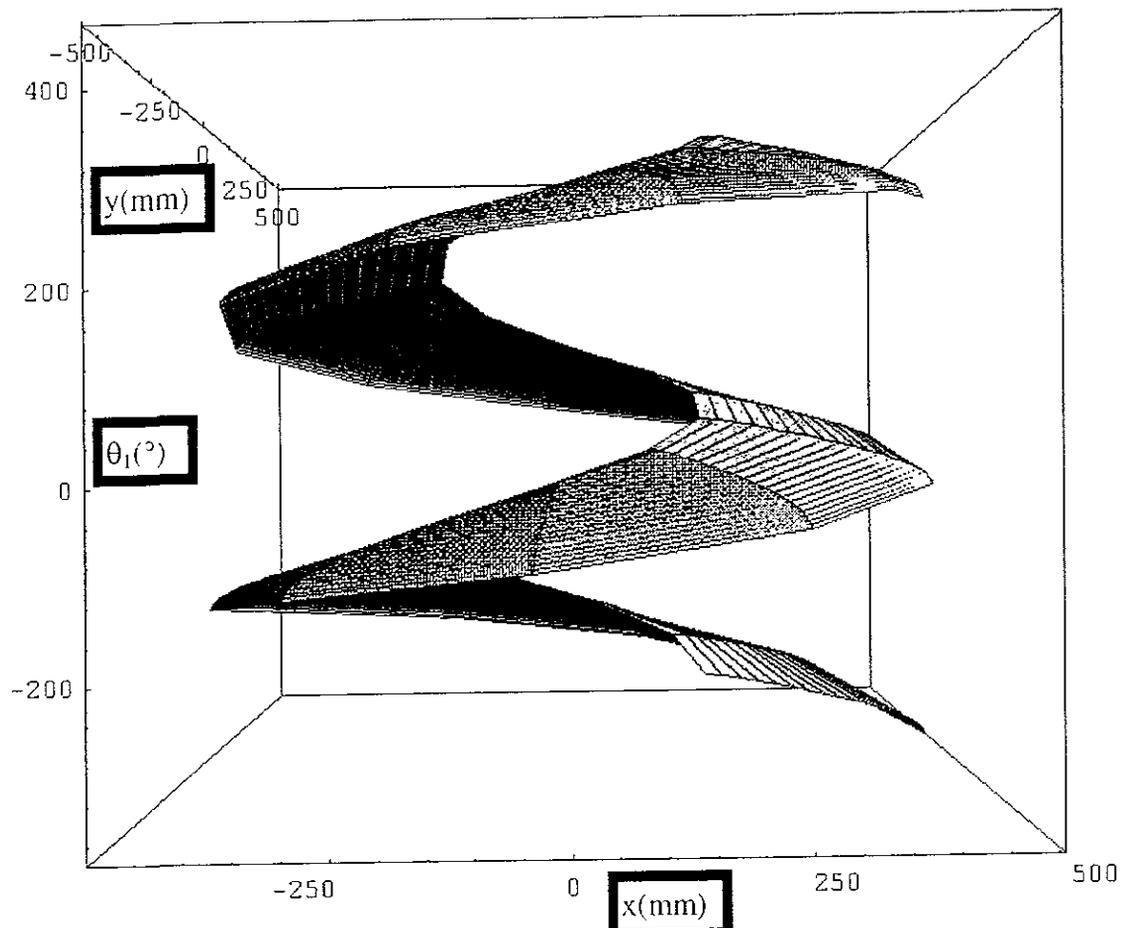


Figura 4.1.3 Vista lateral del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{R_0}$ , es decir, la primera solución para la variable  $\theta_1$ . Este conjunto reúne a todos los elementos que cumplen con la primera solución.

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

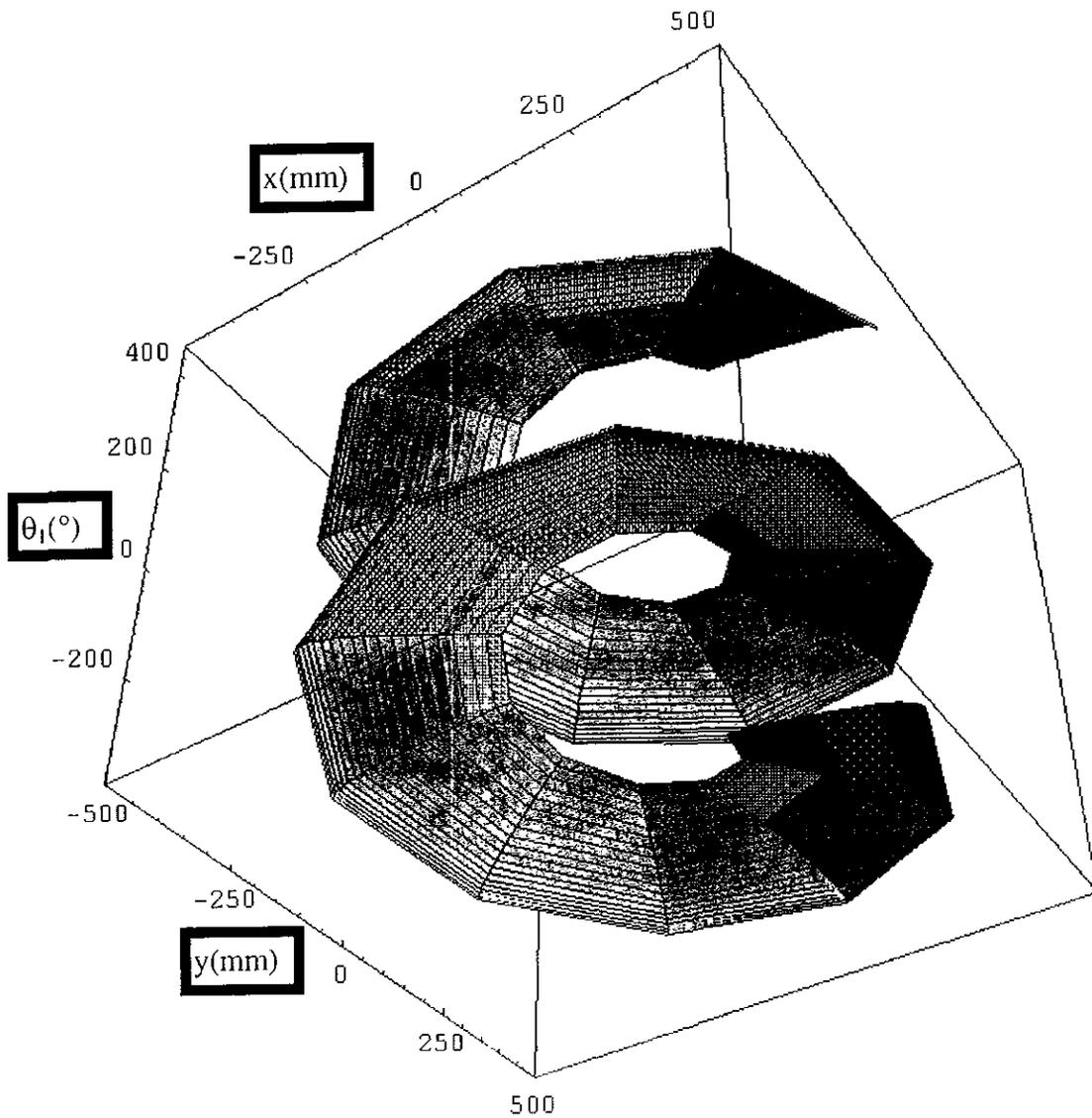


Figura 4.1.4 Es el mismo conjunto de la figura anterior en una vista inferior, se puede ver cierta simetría con el conjunto anterior.

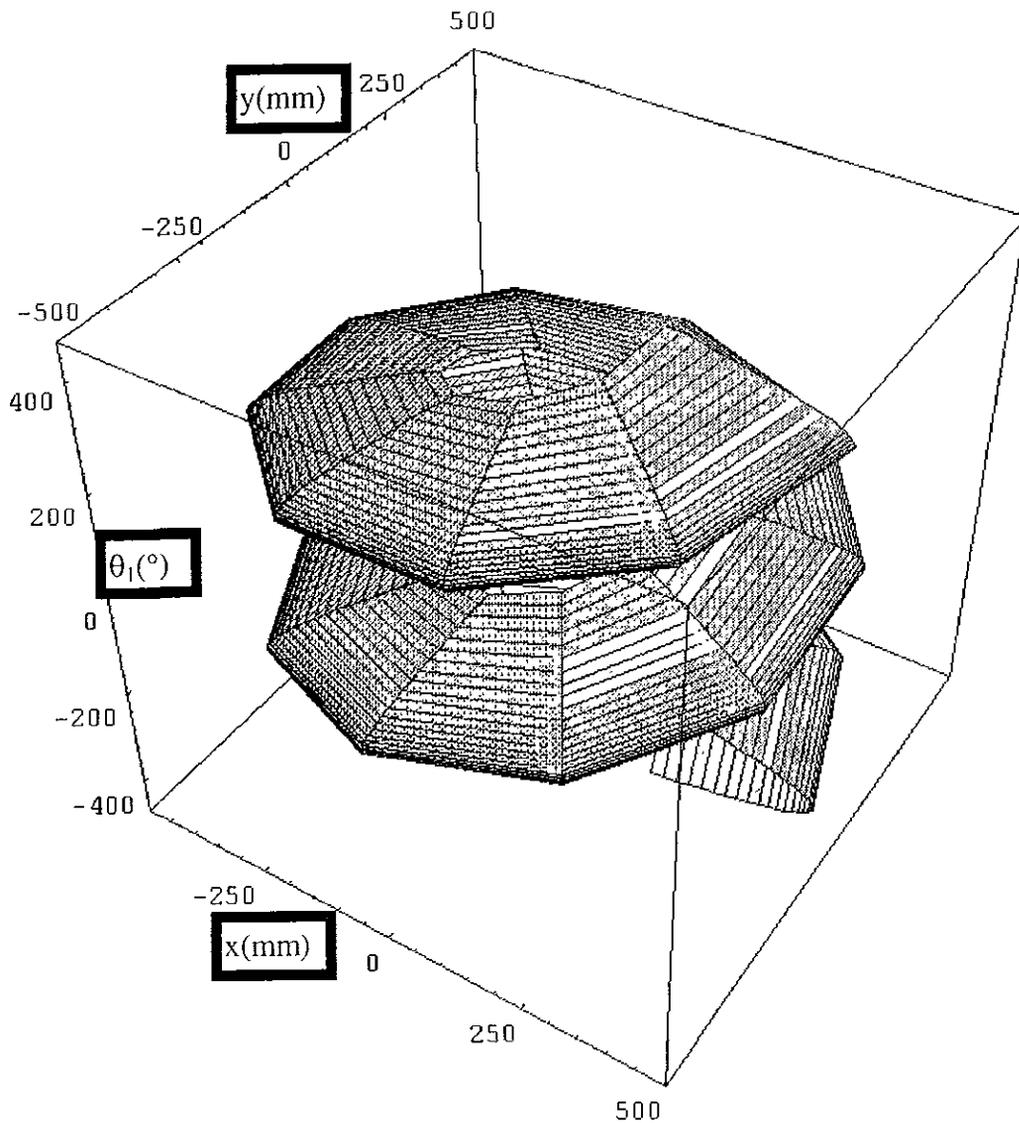


Figura 4.1.5 Muestra al conjunto  ${}_i \Lambda_{\theta_1}^{RG}$ , es decir, las dos soluciones para alcanzar todos los puntos operacionales.

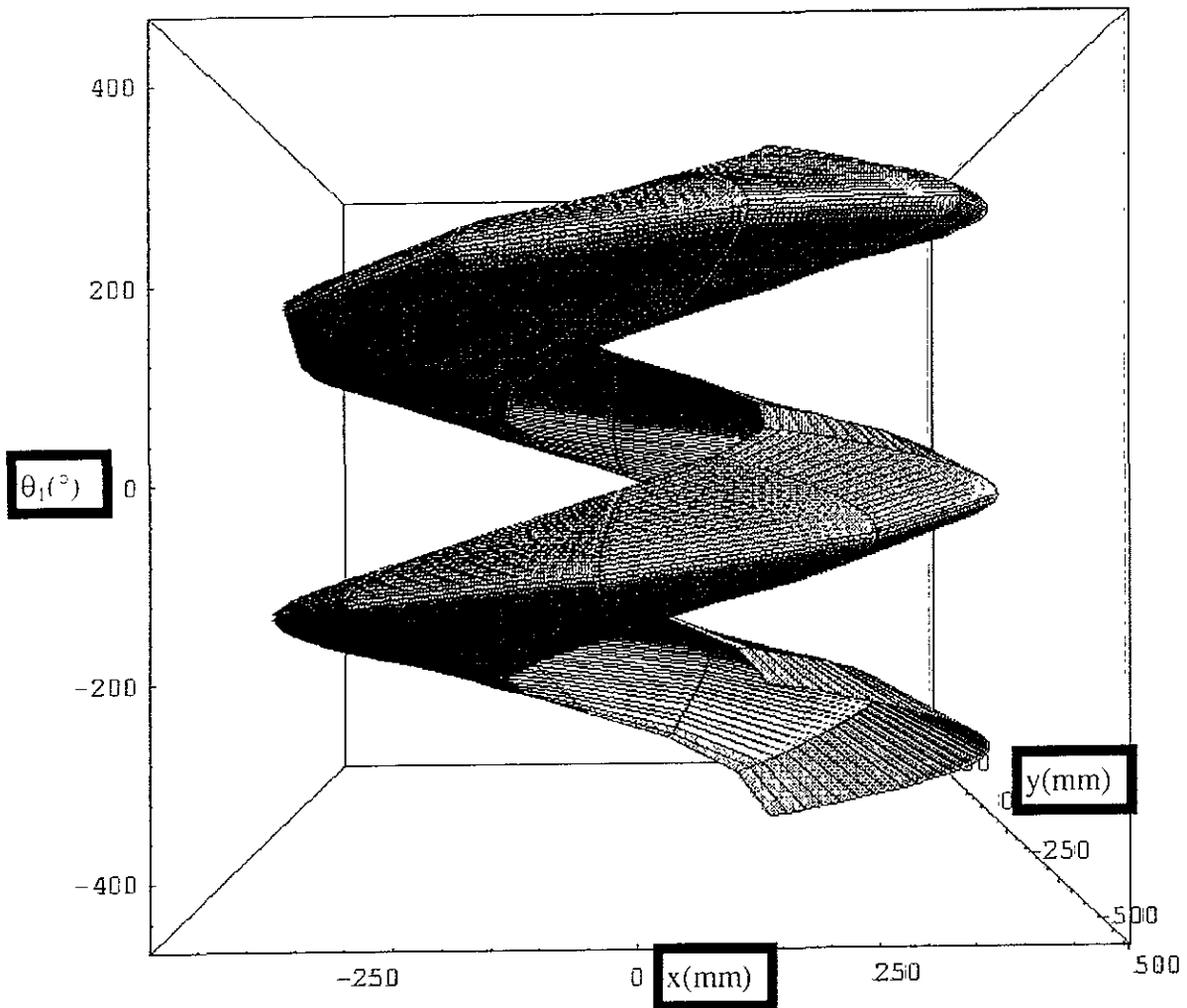


Figura 4.1.6 Vista lateral de  ${}_i\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  que es la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$ . Se observa como la intersección de estos conjuntos se encuentra en los extremos del volumen de trabajo.

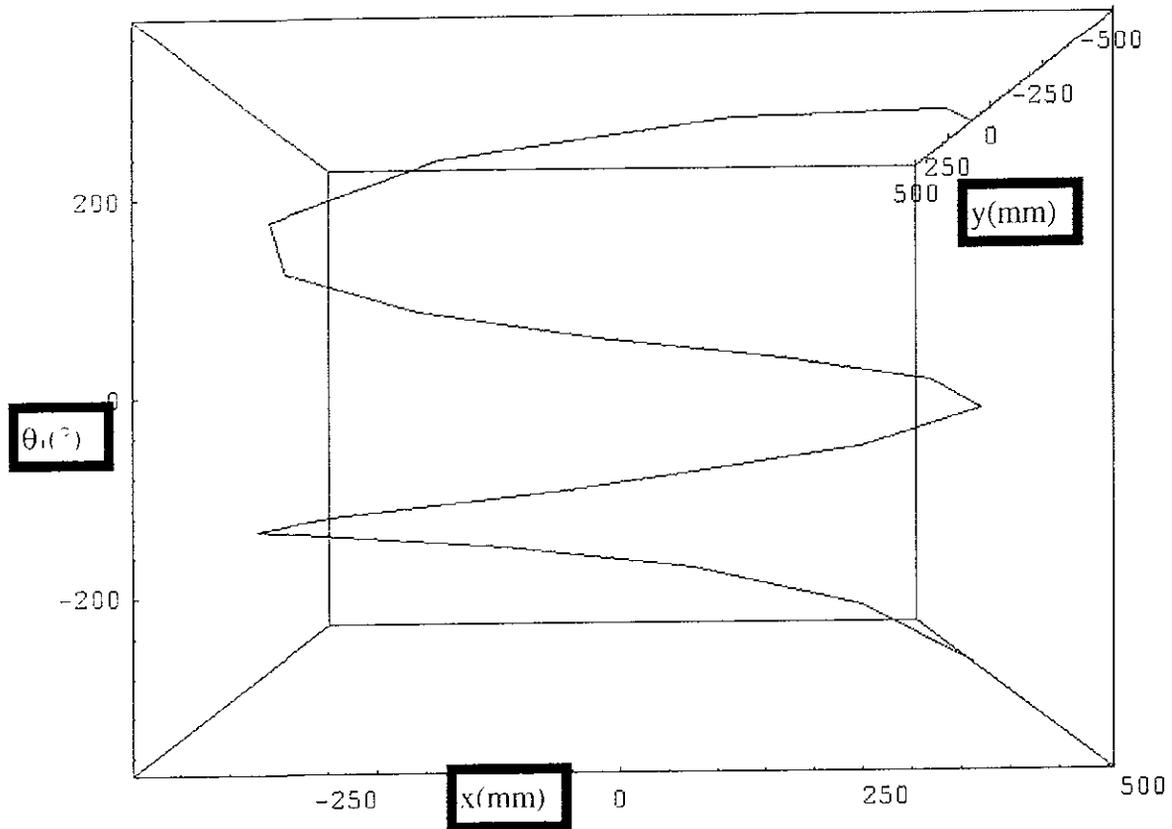


Figura 4.1.7 Muestra la intersección de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta 1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta 1}^{RG}$  que se localiza únicamente en los extremos del volumen de trabajo.

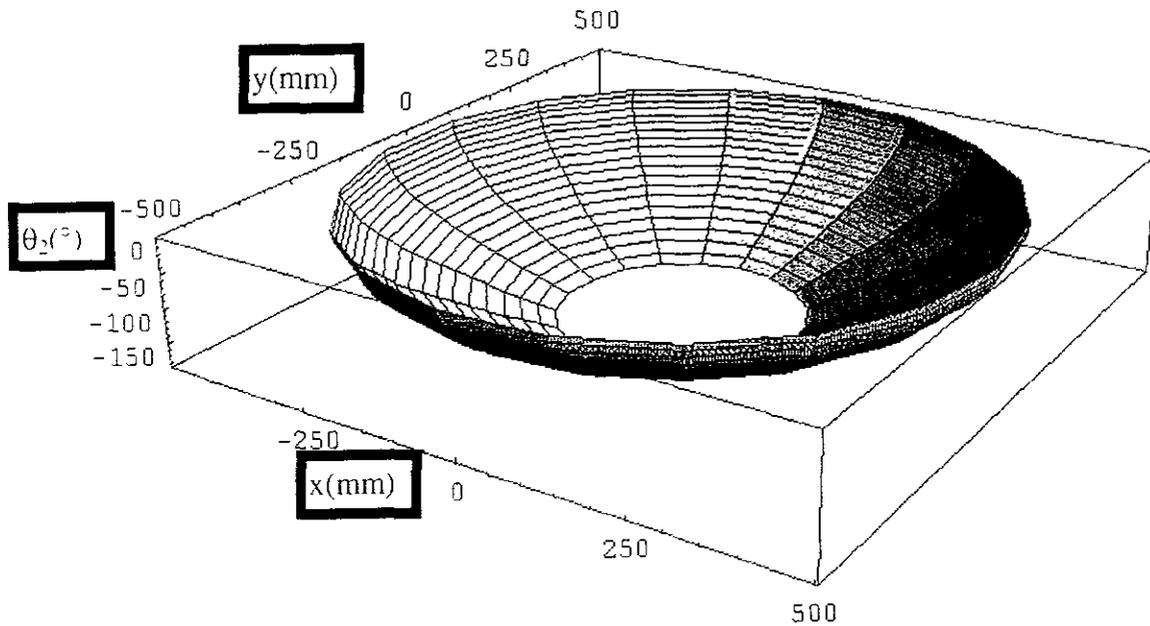


Figura 4.1.8 Muestra al conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ , es la variación de la variable  $\theta_2$  para cualquier movimiento negativo (en sentido horario), es decir, representa la primera solución para esta variable.

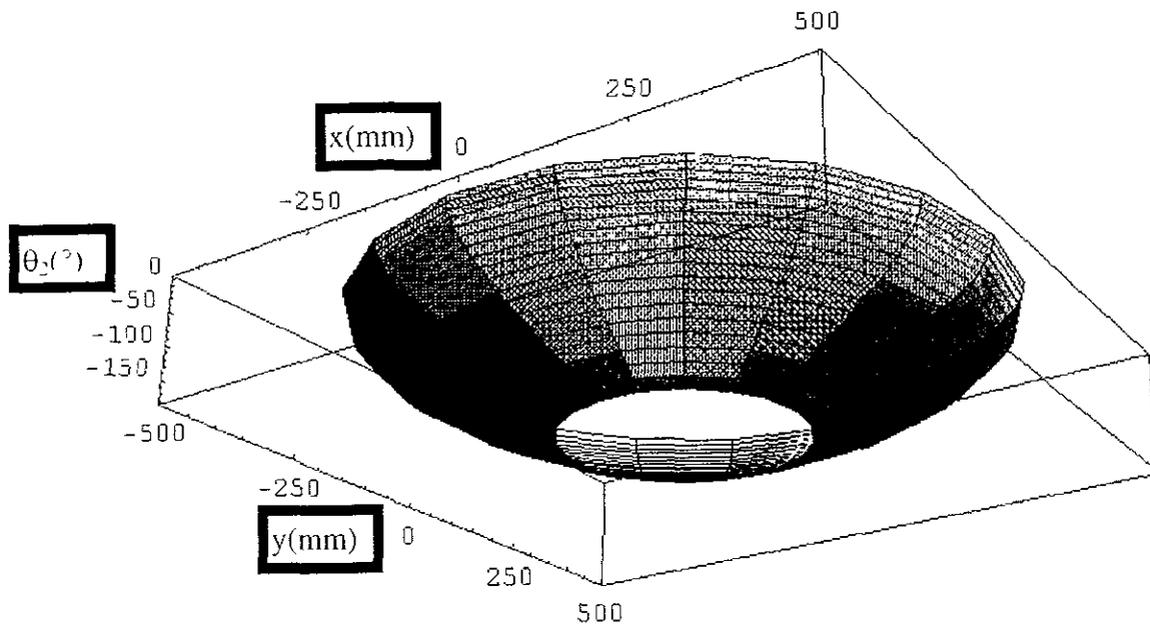


Figura 4.1.9 Es la vista inferior de la variable  $\theta_2$  para la primera solución, en la cual se puede observar como los valores máximos se presentan en los extremos y en la parte inferior presenta un centro que tiene como radio 180 mm que es la medida del órgano terminal.

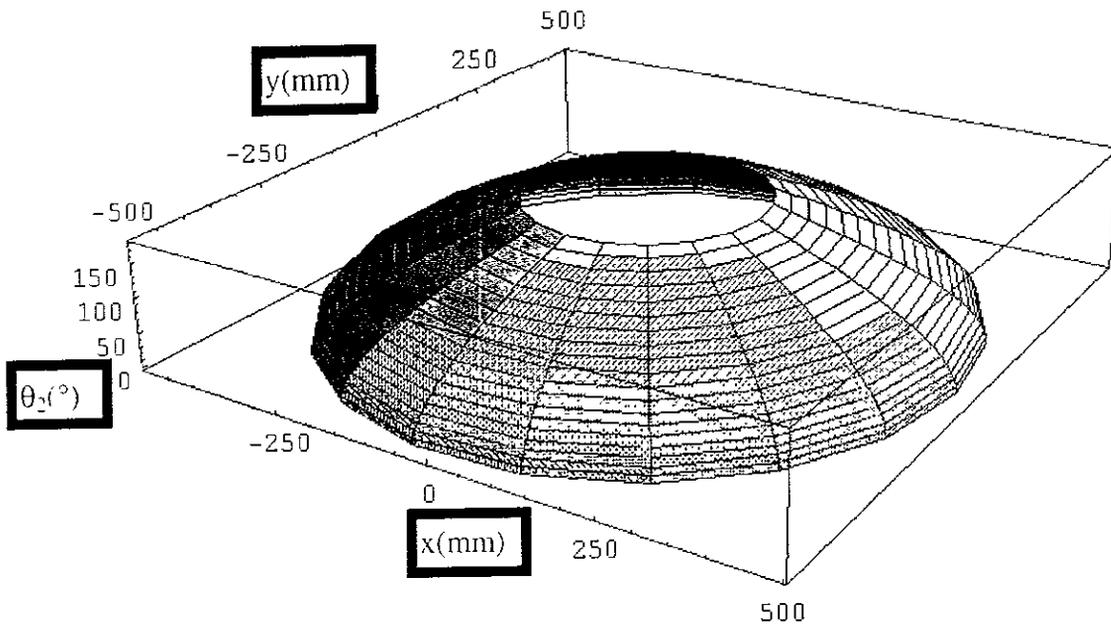


Figura 4.1.10 Representa la vista superior de la variable  $\theta_2$  en su segunda solución, para todos los movimientos positivos. En esta figura se observa como el valor máximo se encuentra en la parte superior y en el centro y en los extremos se presenta el valor mínimo que es  $0^\circ$ .

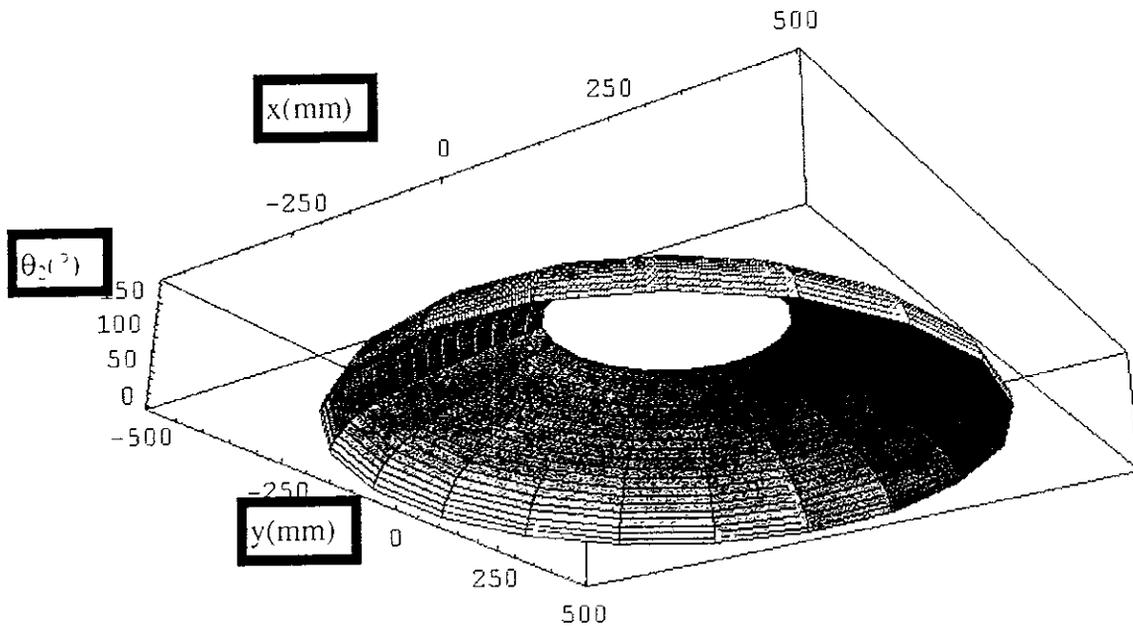


Figura 4.1.11 En donde se presenta la vista inferior del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  que son los movimientos positivos para la variable  $\theta_2$ .

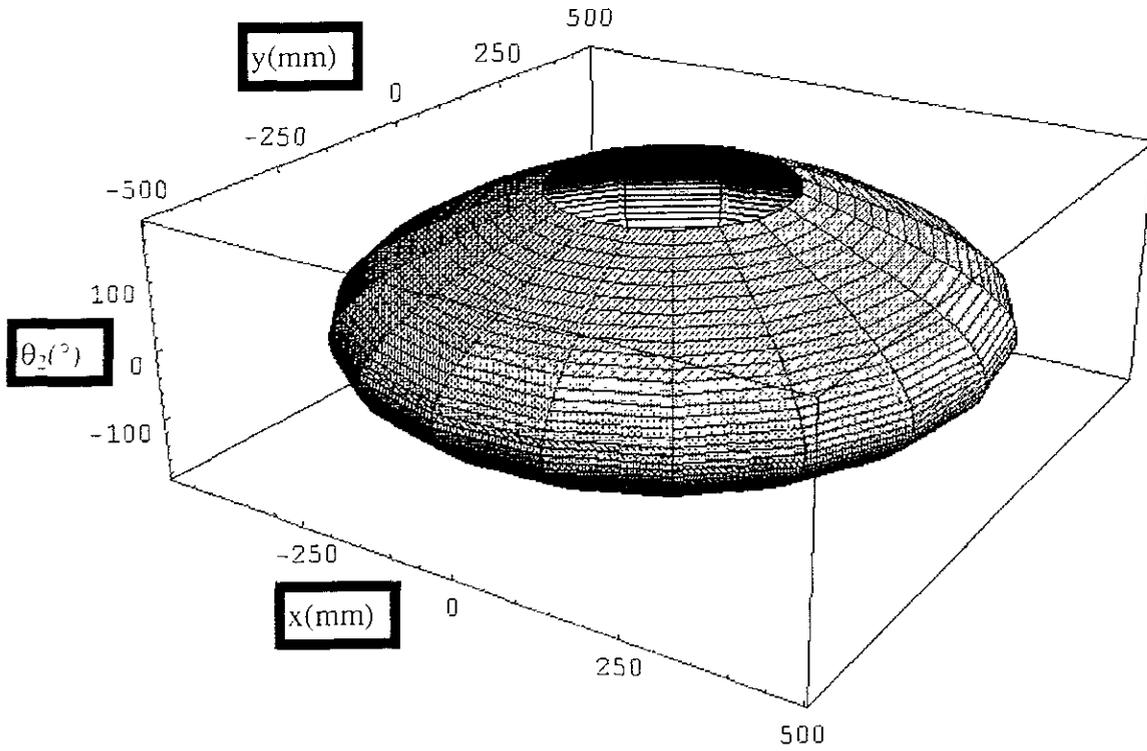


Figura 4.1.12 Es la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  en donde se puede observar que la intersección de estos dos conjuntos se encuentra en los extremos.

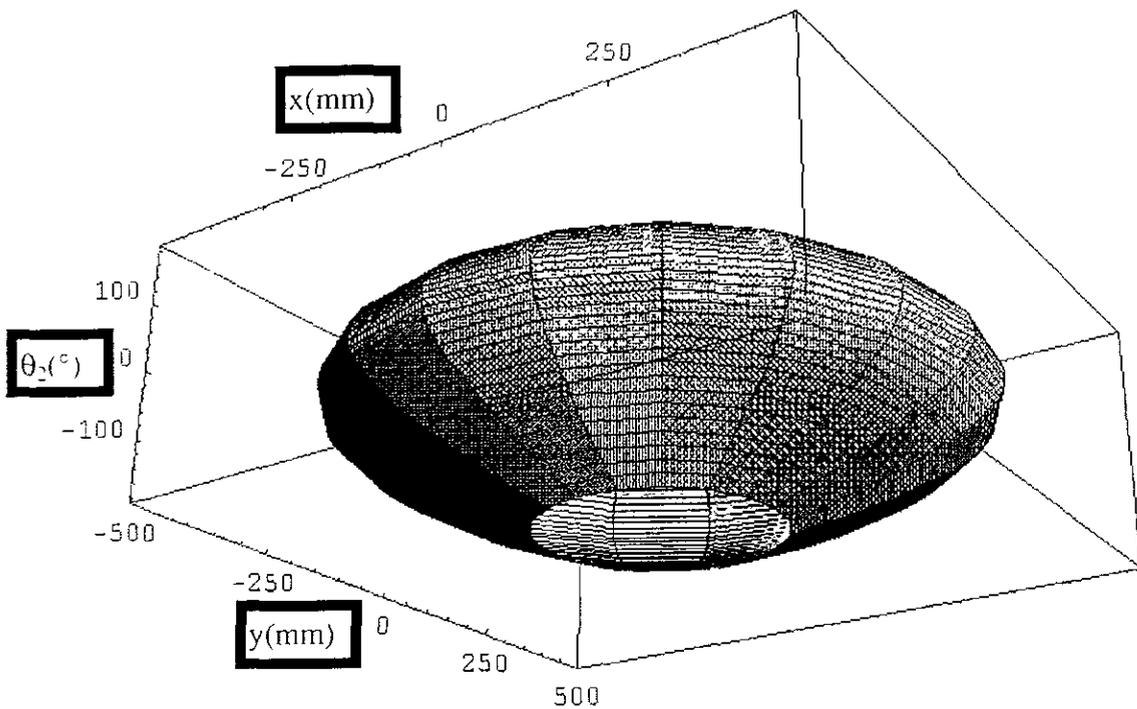


Figura 4.1.12 Es la vista inferior de la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ .

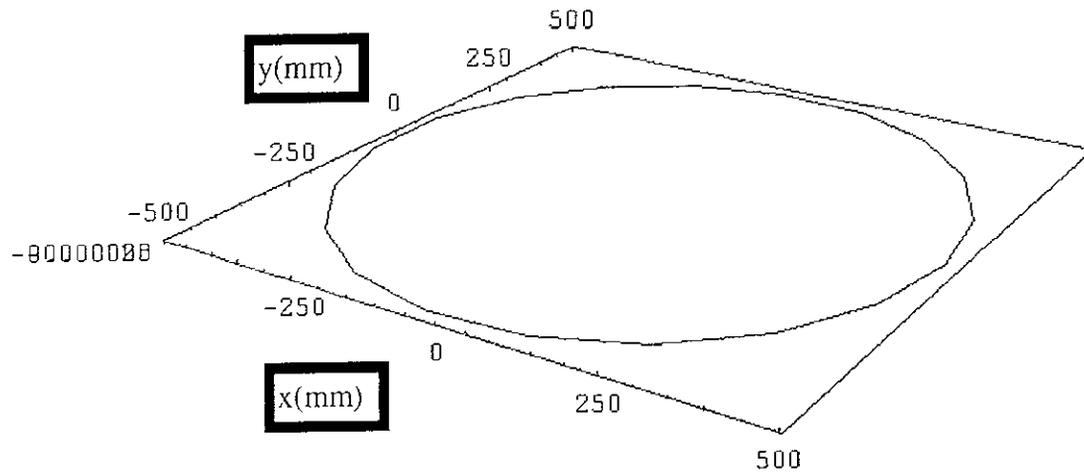


Figura 4.1.13 Es la intersección de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  que se presenta en los extremos del volumen de trabajo.

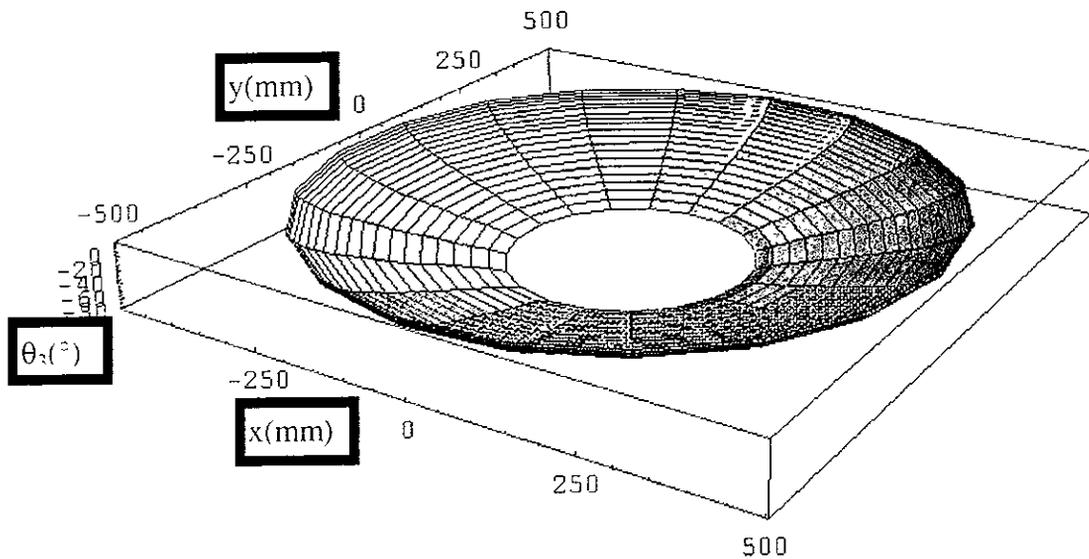


Figura 4.1.14 Es el conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  que contiene todas las configuraciones de la variable  $\theta_3$  para la primera solución, es decir, para las orientaciones negativas (en sentido horario).

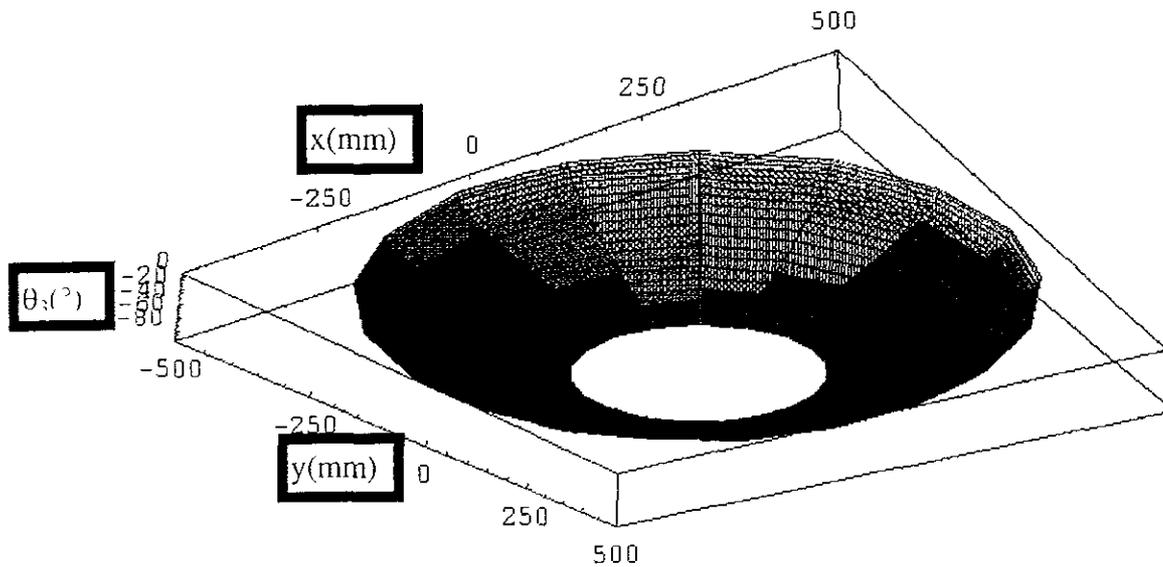


Figura 4.1.15 Es la vista inferior del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  que tiene los valores máximos en los extremos y los mínimos en el centro que tiene un radio de 180mm que es la longitud del órgano terminal.

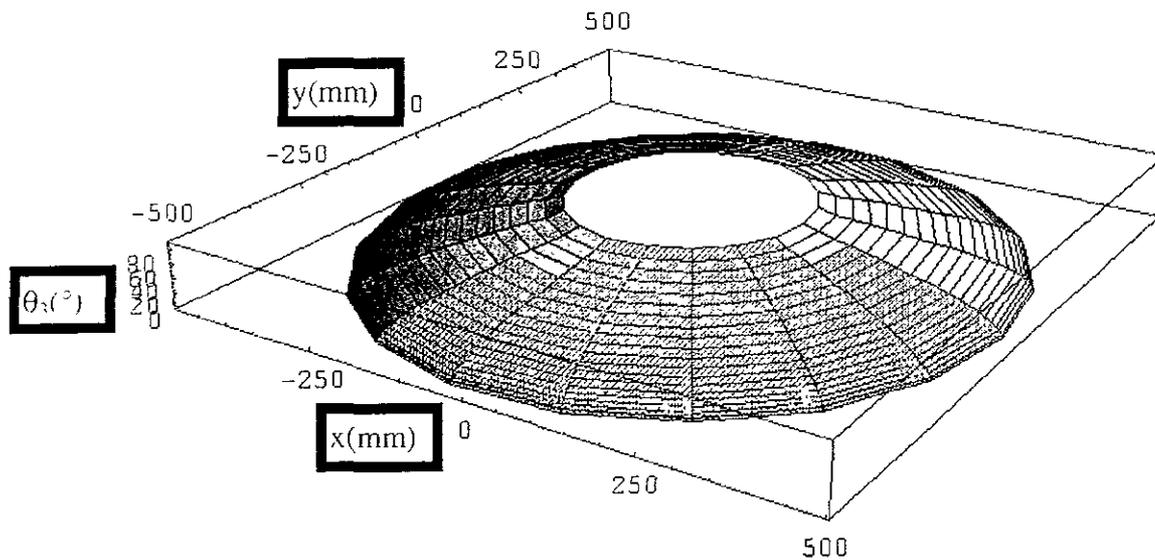


Figura 4.1.16 Es la vista superior del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  que son todas las configuraciones posibles para la variable  $\theta_3$  en la primera solución.

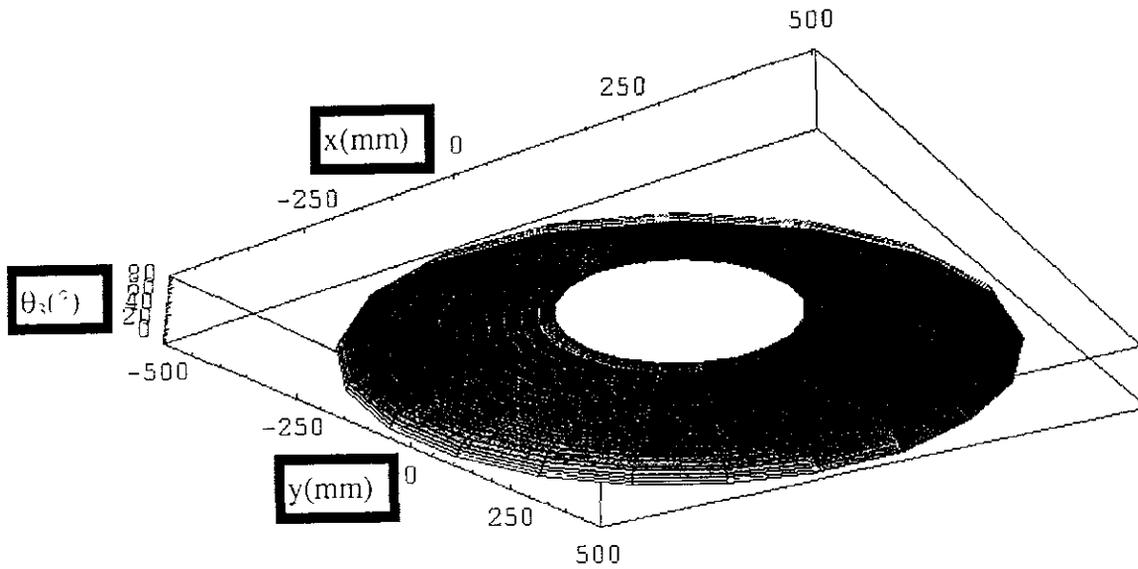


Figura 4.1.17 Vista inferior del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ , se observa como los valores mínimos se localizan en los extremos y los máximos en el centro que tiene un radio de 180mm que es la longitud del órgano terminal.

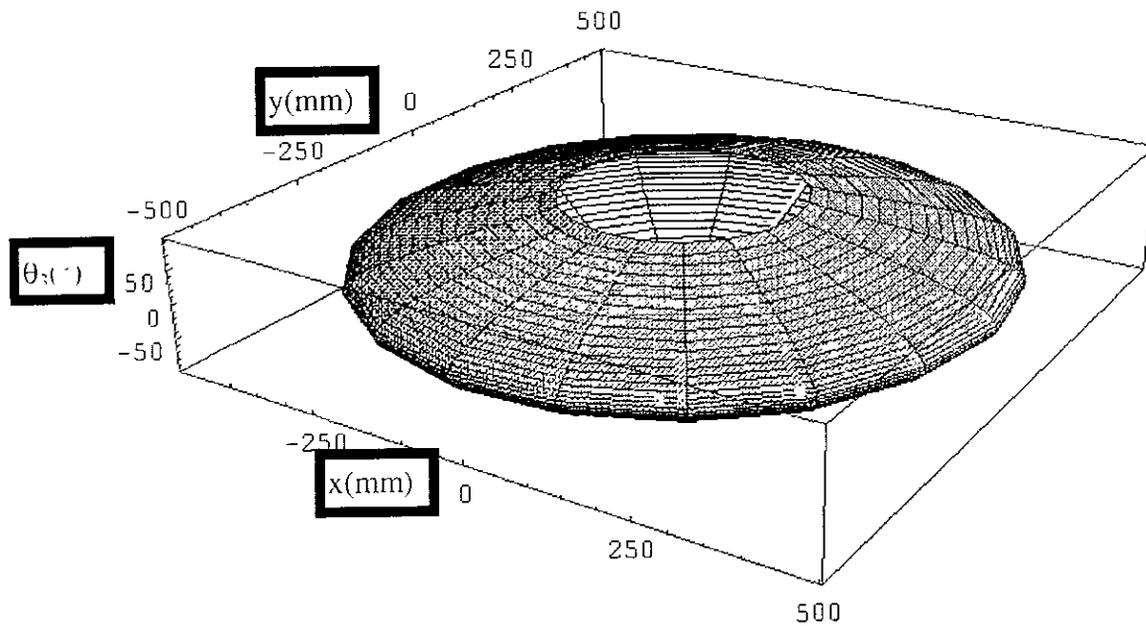


Figura 4.1.18 Representa la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ . En esta gráfica se puede observar como en los extremos existe la intersección de estos dos conjuntos.

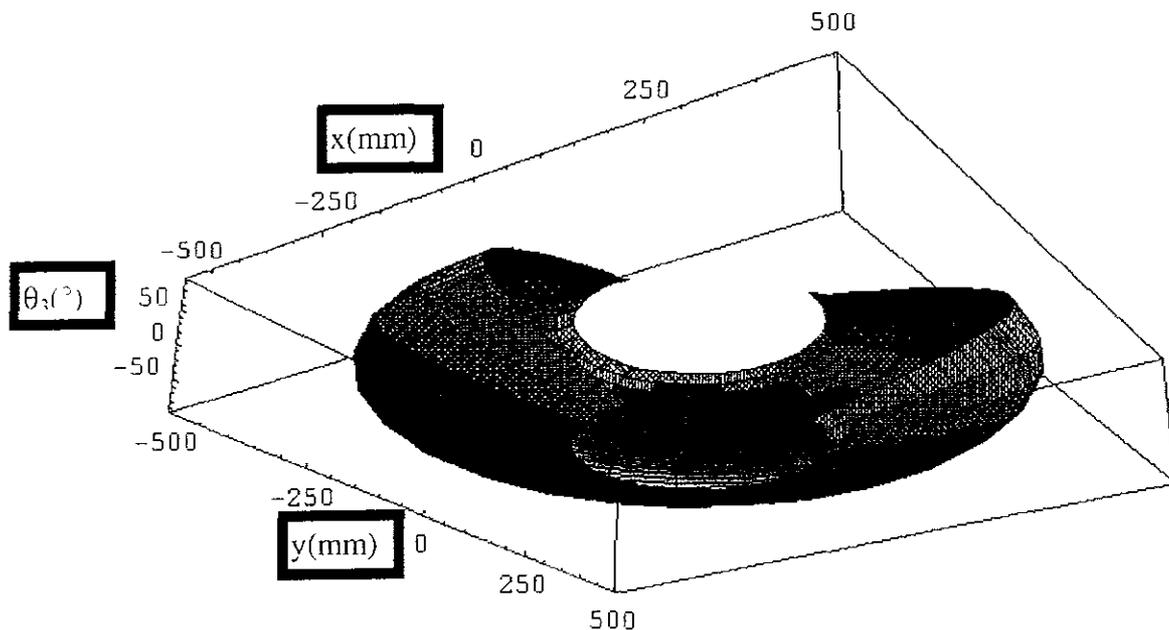


Figura 4.1.19 Es la vista inferior con corte del cuarto cuadrante del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  que representa la región universal de solución para la variable  $\theta_3$ .

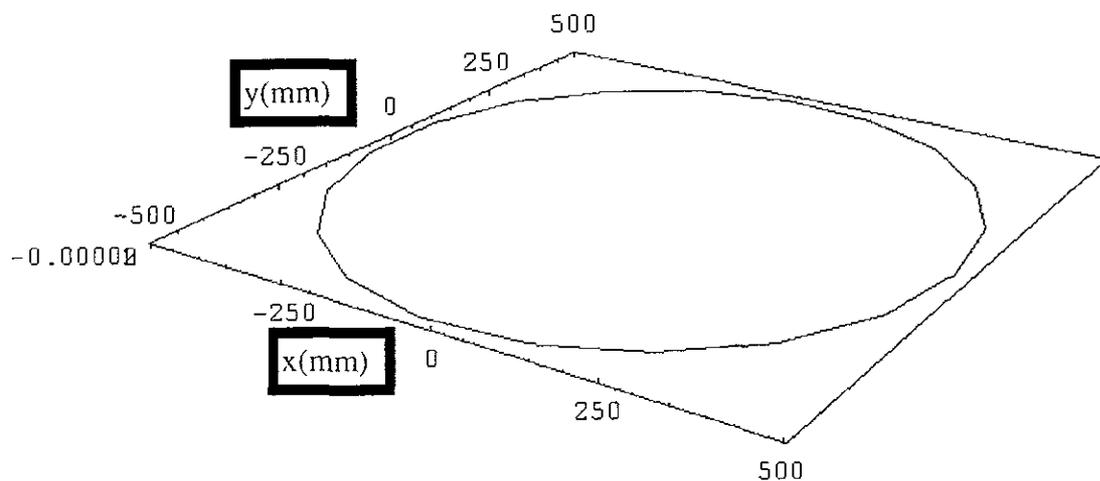


Figura 4.1.20 Es la intersección de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  que como se observa solo se localiza en los extremos.

## 4.2 CONJUNTOS DE SOLUCIÓN DE LA VELOCIDAD.

El “espacio articular de velocidad” se define como el conjunto de elementos como el elemento  $j$ -ésimo (ecuación 4.2.2) que contiene cuatro escalares que representan la magnitud de velocidad de cada uno de los elementos articulares.

$$\dot{\Theta}^{RG} = \{\dot{\Theta}_j^+\}_{j=1,\dots,\infty} \quad (4.2.1)$$

$$\dot{\Theta}_j^+ = \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}_j \quad (4.2.2)$$

El conjunto de solución de velocidad será un subconjunto del espacio articular (ecuación 4.2.3):

$$\zeta^{RG} \subseteq \dot{\Theta}^{RG} \quad (4.2.3)$$

Existe otro subconjunto del espacio articular de velocidad (ecuación 4.2.4) en el cual están contenidas configuraciones de los cuatro elementos escalares no útiles para el manipulador. La intersección de este subconjunto y el conjunto de solución de velocidad formarán un conjunto vacío (ecuación 4.2.6).

$$\xi^{RG} \subseteq \dot{\Theta}^{RG} \quad (4.2.4)$$

$$\xi^{RG} = \left\{ \xi_j^+ \in \dot{\Theta}^{RG} \mid \xi_j^+ \notin \zeta^{RG} \right\} \quad (4.2.5)$$

$$\zeta^{RG} \cap \xi^{RG} = \emptyset \quad (4.2.6)$$

Para que un elemento pertenezca al conjunto de solución de velocidad tiene que cumplir además con una transformación lineal que es el inverso de la matriz del jacobiano. La matriz del jacobiano como ya se mencionó anteriormente es una transformación lineal temporal que relaciona al espacio articular y el espacio operacional. La matriz del jacobiano está en función de tres variables articulares que son  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , y a este conjunto se le llamará H.

$$\zeta = \left\{ {}_i\zeta^+ \in \dot{\Theta}^{RG} \mid {}_i\zeta^+ = J^{-1}({}_iH^+) \dot{X} \right\} \quad (4.2.7)$$

En donde:

$${}_i\zeta^+ = \left[ [{}_i\dot{d}_1 \quad {}_i\dot{\theta}_1 \quad {}_i\dot{\theta}_2 \quad {}_i\dot{\theta}_3]^T \mid \left\{ [{}_i\dot{d}_1 \quad {}_i\dot{\theta}_1 \quad {}_i\dot{\theta}_2 \quad {}_i\dot{\theta}_3]^T = J^{-1}({}_i\theta_1, \theta_2, {}_i\theta_3) \dot{X} \right\} \right] \quad (4.2.8)$$

Y para cada solución:

$${}_1\zeta^+ = \left[ [{}_1\dot{d}_1 \quad {}_1\dot{\theta}_1 \quad {}_1\dot{\theta}_2 \quad {}_1\dot{\theta}_3]^T \mid \left\{ [{}_1\dot{d}_1 \quad {}_1\dot{\theta}_1 \quad {}_1\dot{\theta}_2 \quad {}_1\dot{\theta}_3]^T = J^{-1}({}_1\theta_1, \theta_2, {}_1\theta_3) \dot{X} \right\} \right] \quad (4.2.9)$$

$${}_2\zeta^+ = \left[ [{}_2\dot{d}_1 \quad {}_2\dot{\theta}_1 \quad {}_2\dot{\theta}_2 \quad {}_2\dot{\theta}_3]^T \mid \left\{ [{}_2\dot{d}_1 \quad {}_2\dot{\theta}_1 \quad {}_2\dot{\theta}_2 \quad {}_2\dot{\theta}_3]^T = J^{-1}({}_2\theta_1, {}_2\theta_2, \theta_3) \dot{X} \right\} \right] \quad (4.2.10)$$

Las dos soluciones forman dos subconjuntos del conjunto  ${}_{U\zeta}^{RG}$  (ecuaciones 4.2.11 y 4.2.12):

$${}_1\zeta^{RG} = \left\{ {}_1\zeta_j^+ \in \dot{\Theta}^{RG} \mid {}_1\zeta_j^+ = J^{-1}({}_1H_j^+) \dot{X} \right\}_{j=0, \dots, \infty} \quad (4.2.11)$$

$${}_2\zeta^{RG} = \left\{ {}_2\zeta_k^+ \in \dot{\Theta}^{RG} \mid {}_2\zeta_k^+ = J^{-1}({}_2H_k^+) \dot{X} \right\}_{k=0, \dots, \infty} \quad (4.2.12)$$

Además, la unión de estos dos subconjuntos forman al conjunto universal donde se tendrán todas las posibles configuraciones como se muestra a continuación (ecuaciones 4.2.13-4.2.15)

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = {}_1\mathcal{S}^{RG} \cup {}_2\mathcal{S}^{RG} \quad (4.2.13)$$

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}_1\mathcal{S}_j^+ \mid {}_1\mathcal{S}_j^+ = J^{-1}({}_1H_j^+) \dot{X}, \\ {}_2\mathcal{S}_k^+ \mid {}_2\mathcal{S}_k^+ = J^{-1}({}_2H_k^+) \dot{X} \end{array} \right\}_{j=0,\dots,\infty \quad k=0,\dots,\infty} \quad (4.2.14)$$

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \{ {}_1\mathcal{S}_j^+, {}_2\mathcal{S}_k^+ \}_{j=0,\dots,\infty \quad k=0,\dots,\infty} \quad (4.2.15)$$

De esta manera:

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}_1\mathcal{S}_1^+ \mid {}_1\mathcal{S}_1^+ = J^{-1}({}_1H_1^+) \dot{X}, {}_1\mathcal{S}_2^+ \mid {}_1\mathcal{S}_2^+ = J^{-1}({}_1H_2^+) \dot{X}, \dots, \\ {}_2\mathcal{S}_1^+ \mid {}_2\mathcal{S}_1^+ = J^{-1}({}_2H_1^+) \dot{X}, {}_2\mathcal{S}_2^+ \mid {}_2\mathcal{S}_2^+ = J^{-1}({}_2H_2^+) \dot{X}, \dots, \end{array} \right\} \quad (4.2.16)$$

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \{ {}_1\mathcal{S}_1^+, {}_1\mathcal{S}_2^+, \dots, {}_2\mathcal{S}_1^+, {}_2\mathcal{S}_2^+, \dots \} \quad (4.2.17)$$

Y si se agrupan según el estado operacional:

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} \{ {}_1\mathcal{S}_1^+, {}_2\mathcal{S}_1^+ \mid {}_1\mathcal{S}_1^+ = J^{-1}({}_1H_1^+) \dot{X} = J^{-1}({}_2H_1^+) \dot{X} \}, \\ \{ {}_1\mathcal{S}_2^+, {}_2\mathcal{S}_2^+ \mid {}_1\mathcal{S}_2^+ = J^{-1}({}_1H_2^+) \dot{X} = J^{-1}({}_2H_2^+) \dot{X} \}, \dots, \end{array} \right\} \quad (4.2.18)$$

$${}^U\mathcal{S}^{RG} = \{ \{ {}_1\mathcal{S}_1^+, {}_2\mathcal{S}_1^+ \}, \{ {}_1\mathcal{S}_2^+, {}_2\mathcal{S}_2^+ \}, \dots \} \quad (4.2.19)$$

En cualquier configuración de velocidad los elementos escalares de un subconjunto tendrán que ser contrarios a los elementos del otro subconjunto (excepto  $\dot{d}_1$ ). Sin embargo la intersección de los subconjuntos  ${}_1\mathcal{S}^+$  y  ${}_2\mathcal{S}^+$  no forman un conjunto vacío (ecuación 4.2.20).

$${}_1\zeta^+ \cap {}_2\zeta^+ \neq \emptyset \quad (4.2.20)$$

El elemento j-ésimo de cualquiera de las dos soluciones contiene a los cuatro escalares (ecuación 4.2.21) que representan la velocidad de cada una de las articulaciones.

$${}_i\zeta_j^+ = \begin{pmatrix} \dot{d}_1 \\ {}_i\dot{\theta}_1 \\ {}_i\dot{\theta}_2 \\ {}_i\dot{\theta}_3 \end{pmatrix}_j; \forall i=1,2; \forall j=1,\dots,\infty \quad (4.2.21)$$

Si agrupamos a estos elementos escalares según su tipo en un conjunto quedaría el articular prismático y en otro los rotacionales:  ${}_i\Lambda_{d1}^{RG}$  que contiene todas las configuraciones de la primer variable articular para el espacio operacional ( $j=1,\dots,\infty$ ) y para las dos soluciones ( $i=1,2$ ) en cada punto y se le llamará “región geométrica escalar de velocidad de la primer variable articular”; y  ${}_i\Lambda_{\theta k}^{RG}$  donde  $\dot{\theta}_k$  engloba tres escalares ( $k=1,2,3$ ) para cualquier configuración en el espacio operacional ( $j=1,\dots,\infty$ ) en cualquiera de las dos soluciones ( $i=1,2$ ) y se le llamará “región geométrica escalar de velocidad de la variable k para la configuración i”. A continuación se muestran los dos conjuntos:

$${}_i\Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ \left( \dot{d}_1 \right)_j \right\}; \forall i=1,2; \forall j=1,\dots,\infty \quad (4.2.22)$$

$${}_i\Lambda_{\theta k}^{RG} = \left\{ \left( {}_i\dot{\theta}_k \right)_j \right\}; \forall i=1,2; \forall j=1,\dots,\infty; \forall k=1,2,3 \quad (4.2.23)$$

En la primera variable articular la solución 1 y 2 son iguales (ecuación 4.2.24):

$${}_i\Lambda_{d1}^{RG} = {}_2\Lambda_{d1}^{RG} = \Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ \left( \dot{d}_1 \right)_1, \left( \dot{d}_1 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.2.24)$$

La primera solución para el conjunto de “región geométrica escalar de velocidad de la variable k para la configuración i” (ecuaciones 4.2.25-4.2.27):

$${}_1\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG} = \left\{ ({}_i\dot{\theta}_1)_1, ({}_i\dot{\theta}_1)_2, \dots \right\} \quad (4.2.25)$$

$${}_1\Lambda_{\dot{\theta}_2}^{RG} = \left\{ ({}_i\dot{\theta}_2)_1, ({}_i\dot{\theta}_2)_2, \dots \right\} \quad (4.2.26)$$

$${}_1\Lambda_{\dot{\theta}_3}^{RG} = \left\{ ({}_i\dot{\theta}_3)_1, ({}_i\dot{\theta}_3)_2, \dots \right\} \quad (4.2.27)$$

Y para la solución 2:

$${}_2\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG} = \left\{ ({}_2\dot{\theta}_1)_1, ({}_2\dot{\theta}_1)_2, \dots \right\} \quad (4.2.28)$$

$${}_2\Lambda_{\dot{\theta}_2}^{RG} = \left\{ ({}_2\dot{\theta}_2)_1, ({}_2\dot{\theta}_2)_2, \dots \right\} \quad (4.2.29)$$

$${}_2\Lambda_{\dot{\theta}_3}^{RG} = \left\{ ({}_2\dot{\theta}_3)_1, ({}_2\dot{\theta}_3)_2, \dots \right\} \quad (4.2.30)$$

Y si las dos soluciones se juntan formarán “la región geométrica universal escalar de solución de velocidad de la variable k”(ecuación 4.2.31):

$${}_U\Lambda_{\dot{\theta}_k}^{RG} = {}_U\Lambda_{\dot{\theta}_k}^{RG} \cup {}_U\Lambda_{\dot{\theta}_k}^{RG}; \forall k = 1,2,3 \quad (4.2.31)$$

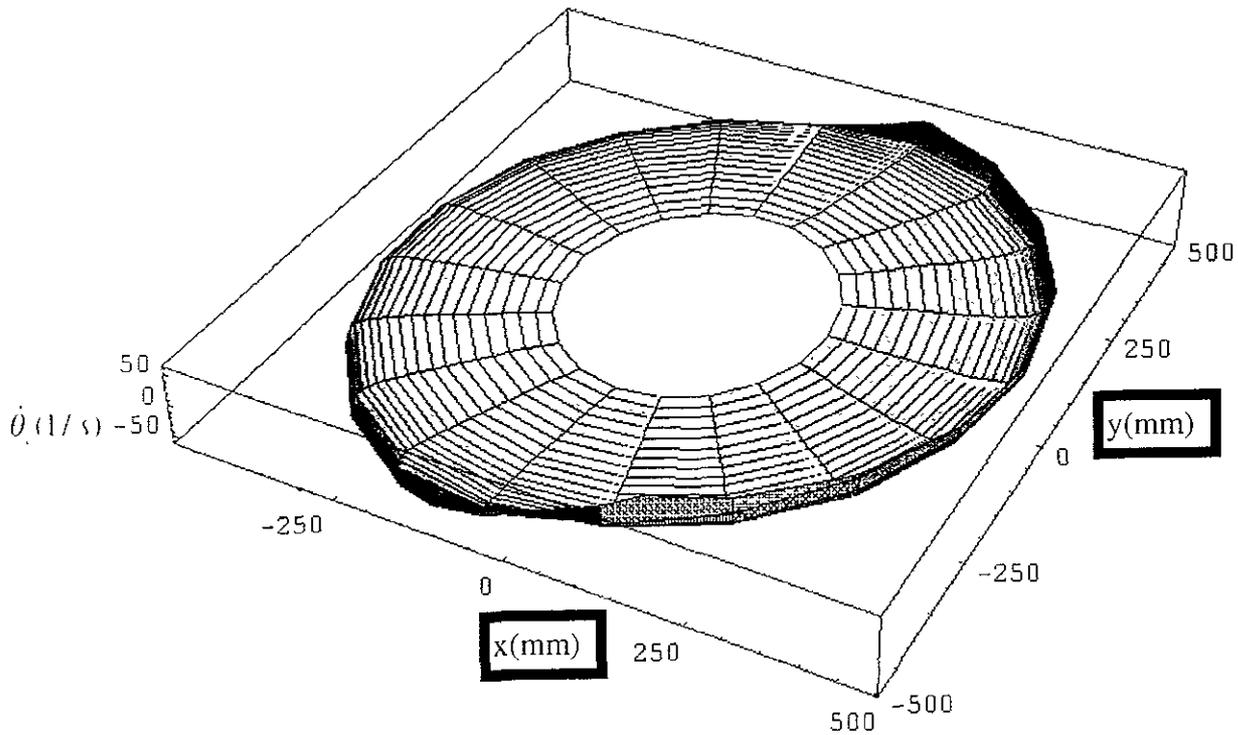


Figura 4.2.1 Es el conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  y representa todas las configuraciones de velocidad positiva (en sentido horario) para la variable  $\dot{\theta}_1$  para una velocidad de (3000,0) mm/s.

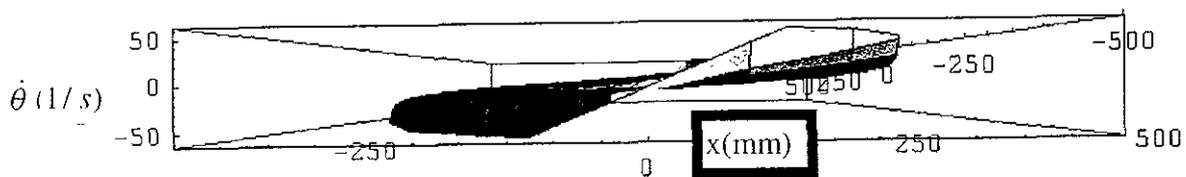


Figura 4.2.2 Es la vista lateral del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  para una velocidad del manipulador de (3000,0) mm/s. Se observa como en los extremos del volumen de trabajo la velocidad aumenta considerablemente.

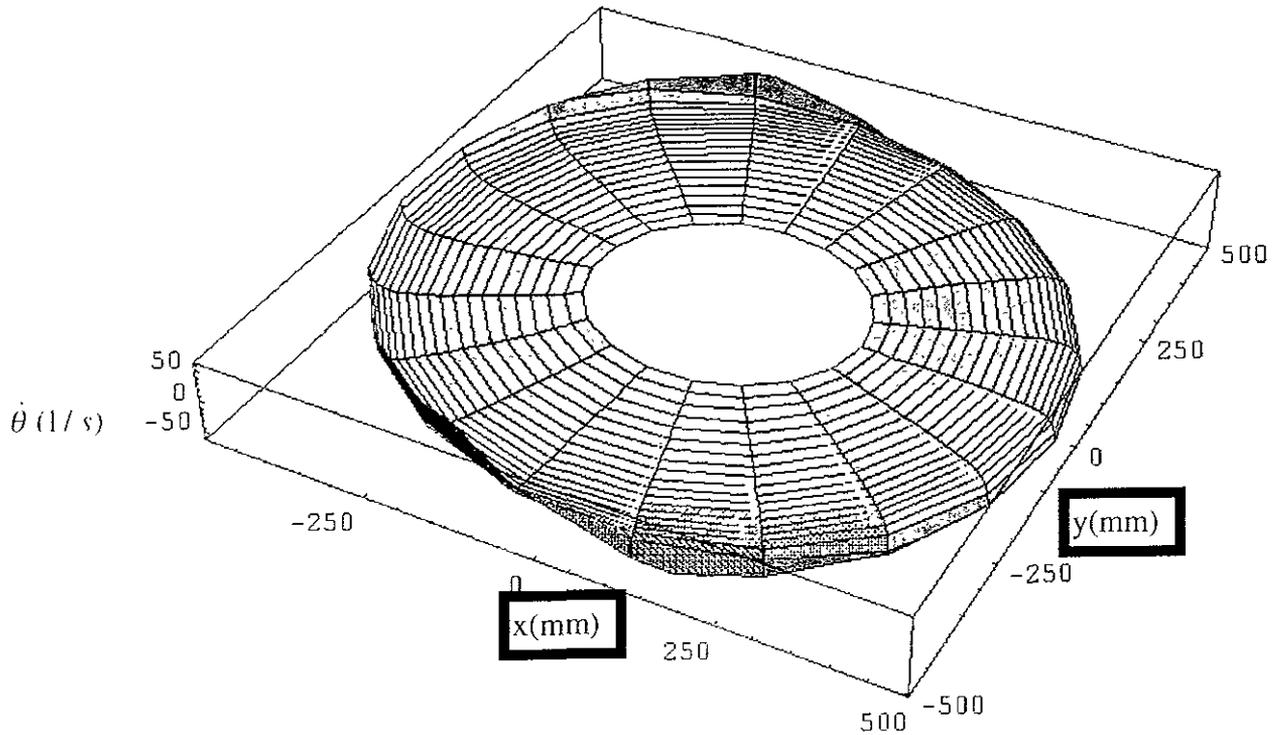


Figura 4.2.3 Es el conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  es decir, es la segunda solución de la segunda variable articular para la velocidad cuando el manipulador tiene una velocidad (3000,0) mm/s. Se nota como en los extremos del volumen de trabajo existe un gran aumento de la velocidad.

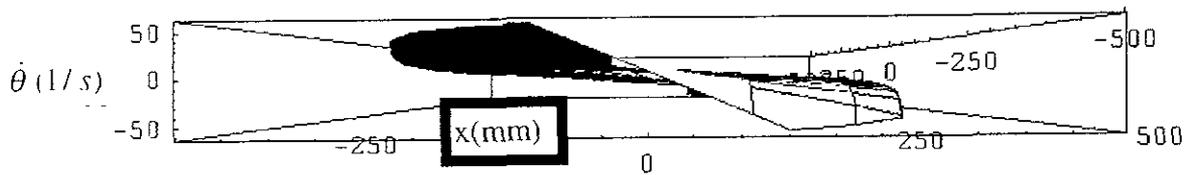


Figura 4.2.4 Vista lateral del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  con una velocidad de (3000,0) mm/s del órgano terminal.

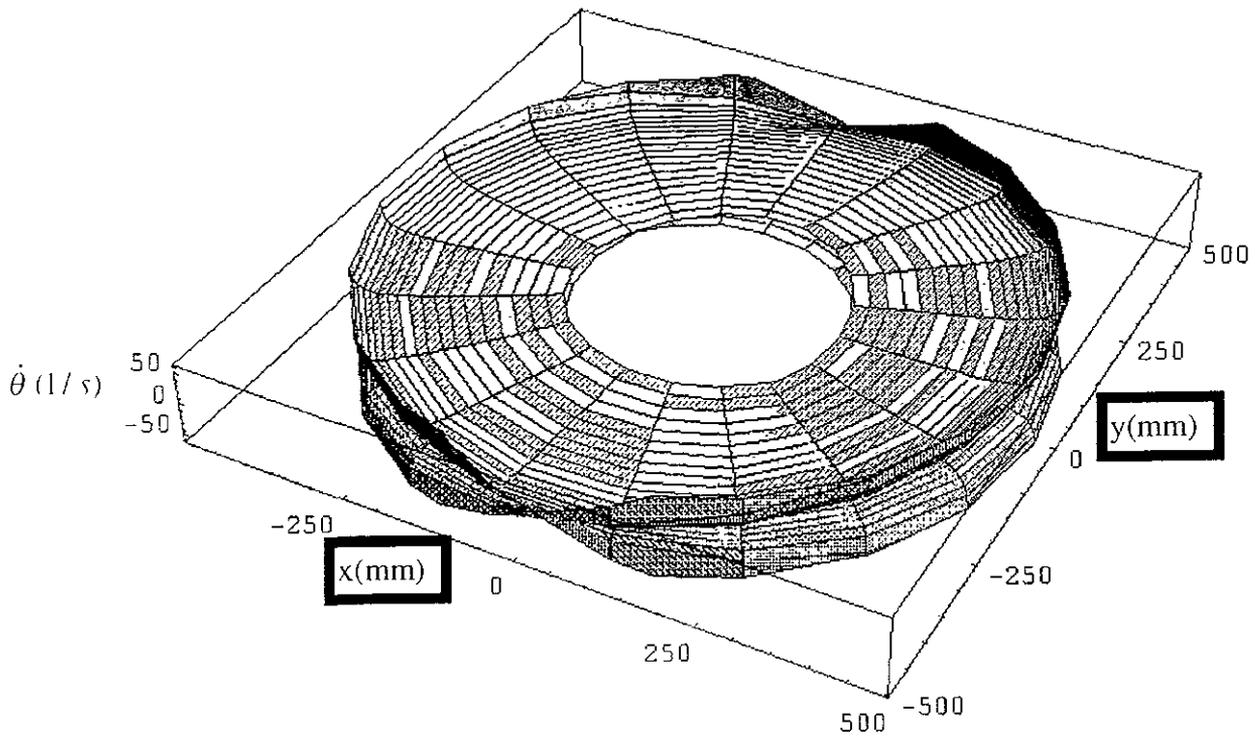


Figura 4.2.5 Muestra la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG}$  donde se puede ver que son perfectamente simétricos.

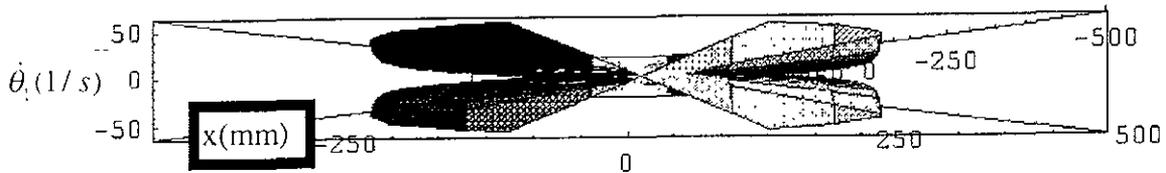


Figura 4.2.6 Es la vista lateral de la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\dot{\theta}_1}^{RG}$  donde se puede ver aun mas la simetría que existe entre ellos.

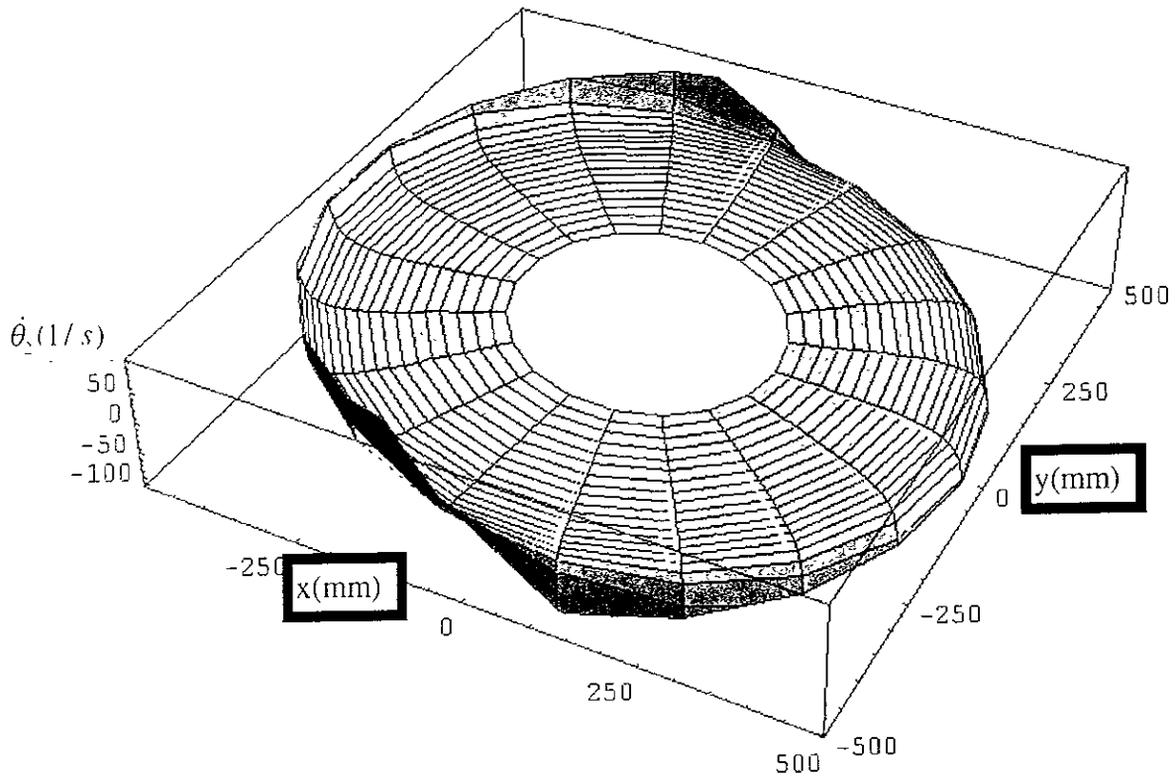


Figura 4.2.7 Muestra el conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  que es la primera solución para la tercera variable articular. Son todas las configuraciones negativas (en sentido horario) de esta variable para un velocidad del órgano terminal de (3000,0) mm/s.

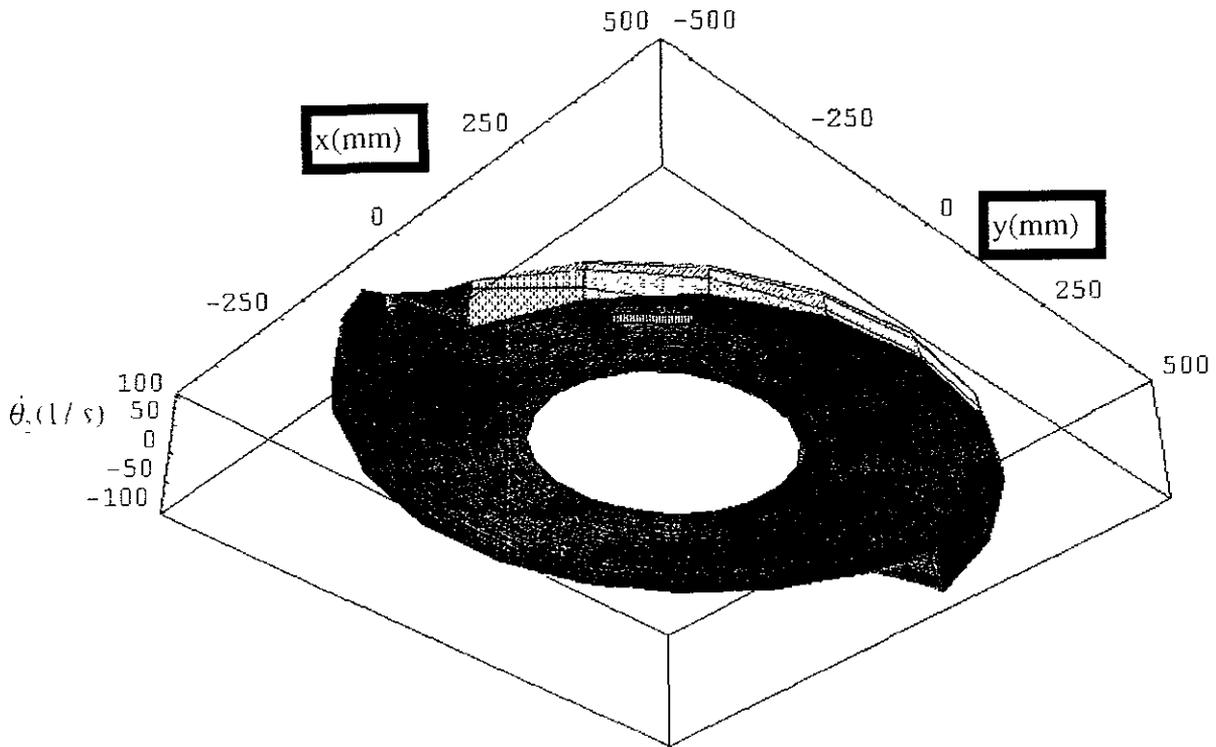


Figura 4.2.8 Vista inferior del conjunto  ${}^1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  con la misma configuración de velocidad que la anterior.

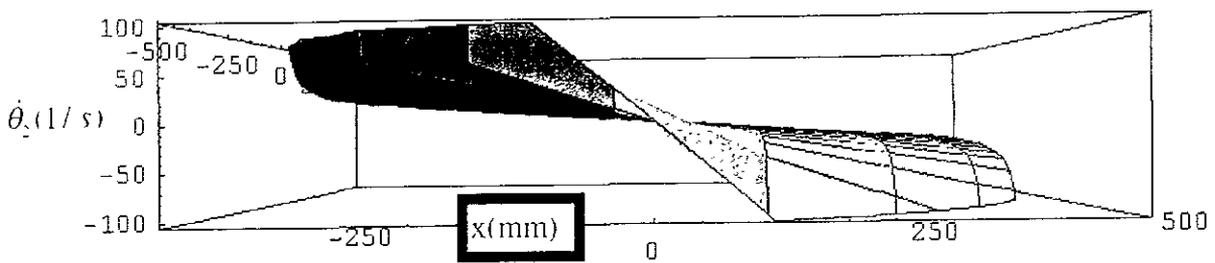


Figura 4.2.9 Es la vista lateral del mismo conjunto anterior. En esta figura se puede ver el aumento de velocidad en los extremos de volumen de trabajo.

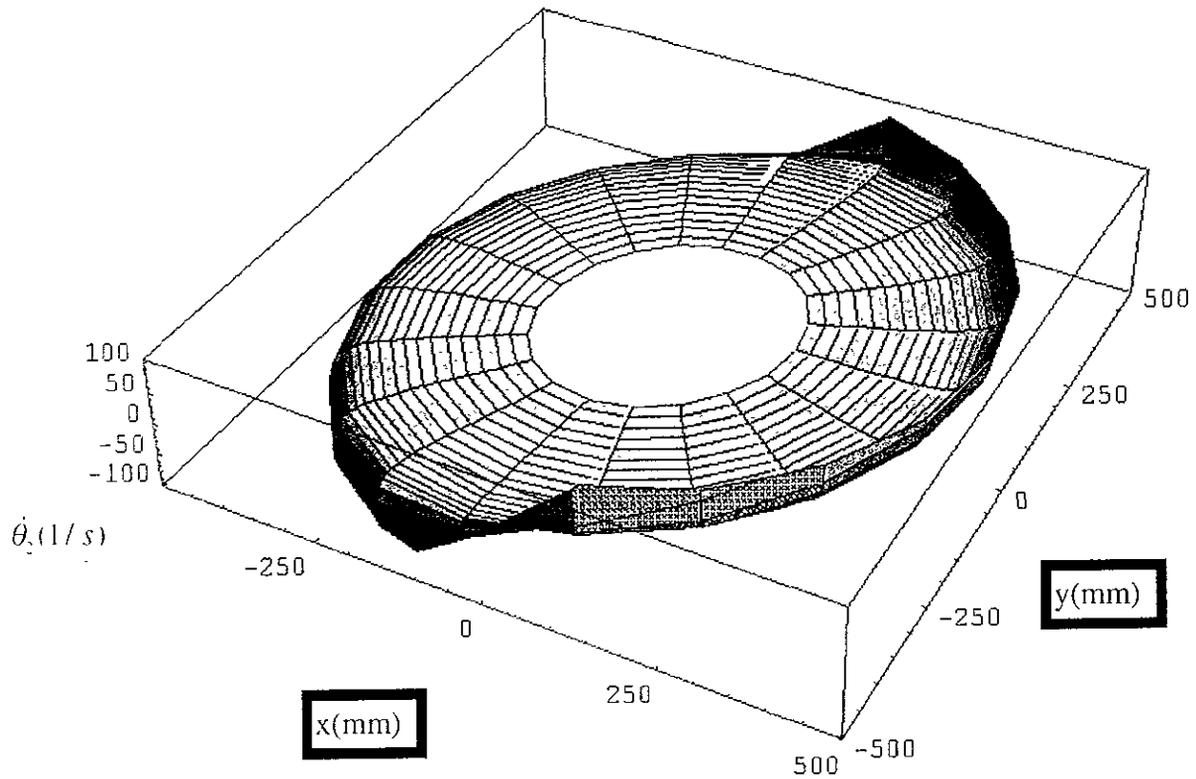


Figura 4.2.10 Representa al conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RC}$  que son todas las soluciones de velocidad positiva para la tercera variable articular con una velocidad del órgano terminal de (3000, 0) mm/s.

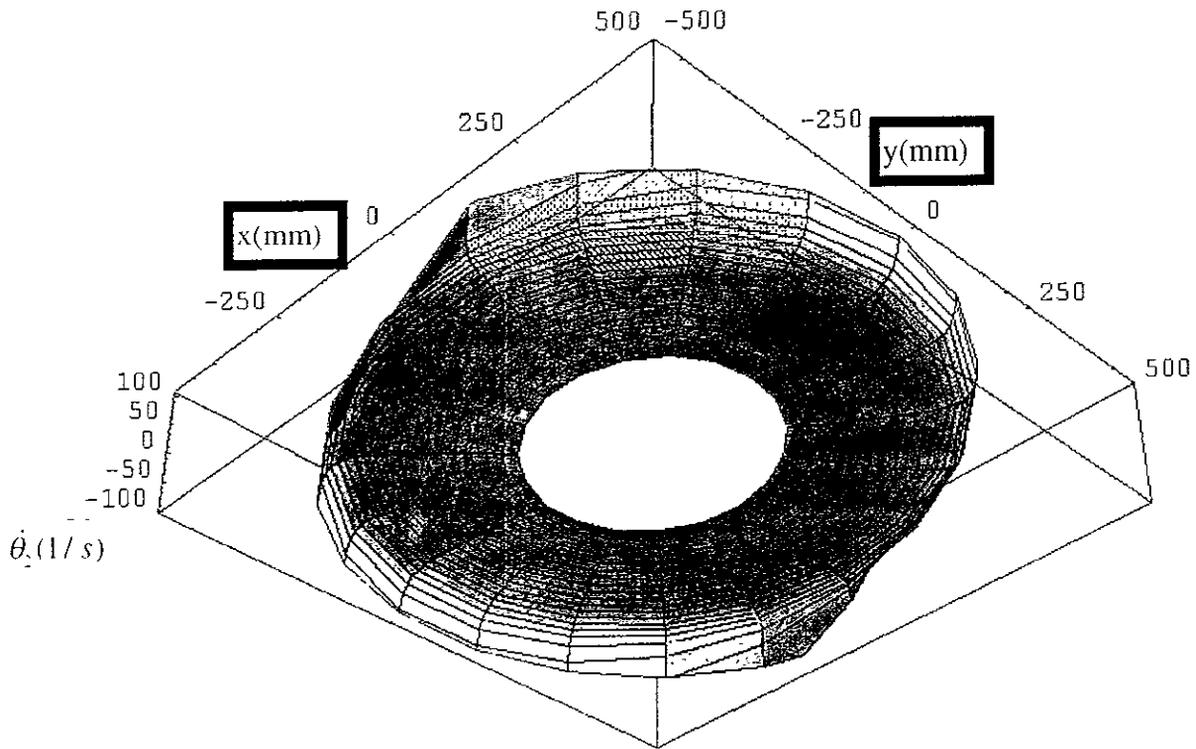


Figura 4.2.11 Vista inferior del conjunto anterior. Se observa una gran variación de la velocidad en los extremos del volumen de trabajo.

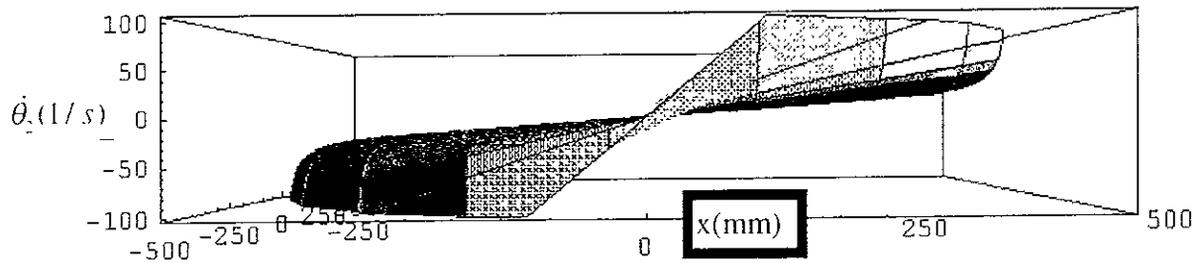


Figura 4.2.12 Vista lateral del mismo conjunto donde se puede ver con más claridad el efecto de la cercanía a los puntos singulares.

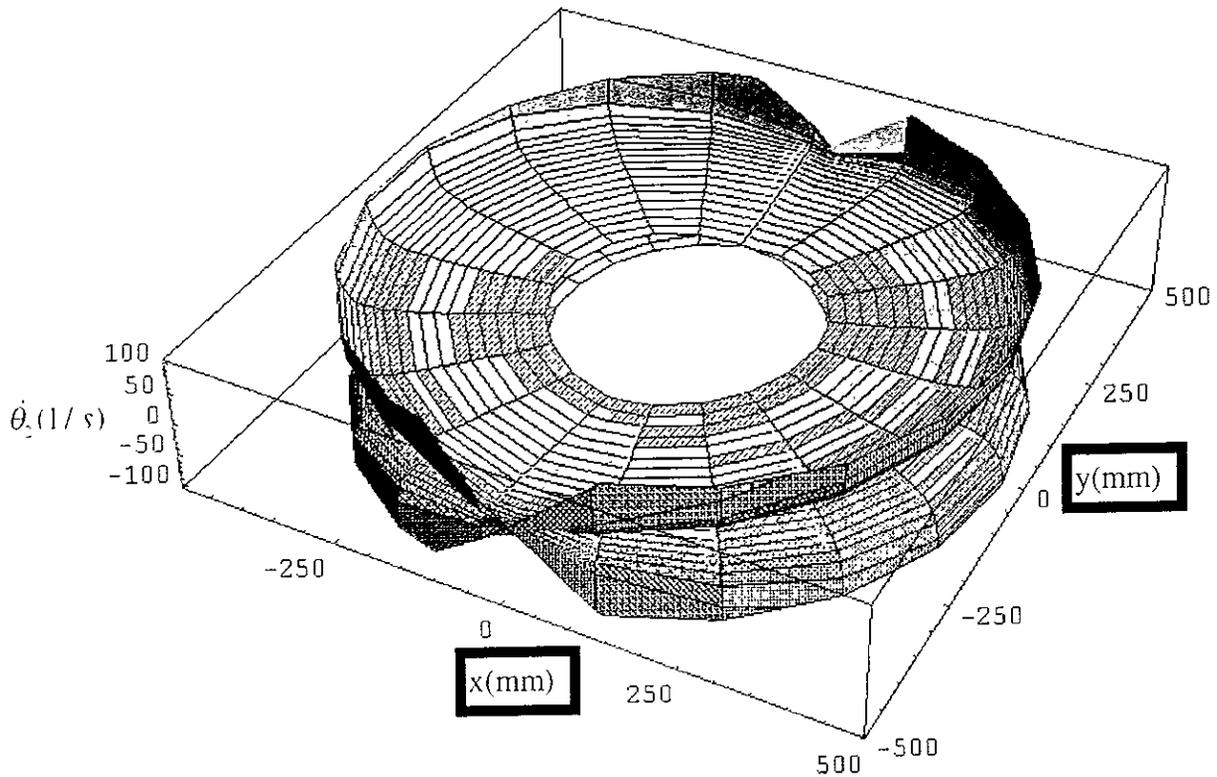


Figura 4.2.13 Muestra la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ . En este conjunto se muestran todas las posibles configuraciones para la tercera variable articular para la velocidad. Este conjunto muestra una notoria simetría.

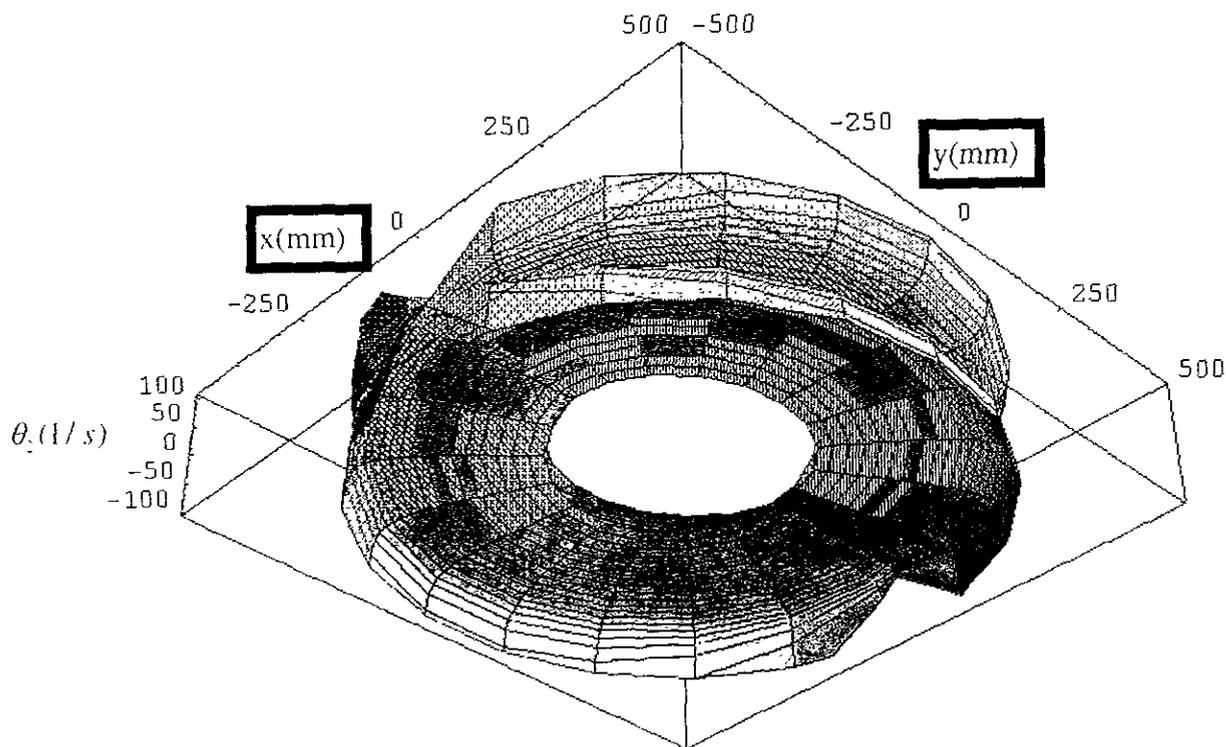


Figura 4.2.14 Es el mismo conjunto de la figura anterior pero en una vista inferior.

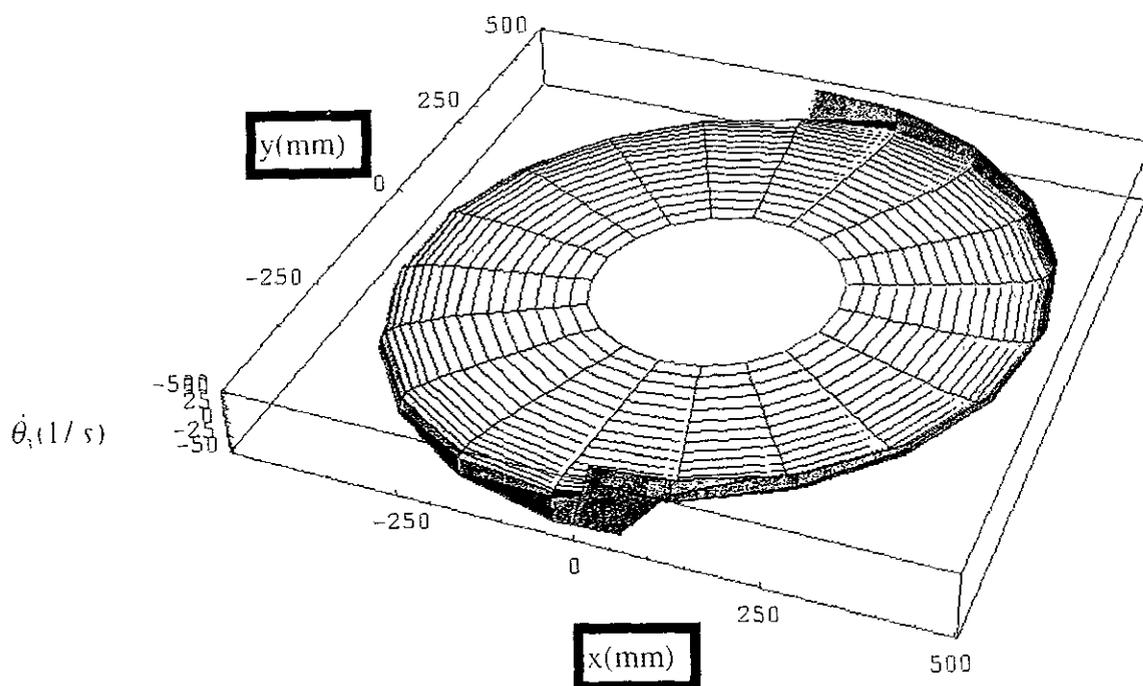


Figura 4.2.15 Muestra el conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ , es decir, es la primera solución de la cuarta variable articular para una velocidad del órgano terminal de (3000, 0).

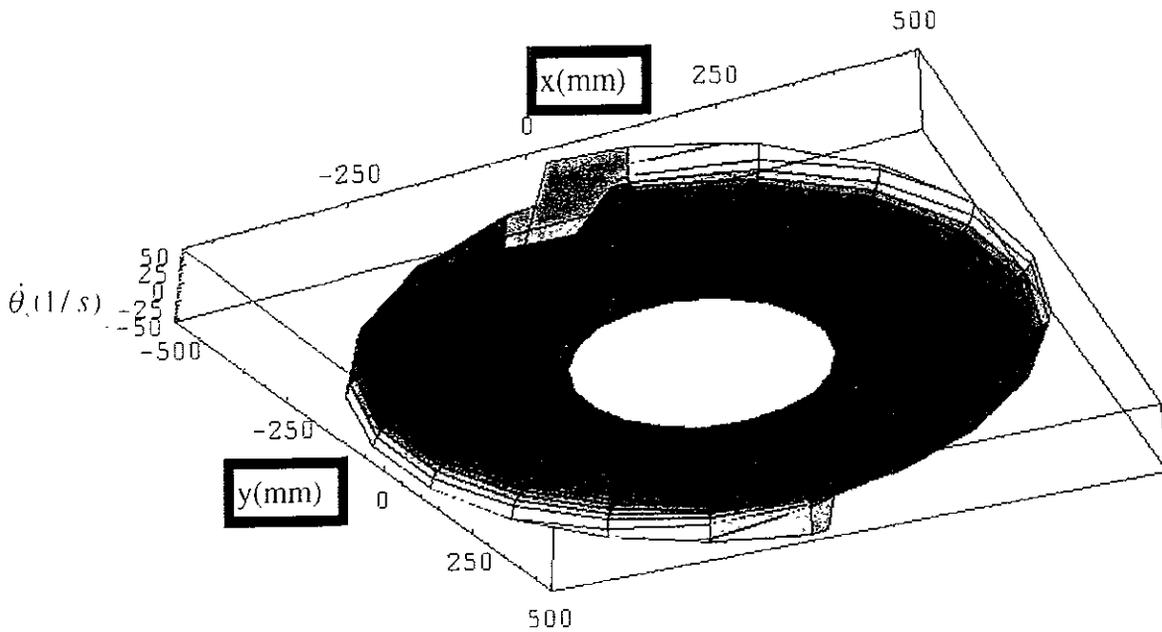


Figura 4.2.16 Vista inferior del conjunto anterior. Se nota en este conjunto un rango más pequeño que en las otras variables.

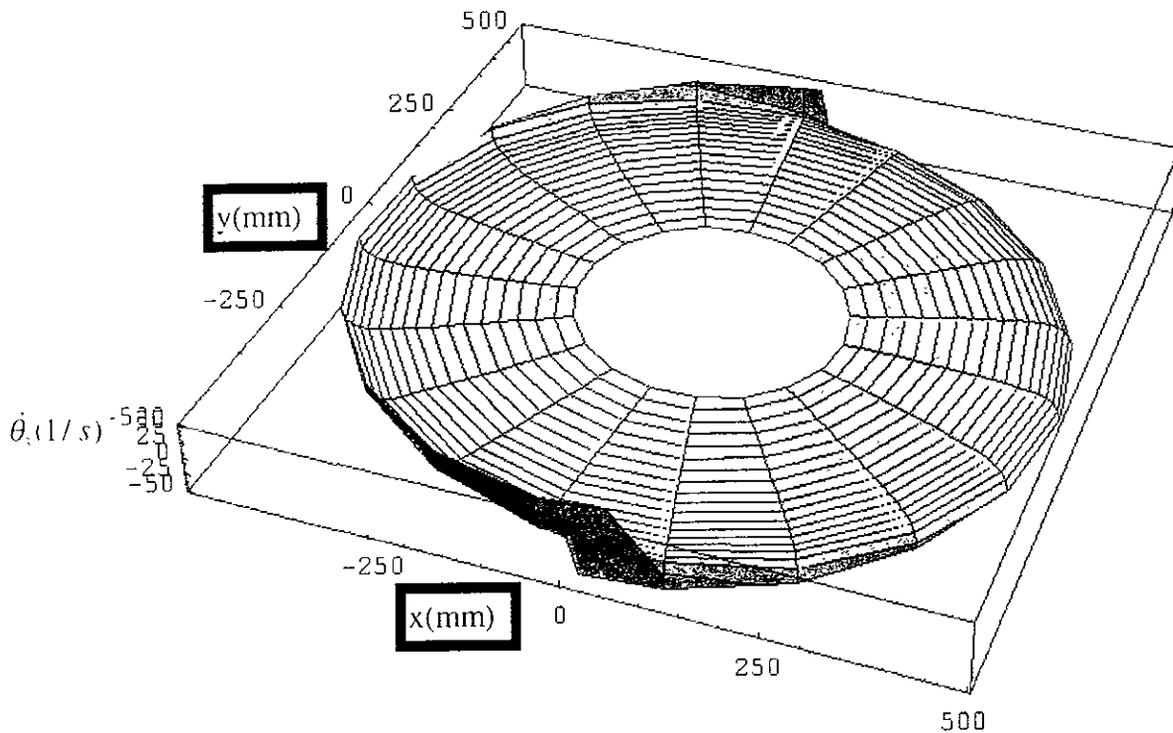


Figura 4.2.17 Es el conjunto de solución  ${}^2\Lambda_{\theta_3}^{Ri}$  que es la segunda solución para la cuarta variable, son todas las configuraciones de velocidad positivas posibles. La velocidad del manipulador es de (3000,0) mm/s.

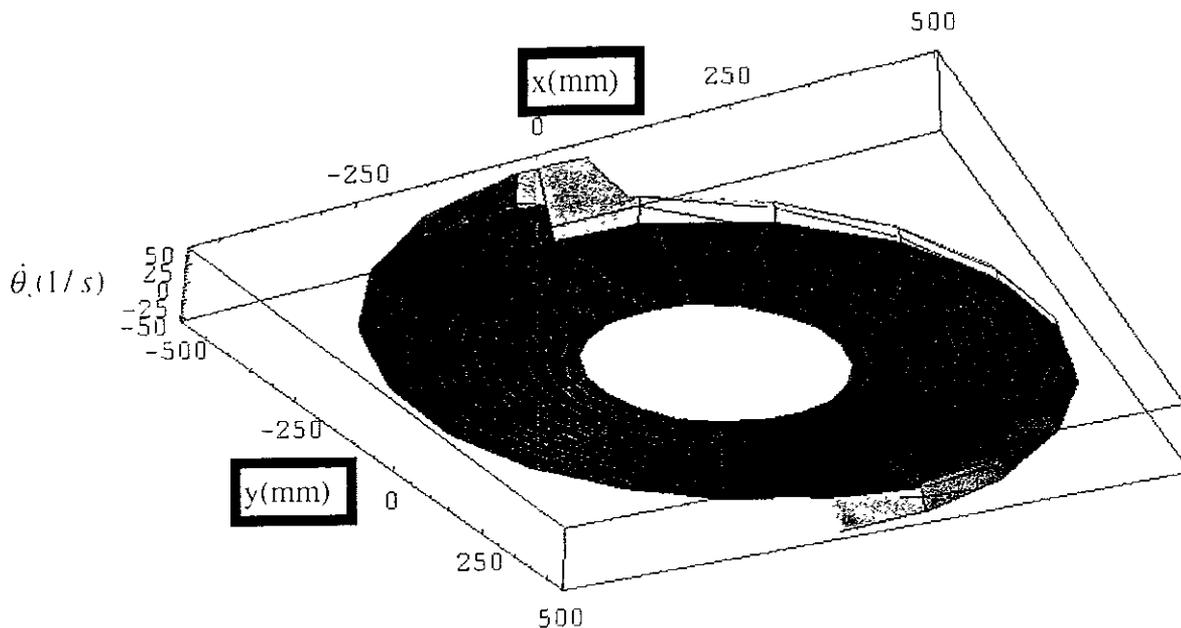


Figura 4.2.18 Vista inferior del conjunto anterior, en donde al igual que todos los conjuntos de velocidad se ve su simetría.

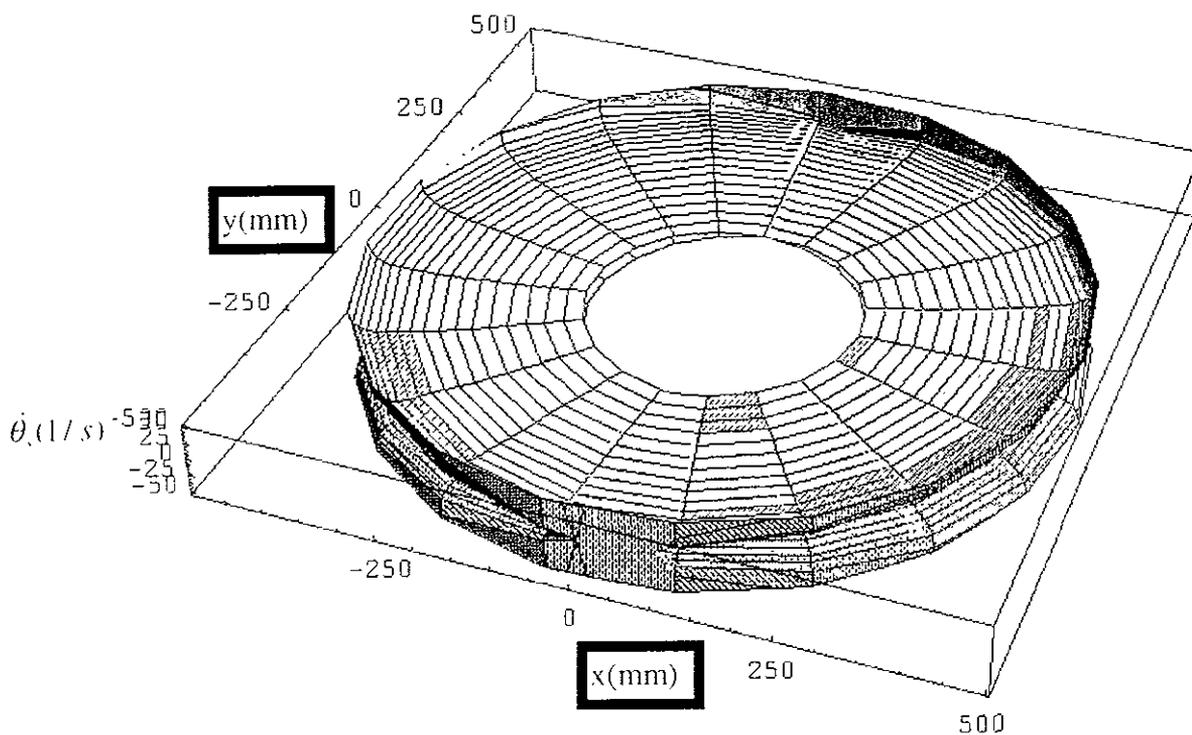


Figura 4.2.19 Es la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  para una velocidad del órgano terminal de (3000,0) mm/s.

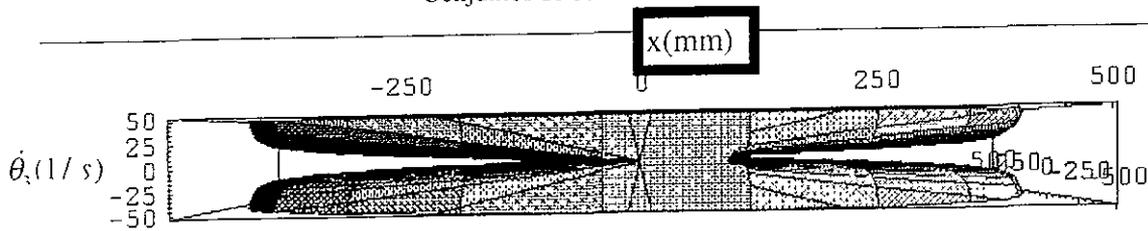


Figura 4.2.20 Es la vista lateral del conjunto anterior. En comparación con los conjuntos de las demás variables articulares esta conjunto presenta un rango muy pequeño siendo la misma configuración de velocidad. Sin embargo se tiene cambios bruscos de velocidad que es lo que quiere evitar

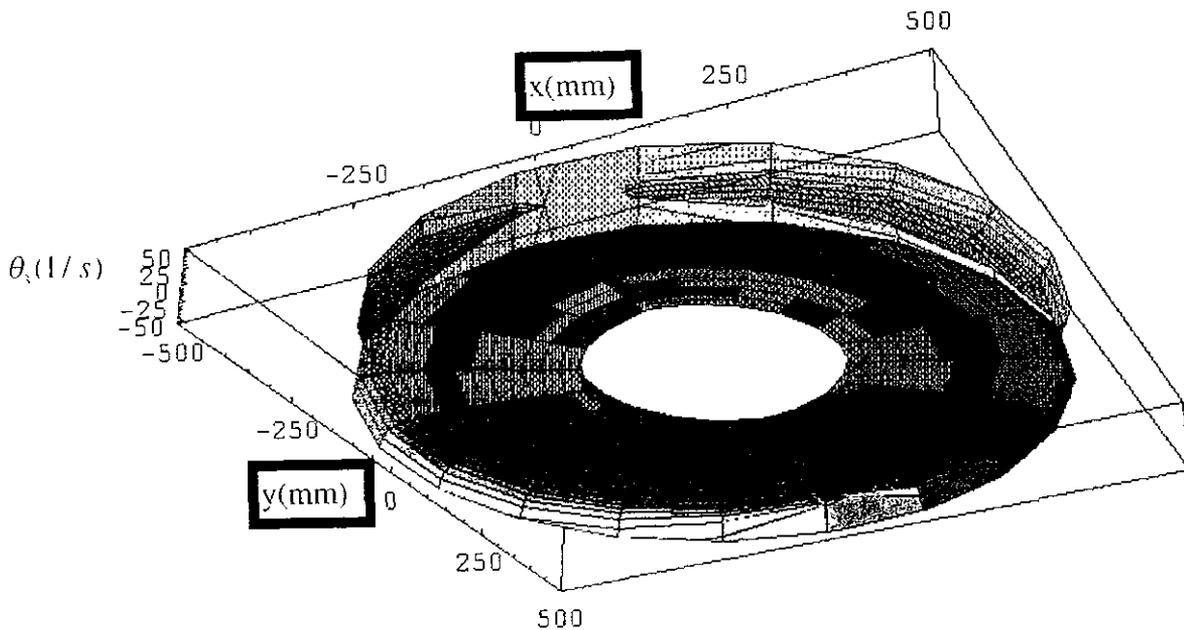


Figura 4.2.21 Vista inferior del mismo conjunto . Como se observó en todas las uniones de los conjuntos se presenta una clara simetría entre estos lo que ayudará a ver que la intersección de estos conjuntos solamente existirá cuando la velocidad sea cero

## 4.3 CONJUNTOS DE SOLUCIÓN DE LA ACELERACIÓN

El espacio articular de aceleración contiene a todos los elementos que cumplan con la forma de la ecuación (4.3.2) que es un elemento que contiene 4 escalares que representan la aceleración de cada elemento articular.

$$\ddot{\Theta}^{RG} = \{\ddot{\Theta}_j^+\}_{j=1, \dots, \infty} \quad (4.3.1)$$

$$\ddot{\Theta}_j^+ = \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix}_j \quad (4.3.2)$$

La región geométrica de solución de la aceleración se entiende como un subconjunto del espacio articular de aceleración que además cumple con otra regla que se mostrará más adelante. Si esta región de solución contiene además a todos los elementos posibles se le denominará “región geométrica universal de solución”.

$${}_U \Xi^{RG} \subseteq \ddot{\Theta}^{RG}. \quad (4.3.3)$$

Existe además otro subconjunto del espacio articular de aceleración, en el cual están contenidos todos los elementos que no tienen ninguna configuración útil para el manipulador (ecuaciones 4.3.4 y 4.3.5). La intersección de este subconjunto con el subconjunto llamado región geométrica de solución de la aceleración formará un conjunto vacío (ecuación 4.3.6).

$${}^* \ddot{\Theta}^{RG} \subseteq \ddot{\Theta}^{RG} \quad (4.3.4)$$

$${}^* \ddot{\Theta}^{RG} = \left\{ Y_j^+ \in \ddot{\Theta}^{RG} \mid Y_j^+ \notin {}_U \Xi^{RG} \right\}_{j=1, \dots, \infty} \quad (4.3.5)$$

$$\ddot{\Theta}^{RG} \cap_{U'} \Xi^{RG} = \emptyset \quad (4.3.6)$$

Existe un conjunto que solo contiene elementos que son útiles para formar una configuración útil del manipulador, es decir, cumple con una regla para formar configuraciones útiles y además es un subconjunto de la región geométrica universal de solución (ecuación 4.3.7).

$$\Xi \subseteq_{U'} \Xi^{RG} \quad (4.3.7)$$

En la parte de modelación se mostró como con una transformación lineal, que es la matriz del jacobiano, con la cual se podía relacionar el espacio operacional de velocidad con el espacio articular de velocidad, si se deriva esta ecuación se obtendrá:

$$\ddot{\Theta} = J^{-1} \dot{X} + J^{-1} \ddot{X} \quad (4.3.8)$$

Y esta será la regla que se deberá cumplir para que un elemento forme parte este conjunto.

La matriz del jacobiano estará en función de las tres variables articulares rotacionales y la derivada de la matriz del jacobiano estará en función de las tres variables articulares y de su derivada, para esto se definen los conjuntos H y K:

$$H_j^+ = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}_j \quad (4.3.9)$$

y

$$K_j^+ = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}_j \quad (4.3.10)$$

De esta manera el conjunto  $\Xi$  queda:

$$\Xi = \left\{ {}_i\Xi^+ \in \ddot{\Theta} \mid {}_i\Xi^+ = J^{-1}({}_iK^+)\dot{X} + J^{-1}({}_iH^+)\ddot{X} \right\} \quad (4.3.11)$$

En donde:

$${}_i\Xi^+ = \left[ \begin{matrix} {}_i\ddot{d}_1 & {}_i\ddot{\theta}_1 & {}_i\ddot{\theta}_2 & {}_i\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T \left\{ \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} {}_i\ddot{d}_1 & {}_i\ddot{\theta}_1 & {}_i\ddot{\theta}_2 & {}_i\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T = \\ J^{-1}({}_i\theta_1, {}_i\theta_2, {}_i\theta_3, {}_i\dot{\theta}_1, {}_i\dot{\theta}_2, {}_i\dot{\theta}_3)\dot{X} + J^{-1}({}_i\theta_1, {}_i\theta_2, {}_i\theta_3)\ddot{X} \end{matrix} \right\} \quad (4.3.12)$$

Y para cada solución:

$${}_1\Xi^+ = \left[ \begin{matrix} {}_1\ddot{d}_1 & {}_1\ddot{\theta}_1 & {}_1\ddot{\theta}_2 & {}_1\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T \left\{ \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} {}_1\ddot{d}_1 & {}_1\ddot{\theta}_1 & {}_1\ddot{\theta}_2 & {}_1\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T = \\ J^{-1}({}_1\theta_1, {}_1\theta_2, {}_1\theta_3, {}_1\dot{\theta}_1, {}_1\dot{\theta}_2, {}_1\dot{\theta}_3)\dot{X} + J^{-1}({}_1\theta_1, {}_1\theta_2, {}_1\theta_3)\ddot{X} \end{matrix} \right\} \quad (4.3.13)$$

$${}_2\Xi^+ = \left[ \begin{matrix} {}_2\ddot{d}_1 & {}_2\ddot{\theta}_1 & {}_2\ddot{\theta}_2 & {}_2\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T \left\{ \begin{matrix} \left[ \begin{matrix} {}_2\ddot{d}_1 & {}_2\ddot{\theta}_1 & {}_2\ddot{\theta}_2 & {}_2\ddot{\theta}_3 \end{matrix} \right]^T = \\ J^{-1}({}_2\theta_1, {}_2\theta_2, {}_2\theta_3, {}_2\dot{\theta}_1, {}_2\dot{\theta}_2, {}_2\dot{\theta}_3)\dot{X} + J^{-1}({}_2\theta_1, {}_2\theta_2, {}_2\theta_3)\ddot{X} \end{matrix} \right\} \quad (4.3.14)$$

Los dos conjuntos que forman las dos soluciones son subconjuntos de la región geométrica de solución universal y los dos cumplen con la definición de aceleración (ecuaciones 4.3.15 y 4.3.16):

$${}_1\Xi^{RG} = \left\{ {}_1\Xi_j^+ \in \ddot{\Theta} \mid {}_1\Xi_j^+ = J^{-1}({}_1K_j^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_j^+) \ddot{X} \right\}_{j=0, \dots, \infty} \quad (4.3.15)$$

$${}_2\Xi^{RG} = \left\{ {}_2\Xi_k^+ \in \ddot{\Theta} \mid {}_2\Xi_k^+ = J^{-1}({}_2K_k^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_k^+) \ddot{X} \right\}_{k=0, \dots, \infty} \quad (4.3.16)$$

Además la unión de estos dos conjuntos forman la región geométrica universal de solución, es decir, si estos conjuntos se unen contemplarán a todo el universo de configuraciones útiles (ecuaciones 4.3.17 - 4.3.19):

$${}_U\Xi^{RG} = {}_1\Xi^{RG} \cup {}_2\Xi^{RG} \quad (4.3.17)$$

$${}_U\Xi^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}_1\Xi_j^+ \mid {}_1\Xi_j^+ = J^{-1}({}_1K_j^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_j^+) \ddot{X}, \\ {}_2\Xi_k^+ \mid {}_2\Xi_k^+ = J^{-1}({}_2K_k^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_k^+) \ddot{X} \end{array} \right\}_{j=0, \dots, \infty \quad K=0, \dots, \infty} \quad (4.3.18)$$

$${}_U\Xi^{RG} = \left\{ {}_1\Xi_j^+, {}_2\Xi_k^+ \right\}_{j=0, \dots, \infty \quad K=0, \dots, \infty} \quad (4.3.19)$$

Así para cada configuración:

$${}_U\Xi^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}_1\Xi_1^+ \mid {}_1\Xi_1^+ = J^{-1}({}_1K_1^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_1^+) \ddot{X}, {}_1\Xi_2^+ \mid {}_1\Xi_2^+ = J^{-1}({}_1K_2^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_2^+) \ddot{X} \\ {}_2\Xi_1^+ \mid {}_2\Xi_1^+ = J^{-1}({}_2K_1^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_1^+) \ddot{X}, {}_2\Xi_2^+ \mid {}_2\Xi_2^+ = J^{-1}({}_2K_2^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_2^+) \ddot{X} \end{array} \right\}_{j=0, \dots, \infty \quad K=0, \dots, \infty} \quad (4.3.20)$$

$${}_U\Xi^{RG} = \left\{ {}_1\Xi_1^+, {}_1\Xi_2^+, \dots, {}_2\Xi_1^+, {}_2\Xi_2^+, \dots \right\} \quad (4.3.21)$$

Y si se agrupa por estado operacional:

$${}_U\Xi^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ {}_1\Xi_1^+, {}_2\Xi_1^+ \mid {}_1\Xi_1^+ = J^{-1}({}_1K_1^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_1^+) \ddot{X} = J^{-1}({}_2K_1^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_1^+) \ddot{X} \right\}, \\ \left\{ {}_1\Xi_2^+, {}_2\Xi_2^+ \mid {}_1\Xi_2^+ = J^{-1}({}_1K_2^+) \dot{X} + J^{-1}({}_1H_2^+) \ddot{X} = J^{-1}({}_2K_2^+) \dot{X} + J^{-1}({}_2H_2^+) \ddot{X} \right\}, \dots \end{array} \right\}_{j=0, \dots, \infty \quad K=0, \dots, \infty} \quad (4.3.22)$$

$${}_U \Xi^{RG} = \left\{ \left\{ {}_1 \Xi_1^+, {}_2 \Xi_1^+ \right\}, \left\{ {}_1 \Xi_2^+, {}_2 \Xi_2^+ \right\}, \dots \right\}_{j=0, \dots, \infty} \quad (4.3.23)$$

Al igual que en la región geométrica de solución de velocidad los dos subconjuntos tendrán en los escalares que representan las articulaciones rotacionales el mismo valor absoluto pero distinto valor relativo, es decir, tendrán la misma magnitud pero sentido contrario (excepto  $\ddot{d}_1$ ). Sin embargo su intersección no forma un conjunto vacío (ecuación 4.3.24).

$${}_1 \Xi^{RG} \cap {}_2 \Xi^{RG} \neq \emptyset \quad (4.3.24)$$

El elemento j-ésimo en cualquiera de las dos soluciones está compuesto por cuatro escalares que representan la aceleración lineal o angular de cada una de las articulaciones.

$${}_i \Xi_j^+ = \begin{pmatrix} \ddot{d}_1 \\ {}_i \ddot{\theta}_1 \\ {}_i \ddot{\theta}_2 \\ {}_i \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix}_j ; \forall i = 1, 2; \forall j = 1, \dots, \infty \quad (4.3.25)$$

Si se agrupan a estos elementos escalares según su tipo, en un conjunto quedaría el articular prismático y en otro los rotacionales:  ${}_i \Lambda_{d1}^{RG}$  que contiene todas las configuraciones de la primer variable articular para el espacio operacional ( $j=1, \dots, \infty$ ) y para las dos soluciones ( $i=1, 2$ ) en cada punto y se le llamará “región geométrica escalar de aceleración de la primer variable articular”; y  ${}_i \Lambda_{\theta k}^{RG}$  donde  $\ddot{\theta}_k$  engloba tres escalares ( $k=1, 2, 3$ ) para cualquier configuración en el espacio operacional ( $j=1, \dots, \infty$ ) en cualquiera de las dos soluciones ( $i=1, 2$ ) y se le llamará “región geométrica escalar de aceleración de la variable k para la configuración i”. A continuación se muestran los dos conjuntos:

$${}_i \Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ (\ddot{d}_1)_j \right\}; \forall i = 1, 2; \forall j = 1, \dots, \infty \quad (4.3.26)$$

$${}_i\Lambda_{\theta k}^{RG} = \left\{ \left( {}_i\ddot{\theta}_k \right)_j \right\}; \forall i = 1, 2; \forall j = 1, \dots, \infty; \forall k = 1, 2, 3 \quad (4.3.27)$$

En la primera variable articular la solución 1 y 2 son iguales (ecuación 4.3.28):

$${}_1\Lambda_{d1}^{RG} = {}_2\Lambda_{d1}^{RG} = \Lambda_{d1}^{RG} = \left\{ \left( \ddot{d}_1 \right)_1, \left( \ddot{d}_1 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.1.28)$$

La primera solución para  ${}_i\Lambda_{\theta k}^{RG}$  (ecuaciones 4.3.29-4.3.31):

$${}_1\Lambda_{\theta 1}^{RG} = \left\{ \left( {}_1\ddot{\theta}_1 \right)_1, \left( {}_1\ddot{\theta}_1 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.29)$$

$${}_1\Lambda_{\theta 2}^{RG} = \left\{ \left( {}_1\ddot{\theta}_2 \right)_1, \left( {}_1\ddot{\theta}_2 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.30)$$

$${}_1\Lambda_{\theta 3}^{RG} = \left\{ \left( {}_1\ddot{\theta}_3 \right)_1, \left( {}_1\ddot{\theta}_3 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.31)$$

Y para la solución 2:

$${}_2\Lambda_{\theta 1}^{RG} = \left\{ \left( {}_2\ddot{\theta}_1 \right)_1, \left( {}_2\ddot{\theta}_1 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.32)$$

$${}_2\Lambda_{\theta 2}^{RG} = \left\{ \left( {}_2\ddot{\theta}_2 \right)_1, \left( {}_2\ddot{\theta}_2 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.33)$$

$${}_2\Lambda_{\theta 3}^{RG} = \left\{ \left( {}_2\ddot{\theta}_3 \right)_1, \left( {}_2\ddot{\theta}_3 \right)_2, \dots \right\} \quad (4.3.34)$$

Y con la unión de estas dos series de conjuntos se obtendrá “la región geométrica universal escalar de solución de la variable k” (ecuación 4.3.35):

$${}_U\Lambda_{\theta k}^{RG} = {}_U\Lambda_{\theta k}^{RG} \cup {}_U\Lambda_{\theta k}^{RG}; \forall k = 1, 2, 3 \quad (4.3.35)$$

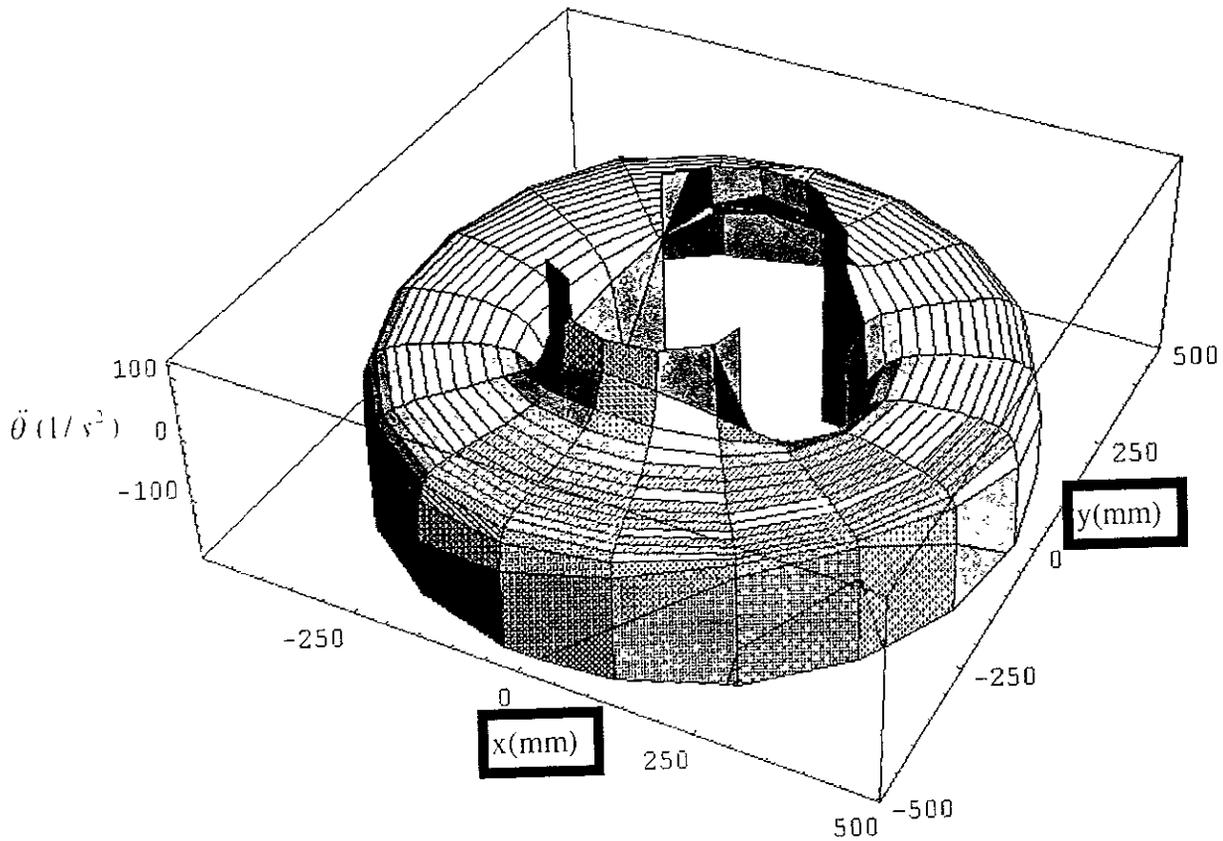


Figura 4.3.1 Muestra al conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  que es la primera solución para la segunda variable articular. Los valores de la aceleración están divididos entre 100 para darle más proporción a la gráfica.

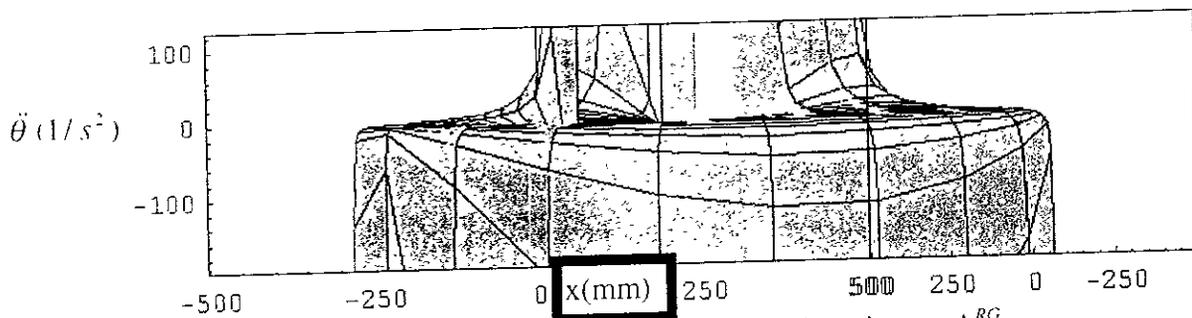


Figura 4.3.2 Es un vista lateral del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$ .

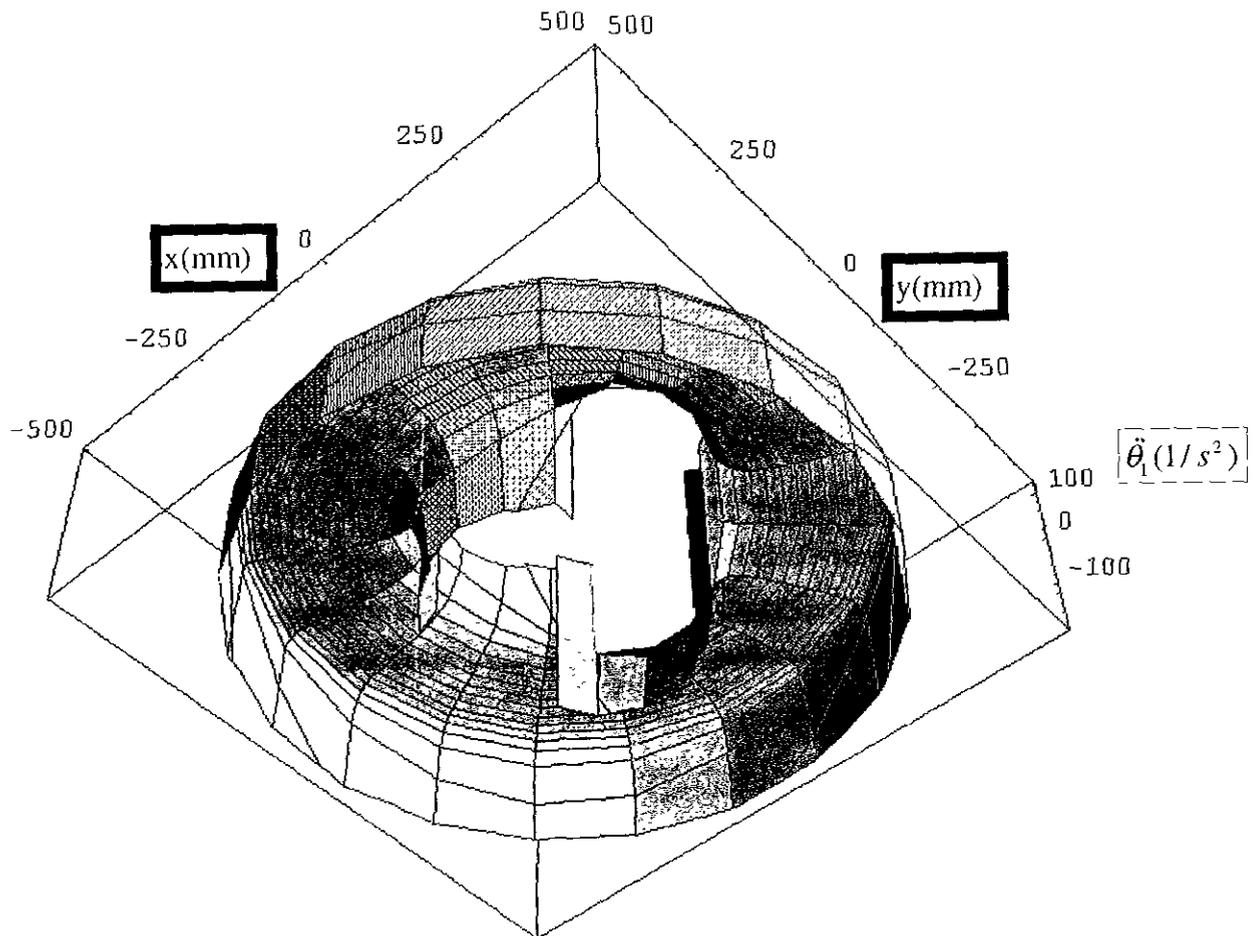


Figura 4.3.3 Esta es una vista inferior del mismo conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta 1}^{RG}$  considerando una velocidad de  $[3000,3000]$  (mm/s) y una aceleración de  $[1000,1000]$  (mm/s<sup>2</sup>). En esta vista se puede observar que existe simetría en la parte central con respecto a la parte superior.

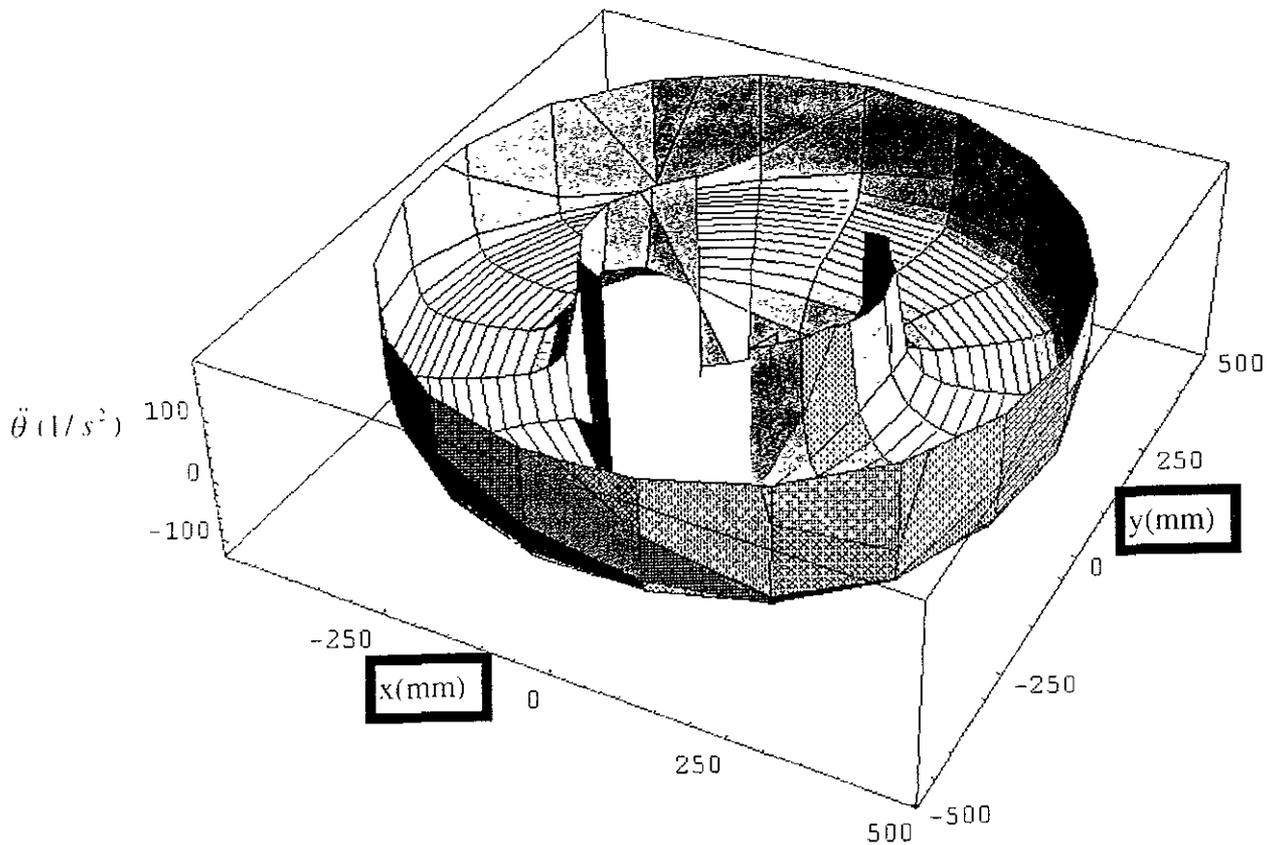


Figura 4.3.4 Se muestra al conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  considerando una aceleración de  $[1000,1000](\text{mm}/\text{s}^2)$  y una velocidad de  $[3000,3000](\text{mm}/\text{s})$ .

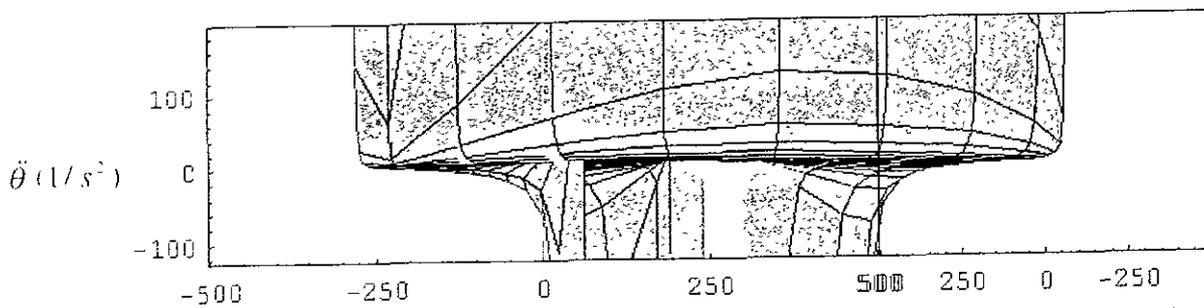


Figura 4.3.5 Es la vista lateral del mismo conjunto. Se puede observar una gran similitud con la primera solución del mismo conjunto únicamente se presenta un cambio simétrico, esto se podrá notar al presentar a las dos soluciones juntas.

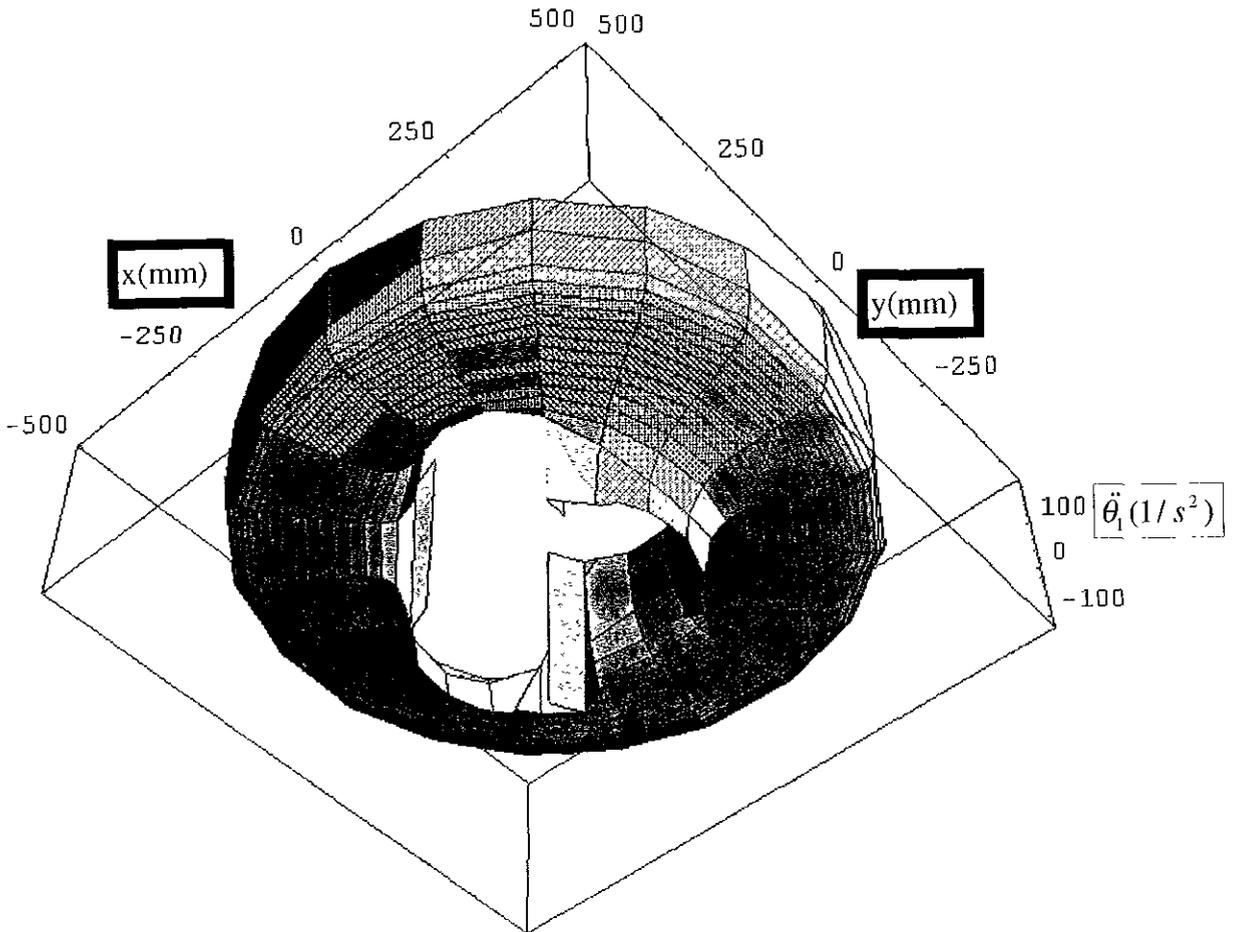


Figura 4.3.6 Es una vista inferior que representa al mismo conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  donde al igual que la primera solución se nota simetría en la parte central.

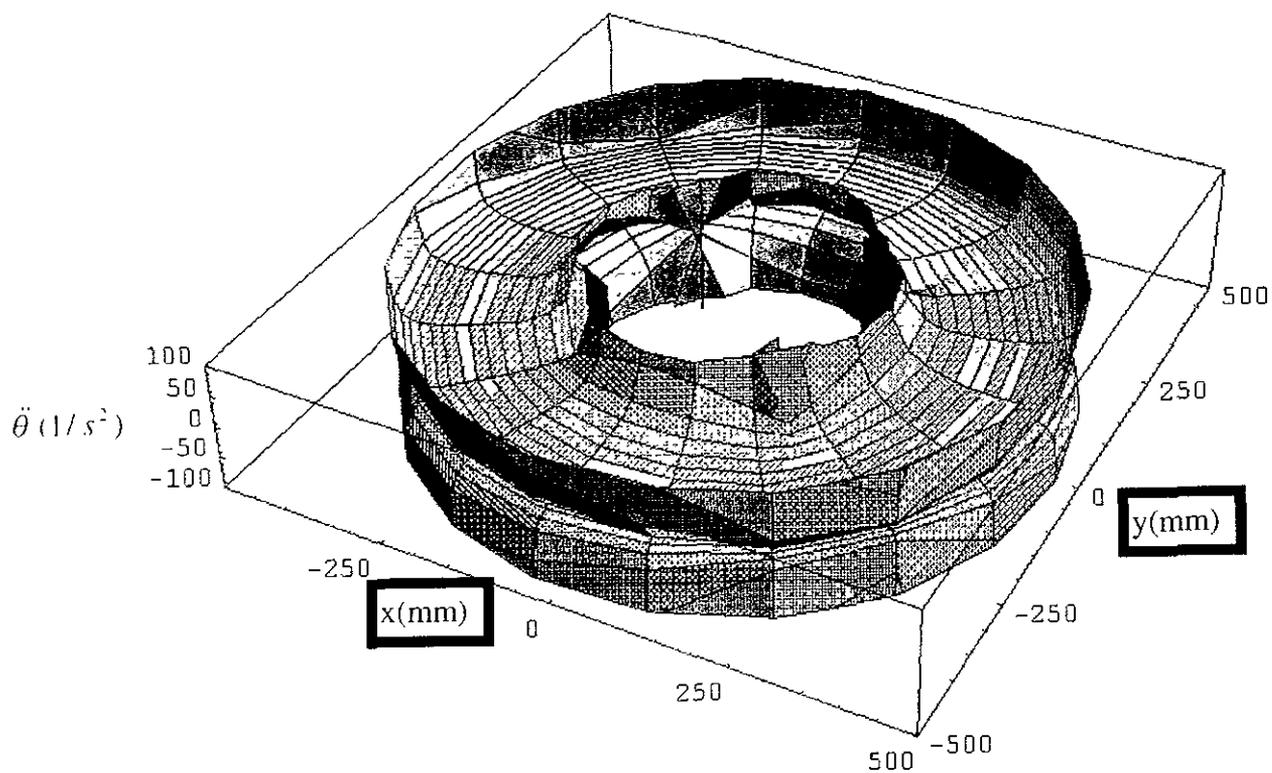


Figura 4.3.7 Es la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta 1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta 1}^{RG}$ . Aquí se aprecia más la simetría existente entre las soluciones 1 y 2.

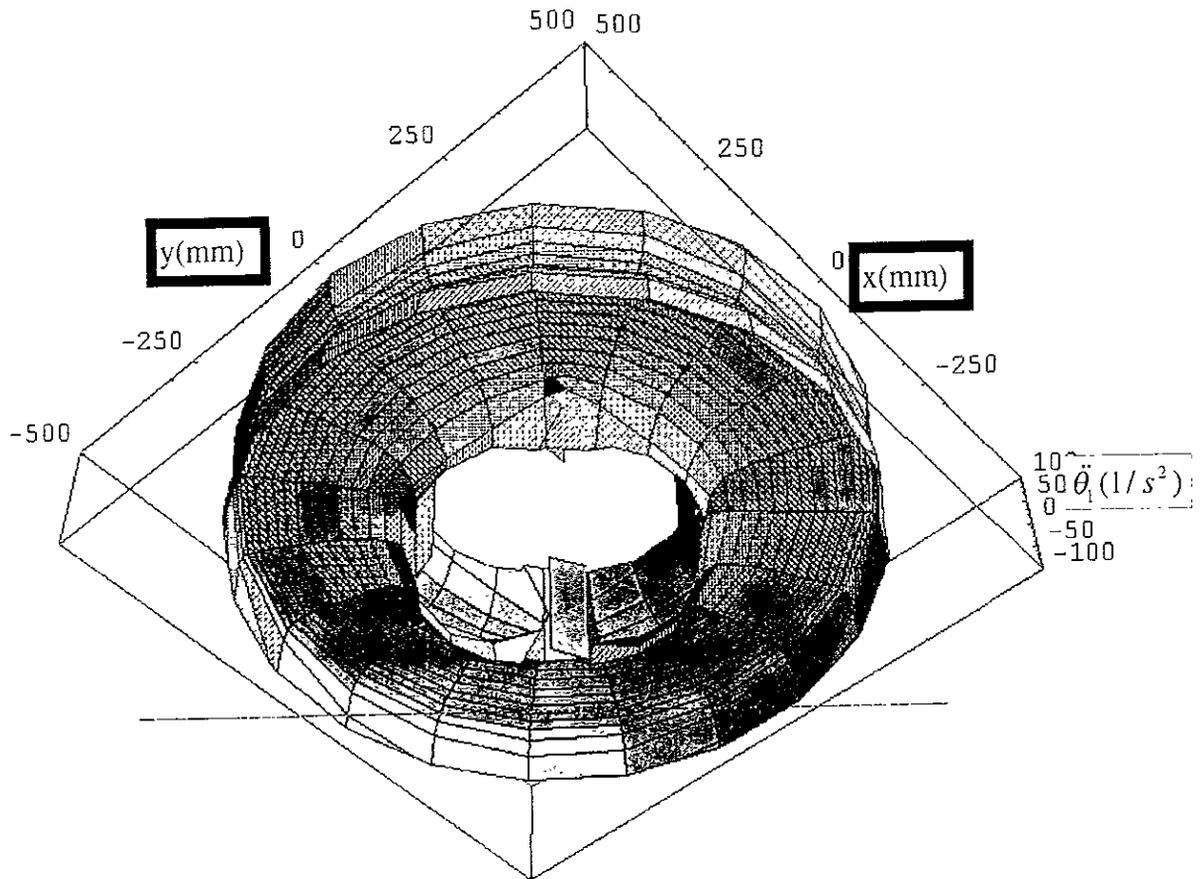


Figura 4.3.8 Es un vista inferior de la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_1}^{RG}$  y representa todo el universo de soluciones para la segunda variable articular.

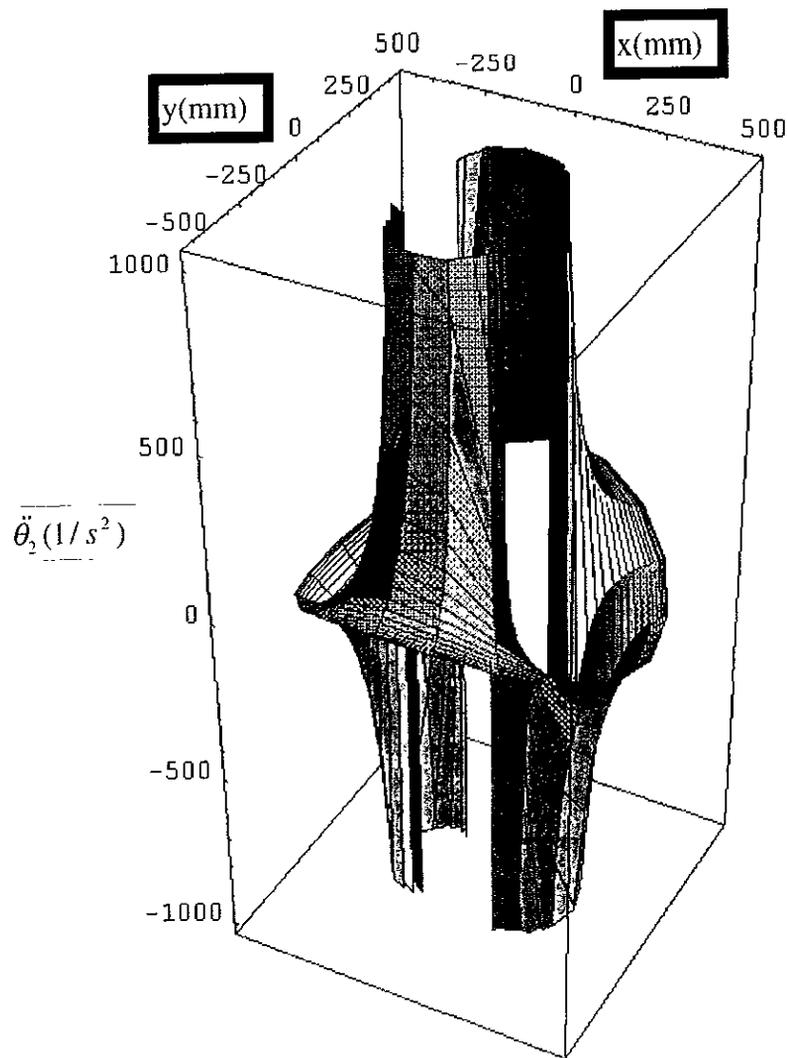


Figura 4.3.9 Que representa al conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ , es decir, son todas las posibles configuraciones de aceleración para la tercera variable articular en su primera solución.

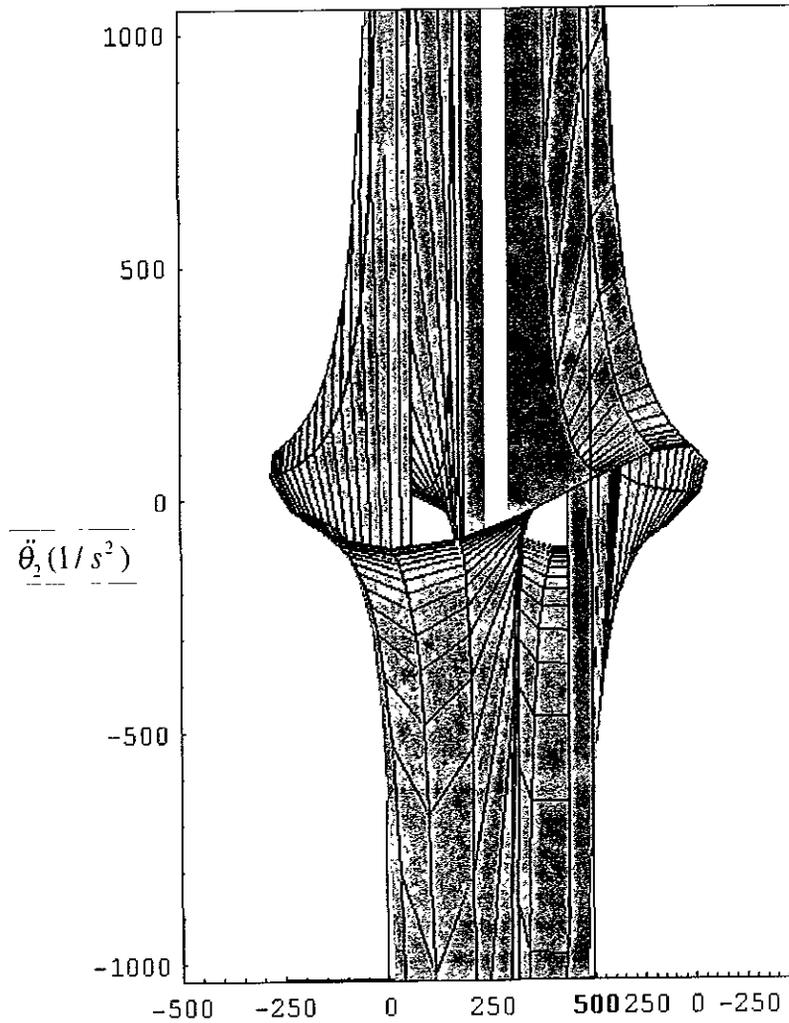


Figura 4.3.10 Es una vista lateral del conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  considerando como en todas las regiones geométricas de solución de esta parte una aceleración de  $[1000, 1000]$  ( $\text{mm/s}^2$ ) y de velocidad  $[3000, 3000]$  ( $\text{mm/s}$ ).

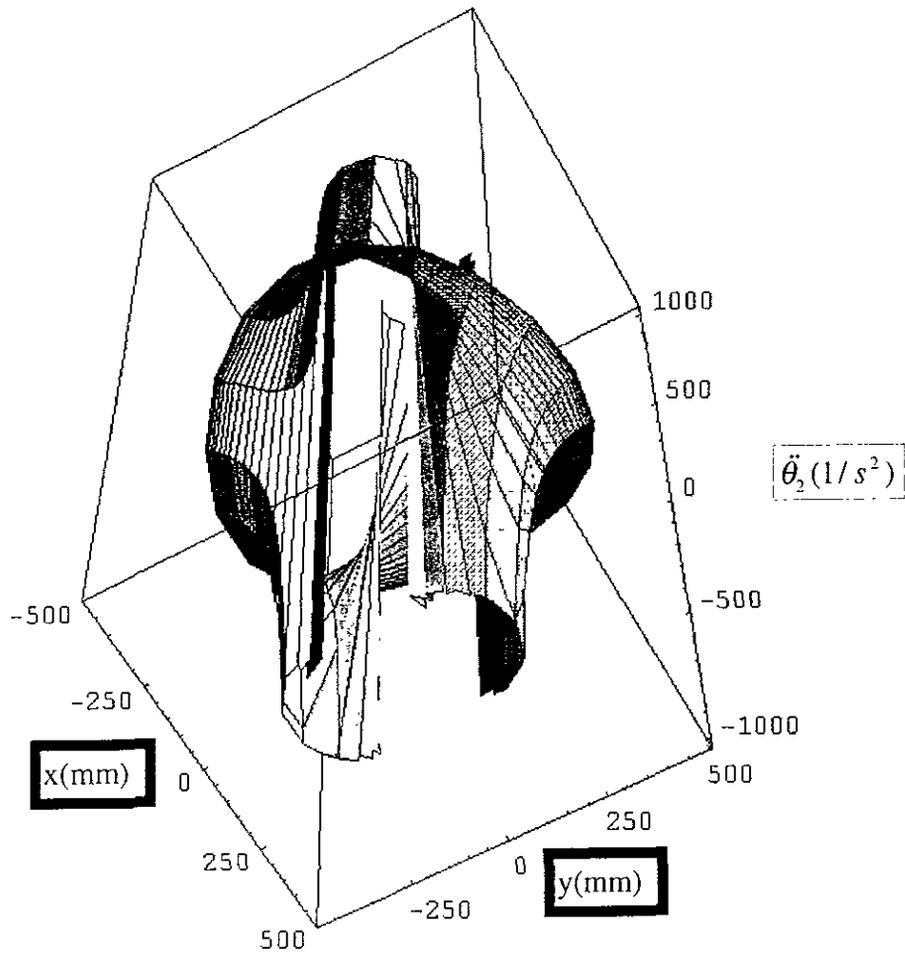


Figura 4.3.11 Que representa al mismo conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ . Los valores de la aceleración están divididos entre 100000 para darle proporción a la gráfica, esto debido a que en el centro se disparan los valores.

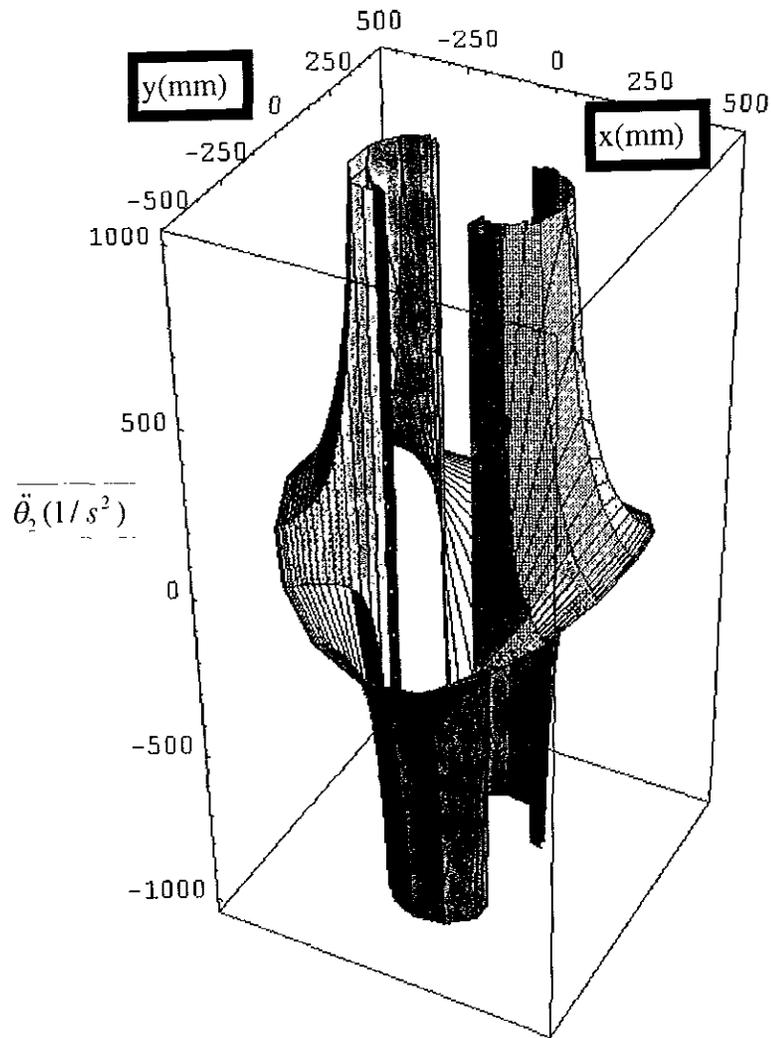


Figura 4.3.12 Es el conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ , es decir, son todas las configuraciones posibles para la segunda solución de la tercera variable articular.

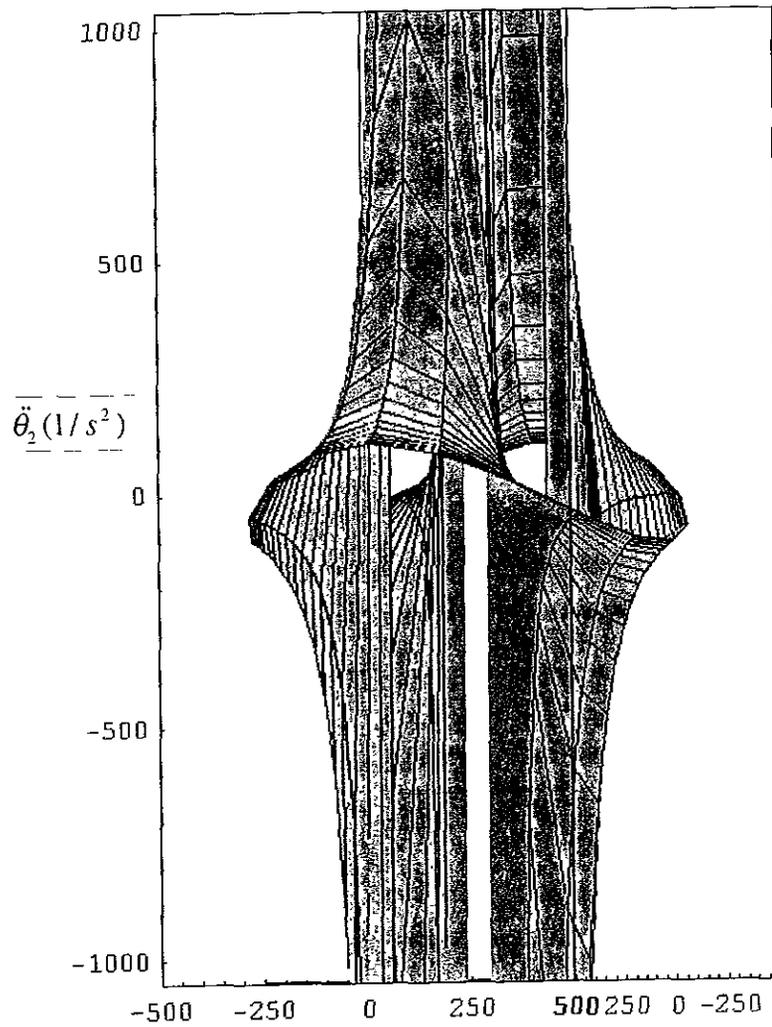


Figura 4.3.13 Es la vista lateral del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ . Aquí también se puede ver como en el centro se presentan picos muy altos y bajos.

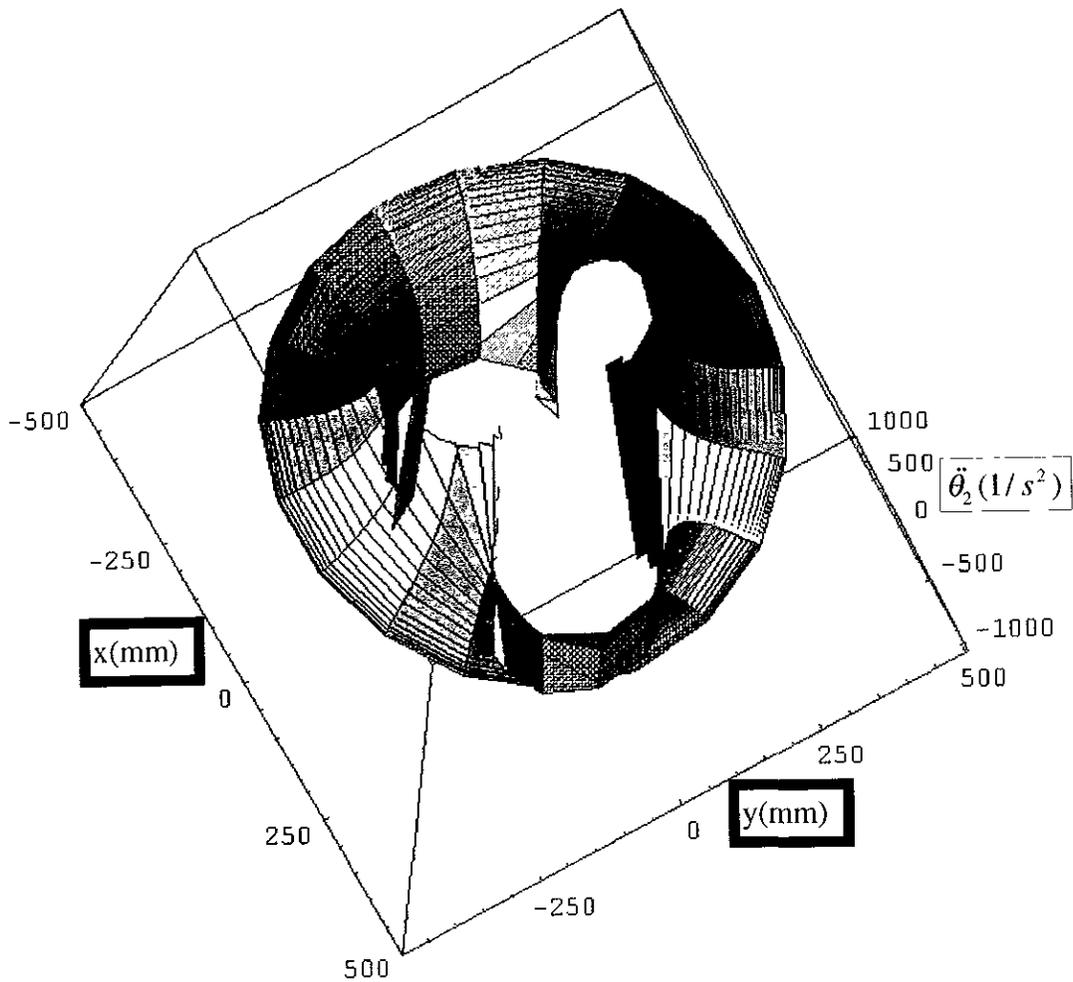


Figura 4.3.14 Muestra una vista inferior del conjunto  ${}_2\Lambda_{\ddot{\theta}_2}^{RG}$ . En esta figura se puede observar como la región geométrica de solución es perfectamente simétrica tanto vertical como horizontalmente.

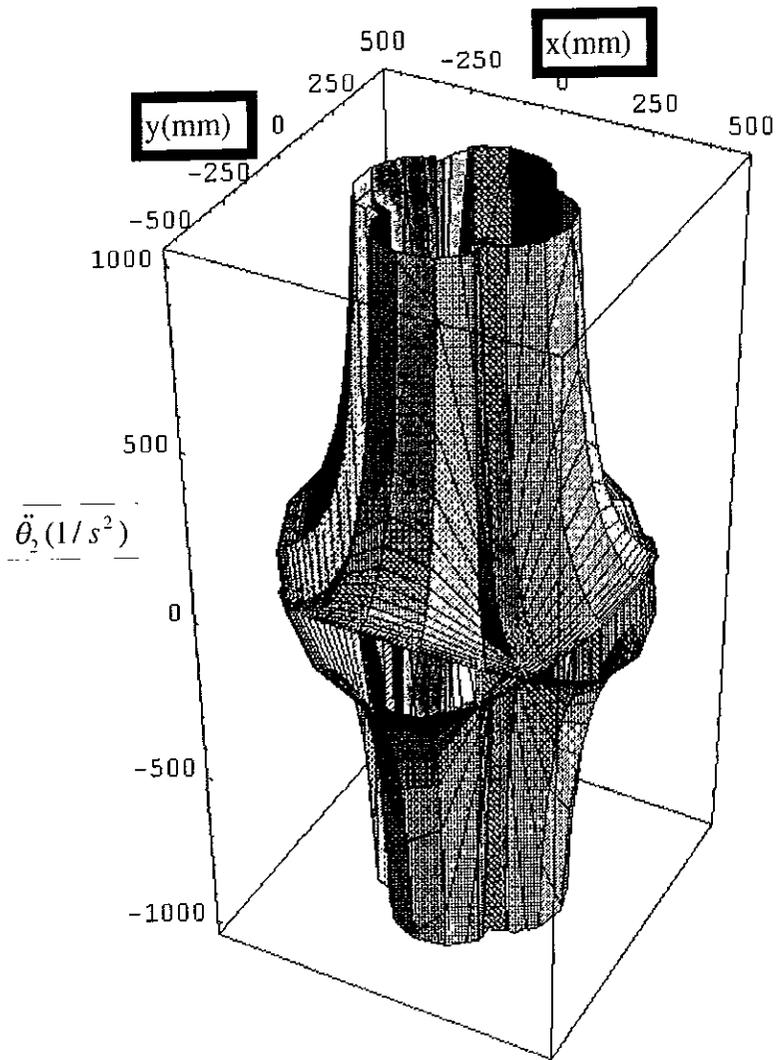


Figura 4.3.15 Este es la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  aquí se puede ver como las soluciones 1 y 2 son simétricas.

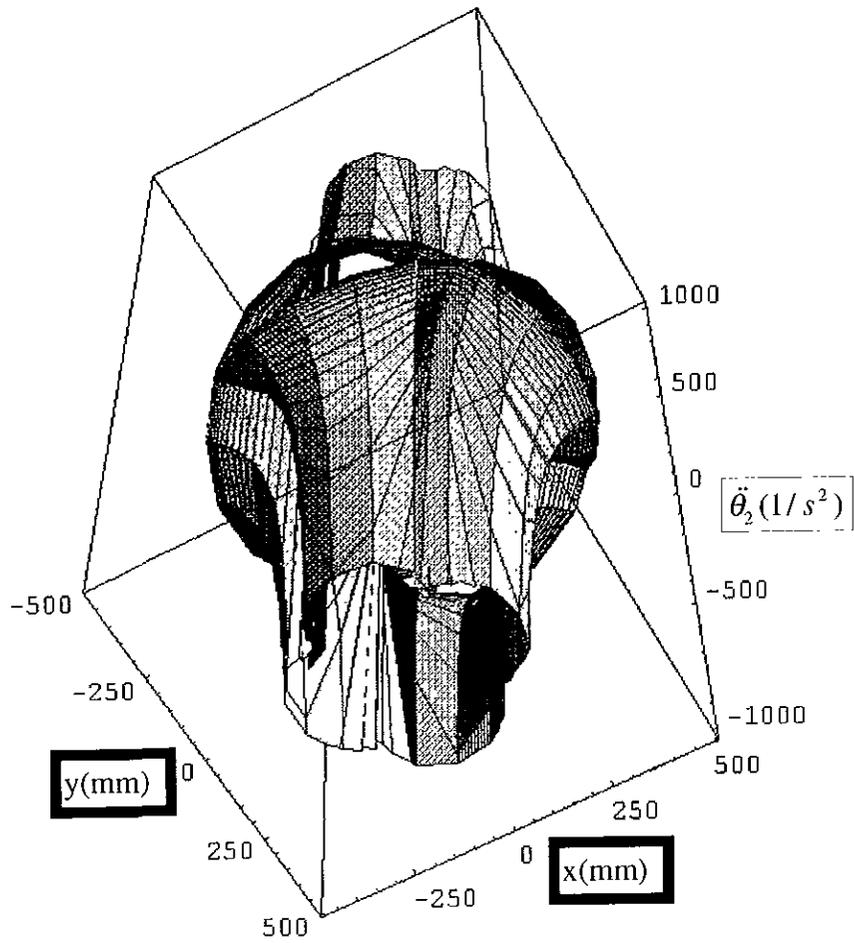


Figura 4.3 16 Es una vista inferior de la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_2}^{RG}$ .

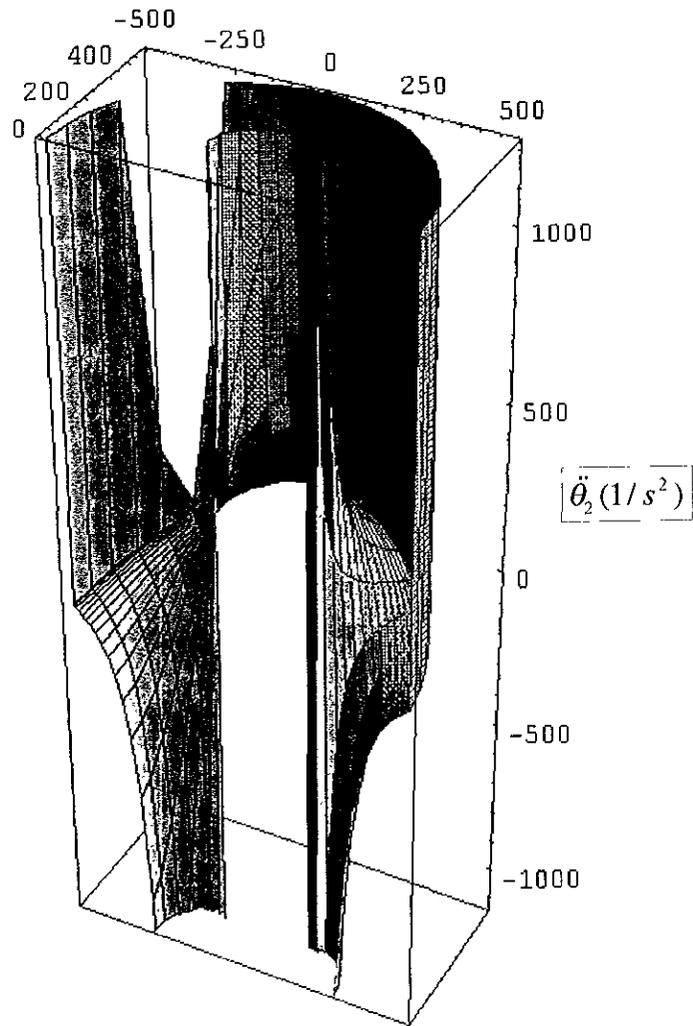


Figura 4.3.17 Es un corte de la unión los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\ddot{\theta}_2}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\ddot{\theta}_2}^{RG}$ .

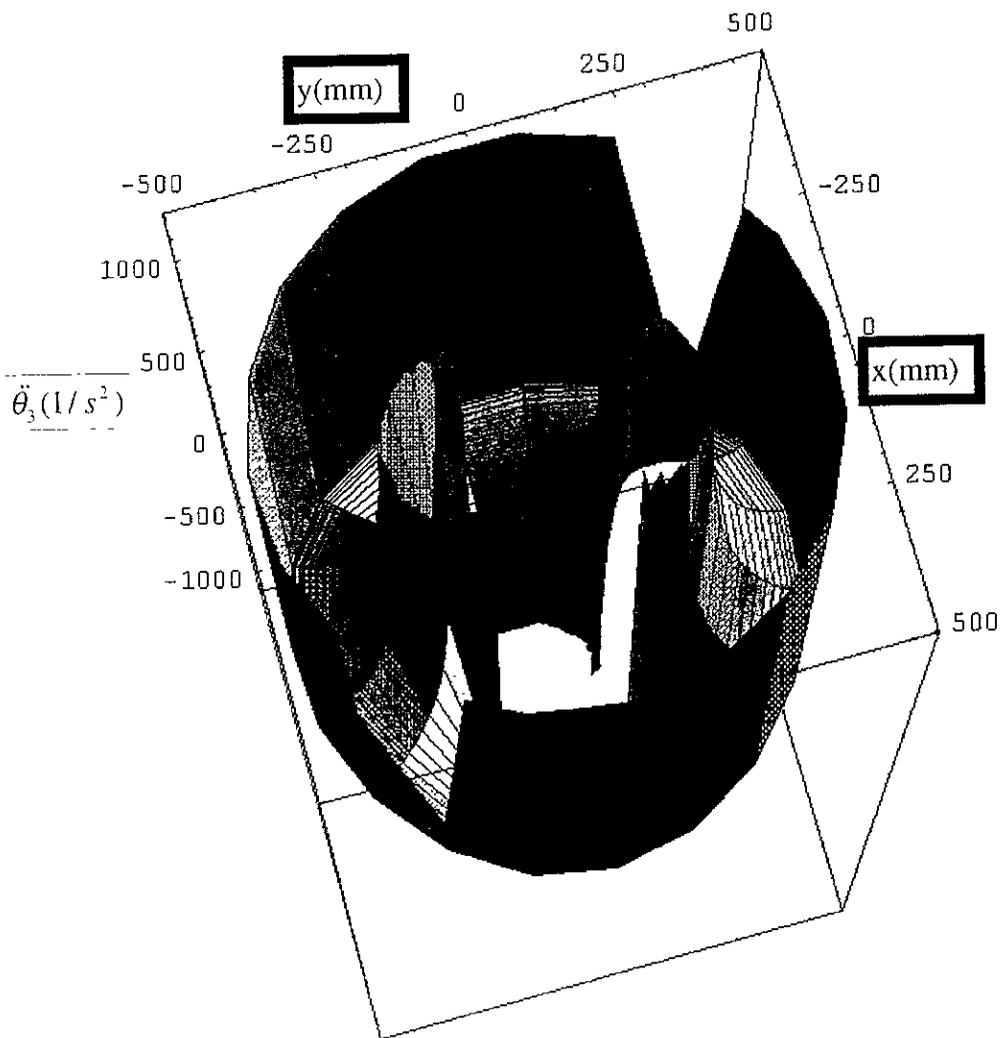


Figura 4.3.18 Que muestra al conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ , es decir, todas las posibles configuraciones de la cuarta variable articular para la primera solución.

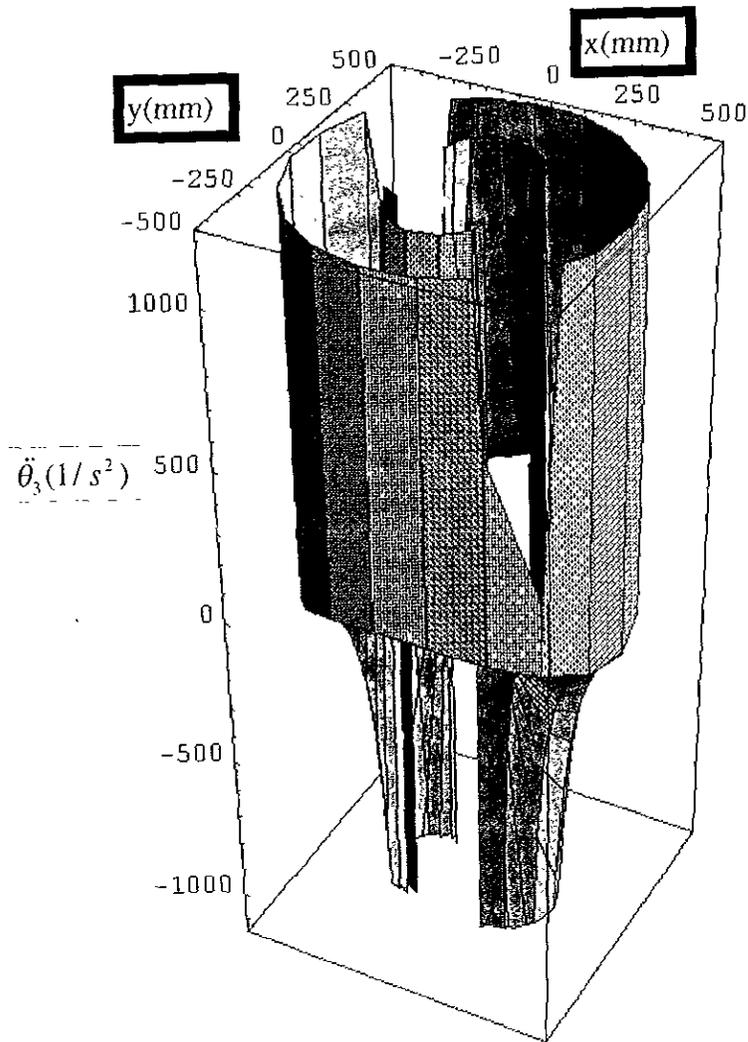


Figura 4.3.19 Es el mismo conjunto  $\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  pero en una vista diferente. Se puede ver como una combinación de las regiones geométricas de aceleración de las dos articulaciones anteriores.

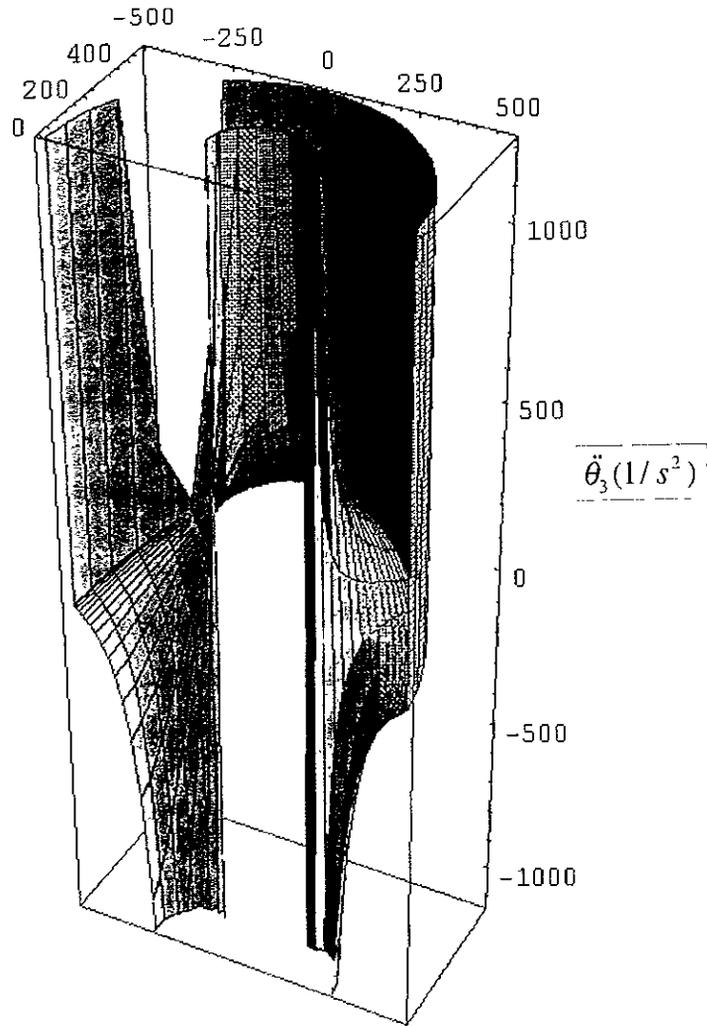


Figura 4.3.20 Es el mismo conjunto  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  pero con un corte a la mitad donde se podrá ver aún con más detalle la idea de que es la combinación de las regiones geométricas de aceleración las dos articulaciones anteriores.

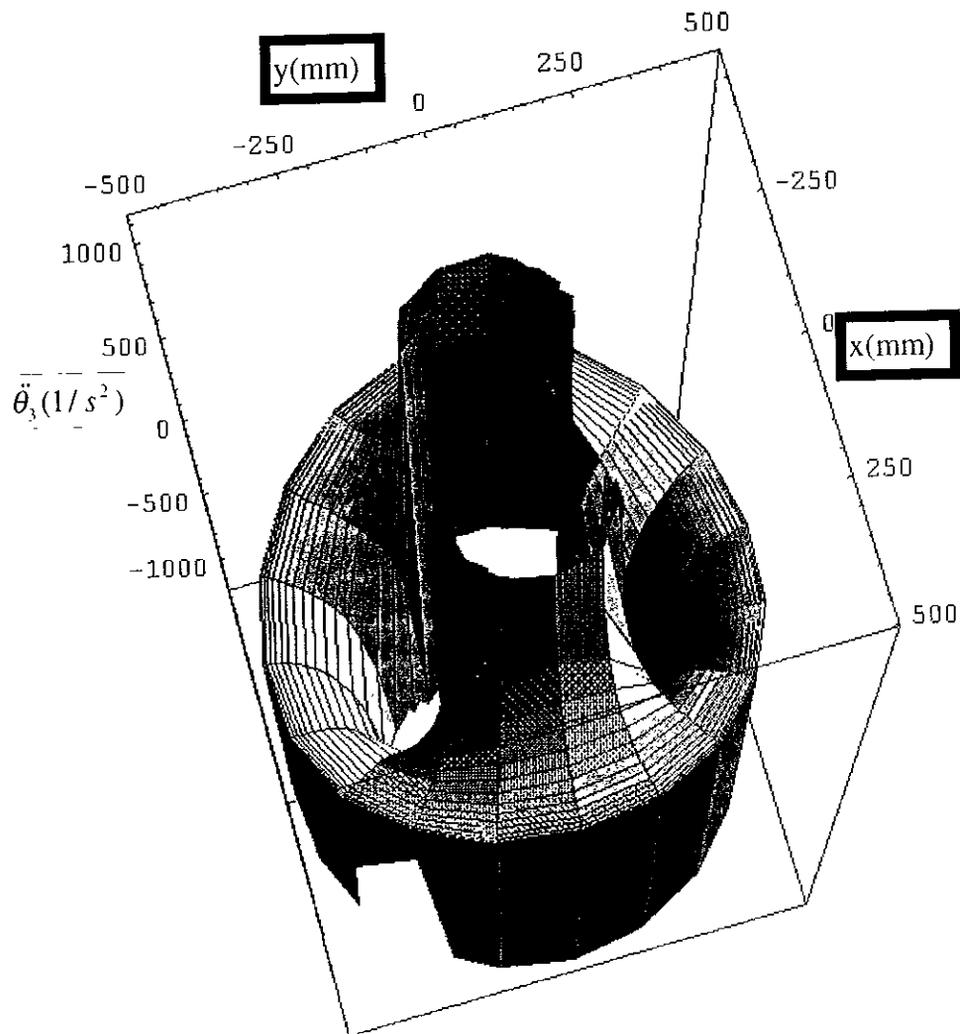


Figura 4.3.21 Esta es una representación del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ , es decir, son todas las posibles configuraciones de aceleración para la cuarta variable articular en su segunda solución .

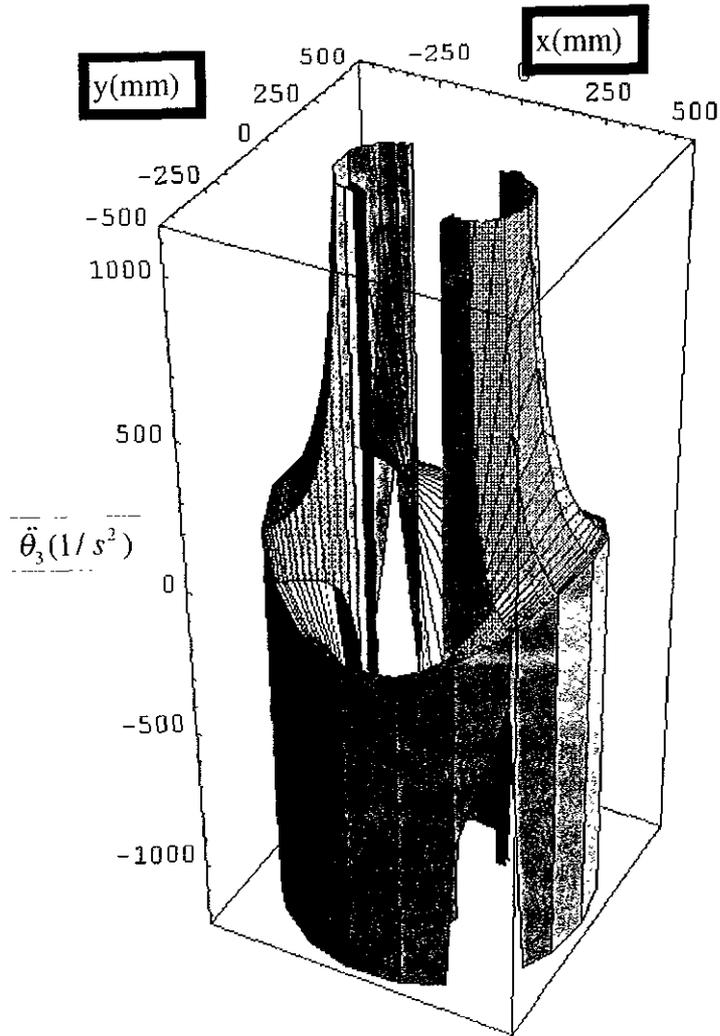


Figura 4.3.22 Este es una vista diferente del mismo conjunto  ${}_2\Lambda_{\ddot{\theta}_3}^{RG}$  al igual que las dos regiones geométricas de aceleración anteriores las soluciones 1 y 2 presentan simetría una con respecto a la otra.

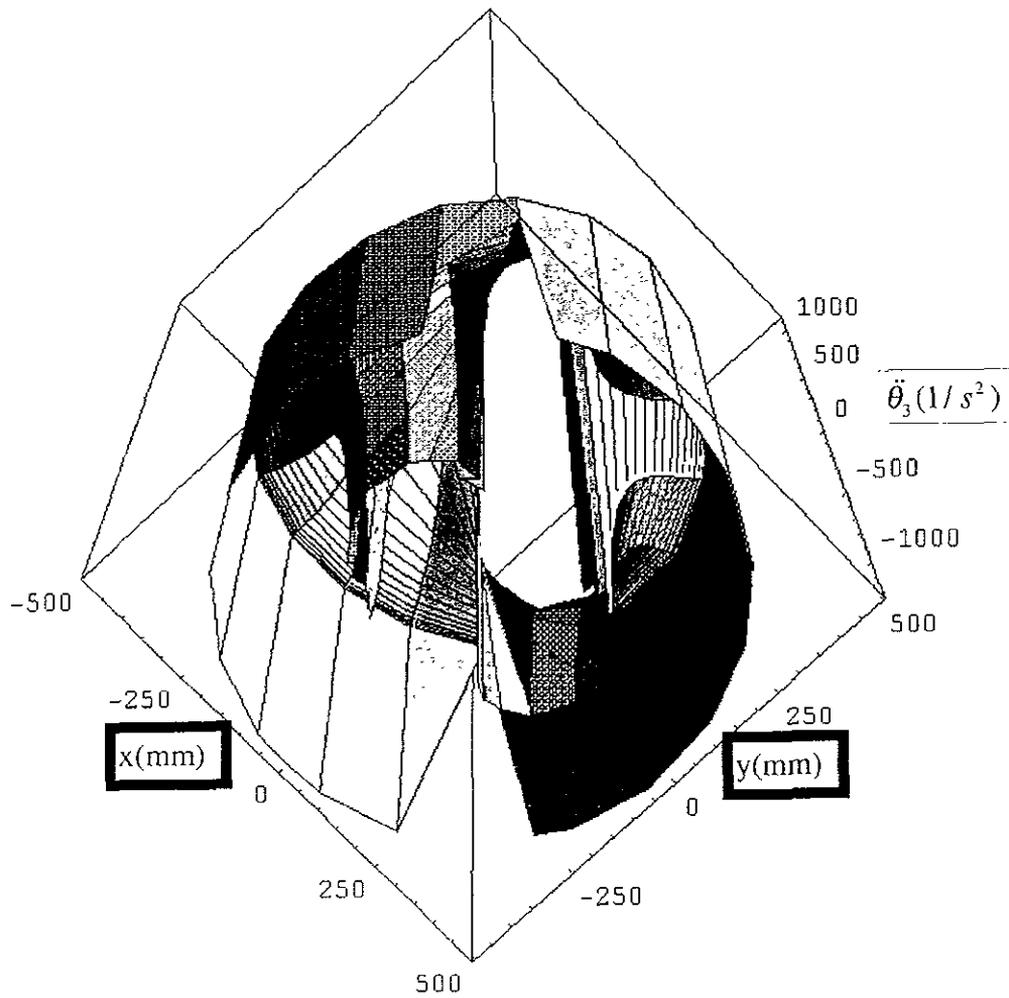


Figura 4.3.23 Vista inferior del conjunto  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ . Como en todas las regiones geométricas de esta parte se considera una aceleración de  $[1000, 1000]$  ( $\text{mm/s}^2$ ) y una velocidad de  $[3000, 3000]$  ( $\text{mm/s}$ ).

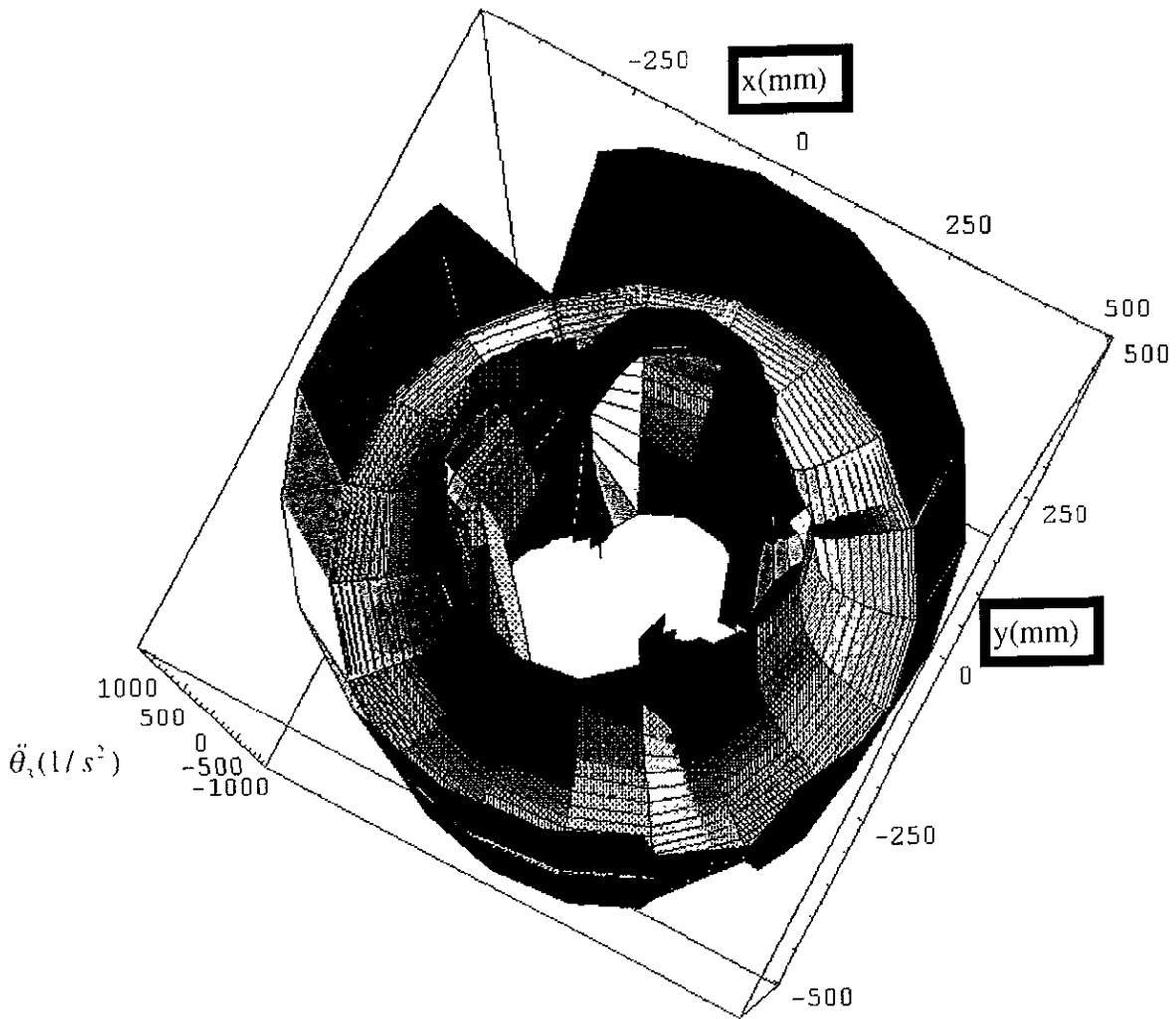


Figura 4.3.24 Representa la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  donde se puede apreciar ahora más claramente la simetría entre estos dos conjuntos.

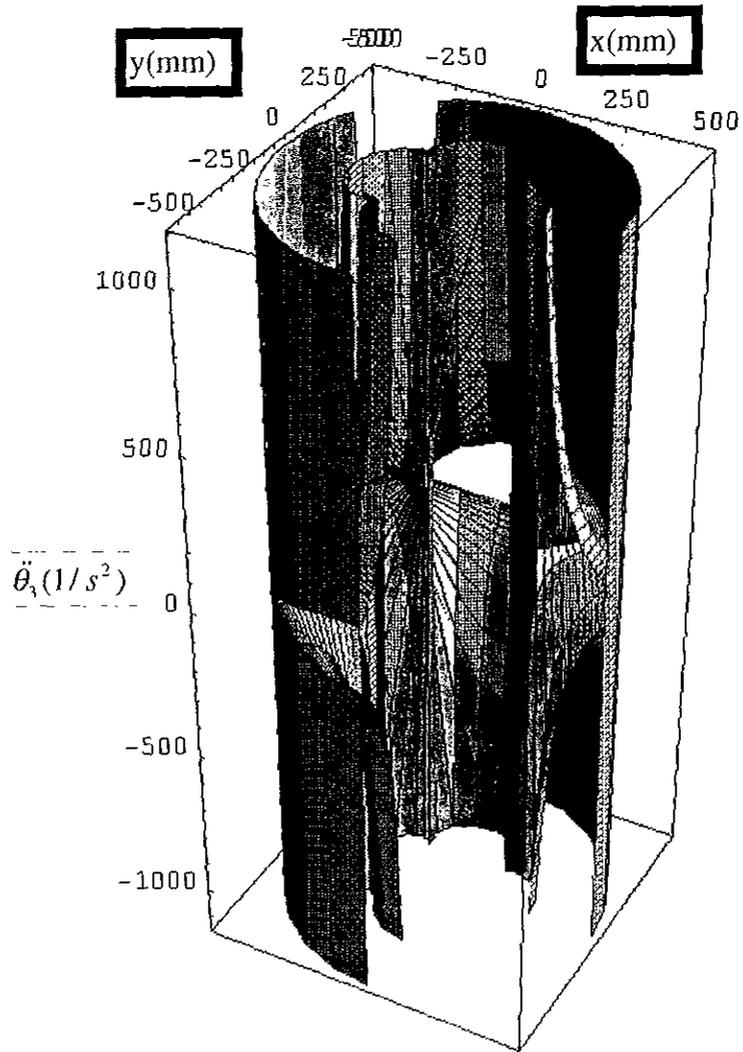


Figura 4.3.25 Es un corte de tres cuartas partes de la región geométrica de la unión de los conjuntos  ${}_1\Lambda_{\theta_3}^{RG}$  y  ${}_2\Lambda_{\theta_3}^{RG}$ .

## 5. LAS REGIONES DE SOLUCIÓN Y SU EFECTO EN LA TRAYECTORIA

En esta parte se tratará sobre el vínculo que existe entre las trayectorias y las regiones geométricas de solución .

Para entender lo que se explicará más adelante se debe comprender claramente lo que son las trayectorias.

Por trayectoria se tienen dos acepciones: la primera que sería *perfil de trayectoria*, que es una gráfica que involucra a la evolución del tiempo con posición, velocidad y aceleración, y la de *lugar geométrico* de la trayectoria que serían una serie de puntos cartesianos por donde pasará el órgano terminal.

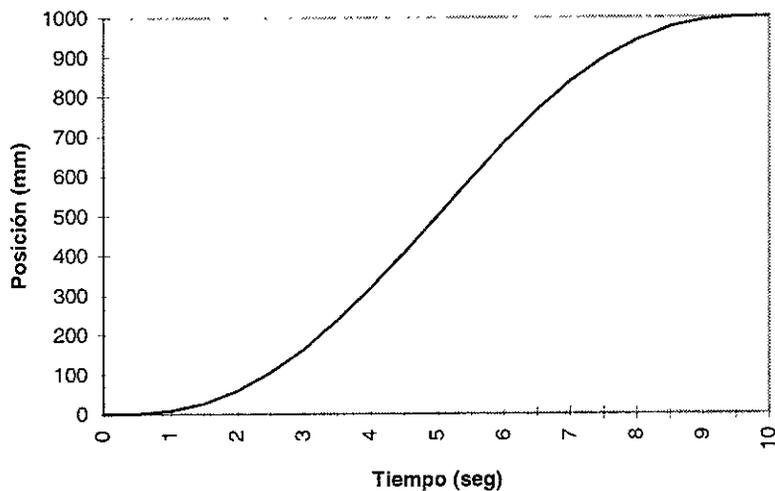
En esta parte se utilizará al perfil de trayectoria como medio de comparación ya que se podrá en estas gráficas encontrar la evolución del movimiento del órgano terminal, ya sea posición, velocidad o aceleración, conforme al tiempo. Entonces se compararán con las regiones de solución que son, como ya se mencionó anteriormente, un subconjunto del espacio articular que cumplen con las reglas G y H, es decir, serán conjuntos que representen al total de soluciones posibles a cualquier punto operacional del manipulador y donde además se podrá deducir la localización de los puntos singulares.

Antes de continuar cabe mencionar que la trayectoria que se busca para este manipulador debe ser eficiente pero por la naturaleza de las obleas de silicio debe presentarse, al mismo tiempo, sin cambios repentinos en la velocidad y aceleración. Para que la trayectoria sea aceptable debe cumplir además con los límites de saturación para que no excedan la capacidad de los actuadores, no se produzca resonancia en la estructura del manipulador, ni exista la posibilidad de que el órgano terminal suelte al objeto de trabajo. Además necesita tener el mejor comportamiento posible en su cercanía a los puntos singulares.

El tipo de trayectoria que cumple más ampliamente con estas expectativas es la de tipo quíntico<sup>1</sup>. Este tipo de trayectoria se rige por polinomios de grado cinco, de ahí el nombre de quíntico. Las curvas en este movimiento son “suaves”, es decir, guardan un cambio discreto en la velocidad y aceleración.

A continuación se muestran los perfiles de posición, velocidad y aceleración (figuras 5.1, 5.12 y 5.13):

**Figura 5.1 Perfil quíntico para la posición**



<sup>1</sup> Según Reporte del Seminario de Investigación Doctoral I. Juárez Campos, Ignacio. 1997.DEPFI-UNAM

Figura 5.2 Perfil quintico para la velocidad

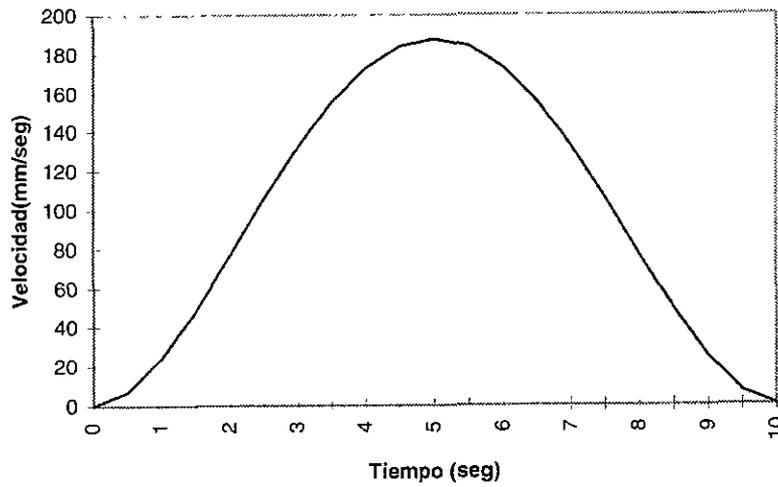
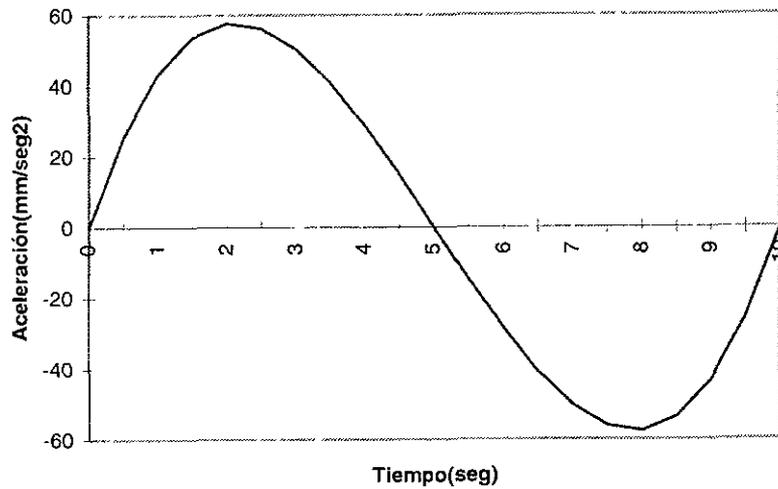


Figura 5.3 Perfil quintico para la aceleración



Estos perfiles son regidos por la siguientes leyes matemáticas (ecuaciones 5.1-5.3).

Posición 
$$q(t) = \sum_{i=0}^5 a_i t^i \quad (5.1)$$

Velocidad 
$$\dot{q}(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \sum_{i=0}^5 i a_i t^{i-1} \quad (5.2)$$

$$\text{Aceleración} \quad \ddot{q}(t) = \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = \sum_{i=0}^5 (i)(i-1)a_i t^{i-2} \quad (5.3)$$

Y evaluando en condiciones iniciales y finales ( $t=0$  y  $t=t_f$ ) se obtienen los coeficientes que definen al polinomio (ecuaciones 5.4-5.5).

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0 \quad (5.4)$$

$$a_3 = 10 \left( \frac{q_f}{t_f^3} \right) \quad (5.5)$$

$$a_4 = -15 \left( \frac{q_f}{t_f^4} \right) \quad (5.6)$$

$$a_5 = 6 \left( \frac{q_f}{t_f^5} \right) \quad (5.7)$$

Así el perfil queda definido como (ecuación 5.8):

$$q(t) = q_f \left\{ 10 \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - 15 \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + 6 \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right\}; \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (5.8)$$

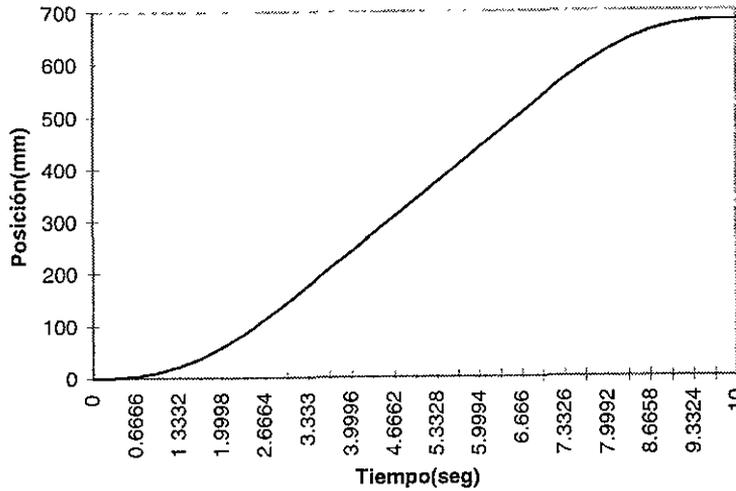
$$\dot{q}(t) = q_f \left\{ 30 \left( \frac{t^2}{t_f^3} \right) - 60 \left( \frac{t^3}{t_f^4} \right) + 30 \left( \frac{t^4}{t_f^5} \right) \right\}; \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (5.9)$$

$$\ddot{q}(t) = q_f \left\{ 60 \left( \frac{t}{t_f^3} \right) - 180 \left( \frac{t^2}{t_f^4} \right) + 120 \left( \frac{t^3}{t_f^5} \right) \right\}; \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq t_f \quad (5.10)$$

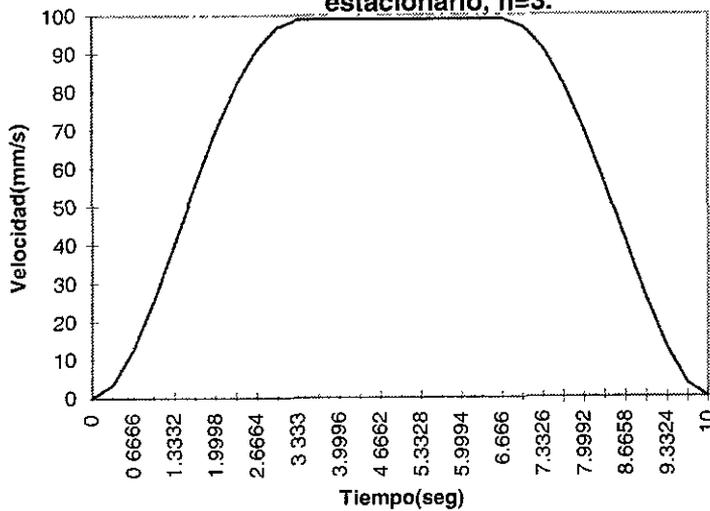
Al igual que en otras tareas de manipuladores como en soldadura o en corte, el transporte de los discos de silicio requiere de un periodo estacionario donde se conserve una velocidad lineal constante y mantener el límite máximo de aceleración radial para evitar el movimiento relativo del órgano terminal con respecto del disco. El período estacionario se controla por el parámetro  $n \geq 2$  que influye en la duración de los dos periodos transitorios:  $(1/n)t_f$ . Estos dos períodos transitorios están interrumpidos por un período

estacionario (sin aceleración). A continuación se mostrarán los perfiles correspondientes a la posición, velocidad y aceleración (figuras 5.4-5.6).

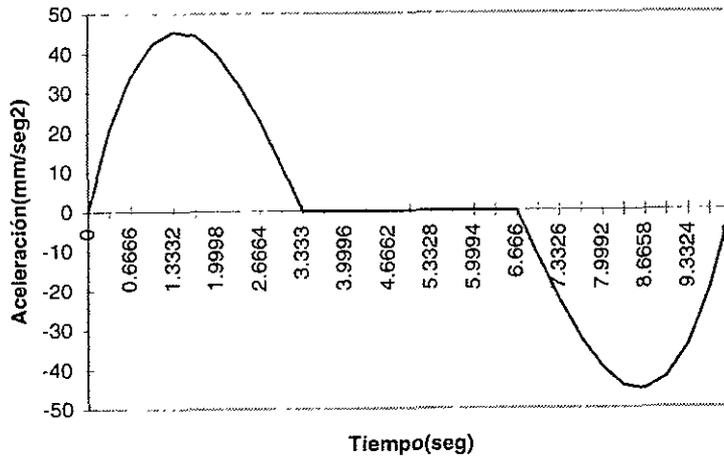
**Figura 5.4 Perfil quintico para la posición con período estacionario,  $n=3$**



**Figura 5.5 Perfil quintico para la velocidad con período estacionario,  $n=3$ .**



**Figura 5.6 Perfil quintico para la aceleración con período estacionario, n=3.**



Aunque en estos perfiles solo se muestra  $n=3$  como ya se mencionó  $n$  puede ser mayor ó igual a 2.

A continuación se muestran la ecuaciones que rigen las trayectoria de la posición, del primer transitorio, del período estacionario y del segundo transitorio (ecuaciones 5.11-5.13).

Fase 1 (primer transitorio):

$$q(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\} * \left\{ n^3 \left( \frac{10}{2^3} \right) \left( \frac{t}{t_f} \right)^3 - n^4 \left( \frac{15}{2^4} \right) \left( \frac{t}{t_f} \right)^4 + n^5 \left( \frac{6}{2^5} \right) \left( \frac{t}{t_f} \right)^5 \right\}; \quad 0 \leq t \leq \frac{t_f}{n} \quad (5.11)$$

Fase 2 (estacionario):

$$q(t) = q \left( \frac{t_f}{n} \right) + \dot{q} \left( \frac{t_f}{n} \right) * \left\{ t - \frac{t_f}{n} \right\}; \quad \frac{t_f}{n} \leq t \leq \left( \frac{n-1}{n} \right) t_f \quad (5.12)$$

Fase 3 (segundo transitorio)

$$q(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\}^* \left\{ n^3 \left( \frac{10}{2^3} \right) \left( \frac{t - \left( \frac{n-2}{n} \right) t_f}{t_f} \right)^3 - n^4 \left( \frac{15}{2^4} \right) \left( \frac{t - \left( \frac{n-2}{n} \right) t_f}{t_f} \right)^4 + n^5 \left( \frac{6}{2^5} \right) \left( \frac{t - \left( \frac{n-2}{n} \right) t_f}{t_f} \right)^5 \right\} + \dot{q} \left( \frac{t_f}{n} \right) \left( \frac{n-2}{n} t_f \right);$$

$$\frac{n-1}{n} t_f \leq t \leq t_f \quad (5.13)$$

El perfil de velocidad se rige con las siguientes ecuaciones (ecuaciones 5.14-5.16):

Fase 1

$$q(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\}^* \left\{ n^3 \left( \frac{30}{2^3} \right) \left( \frac{t^2}{t_f^3} \right) - n^4 \left( \frac{60}{2^4} \right) \left( \frac{t^3}{t_f^4} \right) + n^5 \left( \frac{30}{2^5} \right) \left( \frac{t^4}{t_f^5} \right) \right\}; \quad 0 \leq t \leq \frac{t_f}{n} \quad (5.14)$$

Fase 2

$$\dot{q}(t) = \dot{q} \left( \frac{t_f}{n} \right); \quad \frac{t_f}{n} \leq t \leq \left( \frac{n-1}{n} \right) t_f \quad (5.15)$$

Fase 3

$$q(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\}^* \left\{ n^3 \left( \frac{30}{2^3} \right) \left( \frac{\left( t - \frac{n-2}{n} t_f \right)^2}{t_f^3} \right) - n^4 \left( \frac{60}{2^4} \right) \left( \frac{\left( t - \frac{n-2}{n} t_f \right)^3}{t_f^4} \right) + n^5 \left( \frac{30}{2^5} \right) \left( \frac{\left( t - \frac{n-2}{n} t_f \right)^4}{t_f^5} \right) \right\}; \quad \frac{n-1}{n} t_f \leq t \leq \frac{t_f}{n} \quad (5.16)$$

Y finalmente las ecuaciones que rigen el perfil de aceleración (ecuaciones 5.17-5.19):

Fase 1

$$\ddot{q}(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\} * \left\{ n^3 \left( \frac{60}{2^3} \right) \left( \frac{t}{t_f} \right) - n^4 \left( \frac{180}{2^4} \right) \left( \frac{t^2}{t_f^2} \right) + n^5 \left( \frac{120}{2^5} \right) \left( \frac{t^3}{t_f^3} \right) \right\}; \quad 0 \leq t \leq \frac{t_f}{n} \quad (5.17)$$

Fase 2

$$\ddot{q}(t) = 0; \quad \frac{t_f}{n} \leq t \leq \frac{n-1}{n} t_f \quad (5.18)$$

Fase 3

$$\ddot{q}(t) = \left\{ q_f \left( 1 - \frac{30(n-2)}{32+30(n-2)} \right) \right\} * \left\{ n^3 \left( \frac{60}{2^3} \right) \left( \frac{t - \frac{n-2}{n} t_f}{t_f} \right) - n^4 \left( \frac{180}{2^4} \right) \left( \frac{\left( t - \frac{n-2}{n} t_f \right)^2}{t_f^2} \right) + n^5 \left( \frac{120}{2^5} \right) \left( \frac{\left( t - \frac{n-2}{n} t_f \right)^3}{t_f^3} \right) \right\}; \quad \frac{n-1}{n} t_f \leq t \leq t_f \quad (5.19)$$

Se realizó una simulación como ejemplo que va de  $[479.9,0,100]$ mm a  $[0,479.9,200]$ mm en línea recta. La duración de la trayectoria es de 10 segundos. En la siguiente figura (5.7) se muestra la velocidad de la segunda variable articular.

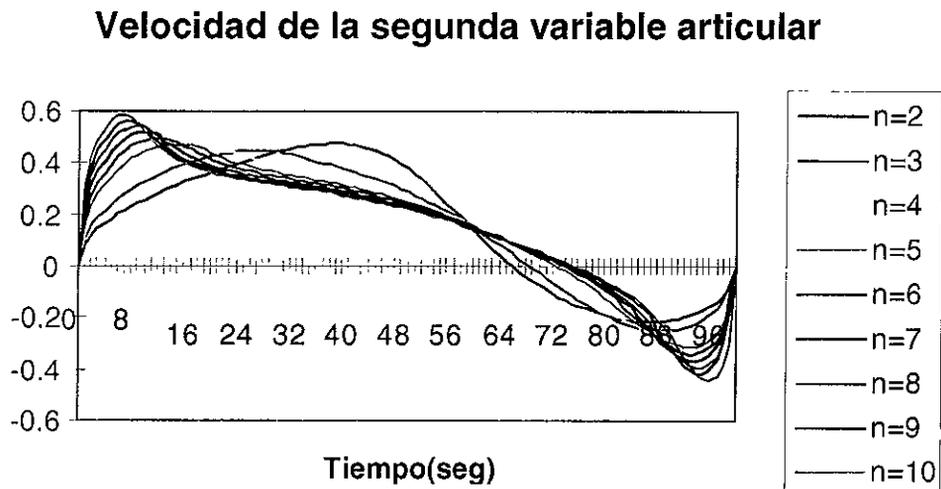


Figura 5.7

Ahora se comparará con la región geométrica de solución de la segunda variable articular (figura 5.8) para una velocidad de  $[-3000,3000]$  mm/seg. La figura muestra una vista lateral del corte del primer cuadrante que es donde se lleva a cabo la trayectoria que está representada por la línea negra.

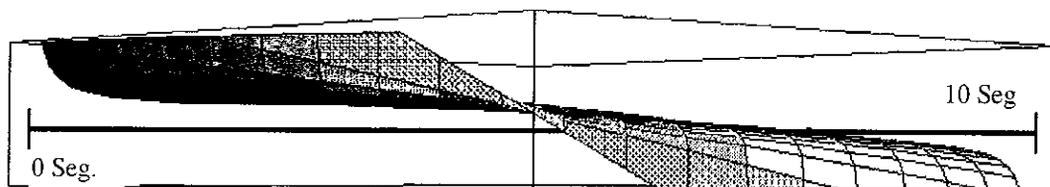


Figura 5.8 En esta figura se aprecia notablemente la influencia de la región geométrica si la comparamos con la trayectoria (figura 5.7)

Como complemento a la figura 5.8 en las siguientes figuras (5.9-5.11) se muestra una vista superior de la misma gráfica donde se podrá corroborar este efecto en la trayectoria.

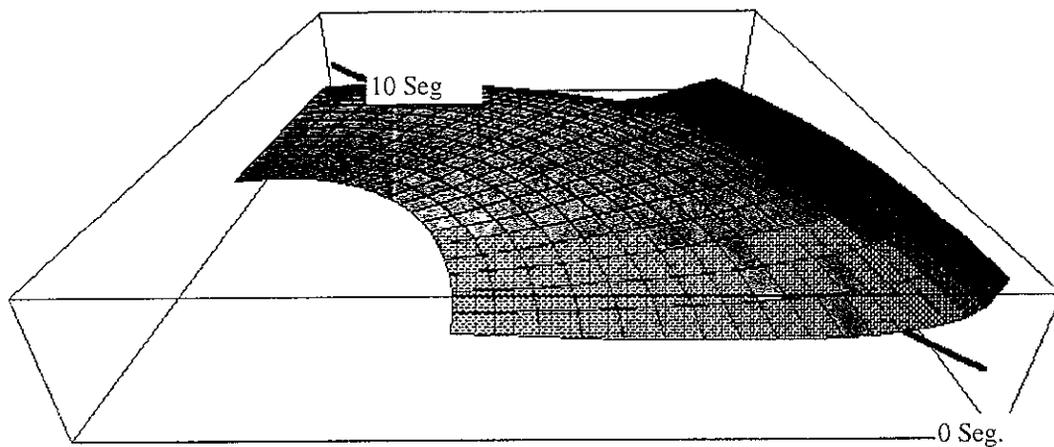


Figura 5.9 Es una vista superior del primer cuadrante, la trayectoria que esta representada por línea negra, comienza en ola esquina inferior derecha del la figura.

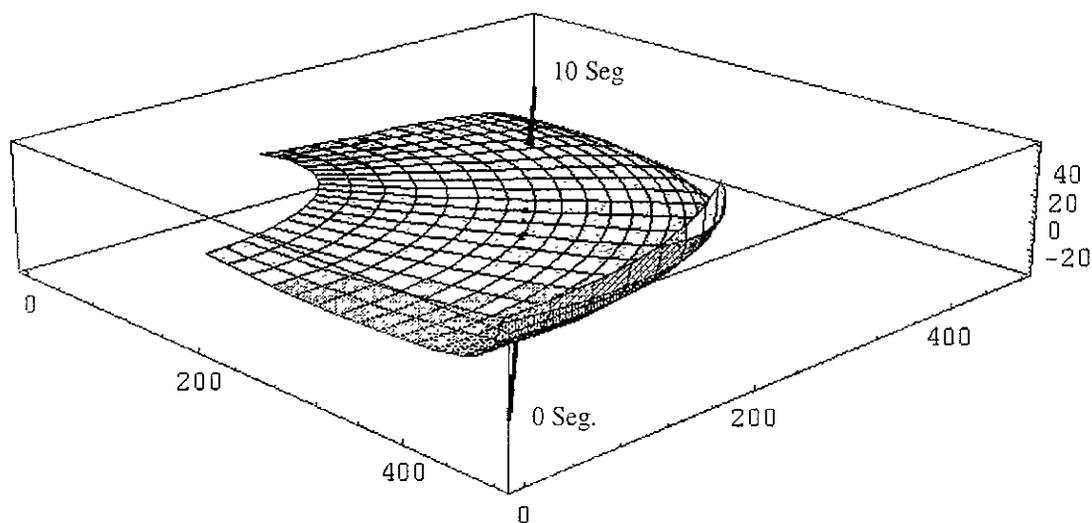


Figura 5.10 Muestra una vista de frente a la trayectoria (línea negra) que inicia por la parte más baja de la figura.

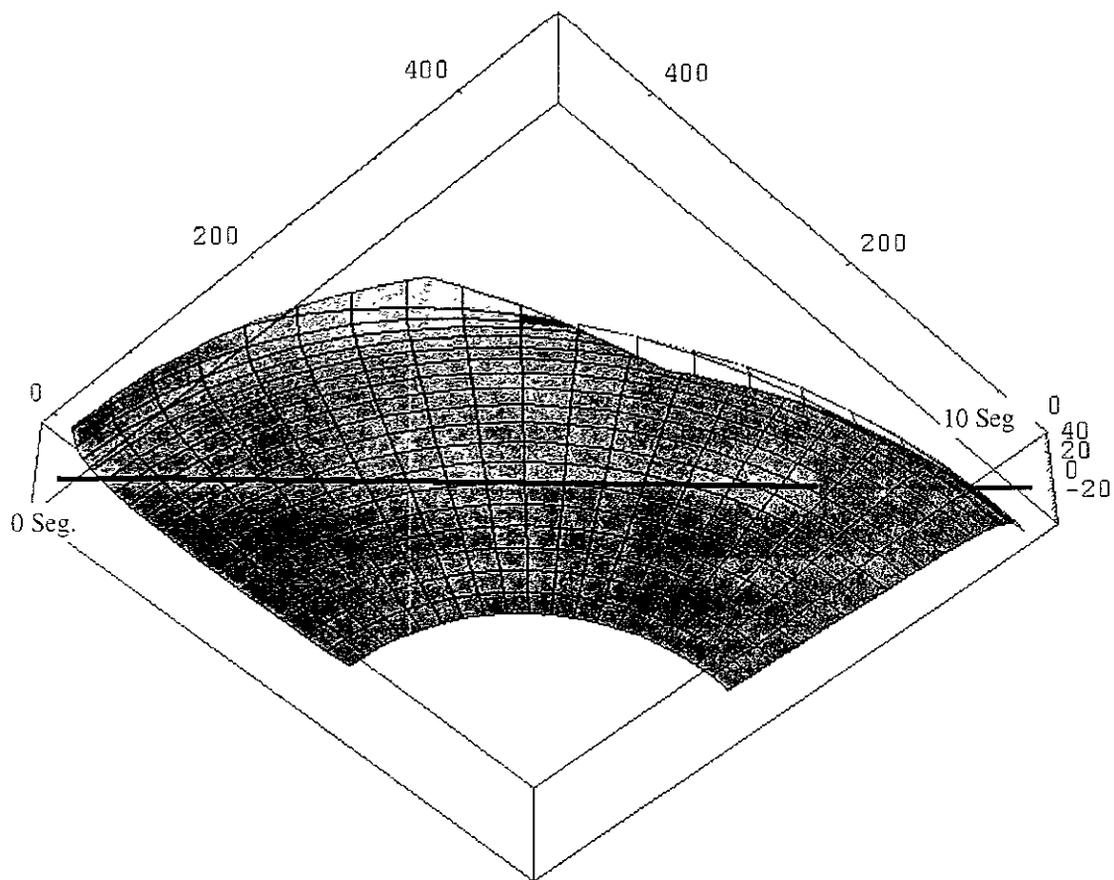


Figura 5.11 Es una vista inferior en donde la trayectoria comienza por el lado izquierdo y acaba en el extremo derecho.

Ahora continuando con el mismo ejemplo pero con la tercera variable articular, se muestra el perfil de evolución de la velocidad de esta variable.

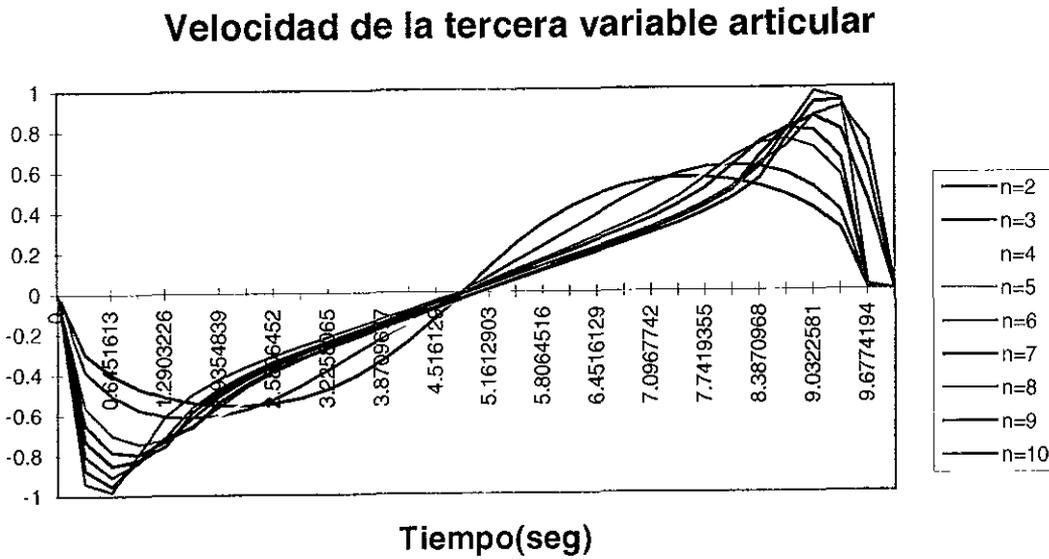


Figura 5.12 Muestra la evolución de la velocidad de la tercera variable articular

A continuación se presenta una vista lateral de la región geométrica (figura 5.13).

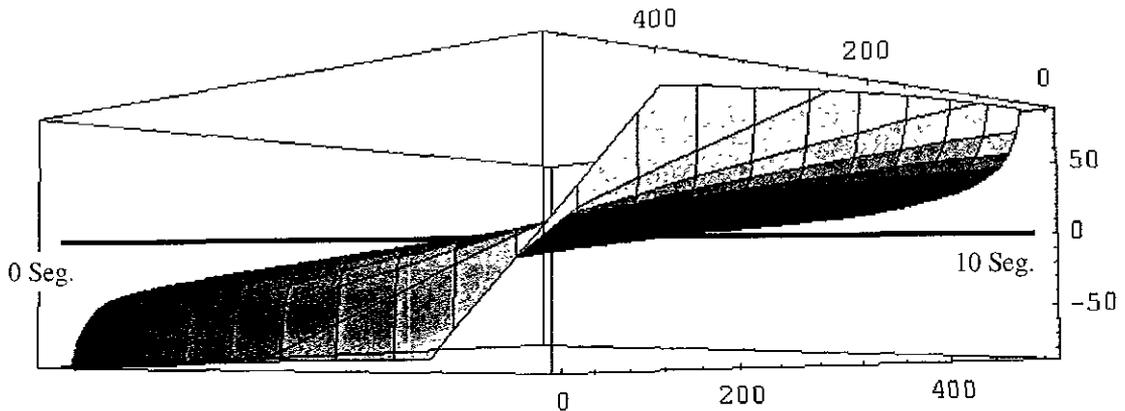


Figura 5.13 Vista lateral de la región geométrica de solución. La línea negra indica la trayectoria que comienza de izquierda a derecha.

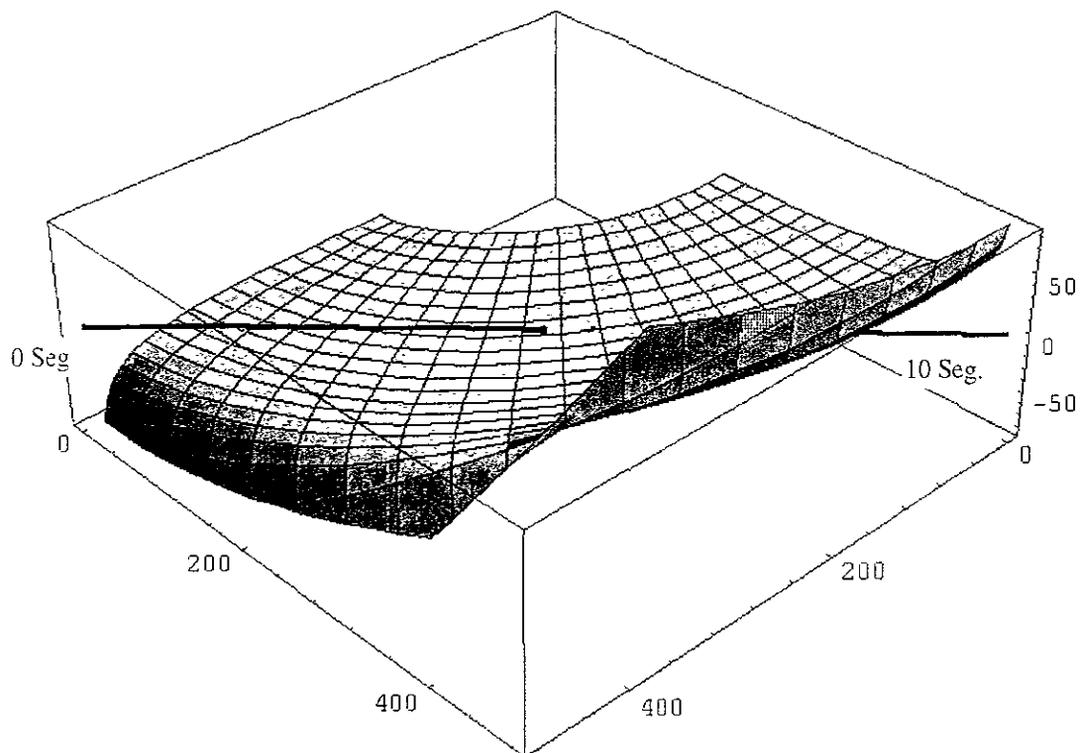


Figura 5.14 Vista superior de la región geométrica mostrando por donde pasa la trayectoria (línea negra). Comparándolo con la trayectoria se puede apreciar con detalle el efecto de la región geométrica: en las orillas se localizan los puntos más altos y más bajos mientras que en la parte céntrica se presentan valles.

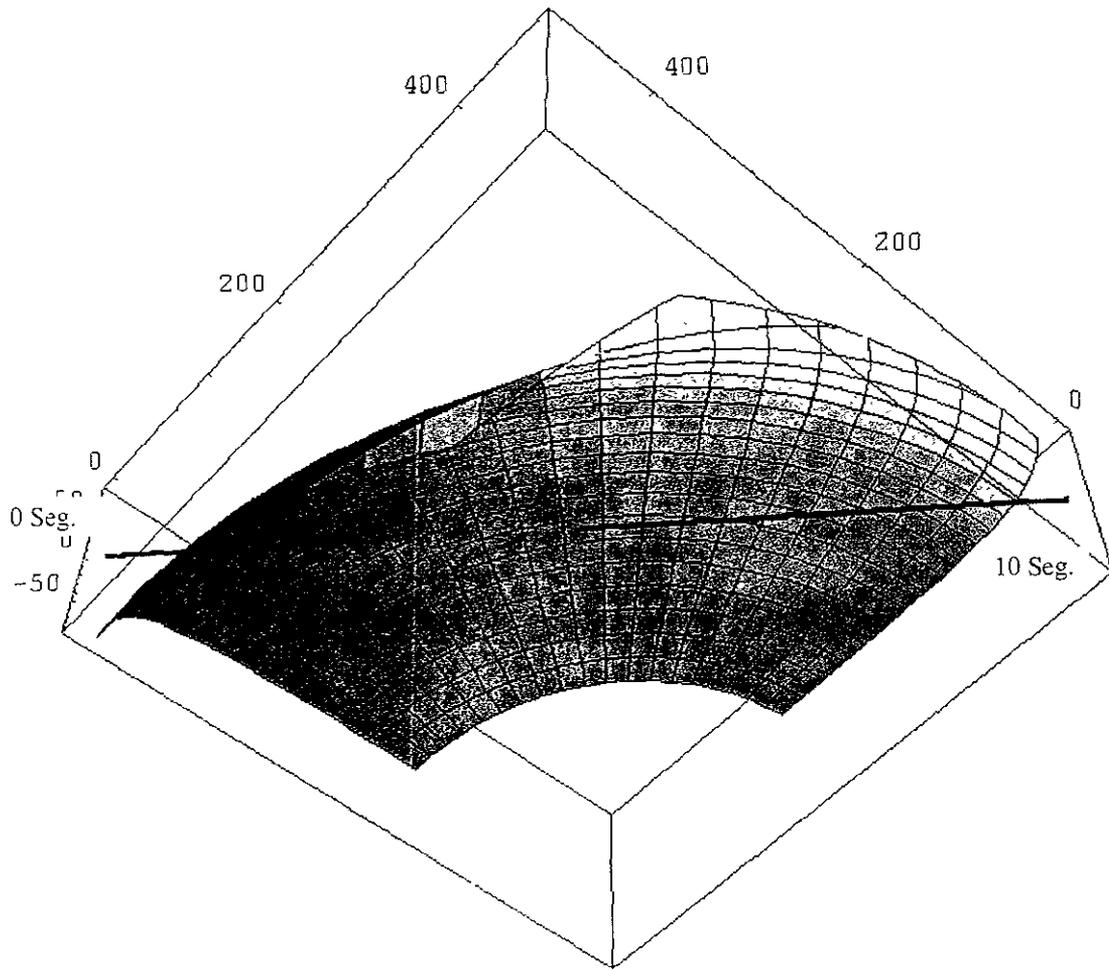


Figura 5.15 Muestra la vista inferior de la región geométrica y la trayectoria (línea negra) que comienza de izquierda a derecha

Siguiendo con el mismo ejemplo pero ahora con la cuarta variable articular se muestra a continuación la evolución de la velocidad de esta variable.

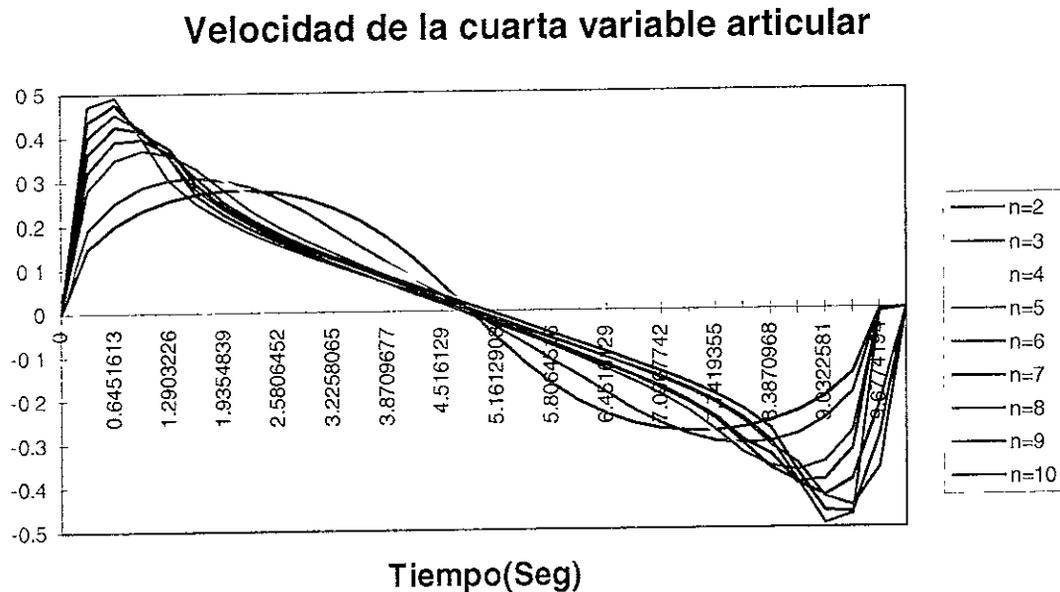


Figura 5.16 Muestra la evolución con el tiempo de la velocidad de la cuarta variable.

Ahora comparándolo con la región geométrica (figura 5.17):



Figura 5.17 Vista lateral de la región geométrica. Se observa como al igual que la trayectoria la región geométrica presenta una simetría muy clara con respecto al tiempo.

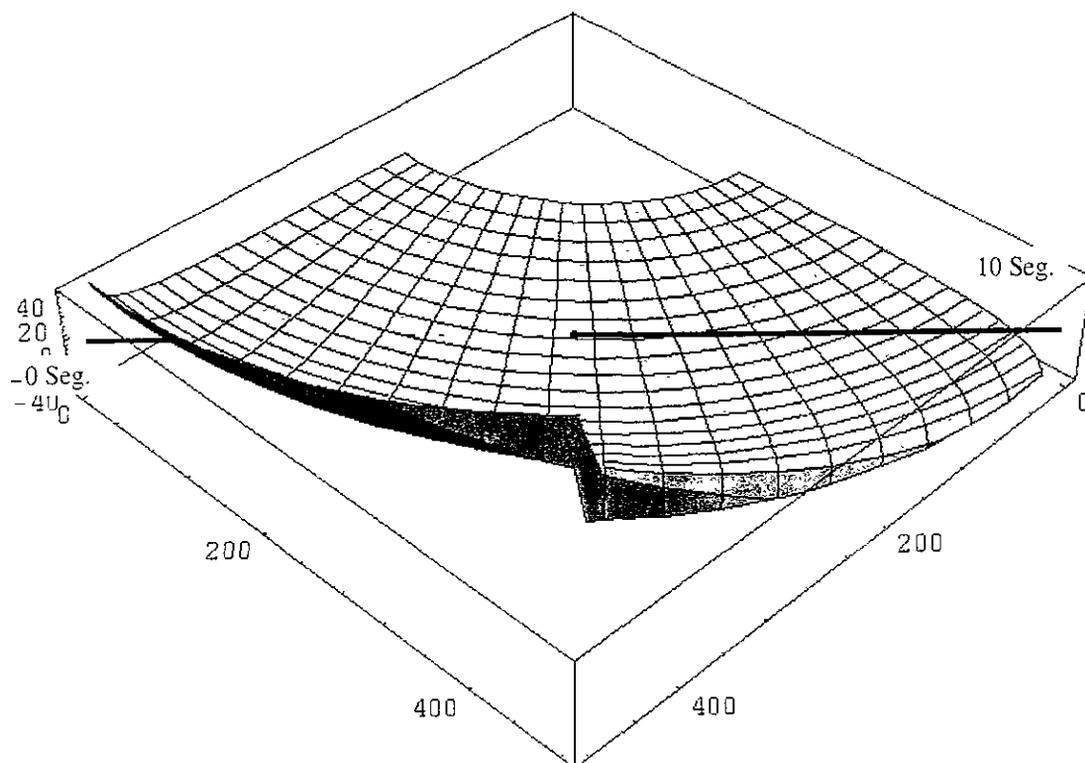


Figura 5.18 Vista superior de la región geométrica de la cuarta variable articular. Aquí también se puede ver como la intersección de la trayectoria con la superficie que representa la región geométrica se encuentra en el centro.

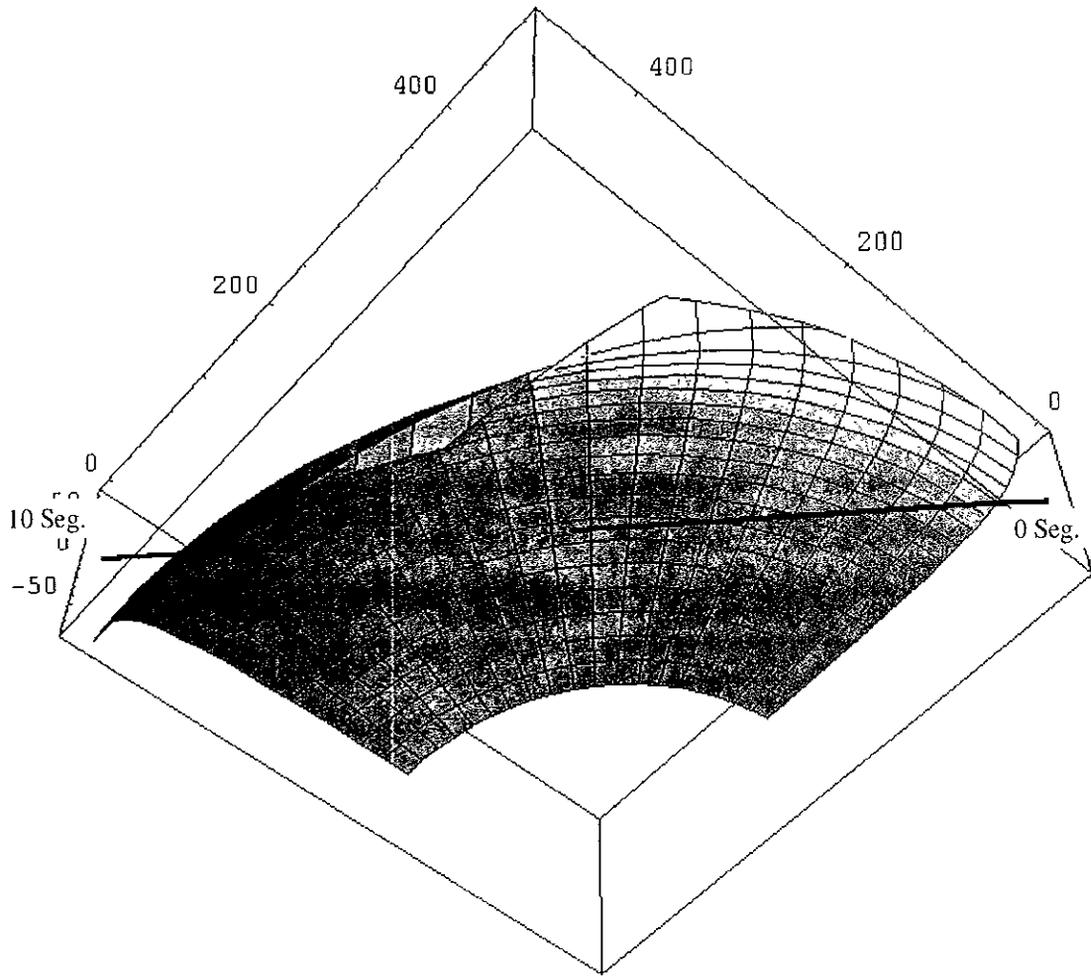


Figura 5.19 Vista inferior de la región geométrica y la trayectoria

Para dar otro ejemplo útil se realizará una trayectoria negativa sobre el eje y en donde se usará toda la capacidad del manipulador para moverse. A continuación se muestra el perfil de trayectoria de la velocidad de la segunda variable articular (fig. 5.20):

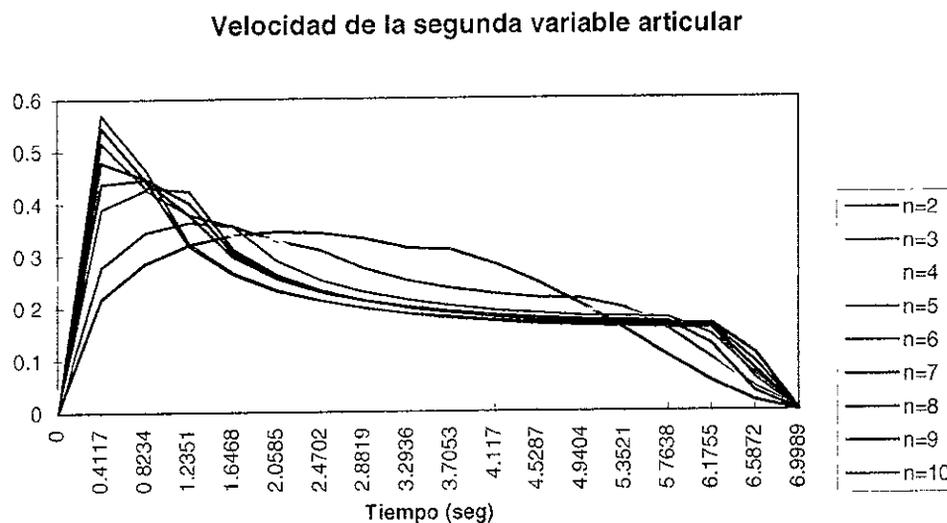


Figura 5.20 Muestra el perfil de trayectoria de la velocidad. El punto inicial es  $[0.480, 100]$ mm y el punto final  $[0.180, 100]$ mm en un tiempo de 7 segundos.

Ahora se mostrará una vista lateral de un corte del primer cuadrante de la región geométrica de solución (figura 5.21) donde se podrá ver la influencia de ésta en la trayectoria.

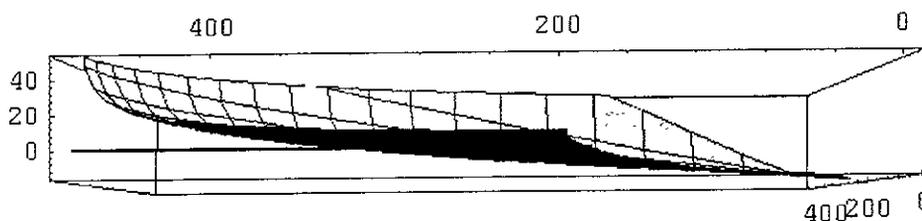


Figura 5.21 Es una vista lateral de un corte de la región geométrica de solución.

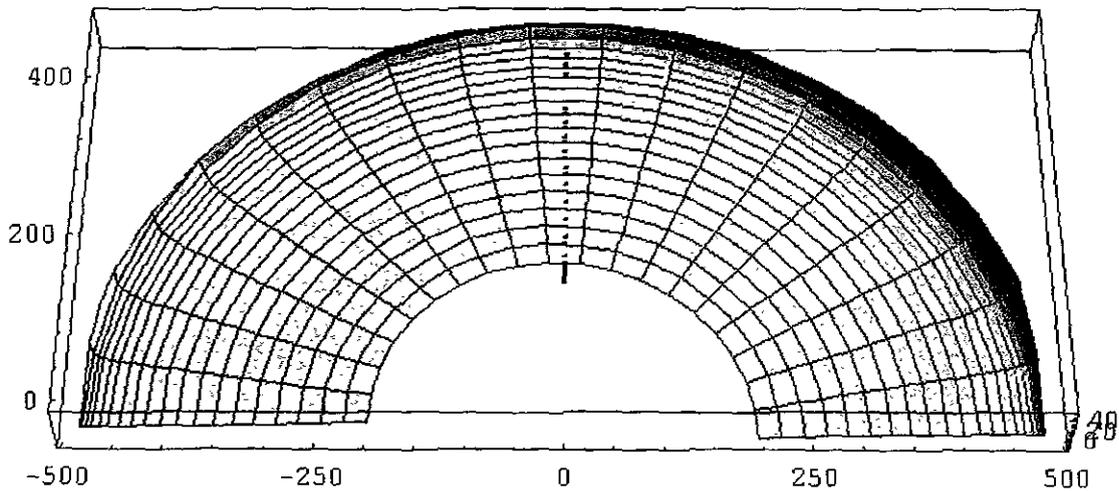


Figura 5.22 Es una vista superior de un corte del primer y segundo cuadrante . La línea negra representa la trayectoria.

Con la misma trayectoria se presenta ahora el perfil de la trayectoria de la tercera variable articular (figura 5.23):

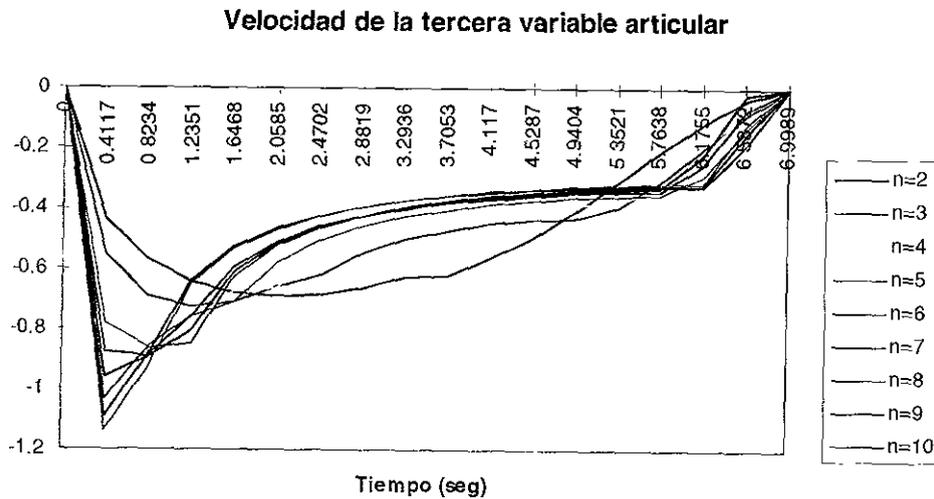


Figura 5.23 Es el perfil de velocidad de la tercera variable articular

Ahora se mostrará una vista lateral, una vista superior, y una vista inferior de cortes de la región geométrica correspondiente a la velocidad de la tercera variable articular (figuras 5.24-5.26).

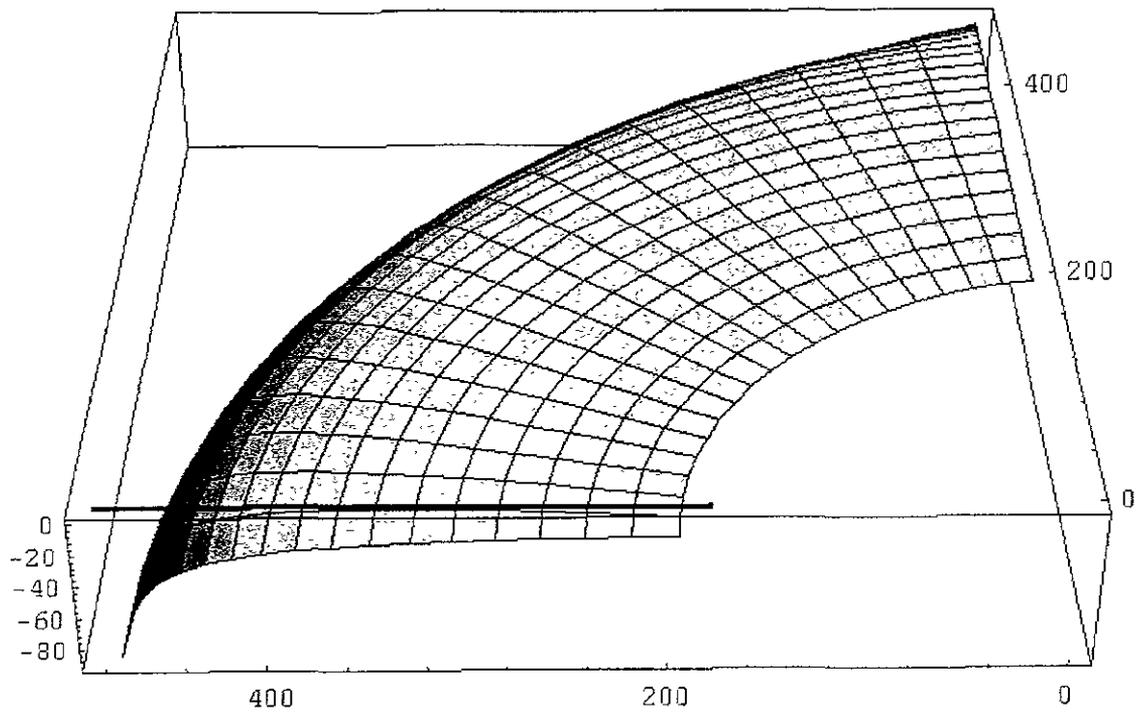


Figura 5.24 Vista lateral de un corte del primer cuadrante de la región geométrica correspondiente a la velocidad de la tercera variable articular con velocidad  $[0, -3000]$ mm/seg.

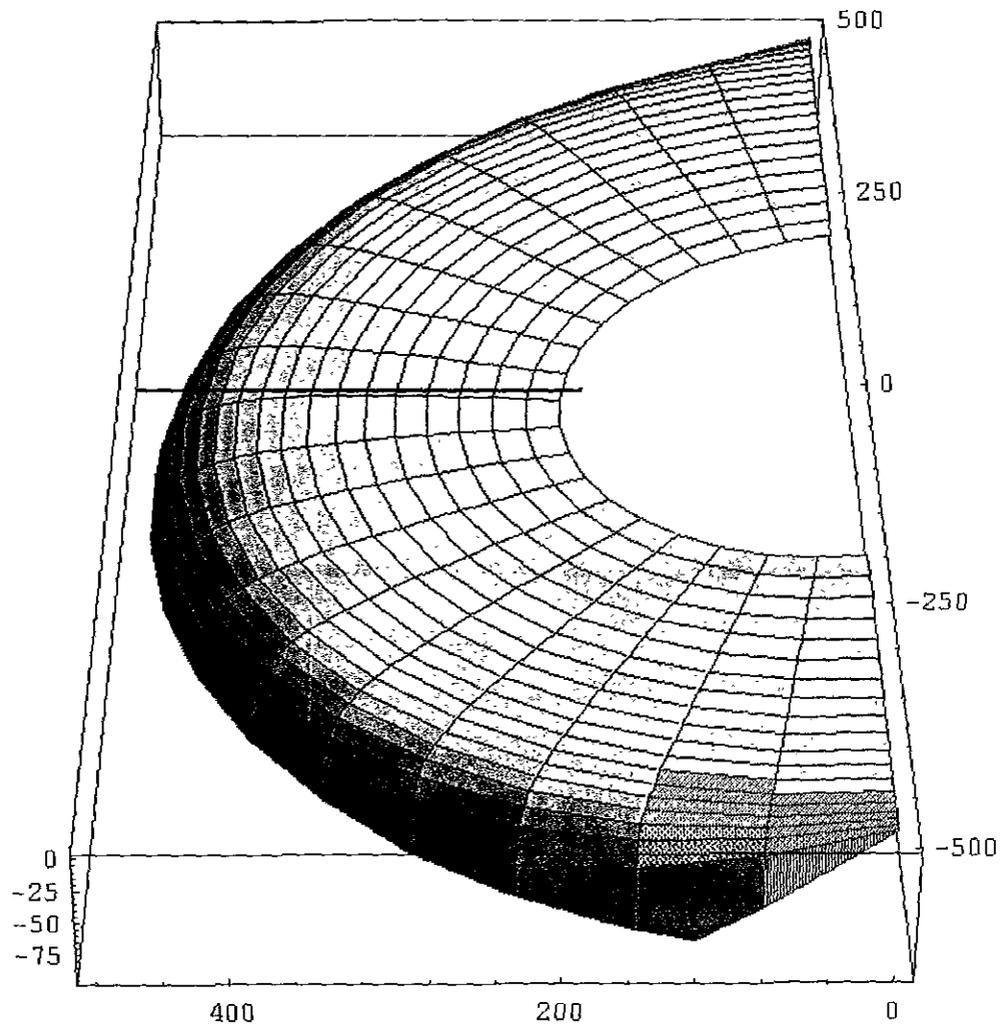


Figura 5.25 Es una vista superior de un corte del primer y segundo cuadrante de la región geométrica correspondiente a la velocidad de la tercera variable articular con velocidad  $[0,-3000]$ mm/seg

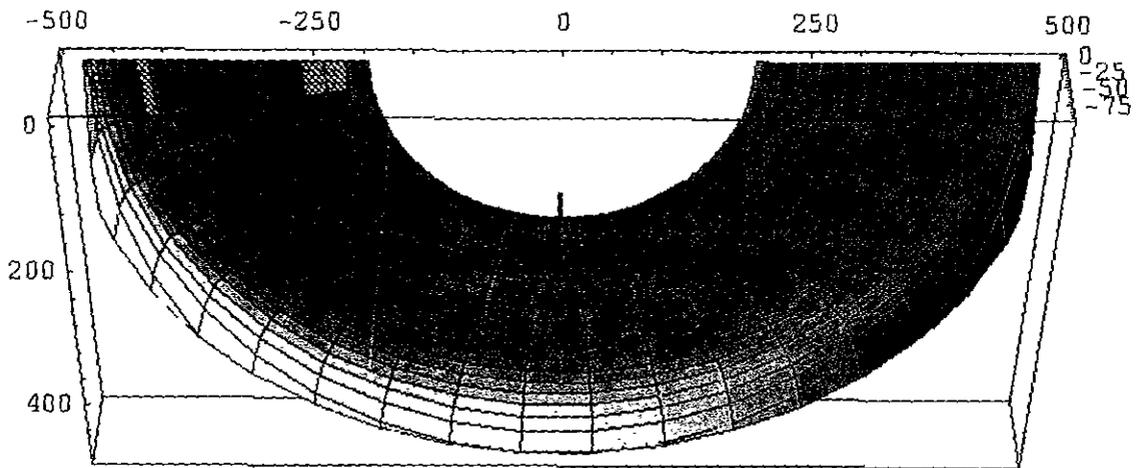


Figura 5.26 Es una vista inferior de un corte del primer y segundo cuadrante de la región geométrica correspondiente a la velocidad de la tercera variable articular con velocidad  $[0,-3000]$ mm/seg.

Siguiendo con el mismo ejemplo se presentará ahora el perfil de velocidad de la cuarta variable articular (figura 5.27).

**Velocidad de la cuarta variable articular**

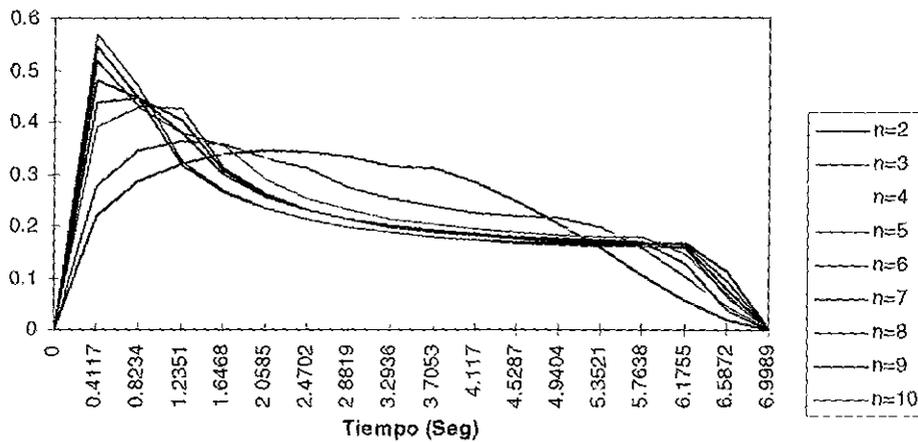


Figura 5.27 Es el perfil de velocidad de la cuarta variable articular.

A continuación se presenta una vista lateral y una superior de un corte del primer cuadrante de la región geométrica correspondiente (figura 5.28-5.29)

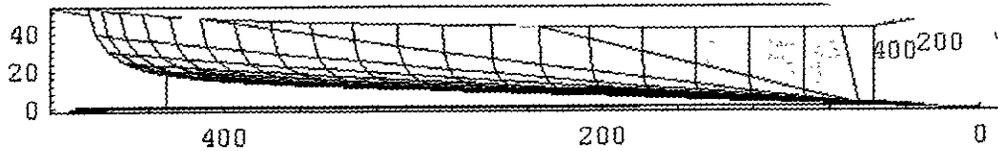


Figura 5.28 Es una vista lateral del corte del primer cuadrante de la región geométrica de solución de la velocidad de la cuarta variable articular.

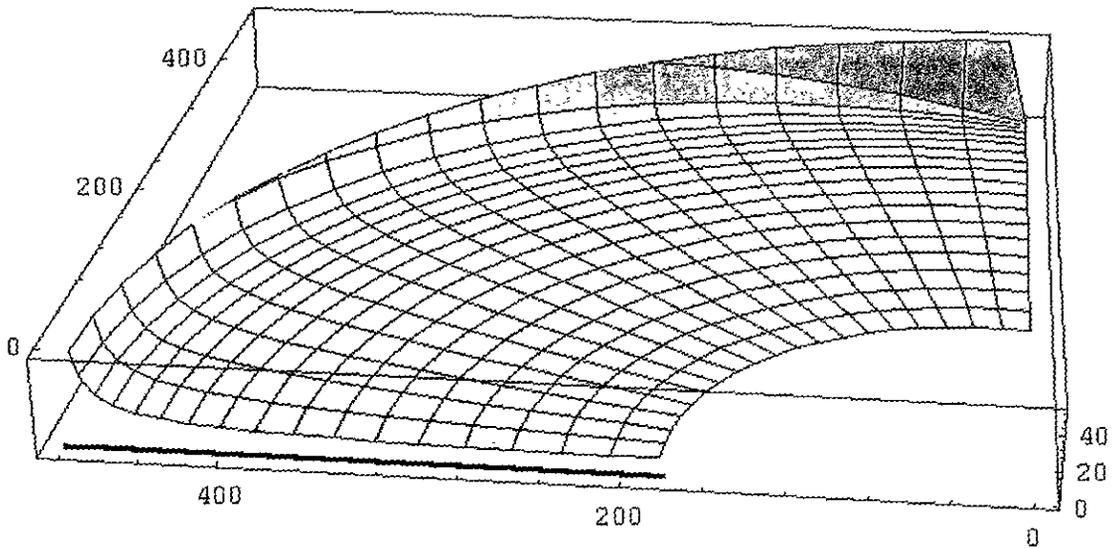


Figura 5.29 Es una vista diferente de la figura 5.22 donde se puede ver la trayectoria que está representada por la línea negra.

Después de observar el efecto en la trayectoria que tienen los conjuntos solución se puede decir que ahora se puede predecir el comportamiento que tendrá la trayectoria con tan solo observar la región geométrica correspondiente. Si por ejemplo se quiere saber el comportamiento de movimiento radial positivo sobre el eje  $x$  se podrá predecir observando la región geométrica con velocidad  $[3000,0]$ .

## 6. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

### Resultados

Para este trabajo se propusieron componentes de velocidad del órgano terminal de magnitud de 3000 mm/seg y aceleración de 1000 mm/seg<sup>2</sup> en todos los cuadrantes del volumen de trabajo y se pueden observar las distintas combinaciones de estos en los anexos correspondientes a la velocidad y aceleración.

### Conclusiones

- La no linealidad de los conjuntos universales de solución afectan directamente a la trayectoria.
- Los resultados obtenidos en este trabajo concluyen que los puntos singulares que se presentan principalmente en las orillas deben ser tomados en cuenta para un rediseño de la trayectoria, en este rediseño se moderará la aceleración en las partes cercanas a los puntos singulares mientras que en las partes lejanas a estos puntos se podrá incrementar. La ventaja que se tiene ahora es que teniendo los conjuntos de solución representados gráficamente y conociendo su efecto en la trayectoria se podrá realizar el rediseño de una manera práctica y atinada. El diseño de las trayectoria con perfiles de polinomios de grado superior producirán mejores resultados al tener en los extremos velocidad y aceleración bajas mientras que a la mitad del recorrido se puede aumentar considerablemente el cambio de posición y de velocidad, un ejemplo de esto puede ser el polinomio de grado 8 el cual cumple con estas características, sin embargo un polinomio de grado superior producirá mayor inestabilidad en el control del robot.
- Es preferible nunca operar el manipulador en configuraciones cercanas a la singularidad porque se presentan grandes velocidades y aceleraciones lo que producirá altos niveles de vibraciones y estas a su vez tendrán como efecto un gran desgaste en los elementos con movimiento relativo produciendo posible microcontaminación.
- Los componentes radiales generarán niveles de velocidad y aceleración a diferencia de los componentes tangenciales, El ángulo  $\beta$  es el causante de movimientos radiales y este es el que se debe moderar en su cambio de magnitud posición y velocidad.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

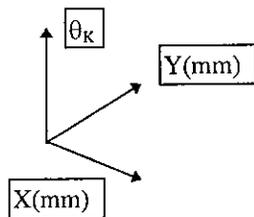
- Juárez Campos, Ignacio. 1997. Reporte del Seminario de Investigación Doctoral I. DEPFI-UNAM.
- Juárez Campos, Ignacio. 1997. Reporte del Seminario de Investigación Doctoral II. DEPFI-UNAM
- Sciavicchio, L; Siciliano, Bruno. 1996. Modeling and Control of Robot Manipulators. Mc Graw Hill.
- Craig, J.J. 1989. Introduction to Robotics. Addison Wesley
- Juárez Campos, Ignacio. 1996. Diseño y Construcción de un Manipulador de 5 GDL Tesis de maestría. DEPFI-UNAM.
- Marsden, Jerrold E. 1991. Cálculo Vectorial. Addison Wesley

## 8. ANEXOS

En los anexos se podrán encontrar las variaciones de las regiones geométricas; es decir, las variaciones de la dirección y valor de la velocidad y aceleración.

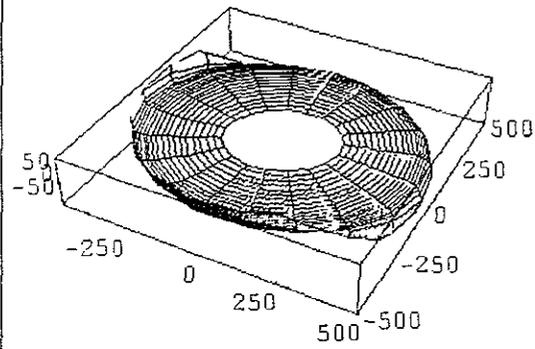
Para esto solo se uso la primera solución , como ya se mencionó en los capítulos de conjuntos de solución, la segunda solución será negativa a la primera.

El sistema de referencia está colocado de la siguiente forma:

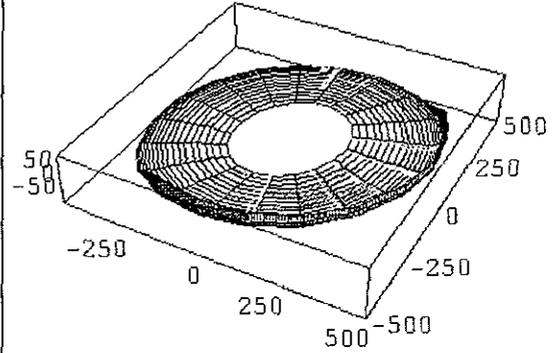


Las unidades usadas al igual que las divisiones (para darle proporción a la gráfica) son las mismas que se efectuaron en las partes 4.2 y 4.3).

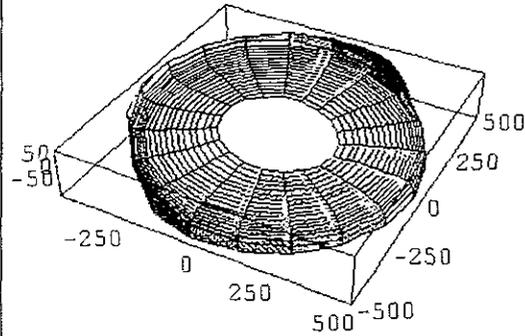
En los anexos también se pueden encontrar los programas que se hicieron para crear la gráficas mostradas en este trabajo. El Software usado fué Mathematica for Windows 2.2.1, Wolfram Research Inc. 1993.



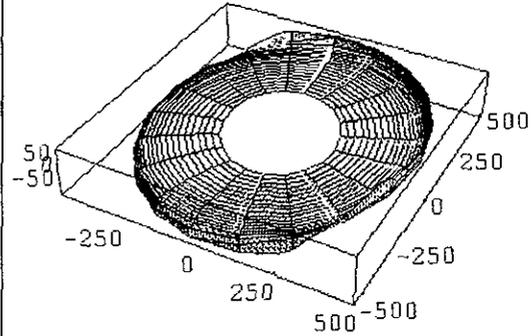
$$\dot{\theta}_1, V=[3000, 3000](\text{mm/s})$$



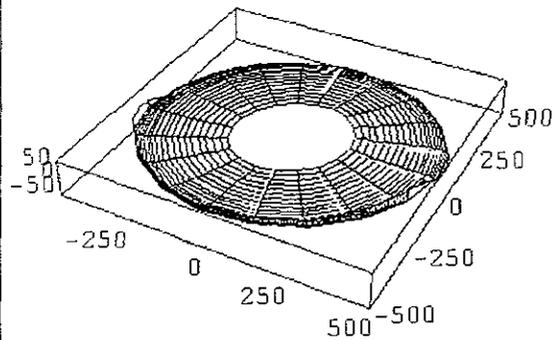
$$\dot{\theta}_1, V=[-3000, 3000](\text{mm/s})$$



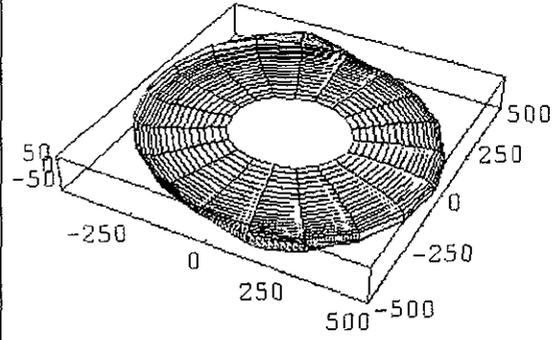
$$\dot{\theta}_1, V=[3000, -3000](\text{mm/s})$$



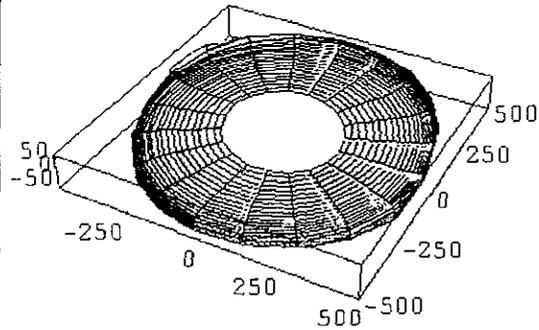
$$\dot{\theta}_1, V=[-3000, -3000](\text{mm/s})$$



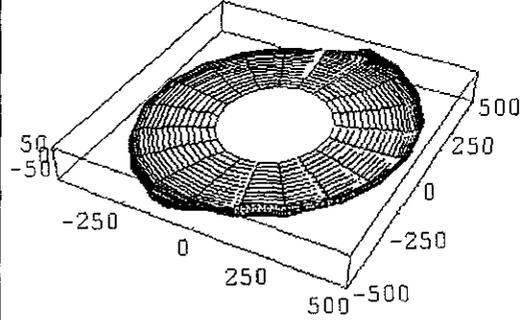
$$\dot{\theta}_1, V=[0, 3000](\text{mm/s})$$



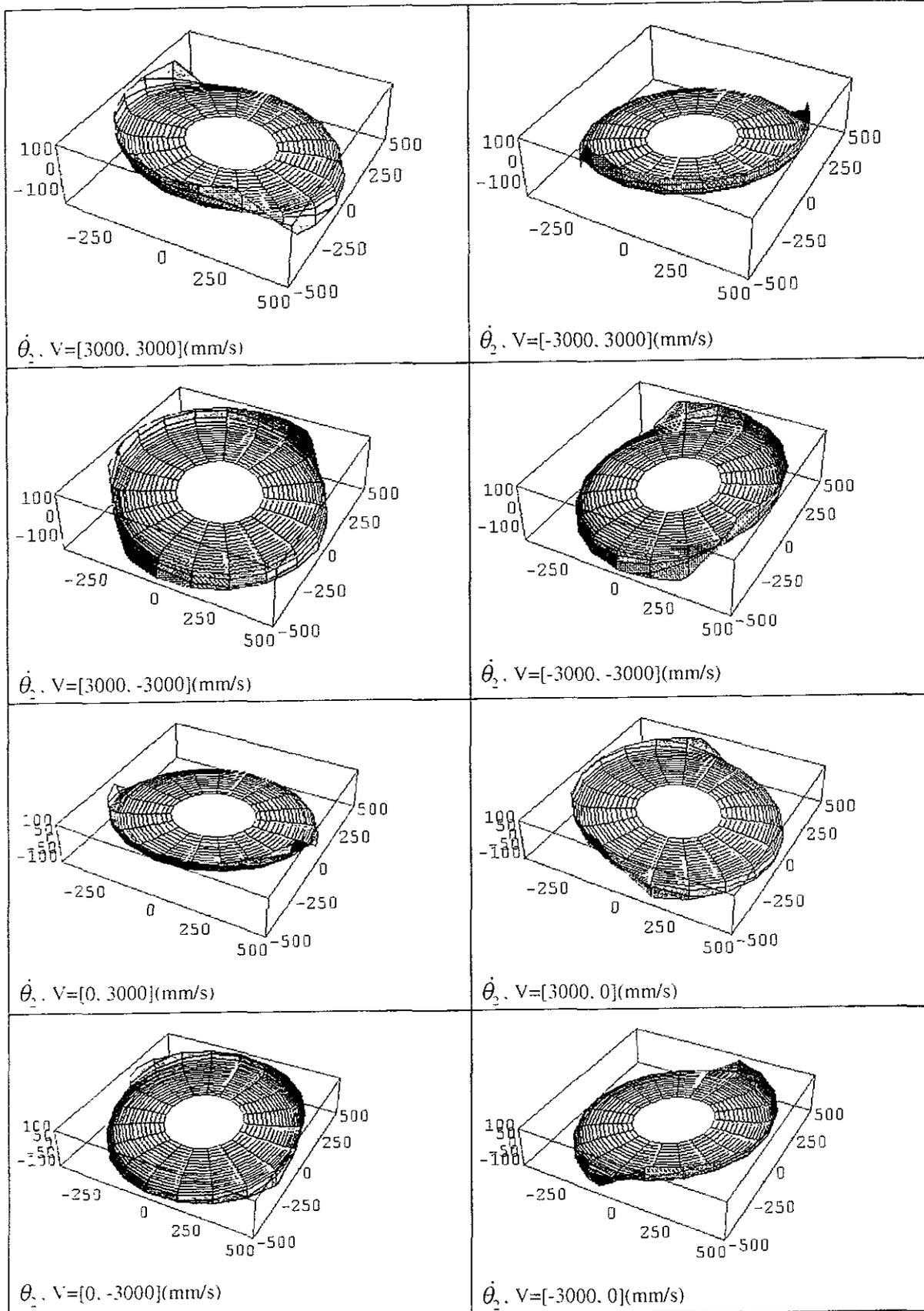
$$\dot{\theta}_1, V=[3000, 0](\text{mm/s})$$

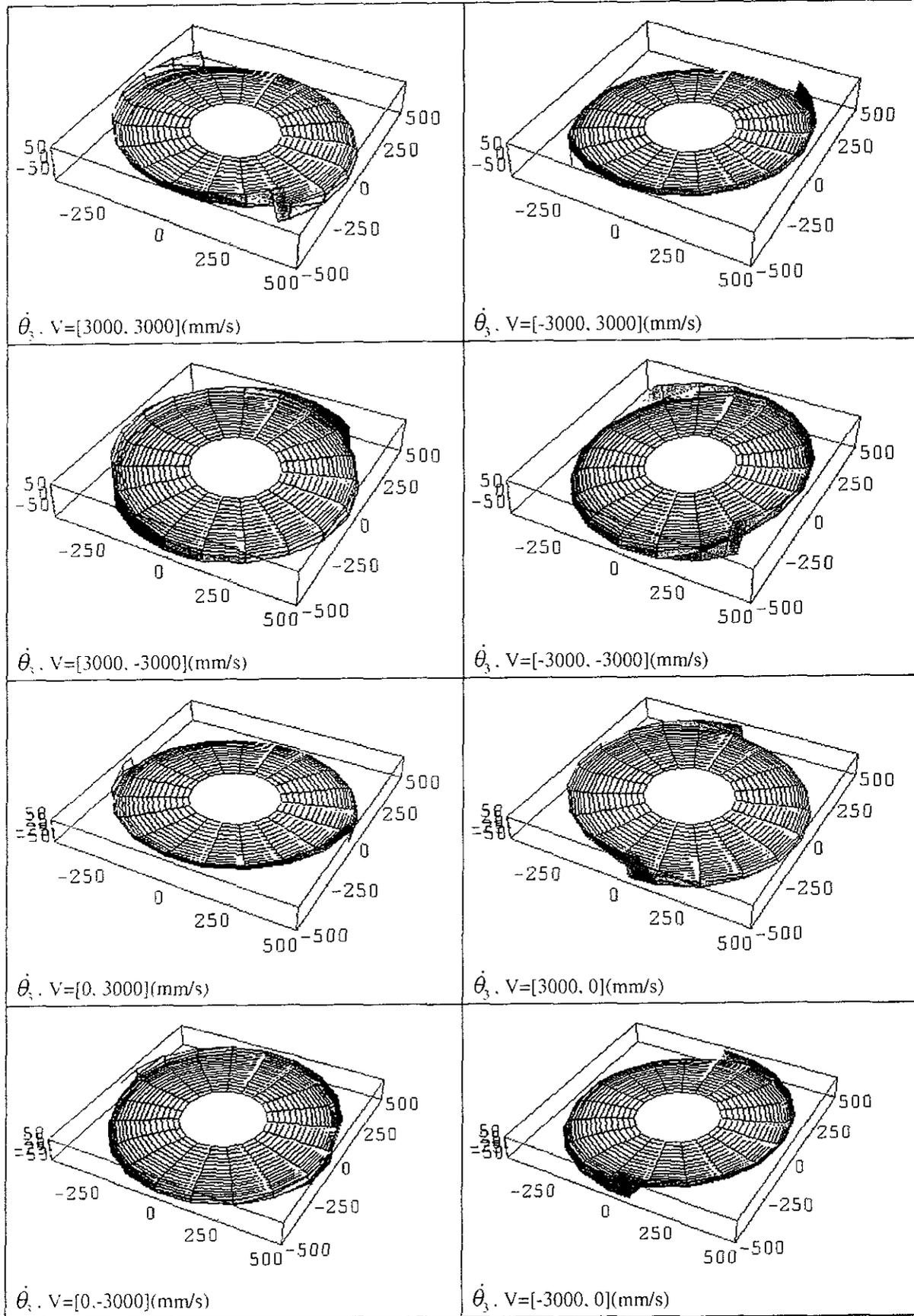


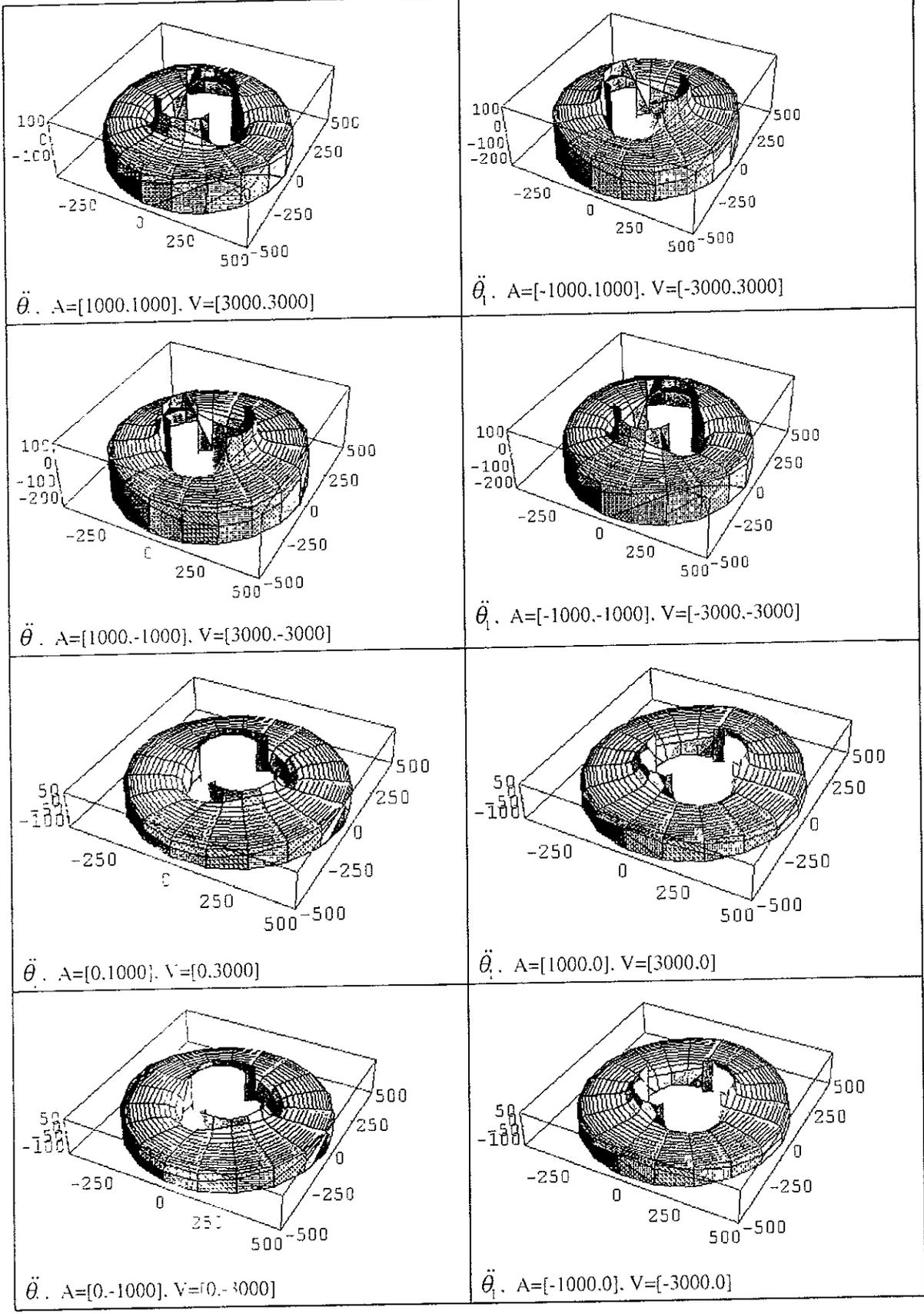
$$\dot{\theta}_1, V=[0, -3000](\text{mm/s})$$

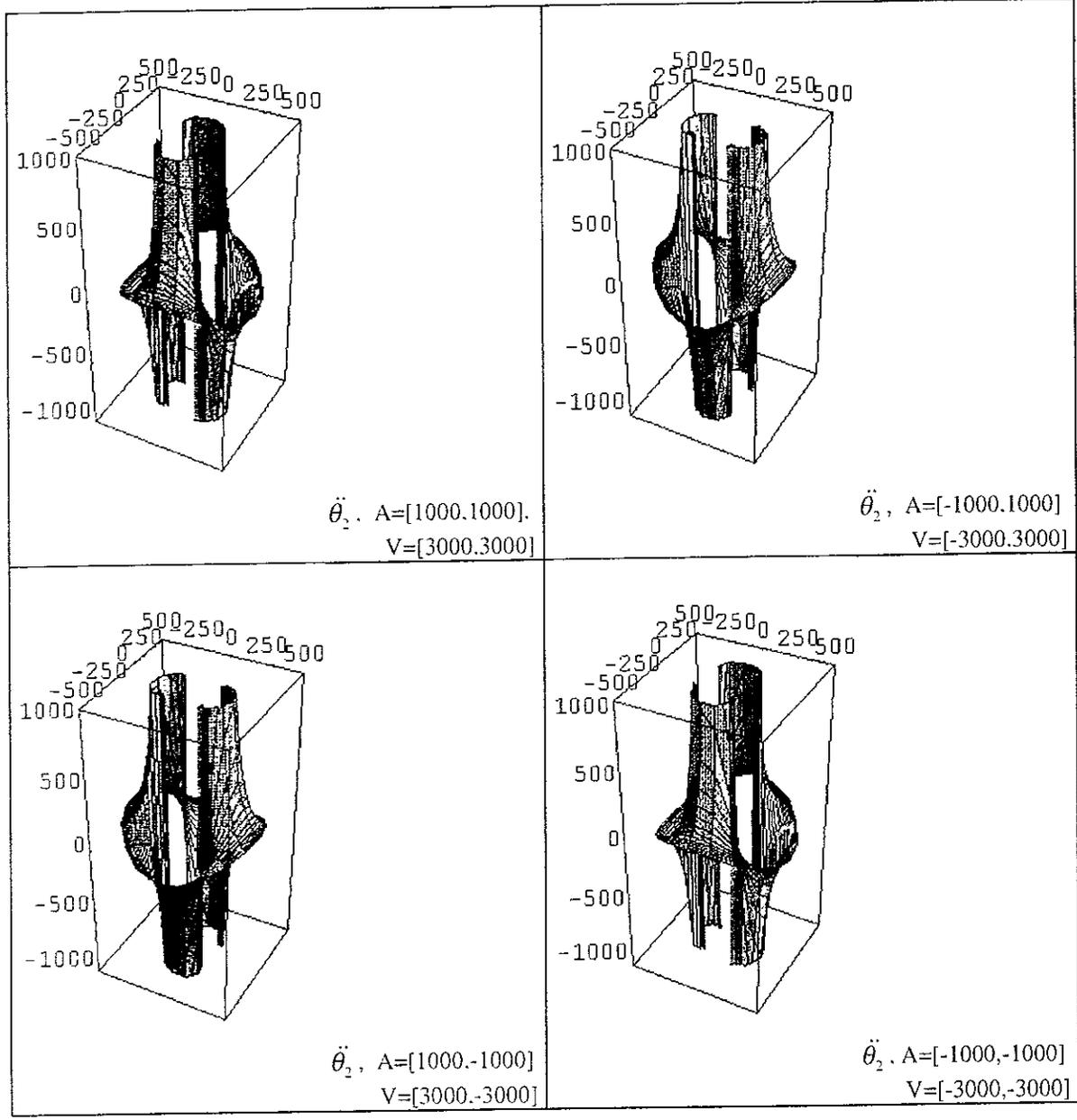


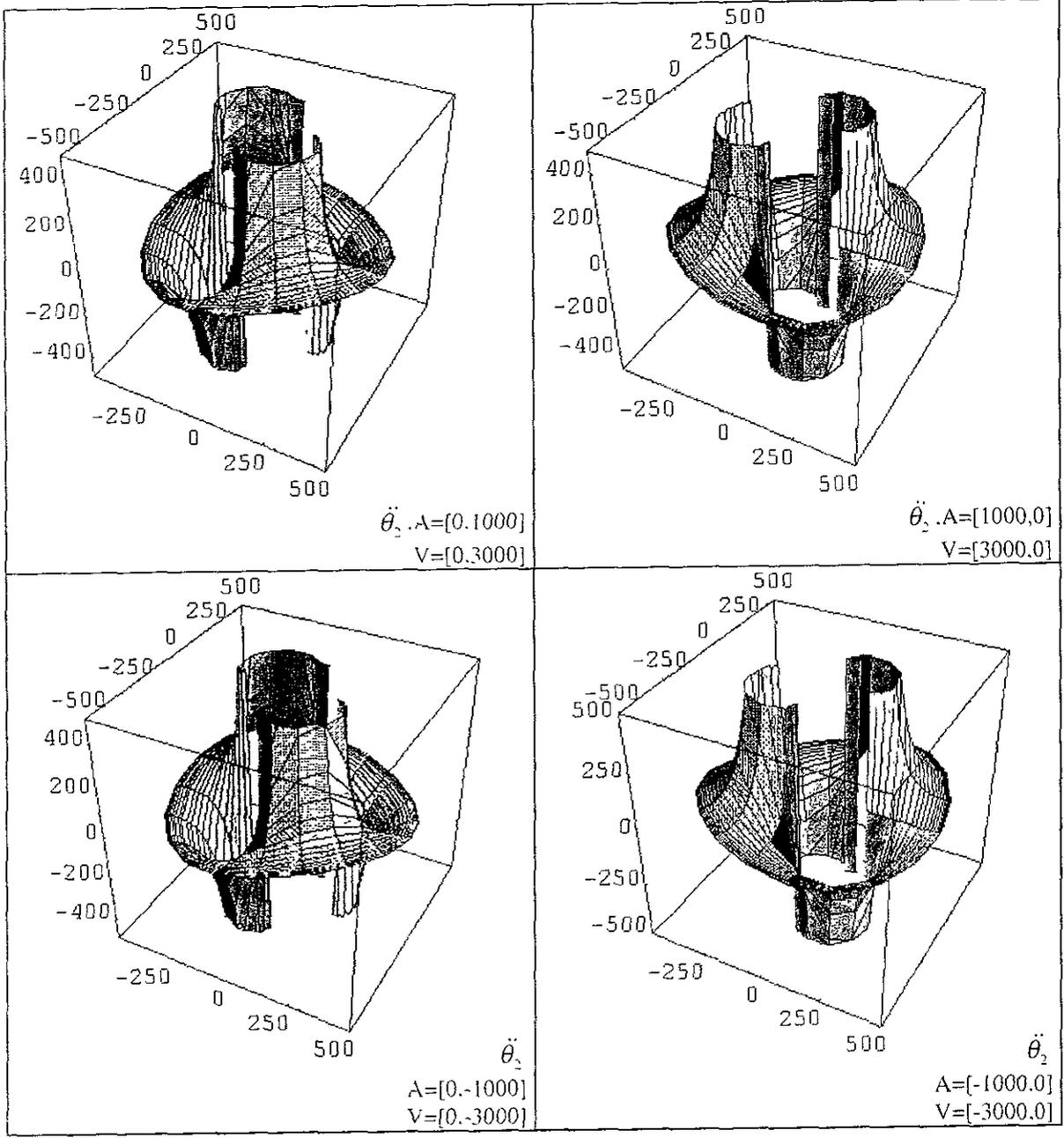
$$\dot{\theta}_1, V=[-3000, 0](\text{mm/s})$$

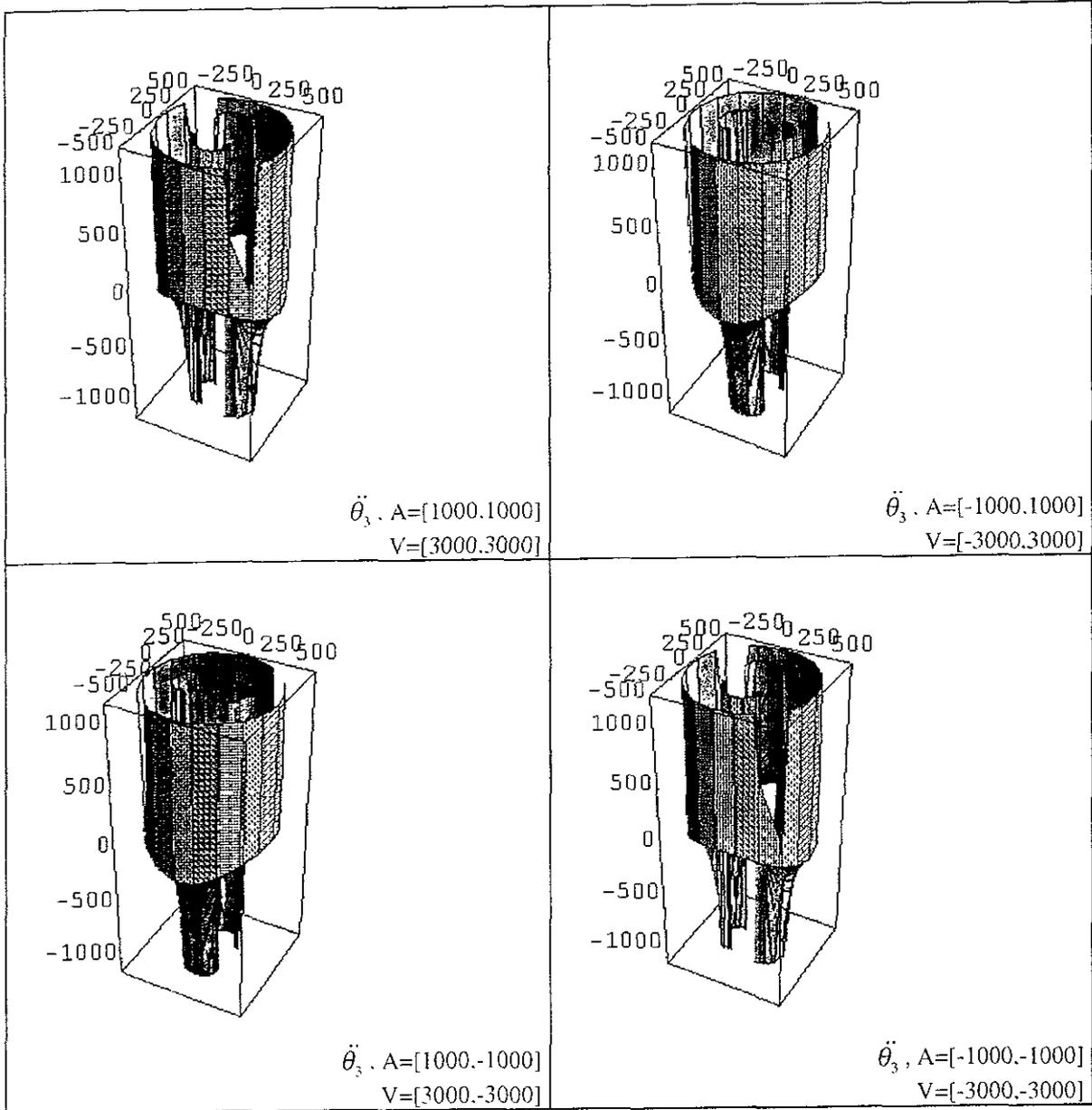


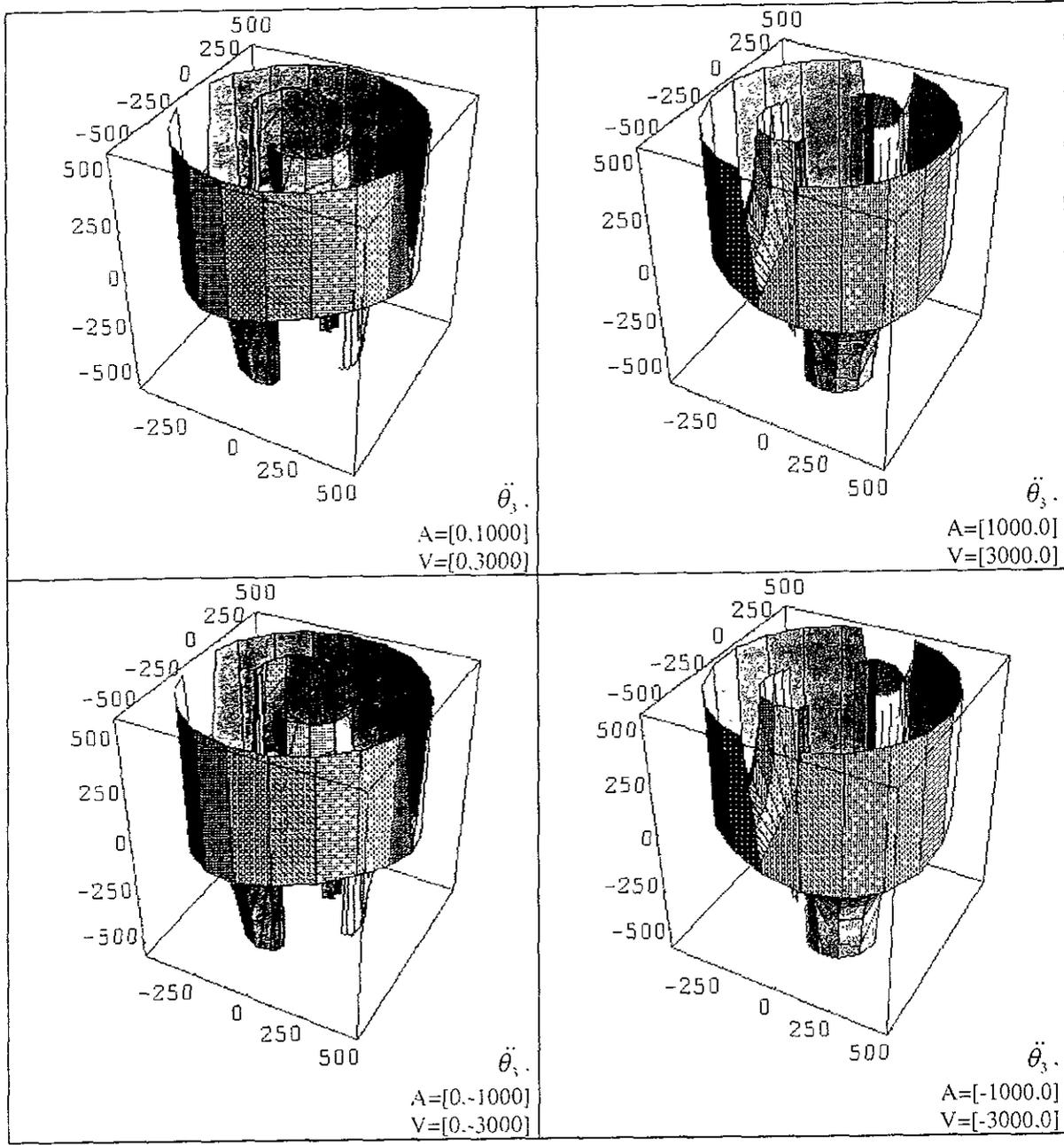












# PROGRAMAS

## Subespacio operacional de posición.

h=210

l1=150

l2=150

l3=180

f=l1+l2+l3

g=l1+l2

fact=Divide[l3,f]+Divide[g\*u,f\*h]

ParametricPlot3D[{{f\*Cos[t],f\*Sin[t],u+70},{l3\*Cos[t],l3\*Sin[t],u+70},{fact\*f\*Cos[t],fact\*f\*Sin[t],70},{fact\*f\*Cos[t],fact\*f\*Sin[t],h+70}},{t,0,2\*Pi},{u,0,h}]

## Subespacio operacional de orientación.

l1=150

l2=150

l3=180

d=Sqrt[l1^2+l2^2-2\*l1\*l2\*Cos[Pi-u]]

fact=l3+d

x=Cos[t]\*fact

y=Sin[t]\*fact

alfarad=t

alfa=Divide[alfarad\*360,2\*Pi]

ParametricPlot3D[{x,y,alfa},{t,-2\*Pi,2\*Pi},{u,0.1,Pi-0.1},ViewPoint->{1,-2,1}]

ParametricPlot3D[{x,y,alfa},{t,-2\*Pi,2\*Pi},{u,0.1,Pi-0.1},ViewPoint->{1,-2,-1}]

## Primer variable articular de posición

l1=150

l2=150

l3=180

d=Sqrt[l1^2+l2^2-2\*l1\*l2\*Cos[Pi-u]]

fact=l3+d

x=Cos[t]\*fact

y=Sin[t]\*fact

```

argt1=Divide[l2*Sin[Pi-u],d]
betat1=ArcSin[argt1]
t1=t+betat1
tt1=Divide[t1*360,2*Pi]
uno=ParametricPlot3D[{x,y,tt1},{t,-2*Pi,2*Pi},{u,0.1,Pi-0.1},ViewPoint->{1.3,-2,1.8}]

```

### Segunda variable articular de posición

```

l1=150
l2=150
l3=180
d=Sqrt[l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]]
fact=l3+d
x=Cos[t]*fact
y=Sin[t]*fact
tt2=u
t2=Divide[tt2*360,2*Pi]
ParametricPlot3D[{x,y,-t2},{t,0,2*Pi},{u,0.1,Pi-0.1}]

```

### Tercer variable articular de posición

```

l1=150
l2=150
l3=180
d=Sqrt[l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]]
fact=l3+d
x=Cos[t]*fact
y=Sin[t]*fact
argt1=Divide[l2*Sin[Pi-u],d]
betat1=ArcSin[argt1]
t1=t+betat1
tt1=Divide[t1*360,2*Pi]
t2=-u

```

```

tt2=Divide[t2*360,2*Pi]
alfa=Divide[t*360,2*Pi]
t3=alfa-tt1-tt2
uno=ParametricPlot3D[{x,y,t3},{t,0,2*Pi},{u,0.1,Pi-0.1},ViewPoint->{1.3,-2,1.8}]

```

### Primer variable articular de velocidad

```

l1=150
l2=150
l3=180
vx=-3000
vy=3000
invdet=Divide[1,l1*Sin[2*Pi-u]]
num=l2*Sin[Pi-u]
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
den=Sqrt[rad]
ee=Divide[num,den]
cc=ArcSin[ee]+t+2*Pi-u
fact=l3+den
x=fact*Cos[t]
y=fact*Sin[t]
alfap=Divide[vy*x-vx*y,x^2+y^2]
bb=Cos[cc]*vx+Sin[cc]*vy+alfap*l3*Sin[t-cc]
t1p=invdet*bb
invt1p=-t1p
cincocinco=ParametricPlot3D[{x,y,t1p},{t,0,2*Pi},{u,0.1,Pi-0.1}]

```

### Segunda variable articular de velocidad

```

l1=150
l2=150
l3=180
vx=3000

```

```

vy=0
invdet=Divide[1,l1*l2*Sin[2*Pi-u]]
num=l2*Sin[Pi-u]
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
den=Sqrt[rad]
ee=Divide[num,den]
betai=ArcSin[ee]
dd=betai+t
cc=l1*Cos[dd]+l2*Cos[dd+2*Pi-u]
hh=l1*Sin[dd]+l2*Sin[dd+2*Pi-u]
fact=l3+den
x=fact*Cos[t]
y=fact*Sin[t]
alfap=Divide[x*vy-y*vx,x^2+y^2]
ultimo=l1*Sin[-betai]+l2*Sin[-betai-2*Pi+u]
factalfap=l3*ultimo
bb=-cc*vx-hh*vy+alfap*factalfap
t2p=invdet*bb
invt2p=-t2p
uno=ParametricPlot3D[{x,y,-t2p},{t,0,2*Pi},{u,0.1,Pi-0.1}]

```

### Tercera variable articular

```

l1=150
l2=150
l3=180
vx=-3000
vy=3000
invdet1=Divide[1,l1*Sin[2*Pi-u]]
invdet=Divide[1,l1*l2*Sin[2*Pi-u]]
num=l2*Sin[Pi-u]
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
den=Sqrt[rad]

```

```

ee=Divide[num,den]
cc1=ArcSin[ee]+t+2*Pi-u
betai=ArcSin[ee]
dd=betai+t
cc=11*Cos[dd]+12*Cos[dd+2*Pi-u]
hh=11*Sin[dd]+12*Sin[dd+2*Pi-u]
fact=l3+den
x=fact*Cos[t]
y=fact*Sin[t]
alfap=Divide[x*vy-y*vx,x^2+y^2]
ultimo=l1*Sin[-betai]+l2*Sin[-betai-2*Pi+u]
factalfap=l3*ultimo
bb1=Cos[cc1]*vx+Sin[cc1]*vy+alfap*l3*Sin[t-cc1]
bb=-cc*vx-hh*vy+alfap*factalfap
t1p=invdet1*bb1
t2p=invdet*bb
ParametricPlot3D[{x,y,alfap-t1p-t2p},{t,0,2*Pi},{u,0.01,Pi-0.01},ViewPoint-
>{500,250,0}]

```

### Primera variable articular de aceleración

```

l1=150
l2=150
l3=180
vx=3000
vy=3000
ax=1000
ay=1000
invdet1=Divide[1,l1*Sin[2*Pi-u]]
invdet=Divide[1,l1*l2*Sin[2*Pi-u]]
num=l2*Sin[Pi-u]
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
den=Sqrt[rad]

```

```

ee=Divide[num,den]
cc1=ArcSin[ee]+t+2*Pi-u
betai=ArcSin[ee]
t1=betai+t
t2=Pi-u
cc=l1*Cos[t1]+l2*Cos[t1+2*Pi-u]
hh=l1*Sin[t1]+l2*Sin[t1+2*Pi-u]
fact=l3+den
x=fact*Cos[t]
y=fact*Sin[t]
alfap=Divide[x*vy-y*vx,x^2+y^2]
ultimo=l1*Sin[-betai]+l2*Sin[-betai-2*Pi+u]
factalfap=l3*ultimo
t3=t-cc1
bb1=Cos[cc1]*vx+Sin[cc1]*vy+alfap*l3*Sin[t-cc1]
bb=-cc*vx-hh*vy+alfap*factalfap
t1p=invdet1*bb1
t2p=invdet*bb
t3p=alfap-t1p-t2p
alfapp1=Divide[x*ay-y*ax,x^2+y^2]
alfapp2=(2*(vy*x-vx*y)*(vx*x+vy*y)/(x^2+y^2)^2)
alfapp=alfapp1-alfapp2
sum1=-(Cot[t2]*Csc[t2]*t2p*(vx*Cos[t1+t2]+vy*Sin[t1+t2]+alfap*l3*Sin[t3]))
sum2=Csc[t2]*(vy*Cos[t1+t2]*(t1p+t2p)+alfap*l3*Cos[t3]*t3p+Cos[t1+t2]*ax-
vx*(t1p+t2p)*Sin[t1+t2]+ay*Sin[t1+t2]+l3*alfapp*Sin[t3])
a1=(sum1+sum2)/l1
aa1=ParametricPlot3D[{x,y,-a1/100},{t,0,2*Pi},{u,0.01,Pi-0.01}]

```

### Segunda variable articular de aceleración

l1=150

l2=150

l3=180

```

vx=3000
vy=3000
ax=1000
ay=1000
invdet1=Divide[1,l1*Sin[2*Pi-u]]
invdet=Divide[1,l1*l2*Sin[2*Pi-u]]
num=l2*Sin[Pi-u]
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
den=Sqrt[rad]
ee=Divide[num,den]
cc1=ArcSin[ee]+t+2*Pi-u
betai=ArcSin[ee]
t1=betai+t
t2=Pi-u
cc=l1*Cos[t1]+l2*Cos[t1+2*Pi-u]
hh=l1*Sin[t1]+l2*Sin[t1+2*Pi-u]
fact=l3+den
x=fact*Cos[t]
y=fact*Sin[t]
alfap=Divide[x*vy-y*vx,x^2+y^2]
ultimo=l1*Sin[-betai]+l2*Sin[-betai-2*Pi+u]
factalfap=l3*ultimo
t3=t-cc1
bb1=Cos[cc1]*vx+Sin[cc1]*vy+alfap*l3*Sin[t-cc1]
bb=-cc*vx-hh*vy+alfap*factalfap
t1p=invdet1*bb1
t2p=invdet*bb
t3p=alfap-t1p-t2p
alfapp1=Divide[x*ay-y*ax,x^2+y^2]
alfapp2=(2*(vy*x-vx*y)*(vx*x+vy*y)/(x^2+y^2)^2)
alfapp=alfapp1-alfapp2

```

```
suma1=Cot[t2]*Csc[t2]*t2p*(l1*vx*Cos[t1]+l2*vx*Cos[t1+t2]+l1*vy*Sin[t1]+l2*vy*Sin[
t1+t2]+alfap*l2*l3*Sin[t3]+alfap*l1*l3*Sin[t2+t3])
```

```
suma2=-
```

```
Csc[t2]*(l1*vy*Cos[t1]*t1p+l2*vy*Cos[t1+t2]*(t1p+t2p)+alfap*l2*l3*Cos[t3]*t3p+alfap*
l1*l3*Cos[t2+t3]*(t2p+t3p)+l1*Cos[t1]*ax+l2*Cos[t1+t2]*ax-
l1*vx*t1p*Sin[t1]+l1*ay*Sin[t1]-
l2*vx*(t1p+t2p)*Sin[t1+t2]+l2*ay*Sin[t1+t2]+l2*l3*alfapp*Sin[t3]+l1*l3*alfapp*Sin[t2+
t3])
```

```
a2=(suma1+suma2)/l1*l2
```

```
aa2=ParametricPlot3D[{ {x,y,-a2/100000},{x,y,a2/100000}},{t,0,Pi},{u,0.01,Pi-0.01}]
```

Tercera variable articular de aceleración.

```
l1=150
```

```
l2=150
```

```
l3=180
```

```
vx=3000
```

```
vy=3000
```

```
ax=1000
```

```
ay=1000
```

```
invdet1=Divide[1,l1*Sin[2*Pi-u]]
```

```
invdet=Divide[1,l1*l2*Sin[2*Pi-u]]
```

```
num=l2*Sin[Pi-u]
```

```
rad=l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]
```

```
den=Sqrt[rad]
```

```
ee=Divide[num,den]
```

```
cc1=ArcSin[ee]+t+2*Pi-u
```

```
betai=ArcSin[ee]
```

```
t1=betai+t
```

```
t2=Pi-u
```

```
cc=l1*Cos[t1]+l2*Cos[t1+2*Pi-u]
```

```
hh=l1*Sin[t1]+l2*Sin[t1+2*Pi-u]
```

```
fact=l3+den
```

```
x=fact*Cos[t]
```

```
y=fact*Sin[t]
```

```

alfap=Divide[x*vy-y*vx,x^2+y^2]
ultimo=l1*Sin[-betai]+l2*Sin[-betai-2*Pi+u]
factalfap=l3*ultimo
t3=t-cc1
bb1=Cos[cc1]*vx+Sin[cc1]*vy+alfap*l3*Sin[t-cc1]
bb=-cc*vx-hh*vy+alfap*factalfap
t1p=invdet1*bb1
t2p=invdet*bb
t3p=alfap-t1p-t2p
alfapp1=Divide[x*ay-y*ax,x^2+y^2]
alfapp2=(2*(vy*x-vx*y)*(vx*x+vy*y)/(x^2+y^2)^2)
alfapp=alfapp1-alfapp2
sum1=-((Cot[t2]*Csc[t2]*t2p*(vx*Cos[t1+t2]+vy*Sin[t1+t2]+alfap*l3*Sin[t3]))
sum2=Csc[t2]*(vy*Cos[t1+t2]*(t1p+t2p)+alfap*l3*Cos[t3]*t3p+Cos[t1+t2]*ax-
vx*(t1p+t2p)*Sin[t1+t2]+ay*Sin[t1+t2]+l3*alfapp*Sin[t3])
a1=(sum1+sum2)/l1
suma1=Cot[t2]*Csc[t2]*t2p*(l1*vx*Cos[t1]+l2*vx*Cos[t1+t2]+l1*vy*Sin[t1]+l2*vy*Sin[
t1+t2]+alfap*l2*l3*Sin[t3]+alfap*l1*l3*Sin[t2+t3])
suma2=-
Csc[t2]*(l1*vy*Cos[t1]*t1p+l2*vy*Cos[t1+t2]*(t1p+t2p)+alfap*l2*l3*Cos[t3]*t3p+alfap*
l1*l3*Cos[t2+t3]*(t2p+t3p)+l1*Cos[t1]*ax+l2*Cos[t1+t2]*ax-
l1*vx*t1p*Sin[t1]+l1*ay*Sin[t1]-
l2*vx*(t1p+t2p)*Sin[t1+t2]+l2*ay*Sin[t1+t2]+l2*l3*alfapp*Sin[t3]+l1*l3*alfapp*Sin[t2+
t3])
a2=(suma1+suma2)/l1*l2
a3=alfapp-a1-a2
aa3=ParametricPlot3D[{x,y,-a3/100000},{t,0,2*Pi},{u,0.01,Pi-0.01}]

```

### Matriz del jacobiano

```

f1=l1*Cos[t1]+l2*Cos[t1+t2]+l3*Cos[t1+t2+t3]
f2=l1*Sin[t1]+l2*Sin[t1+t2]+l3*Sin[t1+t2+t3]
f3=e1+e2+e3+d1
f4=t1+t2+t3
df11=D[f1,d1]

```

$$df12=D[f1,t1]$$

$$df13=D[f1,t2]$$

$$df14=D[f1,t3]$$

$$df21=D[f2,d1]$$

$$df22=D[f2,t1]$$

$$df23=D[f2,t2]$$

$$df24=D[f2,t3]$$

$$df31=D[f3,d1]$$

$$df32=D[f3,t1]$$

$$df33=D[f3,t2]$$

$$df34=D[f3,t3]$$

$$df41=D[f4,d1]$$

$$df42=D[f4,t1]$$

$$df43=D[f4,t2]$$

$$df44=D[f4,t3]$$

$$J=\{\{df11,df12,df13,df14\},\{df21,df22,df23,df24\},\{df31,df32,df33,df34\},\{df41,df42,df43,df44\}\}$$

$$Jinv=Inverse[J]$$

$$oper=\{\{vx\},\{vy\},\{vz\},\{alfap\}\}$$

$$\{\{D1P\},\{T1P\},\{T2P\},\{T3P\}\}=Dt[Jinv.oper]$$

### Determinante del jacobiano

$$l1=1.5$$

$$l2=1.5$$

$$l3=1.8$$

$$A=l3+Sqrt[l1^2+l2^2-2*l1*l2*Cos[Pi-u]]$$

$$p=l1*l2*Sin[u]$$

$$pp=l1*l2*Sin[-u]$$

$$\text{ParametricPlot3D}[\{\{A*Cos[t],A*Sin[t],1/p\},\{A*Cos[t],A*Sin[t],1/pp\}\},\{t,0,2*Pi\},\{u,0,0.000000001,Pi-.000000001\},\text{ViewPoint}\rightarrow\{2.293,-1.481,2.000\}]$$

Perfil de posición

$$a1=480$$

$$b1=0$$

$$c1=100$$

$$a2=0$$

$$b2=480$$

$$c2=150$$

$$qf=\text{Sqrt}[(a2-a1)^2+(b2-b1)^2+(c2-c1)^2]$$

$$a=(a2-a1)/qf$$

$$b=(b2-b1)/qf$$

$$c=(c2-c1)/qf$$

$$n=10$$

$$tf=10$$

$$q1=qf*(1-((30*(n-2))/(32+30*(n-2))))$$

$$qf1=(n^3)*1.25*((t/tf)^3)-(n^4)*.9375*((t/tf)^4)+(n^5)*.1875*((t/tf)^5)$$

$$qf2=(n^3)*1.25*((t/tn)/tf)^3- \\ (n^4)*.9375*((t/tn)/tf)^4+(n^5)*.1875*((t/tn)/tf)^5+(n^3)*3.75*((t/tn)^2/(tf^3))- \\ (n^4)*3.75*((t/tn)^3/(tf^4))+n^5*.9375*((t/tn)^4/(tf^5))*(t-(t/tn))$$

$$prqf3=((t-((n-2)/n)*tf)/tf)$$

$$qf3=(n^3)*1.25*(prqf3)^3- \\ (n^4)*.9375*(prqf3)^4+n^5*.1875*(prqf3)^5+((n^3)*3.75*((t/tn)^2/(tf^3))- \\ (n^4)*3.75*((t/tn)^3/(tf^4))+n^5*.9375*((t/tn)^4/(tf^5)))*((n-2)/n)*tf$$

$$qt1=\text{Table}[q1*qf1,\{t,0.0000001,tf/n,.1\}]$$

$$qt2=\text{Table}[q1*qf2,\{t,tf/n,((n-1)/n)*tf,.1\}]$$

$$qt3=\text{Table}[q1*qf3,\{t,((n-1)/n)*tf,tf,.1\}]$$

$$qpf1=(n^3)*3.75*((t^2)/(tf^3))-(n^4)*3.75*((t^3)/(tf^4))+n^5*.9375*((t^4)/(tf^5))$$

$$qpf2=(n^3)*3.75*((t/tn)^2/(tf^3))- \\ (n^4)*3.75*((t/tn)^3/(tf^4))+n^5*.9375*((t/tn)^4/(tf^5))$$

$$paqpf3=(t-((n-2)/n)*tf)$$

$$qpf3=(n^3)*3.75*((paqpf3^2)/(tf^3))- \\ (n^4)*3.75*((paqpf3^3)/(tf^4))+n^5*.9375*((paqpf3^4)/(tf^5))$$

$$qpt1=\text{Table}[q1*qpf1,\{t,0.0000001,tf/n,.1\}]$$

$$qpt2=\text{Table}[q1*qpf2,\{t,tf/n,((n-1)/n)*tf,.1\}]$$

$$qpt3=\text{Table}[q1*qpf3,\{t,((n-1)/n)*tf,tf,.1\}]$$

$$qppf1=(n^3)*7.5*(t/(tf^3))-(n^4)*11.25*((t^2)/(tf^4))+(n^5)*3.75*((t^3)/(tf^5))$$

$$qppf2=0$$

$$qppf3=(n^3)*7.5*(paqpf3/(tf^3))-$$

$$(n^4)*11.25*((paqpf3^2)/(tf^4))+(n^5)*3.75*((paqpf3^3)/(tf^5))$$

$$qppt1=Table[q1*qppf1,\{t,0.0000001,tf/n,.1\}]$$

$$qppt2=Table[q1*qppf2,\{t,tf/n,((n-1)/n)*tf,.1\}]$$

$$qppt3=Table[q1*qppf3,\{t,((n-1)/n)*tf,tf,.1\}]$$

$$x1=a1+a*qt1$$

$$y1=b1+b*qt1$$

$$x2=a1+a*qt2$$

$$y2=b1+b*qt2$$

$$x3=a1+a*qt3$$

$$y3=b1+b*qt3$$

$$vx1=a*qppt1$$

$$vy1=b*qppt1$$

$$vx2=a*qppt2$$

$$vy2=b*qppt2$$

$$vx3=a*qppt3$$

$$vy3=b*qppt3$$

$$ax1=a*qppt1$$

$$ay1=b*qppt1$$

$$ax2=a*qppt2$$

$$ay2=b*qppt2$$

$$ax3=a*qppt3$$

$$ay3=b*qppt3$$

$$l1=150$$

$$l2=150$$

$$l3=180$$

$$raiz=Sqrt[(x1^2)+(y1^2)]-l3$$

$$arg=Divide[y1,x1]$$

---

```

alpha=ArcTan[arg]
arg1=Divide[(l1^2)+(raiz^2)-(l3^2),2*l1*raiz]
beta=ArcCos[arg1]
teta1=alpha+beta

```

```

raizz=Sqrt[(x2^2)+(y2^2)]-l3
arg2=Divide[y2,x2]
alpha2=ArcTan[arg2]
arg12=Divide[(l1^2)+(raizz^2)-(l3^2),2*l1*raizz]
beta2=ArcCos[arg12]
teta12=alpha2+beta2

```

```

raizzz=Sqrt[(x3^2)+(y3^2)]-l3
arg3=Divide[y3,x3]
alpha3=ArcTan[arg3]
arg13=Divide[(l1^2)+(raizzz^2)-(l3^2),2*l1*raizzz]
beta3=ArcCos[arg13]
teta13=alpha3+beta3

```

```

argt1=((l1^2)+(l2^2)-(raiz^2))/(2*l1*l2)
gama=ArcCos[argt1]
teta21=-3.1416+gama

```

```

argt2=((l1^2)+(l2^2)-(raizz^2))/(2*l1*l2)
gama2=ArcCos[argt2]
teta22=-3.1416+gama2

```

```

argt3=((l1^2)+(l2^2)-(raizzz^2))/(2*l1*l2)
gama3=ArcCos[argt3]
teta23=-3.1416+gama3

```

```
TableForm[alpha1-teta1-teta21,TableDepth->1, TableSpacing->{0,0,0,0}]
TableForm[alpha2-teta12-teta22,TableDepth->1, TableSpacing->{0,0,0,0}]
TableForm[alpha3-teta13-teta23,TableDepth->1, TableSpacing->{0,0,0,0}]
```

### Perfil de velocidad

```
a1=480
b1=0
c1=100
a2=0
b2=480
c2=150
qf=qrt[(a2-a1)^2+(b2-b1)^2+(c2-c1)^2]
a=(a2-a1)/qf
b=(b2-b1)/qf
c=(c2-c1)/qf
n=4
tf=10
q1=qf*(1-((30*(n-2))/(32+30*(n-2))))
qf1=(n^3)*1.25*((t/tf)^3)-(n^4)*.9375*((t/tf)^4)+(n^5)*.1875*((t/tf)^5)
qf2=(n^3)*1.25*((t/n)/tf)^3-
(n^4)*.9375*((t/n)/tf)^4+(n^5)*.1875*((t/n)/tf)^5+(n^3)*3.75*((t/n)^2)/(tf^3)-
(n^4)*3.75*((t/n)^3)/(tf^4)+(n^5)*.9375*((t/n)^4)/(tf^5))*(t-(t/n))
prqf3=((t-((n-2)/n)*tf)/tf)
qf3=((n^3)*1.25*((prqf3)^3)-
(n^4)*.9375*((prqf3)^4)+(n^5)*.1875*((prqf3)^5))+((n^3)*3.75*((t/n)^2)/(tf^3))-
(n^4)*3.75*((t/n)^3)/(tf^4)+(n^5)*.9375*((t/n)^4)/(tf^5))*((n-2)/n)*tf
qt1=Table[q1*qf1,{t,0.0000001,t/n,.3333}]
qt2=Table[q1*qf2,{t,t/n,((n-1)/n)*tf,.3333}]
qt3=Table[q1*qf3,{t,((n-1)/n)*tf,tf,.3333}]
qpf1=(n^3)*3.75*((t^2)/(tf^3))-(n^4)*3.75*((t^3)/(tf^4))+((n^5)*.9375*((t^4)/(tf^5)))
qpf2=(n^3)*3.75*((t/n)^2)/(tf^3)-
(n^4)*3.75*((t/n)^3)/(tf^4)+(n^5)*.9375*((t/n)^4)/(tf^5))
paqpf3=(t-((n-2)/n)*tf)
```

```

qpf3=(n^3)*3.75*((paqpf3^2)/(tf^3))-
(n^4)*3.75*((paqpf3^3)/(tf^4))+(n^5)*.9375*((paqpf3^4)/(tf^5))
qpt1=Table[q1*qpf1,{t,0.0000001,tf/n,.3333}]
qpt2=Table[q1*qpf2,{t,tf/n,((n-1)/n)*tf,.3333}]
qpt3=Table[q1*qpf3,{t,((n-1)/n)*tf,tf,.3333}]
qppf1=(n^3)*7.5*(t/(tf^3))-(n^4)*11.25*((t^2)/(tf^4))+(n^5)*3.75*((t^3)/(tf^5))
qppf2=0
qppf3=(n^3)*7.5*(paqpf3/(tf^3))-
(n^4)*11.25*((paqpf3^2)/(tf^4))+(n^5)*3.75*((paqpf3^3)/(tf^5))
qppt1=Table[q1*qppf1,{t,0.0000001,tf/n,.3333}]
qppt2=Table[q1*qppf2,{t,tf/n,((n-1)/n)*tf,.3333}]
qppt3=Table[q1*qppf3,{t,((n-1)/n)*tf,tf,.3333}]

x1=a1+a*qt1
y1=b1+b*qt1
x2=a1+a*qt2
y2=b1+b*qt2
x3=a1+a*qt3
y3=b1+b*qt3
vx1=a*qppt1
vy1=b*qppt1
vx2=a*qppt2
vy2=b*qppt2
vx3=a*qppt3
vy3=b*qppt3
ax1=a*qppt1
ay1=b*qppt1
ax2=a*qppt2
ay2=b*qppt2
ax3=a*qppt3
ay3=b*qppt3
l1=150
l2=150

```

l3=180

$$\text{norma1}=(x1^2)+(y1^2)$$

$$\text{norma2}=\text{Sqrt}[\text{norma1}]$$

$$\text{norma3}=\text{norma2}-l3$$

$$\text{alpha}=\frac{(vy1*x1)-(vx1*y1)}{\text{norma1}}$$

$$\text{beta1}=\frac{(x1*vx1)+(y1*vy1)}{(l1*\text{norma2})}$$

$$\text{beta2}=2*\text{Sqrt}[1-\frac{(\text{norma3})}{(2*l1)^2}]$$

$$\text{beta3}=\text{beta1}/\text{beta2}$$

$$\text{teta1p}=\text{alpha}-\text{beta3}$$

$$\text{norma12}=(x2^2)+(y2^2)$$

$$\text{norma22}=\text{Sqrt}[\text{norma12}]$$

$$\text{norma32}=\text{norma22}-l3$$

$$\text{alpha2}=\frac{(vy2*x2)-(vx2*y2)}{\text{norma12}}$$

$$\text{beta12}=\frac{(x2*vx2)+(y2*vy2)}{(l1*\text{norma22})}$$

$$\text{beta22}=2*\text{Sqrt}[1-\frac{(\text{norma32})}{(2*l1)^2}]$$

$$\text{beta32}=\text{beta12}/\text{beta22}$$

$$\text{teta1p2}=\text{alpha2}-\text{beta32}$$

$$\text{norma13}=(x3^2)+(y3^2)$$

$$\text{norma23}=\text{Sqrt}[\text{norma13}]$$

$$\text{norma33}=\text{norma23}-l3$$

$$\text{alpha3}=\frac{(vy3*x3)-(vx3*y3)}{\text{norma13}}$$

$$\text{beta13}=\frac{(x3*vx3)+(y3*vy3)}{(l1*\text{norma23})}$$

$$\text{beta23}=2*\text{Sqrt}[1-\frac{(\text{norma33})}{(2*l1)^2}]$$

$$\text{beta33}=\text{beta13}/\text{beta23}$$

$$\text{teta1p3}=\text{alpha3}-\text{beta33}$$

$$\text{gama}=\frac{\text{norma3}*((x1*vx1)+(y1*vy1))}{(l1*l2*\text{norma2})}$$

$$\text{gamma}=\text{Sqrt}[1-\frac{((l1^2)+(l2^2)-(\text{norma3}^2))}{(2*l1*l2)^2}]$$

$$\text{teta2p}=\text{gama}*(1/\text{gamma})$$

```

gama2=(norma32*((x2*vx2)+(y2*vy2)))/(l1*l2*norma22)
gamma2=Sqrt[1-(((l1^2)+(l2^2)-(norma32^2))/(2*l1*l2))^2]
teta2p2=gama2*(1/gamma2)

```

```

gama3=(norma33*((x3*vx3)+(y3*vy3)))/(l1*l2*norma23)
gamma3=Sqrt[1-(((l1^2)+(l2^2)-(norma33^2))/(2*l1*l2))^2]
teta2p3=gama3*(1/gamma3)

```

```

TableForm[alpha-teta1p-teta2p,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]
TableForm[alpha2-teta1p2-teta2p2,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]
TableForm[alpha3-teta1p3-teta2p3,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]

```

### Perfil de aceleración

```

a1=480
b1=0
c1=100
a2=0
b2=480
c2=150
qf=Sqrt[(a2-a1)^2+(b2-b1)^2+(c2-c1)^2]
a=(a2-a1)/qf
b=(b2-b1)/qf
c=(c2-c1)/qf
n=3
tf=10
q1=qf*(1-((30*(n-2))/(32+30*(n-2))))
qf1=(n^3)*1.25*((t/tf)^3)-(n^4)*.9375*((t/tf)^4)+(n^5)*.1875*((t/tf)^5)

```

$$\begin{aligned} qf2 &= (n^3) * 1.25 * ((tf/n)/tf)^3 - \\ & (n^4) * .9375 * ((tf/n)/tf)^4 + (n^5) * .1875 * ((tf/n)/tf)^5 + (n^3) * 3.75 * ((tf/n)^2)/(tf^3) - \\ & (n^4) * 3.75 * ((tf/n)^3)/(tf^4) + (n^5) * .9375 * ((tf/n)^4)/(tf^5) * (t - (tf/n)) \end{aligned}$$

$$prqf3 = (t - ((n-2)/n) * tf) / tf$$

$$\begin{aligned} qf3 &= (n^3) * 1.25 * (prqf3)^3 - \\ & (n^4) * .9375 * (prqf3)^4 + (n^5) * .1875 * (prqf3)^5 + (n^3) * 3.75 * ((tf/n)^2)/(tf^3) - \\ & (n^4) * 3.75 * ((tf/n)^3)/(tf^4) + (n^5) * .9375 * ((tf/n)^4)/(tf^5) * ((n-2)/n) * tf \end{aligned}$$

$$qt1 = \text{Table}[q1 * qf1, \{t, 0.0000001, tf/n, .3\}]$$

$$qt2 = \text{Table}[q1 * qf2, \{t, tf/n, ((n-1)/n) * tf, .3\}]$$

$$qt3 = \text{Table}[q1 * qf3, \{t, ((n-1)/n) * tf, tf, .3\}]$$

$$qpf1 = (n^3) * 3.75 * (t^2)/(tf^3) - (n^4) * 3.75 * (t^3)/(tf^4) + (n^5) * .9375 * (t^4)/(tf^5)$$

$$\begin{aligned} qpf2 &= (n^3) * 3.75 * ((tf/n)^2)/(tf^3) - \\ & (n^4) * 3.75 * ((tf/n)^3)/(tf^4) + (n^5) * .9375 * ((tf/n)^4)/(tf^5) \end{aligned}$$

$$paqpf3 = (t - ((n-2)/n) * tf)$$

$$\begin{aligned} qpf3 &= (n^3) * 3.75 * ((paqpf3^2)/(tf^3)) - \\ & (n^4) * 3.75 * ((paqpf3^3)/(tf^4)) + (n^5) * .9375 * ((paqpf3^4)/(tf^5)) \end{aligned}$$

$$qpt1 = \text{Table}[q1 * qpf1, \{t, 0.0000001, tf/n, .3\}]$$

$$qpt2 = \text{Table}[q1 * qpf2, \{t, tf/n, ((n-1)/n) * tf, .3\}]$$

$$qpt3 = \text{Table}[q1 * qpf3, \{t, ((n-1)/n) * tf, tf, .3\}]$$

$$qppf1 = (n^3) * 7.5 * (t/(tf^3)) - (n^4) * 11.25 * (t^2)/(tf^4) + (n^5) * 3.75 * (t^3)/(tf^5)$$

$$qppf2 = 0$$

$$\begin{aligned} qppf3 &= (n^3) * 7.5 * (paqpf3/(tf^3)) - \\ & (n^4) * 11.25 * ((paqpf3^2)/(tf^4)) + (n^5) * 3.75 * ((paqpf3^3)/(tf^5)) \end{aligned}$$

$$qppt1 = \text{Table}[q1 * qppf1, \{t, 0.0000001, tf/n, .3\}]$$

$$qppt2 = \text{Table}[q1 * qppf2, \{t, tf/n, ((n-1)/n) * tf, .3\}]$$

$$qppt3 = \text{Table}[q1 * qppf3, \{t, ((n-1)/n) * tf, tf, .3\}]$$

$$x1 = a1 + a * qt1$$

$$y1 = b1 + b * qt1$$

$$x2 = a1 + a * qt2$$

$$y2 = b1 + b * qt2$$

$$x3 = a1 + a * qt3$$

$$y3 = b1 + b * qt3$$

$$vx1 = a * qppt1$$

$$vy1 = b * qppt1$$

$$vx2=a*qp2$$

$$vy2=b*qp2$$

$$vx3=a*qp3$$

$$vy3=b*qp3$$

$$ax1=a*qp1$$

$$ay1=b*qp1$$

$$ax2=a*qp2$$

$$ay2=b*qp2$$

$$ax3=a*qp3$$

$$ay3=b*qp3$$

$$l1=150$$

$$l2=150$$

$$l3=180$$

$$norma1=(x1^2)+(y1^2)$$

$$norma2=\text{Sqrt}[norma1]$$

$$norma3=norma2-l3$$

$$resta=-(y1*ax1)+(x1*ay1)$$

$$suma=(y1*ay1)+(x1*ax1)$$

$$revta=-(y1*vx1)+(x1*vy1)$$

$$suva=(y1*vy1)+(x1*vx1)$$

$$alfa1=resta/norma1$$

$$alfa2=-((2*revta*suva)/(norma1^2))$$

$$alfa=alfa1+alfa2$$

$$beta11=1/(\text{Sqrt}[1-(((norma3)/(2*11))^2)])$$

$$beta121=suva/(11*norma2)$$

$$beta122=(suva*((11^2)-(12^2)))/((norma3^3)*norma2)$$

$$beta123=(1/11)*(((suma+vx1^2+vy1^2)/norma2)-((suva^2)/(\text{Sqrt}[norma1^3])))$$

$$beta124=(1/2)$$

$$beta13=beta121$$

$$beta14=beta124$$

$$beta15=-1/((\text{Sqrt}[1-(norma3/(2*11))^2])^2)$$

$$\text{beta16} = ((-1 * \text{suva}) / (2 * 11 * (\text{norma2}) * (4 * (11^2) - 1)))$$

$$\text{beta12} = (\text{beta123} * \text{beta124})$$

$$\text{beta1} = (\text{beta11} * \text{beta12}) + (\text{beta13} * \text{beta14} * \text{beta15} * \text{beta16})$$

$$\text{beta} = -\text{beta1}$$

$$\text{teta1pp} = \text{alfa} + \text{beta}$$

$$\text{nnorma1} = (x2^2) + (y2^2)$$

$$\text{nnorma2} = \text{Sqrt}[\text{nnorma1}]$$

$$\text{nnorma3} = \text{nnorma2} - 13$$

$$\text{rresta} = -(y2 * ax2) + (x2 * ay2)$$

$$\text{ssuma} = (y2 * ay2) + (x2 * ax2)$$

$$\text{rrevta} = -(y2 * vx2) + (x2 * vy2)$$

$$\text{ssuva} = (y2 * vy2) + (x2 * vx2)$$

$$\text{aalfa1} = \text{rresta} / \text{nnorma1}$$

$$\text{aalfa2} = -((2 * \text{rrevta} * \text{ssuva}) / (\text{nnorma1}^2))$$

$$\text{aalfa} = \text{aalfa1} + \text{aalfa2}$$

$$\text{bbeta11} = 1 / (\text{Sqrt}[1 - (((\text{nnorma3}) / (2 * 11))^2)])$$

$$\text{bbeta121} = \text{ssuva} / (11 * \text{nnorma2})$$

$$\text{bbeta122} = (\text{ssuva} * ((11^2) - (12^2))) / ((\text{nnorma3}^3) * \text{nnorma2})$$

$$\text{bbeta123} = (1/11) * (((\text{ssuma} + vx2^2 + vy2^2) / \text{nnorma2}) - ((\text{ssuva}^2) / (\text{Sqrt}[\text{nnorma1}^3])))$$

$$\text{bbeta124} = (1/2)$$

$$\text{bbeta13} = \text{bbeta121}$$

$$\text{bbeta14} = \text{bbeta124}$$

$$\text{bbeta15} = 1 / ((\text{Sqrt}[1 - (\text{nnorma3} / (2 * 11))^2])^2)$$

$$\text{bbeta16} = ((-1 * \text{ssuva}) / (2 * 11 * (\text{nnorma2}) * (4 * (11^2) - 1)))$$

$$\text{bbeta12} = (\text{bbeta123} * \text{bbeta124})$$

$$\text{bbeta1} = (\text{bbeta11} * \text{bbeta12}) + (\text{bbeta13} * \text{bbeta14} * \text{bbeta15} * \text{bbeta16})$$

$$\text{bbeta} = -\text{bbeta1}$$

$$\text{teta1pp2} = \text{aalfa} + \text{bbeta}$$

$$\text{nnnorma1} = (x3^2) + (y3^2)$$

$$\text{nnnorma2} = \text{Sqrt}[\text{nnnorma1}]$$

---

```

nnnorma3=nnnorma2-l3
rrresta=-(y3*ax3)+(x3*ay3)
sssuma=(y3*ay3)+(x3*ax3)
rrrevta=-(y3*vx3)+(x3*vy3)
sssuva=(y3*vy3)+(x3*vx3)
aaalfa1=rrresta/nnnorma1
aaalfa2=-((2*rrrevta*sssuva)/(nnnorma1^2))
aaalfa=aaalfa1+aaalfa2
bbbeta11=1/(Sqrt[1-(((nnnorma3)/(2*11))^2)])
bbbeta121=sssuva/(11*nnnorma2)
bbbeta122=(sssuva*((11^2)-(12^2)))/((nnnorma3^3)*nnnorma2)
bbbeta123=(1/11)*(((sssuma+vx3^2+vy3^2)/nnnorma2)-((sssuva^2)/(Sqrt[nnnorma1^3])))
bbbeta124=(1/2)
bbbeta13=bbbeta121
bbbeta14=bbbeta124
bbbeta15=-1/((Sqrt[1-(nnnorma3/(2*11))^2])^2)
bbbeta16=(-1*sssuva)/(2*11*(nnnorma2)*(4*(11^2)-1)))
bbbeta12=(bbbeta123*bbbeta124)
bbbeta1=(bbbeta11*bbbeta12)+(bbbeta13*bbbeta14*bbbeta15*bbbeta16)
bbbeta=-bbbeta1
teta1pp3=aaalfa+bbbeta

f=Sqrt[1-(((11^2)+(12^2)-(norma3^2))/(2*11*12))^2]
gama11=norma3*suva
a121=(-.5)*(((11^2)+(12^2)-(norma3^2))*(norma3)*(suva)
b121=(11^2)*(12^2)*(norma1)*(Sqrt[(1-(((11^2)+(12^2)-(norma3^2))/(2*11*12))^2]^3])
gama121=a121/b121
gama122=((suva)/((Sqrt[norma1^3])*(f)))
gama13=(1/((norma2)*(f)))
gama14=(norma3)*(suma+(vx1^2)+(vy1^2))+((suva^2)/(norma2))
gama12=gama121-gama122

```

$$gama1=(gama11*gama12)+(gama13*gama14)$$

$$teta2pp=gama1/(l1*l2)$$

$$ff=\text{Sqrt}[1-(((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))/(2*l1*l2))^2]$$

$$ggama11=nnorma3*ssuva$$

$$aa121=(-.5)*((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))*(nnorma3)*(ssuva)$$

$$bb121=(l1^2)*(l2^2)*(nnorma1)*(\text{Sqrt}[(1-(((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))/(2*l1*l2))^2]^3])$$

$$ggama121=aa121/bb121$$

$$ggama122=((ssuva)/((\text{Sqrt}[nnorma1^3])*(ff)))$$

$$ggama13=(1/((nnorma2)*(ff)))$$

$$ggama14=(nnorma3)*(ssuva+vx2^2+vy2^2)+((ssuva^2)/(nnorma2))$$

$$ggama12=ggama121-ggama122$$

$$ggama1=(ggama11*ggama12)+(ggama13*ggama14)$$

$$teta2pp2=ggama1/(l1*l2)$$

$$fff=\text{Sqrt}[1-(((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))/(2*l1*l2))^2]$$

$$gggama11=nnorma3*sssuva$$

$$aaa121=(-.5)*((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))*(nnorma3)*(sssuva)$$

$$bbb121=(l1^2)*(l2^2)*(nnorma1)*(\text{Sqrt}[(1-(((l1^2)+(l2^2)-(nnorma3^2))/(2*l1*l2))^2]^3])$$

$$gggama121=aaa121/bbb121$$

$$gggama122=((sssuva)/((\text{Sqrt}[nnorma1^3])*(fff)))$$

$$gggama13=(1/((nnorma2)*(fff)))$$

$$gggama14=(nnorma3)*(sssuva+vx2^2+vy2^2)+((sssuva^2)/(nnorma2))$$

$$gggama12=gggama121-gggama122$$

$$gggama1=(gggama11*gggama12)+(gggama13*gggama14)$$

$$teta2pp3=gggama1/(l1*l2)$$

TableForm[alfa-teta1pp-teta2pp,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]

TableForm[aalfa-teta1pp2-teta2pp2,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]

TableForm[aaalfa-teta1pp3-teta2pp3,TableDepth->1,TableSpacing->{0,0,0,0}]