

03077

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

1  
Zey.

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS  
PROFESIONAL Y DE POSGRADO DEL C.C.H.  
POSGRADO EN GEOFISICA  
INSTITUTO DE GEOFISICA



MODELACION MATEMATICA DE LA PROPAGACION  
DE ONDAS SISMICAS EN CONFIGURACIONES  
REALISTAS USANDO EL VPM.

**TESIS PROFESIONAL**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS**

(SISMOLOGIA Y FISICA DEL INTERIOR DE LA TIERRA)

PRESENTA:

**RAFAEL AVILA CARRERA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. FCO. JOSE SANCHEZ SESMA.

MEXICO, D. F.

262035 1998.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

México D F a 18 de Marzo de 1998.

**H Comité Académico**  
Posgrado en Geofísica  
UACPyP del CCH  
**PRESENTE**

La presente tiene como objeto, poner a su atenta consideración la propuesta de asesor y tema de tesis que, para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Sismología y Física del Interior de la Tierra) presenta el alumno *Rafael Avila Carrera*.

**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS  
EN CONFIGURACIONES REALISTAS, USANDO EL VPM.**

- RESUMEN
- ABSTRACT
- I. INTRODUCCIÓN
- II. ECUACIÓN DE ONDA Y PRINCIPIOS DEL CÁLCULO VARIACIONAL
- III. MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL
- IV. MÉTODO DE PROYECCIÓN VARIACIONAL
- V. RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES
- VI. CONCLUSIONES
- RECONOCIMIENTOS
- REFERENCIAS.

**Atentamente**



**Rafael Avila Carrera**  
Alumno



**Dr Fco José Sánchez Sesma**  
Vo Bo Asesor

**A Alexandra con todo mi amor...**

**El séptimo ángel derramó su copa por el aire;  
y salió una gran voz del templo del cielo,  
del trono, diciendo: Hecho está.**

**Entonces hubo relámpagos y voces y truenos,  
y un gran temblor de tierra, un terremoto tan grande,  
cual no lo hubo jamás desde que los hombres han estado sobre la tierra.**

**Ap. 16: 17-18**

## INDICE

<b>RESUMEN</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>I. INTRODUCCIÓN</b> .....	iii
<b>II. ECUACIÓN DE ONDA Y PRINCIPIOS DEL CÁLCULO VARIACIONAL</b> .....	6
II.1 Ecuación de Navier.....	6
II.2 Ecuación de Onda.....	8
II.3 Teoría de Funcionales.....	13
II.4 Ecuación de Euler.....	17
II.5 Método de Galerkin.....	23
<b>III. MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL</b> .....	26
III.1 Bases del método pseudo-espectral.....	26
III.2 Diferencias finitas.....	33
III.3 Análisis de Fourier.....	36
<b>IV. MÉTODO DE PROYECCIÓN VARIACIONAL</b> .....	38
IV.1 Formulación del problema.....	38
IV.2 Formulación de Galerkin de forma débil.....	40
IV.3 Las ecuaciones proyectadas.....	41
IV.4 Condiciones de frontera absorbente.....	44
<b>V. RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES</b> .....	47
V.1 Modelo de Kawase y Aki (2D).....	47
V.2 Modelo de Sánchez-Sesma y Luzón (Croissant).....	52
V.3 Respuesta sísmica del Valle de Kobe.....	58
V.4 Respuesta sísmica de la Cuenca de México.....	64
<b>VI. CONCLUSIONES</b> .....	84
<b>RECONOCIMIENTOS</b> .....	86
<b>REFERENCIAS</b> .....	87

## RESUMEN

Se presenta un método nuevo: el Método de Proyección Variacional (VPM por sus siglas en inglés) para calcular la respuesta sísmica tridimensional de valles aluviales someros. Esta aproximación está basada en una formulación variacional de Galerkin para el problema de un depósito con geometría irregular de forma suave que sobreyace a un semi-espacio elástico. El método de Galerkin se aplica utilizando un grupo de funciones de prueba dependientes con la vertical. Las ecuaciones diferenciales de la elasticidad dinámica se acoplan y se "proyectan" al plano horizontal donde se resuelven usando un esquema pseudo-espectral. Este esquema soluciona las ecuaciones utilizando diferencias finitas en tiempo y algoritmos de transformada rápida de Fourier para las derivadas horizontales en el espacio. Se aproximan condiciones de frontera absorbente para simular la irradiación de energía al semi-espacio. Se dan algunos ejemplos de la factibilidad numérica y la exactitud del método. Se presentan resultados para modelos de valles someros en 2 y 3 dimensiones. El VPM parece ser bastante rápido y el nivel de aproximación que se obtiene es aceptable para fines prácticos. También se muestran cálculos de la respuesta sísmica en algunas zonas del valle de Osaka, Japón, durante el sismo de Kobe del 17 de Enero de 1995 y algunas simulaciones de la propagación de ondas sísmicas en un modelo simplificado de la cuenca de México con el fin de estudiar efectos azimutales.

## ABSTRACT

A new method is presented: The Variational Projection Method (VPM) to compute the seismic response of three-dimensional (3D) shallow alluvial valleys. This approach is based on a weak-form variational Galerkin formulation of the problem for a smooth irregular sedimentary deposit overlaying an elastic half-space. The Galerkin method is applied using a simple set of trial functions for depth dependence. The coupled partial differential equations of dynamic elasticity in space and time are "projected" into the horizontal plane and are then solved using a pseudospectral scheme: finite differences in time and fast Fourier transform (FFT) to compute spatial horizontal derivatives. Approximate absorbing boundary conditions are used to simulate radiation into the half-space. Examples are given of the numerical performance and accuracy of the VPM. Some results for two and three dimensions alluvial valley models are presented. This method appears to be fast in the computations and the accuracy is acceptable for many practical problems. Computations of ground motion at some locations in Osaka, Japan during the January 17, 1995 Hyogo Ken Nanbu (Kobe) earthquake are presented. Simulations of wave propagation in a simplified Mexico City Basin model are given to illustrate azimuthal effects.



---

## I. INTRODUCCIÓN

---

Las condiciones locales, topográficas y geológicas pueden producir ampli-ficaciones e importantes variaciones laterales en el movimiento del terreno durante temblores. Se ha sugerido que estos efectos pueden influir en la concentración de daños durante la ocurrencia de sismos fuertes. La evaluación del riesgo sísmico requiere entonces de una estimación *fidedigna*, y aún más, de su conocimiento preciso en sitios con gran densidad de asentamientos humanos, como la ciudad de México.

Los efectos de sitio pueden producir variaciones espaciales muy grandes del movimiento sísmico del suelo y concentrar el daño en ciertas zonas. En las últimas décadas se han realizado esfuerzos significativos que han ayudado en la caracterización de tales efectos (Sánchez-Sesma, 1987; Aki, 1988; Luco *et al*, 1990). La gran importancia de la amplificación local fue confirmada por el daño producido en varios sismos. Por ejemplo, la ciudad de México en 1985, San Francisco en 1989 y en 1995, la ciudad de Kobe. Las bases físicas del problema de amplificación son bien conocidas (Singh *et al*, 1995). Los trabajos más importantes han estado concentrados en el problema bidimensional. Esto ha permitido dar algunas explicaciones a las observaciones. Sin embargo, con el objeto de realizar un estudio cuantitativo de la respuesta de un sitio, la modelación debe considerar la naturaleza tridimensional del problema. La variabilidad espacial y la polarización del movimiento del suelo observadas en la ciudad de México han sido interpretadas como efectos tridimensionales (3D) (Pérez-Rocha *et al*, 1991; Sánchez-Sesma *et al*, 1993b).

Se han propuesto varios métodos para estudiar la propagación de las ondas sísmicas en valles aluviales en 3D (Sánchez-Sesma & Luzón, 1995). El método de elementos de frontera (BEM) permite obtener resultados tan confiables como para entender y calibrar otros procedimientos. En algunas circunstancias, un análisis con BEM permite estimar los efectos 3D de configuraciones simplificadas. Sin embargo, está restringido por la disponibilidad de las funciones de Green para medios heterogéneos. Los elementos finitos y las diferencias finitas permiten tratar materiales heterogéneos y manejar virtualmente cualquier configuración geométrica. De hecho, las simulaciones más realistas hasta ahora son las realizadas con diferencias finitas. El estudio de Frankel (1993) de la respuesta del valle de San Bernardino y de Olsen (1995) en la ciudad de los Angeles California ilustran bien este hecho. Las soluciones rigurosas (Horike *et al*, 1990) y aproximadas (Graves & Clayton, 1992) para estructuras del basamento elásticas y acústicas, respectivamente, muestran también las grandes dificultades del problema.

Por otro lado, las simulaciones exactas pueden ser muy difíciles aún con el uso de super computadoras. Es por esto que los procedimientos prácticos simplificados deben de tomarse en cuenta para evaluar los efectos de sitio.

En este trabajo se presenta un método nuevo para simular la respuesta sísmica de valles aluviales someros en 3D. En esta aproximación se tratan de sortear las dificultades ya mencionadas. La formulación desarrollada toma en cuenta una estructura fina como la observada en la respuesta en frecuencia de los modelos 2D, (p ej Sánchez-Sesma, 1993) donde se observa un fuerte acoplamiento entre la respuesta 1D y las ondas superficiales generadas localmente. De esta forma, se propone una aproximación experimental que usa expansiones de modos locales que dependen de la profundidad (Ávila-Carrera *et al*, 1993). Las formulaciones variacionales del tipo Galerkin son eficientes y exactas para los problemas de propagación de ondas (p ej Faccioli *et al*, 1996; Martínez & Bielak, 1980). La formulación de Galerkin de forma-débil es también la base de un método riguroso reciente en el dominio de la frecuencia llamado método de solución directa (DSM) (Geller *et al*, 1990; Geller & Ominato, 1994; Geller & Hatori, 1995). Ellos han resuelto un grupo de problemas de interés sísmológico con magníficos resultados.

Con el fin de explotar la extensión lateral del problema, aquí se usa una formulación variacional de forma débil y localmente se aplica el método de Galerkin con el objeto de "proyectar" el campo de ecuaciones de la elasticidad dinámica dentro de un plano horizontal. Se usa también una familia completa de funciones de prueba para la dependencia con la profundidad. Así pues, el Método de Proyección Variacional (VPM) produce un grupo de ecuaciones "proyectadas" en las cuales la dependencia de las coordenadas horizontales y el tiempo se preservan. Estas ecuaciones se resuelven entonces con el método pseudo-espectral, que es una herramienta bien conocida donde las derivadas en tiempo se aproximan con un esquema centrado de segundo orden, mientras que las derivadas espaciales se obtienen usando transformadas de Fourier. Se aplica este procedimiento para los sedimentos suaves y se supone una variación suave de la interfaz del depósito con el semi-espacio. El problema puede ser formulado de dos maneras: (1) por especificación del movimiento en la interfaz (usando teoría de rayos y método de Haskell) lo cual significa que las reflexiones tardías corresponderán al basamento rígido y tal energía perdida por radiación hacia el medio exterior puede ser tomada en cuenta sólo con operadores de tiempo ó (2) por la especificación de algunos esfuerzos en la interfaz en términos de fronteras parcialmente reflejantes. Estos dos caminos proporcionan buenos resultados, pero para establecer cuál es el mejor se necesita seguir trabajando en ello, ya que es materia de investigación de actualidad.

En el capítulo 5 se dan algunos ejemplos de la factibilidad numérica y exactitud del VPM para modelos de valles aluviales en 2 y 3D. Se utilizó el modelo propuesto por Kawase y Aki (1989), quienes resuelven el problema en el caso bidimensional utilizando un grupo de funciones de Green para modelar la propagación de ondas en valles con geometría simple y analizar las largas duraciones de los registros observados en la ciudad de

México. También se realizaron algunos cálculos tomando el modelo tridimensional propuesto por Sánchez-Sesma & Luzón (1995), para coparar el método propuesto y el IBEM (Método Indirecto de Elementos de Frontera).

Ademas de algunas comparaciones contra soluciones exactas en el dominio de la frecuencia (caso *SH*) y en el dominio del tiempo (casos *P* y *SV*) que se muestran en el capítulo 3, se realizaron simulaciones de la respuesta sísmica en algunas zonas del valle de Osaka, Japón, durante el sismo de Kobe del 17 de Enero de 1995, con la finalidad de establecer los alcances del VPM con respecto de eventos reales.

Como último bloque de resultados, en este trabajo se muestran varias simulaciones de la propagación de ondas sísmicas en un modelo simplificado de la cuenca de México, con el fin de observar efectos azimutales. Los resultados obtenidos han mostrado perspectivas muy interesantes de la respuesta sísmica de la cuenca de México y esbozan las potencialidades del modelado numérico como herramienta predictiva del movimiento sísmico esperado.

---

## II. ECUACIÓN DE ONDA Y PRINCIPIOS DEL CÁLCULO VARIACIONAL

---

### II.1 Ecuación de Navier

La ecuación de movimiento de un medio continuo puede escribirse en términos de la 2da ley de Newton, la cual está dada por

$$\frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.1)$$

donde  $\sigma_{ki}$  = tensor de esfuerzos,  $\rho$  = densidad de masa,  $x$  = coordenada espacial,  $f_i$  = fuerza de cuerpo y  $u_i$  = desplazamiento. Para expresar la ec (2.1.1) en términos de los desplazamientos, considérese la ley de Hooke para un medio isotrópico

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (2.1.2)$$

donde  $\lambda, \mu$  = constantes de Lamé,  $\delta_{ij}$  = delta de Kroeneker ( $= 1$  si  $i=j$ ;  $= 0$  si  $i \neq j$ ) y  $e_{ij}$  = tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy, definido como

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.3)$$

de donde

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.1.4)$$

rearrreglando índices se obtiene que

$$\sigma_{ki} = \lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ki} + \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (2.1.5)$$

al sustituir esta expresión en la ecuación de movimiento (2.1.1) se obtiene

$$\lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ki} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right) + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.6)$$

que puede escribirse como

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.1.7)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Navier*. Es la ecuación de equilibrio en un sólido elástico, lineal, homogéneo e isótropo en términos de los desplazamientos.

La ecuación de Navier tiene la forma vectorial

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} + \bar{f} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad (2.1.8)$$

El problema de la elastodinámica consiste en encontrar el campo de desplazamientos en un cuerpo una vez que son prescritas las condiciones de frontera, las singularidades (si las hay) y las condiciones iniciales.

Las condiciones de frontera más usuales son aquellas en que:

- (1) se prescribe  $u_i$  en la frontera, o
- (2) se prescribe  $T_i$  en la frontera, o
- (3) se prescriben  $u_i$  en parte de la frontera y  $T_i$  en la parte restante
- (4) se prescriben  $u_i$  y  $T_i$  en la misma frontera.

Las condiciones iniciales se expresan mediante la especificación de los campos de desplazamiento y velocidades en  $t = 0$

$$\begin{aligned} u_i(\bar{x}, 0) &= F_i(\bar{x}) \\ \dot{u}_i(\bar{x}, 0) &= G_i(\bar{x}) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

## II.2 Ecuación de Onda

Para describir la propagación de las ondas elásticas en un medio continuo elástico, homogéneo e isótropo considérese la *ecuación de Navier*, ec (2.1.8) sin fuerzas de cuerpo

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \bar{u} = \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \quad (2.2.1)$$

Es posible demostrar que, para un campo vectorial  $\bar{v}$  cualquiera, se cumple la identidad

$$\nabla^2 \bar{v} = \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{v}) \quad (2.2.2)$$

Ahora, supóngase que  $\bar{u}$  es un cierto movimiento que se verifica sin cambio de volumen es decir  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ . En este caso la ec (2.2.1) queda

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (2.2.3)$$

donde  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ .

La ec (2.2.3) gobierna la propagación de ondas equivolumétricas, hecho garantizado por  $\nabla \cdot \bar{u} = 0$ .

Si se supone que  $\bar{u}$  es un movimiento que ocurre en un continuo sin rotación de las partículas, es decir  $\nabla \times \bar{u} = 0$ , la ec (2.2.1) puede escribirse (tomando en cuenta la identidad de la ec (2.2.2) como

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad \nabla \times \bar{u} = 0 \quad (2.2.4)$$

donde  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ . Esta ecuación describe la propagación de movimiento irrotacional, pues  $\nabla \times \bar{u} = 0$ .

Para ilustrar estas ideas será útil escribir la ec (2.2.1) en forma no vectorial. Considérese que  $u = u_1, v = u_2, w = u_3$  y que  $x = x_1, y = x_2, z = x_3$ . La ec (2.2.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

donde, recordando,  $\lambda, \mu =$  constantes de Lamé y  $\rho =$  densidad de masa.

Supóngase que  $u \neq 0$  y que  $v = w = 0$ . Bajo esta hipótesis las ecs (2.2.5) quedan

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0 \tag{2.2.8}$$

de las ecs (2.2.7) y (2.2.8) se tiene que

$$u = F(x,t) + G(y,t) + H(z,t) + I(y,z,t) \tag{2.2.9}$$

que indica que existen cuatro soluciones independientes. Considérese el caso en que  $u$  es función sólo de  $x$  y del tiempo. La ec (2.2.6) queda

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.10}$$

o bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.11}$$

Esta es la *ecuación de onda* unidimensional (1D) la cual admite soluciones de la forma

$$u = f(t - x/\alpha) + g(t + x/\alpha) \tag{2.2.12}$$

en las que se ve que  $\alpha = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ . Esta forma se debe a D'Alambert. Puede verificarse que el rotacional es nulo y que a estas ondas está asociado sólo el cambio de volumen de las partículas. Ondas de este tipo reciben el nombre de ondas *P* o de *compresión*.

Considérese el caso en que  $u = u(y, t)$ . La ec (2.2.6) queda

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.13)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.14)$$

donde  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ . Una solución particular de esta ecuación, del tipo D'Alambert, es de la forma

$$u = f(t - y/\beta) + g(t + y/\beta) \quad (2.2.15)$$

en donde se ve que se trata de un movimiento en la dirección del eje *x* que *se propaga* en la dirección del eje *y* con una velocidad  $\beta$ . Puede verificarse que la divergencia del campo de desplazamientos es nula. Se trata, pues, de ondas sin cambio de volumen. Este tipo de ondas se denomina *S* (del inglés, *shear*) o *cortante*.

Debe notarse que

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} < \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \alpha \quad (2.2.16)$$

que indica que la velocidad de propagación de las ondas *P* es mayor que la de las ondas *S*.

Como se mostró en la ec (2.2.9) existe un caso en que

$$u = u(y, z, t). \quad (2.2.17)$$

Es claro que una solución de la forma (2.2.17) satisface las ecs (2.2.7) y (2.2.8). La ec (2.2.6) queda



$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.18)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.2.19)$$

que es la ecuación de onda en dos dimensiones. Las soluciones de la ec (2.2.19) serán ondas de cortante pues es claro que la divergencia de  $u(y,z,t)$  es nula.

A manera de ejemplo, una solución de la ec (2.2.19) está dada por

$$u = f \left[ t - \frac{1}{\beta} (y \cos \theta + z \sin \theta) \right] \quad (2.2.20)$$

al comparar esta ecuación con el primer término de la ec (2.2.15) se observa que (2.2.20) equivale a una rotación de ejes y se trata de una *onda plana* propagándose en la dirección definida por el ángulo  $\theta$  (fig (2.1)). Recuérdese que se trata de movimiento en la dirección del eje  $x$ .

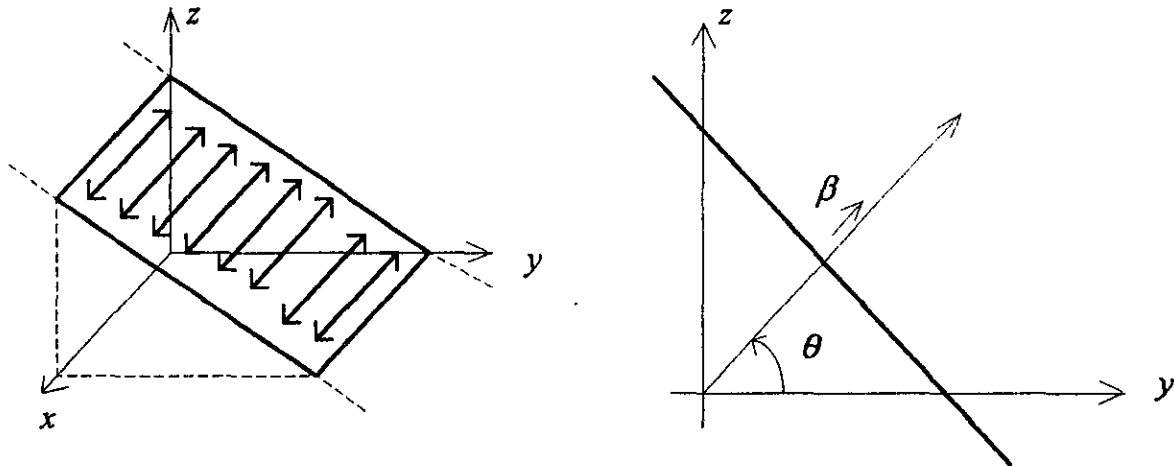


Fig 2.1 Onda plana propagándose en la dirección de  $\theta$

Cuando  $u = u(z,t)$  la solución es similar y se tienen ondas  $S$  propagándose en la dirección de  $z$  con movimiento de las partículas en la dirección del eje  $x$ .

En la fig (2.2) se ilustran los casos en que  $u = u(x,t)$  y  $u = u(y,t)$ .

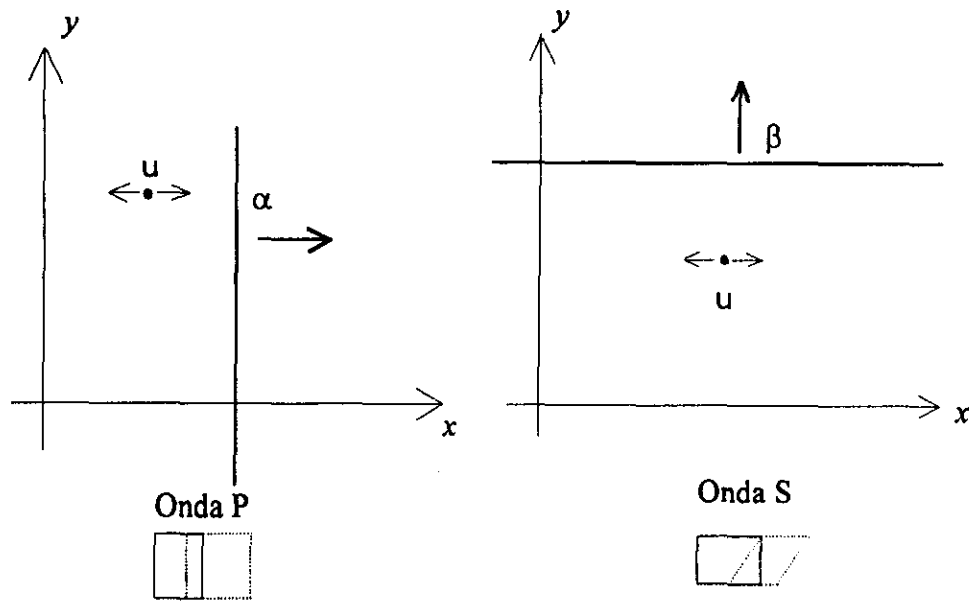


Fig 2.2 Ondas del tipo P y S. Movimiento y deformación de una partícula.

Este tipo de soluciones es el más sencillo y corresponde a ondas monocromáticas (fase constante) planas. En las observaciones, las ondas no son trenes de infinita duración, sino impulsos cortos que pueden aproximarse por un ciclo de onda sinusoidal y de esta forma se puede considerar su amplitud y período.

En este trabajo, las ondas planas son fundamentales para la calibración y comparación de la técnica variacional propuesta. En la mayoría de los casos presentados (p ej Cap V) se utilizan campos de ondas planas que inciden en los modelos. Es decir, se toma en cuenta que la fuente original se encuentra a una distancia tan grande como para que el frente de onda sea considerado plano.

### II.3 Teoría de Funcionales

Con la finalidad de introducir al lector en algunos de los temas que se utilizan en la formulación matemática del método que aquí se presenta (VPM), abordaremos, de manera general, algunos de los aspectos relacionados con el cálculo variacional. Si se quiere obtener un mayor detalle sobre los conceptos estudiados en este capítulo, puede consultarse el libro de Elgoltz, (1969).

Para hacer posible la descripción matemática de un fenómeno real cualquiera, generalmente hay que simplificarlo, idealizarlo, haciendo resaltar y tomando en cuenta sólo los factores sustanciales que actúan sobre éste y despreciar los menos considerables. Entonces surge la pregunta sobre si fueron correctamente escogidas o no las suposiciones de simplificación. Es posible que los factores no considerados influyan fuertemente sobre el fenómeno estudiado y cambien sus características cuantitativas y aún cualitativas.

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función  $z = f(x)$ , con frecuencia surge en los problemas físicos la necesidad de encontrar los valores máximos o mínimos de un género especial de magnitudes llamadas *funcionales*.

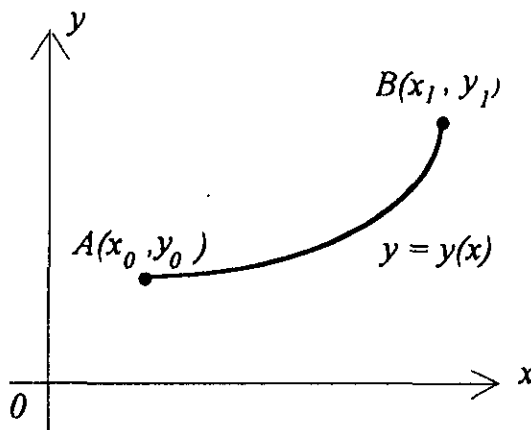


Fig 2.3 Curva plana unida por dos puntos  $A(x_0, y_0)$  y  $B(x_1, y_1)$

Se llaman *funcionales* a las magnitudes variables cuyos valores se determinan mediante la elección de una o varias funciones. Por ejemplo, la longitud  $l$  del arco de una curva plana (o alabeada) que une dos puntos dados  $A(x_0, y_0)$  y  $B(x_1, y_1)$ , es una funcional (véase la fig (2.3)).

La magnitud  $l$  puede calcularse si se da la ecuación de la curva,  $y = y(x)$  ; entonces

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx.. \quad (2.3.1)$$

El área  $S$  de cierta superficie, es también una funcional, puesto que se determina escogiendo la superficie, es decir, escogiendo la función  $z(x, y)$  de la superficie. Como es sabido,

$$S[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (2.3.2)$$

donde  $D$  es la proyección de la superficie en el plano  $0xy$ .

Los momentos de inercia, los momentos estáticos, las coordenadas del centro de gravedad de cierta curva o superficie homogénea, son también funcionales, puesto que sus valores se determinan eligiendo la curva o la superficie, es decir, las funciones contenidas en la ecuación de dicha curva o superficie.

En todos estos ejemplos se tiene una dependencia que es característica para las funcionales: a una función (escalar o vectorial) le corresponde un número.

El *cálculo variacional* estudia los métodos que permiten encontrar los valores máximos y mínimos de las funcionales. Los problemas en que se exige investigar el máximo o el mínimo de una funcional, se denominan *problemas variacionales*.

Muchas leyes de la mecánica y la física se reducen a la afirmación de que cierta funcional debe alcanzar su mínimo o máximo en el proceso considerado. En este enunciado, dichas leyes reciben el nombre de *principios variacionales* de la mecánica o de la física. A dichos principios variacionales, o a sus corolarios más simples, pertenecen: el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del impulso, la ley de conservación de la cantidad de movimiento (2da Ley de Newton), el principio de Fermat en óptica, el principio de Castiglianos en la teoría de la elasticidad, etc.

El cálculo variacional comenzó a desarrollarse en 1696, llegando a ser una disciplina matemática independiente con métodos propios de investigación después de los trabajos fundamentales del miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo L. Euler (1707-1783), quien puede considerarse con pleno derecho como fundador del cálculo variacional.

Los tres problemas siguientes ejercieron gran influencia en el desarrollo del cálculo variacional:

*Problema de la braquistócrona.* En 1696 Iohannis Bernoulli publicó una carta en la que propuso el problema sobre las líneas de deslizamiento más rápido, o braquistócronas, a la atención de los matemáticos. En este problema se pide determinar la línea que une dos puntos dados  $A$  y  $B$ , que no pertenecen a una misma recta vertical, que posea la propiedad de que un punto material se deslice por dicha línea desde el punto  $A$  hasta el  $B$  en el menor tiempo posible (fig (2.4))

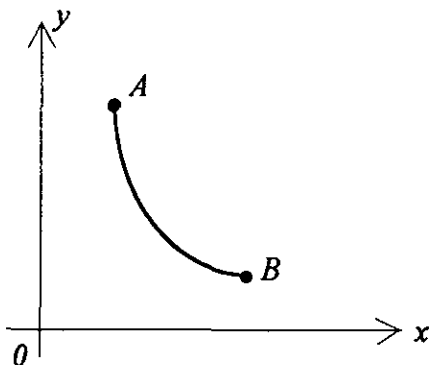


Fig 2.4 La Braquistócrona de Bernoulli

Es fácil ver que la línea de deslizamiento más rápido no será la recta que une los puntos  $A$  y  $B$ , a pesar de que ésta sea la distancia más corta entre dichos puntos, ya que al moverse por esta recta la velocidad aumentará de forma relativamente lenta; si, en cambio, se toma una curva que baje más bruscamente del punto  $A$ , entonces, aunque el camino se alarga, gran parte del mismo será recorrido con mayor velocidad. La solución del problema de la braquistócrona fue dado por I. Bernoulli, J. Bernoulli, G. Leibnitz, I. Newton y G. L'Hopital. La línea de deslizamiento más rápido resultó ser la cicloide.

*Problema de las líneas geodésicas:* Se pide determinar la línea de menor longitud que una dos puntos dados en cierta superficie  $\varphi(x, y, z) = 0$  (fig (2.5)). Estas líneas son llamadas *líneas geodésicas*. Se tiene aquí un problema variacional típico con el *extremo fijo o condicional*.

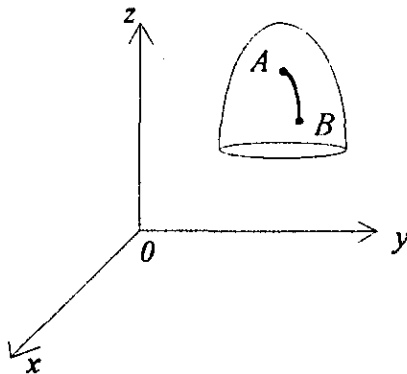


Fig 2.5 Problema de las líneas geodésicas

Se pide determinar el mínimo de la funcional

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} dx, \quad (2.3.3)$$

y además las funciones  $y(x)$  y  $z(x)$  deben someterse a la condición  $\varphi(x, y, z) = 0$ . Este problema fue resuelto en 1698 por J. Bernoulli, pero el método general para resolver problemas de este tipo se debe a L. Euler y J. Lagrange.

*Problema isoperimétrico.* Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada  $l$  que delimite el área máxima  $S$ . Esta línea, como se sabía ya en la Grecia antigua, es la circunferencia. En este problema se pide encontrar el extremo de la funcional  $S$  con una condición complementaria peculiar: la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} dt \quad (2.3.4)$$

se mantiene constante. condiciones de este tipo se llaman isoperimétricas. Los métodos generales de resolución de estos problemas fueron dados por L. Euler.

*Teorema de las funcionales:* Para  $y_0(x)$  y  $\delta y$  fijos,  $v[y_0(x) + \alpha \delta y] = \varphi(\alpha)$  es una función de  $\alpha$ , la cual, por hipótesis, tiene en  $\alpha = 0$  un máximo o un mínimo; por lo consiguiente la derivada

$$\varphi'(0) = 0, \quad \text{o bien,} \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} v[y_0(x) + \alpha \delta y]_{\alpha=0} = 0,$$

o sea,  $\delta v = 0$ . De este modo, en las curvas en las que la funcional tiene un extremo, su variación es igual a cero.

El concepto de extremo de una funcional debe ser precisado. Al hablar del máximo o del mínimo, más exactamente, del máximo o del mínimo relativos, tuvimos en cuenta el mayor o menor valor de la funcional sólo con respecto a los valores de ésta en las curvas cercanas. Pero, como fue indicado, la proximidad de las curvas puede entenderse de diferentes maneras. Por esto, en la definición de máximo o mínimo hay que señalar qué orden de proximidad se tiene en cuenta.

## II.4 Ecuación de Euler

Analicemos el extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (2.4.1)$$

si los puntos frontera de las curvas admisibles están fijos:  $y(x_0) = y_0$  e  $y(x_1) = y_1$  (fig (2.6)). La función  $F(x, y, y')$  se considerará derivable tres veces.

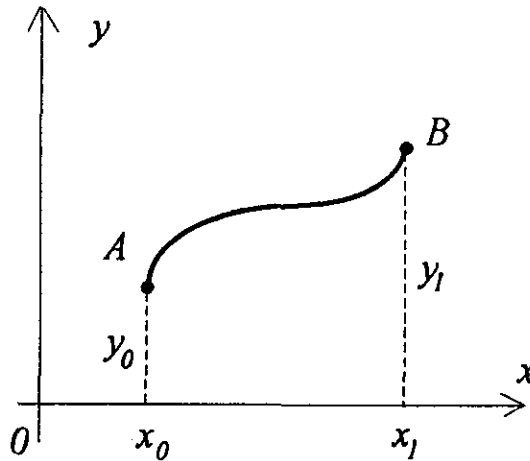


Fig 2.6 Curva derivable dos veces.

Ya sabemos que la condición necesaria para que haya un extremo es la anulación de la variación de la funcional. Mostremos ahora cómo se aplica este teorema fundamental a la funcional considerada; además, repitamos el razonamiento anterior aplicado a la funcional ec (2.4.1). Supongamos que en la curva  $y = y(x)$ , derivable dos veces, se tiene un extremo (exigiendo sólo la existencia de derivadas de primer orden de las curvas admisibles, se puede demostrar por otro método que la curva, que realiza el extremo, posee también derivada segunda).

Tomemos cierta curva admisible  $y = \bar{y}(x)$  cercana a  $y = y(x)$  e incluyamos  $y = y(x)$  e  $y = \bar{y}(x)$  en la familia monoparamétrica de curvas

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha(\bar{y}(x) - y(x)); \quad (2.4.2)$$

cuando  $\alpha = 0$ , se obtiene la curva  $y = y(x)$ ; para  $\alpha = 1$ , se tiene  $y = \bar{y}(x)$  (fig (2.7)).

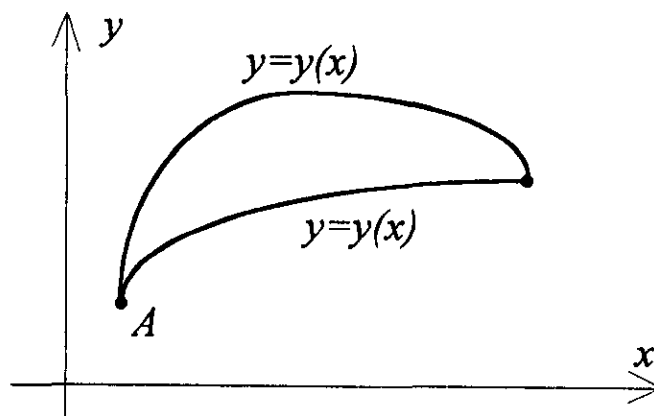


Fig 2.7 Curvas monparamétricas

Como ya es sabido, la diferencia  $\bar{y}(x) - y(x)$  se llama variación de la función  $y(x)$  y se designa por  $\delta y$ .

En los problemas variacionales, la variación  $\delta y$  desempeña un papel análogo al del incremento de la variable independiente  $\Delta x$  en los problemas del estudio del incremento de una función  $f(x)$ . La variación  $\delta y = \bar{y}(x) - y(x)$  es una función de  $x$ . Esta función se puede derivar una o varias veces, siendo  $(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$ , es decir, la derivada de la variación es igual a la variación de la derivada; análogamente

$$\begin{aligned}
 (\delta y)'' &= \bar{y}''(x) - y''(x) = \delta y'' \\
 &\dots\dots\dots \\
 (\delta y)^{(k)} &= \bar{y}^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) = \delta y^{(k)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4.3}$$

De este modo, consideremos la familia  $y = y(x, \alpha)$ , donde  $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \delta y$ , que contiene, para  $\alpha = 0$ , la curva en la cual se alcanza el extremo, y para  $\alpha = 1$ , cierta curva admisible cercana, llamada curva de comparación.

Si consideramos los valores de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx
 \tag{2.4.4}$$

sólo en las curvas de la familia  $y = y(x, \alpha)$ , la funcional se transforma en una función de  $\alpha$ :



$$v[y(x, \alpha)] = \varphi(\alpha), \quad (2.4.5)$$

ya que el valor del parámetro  $\alpha$  determina la curva de la familia  $y = y(x, \alpha)$  determinando también con esto el valor de la funcional  $v[y(x, \alpha)]$ . Esta función  $\varphi(\alpha)$  tiene un extremo en  $\alpha = 0$ , puesto que para dicho valor se obtiene  $y = y(x)$ , teniendo la funcional, por hipótesis, un extremo a cualquier curva cercana admisible y, en particular, con respecto a las curvas cercanas de la familia  $y = y(x, \alpha)$ . La condición necesaria para que la función  $\varphi(\alpha)$  tenga un extremo en  $\alpha = 0$ , como es sabido, es la anulación de su derivada para  $\alpha=0$

$$\varphi'(\alpha) = 0.$$

Como

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x, \alpha), y'_x(x, \alpha)) dx, \quad (2.4.6)$$

entonces

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[ F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) \right] dx, \quad (2.4.7)$$

donde

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)), \\ F_{y'} &= \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)), \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

o, puesto que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y(x) + \alpha \delta y] = \delta y \quad (2.4.9)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} [y'(x) + \alpha \delta y'] = \delta y', \quad (2.4.10)$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi'(\alpha) &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y + F_{y'}(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))\delta y'] dx; \\ \varphi'(0) &= \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'] dx.\end{aligned}\tag{2.4.11}$$

Como ya hemos visto,  $\varphi'(0)$  se llama variación de la funcional, y se designa por  $\delta v$ . La condición necesaria para que la funcional  $v$  tenga un extremo, consiste en la anulación de su variación  $\delta v = 0$ . Para la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx\tag{2.4.12}$$

esta condición tiene la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx = 0.\tag{2.4.13}$$

Integrando el segundo sumando por partes, y tomando en cuenta que  $\delta y' = (\delta y)'$ , obtenemos

$$\delta v = [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.\tag{2.4.14}$$

Pero

$$\delta y|_{x=x_0} = \bar{y}(x_0) - y(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad \delta y|_{x=x_1} = \bar{y}(x_1) - y(x_1) = 0,$$

en virtud de que todas las curvas admisibles en el problema simple considerado pasan por puntos frontera fijos, por lo tanto,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.\tag{2.4.15}$$

De este modo, la condición de extremo toma la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} \left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0, \quad (2.4.16)$$

donde el primer factor  $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$  es una función continua dada en la curva  $y = y(x)$  que realiza el extremo, y el segundo factor  $\delta y$ , debido a la arbitrariedad de elección en la curva de comparación  $y = \bar{y}(x)$ , es una función arbitraria que satisface sólo ciertas condiciones muy generales, más exactamente: la función  $\delta y$  se anula en los puntos frontera  $x = x_0$  y  $x = x_1$ , es continua y derivable en una o varias veces,  $\delta y$  o bien  $\delta y$  y  $\delta y'$  son pequeños en el valor absoluto.

**Lema fundamental del cálculo variacional.** Si para cada función continua  $\eta(x)$  se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x) \eta(x) dx = 0,$$

siendo  $\Phi(x)$  una función continua en el segmento  $(x_0, x_1)$ , entonces

$$\Phi(x) \equiv 0$$

en dicho segmento.

Aplicaremos ahora el lema fundamental para simplificar la condición necesaria (ec (2.4.16)) obtenida anteriormente, de extremo de la funcional (2.4.1). Todas las condiciones del lema se cumplen: en la curva que realiza el extremo, el factor  $\left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right)$  es una función continua y la variación  $\delta y$  es una función arbitraria a la cual se han impuesto sólo limitaciones de carácter general, ya previstas en el lema fundamental. Por lo tanto,  $\left( F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \equiv 0$  en la curva  $y = y(x)$  que realiza el extremo de la funcional considerada, es decir,  $y = y(x)$  es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$

o bien, en forma desarrollada,

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Esta ecuación se denomina *Ecuación de Euler* ( publicada por primera vez en 1744). Las curvas integrales de la ecuación de Euler  $y = y(x, C_1, C_2)$  se llaman *extremales*. Sólo en las extremales puede alcanzarse un extremo de la funcional

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx.$$

Para encontrar la curva que realice un extremo de la funcional ec (2.4.1) se integra la ecuación de Euler y se determinan las dos constantes arbitrarias, que figuran en la solución general de esta ecuación, de las condiciones de frontera  $y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$ . Sólo en las extremales que satisfacen estas condiciones se puede realizar un extremo de la funcional. Sin embargo, para establecer si se realiza en realidad o no en ellas el extremo, y además si es un máximo o un mínimo hay que aplicar las condiciones suficientes de extremo. Estas condiciones no se tocarán aquí, pero el lector interesado puede consultar la bibliografía proporcionada. (Elsgolts, Cap 8)

Por ejemplo, obsérvese que el problema de frontera

$$F_y - \frac{d}{dy} F_{y'} = 0, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

no siempre tiene solución, y si la solución existe, puede no ser única.

En muchos problemas variacionales la existencia de la solución es evidente del sentido físico o geométrico del problema, y si la ecuación de Euler que satisface las condiciones de frontera es única, esta única extremal será la solución del problema variacional considerado.

A continuación se presenta de manera formal el método de Galerkin. Este es el esquema variacional utilizado en la formulación matemática (ver Cap IV) propuesta para resolver la ecuación de onda en 3D.

## II.5 Método de Galerkin

Las ecuaciones diferenciales de los problemas variacionales se integran en forma finita sólo en casos excepcionales. Por esto surge naturalmente la necesidad de obtener otros métodos de resolución de estos problemas. La idea fundamental de los llamados *métodos directos* consiste en que el problema variacional se considera como límite para cierto problema, es decir, como el extremo de una función de un número finito de variables. Este último problema se resuelve con los métodos comunes y luego se obtiene, mediante el paso al límite, la solución del problema variacional correspondiente.

Para la resolución aproximada de problemas de frontera se aplica con frecuencia un método directo de B. G. Galerkin. Este es particularmente cómodo en la resolución de problemas lineales de frontera, pero puede ser aplicado también en muchos problemas no lineales. Para fijar ideas, expondremos el *método de Galerkin* aplicado en las ecuaciones lineales de segundo orden, (por su relación con la ecuación de onda)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (2.5.1)$$

que se encuentran con particular frecuencia en la práctica, con las condiciones de frontera  $y(x_0) = 0$ ,  $y(x_1) = 0$  (las condiciones de frontera no homogéneas  $y(x_0) = y_0$ ,  $y(x_1) = y_1$  se reducen fácilmente a las homogéneas mediante el cambio de variables

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (2.5.2)$$

Escribamos la ec (2.5.1) en forma compacta como

$$L(y) = f(x).$$

Tomamos un sistema de funciones continuas

$$w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x), \dots \quad (2.5.3)$$

linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera  $w_n(x_0) = w_n(x_1) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), completo en el segmento  $(x_0, x_1)$ . Buscaremos la solución aproximada del problema de frontera en forma de la combinación lineal de las primeras  $n$  funciones del sistema (2.5.3):

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i. \quad (2.5.4)$$

Se sustituyen las  $y_n$  en la ec (2.5.1) y se eligen los coeficientes  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) de modo que la función

$$L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)\right) - f(x)$$

sea ortogonal en el segmento  $(x_0, x_1)$  a cada función  $w_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), es decir

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[ L\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)\right) - f(x) \right] w_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.5.5)$$

Es natural esperar que  $y_n$  tienda para  $n \rightarrow \infty$  a la solución exacta,

$$\tilde{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i w_i(x),$$

puesto que si la serie obtenida converge y puede ser derivada dos veces término a término, la función  $L(\tilde{y}) - f(x)$  es ortogonal en el segmento  $(x_0, x_1)$  a cada función  $w_i(x)$  del sistema (2.5.3), y como dicho sistema es completo, entonces  $L(\tilde{y}) - f(x) \equiv 0$ ; esto precisamente significa que  $\tilde{y}$  es la solución de la ec (2.5.1). Es evidente que  $\tilde{y}$  satisface también las condiciones de frontera  $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(x_1) = 0$  (puesto que todas las  $w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ ).

Muy raras veces se pueden determinar todas las  $\alpha_i$  del sistema lineal (2.5.5) con respecto a éstas y pasar al límite para  $n \rightarrow \infty$ ; por esto, por lo general hay que limitarse a un  $n$  finito, y además no muy grande ( $n = 2, 3, 4, 5$ , y a veces incluso  $n = 1$ ).

En este caso, hay que tomar sólo  $n$  funciones  $w_i(x)$ ; por esto, la condición de que el sistema sea completo no es necesaria, y hay que elegir dichas funciones sólo de modo que sean linealmente independientes y que satisfagan las condiciones de frontera

$$w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0.$$

Con frecuencia se toman polinomios en calidad de estas funciones, llamadas funciones coordenadas:

$$\begin{aligned} (x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)^2(x - x_1), (x - x_0)^3(x - x_1), \dots \\ \dots, (x - x_0)^n(x - x_1), \dots \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

(en este caso es cómodo trasladar el origen de coordenadas al punto  $x_0$ , y entonces  $x_0 = 0$  en (2.5.6)), o bien funciones trigonométricas,

$$\text{sen} \frac{n\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Este método es aplicable a las ecuaciones de cualquier orden  $n$ , a los sistemas de ecuaciones y a las ecuaciones en derivadas parciales. De aquí su importancia, ya que sobre este método se fundamenta la solución de la ecuación de onda que es tema central de este trabajo.

---

### III. MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL

---

#### III.1 Bases del método pseudo-espectral

El método pseudo-espectral o de Fourier fue introducido a principios de los años setentas por Kreiss y Oliger (1972) y por Fornberg (1975). Desde entonces ha sido ampliamente utilizado en estudios de predicción meteorológica. Sólo diez años más tarde fué aplicado a la propagación de ondas sísmicas (Kosloff y Baysal, 1982), y ahora forma parte de los llamados métodos directos como los de diferencias finitas o elementos finitos. Para la ecuación de propagación de ondas sísmicas, la idea del método es efectuar la derivación temporal por un método de diferencias finitas centradas y la derivación espacial utilizando transformada de Fourier. El esquema requiere mucho menos puntos de discretización que en los métodos de diferencias finitas, para lograr la misma exactitud. Sin embargo, se cree que el método pseudo-espectral será más eficiente que los otros métodos de su clase, especialmente cuando se tratan modelos tridimensionales.

Para ilustrar las ideas básicas considérese la ecuación de onda, ec (3.1.1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (3.1.1)$$

la discretización se hace en tiempo y espacio por medio de una malla de dimensiones finitas equiespaciada, con  $\Delta x$ , el tiempo se divide en intervalos  $\Delta t$ . Estos parámetros no son independientes entre sí y deben ser escogidos cuidadosamente para evitar efectos de dispersión numérica. La derivación en el dominio del tiempo se efectúa con diferencias finitas (centrales) para la cual, con una aproximación de segundo orden, podemos escribir

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1}}{\Delta t^2} \quad (3.1.2)$$

donde  $U^{j+1}$  es el valor calculado de la función  $U$  al tiempo  $j+1$ .

Para la obtención de las derivadas en el dominio espacial se hace uso de la transformada de Fourier directa e inversa, respectivamente, que pasan la información del dominio espacial ( $x$ ) al dominio del número de onda ( $k$ ) y viceversa. Estas transformadas suelen escribirse como



$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad y \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk \quad (3.1.3)$$

Una importante propiedad de la transformada de Fourier es que la derivada  $n$ -ésima de la función  $f(x)$ ,  $(f^{(n)}(x))$  tiene como transformada  $(ik)^n F(k)$ , donde  $i^2 = -1$ .

Así, para efectuar la segunda derivada de una función  $f$ ,  $d^2 f/dx^2$  obtenemos primero la transformada directa de Fourier de la función  $f(x)$  y al resultado en el dominio del número de onda  $f(k)$  lo multiplicamos por  $(ik)^2$  posteriormente, al nuevo resultado le aplicamos la transformada inversa  $(-k^2 F(k))$ , para así obtener, de regreso al dominio espacial, la segunda derivada de la función.

$$f(x) \Rightarrow F(k)(ik)^2 = (-k)^2 F(k) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (3.1.4)$$

El tratamiento numérico de esta derivación espacial requiere cuidado especial en la discretización de la señal. Con el uso de un marco adecuado de discretización y con el poder de cómputo suficiente, este método puede aplicarse de manera satisfactoria en el modelado de la propagación de ondas sísmicas. Así, a partir de las ecs (3.1.1) y (3.1.2) se tiene un esquema explícito de cálculo. En este método sólo se requieren de 2 a 3 puntos de muestreo por longitud de onda espacial, esto es, cinco veces menos puntos que en esquemas tradicionales de diferencias finitas. En el caso 2D se requieren 25 veces menos puntos de muestreo. Este factor alcanza 125 en 3D. Por ello el método es una alternativa interesante en las simulaciones de la propagación de ondas y el campo de la modelación numérica.

Las derivadas espaciales construidas con el método pseudo-espectral son exactas para los desplazamientos con frecuencias espaciales en la banda de la malla de cálculo. Para un problema en una región homogénea e infinita, las componentes de Fourier son vectores característicos de la ecuación de onda y la frecuencia temporal de la solución exacta será igual a la banda de frecuencia del término de fuente  $S(x, y, t)$ .

En tal caso si la banda de frecuencia de la fuente es escogida apropiadamente, los errores en la solución numérica vienen sólo de la inexactitud de las aproximaciones de las diferencias finitas en las derivadas temporales. Estos errores se manifiestan como una dispersión numérica y decrecen rápidamente cuando disminuye el tamaño del intervalo de tiempo. La fig (3.1) es una gráfica de la relación de dispersión para el método pseudo-espectral con una ecuación de onda acústica unidimensional (1-D) homogénea; en ésta figura  $C$  es la velocidad de fase,  $V$  es la velocidad de la onda acústica y  $KDX$  el número de onda por el equiespaciamento. Observando ésta gráfica, se muestra que el límite de estabilidad cuando  $\alpha = C\Delta t/\Delta x = 2/\pi$  la dispersión numérica es grande. Sin embargo para intervalos de tiempo para los cuales  $\alpha < 0.2$  la dispersión se reduce.

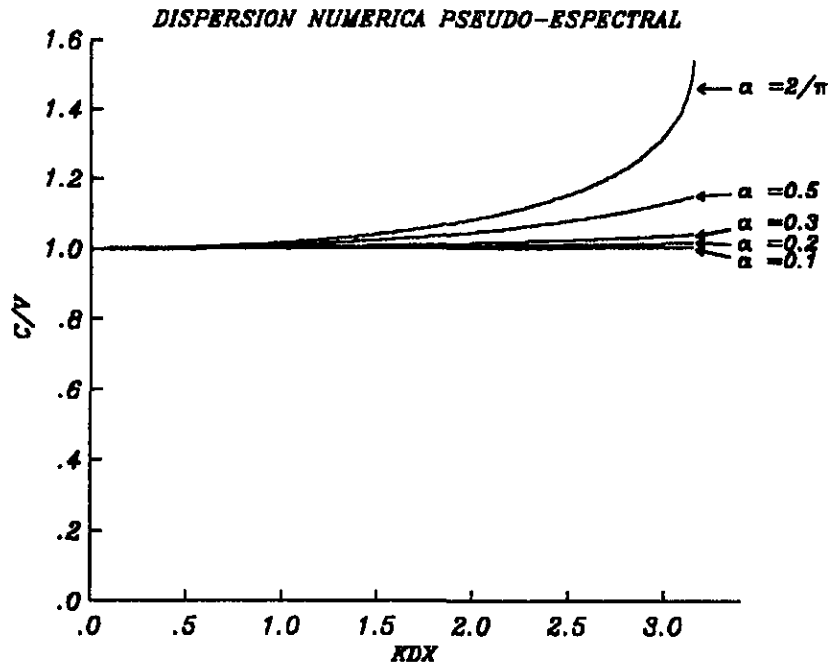


Fig (3.1) Relaciones de dispersión para el método pseudo-espectral y el caso unidimensional homogéneo de la ecuación de onda para distintos rangos de  $\alpha$ .

Cuando la densidad o la velocidad varían espacialmente, la banda de frecuencia de la solución de la ecuación de onda es igual a la banda de frecuencia de la fuente. Esto es por que una multiplicación por la velocidad en el dominio espacial corresponde a una convolución en el dominio de la frecuencia espacial (número de onda). Así pues no todos los errores en esta situación pueden ser atribuidos a la dispersión numérica.

En cierta manera, la experiencia nos indica que por el uso de intervalos para los cuales  $\alpha < 0.2$  en todos los puntos de la rejilla y limitando el contenido de frecuencia de la fuente al de la banda resultante por la rejilla, uno obtiene fuertes y claros eventos en las secciones de tiempo.

En la fig (3.2) se muestra una comparación de la relación de dispersión para un esquema de diferencias finitas 1-D usado por Alford et al (1974). Esta figura muestra que la dispersión en altas frecuencias es siempre grande excepto en el límite de estabilidad  $\alpha = 1$ .

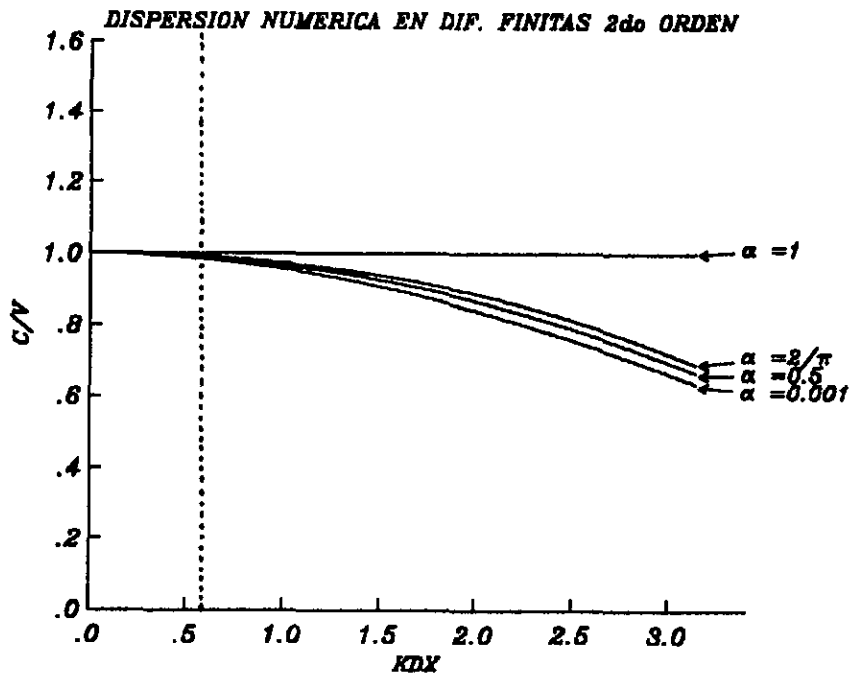


Fig (3.2) Relaciones de dispersión numérica para el método de diferencias finitas y las mismas condiciones de onda que para la fig. (3.1).

La línea punteada corresponde a una longitud de onda de 10 puntos de rejilla, la cual, se considera comunmente como el número de onda más corto, que puede ser resuelto. En este número de onda la velocidad de fase es cerca del 2% menor que la rapidez de onda acústica.

Una ventaja adicional del método pseudo-espectral sobre el método de diferencias finitas es que para un medio en 2-D ó 3-D homogéneo, la dispersión es isotrópica. De este modo una componente pseudo-espectral de una frecuencia viajará a una misma velocidad de fase en todos los ángulos con respecto a la rejilla. Este generalmente no es el caso en diferencias finitas para el cual la dispersión es anisotrópica para las altas frecuencias (Kosloff y Baysal, 1982).

Con el fin de mostrar algunas de las bondades del método pseudo-espectral, considérese un semi-espacio elástico plano, tridimensional, con propiedades  $\rho_E$ ,  $\beta_E$  y  $\alpha_E$  como el que se muestra en la fig (3.3).

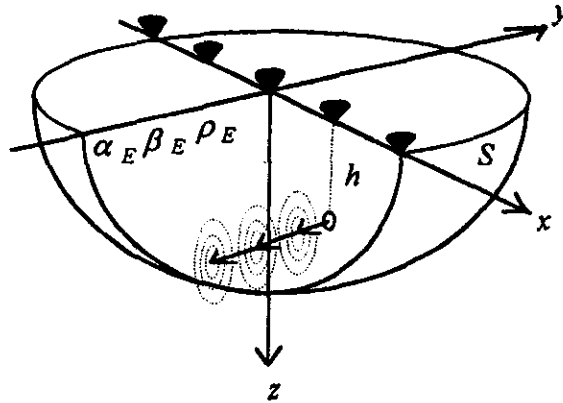
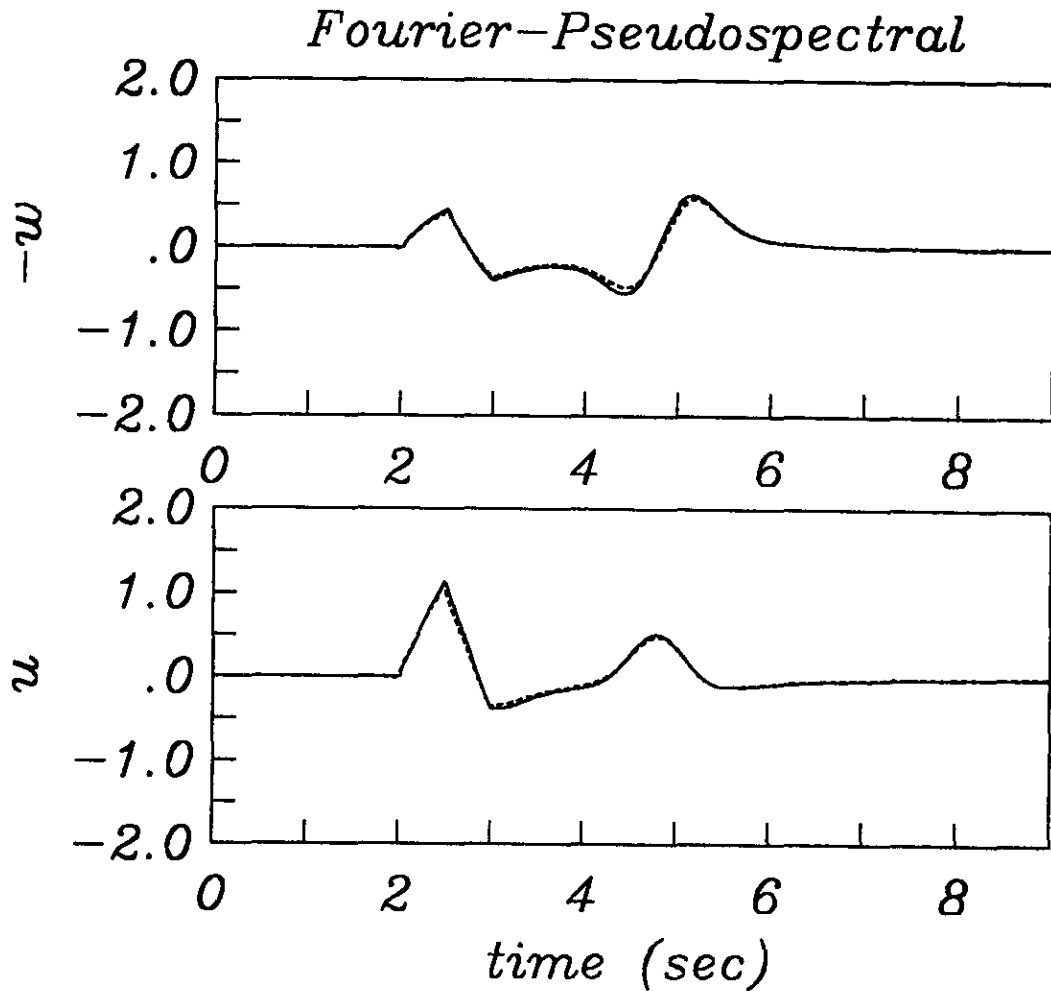


Fig (3.3) Línea explosiva dentro de un semiespacio elástico.

Se utiliza como fuente una línea explosiva infinita, perpendicular al plano  $xz$ , con profundidad  $h$  y variación triangular en tiempo. El momento máximo está dado por  $M_0 = q \pi \rho_E \alpha_E^2$ . Los detectores se encuentran a lo largo del eje  $x$ , a intervalos  $\Delta x$ . Los sismogramas sintéticos (historias de tiempo) obtenidos con el método pseudo-espectral, se calcularon siguiendo una formulación que utiliza una malla alternada para las velocidades y los esfuerzos. Esto es, se calculan las velocidades y a partir de estas los esfuerzos en una posición corrida ( $\Delta/2$ ) de la malla. Esto se verá con mejor detalle más adelante.

La fig (3.4) muestra las historias de tiempo de las componentes  $u$  y  $w$  del desplazamiento para el modelo de la fig (3.3). La solución de Garvin (línea continua) es una expresión algebraica de forma cerrada para los desplazamientos en superficie (Garvin, 1956), la cual se toma de referencia para comparar con el método pseudo-espectral (línea discontinua). Este último, denota una buena aproximación numérica en todos los puntos de la traza.

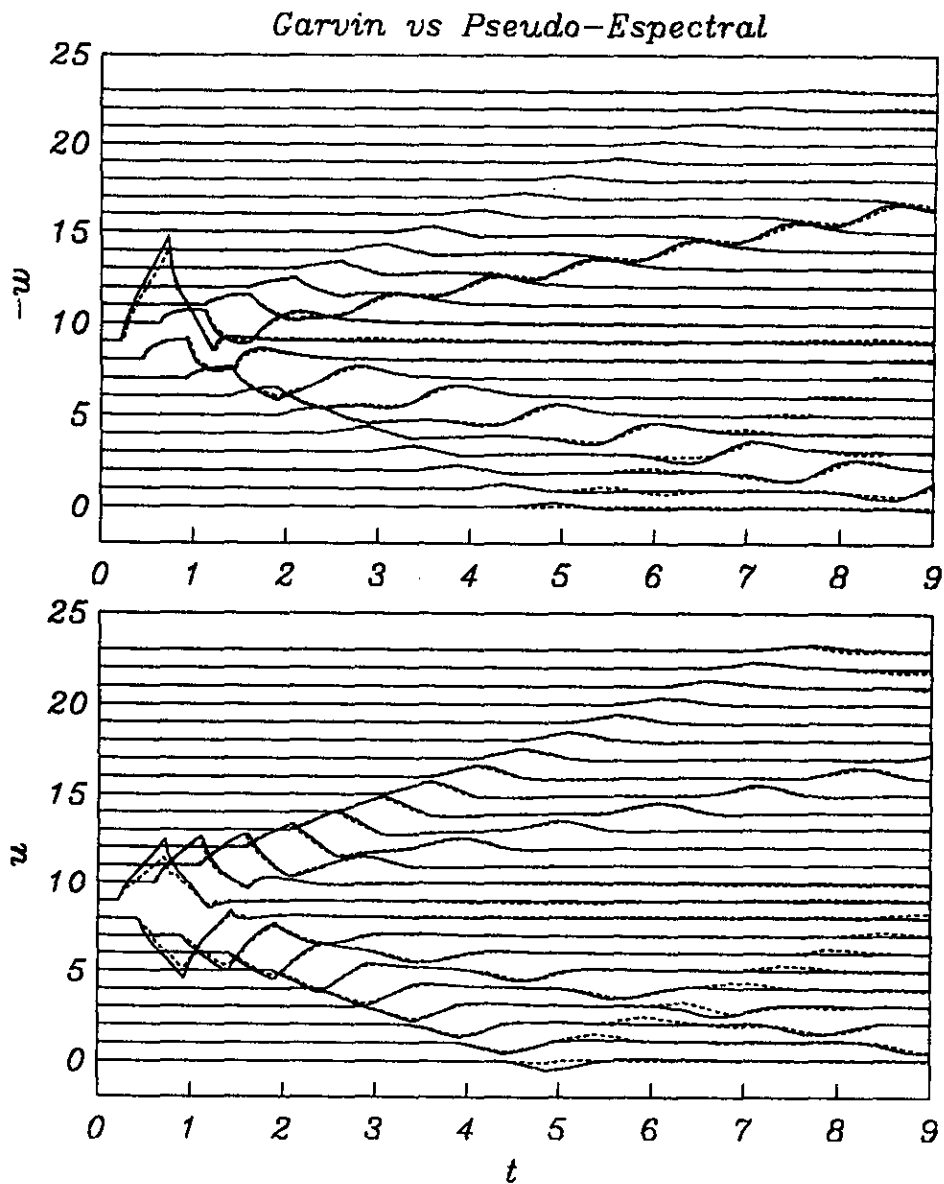
Es fácil observar la presencia de las ondas superficiales. Aquí se muestra una buena reproducción de la solución exacta en las amplitudes y polarización de los registros en tiempo. En este caso, el método pseudo-espectral tiene muchas posibilidades en la aproximación de resultados de la respuesta sísmica de valles aluviales, donde la presencia de estas ondas es de gran importancia.



*Fig (3.4) Comparación de las historias de tiempo para las componentes  $u$  y  $w$  de desplazamiento, entre la solución analítica de Garvin (línea continua) y el método pseudo espectral (línea discontinua)*

En la fig (3.5) se muestran los sismogramas sintéticos para el modelo de la fig (3.3) sólo que esta vez en una serie de detectores a lo largo del eje  $x$ . Los detectores se encuentran equiespaciados y se observa claramente la propagación del primer impulso y de las ondas superficiales.

Es de suma importancia, observar la reproducción de las ondas superficiales, su amplitud, velocidad y absorción deben de ser correctamente representados si se pretenden obtener buenos resultados al momento de una aplicación realista.



*Fig 3.5 Sismogramas sintéticos en las componentes  $u$  y  $w$  del desplazamiento para el modelo de la fig 3.3. La línea continua representa la solución de Garvin y la discontinua al método pseudo-espectral.*

Finalmente en este trabajo se utiliza al método pseudo-espectral como una poderosa herramienta de cálculo numérico para la solución de la ecuación de onda. Su inclusión dentro de la formulación variacional de Galerkin propuesta en el Método de Proyección Variacional (VPM) permite generar resultados rápidos con buena aproximación de las soluciones de referencia. Esto se hace con bajos recursos de cómputo.

### III.2 Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas ofrece un camino directo para calcular los movimientos a partir del problema formulado en términos de ecuaciones básicas, condiciones iniciales y de frontera, implica un mínimo de esfuerzo analítico mediante el empleo intensivo de computadoras digitales. El método es en general flexible, y puede ser aplicado a cualquier cuerpo inhomogéneo de forma virtual y arbitraria. El método es esencialmente parecido a una simulación de laboratorio usando un modelo a escala, tiene mayores ventajas sobre otros métodos en cuanto a exactitud de resultados, facilidad de preparar un modelo y una fuente sísmica, en la reducción del efecto de fronteras artificiales impuestas con un carácter finito en los modelos. Todo esto sin ninguna otra dificultad que un programa de computadora.

El tamaño y la complejidad de un problema que puede ser resuelto con el método de diferencias finitas está limitado por la capacidad de cómputo disponible. Por ello es de gran importancia contar con algoritmos que minimicen la cantidad de memoria requerida y el tiempo de cómputo. Un algoritmo eficiente debe buscar la máxima explotación de la simetría de un problema, la simplificación de las ecuaciones básicas, las condiciones de frontera que se alojan para la exactitud deseada y las opciones óptimas de configuraciones para rejillas, fórmulas de diferencias finitas y condiciones en las fronteras artificiales.

El caso más simple de la ecuación de onda unidimensional permite ilustrar los elementos del método de diferencias finitas y cómo se aplican en sismología.

Considérese un medio en el cual las constantes elásticas varían sólo en una dirección,  $x$ . La ecuación de movimiento para el desplazamiento asociado con el plano de propagación de ondas en la misma dirección es

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (3.2.1)$$

donde

$$E(x) = \lambda(x) + 2\mu(x) \text{ para ondas } P \text{ y } E(x) = \mu(x) \text{ para ondas } S.$$

Para evitar tomar las derivadas espaciales de  $E(x)$ , usaremos la velocidad de partícula  $\dot{u} = \partial u / \partial t$  y el esfuerzo  $\tau = E(x) \partial u / \partial x$  como variables. Entonces la ec (3.2.1) se reemplaza por las siguientes ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (3.2.2)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = E(x) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

Hay muchas maneras de aproximar las ecs (3.2.2), por fórmulas de diferencias finitas. Para mostrar la importancia de escoger un esquema apropiado, podremos dar un ejemplo que resulta ser muy bueno por su estabilidad y que es un esquema bien conocido para calcular las derivadas en la parte temporal de la ecuación de onda. Este esquema puede construirse con el uso de rejillas alternadas en las cuales la rejilla para  $\dot{u}$  es corrida de la rejilla  $\tau$  por la mitad de una longitud de rejilla par  $x$  y  $t$  como se muestra en la fig (3.6). Entonces usamos la siguiente aproximación en diferencias finitas a la ec (3.2.2)

$$\frac{\dot{u}_m^{l+1/2} - \dot{u}_m^{l-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\rho_m} \frac{\tau_{m+1/2}^l - \tau_{m-1/2}^l}{\Delta x} \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\tau_{m+1/2}^{l+1} - \tau_{m+1/2}^l}{\Delta t} = E_{m+1/2} \frac{\dot{u}_{m+1}^{l-1/2} - \dot{u}_m^{l+1/2}}{\Delta x}$$

Este esquema nos permite conocer los valores de las velocidades  $\dot{u}$  para el tiempo  $l+1$  en todos los puntos de la malla conocidos los esfuerzos  $\tau$  en  $1/2$  de la rejilla espacial a ambos lados del punto de velocidad.

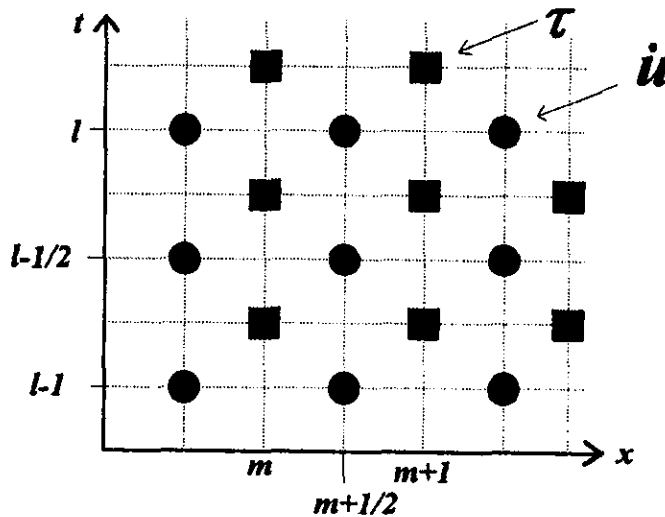


Fig. (3.6) Distribución de las mallas de espacio y tiempo para las velocidades  $\dot{u}$  y los esfuerzos  $\tau$ .



Para este caso el término de error es muy pequeño, por que resulta ser proporcional al cuadrado del intervalo de muestreo, aquí el intervalo fue acortado por un medio, véase, ( Aki y Richards, 1980, pp. 773-795).

Este ejemplo muestra la versatilidad en las aplicaciones de los esquemas de diferencias finitas que pueden utilizarse. En este trabajo se adopta un esquema centrado de segundo orden, sólo para las velocidades, en la solución de la ecuación de movimiento ya proyectada por una formulación de galerkin de forma débil, como se mostrará más adelante en este trabajo (Cap 4).

De esta manera el método de diferencias finitas constituye una base numérica sólida para el método pseudo-espectral. Este último, utilizado en el VPM, se apoya en muchas de las ventajas de operación de las diferencias finitas y aprovecha su confiabilidad en la reproducción de resultados para problemas de modelado de la propagación de ondas sísmicas donde ya son bien conocidas.

### III.3 Análisis de Fourier

En el estudio de la respuesta sísmica de estructuras geológicas se analizan los efectos producidos por una señal transitoria que puede ser una onda elemental, o bien, un registro sísmico. Para calcular la respuesta se emplea el *análisis de Fourier*. Esta disciplina matemática ofrece herramientas que simplifican el proceso de cálculo al trasladar el problema del dominio del tiempo al de la frecuencia donde el estudio es más sencillo. Posteriormente aplicando las mismas herramientas podemos obtener la respuesta de la estructura en tiempo.

Al emplear la transformada de Fourier se identifican las diferentes frecuencias, amplitudes y fases de las ondas que combinadas generan la onda arbitraria. Un par de trans-formación se define como (p ej Newland, 1980)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

donde  $F(\omega)$  es la transformada de Fourier de  $f(t)$ ,  $i = \sqrt{-1}$  y  $\omega$  es la frecuencia. Un estudio más detallado de las expresiones de la ec (3.3.1) lo realiza Brigham, (1974)

Un concepto físico de suma importancia en sismología es el de la convolución de dos funciones, la cual se define de la siguiente manera

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t - \tau)d\tau = h(t)*f(t) \Rightarrow H(\omega) \cdot F(\omega) \quad (3.3.2)$$

El teorema de convolución de la ec (3.3.2) y su transformada de Fourier en el extremo derecho de la misma ecuación, constituyen en sí una herramienta poderosa de análisis. El teorema establece que si  $F(\omega)$  y  $H(\omega)$ , son las transformadas de Fourier de  $f(t)$  y  $h(t)$  respectivamente, entonces la convolución de las funciones  $f(t) * h(t)$  tiene como transformada de Fourier  $F(\omega)H(\omega)$ . Es decir, la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo se transforma en una multiplicación punto a punto en el dominio de la frecuencia. Este resultado es de gran utilidad al analizar la respuesta de sistemas lineales.

Debido a que los cálculos numéricos se hacen mediante el auxilio de computadoras, es necesario discretizar las expresiones de la ec (3.3.1). Así la transformada directa y la transformada inversa discretas serán respectivamente (p ej Newland, 1980).

$$X_k = \sum_{r=0}^{N-1} x_r e^{-i(2\pi kr/n)} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.3.3)$$

$$x_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X_r e^{i(2\pi kr/n)}$$

Si el muestreo de las funciones se hace con un intervalo  $\Delta$  se estimará un espectro hasta  $1/2\Delta$ , que es la llamada *frecuencia de Nyquist*. En la práctica se consideran confiables frecuencias menores, pues cerca de la de Nyquist se presenta una distorsión denominada *aliasing*.

Haciendo uso directamente de la transformada discreta de Fourier con  $N$  muestras se requiere un tiempo de computo proporcional a  $N^2$ , lo que implica un excesivo tiempo de proceso sobre todo cuando  $N$  es grande.

Afortunadamente se ha desarrollado un algoritmo de extraordinaria eficiencia denominado Transformada Rápida de Fourier, FFT (Fast Fourier Transform) que reduce el tiempo de cálculo siendo este proporcional a  $N \log_2 N$  (p ej Newland, 1980). La FFT se emplea en este trabajo para efectuar los cálculos y en general todas las operaciones espectrales del método de proyección variacional.

---

## IV. MÉTODO DE PROYECCIÓN VARIACIONAL

---

### IV.1 Formulación del Problema

Considérese un valle aluvial somero tridimensional sobre la superficie de un semiespacio elástico como el que se muestra en la fig (4.1). El material de los sedimentos es elástico y tiene una forma arbitraria pero suave descrita por el espesor  $h(x, y)$ . También asumimos que los sedimentos son mucho más blandos que el semiespacio que lo subyace.

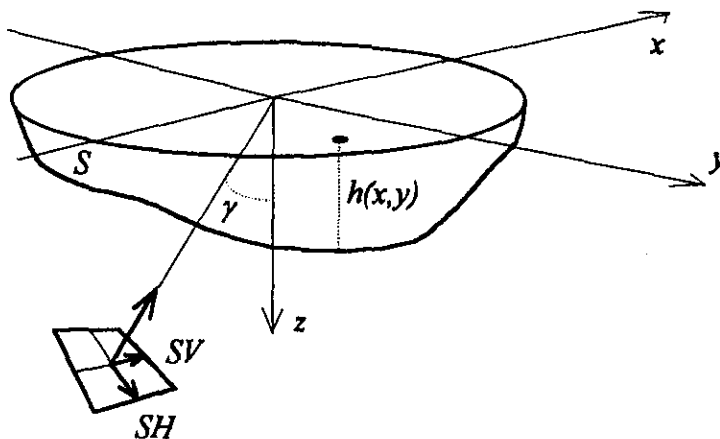


Fig 4.1 Valle aluvial sometido a la incidencia de un campo de onda plana

Las ecuaciones de campo en ausencia de fuerzas de cuerpo pueden escribirse para los sedimentos por medio de las leyes de Newton:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, i = 1, 2, 3. \quad (4.1.1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es el tensor de esfuerzos,  $U_i$  el vector de desplazamiento,  $x_i$  las coordenadas cartesianas,  $\rho$ , la densidad de masa y  $t$ , el tiempo. Podemos usar las siguientes equivalencias  $x_1=x$ ,  $x_2=y$ ,  $x_3=z$  y  $U_1=U$ ,  $U_2=V$ ,  $U_3=W$ .

Para complementar, el tensor de esfuerzos está dado por la ley de Hooke:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}, \quad (4.1.2)$$

donde  $C_{ijkl}$  es el tensor elástico (para materiales isotrópicos tenemos que  $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ ). Permítase tomar al campo de desplazamiento elástico en los sedimentos con la forma

$$u_i(x, y, z, t) = u_i^{(0)}(x, y, h, t) + u'_i(x, y, z, t). \quad (4.1.3)$$

Donde  $u^{(0)}$ , es un movimiento de referencia conocido en la interfaz  $h(x, y)$  y  $u'$ , es el movimiento adicional en el estrato que se observa. Operando, podemos escribir

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \quad (4.1.4)$$

donde

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2} \quad (4.1.5)$$

es el campo forzante de acuerdo al movimiento de referencia  $u^{(0)}$ ,

Las condiciones de esfuerzo libre en  $z=0$  son entonces

$$\sigma_{zj} = \sigma_{zj}^{(0)} + \sigma'_{zj} = 0 \quad (4.1.6)$$

nótese que  $\sigma^{(0)}$  depende sólo de  $x, y$  y  $t$ . Permítase escribir el campo de desplazamiento buscado en términos de

$$u'_i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N U_i^n(x, y, t) \varphi^n(z) \quad (4.1.7)$$

donde  $U_i^n$  son funciones de las coordenadas horizontales  $(x, y)$  y el tiempo, mientras  $\varphi^n(z)$  son las funciones de prueba dadas para la profundidad. La ec (4.1.7) expresa la solución  $u'$  en términos de la combinación lineal de las funciones de prueba.

## IV.2 Formulación de Galerkin de Forma Débil

Considérese ahora, el operador de forma fuerte de Galerkin,

$$\int_0^h \left[ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) dz = 0. \quad (4.2.1)$$

La ec (4.2.1) junto con la ec (4.1.6) puede ser vista como la forma fuerte del método de Galerkin para las ecuaciones elásticas a lo largo de una línea vertical con longitud  $h(x, y)$ . Para expresar la ec (4.1.3) en la forma de un operador débil debemos integrar por partes y escribir

$$\int_0^h \left\{ \left[ \frac{\partial \sigma'_{xi}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yi}}{\partial y} + f_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} \right] \varphi^m(z) - (\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \frac{d\varphi^m}{dz} \right\} dz \quad (4.2.2)$$

$$+ \left[ (\sigma'_{zi} + \sigma_{zi}^{(0)}) \varphi^m(z) \right]_0^h = 0$$

porque  $\sigma_{zi}^{(0)}$  no tiene dependencia de  $z$  dentro de los sedimentos. De acuerdo con la ec (4.1.6) las únicas contribuciones del último término de la ec (4.1.3) vienen de  $z = h$  si  $\varphi^m(h)$  es  $\neq 0$ .

### IV.3 Las Ecuaciones Proyectadas

Si  $\varphi^n(h) = 0$ , entonces  $u'_i(x, y, h, t) = 0$  y el movimiento de referencia  $u_i^{(0)}$  puede considerarse el movimiento actual de la interfaz. Si se dan estos movimientos y corresponden a la solución unidimensional en la interfaz, la solución de la respuesta en los primeros tiempos del cálculo, puede acordar efectivamente con la condición  $u'_i = 0$  en  $z = h$ . Para tiempos posteriores la frontera es totalmente reflejante y corresponde a una base rígida.

Existen varios grupos de familias completas de funciones para el intervalo  $(0, h)$ , aquí se seleccionó una familia de cosenos bien conocida:

$$\varphi^n(z) = \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2h} = \cos \lambda_n z \quad (4.3.1)$$

con  $\lambda_n = (2n+1)/2h$ . Es claro que  $\varphi^n(h) = 0$ . Sin embargo, estas funciones y sus derivadas (con respecto a  $z$ ) forman, respectivamente, grupos ortogonales en el intervalo de interés. Estas propiedades son muy útiles para simplificar la "proyección" de las ecuaciones de campo de la elasticidad dinámica dentro del plano horizontal. (ver ecs (4.3.2))

$$\int_0^h \varphi^m \varphi^n dz = \frac{h}{2} \delta_{mn}$$

$$\int_0^h \frac{\partial \varphi^m}{\partial z} \frac{\partial \varphi^n}{\partial z} dz = \lambda_m^2 \frac{h}{2} \delta_{mn} \quad (\text{no..suma})$$

$$\int_0^h \varphi^m dz = \frac{h}{2} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \quad (4.3.2)$$

$$\int_0^h \varphi^m \frac{d\varphi^n}{dz} dz = a_{mn} = \begin{cases} -1/2, \dots, m=n \\ -\frac{2n+1}{4} \left[ \frac{1+(-1)^{m+n}}{m+n+1} - \frac{1-(-1)^{m-n}}{m-n} \right], \dots, m \neq n \end{cases}$$

donde  $\delta_{mn}$  es la delta de Kroenecker ( $=1$  si  $m = n$ ;  $=0$  si  $m \neq n$ ).

Sustituyendo la ec (4.1.7) en la (4.2.2), considerando las ecs (4.1.2) y (4.1.3) y tomando en cuenta que aún si  $h$  es función de  $x$  e  $y$ , las correspondientes derivadas de  $h$  se desprecian, así podemos escribir

$$\begin{aligned}
 U''_{xx} - \alpha^2 U''_{xx} - \beta^2 U''_{yy} + \beta^2 \lambda_m^2 U''_{xx} - (\alpha^2 - \beta^2) V''_{xy} - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W''_x \frac{2}{h} \\
 = \frac{1}{\rho} f_1 \frac{4 (-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_x^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned}
 V''_{yy} - \beta^2 V''_{yy} - \alpha^2 V''_{yy} + \beta^2 \lambda_m^2 V''_{yy} - (\alpha^2 - \beta^2) U''_{xy} - ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) W''_y \frac{2}{h} \\
 = \frac{1}{\rho} f_2 \frac{4 (-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zy}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

$$\begin{aligned}
 W''_{xx} - \beta^2 W''_{xx} - \beta^2 W''_{yy} + \alpha^2 \lambda_m^2 W''_{xx} + ((\alpha^2 - 2\beta^2) a_{mn} - \beta^2 a_{mn}) [U''_x + V''_y] \frac{2}{h} \\
 = \frac{1}{\rho} f_3 \frac{4 (-1)^m}{\pi 2m+1} + \frac{2}{\rho h} \sigma_{zz}^{(0)}
 \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

el cual es un grupo de ecuaciones diferenciales parciales acopladas y "proyectadas". Aquí  $U_1''=U''$ ,  $U_2''=V''$  y  $U_3''=W''$  y los subíndices de  $U$ ,  $V$  y  $W$  significan derivadas parciales. Las derivadas espaciales se calculan usando la transformada de Fourier con un algoritmo FFT. La matriz  $a_{mn}$  resulta de la integral de  $\varphi^n(z)$  y de su derivada.

Puede verificarse que el acoplamiento entre las funciones horizontales y varios órdenes viene después de la primer derivada "variacional" con respecto a  $z$ . Por otro lado, la segunda derivada de, por decir,  $U''$  con respecto a  $z$  está dada por el producto  $-\lambda_m^2 U''$ .

Con el objeto de introducir amortiguamiento, la forma más fácil es adoptando el operador  $\partial/\partial t + \gamma$  en lugar de la derivada en el tiempo. Por ahora, bajo esta hipótesis, la segunda derivada  $U''_{xx}$  puede leerse



$$U'' = \frac{\partial^2 U^n}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial U^n}{\partial t} + \gamma^2 U^n \quad (4.3.6)$$

y discretizando, al tiempo  $j$  tenemos

$$(U''_n) = \left[ \left( 1 + \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{nj+1} - 2U^{nj} + \left( 1 - \gamma \Delta t + \frac{1}{2} \gamma^2 \Delta t^2 \right) U^{nj-1} \right] \Delta t^{-2} \quad (4.3.7)$$

Puede mostrarse que  $\gamma \approx \pi f_p / Q$  para un factor de calidad  $Q$  en la vecindad de la frecuencia  $f_p$ , de la ec (4.3.7) y sus equivalencias para  $V_n$  y  $W_n$  es posible calcular las funciones  $U$ ,  $V$  y  $W$  en los puntos horizontales de la malla al tiempo  $j+1$  como una función de valores al tiempo  $j-1$  y las derivadas espaciales al tiempo  $j$ .

El cálculo de las derivadas horizontales se acopla de manera conveniente con el algoritmo FFT usando todos los puntos en un esquema centrado. Esta aproximación pseudo-espectral requiere al menos 2 o 3 puntos de la malla por longitud de onda (las diferencias finitas requieren de 8 para obtener la misma exactitud).

Finalmente las ecs (4.1.3) y (4.1.7) permiten calcular los desplazamientos en superficie.

#### IV.4 Condiciones de Frontera Absorbente.

Si escogemos otro grupo de funciones de prueba tales que  $\varphi^n(h) \neq 0$  es posible introducir condiciones de frontera absorbente aproximadas en términos de una sustitución apropiada del esfuerzo en profundidad. El grupo de cosenos de la ec (4.4.1) cumple con las condiciones de ortogonalidad, y es completo en  $(0, h)$  y en  $z = h$  está dado por  $(-1)^n$ .

$$\varphi^n(z) = \cos \frac{n\pi z}{h} \quad (4.4.1)$$

Esto se puede mostrar fácilmente en el dominio de la frecuencia. Supóngase un medio estratificado unidimensional como el de la fig (4.2)

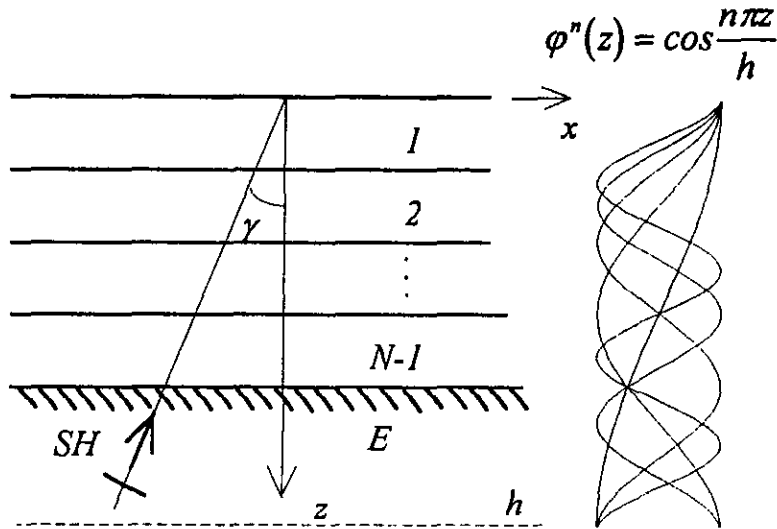


Fig 4.2 Medio estratificado sometido a la incidencia de un campo de onda plana SH (izq).  
Familia de funciones de prueba utilizadas para fronteras absorbentes (der).

sometido a un campo incidente de ondas planas SH dado por ,

$$v^{(i)} = v_0(\omega) e^{-ikx} e^{+i\eta_E z} e^{+i\omega t} \quad (4.4.2)$$

donde

$$k = \frac{\omega}{\beta_E} \text{sen} \gamma \quad \text{y} \quad \eta_E = \frac{\omega}{\beta_E} \text{cos} \gamma, \quad (4.4.3)$$

como se observa  $k$  es el número de onda horizontal y  $\eta_E$  el número de onda vertical,  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\beta_E$  la velocidad de las ondas  $SH$  en el semiespacio  $E$ . Si se define al desplazamiento como un movimiento de referencia conocido  $V^{(i)}$  debido sólo al campo incidente, más un desplazamiento en función de la profundidad dado por  $V(z)$ , podemos escribir

$$v = [V^{(i)} + V(z)] e^{-ikx} e^{+i\omega t}. \quad (4.4.4)$$

Es decir  $V^{(i)} = v_0(\omega) e^{+i\eta_E z}$  y  $V(z)$  como el desplazamiento que será calculado utilizando una formulación de Galerkin de forma débil, donde se incluye a las funciones de prueba de la ec (4.4.1). De esta manera  $V(z)$  se escribe como

$$V(z) = \sum_{n=0} A_n \varphi^n(z). \quad (4.4.5)$$

Si recordamos la ecuación de movimiento en el dominio de la frecuencia tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 v = 0, \quad (4.4.6)$$

y adoptando un esquema de Galerkin de forma fuerte, sustituyendo la ec (4.4.4) en la ec (4.4.6), y operando las derivadas se tiene que

$$\int_0^h \left[ -k^2 \mu (V^{(i)} + V) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial V^{(i)}(z)}{\partial z} - \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \rho \omega^2 (V^{(i)} + V) \right] \varphi^m(z) dz = 0. \quad (4.4.7)$$

la cual es una integral sólo en la dirección vertical que se resuelve por partes e incluye los valores de los coeficientes  $A_n$  de la ec (4.4.5), estas son las incógnitas del sistema dado por:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \left[ -k^2 \mu \sum A_n \varphi^n \varphi^m - \mu \sum A_n \varphi_z^n \varphi_z^m + \rho \omega^2 \sum A_n \varphi^n \varphi^m \right] dz + \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h \varphi^m(h) \\ & = \int_0^h +k^2 \mu V^{(i)} \varphi^m dz - \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z}(h) \varphi^m(h) + \int_0^h \mu \frac{\partial V^{(i)}}{\partial z} \varphi_z^m dz - \int_0^h \rho \omega^2 V^{(i)} \varphi^m dz \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

que es un sistema cerrado en forma débil por que las derivadas parciales de  $V$  en  $z = h$  son

$$\left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)_h = -i\omega \rho_E \beta_E V_h.$$

La ec (4.4.8) representa un sistema de  $m$  por  $n$  ecuaciones que puede ser resuelto numéricamente. Cabe mencionar que esta ecuación contiene la información de cada estrato en cuestión y que la responsabilidad de la reconstrucción de las ondas reflejadas y transmitidas se deja únicamente a las funciones de prueba. Así se tiene una representación aproximada de los coeficientes de reflexión en cada intervalo del medio estratificado y, a su vez, una buena aproximación de las fronteras absorbentes en la base del modelo.

Un ejemplo de la aplicación de estas fronteras se da en la fig (4.3) donde se muestra la función de transferencia del desplazamiento para un modelo de 3 estratos con las mismas propiedades (prueba de transparencia), ante incidencia vertical de ondas  $SH$ . Aquí se realiza la comparación de la formulación propuesta contra el ya bien conocido método de Kennett.

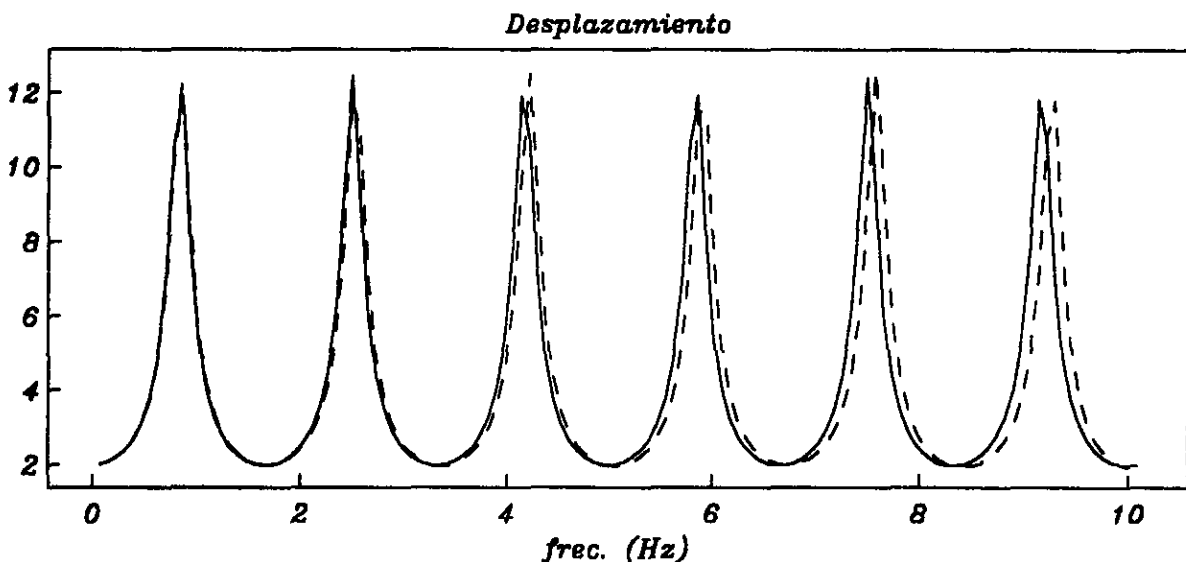


Fig (4.3) Función de Transferencia del desplazamiento para 3 estratos con las mismas propiedades  $\rho/\rho_E = .4$ ,  $\beta/\beta_E = .4$ , y  $h = 400$  m. El método propuesto con línea discontinua y el método de Kennett en línea continua.

Como se puede observar el acuerdo bastante bueno. Esto corrobora que la base de funciones es la correcta y que con un orden no mayor de  $n = 20$  se puede obtener una buena representación de los desplazamientos en tiempo, además de que posiblemente puedan suprimir la condición de base rígida en el método de proyección variacional. En éste trabajo no se incluyen este tipo de funciones ya que requieren ser formuladas en el dominio del tiempo.

---

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS Y APLICACIONES

---

### V.1 Modelo de Kawase y Aki (2D)

Se realizaron algunas pruebas y comparaciones en el caso bidimensional, para verificar la factibilidad numérica, tiempos de cálculo y exactitud del método propuesto. Se tomaron de referencia otras técnicas de solución como las funciones de Green y el método indirecto de elementos de frontera (IBEM).

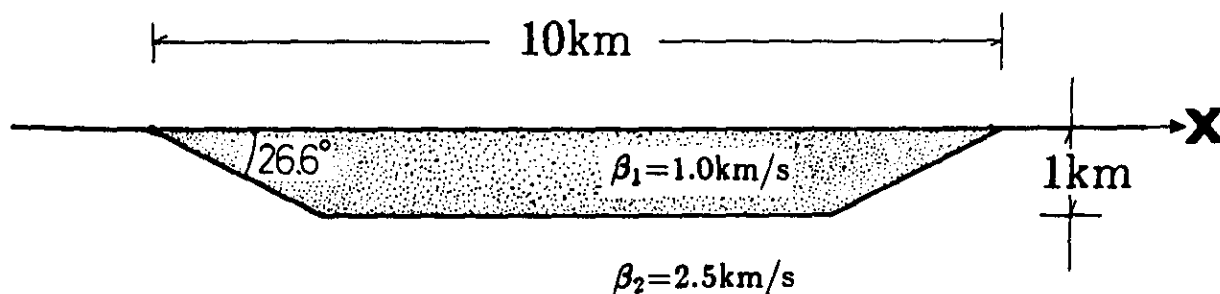


Fig 5.1 Modelo de valle trapezoidal

La fig (5.1) muestra un modelo de valle trapezoidal propuesto por Kawase y Aki (1989) que se utilizó para una comparación contra un método que utiliza funciones de Green. La fig (5.2) muestra los sismogramas sintéticos obtenidos para el modelo del valle de la fig (5.1).

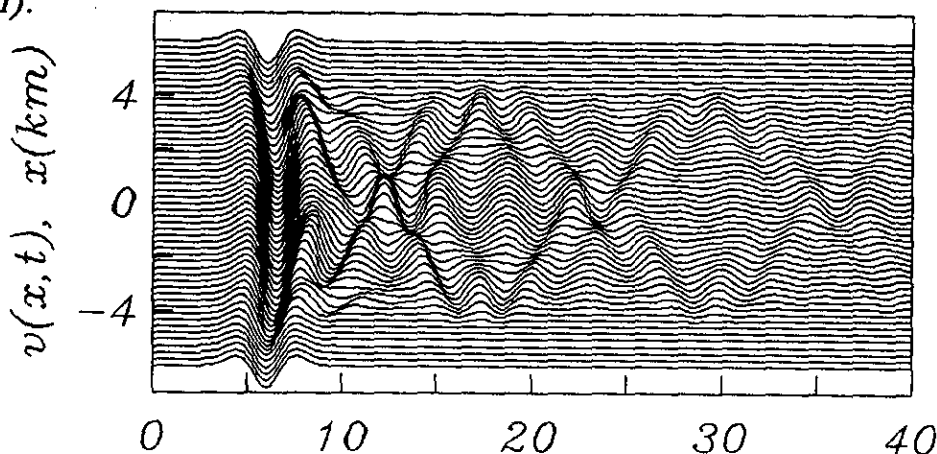


Fig 5.2(a) VPM Sismograma sintético a lo largo de la superficie del depósito de la fig (5.1) para una incidencia vertical de ondas SH y una frecuencia de pulso de Ricker de 0.25Hz (4 s).

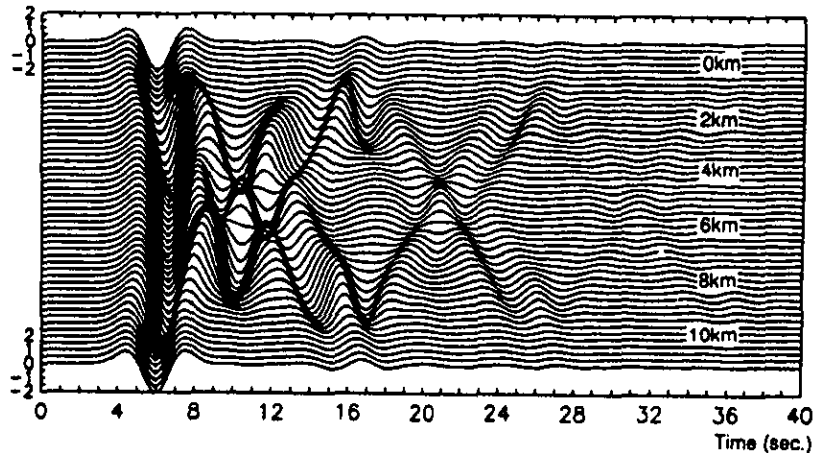


Fig 5.2(b) El mismo caso que (a) sólo que obtenido con un método de funciones de Green utilizado por Kawase y Aki (1989).

Esta figura muestra las ondas propagándose horizontalmente generadas por las esquinas del depósito las cuales son el modo fundamental de ondas de Love como lo señalaron Kawase y Aki (1989). La amplitud de las ondas de Love es menor que las de la onda directa. Sin embargo estas ondas superficiales hacen la duración total más larga, los intervalos de tiempo entre el arribo de la onda directa y la onda de Love son menores de 10 segundos cerca de las esquinas. Es notable la similitud de ambos sintéticos. Conviene recordar que el método de funciones de Green (fig 5.2(b)) se calcula en 3 a 4 horas en una estación de trabajo y el VPM (fig 5.2(a)) sólo tarda unos 30 segundos en una computadora personal.

La fig (5.3) muestra la respuesta para un pulso de Ricker de  $f_c = 0.5 \text{ Hz}$ , la amplitud máxima de la onda de Love decrece por que la energía se dispersa entre el modo fundamental y el primer modo superior, como lo demuestran Kawase y Aki (1989).

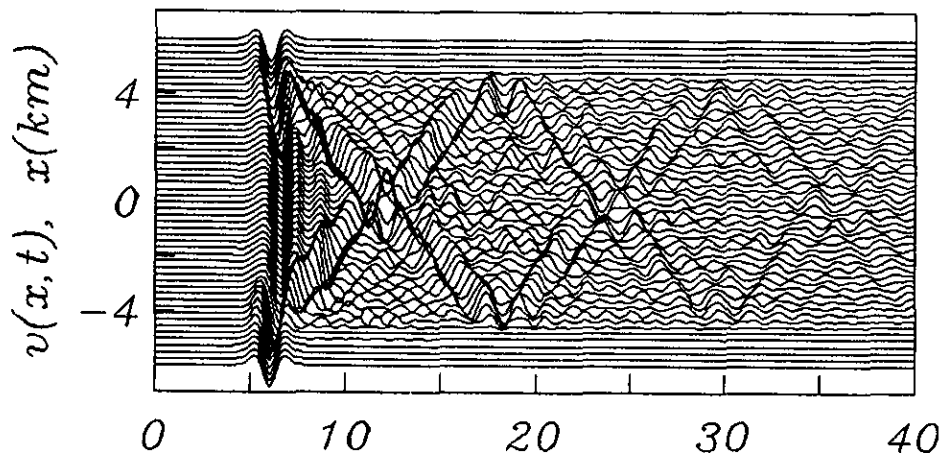


Fig 5.3(a) Sismograma sintético a lo largo de la superficie del depósito de la fig (5.1) para un pulso de Ricker de  $f_c = 0.5 \text{ Hz}$  (2 s). Las otras condiciones son las mismas que para la fig (5.2).

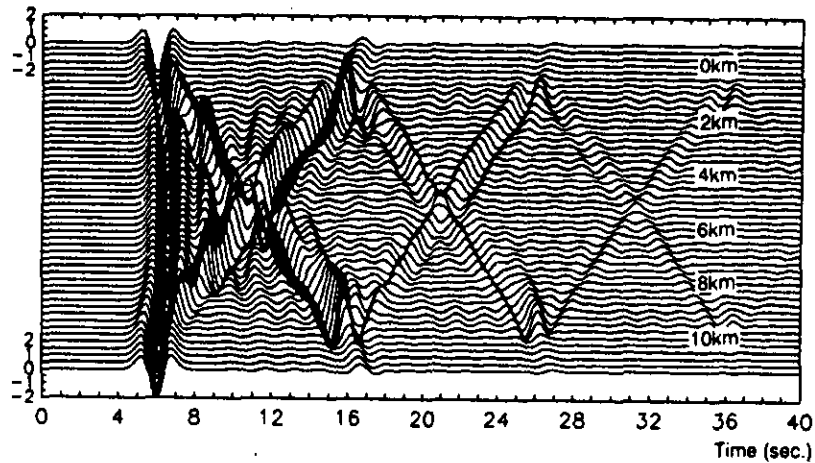


Fig 5.3(b) El mismo caso que (a) sólo que obtenido con un método de funciones de Green.

Si se observa con detenimiento la fig (5.3) podemos resaltar que los sismogramas sintéticos obtenidos con el VPM muestran una buena similitud en la respuesta del depósito con respecto del método de referencia. Sin embargo, las trazas aunque representan correctamente la propagación de las ondas dentro del valle, muestran un rizamiento a lo largo de toda la respuesta. Esto se debe a que la frecuencia del pulso de Ricker es más alta y nos acercamos a los límites de estabilidad del método (condición de Courant). Por otro lado la formulación rígida del VPM no permite la correcta absorción de la energía dentro del valle.

Ahora consideraremos el caso de incidencia de onda plana  $SV$ . La fig (5.4) muestra la respuesta al depósito de la fig (5.1) para una onda de éste tipo que incide verticalmente con  $f_c = 0.25 \text{ Hz}$  (4 s). Es muy clara la aparición de trenes sucesivos de ondas en la zona de transición (componente horizontal) y en la parte plana (componente vertical). La diferencia entre la incidencia de ondas  $SH$  y  $SV$  se debe principalmente al hecho de que las velocidades de fase y de grupo del modo fundamental de la onda de Rayleigh son considerablemente mayores que las de las ondas de Love dentro de la frecuencia correspondiente. La onda de Rayleigh generada en las esquinas necesita sólo 5 segundos para alcanzar la esquina opuesta.

Valle Trapezoidal, Ondas SV  $\gamma=0$

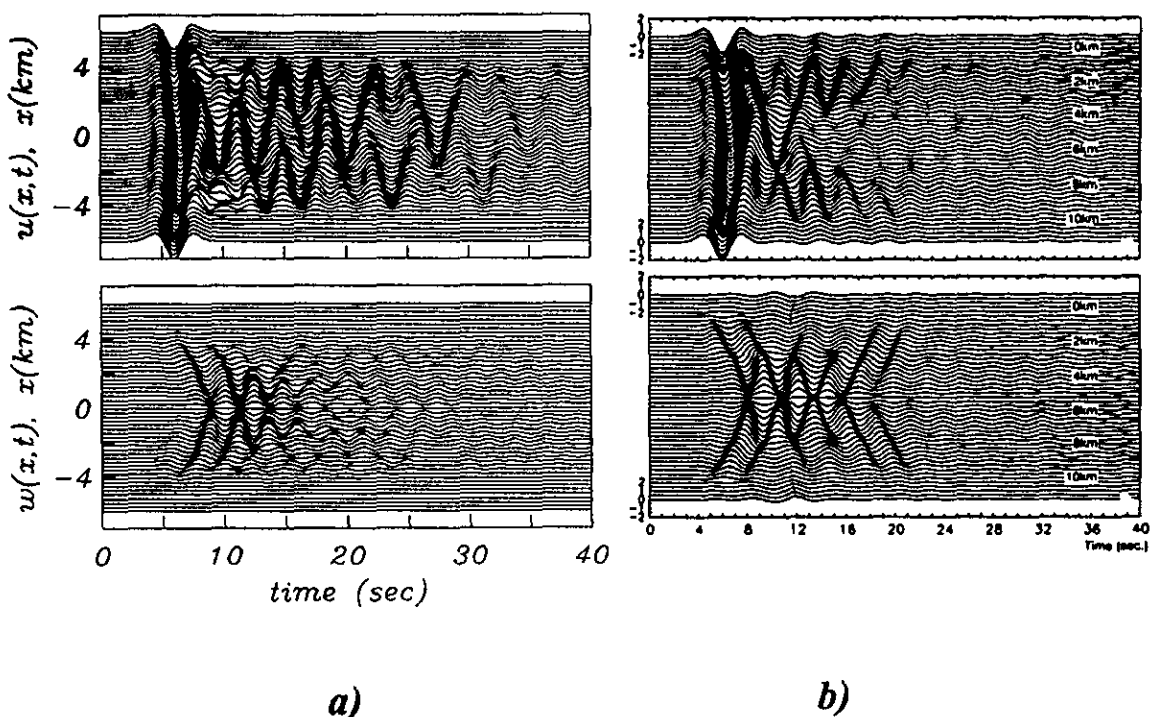


Fig 5.4 Historias de tiempo de las componentes horizontal  $u$  y vertical  $w$  para la incidencia normal de ondas SV al depósito de la fig (5.1). La frecuencia característica del pulso de Ricker es 0.25 Hz .  
 (a) Método propuesto y (b) Método de funciones de Green.

Si se analiza la fig (5.5) se puede ver que ante una entrada con frecuencia más alta ( $f_c = 0.5$  Hz) existen ondas de Rayleigh claramente definidas. En este caso el VPM logra reproducir el modo fundamental y el primer modo superior aunque se nota un tercer frente de ondas, éste no corresponde a los resultados observados por el método de funciones de Green. De esta manera, es claro que aunque el VPM ofrece una velocidad de proceso muy alta, los resultados obtenidos presentan sólo buenas aproximaciones de la realidad. Así, para el mejoramiento de esta técnica es necesario seguir trabajando en la depuración de las condiciones de frontera.



Valle Trapezoidal, Ondas SV  $\gamma=0$

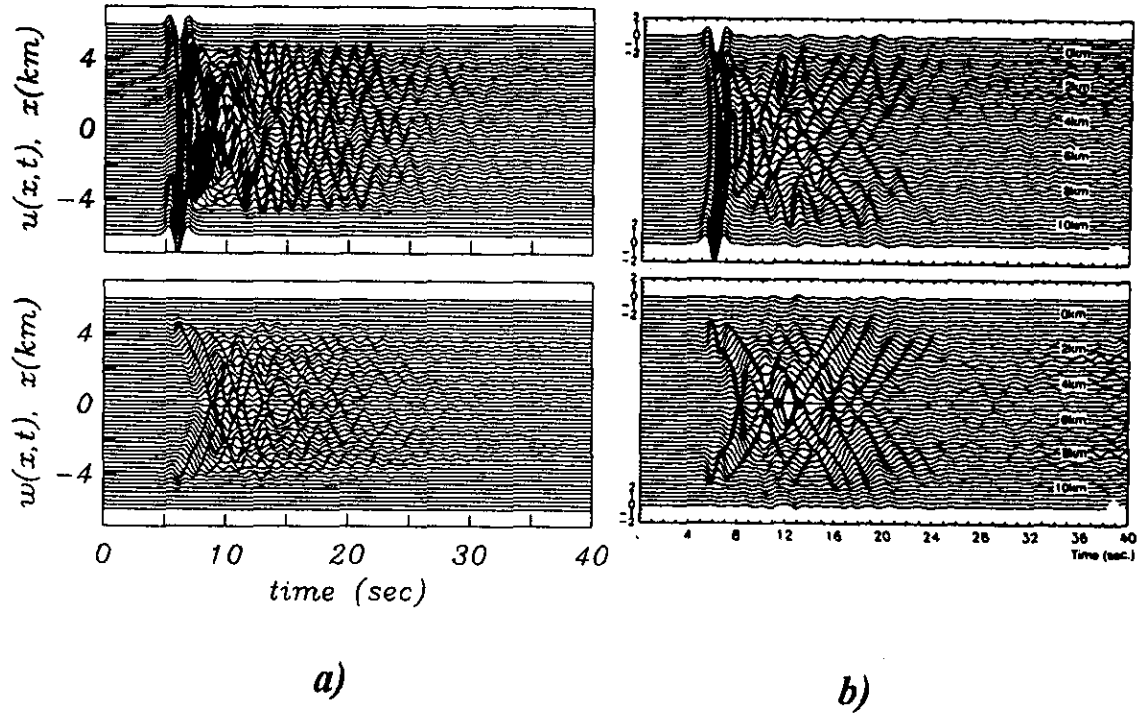


Fig 5.5 Respuestas  $u$  y  $w$  para el valle de la fig (5.1). Incidencia vertical de ondas SV con un pulso de Ricker  $f_c = 0.5$  Hz (2 s). (a) VPM, (b) Funciones de Green.

## V.2 Modelo de Sánchez-Sesma y Luzón (Croissant)

También se realizaron algunas comparaciones para el caso tridimensional de un modelo como el de la fig (5.6) que consiste en un valle aluvial somero de forma irregular, ante incidencia de ondas tipo *SH*. La velocidad de onda *S* en los sedimentos y el semi-espacio es  $\beta_R = 1 \text{ km/s}$  y  $\beta_E = 2,5 \text{ km/s}$  respectivamente, los coeficientes de Poisson son  $\nu_R = 0.35$  y  $\nu_E = 0.25$  y las densidades están relacionadas por  $\rho_R = 0.8\rho_E$  donde  $\rho_E$  es la densidad del basamento. El factor de calidad en el basamento es de  $Q = 100$ . El método propuesto resulta ser, para este caso, mucho más rápido que el método de elementos de frontera ya que el VPM para una malla de estas características sólo necesitó algunas horas en una estación de trabajo. Este modelo fue propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995), ellos enfatizan la buena resolución y calidad de los resultados, por ello se eligió como un buen parámetro de comparación.

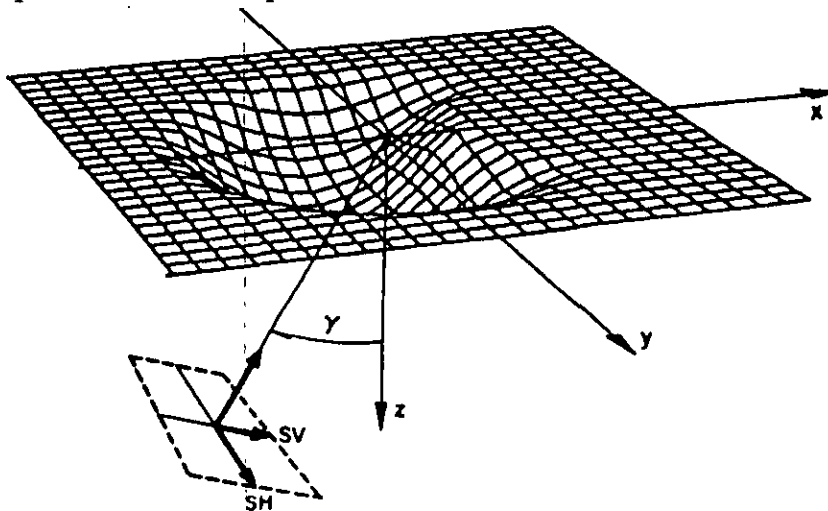


Fig 5.6 Modelo de valle aluvial somero propuesto por Sánchez-Sesma y Luzón (1995).

Las figs 5.7(a) y 5.7(b) contienen los simogramas sintéticos obtenidos para una sección de detectores ubicados a lo largo de los ejes *x* e *y* mostrando las componentes del movimiento en la dirección de *v* y las componentes horizontal *u* y vertical *w* a lo largo del eje *y*. Se trata de incidencia oblicua  $\gamma = 30^\circ$  de ondas *SH*. Se utilizó un pulso de Ricker de  $t_p = 3s$ . Aquí se presentan los resultados obtenidos con el método propuesto y el IBEM, en general se observan muy buenos acuerdos entre los dos. Los resultados parecen ser muy alentadores ya que el VPM representa bien la onda incidente y su respuesta unidimensional al entrar en contacto con el valle. Sin embargo, la reproducción de las ondas superficiales de Love resulta ser más compleja, esto debido a la concentración de energía por geometría en el valle y la formulación rígida del VPM. Por otra parte el VPM necesitó de sólo algunos minutos para su cálculo en una estación de trabajo. Mientras que el IBEM requirió de 5 días de CPU en la misma estación. Esto hace al VPM un método poderoso y más aún por su formulación directa en el tiempo.

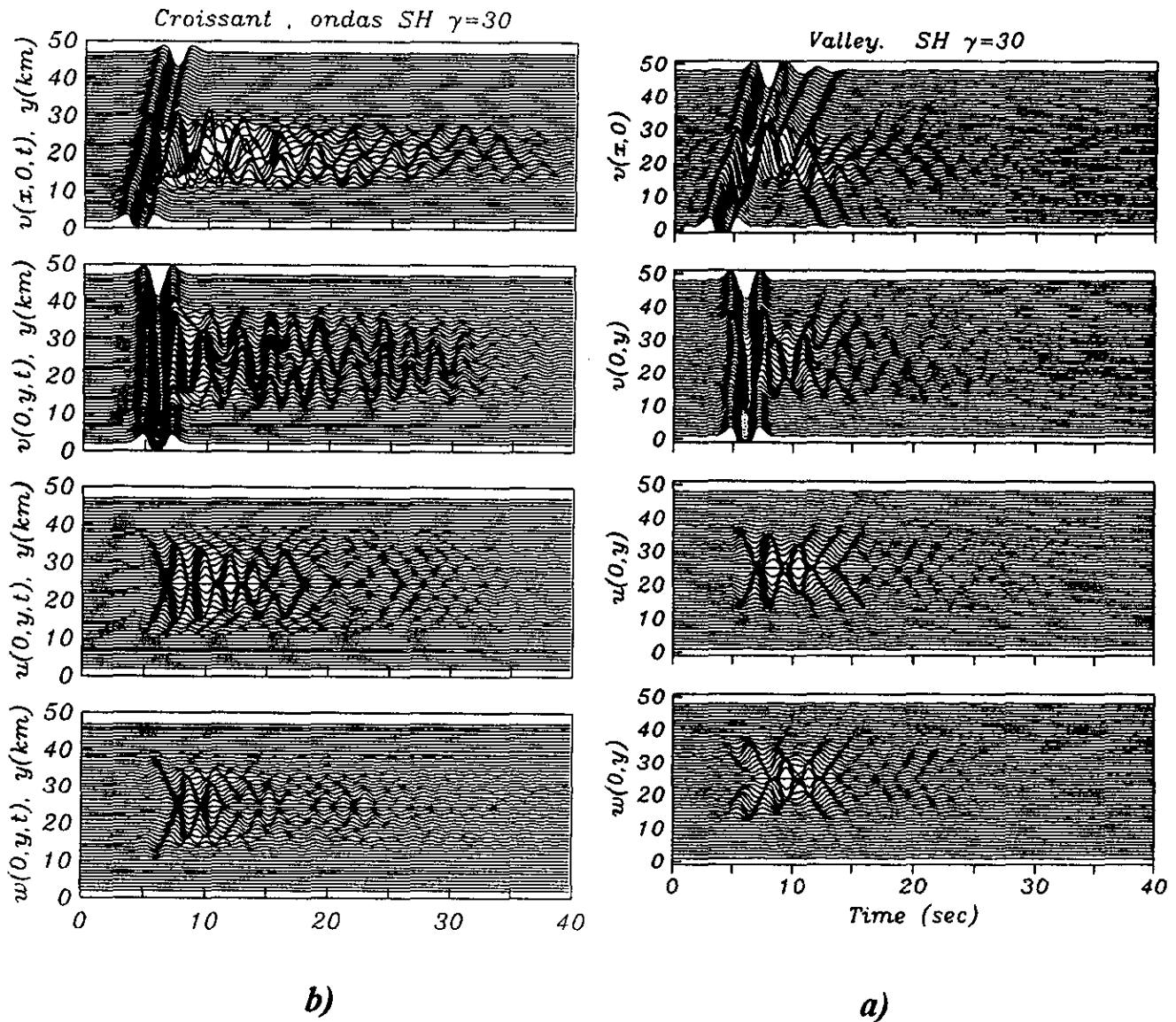
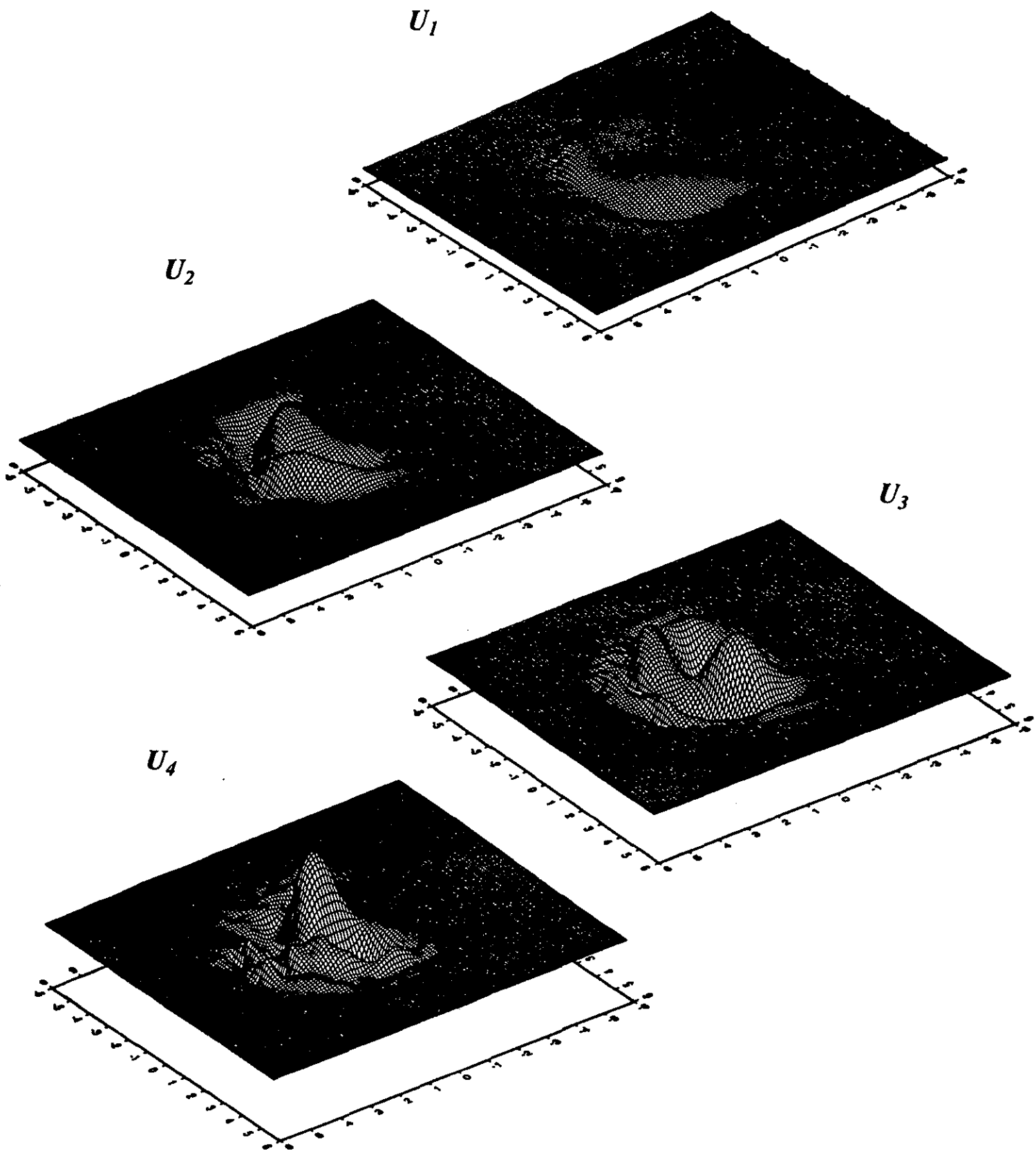


Fig 5.7 Sismogramas sintéticos para el modelo de la fig (5.6) obtenidos con (a) el método indirecto de elementos de frontera IBEM. y (b) VPM.

La fig (5.8) muestra las simulaciones dinámicas para 4 tiempos de calculo (6,7,8 y 9 s) en las componentes  $u$   $v$  y  $w$  del desplazamiento para una onda  $SH$  que incide con un ángulo de  $\gamma = 30^\circ$ . Se puede observar que el movimiento refleja mayores amplitudes al rededor de los 8 s para los tres casos mostrados. Estas instantáneas de tiempo permiten ver los efectos topográficos y locales que afectan a la propagación de las ondas dentro del medio de interés. Así, se pueden obtener resultados confiables de la respuesta sísmica del terreno para un sitio en específico. Por otra parte habrá que resaltar su aplicación para analizar efectos azimutales en la propagación y la generación de ondas superficiales en un valle de nuestro interés, como el de la Cd. de México.



*Fig 5.8 Simulación dinámica en la componente  $u$ , para el modelo de la fig (5.6) en 4 tiempos de visualización*

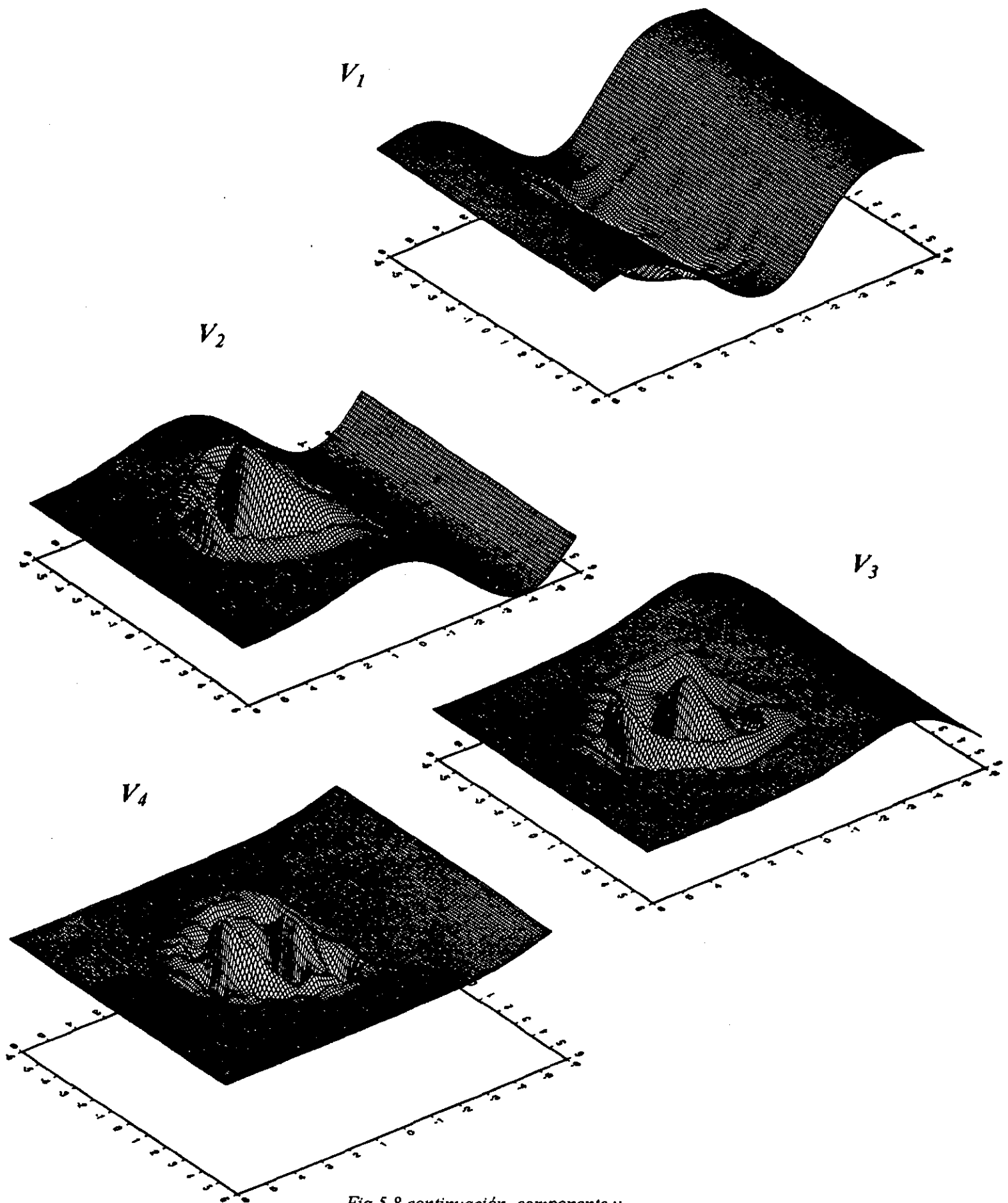


Fig 5.8 continuación, componente  $v$ .

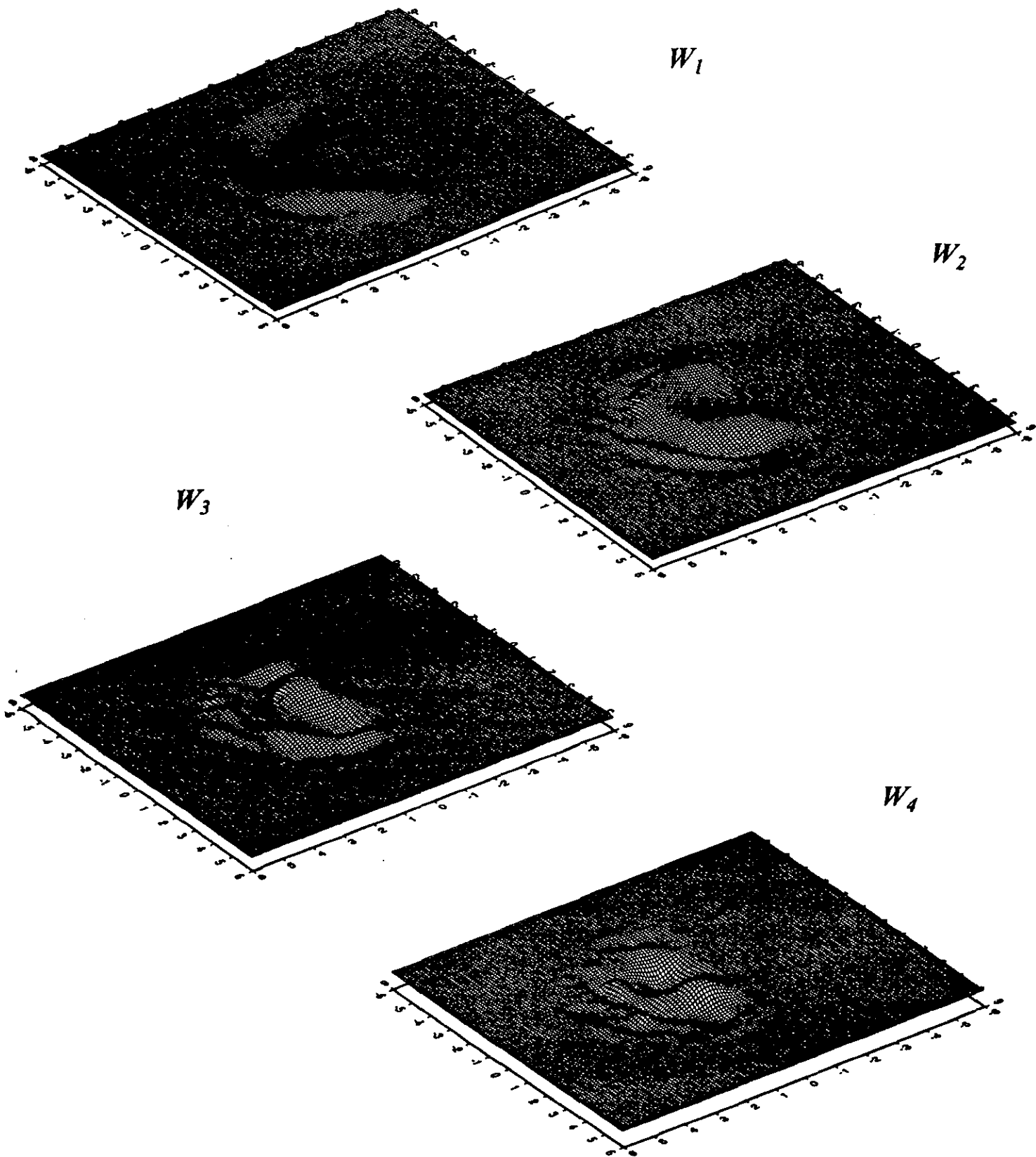


Fig 5.8 continuación, componente  $w$ .

El objeto de mostrar las simulaciones dinámicas para el movimiento, es que permiten realizar un análisis tridimensional directo en el tiempo. La irradiación de la energía hacia el semiespacio, la propagación, amortiguamiento y dispersión de las ondas dentro y fuera del valle, constituyen características de suma importancia para la comprensión del fenómeno sísmico. Si se logra establecer una comparación con los análisis de frecuencias de otros autores, podríamos entender este fenómeno en mejores condiciones.

Los casos de incidencia *SH* del VPM muestran una buena correlación con la emisión tardía de pulsos *SH* difractados mostradas por el IBEM. Aquí Sánchez-Sesma y Luzón resaltan la emisión característica de energía *SH* difractada; no obstante que un valle de estas características presenta una atenuación geométrica muy fuerte.

Hasta aquí se ha observado que las capacidades de cálculo del VPM sobrepasan por mucho a las de otros métodos. Sus aproximaciones son bastante aceptables para la mayoría de los casos mostrados. Por esta razón, se ilustran a continuación ejemplos de la aplicación del VPM utilizando modelos de valles más complejos (Kobe y México). Con esto se pretende mostrar las ventajas de formulación y facilidad de operación del VPM ante la modelación sísmica de un problema real.

### V.3 Respuesta sísmica del Valle de Kobe

El VPM ha sido aplicado para simular el movimiento del terreno en estaciones de Osaka, durante el sismo del 17 de Enero de 1995 en la ciudad de Kobe, Japón. Este evento ( $M_w = 6.9$ ) se originó en el límite de la bahía de Osaka justamente debajo de la ciudad de Kobe. La corta distancia hipocentral, probables efectos de directividad y grandes amplificaciones de sitio, contaron para la ocurrencia de daños sin precedente en la ciudad. Aquí no se abordará la respuesta sísmica de Kobe por sí misma, pero en su lugar nos concentraremos en la respuesta del gran valle de Osaka. El objetivo es interpretar el movimiento del terreno registrado en algunos sitios de Osaka los cuales muestran claramente la influencia de sedimentos profundos de la bahía. La fig (5.9) muestra un mapa de la bahía de Osaka con la descripción de las profundidades del estrato sedimentario. El diamante representa el sitio del hipocentro del temblor de Kobe y los círculos la distribución de las estaciones de la red CEORCA.

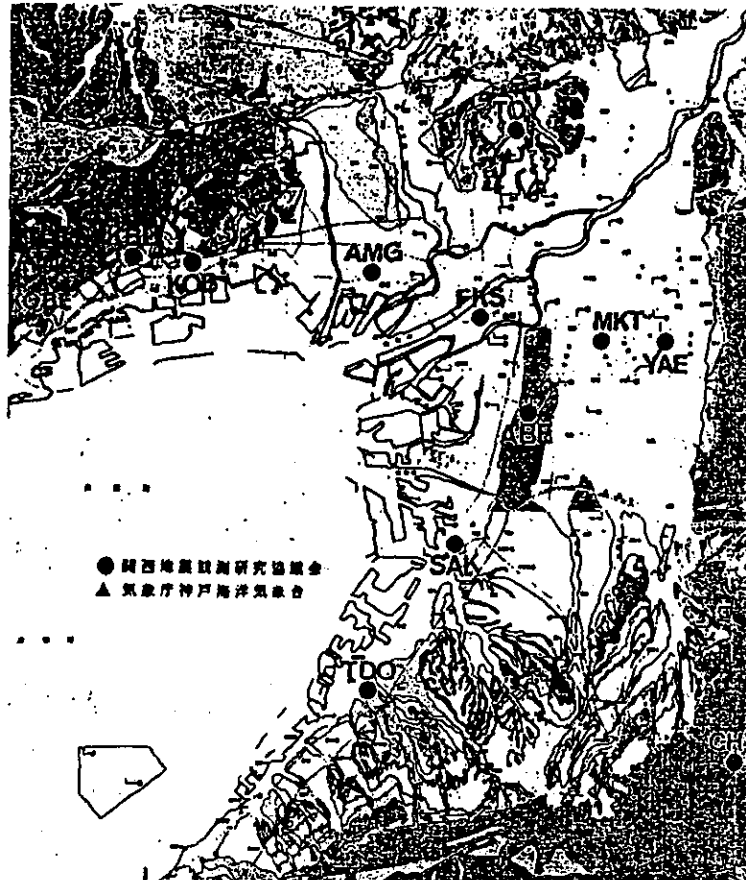


Fig 5.9 Mapa de la bahía de Osaka mostrando la distribución de las estaciones sísmicas CEORCA utilizadas como referencia en la comparación de los sismogramas sintéticos obtenidos. El triángulo representa la localización del hipocentro del sismo de Kobe.



La simulación de la fig (5.10) nos permite interpretar las grandes amplitudes del movimiento del terreno en algunos sitios así como las ondas superficiales inducidas por el depósito. Se introdujo una geometría del basamento utilizando un estrato sedimentario de velocidad de onda  $P$  de  $2 \text{ km/s}$  y de onda  $S$  de  $1 \text{ km/s}$ . La geometría del fondo del estrato sedimentario se muestra en la fig (5.9). Por otro lado se obtuvieron registros de banda ancha de excelente calidad en las estaciones  $ABE$ ,  $AMG$ ,  $FKS \text{ MKT}$ ,  $SAK$ ,  $TDO$  y  $YAE$  instaladas por el CEORKA (Committee of Earthquake Observation and Research in the Kansai Area). En la fig (5.10) se muestra el grupo de sismogramas observados junto con los sintéticos obtenidos. La diferencia en el contenido de frecuencia entre los datos y los sintéticos se debe a que se escogió una fuente con un espectro muy suave y centrado.

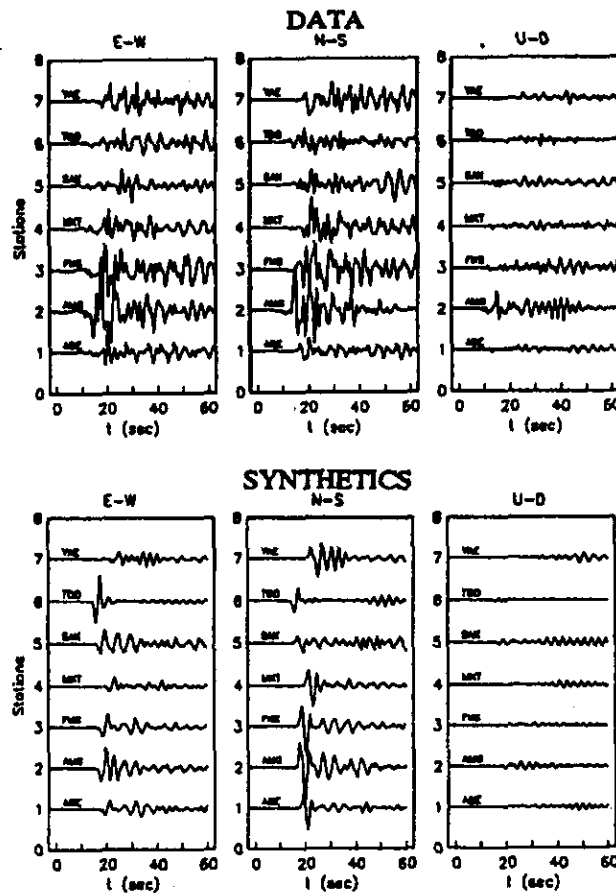


Fig 5.10 Representación de los datos observados durante el sismo de Kobe y su comparación con los datos sintéticos obtenidos con el VMP.

De hecho la historia de tiempo para la función de deslizamiento se tomó como Gaussiana con un tiempo "característico" de  $3 \text{ s}$  (el pulso de Ricker clásico con tres lóbulos es de hecho proporcional a la segunda derivada de la Gaussiana). Por otro lado, la discretización del depósito impone un límite severo en las frecuencias que se pueden propagar. Esto es un tipo de filtro implícito.

A partir de estos resultados, se pueden notar las grandes amplitudes debidas a la amplificación del valle, especialmente claras en los sismogramas observados en *AMG*, y que son bien reproducidos por los sintéticos. Las grandes amplificaciones y las amplitudes relativas con respecto de todas las estaciones sugieren que esta simulación captura la física esencial del problema. Los sintéticos muestran ondas superficiales relativamente grandes inducidas por el depósito. Estas ondas son de gran interés por que en cualquier instante pueden producir considerables daños. Estos resultados alentadores podrían probarse con la introducción de un proceso de ruptura bilateral más realista, mejor definido ahora por varios autores.

La fig (5.11) muestra una simulación tridimensional de las componentes del desplazamiento ( $u$ ,  $v$  y  $w$ ) en la superficie para la bahía de Osaka. De la misma manera que en el cap V.2, aquí se observan 4 tiempos de visualización (15, 20, 25 y 30 s).

Una vez conocido el mecanismo focal de ruptura se decidió modelar la fuente por medio de una aproximación analítica de doble par en profundidad, como la que propone Aki y Richards (1980). De esta forma se logra representar con muy buen acuerdo los sismogramas observados. Las simulaciones dinámicas que se muestran en la fig (5.11) proveen información de suma importancia para la comprensión del movimiento del terreno. Aquí se puede observar claramente la propagación de la onda directa  $P$  recorriendo el valle en los primeros 10 s de registro. No obstante el paso de esta onda se observa bien el atrapamiento y amplificación de la energía debido a la geometría y a la presencia de depósitos blandos. Esto provoca alargamiento de la coda en los registros y generación de un sistema complejo de ondas superficiales.

Existen trenes de ondas propagándose hacia los extremos de la bahía que no se pueden interpretar correctamente debido a la rigidez del modelo. La presencia de ruido numérico se observa mejor en las instantáneas a los 30 s de movimiento.

Como se ve el VPM ofrece una enorme posibilidad de modelación sencilla para la obtención de resultados preliminares en un corto tiempo. La comprensión de la respuesta sísmica de un sitio requiere de un enorme esfuerzo. En este caso la modelación matemática con métodos computacionales es cada vez más fuerte y tiene alcances que todavía se siguen explorando. La aplicación para el valle de Osaka y sus primeros resultados se obtuvieron sólo algunos días después del sismo de Kobe.

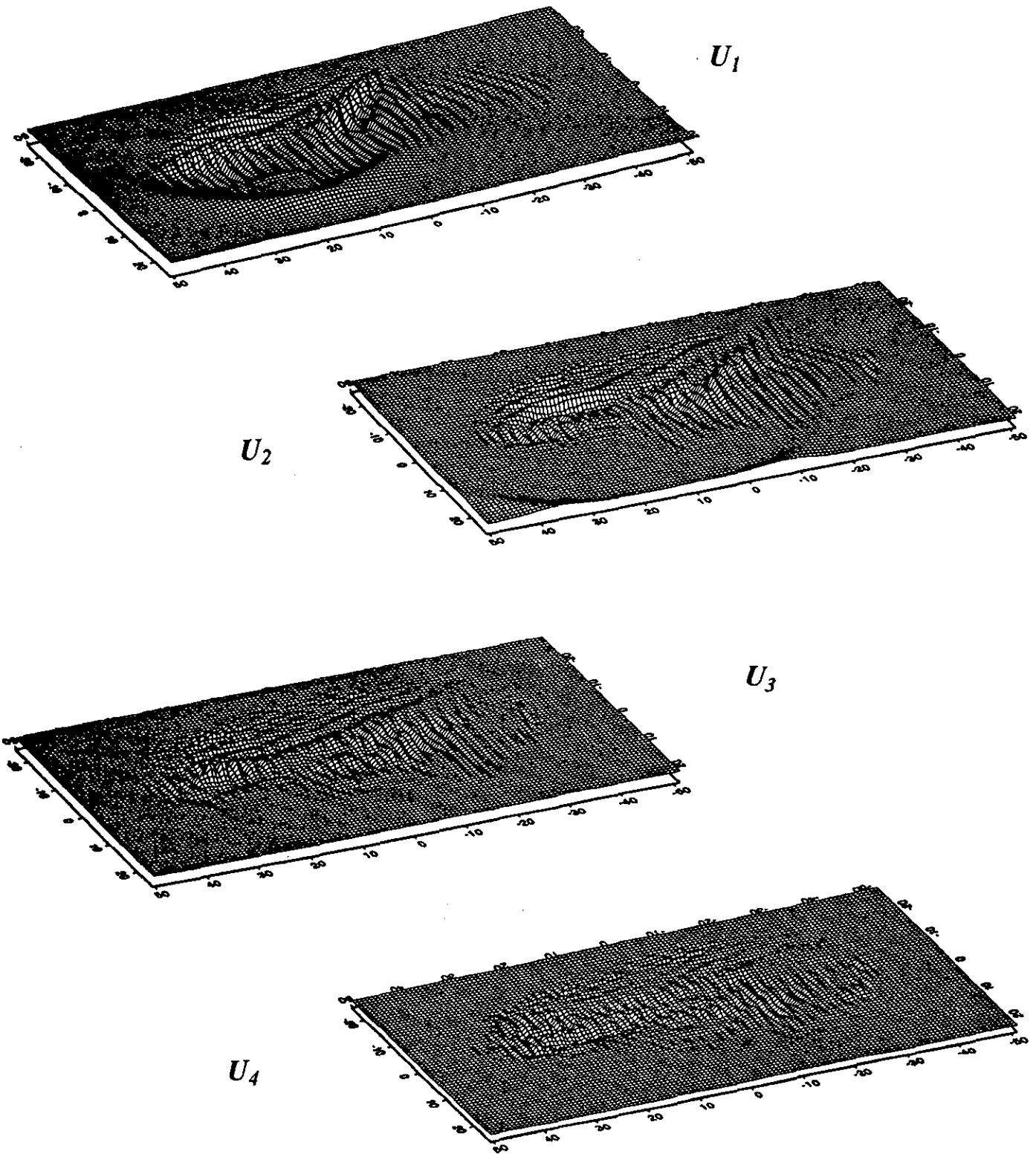
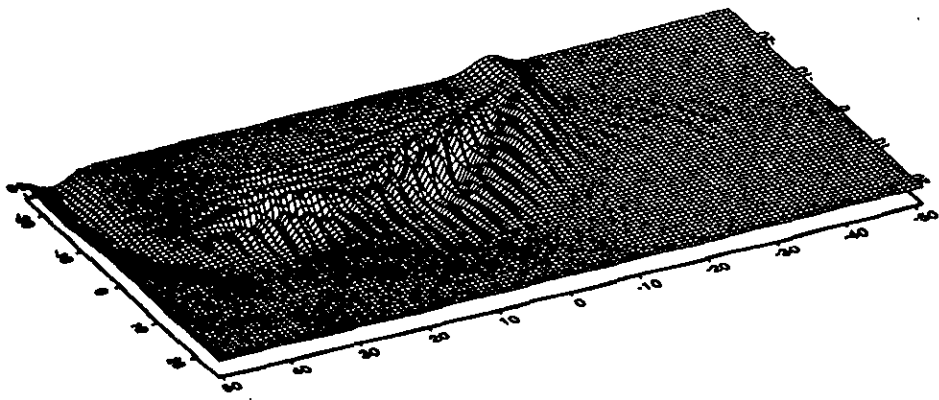
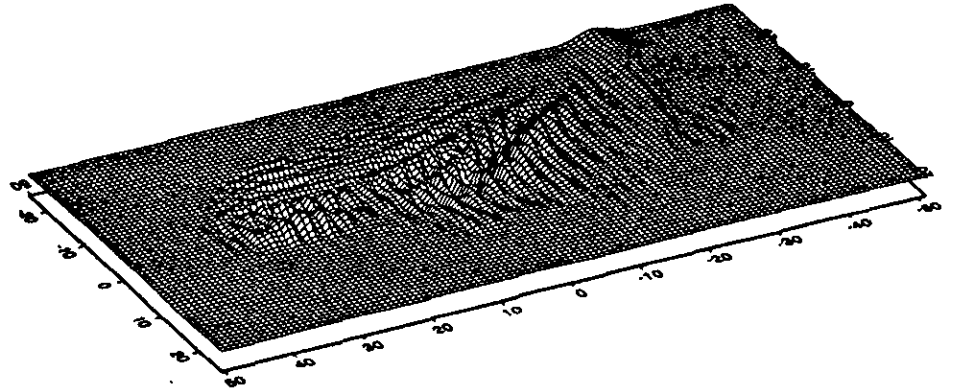


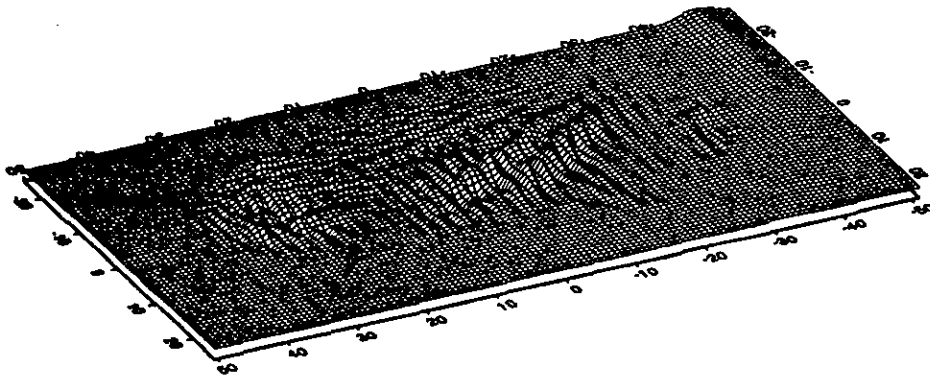
Fig 5.11 Simulación dinámica tridimensional de las componentes de desplazamiento en superficie ( $u$ ,  $v$  y  $w$ ) para la cuenca de Osaka.



$V_2$



$V_3$



$V_4$

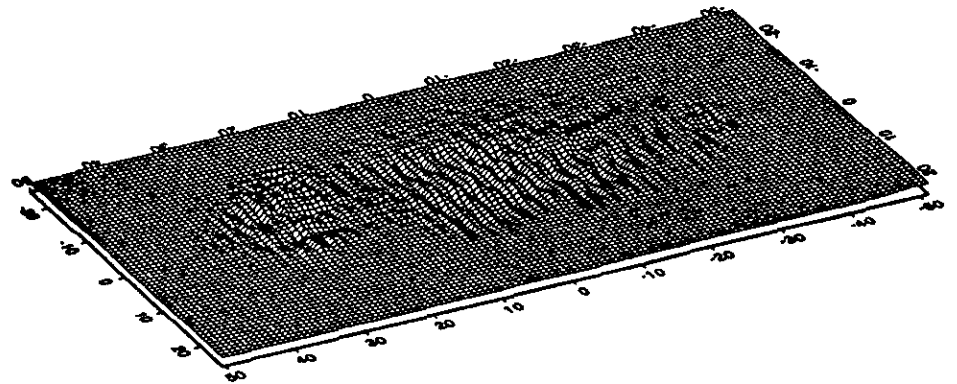
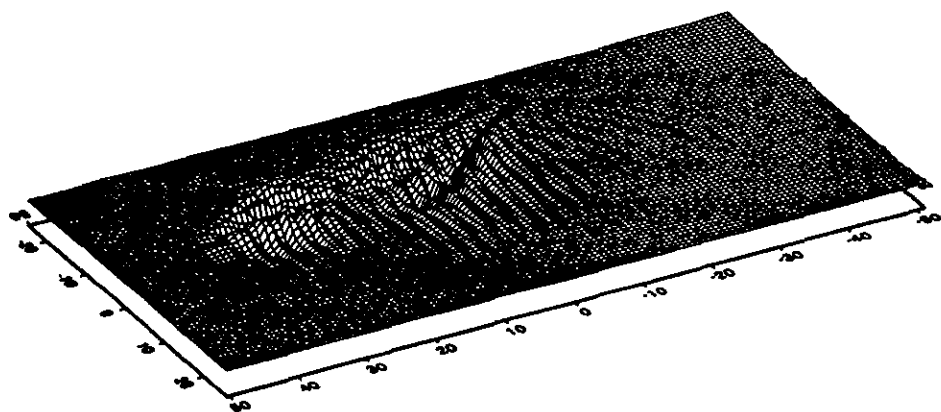
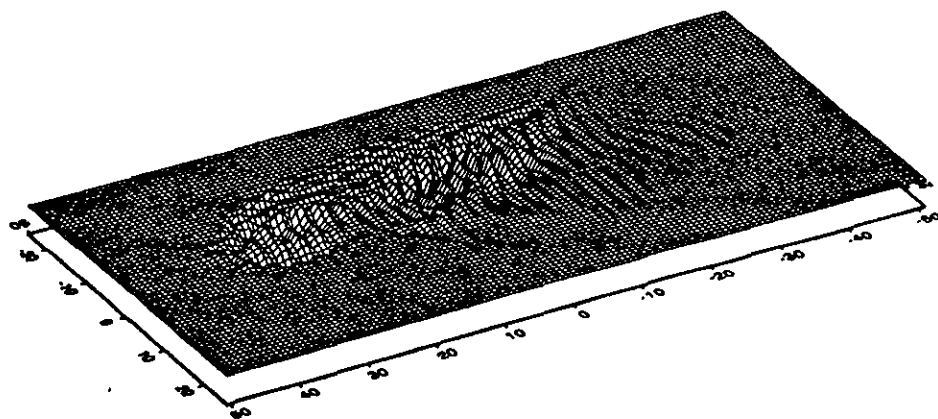


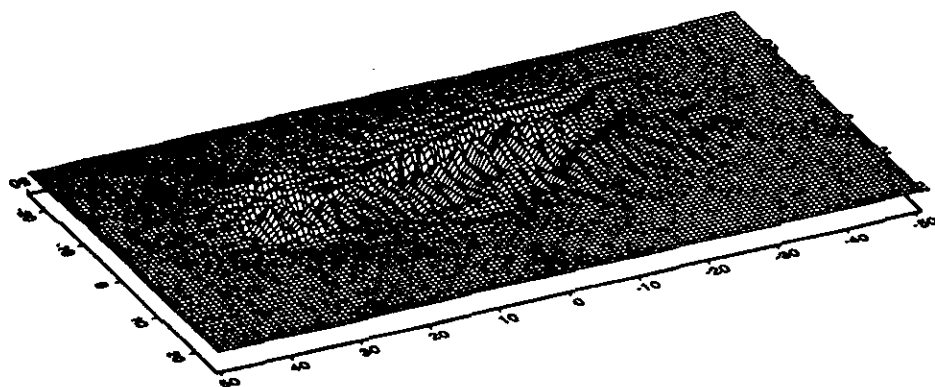
Fig 5.11 continuación, componente v.



$W_2$



$W_3$



$W_4$

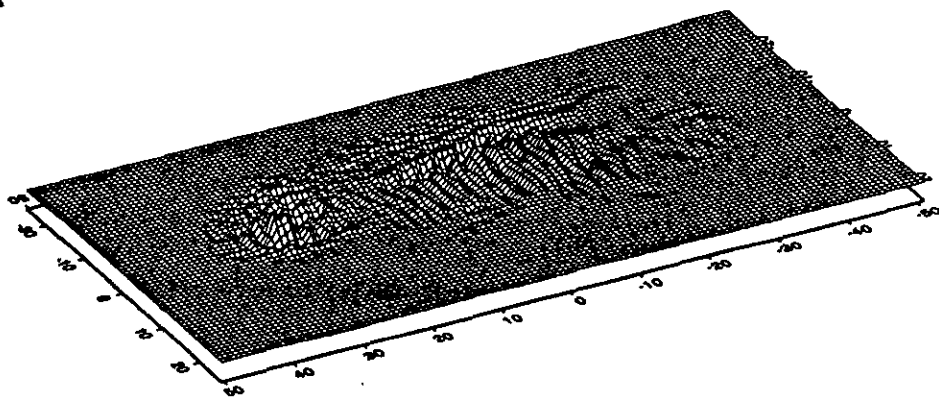


Fig 5.11 continuación, componente  $w$ .

#### V.4 Respuesta sísmica de la Cuenca de México

También se usó el VPM para evaluar la respuesta sísmica tridimensional en la superficie de un modelo simplificado de la cuenca de la Ciudad de México. Se consideró una estructura irregular 3D formada por un estrato altamente compresible y con arcilla de alto contenido en agua, que sobreyace a una estructura profunda mucho más dura.

Se consideró un estrato irregular homogéneo con velocidad de onda  $S$  de  $\beta_R = 0.1$  km/s (sin embargo en algunos sitios esta velocidad es tan baja como 35 m/s) y radio de Poisson de 0.495. Estos valores están de acuerdo con los reportados recientemente por los estudios estáticos y dinámicos de los sedimentos arcillosos de la Ciudad de México (Centro de Investigación Sísmica A.C.). Así, la velocidad de onda  $P$  es de  $\alpha_R = 1$  km/s. La velocidad de onda  $S$  para el material subyacente se estimó en 3.0 km/s. Para tomar en cuenta la atenuación de ondas sísmicas en el depósito arcilloso se usó un factor de calidad  $Q = 25$  en los cálculos. Este valor corresponde al obtenido por varias mediciones *insitu* del estrato blando de arcilla en el lago de Texcoco.

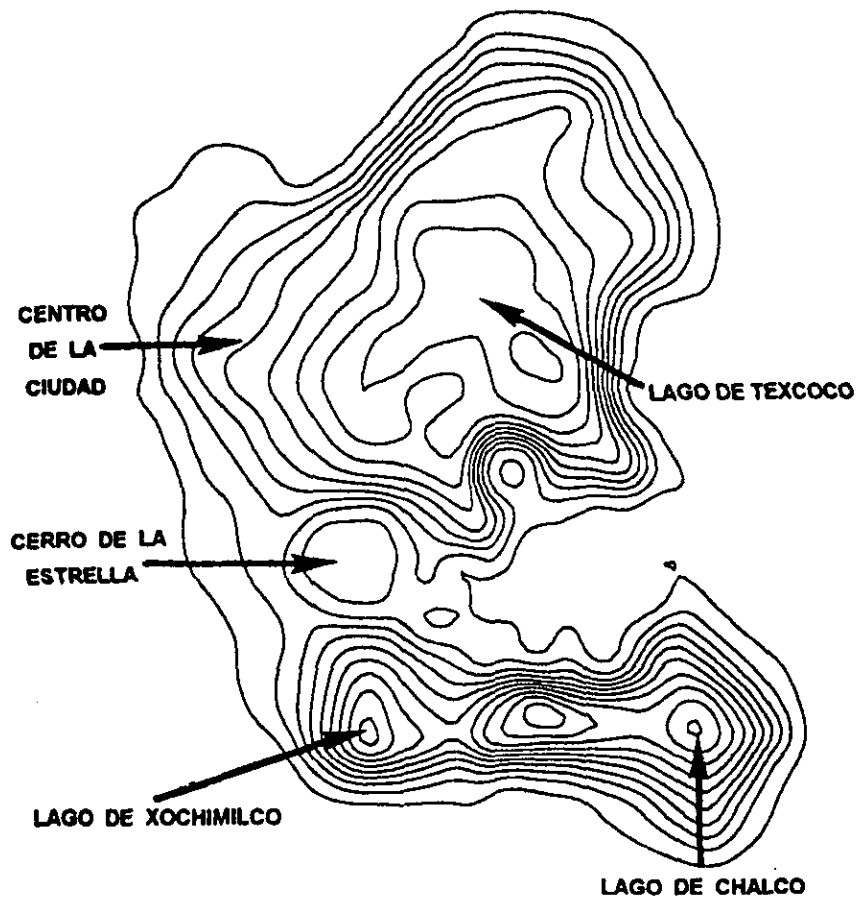


Fig 5.12 Modelo simplificado del Valle de México.

La geometría irregular 3D usada en los cálculos fue inferida por la zonificación detallada de la Ciudad de México y por el conocimiento preciso de la distribución del periodo fundamental ( $T_0$ ). Así, utilizando el promedio de velocidad de onda  $S$  ( $0.1 \text{ km/s}$ ), la distribución de la geometría en profundidad fue obtenida usando la relación teórica dada por  $h = \beta_R T_0 / 4$ . La fig (5.12) ilustra los contornos de la distribución de la profundidad en el modelo 3D en estudio, los mínimos en la parte sur corresponden a los sedimentos de los lagos de Chalco y Xochimilco, mientras que la gran extensión hacia el norte corresponde a los sedimentos del antiguo lago de Texcoco. El tamaño de la malla de cálculo es de  $40.96 \times 40.96 \text{ km}$  y fue muestreada usando  $256 \times 256$  nodos, con un espaciamiento de la malla de  $0.16 \text{ km}$ . La muy baja velocidad de onda  $S$  de los sedimentos sobreyacentes y la discretización tomada imponen severos límites sobre la longitud de onda observable ( $\lambda \geq 0.5 \text{ km}$ ) o, en otros términos la frecuencia máxima es entonces  $f_{max} = \beta_R / \lambda \leq 0.2$ . Debido a la gran extensión lateral del modelo se calculó la solución 1D que se toma como el valor de referencia.

Se asume la incidencia de una onda plana  $SH$  llegando a la base irregular del modelo 3D del depósito de la Ciudad de México, con un ángulo de incidencia  $\gamma = 60^\circ$  con respecto a la vertical y un azimut de  $\phi = 30^\circ$ . La forma de onda del movimiento de llegada se da por un pulso de Ricker con periodo característico de  $t_p = 2s$ . Se calculan desplazamientos sintéticos en la superficie del modelo. La fig (5.13) muestra una serie de instantáneas ( $2.5, 5.0, 7.5$  y  $10 s$ ) para la componente E-W. Despreciando el rango útil de frecuencia más pequeño (arriba de  $0.25 \text{ Hz}$ ), nuestra simulación muestra efectos dinámicos no calculados antes. Los grandes efectos parecen ocurrir en las partes más profundas del modelo (una gran parte corresponde a la zona del lago de Texcoco). Los cálculos muestran un claro retraso en la evolución del frente de onda. La distribución de los valores picos del movimiento del terreno pueden correlacionarse con la forma de la cuenca y el azimut.

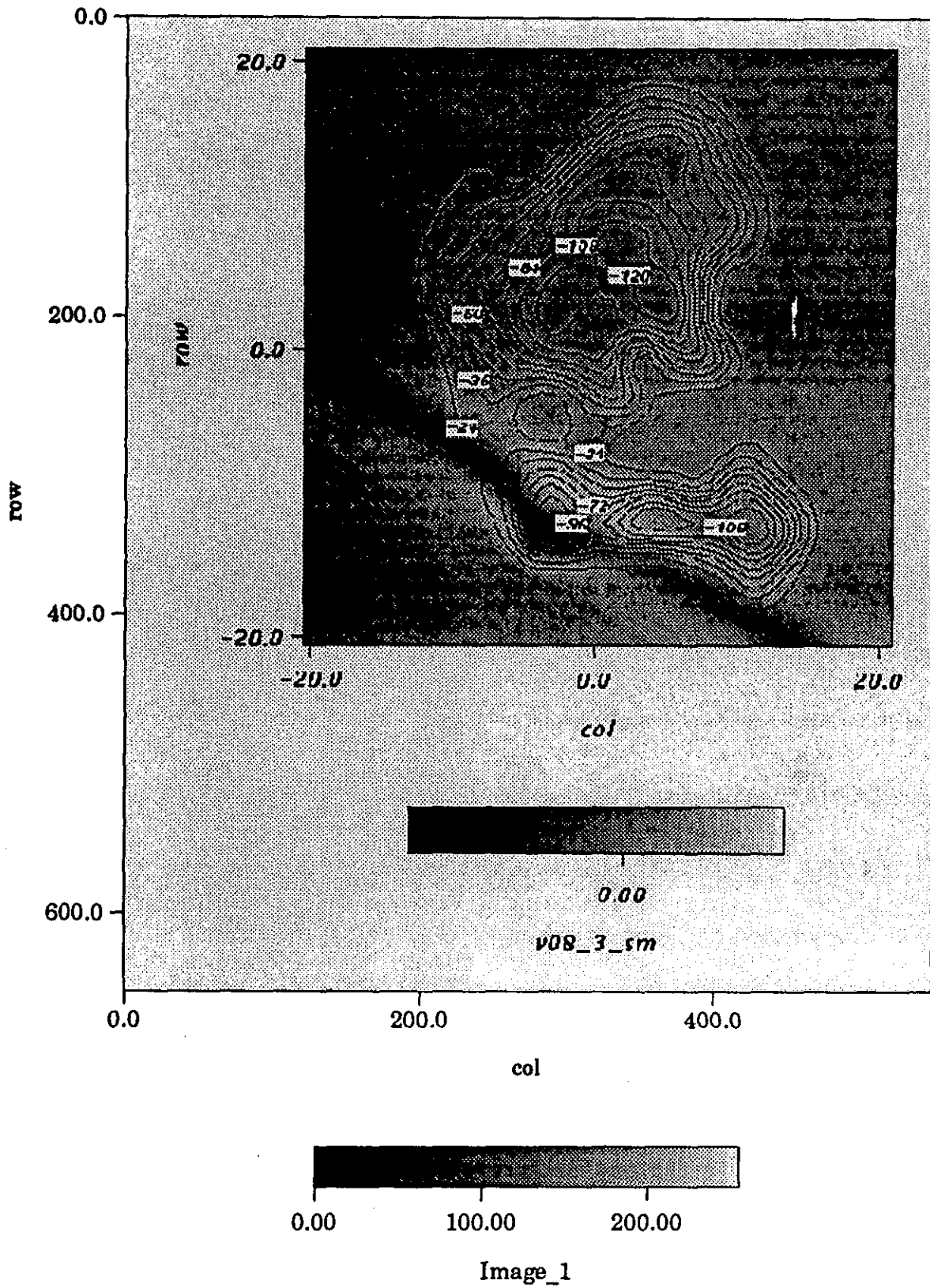


Fig 5.13 Contornos de igual amplitud del desplazamiento calculados con el modelo 1D.  
 $t = 2.5, 5.0, 7.5$  y  $10$  segundos..



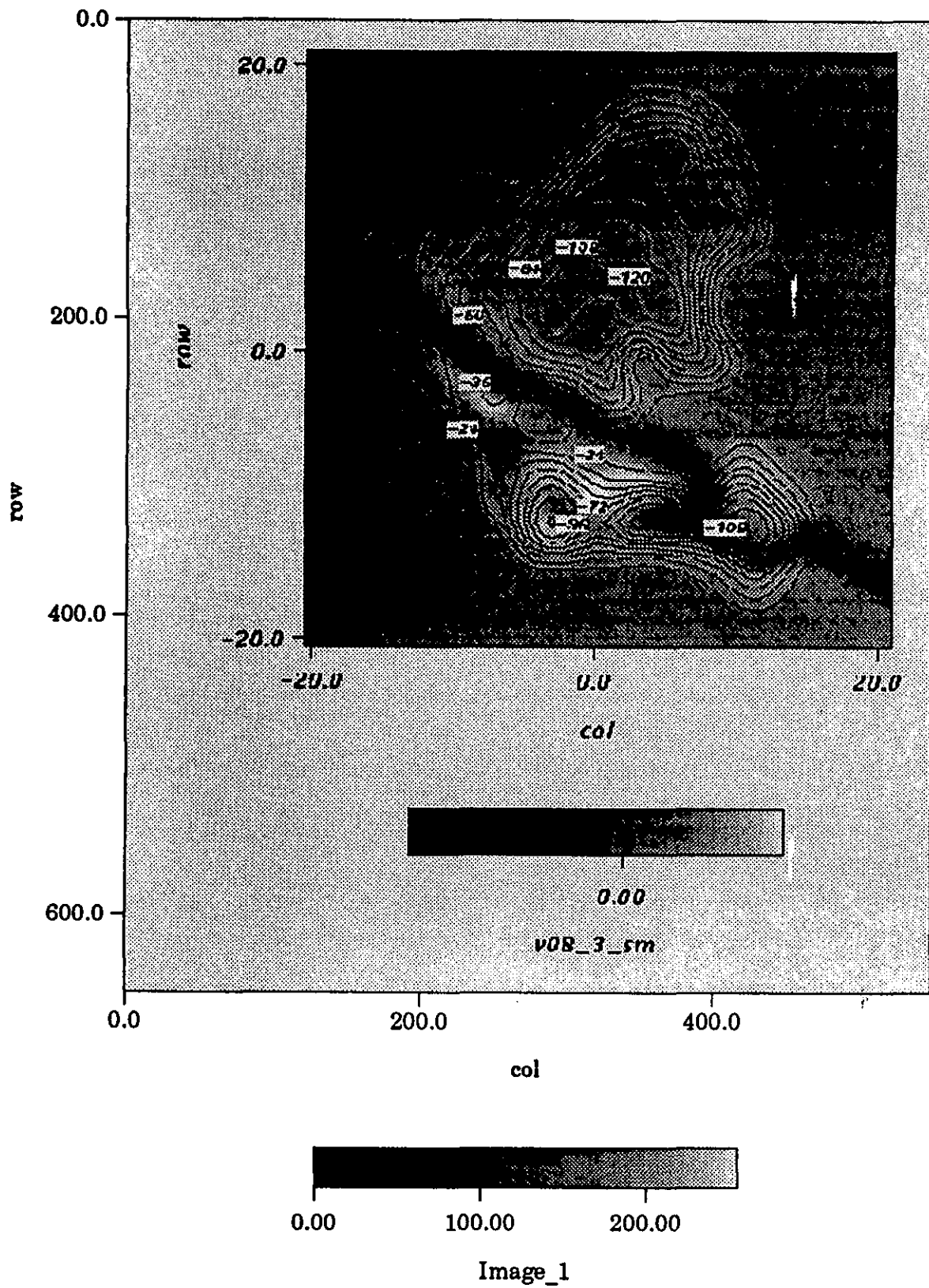


Fig 5.13 continuación  $t = 5.0$  seg

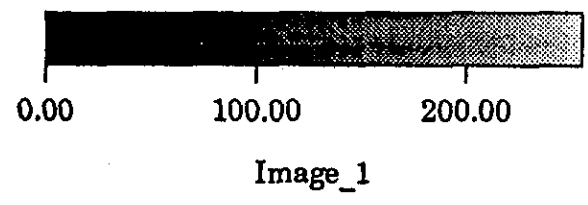
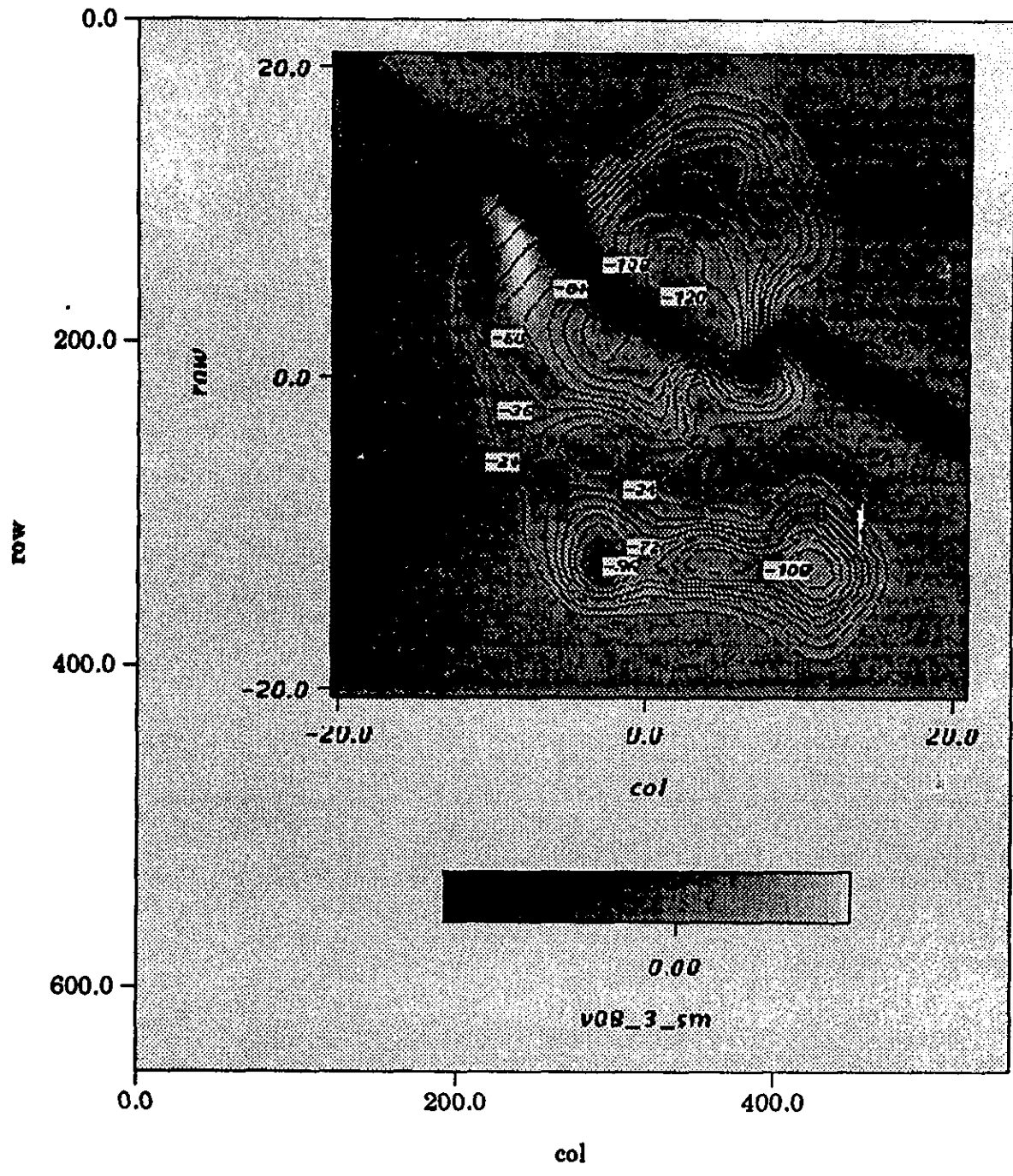
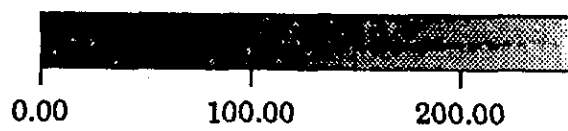
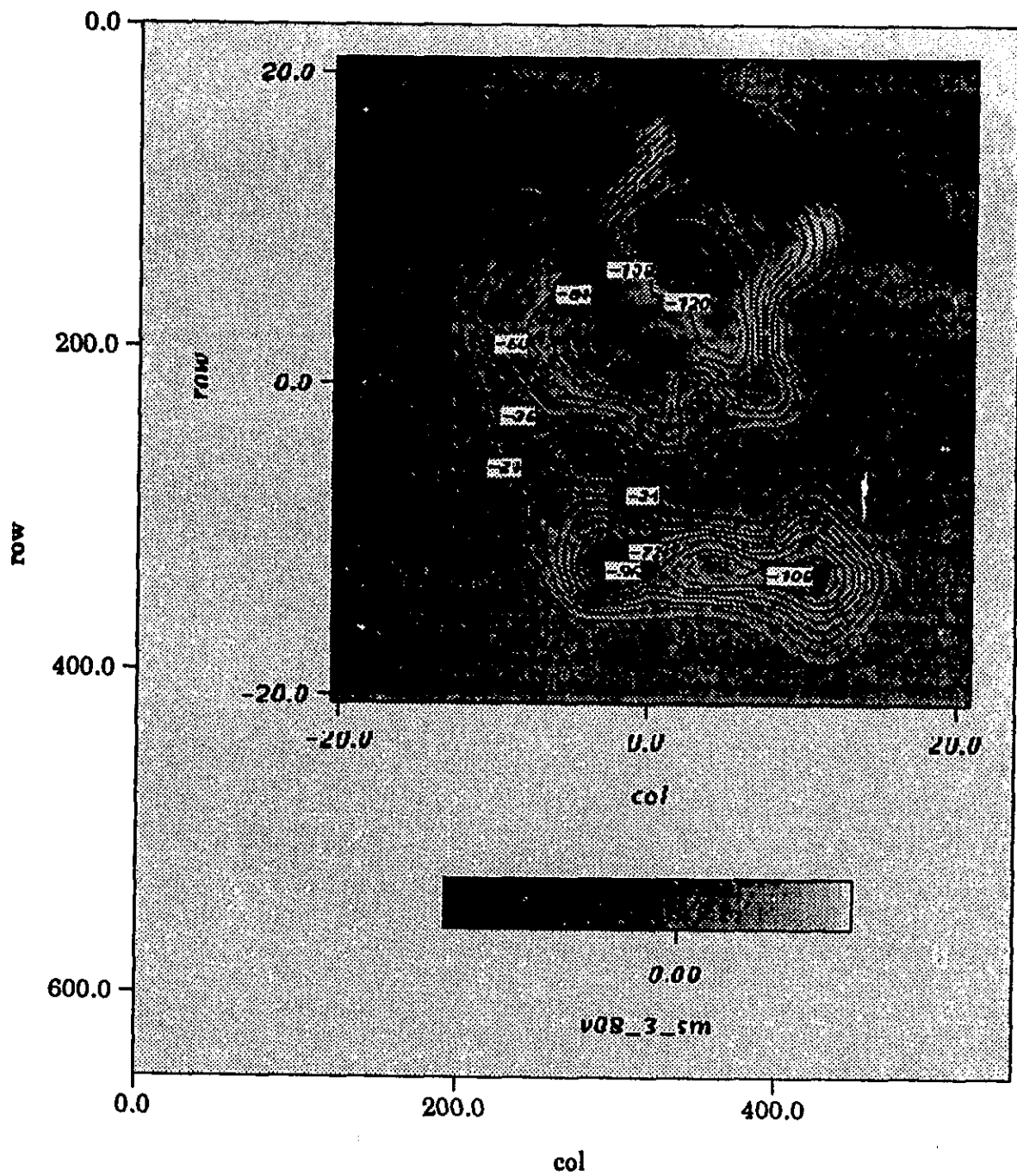


Fig 5.13 continuación  $t = 7.5$  seg

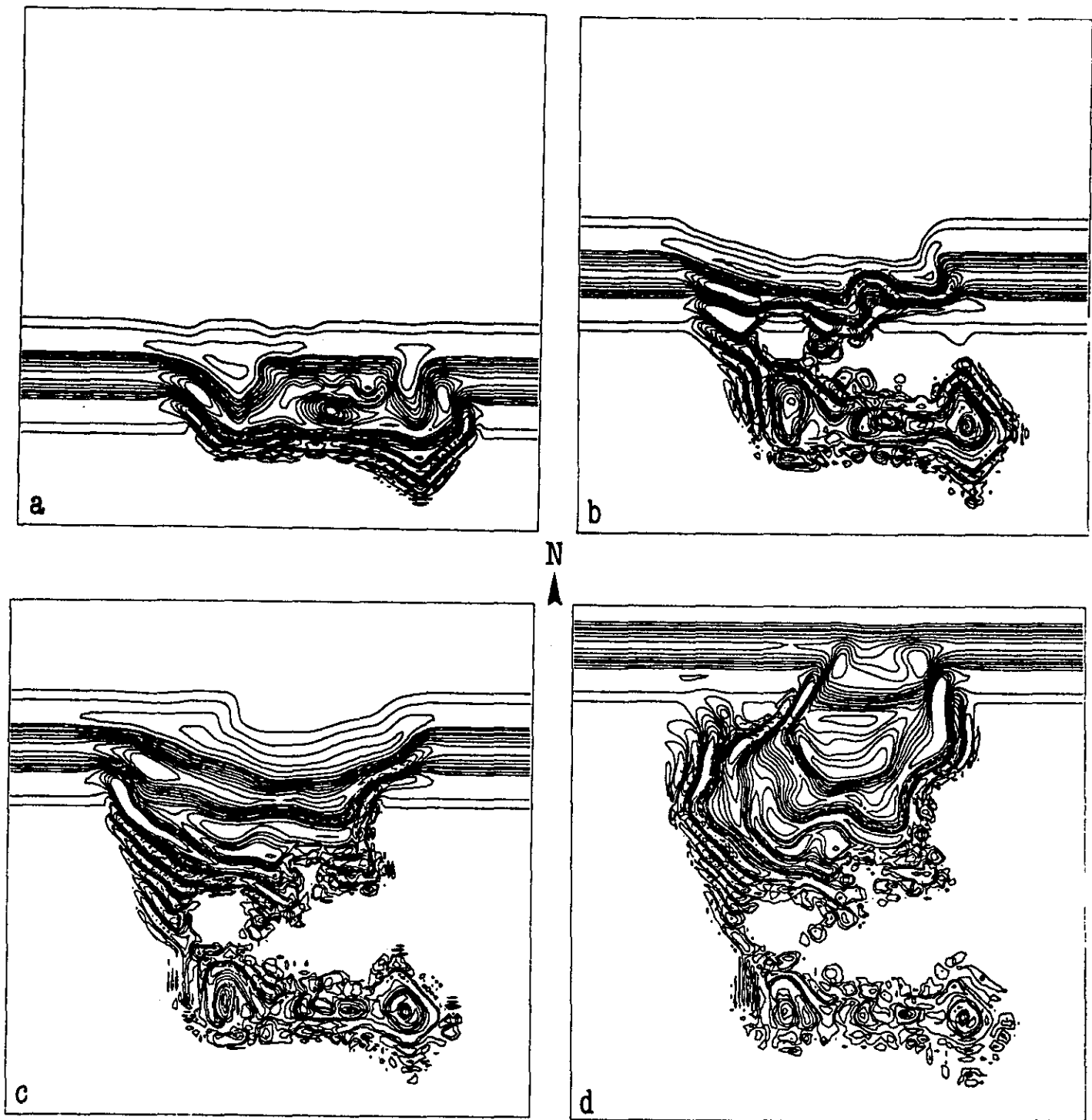


Image\_1

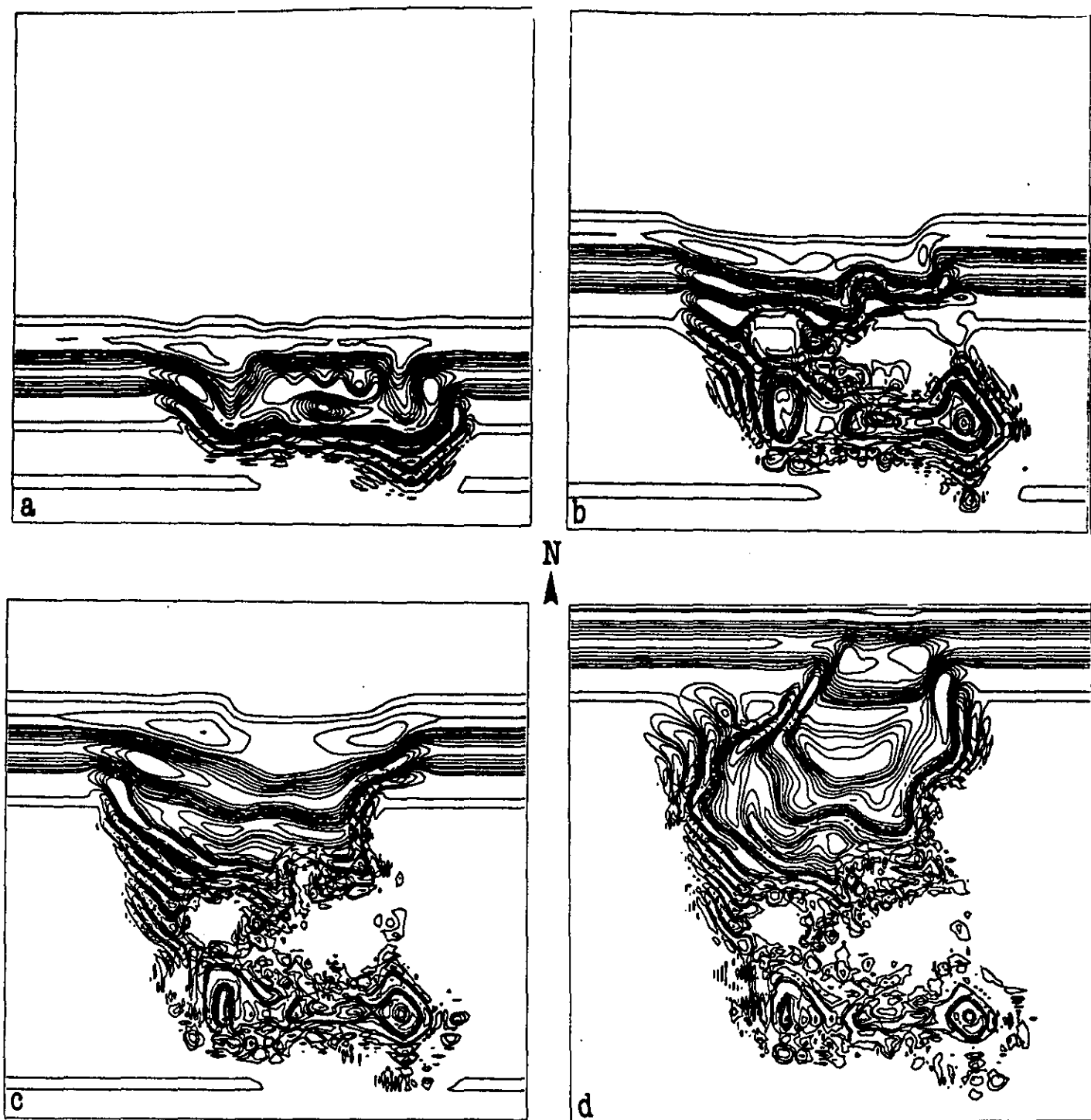
Fig 5.13 continuación  $t = 10$  seg.

Si la amplitud del desplazamiento (E-W) se presenta ahora como contornos de igual amplitud en el plano horizontal es posible observar una perfecta correlación entre el periodo del pulso propagante, con la forma y profundidad del modelo de cuenca estudiado. La fig (5.14) (a, b, c y d) representa contornos de igual amplitud del desplazamiento para los tiempos 2.5, 5.0, 7.5 y 10 s, respectivamente. Nuevamente se trata de un pulso de Ricker con frecuencia central de 0.25 Hz, que incide con un ángulo de  $\gamma = 60^\circ$  con respecto a la vertical y un azimut de  $\phi = 0^\circ$ . En este caso el movimiento representado corresponde a la respuesta unidimensional. En efecto este resultado no contempla la irregularidad lateral del modelo, solamente calcula la amplitud del desplazamiento en cada punto (con las correcciones de fase pertinentes) en función del espesor local de los sedimentos.

En la fig (5.15) se presentan los correspondientes cálculos tridimensionales. A simple vista, ambos resultados parecen ser muy similares. Se mostrará más adelante que existen algunas diferencias en amplitud y duración del movimiento, para algunos puntos específicos.



*Fig 5.14 Contornos de igual amplitud del desplazamiento horizontal calculados con el modelo 1D para los tiempos de a)2.5, b)5.0, c)7.5 y d)10 segundos.*



*Fig 5.15 Contornos de igual amplitud del desplazamiento horizontal calculados con el modelo 3D para los tiempos de a)2.5, b)5.0, c)7.5 y d)10 segundos.*

Con base en los resultados obtenidos para la incidencia de un pulso de Ricker, en el modelo simplificado del valle de México, ahora es posible obtener de manera explícita y desde el punto de vista del modelado matemático las diferencias existentes entre las respuestas 1D y 3D sobre la superficie de la cuenca.

Para llevar a cabo estas comparaciones, es necesario evaluar la respuesta 1D sobre cada punto de la malla, tomando en cuenta únicamente el espesor local de los sedimentos y la velocidad de propagación de las ondas de cortante. Con esta evaluación, se ignora completamente la influencia de la irregularidad en cuanto a los espesores de la zona alrededor del punto de evaluación.

En la simulación tridimensional del modelo, es de esperarse una respuesta sísmica controlada predominantemente por los efectos 1D, debido a la gran extensión lateral de la cuenca y su poca profundidad. La importancia de los efectos tridimensionales, puede ser ahora aislada y presentada como una función del espacio, y de la frecuencia de análisis.

En las figs (5.16), (5.17), (5.18) y (5.19) se muestran las comparaciones entre los cálculos en 1D y 3D del modelo en cuestión, para la incidencia de un pulso de 4 y 2 s, respectivamente. Estos perfiles de desplazamiento están calculados para los tiempos de 2.5, 5, 7.5 10, 12.5 y 15 s. Las figuras pares (5.16) y (5.18) representan los cálculos 1D, mientras que los impares (5.17) y (5.19), los correspondientes cálculos 3D. A simple vista las posibles diferencias entre los cálculos en 1D y 3D parecen no perceptibles, quizá un ligero cambio de amplitud, siendo mayor en los casos 3D. Aunque para las últimas tres instantáneas de las figs (5.18) y (5.19), la complejidad del movimiento entre ambas soluciones es muy diferente. Es mucho más rica la distribución de amplitudes en el caso 3D para este ejemplo, de cualquier manera, estas comparaciones permiten reforzar la conclusión anterior sobre la gran predominancia del efecto 1D, en la respuesta sísmica del modelo actual de la cuenca de México.

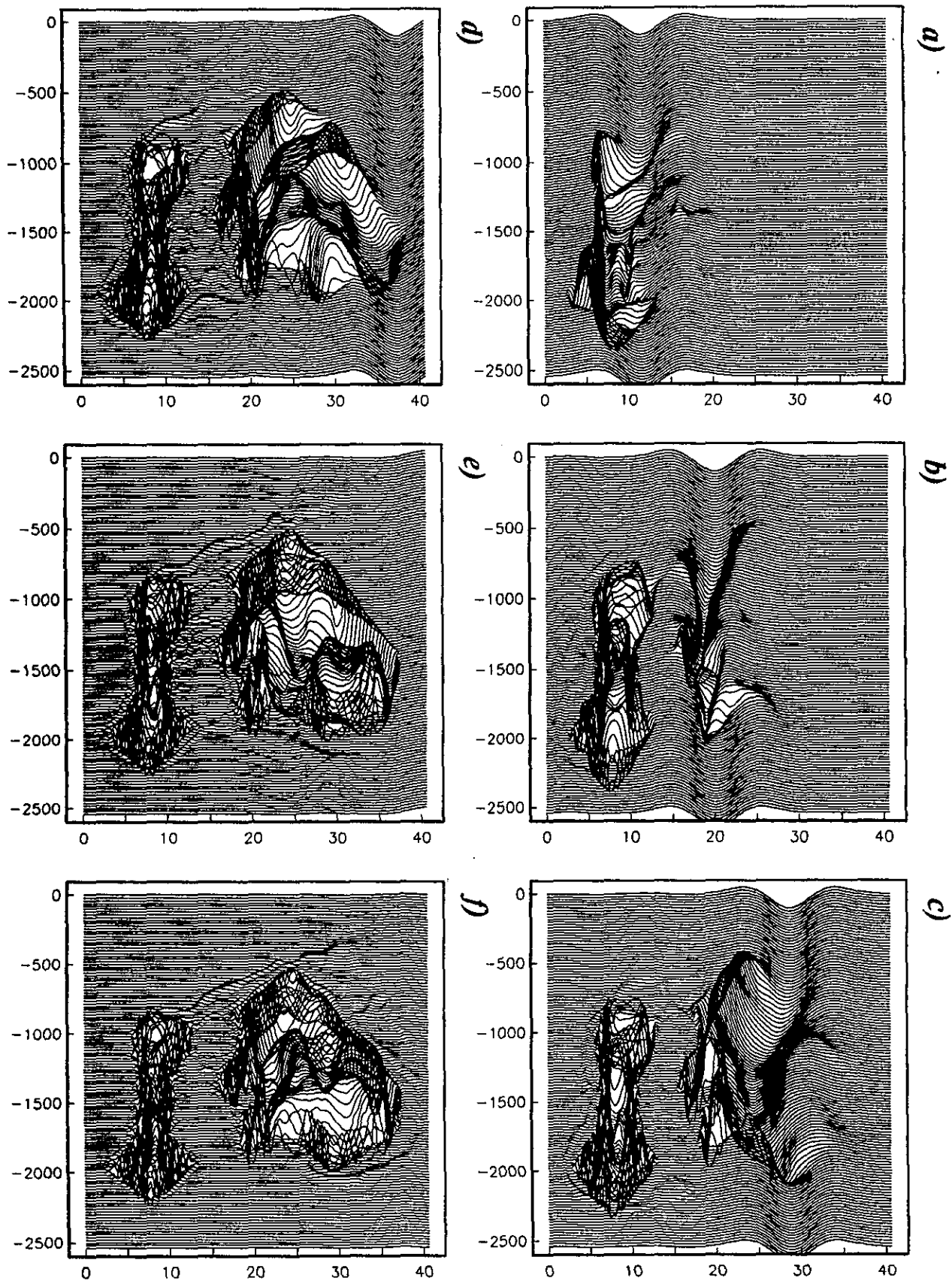
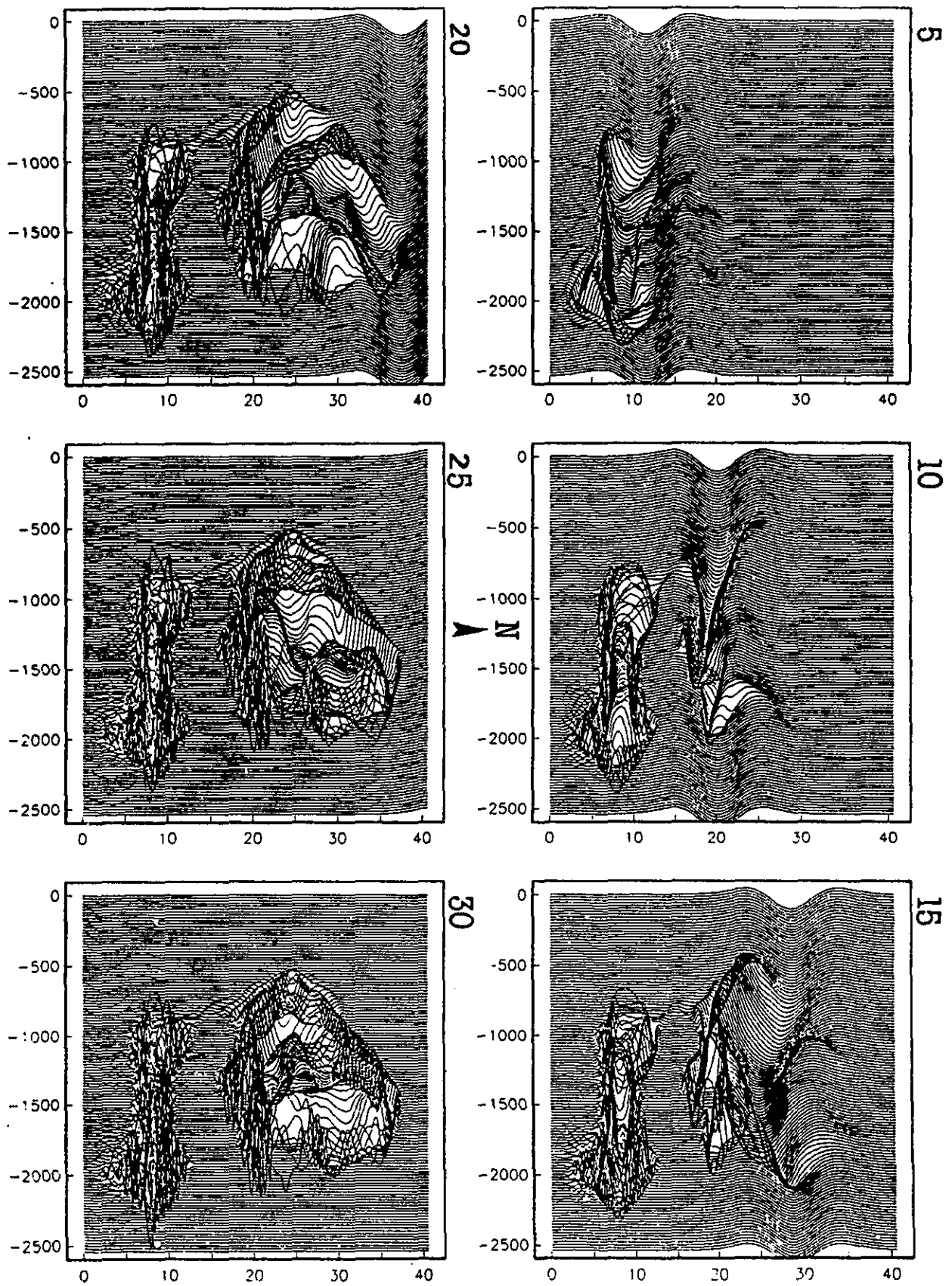


Fig 5.16 Perfiles de desplazamiento para un pulso monocromático de periodo de 4 seg calculados con el modelo 1D para los tiempos de a)2.5, b)5, c)7.5 d)10, e)12.5 y f)15 seg.





*Fig 5.17 Perfiles de desplazamiento para un pulso monocromático de periodo de 4 seg calculados con el modelo 3D para los tiempos de a)2.5, b)5, c)7.5 d)10, e)12.5 y f)15 seg. El número de cada cuadro indica la secuencia de imagen del cálculo.*

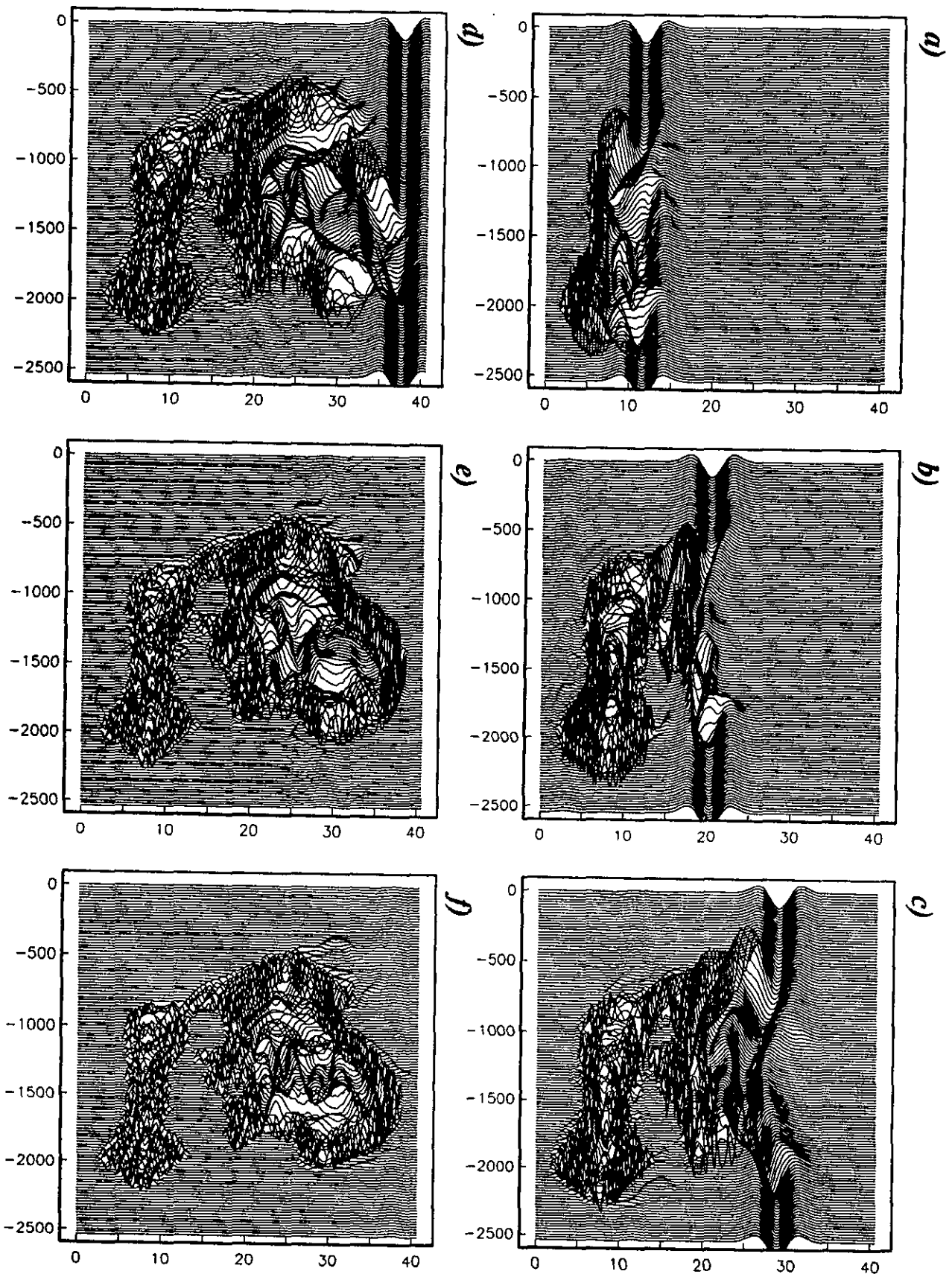


Fig 5.18 Perfiles de desplazamiento para un pulso monocromático de periodo de 2 seg calculados con el modelo 1D para los tiempos de a)2.5, b)5, c)7.5 d)10, e)12.5 y f)15 seg.

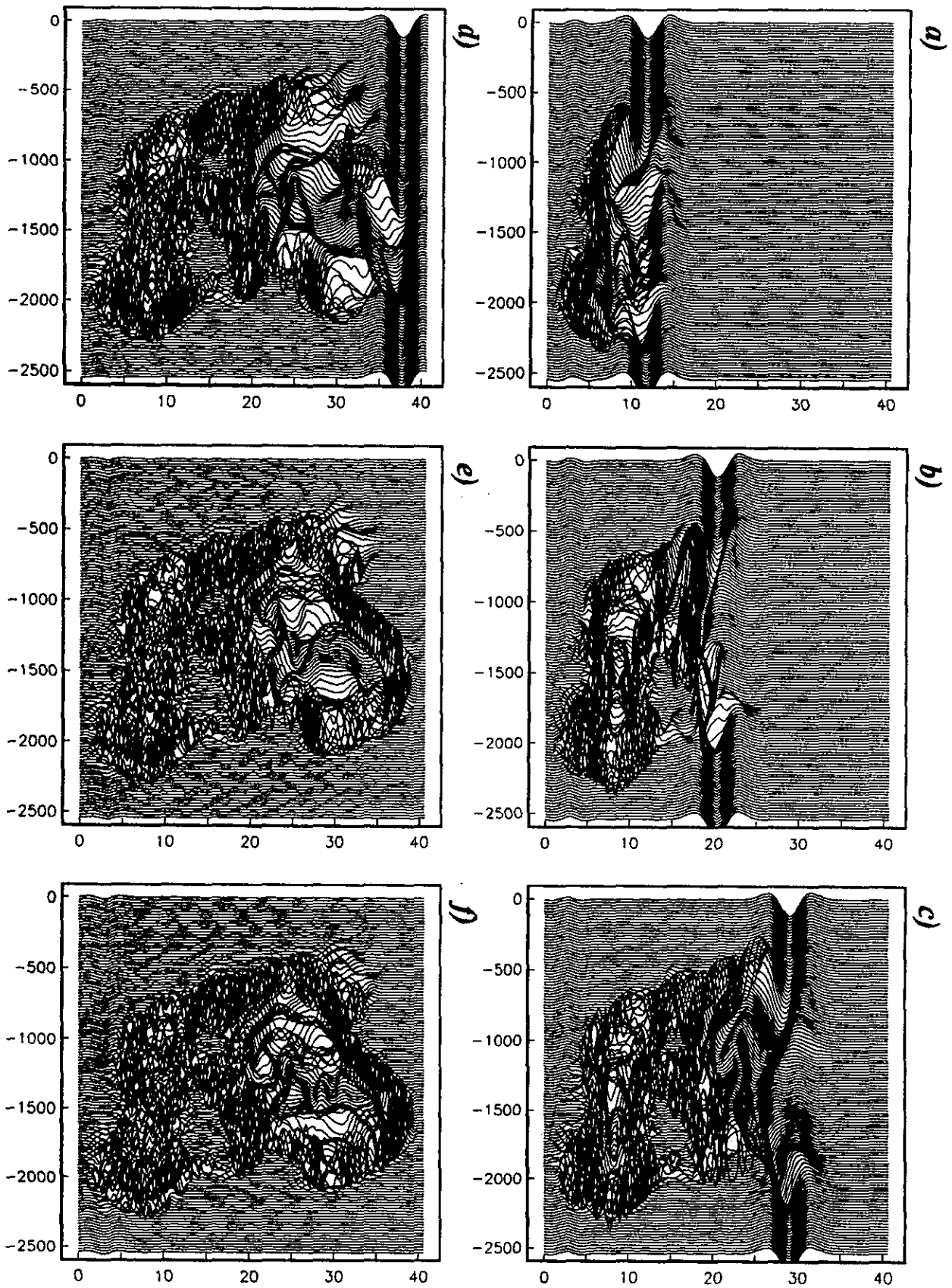


Fig 5.19 Perfiles de desplazamiento para un pulso monocromático de periodo de 2 seg calculados con el modelo 3D para los tiempos de a) 2.5, b) 5, c) 7.5 d) 10, e) 12.5 y f) 15 seg.

Otra serie de resultados interesantes, obtenidos para el modelo simplificado de la cuenca de México con el método de proyección variacional, es un conjunto de instantáneas de la aceleración en la superficie del modelo para cuando el movimiento prescrito en la base, es el observado en la zona de terreno firme de CU durante el sismo del 25 de abril de 1989 ( $M_s=6.9$ ).

Las figs (5.20) y (5.21), representan las aceleraciones para los tiempos de 5.0, 6.5, 7.5 y 9 segundos. Al igual que las figuras correspondientes a la propagación de un pulso de Ricker, la distribución de las aceleraciones sobre la superficie de la cuenca, concuerda con la geometría tridimensional de la misma, así como con la profundidad local de los sedimentos. Sin embargo se muestra una mayor complejidad, debida sin duda a la alimentación continua del movimiento de la base, dada por los registros introducidos como movimiento incidente. Esta última simulación puede mejorarse, pero actualmente es la mejor aproximación para representar de manera sintética el movimiento sísmico observado en la superficie de la cuenca de México ante terremotos fuertes.

Se realizó también una corrida del programa para una malla de (512 x 512) elementos, lo cual representa un espaciamiento de 0.08 km entre los nodos. Nuevamente se representa el desplazamiento horizontal en la superficie del modelo para cuando el movimiento prescrito de la base está dado por los componentes de aceleración integrados del sitio de CU, registrados durante el sismo del 25 de abril de 1989. Los registros fueron filtrados alrededor de 2.0 s con el objeto de estudiar el comportamiento del modelo en esta frecuencia de interés.

Los resultados son 128 perfiles de desplazamiento para varios tiempos de observación cubriendo el total de la superficie. Las figs (5.22) y (5.23) representan las instantáneas para los tiempos: fig (5.22) ( $a=2.5, b=5, c=7.5, d=10, e=12.5, f=15$ ) y (5.23) ( $g=17.5, h=20, i=22.5, j=25, k=27.5$  y  $l=30$  segundos). En ellas es posible seguir perfectamente la evolución que exhiben las trazas incidentes a su paso por el modelo en estudio. Los fenómenos de amplificación dinámica y duración excesiva están presentes desde las primeras imágenes (a-c) siendo más notorios en sitios de sedimentos más profundos.

Como el período fundamental del modelo varía entre 1.0 y 5.0 s, debido a los espesores mínimo y máximo de las arcillas y a la velocidad promedio utilizada, las imágenes posteriores a 10 s (de la (d) a la (l)) definen el contorno en planta de la cuenca en estudio, este contorno es bien conocido ya que representa la geometría de la zona geotécnica del lago, en la cuenca de México.

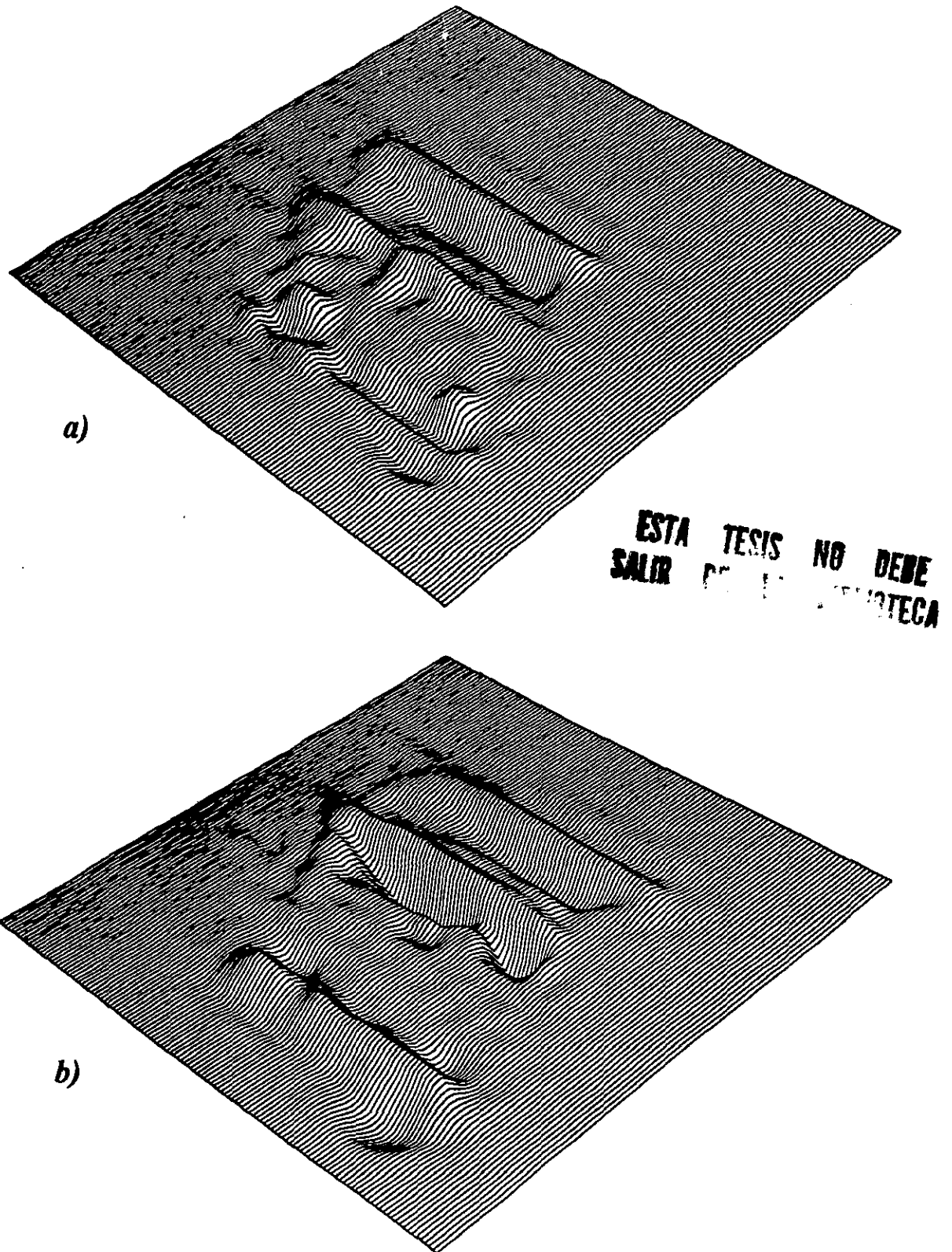
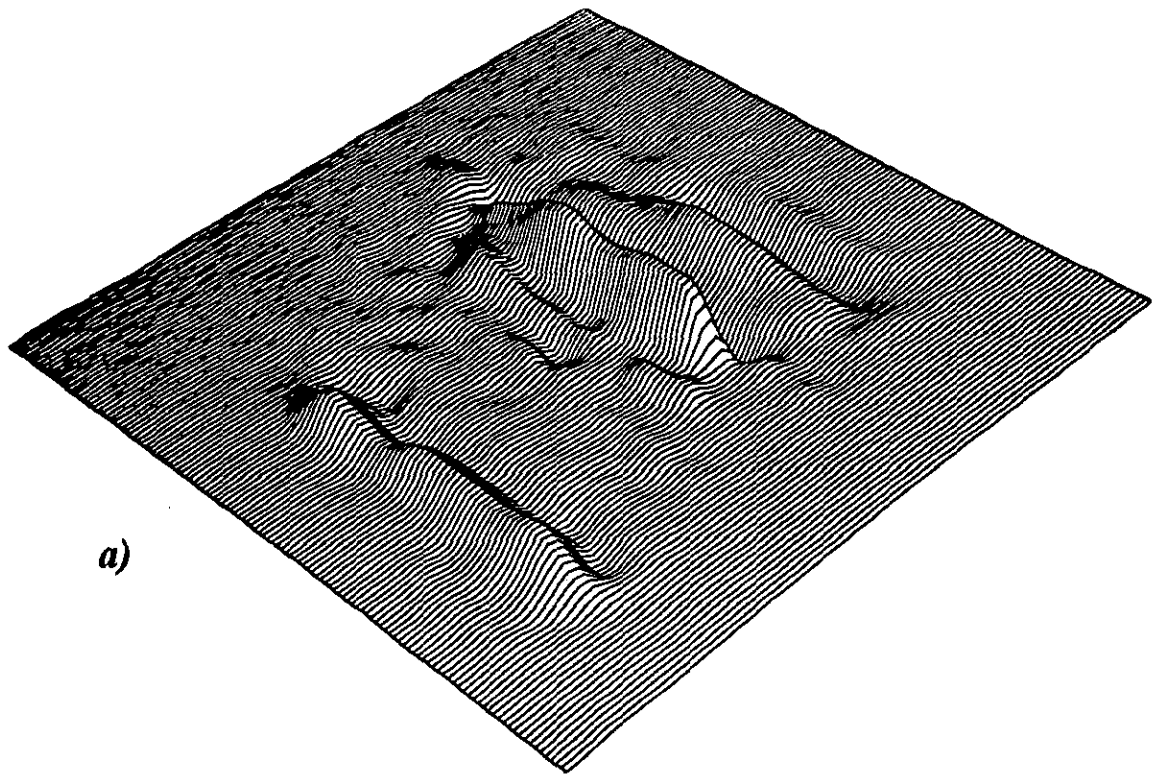
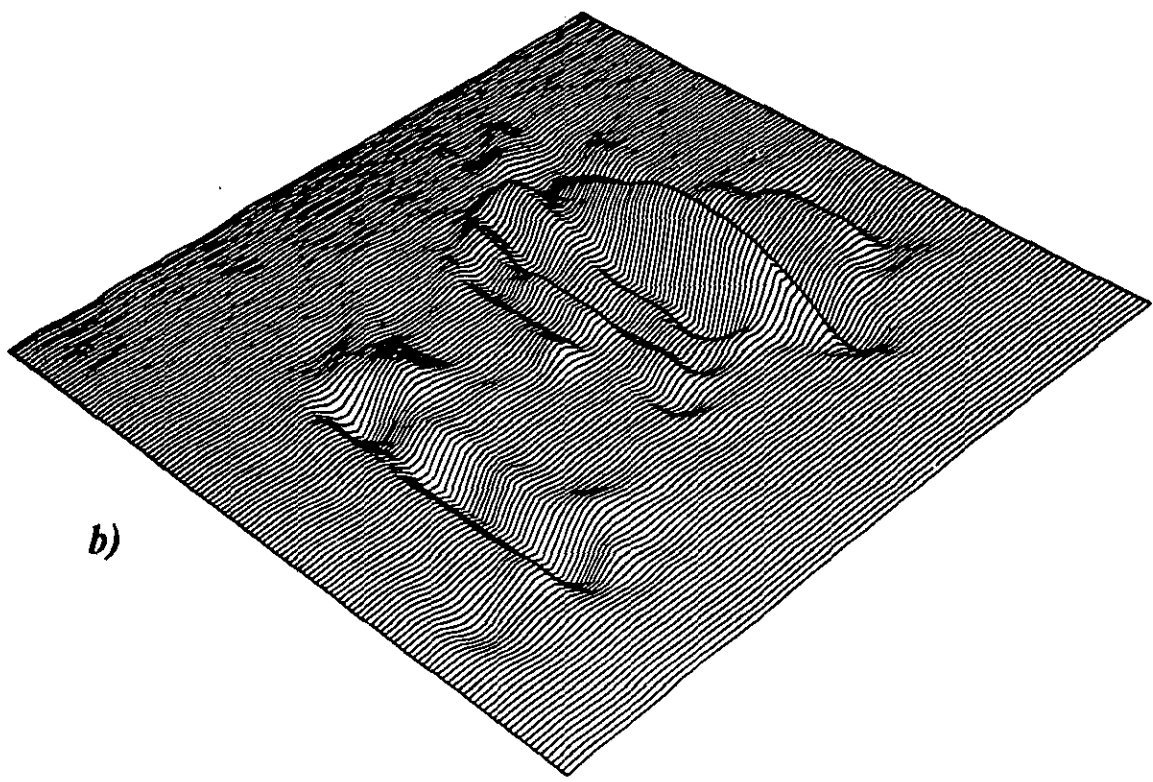


Fig 5.20 Instantáneas de la aceleración horizontal en la superficie del modelo, en la componente E-W. La fig 5.20 (a) muestra el tiempo  $t = 5.0$  seg, mientras que (b) muestra  $t = 6.5$  seg. El movimiento en la base está dado por el registro de CU para el sismo del 25 de Abril de 1989.



a)



b)

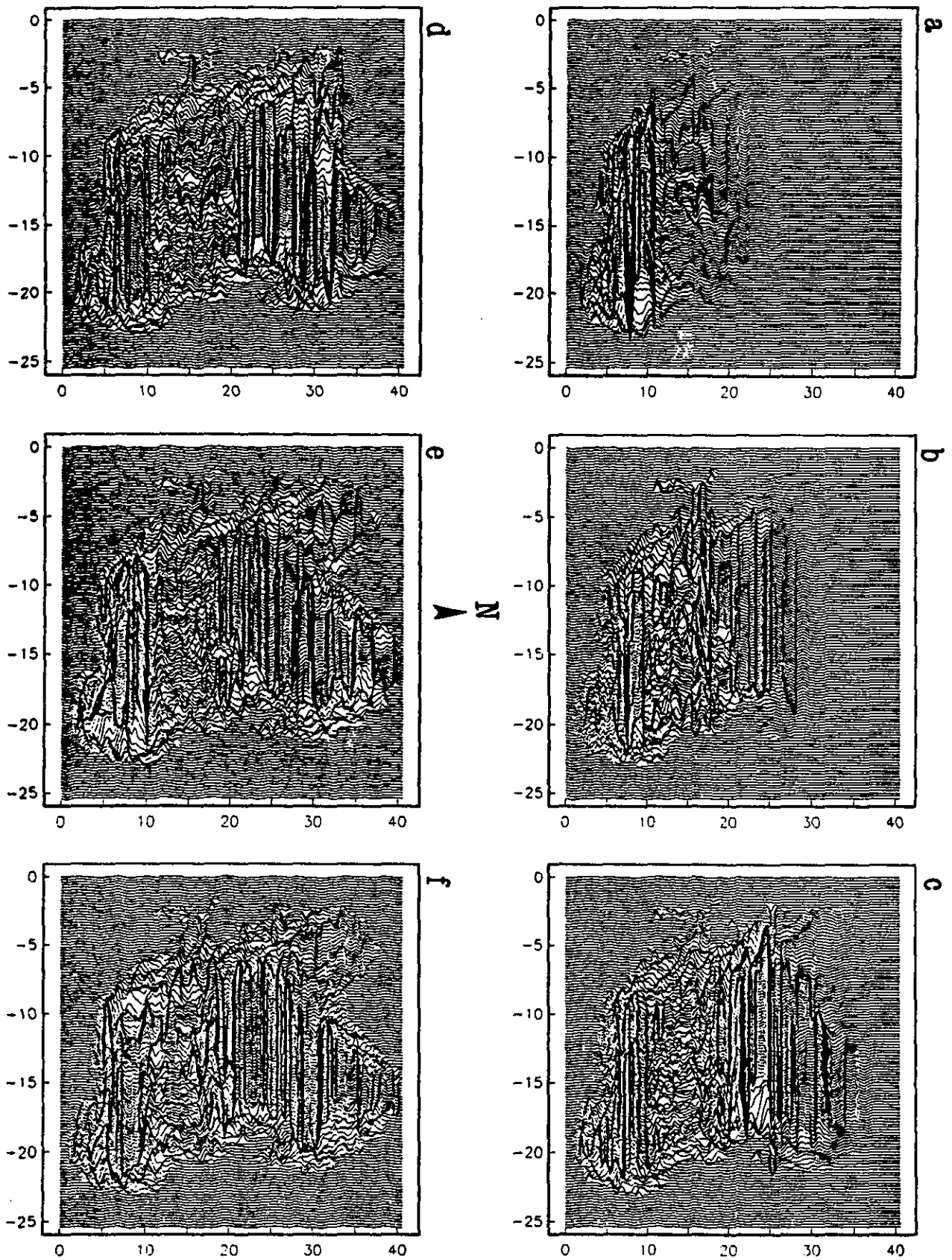
*Fig 5.21 Instantáneas de la aceleración horizontal en la superficie del modelo, en la componente E-W. La fig 5.20 (a) muestra el tiempo  $t=7.5$  seg, mientras que (b) muestra  $t=9.0$  seg. El movimiento en la base está dado por el registro de CU para el sismo del 25 de Abril de 1989.*

A través de estas instantáneas es también posible identificar las zonas más profundas de la cuenca, como aquellas en las que el movimiento presenta amplificaciones muy grandes (hasta de 40 veces la amplitud original), esto es la parte central del lago de Texcoco y de los lagos Xochimilco-Chalco. Así como los grandes desplazamientos de las zonas más importantes del modelo, aquellas con mayor densidad de población, ubicadas en la parte centro-noroeste del modelo.

También es posible observar en algunas imágenes, los patrones de difracción tridimensional provocados por algunos rasgos geométricos del modelo: En las imágenes correspondientes a los tiempos *17.5* y *30 s*, se puede identificar un patrón de difracción circular hacia la parte centro-suroeste del modelo. Este patrón se atribuye a la presencia del Cerro de la Estrella.

Las anteriores observaciones ejemplifican claramente la dependencia del movimiento generado sintéticamente, con el carácter tridimensional del modelo estudiado. En la medida en que este modelo sea perfeccionado en cuanto a representar más confiablemente la geometría y propiedades de la cuenca de la ciudad de México, y superar las fuertes hipótesis planteadas para su concepción, los resultados serán más confiables y fidedignos para describir los rasgos más importantes del movimiento sísmico durante la ocurrencia de terremotos fuertes.





*Fig 5.22 Desplazamiento horizontal (E-W) sobre la superficie del modelo simplificado de la cuenca fig (5.12). La excitación en la base del modelo corresponde a registros de terreno firme. Se presentan instantáneas para los tiempos: a=2.5, b=5, c=7.5, d=10, e=12.5 y f=15 segundos.*



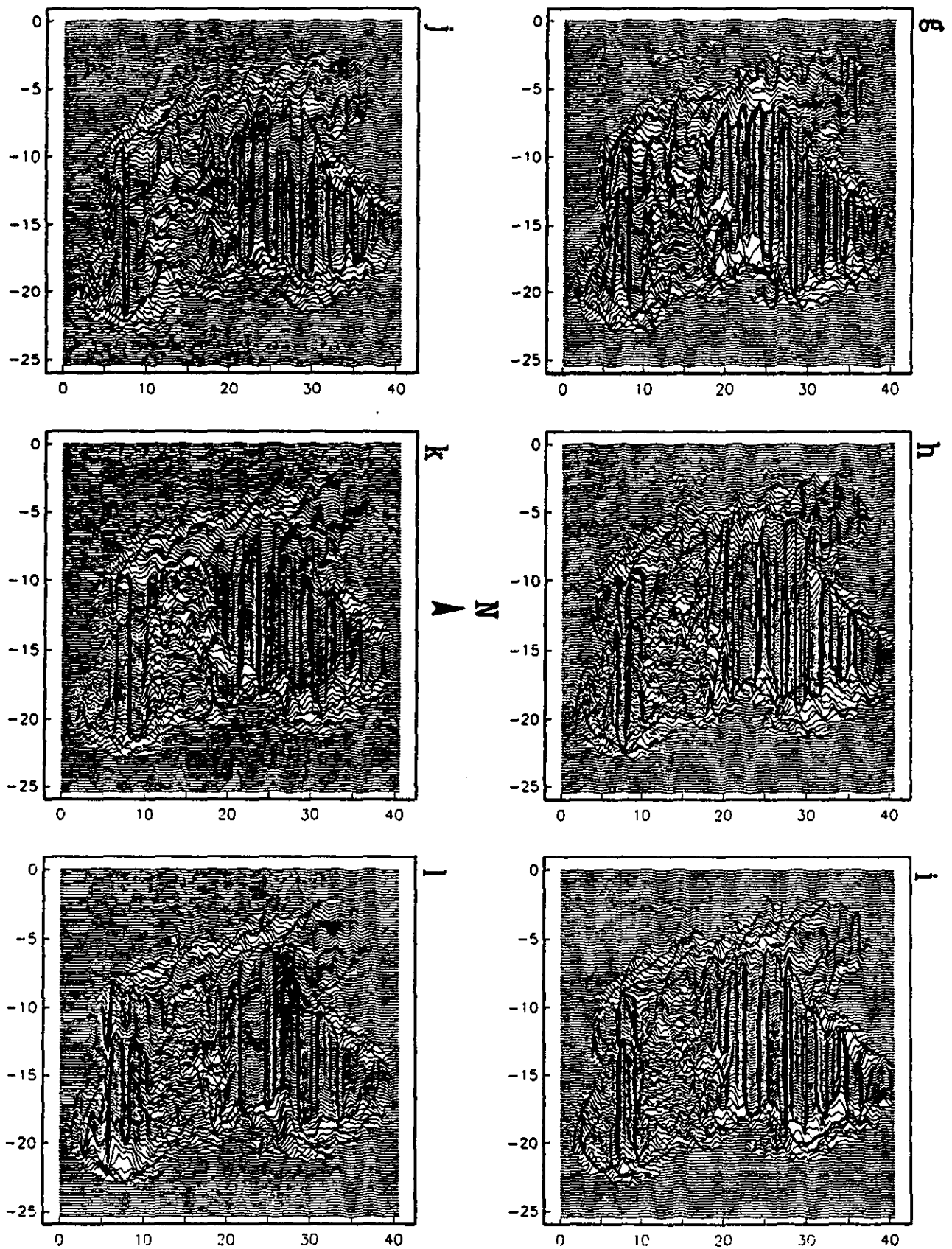


Fig 5.23 Desplazamiento horizontal (E-W) sobre la superficie del modelo simplificado de la cuenca fig (5.12). La excitación en la base del modelo corresponde a registros de terreno firme. Se presentan instantáneas para los tiempos:  $g=17.5$ ,  $h=20$ ,  $i=22.5$ ,  $j=25$ ,  $k=27.5$  y  $l=30$  segundos.

---

## VI. CONCLUSIONES

---

Se ha presentado un método nuevo: El Método de Proyección Variacional (VPM), para calcular la respuesta sísmica tridimensional de valles aluviales someros. El problema se resuelve con una aproximación basada en una formulación variacional de Galerkin de forma débil. Se postula un depósito con geometría irregular de forma suave donde se aplica el método de Galerkin por medio de un grupo de funciones de prueba para la dependencia vertical. Así, se obtiene un grupo de ecuaciones diferenciales que se acoplan y se "proyectan" en el plano horizontal donde se resuelven usando un esquema pseudo-espectral. Esta aproximación ya ha sido aplicada con anterioridad para calcular la respuesta en el Valle de Osaka, Japón, durante el sismo de Hyogo-Ken Nanbu (Kobe) del 17 de Enero de 1995, (Sánchez-Sesma et al., 1996) y considerando la respuesta del basamento (Perrot et al., 1995). Para este mismo evento, en esta tesis, se presentaron algunos de los resultados obtenidos con el VPM y sus respectivas comparaciones con los datos registrados por algunas estaciones de la red CEORKA, con la finalidad de probar los alcances del VPM para la modelación de eventos reales.

Por otro lado se dieron algunos ejemplos de la factibilidad numérica y exactitud del VPM para modelos de valles aluviales en 2 y 3D. Se utilizó el modelo propuesto por Kawase y Aki, quienes resuelven el problema en el caso bidimensional, utilizando un grupo de funciones de Green para explicar las largas duraciones de los registros observados en la ciudad de México. Aquí el acuerdo fue excelente. Así mismo se realizaron algunos cálculos tomando el modelo tridimensional propuesto por Sánchez-Sesma & Luzón, para observar la aproximación de resultados entre el método propuesto y el IBEM (Método Indirecto de Elementos de Frontera). El VPM mostró rapidez en los cálculos y buena aproximación de los resultados.

Además de algunas comparaciones contra soluciones exactas en el dominio de la frecuencia (caso  $SH$ ) y en el dominio del tiempo (casos  $P$  y  $SV$ ) mostradas en el capítulo III, se presentó una discusión de las condiciones de frontera del método, incluyendo el caso de las fronteras absorbentes.

Como último bloque de resultados, en la parte final del capítulo V se mostraron varias simulaciones de la propagación de ondas sísmicas en un modelo simplificado de la Cuenca de México, donde se incluyeron casos que utilizan pulsos Ricker como campo sísmico incidente con el fin de observar efectos azimutales.

También se mostró un ejemplo que utiliza un registro de aceleración en CU del sismo del 25 de abril de 1989 como campo incidente. Los resultados obtenidos han mostrado perspectivas muy interesantes. Las primeras aplicaciones mediante modelos matemáticos han mostrado que la respuesta sísmica de la cuenca de México requiere de métodos ágiles y modernos para su mejor comprensión. Así, se pone de manifiesto la capacidad del modelado numérico para ser usado como herramienta predictiva del movimiento sísmico esperado.

El enorme potencial de aplicación que presenta el VPM se debe a que:

1) La velocidad de propagación de las ondas  $S$  ( $\beta_R = 0.1 \text{ km/s}$ ) y la relación de Poisson consideradas en la construcción del modelo, resultan acordes con los valores promedio reportados en la literatura para estos materiales (FJBS/CIS-93/05). Así mismo el factor de calidad ( $Q = 25$ ) que se pretende incluir en las simulaciones para representar la gran atenuación observada en las arcillas, coincide con factores calculados en laboratorio para núcleos arcillosos de Xochimilco, Chalco y Texcoco, y es también acorde con los factores reportados a partir de varios tipos de mediciones *in situ* (FJBS/CIS-93/05).

2) La geometría del basamento del modelo se obtuvo con la zonificación sísmica actual de la ciudad de México, que contiene información detallada proveniente de diversas fuentes sobre la distribución del periodo fundamental en la zona del lago.

Aunque no se cuenta actualmente con mayor detalle geotécnico y geométrico para el modelo global de cuenca que se está considerando, existe información muy completa, pero puntual, en unos cuantos sitios de interés.

3) El Método de Proyección Variacional representa actualmente la alternativa más viable en cuanto a métodos matemáticos, numéricos, y analíticos disponibles para llevar a cabo simulaciones "realistas" con recursos de cómputo moderados. El mayor porcentaje de tiempo de proceso (70%) requerido por el algoritmo de cómputo del VPM es ocupado para la realización de las transformadas rápidas de Fourier. Además, con la implantación de las rutinas de FFT propias del compilador Fortran de la CRAY, SCFFTM y CCFFTM, el tiempo de cómputo requerido para una sola simulación (utilizando una malla de  $256 \times 256$  elementos), se reduce en  $1/6$  del tiempo original.

Los resultados que se presentaron en esta tesis, muestran la facilidad del VPM para simular la respuesta sísmica a gran escala de valles aluviales someros. De esta manera, se espera que el VPM pueda ayudar a explicar y cuantificar la producción de ondas superficiales en depósitos de suelo blando y así contribuir a la reducción de daños en zonas habitadas durante la ocurrencia de sismos. Este método se encuentra actualmente en desarrollo y descubrir sus ventajas y limitaciones es materia de un escrutinio constante.

---

## RECONOCIMIENTOS

---

Agradezco muy especialmente a mí amigo y director de esta tesis el Dr. Francisco José Sánchez Sesma por su interés y estímulo constante durante la elaboración de este trabajo.

Por la lectura crítica de este manuscrito y sus sugerencias, doy gracias a: M. en I. Luis Eduardo Pérez Rocha, Dr. Cinna Lomintz Aronsfau, Dr. Shri Krishna Singh, Dr. Carlos Valdés González y al Dr. Javier Pacheco. Así también al M.C. José Luis Rodríguez Zúñiga, que con sus trabajos y aportaciones participó en el desarrollo y comprensión de muchos de los conceptos aquí presentados.

Parte de los cálculos fueron hechos en la CRAY-YMP de la UNAM, México. Este trabajo estuvo auspiciado por la D.G.A.P.A. UNAM.; México, proy. (IN-108295), la Japanese Society for the Promotion of Science, CONACYT; México, Secretaría General de Obras del DDF; México, y por Cray Research Inc., bajo licencia (SC-100894).

---

## REFERENCIAS

---

Alford, R.M., Kelly, K.R., y D.M. Boore, 1974. Accuracy of finite difference modeling of acoustic wave equations: *Geophysics*, Vol. 39, pp. 834-841.

Aki, K., y P.G. Richards, 1980. Quantitative seismology: *W.H. Freeman*, San Francisco.

Aki, K., 1988. Local site effects on strong ground motion: *Am. Soc. Civil Engr. Geotechnical Special Publication*, No. 20, pp. 103-155.

Avila-Carrera, R., Suárez, M., y F.J. Sánchez-Sesma, 1993. Simulación de la propagación de ondas sísmicas en configuraciones irregulares con un método pseudo-espectral: *X Cong. Nal. Ing. Sis.*, Puerto Vallarta, Jal., México, pp. 182-189.

Briham, E.O., 1974. The Fast Fourier Transform: *Prentice Hall Inc.*, Englewood Cliffs, New Jersey.

Elzgoldt, L., 1969. Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional: *Edit. Mir*, Moscú.

Faccioli, E., Maggio, F., Quarteroni, A. y A. Tagliani, 1996. Spectral domain decomposition methods for the solution of acoustic and elastic wave equations: *in press*.

FJBS/CIS-93/05. Ondas superficiales en México con fines de ingeniería sísmica. Informe final a la Secretaría de Obras del Departamento del Distrito Federal.

Fornberg, B., 1975. On a Fourier method for the integration of hyperbolic equations: *SIAM. J. Num. Anal.*, Vol. 12, pp. 509-528.

Frankel, A., 1993. Three-dimensional simulation of seismic waves in the Santa Clara valley, California, from a Loma Prieta aftershock: *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 83, pp. 1020-1041.

Garvin, W.W., 1956. Exact transient solution of the buried line source problem: *Proc. R. Soc. London Ser. A*. Vol. 234, pp. 528-541.

Geller, R.J., Hara, T. y S. Tsuboi, 1990. On the equivalence of two methods for computing partial derivatives of seismic waveforms: *Geophys. J. Int.*, Vol. 100, pp. 153-156.

Geller, R.J. y T. Ohminato, 1994. Computation of synthetic seismograms and their partial derivatives for a heterogeneous media with arbitrary natural boundary conditions using the Direct Solution Method: *Geophys. J. Int.*, Vol. 116, pp. 421-446.

Geller, R.J. y T. Hatori, 1995. DSM synthetic seismograms using analytical trial functions: plane-layered, isotropic, case. *Geophys. J. Int.*, Vol. 120, pp. 163-172.

Graves, y R. Clayton, 1992. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations: *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 67, pp. 1529-1549.

Horike, C., 1990. A finite element method for Solving Helmholtz type equations in wave guides and other unbounded domains: *Math. Comput.*, Vol. 39, pp. 309-324.

Kawase, H. y K. Aki, 1989. A study on the response of a soft basin for incident S, P and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City: *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol 79, pp. 1361-1382.

Kosloff, D. y E. Baysal, 1982. Forward modeling by a Fourier method: *Geophys Res.*, Vol. 47, pp. 1402-1412.

Kreiss, H.O. y J. Olinger, 1972. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations: *Tellus*, Vol. 24, pp. 199-215.

Luco, J.E., Wong, H.I. y F.C.P. De Barros, 1990. Three-dimensional response of a cylindrical canyon in a layered half-space: *Earthq. Engrg. Struct. Dyn.*, Vol. 19, pp. 799-817.

Martínez, B. y J. Bielak, 1980. On the three-dimensional seismic response of earth structures: *7th World Conf. on Earthq. Eng.*, Istanbul, Turkey. Vol. 8, pp. 523-530.

Newland, D.E., 1980. An introduction to random vibrations and spectral analysis: *Longman*, London.

Olsen, K.B., Archuleta, R.J. y J.R. Matarase, 1995. Three-dimensional simulation of a magnitude 7.75 earthquake on the san andreas fault: *Science*, Vol. 270, pp.1628-1632.

Pérez-Rocha, L.E., Sánchez-Sesma, F.J., y E. Reinoso, 1991. Three-dimensional site effects in Mexico city: evidences from accelerometric network observations and theoretical results. *4th Intl. Conf. on Seismic Zonation*, Stanford, California, August 25-29, Vol II., pp. 327-334.

Perrot, J., Sánchez-Sesma, F.J., Irikura, K., Rodríguez-Zúniga, J.L y R. Avila-Carrera, 1995. Simulation of seismic response of Osaka basin durin the january, 17, 1995 Kobe earthquake using the Variational Projection Method: *AGU Fall meeting*, San Francisco.

Sánchez-Sesma, F.J., 1987. Site effects on strong ground motion: *Int. J. Earthquake Eng. Struct. Dynam.*, Vol.6, pp.124-132.

Sánchez-Sesma, F.J., Ramos, J. y M. Campillo, 1993. An indirect boundary element method applied to simulate the seismic response of alluvial valleys for incident P,S and Rayleigh waves: *Earthq. Engrg. and Structl. Dyn.*, Vol. 22, pp.279-295.

Sánchez-Sesma, F.J. y F. Luzón, 1995. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P, S and Rayleigh waves: *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 85, pp. 269-284.

Sánchez-Sesma, F.J., Irikura, K., Perrot, J., Rodríguez-Súñiga, J.L. y R. Avila-Carrera, 1996. The Variational Projection Method: A new technique to simulate the seismic response of shallow alluvial valleys: *Elsevier Science Ltd.*, 11WCEE, No. 946.

Singh, S.K., Quass, R., Ordáz, M., Mooser, F., Almora, D., Torres, M. y R. Vásquez, 1995. Is there truly a "hard rock" site in the Valley of Mexico?: *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 22, No. 4, pp. 481-484.