5
2 qim

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

¿ES V DISTINTO DE L? INDEPENDENCIA DEL AXIOMA DE CONSTRUCTIBILIDAD Y ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE LA NO-CONSTRUCTIBILIDAD DEL UNIVERSO CONJUNTISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

GABRIELA CAMPERO ARENA

ASESOR: JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO

1998

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

¿ Es V distinto de L ? Independencia del Axioma de Constructibilidad y algunas reflexiones sobre la no-constructibilidad del universo conjuntista.

realizado por Gabriela Campero Arena

con número de cuenta 9452527-6 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Alfredo Amor Montaño	
Propietario	Dr. Luis Miguel Villegas Silva	
Propietario	M. en C. Carlos Torres Alcaraz	
Suplente	M. en C. Sonia Favela Vara	
Suplente	Mat. Favio Ezequiel Miranda Perea	

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. César Guevara Bravo

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Porque respetar al otro es aceptar que
no se tiene posesión de la verdad
absoluta y que todo universo es relativo.

A Carolina, mi madre, por su presencia siempre cargada de alegría y entendimiento; porque su sonrisa tan presente es su comprensión constante.

A Eduardo, mi padre, por el buen corazón con el que enseña que la felicidad es lo importante; porque no he encontrado apoyo tan inagotable.

A Claudia, porque, además de ser hermana, es la más querida de las amigas; porque busca incansablemente maneras de entenderme.

A Natalia, porque, además de nunca olvidar las dos cosas en las que está basada nuestra amistad, cada día construye más coincidencias y todos los días la respuesta es sí.

A Javier, por ser el más grande de los amigos, por esa capacidad tan suya de mirar y entender, de escuchar y aconsejar.

A Katz, por su amor permanente a la amistad; por su manera tan invariable y entera de estar.

A Galo, por el sentido profundo y distinto que le da a la palabra amistad; por su estilo indescifrable, pero permanente de acompañar.

A Toño, el mulato, por su complicidad con la vida, por estar siempre aquí, aunque no esté; porque aparta vacas y fabrica pescaditos de oro.

Agradecimientos

Quiero agradecer a José Alfredo Amor por enseñarme con tanto ciudado y tanta paciencia las maravillas de la teoría de conjuntos y por tener siempre tiempo para escucharme.

Quiero darle las gracias a Javier Páez por resolver todos los problemas que tuve con la computadora, por ayudarme a grabar, dibujar y leer constantemente y por ser un apoyo permanente.

También quiero agradecer a Carlos Torres por ser el más cuidadoso corrector de esitlo y por sus clases excelentes.

Cabe mencionar la disponibilidad de Luis Miguel Villegas y la alegría de Sonia Fevela después de las prisas con las que tuvieron que revisar esta tesis.

Quiero darle las gracias muy especialmente a Favio por sus ánimos, su risa, y su amistad.

Gracias a todos aquellos con los que he logrado construir una amistad sin tiempo; a Pamela, Ale, Betty y Andrea por todos los sueños compartidos; a Benja, Larisa y Peque por los guateques y los panchos; a Elsa y Claus por las pláticas y las confianzas; a Bruno por su maravilloso sentido del humor; a Canek por los acompañamientos y los bailes.

Índice General

Introducción

Esta tesis recoge algunos resultados matemáticos y algunas reflexiones metamatemáticas acerca del Axioma de Constructibilidad. Este axioma afirma que todos los conjuntos son definibles de un modo muy específico.

El universo de la teoría de conjuntos es conocido como V. El universo de los conjuntos definibles o constructibles, dado por Gödel, es conocido como L. La pregunta que se desarrolla en esta tesis es: ¿V es distinto de L? Aunque el enunciado "V es igual a L" es indecidible en la teoría de los conjuntos y esto se demuestra en este trabajo, se prueban otros resultados matemáticos que apoyan la tesis metamatemática de que V es distinto de L.

Damos por hecho que el lector está familiarizado con la axiomatización de Zermelo-Fraenkel con Axioma de Elección (AE) de la teoría de los conjuntos y que conoce los conceptos básicos de esta teoría. También damos por sentado que el lector ha trabajado con el concepto de modelo y que conoce los resultados básicos de lógica matemática.

El primer capítulo resume algunos conceptos preliminares necesarios para el resto del trabajo, como son el de fórmula absoluta y el de consistencia relativa; además, se demuestran algunos teoremas de lógica.

En el segundo capítulo se describe el universo constructible L formado por los conjuntos definibles y se demuestran varias de sus propiedades.

En el tercer capítulo se demuestra la independencia del Axioma de Constructibilidad ($V = L$), es decir, se demuestra que este axioma es indecidible dentro de la axiomatización de Zermelo-Fraenkel con AE. Esto significa que no se puede ni demostrar ni refutar en dicha teoría.

En el cuarto capítulo se demuestra un teorema muy famoso para los matemáticos que se dedican a la teoría de los conjuntos: el Teorema de Scott. Este teorema afirma que la existencia de cardinales medibles implica la negación del Axioma de Constructibilidad. Los cardinales medibles son cardinales sumamente grandes. No se puede demostrar la existencia de cardinales medibles con la axiomatización de Zermelo-Fraenkel con AE, pues, si se pudiera, entonces el Axioma de Constructibilidad sería refutable cosa que, como ya dijimos, no se puede demostrar.

El quinto capítulo, utilizando los resultados anteriores, resume los razonamientos que algunos matemáticos presentan para argumentar en contra del Axioma de Constructibilidad, entre ellos, el de la existencia de cardinales medibles, el de las implicaciones contraintuitivas de dicho axioma y el de las reglas metodológicas intuitivas que apoyan su negación.

Capítulo 1

Preliminares

Existen varios sistemas axiomáticos para la teoría de conjuntos. El más común es el de Zermelo-Fraenkel (ZF) que se trabaja en un lenguaje de primer orden cuyas variables se refieren intencionalmente a conjuntos. En este sentido, los conjuntos se entienden como entidades completas. Sin embargo, hay colecciones que no son conjuntos, las llamadas clases propias. Un ejemplo de una clase propia es la colección V de todos los conjuntos (ver [Amor 1993]). Cuando no estemos seguros de si una colección es o no un conjunto, la llamaremos clase. Las clases propias se pueden identificar con fórmulas del lenguaje. Un ejemplo es la clase $V = \{x : \varphi(x)\}$ donde $\varphi(x) \rightleftharpoons x \approx x$. Pero si definimos colecciones que no son conjuntos, los axiomas de ZF no dicen cómo manejarlas, pues para ZF sólo existen los conjuntos. No obstante, muchas veces queremos decir algo acerca de estas clases propias. La manera en la que lo haremos es la siguiente. Introducimos la noción de "clase" como abreviatura de una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de ZF cuyos parámetros se refieren a conjuntos específicos. Es decir, entenderemos por una clase A a aquellos conjuntos que cumplan con la fórmula $\varphi(x)$ ($A = \{x : \varphi(x)\}$). Así, las clases son colecciones determinadas por fórmulas en el lenguaje de ZF y, por lo tanto, pueden tener propiedades análogas a las de los conjuntos. Si no olvidamos que una colección es una clase, podemos tratarla *como si fuera* conjunto. Por ejemplo, podemos escribir "$b \in A$" siendo A una clase, cuando lo que queremos decir es "$\varphi(b)$" con $A = \{x : \varphi(x)\}$. Del mismo modo, si tenemos presente que no sabemos si los individuos de los que hablamos son conjuntos, abusando de la notación utilizada para conjuntos, podemos describir con clases cualquier propiedad de los conjuntos (ver [Amor 1993]).

Observación 1.1 *Cuando estemos trabajando con clases, llamaremos funcional o relacional a las colecciones que se comportan como funciones o como relaciones, pero que están definidas sobre clases.*

1.1 Fórmulas absolutas

El llamado universo de los conjuntos bien fundados se define como la unión sobre todo α ordinal de V_α ($BF = \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha$), donde, por recursión sobre ordinales, $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ y, si γ es un ordinal límite, $V_\gamma = \bigcup_{\alpha\in\gamma} V_\alpha$. En la teoría de conjuntos (ZF) generalmente estamos pensando que las variables varían en los conjuntos bien-fundados (BF), ya que BF es modelo de ZF. Podríamos también interpretar las variables en cualquier clase M. Por ejemplo, si $M = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, el Axioma de Extensionalidad y el Axioma del Vacío según M, nos dirían que para M el vacío es el conjunto $\{\emptyset\}$; esto sucede porque $\{\emptyset\}$ es el conjunto que no tiene ningún elemento *de* M, es decir, M sólo conoce como elementos a $\{\emptyset\}$ y a $\{\{\emptyset\}\}$ y, como M no tiene como elemento suyo al $\emptyset$, entonces $\{\emptyset\}$ no tiene elementos visto dentro de M. Por lo tanto, $\{\emptyset\}$ es el vacío según M. Para formalizar este "según M" necesitamos introducir el concepto de relativización de una fórmula a una clase M y después podremos definir como fórmulas absolutas para M a aquéllas que sean verdaderas en el universo si y sólo si lo son en la clase M.

Definición 1.1 *Sea M una clase y φ una fórmula. Definimos φ^M, la relativización de φ a M, por inducción sobre φ como sigue:*

1. $(x = y)^M$ *es* $x = y$
2. $(x \in y)^M$ *es* $x \in y$
3. $(\varphi \wedge \psi)^M$ *es* $\varphi^M \wedge \psi^M$
4. $(\neg\varphi)^M$ *es* $\neg(\varphi^M)$
5. $(\exists x\varphi)^M$ *es* $\exists x(x \in M \wedge \varphi^M)$

Observación 1.2 *Sea M una clase.*

a) Dado φ un enunciado, el enunciado φ^M querrá decir que "φ es verdadero en M".

b) Dado un conjunto de enunciados S, si φ^M para toda $\varphi \in S$, entonces se dice que "S es verdadero en M" o que "M es modelo de S".

Definición 1.2 *Sean M, N clases tales que $M \subseteq N$ y φ una fórmula con n variables libres. Se dice que φ es absoluta para M, N si y sólo si $\forall x_1, ..., x_n \in M \ (\varphi^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^N(x_1, ..., x_n))$.*

Definición 1.3 *Sea M una clase y φ una fórmula con n variables libres. Se dice que φ es absoluta para M si y sólo si $\forall x_1, ..., x_n \in M \ (\varphi^M(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, ..., x_n))$.*

Observación 1.3 *Ser absoluta para M es ser absoluta para M, V. Como V denota el universo de todos los conjuntos, vemos que φ^V es equivlancete a φ.*

Observación 1.4 *Obsérvese que si φ es absoluta para M, absoluta para N y $M \subseteq N$, entonces φ es absoluta para M, N. Los resultados que siguen al respecto de este concepto los mostraremos para fórmulas absolutas para M, aunque también se aplican a fórmulas absolutas para M, N.*

Obviamente las fórmulas $x = y$ y $x \in y$ son absolutas.

Lema 1.1 *Sea M una clase. Si φ y ψ son absolutas para M, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ también son absolutas para M.*

Demostración.-
Supongamos que φ es absoluta para M, entonces $\varphi \leftrightarrow \varphi^M$.
Por lo tanto, $\neg\varphi \leftrightarrow \neg(\varphi^M) \leftrightarrow (\neg\varphi)^M$.
Supongamos que φ y ψ son absolutas para M, entonces $\varphi \leftrightarrow \varphi^M$ y $\psi \leftrightarrow \psi^M$.
Por lo tanto, $\varphi \wedge \psi \leftrightarrow \varphi^M \wedge \psi^M \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi)^M$. ■

Lema 1.2 *Sea M una clase transitiva y φ absoluta para M. Entonces $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ también es una fórmula absoluta para M.*

Demostración.-
Supongamos que las variables libres de φ están entre $z_1, ..., z_n$, entonces, dadas $y, z_1, ..., z_n \in M$ tenemos que:
$\exists x(x \in y \wedge \varphi) \leftrightarrow \exists x \in M(x \in y \wedge \varphi)$ pues $y \in M$ y M es transitiva.

$\exists x \in M(x \in y \wedge \varphi) \leftrightarrow \exists x \in M(x \in y \wedge \varphi^M)$ pues φ es absoluta por hipótesis.

$\exists x \in M(x \in y \wedge \varphi^M) \leftrightarrow [\exists x(x \in y \wedge \varphi)]^M$ pues $x \in y$ es absoluta.

Concluimos que $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ es absoluta para M. ■

Definición 1.4 *Las fórmulas Δ_0 se construyen recursivamente de la siguiente manera:*

1. *$x \in y$ y $x = y$ son Δ_0.*
2. *Si φ y ψ son Δ_0, entonces $\neg\varphi$ y $\varphi \wedge \psi$ son Δ_0.*
3. *Si φ es Δ_0, entonces $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$ es Δ_0.*

Corolario 1.1 *Si M es transitiva y φ es una fórmula Δ_0, entonces φ es absoluta para M.*

Demostración.-

Es trivial; es más las fórmulas Δ_0 fueron construidas específicamente para ser fórmulas absolutas para calses transitivas. ■

Definición 1.5 *Sea M una clase y sea $F(x_1, ..., x_n)$ una función bien definida, es decir, $F(x_1, ..., x_n)$ se define como la única y tal que $\phi(x_1, ..., x_n, y)$, bajo el supuesto de que para todos $x_1, ..., x_n$ existe una única y tal que $\phi(x_1, ..., x_n, y)$. Decimos que $F(x_1, ..., x_n)$ es absoluta para M si y sólo si*

$\forall x_1, ..., x_n, y \in M(\phi^M(x_1, ..., x_n, y) \leftrightarrow \phi(x_1, ..., x_n, y))$.

El siguiente lema nos dice cuáles nociones absolutas (fórmulas y funciones) son "cerradas" respecto a la composición.

Lema 1.3 *Si la fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, y las funciones $F(x_1, ..., x_n), G_i(y_1, ..., y_m)$ $(i = 1, ..., n)$ son absolutas para M, entonces la fórmula $\varphi(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$ y la función $F(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m))$ son también absolutas para M.*

Demostración.-

Sean $\phi_i(y_1, ..., y_m, z_i)$ las fórmulas que definen a cada $G_i(y_1, ..., y_m)$ y sean $y_1, ..., y_m \in M$, entonces $(\varphi(G_1(y_1, ..., y_m), ..., G_n(y_1, ..., y_m)))^M \leftrightarrow \varphi^M(G_1^M(y_1, ..., y_m), ..., G_n^M(y_1, ..., y_m))$.

Como $\phi_i(y_1, ..., y_m, z_i)$ y $\varphi(x_1, ..., x_n)$ son absolutas para M, tenemos que

$\varphi^M(G_1^M(y_1,...,y_m),...,G_n^M(y_1,...,y_m)) \leftrightarrow \varphi^M(G_1(y_1,...,y_m),...,G_n(y_1,...,y_m)) \leftrightarrow$ $\varphi(G_1(y_1,...,y_m),...,G_n(y_1,...,y_m))$. Por lo tanto, $\varphi(G_1(y_1,...,y_m),...,G_n(y_1,...,y_m))$ es absoluta para M.

Si $\psi(x_1,...,x_n,y)$ es la fórmula que define a $F(x_1,...,x_n)$, entonces se puede mostrar de manera análoga que $F(G_1(y_1,...,y_m),...,G_n(y_1,...,y_m))$ es absoluta para M. ∎

Definición 1.6 *Un relacional R es limitado por la izquierda en una clase A si y sólo si para todo $x \in A$, $\{y \in A : yRx\}$ es un conjunto.*

Definición 1.7 *Si R es un relacional limitado por la izquierda en A y $x \in A$, definimos el R-segmento inicial determinado por x en A como $pred(A,x,R) = \{y \in A : yRx\}$.*

Definición 1.8 *Un relacional R es bien fundado en una clase A si y sólo si en todo subconjunto no-vacío de la case A hay un elemento R-minimal, es decir,*
$\forall X \subset A[X \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in X(\neg \exists z \in X(zRy))$.

Lema 1.4 *Sea R un relacional limitado por la izquierda y bien fundado en A y $F : A \times V \rightarrow V$ un funcional. Sea $G : A \rightarrow V$ definida de tal manera que*
$\forall x \in A[G(x) = F(x, G \restriction pred(A,x,R))]$.
Sea M un modelo transitivo de ZF. Si F es absoluta para M, R y A son absolutas para M, (R es limitado por la izquierda en $A)^M$ y $\forall x \in M$ ($pred(A,x,R) \subset M$), entonces G es absoluta para M.

Demostración.-

Se puede revisar la demostración en [Kunen 1980] p.129. ∎

Teorema 1.1 *Las siguientes fórmulas de relaciones y funciones son absolutas para cualquier M transitivo que sea modelo de ZF.*

(1) $x \in y$	*(11)* $s(x)$	*(21)* $R[x]$	*(31)* x *es finito*
(2) $x = y$	*(12)* x *es transitivo*	*(22)* R *es una función* 1 *a* 1	*(32)*R *bien-ordena a* A
(3) $x \subseteq y$	*(13)* $\cup x$	*(23)* α *es un ordinal*	*(33)* $\alpha + 1$
(4) $\{x, y\}$	*(14)* $\cap x$ $(x \neq \emptyset)$	*(24)* γ *es un ordinal límite*	*(34)* $\alpha + \beta$
(5) $\{x\}$	*(15)* z *es un par ordenado*	*(25)* α *es un ordinal susesor*	*(35)* $\alpha \cdot \beta$
(6) $\langle x, y\rangle$	*(16)* $A \times B$	*(26)* α *es un ordinal finito*	*(36)* α^β
(7) $\emptyset$	*(17)* R *es una relación*	*(27)* ω	*(37)* $\rho(x)$ *(rango de* x*)*
(8) $x \cup y$	*(18)* $dom(R)$	*(28)* 0	*(38)* *cerradura transitiva* (x)
(9) $x \cap y$	*(19)* $ran(R)$	*(29)* 1	
(10) $x \setminus y$	*(20)* R *es una función*	*(30)* 2	

Demostración.-

Demostraremos sólo algunos incisos representativos. El resto pueden revisarse en [Kunen 1980] pp. 119-30.

(3) Sabemos que $x \subseteq y$ es una abreviatura de $\forall z(z \in x \to z \in y)$, la cual es lógicamente equivalente a $\neg\exists z(z \in x \wedge \neg(z \in y))$, que es una fórmula Δ_0. Por el corolario anterior, $x \subseteq y$ es absoluta.

(7) Sabemos que $z = \emptyset \leftrightarrow [\forall w \in z(w \neq w)] \leftrightarrow \neg\exists w \in z(w = w)$. Por lo tanto, $z = \emptyset$ es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0 y, en consecuencia, es absoluta.

(12) Sabemos que x es transitivo si y sólo si $\forall v \in x \forall z \in v(z \in x)$. Pero $\forall v \in x \forall z \in v(z \in x)$ es lógicamente equivalente a la fórmula $\neg\exists v \in x(\exists z \in v(z \notin x))$, que es una fórmula Δ_0. De modo que ser transitivo es una propiedad absoluta.

(15) z es un par ordenado $\leftrightarrow [\exists x \in \cup z\ \exists y \in \cup z\ (z = \langle x, y\rangle)]$. Por lo tanto,
z es un par ordenado $\leftrightarrow \phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$, donde $G_1(z) = G_2(z) = \cup z$, $G_3(z) = z$, y $\phi(a, b, c) \rightleftharpoons \exists x \in a \exists y \in b(c = \langle x, y\rangle)$.

Como $G_1(z)$ y $G_2(z)$ son absolutas por (13) y $\phi(a, b, c)$ es absoluta pues se obtiene de una cuantificación acotada de una función que, por (6), es absoluta, resulta, por el Lema 4, que $\phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$ es absoluta y, por lo tanto, que ser par ordenado es absoluto.

(23) α es ordinal si α es transitivo y α es un orden total con la pertenencia. Sabemos que ser transitivo es absoluto y "α está totalmente ordenado por $\in$" se expresa cuantificando sobre α:

$\forall y \in \alpha \forall z \in \alpha(y \in z \vee y = z \vee z \in y) \wedge \forall v \in \alpha(v \notin v) \wedge$

$\forall y \in \alpha \forall z \in \alpha \forall v \in \alpha[(y \in z \wedge z \in v) \to y \in v]$.

Como los cuantificadores están acotados por α, es una fórmula Δ_0.

(24) γ es un ordinal límite si γ es un ordinal y $\forall y \in \gamma \exists z \in \gamma(y \in z)$ y $\gamma \neq \emptyset$, cosa que se puede expresar mediante una fórmula Δ_0.

(27) $x = \omega$ si y sólo si x es un ordinal límite y $\forall y \in x$(y no es un ordinal límite), cosa que se puede expresar mediante una fórmula Δ_0.

(32) Sea M modelo transitivo de ZF. Sean $A, R \in M$.

Queremos demostrar que (R bien-ordena a A) $\leftrightarrow$ (R bien-ordena a $A)^M$

$\to$) Sabemos que "R ordena-totalmente a A" es absoluta, pues sólo comprende propiedades que ya demostramos que son absolutas. Por lo tanto, sólo falta demostrar que

$\forall X\phi(X, A, R) \to (\forall X\phi(X, A, R))^M$,

donde $\phi(X, A, R) \rightleftharpoons X \subseteq A \wedge X \neq \emptyset \to \exists y \in X \forall z \in X(\langle z, y\rangle \notin R)$. Como $\phi(X, A, R)$ también está expresada por propiedades que el teorema anterior demuestra que son absolutas, tenemos $\phi^M(X, A, R)$. Por lo tanto, es suficiente con mostrar que $\forall X \in M\phi(X, A, R)$, lo cual se sigue del hecho de que R bien-ordena a A.

$\leftarrow$) Es un teorema en ZF que todo buen orden es isomorfo a un único ordinal, por lo tanto, si (R bien-ordena a $A)^M$, existen $f, \alpha \in M$ tales que (α es un ordinal y f es un isomorfismo de $\langle A, R\rangle$ en $\langle \alpha, \in\rangle)^M$. Pero esta fórmula es absoluta para M, así que α es realmente un ordinal y f un isomorfismo. de donde se sigue que R bien-ordena a A.

(36) Se define α^β por recursión sobre β como sigue:

$\alpha^0 = 1$

$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$

$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi : \xi < \beta\}$, si β es ordinal límite.

Una versión del Teorema de Recursión para ordinales es que dado un conjunto a y dados G, H funcionales, podemos definir un único funcional F tal que:

a) $F(0) = a$

b) $\forall \alpha \in OR \;\; F(s(\alpha)) = G(F(\alpha))$

c) $\forall \gamma$ límite $F(\gamma) = H(F \restriction_\gamma)$

Luego si a es 1, G es el producto de ordinales de α por la izquierda y H es el funcional unión, tenemos que:

a) $F(0) = 1 = \alpha^0$

b) $F(s(\beta)) = G(F(\beta)) = \alpha \cdot \alpha^\beta$

c) Si γ es límite, $F(\gamma) = H(F\restriction_\gamma) = H(\{\alpha^\beta : \beta < \gamma\}) = \cup\{\alpha^\beta : \beta < \gamma\}$

Por el Lema 6, sabemos que si utilizamos nociones absolutas para M en la recursión, el funcional resultante es absoluto para M. Además, como ser ordinal, 1, el producto ordinal y la unión de un conjunto son absolutas, entonces la exponenciación ordinal también es absoluta para M. ■

1.2 Consistencia Relativa

Intuitivamente, ZF es una teoría consistente, porque todos sus axiomas son verdaderos en BF (la clase de los conjuntos bien-fundados), es decir, porque BF es modelo de ZF. Sin embargo, el argumento anterior no es lo suficientemente riguroso, ya que se basa en la supuesta existencia del objeto BF. Por otra parte, sabemos, con base en el segundo teorema de incompletud de Gödel, que cualquier teoría que incluya a la aritmética recursiva es incapaz de demostrar su propia consistencia. También sabemos que en ZF podemos definir a los números naturales, derivar sus axiomas y todos los resultados de la aritmética recursiva y, por lo tanto, que no se puede demostrar la consistencia de ZF a través de un argumento formalizable dentro de ZF. En consecuencia, los resultados de consistencia serán resultados de consistencia relativa, porque supondremos la consistencia de ZF para demostrar, por ejemplo, la consistencia de $ZF + AE$ (la teoría formada por los axiomas de ZF más el Axioma de Elección). En otras palabras, los resultados de consistencia estarán sujetos a la hipótesis de que ZF es consistente o, si se quiere, desde un punto de vista filosófico la consistencia de ZF tendrá que entenderse como una pregunta abierta o como un acto de fe.

Para justificar el método que utilizaremos para demostrar algunas consistencias relativas, demostramos el siguiente lema y después el teorema al que llamamos Metateorema de Consistencias Relativas.

Lema 1.5 *Sean M una clase, Γ un conjunto de enunciados en $\mathcal{L}_\in$, $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon\rangle$ un modelo de Γ, $B = \{a \in A : \mathcal{A} \models (x \in M)[a]\} \subseteq A$ y $\mathcal{B} = \langle B, \varepsilon\restriction_B\rangle$. Para cualquier fórmula de $\mathcal{L}_\in$ y cualquier asignación a las variables $s : \omega \to B$ se cumple que $\mathcal{A} \models \phi^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \phi[s]$.*

Demostración.- (por inducción sobre la formación de fórmulas).

Si $\phi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula atómica, entonces

(a) $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons x_i \approx x_j$

$\mathcal{A} \models (x_i \approx x_j)^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models x_i \approx x_j[s] \Leftrightarrow s(i) = s(j) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models (x_i \approx x_j)[s]$.

(b) $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons x_i \in x_j$.

$\mathcal{A} \models (x_i \in x_j)^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models x_i \in x_j[s] \Leftrightarrow s(i) \epsilon s(j) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models (x_i \in x_j)[s]$.

Ahora, supongamos que el lema es cierto para ψ y χ.

(a) Si $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons \neg\psi(x_1, ..., x_n)$, entonces

$\mathcal{A} \models (\neg\psi(x_1, ..., x_n))^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg(\psi^M)(x_1, ..., x_n)[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi^M(x_1, ..., x_n)[s]$

$\overset{H.I.}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \not\models \psi(x_1, ..., x_n)[s] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \neg\psi(x_1, ..., x_n)[s]$.

(b) Si $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons (\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n)$, entonces

$\mathcal{A} \models ((\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n))^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\psi^M(x_1, ..., x_n) \wedge \chi^M(x_1, ..., x_n))[s]$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \psi^M(x_1, ..., x_n)[s]$ y $\mathcal{A} \models \chi^M(x_1, ..., x_n)[s] \overset{H.I.}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \psi(x_1, ..., x_n)[s]$ y

$\mathcal{B} \models \chi(x_1, ..., x_n)[s] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models (\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n)[s]$.

(c) Si $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons \exists x_i \chi(x_1, ..., x_n)$, entonces

$\mathcal{A} \models (\exists x_i \chi(x_1, ..., x_n))^M[s] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \exists x_i \in M \chi^M(x_1, ..., x_n)[s]$

$\Leftrightarrow$ hay un $p \in A$ tal que $\mathcal{A} \models (x_i \in M)[s(i\ /\ p)]$ y $\mathcal{A} \models \chi^M(x_1, ..., x_n)[s(i\ /\ p)]$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi(x_1, ..., x_n)[s(i\ /q)]$ para algún $q \in B \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \exists x_i \chi(x_1, ..., x_n)[s]$. (* Por hipótesis de inducción y porque, por la construcción de B, tal q existe y es p (esdecir, $p = q$)).

Por lo tanto, el lema se cumple para cualquier fórmula. ■

Ahora podemos demostrar el siguiente metateorema.

Teorema 1.2 *Metateorema de Consistencias Relativas.*

Sean Γ y Σ conjuntos de enunciados en $\mathcal{L}_\epsilon$. Sea M una clase. Si

1. $\Gamma \vdash M \neq \emptyset$

2. $\Gamma \vdash \sigma^M$ *para todo* $\sigma \in \Sigma$.

   entonces $Con(\Gamma) \Rightarrow Con(\Sigma)$.

   Si además de 1. y 2.se cumple que $\Sigma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \vdash \varphi^M$.

Demostración.-

Supongamos que Γ es consistente.

Si $\mathcal{A} = \langle A, \varepsilon \rangle$ es un modelo de Γ, entonces $\mathcal{A} \models \exists x(x \in M)$ y $\mathcal{A} \models \sigma^M$ para toda $\sigma \in \Sigma$.

Sea $\mathcal{B} = \langle B, \varepsilon \restriction_B \rangle$ donde $B = \{a \in A : \mathcal{A} \models x \in M[a]\} \subseteq A$. B es no-vacío, porque $\mathcal{A} \models \exists x(x \in M)$ por hipótesis.

Dado $\sigma \in \Sigma$, tenemos que $\mathcal{A} \models \sigma^M$ y, por el lema anterior, tenemos que $\mathcal{B} \models \sigma$.

Así, $\mathcal{B}$ es modelo de Σ y, por lo tanto, Σ es consistente.

Si además, suponemos que $\Sigma \vdash \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$.

Si $\mathcal{A}$ es modelo de Γ, entonces $\mathcal{B}$ es modelo de Σ, por lo demostrado anteriormente. Por lo tanto $\mathcal{B} \models \varphi$ y, por el lema anterior, si $\mathcal{B} \models \varphi$, entonces $\mathcal{A} \models \varphi^M$, de donde $\Gamma \models \varphi^M$.

Por consiguiente tenemos que $\Gamma \vdash \varphi^M$. ∎

1.3 ¿Qué características tienen los modelos de los axiomas de ZF?

Lema 1.6 *Si M es una clase transitiva, entonces el Axioma de Extensionalidad es verdadero en M.*

Demostración.-

El Axioma de Extensionalidad es el siguiente:

$\forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$.

El Axioma de Extensionalidad relativizado a M es:

$\forall x, y \in M[\forall z \in M(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$

Veamos que $\forall x, y \in M[\forall z \in M(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$:

Sean $x, y \in M$. Supongamos que $\forall z \in M(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. Demostraremos que $x = y$.

Sea $z \in x$. Como $x \in M$ y M es transitivo, entonces $z \in M$ de donde se sigue, por hipótesis, que $z \in y$. Sea $z \in y$. Como $y \in M$ y M es transitivo, $z \in M$ de donde se sigue, por hipótesis, que $z \in x$.

Por lo tanto, $x = y$.

Por lo tanto, el Axioma de Extensionalidad es verdadero en M. ∎

Lema 1.7 *Si para cada fórmula $\varphi(x, z, w_1, ..., w_n)$ cuyas variables libres están entre $x, z, w_1, ..., w_n$, se cumple que $\forall z, w_1, ..., w_n \in M(\{x \in z : \varphi^M(x, z, w_1, ..., w_n)\} \in M)$, entonces el Axioma de Separación es verdadero en M.*

Demostración.-

Sea $\varphi(x, z, w_1, ..., w_n)$ en $\mathcal{L}_\in$ con todas sus variables libres entre $x, z, w_1, ..., w_n$. El Axioma de Separación relativizado a M es:

$\forall z, w_1, ..., w_n \in M \exists y \in M \forall x \in M(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \varphi^M(x, z, w_1, ..., w_n))$.

Dadas $z, w_1, ..., w_n \in M$, definimos $y = \{x \in z : \varphi^M(x, z, w_1, ..., w_n)\}$. Por hipótesis $y \in M$ y, como $x \in z$ implica que $x \in M$, tenemos que el Axioma de Separación es verdadero en M. ■

Lema 1.8 *Si M es una clase transitiva, entonces el Axioma de Potencia es verdadero en M si y sólo si $\forall x \in M\ \exists y \in M\ (\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq y)$.*

Demostración.-

El Axioma de Potencia relativizado a M es:

$\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M((z \subseteq x)^M \to z \in y)$

Como M es transitivo, tenemos que $z \subseteq x$ es absoluto para M y

$\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M((z \subseteq x)^M \to z \in y)$

$\leftrightarrow \forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M(z \subseteq x \to z \in y)$

$\leftrightarrow \forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M(z \in \mathcal{P}(x) \to z \in y)$

$\leftrightarrow \forall x \in M \exists y \in M \forall z(z \in M \wedge z \in \mathcal{P}(x) \to z \in y)$

$\leftrightarrow \forall x \in M \exists y \in M(\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq y)$. ■

Observación 1.5 *Como todas las relaciones y funciones ya vistas son absolutas para clases transitivas y, como, los axiomas anteriores son verdaderos para ellas, entonces todas las clases M, a partir de ahora, serán consideradas transitivas. Esto se debe a que las clases que nos interesan son las que son modelos de ZF.*

Lema 1.9 *Sea M una clase. Si M es un modelo del Axioma de Separación, entonces:*

1. *$\forall x, y \in M\ \exists z \in M\ (x \in z \wedge y \in z)$ implica que el Axioma del Par es verdadero en M.*

2. *Si $\forall x \in M\ \exists z \in M(\cup x \subseteq z)$ implica que el Axioma de Unión es verdadero en M.*

Demostración.-

1) Por hipótesis, dadas $x, y \in M$, existe $z \in M$ tal que $x \in z$ y $y \in z$; es decir, existe $z \in M$ tal que $\{x, y\} \subseteq z$. Sea $w = \{v \in z : v = x \vee v = y\}$. Como M es modelo del Axioma de

Separación, $w \in M$ y como el Axioma del Par relativizado a M es

$\forall x \in M \forall y \in M \exists w \in M \forall v \in M(v \in w \leftrightarrow v = x \vee v = y)$, se sigue que el Axioma del Par es verdadero en M.

2) Por hipótesis, dada $x \in M$, existe $z \in M$ tal que $\cup x \subseteq z$.

Si $y = \{v \in z : \exists w \in M(w \in x \wedge v \in w)\} = \{v \in z : v \in \cup x\}$, entonces, como M es modelo del Axioma de Separación, $y \in M$ y como el Axioma de Unión relativizado a M es

$\forall x \in M \exists y \in M \forall v \in M[v \in y \leftrightarrow \exists w \in M(w \in x \wedge v \in w)]$,

tenemos que el Axioma de la Unión es verdadero en M. ■

Lema 1.10 *Sea M un modelo del Axioma de Separación. Supongamos que para cada fórmula $\varphi(x, y, A, w_1, ..., w_n)$ y cada $A, w_1, ..., w_n \in M$ podemos mostrar que si*

$\forall x \in A \exists! y \in M \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n)$, entonces

$\exists Y \in M(\{y : \exists x \in A \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n)\} \subseteq Y)$.

En tal caso el Esquema de Reemplazo es verdadero en M.

Demostración.-

Supongamos que $\varphi(x, y, A, w_1, ..., w_n)$ y $A, w_1, ..., w_n \in M$ cumplen con la hipótesis, es decir, que si $\forall x \in A\ \exists! y \in M \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n)$,entonces

$\exists Y \in M(\{y : \exists x \in A \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n)\} \subseteq Y)$.

Sea $b = \{y \in Y : \exists x \in A \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n)\}$, como el Axioma de Separación es verdadero en M, $b \in M$. Dada $\varphi(x, y, A, w_1, ..., w_n)$ que se comporta como función en M, el Esquema de Reemplazo relativizado a M es:

$\forall A \in M \exists b \in M \forall y \in M[y \in b \leftrightarrow \exists x \in M(x \in A \wedge \varphi^M(x, y, A, w_1, ..., w_n))]$.

Por lo tanto, el Axioma del Reemplazo es verdadero en M. ■

Lema 1.11 *El Axioma de Buena Fundación ($\forall A[\exists x(x \in A) \rightarrow \exists m(m \in A \wedge \forall y(y \in m \rightarrow y \notin A))]$) es verdadero en cualquier clase transitiva $M \subseteq BF$, donde BF es la clase de los conjuntos bien fundados.*

Demostración.-

Esto se debe a que la interpretación para el predicado $\in$ de $\mathcal{L}_{ZF}$ es la relación estándar de pertenencia. ■

Lema 1.12 *Si $\omega \in M$, entonces el Axioma de Infinito es verdadero en M.*

Demostración.-

Sabemos que $\emptyset$ y $s(x)$ son absolutas para M (clase transitiva). Por tanto, el Axioma de Infinito relativizado a M es: $\exists x \in M(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(s(y) \in x))$. Luego si hacemos $x = \omega$, vemos que el Axioma de Infinito es verdadero en M. ■

1.4 Teoremas de Lógica.

1.4.1 Teorema del Isomorfismo.

El Teorema del Isomorfismo afirma que dos clases transitivas isomorfas son iguales. Para demostrar este teorema, necesitamos recordar la $\in$-inducción:
$\forall x[\forall z \in x\, \varphi(z) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \varphi(x)$.

Teorema 1.3 *Si M_1, M_2 son clases transitivas isomorfas ($\langle M_1, \in\rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M_2, \in\rangle$), entonces $\forall u \in M_1(\pi(u) = u)$.*

Demostración.-

Sean M_1, M_2 clases transitivas y sea π un isomorfismo, es decir, $\langle M_1, \in\rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M_2, \in\rangle$. Veremos que $\forall x \in M_1(\pi(x) = x)$ por $\in$-inducción.

Sea $x \in M_1$. Supongamos que $\forall z \in x(\pi(z) = z)$ y veamos que $\pi(x) = x$.

$\supseteq$) Sea $z \in x$. Por hipótesis de inducción, $z = \pi(z)$ y, como π es morfismo, $\pi(z) \in \pi(x)$. Por lo tanto, $z = \pi(z) \in \pi(x)$.

$\subseteq$) Sea $t \in \pi(x)$. Como $\pi(x) \in M_2$ y M_2 es transitiva, $t \in M_2$. Como π es suprayectiva, hay $z \in M_1$ tal que $t = \pi(z) \in \pi(x)$. Por lo tanto, como π es morfismo, $z \in x$ y, por hipótesis de inducción, $z = \pi(z)$. Concluimos que $z = \pi(z) = t \in x$.

Por lo tanto, $\pi(x) = x$, $\forall x \in M_1(\pi(x) = x)$ y $M_1 = M_2$. ■

1.4.2 Colapso de Mostowski.

Teorema 1.4 *Si R es un relacional bien fundado, limitado por la izquierda y extensional en una clase A, entonces existe una única clase transitiva M y un único isomorfismo π tales que*

$\langle A, R\rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M, \in\rangle$. *En particular, si A es una clase extensional con la pertenencia entonces es isomorfa a una única clase transitiva y, si $B \subseteq A$ y B transitivo, entonces $\forall x \in B(\pi(x) = x)$.*

Demostración.-

Recordemos la notación acordada para el R-segmento inicial determinado por x en A: $pred(A, x, R)$, es decir, $pred(A, x, R) = \{y \in A : yRx\}$. Sea G un relacional definido como sigue: $\langle u, v\rangle \in G \Leftrightarrow u$ es función $\wedge\ \exists x(dom(u) = pred(A, x, R) \wedge v = u[pred(A, x, R)])$.

Se puede ver que G es un funcional. Por el Teorema General de Recursión, existe un único funcional π tal que:

$dom(\pi) = cam(R)$

$\forall x \in A(\pi(x) = G(\pi \restriction_{pred(A,x,R)}))$

Sabemos que $cam(R) \subseteq A$ y si $x \in A - cam(R)$, entonces $pred(A, x, R) = \emptyset$ y $\pi \restriction_0 = \emptyset$, de modo que $\pi(x) = G(\emptyset) = \emptyset$ y $dom(\pi) = A$.

Por otro lado, $G(\pi \restriction_{pred(A,x,R)}) = \pi[pred(A, x, R)] = \{\pi(z) : z \in pred(A, x, R)\}$.

Sea $M = \pi[A] = \{\pi(x) : x \in A\}$. Veamos que M es transitiva.

Sea $w \in M$ y sea $y \in w$. Entonces $w = \pi(x)$ para alguna $x \in A$ y $w = \{\pi(z) : z \in pred(A, x, R)\}$. Como $y \in w$, entonces $y = \pi(z)$ para algún $z \in pred(A, x, R)$, es decir, zRx. Por lo tanto, $z \in cam(R) \subseteq A$, e $y \in M$.

Obviamente π es suprayectiva.

Veamos que π es inyectiva.

Supongamos que hay $x, y \in A$ tales que $x \neq y$ y $\pi(x) = \pi(y) = z$ y supongamos que z es el elemento de mínimo rango tal que $x \neq y$ y $\pi(x) = \pi(y) = z$. Como R es extensional, $pred(A, x, R) \neq pred(A, y, R)$ y, sin perder generalidad, hay $u \in A$ tal que $u \in pred(A, x, R) - pred(A, y, R)$, es decir, uRx y $\neg(uRy)$. Por lo tanto, tenemos que $\pi(u) \in \pi(x) = \pi(y) = z$ y que $\pi(u) = \pi(v)$ para alguna vRy. Como $\neg(uRy)$, entonces $u \neq v$. Por otro lado, ¡ $\rho(\pi(u)) < \rho(z)$! (z es el de rango mínimo, $\pi(u) = \pi(v)$ y $u \neq v$).

Por lo tanto, π es inyectiva.

Veamos que π es morfismo: $xRy \leftrightarrow \pi(x) \in \pi(y)$

$\rightarrow$) Si xRy, por definición de π, $\pi(x) \in \pi(y)$.

$\leftarrow$) Si $\pi(x) \in \pi(y)$, entonces $\pi(x) = \pi(u)$ para alguna u tal que uRy. Como π es inyectiva, $x = u$ y, por lo tanto, xRy.

Por lo tanto, π es morfismo.

Veamos que π y M son únicos.

Si π_1, M_1 y π_2, M_2 son tales que cumplen con el enunciado del teorema, entonces, $\langle A, R\rangle \overset{\pi_1}{\cong} \langle M_1, \in\rangle$ y $\langle A, R\rangle \overset{\pi_2}{\cong} \langle M_2, \in\rangle$. Luego $\langle M_1, \in\rangle \overset{\pi_2\circ\pi_1^{-1}}{\cong} \langle M_2, \in\rangle$ y, por el Teorema del Isomorfismo, $M_1 = M_2$. Por lo tanto, $\pi_2 \circ \pi_1^{-1} = id$.

Concluimos que $\pi_1 = \pi_2$ y $M_1 = M_2$.

Sea A una clase extensional con la pertenencia y sea $B \subseteq A$ un conjunto transitivo. Por lo anterior sabemos que existen una clase transitiva M y un isomorfismo π tales que $\langle A, R\rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M, \in\rangle$.

Veamos que $\forall x \in B(\pi(x) = x)$ por $\in$-inducción:

Sea $x \in B$. Supongamos que $\forall y \in x(\pi(y) = y)$. Mostremos que $\pi(x) = x$.

$\subseteq$) Sea $z \in \pi(x) = \pi[pred(A, x, \in)] = \{\pi(w) : w \in pred(A, x, \in)\} = \{\pi(w) : w \in A \wedge w \in x\}$, es decir, $z = \pi(w)$ para algún $w \in x$. Por hipótesis de inducción, $\pi(w) = w$, de donde se sigue que $z \in x$.

$\supseteq$) Sea $z \in x$. Sabemos que $\pi(x) = \{\pi(w) : w \in A \wedge w \in x\}$ y, por hipótesis de inducción, que $z = \pi(z)$, de donde se sigue que $z = \pi(z) \in \pi(x)$.

Por lo tanto, $\pi(x) = x$. ■

1.4.3 Teorema General de Reflexión.

Para demostrar este importante teorema necesitamos primero mostrar el criterio de Tarski-Vaught.

Entendemos por subfórmula de una fórmula a cualquier pedazo "conexo" o "continuo" de ella que sea fórmula. Por ejemplo, $P(x)$, $Q(x, y)$ y $(P(x) \wedge Q(x, y))$ son subfórmulas de $\exists x(P(x) \wedge Q(x, y))$, pero $\exists x(P(x))$ y $\exists x(Q(x, y))$ no lo son. Dada una lista finita de fórmulas es fácil obtener otra lista que contenga a la primera y a todas las subfórmula que pertenezca a ella (cerrada bajo subfórmulas).

Lema 1.13 *(Criterio de Tarski-Vaught). Si M, N son dos clases tales que $M \subseteq N$ y si $\varphi_1, ..., \varphi_n$ es una lista finita de fórmulas cerrada bajo subfórmulas, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ *son absolutas para* M, N.

2. Toda φ_i *(*$i = 1, ..., n$*) de la forma* $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_m)$ *cumple lo siguiente:*
$\forall y_1, ..., y_m \in M[\exists x \in N(\varphi_j^N(x, y_1, ..., y_m)) \rightarrow \exists x \in M(\varphi_j^N(x, y_1, ..., y_m))]$

Demostración.-

$1 \Rightarrow 2$) Sean $\varphi_i \rightleftharpoons \exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_m)$ e $\bar{y} = (y_1, ..., y_m) \in M^m$.
Supongamos que $\exists x \in N(\varphi_j^N(x, y_1, ..., y_m))$, es decir, supongamos que $(\exists x \varphi_j(x, \bar{y}))^N \rightleftharpoons \varphi_i^N$. Como φ_i es absoluta para M, N, se sigue que $\varphi_i^M \rightleftharpoons \exists x \in M(\varphi_j^M(x, \bar{y}))$ y, como φ_j es absoluta para M, N, concluimos que $\exists x \in M(\varphi_j^N(x, \bar{y}))$.
$2 \Rightarrow 1$) Veamos que para culaquier φ_i de la lista, φ_i es absoluta para M, N, por inducción sobre la formación de fórmulas.
Si φ_i es atómica, ya vimos que φ_i es absoluta para M, N. Supongamos que φ_j y φ_k son absolutas para M, N. En tal caso, si $\varphi_i \rightleftharpoons \neg\varphi_j$ o $\varphi_i \rightleftharpoons \varphi_j \wedge \varphi_k$, entonces φ_i es absoluta para M, N.
Por otra parte, si $\varphi_i \rightleftharpoons \exists x \varphi_j(x, \bar{y})$, fijemos $\bar{y} = (y_1, ..., y_m) \in M^m$, de donde tenemos las siguientes equivalencias:
$\varphi_i^M(\bar{y}) \Leftrightarrow \exists x \in M \varphi_j^M(x, \bar{y}) \overset{H.I.}{\Leftrightarrow} \exists x \in M \varphi_j^N(x, \bar{y}) \overset{\Rightarrow M \subseteq N \text{ y } \Leftarrow \text{por hipótesis}}{\Leftrightarrow} \exists x \in N \varphi_j^N(x, \bar{y})$. ■

El Teorema General de Reflexión muestra una propiedad relativa a la absolutez de una lista finita de fórmulas en una jerarquía acumulativa.

Teorema 1.5 *Teorema General de Reflexión. Sean* Z *una clase no-vacía y, para todo ordinal* α, Z_α *un conjunto. Si* Z *y* Z_α *son tales que:*

A) $\alpha < \beta \Rightarrow Z_\alpha \subseteq Z_\beta$

B) $lím(\gamma) \Rightarrow Z_\gamma = \bigcup_{\delta < \gamma} Z_\delta$

C) $Z = \bigcup_{\alpha \in OR} Z_\alpha$,

entonces, para cualquier lista finita de fórmulas $\varphi_1, ..., \varphi_n$, *se tiene que*
$\forall \alpha \exists \beta < \alpha(\varphi_1, ..., \varphi_n$ *son absolutas para* $Z_\beta, Z)$.

Demostración.-

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la lista es cerrada bajo subfórmulas. Para cada $i = 1, ..., n$, sea m_i el número de variables libres de la fórmula φ_i y sean $G_i : V^{m_i} \rightarrow OR$

y $F_i : OR \to OR$ los siguientes funcionales:

$$G_i(y_1, ..., y_{m_i}) = \begin{cases} mín\{\eta : \exists x \in Z_\eta(\varphi_j^Z(x, \bar{y}))\} & \text{si } \varphi_i \rightleftharpoons \exists x \varphi_j(x, \bar{y}) \text{ y } \exists x \in Z(\varphi_j^Z(x, \bar{y})) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\bar{y}$ denota $(y_1, ..., y_{m_i})$.

$F_i(\zeta) = \sup\{G_i(y_1, ..., y_n) : y_1, ..., y_n \in Z_\zeta\} = \sup G_i[Z_\zeta^{m_i}]$.

Obsérvese que para todo $\zeta \in OR$, Z_ζ es un conjunto, por lo que, por el Axioma de Reemplazo, $\{G_i(\bar{y}) : \bar{y} \in Z_\zeta\}$ es un conjunto de ordinales. Así, $F_i(\zeta)$ está bien definido para cada $\zeta \in OR$. Obsérvese también que:

• Si φ_i no es existencial, $F_i(\zeta) = 0$ para todo $\zeta \in OR$.

• La funcional F_i es monótona, pues si $\zeta < \zeta'$, entonces $\{G_i(\bar{y}) : \bar{y} \in Z_\zeta\} \subseteq \{G_i(\bar{y}) : \bar{y} \in Z_{\zeta'}\}$, por lo que $F_i(\zeta) = \sup\{G_i(\bar{y}) : \bar{y} \in Z_\zeta\} \leq \sup\{G_i(\bar{y}) : \bar{y} \in Z_{\zeta'}\} = F_i(\zeta')$.

• Si $lím(\gamma)$ y $\forall i \in \{1, ..., n\} \forall \zeta < \gamma(F_i(\zeta) < \gamma)$, entonces cualquier $\varphi_i \rightleftharpoons \exists x \varphi_j(x, \bar{y})$ cumple que: $\forall y_1, ..., y_{m_i} \in Z_\gamma[\exists x \in Z(\varphi_j^Z(x, \bar{y})) \to \exists x \in Z_\gamma(\varphi_j^Z(x, \bar{y}))]$. Veamos por qué:

Sean $\varphi_i \rightleftharpoons \exists x \varphi_j(x, \bar{y})$ e $y_1, ..., y_{m_i} \in Z_\gamma$ y supongamos que $\exists x \in Z(\varphi_j^Z(x, \bar{y}))$. Ental caso, $\exists x \in Z_{G_i(\bar{y})}(\varphi_j^Z(x, \bar{y}))$. Como $lím(\gamma)$ y $\bar{y} \in Z_\gamma$, entonces, por la hipótesis del inciso (B) de las hipótesis, $\exists \zeta < \gamma(\bar{y} \in Z_\zeta)$, de donde $G_i(\bar{y}) \leq F_i(\zeta) < \gamma$. Así, por la hipótesis del inciso (A), $Z_{G_i(\bar{y})} \subsetneq Z_\gamma$ y, por lo tanto, $\exists x \in Z_\gamma(\varphi_j^Z(x, \bar{y}))$.

Así, por el punto anterior, si $lím(\gamma)$ y $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\forall \zeta < \gamma(F_i(\zeta) < \gamma)$. Concluimos, con base en el Criterio de Tarski-Vaught, que $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son absolutas para Z_γ, Z.

Sólo falta ver que dado α, podemos encontrar $\beta > \alpha$ tal que

$lím(\beta)$ y $\forall i \in \{1, ..., n\}, \forall \zeta < \beta(F_i(\zeta) < \beta)$:

Por recursión sobre ω, definimos β_n, para cada $n \in \omega$, como sigue:

$\beta_0 = \alpha$

$\beta_{k+1} = máx\{\beta_k + 1, F_1(\beta_k), ..., F_n(\beta_k)\}$

y sea $\beta = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < ... < ...$, entonces β es un ordinal límite estrictamente mayor que α. Por otro lado, sea $\zeta < \beta$. Sabemos que $\zeta < \beta_n$ para algún $n \in \omega$ y, por la monotonía de F_i, $F_i(\zeta) \leq F_i(\beta_n) \leq \beta_{n+1} < \beta$. Así, $\forall \zeta < \beta, F_i(\zeta) < \beta$ y esto para cada $i \in \{1, ..., n\}$. ■

Capítulo 2

Los Conjuntos Definibles y el Universo L

En este capítulo definiremos un modelo de los axiomas de ZF que también lo sea del Axioma de Elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo. A este modelo lo llamaremos el universo construible o definible y lo denotaremos por L. La idea de los "conjuntos constructibles" es que sean los conjuntos que podamos definir con fórmulas del lenguaje de ZF, pero dentro de ZF. El conjunto de todos los subconjuntos "definibles" a partir de A (que denotaremos como $\mathcal{D}(A)$) será el conjunto de todos los subconjuntos de A que sean definibles en el lenguaje de ZF a partir de elementos de A como parámetros.

Si $\mathcal{L}_{ZF}^{n+1}$ denota el conjunto de fórmulas del lenguaje de ZF con $n+1$ variables libres, entonces $\mathcal{D}(A) = \{\{x \in A : \varphi^A(y_0, ..., y_{n-1}, x)\} \mid \varphi \in \mathcal{L}_{ZF}^{n+1}; y_0, ..., y_{n-1} \in A; n \in \omega\}$; sin embargo, aún no hemos formalizado con suficiente cuidado esta definición, ya que φ es una fórmula y no un conjunto y esta definición no está dada dentro de ZF. Para lograr esto, tendremos que definir $Df(A,n)$ como el conjunto de las relaciones n-arias en A que son definibles por una fórmula con n variables libres relativizada a A y definir a $\bigcup_{n\in\omega} Df(A,n)$ como el mínimo conjunto de relaciones en A tal que contiene relaciones básicas como $\{\langle x, y\rangle \in A\times A : x \in y\}$ y es cerrado bajo las operaciones de intersección, complementación y proyección. En este contexto, la operación de intersección dentro de la teoría será el equivalente al $\wedge$ del lenguaje, la de complementación será equivalente al $\neg$ y la proyección al $\exists$. En esta primera sección definiremos el concepto de "definibilidad" para poder establecer lo que significa "ser definible".

2.1 Definibilidad

Definición 2.1 *Sean $n \in \omega$ e $i, j < n$,*

1. $Proy(A, R, n) \underset{def}{=} \{s \in A^n : \exists t \in R(t \restriction_n = s)\}$
2. $Diag_{\in}(A, n, i, j) \underset{def}{=} \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$
3. $Diag_{=}(A, n, i, j) \underset{def}{=} \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$
4. *Definimos $Df'(k, A, n)$ (para toda n simultáneamente), por recursión sobre $k \in \omega$, como sigue:*

   (a) $Df'(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{ Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$

   (b) $Df'(k+1, A, n) = Df'(k, A, n) \cup \{A^n \backslash R : R \in Df'(k, A, n)\} \cup$
   $\{R \cap S : R, S \in Df'(k, A, n)\} \cup \{Proy(A, R, n) : R \in Df'(k, A, n+1)\}$
5. $Df(A, n) = \bigcup\{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$

Lema 2.1 *Si $R, S \in Df(A, n)$, entonces $A^n \backslash R \in Df(A, n)$ y $R \cap S \in Df(A, n)$. Si $R \in Df(A, n+1)$, entonces $\Pr oy(A, R, n) \in Df(A, n)$.*

Demostración.-

Sean $R, S \in Df(A, n)$. Existen $k_1, k_2 \in \omega$ tales que $R \in Df'(k_1, A, n)$ y $S \in Df'(k_2, A, n)$. Por definición, si $R \in Df'(k_1, A, n)$, entonces $A^n \backslash R \in Df'(k_1 + 1, A, n) \subseteq Df(A, n)$.
Por lo tanto, $A^n \backslash R \in Df(A, n)$.
Por definición, si $R \in Df'(k_1, A, n)$ y $S \in Df'(k_2, A, n)$, entonces $R, S \in Df'(k, A, n)$ donde $k = máx\{k_1, k_2\}$; luego, $R \cap S \in Df'(k+1, A, n) \subseteq Df(A, n)$ y $R \cap S \in Df(A, n)$.
Sea $R \in Df(A, n+1)$. Existe $k \in \omega$ tal que $R \in Df'(k, A, n+1)$ y,
por definición, $Proy(A, R, n) \in Df'(k+1, A, n) \subseteq Df(A, n)$.
Por lo tanto, $Proy(A, R, n) \in Df(A, n)$. ■

El siguiente teorema muestra que $Df(A, n)$ contiene toda relación en A que es "definible" por una fórmula relativizada a A.

Teorema 2.1 *Si $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$ es una fórmula cuyas variables libres están entre $x_0, ..., x_{n-1}$, entonces $\forall A[\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A,n)]$.*

Demostración.- (por inducción sobre la formación de fórmulas)

Si $\phi(x_0, ..., x_{n-1}) \rightleftharpoons x_i \in x_j$, entonces

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = \{s \in A^n : (x_i \in x_j)[s(0), ..., s(n-1)]\} =$

$\{s \in A^n : s(i) \in s(j)\} = Diag_\in(A, n, i, j) \in Df(A, n)$.

Si $\phi(x_0, ..., x_{n-1}) \rightleftharpoons x_i = x_j$, entonces

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = \{s \in A^n : (x_i = x_j)[s(0), ..., s(n-1)]\} =$

$\{s \in A^n : s(i) = s(j)\} = Diag_=(A, n, i, j) \in Df(A, n)$.

Supongamos que para $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$ y $\psi(x_0, ..., x_{n-1})$, el teorema se cumple. En tal caso,

$\{s \in A^n : (\phi \wedge \psi(s(0), ..., s(n-1)))^A\} =$

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1)) \wedge \psi^A(s(0), ..., s(n-1))\} =$

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \cap \{s \in A^n : \psi^A(s(0), ..., s(n-1))\}$.

Por hipótesis de inducción, sabemos que $\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A, n)$ y que $\{s \in A^n : \psi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A, n)$. Por el lema anterior, sabemos que la intersección de dos conjuntos de $Df(A, n)$ está en $Df(A, n)$, de modo que

$\{s \in A^n : (\phi \wedge \psi(s(0), ..., s(n-1)))^A\} \in Df(A, n)$.

Supongamos que el teorema se cumple para $\phi(x_0, ..., x_{n-1})$. En tal caso,

$A^n \setminus \{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = \{s \in A^n : \neg\phi^A(s(0), ..., s(n-1))\}$. Por hipótesis de inducción, $\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A, n)$ y, por el lema anterior,

$A^n \setminus \{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A, n)$.

Por lo tanto, $\{s \in A^n : \neg\phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} \in Df(A, n)$.

Supongamos que el teorema se cumple para $\psi(x_0, ..., x_{n-1})$ y sea $\phi(x_0, ..., x_{n-1}) \rightleftharpoons \exists y \psi(x_0, ..., x_{n-1})$. Sabemos que las variables libres de la fórmula ψ están contenidas en $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$. Tenemos dos casos:

caso (i) $y \neq x_i \; \forall i = 0, ..., n-1$,

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0), ..., s(n-1))\} = \{s \in A^n : \exists y \in A \psi^A(s(0), ..., s(n-1), y)\}$.

Sabemos por el lema anterior que $Proy(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))\}, n) \in Df(A, n)$ y, como $\{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))\} \in Df(A, n)$ por hipótesis de inducción, sólo falta mostrar que

$\{s \in A^n : \exists y \in A\psi^A(s(0), ..., s(n-1), y)\} = Proy(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))\}, n)$:

$\subseteq$) Sea $s \in \{s \in A^n : \exists y \in A\psi^A(s(0), ..., s(n-1), y)\}$. Existe $a \in A$ tal que $\psi^A(s(0), ..., s(n-1), a)$. Sea $t = s^\wedge a$ (donde $^\wedge$ es la operación de concatenación, es decir, $s^\wedge y = (s(0), ..., s(n-1), a)$). En tal caso, $t \in A^{n+1}$ y, por lo tanto, $s \in Proy(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))\}, n)$.

$\supseteq$) Sea $s \in Proy(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))\}, n)$. Existe $t \in A^{n+1}$ tal que $\psi^A(t(0), ..., t(n-1), t(n))$ y $t \restriction_n = s$. Si tomamos $y = t(n)$, tenemos que $s \in \{s \in A^n : \exists y \in A\psi^A(s(0), ..., s(n-1), y)\}$.

caso (ii) Si $y = x_j$ para algún $j = 0, ..., n-1$, entonces $\phi(x_0, ..., x_{n-1}) \rightleftharpoons \exists x_j\psi(x_0, ..., x_{n-1})$, es decir, x_j no figura libre en ϕ. Sean z una variable que no figura en ϕ, $\psi'(x_0, ..., x_{n-1}, z) \rightleftharpoons \psi(x_0, ..., x_{j-1}, z, x_{j+1}, ..., x_{n-1})$ y $\phi' \rightleftharpoons \exists z\psi'$. Tenemos que ϕ' y ϕ son lógicamente equivalentes y, por el caso (i), el lema se cumple para ϕ' y también para ϕ. ■

Observación 2.1 *El inverso de este teorema-esquema que, intuitivamente, equivaldría a decir "Todo elemento de $Df(A, n)$ se define por una fórmula", no se puede justificar rigurosamente en ZF. Esto se debe a que dada una enumeración $\varphi_0, \varphi_1, ...$ de todas las fórmulas del lenguaje de ZF con variables entre $x_0, ..., x_{n-1}$, esta frase se escribiría como sigue:*
$\forall A \forall y \in Df(A, n) \bigvee_{i \in \omega} [y = \{s \in A^n : \varphi_i(s(0), ..., s(n-1))\}]$ *y esta expresión no es una fórmula, pues no es una expresión finita.*

Definición 2.2 *Definimos $En(m, A, n)$, simultáneamente para cualquier n, por recursión sobre $m \in \omega$ como sigue:*

1. *Si $m = 2^i \cdot 3^j$ e $i, j < n$, entonces $En(m, A, n) = Diag_\in(A, n, i, j)$.*
2. *Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i, j < n$, entonces $En(m, A, n) = Diag_=(A, n, i, j)$.*
3. *Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$ y $j < n$, entonces $En(m, A, n) = A^n \setminus En(i, A, n)$.*
4. *Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$ y $j < n$, entonces $En(m, A, n) = En(i, A, n) \cap En(j, A, n)$.*
5. *Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces $En(m, A, n) = Proy(A, En(i, A, n+1), n)$.*
6. *Si m no se puede factorizar como en 1, 2, 3, 4, 5 entonces $En(m, A, n) = \emptyset$.*

Lema 2.2 *Para toda $n \in \omega$ y todo A, $Df(A,n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.*

Demostración.-

$\supseteq$) Por inducción sobre $m \in \omega$.

Si $m = 0$, entonces m no se puede factorizar; por lo tanto, $En(m, A, n) = \emptyset$ y $\emptyset \in Df(A,n)$, ya que $\emptyset = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\} = Diag_{\in}(A, n, i, j) \in Df(A,n)$.

Supongamos que el lema se cumple para k. Si $m = k+1$ y m es como en 6, entonces $En(m, A, n) = \emptyset \in Df(A,n)$. Si m se puede factorizar como en los otros casos, por la definición de $Df'(k, A, n)$ y porque $Df(A,n) = \{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$, tenemos que $Df(A,n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.

$\subseteq$) Si $R \in Df(A,n) = \{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $R \in Df'(k, A, n)$. Veamos, por inducción sobre $k \in \omega$, que $\forall n[Df'(k, A, n) \subseteq \{En(m, A, n) : m \in \omega\}]$.

Si $R \in Df'(0, A, n)$, entonces:

- Si $R = Diag_{\in}(A, n, i, j)$ para $i, j < n$, tenemos que $R = En(2^{\,i} \cdot 3^j, A, n)$.
- Si $R = Diag_{=}(A, n, i, j)$ para $i, j < n$, tenemos que $R = En(2^{\,i} \cdot 3^j \cdot 5, A, n)$.

Supongamos que $\forall n[Df'(k, A, n) \subseteq \{En(m, A, n) : m \in \omega\}]$ y veamos que $\forall n[Df'(k+1, A, n) \subseteq \{En(m, A, n) : m \in \omega\}]$ Sea $R \in Df'(k+1, A, n)$, entonces:

- Si $R \in Df'(k, A, n)$, por hipótesis de inducción, $R \in \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.
- Si $R = A^n \backslash S$ con $S \in Df'(k, A, n)$, entonces, por hipótesis de inducción, $S = En(i, A, m)$ para alguna $i \in \omega$. Por lo tanto, haciendo $m = 2^{\,i} \cdot 3^j \cdot 5^2$, tenemos que $En(m, A, n) = A^n \backslash En(i. A, n) = R$ y $R \in \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.
- Si $R = S \cap T$ con $S, T \in Df'(k, A, n)$, entonces, por hipótesis de inducción, $S = En(i, A. n)$ para alguna $i \in \omega$ y $T = En(j, A, n)$ para alguna $j \in \omega$. Por lo tanto, haciendo $m = 2^{\,i} \cdot 3^j \cdot 5^3$, tenemos que $En(m, A, n) = En(i, A, n) \cap En(j, A, n) = S \cap T = R$ y $R \in \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.
- Si $R = Proy(A, S, n)$ con $S \in Df'(k, A, n+1)$, como definimos la contención para toda n simultáneamente, por hipótesis de inducción, $S = En(i, A, n+1)$ para alguna $i \in \omega$. Por lo tanto, haciendo $m = 2^{\,i} \cdot 3^j \cdot 5^4$, tenemos que $En(m, A, n) = Proy(A, En(i, A, n+1), n) = Proy(A, S, n) = R$ y $R \in \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$. ■

Corolario 2.1 *Para toda $n \in \omega$ y todo A, $| Df(A,n) | \leq \aleph_0$.*

Demostración.-

Es inmediata del lema anterior. ■

Observación 2.2 *La definición de Df es un camino para formalizar la sintaxis lógica y la noción de satisfacción dentro de ZF. Por su parte, En es un "atajo" para escribir la numeración de Gödel también dentro de ZF.*

Lema 2.3 *Las funciones Df y En son absolutas para modelos transitivos de ZF.*

Demostración.-

Sea M un modelo transitivo de ZF. $Diag_{\in}(A, n, i, j)$, $Diag_{=}(A, n, i, j)$ son absolutos porque son descritos por fórmulas compuestas por una conjunción de relaciones absolutas. $Proy(A, R, n)$ es absoluto porque la fórmula que lo describe está compuesta por una conjunción de relaciones absolutas y por existenciales acotados por conjuntos que están en M. $Df'(k, A, n)$ está definido por recursión usando nociones absolutas. $Df(A, n)$ es la unión de conjuntos absolutos y, por eso, también es absoluto.

La función En es absoluta porque las anteriores lo son, porque las definiciones por recursión utilizando nociones absolutas son absolutas y porque la exponenciación ordinal también es absoluta. ■

2.2 Los Conjuntos Definibles

Como dijimos en la introducción de este capítulo, queremos encontrar una definición formal para los conjuntos que podamos describir con relaciones y operaciones conjuntistas que "parafrasean" o "simulan" una fórmula del lenguaje de ZF, pero dentro de ZF. Para esto, partiremos de un conjunto dado A y definiremos una operación $\mathcal{D}(A)$ que será como el conjunto potencia de A, pero sólo tomando los subconjuntos "definibles". $\mathcal{D}(A)$ será el conjunto de subconjuntos de A que son definibles a partir de un número finito de elementos de A mediante una fórmula relativizada a A.

Después, definiremos la clase propia L de los conjuntos definibles y veremos sus propiedades para, en el siguiente capítulo, demostrar, entre otras cosas, que L es modelo de ZF junto con el Axioma de Elección y la Hipótesis Generalizada del Continuo ($ZFE + HGC$).

Definición 2.3 *Sea A conjunto. Se define la operación $\mathcal{D}(A)$ como sigue:*
$\mathcal{D}(A) = \{X \subseteq A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)(X = \{x \in A : s^\wedge x \in R\})\}$

El siguiente teorema. en realidad un esquema de la metateoría, es la confirmación de que la definición de $\mathcal{D}$ es lo que queríamos.

Teorema 2.2 *Si $\phi(v_0, ..., v_{n-1}, x)$ es una fórmula cuyas variables libres son exactamente $v_0, ..., v_{n-1}, x$, entonces $\forall A \forall v_0, ..., v_{n-1} \in A[\{x \in A : \phi^A(v_0, ..., v_{n-1}, x)\} \in \mathcal{D}(A)]$.*

Demostración.-
Sea A un conjunto y sean $y_0, ..., y_{n-1} \in A$.
Sea $X = \{x \in A : \phi^A(y_0, ..., y_{n-1}, x)\}$. Sean $n+1 \in \omega$ fijo, $t = (y_0, ..., y_{n-1})$ y
$R = \{s \in A^{n+1} : \phi^A(s(0), ..., s(n-1), s(n))\}$. Por el teorema 2.1, tenemos que $R \in Df(A, n+1)$.
Veamos que $X = \{x \in A : t^\wedge x \in R\}$:
$\subseteq$) Si $z \in X$, entonces $z \in A$ y $\phi^A(y_0, ..., y_{n-1}, z)$. Sea $s \in A^{n+1}$ la sucesión
$s(0) = y_0, ..., s(n-1) = y_{n-1}$ y $s(n) = z$. Como $t = (y_0, ..., y_{n-1})$, entonces $s = t^\wedge z$ y sabemos que $\phi^A(y_0, ..., y_{n-1}, z)$, de modo que, $t^\wedge z \in R$.
Por lo tanto, $z \in \{x \in A : t^\wedge x \in R\}$.
$\supseteq$) Si $z \in \{x \in A : t^\wedge x \in R\}$, entonces $\phi^A(y_0, ..., y_{n-1}, z)$.
Por lo tanto, $z \in X$.
Así, $\exists n+1 \in \omega \exists t \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)(X = \{x \in A : t^\wedge x \in R\})$ y $X \subseteq A$, de modo que, por definición, $X \in \mathcal{D}(A)$. ■

Lema 2.4 *Para caulquier conjunto A:*

1. $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

2. *Si A es transitivo, entonces $A \subseteq \mathcal{D}(A)$.*

3. $\forall X \subseteq A\ (|X| < \aleph_0 \rightarrow X \in \mathcal{D}(A))$.

4. $(AE)\ |A| \geq \aleph_0 \rightarrow |\mathcal{D}(A)| = |A|$.

Demostración.-
1) Se sigue directamente de la definición de $\mathcal{D}(A)$.

2) Sea A transitivo. Dada la fórmula $x \in v$, tenemos, por el teorema anterior, que $\forall v \in A[\{x \in A : x \in v\} \in \mathcal{D}(A)]$. Como A es transitivo, $\{x \in A : x \in v\} = v$ pues si $x \in v$, entonces $x \in A$. Por lo tanto, $\forall v \in A[v \in \mathcal{D}(A)]$

Concluimos que $A \subseteq \mathcal{D}(A)$.

3) Recordemos que, por el lema 2.1, si $R, S \in Df(A, n+1)$, entonces $(A^{n+1} \backslash R) \in Df(A, n+1)$ y $R \cap S \in Df(A, n+1)$. Por lo tanto, $R \cup S = A^{n+1} \backslash ((A^{n+1} \backslash R) \cap (A^{n+1} \backslash S)) \in Df(A, n+1)$ y $\emptyset = R \cap (A^{n+1} \backslash R) \in Df(A, n+1)$.

Sea $X \subseteq A$ y $| X | = n \in \omega$. Demostremos, por inducción sobre $m \leq n$, que $E_n^m = \{t \in A^{n+1} : \exists i < m(t(n) = t(i))\} \in Df(A, n+1)$.

Supongamos que $E_n^m \in Df(A, n+1)$. Veamos que $E_n^{m+1} \in Df(A, n+1)$.

Es claro que $E_n^{m+1} = E_n^m \cup \{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\}$. Sabemos, por hipótesis de inducción, que $E_n^m \in Df(A, n+1)$ y, por la definición de $Diag_=(A, n, i, j)$, que $\{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\} = Diag_=(A, n+1, n, m) \in Df(A, n+1)$. Concluimos que $E_n^m \cup \{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\} \in Df(A, n+1)$ y $E_n^{m+1} \in Df(A, n+1)$.

Ahora, para cualquier $s \in A^n$, sea $ran(s) = \{x \in A : s^\wedge x \in E_n^n\}$. Tenemos, por la definción de $\mathcal{D}(A)$, que, como $E_n^n \in Df(A, n+1)$, $ran(s) \in \mathcal{D}(A)$.

Por lo tanto, si $X = \{a_0, ..., a_n\}$ y $s \in A^n$ tal que $s(i) = a_i$, entonces $X = \{x \in A : s^\wedge x \in E_n^n\}$ y $X \in \mathcal{D}(A)$.

4) (AE) Sea A un conjunto tal que $| A | \geq \aleph_0$. Suponiendo el Axioma de Elección, $| A^n | = | A | \ \forall n \in \omega$. Ya demostramos que $| Df(A, n+1) | \leq \aleph_0$ (corolario 2.1), por consiguiente, como

$| \mathcal{D}(A) | = | \{X \subseteq A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)(X = \{x \in A : s^\wedge x \in R\})\} |$, tenemos que $| \mathcal{D}(A) | \leq | \omega || A^n || Df(A, n+1) | \leq | \omega || A || \omega | = | A |$.

Por lo tanto, $| \mathcal{D}(A) | \leq | A |$. Además, sabemos por 3 que $\forall x \in A(\{x\} \in \mathcal{D}(A))$, de modo que $| \mathcal{D}(A) | \geq | A |$. Concluimos que $| \mathcal{D}(A) | = | A |$. ■

Observación 2.3 *Se puede pensar que el inciso (3) del lema es una consecuencia trivial del lema anterior pues si $X \subseteq A$ y $| X | = n$, entonces existe $f : n \rightarrow x$ biyección; como $X = \{f(0), ..., f(n-1)\}$, hacemos $\varphi(x_0, ..., x_{n-1}, x) \rightleftharpoons (x = x_0) \vee ... \vee (x = x_{n-1})$ y, por el lema anterior, $X = \{y \in A : \varphi^A(f(0), ..., f(n-1), y)\} \in \mathcal{D}(A)$. El problema de este argumento es que la función f que enumera a X está en el universo V, pero no tiene por qué estar en A.*

pues "ser finito" no es absoluto, es decir, puede ser que A no "sepa" que X es finito.

Observación 2.4 *Una consecuencia importante del inciso (3) del lema es que si A es finito, entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$ y, por lo tanto, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{D}(A)$. Además,*
$\mid \mathcal{D}(A) \mid = \mid \mathcal{P}(A) \mid = 2^{|A|} > \mid A \mid$.

Lema 2.5 *La operación $\mathcal{D}(A)$ es absoluta para los modelos transitivos de ZF.*

Demostración.-
La demostración es inmediata a partir de que $Df(A,n)$ es absoluta (lema 2.3). ■

Ahora ya podemos definir formalmente la jerarquía acumulativa de los conjuntos definibles o constructibles y, después, el universo definible o constructible.

Definición 2.4 *Por recursión transfinita, definimos L_α para $\alpha \in OR$, como sigue:*
$L_0 = \emptyset$
$L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$
$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$ *para γ límite*

Definición 2.5 *Sea $L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha$.*

Las siguientes proposiciones nos hablan de las propiedades de los estratos L_α y de L.

Proposición 2.1

1. $\forall \alpha \in OR(L_\alpha \subseteq V_\alpha)$.
2. $\forall n \in \omega(L_n = V_n)$ *y* $L_\omega = V_\omega$.
3. *Si α es infinito, entonces* $\mid L_\alpha \mid = \mid \mathcal{D}(L_\alpha) \mid = \mid L_{\alpha+1} \mid$.
4. $\forall \alpha \in OR$ L_α *es transitivo.*
5. $\forall \beta < \alpha$ $(L_\beta \subseteq L_\alpha)$.
6. $\forall \alpha \in OR$ $(L_\alpha \cap OR = \alpha)$.
7. *Si $\alpha < \beta$, entonces $L_\alpha \in L_\beta$.*

Demostración.-

1) Por inducción sobre $\alpha \in OR$.

Si $\alpha = 0$, entonces $L_0 = \emptyset = V_0$ Por lo tanto $L_0 \subseteq V_0$.

Si $\alpha = \beta + 1$ y suponemos que $L_\beta \subseteq V_\beta$, entonces $L_{\beta+1} = \mathcal{D}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \overset{H.I.}{\subseteq} \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$.

Si $\alpha = \gamma$, donde γ es un ordinal límite, y suponemos que $\forall\beta < \gamma(L_\beta \subseteq V_\beta)$, entonces $L_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta \overset{H.I.}{\subseteq} \bigcup_{\beta<\gamma} V_\beta = V_\gamma$.

Por lo tanto, $\forall\alpha \in OR(L_\alpha \subseteq V_\alpha)$.

2) Es corolario del inciso (3) del lema anterior, ya que todos los subconjuntos finitos son definibles. Así, si A es finito, $\mathcal{P}(A) = \mathcal{D}(A)$. Además, como $\forall n \in \omega(L_n = V_n)$, tenemos que $L_\omega = \bigcup_{n<\omega} L_n = \bigcup_{n<\omega} V_n = V_\omega$.

3) Es corolario del inciso (4) del lema anterior, ya que si α es infinito, entonces L_α es infinito y, por lo tanto, $| L_\alpha | = | \mathcal{D}(L_\alpha) | = | L_{\alpha+1} |$.

4) Por inducción sobre $\alpha \in OR$.

Si $\alpha = 0$, entonces $L_0 = \emptyset$ y $\emptyset$ es transitivo.

Supogamos que L_β es transitivo. Consideremos $L_{\beta+1} = \mathcal{D}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(L_\beta)$. Sea $x \in L_{\beta+1}$, es decir, $x \in \mathcal{D}(L_\beta)$ y, por la definición de $\mathcal{D}(L_\beta)$, $x \subseteq L_\beta$. Por otro lado, $L_\beta \subseteq \mathcal{D}(L_\beta)$ (lema 2.4, inciso (2)) de modo que $x \subseteq L_\beta \subseteq \mathcal{D}(L_\beta) = L_{\beta+1}$. Por lo tanto, $L_{\beta+1}$ es transitivo.

Si $\alpha = \gamma$, donde γ es un ordinal límite y L_β es transitivo para $\beta < \gamma$, entonces $L_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta$ es transitivo, ya que la unión de transitivos es transitiva.

Por lo tanto, para cualquier $\alpha \in OR$, L_α es transitivo.

5) Por inducción sobre $\alpha \in OR$.

Si $\alpha = 0$, la propiedad se cumple por vacuidad.

Supongamos que si $\beta < \alpha$, entonces $L_\beta \subseteq L_\alpha$. Sea $\beta < \alpha + 1$. Tenemos dos casos:

caso i) $\beta < \alpha$. En este caso $L_\beta \subseteq L_\alpha$, por hipótesis de inducción y, como L_α es transitivo, $L_\alpha \subseteq \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ Por lo tanto, $L_\beta \subseteq L_{\alpha+1}$.

caso ii) $\beta = \alpha$. En este caso $L_\beta = L_\alpha \subseteq \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.

Si $\alpha = \gamma$ y γ es ordinal límite, entonces, dado $\beta < \gamma$, $\beta + 1 < \gamma$. Por lo tanto, por hipótesis de inducción, $L_\beta \subseteq L_{\beta+1}$.

Concluimos que $L_\beta \subseteq L_{\beta+1} \subseteq \bigcup_{\xi<\gamma} L_\xi = L_\gamma$.

6) Por inducción sobre $\alpha \in OR$.

Si $\alpha = 0$, entonces $L_0 = \emptyset$ y $\emptyset \cap OR = \emptyset = \alpha$.

Si $\alpha = \beta + 1$, supongamos que $L_\beta \cap OR = \beta$. En tal caso, $\beta = L_\beta \cap OR \underset{\text{inciso (5)}}{\subseteq} L_{\beta+1} \cap OR$ y $L_{\beta+1} \cap OR \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \cap OR \underset{\text{inciso(1)}}{\subseteq} \mathcal{P}(V_\beta) \cap OR = V_{\beta+1} \cap OR = \beta + 1$

Por lo tanto, $\beta \subseteq L_{\beta+1} \cap OR$ y $L_{\beta+1} \cap OR \subseteq \beta + 1$. Como $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$, sólo falta ver que $\beta \in L_{\beta+1} \cap OR$:

Por hipótesis de inducción, tenemos que $\beta = L_\beta \cap OR$ y, como ser ordinal es absoluto para conjuntos transitivos, $L_\beta \cap OR = \{\delta \in L_\beta : \delta \in OR\} = \{\delta \in L_\beta : (\delta \in OR)^{L_\beta}\}$. Por el teorema 2.2, sabemos que $\{\delta \in L_\beta : (\delta \in OR)^{L_\beta}\} \in \mathcal{D}(L_\beta) = L_{\beta+1}$. Por lo tanto, $\beta \in L_{\beta+1}$.

Así, $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\} \subseteq L_{\beta+1} \cap OR$ y $L_{\beta+1} \cap OR \subseteq \beta + 1$, entonces $L_{\beta+1} \cap OR = \beta + 1$.

Si $\alpha = \gamma$, con γ límite, y suponemos que $\forall \beta < \gamma (L_\beta \cap OR = \beta)$, entonces

$L_\gamma \cap OR = (\bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta) \cap OR = \bigcup_{\beta<\gamma} (L_\beta \cap OR) = \bigcup_{\beta<\gamma} \beta = \gamma$.

Concluimos que $\forall \alpha \in OR(L_\alpha \cap OR = \alpha)$.

7) Primero veamos que $\forall \alpha \in OR(L_\alpha \in L_{\alpha+1})$:

$L_\alpha = \{x \in L_\alpha : (x = x)^{L_\alpha}\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$, por el teorema 2.2.

Ahora demostremos, por inducción sobre β, que si $\alpha < \beta$, entonces $L_\alpha \in L_\beta$.

Si $\beta = 0$, la propiedad se cumple por vacuidad.

Supongamos que si $\alpha < \beta$, entonces $L_\alpha \in L_\beta$. Sea $\alpha < \beta + 1$, de modo que $\alpha \leq \beta$.

caso i) Si $\alpha < \beta$, entonces, por hipótesis de inducción, $L_\alpha \in L_\beta \in L_{\beta+1}$ y, por el inciso (4), $L_\alpha \in L_{\beta+1}$.

caso ii) Si $\alpha = \beta$, entonces, $L_\alpha = L_\beta \in L_{\beta+1}$.

Si $\beta = \gamma$, con γ ordinal límite, entonces, dado $\alpha < \gamma$, sabemos que $\alpha < \alpha + 1 < \gamma$ y, por el inciso (5), que $L_\alpha \in L_{\alpha+1} \subseteq L_\gamma$.

Por lo tanto, $L_\alpha \in L_\gamma$. ■

Proposición 2.2 *1. $L \subseteq V$.*

2. L es clase transitiva.

3. $\forall \alpha \in OR(\alpha \in L)$, es decir, $OR \subseteq L$.

Demostración.-

1) Por el inciso (1) de la proposición anterior, sabemos que $\forall \alpha \in OR(L_\alpha \subseteq V_\alpha)$ y, por definición,

$L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha = V$.

2) Por el inciso (4) de la proposición anterior, sabemos que

$\forall \alpha \in OR(L_\alpha$ es transitivo) y también sabemos que la unión arbitraria de transitivos es transitiva, por lo que L es una clase transitiva.

3) Sea $\alpha \in OR$. Como, por el inciso (6) de la proposición anterior, $\alpha + 1 = L_{\alpha+1} \cap OR$, tenemos que $\alpha \in L_{\alpha+1}$, y $L_{\alpha+1} \subseteq L$ de modo que $\alpha \in L$.

Por lo tanto, $OR \subseteq L$. ■

Observación 2.5 *La proposición anterior nos muestra que L es una clase transitiva que contiene a todos los ordinales.*

Así como en el universo V de los conjuntos definimos el rango de un conjunto x como el primer ordinal α para el que $x \in V_{\alpha+1}$, en el universo L podemos definir el rango de un conjunto como el primer ordinal α para el que $x \in L_{\alpha+1}$. Es decir, el rango en L de un conjunto x es el primer ordinal α tal que todos los elementos de x están definidos (o construidos) en L_α.

Definición 2.6 *Si $x \in L$, el L-rango de x, denotado por $\rho_L(x)$, es el menor β tal que $x \in L_{\beta+1}$, es decir, $\rho_L(x) = \bigcap\{\beta \in OR : x \in L_{\beta+1}\}$.*

Proposición 2.3 *1.* $\forall \alpha \in OR\ (\rho_L(\alpha) = \alpha)$.

2. $\forall \alpha \in OR\ (L_\alpha = \{x \in L : \rho_L(x) < \alpha\})$.

Demostración.-

1) Sea $\alpha \in OR$. Sabemos que $\alpha \in \alpha + 1$ y, por el inciso (6) de la proposición 2.1, que $\alpha + 1 = L_{\alpha+1} \cap OR$, por lo que $\alpha \in L_{\alpha+1}$. También sabemos que $\alpha \notin L_\alpha$ (pues $\alpha \in L_\alpha \Rightarrow \alpha \in L_\alpha \cap OR = \alpha \ \Rightarrow \alpha \in \alpha$!) de modo que $\rho_L(\alpha) = \alpha$.

2) Sea $\alpha \in OR$. Mostremos que $L_\alpha = \{x \in L : \rho_L(x) < \alpha\}$.

$\subseteq$) Si $y \in L_\alpha$, entonces $y \in L$ y, por definición de L-rango, $\rho_L(y) < \alpha$. Por lo tanto, $y \in \{x \in L : \rho_L(x) < \alpha\}$.

$\supseteq$) Si $y \in L$ es tal que $\rho_L(y) < \alpha$, entonces $\rho_L(y) + 1 \leq \alpha$. Por el inciso (5) de la proposición 2.1, $L_{\rho_L(y)+1} \subseteq L_\alpha$ y, como $y \in L_{\rho_L(y)+1}$ por la definición de L-rango, tenemos que $y \in L_\alpha$. ■

Lema 2.6 (AE) $\forall \alpha \geq \omega\ (\ |L_\alpha| = |\alpha|\ )$.

Demostración.- Por inducción sobre $\alpha \geq \omega$.

Sabemos, por el inciso (4) del lema 2.4, que si $|A| \geq |\omega|$, entonces $|\mathcal{D}(A)| = |A|$.

Si $\alpha = \omega$, entonces $L_\omega = V_\omega$, por el inciso (2) de la proposición 2.1.

Por lo tanto, $|L_\omega| = |V_\omega| = |\bigcup_{n<\omega} V_n| = |\omega|$.

Supongamos que $|L_\alpha| = |\alpha|$. Como $|L_{\alpha+1}| = |\mathcal{D}(L_\alpha)|$, $|L_\alpha| = |\alpha|$ y $\alpha \geq \omega$, tenemos que $|\mathcal{D}(L_\alpha)| = |L_\alpha|$. Por consiguiente, $|L_{\alpha+1}| = |\mathcal{D}(L_\alpha)| = |L_\alpha| = |\alpha| = |\alpha + 1|$.

Sea γ un ordinal límite, $|L_\gamma| = |\bigcup_{\beta<\gamma} L_\beta| = |L_\omega \cup (\bigcup_{\omega\leq\beta<\gamma} L_\beta)| \leq \aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\gamma} |L_\beta|$

Como, por hipótesis de inducción, $|L_\beta| = |\beta|$ y como son tantos como $|\gamma|$ conjuntos cada uno con cardinal menor o igual que $|\gamma|$, por la fórmula de suma cardinal, tenemos que $\aleph_0 + \sum_{\omega\leq\beta<\gamma} |L_\beta| = \aleph_0 + |\gamma| \cdot \sup_{\omega\leq\beta<\gamma} |\beta| = |\gamma|$.

Concluimos que $|L_\gamma| \leq |\gamma|$.

Como $\gamma = L_\gamma \cap OR \subseteq L_\gamma$, por el inciso (6) de la proposición 2.1, tenemos que $|\gamma| \leq |L_\gamma|$.

Por lo tanto, $|L_\gamma| = |\gamma|$. ■

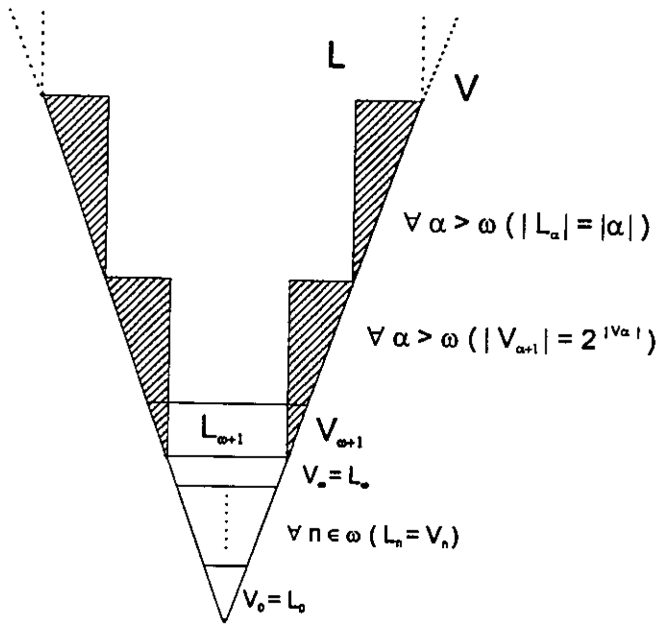
Corolario 2.2 *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$, entonces L_α es numerable.*

Demostración.-

$|L_\alpha| = |\alpha| = \aleph_0$. ■

Observación 2.6 *Si $\omega \leq \alpha < \omega_1$, entonces L_α es numerable, pero V_α es no numerable desde $\alpha = \omega + 1$, pues $|V_{\omega+1}| = |\mathcal{P}(V_\omega)| = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.*

La última observación podría entenderse como que $V \nsubseteq L$, pues para los ordinales α tales que $\omega < \alpha < \omega_1$ la cardinalidad de L_α es distinta a la cardinalidad de V_α. Es más, $|V_{\alpha+1}| = 2^{|V_\alpha|}$ y, en cambio, $|L_\alpha| = |\alpha| = \aleph_0$. Por lo tanto, existen conjuntos en V_α que no están en L_α. Esto último nos podría llevar a la conclusión de que $V \nsubseteq L$. Sin embargo, no sabemos si los conjuntos que faltan en cada uno de los estratos L_α están construidos (o definidos) en algún estrato L_δ más alto, por lo que todavía no podemos dar a una respuesta a la pregunta: "¿$V \subseteq L$?"



El universo V y el univero L

Capítulo 3

Independencia del Axioma de Constructibilidad

En el capítulo anterior, demostramos que $L \subsetneq V$. Falta saber si $V \subseteq L$. El Axioma de Constructibilidad justamente afirma que $V = L$, es decir, que todo conjunto es definible. Después de demostrar que L es modelo de ZF, la pregunta natural es si el Axioma de Constructibilidad es cierto. En este capítulo veremos que no podemos contestar esta pregunta dentro de ZF, suponiendo su consistencia.

Primero demostraremos que L es un modelo de ZF y que también es un modelo del Axioma de Constructibilidad. Este axioma afirma que $\forall x \exists \alpha \in OR(x \in L_\alpha)$. Para constatar que L es un modelo de ZF debemos mostrar que los axiomas de ZF son absolutos para L. La demostración de que L es un modelo de ZF y del Axioma de Constructibilidad se basa en el Metateorema de Consistencias Relativas visto en el primer capítulo. Lo que haremos será demostrar la siguiente implicación: $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V = L)$. De la misma manera veremos que L también es un modelo del Axioma de Elección (AE) y de la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC). En otras palabras, veremos que $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZFE + HGC)$. Esto es importante para entender la introducción del universo L por parte de Gödel, ya que su objetivo era construir un universo de conjuntos en el que estos dos enunciados fueran ciertos. Después demostraremos con el método de Forcing, debido a Cohen, que $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V \neq L)$ para concluir que el Axioma de Constructibilidad es independiente en ZF, es decir, que en ZF no se puede ni demostrar ni refutar este axioma.

3.1 Consistencia Relativa de $V = L$

Para demostrar que L es un "modelo" de ZF, tenemos que ver que todos los axiomas de ZF son verdaderos en L o, lo que es lo mismo, que los enunciados de los axiomas son absolutos para L. Escribimos un "modelo", porque L es una clase propia (contiene a los ordinales) y un modelo formalmente es un conjunto. De ahí la necesidad de la siguiente definición.

Definición 3.1 *M es un modelo interno de ZF si y sólo si M es una clase transitiva que cumple los axiomas de ZF.*

Teorema 3.1 *L es un modelo interno de ZF.*

Demostración.-

Para esta demostración utilizaremos los resultados obtenidos en el primer capítulo, sección 1.3.

i) Extensionalidad:

Sabemos que cualquier clase transitiva es un modelo del Axioma de Extensionalidad, por lo tanto, L es un modelo de este axioma.

ii) Regularidad o Buena Fundación:

Sabemos que cualquier clase subclase de los conjuntos bien-fundados cumple este axioma y que $L = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha$, por lo que L es una subclase de los conjuntos bien-fundados. Por lo tanto, el Axioma de Regularidad o Buena Fundación es verdadero en L.

Cabe señalar que el Axioma de Regularidad no lo utilizamos para demostrar que L es un modelo de él; este axioma asegura que $V = BF$ (donde $BF = \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha$) y este hecho no figura en dicha demostración. En realidad lo único que utilizamos fue que BF es un modelo de él.

iii) Infinito:

Sabemos que $\omega^L = \omega$, ya que L es una clase transitiva y también sabemos que $\omega \in L$, pues $OR \subseteq L$. Por lo tanto, el Axioma de Infinito es verdadero en L.

iv) Separación:

Basta probar que para cada $\phi(x, z, v_1, ..., v_n)$ cuyas variables libres sean $x, z, v_1, ..., v_n$, se cumple que $\forall z, v_1, ..., v_n \in L(\{x \in z : \phi^L(x, z, v_1, ..., v_n)\} \in L)$.

Sean $z, v_1, ..., v_n \in L$. En tal caso existe $\alpha \in OR$ tal que $z, v_1, ..., v_n \in L_\alpha$. Como L es una jerarquía acumulativa, podemos utilizar el Teorema de Reflexión (teorema 1.5 del primer capítulo), por lo cual existe $\beta > \alpha$ tal que $\phi^{L_\beta}(x, z, v_1, ..., v_n) \leftrightarrow \phi^L(x, z, v_1, ..., v_n)$. Por lo tanto, $\{x \in z : \phi^L(x, z, v_1, ..., v_n)\} = \{x \in z : \phi^{L_\beta}(x, z, v_1, ..., v_n)\}$. Si definimos
$\psi(x, z, v_1, ..., v_n) \leftrightharpoons x \in z \wedge \phi(x, z, v_1, ..., v_n)$, entonces
$\{x \in z : \phi^L(x, z, v_1, ..., v_n)\} = \{x \in z : \phi^{L_\beta}(x, z, v_1, ..., v_n)\} =$
$\{x \in L_\beta : \psi^{L_\beta}(x, z, v_1, ..., v_n)\} \in \mathcal{D}(L_\beta) = L_{\beta+1}$.
Concluimos que $\{x \in z : \phi^L(x, z, v_1, ..., v_n)\} \in L$.

v) Unión:

Si $x \in L$, entonces existe $\alpha \in OR$ tal que $x \in L_\alpha$. Como L_α es transitivo, $x \subseteq L_\alpha$. Así, $\cup x \subseteq \cup L_\alpha \subseteq L_\alpha$. De lo anterior se sigue que
$\cup x = \{ y : \exists z \ (z \in x \wedge y \in z)\} = \{y \in L_\alpha : [\exists z \ (z \in x \wedge y \in z)]^{L_\alpha}\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ y $\cup x \in L$.

vi) Par:

Sean $x, y \in L$. Sabemos que existe $\alpha \in OR$ tal que $x, y \in L_\alpha$. Por lo tanto,
$\{x, y\} = \{z : z = x \vee z = y\} = \{z \in L_\alpha : (z = x \vee z = y)^{L_\alpha}\} \in \mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$.
Conclusión: $\{x, y\} \in L$.

vii) Potencia:

Necesitamos probar que $\forall x \in L \exists w \in L \forall z \in L(z \in w \leftrightarrow (z \subseteq x)^L)$.
Sea $x \in L$ y $w = (\mathcal{P}(x))^L = \{y \in L : y \subseteq^L x\}$. Como la relación $\subseteq$ es absoluta para clases transitivas, tenemos que $w = \{y \in L : y \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap L$. Definimos, para cada $y \subseteq x$ tal que $y \in L$, β_y como el mínimo ordinal tal que $y \in L_{\beta_y}$. Sea $\alpha = máx \ \{\beta_y : y \in L_{\beta_y} \wedge y \subseteq x\}$. En tal caso, tenemos que $\forall y \in L(y \subseteq x \rightarrow y \in L_{\alpha+1})$. Así,
$w = (\mathcal{P}(x))^L = \{y \in L : y \subseteq x\} = \{y \in L_{\alpha+1} : y \subseteq x\} \in \mathcal{D}(L_{\alpha+1}) = L_{\alpha+2}$.
Por lo tanto, $w = (\mathcal{P}(x))^L \in L$ y dada $z \in L$ tenemos que
$z \in (\mathcal{P}(x))^L \Rightarrow z \subseteq x$ y $z \subseteq x \Rightarrow z \in \mathcal{P}(x) \cap L = (\mathcal{P}(x))^L$.

viii) Reemplazo:

Sean $\phi(x, y, A, v_1, ..., v_n)$ y $A, v_1, ..., v_n \in L$. Supongamos que $\phi(x, y, A, v_1, ..., v_n)$ se comporta como una función en L y, por lo tanto, en V, ya que "ser función" es absoluto para clases transitivas. En consecuencia, tenemos que $\forall x \in A \exists! y \in L[\phi^L(x, y, A, v_1, ..., v_n)]$.
Sea $z = \{w \in L : \exists x \in A \ \phi^L(x, w, A, v_1, ..., v_n)\}$. Para cada $w \in L$ tal que hay una $x \in A$ con

$\phi^L(x, w, A, v_1, ..., v_n)$, definimos β_w como el mínimo ordinal que cumpla que $w \in L_{\beta_w}$. Como $\phi^L(x, y, A, v_1, ..., v_n)$ se comporta como función en V,

entonces $\{w : \exists x \in A\ \phi^L(x, w, A, v_1, ..., v_n)\} \in V$, por el Axioma de Reemplazo. Por lo tanto, podemos definir $\alpha_0 = máx\ \{\beta_w : \exists x \in A\ \phi^L(x, w, A, v_1, ..., v_n) \wedge w \in L\}$. Por otro lado, sea β_A el ordinal tal que $A \in L_{\beta_A}$. Entonces, haciendo $\alpha = máx\ \{\alpha_0, \beta_A\}$, tenemos que $\forall w \in z(w \in L_{\alpha+1})$.

Por consiguiente, $z = \{w \in L : \exists x \in A\ \phi^L(x, w, A, v_1, ..., v_n)\} =$

$\{w \in L_{\alpha+1} : \exists x \in A\ \phi^{L_{\alpha+1}}(x, w, A, v_1, ..., v_n)\} \in \mathcal{D}(L_{\alpha+1}) = L_{\alpha+2}$ y $z \in L$.

Conclusión: L es modelo interno de ZF. ■

Observación 3.1 *Abusando del lenguaje, podemos abreviar el corolario anterior como sigue:* $ZF \vdash (ZF)^L \wedge \cup L \subsetneq L \wedge OR \subsetneq L$, *donde* $(ZF)^L$ *es una abreviatura de "L es un modelo de* ZF*".* $\cup L \subsetneq L$ *es una abreviatura de "L es transitivo" y* $OR \subsetneq L$ *lo es de "L contiene a la clase de los ordinales".*

Hemos visto que los individuos de L satisfacen los axiomas de ZF. Falta ver que, según L, el Axioma de Constructibilidad es cierto, es decir, que en L existen todos los conjuntos, según L.

Lema 3.1 *La funcional* $L_\alpha (= L(\alpha))$ *es absoluta para modelos transitivos de* ZF.

Demostración.-

Sea M un modelo transitivo de ZF. Tenemos que demostrar que $(L_\alpha)^M = L_\alpha$.

Por el lema 2.5 sabemos que la funcional $\mathcal{D}(A)$ es absoluta . La funcional L_α se definió por recursión transfinita a partir de $\mathcal{D}(A)$, por lo que L_α es absoluta.

Por lo tanto, $(L_\alpha)^M = L_\alpha$. ■

Teorema 3.2 *L es un modelo del Axioma de Constructibilidad.*

Demostración.-

Tenemos que mostrar que $(V = L)^L$, es decir, que

$[\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)]^L \rightleftharpoons \forall x \in L \exists \alpha \in L[(x \in L_\alpha)^L]$.

Sea $x \in L$ y sea α el mínimo ordinal tal que $x \in L_\alpha$. Sabemos que $OR \subsetneq L$, de modo que $\alpha \in L$

y, por el lema anterior, $(x \in L_\alpha)^L$.

Por lo tanto, $(V = L)^L$. ■

Corolario 3.1 *$Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V = L)$ y $Cons(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash V \neq L$.*

Demostración.-

Si recordamos el teorema 1.2 del capítulo 1, tomando a Γ como los axiomas de ZF, a Σ como los axiomas de ZF junto con el Axioma de Constructibilidad, a la clase M como el universo L, y sabiendo que $ZF \vdash L \neq \emptyset$ y que $ZF \vdash \sigma^L$ para todo $\sigma \in ZF + V = L$, tenemos que $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V = L)$. Esto es lógicamente equivalente a
$Cons(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash V \neq L$. ■

Este último corolario asegura que en ZF no se puede probar que $V \neq L$, es decir, no se puede refutar $V = L$; esto no quiere decir que $V = L$ sea un teorema, es más, nuestro siguiente objetivo es probar que en ZF tampoco se puede probar $V = L$. Se puede pensar que demostrar esto se logra construyendo algún otro modelo interno (semejante a L) en el que sea verdad que $V \neq L$, pero los siguientes resultados nos dicen que L es la menor clase propia posible que es transitiva y un modelo de ZF. La consecuencia de esto es que cualquier modelo interno de ZF contiene a L y, como se demostrará en el último teorema de esta sección, para cualquier modelo interno de ZF no es posible probar la negación del Axioma de Constructibilidad: $V = L$.

Lema 3.2 *Si M es una clase propia transitiva que es un modelo de ZF (modelo interno), entonces $OR \subseteq M$.*

Demostración.-

Sea $\alpha \in OR$. Como M es clase propia, $M \nsubseteq V_\alpha = \{x : \rho(x) < \alpha\}$, es decir, existe $x \in M$ tal que $\rho(x) \geq \alpha$. Por otro lado, la función $\rho(x)$ es absoluta para M y, además, $(\rho(x))^M \in M$, pues M es un modelo de ZF y es transitiva. Por lo tanto, $\alpha \leq \rho(x) = (\rho(x))^M \in M$ y, como M es transitiva, $\alpha \in M$. ■

Teorema 3.3 *Teorema de la Minimalidad de L.*

Si M es una clase propia transitiva que es un modelo de ZF (modelo interno), entonces $L \subseteq M$.

Demostración.-

Primero demostramos que $L = L^M$:

$L^M = \{x \in M : [\exists\alpha(x \in L_\alpha)]^M\}$. Pero, por el lema anterior, $OR \subseteq M$ y, por el lema 3.1, $(L_\alpha)^M = L_\alpha$, entonces, $L^M = \{x \in M : \exists\alpha(x \in L_\alpha)\}$.

Ahora, demostramos que $\{x \in M : \exists\alpha(x \in L_\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in OR} L_\alpha = L$.

$\subseteq$) Se ve claramente.

$\supseteq$) Si $\alpha \in M$, entonces, por el Axioma de Separación, $L_\alpha = L_\alpha^M \in M$ y $L_\alpha \subseteq M$. Como sabemos que $\forall\alpha \in OR(\alpha \in M)$, concluimos que $\forall\alpha \in OR(L_\alpha \subseteq M)$. ∎

Pronto veremos que no es posible probar la consistencia relativa de un enunciado falso en L, por el método de modelos internos, para lo cual es necesario realizar algún trabajo previo.

Lema 3.3 $L^L = L$.

Demostración.-

$\subseteq$) $L^L = \{x \in L : (x \in L)^L\} \subseteq L$

$\supseteq$) Como en ZF se prueba que $(V = L)^L$, tenemos que $(\forall x(x \in L))^L$, es decir, $\forall x((x \in L) \to (x \in L)^L)$, de donde $L \subseteq L^L$.

Por lo tanto, $L^L = L$. ∎

Lema 3.4 *Si M es una clase propia transitiva que es un modelo de ZF (modelo interno), entonces $M^L = L$.*

Demostración.-

$\subseteq$) $M^L = \{x \in L : (x \in M)^L\} \subseteq L$.

$\supseteq$) Como M es un modelo interno, por el teorema 3.3 de la Minimalidad de L, $L \subseteq M$, esto es, en ZF se prueba que $\forall x((x \in L) \to (x \in M))$. Como L es un modelo de ZF, entonces se prueba que $[\forall x((x \in L) \to (x \in M))]^L$, es decir, $\forall x[(x \in L) \to ((x \in L)^L \to (x \in M)^L)]$. Por el lema anterior, $L^L = L$, de donde tenemos que $\forall x[(x \in L) \to ((x \in L) \to (x \in M)^L)]$, que es tautológicamente equivalente a $\forall x[(x \in L) \to (x \in M)^L]$.

Por lo tanto, $L \subseteq M^L$ y $M^L = L$. ∎

Lema 3.5 *Para toda fórmula φ y cualesquiera clases M y N no vacías: $(\varphi^M)^N \leftrightarrow \varphi^{(M^N)}$.*

Demostración.-

Podemos ver que $M^N \subseteq N$, ya que $M^N = \{x \in N : (x \in M)^N\} \subseteq N$.

Veamos que $(\varphi^M)^N \leftrightarrow \varphi^{(M^N)}$ por inducción sobre la formación de fórmulas.

Si $\varphi \rightleftharpoons x_1 = x_2$, entonces

$(\varphi^M)^N \rightleftharpoons ((x_1 = x_2)^M)^N \leftrightarrow (x_1 = x_2)^N \leftrightarrow x_1 = x_2 \leftrightarrow (x_1 = x_2)^{M^N} \rightleftharpoons \varphi^{(M^N)}$.

Si $\varphi \rightleftharpoons x_1 \in x_2$, entonces

$(\varphi^M)^N \rightleftharpoons ((x_1 \in x_2)^M)^N \leftrightarrow (x_1 \in x_2)^N \leftrightarrow x_1 \in x_2 \leftrightarrow (x_1 \in x_2)^{M^N} \rightleftharpoons \varphi^{(M^N)}$.

Supongamos que $(\phi^M)^N \leftrightarrow \phi^{(M^N)}$ y que $(\chi^M)^N \leftrightarrow \chi^{(M^N)}$.

Si $\varphi \rightleftharpoons \neg\phi$, entonces

$(\varphi^M)^N \rightleftharpoons ((\neg\phi)^M)^N \leftrightarrow (\neg\phi^M)^N \leftrightarrow \neg(\phi^M)^N \underset{\text{H. I.}}{\leftrightarrow} \neg\phi^{(M^N)} \leftrightarrow (\neg\phi)^{(M^N)} \rightleftharpoons \varphi^{(M^N)}$.

Si $\varphi \rightleftharpoons \phi \wedge \chi$, entonces

$(\varphi^M)^N \rightleftharpoons ((\phi \wedge \chi)^M)^N \leftrightarrow (\phi^M \wedge \chi^M)^N \leftrightarrow (\phi^M)^N \wedge (\chi^M)^N \underset{\text{H. I.}}{\leftrightarrow} \phi^{(M^N)} \wedge \chi^{(M^N)}$
$\leftrightarrow (\phi \wedge \chi)^{(M^N)} \rightleftharpoons \varphi^{(M^N)}$.

Si $\varphi \rightleftharpoons \exists x\phi$, entonces

$(\varphi^M)^N \rightleftharpoons ((\exists x\phi)^M)^N \leftrightarrow [\exists x(x \in M \wedge \phi^M)]^N \leftrightarrow \exists x[x \in N \wedge x \in M^N \wedge (\phi^M)^N] \underset{M^N \subseteq N}{\leftrightarrow}$
$\exists x[x \in M^N \wedge (\phi^M)^N] \underset{\text{H. I.}}{\leftrightarrow} \exists x[x \in M^N \wedge \phi^{(M^N)}] \leftrightarrow (\exists x\phi)^{M^N} \rightleftharpoons \varphi^{(M^N)}$.

Por lo tanto, en ZF se prueba que $(\varphi^M)^N \leftrightarrow \varphi^{(M^N)}$. ∎

Ahora podemos demostrar que no es posible probar la consistencia relativa de enunciados falsos en L por el método de los modelos internos.

Teorema 3.4 *Sean φ un enunciado y M un modelo interno tales que $ZF \vdash (\neg\varphi)^L$. Si ZF es consistente, entonces $ZF \nvdash \varphi^M$.*

Demostración.-

Supongamos que $ZF \vdash \varphi^M$. Como L es un modelo de ZF, tenemos que $ZF \vdash (\varphi^M)^L$. Por el lema 3.5, $ZF \vdash (\varphi^M)^L \leftrightarrow \varphi^{(M^L)}$, de modo que $ZF \vdash \varphi^{(M^L)}$. Por otro lado, por el lema 3.4, $M^L = L$, de donde resulta que $ZF \vdash \varphi^L$. Pero, por hipótesis, $ZF \vdash (\neg\varphi)^L$, con lo que tenemos que ZF es inconsistente.

Por lo tanto, si ZF es consistente, $ZF \nvdash \varphi^M$. ∎

Corolario 3.2 *Si ZF es consistente y M es un modelo interno, entonces $ZF \nvdash (V \neq L)^M$.*

Demostración.-

Es inmediata de este último teorema, pues $ZF \vdash (V = L)^L$. ∎

De esta manera podemos asegurar que no es posible demostrar la consistencia relativa de $V \neq L$ por el método de los modelos internos, es decir, no podemos encontrar ningún modelo interno según el cual $V \neq L$. El método utilizado para demostrar esta consistencia relativa se explicará en la última sección de este capítulo.

3.2 L es un modelo del Axioma de Elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo

Gödel construyó el universo definible L buscando un modelo de ZF dentro del cual fuera cierto el Axioma de Elección y la Hipótesis Generalizada del Continuo. Esto, con el objetivo de demostrar la consistencia relativa de estos dos enunciados. En esta sección demostraremos que $ZF + V = L \vdash AE$ con lo que tendremos que $ZF \vdash (AE)^L$. De manera semejante demostraremos que $ZF \vdash (HGC)^L$.

Recordemos que el Teorema del Buen Orden, que asegura que todo conjunto es bien ordenable, es equivalente al Axioma de Elección (ver [Amor 1997] pp. 101-9). Para demostrar que $ZF \vdash (AE)^L$ definiremos un buen orden para L, con lo que tendremos que todo conjunto en L es bien ordenable según L y, por lo tanto, que el Axioma de Elección es cierto en L.

Primero definiremos un buen orden $\ll_\alpha$ para L_α, por recursión sobre $\alpha \in OR$:

1. $\ll_0 = \emptyset$

2. Habiendo definido $\ll_\alpha$, la idea de la definición de $\ll_{\alpha+1}$ para $x, y \in L_{\alpha+1}$, será: $x \ll_{\alpha+1} y$ si y sólo si $(x \in L_\alpha \wedge y \notin L_\alpha) \vee (x, y \in L_\alpha \wedge x \ll_\alpha y) \vee (x, y \notin L_\alpha \wedge$ "x se define primero que y a partir de elementos de $\bigcup_{n\in\omega} {}^n L_\alpha$")

3. Si $lím(\gamma)$, $\ll_\gamma = \{\langle x, y\rangle \in L_\gamma \times L_\gamma : [\rho_L(x) < \rho_L(y)] \vee [\rho_L(x) = \rho_L(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \ll_{\rho_L(x)+1}]\}$

Para definir formalmente $\ll_{\alpha+1}$ tenemos que "comparar" dos conjuntos construidos por primera vez en el estrato $L_{\alpha+1}$. Para esto, debemos tener un criterio de comparación.

Por el lema 2.2, sabemos que si $\forall n \in \omega \forall A, Df(A, n) = \{E(m, A, n) : m \in \omega\}$, entonces $Df(L_\alpha, n+1) = \{E(m, L_\alpha, n+1) : m \in \omega\}$. Ahora, por definición, si
$\mathcal{D}(L_\alpha) = \{X \subseteq L_\alpha : \exists n \in \omega \exists s \in L_\alpha^n \exists R \in Df(L_\alpha, n+1)(X = \{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in R\})\}$, entonces

$\mathcal{D}(L_\alpha) = \{X \subseteq L_\alpha : \exists n \in \omega \exists s \in L_\alpha^n \exists m \in \omega(X = \{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n+1)\})\}$. En este contexto $n \in \omega$, $s \in L_\alpha^n$ y $m \in \omega$ nos sugieren un orden de tipo lexicográfico para los elementos de $\mathcal{D}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}$ con base en $\ll_\alpha$.

Comenzamos por definir una relación, $\ll_\alpha^n$ en L_α^n.

Definición 3.2 *Definimos $\ll_\alpha^n \subseteq L_\alpha^n \times L_\alpha^n$ como sigue:*
$\forall s, t \in L_\alpha^n,\ s \ll_\alpha^n t \Leftrightarrow \exists k < n[s \restriction_k = t \restriction_k \wedge s(k) \ll_\alpha t(k)]$

Definición 3.3 *Si $x \in L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$, entonces:*

i) *n_x denota el menor $n \in \omega$ tal que*
$\exists s \in L_\alpha^n \exists m \in \omega(X = \{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n+1)\})$

ii) *s_x denota la $\ll_\alpha^{n_x}$ −menor $s \in L_\alpha^{n_x}$ tal que*
$\exists m \in \omega(X = \{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n_x + 1)\})$

iii) *m_x denota la menor $m \in \omega$ tal que $X = \{y \in L_\alpha : s_x^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n_x + 1)\}$*

Ahora sí, podemos definir $\ll_{\alpha+1}$ con base en $\ll_\alpha$ como sigue:

Definición 3.4 *Sean $x, y \in L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$. Por definición $x \ll_{\alpha+1} y$ si y sólo si*

a) $x, y \in L_\alpha \wedge x \ll_\alpha y$ *ó*

b) $x \in L_\alpha \wedge y \notin L_\alpha$ *ó*

c) $x, y \notin L_\alpha \wedge [(n_x < n_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x \ll_\alpha^{n_x} s_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x = s_y \wedge m_x < m_y)]$

Observación 3.2 *La idea tras el criterio de comparación entre dos conjuntos construidos por primera vez en el estrato $L_{\alpha+1}$ es: $n_x < n_y$ si "el número de argumentos utilizados en la construcción de x es menor que el de los utilizados para construir y"; $n_x = n_y$, si "el número de argumentos utilizados en la construcción de ambos es el mismo" en cuyo caso consideramos el orden lexicográfico entre ellos ($s_x \ll_\alpha^{n_x} s_y$); para el caso en que $n_x = n_y$ y $s_x = s_y$, además de que "el número de argumentos utilizados es el mismo", el orden lexicográfico entre ellos es el mismo, por lo que consideramos "la complejidad de la fórmula" ($m_x < m_y$).*

Ahora, veremos que $\ll_{\alpha+1}$ bien-ordena a $L_{\alpha+1}$.

Lema 3.6 *Si $\ll_\alpha$ bien-ordena a L_α, entonces $\ll_{\alpha+1}$ bien-ordena a $L_{\alpha+1}$.*

Demostración.-

Supongamos que $\ll_\alpha$ bien-ordena a L_α.

Sea $A \subseteq L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$ tal que $A \neq \emptyset$ y supongamos que $A \cap L_\alpha = \emptyset$; ya que de lo contrario, como $\ll_\alpha$ bien-ordena a L_α, habría un $\ll_\alpha$-primer elemento y, por lo tanto, un $\ll_{\alpha+1}$-primer elemento.

Si $x \in A$, entonces $x \in L_{\alpha+1}$ y $x = \{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n+1)\} \in A$.

Sea n_0 el menor $n \in \omega$ tal que $\exists s \in L_\alpha^n \exists m \in \omega(\{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n+1)\} \in A)$.

Sea s_0 la $\ll_\alpha^{n_0}$-menor $s \in L_\alpha^n$ tal que $\exists m \in \omega(\{y \in L_\alpha : s^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n_0+1)\} \in A)$.

Sea m_0 la menor $m \in \omega$ tal que $\{y \in L_\alpha : s_0^\wedge\langle y\rangle \in E(m, L_\alpha, n_0+1)\} \in A$.

En tal caso, $\{y \in L_\alpha : s_0^\wedge\langle y\rangle \in E(m_0, L_\alpha, n_0+1)\}$ es el $\ll_{\alpha+1}$-primer elemento de A. ■

Observación 3.3 *La relación $\ll_{\alpha+1}$ es absoluta para los modelos transitivos de ZF.*

Lo siguiente es definir el orden en todo L.

Definición 3.5 *Dados $x, y \in L$ definimos el orden $<_L$ como sigue:*

$x <_L y \Leftrightarrow ([\rho_L(x) < \rho_L(y)] \vee [\rho_L(x) = \rho_L(y) \wedge x \ll_{\rho_L(x)+1} y])$.

Lema 3.7 *$<_L$ bien-ordena a L.*

Demostración.-

Obsérvese que $<_L \restriction_{L_\alpha} = \ll_\alpha$. Si $A \subseteq L$ y $A \neq \emptyset$, entonces existe $\alpha \in OR$ tal que $A \subseteq L_{\alpha+1}$ y $\ll_{\alpha+1}\restriction_A$ bien-ordena a A. Por lo tanto, $<_L$ bien-ordena a A.

Concluimos que $<_L$ bien-ordena a L. ■

Teorema 3.5 *Si $V = L$, entonces AE.*

Demostración.-

Supongamos que $V = L$. Si x es un conjunto, entonces existe $\alpha \in OR$ tal que $x \in L_\alpha$. Como L_α es transitivo, $x \subseteq L_\alpha$ y, por lema anterior, $\ll_\alpha\restriction_x$ bien-ordena a x, pues la "buena ordenación" es absoluta. ■

Así, tenemos que $ZF + V = L \vdash AE$ y, por el teorema fundamental de modelos internos (1.2), $ZF \vdash (AE)^L$.

Corolario 3.3 *$Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + AE)$ y $Cons(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash \neg AE$.*

Demostración.-
Sabemos que $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + V = L)$ y, por el teorema anterior y el teorema fundamental de modelos internos (1.2), que $Cons(ZF + V = L) \Rightarrow Cons(ZF + V = L + AE)$.
Por lo tanto, $Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + AE)$, es decir, $Cons(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash \neg AE$. ■

Hemos demostrado que existe un modelo de ZF (L) en el que el Axioma de Elección es cierto; por lo que podemos estar seguros de que en ZF no podemos demostrar la negación de este axioma.

Ahora veremos que, al igual que con el Axioma de Elección, L es modelo de la Hipótesis Generalizada del Continuo. Recordemos que la Hipótesis Generalizada del Continuo afirma que si κ es un cardinal infinito, entonces el sucesor (cardinal) de κ es 2^κ. Para ello tendremos que demostrar algunas consecuencias del Teorema General de Reflexión visto en el capítulo 1 (teorema 1.5).

Teorema 3.6 (AE) *Sean Z una clase y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ fórmulas. En tal caso*
$\forall x \subseteq Z \exists A[x \subseteq A \subseteq Z \wedge (\varphi_1, ..., \varphi_n$ *son absolutas para* $A, Z) \wedge \mid A \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid x \mid\}]$.

Demostración.-
Sea Z una clase. Supongamos, sin perder generalidad, que la lista $\varphi_1, ..., \varphi_n$ es cerrada bajo subfórmulas. Sea $Z_\alpha = Z \cap V_\alpha$. Demostremos que Z y Z_α satisfacen las hipótesis del Teorema General de Reflexión (teorema 1.5):

- Si $\alpha < \beta$, entonces, como $\alpha < \beta$ implica que $V_\alpha \subseteq V_\beta$, $Z_\alpha = Z \cap V_\alpha \subseteq Z \cap V_\beta = Z_\beta$.
- Si $lím(\gamma)$, entonces $Z_\gamma = Z \cap V_\gamma = Z \cap (\bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} (Z \cap V_\alpha) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z_\alpha$.
- $Z = Z \cap V = Z \cap (\bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in OR} (Z \cap V_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in OR} Z_\alpha$.

Sea $x \subseteq Z$. Sabemos que existe $\alpha \in OR$ tal que $x \subseteq Z_\alpha$. Por el Teorema General de Reflexión, existe $\beta > \alpha$ tal que $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son $Z_\beta - Z$ absolutas y, como $x \subseteq Z_\alpha \subseteq Z_\beta \subseteq Z$, $x \subseteq Z_\beta$. Así, tenemos que $x \subseteq Z_\beta \subseteq Z$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son absolutas para Z_β, Z. Encontraremos $A \subseteq Z_\beta$ tal que cumpla lo requerido; Z_β cumple casi todo excepto posiblemente ser de cardinal menor o igual que el máximo entre $\aleph_0$ y el cardinal de x.

Como estamos suponiendo AE, sea $<$ un buen orden para Z_β.

Considerando que φ_i tiene m_i variables libres $(y_1, ..., y_{m_i} = \bar{y})$, definimos, para cada $i = 1, ..., n$, la siguiente función $H_i : Z_\beta^{m_i} \to Z$, como sigue:

$$H_i(\bar{y}) = \begin{cases} \text{el } <\text{- menor } z \text{ tal que } z \in Z_\beta \text{ y } \varphi_j^{Z_\beta}(z, \bar{y}) & \text{si } \varphi_i \rightleftharpoons \exists z \varphi_j(z, \bar{y}) \text{ y } (\varphi_i)^{Z_\beta} \\ \text{el } <\text{- menor } z \text{ de } Z_\beta & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si $m_i = 0$, identificaremos H_i con el elemento correspondiente de Z_β, es decir, con el <- menor $z \in Z_\beta$ tal que $\varphi_j^{Z_\beta}(z)$, cuando $\varphi_i \rightleftharpoons \exists z \varphi_j(z)$ y $(\varphi_i)^{Z_\beta}$ y con el <- menor $z \in Z_\beta$, en cualquier otro caso.

Las funciones H_i se llaman funciones o constantes (funciones con cero argumentos) de Skolem para φ_i, para cada $i = 1, ..., n$.

Sea A la clausura de x bajo $H_1, ..., H_n$. Es decir, sea $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$, donde A_n se define por recursión como sigue:

$A_0 = x$

$A_{n+1} = A_n \cup \{H_i(y_1, ..., y_{m_i}) : y_j \in A_n (j = 1, ..., m_i) \wedge i \in \{1, ..., n\}\}$

Así, tenemos que $x \subsetneq A \subseteq Z_\beta$.

Obsérvese que si x es infinito, $|A_n| = |x|$, $\forall n \in \omega$ de modo que,

$|A| = |\bigcup_{n \in \omega} A_n| \leq \sum_{n \in \omega} |A_n| = \sum_{n \in \omega} |x| = \aleph_0 \cdot |x| = \ máx\{\aleph_0, |x|\}$.

Como A es cerrado respecto a cada H_i y $A \subseteq Z_\beta$, entonces, por el Criterio de Tarski-Vaught (lema 1.13), φ_i es absoluta para A, Z_β pues para toda $\varphi_i \rightleftharpoons \exists z \varphi_j(z, \bar{y})$ $(\bar{y} = y_1, ..., y_{m_i})$ se cumple que $\forall y_1, ..., y_{m_i} \in A[\exists z \in Z_\beta \varphi_j^{Z_\beta}(z, \bar{y}) \to \exists x_0 \in A \varphi_j^{Z_\beta}(x_0, \bar{y})]$, tomando $x_0 = H_i(\bar{y})$.

Así, tenemos que φ_i es absoluta para A, Z_β y ya sabíamos que φ_i es absoluta para Z_β, Z, de donde se sigue que φ_i es absoluta para A, Z y esto para toda $i = 1, ..., n$. Por lo tanto, $x \subsetneq A \subseteq Z$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son absolutas para A, Z y $|A| \leq máx\{\aleph_0, |x|\}$. ■

Observación 3.4 *En la demostración de este último teorema hemos supuesto que x es infinito, porque este caso es el que necesitaremos para demostrar la consistencia relativa de la Hipótesis Generalizada del Continuo. Es por esto que no es necesario para nuestro objetivo ver algunas posibles diferencias en caso de que x fuera finito.*

Es importante recordar que si A es una clase extensional (con la pertenencia), por el Teorema del Colapso de Mostowski (teorema 1.4), existen una clase transitiva M y un isomorfismo G

tales que $(A, \in) \overset{G}{\cong} (M, \in)$ y que, como G es isomorfismo, para toda fórmula φ se cumple que $\forall x_1, ..., x_n \in A[\varphi^A(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^M(G(x_1), ..., G(x_n))]$.

Corolario 3.4 (AE) *Si Z es una clase transitiva y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son enunciados, entonces* $\forall x \subseteq Z[x \text{ transitivo} \Rightarrow \exists M[x \subseteq M \wedge M \text{ transitivo} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^Z) \wedge \mid M \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid x \mid\}]]$.

Demostración.-

Sea $x \subsetneq Z$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que φ_n es el Axioma de Extensionalidad. Sea A el conjunto dado en el teorema anterior, donde $x \subseteq A \subsetneq Z$ y $\bigwedge_{i=1}^{n} (\varphi_i^A \leftrightarrow \varphi_i^Z)$ y $\mid A \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid x \mid\}$. Como por hipótesis Z es una clase transitiva, tenemos que $(\text{Extensionalidad})^Z$ y, por tanto, $(\text{Extensionalidad})^A$, es decir, A es un conjunto extensional. Así tenemos que, por el Colapso de Mostowski (teorema 1.4), tenemos que hay un isomorfismo G y una clase transitiva M tales que $(A, \in) \overset{G}{\cong} (M, \in)$ y, como $\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^A$ para cada $i = 1, ..., n$, tenemos que $\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^A \leftrightarrow \varphi_i^Z$ para toda $i = 1, ..., n$ y $\mid M \mid = \mid A \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid x \mid\}$.

Por lo tanto, sólo falta demostrar que $x \subseteq M$. Por el Colapso de Mostowski, como $M = G[A] = \{G(a) : a \in A\}$ y $x \subsetneq A$, tenemos que $G[x] \subsetneq G[A] = M$. Además, como x es transitivo, por la segunda parte del Colapso de Mostowski, resulta que $\forall w \in x(G(w) = w)$ de modo que $G[x] = x \subseteq M$. ■

Para demostrar la consistencia relativa de la Hipótesis Generalizada del Continuo, también necesitaremos los siguientes conceptos y resultados.

Definición 3.6 *Sea M una clase.*
El ordinal de M, denotado por $o(M)$, se define como $M \cap OR$.

Lema 3.8 *Hay una conjunción finita ψ de axiomas de ZF tal que* $\forall M[(M \text{ transitivo} \wedge \psi^M) \rightarrow L^M = L_{o(M)}]$

Demostración.-

Podemos observar que hay una conjunción finita φ de axiomas de ZF tales que las nociones de ordinal, rango, L_α, etc. son absolutas para los modelos transitivos de φ. Luego, para cualquier clase (fórmula) M, podemos expresar el Teorema de Minimalidad de L (teorema 3.3) como sigue: $ZF \vdash$ (M es una clase propia $\wedge$ M transitiva $\wedge$ φ^M) $\rightarrow L = L^M \subseteq M$, donde "$M$ es una clase propia" se puede escribir como $\neg\exists z \forall y(y \in z \leftrightarrow M(y)$.

Cabe señalar que basta una conjunción finita de axiomas ϕ para probar que "no hay ordinal máximo": $\neg\exists x[x \in OR \wedge \forall y(y \in OR \rightarrow y \leq x)]$.

Sea $\psi \rightleftharpoons \varphi \wedge \phi$. Si M es un conjunto transitivo y ψ^M, entonces $o(M) = OR \cap M$ es un ordinal límite (para M y para V) y, por lo tanto, $L_{o(M)} = \bigcup_{\alpha \in o(M)} L_\alpha = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha$.

Pero, como ya vimos en la demostración del Teorema de Minimalidad de L.

$L^M = \{x \in M : [\exists\alpha(x \in L_\alpha)]^M\} = \{x \in M : \exists\alpha \in M(x \in L_\alpha)\} = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha$. Así. $L_{o(M)} = L^M \subseteq M$. ■

Lema 3.9 *Hay una conjunción finita χ de axiomas de $ZF + V = L$ tal que:*

1. *Si M es una clase propia transitiva y χ^M. entonces $M = L$.*
2. $\forall M[(M$ *transitivo* $\wedge \chi^M) \rightarrow M = L_{o(M)}]$.

Demostración.-

Sean ψ la conjunción finita de axiomas del lema anterior. y $\chi \rightleftharpoons (\psi \wedge V = L)$. Como $(V = L)^M$, tenemos que:

$(V = L)^M \Leftrightarrow (\forall x \exists\alpha(x \in L_\alpha))^M \Leftrightarrow \forall x \in M(\exists\alpha \in M(x \in L_\alpha^M)) \Leftrightarrow \forall x \in M(x \in L^M)$.

Por lo tanto, $M \subseteq L^M$ y $M = L^M$.

1) Si M es una clase propia transitiva y χ^M, entonces, por el Teorema de Minimalidad de L (teorema 3.3), $L^M = L$, de manera que $M = L$.

2) Si M es un conjunto transitivo tal que χ^M. entonces, por el lema anterior, $L^M = L_{o(M)}$, de manera que $M = L_{o(M)}$. ■

Teorema 3.7 *Si $V = L$. entonces $\forall\alpha \geq \omega(\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+})$.*

Demostración.-

Supongamos que $V = L$. Sean $\alpha \geq \omega$ y $A \in \mathcal{P}(L_\alpha)$, de modo que $A \subseteq L_\alpha$.

Sea $X = L_\alpha \cup \{A\}$. Sabemos, por el lema 2.6, que $|X| = |L_\alpha| = |\alpha|$. Por otro lado, X es transitivo, pues si $y \in X$, entonces o $y \in L_\alpha$ y, por lo tanto, $y \subseteq L_\alpha \subseteq X$; o $y = A$ y, por lo tanto, $y \subseteq L_\alpha \subseteq X$. Utilizando el corolario 3.4 con $Z = V$, $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n \rightleftharpoons \chi$ del lema anterior y

$X = L_\alpha \cup \{A\}$, se tiene que $\exists M[M$ transitivo $\wedge X \subseteq M \wedge \mid M \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid X \mid\} \wedge (\chi^M \leftrightarrow \chi)]$.
Como $\mid X \mid = \mid \alpha \mid$ y $\alpha \geq \omega$, $\mid M \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid X \mid\} = \mid \alpha \mid$. Por otra parte, si $X \subseteq M$, entonces $\mid \alpha \mid = \mid X \mid \leq \mid M \mid$. Por lo tanto, $\mid M \mid = \mid \alpha \mid$.

Como $V = L$, χ se cumple y, por ende, χ^M también. Así, tenemos que M es transitivo y χ^M. Además, por el inciso (2) del lema anterior, $M = L_{o(M)}$. Pero, como $\mid M \mid = \mid \alpha \mid$, resulta que $\mid L_{o(M)} \mid = \mid o(M) \mid = \mid \alpha \mid < \mid \alpha \mid^+$, de donde se sigue que $o(M) < \mid \alpha \mid^+$ (pues si $o(M) \geq \mid \alpha \mid^+$, entonces $\mid o(M) \mid \geq \mid \alpha \mid^+ !$). Sabemos, por el inciso (5) de la proposición 2.1, que $o(M) < \mid \alpha \mid^+$ implica que $L_{o(M)} \subseteq L_{|\alpha|^+}$.

Así pues, $A \in X \subseteq M = L_{o(M)} \subseteq L_{|\alpha|^+}$.

Concluimos que $A \in L_{\alpha^+}$ y $\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+}$. ■

Observación 3.5 *El lema 2.6 que utilizamos en el teorema anterior se apoya en el Axioma de Elección, pero recordemos que si $V = L$, entonces AE.*

Corolario 3.5 *Si $V = L$, entonces HGC.*

Demostración.-

Supongamos que $V = L$. Sabemos que $\kappa \subseteq L_\kappa$, pues $\kappa = L_\kappa \cap OR$, de modo que $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathcal{P}(L_\kappa)$. Por el teorema anterior, $\forall \kappa \geq \aleph_0(\mathcal{P}(L_\kappa) \subseteq L_{\kappa^+})$, de donde $\forall \kappa \geq \aleph_0(\mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathcal{P}(L_\kappa) \subseteq L_{\kappa^+})$. Además, sabemos que $\forall \alpha \geq \omega\ (\mid L_\alpha \mid = \mid \alpha \mid)$ (por el lema 2.6), por consiguiente $2^\kappa \leq \mid L_{\kappa^+} \mid = \kappa^+$. Por el Teorema de Cantor, tenemos que $2^\kappa \geq \kappa^+$ y, por lo tanto, que $2^\kappa = \kappa^+$. Concluimos que se cumple HGC.

Así pues, $ZF + V = L \vdash HGC$, es decir, $ZF \vdash (HGC)^L$. ■

Corolario 3.6 *$Cons(ZF) \Rightarrow Cons(ZF + HGC)$ y $Cons(ZF) \Rightarrow ZF \nvdash \neg HGC$.*

Hemos demostrado que existe un modelo de ZF, a saber L, en el cual la Hipótesis Generalizada del Continuo es cierta. Por lo tanto, como con el Axioma de Elección, podemos asegurar que no se puede demostrar la negación de la Hipótesis Generalizada del Continuo en ZF.

3.3 Consistencia Relativa de $V \neq L$

Sabemos que un enunciado σ es independiente de una teoría si tanto σ como su negación $(\neg\sigma)$ no se pueden probar a partir de los axiomas de la teoría. Recordemos que el famoso teorema de incompletud de Gödel de 1931 asegura que no es posible dar una prueba absoluta de la independencia de un enunciado en ZF. Esto se debe a que la existencia de un enunciado en el lenguaje que no sea demostrable a partir de sus axiomas implica la consistencia de ZF; y la consistencia absoluta de esta teoría es indemostrable ya que la aritmética recursiva se puede representar dentro de ella. Por lo tanto, no es posible dar pruebas absolutas de independencia en ZF. Sin embargo, hay otro tipo de pruebas que involucran a la consistencia, las pruebas de independencia relativa. En estas pruebas se supone la consistencia de ZF y, a paritr de ella, se demuestra la independencia de algún enunciado en ZF. En este capítulo hemos demostrado que L es modelo interno de $ZF + V = L$, de $ZF + AE$ y de $ZF + HGC$, a partir del supuesto de que ZF tiene un modelo. Es decir, hemos supuesto la consistencia de ZF y entonces, hemos demostrado la consistencia de $ZF + V = L$, de $ZF + AE$ y de $ZF + HGC$. Nuestra pregunta al principio de este capítulo era: ¿es V igual a L? Hasta ahora podemos contestar parcialmente esta pregunta, puesto que ya sabemos que en ZF no se puede demostrar que V es distinto de L. Nos falta saber si en ZF se puede demostrar que V es igual a L. En la segunda sección de este capítulo demostramos que si un enunciado es verdadero en L, entonces, en ZF, no se puede probar que su negación sea cierta en algún modelo interno. Por consiguiente, como $V = L$ es verdadero en L, no existe un modelo interno en el que $V \neq L$ sea verdadero. El método de Forcing de Cohen, se utiliza para demostrar que los enunciados tales como el Axioma de Elección, la Hipótesis Generalizada del Continuo y el Axioma de Constructibilidad son indecidibles en ZF. En esta sección describiremos el método y daremos las ideas que lo justifican; véase el capítulo 7 de [Kunen 1980] para la construcción formal. Después utilizaremos este método para demostrar la consistencia relativa de la negación del Axioma de Constructibilidad y, por lo tanto, habremos demostrado la independencia del mismo. De este modo estaremos seguros que en ZF no se puede ni demostrar ni refutar.

3.3.1 El Método de Forcing

En 1963, Paul J. Cohen, dió a conocer un método para construir modelos de ZFE, a partir de un modelo dado de la misma teoría. Si se construye adecuadamente, el nuevo modelo también lo será de alguna afirmación relativamente consistente dada de antemano en el lenguaje de ZFE. Dado un enunciado σ del cual queremos demostrar su consistencia relativa y, partiendo de la suposición de que existe un modelo M estándar, transitivo y contable de ZFE, la idea de este método es determinar un orden parcial $P \in M$, que dependa del enunciado σ, y construir una extensión de M, a partir de un subconjunto $G \subseteq P$, donde $G \subseteq M$ y $G \notin M$ (a este subconjunto lo llamaremos "filtro genérico"), de tal manera que esta extensión sea modelo transitivo, estándar y contable de $ZFE+\sigma$. Es importante observar que estamos suponiendo que ZFE tiene un modelo con características muy específicas: ser transitivo, estándar y contable; sin embargo ¿cómo sabemos, suponiendo que ZFE tiene un modelo, que tiene uno con estas características? Esta pregunta la discutiremos más adelante cuando justifiquemos este método.

Sea M un modelo estándar, transitivo y contable y sea P un orden parcial tal que $P \in M$. Estamos denotando por P al conjunto parcialmente ordenado, es decir, de ahora en adelante $P = (P, \leq)$. Supongamos que hay $1_P \in P$ tal que $\forall p \in P(p \leq 1_P)$.

Definición 3.7 *G es un filtro sobre P si:*

1. $G \neq \emptyset$ *y* $G \subsetneq P$
2. $\forall p, q \in G, \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$
3. $\forall p \in G, \forall q \in P(p \leq q \rightarrow q \in G)$

Definición 3.8 *Un conjunto D es denso en P si $D \subseteq P \wedge \forall p \in P\ \exists q \in D(q \leq p)$.*

Definición 3.9 *Sea M un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE. Dado P un orden parcial, tal que $P \in M$, decimos que G es P-genérico sobre M si G es filtro sobre P y $\forall D(D$ es denso en $P \wedge D \in M \rightarrow G \cap D \neq \emptyset)$.*

Lema 3.10 *Si M es un conjunto contable, $P \in M$ es un orden parcial y $p_0 \in P$, entonces existe un filtro P-genérico G sobre M y $p_0 \in G$.*

Demostración.-

Sea $\{D_n : n < \omega\}$ una enumeración de todos los densos en P que pertenecen a M (esta enumeración existe porque M es un conjunto contable). Definimos q_n como sigue:

$q_0 = p_0$

$q_{n+1} \leq q_n$ y $q_{n+1} \in D_n$.

Podemos garantizar que existe $q_{n+1} \leq q_n$ con $q_{n+1} \in D_n$ porque D_n es denso. Tenemos que $p_0 = q_0 \geq q_1 \geq q_2 \geq ....$ Sea $G = \{p \in P : \exists n < \omega(q_n \leq p)\} \subseteq P$. Claramente, $p_0 \in G$. Como M es un conjunto transitivo, $\{D \in M : D \text{ es denso en } P\} = (\{D \in M : D \text{ es denso en } P\})^M$. Además, $q_{n+1} \in D_n \cap G$, por lo tanto, G es filtro P-genérico sobre M. ■

Observación 3.6 *Es importante recalcar que usamos que M fuera un conjunto contable para probar la existencia del filtro P-genérico.*

Definición 3.10 *Dados $p, q \in P$ decimos que p es compatible con q si $\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$.*

Definición 3.11 *Un orden parcial P es frondoso si y sólo si*
$\forall p \in P \exists q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$, donde $q \perp r$ denota que q no es compatible con r.

Lema 3.11 *Si M es un modelo estándar y transitivo de ZF, $P \in M$ es un orden parcial frondoso y G es un filtro P-genérico sobre M, entonces $G \notin M$.*

Demostración.-
Sean M un modelo estándar y transitivo de ZF, $P \in M$ un orden parcial frondso y G un filtro P-genérico sobre M. Supongamos que $G \in M$. Sea $D = P - G$. Como $P \in M$ y $G \in M$, tenemos que $D = P - G = \{x \in P : x \notin G\} \in M$, pues M es modelo del Axioma de Separación. Por otro lado, dado $p \in P$, como P es frondoso, existen $q, r \in P$ tales que $q \leq p$ y $r \leq p$ y $q \perp r$. Como $q \perp r$, $\forall p \in P(p \nleq q \vee p \nleq r)$, y, como G es filtro, tenemos que $q \notin G$ o $r \notin G$; de modo que $q \in P - G$ o $r \in P - G$. Por lo tanto, D es denso en P. Pero $D = P - G$, por lo que ¡$D \cap G = \emptyset$! (ya que G es P-genérico).
Concluimos que $G \notin M$. ■

La definición de la extensión genérica, denotada por $M[G]$, se hace a partir de M, utilizando "*P-nombres*", que son como los "nombres" de los objetos de $M[G]$. Estos "*P-nombres*" son conjuntos de M que pueden definirse rigurosamente por recursión a partir de P. La idea de esta definición es: τ es un *P-nombre* si y sólo si τ es una relación y
$\forall(\sigma, p) \in \tau(\sigma \text{ es un } P\text{-nombre} \wedge p \in P)$.
Después, por recursión sobre ordinales, definimos:
$V_0^P = \emptyset$
$V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(V_\alpha^P \times P)$

$V^P_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V^P_\alpha$

Así, $V^P = \bigcup_{\alpha \in OR} V^P_\alpha$ son los *P-nombres* del universo y, dado un conjunto M, los $P-nombres$ de M (denotados por M^P) se definen como $M^P = V^P \cap M$.

Observación 3.7 *Si M es un modelo transitivo de ZFE y $P \in M$ es un orden parcial, entonces $M^P = \{\tau \in M : (\tau \text{ es } P-nombre)^M\}$.*

Ejemplo 3.1 *(P-nombres):*

- *Claramente, $\emptyset$ es $P-nombre$.*
- *Si $p, q \in P$, entonces $\{\langle\emptyset, p\rangle\}$ y $\{\langle\emptyset, p\rangle, \langle\emptyset, q\rangle\}$ son $P-nombres$. En este caso, $\{\langle\{\langle\emptyset, p\rangle\}, q\rangle\}$ y $\{\langle\{\langle\emptyset, p\rangle, \langle\emptyset, q\rangle\}, p\rangle\}$ también son $P-nombres$.*

Definición 3.12 *Dado P un orden parcial y $G \subsetneq P$, definimos $i_G : V^P \to V$ como $i_G(\tau) = \{\ i_G(\sigma) : \exists p \in G(\sigma, p) \in \tau\}$.*

Ejemplo 3.2 *Claramente, $i_G(\emptyset) = \emptyset$ y entonces:*

$$i_G(\{\langle\emptyset, p\rangle\}) = \begin{cases} \{\emptyset\} & si\ p \in G \\ \emptyset & si\ p \notin G \end{cases}$$

Definición 3.13 *Definimos la extensión genérica, denotada por $M[G]$, como $i_G[M^P]$ (con la pertenencia), es decir, $M[G] = \{\ i_G(\tau) : \tau \in M \wedge \tau \text{ es } P-nombre\}$.*

Intuitivamente, los elementos de $M[G]$ son aquellos que pueden definirse a partir de G, P-genérico sobre M, aplicando procedimientos conjuntistas definibles en M o, en otras palabras, $M[G]$ es el conjunto que contiene a $M \cup \{G\}$ y que es cerrado bajo las operaciones conjuntistas definibles en M.

Para demostrar que $M \subseteq M[G]$ y que $o(M) = o(M[G])$ necesitamos definir a los "*P-nombres canónicos*", que también se definen de manera recursiva.

Definición 3.14 *Sea P un orden parcial. El P-nombre canónico de x es $\check{x} = \{\langle\check{y}, 1_P\rangle : y \in x\}$, donde $\check{y}$ es el P-nombre canónico de y.*

Observación 3.8 *Ser P-nombre canónico es absoluto para cualquier conjunto transitivo M y, además, si $x \in M$, entonces $\check{x} \in M$ pues M es modelo del Axioma de Reemplazo.*

Para demostrar que $G \in M[G]$ necesitamos definir su *P-nombre* que denotaremos por Γ.

Definición 3.15 $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}$

Proposición 3.1 *Si M es un modelo transitivo de ZFE, P es un orden parcial frondoso en M y G es un filtro P-genérico sobre M, entonces:*

1. $\forall x \in M(\check{x} \in M^P \wedge i_G(\check{x}) = x)$
2. $i_G(\Gamma) = G$
3. $M \subsetneq M[G]$
4. $M[G]$ *es transitivo.*
5. $\forall \tau \in M^P(\rho(i_G(\tau)) \leq \rho(\tau))$
6. $o(M[G]) = o(M)$

Demostración.-

1) Por $\in$- inducción sobre los elementos de M.
Observemos que $\check{\emptyset} = \emptyset \in M^P$ y que $i_G(\check{\emptyset}) = \emptyset$.
Sea $x \in M$. Supongamos que si $y \in x$, entonces $\check{y} \in M^P$ e $i_G(\check{y}) = y$. Tenemos que $\check{x} = \{\langle \check{y}, 1_P\rangle : y \in x\}$, donde, por hipótesis de inducción, $\check{y} \in M^P$. En este caso $\check{x}$ es una relación cuyos elementos están formados por *P-nombres* en sus primeras entradas y por $1_P \in P$ en sus segundas entradas; por lo tanto, $\check{x} \in M^P$. Por otro lado,
$i_G(\check{x}) = \{i_G(\check{\sigma}) : \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \check{x})\} = \{i_G(\check{y}) : y \in x\}$, pero, por hipótesis de inducción, $\{i_G(\check{y}) : y \in x\} = \{y : y \in x\} = x$. Por consiguiente, $i_G(\check{x}) = x$.
2) Observemos que $\Gamma \in M^P$, pues M es modelo del Axioma de Reemplazo. Tenemos que $i_G(\Gamma) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle \sigma, p\rangle \in \Gamma)\} = \{i_G(\check{p}) : p \in G\}$ y, por el inciso anterior, $i_G(\check{p}) = p$, por lo tanto, $\{i_G(\check{p}) : p \in G\} = \{p : p \in G\} = G$. Por consiguiente, $i_G(\Gamma) = G$. Así pues, $G = i_G(\Gamma) \in i_G[M^P] = M[G]$.
3) Sea $x \in M$. Por el inciso (1), $\check{x} \in M^P$ y $x = i_G(\check{x})$, de aquí que $x = i_G(\check{x}) \in i_G[M^P] = M[G]$. Por lo tanto, $M \subseteq M[G]$. Por otro lado, como P es frondoso, $G \notin M$ y, por el inciso anterior, $G \in M[G]$. Concluimos que $M \subsetneq M[G]$.

4) Sea $y \in M[G]$ y sea $x \in y$. Como $y \in M[G] = i_G[M^P]$, $y = i_G(\tau)$ con $\tau \in M^P$, y, por ende, $x = i_G(\sigma)$ para algún σ tal que $\langle\sigma,p\rangle \in \tau$ con $p \in G$. Así, tenemos que $\sigma \in V^P$ y, como M es transitivo y $\tau \in M$, $\langle\sigma,p\rangle \in M$. Por lo tanto, $\sigma \in M$ y $\sigma \in M^P$. Concluimos que $x \in i_G[M^P] = M[G]$.

5) Por inducción sobre los nombres de M^P.

Sea $\tau \in M^P$. Supongamos que si $\langle\sigma,p\rangle \in \tau$, entonces $\rho(i_G(\sigma)) \leq \rho(\sigma)$.

Sabemos que $\sigma \in \{\sigma\} \in \langle\sigma,p\rangle$, de donde si $\langle\sigma,p\rangle \in \tau$, entonces

$\rho(i_G(\sigma)) \leq \rho(\sigma) < \rho(\{\sigma\}) < \rho(\tau)$. Así, $\rho(i_G(\sigma)) + 1 < \rho(\tau)$ para cualquier σ tal que $\langle\sigma,p\rangle \in \tau$ para alguna $p \in G$. Como $i_G(\tau) = \{i_G(\sigma) : \exists p \in G(\langle\sigma,p\rangle \in \tau)\}$, tenemos que

$\rho(i_G(\tau)) = Sup\{\rho(i_G(\sigma)) + 1 : \exists p \in G(\langle\sigma,p\rangle \in \tau)\}$. Por consiguiente $\rho(i_G(\tau)) \leq \rho(\tau)$.

6) Como $o(M) = M \cap OR$, $o(M) = mín\{\alpha \in OR : \alpha \notin M\}$. Sabemos, por el inciso (3), que $M \subseteq M[G]$, de modo que $o(M) \leq o(M[G])$. Supongamos que $o(M) < o(M[G])$, entonces $o(M) \in i_G[M^P]$, es decir, $o(M) = i_G(\tau)$ para algún $\tau \in M^P$. Así, tenemos que

$o(M) = \rho(o(M)) = \rho(i_G(\tau)) \leq \rho(\tau)$ (por el inciso anterior). Ahora, $\tau \in M$, pues $\tau \in M^P$ y sabemos que si $x \in M$, entonces $\rho(x) \in M$, pues M es modelo de ZF y el rango es absoluto. Por lo tanto, $\rho(\tau) = (\rho(\tau))^M \in M$ y ¡ $o(M) \in M$! Concluimos que $o(M) = o(M[G])$. ∎

Observación 3.9 *Obsérvese que $o(M)$ es un ordinal límite:*

Sabemos que $o(M) = mín\{\alpha \in OR : \alpha \notin M\}$.

Si $o(M) = \emptyset$, entonces ¡ $\emptyset \notin M$! (M es modelo del Axioma del Vacío)

Si $o(M) = \alpha + 1$, entonces $\alpha \in M$ por la definición de $o(M)$ De aquí que $\{\alpha\} \in M$, pues M es un modelo del Axioma del Par. Ahora, otra vez por el Axioma del Par, $\{\alpha, \{\alpha\}\} \in M$ y, por el Axioma de la Unión, ¡ $\cup\{\alpha, \{\alpha\}\} = \alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1 \in M$! Por lo tanto, $o(M) = o(M[G])$ es un ordinal límite.

Para demostrar que $M[G]$ es modelo de $ZFE + \sigma$ se usa la definición de "forzar" (de aquí, el nombre del método):

Definición 3.16 *Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una fórmula y $\tau_1, ..., \tau_n \in M^P$. Se dice que $p \in P$ "fuerza" a $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$, denotado por $p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$, si y sólo si para todo filtro G, P-genérico sobre M, tal que $p \in G$, se cumple que $[\varphi(i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n))]^{M[G]}$.*

Ejemplo 3.3 • *Si $p \leq q$, entonces $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$, ya que $\varphi(\tau_1, \tau_2) \rightleftharpoons \tau_1 \in \tau_2$ y para cualquier filtro G, P-genérico sobre M, tal que $p \in G$,*
$[\varphi(i_G(\check{q}), i_G(\Gamma))]^{M[G]} \leftrightarrow [\varphi(q, G)]^{M[G]} \rightleftharpoons (q \in G)^{M[G]} \leftrightarrow q \in G$. *Por lo tanto, $p \Vdash \check{q} \in \Gamma$.*
• *$1_P \Vdash \check{a} \in \check{b}$ si y sólo si para todo filtro G, $P-$genérico sobre M, $(a \in b)^{M[G]}$, ya que $1_P \in G$ para todo filtro G, $P-$genérico sobre M.*

Lema 3.12 *(Lema de Verdad) Para todo filtro G, P-genérico sobre M se cumple que* $[\varphi(i_G(\tau_1), ..., i_G(\tau_n))]^{M[G]} \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))$.

Demostración.-
Véase capítulo 7 de [Kunen 1980]. ■

Para entender más ampliamente la definición de "forzar" y el Lema de Verdad daremos el siguiente ejemplo en el cual supondremos que $M[G]$ es modelo, hecho que demostraremos después.

Ejemplo 3.4 *Sea M un modelo transitivo, estándar y contable de ZFE. Sea $P = (\bigcup_{n\in\omega} {}^n 2, \supseteq)$, donde ${}^n 2 = \{f \mid f$ es función y $f : n \rightarrow 2\}$. Obsérvese que $1_P = \emptyset$.*
Veamos que P es frondoso:
Sea $p \in P$. Existe $n \in \omega$ tal que p es una función de n en 2. Sean $q = \{\langle i, j\rangle : \langle i, j\rangle \in p \vee \langle i, j\rangle = \langle n+1, 0\rangle\}$ y $r = \{\langle i, j\rangle : \langle i, j\rangle \in p \vee \langle i, j\rangle = \langle n+1, 1\rangle\}$. Tenemos que $q, r \in P$, $q \supseteq p$ y $r \supseteq p$ y, además, $q \perp r$. Por lo tanto, P es frondoso.
Como M es un modelo contable, por el lema 3.10, existe un filtro G, P-genérico sobre M y, como Pes frondoso, por el lema 3.11, $G \notin M$. También sabemos que $i_G(\Gamma) = G$ con $\Gamma = \{\langle \check{p}, p\rangle : p \in P\}$ y, por ende, que $G \in M[G]$.
Ahora, sea $f_G = \cup G$. Veamos que f_G es función de ω en 2:
• *Sean $x_1 \in dom(f_G)$ y $x_2 \in dom(f_G)$ tales que $f_G(x_1) \neq f_G(x_2)$. Existen $w, v \in f_G$ tales que $\langle x_1, f_G(x_1)\rangle = v$ y $\langle x_2, f_G(x_2)\rangle = w$. Como $f_G = \cup G$, existen $p, q \in G$ tales que $w \in p$ y $v \in q$. Como G es filtro, existe $r \in G$ tal que $r \supseteq p$ y $r \supseteq q$. De aquí que $w \in r$ y $v \in r$, es decir, $\langle x_1, f_G(x_1)\rangle \in r$ y $\langle x_2, f_G(x_2)\rangle \in r$ donde $f_G(x_1) \neq f_G(x_2)$. Como $r \in G$, r es función y, por lo tanto, $x_1 \neq x_2$. Por consiguiente, f_G es función.*
• *Sea $n \in \omega$. Queremos ver que $n \in dom(f_G)$. Sea $D_n = \{p \in P : n \in dom(p)\} \subseteq P$. Dado $p \in P$, si $n \in dom(p)$, entonces existe $q \in D_n$ ($q = p$) tal que $q \supseteq p$; si $n \notin dom(p)$, entonces*

$p : m \to 2$ para alguna $m \leq n$, sea $q = p \cup \{\langle i, 0\rangle : i = m, m+1, ..., n\}$, por lo tanto, $n \in dom(q)$ y $q \supseteq p$. Así, $\forall p \in P \exists q \in D_n(p \supseteq q)$. Por lo tanto, D_n es denso en P y, por el Axioma de Separación y porque $P \in M$, $D_n \in M$. Por consiguiente, $G \cap D_n \neq \emptyset$. Así pues, tenemos que $\exists p \in G(n \in dom(p))$ y $\langle n, i\rangle \in \cup G$ con $i = 0$ ó $i = 1$. Por lo tanto, $\forall n \in \omega(n \in dom(f_G))$.

Concluimos que f_G es función de ω en 2.

Si σ es un P-nombre para f_G, entonces:

- *$\{\langle 0, 0\rangle\} \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{0}$. ya que haciendo $\varphi(\tau_1, \tau_2) \rightleftharpoons \sigma(\tau_1) = \tau_2$, tenemos que $p \Vdash \varphi(\check{0}, \check{0})$ si y sólo si para cualquier filtro G, P-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

$[\varphi(i_G(\tau_1), i_G(\tau_2))]^{M[G]} \leftrightarrow [\sigma(i_G(\tau_1)) = i_G(\tau_2)]^{M[G]} \leftrightarrow [\sigma(i_G(\check{0})) = i_G(\check{0})]^{M[G]} \leftrightarrow [\sigma(0) = 0]^{M[G]}$

Además si $\{\langle 0, 0\rangle\} \in G$. entonces $\langle 0, 0\rangle \in \cup G = f_G$. Por lo tanto, $[\sigma(0) = 0]^{M[G]}$.

- *Similarmente, $\{\langle 0, 1\rangle\} \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{1}$.*
- *$1_P \Vdash \sigma \in {}^{\check{\omega}}\check{2}$, ya que, como $1_P \in G$ para todo filtro G, P-genérico sobre M,*

$1_P \Vdash \sigma \in {}^{\check{\omega}}\check{2}$ si y sólo si para cualquier filtro G, P-genérico sobre M, se cumple que $[i_G(\sigma) \in i_G({}^{\check{\omega}}\check{2})]^{M[G]} \leftrightarrow [f_G \in i_G({}^{\check{\omega}}\check{2})]^{M[G]} \leftrightarrow [f_G \in {}^{\omega} 2]^{M[G]}$.

- *$1_P \Vdash \sigma = \cup\Gamma$ si y sólo si para cualquier filtro G, P-genérico sobre M, se cumple que $[i_G(\sigma) = i_G(\cup\Gamma)]^{M[G]} \leftrightarrow [f_G = \cup i_G(\Gamma)]^{M[G]} \leftrightarrow [f_G = \cup G]^{M[G]}$.*
- *(Lema de Verdad) Si "$\sigma(\check{0}) = \check{0}$" es verdad en $M[G]$, es decir, si $p(0) = 0$ para algún $p \in G$ ($f_G(0) = 0$), entonces $p \Vdash \sigma(\check{0}) = \check{0}$.*

Teorema 3.8 *Si M es un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE, entonces $M[G]$ es un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE.*

Demostración.-

Ya demostramos que $M[G]$ es transitivo. Como M es contable y $M[G] = i_G[M^P]$, $M[G]$ también es contable. También sabemos que $M[G]$ es estándar, pues se definió como $i_G[M^P]$ con la pertenencia.

$M[G]$ es modelo del Axioma de Extensionalidad por ser transitivo y del Axioma de Regularidad por ser estándar. Demostraremos que $M[G]$ es modelo del Axioma del Par y del Axioma de Potencia por considerarlos representativos; la demostración para el resto de los axiomas (incluído el de Elección) puede verse en el capítulo 7 de [Kunen 1980].

Par:

Sean $x, y \in M[G]$. Tenemos que $x = i_G(\sigma)$ para algún $\sigma \in M^P$ y $y = i_G(\tau)$ para algún $\tau \in M^P$. Definimos $par(\sigma,\tau)$ como $par(\sigma,\tau) = \{\langle\sigma, 1_P\rangle, \langle\tau, 1_P\rangle\}$. El *P-nombre* del par $\{i_G(\sigma), i_G(\tau)\}$ está dado por $par(\sigma,\tau) \in M^P$, pues

$i_G(par(\sigma,\tau)) = \{i_G(\mu) : \exists p \in G(\langle\mu,p\rangle \in par(\sigma,\tau)\} = \{i_G(\sigma), i_G(\tau)\} = \{x,y\}$

Por consiguiente, $i_G(par(\sigma,\tau)) = \{x,y\} \in M[G]$.

Potencia:

Tenemos que demostrar que $\forall x \in M[G] \exists y \in M[G](\forall z \in M[G](z \subseteq x \leftrightarrow z \in y))$. Sea $x \in M[G]$. Tenemos que $x = i_G(\sigma)$ con $\sigma \in M^P$. Daremos $\rho \in M^P$ tal que

$\forall x \in M[G](x \subseteq i_G(\sigma) \rightarrow x \in i_G(\rho))$, es decir, $i_G(\rho)$ incluye a la potencia de $i_G(\sigma)$ en $M[G]$. ("$\leftarrow$" se obtiene por Separación en $M[G]$).

Sea $s = \{\tau \in M^P : dom(\tau) \subseteq dom(\sigma)\} = \mathcal{P}(dom(\sigma) \times P) \cap M$

y sea $\rho = s \times \{1_P\} = \{\langle\sigma, 1_P\rangle : \sigma \in s\} \in M^P$. Así, $i_G(\rho) \in M[G]$.

Sea $\mu \in M^P$ tal que $i_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$. Queremos demostrar que $i_G(\mu) \in i_G(\rho)$.

Si $\tau = \{\langle\pi,p\rangle : \pi \in dom(\sigma) \wedge p \Vdash \pi \in \mu\} \in s$, entonces $\langle\tau, 1_P\rangle \in \rho$ y, como $1_P \in G$, por la definición de i_G, tenemos que $i_G(\tau) \in i_G(\rho)$. Ahora veamos que $i_G(\tau) = i_G(\mu)$:

$\supseteq$) Si $i_G(\pi) \in i_G(\mu)$, entonces, por el Lema de Verdad, existe $p \in G$ tal que $p \Vdash \pi \in \mu$ y, como, $i_G(\mu) \subseteq i_G(\sigma)$, tenemos que $\pi \in dom(\sigma)$ Por lo tanto, $\langle\pi,p\rangle \in \tau$ y $i_G(\pi) \in i_G(\tau)$.

$\subseteq$) Si $i_G(\pi) \in i_G(\tau)$, entonces, por la definición de i_G, existe $p \in G$ tal que $\langle\pi, p\rangle \in \tau$. Por lo tanto, $\pi \in dom(\sigma)$ y $p \Vdash \pi \in \mu$. Así, por la definición de "forzar", tenemos que $i_G(\pi) \in i_G(\mu)$. Por lo tanto, $i_G(\tau) = i_G(\mu)$.

Concluimos que $i_G(\mu) \in i_G(\rho)$. ■

Así pues, tenemos que $M[G]$ es modelo transitivo, estándar y contable de ZFE.

Es importante subrayar que la definición del orden parcial $P \in M$ es muchas veces la que determina que la extensión genérica sea modelo del enunciado σ, aunque no siempre; en algunos casos se logra con cualquier orden parcial frondoso. El método de Forcing es general para casi todos los casos después de que hayamos determinado el orden parcial adecuado para cada enunciado σ (hay variantes del método, como el que se usa para obtener la consistencia relativa del Axioma de Elección que es llamado Forcing restringido).

Por todo lo anterior, el método de Forcing proporciona una prueba para la implicación de que si ZFE tiene un modelo transitivo, estándar y contable, entonces $ZFE+\sigma$ tiene un modelo transitivo, estándar y contable.

3.3.2 Consistencia Relativa de $V \neq L$

Utilizando el método de Forcing, demostraremos la consistencia relativa de $V \neq L$.

Teorema 3.9 *Si M es un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE, entonces existe un modelo estándar, transitivo y contable $M[G]$ de ZFE tal que $(V \neq L)^{M[G]}$.*

Demostración.-

Sea M un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE. Sea $P = (\bigcup_{n\in\omega} {}^n 2, \supseteq)$ (como en el ejemplo 3.4). Recordemos algunos resultados demostrados anteriormente:

1. P es frondoso (ejemplo 3.4).
2. $L^M = L_{o(M)}$ y $L^{M[G]} = L_{o(M[G])}$ (lema 3.8, ya que M y $M[G]$ son modelos transitivos).
3. $o(M) = o(M[G])$ (inciso (6) de la proposición 3.1).
4. $L^M \subseteq M$ y $L^{M[G]} \subseteq M[G]$ (Teorema de la Minimalidad de L (3.3)).
5. $M[G] = V^{M[G]}$ (trivial: $M[G] = \{x : x \in M[G]\} = \{x \in V : x \in M[G]\} = V^{M[G]}$).

Como M es un modelo contable y $P \in M$, tenemos, por el lema 3.10, que existe un filtro G, P-genérico sobre M. Como P es frondoso (1), por el lema 3.11, $G \notin M$. Sea $M[G]$ la extensión genérica dada por el método de Forcing, de donde $M[G]$ es un modelo estándar, transitivo y contable de ZFE. Así, $M \subsetneq M[G]$, ya que $M \subseteq M[G]$ (inciso (2) de la proposición 3.1), $G \notin M$ y $G \in M[G]$ (por el inciso (3) de la proposición 3.1, existe Γ tal que $i_G(\Gamma) = G$). Ahora, veamos que $(L \subsetneq V)^{M[G]}$:

$L^{M[G]} \underset{2}{=} L_{o(M[G])} \underset{3}{=} L_{o(M)} \underset{2}{=} L^M \underset{4}{\subseteq} M \subsetneq M[G] \underset{5}{=} V^{M[G]}$.

Es decir, $\forall x(x \in L^{M[G]} \to x \in V^{M[G]}) \land \exists x(x \in V^{M[G]} \land x \notin L^{M[G]})$.

Como $L^{M[G]} \subseteq M[G]$ (4) y $M[G] = V^{M[G]}$ (5),

tenemos que $\forall x \in M[G](x \in L^{M[G]} \to x \in V^{M[G]}) \land \exists x \in M[G](x \in V^{M[G]} \land x \notin L^{M[G]})$. Por consiguiente, tenemos que $[\forall x(x \in L \to x \in V) \land \exists x(x \in V \land x \notin L)]^{M[G]}$.

Concluimos que $(L \subsetneq V)^{M[G]}$ y, por lo tanto, que $(V \neq L)^{M[G]}$. ■

Sabemos que la consistencia de ZFE implica la existencia de un modelo de ZFE, pero no sabemos si ese modelo tiene las características que necesitamos para emplear el método de Forcing (ser estándar, transitivo y contable). Por consiguiente todavía no podemos demostrar el siguiente corolario.

Corolario 3.7 $Cons(ZFE) \Rightarrow Cons(ZFE + V \neq L)$.
$Cons(ZFE) \Rightarrow ZFE \nvdash V = L$.

Demostraremos este resultado al final de la siguiente sección.

3.3.3 Justificación del Método de Forcing

El teorema de Löwenheim-Skolem (ver [Bell y Slomson 1974], pp. 80-1) garantiza que si ZFE tiene un modelo infinito, entonces existe un modelo contable de ZFE. El Colapso de Mostowski asegura que si $\langle M, E\rangle$ es un modelo de ZFE con E una relacional bien-fundada sobre M, entonces existe un modelo $\langle M', \in\rangle$ de ZFE con M' transitivo. Por lo tanto, suponiendo la consistencia de ZFE podemos garantizar la existencia de un modelo contable. Sin embargo, no sabemos si la consistencia de ZFE implica la existencia de un modelo estándar o la existencia de un modelo bien fundado. Es más, uno de los problemas del método de Forcing es que se puede demostrar que de la suposición de que ZFE tenga un modelo, no se puede inferir que ZFE tenga un modelo estándar o un modelo bien fundado (ver [Amor 1991]). Entonces, para justificar este método necesitamos de una de las aplicaciones del Teorema de Reflexión que nos asegura que para todo subconjunto finito de axiomas de ZFE, hay un conjunto que es modelo estándar de él. Como el método de Forcing habla de un modelo (conjunto), entonces en realidad, aunque no se diga explícitamente, es un modelo de un pedazo finito de ZFE. Por lo tanto, basta con la aplicación del Teorema de Reflexión antes mencionado y con el Teorema de Compacidad de la Lógica (cualquier conjunto de enunciados de un lenguaje de primer orden tiene modelo si y sólo si todos sus subconjuntos finitos tienen modelo), para justificar el método de Forcing. Veamos esta aplicación del Teorema de Reflexión:

Corolario 3.8 (AE) *Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ son axiomas de ZFE, entonces se puede probar en ZFE que*
$\exists M\ [(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)^M \wedge M$ *transitivo* $\wedge \mid M \mid = \aleph_0]$.

Demostración.-

Recordemos el corolario 3.4 del teorema 3.6 y del Colapso de Mostowski: Dados Z clase transitiva y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ enunciados, tenemos que
$\forall x \subseteq Z[x \text{ transitivo} \Rightarrow \exists M[x \subseteq M \wedge M \text{ transitivo} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\varphi_i^M \leftrightarrow \varphi_i^Z) \wedge \mid M \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid x \mid\}]]$.
Sean $\varphi_1, ..., \varphi_n$ axiomas de ZFE. Sea $Z = V$ y $x = \omega$ (obsérvese que $x = \omega$ es infinito, caso que demostramos con cuidado (3.4)). Como $\omega \subseteq V$ y ω es transitivo, el corolario antes mencionado nos asegura la existencia de un conjunto M transitivo tal que $(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)^M$, $\omega \subseteq M$ y $\mid M \mid \leq máx\{\aleph_0, \mid \omega \mid\}$. Como $\omega \subseteq M$, tenemos que $\mid M \mid \geq \mid \omega \mid = \aleph_0$. Por lo tanto, $\mid M \mid = \aleph_0$.
Concluimos que $\exists M\ [(\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i)^M \wedge M \text{ transitivo} \wedge \mid M \mid = \aleph_0]$. ■

Observación 3.10 *Es muy importante observar que se usó el Axioma de Elección, ya que sin él no se puede asegurar que M sea contable. De aquí que el método de Forcing necesita justificarse dentro de ZFE. Recuérdese que si M no es contable no se puede asegurar la existencia del filtro P-genérico, base de todo el método.*

Teorema 3.10 *Metateorema Fundamental del método de Forcing.*
Sea σ un enunciado del lenguaje de ZFE. Si dado un modelo M estándar, transitivo y contable de ZFE podemos construir una extensión genérica $M[G](\supseteq M)$ tal que $M[G]$ es modelo de $ZFE+\sigma$, entonces $Cons(ZFE) \Rightarrow Cons(ZFE+\sigma)$ (y de aquí que $Cons(ZFE) \Rightarrow ZFE \nvdash \neg\sigma$).

Demostración.-

Supongamos que $ZFE + \sigma$ es inconsistente. Hay un enunciado χ tal que $ZFE + \sigma \vdash (\chi \wedge \neg\chi)$. Como las pruebas son objetos metamatemáticos finitos, hay un conjunto finito de axiomas de ZFE, $\varphi_1, ..., \varphi_n$, tales que $\varphi_1, ..., \varphi_n, \sigma \vdash (\chi \wedge \neg\chi)$. Ahora bien, como toda prueba como objeto metamatemático es una sucesión finita de fórmulas, de acuerdo con la suposición del teorema, hay un conjunto finito Γ de axiomas de ZFE en el cual podemos incluir a los axiomas $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Supongamos que dado un conjunto M modelo estándar, transitivo y contable de Γ se puede construir una extensión genérica $M[G]$ que lo contenga tal que $M[G]$ es modelo estándar, transitivo y contable de Γ y de σ. Por el corolario anterior, sabemos que
$ZFE \vdash \exists M((\bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi^M) \wedge M \text{ transitivo} \wedge \mid M \mid = \aleph_0)$ y, por el método de Forcing, sabemos que $ZFE \vdash \exists N((\bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi^N) \wedge \sigma^N \wedge N \text{ transitivo} \wedge \mid N \mid = \aleph_0)$, con $N = M[G]$. Así, como

$\varphi_1, ..., \varphi_n, \sigma \vdash (\chi \wedge \neg\chi)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ y $ZFE \vdash (\bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi^N) \wedge \sigma^N$, tenemos que $ZFE \vdash (\chi \wedge \neg\chi)^N$, es decir, $ZFE \vdash \chi^N \wedge \neg\chi^N$. Por lo tanto, ZFE es inconsistente. ■

Con este último teorema, podemos demostrar fácilmente el corolario 3.7

($Cons(ZFE) \Rightarrow Cons(ZFE + V \neq L)$ y $Cons(ZFE) \Rightarrow ZFE \nvdash V = L$), pues el teorema 3.9 demuestra que dado un modelo M estándar, transitivo y contable de ZFE existe un modelo $M[G]$ estándar transitivo y contable de ZFE y de $V \neq L$.

En la segunda sección de este capítulo demostramos, con el método de los modelos internos, que

$ZF \nvdash V \neq L$ y en la cuarta sección demostramos, con el método de Forcing, que $ZF \nvdash V = L$. Por lo tanto, hemos demostrado que, dentro de ZF, el Axioma de Constructibilidad no se puede ni demostrar ni refutar, es decir, es indecidible para ZF. Sin embargo, lo que afirma el famoso teorema de Gödel al respecto de las consistencias absolutas, nos hace pensar que estamos suponiendo una afirmación de la cual no sabemos su verdad (la consistencia de ZF). En realidad, los resultados de consistencia, como el del método de los modelos internos y el de Forcing, están sujetos a la suposición de que ZF es consistente y esta última afirmación, desde el punto de vista matemático, tiene que tomarse como una hipótesis.

Capítulo 4

El Teorema de Scott

4.1 Introducción

En 1961, Dana Scott demostró que si existen cardinales medibles, entonces $V \neq L$. Obviamente este teorema se demuestra dentro de ZF, luego entonces, como el Axioma de Constructibilidad es independiente de ZF, no podemos demostrar la existencia de cardinales medibles. Por lo tanto, podríamos pensar que el teorema de Scott no nos dice mucho. Sin embargo, la pregunta: ¿es $V \neq L$?, aunque no podamos contestarla dentro de ZF, sigue en pie; es decir, queremos saber si $V = L$ o si $V \neq L$ y, como dentro de ZF no pudimos saberlo, buscaremos otros medios para contestarla. El teorema de Scott nos ayudará para futuras reflexiones metamatemáticas sobre la no-constructibilidad del universo, ya que discutiremos en favor de la existencia de cardinales medibles. Estas reflexiones junto con otros argumentos se desarrollarán en el último capítulo.

Para poder demostrar el teorema de Scott, tendremos que dar algunas definiciones y probar con cuidado varios resultados.

4.2 Ultrafiltros

Recordemos la definición de filtro (definición 3.7): G es filtro sobre un orden parcial $P(= \langle P, \leq\rangle)$ si:

a) $G \neq \emptyset, G \subsetneq P$

b) $\forall p, q \in G, \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$

c) $\forall p \in G, \forall q \in P(p \leq q \rightarrow q \in G)$

Definición 4.1 *Diremos que F es un filtro sobre un conjunto I si se cumple que*

a) $F \neq \emptyset, F \subsetneq \mathcal{P}(I)$

b) $\forall A, B \in F((A \cap B) \in F)$

c) $\forall A \in F(A \subseteq B \rightarrow B \in F)$

Observación 4.1 *En esta definición, el filtro es sobre el orden parcial $(\mathcal{P}(I), \subseteq)$, pues $\forall A, B \in F((A \cap B) \in F) \leftrightarrow \forall A, B \in F \exists C \in F(C \subseteq A \wedge C \subseteq B)$ por el inciso (c) de la definición.*

Definición 4.2 *Diremos que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre un conjunto I si $\mathcal{U}$ es un filtro sobre I y no existe un filtro F sobre I tal que $\mathcal{U} \subsetneq F$, es decir, si $\mathcal{U}$ es un filtro maximal sobre I.*

Observación 4.2 *El complemento de $A \in \mathcal{P}(I)$, $I - A$, es único y cumple que $A \cap (I - A) = \emptyset$ y $A \cup (I - A) = I$.*

Definición 4.3 *Diremos que un subconjunto A de $\mathcal{P}(I)$ tiene la propiedad de la intersección finita si la intersección de cualquier subconjunto finito de A es distinta del vacío.*

Lema 4.1 *Todo filtro F sobre I tiene la propiedad de la intersección finita.*

Demostración.-

Supongamos que hay un F filtro sobre I tal que no tiene la propiedad de la intersección finita. Dado $n \in \omega$, existe $\{x_j : j \in n\} \subseteq F$ tal que $\bigcap_{j \in n} x_j = \emptyset$. Como F es filtro, $\forall i, j \in n(x_i \cap x_j \in F)$ y, por consiguiente, ¡ $\bigcap_{j \in n} x_j = \emptyset \in F$! (si $\emptyset \in F$, entonces, como $\forall A \in F(A \subseteq B \rightarrow B \in F)$, tenemos que $F = \mathcal{P}(I)$). ■

El siguiente lema muestra una característización útil de los ultrafiltros.

Lema 4.2 *Si F es un filtro sobre un conjunto I, F es un ultrafiltro sobre I si y sólo si $\forall X \in \mathcal{P}(I)(X \in F \vee (I - X) \in F)$.*

Demostración.-

Obsérvese que si existe $X \in \mathcal{P}(I)$ tal que $X \in F$ e $I - X \in F$, entonces, como F es filtro $\emptyset = X \cap (I - X) \in F$ y, por lo tanto, *¡*$F = \mathcal{P}(I)$*!*

$\Rightarrow$) Supongamos que F es un ultrafiltro. Supongamos, sin perder generalidad, que $X \notin F$. Sea G el "filtro" generado por $F \cup \{X\}$. Como F es un ultrafiltro, $G = \mathcal{P}(I)$. Por lo tanto, $\emptyset \in G$ y $F \cup \{X\}$ no tiene la propiedad de la intersección finita. Así, existe $\{x_j : j \in n\} \subseteq F$ tal que $(\bigcap_{j \in n} x_j) \cap X = \emptyset$, de donde $\bigcap_{j \in n} x_j \subseteq I - X$. Como F es un filtro, $\bigcap_{j \in n} x_j \in F$ y, por lo tanto, $I - X \in F$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cualquier $X \in \mathcal{P}(I)$, $X \in F$ o $I - X \in F$. Sea G un filtro tal que $F \subsetneq G$. Por consiguiente, existe $X \in G - F$. Como $X \notin F$, $I - X \in F \subseteq G$, tenemos que $\emptyset = X \cap (I - X) \in G$ y, por lo tanto, *¡*$G = \mathcal{P}(I)$*!* Podemos concluir que F es un filtro maximal, es decir, un ultrafiltro. ■

Recordemos que el Lema de Zorn, equivalente al Axioma de Elección (ver [Amor 1997] pp. 101-5), afirma que para todo orden parcial P no vacío tal que toda cadena $C \subseteq P$ está acotada en P, existe $A \in P$ maximal en P. Este poderoso lema se utiliza para demostrar que todo filtro puede extenderse a un ultrafiltro:

Teorema 4.1 (AE) *Teorema del Ultrafiltro. Todo filtro $F \subsetneq \mathcal{P}(I)$ puede extenderse a un ultrafiltro $\mathcal{U}$.*

Demostración.-

Sea $F \subsetneq \mathcal{P}(I)$ un filtro. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los filtros en $\mathcal{P}(I)$ tales que contienen a F. Como $F \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ no es vacío y podemos ordenarlo parcialmente con la contención. Mostraremos que las cadenas de $\mathcal{F}$ tienen cotas superiores.

Sea $\mathcal{D} = \{D_j : j \in J\}$ una cadena en $\mathcal{F}$ y sea $D = \bigcup_{j \in J} D_j$. Si $x, y \in D$, entonces existen $i, j \in J$ tales que $x \in D_i$ y $y \in D_j$. Como $\mathcal{D}$ es una cadena, tenemos que $D_i \subseteq D_j$ ó $D_j \subseteq D_i$. Supongamos que $D_i \subseteq D_j$, entonces $x, y \in D_j$ y, como D_j es un filtro, $x \cap y \in D_j \subseteq D$. Si $z \in \mathcal{P}(I)$ y $x \subseteq z$, entonces $z \in D_j \subseteq D$. Como $\emptyset \notin D_j$ para toda $j \in J$, tenemos que $\emptyset \notin D$. Por lo tanto, D es un filtro. Por otro lado, $F \subseteq D$, de donde $D \in \mathcal{F}$. Concluimos que D es cota superior de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{F}$. Por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es ultrafiltro y extiende a F. ■

Se ve fácilmente, a partir de la definición de filtro, que todo filtro es cerrado bajo intersecciones finitas: Sin embargo, un filtro no tiene por qué ser cerrado bajo intersecciones de cardinalidad infinita. De ahí las siguientes definiciones.

Definición 4.4 *Un cardinal κ es regular si y sólo si $\forall\lambda < \kappa(\kappa \neq \mid \bigcup_{\beta<\lambda} X_\beta \mid)$. donde $\forall\beta < \lambda \mid X_\beta \mid < \kappa$. Es decir, κ es un cardinal regular si y sólo si κ no es una unión de menos de κ conjuntos cada uno de cardinalidad menor que κ.*

Definición 4.5 *Si κ es un cardinal regular y F es un filtro sobre I, F es κ-completo si y sólo si F es cerrado bajo intersecciones de menos de κ conjuntos. Es decir, si $\{x_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es tal que $\gamma < \kappa$, $x_\alpha \subseteq I$ y $\forall\alpha < \gamma(x_\alpha \in F)$, entonces $\bigcap_{\alpha<\gamma} x_\alpha \in F$.*

Definición 4.6 *Si un filtro es $\aleph_1$-completo, decimos que es σ-completo.*

Observación 4.3 *Todo filtro es $\aleph_0$-completo.*

El siguiente lema afirma que es equivalente ser filtro κ-completo y cumplir que para cualquier unión de menos de κ conjuntos en el filtro, al menos un uniendo está en el filtro.

Lema 4.3 *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre I, κ es un cardinal y $\alpha < \kappa$, entonces*
$[\forall i < \alpha(A_i \in \mathcal{U}) \rightarrow \bigcap_{i<\alpha} A_i \in \mathcal{U}] \Leftrightarrow [\bigcup_{i<\alpha} A_i \in \mathcal{U} \rightarrow \exists i < \alpha(A_i \in \mathcal{U})]$

Demostración.-

$\Rightarrow$) Supongamos que $\bigcup_{i<\alpha} A_i \in \mathcal{U}$ con $\alpha < \kappa$. Si $\forall i < \alpha(A_i \notin \mathcal{U})$, entonces, por el lema 4.2, $I - A_i \in \mathcal{U}\ \forall i < \alpha$. Por hipótesis, $\bigcap_{i<\alpha} (I - A_i) \in \mathcal{U}$. Como $\bigcap_{i<\alpha} (I - A_i) = I - \bigcup_{i<\alpha} A_i$, tenemos que ¡ $\emptyset = \bigcup_{i<\alpha} A_i \cap (I - \bigcup_{i<\alpha} A_i) \in \mathcal{U}$!
Por lo tanto, $\exists i < \alpha(A_i \in \mathcal{U})$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\forall i < \alpha(A_i \in \mathcal{U})$. Si $\bigcap_{i<\alpha} A_i \notin \mathcal{U}$, entonces, por el lema 4.2, $I - \bigcap_{i<\alpha} A_i \in \mathcal{U}$ y, como $I - \bigcap_{i<\alpha} A_i = \bigcup_{i<\alpha} (I - A_i)$, por hipótesis, $I - A_j \in \mathcal{U}$ para algún $j < \alpha$. Por lo tanto, por la observación del lema 4.2, ¡ $A_j \notin \mathcal{U}$! ■

Otra característica de ciertos filtros es "ser generados" por alguno de sus elementos:

Definición 4.7 *Un filtro F sobre I se llama principal si hay $x_0 \subseteq I, x_0 \neq \emptyset$ tal que $F = \{x \subseteq I : x_0 \subseteq x\}$.*

Observación 4.4 *Todo filtro finito es principal.*

Lema 4.4 *Todo filtro principal es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.*

Demostración.-

Sea x_0 el generador de un filtro principal F. Si $F_\alpha \in F$ para toda $\alpha \in J$, entonces $\forall \alpha \in J(x_0 \subseteq F_\alpha)$. Por lo tanto, $x_0 \subseteq \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha$. $\bigcap_{\alpha \in J}$. Concluimos que $F_\alpha \in F$. ■

Ejemplo 4.1 *El filtro de Frechet o de los cofinitos.*
Sea I infinito. Sea $F = \{x \subseteq I : I - x$ es finito$\}$. Es fácil verificar que F es filtro. Supongamos que F es principal. Existe x_0 tal que $x_0 \subseteq x$ para toda $x \in F$. Como I es infinito y el complemento de x_0 es finito, x_0 es infinito. Sea $y \in x_0 \neq \emptyset$ y sea $x_1 = x_0 - \{y\}$. Claramente, $x_1 \in F$ pues su complemento es finito, es decir, $x_0 - \{y\} \in F$. Así, ¡ $x_0 \subseteq x_0 - \{y\}$! Por lo tanto, F es no-principal.

En este último ejemplo los conjuntos de F son todos infinitos. Los siguientes lemas nos dan una caracterización de los ultrafiltros no-principales con respecto a la cardinalidad de sus elementos.

Lema 4.5 *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal, entonces hay al menos un conjunto unitario en $\mathcal{U}$.*

Demostración.-

Supongamos que $\mathcal{U}$ no tiene ningún conjunto unitario. Por el lema 4.2, $\forall a \in I(I - \{a\} \in \mathcal{U})$. Como $\mathcal{U}$ es filtro principal, por el lema 4.4, ¡ $\emptyset = \bigcap_{a \in I} (I - \{a\}) \in \mathcal{U}$!■

Lema 4.6 *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es no-principal si y sólo si no tiene conjuntos finitos.*

Demostración.-

$\Rightarrow$) Veremos que si $\mathcal{U}$ tiene un conjunto finito, entonces es principal.

Supongamos que $\mathcal{U}$ tiene conjuntos finitos. Sea $X \in \mathcal{U}$ el conjunto de cardinalidad mínima en $\mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro, $X \neq \emptyset$. Afirmamos que X tiene sólo un elemento. Supongamos que $\exists x, y(x \in X \wedge y \in X)$. Como X es el elmento de $\mathcal{U}$ de cardinalidad mínima, entonces $\{x\} \notin \mathcal{U}$. Por el lema 4.2, tenemos que $I - \{x\} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, ¡ $X \cap (I - \{x\}) = X - \{x\} \in \mathcal{U}$! (X es finito, así es que $X - \{x\}$ es de cardinalidad menor y X es el conjunto de cardinalidad mínima

en $\mathcal{U}$). Por lo tanto, X tiene solamente un elemento, es decir, $X = \{x\}$.
Sea $Y \in \mathcal{U}$, entonces $Y \cap \{x\} \in \mathcal{U}$ y, como $\emptyset \notin \mathcal{U}$, $Y \cap \{x\} \neq \emptyset$. Así, tenemos que $\{x\} \subseteq Y$. Por lo tanto, $\{x\} \subseteq Y$ para toda $Y \in \mathcal{U}$. Por consiguiente, $\mathcal{U}$ es principal.
$\Leftarrow$) Veremos que si $\mathcal{U}$ es principal, entonces tiene conjuntos finitos.
Supongamos que $\mathcal{U}$ es principal. Por el lema 4.5, $\exists X \in \mathcal{U}(X = \{x\})$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ tiene al menos un conjunto finito. ■

Ejemplo 4.2 *Sea F el filtro de los cofinitos sobre ω (ejemplo 4.1). Sea $\mathcal{U}$ el ultrafiltro que extiende a F. Veamos que $\mathcal{U}$ es no-principal.*
Sea $x \subseteq \omega$ tal que x es finito. Entonces, $\omega - x \in F$. Por otro lado, como $F \subseteq \mathcal{U}$. tenemos que $\omega - x \in \mathcal{U}$ y. por el lema 4.2, $x \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto. $\mathcal{U}$ no tiene conjuntos finitos y, por el lema anterior, $\mathcal{U}$ es no-principal.

Lema 4.7 *Sea κ un cardinal infinito. No existe un ultrafiltro sobre κ que sea no-principal y κ^+-completo.*

■Demostración.-
Supongamos que existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre κ no-principal y κ^+-completo. Sea $\alpha \in k$. Por el lema 4.5, $\{\alpha\} \notin \mathcal{U}$. Así, tenemos que, por el lema 4.2, $\forall \alpha \in \kappa(\kappa - \{\alpha\} \in \mathcal{U})$. Como $\mathcal{U}$ es κ^+-completo, entonces ¡ $\emptyset = \bigcap_{\alpha \in \kappa} (\kappa - \{\alpha\}) \in \mathcal{U}$! Por lo tanto, no hay ultrafiltro sobre κ no-principal κ^+-completo.

Lema 4.8 *Sea κ un cardinal infinito. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre κ no-principal, κ-completo, entonces*
$\forall \alpha < \kappa(\kappa - \alpha \in \mathcal{U})$.

Demostración.-
Por inducción sobre $\alpha \in \kappa$.
Si $\alpha = 0$, entonces $\kappa - 0 = \kappa \in \mathcal{U}$.
Supongamos que $\kappa - \alpha \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre κ, $\alpha \notin \mathcal{U}$ y, además, $\{\alpha\} \notin \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es no-principal (lema 4.6). Como $\mathcal{U}$ es κ-completo, por el lema 4.3, $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\kappa - (\alpha + 1) \in \mathcal{U}$.
Si $\gamma < k$, γ es un ordinal límite y suponemos que $\forall \beta < \gamma(\kappa - \beta \in \mathcal{U})$, entonces

$\kappa - \gamma = \kappa - \bigcup_{\beta<\gamma} \beta = \bigcap_{\beta<\gamma} (\kappa - \beta)$, pues $\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beta$. Como $\mathcal{U}$ es κ-completo, $\gamma < \kappa$ y $\forall \beta < \gamma(\kappa - \beta \in \mathcal{U})$, tenemos que $\bigcap_{\beta<\gamma} (\kappa - \beta) = \kappa - \gamma \in \mathcal{U}$. ■

4.3 La Ultrapotencia del Universo

Definición 4.8 *Sea I un conjunto no vacío. Sean $A_i \neq \emptyset$ conjuntos para cada $i \in I$. El producto cartesiano de los conjuntos A_i se define de la siguiente manera:*
$\prod_{i\in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid \forall i \in I(f(i) \in A_i)\}$.

Observación 4.5 *Con las letras f, g, h denotaremos funciones.*

Definición 4.9 *Sea I un conjunto no vacío. Sean $A_i \neq \emptyset$ conjuntos para cada $i \in I$. Sea F un filtro sobre I. Decimos que dos funciones $f, g \in \prod_{i\in I} A_i$ son F-equivalentes ($f \sim_F g$) si y sólo si* $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F$

Proposición 4.1 *La relación $\sim_F$ es una relación de equivalencia sobre $\prod_{i\in I} A_i$.*

Demostración.-

- Reflexividad: Claramente, si $f \in \prod_{i\in I} A_i$, entonces $\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I \in F$. Por lo tanto, $f \sim_F f$.
- Simetría: Si $f \sim_F g$, entonces $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F$ y $\{i \in I : g(i) = f(i)\} \in F$. Por lo tanto, $g \sim_F f$.
- Transitividad: Si $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$, entonces $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F$ y
$\{i \in I : g(i) = h(i)\} \in F$. Como F es filtro, $(\{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\}) \in F$. Como F es filtro y $(\{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\}) \subseteq \{i \in I : f(i) = h(i)\}$, tenemos que
$\{i \in I : f(i) = h(i)\} \in F$. Por lo tanto, $f \sim_F g$. ■

Intuitivamente, un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I consiste en todos los subconjuntos "grandes" de I y podemos pensar que $f \sim_{\mathcal{U}} g$ es como decir que f es igual a g en "casi todas" sus coordenadas.

Definición 4.10 *Sea $f \in \prod_{i\in I} A_i$. La clase de equivalencia de f, denotada por f_F, es* $f_F = \{g \in \prod_{i\in I} A_i : f \sim_F g\}$.

Definición 4.11 *Dado $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, definimos el ultraproducto de A_i módulo $\mathcal{U}$ ($\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}$) como el conjunto de todas las clases de equivalencia $\sim_{\mathcal{U}}$, es decir, $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U} = \{f_{\mathcal{U}} : f \in \prod_{i\in I} A_i\}$.*

Definición 4.12 *Sea I un conjunto no vacío y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro.*
Sean $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, \{P_j^{\mathcal{U}_i}\}_{j\in J}, \{F_k^{\mathcal{U}_i}\}_{k\in K}, \{c_l^{\mathcal{U}_i}\}_{l\in L}\rangle$ estructuras en un lenguaje $\mathcal{L}$, donde A_i, $\{P_j^{\mathcal{U}_i}\}_{j\in J}$, $\{F_k^{\mathcal{U}_i}\}_{k\in K}$ y $\{c_l^{\mathcal{U}_i}\}_{l\in L}$ son el universo, las letras predicativas, las letras funcionales y las constantes respectivamente de cada $\mathfrak{A}_i$. Definimos el ultraproducto de las $\mathfrak{A}_i$ ($\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} = \mathfrak{A}$) como el modelo de $\mathcal{L}$ tal que:

1. *El universo de $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ es $\prod_{i\in I} A_i/\mathcal{U}$.*
2. *Si P es una letra predicativa n-aria de $\mathcal{L}$,*
   entonces la interpretación de P en $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ ($P^{\mathfrak{A}}$) es:
   $P^{\mathfrak{A}}(f^1_{\mathcal{U}}, ..., f^n_{\mathcal{U}})$ *si y sólo si* $\{i \in I : P^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), ..., f^n(i))\} \in \mathcal{U}$
3. *Si F es una letra funcional n-aria de $\mathcal{L}$,*
   entonces la interpretación de F en $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ ($F^{\mathfrak{A}}$) es:
   $F^{\mathfrak{A}}(f^1_{\mathcal{U}}, ..., f^n_{\mathcal{U}}) = g_{\mathcal{U}}$ *si y sólo si* $\{i \in I : F^{\mathfrak{A}_i}(f^1(i), ..., f^n(i)) = g(i)\} \in \mathcal{U}$
4. *Sea c una constante de $\mathcal{L}$, entonces la interpretación de c en $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ ($c^{\mathfrak{A}}$) es:*
   $c^{\mathfrak{A}} = h_{\mathcal{U}}$ *si y sólo si* $\{i \in I : c^{\mathfrak{A}_i} = h(i)\} \in \mathcal{U}$

Es sencillo probar que esto último está bien definido, es decir, que la definición depende sólo de las clases de equivalencia y no de los "representantes" de estas clases.

El siguiente teorema es sorpresivo, a pesar de que la definición de ultraproducto haya sido construida precisamente para que esto pasara. Hasta ahora nos daremos cabal cuenta de lo poderoso que es ser un conjunto en el ultrafiltro.

Teorema 4.2 (AE) *Teorema de Los o Teorema Fundamental de Ultraproductos. Si $\mathfrak{A}$ es el ultraproducto $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$, $\phi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula en el lenguaje $\mathcal{L}$ y $f^1_{\mathcal{U}}, ..., f^n_{\mathcal{U}} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$, entonces: $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \vDash_{(f^1_{\mathcal{U}}, ..., f^n_{\mathcal{U}})} \phi$ si y sólo si $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \vDash_{(f^1(i), ..., f^n(i))} \phi\} \in \mathcal{U}$.*

Demostración.-

Por inducción sobre la formación de fórmulas.

Supongamos que $\phi(x_1,...,x_n) \rightleftharpoons x_1 = x_2$. $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \phi \Leftrightarrow f^1_{\mathcal{U}} = f^2_{\mathcal{U}}$
$\Leftrightarrow f^1 \sim_{\mathcal{U}} f^2 \Leftrightarrow \{i \in I : f^1(i) = f^2(i)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} x_1 = x_2\} \in \mathcal{U}$.

Se demuestra análogamente para $\phi(x_1,...,x_n) \rightleftharpoons P(x_1,...,x_n)$.

Supongamos que para ψ y χ el teorema se cumple.

Sea $\phi \rightleftharpoons \psi \wedge \chi$. Sea $D_\psi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \psi\}$ y sea $D_\chi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \chi\}$.
$D_\psi \cap D_\chi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \psi \wedge \chi\}$. Tenemos que: $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \psi \wedge \chi$
$\Leftrightarrow \prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \psi$ y $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \chi \overset{H.I.}{\Leftrightarrow} D_\psi \in \mathcal{U}$ y $D_\chi \in \mathcal{U} \Leftrightarrow D_\psi \cap D_\chi \in \mathcal{U}$.
Sea $\phi \rightleftharpoons \neg\psi$. $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \neg\psi \Leftrightarrow \prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \not\models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \psi$
$\overset{H.I.}{\Leftrightarrow} \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \psi\} \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow I - \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \psi\} \in \mathcal{U}$
$\Leftrightarrow \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \neg\psi\} \in \mathcal{U}$.

Sea $\phi \rightleftharpoons \exists x_m\psi$. Sea $D = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \exists x_m\psi\}$. Veremos que
$\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \exists x_m\psi$ si y sólo si $D \in \mathcal{U}$
$\Rightarrow$) Supongamos que $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \exists x_m\psi$. Hay $b \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ tal que
$\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})[x_m/b]} \psi$. Sea $E = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))[x_m/b]} \psi\}$. Por hipótesis de inducción, $E \in \mathcal{U}$. Como $E \subseteq D$ y $\mathcal{U}$ es filtro, entonces $D \in \mathcal{U}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $D \in \mathcal{U}$. Si $i \in D$, entonces $\mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))} \exists x_m\psi$. Hay $b_i \in A_i$ tal que $\mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))[x_m/b_i]} \psi$. Por el Axioma de Elección, existe $c \in \prod A_i$ tal que $c_i = b_i$ si $i \in D$, y es cualquier elemento de A_i si $i \notin D$. Tenemos que $D \subseteq \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))[x_m/c]} \psi\}$ y, por hipótesis, $D \in \mathcal{U}$, así es que $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models_{(f^1(i),...,f^n(i))[x_m/c]} \psi\} \in \mathcal{U}$. Por hipótesis de inducción, $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1(i),...,f^n(i))[x_m/c]} \psi$. Por lo tanto, $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models_{(f^1_{\mathcal{U}},...,f^n_{\mathcal{U}})} \exists x_m\psi$. ■

Corolario 4.1 *Si σ es un enunciado en $\mathcal{L}$, entonces:*
$\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U} \models \sigma$ *si y sólo si* $\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \sigma\} \in \mathcal{U}$.

Demostración.-

Es inmediata del teorema anterior. ■

Intuitivamente, este corolario afirma que un enunciado es verdadero en $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i/\mathcal{U}$ si y sólo si es verdadero en "casi todos" los factores.

Para demostrar el teorema de Scott, necesitamos definir la ultrapotencia del universo conjuntista. Hasta ahora, hemos definido el ultraproducto en estructuras cuyos universos son conjuntos. La ultrapotencia es el ultraproducto de una misma estructura. La ultrapotencia del universo conjuntista será el ultraproducto de V, κ veces con κ un cardinal. Para definir esta ultrapotencia con todo rigor tenemos que asegurarnos que, aunque el universo de esta nueva estructura sea una clase propia, sus elementos sean conjuntos; para esto utilizaremos el llamado truco de Scott.

Observación 4.6 *Es importante recordar que, como fue discutido al principio de esta tesis, las clases propias no existen dentro de ZF, sin embargo, podemos hablar de ellas si no olvidamos que no son individuos de nuestro universo sino abreviaciones de fórmulas del lenguaje (ver [Amor 1993]).*

Definición 4.13 *Sea κ un cardinal. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre κ ($\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$).*
Dadas $f, g : \kappa \to V$, definimos $f \sim g$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$.

De la misma manera que como definimos el ultraproducto, definiremos los elementos de la ultrapotencia como las clases de equivalencia. Sin embargo, si definimos $\bar{f} = \{g \in^\kappa V : g \sim f\}$, las clases de equivalencia no tienen por qué ser conjuntos. De ahí, la siguiente definición que utiliza el truco de Scott.

Definición 4.14 $\bar{f} = \{g \in^\kappa V : g \sim f \wedge \forall h \in^\kappa V(h \sim f \to \rho(g) \leq \rho(h))\}$

Observación 4.7 *El truco de Scott considera sólo las funciones de menor rango. Obsérvese que este truco ultiliza el Axioma de Regularidad ($\bigcup\limits_{\alpha \in OR} V_\alpha = V$), ya que da por un hecho que existe $\alpha \in OR$ tal que $\rho(g) = \alpha$. Es decir, dado g un conjunto, da por un hecho que existe $\alpha \in OR$ tal que $g \in V_{\alpha+1}$.*

Definición 4.15 *Definimos la ultrapotencia del universo, denotada por $V^\kappa/\mathcal{U}$, como*
$V^\kappa/\mathcal{U} = \{\bar{f} : f \in^\kappa V\}$.

La siguiente definición es la interpretación de la pertenencia en la ultrapotencia del universo.

Definición 4.16 *Sean $\bar{f}, \bar{g} \in V^\kappa/\mathcal{U}$. Definimos $E \subseteq V^\kappa/\mathcal{U} \times V^\kappa/\mathcal{U}$ de la siguiente manera:*
$\bar{f} E \bar{g}$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) \in g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$

La interpretación de la igualdad estará dada como la interpretación de las letras predicativas en la definición 4.12, es decir, $\bar{f} = \bar{g}$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = g(\alpha)\} \in \mathcal{U}$.

El siguiente teorema es la adaptación del Teorema de Los (4.2) a la ultrapotencia del universo.

Teorema 4.3 (AE) *Esquema de Los. Dada* $\phi(x_1, ..., x_n)$ *una fórmula en el lenguaje de* ZF. $\forall f_1, ..., f_n \in^\kappa V(\phi^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \phi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U})$.

Demostración.-

Por inducción sobre la formación de fórmulas.

Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons x_1 = x_2$. Tenemos que $(x_1 = x_2)^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow \bar{f}_1 = \bar{f}_2$ $\leftrightarrow \{\alpha < \kappa : f_1(\alpha) = f_2(\alpha)\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \phi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

Supongamos que $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons x_1 \in x_2$. Tenemos que $(x_1 \in x_2)^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow \bar{f}_1 E \bar{f}_2$ $\leftrightarrow \{\alpha < \kappa : f_1(\alpha) \in f_2(\alpha)\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \phi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

Supongamos que para ψ y χ el teorema se cumple.

Sea $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons (\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n)$. Tenemos que $((\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow$ $[(\psi(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}\ (\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)]$ y $[(\chi(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)] \overset{H.I.}{\leftrightarrow}$ $[\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}]$ y $[\{\alpha < \kappa : \chi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}]$. Como $\mathcal{U}$ es filtro, $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \cap \{\alpha < \kappa : \chi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$. Además, $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \cap \{\alpha < \kappa : \chi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \subseteq \{\alpha < \kappa : (\psi \wedge \chi)(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\}$. Por lo tanto, como $\mathcal{U}$ es filtro, $\{\alpha < \kappa : \psi \wedge \chi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

Sea $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons \neg\psi(x_1, ..., x_n)$. Tenemos que $((\neg\psi)(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow$ $\neg((\psi(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n)) \overset{H.I.}{\leftrightarrow} \neg(\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}) \leftrightarrow$ $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \notin \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \notin \mathcal{U} \leftrightarrow$ $\kappa - \{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_2(\alpha))\} \in \mathcal{U} \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \neg\psi(f_1(\alpha), ..., f_2(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

Sea $\phi(x_1, ..., x_n) \rightleftharpoons \exists y\psi(x_1, ..., x_n)$. Tenemos que $(\exists y\psi(x_1, ..., x_n))^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow$ hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\psi^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n, \bar{f}) \overset{H.I.}{\leftrightarrow}$ hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

Falta ver que: Hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\} \in \mathcal{U}$ si y sólo si $\{\alpha < \kappa : \exists y\psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow$) Como $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\} \subseteq \{\alpha < \kappa : \exists y\psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\}$, $\mathcal{U}$ es filtro y hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\} \in \mathcal{U}$, tenemos que hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\{\alpha < \kappa : \exists y\psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\{\alpha < \kappa : \exists y\psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$.

$\Leftarrow$) Sea $D = \{\alpha < \kappa : \exists y \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U}$. Si $\alpha \in D$, entonces hay $x_\alpha \in V$ tal que $\psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), x_\alpha)$. Utilizando el Axioma de Elección, definimos $f : \kappa \to V$ de la sigiente manera:

$$f(\alpha) = \begin{cases} x_\alpha & \text{si } \alpha \in D \\ \emptyset & \text{si } \alpha \notin D \end{cases}$$

Así, tenemos que $D \subseteq \{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\}$. Por lo tanto, $\{\alpha < \kappa : \psi(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha), f(\alpha))\} \in \mathcal{U}$. Por hipótesis de inducción, hay una $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $\psi^{(V^\kappa/\mathcal{U}, E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n, \bar{f})$. ■

Corolario 4.2 *Si σ es un enunciado del lenguaje de ZF, entonces $\sigma^{(V^\kappa/\mathcal{U}, E)} \leftrightarrow \sigma$.*

Demostración.-

Tenemos que $\forall f_1, ..., f_n \in^\kappa V(\sigma \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \sigma(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U})$, pues σ es enunciado y no depende de $f_1, ..., f_n \in^\kappa V$. Como σ es enunciado y $\emptyset \notin \mathcal{U}$, entonces $\{\alpha < \kappa : \sigma(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} = \kappa$. Por el teorema anterior, $\forall f_1, ..., f_n \in^\kappa V(\sigma^{(V^\kappa/\mathcal{U}, E)}(\bar{f}_1, ..., \bar{f}_n) \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \sigma(f_1(\alpha), ..., f_n(\alpha))\} \in \mathcal{U})$.
Por lo tanto, $\sigma \leftrightarrow \sigma^{(V^\kappa/\mathcal{U}, E)}$. ■

Corolario 4.3 *$(V^\kappa/\mathcal{U}, E)$ es modelo clase (no estándar) de ZFE.*

Demostración.-

Es inmediata del corolario anterior. ■

Definición 4.17 *Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos estructuras (estructuras-clase) del mismo tipo ρ de lenguaje, decimos que $\mathfrak{A}$ es elementalmente equivalente a $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$) si y sólo si cualquier enunciado de $\mathcal{L}_\rho$ verdadero en $\mathfrak{A}$ es verdadero en $\mathfrak{B}$.*

Observación 4.8 *$\equiv$ es relación de equivalencia sobre estructuras (estructuras-clase) del mismo tipo. Claramente $\equiv$ es reflexiva y transitiva. $\equiv$ es simétrica, ya que si $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, dado σ enunciado verdadero en $\mathfrak{B}$, si σ no es verdadero en $\mathfrak{A}$, como σ es enunciado, entonces $\neg\sigma$ es verdadero en $\mathfrak{A}$ y, como $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, $\neg\sigma$ es verdaero en $\mathfrak{B}$.*

Observación 4.9 *Por el corolario 4.2,* $(V^\kappa/\mathcal{U}, E) \equiv (V, \in)$.

Definición 4.18 *Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dos estructuras (estructuras-clase) del mismo tipo ρ de lenguaje. Una inemersión elemental de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ es una función (funcional) inyectiva h tal que:*

1. *$h : A \rightarrow B$ (donde A y B son los universos de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ respectivamente).*
2. *Si $P \in \rho$ (P de aridad n) y $a_1, ..., a_n \in A$, entonces*
   $\langle a_1, ..., a_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \leftrightarrow \langle h(a_1), ..., h(a_n) \rangle \in P^{\mathfrak{B}}$
3. *Si $f \in \rho$ (f de m argumentos) y $a_1, ..., a_m \in A$, entonces*
   $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_m)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), ..., h(a_m))$
4. *Si $c \in \rho$, entonces $h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$*

Definición 4.19 *Si $a \in V$, c_a es la función constante $c_a : \kappa \rightarrow V$ tal que $\forall \alpha \in \kappa(c_a(\alpha) = a)$, entonces definimos $e : V \rightarrow V^{\kappa}/\mathcal{U}$ como $e(a) = \bar{c}_a$.*

Proposición 4.2 *Si $\phi(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula, entonces*
$\forall a_1, ..., a_n[\phi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \phi^{(V^{\kappa}/\mathcal{U},E)}(e(a_1), ..., e(a_n))]$

Demostración.-

Sean $a_1, ..., a_n$.

$$
\begin{array}{lll}
\phi(a_1, .., a_n) & \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \phi(a_1, .., a_n)\} \in \mathcal{U} & \phi \text{ no depende de } \alpha,\ \emptyset \notin \mathcal{U} \text{ y } \kappa \in \mathcal{U} \\
& \leftrightarrow \{\alpha < \kappa : \phi(c_{a_1}(\alpha), .., c_{a_n}(\alpha))\} \in \mathcal{U} & \text{Definición de } c_a \\
& \leftrightarrow \phi^{(V^{\kappa}/\mathcal{U},E)}(\bar{c}_{a_1}, .., \bar{c}_{a_n}) & \text{Esquema de Los (teorema 4.3)} \\
& \leftrightarrow \phi^{(V^{\kappa}/\mathcal{U},E)}(e(a_1), .., e(a_n)) & \text{Definición de } e
\end{array}
$$

Por lo tanto, $\phi(a_1, .., a_n) \leftrightarrow \phi^{(V^{\kappa}/\mathcal{U},E)}(e(a_1), .., e(a_n))$. ■

Corolario 4.4 *La funcional e es una inmersión elemental de $\langle V, \in \rangle$ en $\langle V^{\kappa}/\mathcal{U}, E \rangle$.*

Demostración.-

Es inmediata de la proposición anterior; se muestra que e es inyectiva con $\phi(a_1, a_2) \rightleftharpoons a_1 \neq a_2$ y que e es morfismo con $\phi(a_1, a_2) \rightleftharpoons a_1 \in a_2$. ■

Observación 4.10 *Obsérvese que esta última proposición es más general. Para saber que e es una inmersión elemental nos bastaba con mostrar que $a \neq b \leftrightarrow \bar{c}_a \neq \bar{c}_b$ y que $a \in b \leftrightarrow \bar{c}_a E \bar{c}_b$.*

Después de mostrar que la ultrapotencia del universo es extensional, limitada por la izquierda y bien fundada, podremos aplicarle el Colapso de Mostowski (teorema 1.4).

Lema 4.9 (AE) *El Axioma de Buena Fundación es equivalente a que no existan cadenas numerables descendentes con la pertenencia.*

Demostración.-

$\rightarrow$) Supongamos que existe una cadena numerable descendente. Sea $f : \omega \rightarrow A \neq \emptyset$ tal que $f(n) = a_n$ y $a_1 \in a_0, a_2 \in a_1, ..., a_{n+1} \in a_n, ...$ Por el Axioma de Reemplazo, ¡ $f[\omega]$ es un conjunto ! (el Axioma de Buena Fundación asegura que $f[\omega]$ no es un conjunto).

$\leftarrow$) Sea $A \neq \emptyset$ y sea $a_0 \in A$. Si $A \cap a_0 = \emptyset$, entonces a_0 es el elemento minimal respecto a la pertenencia. Si $A \cap a_0 \neq \emptyset$, entonces tomamos $a_1 \in A \cap a_0$. Si $A \cap a_1 = \emptyset$, entonces a_1 es el elemento minimal. Si $A \cap a_1 \neq \emptyset$, sea $a_2 \in A \cap a_1$. Así sucesivamente, como no existen cadenas numerables descendentes, encontraremos un a_m $\in$-mininal. ∎

Teorema 4.4 $\langle V^\kappa/\mathcal{U}, E\rangle$ *es extensional, limitada por la izquierda y, si $\mathcal{U}$ es σ-completo, entonces es bien fundada. Es decir:*

1. $\forall f, g \in^\kappa V[\forall h \in^\kappa V(\bar{h}E\bar{f} \leftrightarrow \bar{h}E\bar{g}) \rightarrow \bar{f} = \bar{g}]$ *(Extensional)*

2. $\forall f \in^\kappa V \exists x \forall g \in^\kappa V(\bar{g} \in x \leftrightarrow \bar{g}E\bar{f})$ *(Limitada por la izquierda)*

3. *Si $\mathcal{U}$ es σ-completo, entonces* $\neg\exists\langle f_n : n \in \omega\rangle \forall n \in \omega(\bar{f}_{n+1}E\bar{f}_n)$ *(Bien fundada)*

Demostración.-

1) Por la proposición 4.2, haciendo $\phi \rightleftharpoons$Axioma de Extensionalidad, tenemos que $\langle V^\kappa/\mathcal{U}, \in\rangle$ es extensional.

2) Sea $f \in^k V$. Veremos que $\bar{f}_E = \{\bar{g} : \bar{g}E\bar{f}\}$ es conjunto.

Sean $A = (\cup f[\kappa]) \cup \{\emptyset\}$ y $B = {}^\kappa A$. Veamos que $\forall g \in^\kappa V(\bar{g}E\bar{f} \rightarrow \exists h \in B(\bar{g} = \bar{h}))$. Sea $g : \kappa \rightarrow V$ tal que $\bar{g}E\bar{f}$. Definimos $h : \kappa \rightarrow V$ de la siguiente manera:

$$h(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha) & \text{si } g(\alpha) \in f(\alpha) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que $h \in B$. Por hipótesis, $\{\alpha \in \kappa : g(\alpha) \in f(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ y, por la definición de h, $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) \in f(\alpha)\} \subseteq \{\alpha < \kappa : g(\alpha) = h(\alpha)\}$, de modo que $\{\alpha < \kappa : g(\alpha) = h(\alpha)\} \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, $\bar{g} = \bar{h}$. Así pues, $\{\bar{g} : \bar{g}E\bar{f}\} \subseteq B/\mathcal{U}$, porque para cada $\bar{g}$ tal que $\bar{g}E\bar{f}$ existe $h \in B$ tal que $\bar{g} = \bar{h}$. Además, $B/\mathcal{U}$ es un conjunto, pues A es un conjunto por los Axiomas de Reemplazo y Unión y, por consiguiente, B es un conjunto. Por lo tanto $\bar{f}_E = \{\bar{g} : \bar{g}E\bar{f}\}$ es un conjunto por el Axioma de Separación.

3) Supongamos que $\mathcal{U}$ es σ-completo. Probaremos que no hay cadenas numerables descendentes. Supongamos que existe $\langle f_n : n \in \omega \rangle$ tal que $\forall n \in \omega(\bar{f}_{n+1}E\bar{f}_n)$, entonces $\forall n \in \omega(\{\alpha < \kappa : f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)\} \in \mathcal{U})$ Sean $A_n = \{\alpha < \kappa : f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha)\}$. Como $\mathcal{U}$ es σ-completo, $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{U}$. Así, $\bigcap_{n\in\omega} A_n \neq \emptyset$. Si $\alpha_0 \in \bigcap_{n\in\omega} A_n$, entonces $\forall n \in \omega(f_{n+1}(\alpha_0) \in f_n(\alpha_0))$, es decir, ¡ $... \in f_3(\alpha_0) \in f_2(\alpha_0) \in f_1(\alpha_0) \in f_0(\alpha_0)$! (no existen cadenas numerables descendentes en V). ■

Podemos ahora aplicar el Colapso de Mostowski (teorema 1.4) a la ultrapotencia del universo, si $\mathcal{U}$ es σ-completo. Por lo tanto, existe una única clase transitiva M y un único isomorfismo π tales que $\langle V^\kappa/\mathcal{U}, E\rangle \overset{\pi}{\cong} \langle M, \in\rangle$.

Definición 4.20 *Definimos* $j_\mathcal{U} : \langle V, \in\rangle \to \langle M, \in\rangle$ *como sigue:*
$\forall a \in V(j_\mathcal{U}(a) = \pi \circ e(a) = \pi(\bar{c}_a))$.

Diagrama

		Ultrapotencia
Universo		del universo módulo $\mathcal{U}$
$\langle V, \in\rangle$	$\xrightarrow{e}$	$\langle V^\kappa/\mathcal{U}, E\rangle$
		$\cong \downarrow \pi$
$j_\mathcal{U} = \pi \circ e$	$\searrow$	$\langle M, \in\rangle$
		Colapso transitivo de Mostowski

Veamos que $j_\mathcal{U}$ es una inmersión elemental.

Proposición 4.3 *Si* $\phi(x_1, ..., x_n)$ *es una fórmula, entonces*
$\forall a_1, ..., a_n[\phi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \phi^M(j_\mathcal{U}(a_1), ..., j_\mathcal{U}(a_n))]$

Demostración.-

Sean $a_1, ..., a$ conjuntos. Por la proposición 4.2, sabemos que $\phi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow \phi^{\langle V^\kappa/\mathcal{U}, E\rangle}(e(a_1), ..., e(a_n))$.

Como π es un isomorfismo y M es una clase transitiva,

$\phi^{(V^\kappa/\mathcal{U},E)}(e(a_1),...,e(a_n)) \leftrightarrow \phi^M(\pi \circ e(a_1),...,\pi \circ e(a_n))$.

Por lo tanto, $\phi(a_1;...,a_n) \leftrightarrow \phi^M(j_\mathcal{U}(a_1),....,j_\mathcal{U}(a_n))$. ■

Lema 4.10 *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre κ, $\mathcal{U}$ es principal si y sólo si $j_\mathcal{U}$ es la identidad.*

Demostración.-

Sea $j_\mathcal{U} = \pi \circ e : V \to M$, donde $j_\mathcal{U}$ es una inmersión elemental y M es un modelo interno.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal. Sea $a \in \kappa$, tal que $\{a\} \in \mathcal{U}$ (lema 4.5). Tenemos que $\forall \bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}(\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = f(a)\} \in \mathcal{U})$, pues $\{\alpha < \kappa : f(\alpha) = f(a)\} \supseteq \{a\}$ y $\mathcal{U}$ es un filtro. Así, $\forall \bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}(\bar{f} = \bar{c}_{f(a)} = e(f(a))$ y, por consiguiente, e es suprayectiva. Por el corolario 4.4, sabemos que e es función inyectiva y morfismo. Por lo tanto, tenemos que e es isomorfismo. Como la composición de isomorfismos es un isomorfismo, $j_\mathcal{U}$ es un isomorfismo entre V y M clases transitivas. El Teorema de Isomorfismos (teorema 1.3) asegura que dos clases transitivas isomorfas son iguales, por lo tanto, $V = M$.

Concluimos que $j_\mathcal{U}$ es la identidad.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no-principal. Sea $id_\kappa : \kappa \to V$ la función identidad de κ en V. Consideremos $\pi(\bar{id_\kappa}) \in M$. Veremos que $\pi(\bar{id_\kappa})$ no está en la imagen de $j_\mathcal{U}$. Si hubiera $a \in V$ tal que $j_\mathcal{U}(a) = \pi(\bar{id_\kappa})$, entonces, por la definición de $j_\mathcal{U}$, tendríamos que $\pi(\bar{id_\kappa}) = \pi(\bar{c}_a)$ y, como π es inyectiva, $\bar{id_\kappa} = \bar{c}_a$. Así, tenemos que $\{\alpha < \kappa : id_\kappa(\alpha) = c_a(\alpha)\} \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, ¡ $\{\alpha < \kappa : \alpha = a\} \in \mathcal{U}$! ($\{\alpha < \kappa : \alpha = a\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ o $\{\alpha < \kappa : \alpha = a\} = \{a\} \notin \mathcal{U}$ porque $\mathcal{U}$ es no-principal (lema 4.6)). Por lo tanto, $\pi(\bar{id_\kappa})$ no está en la imagen de $j_\mathcal{U}$. Pero $\pi(\bar{id_\kappa}) \in V$, así es que $j_\mathcal{U}(\pi(\bar{id_\kappa})) \neq \pi(\bar{id_\kappa})$.

Podemos conluir que $j_\mathcal{U}$ no es la identidad. ■

Lema 4.11 *Si j es una inmersión elemental no-trivial del universo V en un modelo interno M, entonces:*

1. $\forall \alpha \in OR\ (j(\alpha) \geq \alpha)$
2. $\exists \alpha \in OR\ (j(\alpha) > \alpha)$, *es decir, j mueve a algún ordinal.*

Demostración.-

Por el lema anterior existe j como queremos, sólo necesitamos tomar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ no-principal. Como j es una inmersión elemental y M es un modelo interno, si $\alpha \in OR$, entonces $j(\alpha) \in OR$.

1) Supongamos que existe $\alpha \in OR$ tal que $j(\alpha) < \alpha$. Sea α_0 el mínimo α tal que $j(\alpha) < \alpha$. Así, $j(\alpha_0) < \alpha_0$ y, como j es inmersión elmental, ¡ $j(j(\alpha_0)) < j(\alpha_0)$! ($j(\alpha_0) < \alpha_0$ y supusimos que α_0 era el mínimo ordinal al que le sucedía eso).

2) Como j es no-trivial, consideramos x el conjunto de rango mínimo tal que $j(x) \neq x$. Sea $\delta = \rho(x)$. Veremos que $j(\delta) > \delta$.

Supongamos que $j(\delta) \leq \delta$, entonces, por el inciso anterior, $j(\delta) = \delta$.

• Si $y \in j(x)$, $\rho(y) < \rho(j(x))$, entonces, como j es inmersión elemental, $j(\rho(x)) = \rho^M(j(x))$. Sabemos que el rango es absoluto para los modelos internos, de modo que $\rho^M(j(x)) = \rho(j(x))$. Así, tenemos que

$\rho(y) < \rho(j(x)) = j(\rho(x)) = j(\delta) = \delta = \rho(x)$, de donde $y = j(y)$, pues x es el conjunto de rango mínimo tal que $j(x) \neq x$. Por lo tanto, $j(y) \in j(x)$ y, como j es inmersión elemental, $y \in x$. Por consiguiente, $j(x) \subseteq x$.

• Si $y \in x$, entonces, como x es el conjunto de rango mínimo tal que $j(x) \neq x$, tenemos que $y = j(y)$ y, como j es inmersión elemental, $y = j(y) \in j(x)$. Por consiguiente, $x \subseteq j(x)$.

Se concluye que ¡ $j(x) = x$!

Por lo tanto, $j(\delta) > \delta$. ■

Este último resultado motiva la siguiente definición, la de punto crítico.

Definición 4.21 *Sea j una inmersión elemental no-trivial del universo V en un modelo interno. Decimos que un ordinal δ es un punto crítico de j si y sólo si $j(\delta) > \delta$ y $j \restriction_\delta = id_\delta$, es decir, si y sólo si δ es el mínimo ordinal que mueve j.*

4.4 Los Cardinales Medibles y el Teorema de Scott

Definición 4.22 *Un cardinal κ es medible si y sólo si $\kappa > \aleph_0$ y existe una función $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$ tal que:*

1. $\forall \alpha \in \kappa(\mu(\{\alpha\}) = 0)$ *(No-trivialidad)*

2. $\mu(\kappa) = 1$

3. Para todo conjunto $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ con $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subsetneq \kappa$, y $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ para $\alpha \neq \beta$, sucede que $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha)$. ($\kappa$-aditividad)

Observación 4.11 *A la función μ anterior se le llama una medida bivaluada sobre κ.*

Teorema 4.5 *κ es un cardinal medible si y sólo si $\kappa > \aleph_0$ y hay un ultrafiltro no-principal, κ-completo sobre κ.*

Demostración.-

$\Rightarrow$) Sea κ un cardinal medible. Por la definición de κ cardinal medible, existe μ medida bivaluada sobre κ. Sea $\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{P}(\kappa) : \mu(x) = 1\}$. Veamos que $\mathcal{U}$ es un filtro:

- $\mathcal{U} \neq \emptyset$ pues $\kappa \in \mathcal{U}$.
- $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{P}(\kappa)$ y $\mathcal{U} \neq \mathcal{P}(\kappa)$, pues $\forall\alpha \in \kappa(\{\alpha\} \notin \mathcal{U})$.
- Si $x, y \in \mathcal{U}$, entonces $\mu(x) = 1$ y $\mu(y) = 1$. Si $\mu(x \cap y) \neq 1$, como $x = (x - y) \cup (x \cap y)$, por la κ-aditividad de μ ($(x - y) \cap (x \cap y) = \emptyset$), tenemos que $\mu(x - y) = 1$. Como $x \cup y = (x - y) \cup y$ y $(x - y) \cap y = \emptyset$, se sigue que ¡ $\mu(x \cup y) = \mu((x - y) \cup y) = \mu(x - y) + \mu(y) = 1 + 1 = 2$! Así, $\mu(x \cap y) = 1$ y, por lo tanto, $x \cap y \in \mathcal{U}$.
- Si $x \in \mathcal{U}$, entonces $\mu(x) = 1$. Sea $y \in \mathcal{P}(\kappa)$ tal que $x \subsetneq y$. Veamos que si $x \subsetneq y$, entonces $\mu(x) \leq \mu(y)$. Supongamos que $x \subsetneq y$. Tenemos que $y = x \cup (y - x)$ y $x \cap (y - x) = \emptyset$, por consiguiente, $\mu(y) = \mu(x \cup (y - x)) = \mu(x) + \mu(y - x)$. Por lo tanto, $\mu(x) = \mu(y) - \mu(y - x)$ y, como $\mu(y - x) \geq 0$, $\mu(x) \geq \mu(y)$. Por lo tanto, tenemos que $1 = \mu(x) \leq \mu(y)$. Así, $\mu(y) = 1$ y $y \in \mathcal{U}$.

Concluimos que $\mathcal{U}$ es un filtro.

Veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro:

Sea $x \in \mathcal{P}(\kappa)$. Supongamos que $x \notin \mathcal{U}$. Como $\mu(x) = 0$, tenemos que $\mu(\kappa - x) = \mu(\kappa - x) + 0 = \mu(\kappa - x) + \mu(x)$. Además, como μ es κ-aditiva y $(\kappa - x) \cap x = \emptyset$, tenemos que $\mu(\kappa - x) + \mu(x) = \mu((\kappa - x) \cup x) = \mu(\kappa) = 1$. Así, $\mu(\kappa - x) = 1$. Por lo tanto, $\kappa - x \in \mathcal{U}$.

Concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Como $\forall\alpha \in \kappa(\mu(\{\alpha\}) = 0)$, tenemos que $\forall\alpha \in \kappa(\{\alpha\} \notin \mathcal{U})$. Por el lema 4.5, $\mathcal{U}$ es no-principal.

Veamos que $\mathcal{U}$ es κ-completo:

Sea $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tal que $A_\alpha \in \mathcal{P}(\kappa)$ para toda $\alpha < \lambda$, $\lambda < \kappa$ y $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{U}$. En tal caso, $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = 1$. Definimos para toda $\alpha < \lambda$, $A'_\alpha = A_\alpha - \bigcup_{\beta<\alpha} A'_\beta$. Es decir, $A'_0 = A_0$,

$A_1' = A_1 - A_0$, $A_2' = A_2 - (A_0' \cup A_1')$, etc. Obsérvese que $\forall\alpha < \lambda(A_\alpha' \subseteq A_\alpha)$. Veamos que $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha'$, es decir, que la unión arbitraria es igual a la unión ajena.

$\subseteq$) Sea $x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. En tal caso, $x \in A_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 < \lambda$. Si $x \notin \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha'$, entonces $x \in A_{\alpha_0}' \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha'$. Si $x \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} A_\alpha'$, entonces $x \in A_{\alpha_1}'$ para algún $\alpha_1 < \alpha_0 < \lambda$. Por lo tanto, $x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha'$.

$\supseteq$) Sea $x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha'$. En tal caso, $x \in A_{\alpha_0}'$ para algún $\alpha_0 < \lambda$. Como $A_{\alpha_0}' \subseteq A_{\alpha_0}$, $x \in A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$.

Así pues, $1 = \mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha') = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha')$ y, por lo tanto, $\exists\alpha < \lambda(\mu(A_\alpha') = 1)$. Por otro lado, $\forall\alpha < \lambda(A_\alpha' \subseteq A_\alpha)$, de donde $\exists\alpha < \lambda(\mu(A_\alpha) \geq \mu(A_\alpha') = 1)$. Por consiguiente, $\exists\alpha < \lambda(\mu(A_\alpha) = 1)$.

Concluimos que $\mathcal{U}$ es κ-completo.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\kappa > \omega$, no-principal y κ-completo. Sea $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$ definida así: $\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{U} \end{cases}$

Es claro que μ es función.

Sea $\alpha \in k$. En tal caso, como $\mathcal{U}$ es no-principal, $\{\alpha\} \notin \mathcal{U}$, por lo tanto, $\mu(\{\alpha\}) = 0$.

Sabemos que $\kappa \in \mathcal{U}$, pues $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro y $\emptyset \notin \mathcal{U}$, por lo tanto, $\mu(\kappa) = 1$.

Sea $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tal que $\lambda < \kappa$, $A_\alpha \subseteq \kappa$, y $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. Tenemos que demostrar que $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha)$.

Sabemos que $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \notin \mathcal{U} \end{cases}$

- Si $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \in \mathcal{U}$, entonces, como $\mathcal{U}$ es κ-completo, $A_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ para algún $\alpha_0 < \lambda$. Si hay $\alpha_1 \neq \alpha_0$ tal que $A_{\alpha_1} \in \mathcal{U}$, entonces ¡ $A_{\alpha_0} \cap A_{\alpha_1} = \emptyset \in \mathcal{U}$! Por lo tanto, $\mu(A_{\alpha_0}) = 1$ y $\forall\beta \neq \alpha_0(\mu(A_\beta) = 0)$. En conclusión, $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = 1 = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha)$.
- Si $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha \notin \mathcal{U}$, entonces, $\forall\alpha < \lambda(A_\alpha \notin \mathcal{U})$, pues $A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$. Por lo tanto, $\forall\alpha < \lambda(\mu(A_\alpha) = 0)$. En conclusión, $\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha) = 0 = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha)$. ■

Las siguientes definiciones y proposiciones nos dan una idea de lo grandes que son los cardinales medibles. Esta idea será complementada en la sección 5.1.

Definición 4.23 *Un cardinal κ es fuerte si y sólo si $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa)$.*

Definición 4.24 *Un cardinal κ es inaccesible fuerte si y sólo si $\kappa > \aleph_0$, κ es regular (definición 4.4) y κ es fuerte.*

Definición 4.25 *Un filtro F sobre un cardinal κ se llama uniforme si y sólo si* $\forall x \in F(|x| = \kappa)$.

Proposición 4.4 *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no-principal, κ-completo sobre κ, entonces $\mathcal{U}$ es uniforme.*

Demostración.-

Supongamos que hay $x \in \mathcal{U}$ tal que $|x| < \kappa$. Como $x = \bigcup_{\alpha \in x} \{\alpha\} \in \mathcal{U}$, por la κ-completud de $\mathcal{U}$, hay $\alpha \in x$ tal que ¡ $\{\alpha\} \in \mathcal{U}$! ($\mathcal{U}$ es no-principal (lema 4.6)). ■

Proposición 4.5 *Si κ es un cardinal medible, entonces κ es un cardinal inaccesible fuerte.*

Demostración.-

Sea κ un cardinal medible.

• $\kappa > \aleph_0$ por la definición de cardinal medible.

Como κ es un cardinal medible, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ no-principal, κ-completo sobre κ.

• κ es un cardinal regular, pues si no lo fuera, $\kappa = \bigcup_{\alpha<\beta} \lambda_\alpha$ con $\beta < \kappa$ y $\forall \alpha < \beta(\lambda_\alpha < \kappa)$, pero $\kappa \in \mathcal{U}$ y, como $\mathcal{U}$ es κ-completo, $\lambda_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ para algún $\alpha_0 \in \beta$; por lo tanto, habría $\lambda_{\alpha_0} \in \mathcal{U}$ con $\lambda_{\alpha_0} < \kappa$ y, por la proposición anterior $\mathcal{U}$ es uniforme.

En conclusión,κ es un cardinal regular.

• κ es un cardinal fuerte, pues si no lo fuera, existiría $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$.

Sea $S \subseteq {}^{\lambda}2 = \{f : f \text{ es función y } f : \lambda \to \{0,1\}\}$ tal que $|S| = \kappa$. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro no-principal, κ-completo sobre S (la existencia de $\mathcal{F}$ está dada por la existencia de $\mathcal{U}$). Definimos $\{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$ tal que $x_\alpha \subseteq S$ y $x_\alpha \in \mathcal{F}$ así:

$$\forall \alpha < \lambda,\ x_\alpha = \begin{cases} \{f \in S : f(\alpha) = 0\} & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 0\} \in \mathcal{F} \\ \{f \in S : f(\alpha) = 1\} & \text{si } \{f \in S : f(\alpha) = 1\} \in \mathcal{F} \end{cases}$$

x_α está bien definido pues $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.

Como $\mathcal{F}$ es κ-completo, $\bigcap_{\alpha<\lambda} x_\alpha \in \mathcal{F}$. Por otro lado, $\bigcap_{\alpha<\lambda} x_\alpha$ tiene a lo más un elemento, ya que si $f \neq f'$ y $f, f' \in \bigcap_{\alpha<\lambda} x_\alpha$, entonces hay $\alpha_0 < \lambda$ tal que $f(\alpha_0) \neq f'(\alpha_0)$ y $f, f' \in x_{\alpha_0}$. En tal caso tendríamos que, $f(\alpha_0) = 0 = f'(\alpha_0)$ o $f(\alpha_0) = 1 = f'(\alpha_0)$. Por lo tanto, ¡ $\bigcap_{\alpha<\lambda} x_\alpha = \{f\} \in \mathcal{F}$!

($\mathcal{F}$ es no-principal (lema 4.6)).

Concluimos que κ es un cardinal fuerte. ■

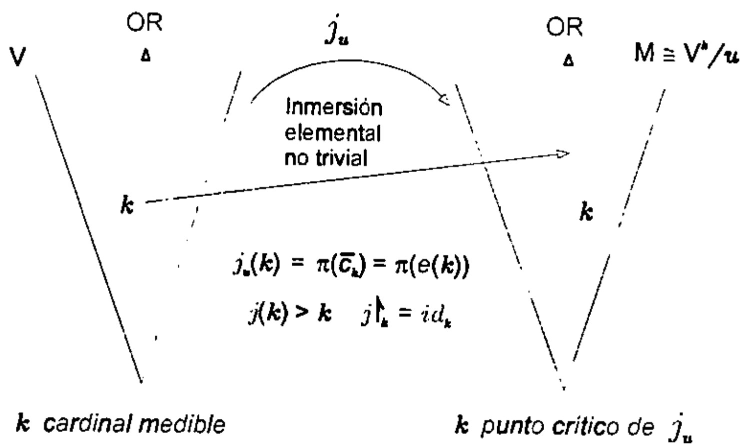
El siguiente teorema relaciona los cardinales medibles con las inmersiones elementales vistas en la sección anterior.

Teorema 4.6 *κ es un cardinal medible si y sólo si existe inmersión elemental no-trivial j de V en un modelo interno M tal que κ es un punto crítico de j.*

Demostración.-

$\Rightarrow$) Supongamos que κ es un cardinal medible. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no-principal y κ-completo sobre κ. Como $\mathcal{U}$ es κ-completo, $\mathcal{U}$ es σ-completo. Por lo tanto, podemos aplicar el Colapso de Mostowski a la ultrapotencia del universo. Así, existe π isomorfismo tal que $V^\kappa/\mathcal{U} \overset{\pi}{\cong} M$ con M un modelo interno. Como $\mathcal{U}$ es no-principal, existe $j_\mathcal{U} : V \to M \overset{\pi^{-1}}{\cong} V^\kappa/\mathcal{U}$, tal que es inmersión elemental no-trivial (lema 4.10). Como $j_\mathcal{U}$ es una inmersión elemental y M es un modelo interno, si $\alpha \in OR$, entonces $j_\mathcal{U}(\alpha) \in OR$.

Veamos que $j_\mathcal{U} \restriction_\kappa = id_\kappa$ y $j_\mathcal{U}(\kappa) > \kappa$.



Inmersión elemental no trivial con punto crítico κ

• Demostraremos que $j_\mathcal{U} \restriction_\kappa = id_\kappa$, por inducción fuerte sobre κ. Sea $\alpha < \kappa$ y supongamos que $\forall\gamma < \alpha(j_\mathcal{U}(\gamma) = \gamma)$. Veamos que $j_\mathcal{U}(\alpha) = \alpha$. Sabemos que $j_\mathcal{U}(\alpha) \geq \alpha$ (lema 4.11), de modo que falta ver que $j_{\mathcal{U}}(\alpha) \leq \alpha$ o, lo que es lo mismo, que $j_{\mathcal{U}}(\alpha) \subseteq \alpha$. Como $j_{\mathcal{U}}(\alpha) \in M$ y M es una clase transitiva, $\forall x \in j_{\mathcal{U}}(\alpha)(x \in M)$ y, dado $x \in M$, como π es sobre, existe $\bar{f} \in V^\kappa/\mathcal{U}$ tal que $x = \pi(\bar{f})$. Sea $f : \kappa \to V$, tal que $\pi(\bar{f}) \in j_{\mathcal{U}}(\alpha) = \pi(e(\alpha))$. Como π es isomorfismo, $\bar{f}$ $E(e(\alpha)) = \bar{c}_\alpha$. Así, tenemos que $\{\beta < \kappa : f(\beta) \in c_\alpha(\beta) = \alpha\} \in \mathcal{U}$. Como α es ordinal, $f(\beta)$ es ordinal. Por lo tanto, $\{\beta < \kappa : f(\beta) < \alpha\} = \bigcup_{\gamma<\alpha} \{\beta < \kappa : f(\beta) = \gamma\} \in \mathcal{U}$. Por otro lado, $\alpha < \kappa$ y $\mathcal{U}$ es κ-completo de modo que, por el lema 4.3, hay $\gamma_0 < \alpha$ tal que $\{\beta < \kappa : f(\beta) = \gamma_0\} \in \mathcal{U}$, es decir, tal que $\bar{f} = e(\gamma_0) = \bar{c}_{\gamma_0}$. Así, tenemos que $\pi(\bar{f}) = \pi(e(\gamma_0)) = j_{\mathcal{U}}(\gamma_0) \overset{H.I.}{=} \gamma_0 < \alpha$. Por lo tanto, $\pi(\bar{f}) \in \alpha$ y $j_{\mathcal{U}}(\alpha) \subseteq \alpha$.

En conclusión, $j_{\mathcal{U}}(\alpha) = \alpha$.

- Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no-principal y κ-completo, por el lema 4.8, $\forall \alpha < \kappa(\kappa - \alpha \in \mathcal{U})$. De aquí que $\forall \alpha < \kappa(\{\xi < \kappa : c_\alpha(\xi) < id_\kappa(\xi)\} = \{\xi < \kappa : \alpha < \xi\} = \kappa - (\alpha + 1) \in \mathcal{U})$ y que $\forall \alpha < \kappa(e(\alpha) = \bar{c}_\alpha E\ \bar{id}_\kappa$. Por lo tanto, $\forall \alpha < \kappa(\alpha = j_{\mathcal{U}}(\alpha) = \pi \circ e(\alpha) \in \pi(\bar{id}_\kappa))$ y $\kappa \subseteq \pi(\bar{id}_\kappa)$. Por otro lado, $\pi(\bar{id}_\kappa)$ es un ordinal, pues $\{\xi < \kappa : id_\kappa(\xi) \in OR\} = \kappa \in \mathcal{U}$, y, por el esquema de Los, $(\bar{id}_\kappa \in OR)^{V^\kappa/\mathcal{U}}$; como π es un isomorfismo, M es un modelo interno, y ser ordinal es absoluto para los modelos internos, $(\pi(\bar{id}_\kappa) \in OR)^M \to \pi(\bar{id}_\kappa) \in OR$. Como $\kappa \subseteq \pi(\bar{id}_\kappa)$ y $\pi(\bar{id}_\kappa)$ es ordinal, tenemos que $\kappa \leq \pi(\bar{id}_\kappa)$.

Por otro lado, $\{\xi < \kappa : id_\kappa(\xi) < c_\kappa(\xi)\} = \{\xi < \kappa : \xi < \kappa\} = \kappa \in \mathcal{U}$ de modo que $\bar{id}_\kappa E\ \bar{c}_\kappa = e(\kappa)$ y, como π es un isomorfismo, $\pi(\bar{id}_\kappa) \in \pi(e(\kappa)) = j_{\mathcal{U}}(\kappa)$.

Por lo tanto, $\kappa \leq \pi(\bar{id}_\kappa) < j_{\mathcal{U}}(\kappa)$ y κ es un punto crítico de $j_{\mathcal{U}}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe una inmersión elemental no-trivial j del universo en un modelo interno M tal que κ es un punto crítico de j. Como j es una inmersión elemental, $j(0) = 0$ y $j(s(\alpha)) = s(j(\alpha))$, es decir,

$j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$. Así, $j(\bigcup_{\alpha<\omega} \alpha) = \bigcup_{\alpha<\omega} j(\alpha)$ y, como ω es absoluto para M, $j(\omega) = \omega$. Por lo tanto, $\forall \alpha \leq \omega(j(\alpha) = \alpha)$. Como κ es un punto crítico de j, $\kappa > \omega$.

Veamos que hay un ultrafiltro no-principal y κ-completo sobre κ.

Definimos $\mathcal{U} = \{x \subseteq \kappa : \kappa \in j(x)\}$

Veamos que $\mathcal{U}$ es un filtro.

- Como $\kappa < j(\kappa)$, $\kappa \in \mathcal{U}$ y, como $j(0) = 0$, tenemos que $0 \notin \mathcal{U}$.
- Sean $x \in \mathcal{U}$ y $y \subseteq \kappa$ tales que $x \subseteq y$. En tal caso, $\kappa \in j(x)$. Por el esquema de Los (4.3), como M es un modelo interno, $j(x) \subseteq j(y)$ de modo que $\kappa \in j(y)$. Por lo tanto, $y \in \mathcal{U}$.

• Sean $x, y \in \mathcal{U}$. En tal caso, $\kappa \in j(x)$ y $\kappa \in j(y)$, por lo tanto $\kappa \in j(x) \cap j(y)$. Por el esquema de Los (4.3), como M es un modelo interno, $j(x) \cap j(y) = j(x \cap y)$. Por lo tanto, $x \cap y \in \mathcal{U}$. Concluimos que $\mathcal{U}$ es filtro.

Veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro

$x \in \mathcal{U} \leftrightarrow \kappa \in j(x) \leftrightarrow \kappa \notin j(\kappa) - j(x) \overset{\text{Los (teo 4.3)}}{\leftrightarrow} \kappa \notin j(\kappa - x) \leftrightarrow \kappa - x \notin \mathcal{U}$.

Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no-principal.

Sea $\alpha \in \kappa$. Por el esquema de Los, $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\}$ y, como κ es un punto crítico de j y $\alpha \in \kappa$, tenemos que $\{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$. Así, $\forall \alpha < k(\kappa \notin \{\alpha\} = \{j(\alpha)\})$. Por lo tanto, $\forall \alpha < \kappa(\{\alpha\} \notin \mathcal{U})$

Por el lema 4.5, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no-principal.

Veamos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo.

Sea $\{A_\alpha : \alpha < \delta\}$ donde $A_\alpha \subseteq \kappa$ y $\delta < \kappa$, tal que $\forall \alpha < \delta(A_\alpha \in \mathcal{U})$. Tenemos que $\forall \alpha < \delta(\kappa \in j(A_\alpha))$. Así, $\kappa \in \bigcap_{\alpha<\delta} j(A_\alpha) \overset{\text{Los (teo 4.3)}}{=} j(\bigcap_{\alpha<j(\delta)} A_\alpha) \overset{j(\delta)=\delta}{=} j(\bigcap_{\alpha<\delta} A_\alpha)$. Por lo tanto, $\kappa \in j(\bigcap_{\alpha<\delta} A_\alpha)$, es decir, $\bigcap_{\alpha<\delta} A_\alpha \in \mathcal{U}$.

Concluimos que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro κ-completo.

En conclusión, κ es un cardinal medible. ■

El siguiente teorema, consecuencia directa del anterior, es el teorema de Scott y es el que nos ayudará a reflexionar sobre la pregunta "¿es V distinto de L?"

Teorema 4.7 *Teorema de Scott. Si hay cardinales medibles, entonces $V \neq L$.*

Demostración.-

Sea κ el menor cardinal medible. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no-principal, κ-completo sobre κ. Por el teorema anterior, existe una inmersión elemental no-trivial del universo en un modelo interno M tal que κ es punto crítico, $j_{\mathcal{U}} : V \to M \cong V^\kappa/\mathcal{U}$. Como κ es el menor cardinal medible y j es una inmersión elemental, tenemos que $(j(\kappa)$ es el menor cardinal medible$)^M$. Como M es un modelo interno, por el teorema de la minimalidad de L (teo 3.3), $L \subseteq M \subseteq V$. Si $L = V$, entonces $M = V$ y, por lo tanto, ¡ $j(\kappa)$ es el menor cardinal medible de V ! ($\kappa < j(\kappa)$ y κ es el menor cardinal medible). ■

Corolario 4.5 *No existe una inmersión elemental no-trivial del universo V en L.*

Demostración.-

Supongamos que existe una inmersión elemental no-trivial,j de V en L, entonces, por el teorema 4.6, existe un cardinal medible y, por el teorema de Scott, $V \neq L$. Por otro lado, como j es una inmersión elemental, por el Esquema de Los (teorema 4.2), tenemos que $V = L \leftrightarrow (V = L)^L$. Sabemos que $(V = L)^L$. entonces ¡ $V = L$!

Por lo tanto, no existe una inmersión elemental de V en L. ■

Capítulo 5

¿Es V no-constructible?

En el tercer capítulo de esta tesis demostramos que tanto $V = L$, el Axioma de Constructibilidad, como $V \neq L$, la negación del Axioma de Constructibilidad, son consistentes con ZFE; es decir, demostramos que el Axioma de Constructibilidad no se puede ni demostrar ni refutar dentro de ZFE. Por lo tanto, se podría pensar que hay una teoría de conjuntos con el Axioma de Constructibilidad ($ZFE + V = L$) y otra teoría de conjuntos con la negación del Axioma de Constructibilidad ($ZFE + V \neq L$) y que no existe ninguna necesidad de escoger alguna. Este punto de vista está relacionado con la idea de que ZFE es una creación de la mente humana y que cualquier extensión relativamente consistente de ZFE es aceptable porque no hay hechos específicos con los que tenga que concordar. En contraste, está la posición de que la teoría de conjuntos es una ciencia que describe una realidad conceptual existente por sí misma. Desde este punto de vista, las preguntas que no pueden ser respondidas por ZFE son legítimas, lo que pondría en evidencia que lo que nos falta son herramientas (axiomas) para contestarlas. Esta postura, muchas veces llamada "Platonismo" o "Realismo", fue sustentada, entre otros, por K. Gödel:

'*Pues si se acepta que el significado de los signos primitivos de la teoría de conjuntos... es correcto, entonces los conceptos y los teoremas de la teoría de conjuntos describirían alguna realidad bien determinada.*' ([Gödel 1947,64] p. 348).

Penelope Maddy también defiende la postura del realismo en matemáticas hasta cierto punto:

'... *En lo que sigue daré por sentada una posición realista. Esto no es porque piense que el* *realismo está fuera de toda duda sino porque quiero explorar sus consecuencias.*' ([Maddy 1993] p. 17).

Así, la pregunta sobre la verdad de las proposiciones indecidibles o independientes de la teoría de conjuntos pueden considerarse como legítima si creemos que la teoría describe una realidad determinada. En tal caso, los axiomas aceptados no describirían por completo dicha realidad y necesitaríamos de nuevos axiomas para decidir tales proposiciones. Es por esto que muchos investigadores buscan argumentos intuitivos para decidir qué axiomas agregar a la teoría. Obviamente, se puede cuestionar que un argumento de este estilo, no siendo una prueba matemática, es en realidad de carácter filosófico. Al respecto Maddy opina que tenemos razones para confiar en los métodos de las matemáticas, pues éstos han jugado un papel muy importante en el desarrollo de las ciencias naturales, y no contamos con justificaciones similares para los métodos filosóficos. Algunos métodos filosóficos han influido de manera importante en nuestro sistema de creencias matemáticas, y podríamos considerar estos métodos para resolver las proposiciones indecidibles. Maddy estima que las matemáticas se deben conducir dentro de sus propias prácticas y que no es necesario apelar a un tribunal extra-matemático para encontrar estos argumentos. Así, si nuestras preguntas son de carácter filosófico, los únicos métodos filosóficos relevantes para contestarlas son aquéllos que de manera natural son considerados matemáticos. (ver [Maddy 1993] pp. 17-18).

Este capítulo está dedicado a resumir las ideas que han conducido a muchos investigadores a creer que V es distinto de L, es decir, está dedicado a describir lo que Maddy llama una opinión informada al respecto del Axioma de Constructibilidad. La primera sección está basada en el Teorema de Scott que demostramos en el capítulo anterior; en ella se argumenta en favro de la existencia de cardinales medibles. La segunda sección trata sobre la Hipótesis del Continuo, que es implicada por el Axioma de Constructibilidad y que muchos matemáticos creen que es falsa. La tercera sección ataca el problema directamente, es decir, sin aducir que es falsa en base en alguna otra afirmación o a partir de que implique alguna afirmación que creemos que es falsa.

Las justificaciones en favor de la verdad o de la falsedad de proposiciones indecidibles expuestas en este capítulo puede ser que se sigan de manera directa del concepto de conjunto, las llamadas intrínsecas, o que se sigan de las consecuencias de estas proposiciones o de su poder explicativo, las llamadas extrínsecas.

5.1 ¿Existen cardinales medibles?

Los llamados Axiomas Fuertes de Infinitud afirman la existencia de cardinales más grandes que aquéllos cuya existencia se puede probar con los axiomas de ZFE. En cierto sentido el Axioma de Reemplazo introducido por Skolem y Fraenkel es uno de ellos, ya que fue propuesto específicamente para poder generar $\aleph_\omega$. Estos axiomas se estudian y analizan porque se cree que pueden decidiralgunas proposiciones de otro modo indecidibles. Gödel escribe:

'*... los axiomas de la teoría de conjuntos no constituyen en modo alguno un sistema cerrado en sí mismo, sino que , al contrario, el verdadero concepto de conjunto en que están fundados sugiere su extensión mediante nuevos axiomas que afirman la existencia de aún más iteraciones de la operación «conjunto de».*' ([Gödel 1947,64] p. 348)

Este punto de vista, compartido por muchos, nace de la idea de que cualquier axioma consistente con ZFE que extienda el dominio de la teoría de conjuntos introduciendo nuevos conjuntos puede ser aceptado si nuestros argumentos intuitivos nos convencen al respecto. Es más, la regla empírica *maximizar* considera dos convenciones: la de engrosar al conjunto potencia y la de alargar la clase de los ordinales, siendo claro que los Axiomas Fuertes de Infinitud cumplen con lo segundo. El argumento más utilizado para defender estos axiomas es la opinión casi general de que el universo de los conjuntos es demasiado complejo como para ser agotado con pocas operaciones, como la de conjunto potencia y la de reemplazo, de modo que, debe existir un ordinal después de todos los generados por potencia y reemplazo. Análogamente, el universo posterior a este ordinal tampoco puede ser agotado por lo que debe existir otro más grande. De este modo se puede defender la existencia de cardinales grandes generados por procesos que consideran ordinales cada vez más grandes.

Un ejemplo de estos axiomas es el Axioma de Existencia de Cardinales Inaccesibles Fuertes que afirma que existe un cardinal inaccesible fuerte (definición 4.24). Esta proposición es indemostrable a partir de ZFE, suponiendo su consistencia (ver [Amor 1984] p. 8). Recordando esta definición, un cardinal κ inaccesible fuerte cumple tres condiciones, a saber (ver [Kunen 1980] p. 34 y [Jech 1978] p.52):

1. $\kappa > \aleph_0$

2 Para todo conjunto con menos de κ cardinales menores que κ, la suma de sus elementos es menor que κ, es decir, $\forall\lambda < \kappa\ \forall\alpha < \lambda\ (\mu_\alpha < \kappa \rightarrow \sum_{\alpha<\lambda} \mu_\alpha < \kappa)$ (κ es un cardinal regular).

3. $\forall\lambda < \kappa(2^\lambda < \kappa)$ (κ es un cardinal fuerte).

Se puede probar que existen cardinales que cumplen las propiedades 1 y 2 como, por ejemplo, $\aleph_1$ y, en general, todos los cardinales infinitos susesores ($\aleph_{\alpha+1}$) (ver [Jech 1978] p. 40). También se puede probar que hay cardinales que cumplen las condiciones 1 y 3 como, por ejemplo, $\beth_\omega$, definido como caso particular de la jerarquía de los beths (ver [Jech 1978] p. 72):

$\beth_0 = \aleph_0$

$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$

$\beth_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \beth_\beta$ si γ es límite.

Si un cardinal κ cumple las propiedades 2 y 3 significa que κ es un cardinal "inalcanzable" con las operaciones conjuntistas más poderosas. Es fácil ver que $\aleph_0$ cumple las propiedades 2 y 3, de modo que un cardinal inaccesible fuerte puede pensarse, respecto a cardinales infinitos anteriores, tan "inalcanzable" como lo es $\aleph_0$ para los cardinales finitos. Es más, el Axioma de Existencia de Cardinales Inaccesibles Fuertes nace de la idea de que si ω tiene dos propiedades específicas, a saber: si $n \in \omega$ entonces $2^n \in \omega$ (3) y si $n \in \omega$ y $m_0, ..., m_{n-1} \in \omega$ entonces $\bigcup_{i\in n} m_i \in \omega$ (2), ¿por qué no existirá otro ordinal más grande que ω que cumpla las propiedades análogas? Esta pregunta está íntimamente relacionada con una regla empírica llamada *uniformidad*. Supongamos que en un estrato bajo de la jerarquía acumulativa nos encontramos con alguna "situación interesante"; si una situación similar no se vuelve a presentar en el resto de la jerarquía acumulativa, sería como si el universo hubiera perdido su complejidad en los estratos más altos, como si se hubiera tornado simple a partir de cierto punto. La regla de *uniformidad* descarta esta posibilidad, pues afirma que situaciones similares a las de los niveles bajos volverán a presentarse en niveles más altos del universo. Entonces, si $\aleph_0$ tiene las dos propiedades mencionadas, según la regla de *uniformidad*, debe existir un cardinal mayor que las cumpla. Éste es un cardinal inaccesible fuerte.

Sin embargo, el llamado *finitismo de Cantor*, que considera que los conjuntos transfinitos se comportan de manera similar a los finitos, podría servir como una refutación a la regla de *uniformidad*: mientras que es cierto que la sucesión de números naturales continúa produciendo situaciones complejias interesantes, también es cierto que deja de producir primos adyacentes después de 2 y 3 y primos pares después de 2. Es por esto que generalmente se buscan otras reglas empíricas. además de la *uniformidad*, para defender alguna proposición.

En el caso de los cardinales inaccesibles fuertes, hay otra regla empírica utilizada para argumentar su existencia: la *reflexión*. Esta regla está basada en la idea de que el universo de los conjuntos es tan complejo que no puede ser completamente descrito, de modo que cualquier proposición verdadera en todo el universo debe ser verdadera en algún segmento inicial de él. En otras palabras, cualquier propiedad de V se aplica a algún V_α que "refleja" esta propiedad. En particular, V es cerrado bajo las operaciones de potencia y reemplazo. Por consiguiente, debe existir un estrato V_κ tal que también sea cerrado bajo estas operaciones. Se demuestra que en ese caso κ es inaccesible fuerte.

El Axioma de Existencia de Cardinales Inaccesibles Fuertes también tiene algunos méritos extrínsecos tales como el hecho de que implica que ZFE tiene un modelo estándar en la jerarquía acumulativa hasta el primer inaccesible y, por tanto que ZFE es consistente (recuérdese lo dichdo al principio de la sección 3.3.3 al respecto de la existencia de modelos estándar de ZFE).

Los cardinales medibles, introducidos por Ulam en 1930, son inaccesibles (proposición 4.5), pero son mucho más grandes en varios sentidos; por ejemplo, si κ es el menor medible, entonces existen tantos como κ cardinales inaccesibles fuertes menores que κ (ver [Amor 1984] p. 63). Por su fuerza, probablemente son los más conocidos de los grandes cardinales (aquéllos mayores o iguales que los inaccesibles).

La primera regla empírica que podríamos utilizar para argumentar la aceptación de un Axioma de Existencia de Cardinales Medibles es la de *maximizar*, pues este axioma implica la existencia de muchos pequeños grandes cardinales (entre ellos los inaccesibles).

Otra regla muy utilizada en las discusiones sobre la existencia de cardinales medibles es la de la *uniformidad*. Si recordamos la definición de cardinal medible (definición 4.22), tenemos que una medida en un cardinal κ es una división de sus subconjuntos en grandes y pequeños de tal manera que κ es grande, el $\emptyset$ y los unitarios son pequeños, los complementos de conjuntos grandes son pequeños y los complementos de pequeños son grandes y las intersecciones de menos de κ conjuntos grandes se mantienen grandes. Sabemos que un cardinal κ es medible si y sólo si $\kappa > \aleph_0$ y existe un ultrafiltro sobre κ no-principal y κ-completo (teorema 4.5). Obsérvese que pedimos $\kappa > \aleph_0$, tanto en la definición de cardinal medible (definición 4.22) como en esta última equivalencia. Esto es porque, en caso contrario, $\aleph_0$ cumpliría con la definición de cardinal medible, pues si extendemos el filtro de los cofinitos (ejemplo 4.1) sobre $\aleph_0$ a un ultrafiltro $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ resulta ser un ultrafiltro no-principal (ejemplo 4.2) y $\aleph_0$-completo (observación 4.3) sobre $\aleph_0$. Entonces, $\aleph_0$ sería medible y así, por *uniformidad*, debe haber cardinales medibles mayores que $\aleph_0$.

En 1961, Scott demostró que si existen cardinales medibles, entonces $V \neq L$ (teorema 4.7). Esta demostración, que utiliza la ultrapotencia del universo, significa intuitivamente que no se puede definir una medida en un cardinal medible . Este resultado es muy importante, ya que de alguna manera refleja el pensamiento compartido por muchos de que V tiene más conjuntos que L y que los Axiomas Fuertes de Infinitud pueden darnos una visión más completa del comportamiento del universo. Sin embargo, este resultado, aunque sorprendente, es explicable dado lo complicada que puede ser una medida. Resultados posteriores a éste, como el de Rowbottom que demuestra que la presencia de cardinales medibles implica que existe un subconjunto de enteros no-construcible (ver [Maddy 1988] p.506), dan una visión a los investigadores de por qué L no contiene la medida de cardinales medibles. El proceso de sólo tomar subconjuntos definibles en cada estrato nos da un modelo de ZFE en algún estrato contable y los estratos siguientes no hacen ninguna diferencia. Esta estructura contable es una subestructura elemental de L, es decir está contenida en L y para cualquier sucesión de elementos de ella y toda fórmula, la fórmula instanciada con dichos elementos es deducible en L si y sólo si es deducible en la subestructura. Además, L es un modelo interno muy "magro", en el sentido de que sólo contiene los conjuntos necesarios para contener a la clase de los ordinales; es más, todos los conjuntos "grandes" que tiene L están en L gracias a que contiene a los ordinales. (ver [Maddy 1988] p.506).

Recordemos el teorema 4.6. Este teorema, del cual es un corolario el Teorema de Scott, revela la equivalencia entre la existencia de un cardinal medible y la existencia de una inmersión elemental no-trivial de V en un modelo transitivo M. El primer ordinal movido por esta inmersión (punto crítico, definición 4.21) debe ser un cardinal medible. Entonces, si la definición en términos de medidas y ultrafiltros había sido vista con cierto recelo por algunos investigadores, la conexión que el teorema 4.6 da con las inmersiones elementales, a través de ultrapotencias, reveló una caracterización estructural natural de los cardinales medibles. Es más, las reglas empíricas que hasta ese momento no se habían utilizado para justificar la existencia de cardinales medibles, comenzaron a usarse para argumentar la existencia de cardinales con la propiedad de ser puntos críticos de inmersiones elementales no-triviales.

Si recordamos el corolario 4.5 que asegura que no existe una inmersión elemental no-trivial de V en L, también podemos pensar en la "delgadez" de L antes mencionada; esto es porque de alguna manera tiene como consecuencia que si una clase transitiva es elementalmente equivalente a V (definición 4.17) y existe una inmersión no-trivial del universo en ella, entonces esa clase tiene que contener propiamente a L.

Por último, es importante decir que, debido al apoyo casi general que se da al Axioma de Existencia de Cardinales Medibles, muchos investigadores consideran que las pruebas que suponen este axioma son pruebas para la teoría de conjuntos. (ver [Maddy 1988] p. 508).

Por lo tanto, si aceptamos el Axioma de Existencia de Cardinales Medibles como correcto, es decir, si creemos que describe de manera adecuada la realidad conjuntista, entonces tenemos que aceptar que V es distinto de L (teorema de Scott 4.7).

5.2 El Problema del Continuo

El problema del continuo surge en 1878, cuando Cantor conjetura que todo subconjunto no-numerable de los números reales puede corresponderse uno-a-uno con el conjunto de todos los números reales. Si consideramos el Axioma de Elección, esto es equivalente a decir que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Hipótesis del Continuo). Otra manera de enunciar la Hipótesis del Continuo es diciendo que hay tantos subconjuntos diferentes de ω como números reales. Durante muchos años se buscaron pruebas de la Hipótesis del Continuo (HC) o de su negación; incluso es el primer problema en la famosa lista de Hilbert de 1900. Ahora sabemos que HC es indecidible en ZFC. Su consistencia relativa fue demostrada por Gödel cuando construyó L (corolario 3.6). De hecho, en L es verdadera la Hipóteis Generalizada del Continuo ($2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$). Por su parte, la consistencia relativa de su negación se demuestra por el método de forcing descrito en la sección 3.3.1. Ahora bien, si compartimos el punto de vista platónico descrito al principio de este capítulo, esto no resuelve el problema del continuo. Al respecto, Gödel dice:

'... *su indecidibilidad [de HC] a partir de los axiomas que hoy día aceptamos sólo puede significar que estos axiomas no entrañan una descripción completa de esta realidad. Esta creencia no es, de ningún modo, quimérica, pues es posible establecer medios para obtener decisión de una pregunta indecidible a partir de los axiomas usuales.*' ([Gödel 1947,64] p.348).

Desde su aparición, muchos matemáticos desconfiaron que HC fuera verdadera y hasta la fecha, se siguen buscando argumentos en contra de ella. A pesar de la sugerencia de Gödel de que HC sería resuelta por algún Axioma Fuerte de Infinitud (ver [Gödel 1947,64] p.348-9), todos estos axiomas, incluso el de Existencia de Cardinales Medibles, fracasan al no implicar la negación de HC, pues son relativamente consistentes con HC (y con su negación). De este modo, aunque el Axioma de Existencia de Cardinales Medibles implica que V es distinto de L, tampoco resuelve el problema del continuo.

Entre las pocas cosas que sabemos acerca del cardinal de los números reales, está el hecho de que no es un cardinal inaccesible fuerte. También se sabe que HC se cumple para ciertos subconjuntos no-numerables de reales, es decir, que esos subconjuntos específicos de reales tienen la misma cardinalidad que todo el conjunto de números reales. Sin embargo, estos subconjuntos forman una parte sumamente pequeña del total de los subconjuntos de los reales, ya que son muy especializados; es más, el número de subconjuntos de reales que se sabe que cumplen HC es $2^{\aleph_0}$ y hay $2^{2^{\aleph_0}}$ subconjuntos de los números reales en total.

Recordemos el corolario 3.5 que afirma que si $V = L$, entonces se cumple la Hipótesis Generalizada del Continuo (HGC). Gödel construye al universo L específicamente para que HGC sea verdadera en él. Haciendo un análisis intuitivo de L, podríamos entender por qué HC es verdadera en L. Como todos los subconjuntos definibles de ω aparecen en L_{ω_1} y sabemos que la cardinalidad de L_{ω_1} es igual a la cardinalidad de ω_1 (lema 2.6), entonces HC es verdadera en L. Por otro lado, la cardinalidad de L_{ω_1} es pequeña porque el procedimiento de formación de conjuntos en L sólo permite a lo más un nuevo elemento por cada fórmula y sucesión finita de parámetros. Entonces, HC se cumple en L gracias a que la formación de subconjuntos está restrinigida artificialmente, de modo que hay tantos subconjuntos de ω como la cardinalidad de ω_1. Al respecto, recordemos que la potencia de un conjunto no es absoluta, ni siquiera para las clases transitivas ($\mathcal{P}(A)^M = \mathcal{P}(A) \cap M$); es claro por tanto que, al restringirnos a conjuntos definibles en cada estrato, reducimos el conjunto potencia.

En [Gödel 1947,64] (pp. 353-4), Gödel menciona varias consecuencias "contraintuitivas" de HC, como que subconjuntos no-numerables "pequeños" de los reales tendrían la cardinalidad del continuo. Sin embargo, dado que el famoso conjunto de Cantor, un subconjunto no-numerable de reales con medida de Lebesgue cero (característica que le da cierta propiedad de "pequeñez"), tiene la cardinalidad del continuo (sin suponer HC), es difícil entender por qué estas consecuencias son "contraintuitivas". Es más, varios especialistas comentan que no entienden por qué los ejemplos que da Gödel son, como él los calificó ([Gödel 1947,64] p. 353), 'muy poco plausibles'. (ver [Maddy 1988] p. 495-6).

Un argumento muchas veces utilizado es que HC es restrictiva porque el continuo es demasiado complicado como para ser numerado por los ordinales contables (cuya cardinalidad es $\aleph_1$). Es más, la cardinalidad de la colección de todos los buenos órdenes numerables es $\aleph_1$ y la cardinalidad de la colección de todos los órdenes lineales numerables es $2^{\aleph_0}$. Para que un orden lineal sea un buen orden se necesitan requerimientos muy fuertes; es así como se puede pensar que hay muchos más órdenes lineales numerables que buenos órdenes numerables. Si HC fuera verdadera habría igual número de ellos. Sin embargo, si HC fuera verdadera no sería la primera vez que la diferencia en complejidad entre dos conjuntos no determine una diferencia de cardinalidad entre ellos.

El Axioma de Reemplazo asegura que la imagen de una funcional restringida a un conjunto es un conjunto. El Axioma de Potencia asegura que dado un conjunto, la colección de todos sus subconjuntos es un conjunto. Si analizamos con cuidado estos dos axiomas, nos damos cuenta que, mientras que el axioma de reemplazo garantiza la existencia de conjuntos no más grandes que los ya existentes, el de potencia garantiza la existencia de conjuntos más grandes y quizá *mucho* más grandes. Esto es, el axioma de reemplazo limita el tamaño de los conjuntos que genera a través de la funcional y, en cambio, el de potencia no encierra ninguna indicación del límite en el tamaño de los conjuntos de los cuales asegura su existencia. Es más, del Axioma de Potencia no puede deducirse ni siquiera que la cardinalidad de los conjuntos que genera tenga alguna cota superior cercana a la del conjunto con el cual se generan; es por esto que, a lo mejor, estos conjuntos son *mucho* más grandes que los iniciales. Ahora, podemos ver a $\aleph_1$

como el conjunto de todos los ordinales numerables; ésta es la manera más simple de generar el cardinal sucesor de $\aleph_0$. En cambio, el cardinal $2^{\aleph_0}$ está generado por un principio mucho más poderoso: el Axioma de Potencia. Para algunos no es claro pensar que un cardinal generado por principios muy parecidos a los del Axioma de Reemplazo ($\aleph_1$) pueda "alcanzar" la cardinalidad del continuo.

Un argumento extrínseco parecido a este último es que una de las consecuencias de HGC es que ser cardinal inaccesible débil es equivalente a ser cardinal inaccesible fuerte. Recordemos que κ es cardinal inaccesible fuerte (defінción 4.24) si κ es cardinal mayor que $\aleph_0$, no es suma de un número menor que κ de cardinales menores que κ y, además, no es una exponenciación de cardinales menores que κ. En cambio, κ es un cardinal inaccesible débil si es cardinal mayor que $\aleph_0$, no es suma de un número menor que κ de cardinales menores que κ y, además, no es un cardinal sucesor. Como el cardinal sucesor de κ es siempre menor o igual que el cardinal potencia de κ ($\kappa^+ \leq 2^\kappa$), es fácil ver que si un cardinal no es "alcanzable" con exponenciación de cardinales menores que él, entonces tampoco es "alcanzable" con la operación sucesor; de aquí que todo cardinal inaccesible fuerte sea inaccesible débil. Por otro lado, aunque nos parezca que un cardinal "alcanzable" con exponenciación no tiene por qué ser "alcanzable" con la operación sucesor, HGC implica que estas dos propiedades de inaccesibilidad son equivalentes.

Con base en el ya mencionado *finitismo de Cantor* también se puede argumentar que para casi todos los números finitos, $n > 1$, se cumple que $2^n > n + 1$ y, como los transfinitos se comportan en muchos aspectos básicos de manera parecida, lo más probable es que HGC no sea verdadera. Es importante mencionar que Cantor creía que los transfinitos eran parecidos a los finitos porque comparten, según él, las propiedades más básicas, a saber, tienen igual número de elementos si y sólo si son biyectables, son bien-ordenables y existe la aritmética cardinal transfinita.

Por todo lo anterior, como el Axioma de Constructibilidad implica HC, si se cree que HC no es plausible, entonces se debe creer que el Axioma de Constructibilidad tampoco lo es.

Quizá Gödel pudiera convencernos de que los argumentos intuitivos deben ser tomados en cuenta:

"No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir

teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro.' ([Gödel 1947,64] p. 359).

5.3 Definibilismo y Combinatorialismo

Hay una objeción fundamental en contra del Axioma de Constructibilidad: $V = L$ parece restringir indebidamente la noción de conjunto arbitrario de naturales. En relación a esto muchos matemáticos piensan que no hay ningún indicio de que todo subconjunto de ω sea definible.

En [Maddy 1993], Maddy plantea que la práctica científica en general depende de "máximas metodológicas". Nos da el ejemplo de la máxima metodológica que considera que *todas las estructuras matemáticas pueden ser descritas por conjuntos.* Esto es porque la existencia en matemáticas quiere decir existencia en el mundo de los conjuntos y la resolución de un problema matemático quiere decir resolución desde las hipótesis de la teoría de los conjuntos. Sin embargo, la teoría de categorías ha presentado anomalías a este respecto. Es así como podríamos creer que la teoría de categorías terminará por derrocar esta máxima metodológica. Maddy sugiere que alguna vez existió una máxima metodológica dentro de las matemáticas a la que llama *definibilismo*. La idea de esta máxima metodológica era el *considerar a las matemáticas como el estudio de lo definible*, lo representable, lo expresable. En este artículo, Maddy hace un análisis histórico del desarrollo de la noción de función y de como el *definibilismo* tuvo que ser reemplazado por razones matemáticas poderosas.

Los comienzos del concepto de función están asociados con Descartes (1637), cuando aplica el álgebra a la geometría. Descartes explica cómo con una ecuación en x y y se puede calcular el valor de y para valores dados de x y clasifica a las curvas como "geómetricas" si están determinadas por alguna ecuación y como "mecánicas" si no. Esta clasificación puede verse como el primer indicio del *definibilismo*, ya que Descartes excluye a las curvas "mecánicas" de su geometría. Durante algún tiempo, el concepto de función se pensó como una relación entre cantidades puramente geométricas. Durante la primera mitad del siglo XVIII el concepto de función se fue separando de sus raíces geométricas. Fue entonces cuando las relaciones gráficas en general dieron lugar a funciones definidas analíticamente. En 1744, Euler escribe que una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de la cantidad variable y de cantidades constantes. Claramente la noción de función sin representación no es consistente con esta definición.

La primera anomalía del *definibilismo* aparece con la ecuación de onda de d'Alembert. No debiera sorprendernos que esta anomalía surge con el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, ya que la solución de éstas introduce funciones arbitrarias análogas a las constantes arbitrarias de integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias. D'Alembert decide poner restricciones a sus ecuaciones para que éstas se puedan expresar de manera analítica. Es decir, para d'Alembert el *definibilismo* es una máxima metodológica que acota las matemáticas legítimas, aunque esto provoque limitantes en la aplicación de las matemáticas a la mecánica. Sin embargo, para Euler era mejor pensar que si había valores inadmisibles de las funciones en la ecuación de onda que reflejaban el comportamiento de la mecánica, entonces estos valores deberían ser admitidos.

Posteriormente, comenzando en 1805 y culminando en 1822, surgen las famosas series trigonométricas de Fourier. Es entonces cuando se vuelve a pensar en *definibilismo*, pues la idea principal de esta máxima metodológica se conserva si se acepta que entre las expresiones analíticas se encuentren las trigonométricas. Pareciera ser que a partir de este momento la noción de ser representable analíticamente por pedazos se considera también función. En 1851, Riemann, después de argumentar la importancia científica de estudiar funciones que no necesariamente describan sucesos de la física, da una nueva definición de función admitiendo funciones "patológicas", como la de Dirichlet ($f(x) = 0$ si x es racional y $f(x) = 1$ si x es irracional). De esta manera, Riemann da legitimidad a funciones no representables por series de Fourier. Sin embargo, aunque extendió grandemente el concepto de función, los ejemplos que da son funciones que ahora consideraríamos expresables analíticamente; por esto, no podemos decir que estas funciones "patológicas" desacreditan el *definibilismo*.

Hacia finales del siglo XIX algunos matemáticos comenzaron a estudiar a las funciones sin suponer que poseían propiedades generales (Darboux, Du Bois-Reymond); por lo que había menos razón para esperar que todas las funciones pudieran ser definidas de alguna manera específica.

Baire hace una clasificación de las funciones en diferentes clases: la clase 0 como las funciones continuas, la clase 1 como los límites de sucesiones de funciones continuas, la clase 2 como los límites de sucesiones de funciones de la clase 1 y así sucesivamente. En 1898, Baire escribe que para obtener una función que no pertenezca a estas clases, tendría que poder encontrar una "partición del continuo" en dos conjuntos que cumplan ciertas características; sin embargo, no había podido "definir" tal partición. Después, asegura que habría que precisar el significado de "definir un conjunto" y expresa su inquietud de imponer esta restricción a la noción de conjunto por estar convencido de que es una restricción considerable. (ver [Maddy 1993] p. 32). Entonces, las preguntas sobre funciones se empiezan a reducir a preguntas sobre conjuntos y además, el problema del *definibilismo* se hace explícito.

En 1904, Zermelo demuestra el Teorema del Buen Orden. Zermelo habla de la existencia de una función de elección, pero no la describe. Es entonces cuando queda claro que Baire, Lebesgue y Borel habían utilizado el Axioma de Elección (AE) en varios de sus resultados inadvertidamente. Los defensores del *definibilismo* no podían aceptar fácilmente este axioma, pues argumentaban que no se podía probar la existencia de un objeto matemático sin definirlo. Sin embargo, el Axioma de Elección resultó ser indispensable para desarrollar la mayoría de las ramas de la matemática (teoría de conjuntos, análisis, topología, álgebra, lógica, etc.) y el progreso de la ciencia matemática terminó por dudar fuertemente del *definibilismo* como máxima metodológica.

Durante este mismo período surgió una nueva máxima metodológica a la cual Maddy llama el *combinatorialismo*. Como en el caso de las funciones que asignan a cada elemento de un conjunto finito otro elemento de ese mismo conjunto, las funciones de conjuntos infinitos empiezan a pensarse como una infinidad de *determinaciones independientes* que asignan a cada elemento del conjunto otro elemento de ese conjunto. El *combinatorialismo*, descrito por Bernays en 1934, considera que los conjuntos y las funciones deben pensarse como resultado de un número finito o infinito de determinaciones separadas. (ver [Maddy 1993] pp. 35-6). Así, Bernays justifica el Axioma de Elección, ya que una función de elección en una familia de conjuntos ajenos no vacíos se constituye por determinaciones independientes que eligen un elemento de cada uno de estos conjuntos. También resuelve el caso de las definiciones impredicativas, pues si se piensa que los elementos de una entidad existen independientemente de la definición, entonces se puede escoger un elemento particular de esa entidad; es decir, no es necesaria una definición que construya toda la entidad definida.

En resumen, el *definibilismo*, como máxima metodológica, dio lugar a ciertas anomalías: las soluciones de la ecuación de onda, las funciones "patológicas" y, finalmente, las funciones de elección. Aunque el *definibilismo* resistió por lo menos las primeras dos anomalías mencionadas permitiendo medios de expresión más generales, el surgimiento del *combinatorialismo* como una nueva y poderosa máxima metodológica terminó por reemplazarlo. Además, claramente el *combinatorialismo* incluye al *definibilismo*, lo que lo hace una máxima metodológica más general. Maddy argumenta que la perspectiva del *combinatorialismo* ha resultado fructífera para el análisis, la geometría, el álgebra y la topología y, por lo tanto, es la máxima metodológica vigente en las matemáticas.

En este contexto, ¿qué podemos decir del universo conjuntista V y del universo constructible L? Recordemos que el Axioma de Constructibilidad asegura que todo conjunto está en algún estrato de la jerarquía constructiva, es decir, que todo conjunto es un elemento de algún L_α. Un estrato de la jerarquía acumulativa (algún V_α) incluye a todo conjunto formado con elementos ya existentes escogidos de manera combinatoria; ese mismo estrato en la jerarquía constructiva (L_α) incluye sólo los conjuntos definibles (en el sentido desarrollado en la sección 2.2) formados con elementos ya existentes. Como vimos al final del capítulo 2, esta comparación, que además se ve reflejada en la diferencia de cardinalidad entre la mayoría de los estratos V_α y L_α (lema 2.6), no excluye la posibilidad de que todo conjunto determinado de manera combinatoria aparezca eventualmente en algún estrato posterior de la jerarquía constructiva. Sin embargo la comparación de L con la jerarquía acumulativa deja ver su carácter limitativo. En un estrato $\alpha + 1$, dada una fórmula φ en el lenguaje de los conjuntos, se permiten como parámetros sólo elementos de L_α, es decir, conjuntos que ya fueron definidos, y los cuantificadores de φ sólo pueden correr sobre L_α, es decir, sobre los conjuntos que ya fueron definidos. En otras palabras, los nuevos conjuntos son definidos predicativamente. La justificación de esta restricción es de tipo constructivo, ya que la jerarquía de L se forma como si estuviéramos haciendo la construcción paso por paso, en cada estrato utilizando sólo conjuntos que ya fueron *construidos* y usando propiedades *expresables* en el lenguaje formal de los conjuntos. Así, el Axioma de Constructibilidad comparte la caracterísitica limitativa del *definibilismo*: las definiciones impredicativas no están permitidas. Además, es claro que la jerarquía acumulativa forma a los conjuntos de manera que cada elemento se escoge independientemente de los otros elementos ya escogidos o por escogerse, es decir, con un número finito o infinito de determinaciones separadas. Por lo tanto, aceptar al Axioma de Constructibilidad como verdadero sería como imponer la máxima metodológica del *definibilismo*, cuando ya ha sido desacreditada y reemplazada por la del *combinatorialismo*. Es más, la máxima metodológica del *combinatorialismo* parece mucho más adecuada para la descripción del universo conjuntista.

A pesar de que todo lo que se ha dicho parece correcto, queda pendiente una argumentación. Recordando el teorema 3.5, sabemos que el Axioma de Constructibilidad implica el Axioma de Elección (AE). Por lo tanto, si una de las anomalías del *definibilismo* era justamente no permitr la existencia de la función de elección, podríamos ver al teorema 3.5 como un triunfo tardío del *definibilismo*.

Por un lado podemos analizar por qué AE es verdadero en L. Generalmente, AE se considera un principio que "maximiza"; esto porque garantiza la existencia de conjuntos (las imágenes de las funciones de elección) que sin él no existirían. Luego, si también se considera que L es "magro", ¿cómo es que AE es verdadero en L? AE es verdadero en L porque existe un buen orden definible del universo constructible. Ahora, un conjunto es bien-ordenable porque se puede escoger uno de sus elementos por cada ordinal hasta agotarlos a todos. Estas elecciones son posibles gracias a la existencia de una función de elección, por lo que Maddy opina que intuitivamente el principio del buen orden se deriva de AE y no viceversa ([Maddy 1988] p.497). La "maximización" que logra AE consiste en garantizar la existencia de conjuntos complejos y probablemente indefinibles como un buen orden para los números reales. Por consiguiente AE es verdadero en L, pero no es verdadero porque existan conjuntos complejos en L, sino más bien porque hay un buen orden artificialmente fabricado del universo constructible. Es decir, AE no logra "maximizar" a L, porque ya todo está "predefinido".

Por otro lado, aunque el Axioma de Constructibilidad demande definiciones formales para todo conjunto y restrinja nuestra atención a definiciones predicativas formadas constructivamente, requiere que tomemos todo el rango de los ordinales. Esto es, para describir a L se acepta a los ordinales como objetos prexistentes a la definición, pues se utiliza el teorema de recursión para ordinales para definir a los estratos L_α (definición 2.4) y después se hace la unión, sobre *todos* los ordinales, de los estratos para definir L (definición 2.5). Es por esto que el Axioma mismo de Constructibilidad viola el elemento constructivo del *definibilismo*. Considerando a los ordinales como una entidad que existe independientemente de su "definibilidad", el Axioma de Constructibilidad se acerca mucho más al *combinatorialismo* que al *definibilismo*. Con esto Maddy concluye que el Axioma de Constructibilidad no es una hipótesis que satisfaga ni los requerimientos del *definibilismo* ni los del *combinatorialismo*, sino que es un "híbrido" del que se sospecha su falsedad desde las dos perspectivas. El Axioma de Constructibilidad es una suposición que impone restricciones constructivistas en sus definiciones, y, después las omite para los ordinales que indexan los estratos.

En conclusión, Maddy piensa que la sospecha expresada por muchos hacia el Axioma de Constructibilidad es acertada. Es decir, se concluye que $V = L$ no sólo no debe ser agregado como axioma, sino que, además, parece falso. Sin embargo, hay que recordar que argumentar que una hipótesis no debe ser agregada como axioma, porque "parece" falsa no es *asegurar* que sea falsa. Maddy también expresa su inquietud al respecto de la necesidad de nuevos axiomas para progresar en el estudio de los conjuntos. Por lo tanto, estas argumentaciones pueden ayudar a clarificar el tipo de evidencia apropiada para agrandar la lista de axiomas.

5.4 Conclusiones

Desde el punto de vista realista o platónico, podemos concluir que hay argumentos para pensar que el Axioma de Constructibilidad es falso. Es decir, podemos pensar que en el "mundo" de los conjuntos no todos los conjuntos son definibles.

Desde el principio de esta tesis tuvimos que considerar algunas afirmaciones como hipótesis sin poder demostrarlas, como fue la aseveración de que ZFE es consistente. Sin embargo, si tomamos en cuenta un punto de vista filosófico platónico podemos pensar a estas afirmaciones como actos de fe basados en nuestra intuición, nuestra experiencia y nuestra razón. Es más, los actos de fe intuitivos y razonables no están excluídos de la matemática, pues toda afirmación que se trabaja como un axioma es una afirmación de la que se acepta y, en cierto sentido, se "cree" su verdad sin demostrarla. Muchas veces podemos basar nuestra creencia en la verdad de un axioma en nuestra intuición matemática, pero en otras situaciones nuestra intuición no nos dice mucho. Por lo tanto, habemos matemáticos con la inquietud de esclarecer la validez de ciertos principios con base en argumentos más complicados. Es por esto que, para mí, el argumento del Teorema de Scott me lleva a creer que el Axioma de Constructibilidad es falso, pues si el universo conjuntista describe una realidad que permite la formación de más y más conjuntos, ¿por qué no habrían de existir los cardinales medibles? También me parece muy convincente el punto de vista de Maddy al respecto de la definibilidad de las matemáticas; ¿por qué todos los conjuntos que existen tienen que poder ser definibles de alguna manera? Queremos tener todas las combinaciones posibles de objetos en los conjuntos y esto parece responder más a un criterio de combinatoria que de definibilidad.

Concluyo que hay reflexiones razonadas profundas y convincentes con base en las cuales, desde una perspectiva realista o platónica, se puede creer que el Axioma de Constructibilidad es falso.

Bibliografía

[Amor 1984] Amor J. A., Pequeños Grandes Cardinales, Tesis de Maestría, UAM Iztapalapa, 1984.

[Amor 1991] Amor J. A., *"Forcing y pruebas de independencia"*, Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 9, 1991, pp. 3-21.

[Amor 1993] Amor J. A. y Zamora J., *"Conjuntos y Clases"*, Contactos, Universidad Autónoma Metropolitana, 1993, Núm. 10, pp. 62-65.

[Amor 1997] Amor J. A., *Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias de la UNAM, México, 1997.

[Bell y Slomson 1974] Bell J.L. y Slomson A.B., *Models and Ultraproducts: an Introduction*, North Holand, Amsterdam, Tercera impresión, 1974.

[Gödel 1947,64] Gödel K., *"¿Qué es el problema del continuo de Cantor?"*, Obras Completas, Alianza Editorial, Madrid, 1981, pp.340-362.

[Jech 1978] Jech T., *Set Theory*, Academic Press, Nueva York, 1978.

[Kunen 1980] Kunen K., *Set Theory, an introduction to independence proofs*, North Holland, Amsterdam,1980.

[Maddy 1988] Maddy P., *"Believing the Axioms. I"*, The Journal of Symbolic Logic, junio 1988, Vol. 53, Núm. 2, pp. 490-508.

[Maddy 1993] Maddy P., *"Does V equal L?"*, The Journal of Symbolic Logic, marzo 1993, Vol. 58, Núm. I, pp. 15-41.

[Moore 1990] Moore G. H., *"Introductory note to 1947 and 1964"*, contenido en Gödel K., *Collected Works Volume II* (Feferman *et. al.* eds.), Oxford University Press, Nueva York, 1990, pp. 154-175.