17
2 es.

MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

"APLICACIONES DE LA TEORIA DE GRAFICAS"

TESIS QUE PRESENTA:

CATHYA HERNANDEZ BOHNE

261252

ABRIL DE 1998

PREFACIO

El presente trabajo pretende ayudar a todos aquellos que esten interesados en entender el campo de desarrollo de la Teoría de Gráficas. Esto es que les interese aplicar las matemáticas de forma que les permita resolver problemas gráficamente.

La Teoría de Gráficas es una rama de las matemáticas que por ser parte fundamental de ella no deja ser abstracta, por lo que realizar aplicaciones utilizando sus conceptos permitirá que se entiendan adecuadamente. Por lo que esta tesina pretende ser un apoyo para el entendimiento de esta materia.

Será muy agradable que este material ayude a las generaciones siguentes a comprender el amplio campo de estudio de la Teoría de Gráficas.

No quiero dejar pasar la oportunidad de agradecer a los profesores que me apoyaron en la realización de este trabajo, así como a mis padres y amigos que siempre me han apoyado, y a tí Alex que me has acompañado en este largo camino.

Abril de 1998

CONTENIDO

INTRODUCCION 1

1. APLICACION DE CONCEPTOS GENERALES DE LA TEORIA DE GRAFICAS 2

1.1. INTRODUCCION 2
1.2. NOTACION Y REPRESENTACION DE UNA GRAFICA 3
1.3. OPERACIONES CON GRAFICAS 5
1.3.1. APLICACION 7
1.4. DIGRAFICAS 10
1.4.1. APLICACIÓN: LAS DIGRAFICAS EN EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE TRAFICO 12
1.5. TORNEOS 14
1.5.1. APLICACIÓN: TORNEOS PARA LA REALIZACION DE UN COMITÉ ESCOLAR 14
1.6. BIGRAFICAS (GRAFICAS BIPARTIDAS) 17
1.6.1. APLICACION DE GRAFICAS BIPARTIDAS 18

2. TEORIA DE GRAFICAS EN LA PLANEACION Y PROGRAMACION DE ACTIVIDADES DE UN PROYECTO. 21

2.1. INTRODUCCION 21
2.1.1. BREVE HISTORIA 21
2.2. REDES DE ACTIVIDADES 23
2.2.1. APLICACIÓN: CREANDO UNA RED DE ACTIVIDADES 25
2.3. METODO DE LA RUTA CRITICA 28
2.3.1. APLICACION: CREACION DE UN PEQUEÑO CENTRO DE COMPUTO ESCOLAR. 30
2.4. PERT (PROGRAM EVALUATION AND REVIEW TECHNIQUE) 35
2.4.1. APLICACION: CREACION DE UN PROGRAMA DE POSGRADO 38
2.5. BENEFICIOS DEL CPM Y PERT. 43

3. LA TEORIA DE GRAFICAS EN LA CREACION DE REDES 44

3.1. INTRODUCCION 44
3.2. NOTACION Y CONCEPTOS 45
3.3. CONCEPTOS DE FLUJO DE REDES 48
3.3.1. ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL FLUJO MAXIMO 51
3.3.2. APLICACIÓN: FLUJO DE REDES EN LA INGENIERIA 53
3.3.3. APLICACIÓN: CREACION DE UNA DESVIACION 57
3.3.4. ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL FLUJO MINIMO 58
3.3.5. APLICACIÓN: DETERMINACION DE UNA RUTA RAPIDA (TIEMPO MINIMO) 59
3.3.6. APLICACIÓN: REDES ELÉCTRICAS 61

INTRODUCCION

En el plan de estudios de Matemáticas Aplicadas y Computación, se encuentran materias de formación básica, previas al ingreso de cualquiera de las dos especialidades que presenta el plan de estudios. Esto significa que los alumnos obtienen bases matemáticas para solucionar problemas reales, aunque con ellas no se resuelvan completamente, podrán conjuntarse con otras áreas de estudio y así permitir al alumno obtener la solución adecuada a dichos problemas.

Para poder solucionar los problemas se obtiene su modelo, el cual es una representación simplificada de un sistema real, es decir representa o identifica una situación real o problema con un sistema matemático. La construcción de dicho modelo involucra varias áreas de las matemáticas, una de las áreas que permitirá realizar la construcción de modelos es la Teoría de Gráficas, materia que se imparte durante los primeros semestres de la carrera.

Entonces mediante la Teoría de Gráficas es posible representar y analizar las interacciones entre los elementos o actividades de sistemas reales.

Los modelos se obtienen de diversas áreas como lo son: la planeación, administración, educación, ingeniería, comunicaciones de datos, redes de transporte, inteligencia artificial, etc. El campo de aplicación de la Teoría de Gráficas no es limitado, respecto a que podemos modelar situaciones reales como la creatividad lo permita. Es de aquí donde surge la importancia de su estudio en nuestra carrera, ya que es necesario el aprendizaje de los conceptos generales de la Teoría de Gráficas, para utilizarlos como una herramienta que nos permita solucionar problemas que surjan en la vida real.

La idea es presentar a los alumnos de generaciones posteriores, algunas aplicaciones que ejemplifiquen los conceptos pertenecientes a la Teoría de Gráficas, que por su naturaleza matemática son abstractos y debido a que no se han visto antes, no se comprende en forma teórica, esto debido a la carencia de bibliografía que nos muestre la aplicación que tiene está en muchas áreas.

Al desarrollar las aplicaciones se contempla la idea de crear un material de apoyo (y no solo como un trabajo más de investigación) que ayude a las próximas generaciones de la carrera a comprender los conceptos de la Teoría de Gráficas, que permitirán la utilización de ésta como una herramienta en la representación de problemas y soluciones reales.

Así pues la tesina pretender abarcar en cuatro capítulos, con el desarrollo o ejemplificación de algunas aplicaciones, áreas como la educación, la planeación, la ingeniería, las redes de transporte, redes eléctricas y la inteligencia artificial. Antes de la exposición de alguna aplicación, se presentará la teoría que se requerirá para desarrollar dicha aplicación, esto con la finalidad de que se entienda la teoría mediante la aplicación posterior de la misma.

1. APLICACION DE CONCEPTOS GENERALES DE LA TEORIA DE GRAFICAS

1.1. INTRODUCCION

La Teoría de Gráficas surge[1] en 1736 con Leonhard Euler cuando trata de resolver el problema de Königsberg. El nombre del problema se debe a la ciudad alemana de Königsberg por donde atraviesa el río Pregel; en este río había dos islas unidas con las orillas, y entre sí por medio de siete puentes. El problema consistía en encontrar un camino para cruzar cada uno de los siete puentes de Königsberg exactamente una vez y regresar al punto inicial. Vea la siguiente figura que representa el problema.

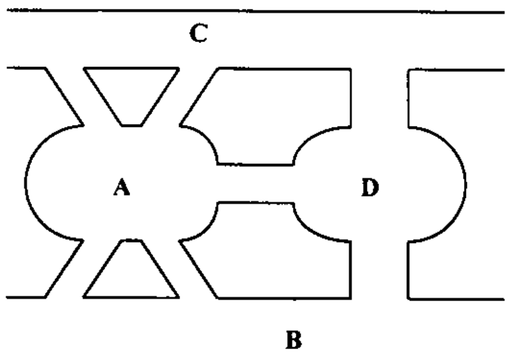


Figura 1.1 *Problema de Königsberg*

Euler desarrolló las condiciones en que se pueden recorrer todos los segmentos de una gráfica dada, una sola vez cada uno. Puesto que estas condiciones no estuvieron presentes en el problema de los puentes, el originador de la Teoría de Gráficas demostró mediante ésas que no era posible una solución al problema y así estableció bases para el desarrollo de la teoría.

Un siglo después, G. R. Kirchhoff, físico alemán, desarrolló la teoría de los árboles en su estudio del sistema de ecuaciones de circuitos de redes eléctricas. Con árboles, demostró que es necesario considerar solamente los circuitos fundamentales (y no todos) para resolver el sistemas de ecuaciones, lo cual originó los principios de la teoría de redes eléctricas. Es en la segunda mitad del siglo actual que el campo de la teoría de gráficas experimentó una gran actividad, tanto teórica como aplicada, y es dentro de las últimas décadas que matemáticos tales como Frank Harary y C. Berge han desarrollado de forma exhaustiva dicha teoría.

El objetivo principal de este capítulo es la de introducir al entendimiento de los conceptos más generales y básicos de la Teoría de Gráficas, intentando dar una visión general del campo operacional que tiene en los diversos campos en los que se puede aplicar; además de presentar la importancia que tiene ésta para el planteamiento y modelación de diferentes problemas que se presentan en la vida real.

[1] **Fuente:** "Introducción a la Teoría de Gráficas en el campo de la Educación", de Donna Jackson Oliver y Ma. Dolores González Martínez, ANUIES, México, 1979.

1.2. NOTACION Y REPRESENTACION DE UNA GRAFICA

Cuando Leonhard Euler trata de resolver el problema de Königsberg, procede a modelar el problema mediante su gráfica, es decir, representó cada isla con un vértice y cada puente por una arista obteniendo así la gráfica final (vea la figura 1.2), para continuar con la solución de la misma, que como se mencionó consistía en recorrer todos los puentes de la gráfica una sola vez cada uno.

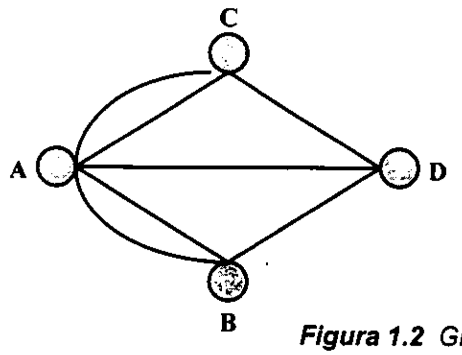


Figura 1.2 *Gráfica del problema de Königsberg*

Euler determinó que la gráfica no tenia solución dado que todos sus vértices debían ser de grado par (es decir, el número de líneas incidentes al vértice debía ser par), para poder efectuar el recorrido por cada una de las aristas sin pasar por ninguna doble vez. Para que el problema tenga solución tendría que cambiarse la arista que va de D a A por otra que vaya de C a B.

GRAFICA EULERIANA: Una gráfica euleriana es aquella la cual puede ser recorrida a través de sus aristas exactamente una vez, continuando a través de sus vértices, y terminando en el punto o vértice inicial.

Como Euler lo demostró, muchas situaciones de la vida real se pueden representar o modelar mediante diagramas que consisten de un conjunto de puntos, que por medio de una línea[2], se pueden unir un par de estos puntos. Por ejemplo, los puntos pueden representar gente, y por medio de las líneas, unir o expresar la amistad de un par de ellas; o bien los puntos pueden ser centros de comunicación, y los canales de comunicación pueden ser representados por las líneas. A estos diagramas se les denomina gráficas.

DEFINICION: Una *gráfica G* es un conjunto (V(G), E(G), ψ_G), que consiste de un conjunto no vacío V(G) de vértices, un conjunto E(G), disjunto[3] de V(G), de aristas y una función de incidencia ψ_G que asocia con cada arista de G un par de vértices no ordenados de G.

Si *e* es una arista y *u* y *v* son vértices tal que $\psi_G(e)=uv$, entonces *e* es el que une *u* y *v*, los vértices *u* y *v* son los extremos de *e*.

[2]La denominación de puntos y líneas es parcial, ya que se nombrarán vértice y arista subsecuentemente. Esto es por notación, ya que existe una lista de sinónimos: punto y línea, vértice y arista, nodo y arco, conexión y rama, etc.

[3] Disjunto significa que no necesariamente debe haber el mismo número de aristas como de vértices.

Por ejemplo, G =(V(G), E(G), ψ_G) donde V(G)={v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}, E(G)={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8,} y ψ_G es definida por:

$\psi_G(e_1)= v_1v_2$	$\psi_G(e_2)= v_2v_3$
$\psi_G(e_3)= v_3v_3$	$\psi_G(e_4)= v_3v_4$
$\psi_G(e_5)= v_2v_4$	. $\psi_G(e_6)= v_4v_5$
$\psi_G(e_7)= v_2v_5$	$\psi_G(e_8)= v_2v_5$

Por lo que la gráfica del ejemplo se muestra en la figura 1.3

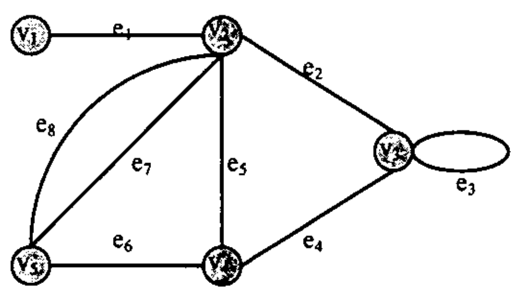
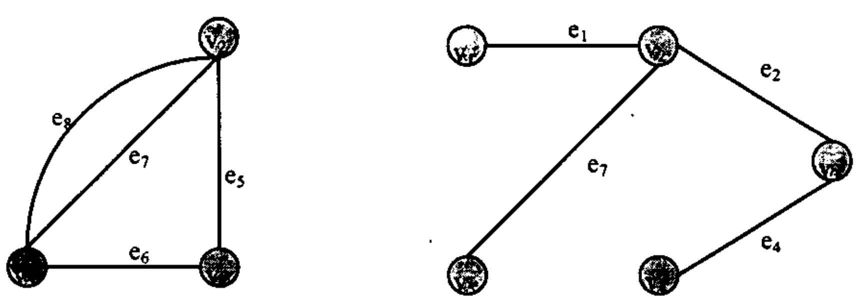


Figura 1.3 *Ejemplo de Gráfica*

La representación gráfica de un sistema o modelo es independiente del tipo de elementos que se utilizan para hacer la gráfica; es decir, es posible utilizar curvas o rectas para representar las aristas, y a los vértices en forma de puntos, círculos, cruces, etc.; lo que importa es que la relación entre los mismos debe ser la misma.

DEFINICION: Una gráfica G'=(V', E') es una *subgráfica* de G =(V,E) si V'$\subseteq$V y E'$\subseteq$ E. Se dice que G'=(V', E') es la subgráfica de G inducida por V' si E' contiene cada arista de E con ambos puntos finales en V'. Una gráfica G'=(V', E') es una subgráfica expandida de G=(V,E) si V' = V y E'$\subseteq$ E.

Un ejemplo de subgráfica y subgráfica expandida de G (de la gráfica 1.3), es el que se muestra en la figura 1.4.



(a) (b)

Figura 1.4 *(a) es una subgráfica y (b) es una subgráfica expandida*

1.3. OPERACIONES CON GRAFICAS[4]

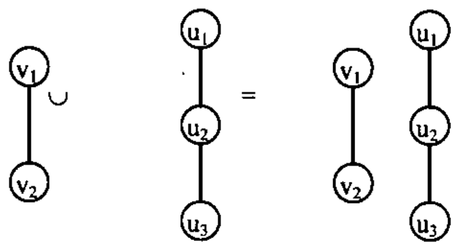
Dado que G=(V, E) está definida en términos de los conjuntos de vértices (V) y aristas (E), es posible definir operaciones sobre G empleando las propiedades de los conjuntos.

Estas operaciones son:

- *Unión* de dos gráficas
- *Suma* de dos gráficas
- *Suma-anillo* de dos gráficas
- *Producto* de dos gráficas
- *Composición* de dos gráficas
- *Intersección* de dos gráficas
- *Supresión o Resta* de dos gráficas

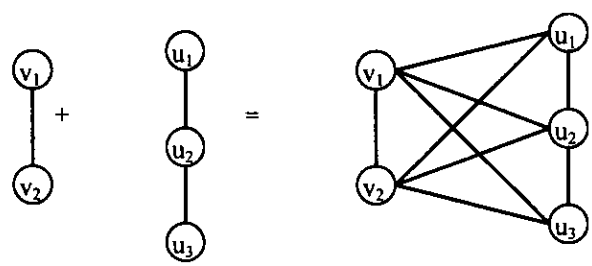
UNION DE DOS GRAFICAS. La unión $G_3=G_1 \cup G_2$ de dos gráficas $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$ es otra gráfica $G_3=(V_3,E_3)$ en la cual $V_3=V_1 \cup V_2$ y $E_3=E_1 \cup E_2$.

Ejemplo: $G_1 \cup G_2$ =



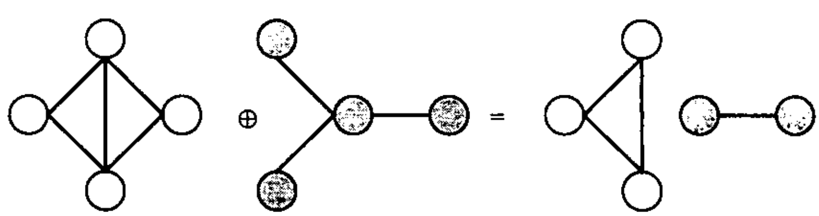
SUMA DE DOS GRAFICAS. La suma $G_3=G_1+G_2$ de dos gráficas se forma con la unión de $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$, más el trazo de una arista entre cada vértice de G_1 a cada vértice de G_2.

Ejemplo: G_1+G_2 =



SUMA-ANILLO DE DOS GRAFICAS. Esta operación corresponde a la disyunción no-inclusiva del cálculo proposicional (en cuanto a las relaciones o aristas). La suma-anillo $G_3=G_1 \oplus G_2$ de dos gráficas $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$ es una gráfica $G_3=(V_3,E_3)$ en la cuál $V_3=V_1 \cup V_2$ y si $e_i \in E_3$, tal que $e_i \in [(E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)]$.

Ejemplo: $G_1 \oplus G_2$ =

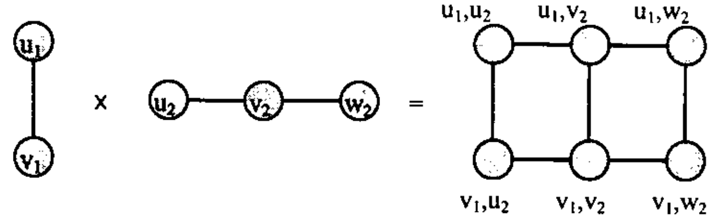


---

[4] **Fuente:** "Graph Theory", de Frank Harary, págs 21-23; y "Enfoque de Sistemas en la Educación: Teoría de gráficas", de Javier Salazar Resines págs 23-39.

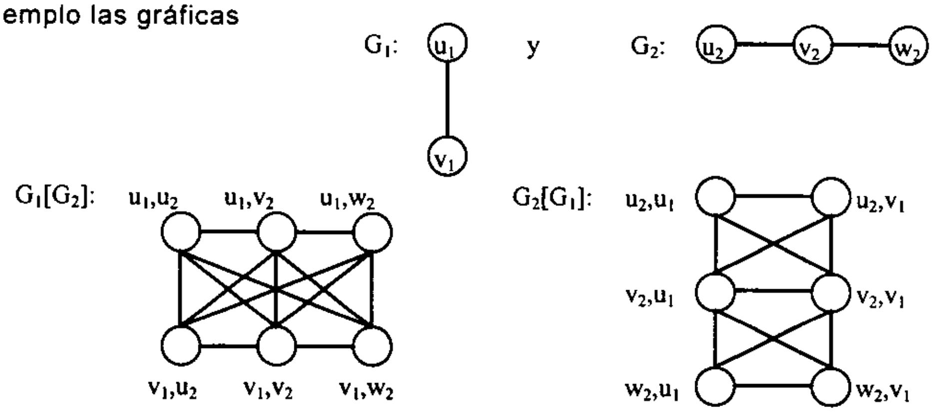
PRODUCTO DE DOS GRAFICAS. El producto $G_3=G_1xG_2$, se consideran dos vértices cualquiera $u=(u_1, u_2)$ y $v=(v_1, v_2)$ en $V= V_1 \times V_2$. Entonces u y v son adyacentes en G_1xG_2 siempre que $[u_1 = v_1$ y u_2 adj $v_2]$ ó $[u_2 = v_2$ y u_1 adj $v_1]$.

Ejemplo: G_1xG_2 =



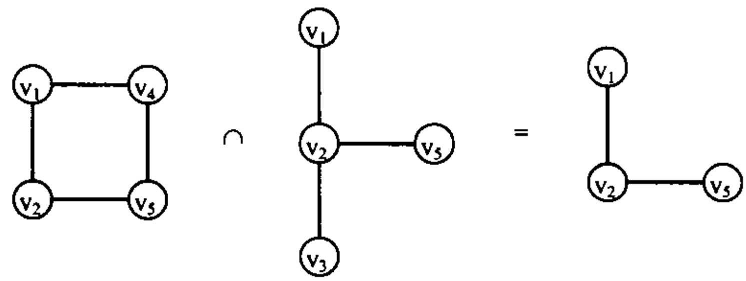
COMPOSICION DE DOS GRAFICAS. La composición $G_3=G_1[G_2]$ de dos gráficas tambien tiene $V= V_1 \times V_2$ como un conjunto de vértices y $u=(u_1, u_2)$ es adyacente con $v=(v_1, v_2)$ siempre que $[u_1$ adj $v_1]$ ó $[u_1 = v_1$ y u_2 adj $v_2]$.

Por ejemplo las gráficas



INTERSECCION DE DOS GRAFICAS. La intersección $G_3=G_1 \cap G_2$ de dos gráficas $G_1=(V_1,E_1)$ y $G_2=(V_2,E_2)$ es otra gráfica $G_3=(V_3,E_3)$ en la cuál $V_3=V_1 \cap V_2$ y $E_3=E_1 \cap E_2$.

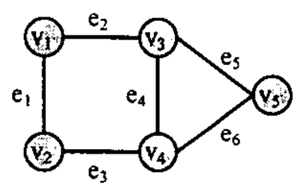
Ejemplo: $G_1 \cap G_2$ =

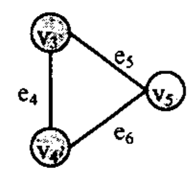


SUPRESION O RESTA DE DOS GRAFICAS. La supresión será de acuerdo a sí el elemento a restar es una arista, un vértice o una subgráfica. Esto significa que la resta será:

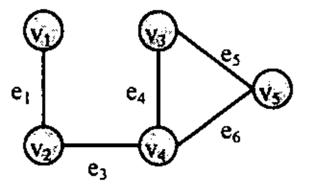
- $G_i - e_i =$ G_i sin la línea e_i
- $G_i - v_i =$ G_i sin el vértice v_i ni las líneas que inciden en v_i
- $G_i - g_i =$ G_i sin la subgráfica g_i ni las líneas que inciden en algún vértice de g_i

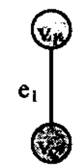
Por ejemplo sea

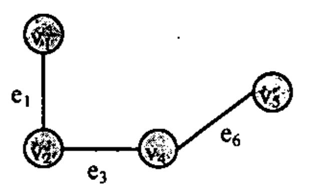
$G_1 =$ 

$g_1 =$ 

Entonces :

$G_1 - e_2 =$ 

$G_1 - g_1 =$ 

$G_1 - v_3 =$ 

Una aplicación de los conceptos de operaciones con gráficas podría ser la que se presenta a continuación:

1.3.1. APLICACION

Supóngase que se desea establecer la estructuración de un curso de Cinemática (G_1) con un curso de Cálculo Diferencial (G_2) mediante una gráfica que modele dicho curso.

Una relación R entre los temas establecerá "el vínculo conceptual" requerido para integrar los diversos conceptos. En las dos gráficas se asume el mismo criterio de relación.

Los temas se indicarán a través de los vértices; es decir como se presenta a continuación:

a) Conceptos matemáticos (del curso de Cálculo Diferencial)

v_1: Concepto de derivada

v_2: Concepto de límite

v_3: Concepto de incrementos $\Delta f/\Delta x$

v_4: Concepto de función $y=f(x)$

v_5: Concepto de incremento (de una var. ind. y de la función asociada)

v_6: Concepto de pendiente

v_7: Concepto de derivada a través de la pendiente de $y=f(x)$

b) Conceptos físicos (del curso de Cinemática)

v_1': Concepto de velocidad

v_2': Cantidades físicas definidas al límite

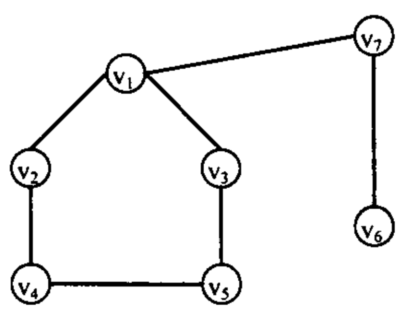
v_3': Cociente de incremento del espacio entre el incremento del tiempo $\Delta e/\Delta t$

v_7': Concepto de velocidad en términos de la pendiente a la curva e-t

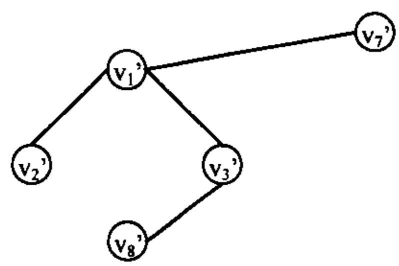
v_8': Conceptos de espacio y tiempo

Los gráficas correspondientes a los conceptos expresados de los dos cursos anteriores son:

G_1: Matemáticas



G_2: Física



Para realizar la unión de las gráficas G_1 y G_2, deben definirse los vértices comunes de ambos cursos.

$v_1^* = v_1 \wedge v_1'$: Concepto de derivada y velocidad

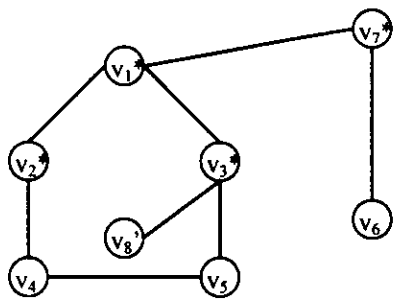
$v_2^* = v_2 \wedge v_2'$: Límite y cantidades físicas definidas al límite

$v_3^* = v_3 \wedge v_3'$: Cociente de incrementos, en particular: $\Delta e/\Delta t$

$v_7^* = v_7 \wedge v_7'$: Derivada y velocidad a través de la pendiente

Entonces la gráfica que muestra la estructuración de ambos cursos, es la gráfica unión; es decir, la unión físico - matemáticas que se modela como sigue:

$\mathbf{G_3 = G_1 \cup G_2}$

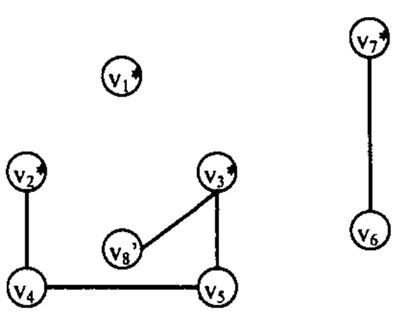


A partir de esta gráfica (G_3), se puede observar el contenido que debe llevar el curso, es decir, con los vértices definidos por la gráfica unión se tomaran los temas que abordará el curso esttructurado (NOTA: esto implica que se abordaran los ocho temas de ambos cursos).

Con la realización de este modelo, nos podemos hacer otra preguntar ¿Qué temas deben interrelacionarse para que no haya posibilidad de traslapes (repeticiones innecesarias)?. Con esta pregunta se sugiere que los temas interrelacionados por ambas materias se trataran en uno solo de los dos campos de estudio.

Para poder dar solución a dicha pregunta, se puede aplicar la operación SUMA-ANILLO, la cual nos daría la siguiente gráfica:

$\mathbf{G_4 = G_1 \oplus G_2}$



Donde la gráfica $\mathbf{G_4}$ proporciona las vinculaciones conceptuales indicadas por las ramas $\{(v_2^*,v_4), (v_4,v_5), (v_5,v_3^*), (v_6,v_7^*)\}$, que indican que deben ser tratadas por las matemáticas (vea la gráfica G_1 que muestra dichas ramas). La relación definida por $\{(v_8',v_3^*)\}$ debe abordarla la física (vea la gráfica G_2). Las que no esten indicadas y que aparecían en la gráfica de unión, pueden abordarse, de acuerdo con el diagrama, por uno u otro campo indistintamente.

Como se ve la Teoría de Gráficas en este ejemplo, se aplica en la estructuración de dos cursos, con el objetivo de verificar su validez y el modo de evitar repeticiones de los temas, mediante el análisis gráfico del sistema que lo representa. Este análisis da importancia a la Teoría de Gráficas en el área educacional.

1.4. DIGRAFICAS

DEFINICION: Una gráfica dirigida o digráfica D* consiste de un conjunto V de vértices y un conjunto de aristas E, cuyos elementos son pares ordenados de vértices distintos donde la arista $(v_i,v_j) \neq (v_j,v_i)$, y se denota como G=(V,E). Por definición una digráfica no tiene loops o aristas múltiples.[5]

Por ejemplo, se muestra la gráfica de la fig. 1.5, en donde $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ y $E=\{(v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_3,v_2), (v_3,v_5), (v_3,v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6), (v_6,v_4)\}$

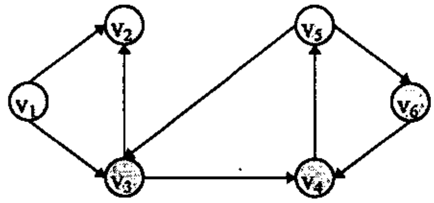
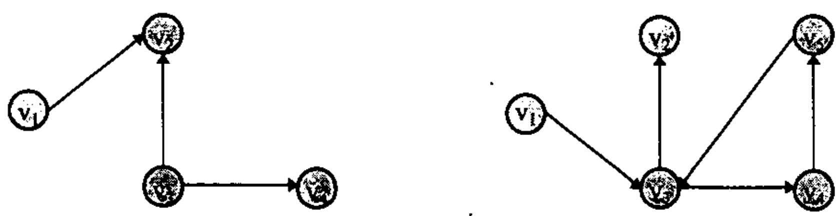


Figura 1.5 *Digráfica D*

DEFINICION: Un *camino* de una gráfica G =(V,E) es una subgráfica de G que consiste en una secuencia alterna de vértices y aristas v_1-e_1-v_2-e_2-...v_{n-1}-e_{n-1}-v_n iniciando y terminando con vértices, en los cuales cada arista es incidente con los dos vértices inmediatos que le preceden y siguen a él, y satisfaciendo la propiedad de que para toda $1 \leq k \leq r-1$, donde $e_k=(v_k, v_{k+1}) \in E$ ó $e_k=(v_{k+1}, v_k) \in E$.

Se ejemplifica esta definición de camino, usando la gráfica mostrada en la figura 1.5, de la cual se obtienen dos caminos (a): v_1-v_2-v_3-v_4 y (b): v_1-v_3-v_4-v_5-v_3-v_2.



(a) (b)

Figura 1.6 *Ejemplos de caminos*

DEFINICION: Un *camino dirigido* es la versión orientada de un camino en el sentido que para cualesquiera dos vértices consecutivos v_k y v_{k+1} en el camino $(v_k, v_{k+1}) \in E$. Los caminos mostrados en la figura 1.6 son:(a) no dirigido y (b) dirigido.

DEFINICION: Una *trayectoria* simple o elemental es un camino sin repetición de vértices. El camino mostrado en la gráfica de la figura 1.6 (a) es también una trayectoria; pero el camino de la figura 1.6 (b) no es una trayectoria porque repite el vértice V_3.

[5]**Fuente:** "Graph Theory", de Frank Harary, pág. 10

DEFINICION: Una *trayectoria dirigida* es una secuencia alternable v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3,...,v_{n-1}, e_{n-1}, v_n de vértices distintos y aristas, tal que la arista $e_i=(v_i,v_{i+1})$ para i=1, 2, 3,...,n-1.

DEFINICION: Un *circuito (ó ciclo)*es una trayectoria donde los vértices no aparecen más de una vez, excepto los vértices final e inicial. En la figura 1.7 se muestran dos ejemplos de ciclos que se obtienen de la gráfica mostrada en la figura 1.5.

(a)

Figura 1.7 *Ejemplos de ciclos o circuitos* (b)

DEFINICION: Un *circuito dirigido* es una trayectoria dirigida v_1 - v_2 - ... -v_r junto con la arista (v_r, v_1). La gráfica que muestra la figura 1.7 (a) es un ciclo, pero no un ciclo dirigido; y la gráfica en la figura 1.7 (b) es un ciclo dirigido.

DEFINICION: Una *gráfica es conexa o está conectada*, si se puede llegar a cualquier vértice desde cualquier otro, pasando a través de las aristas de la gráfica; es decir, si existe al menos una trayectoria en todo par de vértices en G, de otra forma es desconectada. (Fig. 1.8)

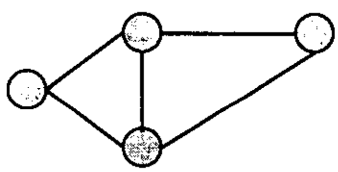


Figura 1.8 *Gráfica conectada o conexa*

DEFINICION: Una digráfica es llamada *fuertemente conectada*, si de un vértice cualquiera se puede pasar a otro a través de una arista, es decir, si entre cada par de vértices hay una trayectoria o circuito de longitud 1. (Fig. 1.9)

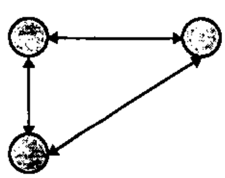


Figura 1.9 *Gráfica fuertemente conectada*

DEFINICION: Una digráfica es *débilmente conectada* si su gráfica no dirigida correspondiente es conectada, pero G no es fuertemente conectada.(Fig. 1.10)

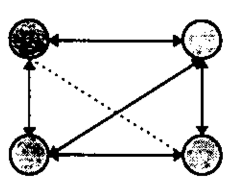


Figura 1.10 *Gráfica débilmente conectada*

DEFINICION: Una *digráfica D es desconectada* sí y solo sí su conjunto de vértices V puede ser particionado en dos conjuntos no vacíos y disjuntos v_1 y v_2, ya que no existe línea en G cuyo primer vértice este en v_1 y en v_2.

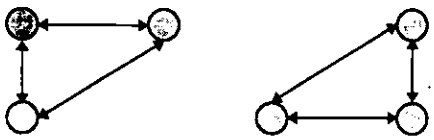


Figura 1.11 *Digráfica desconectada*

DEFINICION: Una *gráfica conectada* G es llamada *orientable* sí es posible asignarle una dirección a cada arista de G para producir una digráfica D fuertemente conectada.

DEFINICION: Un *puente* de una gráfica G es una arista tal que su eliminación desconecte a la gráfica G. Esta arista tambien se conoce como línea de corte.

Una aplicación que ejemplificará los conceptos de digráficas y gráficas conexas es la siguiente :

1.4.1. APLICACIÓN: LAS DIGRAFICAS EN EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE TRAFICO

Supóngase que se desea diseñar un sistema de tráfico para alguna delegación en el Sur. Ya que esta delegación es aun pequeña y el tráfico es normalmente ligero, un sistema de tráfico complejo no es necesario; por tal hecho se considerará el hacer que todas las calles sean de dos sentidos.

Véase la siguiente figura, la cual nos muestra el sistema de calles al que se refiere el enunciado anterior.

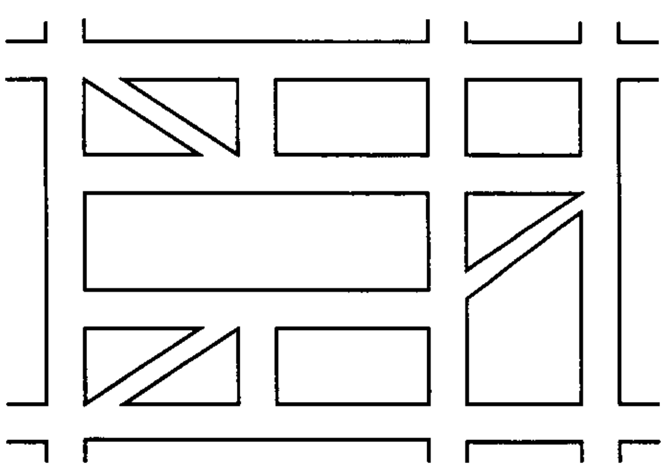


Figura 1.12 *Sistema de calles*

En la fig. 1.12 se observa el sistema de calles, donde cada intersección será representada por un vértice y la unión de dos vértices será una arista, para así formar posteriormente una gráfica.

Pero para hacer esto es necesario considerar un cierto mínimo de requerimientos; por ejemplo, el que se desee alcanzar alguna intersección desde cualquier otra intersección, o bien si hay trabajadores que estén realizando cualquier reparación necesaria a la vía entre semana; y si el trabajador esta reparando la calle entre dos intersecciones consecutivas, y esta bloqueando la calle; entonces debido a estos posibles problemas debe ser conveniente tener alguna vía auxiliar para que el automovilista todavía pueda alcanzar cualquier otra intersección o quizás una salida, mientras la reparación va en progreso.

Esta situación se puede representar por medio de una gráfica G; donde el conjunto de vértices de G corresponden a las intersecciones de las calles, dos vértices son unidos por una arista en las correspondientes dos intersecciones, esto es para viajar desde una a otra sin pasar a través de una tercera intersección. El hecho es que se puede alcanzar cualquier intersección en el sistema de tráfico de cualquier otra intersección, esto implica que G debe ser conectada. Si se quiere viajar entre dos intersecciones, siempre y cuando la calle entre las dos intersecciones consecutivas esta bloqueada, entonces la gráfica G no puede tener puentes.

La siguiente figura 11.13 muestra una gráfica G del modelo del sistema de tráfico. Ya que G no contiene un puente, G es orientable. .

$G:$

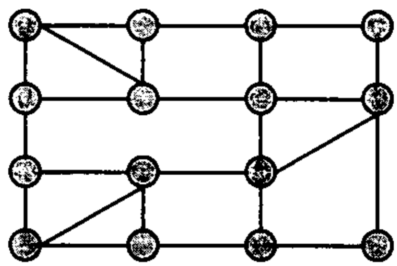


Figura 1.13 *Gráfica G del sistema de calles*

Ahora para la realización del sistema de tráfico, también se podría suponer que en un Sábado durante el cual hay un partido de football, el tráfico llega a ser más pesado, por lo que se necesita un patrón diferente del sistema de tráfico, al ya antes mencionado. En este sistema de tráfico se decide convertir todas las calles de dos sentidos, en calles de un solo sentido, para que fluya mas rápido el tráfico. Por supuesto, se quiere hacer este cambio con las debidas precauciones, una de las cuales sería el de poder viajar (legalmente) por la vía de un solo sentido, de una intersección a cualquier otra sin ningún problema al respecto.

Presentados estos dos panoramas tan diferentes, quizás nos preguntemos bajo que condiciones puede un sistema de tráfico con todas las calles de dos sentidos ser cambiadas a calles de un solo sentido en el sistema resultante, si esto es posible para viajar de cualquier intersección a cualquier otra intersección.

Dado que G no contiene puentes, entonces por la definición de gráfica orientable tenemos que se puede asignar una dirección a cada arista de G y obtener una gráfica fuertemente conectada.

D :

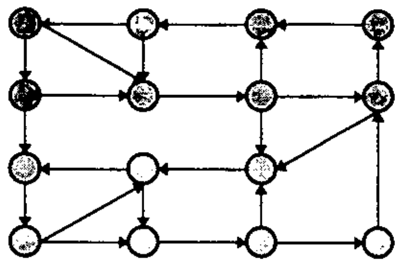


Figura 1.14 *Digráfica del sistema de tráfico*

Como se ve en la figura 1.12 el dibujo representa el sistema de calles de alguna delegación, en este dibujo cada intersección es un vértice y la unión de dos vértices es una arista; entonces se forma la gráfica G que se muestra en la figura 1.13. La figura 1.14 presenta la digráfica obtenida a partir de la gráfica G antes presentada, a la que se le asignaron direcciones a cada una de sus aristas para que así que fluyera el tránsito en ambos sentidos. Y así es como se puede aplicar la Teoría de Gráficas en problemas de sistemas de tráfico.

1.5. TORNEOS

DEFINICION: Un *torneo T* es una gráfica dirigida con la propiedad de que para cada par de vértices distintos *u* y *v*, exactamente uno de (u,v) y (v,u) es una arista de T. Esto es, un torneo es una digráfica cuyos resultados asignan direcciones a las aristas de una gráfica completa.

DEFINICION: Una *gráfica completa K* tiene cada par vértices adyacentes. Así K tiene $\binom{n}{2}$ líneas y es regular de grado n-1.

1.5.1. APLICACIÓN: TORNEOS PARA LA REALIZACION DE UN COMITÉ ESCOLAR

El departamento de Matemáticas de la Universidad Mexicana ha decidido crear un comité, en el cual habrá un lugar para un estudiante que fungirá como miembro del mismo. Tres estudiantes, Federico (estudiante de 1er.semestre), Jorge (estudiante de 7o.sem.) y Gustavo (un estudiante graduado) son seleccionados, como un pequeño consejo, para determinar que estudiantes pueden servir en dicha comisión.

Estos deciden que de siguientes estudiantes: de 1er. sem., de 2o. sem., de 7o. sem., de 8o. sem. y algún estudiante ya graduado, alguno podría ser nominado para ser miembro facultativo de dicho comité. Jorge es voluntario para actuar como presidente, de los 3 estudiantes nombrados por el Departamento de Matemáticas, y empezar la discusión que decidirá cual de los 5 estudiantes deberá ser seleccionado.

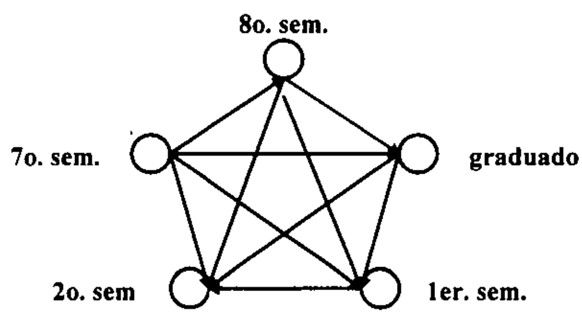
Después de algún tiempo, Jorge observa que Federico y Gustavo tienen las siguientes preferencias, que se muestran en la Tabla 1.1:

JORGE	FEDERICO	GUSTAVO
1. estudiante de 7° semestre	1. estudiante de 1er semestre	1. estudiante graduado
2. estudiante de 8° semestre	2. estudiante de 2° semestre	2. estudiante de 8° semestre
3. estudiante graduado	3. estudiante de 7° semestre	3. estudiante de 2° semestre
4. estudiante de 1er semestre	4. estudiante de 8° semestre	4. estudiante de 1er semestre
5. estudiante de 2° semestre	5. estudiante graduado	5. estudiante de 7° semestre

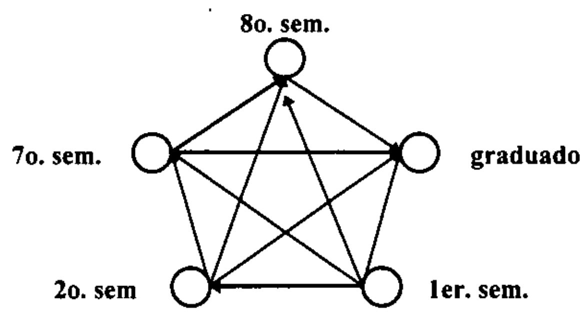
Tabla 1.1

Dicha información se puede representar gráficamente con un torneo T, como un modelo de las preferencias, donde los vértices representan las opciones y una arista es dirigida desde un vértice *u* al vértice *v* si la opción correspondiente a *u* es preferible a la opción correspondiente a *v*. Si el torneo no contiene ciclos, entonces la selección hecha es consistente. Las listas de las preferencias de los tres estudiantes, previamente mostradas en la tabla, se muestran a continuación en los torneos de la figura 1.14

(a) ***Jorge :***



(b) ***Federico :***



(c) *Gustavo :*

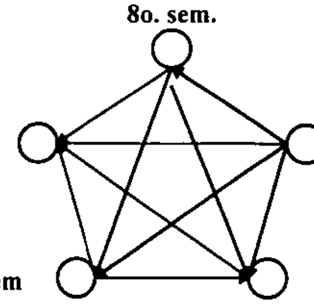


Figura 1.15 *Gráficas (a), (b), y (c) de las preferencias (Torneos)*

Se puede establecer un torneo basado en los torneos dados (es decir, las preferencias) de Federico, Jorge y Gustavo. Por ejemplo, Jorge y Federico prefieren al estudiante de 1er. semestre a el estudiante de 2o. semestre; mientras que Gustavo prefiere al estudiante de 2o. semestre a el estudiante de 1er. semestre. Así, se concluye que el comité de Federico, Jorge y Gustavo prefieren al estudiante de 1er. semestre a el estudiante de 2o. semestre.

Dado este ejemplo se presentará a continuación el torneo de preferencia acumulativa que es mostrado en la figura 1.16

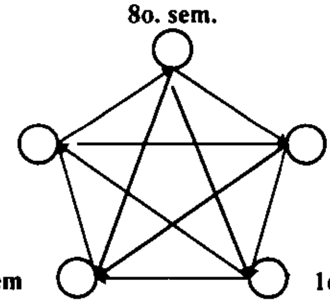


Figura 1.16 *Gráfica de preferencia acumulativa*

Jorge observa que la preferencia acumulativa del torneo es inconsistente; por lo que él propone, debido a que los tres no quedan de acuerdo con el estudiante representante, que deben continuar mediante un proceso de eliminación. Ellos toman su voto respecto al estudiante de 1er. semestre y el estudiante de 2o. semestre; y el estudiante de 1er. semestre resulta ganador.

A continuación, ellos votan entre el estudiante de 7o. semestre y el estudiante de 8o. semestre, en cuya votación gana el estudiante de 8o. semestre. Por lo tanto, el estudiante de 2o. semestre y el estudiante de 8o. semestre tienen que ser eliminados.

Los tres representantes del comité seleccionador del estudiante que será miembro, a continuación votan entre el estudiante graduado y el estudiante de 1er. semestre, de cuya votación resulta triunfante es el estudiante graduado.

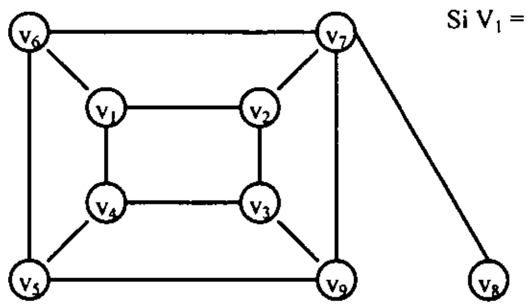
Finalmente, ellos votan entre el estudiante de 7o. semestre y el estudiante graduado, y el estudiante de 7o. semestre (quien es precisamente la 1a. opción de Jorge) resulta ganador y es por lo tanto la opción final como el representante de los estudiantes.

1.6. BIGRAFICAS (GRAFICAS BIPARTIDAS)

DEFINICION: Una bigráfica (o *gráfica bipartida*[6]) G es una gráfica cuyo conjunto de vértices V puede ser particionado en dos subconjuntos, v_1 y v_2, tal que cada arista de G une a v_1 con v_2, y no la unión de los vértices del mismo conjunto.

Si G contiene cada arista uniendo v_1 y v_2, entonces G es una bigráfica completa. Si v_1 y v_2 tiene m y n vértices, por lo que se escribe $G=K_{m,n}=K(m,n)$

G :



Si $V_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ y $V_2=\{v_2, v_4, v_6, v_8\ v_9\}$

Entonces la Gráfica Bipartida $G(v_1,v_2)$ (ver figura 1.17):

$G(v_1,v_2)$:

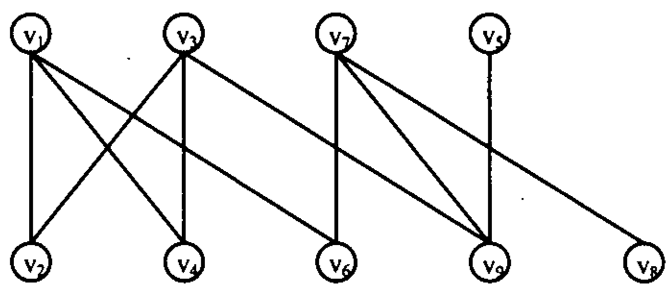
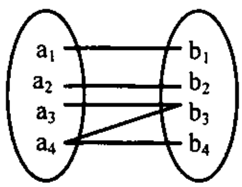


Figura 1.17 *Gráfica Bipartida $G(v_1, v_2)$*

[6] Frank Harary en el libro Graph Theory, la denomina tambien gráfica bicoloreable o gráfica par.

TEOREMA DE HALL: Sea $G=(v_1,v_2)$ una gráfica bipartida, A un subconjunto de v_1 y $\phi(A)$ el conjunto de aquellos vértices de v_2 y que son adyacentes al menos a un vértice de A. Entonces la combinación perfecta en par (v_1, v_2) existe cuando y sólo cuando el número de elementos $|A| \leq |\phi(A)|$ para cada A de v_1. (ver fig. 1.18)

G :



$A = \{a_1, a_3, a_4\}$ y $\phi(A)=\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$|A|=3$ y $|\phi(A)|=4$

$|A| \leq |\phi(A)|$

$3 \leq 4$

Figura 1.18 *Ejemplo de emparejamiento completo*

Sea G una gráfica bipartida (v_1, v_2), G contiene un conjunto de aristas independientes que cubre a todos los vértices de v_1, salvo a "d" de ellos sí y sólo sí todo $A \subset v_1$ satisface la condición $|A| - d \leq |\phi(A)|$

TEOREMA DE EMPAREJAMIENTO DE HALL: Un emparejamiento completo entre v_1 y v_2 es una gráfica bipartida G(v_1, v_2) es una correspondencia biunivoca entre los vértices de v_1 y un conjunto de vértices v_2 con la propiedad de que los vértices correspondientes quedan unidos.

DEFINICION: La deficiencia se define como: def(A)= $|A|-|\phi(A)|$; A es no deficiente si ninguno de los posibles subconjuntos de A tienen deficiencia positiva.

TEOREMA: Dado que G es una gráfica bipartida cuyo conjunto es particionado en los conjuntos V_1 y V_2, así para cada arista de G que une un vértice de V_1 con un vértice de V_2. Entonces V_1 puede ser emparejado a un subconjunto de V_2, sí y sólo sí V_2 es no deficiente.

1.6.1. APLICACION DE GRAFICAS BIPARTIDAS

Una Universidad abre seis áreas de estudio para el semestre que va a iniciar, las cuales son: matemáticas (m), química (q), física (f), biología (b), psicología (p) y ecología (e). Para las cuales solicitará seis profesores, uno para cada una de las áreas.

La Universidad recibe a seis aspirantes para dichas áreas: el Prof. Isac M. (I), el Prof. Alberto S. (A), la Profa. Esther P.(E), la Profa. Olivia D. (O), la Profa. Ursula Z. (U) y el Prof. David H (D).

Cada uno de los profesores se especializa en las siguientes áreas: el Prof. Isac en *física y química*, el Prof. Alberto en *biología, física, psicología y ecología*, la Profa. Esther en *química, matemáticas y física*, la Profa. Olivia en *química, biología, psicología y ecología*, la Profa. Ursula en *química y matemáticas,* y el Prof. David en *matemáticas y física*.

La pregunta es, ¿se podrá asignar un profesor a cada área de estudio, para comenzar el semestre?.

Esta situación puede ser representada mediante una gráfica bipartida $G(V_1,V_2)$; si se denota V_1 como las áreas de estudio y por V_2 a los vértices correspondientes a los profesores especializados en dichas áreas. Entonces la situación es representada por la gráfica de la fig. 1.19, que se muestra a continuación:

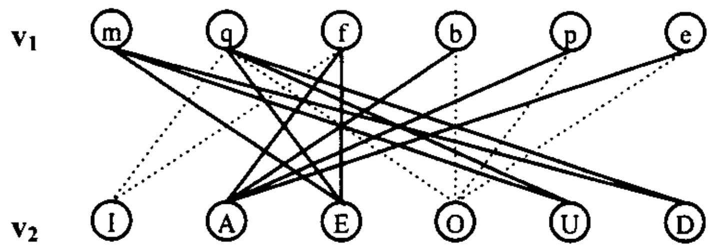


Figura 1.19 *Gráfica Bipartida $G(v_1, v_2)$*

El problema es determinar sí cada profesor dará alguna de las seis áreas de estudio por lo que se realizará un emparejamiento de v_2 a un subconjunto v_1. Por el teorema dado previamente, será posible el emarejamiento sí y solo sí v_2 es no deficiente.

Para comprobar si existe un emparejamiento completo, que permita verificar sí se podrá asignar un profesor a cada área de estudio, se calcularán las deficiencias. Estas se calculan aplicando primero el Teorema de Hall ($|A| \leq |\phi(A)|$), y si se cumple dicha condición, se procederá a realizar el cálculo de la deficiencia del conjunto A y el conjunto $\phi(A)$ ($def(A)=|A|-|\phi(A)|$).

La siguiente tabla presentará los cálculos de las deficiencias que permitirán concluir el problema.

A		$\phi(A)$	def(A)= |A|-|$\phi(A)$|
I	≤	q,f	-1
A	≤	f,b,p,e	-3
E	≤	m,q,f	-2
O	≤	q,b,p,e	-3
U	≤	m,q	-1
D	≤	m,f	-1
I;A	≤	q,f,b,p,e	-3
I,E	≤	q,f,m	-1
I,O	≤	q,f,b,p,e	-3
I,U	≤	q,m,f	-1
I,D	≤	q,f,m	-1
A,E	≤	f,b,p,e,m,q	-4
A,O	≤	f,b,p,e,q	-3
A,U	≤	f,b,p,e,m,q	-4
A,D	≤	f,b,p,e,m	-3
E.O	≤	m,q,t,b,p,e	-4
E,U	≤	m,q,f	-1
E,D	≤	m,q,f	-1
O,U	≤	q,b,p,e,m	-3
O,D	≤	m,f,q,b,p,e	-4
U,D	≤	m,q,f	-1

Como se ve en la tabla del cálculo de las deficiencias, se tendrá que ir generando cada una de las deficiencias hasta concluir en la siguiente:

A		$\phi(A)$	def(A)= |A|-|$\phi(A)$|
I,A,E,O,U,D	≤	m,q,f,b;p,e	0

Dado que V_2 es el conjunto potencial su cardinalidad es 2^n-1, por lo que deben ser $(2^n-1)=(64-1)=63$ deficiencias totales.

Como A es no deficiente, es decir que toda las deficiencias son no positivas, V_2 puede ser emparejado a V_1, y así concluir que sí se podrá asignar a cada profesor un área de estudio para el semestre en dicha Universidad.

2. TEORIA DE GRAFICAS EN LA PLANEACION Y PROGRAMACION DE ACTIVIDADES DE UN PROYECTO.

2.1. INTRODUCCION

En el desarrollo de sistemas resulta importante efectuar una adecuada planeación, ya que de ella depende el éxito o fracaso de los mismos. Es decir, la planeación es la tarea más importante que se realiza cotidianamente, en la cual deben participar diferentes individuos como lo son directivos, administradores, operadores, etc.; por lo que los elementos que intervienen para coordinar y relacionar dicho proyecto se multiplica considerablemente, haciendo así muy difícil administrar el proyecto. Debido a esto es muy frecuente que un proyecto se atrase y sea necesario acelerarlo. La tendencia general cuando se usan métodos pocos eficaces es acelerar todas las actividades lo máximo posible hasta lograr que el proyecto se termine en la fecha prefijada.

Para resolver este tipo de problemas, se ha valido de la Teoría de Gráficas como herramienta para desarrollar técnicas, que permiten auxiliar al administrador de un proyecto a realizar eficientemente la tarea de planear. Estas técnicas son el método de la Ruta Crítica (CPM por sus siglas en inglés *Critical Path Method*) y Técnicas de Evaluación y Programación de proyectos (PERT por sus siglas en inglés *Program Evaluation Reporting Technique*), que se presentarán en este capítulo.

2.1.1. BREVE HISTORIA[7]

El método de la Ruta Crítica es el resultado de estudios realizados sobre investigación de operaciones. Los primeros trabajos del CPM se realizaron en enero de 1957, y su finalidad inmediata era tratar de perfeccionar las técnicas entonces existentes de planeación y programación. Los desarrolladores de estos primeros trabajo fueron M.R. Walker, de la División de Estudios de Ingeniería de la Dupont, y J. K. Kelly Jr., que prestaba sus servicios en la Remington Rand-Univac. Así la primera aplicación de esta técnica se realizó en la empresa Dupont, dando buenos resultados.

Simultáneamente a estas investigaciones, la Marina de los Estados Unidos, en colaboración con el despacho de consultores Booz, Allen and Hamilton, desarrollaba un técnica similar diseñada para coordinar el progreso de los distintos contratistas y agencias que trabajaban en el proyecto Polaris. Esta técnica fue llamada PERT.

En su forma original, los dos sistemas eran muy similares, con una carcterística muy importante que fue la separación de las funciones de planeación y programación. Ambas técnicas utilizan lo que se conoce como el gráfo del proyecto o red de actividades, para indicar las interrelaciones de las distintas actividades componentes del proyecto, culminando con un plan, lo que permite la revisión racional por parte del responsable de su ejecución.

[7]Fuente: "Método del Camino Crítico", Catalytic Construction Company, Editorial Diana y "Técnicas del PERT aplicadas a la construcción. Tiempo/Costes", Manuel Sánchez Rodríguez, Ediciones CEAC, S.A.

Pero había, sin embargo, algunas diferencias entre los dos sistemas. El CPM era una técnica para la dirección y ejecución de proyectos encaminado hacia la realización de las actividades que lo componen. PERT era una técnica coordinadora orientada hacia los hechos de un proyecto, es decir, hacia la terminación o inicio de las actividades.

Por otra parte CPM permitía estimar el tiempo y costo en la ejecución de las actividades y tomar decisiones entre alternativas de menor duración y mayor costo. PERT tenía la capacidad para introducir el cálculo de probabilidades en las estimaciones de la duración de las actividades.

Ambas técnicas se han ido revisando y refinando, eliminando sus diferencias gradualmente hasta que se han consolidado hasta llegar a ser las dos, una sinónima de la otra.

2.2. REDES DE ACTIVIDADES

Para poder resolver un problema mediante las técnicas del PERT y de la Ruta Crítica, se debe realizar una red de actividades, la cual ayudará a planear y coordinar las diferentes actividades del proyecto.

Es decir, la planeación es el proceso de definir las actividades de un proyecto y establecer el orden en que deben realizarse dichas actividades, por lo que se puede decir que, el resultado de la planeación es un plan de acción que se puede representar en forma de una red de actividades. Entonces ésta será la ilustración gráfica del conjunto de operaciones de un proyecto y de sus interrelaciones, a la cual también se le denominará como un diagrama de flechas, grafo o bien gráfica del proyecto.

Cualquier proyecto puede ser subdividido en diversas actividades componentes, pero su ejecución depende de la programación. Al elaborar la red de actividades, cada una de éstas se representa por una flecha. Cuando se encuentran varias flechas conectadas una tras otra es que existe una secuencia entre ellas. Los vértices o uniones de flechas, denominados hechos, se representan en la gráfica en forma de círculos y significan la terminación de las actividades que culminan en un hecho determinado y la iniciación de las subsecuentes.

Entonces, se puede decir que la red esta formada por flechas que representan actividades y vértices que simbolizan los hechos. La dirección de las flechas indica la sucesión en que deben seguirse los eventos.[8]

Así pues para poder realizar un diagrama de flechas primeramente se deben definir las actividades y después la secuencia de ellas, por lo que será necesario:

a) saber que actividades preceden de ésta.

b) saber que actividades prosiguen

c) saber que actividades pueden realizarse simultáneamente.

Para la realización de la red de actividades deberá considerarse que una y sólo una flecha podrá utilizarse para representar una actividad; dos actividades no se pueden identificar con el mismo evento inicial y final[9], cuando esto suceda deberá introducirse una *actividad ficticia*.

Una actividad ficticia no es una actividad real dentro del proyecto, esto es que no tiene relación ni costo, solo se introducirá en la red para mantener la lógica correcta y establecer las interrelaciones entre sucesos y actividades, y perfeccionar los cálculos de tiempos.

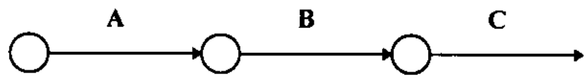
---

[8]NOTA: siempre debe existir un evento inicial y un evento final

[9] Esto es debido a que la red de actividades es considerada como una Gráfica Simple que no tiene loops ni líneas paralelas

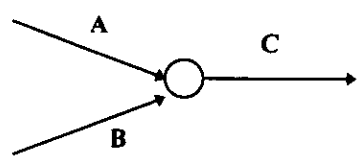
Para poder construir la red de actividades deben tenerse en cuenta las siguientes reglas:

- Supóngase que se tiene una actividad A que procede a otra actividad B y B es una actividad que procederá a otra actividad C, entonces al construir la red de actividades de estas tres actividades participantes se tendrá :

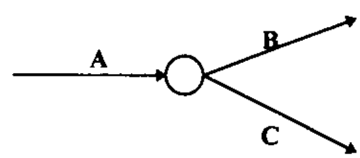


  Así se irán representando las reglas para poder familiarizarse con la construcción de una red de actividades.

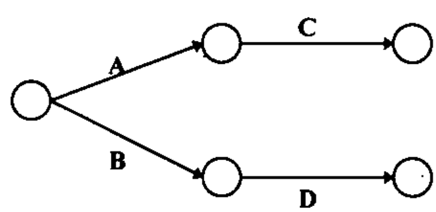
- Si A y B preceden a C, entonces se tiene:



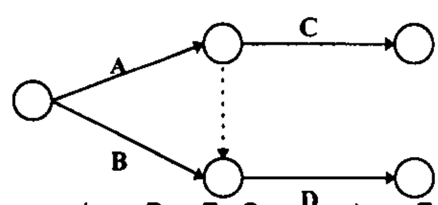
- Si A precede a B y C, entonces se tiene:



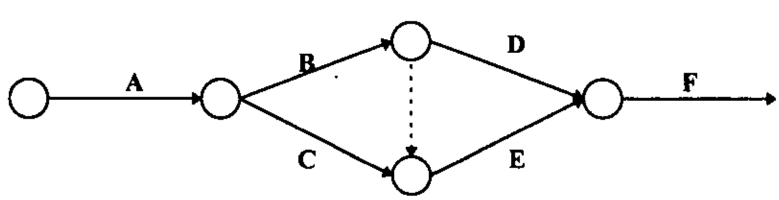
- Si A y B inciden simultáneamente, A precede a C y B precede a D, entonces se tiene:



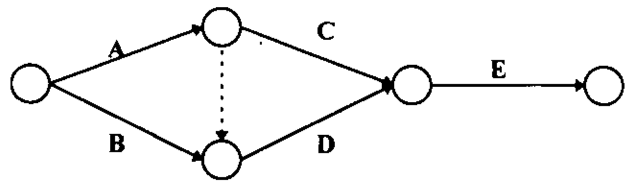
- Si A y B inciden simultáneamente, A precede a C y a D, y B precede a D, entonces se tiene:



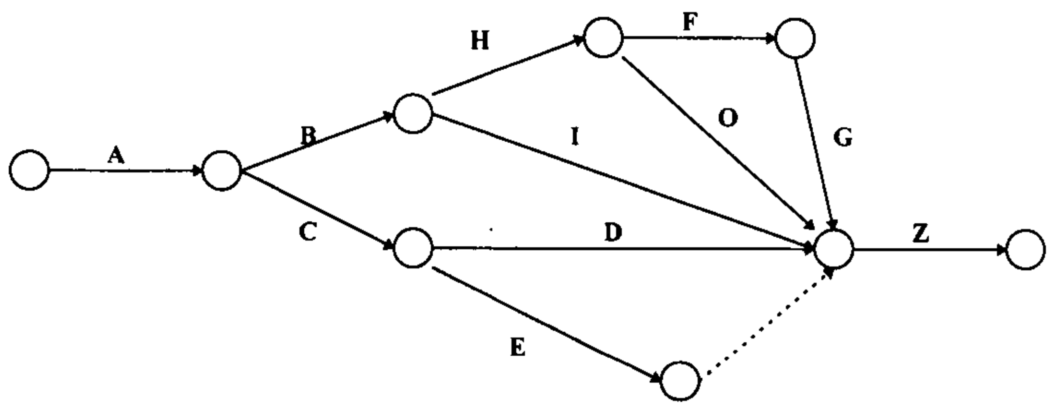
- Si A precede a B y C, B precede a D y E, C precede a E, y, D y E preceden a F, entonces se tiene:



- Si A y B inciden simultáneamente, C puede iniciar solo después de que se complete A, D puede iniciar cuando A y B son complementadas, C y D deben terminarse antes de que E comience, entonces se tiene:



- A es la primera actividad del proyecto, B y C son simultáneas y dependen de la realización de A, D y E se pueden desarrollar en paralelo y depender solo de la realización de C, H e I se inician después de B, F sigue a H y precede a G, O sigue a H; O, I, D, G deben terminar antes de iniciarse la última actividad que es Z.



Una forma de utilizar las reglas será construyendo una red de actividades, que permita entender su aplicación.

2.2.1. APLICACIÓN: CREANDO UNA RED DE ACTIVIDADES

Supóngase que se tiene como proyecto la Planeación de un trabajo de tesis, como primer paso se necesita enunciar las actividades que lo constituirán, para después definir la secuencia que deberán seguir las actividades.

Así considérense las siguientes actividades:

Proyecto: Planeación de un trabajo de tesis

1. Planteamiento del problema
2. Análisis documental preliminar
3. Planteamiento de hipótesis
4. Análisis de la información
5. Redacción inicial
6. Mecanografía del trabajo
7. Impresión y presentación.

Analizando el orden en que deben ejecutarse las actividades, se realiza una tabla (tabla 2.1), la cual nos ayudará a ver la secuencia de todas ellas. Es decir, se necesita verificar la duración de cada actividad, en la tabla se apuntara a cada actividad y su secuencia el número de semanas que requerirá esta.

Actividad x semana	1-2	3-6	7	8-11	3-12	4-13	17
1	✓	□	□	□	□	□	□
2	□	✓	□	□	□	□	□
3	□	□	✓	□	□	□	□
4	□	□	□	✓	□	□	□
5	□	✓	✓	✓	✓	□	□
6	□	✓	✓	✓	✓	✓	□
7	□	□	□	□	□	□	✓

Tabla 2.1

Con los datos presentados en la tabla 2.1, la primer actividad del diagrama será *el planteamiento de problema*, la cual es la única que iniciará sin la realización de alguna otra actividad, por lo que de ella procederán todas las demás actividades del proyecto. Como segunda actividad en el proyecto se tiene un análisis documental preliminar el cual, según los datos mostrados en la tabla, se ejecutará simultáneamente junto con las actividades 5 y 6, sucesivamente se irán adaptando las demás actividades de acuerdo a la tabla 2-1. Vea el diagrama de flechas de la figura 2.1:

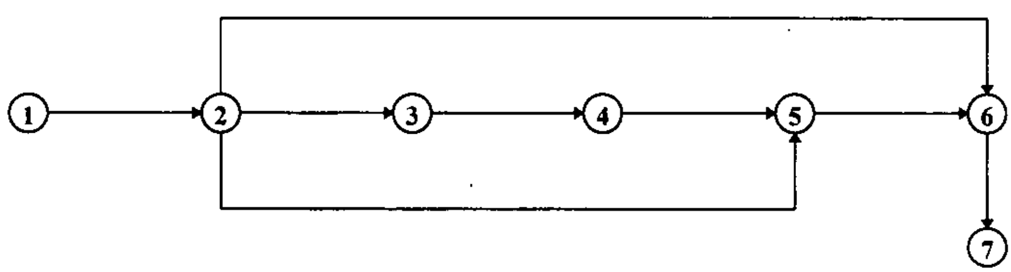


Figura 2.1 *Red de actividades del proyecto: Planeación de un trabajo de tesis*

Con el diagrama se concluye este ejemplo, ya que el objetivo era mostrar la forma de realizar la red de actividades.

El proceso de definir actividades en un proyecto no es tan sencillo como se vio en la aplicación anterior, ya que hay proyectos que suelen necesitar uno o dos diagramas de actividades y comprender desde 30 hasta más de 1000 actividades. Entonces la principal tarea para formar la red es la de establecer los objetivos clave del proyecto, determinando concretamente el objetivo final. A partir de estos objetivos fundamentales es necesario hacer un estudio de las diferentes actividades que deben efectuarse para alcanzar los objetivos previamente fijados.

La lista de actividades, debe ser sometida a un examen minucioso, considerando todas las fases y condiciones del proyecto, para cumplir cada objetivo. La especificación del número de actividades depende del proyecto y de los medios para efectuar el control del mismo.

Por lo que un procedimiento para determinar las actividades que deben incluirse en un proyecto, podría considerarse el siguiente:

a) Estudiar los objetivos, planes y especificaciones hasta obtener un conocimiento completo del proyecto.

b) Realizar mentalmente el proyecto y al mismo tiempo listar cada actividad que surja en este proceso.

c) Dibujar la red de actividades tentativa, incorporando cada una de lass actividades previamente listadas en el paso anterior.

d) Verificar el diagrama realizado, modificándolo conforme se recuerdan nuevas actividades hasta que se complete el diagrama.

Las principales ventajas de emplear una red de actividades, como un modelo simplificado son:

- El diagrama es un modelo de trabajo que puede ser seguido, por cualquier persona relacionada en el proyecto, sin ninguna explicación.
- Por medio del diagrama pueden asimilarse fácilmente losl objetivos del proyecto.
- Los problemas quedan resueltos en el papel antes de que ocurran.
- La posibilidad de omisión de alguna actividad, queda expuesta en el plan.
- Se logra coordinación entre el trabajo y la disponibilidad de recursos para el mismo, ya que, el trabajo se planea en el orden en el que debe hacerse en, vez del orden en que debería realizarse.
- La preparación del diagrama requiere la programación de las personas que supervisan y revisan el trabajo.
- Un medio excelente para el entrenamiento de personal.

Así después de haber diseñado la red de actividades, se continua con la aplicación del algún método que nos permita encontrar la solución, estos pueden ser el de la Ruta Crítica o bien el método del PERT, que permitirán determinar la planificación del proyecto, y obtener la solución del mismo.

2.3. METODO DE LA RUTA CRITICA

El objetivo final al aplicar el CPM a un proyecto, es producir un programa que proporcione la fecha en la cual debe iniciarse cada actividad, para cumplir con los objetivos principales del proyecto.

Al tratar de determinar la fecha de iniciación de una actividad, algunas veces se descubre que existen varias fechas de iniciación posibles. Algunas actividades podrían comenzar en cualquier fecha, dentro de un intervalo de tiempo, sin afectar la fecha de terminación del proyecto. Otras actividades no pueden tener variación en su tiempo de iniciación, a estas se les llama *críticas*.

La diferencia entre la fecha de iniciación más próxima y la fecha de iniciación más alejada de una actividad es una medida de su "criticalidad". Es decir, si la diferencia entre ambas es nula, la actividad es crítica, y s la diferencia es no nula, la actividad no es crítica.

Todas las actividades que resulten nulas en el proyecto formaran lo que se llama una ruta crítica la cual deberá recibir atención especial en la ejecución del proyecto, para que éste se termine a tiempo. Las actividades críticas pueden formar varias trayectorias críticas.

Nomenclatura para el Algoritmo de la Ruta Crítica:

- t : tiempo esperado de duración de una actividad.
- T_E : tiempo de ocurrencia más cercano de un evento.
- T_L : tiempo de ocurrencia más lejano de un evento.
- E_S : tiempo más próximo de inicio de una actividad.
- E_F : tiempo más próximo de terminación de una actividad.
- L_S : tiempo más lejano de inicio de una actividad.
- L_F : tiempo más lejano de terminación de una actividad.

ALGORITMO DE LA RUTA CRITICA

Esta formado por dos recorridos principalmente:

1) Recorrido hacia adelante: Se comienzan los cálculos en el vértice inicial.

a) El tiempo de ocurrencia más cercano del evento inicial es igualado a cero. $T_E = 0$

b) El tiempo más próximo de inicio de una actividad que parte de un vértice concreto es igual a el tiempo de ocurrencia más cercano del evento, es decir, cada actividad tan pronto como el evento es el inicial es realizado $E_S = T_E$

c) El tiempo más próximo de inicio más su duración, será igual al tiempo más próximo de terminación. $E_F = E_S + t$

d) El tiempo de ocurrencia más cercano de un evento es igual a el mayor de los tiempos más próximos de terminación de las actividades que llegan a este $T_E = \text{Max}(E_{F1} + E_{F2} + E_{F3} + \ldots + E_{Fn})$

Regresar al inciso (b).

2) Recorrido Inverso: Se inicia en el vértice final.

a) El tiempo de ocurrencia más lejano del evento final es igual a su tiempo de ocurrencia más próximo. $T_L = T_E$

b) El tiempo más lejano de terminación de una actividad es igual a el tiempo de ocurrencia más lejano del evento que le procede. $L_F = T_L$

c) El tiempo más lejano de inicio de una actividad es igual a su tiempo más lejano de terminación menos su duración. $L_S = L_F - t$

d) El tiempo de ocurrencia más lejano de un evento es el mínimo de los tiempos más lejanos de iniciación de las actividades que emergen en el. $T_L = \mathrm{Min}(L_{S1} + L_{S2} + L_{S3} + \ldots + L_{Sn})$

e) Regresar al inciso (b).

Como se ve, en el cálculo de la ruta crítica se incluyen dos fases, la primera fase es el *recorrido hacia adelante*, donde los cálculos deben comenzar en el vértice inicial y terminar en el vértice último. La segunda fase es la de *recorrido hacia atrás*, en ésta se comienza los cálculos en el vértice final y se terminan en el primer vértice de la red de actividades.

Además se pueden incorporar al cálculo las holguras, las cuales indican:

- *Holgura Total:* (TF) es el tiempo máximo que puede demorar una actividad sin afectar la fecha de conclusión del proyecto total. $T_F = L_F - E_F = L_S - E_S$
- *Holgura Libre:* (FF) es el tiempo que una actividad puede ser alargada sin afectar la fecha más próxima de iniciación de cualquier actividad inmediata. $E_F = L_F - E_S - t$
- *Holgura Independiente:* (IF) mide la libertad absoluta de alargar una actividad sin afectar la fecha más cercana de iniciación de otra actividad posterior.
- *Holgura de Seguridad:* (SF) mide el retraso de los eventos N_i y N_j sin afectar la duración del proyecto.

2.3.1. APLICACION: CREACION DE UN PEQUEÑO CENTRO DE COMPUTO ESCOLAR.

Debido al rápido desarrollo de la tecnología (refiriéndome específicamente a las computadoras) varias escuelas desean incorporar ésta para el desarrollo integral de sus estudiantes, es decir, desean establecer un centro de cómputo, que permita facilitar dichos objetivos.

Por ello se establecerá (quizá de una forma sencilla) las actividades que se requieren para la construcción de la red de actividades. Las características que debe contemplar son:

- Comprar el equipo deseado, cuidando que sea el necesitado por la escuela.
- Capacitar a profesores y personal administrativo, para la utilización del centro.
- Determinar el presupuesto.
- Determinar el tiempo de instalación del equipo, así como el funcionamiento del mismo, para empezar las funciones del Centro de Cómputo.
- Antes de la inauguración del centro de cómputo, probar el equipo de cómputo.

Estas carasterísticas describen solo algunas actividades, por lo que se desarrollarán concretamente todas las demás, para así continuar con la creación de la red de actividades. Dichas actividades se presentan a continuación en la tabla 2.2.

Nodos		**Actividades a realizar**
1,2	A	Determinación de los recursos humanos, técnicos y materiales.
2,3	B	Compra del equipo de cómputo, técnico y demás artículos.
2,4	C	Determinación y readaptación del área donde se ubicará el centro de cómputo.
2,5	D	Entrenamiento del personal técnico y administrativo.
3,4	E	Cálculo del presupuesto requerido.
3,5	F	Instalación del equipo.
4,6	G	Financiamiento para los próximos años (mantenimiento).
5,6	H	Prueba del equipo.

Tabla 2.2

Con la información que proporciona la tabla anterior de las actividades a realizar, se podrá construir la red de actividades, es decir, la columna **Nodos** de la tabla 2-2 nos indica qque la actividad inicial ira del nodo 1 al nodo2, la segunda actividad que es "la compra del equipo de cómputo, técnico y demás artículos" irá del nodo 2 al nodo3, y así sucesivamente.

Por lo que la red de actividades podría quedar formada como acontinuación se presenta en la fig. 2.2

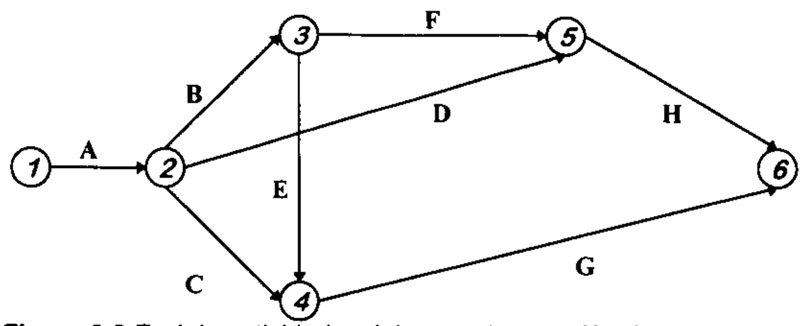


***Figura 2.2** Red de actividades del proyecto creación de un centro de cómputo.*

Ahora lo que los que se desea determinar para cada actividad es: i) *la duración* (considerando que la duración de cada actividad estará dada en meses) del proyecto, ii) *que actividades establecen y controlan el tiempo de duración del proyecto* (ruta crítica), iii) que libertades existen en la ejecución de las actividades que no controlan el tiempo de duración del proyecto (las holguras).

Para el primer inciso, se agregarán la duración de cada actividad. Esta sera una estimación personal, ya que no existe mecanismo ni método alguno que indica el cálculo de la duración, esta más bien basado en la experiencia.

La siguiente figura muestra la red de actividades con la duración de cada una de ellas.

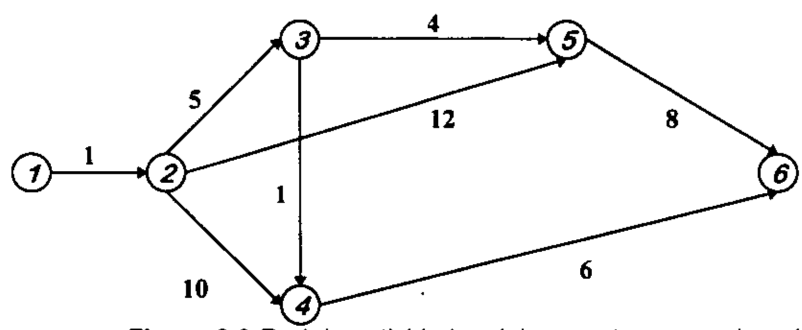


***Figura 2.3** Red de actividades del proyecto con su duración de cada una*

Ahora para obtener el segundo inciso, se requiere aplicar el método de la ruta crítica, el cual nos permitirá obtener el plan de acción para desarrollar adecuadamente el proyecto.

Para ello se ira aplicando paso a paso en la red de actividades, para al finlizar presentar la red final que permitirá al administrador del proyecto interpretar los resultados obtenidos.

Como primer paso del método es hacer el *recorrido hacia adelante*. Iniciar el algoritmo en $T_E=0$, para el primer actividad. Después asignar $E_S=T_E$, que significa que $E_S=0$, y calcular E_F que será igual al tiempo más próximo de iniciación más la duración de la actividad A. $E_F=E_S + t = 0+1=1$. En el inciso d) de algoritmo indica que se vuelve a calcular T_E para la siguiente actividad que será el mayor de todos los tiempos más próximos de terminación que lleguen a el nodo posterior (que sera el segundo) sera $T_E=1$. Los cálculos siguen de forma iterativa para cada uno de los nodos restantes de la red de actividades, por lo que se resumiran en la siguiente figura 2.4.

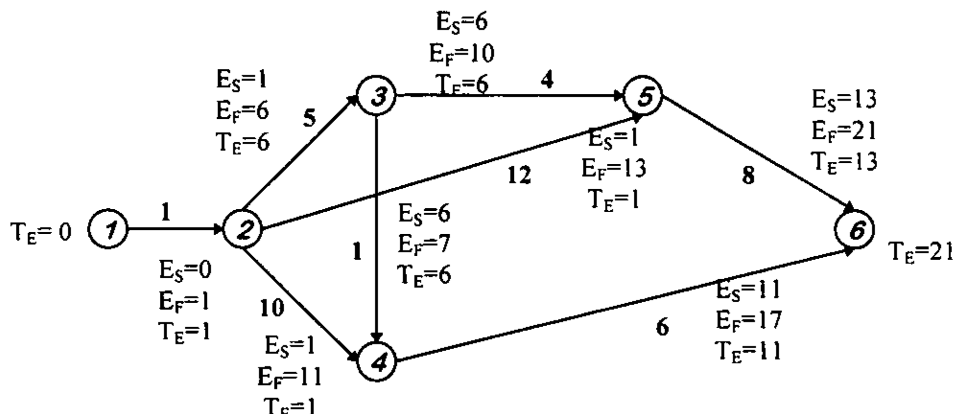


***Figura 2.4** Primer recorrido del algoritmo de la Ruta Crítica*

Para el segundo *recorrido*, se debe iniciar el vértice final e iniciar con $T_L=T_E$, que sera igual a 21. Después asignar $L_F=T_L$, que significa que $L_F=21$, y calcular L_S que será igual al tiempo más lejano de inicio de menos la duración de la actividad H. $L_S=L_F - t = 21-8=13$. En el inciso d) de algoritmo y en el recorrido hacia atras indica que se debe volver a calcular T_L para la siguiente actividad que será el menor de todos los tiempos más lejanos de terminación que lleguen a el nodo posterior sera $T_L=13$. Los cálculos como en el recorrido hacia adelante se realizan iterativamente por lo que se resumiran en la siguiente figura 2.5.

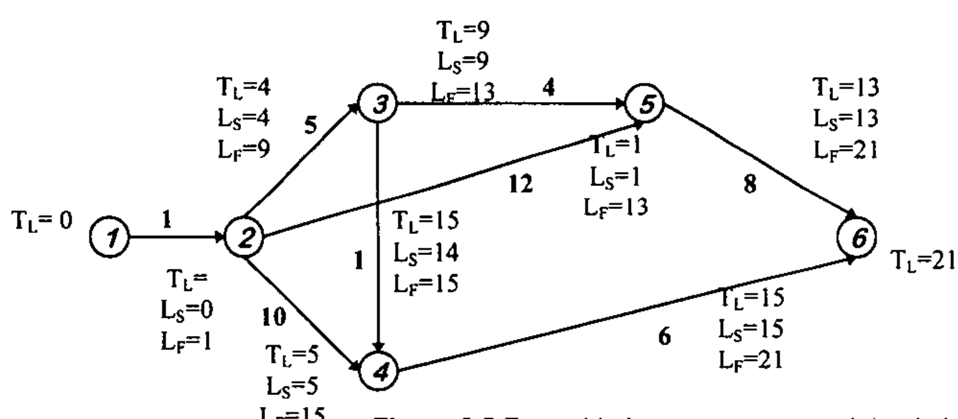


***Figura 2.5** Recorrido inverso, que completa el algoritmo*

Como siguiente paso se construirá una tabla donde se vayan especificando los cálculos realizados por el Método de la Ruta Crítica (de los dos recorridos ya realizados) donde se especificarán los nodos, la actividad a realizar, el tiempo de duración así como los tiempos más próximos de iniciación y terminación, los tiempos más lejanos de terminación e iniciación, y las holguras, para en ella determinar las actividades críticas o nulas.

NODOS	t	E_S	E_F	L_S	L_F	F_F	T_F
1,2	1	0	1	0	1	0	0*
2,3	5	1	6	4	9	0	3
2,4	10	1	11	5	15	0	4
2,5	12	1	13	1	13	0	0*
3,4	1	6	7	14	15	4	8
3,5	4	6	10	9	13	3	3
4,6	6	11	17	15	21	4	4
5,6	8	13	21	13	21	0	0*

Tabla 2.3

La tabla 2.3 además de mostrar los cálculos efectuados por la aplicación del método de la Ruta Crítica, nos da la holgura total ($T_F = L_F - E_F = L_S - E_S$) de cada una de las actividades de proyecto, así como la holgura libre. Si la holgura total de alguna de las actividades es igual a cero (marcadas con un asterisco), indicará que ésta es una actividad crítica en el proyecto. Todas las actividades críticas formarán la ruta crítica

Por lo que la fig. 2.6 nos muestra la ruta crítica, así como la duración final del proyecto.

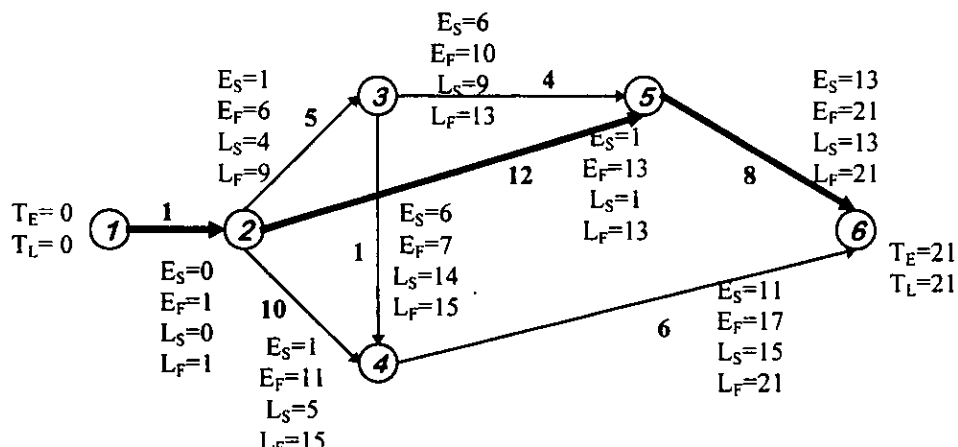


Figura 2.6 *Ruta Crítica completa para el proyecto.*

Como se ve en la figura 2.6, la duración final del proyecto es de 21 meses.

En resumen los pasos a seguir en la obtención de la Ruta Crítica de un proyecto son:

- Definir todas las actividades que integran el proyecto
- Dibujar la red de actividades que defina la secuencia en que se realizan las actividades.
- Estimar la duración de cada actividad
- Calcular los E_S y E_F de cada nodo en el recorrido hacia adelante.
- Calcular los L_S y L_F de cada nodo en el recorrido hacia atrás.
- Calcular la holgura total de cada nodo, para determinar las actividades críticas.
- Localizar la ruta crítica.

2.4. PERT (Program Evaluation and Review Technique)

Para aplicar el algoritmo del PERT en algún proyecto, primero se deberá obtener (como en el Método de la Ruta Crítica) la red de actividades de dicho proyecto. La utilización de este algoritmo depende de situaciones en las cuales los datos son insuficientes para poder producir la duración del proyecto, o de alguna de las actividades, o donde las actividades involucran investigación y desarrollo.

PERT usa una duración de las actividades que se determina mediante los tiempos. La estimación de los tiempos se basa en un cálculo ponderado de probabilidades, que da por resultado el tiempo más probable de duración de cada tarea o actividad.

Para este método se estiman tres tiempos para cada actividad: *optimista*, *normal* y *pesimista*, según las posibilidades y condiciones de realización que se consideran para cada actividad y las dificultades que puedan preverse.

Tiempo optimista: Exprese el tiempo mínimo que sería necesario para realizar el trabajo o cumplir el hecho que define una actividad. El cálculo de este considera ideales todas las circunstancias que han de ocurrir en la realización de la actividad; siendo este una apreciación poco realista, en la mayoría de los casos. Este tiempo se denominará *"a"*.

Se estima una probabilidad del 1% para que la actividad se efectúe en un tiempo menor que el tiempo optimista calculado.

Tiempo normal: También llamado más probable, es aquel que se estima como justamente el necesario para realizar la actividad en condiciones normales de trabajo con el empleo de unos recursos determinados. A este tiempo se llamará *"b"*.

Tiempo pesimista: Es el tiempo máximo que puede estimarse para que se efectúe la actividad en condiciones desfavorables sin que lleguen a admitirse es esta ponderación causas de fuerza mayor o riesgo catastrófico, incontrolables en un orden lógica. Prácticamente, la probabilidad de que se necesite un tiempo mayor que el pesimista para cumplir la actividad es de un 1%. A este tiempo se le llamará *"c"*.

La estimación optimista y pesimista debe encerrar toda estimación posible de la duración de la actividad. La estimación normal no necesita coincidir con el punto medio (a+b)/2, y puede encontrarse a su izquierda o a su derecha.

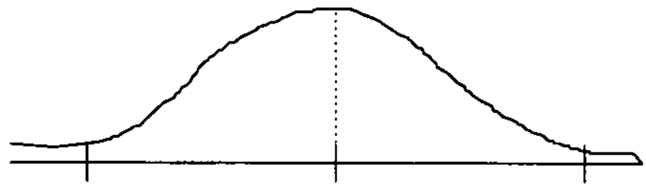
Después de la estimación de los tres tiempos para cada actividad, se obtiene el tiempo medio esperado (Te), mediante la fórmula siguiente:

$$Te=(a+4m+b)/ 6$$

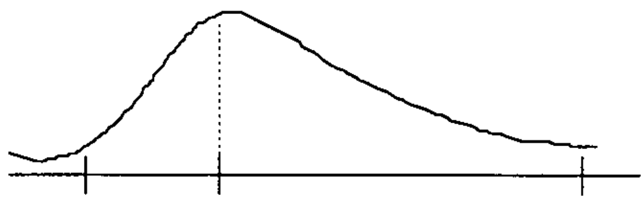
La fórmula se acerca al cálculo de probabilidades de la distribución Beta, es decir, Te~βeta. Esto es debido a la duración para cada actividad puede seguir una distribución Beta con su punto unimodal en m y sus puntos extremos en a y b, así lo muestran los tres casos siguientes de distribución beta que son (a) simétrica, (b) sesgada hacia la derecha y (c) sesgada hacia la izquierda.[10]

[10]**Fuente:** Hamdy A. Taha, "Investigación de Operaciones", pág 504.

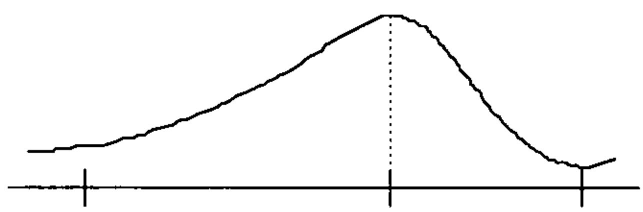
a) simetrica



b) sesgada hacia la derecha



c) sesgada hacia la izquierda



La fórmula para obtener la varianza en la distribución de probabilidades, es:

$$\sigma e^2 = [(b-a)/6]^2$$

que mide la incertidumbre en el tiempo probable de una actividad.

Nomenclatura para el algoritmo de PERT:

- t: tiempo *normal* esperado de duración de una actividad
- Ir_i : iniciación más rápida de un evento i
- TT_i : terminación más tardía de un evento i
- H_i : holgura del evento i

ALGORITMO DEL METODO DEL PERT

- las tres estimaciones (a, b y c) para cada una de las actividades del proyecto
- calcular el valor esperado, la varianza y desviación estandar, de cada una de las actividades
- se procede a realizar el cálculo de la iniciación más rápida que es igual a Ir_i + t de cada uno de los eventos (nodos de la red de actividades). Se inicia desde el primer nodo con $Ir_1 = 0$.

- se continua con el cálculo de la terminación más tardía que es igual a TT_i - t, que iniciará en el último nodo con $TT_m = Ir_m$ donde m es el nodo final de la red de actividades.
- la holgura $H_i = TT_i - Ir_i$ de cada nodo o evento.

Para encontrar la ruta crítica se examina la columna de holgura, donde exista un cero significa que el evento esta en la trayectoria crítica o ruta crítica. Esta trayectoria tiene el tiempo esperado mayor de la red y la duración de algunas actividades de la ruta crítica causará un incremento en el tiempo total del proyecto.

2.4.1. APLICACION: CREACION DE UN PROGRAMA DE POSGRADO

Supóngase que se desea crear un programa de posgrado interdisciplinario en el área de Sistemas operacionales con las siguientes características:

- Debe resolver las necesidades administrativas del sector público o privado.
- Apoyarse principalmente en técnicas de la Investigación de Operaciones y la computación para resolver los problemas administrativos.
- Establecer claramente los objetivos fundamentales de las áreas participantes, para así determinar las funciones del programa.
- Integrar los conceptos de dichas áreas para que el programa quede especificado y así presentarlo para su autorización.
- Evaluarlo.

Estas características solo describen las actividades principales para subdividir el proyecto y determinar su duración, por lo que para esto se debe desglosar más el proyecto , en base a las características, obteniendo la lista de las actividades participantes en el proyecto, las cuales son:

- Consultar necesidades del sector administrativo público y privado.
- Consultar con el sector académico.
- Determinar los objetivos y el diseño del programa administrativo.
- Determinar los objetivos y el diseño del programa en Investigación de Operaciones, considerando las técnicas computacionales.
- Integrar conceptos administrativos a conceptos en Investigación de Operaciones.
- Integrar conceptos en Investigación de Operaciones al programa administrativo.
- Estudio y aprobación del programa resultante, por las autoridades de educación superior.
- Difusión del programa.
- Evaluación y contratación de profesores.
- Probar el programa durante un semestre.
- Evaluación y ajustes del programa a la realidad existente.
- Operación del programa en forma definitiva.

Definidas las actividades, ahora se puede construir la red de actividades del proyecto que estarán asociadas desde la creación del nuevo programa hasta que éste se ponga en operación definitiva.

Pero antes se presentará la tabla de las actividades, con la determinación de los tiempos optimista, normal y pesimista de cada actividad, cuya duración esta dada en semanas.

NODOS	ACTIVIDAD	DURACION
1-2	Consultar sector administrativo	(3, 5, 10)
1-3	Consultar sector académico	(6, 10, 20)
2-4	Objetivos y diseño del programa administrativo	(50, 60, 80)
3-5	Objetivos y diseño del programa en Investigación de Operaciones y Comp.	(25, 30, 40)
4-6	Integración administrativa	(20, 30, 35)
5-6	Integración académica	(25, 30, 35)
6-7	Ficticia	(0, 0, 0)
7-8	Estudio y aprobación	(30, 40, 50)
8-9	Difusión	(2, 3, 5)
8-10	Evaluación y contratación	(4, 8, 10)
9-10	Ficticia	(0, 0, 0)
10-11	Prueba del Programa	(26, 35, 45)
11-12	Evaluación y ajustes	(3, 5, 10)

Tabla 2.4

La red de actividades del proyecto se presenta en la siguiente fig. 2.7., cada una con su duración determinada por los tiempos optimista, normal y pesimista. Estas son determinadas básicamente por la experiencia que tenga el administrador del proyecto, ya que no existe una formula que permita realizar el cálculo de manera eficiente.

Al agregar las actividades ficticias en la red, estas no tienen duración alguna, y solo se agregarán en la red de actividades para dar continuación a la misma, es decir, para tener secuencia en el proyecto.

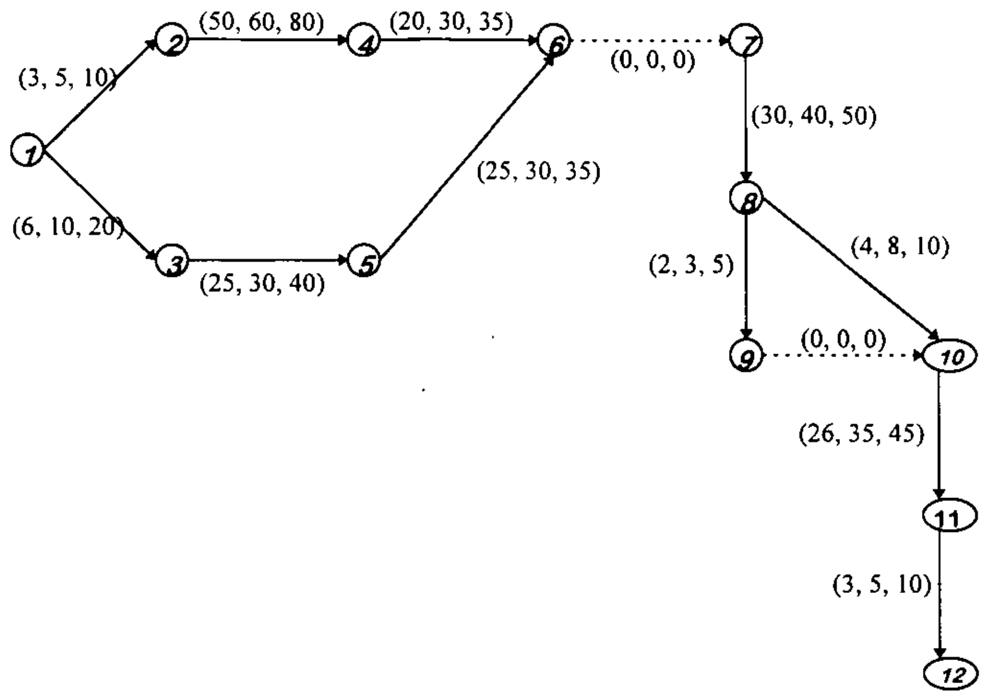


***Figura 2.7** Muestra la red de actividades del programa interdisciplinario*

Despúes de obtener la red de actividades, se procederá a realizar los cálculos del método de l PERT, los cules serán: obtener el valor esperado, la varianza y la desviación estándar para cada actividad del proyecto. Estos datos serán resumidos en la siguiente tabla 2.5.

NODO	a	m	b	te	T_e	V_{TE}
1,2	3	5	10	5.5	1.4	1.2
1,3	6	10	20	11	5.3	2.3
2,4	50	60	80	61.7	25	5
3,5	25	30	40	30.8	6.3	2.5
4,6	20	30	35	29.2	6.1	2.3
5,6	25	30	35	30	2.9	1.7
6,7	0	0	0	0	0	0
7,8	30	40	50	40	10.9	3.3
8,9	2	3	5	3.2	0.3	0.5
8,10	4	8	10	7.7	1	1
9,10	0	0	0	0	0	0
10,11	26	35	45	35.2	10.2	3.2
11,12	3	5	10	5.5	1.4	1.2

Tabla 2.5

Despúes de los cálculos anteriores, se continuará con el cálculo de las inicioaciones más rápidas de cada nodo así como de su terminación más tardía, para poder calcular su holgura y determinar mediante ésta la ruta crítica del proyecto y su duración total.

En la siguiente tabla se mostrarán dichos cálculos.

Nodo *i*	***IRi***	***TTi***	***Hi***
1	0.00	0.00	0*
2	5.50	5.50	0*
3	11.00	97.2	86.2
4	67.17	67.17	0*
5	41.83	68	26.17
5	96.33	96.33	0*
6	96.33	96.33	0*
7	136.33	136.33	0*
8	139.50	144.00	4.5
9	144.00	144.00	0*
10	179.17	179.17	0*
11	184.67	184.67	0*

Tabla 2.6

De los cálculos resumidos en la tabla 2.6, se obtiene la ruta crítica de la columna de la holgura. Esto es, como en el método de la Ruta Crítica, donde los nodos marcados con un asterisco son las actividades críticas del proyecto, y estas forman la ruta crítica del proyecto.

La siguiente figura muestra la red de actividades del proyecto interdisciplinario con la ruta crítica especificada en líneas más negritas.

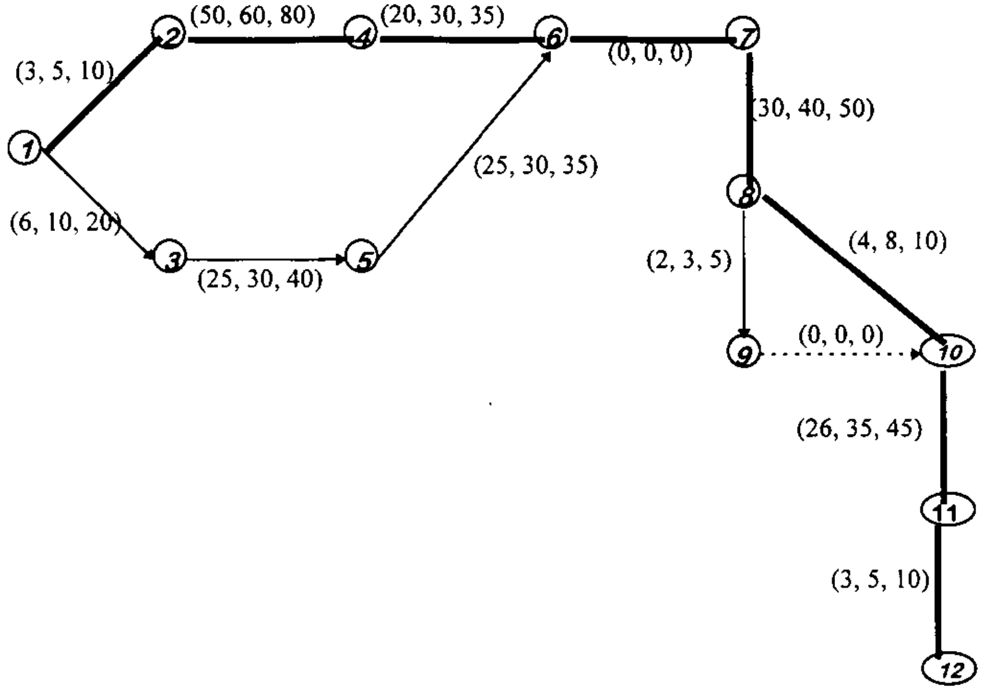


Figura 2.8 *Ruta Crítica del proyecto interdisciplinario*

La figura 2.8 muestra la ruta crítica del proyecto cuya duración obtenida de la tabla 2.6 es de 184 semanas con 6 días.

2.5. BENEFICIOS DEL CPM Y PERT.

El método de la Ruta Crítica y PERT son aplicables en cualquier situación en la que se tenga que llevar a cabo una serie de actividades o tareas relacionadas entre sí para alcanzar un objetivo determinado. Las actividades pueden ser del más variado tipo: toma de decisiones, compras, evaluaciones, estudios técnicos, construcciones, finanzas, minería, sistemas de transporte, etc.

Los beneficios obtenidos de la aplicación del CPM y PERT se presentan en relación directa a la habilidad con la que se haya aplicado la técnica. Y cualquier aplicación incorrecta producirá resultados adversos. Más sin embargo, si su aplicación es correcta, determinaran un proyecto más ordenado y mejor balanceado que podrá ser ejecutado de manera más eficiente y, normalmente, en menor tiempo.

Un beneficio principal que brinda el método de la ruta crítica es que resume en un solo documento la imagen general de todo el proyecto, lo cual ayuda a evitar omisiones, identificar rápidamente todas las contradicciones en la planeación de las actividades, facilitando abastecimientos ordenados y oportunos, en general, logrando que el proyecto sea llevado a cabo con el mínimo de equivocaciones. El método del PERT además de estos Beneficios permite conocer las probabilidades de alcanzar con éxito los resultados previstos por el cálculo.

La aplicación del CPM y el PERT ofrecen entre otros beneficios:

- Permitir la planeación y programación de los recursos necesarios para efectuar el proyecto como lo son: equipo, material; horas/hombre, etc.
- Permitir la simulación de caminos alternativos de acción, mediante la comparación de costos, recursos necesarios, ventajas y desventajas de las otras alternativas disponibles que nos permitan alcanzar el objetivo deseado.
- Es un medio efectivo para la capacitación de personal, con la ilustración de cada actividad.
- Permite el estudio de contingencias como por ejemplo la insuficiencia de material o equipo, ayudando a seguir un procedimiento para solucionar óptimamente los problemas que se puedan presentar.

3. LA TEORIA DE GRAFICAS EN LA CREACION DE REDES

3.1. INTRODUCCION

Es común encontrar en nuestra vida diaria redes que facilitan nuestras actividades haciéndolas más sencillas de efectuar; es decir, una red telefónica permite que nos comuniquemos a otros lugares, ya sea de forma local o internacionalmente. Un sistema de carreteras, la red ferroviaria y la red de servicio de aerolíneas, proveen los medios para atravesar grandes distancias y poder llegar a nuestro trabajo o bien para visitar nuevos lugares. Las redes eléctricas llevan luz, y por lo tanto, entretenimiento a nuestros hogares; las redes de computadoras que proveen sistemas como el servicio de reservación de viajes, el sistema bancario que ayuda en las transacciones de nuestro dinero, en internet que es la red más grande del mundo y por ello una fuente principal de información, etc.

De aquí la importancia de su estudio en este capítulo. Por lo que se consideran tres objetivos para el desarrollo del mismo: el *primero*, es dar las definiciones básicas de la Teoría de Gráficas que se relacionan con redes, estableciendo con ello una notación que permita el entendimiento de la teoría aquí expresada; esto es debido a la amplia gama de notaciones existentes en los libros de Teoría de Gráficas, por ello creo importante presentar este objetivo.

Segundo, introducir conceptos fundamentales de la teoría de Flujo en redes (básicamente los algoritmos de Flujo máximo y Flujo mínimo) que nos auxiliaran en la solución de diversos problemas en redes. Y como *tercer* objetivo, el proporcionar aplicaciones claras que permitan ver la riqueza de aportaciones que da la Teoría de Gráficas en este campo de las redes actuales.

3.2. NOTACION Y CONCEPTOS

Es importante, y básicamente por conveniencia, establecer una notación debido a la diversidad de notaciones existentes que en el campo de la Teoría de Gráficas se presentan, por ello se presentan las siguientes definiciones, y algunas propiedades elementales de flujo en redes.

Gráfica Dirigida[11]: Una *gráfica dirigida* o digráfica D consiste de un conjunto V de nodos[12] y un conjunto E de arcos, cuyos elementos son pares ordenados de nodos distintos, y se denota como G = (V, E). Por definición una digráfica no tiene loops o arcos múltiples.

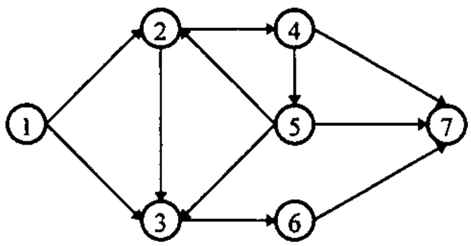


Figura 3.1 *Gráfica Dirigida*

Por ejemplo, la gráfica de la figura 3.1 es una gráfica dirigida con V={1,2,3,4,5,6,7} y E={(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,6), (4,5), (4,7), (5,2), (5,3), (5,7), (6,7)}.

Una *red N* es una digráfica D con una función la cual mapea al conjunto de arcos dentro del conjunto de números reales (llamados costos, capacidades, y/o demanda y oferta). La carcteristica principal de la Red es que tiene un nodo orígen (fuente) y un nodo destino (sumidero).

Gráfica No Dirigida: Una *gráfica no dirigida* se define de la misma manera como se define una gráfica dirigida, con la excepción de que los arcos no son pares ordenados de los distintos nodos.

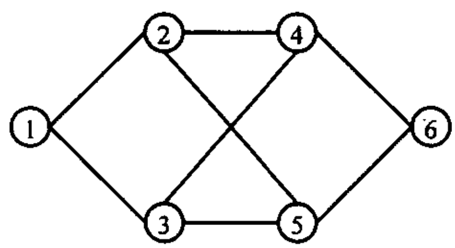


Figura 3.2 *Gráfica no Dirigida*

La figura 3.2 es un ejemplo de gráfica no dirigida. En una gráfica no dirigida, se puede referir a un arco uniendo un par de nodos i y j como (i,j) o (j,i). Un arco no dirigido (i,j) puede ser visto como una calle de dos sentidos con un flujo permitido en ambas direcciones; es decir, desde un nodo i a un nodo j o desde un nodo j a un nodo i. Por otra parte, un arco dirigido (i,j) es una calle de un solo sentido y permite un flujo solo desde el nodo i al nodo j.

Red Acíclica: Una gráfica es acíclica si esta no contiene ciclos o círcuitos dirigidos.

[11] Se retoma la definición de digráfica del Cap. 1, para facilitar la lectura de este capítulo.

[12] Por conveniencia se le denominara nodo al vértice y arco a la arista en este capítulo.

Conectividad: Se dice que dos nodos *i* y *j* están conectados si la gráfica contiene al menos una trayectoria desde el nodo *i* al nodo *j*. Una gráfica es conectada si cada par de nodos están conectados; en cualquier otro caso, la gráfica es desconectada.

Por ejemplo, la gráfica mostrada en la figura 3.3 (a) es conectada, y la gráfica mostrada en la figura 3.3 (b) es desconectada, y además tiene dos componentes compuesto por el conjunto de nodos {1,2,3,4} y {5,6}

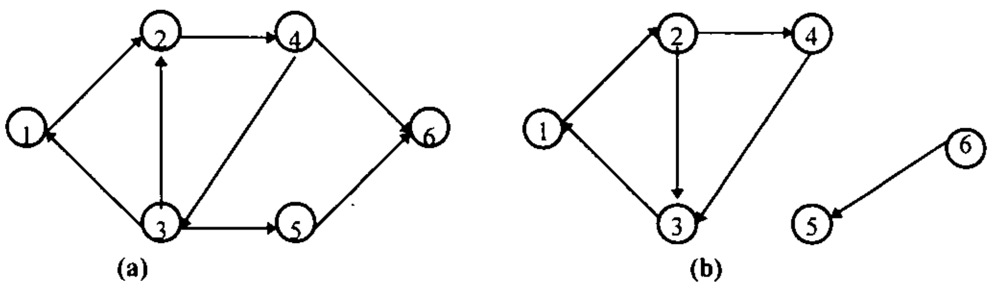


Figura 3.3 *(a) Gráfica conectada y (b) gráfica desconectada*

Conectividad Fuerte: Una gráfica conectada es *fuertemente conectada* si esta contiene al menos una trayectoria dirigida de cada nodo a cada uno de los demás nodos.

En la figura 3.3(a) el componente [ver también figura 3.3(b)] definido por el conjunto de nodos {1,2,3,4} es fuertemente conectada; el componente definido por el conjunto de nodos {5,6} no es fuertemente conectada por que no contiene trayectorias dirigidas del nodo 5 al nodo 6.

Corte: Un corte es una partición del conjunto de nodos V en dos partes, S y S*= V-S. Cada corte define un conjunto de arcos, los cuales tienen un punto extremo o final en S y el otro punto en S*. Por lo tanto, se puede referir a este conjunto de arcos como un corte y es representado por la notación [S,S*]. La figura 3.4 da el ejemplo de un corte con S={1,2,3} y S*={4,5,6,7}. El conjunto de arcos en este corte son {(2,4), (5,2), (5,3), (3,6)}.

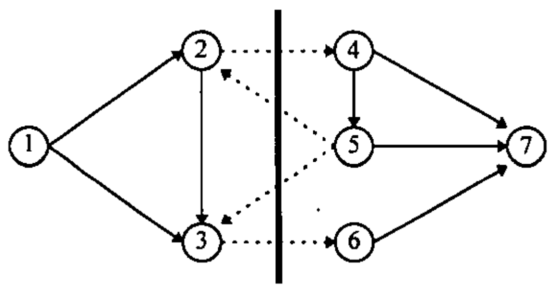


Figura 3.4 Corte

Corte s-t: Un *corte s-t* es definido respecto a dos nodos *s* y *t*, y un corte [S,S*] satisfaciendo la propiedad de que $s \in S$ y $t \in S^*$. Por ejemplo, si $s = 1$ y $t = 6$, el corte representado en la figura 3.4 es un corte *s-t*; pero si $s = 1$ y $t = 3$, este corte no es un corte *s-t*.

Arbol: Un *árbol* es una gráfica conectada que no contiene ciclos. Un ejemplo de árbol se presenta en la figura 3.5.

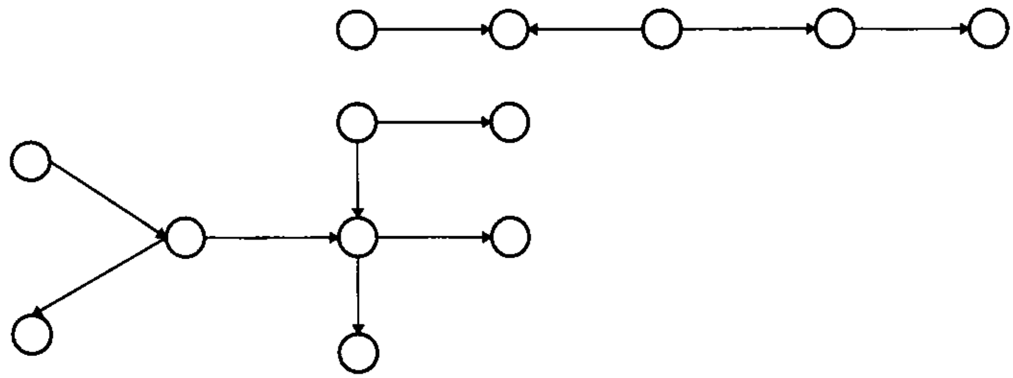


Figura 3.5 *Ejemplo de arboles*

Propiedades elementales de los arboles:

Sea T una gráfica con n-vértices, los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) T es un árbol.

(b) T no contiene circuítos y tienen n-1 líneas.

(c) T es conexo y cada línea es una línea de corte o puente.

(d) T es conexo y tiene n-1 líneas.

(e) Entre cada dos vértices existe una trayectoría.

(f) La adición de cualquier línea entre los vértices ya existentes crea un circuito.

(g) T tiene al menos dos vértices colgantes. (es decir, nodos de grado 1)

(h) La suma de los grados de los de los n-nodos de un árbol es igual al doble del número de arcos, es decir, $\Sigma d(Vi) = 2e = 2(n-1) = 2n-2$.

Subárbol: Una subgráfica conectada de un árbol es un *subarbol*, con al menos tres vértices.

Bosque: Un bosque B con n-vértices y k-arboles (componentes) tiene n-k líneas. por lo tanto no contiene ciclos. En la figura 3.6 se da un ejemplo de un bosque.

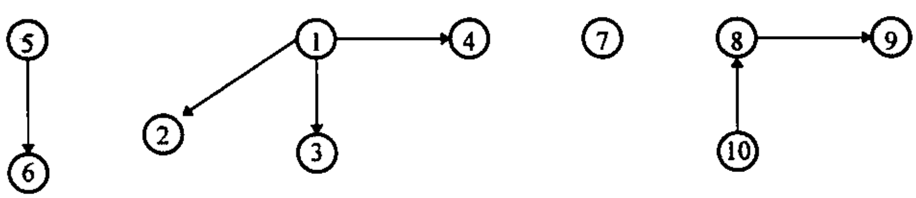


Figura 3.6 *Bosque*

Arbol Expandido: Un árbol T es un árbol expandido de G si T es una subgráfica expandida de G y T contiene cada nodo de G. La figura siguiente (3.7) muestra dos arboles expandidos de la gráfica mostrada anteriormente, en la figura 3.1.

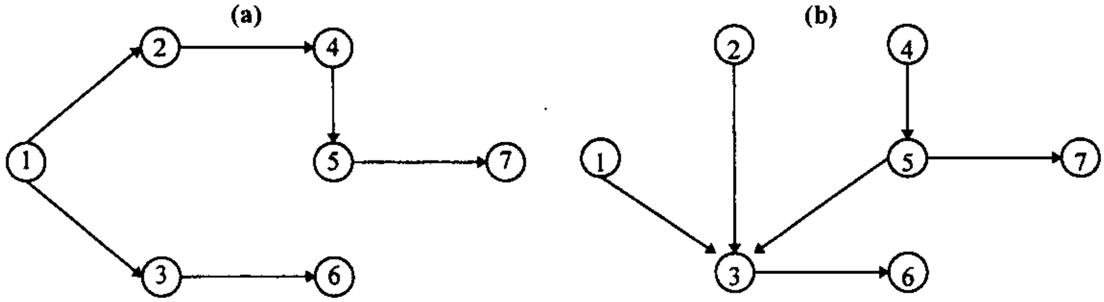


Figura 3.7 *Arboles expandidos de la red de la fig. 3.1.*

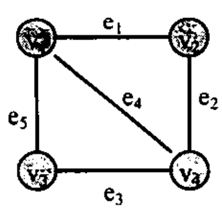
3.3. CONCEPTOS DE FLUJO DE REDES

Dadas las definiciones importantes de la Teoría de Gráficas que se relacionan con redes, se pueden establecer los conceptos de flujo en Redes que nos permitirán desarrollar aplicaciones concretas, ayudándonos así a entender la teoría, que suele ser a veces algo abstracta.

Definición: El número de aristas incidentes en un vértice es su grado o valencia, el grado de v_i se denota como $d(v_i)$.

Ejemplo:

G:



$d(v_1) = 3$
$d(v_2) = 2$
$d(v_3) = 2$
$d(v_4) = 3$

Definición: Si una gráfica tiene e-aristas y n-vértices la suma de los grados de la gráfica es $\Sigma d(v_i)= 2e$.

Ejemplo: Del ejemplo anterior se tiene que $\Sigma d(v_i)= d(v_1)+ d(v_2) +d(v_3)+ d(v_4) = 3+2+2+3 = 10$, haciendo la aplicación de la definición en forma directa se tiene que el número de aristas es igual a 5 ($e = 5$), por lo tanto $2e = 2(5) = 10$

Definición: $d^+(v_i)$ es el número de líneas incidentes hacia afuera de un vértice v_i es llamado grado externo de v_i .

Definición: $d^-(v_i)$ es el número de líneas incidentes hacia dentro del vértice v_i es llamado grado interno de v_i .

Vértice inicial: es aquel cuyo grado interno es cero.

Vértice final: es aquel cuyo grado externo es cero.

Definición: Una red es una gráfica dirigida, definida por un conjunto V de nodos n y un conjunto E de m arcos dirigidos, sin bucles, tal que cada arco (i,,j)[13] $\in$ E tiene asociado:

a) cada arco *u* tiene asociado un número c(*u*) ≥0, llamado **capacidad del arco**.

b) existe uno y solo un nodo[14] X_0 llamado **fuente de la red**, tal que $d^-(X_0)=0$.

c) existe uno y solo un nodo X_n llamado **sumidero de la red**, tal que $d^+(X_n)=0$.

Flujo. Sean $d^-(X_i)$ es el conjunto de arcos incidentes hacia el interior del nodo X_i, $d^+(X_i)$ es el conjunto de arcos incidentes hacia el exterior del nodo X_i. Se dice que una función entera $\varphi(u)$ definida sobre el conjunto E de los arcos u_i es el flujo para la red si:

• $\varphi(u) \geq$	0	para toda $u \in E$	El flujo debe ser mayor o igual a cero.
• $\sum_{u \in d^-(X_i)} \varphi(u) =$	$\sum_{u \in d^+(X_i)} \varphi(u)$	$X_i \neq X_0 \neq X_n$	*Propiedad conservativa*, indica que el flujo que entra a la red como el que sale debe ser el mismo
• $\varphi(u) \leq$	c(u)	para toda $u \in E$	El flujo debe ser menor o igual a la capacidad.

El valor del flujo se designa por $\phi(X_n)$, donde

$$\sum_{u \in d^+(X_0)} \varphi(u) = \sum_{u \in d^-(X_n)} \varphi(u) = \phi(X_n)$$

Definición: se dice que un arco $u_i \in E$ esta saturado si $\varphi(u_i) \leq c(u_i)$

Definición: Un flujo es completo si todo camino de la fuente al sumidero contiene al menos un arco saturado.

[13] *al arco (i, j) se le denominará **u** por simple notación.*

[14] *al nodo por notación se le identificará por una X_i en lugar de una V_i*

Sea $Y \subset X$, donde X es el conjunto de nodos que contiene tanto a X_0 como a X_n. El conjunto $d^-(Y)$ de los arcos incidentes a Y hacia el interior, es llamado **corte de la red**.

Capacidad de corte: $c(d^-(Y)) = \Sigma c(u_i) \qquad u_i \in d^-(Y)$

Si Y contiene al sumidero de la red, cualquier flujo que pase por la red será:

$$\phi(X_n) \leq c[d^-(Y)]$$

Si existe un flujo $\phi(X_n)$ y un corte $d^-(Y_0)$ tales que:

$$\phi(X_n) = c[d^-(Y_0)]$$

entonces el flujo $\phi(X_n)$ tiene un valor máximo y el corte $d^-(Y_0)$ tiene una capacidad mínima.

TEOREMA: En una red dada, el valor de un flujo máximo es igual a la capacidad de un corte mínimo Max $\phi(X_n)$ = Min $c[d^-(Y)]$.

Este teorema establece una correspondencia entre flujos y cortes en la red; solucionando así un flujo máximo así como solucionar a la vez un problema de corte mínimo complementariamente.

3.3.1. ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL FLUJO MAXIMO

El problema de Flujo Máximo en una red significa poder enviar el flujo máximo posible entre dos nodos específicos, un nodo fuente X_0 y un nodo destino (sumidero) X_n, sin exceder la capacidad de cualquier arco de la red.

Para poder solucionar este problema se da a continuación el algoritmo de flujo máximo:

Paso I. Se hace salir del nodo fuente un flujo cualquiera, que se repartirá por toda la gráfica de tal forma que se cumpla con la propiedad conservativa del flujo en todo nodo. El flujo que pase por un arco no debe sobre pasarse la capacidad del mismo.

Paso II. Si el flujo no es completo, significa que existe al menos un camino de la fuente al sumidero en el que ninguno de sus arcos esta saturado. Se trata de saturar al menos un arco de este camino, aumentando el flujo en uno, sucesivamente. Esta paso finaliza cuando el flujo en la red es completo.

Paso III. Se marcan los nodos de la red en la forma siguiente:

- Marcar la fuente con el signo (+)
- Si el nodo X_i esta marcado y el X_j no entonces
  - Marcar el nodo X_j con el signo $(+X_i)$ si existe un arco (X_i,X_j) no saturado
  - Marcar el nodo X_j con el signo $(-X_i)$ si hay un arco (X_j,X_i) en el que el flujo sea no nulo.

Paso IV. Si en el Paso III se llega al sumidero por alguna cadena de nodos marcados entonces:

- El flujo de un arco se aumenta en una unidad, si este arco de la cadena esta orientado en el orden indicado por la secuencia de nodos que forman la cadena.
- El flujo de un arco se disminuye en uno, si sucede lo contrario.

De esta manera se obtendrá un nuevo flujo, mayor al inicial y que sigue cumpliendo con la propiedad conservativa.

Paso V. Se repiten los Pasos III y IV hasta que no aparezcan cadenas de nodos lo que significa que el flujo $\phi(X_n)$ ha alcanzado su máximo valor.

Sea Y_0 el conjunto de nodos marcados, donde $X_0 \notin Y_0$ y $X_n \in Y_0$. Y_0 define un corte $W^-(Y_0)$ de la red.

Dado el algoritmo de Flujo máximo, se puede utilizar en una gran variedad de aplicaciones sobre redes, quizás las más comunes sean las redes físicas, ya que son las más fáciles de identificar de entre las varias clases existentes de las redes.

Un ejemplo claro de redes se presentan en la Investigación de Operaciones, y básicamente en las redes de transporte. En los problemas de transporte, un despachador con un inventario de ciertos envíos en almacén debe distribuir geográficamente estos envíos de productos a los centros de venta al por menor o al detalle, es decir, repartir sus productos a las tiendas o centros de autoservicio que venderán dichos productos; para satisfacer así la demanda de sus clientes, el despachador en base a esta demanda puede decidir una ruta que permita un costo mínimo posible de transportación de los productos a dichos centros.

Pero la existencia de las redes físicas no están limitadas a las redes de transporte, sino también se presentan en otras disciplinas de las ciencias aplicadas e ingeniería, tales como las matemáticas, química, electricidad, comunicaciones, mecánica e ingeniería civil. Cuando las redes ocurren en estas disciplinas, los nodos, arcos y modelos de flujo, representan varios tipos de entidades físicas; por ejemplo, en una red típica de comunicación, los nodos pueden representar intercambios telefónicos y la facilidad de transmisión, los arcos representan los alambres de cobre o de fibra óptica, y el flujo es la transmisión de mensajes de voz o de datos.

En la siguiente tabla 3-1 se muestran algunas aplicaciones con la asociación típica para los nodos, arcos y flujos de una red.

APLICACIONES	ASOCIACIÓN FÍSICA DE NODOS	ASOCIACIÓN FÍSICA DE ARCOS	FLUJO
Sistemas de Comunicación	Intercambio telefónico, computadoras, satélites.	Alambre de cobre, cable de fibra óptica, microondas.	Mensajes de voz, datos, transmisiones de vídeo.
Circuitos integrados de computadora	compuertas, registros, procesadores	Cables	Corriente eléctrica
Sistemas Mecánicos	Juntas	Barras, resortes	Calor, energía
Sistemas de Transporte	Intersecciones, aeropuertos, estaciones de tren	Autopistas, rutas de aerolíneas, vías férreas	Pasajeros, vehículos, trenes de carga.

Tabla 3.1

Como se puede observar, el campo de aplicación de las redes es algo extenso, por lo que a continuación se mencionarán algunas aplicaciones que ejemplifiquen de manera sencilla la forma de solucionar algunos de estos problemas.

3.3.2. APLICACIÓN: FLUJO DE REDES EN LA INGENIERIA

Una empresa constructora dispone de 3 bancos de préstamo (lugares donde pueden extraer arena, grava, etc.) x_1, x_2, x_3 y puede explotar 200 000 m^3 en x_1, 300 000 m^3 en x_2 y 150 000 m^3 en x_3. Por otra parte el material debe transportarse a los sitios x_4 a x_8 en donde se requieren respectivamente.100 000 m^3, 100 000 m^3, 150 000 m^3, 250 000 m^3 y 50 000 m^3. Esta información se muestra en la tabla 3.2 en donde las cantidades están expresadas en decenas de miles de m^3.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Bancos	20	30	15					
Sitios de descarga				10	10	15	25	5

Tabla 3.2 *Información de la empresa*

Debido a las restricciones en la flotilla de camiones, en el equipo de explotación de los bancos y en los caminos de acceso; las capacidades de transporte de cada uno de los bancos a los sitios de descarga se muestran en la tabla 3.3.

Destino Origen	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	6	4	8	8	0
x_2	6	6	6	8	6
x_3	0	4	3	7	3

Tabla 3.3 *Restricciones*

Cabe notar que las capacidades de transporte con destino a los diferentes sitios de descarga exceden a las demandas y que la capacidad de salida de cada banco de préstamo excede a su disponibilidad. Haciendo abstracción de los costos de transporte, interesa satisfacer las demandas al máximo.

Por lo que la red de transporte queda formada como se ve en la figura 3.8, en la cual el número asociado a cada arco es su capacidad, la fuente es el nodo x_0 y el sumidero es el nodo x_9, y los nodos intermedios x_1 a x_8 son los bancos y sitios de descarga respectivamente.

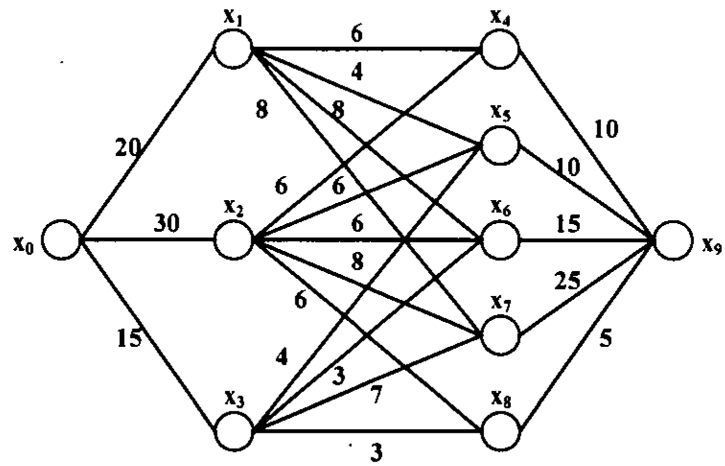


***Figura 3.8** Gráfica y sus capacidades, según las tablas 3.2 y 3.3*

Para solucionar el problema, se aplicará el algoritmo de flujo máximo, el cual proporciona la siguiente gráfica, en donde se hace salir un flujo cualquiera que se esparza por toda la red satisfaciendo la propiedad conservativa del flujo: (fig. 3.9)

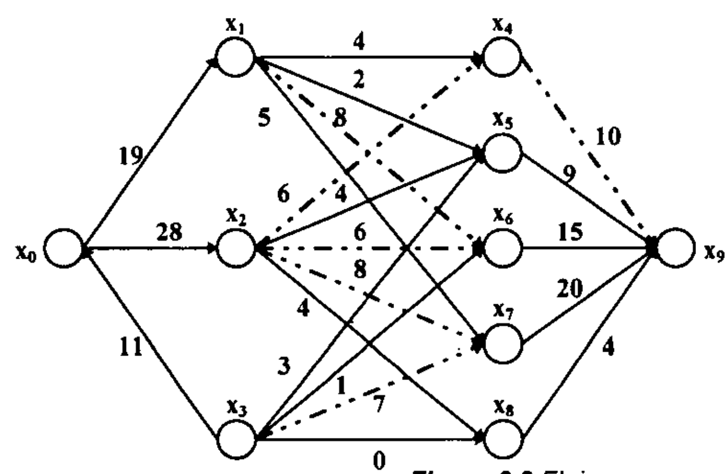


***Figura 3.9** Flujo que se pasa por la gráfica*

El flujo que se hizo pasar por la red es uno cualquiera, que no sobre pase las capacidades de la grafica de la fig. 3.8. Los arcos punteados indican que el flujo en ellos es el máximo, debido a su capacidad.

Se aplica el segundo paso del algoritmo de flujo máximo a la gráfica anterior, dado que no existe un camino de la fuente al sumidero en el que ninguno de sus arcos esta saturado, por lo que se tratará de saturar al menos un arco de este camino, obteniendo la siguiente gráfica con flujo completo (fig. 3.10)

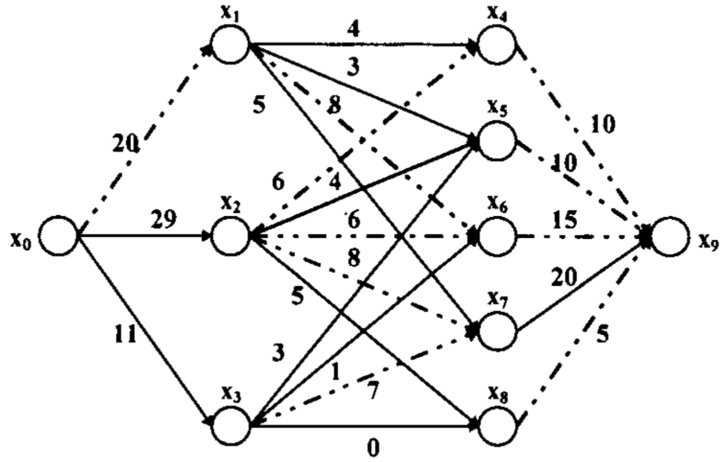


Figura 3.10 *Flujo Completo*

Teniendo un flujo completo, se aplican los siguiente pasos que son marcar los nodos de la red y si llega al sumidero por alguna cadena de nodos marcados, entonces el flujo de un arco se deberá aumentar o disminuir en uno, para así obtener un nuevo flujo, mayor al inicial y que deberá cumplir con la propiedad conservativa.

La gráfica que representa la aplicación de los pasos 3 y 4 del algoritmo se muestra a continuación en la fig. 3.11.

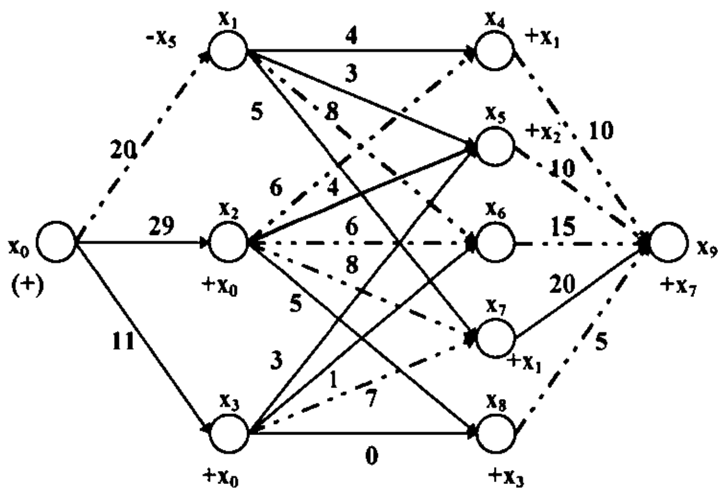


Figura 3.11 *Gráfica Etiquetada*

El paso 5 consiste en repetir los pasos 3 y 4 iterativamente hasta que no aparezca ninguna cadena de nodos marcados que vayan de la fuente al sumidero, y cuando se llega a esta condición entonces el flujo ha alcanzado su valor máximo. Por lo que la siguiente figura 3.12 muestra la gráfica final, con el flujo máximo.

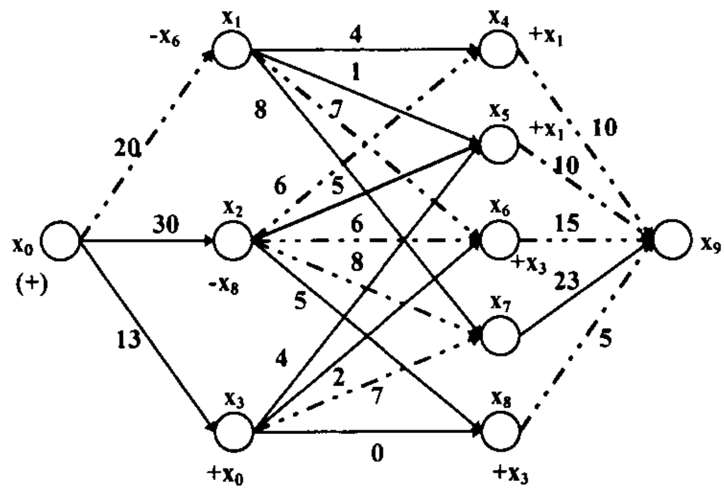


Figura 3.12 *Gráfica con Flujo Máximo*

Los datos que aparecen en la gráfica resultante, ahora se podrán interpretar directamente, conforme al contexto del problema. Es decir, por ejemplo el banco x_1 llegará al máximo tonelaje disponible o sea 40 000 m^3 que se dirigen a x_4, 10 000 m^3 hacia x_5, 70 000 m^3 hacia x_6 y 80 000 m^3 hacia x_7.

De las rutas que salen de x_3, la que se dirige a x_6 transportará una capacidad menor a su disponibilidad, en las rutas x_5 y x_7 se transportará a su capacidad total y en las que van hacia x_4 y x_8 no se transportará.

3.3.3. APLICACIÓN: CREACION DE UNA DESVIACION

Supóngase que el subsecretario de la SEDUE tiene un grupo a su cargo que pretende coordinar la construcción del nuevo sistema de vía subterránea, con el departamento de mantenimiento de autopistas.

Debido a la construcción del nuevo sistema de vías subterráneas, en las proximidades del cinturón de la ciudad, el tránsito en el borde oriental debe ser desviado. La desviación planeada abarca una red de rutas alternas que deben proponerse por el departamento de mantenimiento de autopistas. Los diferentes límites de velocidad y las vías de tránsito producen diferentes capacidades de flujo en los distintos arcos de la red compuesta.

Sea la siguiente red que representa las calles(arcos) por donde fluira el tráfico y las intersecciones de las mismas que seran los nodos.

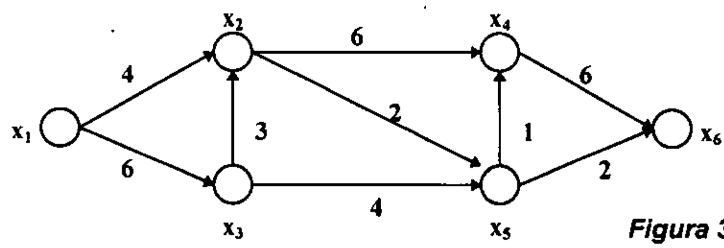
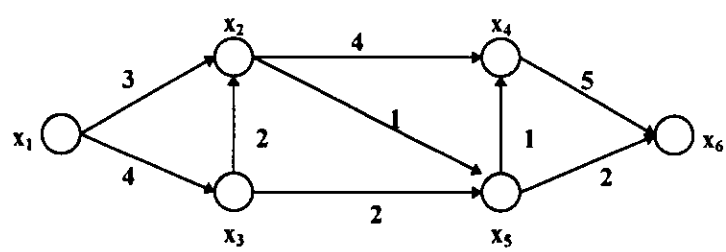


Figura 3.13 *Gráfica del problema*

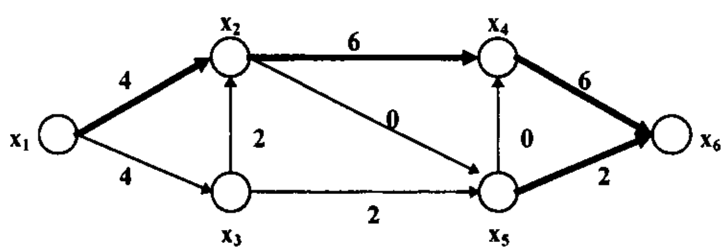
La figura 3.13 muestra la gráfica del problema, donde el nodo x_1 indica el comienzo de la desviación y el nodo x_6 es el nodo en el que el tránsito desviado reingresa al cinturón; el número en cada arco indica la capacidad de la calle en miles de vehículos por hora.

El problema es encontrar el máximo número vehículos por hora que pueden fluir a través de la red de desviación propuesta. Entonces para solucionar el problema se aplica el algoritmo de flujo máximo para poder determinar el máximo número de vehículos por hora.

Paso 1.



Paso 2.



Paso 3.

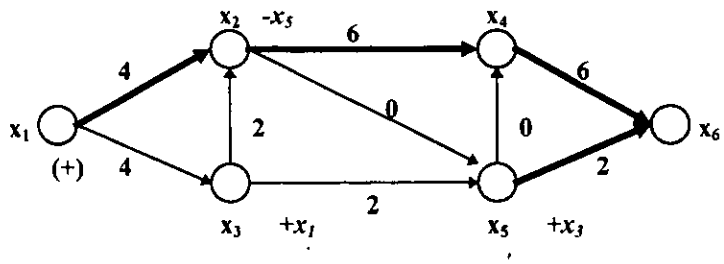


Figura 3.14 *La gráfica del paso 1 muestra el flujo cualquiera, del paso 2 el flujo completo y en el paso 3 la gráfica etiquetada.*

Los arcos más negritos mostrados en las gráficas indican (en cada uno de los tres pasos) que son arcos saturados.

Debido a que en el paso 3 de la gráfica 3.14 al etiquetar no se llego al sumidero, el flujo presentado por esta gráfica es el máximo.

El flujo máximo de la fig. 3.14 es $\phi(x_6)=8$, lo cual indica que son 8 mil vehículos por hora los que fluyen a través de la red de desviación propuesta.

3.3.4. ALGORITMO PARA ENCONTRAR EL FLUJO MINIMO

El problema de Flujo Mínimo en una red significa poder enviar un flujo mínimo posible entre dos nodos específicos, un nodo fuente X_0 y un nodo destino (sumidero) X_n, por la red. Este se formula de la siguiente manera:

$$\text{Min } \Sigma\phi(u) \quad \text{s.a } \phi(u) \geq c(u) \; ; \; u \in W^{-}(X_n)$$

A continuación se da el algoritmo de flujo mínimo:

Paso I. Se hace pasar en la red un flujo cualquiera de tal manera que el flujo en cada arco sea mayor o igual (> ó =) a la capacidad de requerimiento mínimo de flujo en el mismo. También debe cumplir la propiedad conservativa $\phi_1(u) \geq c(u)$

Paso II. Las nuevas capacidades de la red se calculan como $c_2(u) = \phi_1(u) - c(u)$

Paso III. Se calcula el flujo máximo de la nueva red al cual se le designa $\phi_2(u)$

Paso IV. El flujo mínimo asociado a la red original se calcula como $\phi(u) = \phi_1(u) - \phi_2(u)$.

3.3.5. APLICACIÓN: DETERMINACION DE UNA RUTA RAPIDA (TIEMPO MINIMO)

Supóngase que se tiene el siguiente mapa de los Ferrocarriles Nacionales de México, donde las vías son de doble tráfico, es decir, adireccionales (que son los arcos).

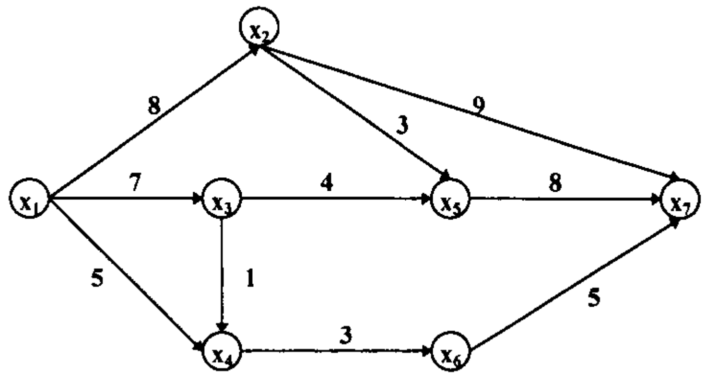


Figura 3.15 *Mapa de los Ferrocarriles Nacionales*

Donde los nodos representan las ciudades siguientes:

Nodo	Ciudad
x_1	D.F.
x_2	San Agustin
x_3	Teotihuacan
x_4	Metepec
x_5	Irolo
x_6	San Lorenzo
x_7	Calderón

Se desea determinar la ruta más rápida entre México (D.F.) y Calderón, es decir, determinar el tiempo más mínimo de la red. Las capacidades de la red están dadas en horas.

Para solucionar el problema, se considerará una sola dirección la que va del D.F. a Calderón. A continuación se aplicará el algoritmo de flujo mínimo, el cual determinara el tiempo mínimo en el que se recorrerá la ruta deseada.

Se hace pasar un flujo cualquiera tal que el flujo sea mayor o igual a la capacidad.

Paso 1.

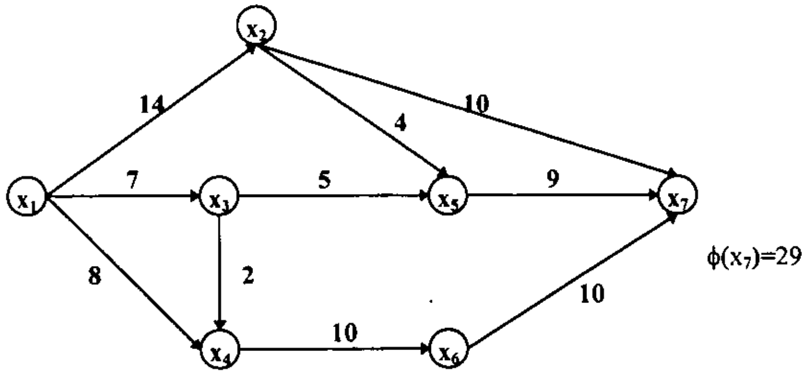


Figura 3.16 *Flujo mayor a la capacidad*

Paso 2.

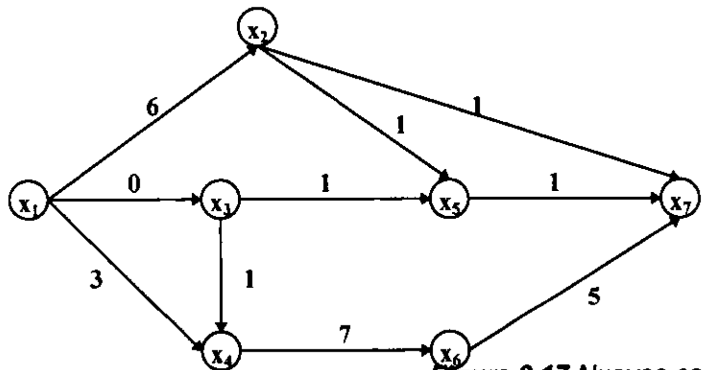


Figura 3.17 *Nuevas capacidades de la red*

Paso 3.

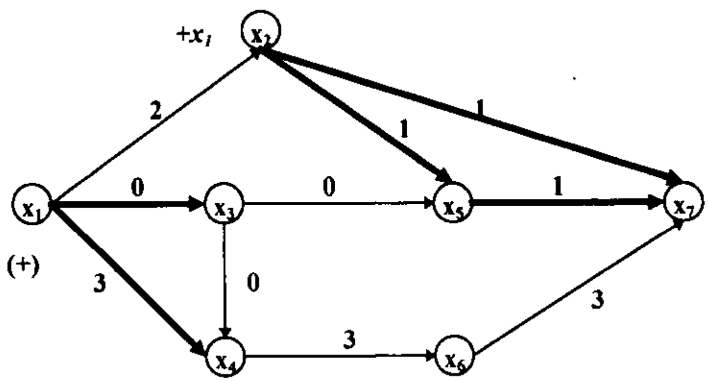


Figura 3.18 *Determinación del Flujo Máximo.*

En el paso anterior se determina un flujo máximo igual a 5 (Max $\phi_2(u)=5$). Para el paso 4, se tiene que realizar la resta $\phi(u)= \phi_1(u) - \phi_2(u)=29 - 5=24$; por lo tanto el Min $\phi(u)=24$.

El resultado para el problema sería que el tiempo mínimo hacia Calderón es de 24 horas.

3.3.6. APLICACIÓN: REDES ELÉCTRICAS[15]

El pionero en esta aplicación fue Gustav Kirchhoff, quien desarrolló la teoría de arboles en 1847 para solucionar un sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, él cual pasa corriente a cada rama y alrededor de cada circuito de una red eléctrica. Él era un físico pero tuvo el pensamiento de un matemático cuando abstrajo de una red eléctrica con resistencias, condensadores, inductancias, etc., un modelo y lo reemplaza por una estructura combinada consistente solo de puntos y líneas sin cualquier indicación del tipo del elemento eléctrico representado por las líneas individuales.

Kirchhoff reemplaza cada red eléctrica por su gráfica fundamental y muestra que no es necesario considerar cada ciclo en la gráfica de la red eléctrica separadamente, en orden, para solucionar el sistema de ecuaciones.

Por lo tanto, supóngase la red eléctrica de la figura 3.19, en la cual se verá como a partir de la red eléctrica se puede elaborar un modelo con el auxilio de la teoría de gráficas.

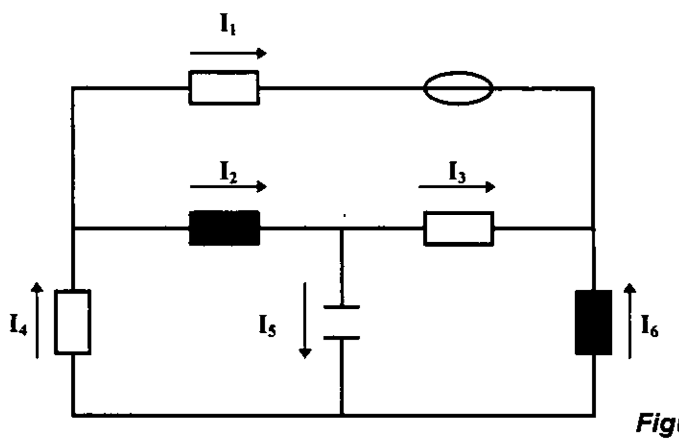


Figura 3.19 *Red Eléctrica*

A partir de la red eléctrica se construirá un modelo que permita resolver el sistema de ecuaciones de la misma. En la siguiente figura (3.20) se muestra la gráfica o modelo que se obtendría de la anterior red eléctrica, donde cada intersección de las corrientes es un nodo y la corriente es el arco.

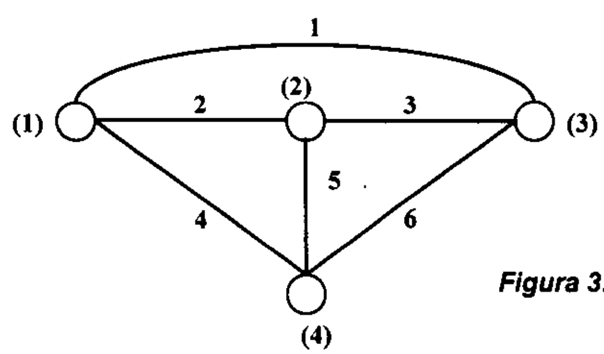


Figura 3.20 *Gráfica de la Red Eléctrica*

[15]Frank Harary,"Graph Theory", Addison Wesley, págs 2 y 3

Respetando las direcciones de las corrientes del diagrama de la red eléctrica principal se obtendrá la gráfica dirigida de ella.

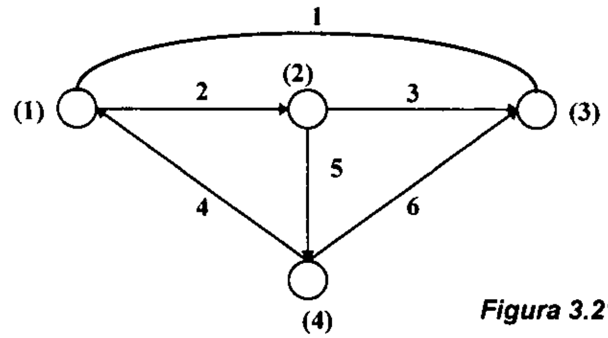


Figura 3.21 *Gráfica Dirigida de la Red Eléctrica*

Como se ve en las figuras 3.20 y 3.21 se tienen la gráfica de la red eléctrica y la gráfica dirigida de la Red Eléctrica, los nodos están indicados entre paréntesis y el flujo de la corriente esta indicada en cada arco.

El flujo de las corrientes y voltajes en las redes eléctricas y las relaciones entre estas dependen de las características de los elementos que constituyen la red y en el camino en que estos elementos están interconectados. Tales características son: la resistencia, inductancia, capacitancia, fuente de voltaje, fuente de corriente, etc. Los elementos forman una o más ramas de la red, las cuales están conectadas por medio de los nodos.

Cabe mencionar que es importante la referencia de la dirección entre los arcos del voltaje y la corriente de la red, ya que deben ser seleccionadas en orden para poder escribir así las ecuaciones básicas de Kichhoff de la red.

Existen elementos en la red llamados generadores (fuentes en la notación de Teoría de gráficas) los cuales ofrecen la energía eléctrica para la red, mientras la energía es almacenada o consumida por elementos pasivos de la misma.

Como se menciono el conjunto de ecuaciones lineales describen las relaciones entre corrientes y voltajes, y es aquí donde específicamente ayuda la Teoría de Gráficas, en modelar la red y el flujo, para así poder determinar las ecuaciones; y otras ramas de las matemáticas resolverán dichas ecuaciones (por ejemplo ecuaciones diferenciales).

Esta aplicación, más que serlo es un comentario de lo que la Teoría de Gráficas puede proporcionar como una herramienta para la representación gráfica de problemas.

4. UTILIZACION DE GRAFICAS EN LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

4.1. INTRODUCCION

La Inteligencia Artificial (IA) ha presentado durante los últimos años un gran desarrollo, lo cual implica que ha sido un campo para la investigación de muchos científicos que han buscado aplicar tales investigaciones en aspectos prácticos de la vida diaria del hombre. De ésta surgen los sistemas expertos (SE) y los robots, que son máquinas que "piensan" por si solas.

Al utilizar el término de Sistema Experto (SE) se refiere a "*....un programa de computador inteligente que usa conocimientos y procedimientos de inferencia para resolver problemas que son lo suficientemente difíciles como para requerir la intervención de un experto humano para su resolución...*"[16], y robot se utiliza para identificar a los "*....dispositivos mécanicos capaces de desarrollar tareas humanas que funcionan normalmente bajo el control de una computadora y estos se utilizan para automatizar alguna función de fabricación....*"[17].

Para que un SE y un robot funcionen de manera "inteligente", se requiere utilizar conocimientos para poder solucionar ciertos problemas. Estos conocimientos son proporcionados por los investigadores mediante una forma específica de representación del conocimiento.

Para poder desarrollar dichas aplicaciones, los investigadores han intentado diseñar la forma de representar el conocimiento, de la manera que fuese más fácil de utilizar este, para que funcionen el SE y el robot como se desea, y poder solucionar problemas cotidianos y facilitar el trabajo del hombre.

En este capítulo se referirá básicamente a la estructura de un SE[18], y a la forma en que se puede representar el conocimiento en él, por medio de la Teoría de Gráficas, obteniendo con esto una representación visual del conocimiento, que permitirá al SE solucionar algún problema en específico.

[16]Edward Feigenbaum (1977), de la Universidad de Stanford definió el término de SE en el 1er. Congreso de Inteligencia Artificial

[17]Louis E. Frenzel, Jr. en su libro "A fondo: Sistemas Expertos" pág 199.

[18]la cual se entiende como la combinación de elementos que permiten representar y utilizar conocimientos para resolver un problema dado.

4.2. PANORAMA DE LOS SISTEMAS EXPERTOS

Para entender la forma en la cual la Teoría de Gráficas interactua con un SE, hay que conocer la estructura y caracteristicas que tiene este, poniendo atención básicamente en la representación del conocimiento mediante redes semánticas, siendo aquí donde interviene la Teoría de Gráficas.

La estructura de un SE esta dada por: *el experto humano, un subsistema de adquisición de conocimiento, una base de conocimientos, una base de datos o hechos, un subsistema de explicación, un motor de inferencia, una interfaz de usuario y un usuario.* Los datos que contienen el conjunto del conocimiento especializado es introducido por el experto del dominio, de algún campo o especialidad en específico. Un ejemplo de SE es el mostrado en la figura 4.1

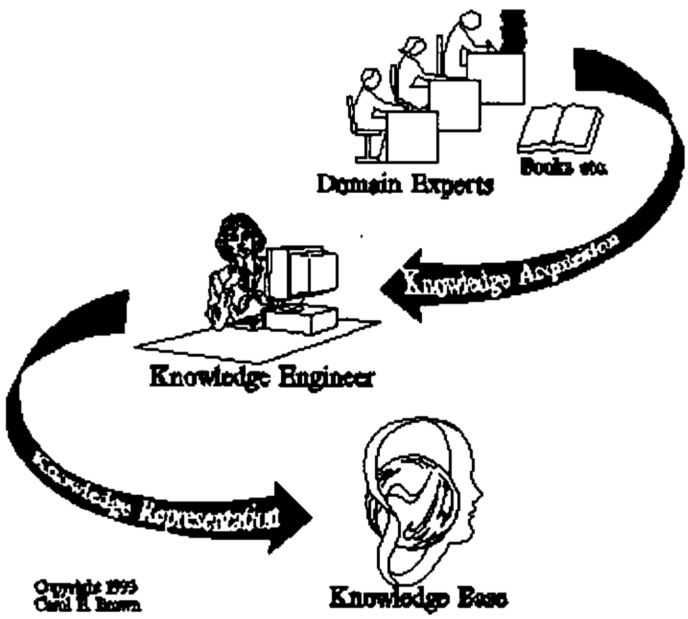


Figura 4.1 *Esquema de un Sistema Experto*

Entonces se observa que se requiere representar el conocimiento en la base de conocimientos (BC) que esta constituida por el conocimiento especifico y procedimental acerca de la clase de problemas en los que el sistema es experto. Los conocimientos están dados por objetos y relaciones, excepciones y estrategias de solución. La BC es el componente principal de la estructura del SE, que pone a disposición del motor de inferencia el conocimiento para su posterior tratamiento.

Se han desarrollado varios enfoques para representar el conocimiento en la BC, como lo son: reglas de producción, cálculo de predicados, frames, script, marcos de referencia, redes de semántica, etc., aunque no son las únicas posibles, debido a los avances en su estudio, son muy eficientes para la organización del conocimiento.

Existen dos características comunes entre las representaciones del conocimiento: primera, pueden ser programadas en los lenguajes existentes y ser almacenados en la memoria; segundo, son diseñadas de tal manera que la información introducida y el conocimiento contenido en la BC puedan ser usados para el razonamiento del SE. Es decir, la BC contiene una estructura de datos que puede ser manipulada por el motor de inferencia, que utiliza la busqueda heurística, técnicas de emparejamiento de patrones y estructuras de control, en la BC para contestar preguntas, dibujar conclusiones o en dado caso desempeñar alguna función inteligente.

Para incluir el conocimiento en la BC, se debe definir el tipo de conocimiento que se quiere representar, para esto existen dos tipos de conocimiento.

El primero es el *conocimiento declarativo*, también denominado conocimiento descriptivo, que consiste en una afirmación acerca de las personas, lugares o cosas; este conocimiento permite establecer informaciones, deducir relaciones y clasificar objetos. Con él no se puede explicar nada, pero se pueden representar hechos o realidades y expresar las relaciones existentes entre ellos. En los SE, los esquemas empleados para representar conocimientos declarativos incluyen redes semánticas, tramas y reglas de producción.

El *conocimiento procedural* es explicativo; proporciona una forma de aplicar el conocimiento declarativo; con esta clase de conocimientos se pueden indicar formas de ejecutar una acción. El conocimiento procedural indica qué hacer y cómo hacerlo. El conocimiento procedural se representa en los SE mediante reglas de producción y guiones.

Presentado el panorama de la IA, lo que nos interesa de ella es el concepto de redes semánticas, ya que en ellas la Teoría de Gráficas interviene como una herramienta para modelar el conocimiento, siendo entonces la Teoría de Gráficas fundamental en su desarrollo.

4.2.1. REDES SEMANTICAS

DEFINICION: Una red semántica es una representación gráfica del conocimiento que muestra las relaciones jerárquicas entre los objetos.

Los círculos se denominan "nodos", los cuales representan objetos e información descriptiva acerca de estos objetos. Los objetos son representaciones físicas de cualquier cosa, por ejemplo libros, carros, personas, lugares o cosas; los nodos también pueden ser conceptos, eventos o acciones, por ejemplo la ley de Ohm, la construcción de una casa o el escribir un libro. Los atributos de un objeto pueden también ser usados como nodos, estos pueden representar el tamaño, color, clase, edad, raza, origen u otras características.

Los nodos en la red semántica son interconectados por ligas o arcos; estos muestran las relaciones entre varios objetos y hechos descriptivos. Sobre cada arco se encuentra una etiqueta que establece las relaciones entre los nodos.

Un ejemplo de red semántica se muestra a continuación en la fig 4.2.

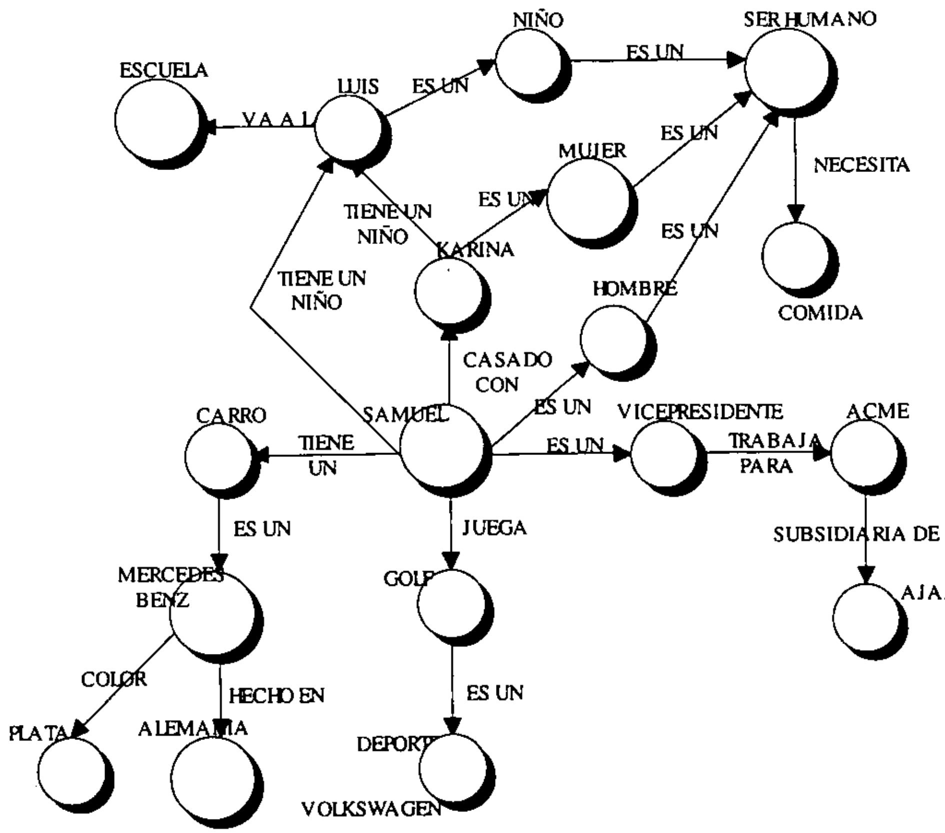


***Figura 4.2** Representación del conocimiento en una red semántica*

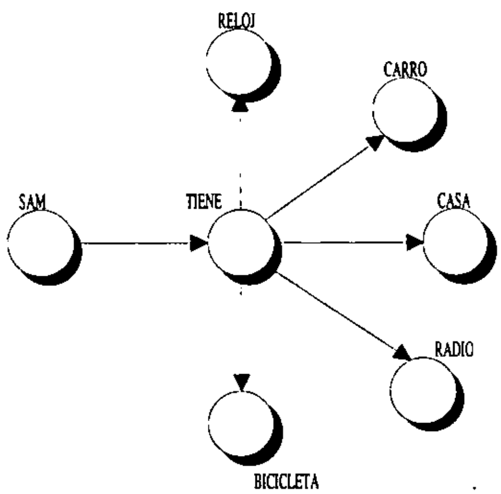
En esta red semántica la figura central en el dominio del conocimiento es una persona llamada Samuel. Una liga muestra que Samuel es un hombre y que el hombre es un ser humano o es parte de una clase llamada humanos. Otro arco desde Samuel muestra que él esta casado con Karina. Analizando otro arco se ve que Karina es una mujer y que la mujer es un ser humano. El arco siguiente muestra que Samuel tiene un hijo, Luis, quien es un chico y que va a la escuela.

Algunos nodos y arcos muestran otras características acerca de Samuel. Por ejemplo, que él es vicepresidente de Acme, una compañía subsidiaria de Ajax, una gran corporación. Se ve en otra liga que Samuel juega golf, el cual es un deporte; y otra es que Samuel tiene un Mercedes Benz que es color plata. Aquí se ve que el Mercedes Benz es un tipo de carro que es fabricado en Alemania.

Una característica importante de las redes semánticas es que algunos nodos pueden heredar propiedades o características de otros. Es decir, los nodos que se encuentran abajo en la escala de jerarquización pueden heredar propiedades de los nodos que se encuentran más arriba en la red.

Por ejemplo, considerense las ligas que muestran que Samuel es un hombre y un hombre es un ser humano. Aquí Samuel hereda la propiedad del ser humano. Así es que se puede responder la pregunta de ¿Samuel necesita comer?. Debido a las ligas de herencia, se puede decir que él necesita comer ya que los seres humanos necesitan comer.

Otro ejemplo de herencia es la relación entre Acme empresa para la cual trabaja Samuel y la corporación Ajax. Entonces se podría preguntar si ¿Samuel trabaja para la corporación Ajax?. La respuesta sería que si, debido a que Ajax es subsidiaria de Acme.



La cantidad de detalles que se incluyen en una red semántica depende de la complejidad del problema que se quiera resolver.

Por ejemplo, la liga que muestra que Sam tiene un carro debe ser cambiada para que muestre que él tiene además de un carro, una casa, un radio, un reloj y una bicicleta. Véase la figura 4.3 que ilustra esta idea.

Figura 4.3 *Adición de detalles para una red semántica*

Otro ejemplo sería el involucrar los atributos de varios objetos en la red. Es decir, supóngase que se busca mostrar la edad de Samuel y Karina. Esta puede ser mostrada en la figura 4.4(A) de la siguiente red.

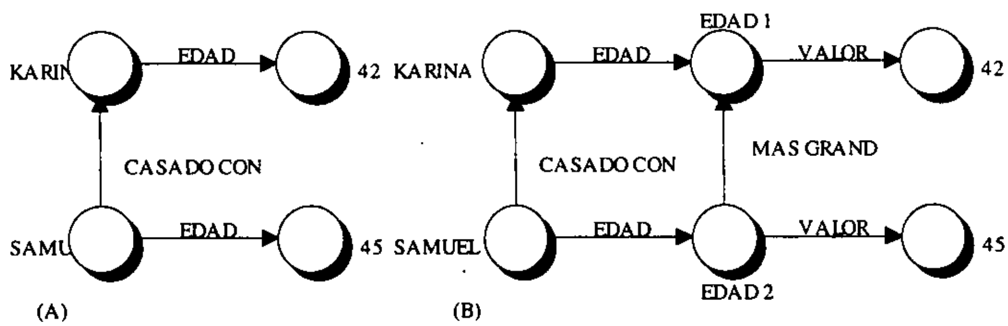


Figura 4.4 *Expansión del conocimiento en una red semántica*

Las edades son dadas como valores numéricos, donde el camino más flexible de representar esta información esta dado por la figura 4.4(a), donde se asigna a Samuel y a Karina un nodo edad. Esta representación es mejor debido a que la edad puede cambiar. Además se puede agregar a la figura 4.4(B) la liga "más grande" que daria el mayor de edad de Samuel y Karina.

Dado esto se resume que la herencia es una característica de las redes semánticas, que elimina la necesidad de repetir información en cada nodo.

Por lo que las ventajas que la red semántica ofrece (desde el punto de vista gráfico) son:

- La red semántica ofrece flexibilidad en agregar nodos y arcos para definir características como se necesiten. La representación visual es fácil para el entendimiento.
- La red semántica ofrece una economía debido a que un nodo puede heredar las características de otros nodos.
- La red semántica funciona en una manera similiar en la que el humano almacena la información.
- Debido a la cantidad de nodos y arcos ligados por la herencia, la red puede soportar la capacidad de razonar y crear definiciones entre nodos no ligados.

Algunas desventajas que presenta la red semántica son:

- El conocimiento procedural es difícil de representar en la red semántica debido a que la secuencia y tiempo no son representados explícitamente.
- No existen estandares para la definición de nodos y relaciones entre cada uno de estos arcos

Por ello las redes semánticas son usadas básicamente como una representción visual de relaciones, y estas pueden ser combinadas con otros tipos de representación del conocimiento.

Como se ejemplifico, para resolver problemas con la ayuda de una red semántica, se formulan preguntas relativas al dominio que se ésta representando, el programa de inferencia recorre los distintos nodos y arcos en busca de las palabras clave en cuestión y si el conocimiento se encuentra en el sistema, éste podrá proporcionar las respuestas adecuadas a dichas preguntas.

La gráfica de la red semántica es trasladada a un programa de computadora el cual solucionará la misma mediante la búsqueda de un punto dado como un nodo en particular, este punto es usualmente determinado por la pregunta que se hace. Entonces la computadora usa varios procedimientos de búsqueda a través de la estructura de la red para identificar los objetos deseados y determinar las relaciones que cosntestarán la pregunta realizada.

Es decir, se representan usualmente por medio de alguna clase de estructura de memoría atributo-valor. Es decir, de algún lenguaje como por ejemplo LISP, donde cada nodo será un átomo, lo enlaces serán las propiedades y los nodos en los extremos de los enlaces, serían los valores. Por ejemplo considérese la red semántica mostrada en la figura 4.5

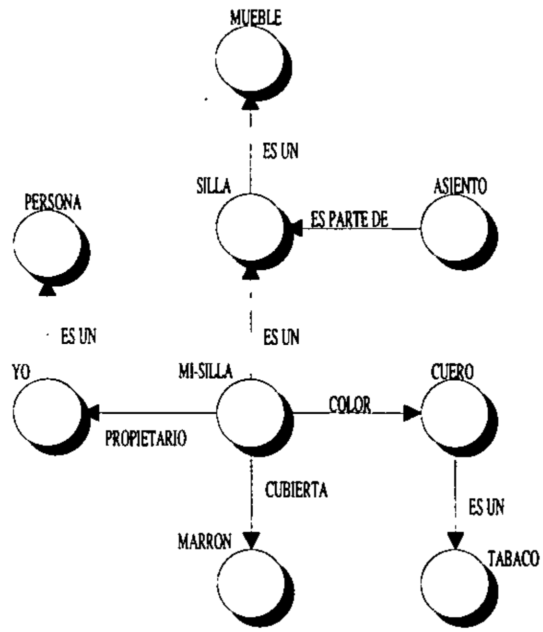


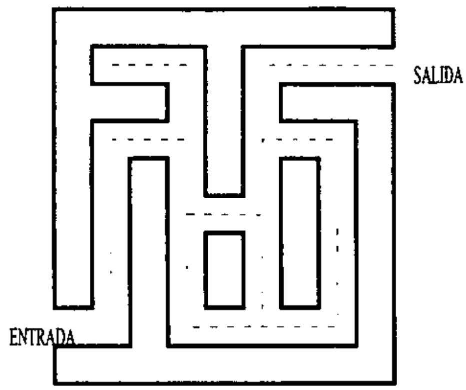
Figura 4.5 *Red Semántica*

Esta red semántica se representaría en LISP tal y como se ve en la figura 4.6 que se muestra a continuación.

ATOMO	LISTA DE PROPIEDADES
SILLA	((ES UN MUEBLE))
MI-SILLA	((ES UN SILLA) (COLOR TABACO))
	((CUBIERTA MARRON) (PROPIETARIO YO))
YO	((ES UN PERSONA))
CUERO	((ES UN TABACO))
ASIENTO	((ES PARTE DE SILLA))

Figura 4.6 *Representación LISP de una red Semántica*

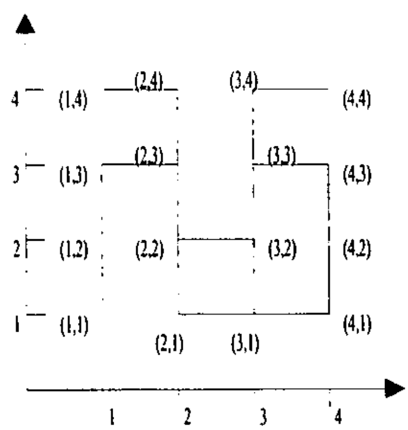
Como se había mencionado anteriormente, para encontrar la respuesta de una pregunta realizada al SE, se hace una búsqueda para hallar las relaciones que proporcionen la solución a tal pregunta. Se puede buscar la solución tantendo entre las acciones aplicables al problema hasta encontrar una secuencia de ellas que conduzca a la solución. Por ejemplo, considérese el problema de cruzar un pequeño laberinto como el de la figura 4.7



Situados en la entrada del laberinto se desconoce en principio el camino que conduce a la salida y, por tanto, no hay más remedio que buscarlo probando y rectificando.

Figura 4.7 *Laberinto con una entrada y una salida*

La figura 4.8 representa, mediante coordenadas, las posiciones posibles de una persona en el laberinto. Inicialmente parte la persona del punto (1 1) -estado inicial- y debe alcanzar el punto (4,4) o estado final, pasando por una serie de estados intermedios que son mostrados en la figura 4.8.



El conjunto total de estados y de acciones posibles que tiene el plano de coordenadas, se puede representar mediante una gráfica (véase la figura 4.9), donde los nodos de la gráfica representan las posiciones o estados posibles del problema (se refiere a cada intersección en el plano de coordenadas). Los arcos representan los desplazamientos o trancisiones entre estados. El valor o costo de los desplazamientos viene indicado por un número en mitad del arco. De esta forma la gráfica representa lo que es el *espacio de búsqueda*: el conjunto de estados posibles y de transiciones entre estados.

Figura 4.8 *Representación mediante coordenadas del laberinto*

Los caminos solución son secuencias de trancisiones que conducen del estado inicial al estado final. Existe más de un camino solución, cada uno con una distancia total recorrida o costo total. En general interesa buscar el camino óptimo.

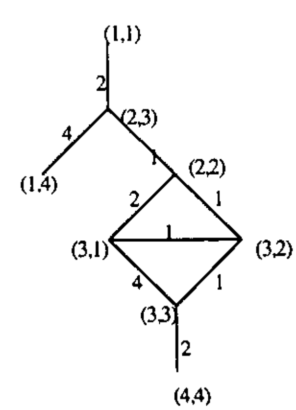


Fig. 4.9 Gráfica de estados y acciones

El procedimiento de búsqueda podría consistir en el siguiente ciclo: situados en un estado cualquiera -inicialmente (1,1)-, primero elegir una transición entre los posibles estados; segundo, realizar la transición y acceder al estado siguiente, tercero, memorizar dicho estado y, por último, comprobar si dicho estado es el estado final; en caso negativo, tenemos que volver a empezar el ciclo. Este es el ciclo de búsqueda o tambien llamado *ciclo de control*, el cual busca la solución del problema.

El ciclo de control de un procedimiento de búsqueda es la secuencia de pasos a realizar para generar un nuevo estado dentro del espacio de los estados o espacio de búsqueda. Existen diferentes tipos de estrategias de control, en las cuales se distinguen dos tipos principales: *las irrevocables y las tentativas*. Dentro de las estrategias tentativas se encuentran las técnicas: *retroceso en camino único y búsqueda en grafos*[19].

La estrategia de control en gráfos conserva en memoria el conjunto de todos los estados generados y las transiciones entre ellos, cuyo conjunto constituye una gráfica. Todos los nodos de la gráfica son candidatos para continuar la búsqueda en cada ciclo.

El proceso de generación de una gráfica de búsqueda puede ser definida esquemáticamente como sigue:

Procedimiento general de búsqueda en gráficas

INICIALIZACION	1. Crear una gráfica G con sólo el nodo inicial S. Colocar S en lista llamada ABIERTA.
	2. Inicializar lista vacía, llamarla CERRADA
TERMINAR FRACASO	3. LOOP:Si ABIERTA = $\varnothing$ terminar con fracaso
SELECCION	4. Sacar primer nodo $\in$ ABIERTA y colocarlo en CERRADA. Llamarlo *n*.
TERMINACION CON EXITO	5. Si *n* es un nodo objetivo (terminal) terminar con éxito y dar solución siguiendo el camino desde *n* hasta S indicado por los punteros (se introducen en paso 7)
EXPANSION	6. Expandir *n* generado el conjunto M de sus sucesores que no sean ya padres de *n*.
CONSTRUCCION Y ACTUALIZACION DE LA GRAFICA	7. Colocar un puntero hacia *n* para cada nodo de M que $\notin$ ABIERTA ni $\notin$ CERRADA y añadirlas a la lista ABIERTA. Para cada miembro de M $\in$ ABIERTA o $\in$ CERRADA decidir si hay que cambiar el puntero de sus sucesores.
	8. Reordenar la lista ABIERTA (heurística)
	9. Ir a LOOP (3)

[19] el término grafo se utiliza para denominar a una gráfica, es decir, son sinónimos ambos términos

El procedimiento genera la gráfica G y un árbol T[20] con los mismos nodos que G pero con la diferencia de que en T cada nodo tiene un único antecesor marcado por un único puntero. G contiene todos los caminos posibles desde el nodo inicial S hasta cualquier nodo *n*. T en cambio sólo contiene, para cada *n*, el de menos costo desde S hasta *n*.

El árbol T está definido por los punteros generados en el paso 7. El procedimiento termina con fracaso cuando la lista abierta esta vacía, lo cual significa que no se dispone de más nodos para expander y aún no se ha llegado al estado o nodo final.

Si en lugar de una gráfica se tiene un árbol, entonces los pasos 6 y 7 son más sencillos, ya que ninguno de los sucesores de un nodo dado puede haber sido generado anteriormente, por lo tanto no sería necesario el cambio de punteros en el paso 7.

Como se ve la Teoría de Gráficas participa en varias de las áreas concernientes de la inteligencia artificial, ayudándola a resolver problemas en forma visual (en este aspecto se refiere a las redes semánticas) o bien en la búsqueda de una solución (búsqueda de control).

[20] la teoría de arboles, recuerdese que se vio explícitamente en el capítulo 3 "Teoría de gráficas en la creación de redes."

5. CONCLUSIONES

Como se vio en el curso de la tesina, la Teoría de Gráficas es importante como técnica, la cual nos permite representar gráficamente un modelo que se podrá solucionar, ya sea con la misma Teoría de Gráficas o bien con otra rama de las matemáticas.

Esto es, la Teoría de Gráficas permite establecer gráficamente el panorama que presenta cualquier modelo o problema que se tenga que resolver, obteniendo así el entendimiento del mismo y que con ello, dejará ver de qué forma se tendrá que realizar el procedimiento que dará solución a dicho problema o modelo. Por ejemplo; en el capítulo 1 se vio la aplicación de la Teoría de Gráficas en la educación, donde se realizó la estructuración de dos cursos en uno solo, representando el problema mediante gráficas se ve la estructura de cada uno de los cursos y aplicando las operaciones de las gráficas (la unión y la suma-anillo específicamente) se logrará dicha estructuración sin la repetición de temas así como con la conclusión d la estructuración de los cursos.

Es importante difundir a la Teoría de Gráficas como una herramienta práctica en el curso de la carrera, que aunada a otras materias nor permitirán en un futuro mejorar la solución de problemas que quizás actualmente se realiza en forma empírica. Por ejemplo en la planeación, esta área es de las más importantes en cualquier empresa, donde no se utilizan (normalmente) técnicas para realizarla de forma que sea del entendimiento general de los usuarios de la empresa. En la Teoría de Gráficas existen métodos como el de la Ruta Crítica y el PERT, que permiten realizar la pleación de manera más efectiva, proporcionando además la forma de programar las actividades participantes así como de una optimización de los recursos materiales y humanos de ésta.

Otra área también importante donde se utiliza de manera efectiva la Teoría de Gráficas, son las redes. Estas se manifiestan como redes de computadoras, redes eléctricas, redes de transporte o sistemas de tráfico, etc., en las cuales la Teoría de Gráficas participa para solucionar la problemática que presenten en su realización o en el flujo de cada una.

Y dentro de la Inteligencia Artificial, y refiriendo en a los Sistemas Expertos, la Teoría de Gráficas participa en la representación del conocimiento mediante las redes de semántica, la cuales hacen la representación gráfica de este, permitiendo al experto humano diseñar adecuadamente la forma en que debe resolver problemas el Sistema Experto; aunque es una estructura complicada de programar, siendo ésta una limitante para su utilización.

Entonces, se puede concluir que la Teoría de Gráficas es una herramienta importante que se debe difundir entre los estudiantes de la carrera, para emplearla creativamente en la representación de modelos junto con otras herramientas o técnicas mátematicas, que permitirán favorecer la solución de problemas reales.

6. BIBLIOGRAFIA

- *Introducción a la Teoría de Gráficas en el campo de la Educación.* Donna Jackson Oliver Yy Ma. Dolores González Martínez. Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior. México, 1979
- *Graph Theory with Applications* J.A. Bondy and U.S.R. Murty. 1a. edición, 1976. Editorial The Macmillan Press Ltd. New Jersey
- *Enfoque de Sistemas en la Educación: Teoría de Gráficas* Javier Salazar Resines. Editorial Limusa. México, 1979
- *Métodos de Optimización. Programación Lineal - Gráficas* Fco. J. Jauffred M., Alberto Moreno Bonett y J. Jesús Acossta F. 1a. reimpresión. Editorial: Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A. México, 1974. Pags. 297 - 360
- *Graph Theory with Applications* L.R. Foulds. Editorial North Holland
- *Graph Theory* Frank Harary. Editorial Addison Wesley
- *Graph Theory an algorithmic approach* Nicos Cristofides. Academic, London, 1975
- *Graph Theory* Ronald Gould. Editorial Benjamin/Cumming
- *Graph Theory with applications to algorithms and computer science.* Y. Alav, G. Chartrand. Wiley Intescience Publicatión
- *Graphs as Mathematical Models* Gary Chartrand. Prindle, Weber & Schmidt, Incorporated. Boston, 1977
- *Método del Camino Crítico.* Catalytic Construction Company. Editorial Diana. México, 1970
- *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones. Vol. 1. Modelos Determinísticos.* Dr. Juan Prawda Witenberg. 7ª reimpresión, 1987. Editorial Limusa. pags 329-417
- *Técnicas del PERT aplicadas a la construcción. Tiempos/Costes* Manuel Sánchez Rodríguez. 3ª edición, Sep 1977. Ediciones CEAC, S.A. España. 1977
- *Network Flows. Theory, algorithms and* Ravindra K. Ahuja, Thomas L Magnanti and James B. Orlin

applications. — Editorial Prentice Hall
New Jersey, 1993

- *Graph and Networks* — Bernard Carré
Claredon Press, Oxford
1974
pags. 198-240

- *Graph Theory: application to the calculation of electrical networks* — Vago Itsva
Editorial: Elsevier, Amsterdam 1985

- *Associative Networks. Representation and use de Knowledge by computers* — Nicholas V, Findler
Academic Press. Inc.
1979, USA

- *Inteligencia Artificial* — Rich, E.
Colección Ciencia Informática
Ediciones Gustavo Gil, S.A.
Barcelona, 1988
págs. 227-234

- *A fondo: Sistemas Expertos.* — Luis E. Frenzel, Jr.
Traducción Fernando Cuellar Montes
Editorial Anaya Multimedia S.A.
1989

- *Sistemas Expertos: Aprendizaje e Incertidumbre* — Enrique Castillo y Elena Alvarez
Editorial Paraninfo
Madrid, España, 1989

- *The elements of Artificial Intelligence. Using Common LISP.* — Steven L. Tanimoto
University of Washington, Seattle
Computer Science Press
1990 (Cap. 5 Búsqueda 163-202)

- *Inteligencia Artificial. Conceptos, técnicas y aplicaciones* — J. Agustí y Cullell y Ramón López de Mántaras
Serie: mundo electrónico
Marcombo, Boixareu Editores

- *Expert Systems an applied Artificial Intelligence* — Efraim Turban
Macmillan, Canadá
1992.