



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ARTES PLASTICAS

"Opúsculo Poliédrico"

tesis que para obtener el título de
Licenciado en Diseño Gráfico

presenta

Abel / Rafael Moreno

México, D.F. Mayo 1998

TESIS CON
FOLIA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A MIS PADRES

Las ilustraciones que se indican fueron tomadas de las siguientes obras :

Fig.97 : " Determinative Mineralogy and Blowpipe Analysis " / Brush , H . , Penfield / John Wiley and sons / New York , E.U.A. / 1898 .

Fig.98 : " The Complete Encyclopedia of illustration " / Heck , J. G./Gramercy Books/ New Jersey , E.U.A. / 1996 .

Fig.99 : " Determinative Mineralogy ... " , ídem

Fig. 106 : "Fotogrametría Terrestre y Aérea " / Schwidofsky , K /Editorial Labor /Barcelona , España /1943 .

Fig. 110 : Archivo Personal

Lámina 1 : " Projective Ornament " / Bragdon , Claude /Dover/ New York , E.U.A./1992 .

Láminas 9 y 10 : " Introducción a la Cristalografía " / Phillips , F. C. / Paraninfo/ Madrid, España /1971 .

" Dana's Textbook Of Mineralogy " /Edward Salisbury Dana/John Wiley and sons / New York , E.U.A. /1932 .

" Mineralogy , An Introduction to the Study of Minerals and Crystals " / Kraus , Edward Henry ; Hunt , Walter Fred ; Ramsdell , Lewis Stephen / McGraw-Hill Book Company / York , Pa./ 1936 .

Todas las demás ilustraciones las elaboré con instrumentos de dibujo tradicionales .

índice

Introducción	1
Opúsculo Poliédrico	21
Ejemplos de aplicación	93

Índice

Introducción	1
Opúsculo Poliédrico	21
Ejemplos de aplicación	93

INTRODUCCION

Esta tesis se llama "Opúsculo Poliédrico" porque se trata de un trabajo con pequeña extensión que muestra algunas proposiciones y reflexiones mías sobre la geometría descriptiva y otras partes de la matemática, asuntos importantes para el diseño gráfico pues siendo ésta la "ciencia de la extensión" resulta ilógico prescindir de ella, tanto como si la geometría y la matemática pudieran evitarse mutuamente. El adjetivo "poliédrico" lo es en dos sentidos: se trata del estudio de los poliedros, i.e. el estudio de los sólidos clásicos de la geometría euclidiana, los que conocimos bien de entre los álbumes de recortes para hacer pirámides, prismas, cubos y muchos otros; de aquéllos que al ver la página impresa creía uno abanicos, pero en pocos minutos emergían como cristales si uno tenía suficiente curiosidad y paciencia, y si no le importaba mancharse de engrudo. Y en el otro sentido lo es por su intención de ser "multifacético", o sea que pudiera tener suficiente calidad para resolver muchas cuestiones gráficas.

Aunque el tema geométrico es anacrónico en el contexto que han desplegado aquéllos ingenios eficientes y proficientes, productos de las nuevas tecnologías (?), no lo es, afortunadamente, en el del humano pues estamos hablando de una disciplina que se ha practicado durante siglos sin variaciones y en su modo esencial, a saber, en la mente y en la tierra como lo hace sentir la misma palabra de origen griego. Pero insistir en el estudio de un tema trivial no debe ser motivo de encono para nadie. Si Spinoza logró exponer la ética según el método geométrico, ¿porqué no habríamos de hacer algo parecido, aún si el resultado es modesto?

La geometría de los poliedros, como auténtica "retórica visual", deja percibir esa suerte de "vocación" por lo humano. Reflexionemos un poco ¿acaso no se habían visto implícitos en el arte, sea en la ornamentación de una mezquita, o en el vitral de una catedral, evidenciando el carácter didáctico éste?, ¿y acaso la publicación de los tratados de la ciencia perspectiva y la edad del humanismo renacentista no fueron acontecimientos contemporáneos?, ¿acaso aquellos no fueron ilustrados con deleitables figuras al grabado de magníficos "mazzocchios" y cristales, que como símbolos indefectiblemente anunciaban nuevas luces al conocimiento?, ¿o en nuestro siglo entre los despojos que forman el "boneyard" de las civilizaciones que les llama Claude Bragdon a algunas intenciones que precedieron al diseño, no nos hace saber de la necesidad de escuadriñar en una gráfica de n-dimensiones?. Por eso, y tomando en cuenta como elementos las vicisitudes que han visto estos inquietantes entes geométricos a través del tiempo, bastará con que al final de mi trabajo obtenga por lo menos una

como "imagería" válida para inventar un diseño que coincida en ese espíritu del arte ; o para que funcione como réplica en función del diseño gráfico .

La aproximación al tema se antoja bien elemental : basta saber sumar , restar , multiplicar , dividir y radicar . Combinando estas operaciones como lo enseña el álgebra y la geometría , podremos cumplir una condición fundamental del diseño , viz . la representación gráfica .

Primero ¿qué son los poliedros? , ¿cómo estudiarlos? , ¿es aventurado pensar en una "praxis" (?) de los poliedros? . Una definición provisional sencilla : los poliedros son figuras geométricas sólidas compuestas únicamente por superficies planas . La definición completa será dada más adelante . La esencia de estos entes geométricos se puede advertir sin dificultad en casi cualquier lugar , en objetos creados por la naturaleza o construidos por el hombre : un cristal como primer ejemplo y un edificio como segundo dan ejemplos claros de que estamos relacionados con ellos de alguna manera .

Puedo decir que han instigado las más ingeniosas obras humanas y que con seguridad continuarán haciéndolo en el futuro . Un sistema en forma de pentaprisma , por ejemplo , resuelve en la cámara fotográfica moderna el paralaje entre los ejes de los lentes ocular y objetivo ; las cúpulas geodésicas inventadas por R. Buckminster Fuller con propósitos arquitectónicos resuelven la cuestión de envolver un volumen dado con mínimo material constructivo , además de estar construídas exclusivamente con triángulos , incrementando significativamente la eficiencia estructural en edificaciones conocida hasta entonces.

Sin duda es en el terreno del arte donde se reconoce con mayor frecuencia la grata presencia de los poliedros . Tropieza uno con ellos en los múltiples tratados de la incipiente ciencia perspectiva , en el famoso grabado "La melancolía" de Albrecht Dürer , en la marquetería del renacimiento italiano con el ejemplo de Fra Giovanni Da Verona , en el trabajo gráfico de Maurits Cornelis Escher ; o hasta en algunos ejemplos del arte escultórico de hoy día .

Los poliedros han sido claves para entender cómo funciona la naturaleza : radiolarios , polen , semillas , virus , minerales son en sentido lato poliedros. De entre todas las formas que conocemos o que la mente pudiera conjurar ¿cómo es que la naturaleza tiende a construir formas semejantes a poliedros en algunas de las soluciones que aplica en las manifestaciones morfológicas de su obra? ; una explicación radica en la relación que guarda la materia (expresada como forma (1)) y la energía : la sólo existencia significa consumo de energía , por éso es primordial en las estructuras orgánicas (y en

cierto modo también en las inorgánicas) desarrollar máxima eficiencia (motriz ,
protectiva , generativa , &c.) con el mínimo gasto de energía .

En el mundo mineral (no hay ejemplo más claro) , comprobaríamos de manera
experimental en un laboratorio , o también es fácil imaginar , que si las moléculas que
componen una sustancia "preferieran" alterar las distancias de enlace atómico , podrían
"escoger" el sistema cristalino en el cual cristalizar . Sabemos bien que una misma
sustancia cristalizada en distintos sistemas presenta propiedades químicas y físicas bien
distintas . Semejante operación insumiría una cantidad de energía superior en el sistema
monoclínico que en el cúbico , por ejemplo .

Démonos cuenta que distintas soluciones morfológicas adoptadas por diferentes
individuos obedecen a condicionantes específicas del ambiente o el lugar en que se hallan
, y por regla general resulta imposible reproducirlas en circunstancias distintas a las que
originalmente las establecieron . En consecuencia aparece la diversidad de forma en la
naturaleza . Las especies son , por así decirlo , variaciones sobre un mismo tema .

Eventualmente una solución de "diseño" natural llega a un nivel expresivo
denominado ingenuamente en términos humanos "belleza" , (concepto muy relativo que
se presta al prolongado debate) de la cual el hombre extrae inspiración y deleite . Sin
embargo , la belleza no es la finalidad de la naturaleza (no significa que ésta sea frugal en
hermosura y espectacularidad , más bien al contrario) ; de aquí el hombre concluye que
ella jamás hace algo en vano , y que tampoco organiza las cosas de manera gratuita , sin
una ordenación lógica y armónica , pues todo en ella es "medida".

Muchas civilizaciones de la antigüedad fueron particularmente sensibles y atentas a
estas manifestaciones , y lograron adaptar y aplicar esta expresión vital en la creación de
cánones y cartabones artísticos , además de utilizarlas como criterio para la
fundamentación formal de una arquitectura , una cerámica , una orfebrería , una lapidaria ,
&c.

Ejemplos clásicos se conocen de la Grecia antigua , a saber en su arquitectura : los
caracoles marinos y la hoja de acanto llegan a integrarse , con mínimas alteraciones
formales , como elementos ornamentales característicos en las fisonomías de las columnas
jónica y corintia .

Sir Theodore Cook menciona en su obra "The Curves of Life" que la parte cónica de
un caracol marino puede utilizarse para trazar la voluta propia del capitel jónico : basta
con enrollar un cordel en las estrías del caracol y anudar un lápiz en el otro extremo ;

colocando el caracol verticalmente se obtenía una espiral perfecta si se desenrollaba el cordel cuidadosamente (fig.1) .

¿Los poliedros han inspirado algo semejante? ; uno de los diálogos de Platón , el llamado "Timeo" registra lo que se debe considerar como el primer texto con reflexiones acerca de los poliedros . En el texto se puede interpretar que se define la estructura del universo : Ya que los elementos se consideran cuerpos , el Demiurgo , "aquel que ordena " (2) y a partir de una numerología elemental condensada en la "Lambda mística" (3) procede a inventar dos tipos de triángulos , uno recto isósceles y otro escaleno recto cuyo primer lado es la mitad de la hipotenusa . Uniendo estos triángulos de diversos modos logra construir un cuadrado y un triángulo equilátero . Reproduce el cubo que hace corresponder con el elemento tierra , el tetraedro que hace corresponder con el fuego , el octaedro que hace corresponder con el aire , el icosaedro que hace corresponder con el agua y al final sólo hace alusión al quintaesencial , el dodecaedro añadiendo "...dios utilizó (éste) para envolver al conjunto , haciendo un patrón de figuras animales (el zodiaco) en la superficie." (4) , pero es necesario decir que no está formado con los triángulos modelo . Debo agregar que el concepto de los elementos aparece antes que Platón y es posible que se deba a Empédocles . Y quizá por el mismo tiempo alguien en la Etruria construyó un dado con forma dodecaédrica inspirándose , seguramente , en los cristales de piritita que por ésa región eran abundantes .

Hombres dedicados a la ciencia y el arte hicieron uso de los poliedros . Contamos a Arquímedes de Siracusa ; luego a Campano de Novara en la edad media . Leonardo se ocupó de ellos ; Albrecht Dürer , Piero Della Francesca , Luca Pacioli también . A la vez del ánimo manierista y de la proliferación de tratados semejantes , el famoso orfebre nurembergués Wentzel Jamnitzer , asistido de la habilidad de Jost Amman los pone en su inquietante libro "Perspectiva Corporium Regularium" . Kepler armó la impresionante maqueta del universo inscribiendo los sólidos platónicos en sendas esferas concéntricas ajustadas con precisión crítica , y casi al mismo tiempo se tallaron en piedra para decorar unas tumbas en algún lugar de Inglaterra . Luego Nicolaus Steno y Haüy también , con tal de acercarse a la estructura interna de los cristales . Y en fin , pasando por L . Euler , Louis Poincaré , Alicia Boole Stott (hija del famoso George Boole) , llegamos hasta las indispensables triquiñuelas de Martin Gardner , comprobando que sobre ellos y otras cuestiones parecidas todavía se puede escribir .

Debido a que la geometría se encuentra sustentada en una base axiomática clara y que , por lo tanto , poco lugar encuentran interpretaciones o significados otorgados hasta cierto punto con arbitrariedad (como los que propone Wassily Kandinsky en su libro "Punkt und linie zu flache" ("Punto y línea sobre el plano") , acerca de puntos , líneas y otros elementos geométricos) , creo necesario retomar los axiomas de la geometría

euclidiana , si bien con imperceptibles cambios que no creo causen alguno de los conocidos caos geométricos . Esto dará apoyo a las construcciones que se harán en el resto del presente trabajo (5) .

1: punto es aquello que no tiene partes . Referido a otros puntos , éste solamente tiene posición .

2: se puede trazar una recta de un punto cualquiera a otro punto cualquiera .

3: se puede prolongar continuamente una recta finita en línea recta .

4: se puede describir una circunferencia con cualquier centro y con cualquier radio .

5: todos los ángulos rectos son iguales entre sí .

6: a través de un punto dado existe una sola paralela a una línea dada .

7: tres puntos distintos no colineales ; una recta y un punto , o dos rectas que se intersectan , determinan un plano .

8: si hay 5 puntos , 4 de ellos en el espacio de tres dimensiones existe uno que no está en ese espacio tridimensional .

Utilizaremos extensamente la geometría euclidiana , pero sin dejar de utilizar a otras igualmente importantes donde resulte conveniente . Pero no olvidemos que la clásica restricción al uso de la regla y el compás fué observada y respetada durante muchos siglos . El avance del conocimiento hizo que esta práctica desapareciera , conservándola , probablemente , algunos de los pocos artesanos dedicados a fabricar instrumentos sencillos como astrolabios y otros semejantes . En este trabajo insistiré en utilizar exclusivamente regla y compás , pues a excepción de contados casos las construcciones que haremos son básicamente cuadráticas , o sea podemos encontrar una media proporcional entre dos segmentos , pero no podemos construir dos medias proporcionales continuas , una sucesión de números general , un segmento que represente a un número resultado de una función trigonométrica y otros casos similares mediante un número finito de pasos o iteraciones de una sola construcción (6) .

Sabemos bien que los números racionales son los que se pueden representar en la forma A/B , con la condición de que A y B sean números enteros y $B \neq 0$. Si tenemos dos segmentos diferentes , y uno corresponde a la unidad , al otro le corresponde un número que puede ser racional o no , que se denomina longitud del segmento . Números expresados en la forma a/b o $\sqrt{a/b}$ pueden construirse cuadráticamente i.e. con regla y compás .

Si tenemos un segmento a y otro b , y trasladamos uno a continuación de otro sobre la misma línea , el segmento $a+b$ representará la suma gráfica de estos dos segmentos . Si tenemos un segmento a y otro $-b$ y procedemos de manera similar , obtenemos el segmento $a-b$ que representa la diferencia gráfica de estos dos segmentos (figs. 2 y 3) .

Consideremos dos rectas que se cortan . Si a partir del punto de intersección trazamos un segmento equivalente a la unidad sobre una cualquiera de las rectas y en la otra el que corresponde al primer factor , podemos unir sus extremos mediante una recta . Si ubicamos el extremo del segundo factor en la primera recta y trazamos una recta paralela a la primera que una los extremos del segmento unidad y el primer factor , intersectará a la línea en el extremo del segmento producto . Esto es la multiplicación gráfica . En la figura está representado el producto $3 \times 2 = 6$ (fig.4) .

El caso de la división es inverso al de la multiplicación , i.e. el dividendo corresponde al producto , el divisor al segundo factor y el primer factor al cociente .

Dividir un segmento en partes iguales es muy sencillo . Existen varios métodos a utilizar , unos muy evidentes , otros muy elegantes ; el que describo a continuación tiene la virtud no sólo de dividir un segmento sino también a cualquier rectángulo construido sobre él (de paso establece una hermosa teoría de proporciones caracterizada por expresar cantidades alícuotas) . Aparece en el cuaderno de Willars De Honnecourt , arquitecto y constructor oriundo del pueblo homónimo . Este mismo método de construcción se conocería con el nombre de "canon de los orfebres de Basilea" según dice Hans Kayser (7) .

En el rectángulo ABCD , a es el punto medio del lado AB ; la intersección entre DB y aC proporciona la división del lado AB en tres partes iguales , la intersección de D1 y aC proporciona la división en cuatro partes iguales , la intersección de D2 y aC proporciona la división en cinco partes iguales , y así sucesivamente (fig.5) .

Bajo la razón en que un punto C divide un segmento AB se entiende la relación AC/CB . Designémosla con la letra griega λ , $\lambda = AC/CB$, esta expresión que tiene el aspecto de una fracción tiene , además todas las propiedades de una fracción . La relación en la que el punto divide al segmento se compone de la siguiente manera : numerador a partir del origen hasta el punto divisorio c , denominador del punto divisorio c hasta el fin (fig. 6).

La igualdad de dos razones se denomina proporción . Si consideramos cuatro segmentos A , B , C y D se dice están relacionados mediante una proporción geométrica si $A/B = C/D$. Se llama discontinua en un caso general cuando A , B , C y D representan números diferentes , y se llama continua cuando dos de estos números son idénticos . La proporción típica es entonces $A/B = B/C$ o $B^2 = AC$.

$B = \sqrt{AC}$ es llamada media proporcional o media geométrica entre A y C . En la proporción $A/B=C/D$, A y D se denominan extremos , B y C medios . En una proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos , esto es $AXD=BXC$. La raíz cuadrada de un número A (y en consecuencia , del número que representa la longitud del segmento a considerar) es otro número tal que , multiplicado por sí mismo reproduce el número original A ; se representa \sqrt{A} .

Consideremos una proporción continua de tres términos , en la cual los extremos son la unidad y el número A . La raíz cuadrada es media proporcional entre el número A y la unidad , i.e. $A/\sqrt{A}=\sqrt{A}/1$. Lo anterior sugiere una construcción para obtener la raíz cuadrada gráficamente : construimos el segmento $A+1$ y sobre éste una semicircunferencia , por el extremo de A levantamos una perpendicular indefinida , según se observa , esta línea y la semicircunferencia se cortan en el extremo del segmento requerido \sqrt{A} (fig.7) .

Se denomina inverso o recíproco de un número , a otro que cumple con la siguiente condición : el número inverso multiplicado por el original reproduce la unidad . El inverso del número A se representa $1/A$. A esta relación entre números le corresponde una transformación (8) geométrica denominada inversión circular . Por definición , el punto inverso P de otro P' con respecto a un círculo , situados ambos sobre la misma línea OP' , es aquel cuya distancia al centro del círculo es igual a r^2/OP' , siendo r el radio del círculo ; si $r=1$ entonces $OP=1/OP'$. En la figura 8 te muestro la construcción geométrica de un punto inverso de otro (fig.8).

El concepto de reciprocidad tiene una importancia extraordinaria y adquiere máximo significado cuando se le encuentra dentro de la teoría de proporciones . Jay Hambidge concede amplio espacio dentro de su (indispensable) obra "The Elements of Dynamic Symmetry" al concepto , y expone claramente las asombrosas relaciones numéricas y geométricas que surgen de la interacción de la diagonal de un rectángulo con la perpendicular trazada desde cualquier vértice . Las propiedades de estas líneas logran la unidad entre las simetrías denominadas por él como "estática" y "dinámica" . Supongamos que tenemos un rectángulo abcd y la relación entre el lado ac al cd es , digamos , como la unidad al número 2 . Tracemos la diagonal cb y luego la perpendicular am a cb ; tenemos que el segmento cm representa el número recíproco a aquel que representa el segmento cd , en este caso $cm=1/2$ y $cd=2$ (fig.9) .

Es de vital importancia considerar que los segmentos mc , ac y ab guardan una relación constante , es decir , que sus longitudes están en progresión geométrica .

¿Existe un rectángulo tal que , al restarle un cuadrado (la unidad) , obtengamos su recíproco? , la respuesta es afirmativa como el mismo Hambidge demuestra y la denomina "rectángulo de los cuadrados rotantes" pues la construcción que permite determinarlos se repite indefinidamente dentro del rectángulo . No es otro que el "rectángulo áureo" . El valor numérico que relaciona los lados de este rectángulo , como es bien sabido , está expresado por un número irracional raíz principal de la ecuación $X^2-X-1=0$, y , siguiendo el ejemplo de Matila Ghyka y H.E.Huntley se reconoce con la letra "f" minúscula del alfabeto griego . así $\phi = (\sqrt{5} + 1) / 2 = 1.6180339887...$

Las funciones trigonométricas nos serán de mucha utilidad y las comprenderemos mejor si pensamos en ellas en términos de divisiones indicadas o fracciones (fracciones propias en el caso del seno y el coseno , e indistintamente propias e impropias en el caso de la tangente) (9) , formadas por los números que representan las longitudes de los elementos lineales de un triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) en función de la abertura de los ángulos del mismo .

En la figura 10 , α es el ángulo del cual obtendremos las funciones seno , coseno y tangente ; a representa la hipotenusa , b el cateto opuesto al ángulo y c el cateto adyacente :

$$\text{sen } \alpha = b/a ; \text{cos } \alpha = c/a ; \text{tan } \alpha = b/c$$

Una matriz se define como el arreglo rectangular de números dispuestos en "m" filas y "n" columnas . Ejemplos de matrices son las siguientes ,

				0	-2	1	3/2		
a) 2	3	b)	1	2	-1	1	2	3	0
			3	0	3	0	5/4	2	0
						4	6	7	-3

Cada uno de estos números se les denomina elementos .Una matriz se denota con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas :

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} \\
 & & & & \cdot \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} \\
 & & & & \cdot \\
 |A| = |a_{ij}| = & & & & \cdot
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & &
 \end{array}$$

El subíndice i indica el número de la fila y el subíndice j el número de la columna . El orden o dimensión de una matriz está dado por el número de filas y columnas , así la matriz con m filas y n columnas es de orden $m \times n$. Si una matriz tiene solo una fila se la denomina matriz fila o vector fila y si tiene una sola columna se la denomina matriz columna o vector columna . Así , en los ejemplos :

a) se trata de un vector fila , b) es una "matriz cuadrada" debida a que el número de filas coincide con el de columnas . Se dice que es de orden 2×2 , c) es un vector columna , d) es de orden 4×4 .

Existen muchas operaciones matemáticas posibles con las matrices , y de entre éstas utilizaremos la multiplicación que , como se hará evidente , es la que permite un tránsito fácil entre el trazo y el número . Tomemos una matriz de orden $n \times m$ y una segunda matriz de orden $r \times s$. Para que la multiplicación esté definida , el valor de m debe ser igual al de r , i.e. el número de columnas en la primera matriz debe ser igual al número de filas en la segunda matriz . Así , en un caso general , si $|A|$ es una matriz de dimensión 4×3 y $|B|$ es una matriz de dimensión 3×3 , el producto $|A \times B|$ es una matriz de dimensión 4×3 definido por

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\
 & & & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\
 |A| \times |B| = |A \times B| = & & & b_{21} & b_{22} & b_{23} & = \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\
 & & & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\
a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \\
a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32} & a_{41}b_{13}+a_{42}b_{23}+a_{43}b_{33} .
\end{array}$$

Como se puede notar , es indispensable utilizar matrices ; conviene hacer una visita a esos libros que tienen alguna introducción al tema .

Puede decirse que no tienen nada que ver con la representación gráfica y menos con el diseño gráfico . ¡Insidioso error! : ¡ una expresión matemática y su correspondiente gráfica son lo mismo ! . Cada número en la matriz denota una de las coordenadas del extremo del vector que une el origen con cada uno de los vértices de una figura .

Tradicionalmente es en el espacio bidimensional (el plano) donde se desarrolla la gráfica y el diseño como tales ; en consecuencia se impone tratar la interacción de la geometría y el diseño como operaciones de simetría en el plano . Posteriormente veremos que sucede en el espacio tridimensional .

El plano es el espacio de dos dimensiones , es decir , existe longitud y anchura pero no espesor . Una discusión completa acerca del plano y sus propiedades sería , cosa ambiciosa y no exenta de cuestiones que por sí solas serían objeto de otro trabajo , por lo tanto intentaré tratar únicamente con cosas que tienen , considero , relación más inmediata con nuestros propósitos .

" ... Como Bruno Ernst explicaba ' en un principio una división regular del plano es un rompecabezas con piezas idénticas ' . Por idénticas quiere decir 'congruentes' ya sea directamente u opuestamente . En el segundo caso una pieza de rompecabezas se puede remover del plano y voltearse de atrás para adelante . "

" La transformación que relaciona dos figuras congruentes se llama isometría . Las isometrías que transforman un patrón en sí mismo son llamadas operaciones de simetría del patrón . "

" Cada isometría directa es o , una traslación o una rotación . Si las operaciones de simetría del patrón incluyen traslaciones en dos diferentes direcciones , la famosa

'restricción cristalográfica' muestra que los únicos periodos admisibles para una rotación son 2, 3, 4 y 6; una rotación binaria (i.e. de periodo 2) o sea de 180° naturalmente se llama media vuelta, similarmente una rotación cuaternaria (de 90°) es un cuarto de vuelta.

" Cada isometría opuesta es, o una reflexión (la cual intercambia dos semiplanos (10) separados por una línea recta llamada espejo) o una reflexión en deslizamiento: es la misma relación entre dos huellas sucesivas en un camino nevado recto ... "

" El término región fundamental (11) está usado para un motivo el cual está repetido en todo el plano, esto es, para una pieza típica de un rompecabezas infinito. Ya que las piezas son todas iguales, la única estrategia de armado consiste en la elección de una isometría adecuada para localizar cada nueva pieza ... En los patrones utilizados por los moros en sus decoraciones de la Alhambra, la región fundamental es siempre una figura geométrica, como un polígono, pues el segundo mandamiento prohibía el uso de 'cualquier semejanza cosa en el cielo arriba, o que está entre la tierra, o que está en el agua bajo tierra'. " (12).

Esta explicación de la simetría en el plano, fué hecha por Harold Scott Mc Donald Coxeter, reconocida autoridad sobre el tema, y es notable por su sencillez y exactitud.

Coxeter define lo siguiente: la isometría es una transformación (13) en la cual existe una correspondencia uno a uno $P \rightarrow P'$ entre todos los puntos del plano (o del espacio); estos pares de puntos se componen de un primer miembro de un solo par y también como el segundo miembro de cada par. Una isometría (o transformación congruente) es una transformación que preserva la longitud.

La simetría es el resultado de aplicar ciertas isometrías que dejan invariable a una figura entera, mientras se permutan sus partes. Una operación de simetría se aplica a determinada figura y no tanto a todo el plano: es una simetría que transforma la figura en otra que es ella misma (14).

Por supuesto, podremos considerar una figura como un eventual gráfico, una red o retícula que la sustenta, cualquier envolvente, una línea limítrofe o un simple perímetro definidos por sus correspondientes coordenadas o los vectores que los unen a un punto fijo.

Consideremos las coordenadas homogéneas (15) de un vector $|X|$ que representa a un punto, y la matriz de transformación $|T|$,

$$|T| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

multipliquemos $|X|$ por $|T|$,

$$|X| X |T| = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X^* Y^* 1 = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde los asteriscos quedan por las nuevas coordenadas homogéneas después de la transformación ; se deduce que no se alteraron . La matriz $|T|$ es una matriz de identidad . La identidad es una isometría que deja todos los puntos de la figura invariantes .

m y n son factores de traslación en dos direcciones distintas ambas paralelas a cada uno de los ejes cartesianos x e y respectivamente . La transformación denominada traslación es ,

$$|X| X |T| = \begin{pmatrix} X & Y & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix} = X^* Y^* 1 = \begin{pmatrix} X+m & Y+n & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}$$

Pueden efectuarse un número indeterminado de veces sucesivas la misma o distintas operaciones matriciales , pero el orden bajo el cual son aplicadas debe precisarse con atención . De una secuencia de operaciones matriciales se puede obtener una sola después de multiplicarlas , a esto se le denomina concatenación .

La rotación alrededor del origen tiene el siguiente aspecto ,

$$X|X|T| = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X^* & Y^* & 1 \\ \cos \tau & \sin \tau & 0 \\ -\sin \tau & \cos \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$| X \cos \tau - Y \sin \tau \quad X \sin \tau + Y \cos \tau \quad 1 |$$

siendo τ el ángulo que existe entre la recta que une el origen con el punto X, Y y la recta que une el origen con el punto transformado X^*, Y^* (fig. 11). El determinante de una matriz de rotación es idénticamente igual a $+1$.

Hemos visto las simetrías directas. La reflexión y la reflexión en deslizamiento son isometrías opuestas. Las matrices de reflexión son:

alrededor de la línea $y = 0$, i.e. el eje X ,

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

alrededor de la línea $x = 0$, i.e. el eje Y ,

$$|T| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

alrededor de la línea $y = x$

$$|T| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

cada una de estas matrices tienen sus determinantes idénticos con -1 .

Todas las operaciones de simetría pueden aplicarse en diferentes elementos del plano distintos a los ejes principales, vgr. se puede reflejar en una recta cualquiera del plano, rotar en un punto cualquiera del plano, &c. y para lograrlo debemos concatenar las operaciones en la secuencia deseada.

La homotecia o dilatación (¡ que no es una isometría !) se obtiene si los elementos diagonales (a_{11} , a_{22}) de la matriz secundaria (submatriz) 2X2 de la matriz de transformación son idénticos y el término diagonal restante (a_{33}) es 1. El aspecto de la matriz es el siguiente :

$$|T| = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $K = a_{11} = a_{22}$ un coeficiente mayor o menor que la unidad que produce una extensión o una dilatación respectivamente.

Se obtiene una distorsión cuando los elementos diagonales de una matriz de transformación son distintos y los elementos del resto son idénticos con cero ; el aspecto de la matriz :

$$|T| = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dilatación es una homeometría, la distorsión una catametria. Ahora, sí dividimos la matriz general de dimensión 3X3 en cuatro partes como se muestra,

$$|T| = \begin{pmatrix} a & b & . & p \\ & & . & \\ c & d & . & q \\ . & . & . & . \\ m & n & . & s \end{pmatrix}$$

observaremos que los elementos a , b , c y d producen la rotación, la reflexión, la distorsión; m y n la traslación y el elemento s provoca una extensión general o controla la escala general; los elementos p y q como veremos adelante producen la proyección en el espacio tridimensional (16).

Añadiré que los números complejos surgen en este momento: la simetría es posible debido a las operaciones aritméticas "extendidas" en el plano complejo.

Ciclotomía, etimológicamente, es una palabra compuesta por las griegas antiguas $\kappaυκλoσ$ y $τομη$ y significa "cortar un círculo". "Cortar" un círculo en partes iguales genera los polígonos regulares. un polígono convexo se describe como la región finita de un plano "rodeada" por un número finito de rectas en el sentido de que su interior queda por completo a un lado de cada recta; regular quiere significar que los lados y ángulos de un polígono son todos idénticos. Un polígono regular tiene los ángulos en el vértice y los lados iguales y por lo tanto se puede inscribir en un círculo.

Carl F. Gauss demostró completamente a la edad de 19 años que se puede construir euclidianamente (otra manera de referirse a las construcciones con regla y compás), un polígono regular de " n " lados (dividir la circunferencia en n partes iguales) cuando y solamente cuando:

1) $n = 2^p$, siendo p número natural,

2) n es número primo de la forma $2^k + 1$

3) n es producto de factores diferentes de esta clase, i.e. de la forma

$2^p (2^q + 1) (2^r + 1) \dots$ siendo $2^k + 1, 2^r + 1 \dots$ números primos distintos. Así ni el eneágono ($n = 9 = 3 \times 3$) ni el polígono de 18 lados ($n = 18 = 2 \times 3 \times 3$) se pueden construir rigurosamente porque 3, aunque satisfaciendo la condición 2 ($3 = 2^1 + 1$), está repetido dos veces (17).

Los únicos polígonos construibles cuadráticamente son los de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24... lados, pero no así los de 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25... lados.

La explicación a esta inesperada "escasez" de polígonos regulares construibles euclidianamente, yace directamente en la teoría de los números complejos. Como mencioné las operaciones de geometría se las puede interpretar simultáneamente como operaciones aritméticas en el plano complejo. La ecuación ciclotómica $z^n = 1$, tiene

sus raíces representables por combinación de radicales cuando se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 de la ciclotomía .

Toda esta discusión parece difícil y ardua , sin embargo es sencilla de dominar con un poco de vehemencia y curiosidad . Es menester entenderlo y manejarlo así , como se acostumbra en geometría , y sirve para que nadie pueda refutar la exactitud y el rigor de nuestras construcciones : es imposible concebir la teoría de los poliedros sin el auxilio de estos conceptos y relaciones . Y ciertamente sería deseable concebir la gráfica en términos de "rigor" y "exactitud" . Cabe una reflexión : pienso que pocas ocasiones apelamos a nuestra capacidad de asombro , cualidad que preferimos ignorar , y quizá por eso toda geometría y toda expresión parece insulsa ; resulta admirable no obstante que toda la teoría de transformaciones geométricas pueda unificarse eficazmente en términos de llanas operaciones aritméticas y algebraicas . Nos convenceremos , después del "festín visual " , que la eterna seducción de las matemáticas prueba ser mayor que cualquiera de nuestros escépticos argumentos .

Aplicando la rotación de un punto al rededor del origen sobre una circunferencia , obtendremos las coordenadas de los vértices del triángulo equilátero , cuadrado , pentágono , hexágono , octágono y decágono (los únicos polígonos que intervienen en las fisonomías de los poliedros regulares y semirregulares) añadiendo el dodecágono (que interviene junto con éstos , con la posible excepción del pentágono y decágono , en las fisonomías de algunas "redes") , en el plano cartesiano . También constataremos que la presencia de números importantes como ϕ , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ &c. introduce un "tema de proporción" ; esto significa "simetría integral" en el caso de un poliedro . Introduciremos otros números notables v.gr. $\sqrt{\phi+2} = 2 [\cos (\pi/10)] = 1.90211303 \dots$

Hallé este último mientras calculaba las constantes métricas de un poliedro irregular que por cierto exhibo en la parte final de mi tesis . Pensé en ponerle un nombre o un símbolo especial para identificarlo , pero al final decidí dejarlo así . Estuve tentado en ponerle el número " ψ " debido a que siempre aparecía como factor entre las propiedades métricas de poliedros con simetría quinaria puesto que es el doble de la línea de proyección del ángulo central de un icosaedro , o la raíz cuadrada de la sección áurea mas dos unidades ; por lo tanto no es difícil explicar el "deleite" que causa en la "mente" encontrarlo en el lugar menos esperado . pero sus máximas bondades se ven claramente cuando se relaciona con la sección áurea , como veremos adelante .

En la tabla 1 está escrito el valor del ángulo de rotación para cada uno de los polígonos propuestos y las coordenadas de sus vértices .

Tabla 1

ángulo	polígono	
$2\pi/3$	triángulo	$(0,1) (-\sqrt{3}/2) ((\sqrt{3})/2)$
$\pi/2$	cuadrado	$(0,1) (-1,0) (0,-1) (1,0)$
$2\pi/5$	pentágono	$(0,1) (-\sqrt{(\phi+2)}/2, 1/(\sqrt{5+1})) (-\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), -\phi/2)$ $(\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), -\phi/2) (\sqrt{(\phi+2)}/2, 1/(\sqrt{5+1}))$
$\pi/3$	hexágono	$(0,1) (-\sqrt{3}/2, 1/2) (-\sqrt{3}/2, -1/2) (0,-1) (\sqrt{3}/2, -1/2)$ $(\sqrt{3}/2, 1/2)$
$\pi/4$	octágono	$(0,1) (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) (-1,0) (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) (0,-1)$ $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) (1,0) (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
$\pi/5$	decágono	$(0,1) (-\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), \phi/2) (-\sqrt{(\phi+2)}/2, 1/(\sqrt{5+1}))$ $(-\sqrt{(\phi+2)}/2, -1/(\sqrt{5+1})) (-\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), -\phi/2)$ $(0,-1) (\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), -\phi/2) (\sqrt{(\phi+2)}/2, -1/(\sqrt{5+1}))$ $(\sqrt{(\phi+2)}/2, 1/(\sqrt{5+1})) (\sqrt{(\phi+2)}/(\sqrt{5+1}), \phi/2)$
$\pi/6$	dodecágono	$(0,1) (-1/2, \sqrt{3}/2) (-\sqrt{3}/2, 1/2) (-1,0) (-\sqrt{3}/2, -1/2) (-1/2, \sqrt{3}/2)$ $(0,-1) (1/2, -\sqrt{3}/2) (\sqrt{3}/2, -1/2) (1,0) (\sqrt{3}/2, 1/2) (1/2, \sqrt{3}/2)$



Ya que la medida de un ángulo inscrito en la circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que sustenta el mismo arco (fig. 12) encontramos que , cuando en cualquier polígono regular unimos mediante una recta cualquier vértice con los demás restantes , el ángulo entre cada una de las diagonales así obtenidas es el mismo , pues los arcos en que queda dividida la circunferencia son congruentes . También inferimos que la relación entre un polígono de n lados y uno de $2n$ lados se clarifica al considerar sus ángulos centrales e inscritos ; concretamente , el ángulo inscrito del polígono de n lados coincide con el ángulo central del que tiene $2n$ lados (fig. 13) .

Tomando en cuenta esta relación , podemos dibujar múltiples formas de polígonos , destacando entre ellos unos que son conocidos genéricamente bajo el nombre de "polígonos estrellados" aunque sin mayor fundamento que el que puede dar la costumbre ; el término estrella pertenece a otro concepto que más adelante revisaremos . Por lo que a polígonos regulares concierne , será recomendable llamarles pentagrama , hexagrama , octagrama , &c.

Mediante el proceso geométrico llamado (con cierta incorrección) estrellamiento se pueden obtener otros polígonos . Junto con éste existe otro correspondiente denominado truncamiento . Se dice que el proceso de estrellamiento y truncamiento son mutuamente recíprocos o duales , i.e. a la acción de uno corresponde una en el otro en sentido inverso (en el sentido geométrico) . Me refiero a ellos como "procesos" porque como se verá en su oportunidad , si se contempla al tiempo como un "eje cartesiano extra" , esa transformación dinámica puede "segmentarse" e interpretarse a cada instante como generador de formas .

El estrellamiento (insisto , nada que ver con el concepto que veremos) de un polígono se puede lograr haciéndolo extender los lados de los polígonos convexos hasta que se corten de nuevo , tantas veces como sea posible ; o trazando en sus interiores , cíclicamente , las diagonales en un sólo circuito hasta llegar a un vértice inicial . En el truncamiento cortamos los vértices del polígono o extendemos determinados lados para obtener algún otro polígono (figs. 14 a , b , c y d) .

No todos los polígonos "n-gramas" aparecen en los poliedros y poco o nada de espacio ocupan dentro de nuestras discusiones ; por ejemplo el hexagrama se compone realmente de dos triángulos superpuestos con distintas orientaciones .

Max Brückner exhibe muchos polígonos en su libro " Vielecke und Vielfache ..." , obra sobresaliente y bella . Me permito reproducir algunos de ellos (figs. 15 a , b , c , d y e) .

Muchas veces es útil pensar en los polígonos como si fueran representaciones de sumas de vectores , de modo que los lados representan sumandos cuya suma es cero .

Es claro que existe un número infinito de polígonos irregulares .

Reservo el estudio de las transformaciones en el espacio de tres dimensiones más adelante según aparezca el tema pertinente , a fin de ganar en claridad y proveer más ejemplos .

OPUSCULO POLIEDRICO

Para apreciar los poliedros es indispensable contar con ingenuidad y paciencia ; para utilizarlos , la devoción y el pathos por el asombro .

El sentido común nos obliga a pensar que el asunto de los poliedros queda agotado al hacer una escueta y superficial exégesis de las propiedades y relaciones que cada uno de ellos revela , obteniendo en el mejor de los casos un texto corto , sin trazas de ambición y en consecuencia sin mayor atractivo .

La intuición , sin embargo , y por alguna desconocida razón , nos insinúa que el terreno es en realidad inconmensurable y que dentro de su intensa topografía existen meandros extraños y estimulantes , llenos de eclosiones geométricas y delirantes vórtices algebraicos .

El sereno e inefable arte de los poliedros , emerge diáfano y sonoro , tiene la precisión del movimiento de los cuerpos celestes , espléndido en sencillez y opulencia ; su retórica , meliflua y laudable coincide con la de un paisaje onírico , la de un pequeño grabado , la del discurso museográfico . . .

Mandalas , fosfenos , bodegones irrisorios , emociones vitrificadas , escaleras sin destino . . .

Cuando hacemos poliedros estamos haciendo tres cosas a la vez : geometría , una artesanía si es en el modo tridimensional ; y si se representan en el plano también , diseño gráfico . ¿ Cómo explicar que el diseño gráfico y una geometría singular que por sí sola llega a ser un arte pueden estar relacionados , además de manera productiva ? . Para empezar la idea no es nueva . Claude Bragdon la hace evidente en el dibujo que me permito reproducir en la lámina 1 . Si bien el diseño gráfico se caracteriza por tener por elementos esenciales formato , color , tipografía y eventualmente forma , ¿ qué es el formato sino una relación entre dos números ? , ¿ qué es el color sino una cantidad escalar ? y la tipografía ¿ no es geométrica ? (ver Dürer , Tory , &c.) ; o bien , ¿ que hay de las garantías geométricas en el empaque moderno y no ? . Bragdon hace ornamentación en el contexto de la arquitectura ¿ no ? . Pues no . No únicamente . Véase la relativa desvinculación del diseño gráfico moderno con una parte fundamental de la expresión integral humana : El oficio , el haber sido alguna vez "aprendiz" de diseñador ; el dominio de una artesanía (así se proponía en la Bauhaus) , para extraer de la materia la disertación indefectible de los objetos y hacerla funcionar en contextos disímiles . Así , y sólo así , es posible llegar a la abstracción ; habiendo pasado por lo corpóreo y lo tangible . Entonces la " unidad " geometría-artesanía , es con el diseño gráfico no como dicotomía

. Debe interpretarse como " alternativa " (lo digo a mi pesar por la connotación que ha adquirido la palabra) , para ponerlo a satisfacción de los más virulentos adversarios ; que no es , por supuesto , mi principal preocupación .

" Un poliedro es un conjunto finito y conexo de polígonos planos tales que , todo lado de cada polígono pertenece también a únicamente otro polígono con la condición de que los polígonos que rodean cada vértice formen un circuito sencillo (para excluir anomalías tales como dos pirámides con una punta común) , los polígonos se llaman caras y sus lados aristas . . . entonces el poliedro forma una superficie cerrada y descompone el espacio en dos regiones una de las cuales llamada interior es finita . " (18) .

"Un poliedro convexo se dice regular si todas sus caras son regulares e iguales mientras sus vértices son todos rodeados de manera idéntica . " (19) .

Existen nueve poliedros regulares en el espacio de tres dimensiones . Si tomamos en cuenta que el número de polígonos regulares en el plano es infinito , la afirmación parece inesperada y sorprendente . Hay muchas maneras de demostrarla , pero debido al poco espacio y a mi escasa pericia en semejantes empresas , opté por omitirla .

Los poliedros regulares son , a saber : el tetraedro , formado con cuatro caras triangulares equiláteras congruentes ; el hexaedro (o cubo) formado con seis caras cuadradas congruentes ; el octaedro , formado con ocho caras triangulares equiláteras congruentes ; el dodecaedro , formado con doce caras pentagonales regulares congruentes ; y el icosaedro , formado con veinte caras triangulares equiláteras congruentes . Estos son los llamados "sólidos platónicos" pues el filósofo griego de la antigüedad , Platón , fué el primero en ocuparse de ellos . Hay que agregar que son poliedros convexos , es decir , los ángulos diedros que forman cada par de caras adyacentes a una arista , son siempre menores que π .

Los cuatro restantes , aunque también convexos , no tienen la apariencia de serlo ; no obstante siguen siendo regulares : dos de ellos están formados con pentagramas regulares , otro con pentágonos regulares , y otro con triángulos equiláteros ; los vértices que exhiben tienen una disposición idéntica sin excepción, en consecuencia se trata de poliedros regulares . Es interesante advertir que presentan simetría reflexiva y de rotación en coincidencia con la del icosaedro (con la del grupo del icosaedro (20)) . Esta simetría de orden 5 se llama quinario .

El pequeño dodecaedro estrellado está formado con doce pentagramas , el gran dodecaedro con doce pentágonos regulares , el gran dodecaedro estrellado con doce pentagramas y el gran icosaedro con veinte triángulos equiláteros .

En la lámina 2 puede apreciarse el conjunto de los poliedros platónicos .

Las coordenadas de los vértices (o vectores de posición) del tetraedro con longitud de arista igual a la unidad (fig 16) (21) ,

$$1/2\sqrt{2} \quad 1/2\sqrt{2} \quad 1/2\sqrt{2} \quad 1$$

El símbolo {3,3} para el tetraedro quiere decir que tiene caras triangulares , tres rodeando cada vértice .

Las coordenadas de los vértices del hexaedro con longitud de arista igual a la unidad (fig .17) ,

$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
$1/2$	$1/2$	$-1/2$	1
$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	1
$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1
$1/2$	$-1/2$	$1/2$	1
$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1
$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1
$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	1

Su símbolo es $\{4,3\}$.

Las coordenadas de los vértices del octaedro de arista igual a la unidad (fig. 18) ,

$1/\sqrt{2}$	0	0	1
0	$1/\sqrt{2}$	0	1
0	0	$1/\sqrt{2}$	1
$-1/\sqrt{2}$	0	0	1
0	0	$-1/\sqrt{2}$	1
0	$-1/\sqrt{2}$	0	1 ,

Su símbolo es $\{3,4\}$.

Las coordenadas de los vértices del dodecaedro de longitud de arista igual a la unidad (fig. 19)

$\phi/2$	$\phi/2$	$\phi/2$	1
$\phi^2/2$	1/2	0	1
$\phi/2$	$\phi/2$	$-\phi/2$	1
0	$\phi^2/2$	-1/2	1
0	$\phi^2/2$	1/2	1
1/2	0	$\phi^2/2$	1
$\phi^2/2$	-1/2	0	1
1/2	0	$-\phi^2/2$	1
$-\phi/2$	$\phi/2$	$-\phi/2$	1
$-\phi/2$	$\phi/2$	$\phi/2$	1
-1/2	0	$\phi^2/2$	1
$\phi/2$	$-\phi/2$	$\phi/2$	1
$\phi/2$	$-\phi/2$	$-\phi/2$	1
-1/2	0	$-\phi^2/2$	1
$-\phi^2/2$	1/2	0	1
$-\phi^2/2$	-1/2	0	1
$-\phi/2$	$-\phi/2$	$\phi/2$	1
0	$-\phi^2/2$	1/2	1
0	$-\phi^2/2$	-1/2	1

$$-\phi/2 \quad -\phi/2 \quad -\phi/2 \quad 1$$

Su símbolo es $\{5,3\}$.

Las coordenadas de los vértices del icosaedro con longitud de arista igual a la unidad (fig. 20)

0	$\phi/2$	1/2	1
$\phi/2$	1/2	0	1
0	$\phi/2$	-1/2	1
1/2	0	$\phi/2$	1
$\phi/2$	-1/2	0	1
1/2	0	$-\phi/2$	1
-1/2	0	$-\phi/2$	1
$-\phi/2$	1/2	0	1
-1/2	0	$\phi/2$	1
0	$-\phi/2$	1/2	1
0	$-\phi/2$	-1/2	1
$-\phi/2$	-1/2	0	1

Su símbolo $\{3,5\}$.

Las coordenadas de los vértices del pequeño dodecaedro estrellado , el gran dodecaedro y el gran icosaedro coinciden con las del icosaedro , mientras que las del gran dodecaedro estrellado coinciden con las del dodecaedro . En el mismo orden se aprecian en las figuras correspondientes (figs. 21 a , b , c y d)

Las matrices para las proyecciones ortográficas en los planos $X=0$, $Y=0$ y $Z=0$ son respectivamente ,

$$\begin{array}{cccc}
 P_x = & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & P_y = & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & P_z = & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}
 \end{array}$$

aplicándolas en las coordenadas de los sólidos platónicos , obtenemos la disposición de las proyecciones como se muestra en las figuras 22 a , b , c , d , y e .

En la tabla 2 se da el número de ejes de simetría de rotación de distintos períodos para cada uno de los sólidos platónicos .

TABLA 2

Número de ejes de rotación en el espacio tridimensional

{p,q} {q,p}	binario	ternario	cuaternario	quinario
{3,3} ; {3,3}	3	4	--	--
{4,3} ; {3,4}	6	4	3	--
{5,3} ; {3,5}	10	15	--	6

La proyección en un plano perpendicular al eje de simetría binario en el tetraedro , puede observarse directamente en las vistas de la figura 19 a ; para construir la proyección con dirección de proyectantes paralela al eje de simetría binario del cubo , es necesario aplicar una rotación del mismo bajo un ángulo de $\pi/4$ y posteriormente proyectar en el plano adecuado . Concatenando la matriz de rotación sobre el eje Y bajo un ángulo $\psi = \pi/4$, y la matriz de proyección ortogonal en el plano $Z = 0$, obtenemos la matriz deseada .

La matriz general de rotación en el eje Y ,

$$R_Y = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los valores $\sin \psi$ y $\cos \psi$ para $\psi = \pi/4$ en la matriz de rotación general obtenemos ,

$$R_Y = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así ,

$$R_{YPZ} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas en el plano para la proyección deseada del cubo |H| son , finalmente (fig. 23) ,

$$\begin{array}{cccccccc}
1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 & & & & & 1 & 1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1 \\
1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & & & & & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
-1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 3 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 & 1 \\
-1/2 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
|H| |R_Y P_Z| = & & & & & & & & = & & & & & \\
1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 5 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1 \\
1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\
-1/2 & -1/2 & -1/2 & 1 & & & & & 7 & -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1 \\
-1/2 & -1/2 & 1/2 & 1 & & & & & 8 & 0 & -1/2 & 0 & 1
\end{array}$$

La proyección de un octaedro |O| en un plano perpendicular a su eje de simetría binario se obtiene con la misma matriz (fig. 24),

$$\begin{array}{cccccccc}
1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & & & & & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\
|O| |R_Y P_Z| = & & & & & & & & = & & & & & \\
-1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 4 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1/2 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1 & & & & & 6 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1
\end{array}$$

Las proyecciones binarias del icosaedro y del dodecaedro, se encuentran directamente en las figuras 22 d y 22 e.

Los poliedros regulares con simetría cuaternaria (i.e quedan invariantes tras una rotación al rededor de cualquier eje bajo un ángulo igual a $\pi/4$) son el hexaedro o cubo y octaedro, y sus proyecciones están representadas en las figuras 22 b y 22 c.

Sólo resta obtener las proyecciones de los sólidos platónicos según ejes de rotación ternarios y quenarios . Para hallar una proyección en la dirección del eje ternario de rotación común en todos los poliedros regulares es necesario observar que éste tiene la misma orientación que un vector unitario con cosenos directores C_X , C_Y , C_Z idénticos todos con el valor $1/\sqrt{3}$. De la fórmula $d = \sqrt{(C_Y^2 + C_Z^2)}$ donde d es la proyección del vector unitario en el plano $x=0$ obtenemos el ángulo de rotación α de las relaciones $\cos \alpha = C_Z / d$, ó $\sin \alpha = C_Y / d$ (fig, 25 a) . Así resulta la rotación alrededor del eje X hasta el plano xz , el componente z del vector es d , y el componente x es C_X y el coseno director en la dirección X aparece ahora como se muestra en la figura 25 b . El ángulo de rotación requerido para hacer coincidir el eje ternario con el eje Z es $\cos \beta = d$ ó $\sin \beta = C_X$; como los cosenos directores del eje que contiene el vector unitario son $| C_X \ C_Y \ C_Z | = | 1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} |$, sustituyendo en $d = \sqrt{(C_Y^2 + C_Z^2)}$,

$$d = \sqrt{[(1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2]} = \sqrt{(2/3)} ,$$

sustituyendo en $\cos \alpha = C_Z / d$, y en $\cos \beta = d$

$$a = \cos^{-1} [(1/\sqrt{3}) / (\sqrt{(2/3)})] = \cos^{-1} (1/\sqrt{2}) = \pi/8 ,$$

$$b = \cos^{-1} \sqrt{(2/3)} = .615479709 \dots$$

Con estos valores construimos las matrices de rotación en los ejes X e Y siendo las formas generales

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad y \quad R_Y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices requeridas son , sustituyendo con los valores encontrados anteriormente ,

$$R_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_Y = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el tetraedro $|T|$, aplicando la primera rotación (R_X),

$$|T| |R_X| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{8} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{8} & 0 & 1/2 & 1 \\ -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 1 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{8} & 1/2 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 1 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{8} & 0 & -1/2 & 1 \\ -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{8} & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

La segunda rotación es R_Y ,

$$|T| |R_X R_Y| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} & 0 & 1/2 & 1 & 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & (\sqrt{6}+\sqrt{24})/12 & 1 \\ -1/\sqrt{8} & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{12} & 1/2 & -1/\sqrt{24} & 1 \\ 1/\sqrt{8} & 0 & -1/2 & 1 & -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} & 0 & 2/\sqrt{12} & 0 & (\sqrt{6}-\sqrt{24})/12 & 1 \\ -1/\sqrt{8} & 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{12} & -1/2 & -1/\sqrt{24} & 1 \end{pmatrix} =$$

Por último la proyección en el plano $Z = 0$

$$|T| |R_X R_Y P_Z| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\sqrt{6}+\sqrt{24})/12 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{12} & 1/2 & -1/\sqrt{24} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{12} & 1/2 & 0 & 1 \\ 2/\sqrt{12} & 0 & (\sqrt{6}-\sqrt{24})/12 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/\sqrt{12} & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{12} & -1/2 & -1/\sqrt{24} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/\sqrt{12} & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

La proyección se aprecia en la figura 26 . Para el cubo , las coordenadas de la proyección ternaria serán (fig. 27) ,

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$2 \quad 1/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1$$

$$3 \quad -1/\sqrt{6} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1$$

$$4 \quad -2/\sqrt{6} \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$5 \quad 1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1$$

$$6 \quad 2/\sqrt{6} \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$8 \quad -1/\sqrt{6} \quad -1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 1$$

La proyección ternaria del octaedro (fig.28) ,

$$1 \quad 1/\sqrt{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$2 \quad -1/2\sqrt{3} \quad 1/2 \quad 0 \quad 1$$

$$3 \quad -1/2\sqrt{3} \quad -1/2 \quad 0 \quad 1$$

$$4 \quad -1/\sqrt{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$5 \quad 1/2\sqrt{3} \quad 1/2 \quad 0 \quad 1$$

$$6 \quad 1/2\sqrt{3} \quad -1/2 \quad 0 \quad 1$$

La proyección ternaria del dodecaedro (fig.29)

1	0	0	0	1
2	$(\phi^2/\sqrt{6})-(1/2\sqrt{6})$	$1/2\sqrt{2}$	0	1
3	$\phi/\sqrt{6}$	$\phi/\sqrt{2}$	0	1
4	$-(\phi/2\sqrt{6})$	$\phi^2+1/2\sqrt{2}$	0	1
5	$-(\phi^2+1/2\sqrt{6})$	$\phi/2\sqrt{2}$	0	1
6	$(1/\sqrt{6})-(\phi^2/2\sqrt{6})$	$-(\phi^2/2\sqrt{2})$	0	1
7	$(\phi^2/\sqrt{6})+(1/2\sqrt{6})$	$-(1/2\sqrt{2})$	0	1
8	$(1/\sqrt{6})+(\phi^2/2\sqrt{6})$	$\phi^2/2\sqrt{2}$	0	1
9	$-(\phi/\sqrt{6})$	$\phi/\sqrt{2}$	0	1
10	$-(2\phi/\sqrt{6})$	0	0	1
11	$-(1/\sqrt{6})-(\phi^2/2\sqrt{6})$	$-\phi^2/2\sqrt{2}$	0	1
12	$\phi/\sqrt{6}$	$-(\phi/\sqrt{2})$	0	1
13	$2\phi/\sqrt{6}$	0	0	1
14	$-(1/\sqrt{6})+(\phi^2/2\sqrt{6})$	$\phi^2/2\sqrt{2}$	0	1
15	$-(\phi^2/\sqrt{6})-(1/2\sqrt{6})$	$1/2\sqrt{2}$	0	1
16	$-(\phi^2/\sqrt{6})+(1/2\sqrt{6})$	$-(1/2\sqrt{2})$	0	1
17	$-(\phi/\sqrt{6})$	$-(\phi/\sqrt{2})$	0	1
18	$\phi/2\sqrt{6}$	$-(\phi^2+1/2\sqrt{2})$	0	1
19	$\phi^2+1/2\sqrt{6}$	$-(\phi/2\sqrt{2})$	0	1

20 0 0 0 1

La proyección ternaria del icosaedro (fig. 30) ,

1	$-(\phi+1)/2\sqrt{6}$	$\phi-1/2\sqrt{2}$	0	1
2	$(\phi/\sqrt{6})-(1/2\sqrt{6})$	$1/2\sqrt{2}$	0	1
3	$-(\phi-1)/2\sqrt{6}$	$\phi+1/2\sqrt{2}$	0	1
4	$(1/\sqrt{6})-(\phi/2\sqrt{6})$	$-(\phi/2\sqrt{2})$	0	1
5	$(\phi/\sqrt{6})+(1/2\sqrt{6})$	$-(1/2\sqrt{2})$	0	1
6	$(1/\sqrt{6})+(\phi/2\sqrt{6})$	$\phi/2\sqrt{2}$	0	1
7	$-(1/\sqrt{6})+(\phi/2\sqrt{6})$	$\phi/2\sqrt{2}$	0	1
8	$-(\phi/\sqrt{6})-(1/2\sqrt{6})$	$1/2\sqrt{2}$	0	1
9	$-(1/\sqrt{6})-(\phi/2\sqrt{6})$	$-(\phi/2\sqrt{2})$	0	1
10	$(\phi-1)/2\sqrt{6}$	$-(\phi+1/2\sqrt{2})$	0	1
11	$(\phi+1)/2\sqrt{6}$	$-(\phi-1/2\sqrt{2})$	0	1
12	$-(\phi/\sqrt{6})+(1/2\sqrt{6})$	$-(1/2\sqrt{2})$	0	1

Esta proyección del icosaedro presenta un giro con respecto al eje Y contenido en el plano de proyección $Z = 0$ bajo un ángulo igual a $\text{tg}^{-1} (\phi-1)/\sqrt{3}(\phi+1) = \text{tg}^{-1} (\sqrt{5}-2)/\sqrt{3} = .13545926022 \dots$, lo mismo sucede con la vista del dodecaedro .

Las mismas proyecciones en el sentido del eje de rotación ternario (como podrás deducir de las figuras 17 y 18) se obtienen con un sólo giro en cualquiera de los ejes bajo un ángulo cuyo valor es , $\text{tg}^{-1} 1/\phi^2 = .3648638281 \dots$; se nota con facilidad que para lograr dibujar las proyecciones ternarias "corregidas" , aplicamos un giro con este angulo y posteriormente proyectamos en el plano adecuado . Así entonces en el dodecaedro con la matriz general de rotación alrededor del eje Z ,

$$R_Z = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la proyección en el plano $X = 0$, obtenemos la matriz concatenada :

$$|R_Z P_X| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 1/\phi^2 \sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\phi^2 \sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 1/\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\phi\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi/\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente las coordenadas de la proyección ,

1	0	$(1+\phi^2)/2\sqrt{3}$	$\phi/2$	1
2	0	$\phi/\sqrt{3}$	0	1
3	0	$(1+\phi^2)/2\sqrt{3}$	$-\phi/2$	1
4	0	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{3}$	$-1/2$	1
5	0	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{3}$	$1/2$	1
6	0	$1/2\phi\sqrt{3}$	$\phi/2$	1
7	0	0	0	1
8	0	$1/2\phi\sqrt{3}$	$-\phi/2$	1
9	0	$(\phi^2-1)/2\sqrt{3}$	$-\phi/2$	1
10	0	$(\phi^2-1)/2\sqrt{3}$	$\phi/2$	1
11	0	$-(1/2\phi\sqrt{3})$	$\phi^2/2$	1
12	0	$(1-\phi^2)/2\sqrt{3}$	$\phi/2$	1
13	0	$(1-\phi^2)/2\sqrt{3}$	$-\phi/2$	1
14	0	$-(1/2\phi\sqrt{3})$	$-\phi^2/2$	1
15	0	0	0	1
16	0	$\phi/\sqrt{3}$	0	1
17	0	$-(\phi^2+1)/2\sqrt{3}$	$\phi/2$	1
18	0	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{3}$	$1/2$	1
19	0	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{3}$	$-1/2$	1

$$20 \ 0 \quad -(\phi^2+1)/2\sqrt{3} \quad -\phi/2 \quad 1$$

El resultado se ve en la figura 31 . En el icosaedro , aplicando la rotación en el eje X y proyectando en el plano $Z = 0$, obtenemos las coordenadas de la proyección .

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 1/\phi^2\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\phi^2\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 1/\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\
 |R_{XPZ}| = & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\phi^2\sqrt{[1+[1/\phi(2+\sqrt{5})]]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} =
 \end{aligned}$$

La proyección del icosaedro , finalmente ,

$$\begin{aligned}
 1 \ 0 \quad & 1/\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \\
 2 \ \phi/2 \quad & \phi/2\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \\
 3 \ 0 \quad & \phi/\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \\
 4 \ 1/2 \quad & -(1/2\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1 \\
 5 \ \phi/2 \quad & -(\phi/2\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1 \\
 6 \ 1/2 \quad & 1/2\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \\
 7 \ -1/2 \quad & 1/2\sqrt{3} \quad 0 \quad 1 \\
 8 \ -\phi/2 \quad & \phi/2\sqrt{3} \quad 0 \quad 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
9 \quad -1/2 \quad -(1/2\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1 \\
10 \quad 0 \quad -(\phi/\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1 \\
11 \quad 0 \quad -(1/\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1 \\
12 \quad -\phi/2 \quad -(\phi/2\sqrt{3}) \quad 0 \quad 1
\end{array}$$

se puede apreciar la proyección en la figura 32.

Para concluir con esta parte , las proyecciones en la dirección del eje de rotación quinario en los poliedros regulares que lo presentan , viz. , el dodecaedro y el icosaedro . Serán necesarias una rotación y una proyección : el ángulo de rotación es $\text{tg}^{-1} 1/\phi = \text{sen}^{-1} 1/\sqrt{(\phi+2)} = .5535743588 \dots$; entonces para el icosaedro rotando en el eje X y proyectando en el plano $Y = 0$,

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \phi/\sqrt{(\phi+2)} & 1/\sqrt{(\phi+2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{(\phi+2)} & 0 \\
0 & -1/\sqrt{(\phi+2)} & \phi/\sqrt{(\phi+2)} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \phi/\sqrt{(\phi+2)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \\
|R_X P_Y| = & & = & & ; \\
\begin{array}{l}
1 \quad 0 \quad 0 \quad \phi/\sqrt{(\phi+2)} \quad 1 \\
2 \quad \phi/2 \quad 0 \quad 1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1 \\
3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\
4 \quad 1/2 \quad 0 \quad \phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1 \\
5 \quad \phi/2 \quad 0 \quad -1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1 \\
6 \quad 1/2 \quad 0 \quad -\phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1 \\
7 \quad -1/2 \quad 0 \quad -\phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1 \\
8 \quad -\phi/2 \quad 0 \quad 1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1
\end{array}
\end{array}$$

$$9 \quad -1/2 \quad 0 \quad \phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1$$

$$10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$11 \quad 0 \quad 0 \quad -\phi/\sqrt{(\phi+2)} \quad 1$$

$$12 \quad -\phi/2 \quad 0 \quad -1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 1$$

El resultado se ve en la figura 33 .

Idem en el dodecaedro ; girando en el eje X y proyectando en el plano $Z = 0$

$$1 \quad \phi/2 \quad 1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$2 \quad \phi^2/2 \quad \phi/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$3 \quad \phi/2 \quad (2+\sqrt{5})/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$4 \quad 0 \quad \phi^2/\sqrt{(\phi+2)} \quad 0 \quad 1$$

$$5 \quad 0 \quad \phi/\sqrt{(\phi+2)} \quad 0 \quad 1$$

$$6 \quad 1/2 \quad -\phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$7 \quad \phi^2/2 \quad -\phi/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$8 \quad 1/2 \quad \phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$9 \quad -\phi/2 \quad (2+\sqrt{5})/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$10 \quad -\phi/2 \quad 1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$11 \quad -1/2 \quad -\phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$12 \quad \phi/2 \quad -(2+\sqrt{5})/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

$$13 \quad \phi/2 \quad -1/(2\sqrt{(\phi+2)}) \quad 0 \quad 1$$

14	$-1/2$	$\phi^2/(2\sqrt{(\phi+2)})$	0	1
15	$-\phi^2/2$	$\phi/(2\sqrt{(\phi+2)})$	0	1
16	$-\phi^2/2$	$-\phi/(2\sqrt{(\phi+2)})$	0	1
17	$-\phi/2$	$-(2+\sqrt{5})/(2\sqrt{(\phi+2)})$	0	1
18	0	$-\phi^2/\sqrt{(\phi+2)}$	0	1
19	0	$-\phi/\sqrt{(\phi+2)}$	0	1
20	$-\phi/2$	$-1/(2\sqrt{(\phi+2)})$	0	1

El resultado se aprecia en la figura 34 .

Al examinar el tamaño relativo de los poliedros , observamos sensibles contrastes ; así por ejemplo , mientras el tetraedro no excede un espacio cúbico de arista $1/\sqrt{2}$, o sea un poco más de siete décimas de la unidad , el dodecaedro excede en más de tres veces la longitud de esta arista e incluso la relación de volúmenes es casi sesentaicinco veces mayor en el dodecaedro con respecto al tetraedro . Será bueno recordar lo que sugiere Wenninger Magnus en un ensayito dedicado a la construcción de poliedros ; " . . . las dimensiones lineales son directamente proporcionales entre sí , las áreas proporcionales a los cuadrados de las dimensiones lineales , los volúmenes a los cubos de dichas dimensiones . " (22) . Podremos dar más unidad al conjunto de los poliedros regulares cuando expresemos las dimensiones en función de una sola , la idónea como veremos será la altura .

De el aspecto general de las expresiones que figuran (hasta ahora) como elementos de las matrices se deduce , en consecuencia , la constructibilidad directa con la regla y el compás exclusivamente . Procuraré en la medida de lo posible dar siempre alguna expresión como construcción cuadrática . Por otro lado , las mismas clarifican algunas propiedades de simetría . Brevemente , $\sqrt{2}$, 2 , $\sqrt{8}$ y otros , guardan estrecha relación con la geometría de tetraedro , octaedro y cubo ; mientras que ϕ , $\sqrt{(\phi+2)}$, $\sqrt{5}$, 3 , 5 , & . c. , la guardan en relación a icosaedro y dodecaedro . $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, & . c. parecen ser comunes a ambos grupos .

Se llama polígono de Petrie (23) al polígono regular tridimensional tal que , cada dos lados consecutivos , pero no tres , pertenecen a una cara de un poliedro regular . Los polígonos de Petrie del tetraedro , octaedro , cubo , icosaedro y dodecaedro son respectivamente :

1 , 3 , 2 , 4 ; (fig 22.a) , (un cuadrado)

1 , 5 , 2 , 4 , 3 , 6 (fig. 27) , (un hexágono)

2 , 3 , 4 , 8 , 5 , 6 (fig. 28) , (un hexágono)

1 , 9 , 8 , 12 , 7 , 11 , 6 , 5 , 2 , 4 (fig. 33) , (un decágono)

4 , 9 , 15 , 16 , 17 , 18 , 12 , 7 , 2 , 3 (fig. 34) , (un decágono)

Polígonos también , aunque no de Petrie , son como los que presentan las figuras 35 a y b (idénticas en construcción a las figuras 31 y 32) , Observemos con detenimiento éstas y la figura 35 c : hallaremos la presencia de " ϕ " :

- en la figura 35 a vemos un hexágono ; del cual dividimos los lados , así como los segmentos que unen al centro con los vértices en media y extrema razón , teniendo cuidado de colocar la parte mayor contada desde el interior ; y en los lados de la periferia en los dos modos posibles ; uniendo los puntos obtenidos de modo coherente produciremos la proyección según el eje ternario de rotación del dodecaedro .

- en 35 b , dividimos también en un hexágono , los segmentos que unen el centro con los vértices para obtener la proyección ternaria del icosaedro .

- en 35 c los segmentos que van del centro a la periferia , a excepción de los lados , se dividen de modo análogo dentro de un decágono para obtener la proyección con simetría quinaria de rotación del dodecaedro . Retomaremos estas proyecciones cuando consideremos los poliedros de Arquímedes .

Con la debida reserva , pues no quiero que se me acuse injustamente de hurtar o adjudicarme cosas que , desconociendo si han estado previamente publicadas o consignadas de algún modo puesto que no han caído en mis manos libros que contengan esta investigaciones ; inconscientemente pienso más , propongo lo siguiente .

Se llama homotómico (24) al rectángulo que tiene la propiedad de producir dos rectángulos semejantes a sí cuando se corta por la mitad , transversalmente . Sin

necesidad de ver la ecuación que permite encontrar el valor numérico que relaciona sus lados , es fácil ver que se trata del rectángulo cuyos lados son como $1/\sqrt{2}$. Los formatos de papel que estableció la DIN (Deutsches Institut Für Normung) , instituto de normalización alemán , por ejemplo , tienen la forma de rectángulos homotómicos .

Ya que el rectángulo homotómico genera otro idéntico al restarle su recíproco , aunque con la mitad del tamaño (sería semejante en el sentido geométrico) , puede decirse que posee una cualidad única entre la categoría de rectángulos . Así , el criterio de restar el recíproco a un rectángulo sirve entonces para establecer una numerosa familia de rectángulos con propiedades importantes . Cualquier rectángulo , que no sea el homotómico le llamo heterotómico , pues al quitarle su recíproco obtengo un rectángulo que siempre es diferente en forma al primero . Aquí doy unos ejemplos que pueden servir para inventar una nomenclatura sencilla para identificar determinados rectángulos : aquel que tenga la relación del lado mayor al menor como $3/1$ ó $6/2$ lo llamo "rectángulo heterotómico 3" y se entiende que está en posición vertical porque el número 3 es mayor que la unidad , i.e. , el lado mayor preferiblemente está en posición vertical ; uno que lleve una relación menos explícita vgr. $\sqrt{11/5}$ le llamo "rectángulo heterotómico 0.66332459 . . ." o "rectángulo heterotómico $\sqrt{11/5}$ " y se entiende horizontal porque $\sqrt{11/5}$ es menor que la unidad . En realidad la posición no es muy importante ; si lo es , sin embargo , la relación entre los dos lados .

Matila Ghyka sugiere con acierto y con la autoridad que le confiere su indiscutible prestigio profesional , que "mezclar" temas o simetrías (25) discordantes en un mismo diseño es un error , reafirmando lo que anteriormente habían establecido , por separado y en distintas épocas , Alberti y Hambidge en lo que se conoce como "regla de separación de temas discordantes" (26) . De modo que temas heterogéneos en su naturaleza , vgr. $\sqrt{2}$ y ϕ , ó $\sqrt{3}$ y ϕ (!!!) , ó $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ (!!!) , no podían estructurarse , en términos de dibujo o diseño , en una única forma dentro de la obra . Se trata de un hecho inamovible pues lo han confirmado así los trabajos arqueológicos y de otra índole , sobre todo los hechos a principio de siglo , como los de Caskey , los de Moessel en arquitectura antigua , y algo más reciente (relativamente) los de Boleau y otros en pintura .

Convengamos en establecer una altura común para los cinco poliedros regulares convexos ; un valor igual a la unidad .

- En el cubo al hacer una proyección ortogonal obtenemos un cuadrado si la dirección de las proyectantes es paralela a cualquier arista ; (el cuadrado es el único rectángulo heterotómico que tiene un recíproco igual a sí mismo , por eso al restarlo el resultado es igual a cero) de aquí que la relación entre la arista y la altura sea igual a 1 ,

- en el tetraedro , e igualmente en el octaedro , encontraremos que la relación entre la arista a la altura es igual a $3\sqrt{2}/2\sqrt{3}$,
- en el dodecaedro $[(2-\phi)\sqrt{(2+\phi)}] / \phi$,
- en el icosaedro $[(\phi+1)\sqrt{3}] / \phi$.

Lo anterior en mente , procedo a mostrarte las vistas transimétricas (27) de los poliedros regulares convexos : De entre todas las transimétricas posibles , las principales son aquellas que exhiben la longitud de la arista en dimensión verdadera (en ortoperfil) (28) .

Las transimétricas del tetraedro son notables : una genera el rectángulo heterotómico $\sqrt{8}/3 = 0.9428090415 \dots$; la fracción continua (29) correspondiente a este valor es $\{ 0 ; 1 , 16 , 2 , 16 , 2 , 16 , 2 , 16 \dots \}$ ó $\{ 1/3\sqrt{8} \}$ (30) , la figura 36 es muy explícita , y muestra como hacer el rectángulo heterotómico . También se observa que el triángulo que resulta es isósceles y que se puede instalar en un rectángulo homotómico (representado en la figura con línea punteada) que a su vez representa una transimétrica del cubo . La configuración espacial exhibe la coincidencia de las aristas del tetraedro como diagonales en las seis caras del cubo .

La otra transimétrica genera un rectángulo heterotómico con propiedades geométricas que (sin exagerar) , ¡¡rayan en lo sublime!! . Contiene a las transimétricas del octaedro y cubo en dirección ortonormal al eje de rotación ternario . El valor numérico que representa la razón entre los dos lados del rectángulo heterotómico que envuelven a tetraedro y octaedro de una manera , y al cubo de otra diferente es $2\sqrt{3}/3\sqrt{2} = \sqrt{2}/\sqrt{3} = .81649658092 \dots$ y la fracción continua que le corresponde , $\{ 0 ; 1 , 4 , 2 , 4 , 2 , 4 , 2 \dots \}$ ó $\{ -(1/\sqrt{6}) \}$ (fig. 37) .

La relación para el heterotómico que contiene al cubo : $\sqrt{3}/\sqrt{2} = 1.2247448713 \dots = \{ 1 ; 4 , 2 , 4 , 2 , 4 , 2 \dots \}$ ó $\{ 1/\sqrt{6} \}$ (fig.38) .

Debido a que $\sqrt{8}/3 = .9428090415 \dots$ y $\sqrt{2}/\sqrt{3} = 0.81649658092 \dots$ y sus respectivos recíprocos son irracionalidades cuadráticas , apuntamos lo siguiente :

1) existen ecuaciones cuadráticas con coeficientes enteros cuyas raíces positivas son iguales a los valores numéricos antes dados ; claramente se trata de las ecuaciones cuadráticas sin término lineal $9x^2 - 8 = 0$ y $3x^2 - 2 = 0$ (31) .

2) en contraste con la observación de Ghyka , los lados de los rectángulos hallados hasta ahora pueden relacionarse sin discrepancia , lo cual tiene un efecto significativo para el diseño .

3) las subdivisiones de los rectángulos heterotómicos $\sqrt{8}/3$ y $\sqrt{2}/\sqrt{3}$, así como las de sus respectivos recíprocos, son conmensurables entre sí (aunque $\sqrt{8}$ y 3 & $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ no sean radicales semejantes); en consecuencia se introduce un orden, muchas veces gnomónico, que posibilita la interacción de relaciones alícuotas con dinámicas. Las propiedades armónicas que poseen son dignas de toda atención y se asemejan a aquellas que han disfrutado los "rectángulos nobles" de la tradición estética y geométrica de la teoría de la proporción.

Las propiedades de los rectángulos heterotómicos que contienen al icosaedro y a dodecaedro son extraordinarias; incluso de modo tal que si se contemplan con cierta dispersión, no deja uno de percibir su "desconcertante-y-displicente-vehemencia".

El dodecaedro, con el eje quinario en dimensión verdadera, tiene un rectángulo con relación $1/\sqrt{3-\phi} = \phi/\sqrt{2+\phi} = .8506508083 \dots = \{0; 1, 5, 1, 2, 3, 2, 28 \dots\} = \{-1/[\phi\sqrt{2+\phi}]\}$ (fig.39). El transimétrico del icosaedro con el eje quinario ortonormal a la dirección de la proyección tiene sus lados, \ddot{ij} en la misma relación !!. De manera análoga al caso del transimétrico de octaedro y cubo, la diferencia estriba en la "posición" del rectángulo, veamos; $\sqrt{5}/[\sqrt{2+\phi}] = [\sqrt{2+\phi}]/\phi$ (de esta última igualdad se deduce que $\sqrt{2+\phi}$ es media proporcional entre $\sqrt{5}$ y ϕ), $= 1.1755705045 \dots = \{1; 1, 5, 1, 2, 3, 2, 28, 2 \dots\} = \{1/(\phi\sqrt{2+\phi})\}$, (fig. 40). Las figuras 39 y 40 revelan el mismo rectángulo heterotómico, pero con distinta posición, horizontal en el dodecaedro, vertical en el icosaedro.

Idénticamente las transimétricas de icosaedro y dodecaedro en dirección de proyección ortonormal al eje de simetría de rotación ternario comparten un mismo heterotómico, viz., icosaedro: $1/[\sqrt{5-4\phi+\phi^2}] = \phi/\sqrt{3} = 0.9341723589 \dots = \{0; 1, 14, 5, 4, 2, 1, 19 \dots\} = \{-(\phi-2)/\phi\sqrt{3}\}$, (fig. 41).

Dodecaedro: $3/(\phi\sqrt{3}) = \sqrt{3}/\phi = 1.0704662693 \dots = \{1; 14, 5, 4, 2, 1, 19, 1 \dots\} = \{(3-\phi^2)/(\phi\sqrt{3})\}$ (fig. 42).

Deducimos de los anterior:

1) Ni $[(2+\phi)/\phi]$, ni $\sqrt{3}/\phi$, ni sus respectivos recíprocos son irracionalidades cuadráticas, como se puede inferir de la ausencia de recurrencia en la fracción continua correspondiente a cada valor encontrado.

2) ϕ y algunos radicales pueden relacionarse sin discrepancia en el mismo diseño.

Por lo que a propiedades y geometría de rectángulos heterotómicos concierne eso es todo lo que diré en este trabajo . Tuve que resistir la tentación de incluir más de estos maravillosos rectángulos y sus varias virtudes , pues siendo materia de otro trabajo (que espero dar a saber en el futuro , de algún modo y si dios lo quiere) , exige ser tratada con la prolijidad y minuciosidad que necesita .

Sin duda , esta es una de las partes de la tesis que pueden seriamente considerarse como " claves " , tomando en cuenta un problema general de diseño , porque acude en el momento cuando , una vez elaborada la estructura básica de la solución a partir de un análisis geométrico o a partir de una síntesis de elementos conceptuales o de contenido , nos lleva a elegir determinado rectángulo (formato , como se verá) o el trazo interno definitorio . Luego nos concentraríamos en la conocida parte creativa .

El espacio es una estructura "vital" , de ningún modo vacía o "inerte" ; el sólo hecho de delimitarlo o al establecer una medida dentro de él , equivale a construir una geometría completa , tan compleja o tan sencilla , dependiendo cómo se haga .

Dentro del diseño "elegir" un espacio , i.e. elegir un formato (por formato es preferible entender un rectángulo con proporciones reconocibles y constantes) significa , en mi entender , resolver la mitad del trabajo ; por eso si no se utiliza un criterio formal , atendiendo a consideraciones geométricas , introduciremos el "caos" en nuestra resolución gráfica . Mediante un método "deductivo" la elección del formato puede ser más segura , pero distará sin duda de la idónea . Elaborar una imagen pensando detenidamente en las propiedades geométricas y simétricas del trabajo no es , de ningún modo , trabajo ocioso ; o ¿acaso Poussin , Vermeer , Seurat o Mondrian , por mencionar pocos pintores , no eligen un lienzo que contenga una relación clara y satisfactoria entre sus lados ? . El formato necesariamente condiciona la "geometría" de la solución gráfica integral , si se quiere , en un nivel de composición o alternativamente de diagramación , por lo tanto es lógico y sensato proceder a la "inversa" : inductivamente , lo cual equivale a establecer primero un formato , por medio del rectángulo estático , dinámico , heterotómico o cualquiera otro y luego "diseñar" la solución gráfica siguiendo el "carácter" y la "flema" del rectángulo . Así sucede con el formato del televisor , por ejemplo : se impone la división según terceras o cuartas , pues el rectángulo que le sirve de formato relaciona sus lados como $3/4$ ó $.75$.

¿Porqué no considerar los heterotómicos como "formato"? , de paso , ¿porqué no considerar las proyecciones de los poliedros como elementos activos de la composición y de la diagramación? (figs. 43 y 44) .

En la lámina 3 aparece una aplicación del heterotómico que contiene al cubo ; fué

utilizado según la misma formulación prospectiva de los "tableaux" de Mondrian . Todos los rectángulos que se pueden reconocer tienen la misma forma , precisamente la del heterotómico $\sqrt{3}/\sqrt{2}$, siendo el principal el exterior que sirve de formato .

Intentaré dar una definición condensada del concepto de dualidad o reciprocidad (reciprocidad distinta a la que veíamos en el caso de los números o al de la inversión circular) . Si existe una configuración conteniendo puntos , líneas , planos . . . existe otra que le corresponde y que posee . . . planos , líneas , puntos . Las propiedades que pueden poseer y que se cumplen en ambas por separado , también se corresponden y se convierten unas en otras al cambiar algunas palabras claves de sus enunciados (32) . Esto es la dualidad o reciprocidad . A manera de ejemplo , consideremos los ocho vértices , las doce aristas y los seis planos que forman las caras del hexaedro . Se dice que el octaedro es el poliedro dual o recíproco del cubo porque posee ocho planos por caras , doce aristas y seis vértices . Añado que hay que observar ciertas condiciones geométricas especiales cuando buscamos determinados poliedros duales ; pero como son numerosas, remito de nuevo a más textos .

Es fácil ver que el tetraedro es autodual , i.e. su recíproco es otro tetraedro idéntico ; el octaedro es el recíproco del hexaedro y el icosaedro es recíproco del dodecaedro ; y a la inversa .

Las relaciones que se verifican entre dos poliedros recíprocos o duales se manifiestan de muchas maneras . La existencia del heterotómico es , precisamente , una de ellas . ¿ Cuales proyecciones de sólidos regulares se instalan dentro del heterotómico $\sqrt{3}/\sqrt{2}$ (ó $\sqrt{2}/\sqrt{3}$) ? el cubo y el octaedro , i.e. dos poliedros recíprocos ; ¿cuales se instalan dentro del heterotómico $\phi/\sqrt{3}$ (ó $\sqrt{3}/\phi$) ? el icosaedro y el dodecaedro , par recíproco también .

Coxeter describe otra relación recíproca entre dos poliedros , distinta a la que se fundamenta en la posición (33) . A partir de su "caleidoscopio poliedral" puede distribuir los vértices de dos poliedros recíprocos en planos horizontales paralelos correspondientes ; ajustándolos adecuadamente pueden coincidir para que los vértices de cada uno de los sólidos estén contenidos en los mismos planos (34) .

Desgraciadamente , no podemos profundizar en la teoría subyacente , pero debemos percatarnos de que estas observaciones nos serán de utilidad para comprender el trazo interno en los heterotómicos , sobre todo los que corresponden a poliedros de simetría de rotación quinario .

El heterotómico $3/\sqrt{8}$ y los restantes tienen sus vértices identificados como A, B, D y E. Será suficiente dividir el segmento AB por medio del punto λ_1 la razón $\lambda_1 = 1/2$, y al unirlo con los puntos D y E obtendremos el tetraedro (fig. 45).

En el heterotómico $\sqrt{3}/\sqrt{2}$, AB será dividido por medio de λ_1 en $\lambda_1=1$; BE por medio de λ_2 en la razón $\lambda_2=2$ y por medio de λ_3 en la razón $\lambda_3 = 1/2$ para obtener las proyecciones del cubo (fig. 46).

Análogamente, el lado AB del heterotómico $\phi/\sqrt{(2+\phi)}$ será dividido en las razones $\lambda_1 = 1/(\sqrt{5}+2)$, $\lambda_2 = \phi/(2+\phi)$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \sqrt{5}$, $\lambda_5 = \sqrt{5}+2$; y el lado BE en las razones $\lambda_6 = 1/\phi$, y $\lambda_7 = \phi$. Los puntos de división y de intersección de las rectas paralelas a los lados AB y BE pertenecen al dodecaedro (fig. 47).

En el heterotómico $[\sqrt{(2+\phi)}]/\phi$, AB es dividido en $\lambda_1 = \sqrt{5}-2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \sqrt{5}+2$; BE en $\lambda_4 = 1/\phi^2$ y $\lambda_5 = \phi^2$, para encontrar los vértices del icosaedro (fig. 48).

El heterotómico $\phi/\sqrt{3}$: $\lambda_1 = 1/(\sqrt{5}+2)$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \sqrt{5}+2$; BE, $\lambda_4 = 1/\phi$, $\lambda_5 = \phi$ (fig. 49). Obtenemos los vértices del icosaedro.

El heterotómico $\sqrt{3}/\phi$: AB, $\lambda_1 = 1/(\sqrt{5}+2)$, $\lambda_2 = \phi/(2+\phi)$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \sqrt{5}$, $\lambda_5 = \sqrt{5}+2$; BE, $\lambda_6 = 1/[\phi(\sqrt{5}+2)]$, $\lambda_7 = 1/2$, $\lambda_8 = 2$, $\lambda_9 = \phi(\sqrt{5}+2)$, (fig. 50) obtenemos los vértices del dodecaedro.

Estos puntos divisorios se pueden obtener alternativamente mediante la utilización de las siguientes construcciones geométricas.

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, en los heterotómicos $\phi/\sqrt{(2+\phi)}$, $\sqrt{3}/\phi$; λ_1, λ_2 y λ_3 (que coinciden con los puntos λ_1, λ_3 y λ_5 de la anterior división) en los heterotómicos $[\sqrt{(2+\phi)}]/\phi$ y $\phi/\sqrt{3}$ se encuentran así:

El segmento AB se divide por la mitad, (el trazo de la mediatriz se utiliza esta vez), luego, las dos mitades se dividen interiormente en media y extrema razón de las dos maneras posibles (fig. 51).

Los puntos λ_4 y λ_5 en el heterotómico $[\sqrt{(2+\phi)}]/\phi$ mediante la siguiente construcción: el segmento BE es a $\sqrt{5}$ como el segmento $\lambda_4\lambda_5$ es a la unidad; basta entonces trazar una semicircunferencia sobre BE y desde el centro de ésta trazaremos dos rectas

indefinidas cuya inclinación con respecto al lado BE es igual a $\text{tg}^{-1} 2$. Se construyen uniendo el centro de la semicircunferencia con los vértices F y G del cuadrado BEFG; por los puntos de intersección de estas rectas con la semicircunferencia (a y b) se trazan las rectas perpendiculares a BE siendo los pies de las mismas los puntos requeridos λ_4 y λ_5 (nótese que $B\lambda_5/\lambda_5E = E\lambda_4 / \lambda_4B = \phi$) (fig. 52).

La serie $\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9$ del rectángulo $\sqrt{3}/\phi$ se obtiene dividiendo el segmento BE en tres partes iguales del modo habitual, aparecen los puntos λ_7 y λ_8 ; los puntos λ_6 y λ_9 dividen los segmentos λ_7B y λ_8E , respectivamente, en media y extrema razón, por lo tanto $\lambda_6\lambda_7/\lambda_6B = \lambda_8\lambda_9/\lambda_8E = \phi$ (fig. 53).

En la lámina 4 aplico uno de los heterotómicos y su división en sección áurea para componer la imagen que representa a un cuerpo sencillo con doce caras rómbicas congruentes. Como bien se observa, la división interna del rectángulo heterotómico que sirve para diseñar la imagen, tiene varias líneas y una de ellas coincide con la línea de horizonte. El círculo que rodea el cuadro representa el campo visual total; efecto inusitado pues la imagen está resuelta en perspectiva curvilínea (35).

Recordaremos las proyecciones afines. Un teorema importantísimo dice lo siguiente (36): "En el método de proyecciones paralelas, las coordenadas del punto representación son funciones lineales de las coordenadas del punto original, o sea,

$$\xi = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z' + d_1 ,$$

$$v = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z' + d_2 . "$$
 ;

como corolario afirmamos que las proyecciones axonométricas se las puede solucionar con estas ecuaciones, si encontramos valores adecuados para los parámetros del lado derecho del par de ecuaciones lineales dadas. Con el triángulo de trazas característico de la axonometría estamos habilitados para determinar los parámetros y las coordenadas de las proyecciones de los puntos unitarios de cada uno de los ejes de la cruz axial en el espacio. Trabajando sobre el particular obtuve una manera, quizá no muy económica del todo aunque sí satisfactoria, que hace evidente el poder del método analítico.

Supongamos un triángulo con base de 13 unidades y con 11 unidades de altura; el pie de la altura se sitúa en la 9a. unidad de la base. Si el vértice "0" se considera como "origen" para efectos de cálculo (convengamos, por el momento, que no se trata del sistema cartesiano), las "coordenadas" de las proyecciones de los puntos unitarios serán,

$$a = (3 , 12/11)$$

$$b = (13 , 0)$$

$$c = (9 , [(36/11) + (85\sqrt{52}/\sqrt{10285})])$$

$$d = (9 , 36/11)$$

la figura 54 muestra el triángulo de trazas y los trazos que permitieron deducir los valores necesarios para construir las proyecciones de los ejes cartesianos .

Con los valores hallados es posible construir el sistema de ecuaciones lineales que permitirán el trazo de cualquier objeto siempre y cuando se conozcan sus coordenadas en el espacio . En el caso que nos ocupa , sustituyendo en las expresiones que se dan en el enunciado del teorema y habiendo trasladado , para comodidad , el punto d al origen del sistema cartesiano y simultáneamente junto con él a los puntos unitarios sobre la cruz axial ,

$$\begin{array}{ccccccc}
 3 & 12/11 & 1 & & -6 & -(24/11) & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 0 & \\
 13 & 0 & 1 & & 4 & -(36/11) & 1 \\
 & & & 0 & 1 & 0 & = \\
 9 & (36/11)+(85\sqrt{52}/\sqrt{10285}) & 1 & & 0 & 85\sqrt{52}/\sqrt{10285} & 1 \\
 & & & m & n & l & \\
 9 & 36/11 & 1 & & 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$(m = -9 , n = -(36/11))$$

y las ecuaciones son , finalmente ,

$$\xi = 4y - 6x$$

$$v = -(24/11)x - (36/11)y + (85\sqrt{52}/\sqrt{10285})z$$

Por supuesto existen , no únicamente las matrices para la proyección axonométrica trimétrica , dimétrica e isométrica ("isométrica" en el sentido "coloquial") sino también las que corresponden a la proyección clinográfica , vgr. la caballera y la militar , o

cualquier otra afin . Sugiero una revisión de estos tópicos , se hallarán algunas referencias bibliográficas al final de mi OPUSCULO POLIEDRICO ; por lo pronto doy la matriz de proyección axonométrica general , pues de aquí en adelante dosificaré un poco más el uso de las matrices , para favorecer en la misma medida el ejercicio del trazo geométrico , aplicándolo en los sólidos que suceden en jerarquía a los regulares .

Para definir la matriz general de proyección axonométrica es necesario concatenar dos rotaciones y una proyección . Si $|T| = |R_Y||R_Z||P_Z|$ entonces $|T|$ es la matriz de proyección axonométrica . Necesitaremos definir un ángulo ψ para la rotación en el eje Y y uno θ para la rotación en el eje X (algo semejante a la nota 21) ; entonces la matriz es :

$$|T| = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A principios de la era cristiana , los matemáticos alejandrinos Herón y Pappus aseveraban que Arquímedes de Siracusa había escrito sobre el conjunto de los poliedros semirregulares , aunque el texto se extravió .

Los poliedros semirregulares son los sólidos que están formados , a semejanza con los poliedros platónicos , con polígonos regulares , pero esta vez pueden ser de dos o tres tipos diferentes ; sus vértices , no obstante , continúan siendo congruentes .

Existen 13 poliedros semirregulares . Dos de ellos tienen una versión enantiomorfa lo cual significaría se trata de quince . Pero como se verá después , una reflexión puede definir el par como uno solo . También están contemplados el conjunto de prismas y antiprismas si cumplen con las condiciones de la semirregularidad , i.e. si aún sus caras son polígonos regulares y sus vértices son congruentes . Pero los ejes de simetría reflexiva y de rotación descienden en número y no pertenecerían a un grupo (37) tetraédrico , cúbico o icosaédrico , por lo tanto nos concentraremos en el conjunto de trece miembros .

En el libro "Geometry of Structural Forms" (38) de Adrian Gheorghiu y Virgil Dragomir pueden consultarse las construcciones que permiten formar a un poliedro semirregular . Debido a que un poliedro semirregular es una situación de equilibrio entre la "transición" de un poliedro regular con su dual , en realidad pueden haber muchas

maneras de determinar o dibujar el poliedro sea partiendo de un poliedro regular o su dual . La construcción obvia es mediante el truncamiento de vértices de los poliedros platónicos ; algunos otros necesitan una aproximación ligeramente distinta . Esta vez , doy mi construcción geométrica y las razones en que deben dividirse las aristas de los poliedros principales de los cuales resultan los semirregulares , o en su defecto la ecuación que las permite dibujar ; elegí , por otra parte , una axonometría libre en la imagen de cada sólido .

Los cinco primeros poliedros semirregulares se les dice truncados porque , del mismo modo en que se pueden truncar los vértices de los polígonos en el plano , algo semejante ocurre en el espacio . se puede ver en los dibujos adyacentes a las coordenadas de estos sólidos que la configuración perfecta de los polígonos que comparten una arista , depende de la división de la arista del poliedro regular del cual provienen. La situación de equilibrio entre dos poliedros regulares comienza a hacerse manifiesta .

1 Tetraedro truncado

1	1/6	-1/2	1/6	1
2	-1/6	-1/2	-1/6	1
3	-1/6	-1/6	-1/2	1
4	-1/2	-1/6	-1/6	1
5	1/6	-1/6	1/2	1
6	1/2	-1/6	1/6	1
7	1/6	1/6	-1/2	1
8	-1/2	1/6	1/6	1
9	-1/6	1/6	1/2	1
10	1/2	1/6	-1/6	1
11	1/6	1/2	-1/6	1
12	-1/6	1/2	1/6	1 ; (fig 55)

2 Hexaedro truncado

1	$-1/(2+\sqrt{8})$	1/2	1/2	1
2	$1/(2+\sqrt{8})$	1/2	1/2	1
3	1/2	1/2	1/2	1
4	1/2	1/2	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
5	$1/(2+\sqrt{8})$	1/2	-1/2	1
6	$-1/(2+\sqrt{8})$	1/2	-1/2	1
7	-1/2	1/2	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
8	-1/2	1/2	$1/(2+\sqrt{8})$	1

9	-1/2	1/(2+√8)	1/2	1
10	1/2	1/(2+√8)	1/2	1
11	1/2	1/(2+√8)	-1/2	1
12	-1/2	1/(2+√8)	-1/2	1
13	-1/2	-1/(2+√8)	1/2	1
14	-1/2	-1/(2+√8)	-1/2	1
15	1/2	-1/(2+√8)	-1/2	1
16	1/2	-1/(2+√8)	1/2	1
17	-1/(2+√8)	-1/2	1/2	1
18	1/(2+√8)	-1/2	1/2	1
19	1/2	-1/2	1/(2+√8)	1
20	1/2	-1/2	-1/(2+√8)	1
21	1/(2+√8)	-1/2	-1/2	1
22	-1/(2+√8)	-1/2	-1/2	1
23	-1/2	-1/2	-1/(2+√8)	1
24	-1/2	-1/2	1/(2+√8)	1 ; (fig. 56)

3 Octaedro truncado

1	0	2/(3√2)	1/(3√2)	1
2	1/(3√2)	2/(3√2)	0	1
3	0	2/(3√2)	-1/(3√2)	1
4	-1/(3√2)	2/(3√2)	0	1
5	0	1/(3√2)	2/(3√2)	1
6	2/(3√2)	1/(3√2)	0	1
7	0	1/(3√2)	-2/(3√2)	1
8	-2/(3√2)	1/(3√2)	0	1
9	-1/(3√2)	0	2/(3√2)	1
10	1/(3√2)	0	2/(3√2)	1
11	2/(3√2)	0	1/(3√2)	1
12	2/(3√2)	0	-1/(3√2)	1
13	1/(3√2)	0	-2/(3√2)	1
14	-1/(3√2)	0	-2/(3√2)	1
15	-2/(3√2)	0	-1/(3√2)	1
16	-2/(3√2)	0	1/(3√2)	1
17	0	-1/(3√2)	2/(3√2)	1
18	2/(3√2)	-1/(3√2)	0	1

19	0	$-1/(3\sqrt{2})$	$-2/(3\sqrt{2})$	1
20	$-2/(3\sqrt{2})$	$-1/(3\sqrt{2})$	0	1
21	0	$-2/(3\sqrt{2})$	$1/(3\sqrt{2})$	1
22	$1/(3\sqrt{2})$	$-2/(3\sqrt{2})$	0	1
23	0	$-2/(3\sqrt{2})$	$-2/(3\sqrt{2})$	1
24	$-1/(3\sqrt{2})$	$-2/(3\sqrt{2})$	0	1 ; (fig. 57)

4 Icosaedro truncado

1	0	$\phi/2$	$1/6$	1
2	0	$\phi/2$	$-1/6$	1
3	$-\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	$1/3$	1
4	$\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	$1/3$	1
5	$\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	$-1/3$	1
6	$-\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	$-1/3$	1
7	$-\phi/3$	$(\phi+2)/6$	$1/6$	1
8	$\phi/3$	$(\phi+2)/6$	$1/6$	1
9	$\phi/3$	$(\phi+2)/6$	$-1/6$	1
10	$-\phi/3$	$(\phi+2)/6$	$-1/6$	1
11	$-1/6$	$\phi/3$	$(\phi+2)/6$	1
12	$1/6$	$\phi/3$	$(\phi+2)/6$	1
13	$1/6$	$\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1
14	$-1/6$	$\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1
15	$-(2\phi+1)/6$	$1/3$	$\phi/6$	1
16	$(2\phi+1)/6$	$1/3$	$-(\phi+2)/6$	1
17	$(2\phi+1)/6$	$1/3$	$-\phi/6$	1
18	$-(2\phi+1)/6$	$1/3$	$-\phi/6$	1
19	$-1/3$	$\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	1
20	$1/3$	$\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	1
21	$1/3$	$\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1
22	$-1/3$	$\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1
23	$-\phi/2$	$1/6$	0	1
24	$-(\phi+2)/6$	$1/6$	$\phi/3$	1
25	$(\phi+2)/6$	$1/6$	$\phi/3$	1
26	$\phi/2$	$1/6$	0	1
27	$(\phi+2)/6$	$1/6$	0	1
28	$-(\phi+2)/6$	$1/6$	$-\phi/3$	1

29	-1/6	0	$\phi/2$	1
30	1/6	0	$\phi/2$	1
31	1/6	0	$-\phi/2$	1
32	-1/6	0	$-\phi/2$	1
33	$-\phi/2$	-1/6	0	1
34	$-(\phi+2)/6$	-1/6	$\phi/3$	1
35	$(\phi+2)/6$	-1/6	$\phi/3$	1
36	$\phi/2$	-1/6	0	1
37	$(\phi+2)/6$	-1/6	$-\phi/3$	1
38	$-(\phi+2)/6$	-1/6	$-\phi/3$	1
39	-1/3	$-\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	1
40	1/3	$-\phi/6$	$(2\phi+1)/6$	1
41	1/3	$-\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1
42	-1/3	$-\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1
43	$-(2\phi+1)/6$	-1/3	$\phi/6$	1
44	$(2\phi+1)/6$	-1/3	$\phi/6$	1
45	$(2\phi+1)/6$	-1/3	$-\phi/6$	1
46	$-(2\phi+1)/6$	-1/3	$-\phi/6$	1
47	-1/6	$-\phi/3$	$(\phi+2)/6$	1
48	1/6	$-\phi/3$	$(\phi+2)/6$	1
49	1/6	$-\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1
50	-1/6	$-\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1
51	$-\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1/6	1
52	$\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	1/6	1
53	$\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	-1/6	1
54	$-\phi/3$	$-(\phi+2)/6$	-1/6	1
55	$-\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1/3	1
56	$\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	1/3	1
57	$\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	-1/3	1
58	$-\phi/6$	$-(2\phi+1)/6$	-1/3	1
59	0	$-\phi/2$	-1/6	1
60	0	$-\phi/2$	1/6	1 ; (fig. 58)

5 Dodecaedro truncado

1	0	$\phi^2/2$	$1/(2\sqrt{5})$	1
2	0	$\phi^2/2$	$-1/(2\sqrt{5})$	1

3	$-1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
4	$1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
5	$1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
6	$-1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
7	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	1
8	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	1
9	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	1
10	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	1
11	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
12	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
13	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
14	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
15	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	1
16	$-\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
17	$\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
18	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	1
19	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	1
20	$\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
21	$-\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
22	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	1
23	$-\phi^2/2$	$1/(2\sqrt{5})$	0	1
24	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
25	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
26	$\phi^2/2$	$1/(2\sqrt{5})$	0	1
27	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
28	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
29	$-1/(2\sqrt{5})$	0	$\phi^2/2$	1
30	$1/(2\sqrt{5})$	0	$\phi^2/2$	1
31	$1/(2\sqrt{5})$	0	$-\phi^2/2$	1
32	$-1/(2\sqrt{5})$	0	$-\phi^2/2$	1
33	$-\phi^2/2$	$-1/(2\sqrt{5})$	0	1
34	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
35	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
36	$\phi^2/2$	$-1/(2\sqrt{5})$	0	1
37	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
38	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
39	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	1

40	$-\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
41	$\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
42	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$1/(2\sqrt{5})$	1
43	$(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	1
44	$\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
45	$-\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	1
46	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-1/(2\sqrt{5})$	1
47	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
48	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
49	$(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
50	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
51	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	1
52	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$\phi/\sqrt{5}$	1
53	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	1
54	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	$-(2+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-\phi/\sqrt{5}$	1
55	$-1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
56	$1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
57	$1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
58	$-1/(2\sqrt{5})$	$-(3+\sqrt{5})/2\sqrt{5}$	$-(1+\phi)/2\sqrt{5}$	1
59	0	$-\phi^2/2$	$1/(2\sqrt{5})$	1
60	0	$-\phi^2/2$	$-1/(2\sqrt{5})$	1 ; (fig. 59) .

Los siguientes dos poliedros semirregulares son los únicos ejemplos convexos de poliedros cuasiregulares (39) ; la característica más importante es que poseen todos sus ángulos diedros iguales .

6 Cuboctaedro

1	0	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	1
2	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	0	1
3	0	$1/\sqrt{8}$	$-1/\sqrt{8}$	1
4	$-1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	0	1
5	$-1/\sqrt{8}$	0	$1/\sqrt{8}$	1
6	$1/\sqrt{8}$	0	$1/\sqrt{8}$	1
7	$1/\sqrt{8}$	0	$-1/\sqrt{8}$	1
8	$-1/\sqrt{8}$	0	$-1/\sqrt{8}$	1
9	0	$1/\sqrt{8}$	$1/\sqrt{8}$	1

10 $1/\sqrt{8}$ $-1/\sqrt{8}$ 0 1
 11 0 $-1/\sqrt{8}$ $-1/\sqrt{8}$ 1
 12 $-1/\sqrt{8}$ $-1/\sqrt{8}$ 0 1 ; (fig. 60)

7 Icosidodecaedro

1 0 $\phi/2$ 0 1
 2 $-\phi/4$ $(\phi+1)/4$ $1/4$ 1
 3 $\phi/4$ $(\phi+1)/4$ $1/4$ 1
 4 $\phi/4$ $(\phi+1)/4$ $-1/4$ 1
 5 $-\phi/4$ $(\phi+1)/4$ $-1/4$ 1
 6 $-1/4$ $\phi/4$ $(\phi+1)/4$ 1
 7 $1/4$ $\phi/4$ $(\phi+1)/4$ 1
 8 $1/4$ $\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ 1
 9 $-1/4$ $\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ 1
 10 $-(\phi+1)/4$ $1/4$ $\phi/4$ 1
 11 $(\phi+1)/4$ $1/4$ $\phi/4$ 1
 12 $(\phi+1)/4$ $1/4$ $-\phi/4$ 1
 13 $-(\phi+1)/4$ $1/4$ $-\phi/4$ 1
 14 $-\phi/2$ 0 0 1
 15 0 0 $\phi/2$ 1
 16 $\phi/2$ 0 0 1
 17 0 0 $-\phi/2$ 1
 18 $-(\phi+1)/4$ $-1/4$ $\phi/4$ 1
 19 $(\phi+1)/4$ $-1/4$ $\phi/4$ 1
 20 $(\phi+1)/4$ $-1/4$ $-\phi/4$ 1
 21 $-(\phi+1)/4$ $-1/4$ $-\phi/4$ 1
 22 $-1/4$ $-\phi/4$ $(\phi+1)/4$ 1
 23 $1/4$ $-\phi/4$ $(\phi+1)/4$ 1
 24 $1/4$ $-\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ 1
 25 $-1/4$ $-\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ 1
 26 $-\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ $1/4$ 1
 27 $\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ $1/4$ 1
 28 $\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ $-1/4$ 1
 29 $-\phi/4$ $-(\phi+1)/4$ $-1/4$ 1
 30 0 $-\phi/2$ 0 1 ; (fig. 61)

Los siguientes cuatro poliedros llevan en su nombre el prefijo "rombi-" debido a que para generarlos o dibujarlos se puede partir de unos poliedros que tienen sus caras con formas rómbicas . Estos poliedros con caras rómbicas son fundamentales en investigaciones ulteriores y los veremos con más detalle adelante .

8 Pequeño Rombicuboctaedro

1	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
2	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
3	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
4	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
5	$-1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
6	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	1
7	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	1
8	$1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
9	$1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
10	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	1
11	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	1
12	$-1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
13	$-1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
14	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	1
15	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/2$	1
16	$1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
17	$1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
18	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	1
19	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	1
20	$-1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
21	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
22	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	$1/(2+\sqrt{8})$	1
23	$1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1
24	$-1/(2+\sqrt{8})$	$-1/2$	$-1/(2+\sqrt{8})$	1 ; (fig. 62)

9 Pequeño Rombicosidodecaedro

1	$-(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	1
2	$(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	1
3	$(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	1
4	$-(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	$-(\phi-1)/2\phi$	1

5	-1/2	$\sqrt{5}/(2\phi)$	0	1
6	1/2	$\sqrt{5}/(2\phi)$	0	1
7	-1/(2 ϕ)	1/ ϕ	1/2	1
8	1/(2 ϕ)	1/ ϕ	1/2	1
9	1/(2 ϕ)	1/ ϕ	-1/2	1
10	-1/(2 ϕ)	1/ ϕ	-1/2	1
11	-1/ ϕ	1/2	-1/(2 ϕ)	1
12	-1/ ϕ	1/2	1/(2 ϕ)	1
13	0	1/2	$\sqrt{5}/(2\phi)$	1
14	1/ ϕ	1/2	1/(2 ϕ)	1
15	1/ ϕ	1/2	-1/(2 ϕ)	1
16	0	1/2	$-\sqrt{5}/(2\phi)$	1
17	-1/2	1/(2 ϕ)	1/ ϕ	1
18	1/2	1/(2 ϕ)	1/ ϕ	1
19	1/2	1/(2 ϕ)	-1/ ϕ	1
20	-1/2	1/(2 ϕ)	-1/ ϕ	1
21	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	1
22	$-(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	1
23	$(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	1
24	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	1
25	$\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	1
26	$(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	$-\phi/2$	1
27	$-(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	$-\phi/2$	1
28	$-\phi/2$	$(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	1
29	$-\sqrt{5}/(2\phi)$	0	1/2	1
30	$\sqrt{5}/(2\phi)$	0	1/2	1
31	$\sqrt{5}/(2\phi)$	0	-1/2	1
32	$-\sqrt{5}/(2\phi)$	0	-1/2	1
33	$-\phi/2$	$-(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	1
34	$-\phi/2$	$-(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	1
35	$-(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	1
36	$(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	$\phi/2$	1
37	$\phi/2$	$-(\phi-1)/2\phi$	$(\phi-1)/2\phi$	1
38	$\phi/2$	$-(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	1
39	$(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	$-\phi/2$	1
40	$-(\phi-1)/2\phi$	$-(\phi-1)/2\phi$	$-\phi/2$	1
41	-1/2	-1/(2 ϕ)	1/ ϕ	1

42	1/2	-1/(2φ)	1/φ	1
43	1/2	-1/(2φ)	-1/φ	1
44	-1/2	-1/(2φ)	-1/φ	1
45	-1/φ	-1/2	-1/(2φ)	1
46	-1/φ	-1/2	1/(2φ)	1
47	0	-1/2	√5/(2φ)	1
48	1/φ	-1/2	1/(2φ)	1
49	1/φ	-1/2	-1/(2φ)	1
50	0	-1/2	-√5/(2φ)	1
51	-1/(2φ)	-1/φ	1/2	1
52	1/(2φ)	-1/φ	1/2	1
53	1/(2φ)	-1/φ	-1/2	1
54	-1/(2φ)	-1/φ	-1/2	1
55	-1/2	-√5/(2φ)	0	1
56	1/2	-√5/(2φ)	0	1
57	-(φ-1)/2φ	-φ/2	(φ-1)/2φ	1
58	(φ-1)/2φ	-φ/2	(φ-1)/2φ	1
59	(φ-1)/2φ	-φ/2	-(φ-1)/2φ	1
60	-(φ-1)/2φ	-φ/2	-(φ-1)/2φ	1 ; (fig. 63)

10 Gran Rombicuboctaedro

1	-1/2(√8+1)	1/2	(1+√2)/2(√8+1)	1
2	1/2(√8+1)	1/2	(1+√2)/2(√8+1)	1
3	(1+√2)/2(√8+1)	1/2	1/2(√8+1)	1
4	(1+√2)/2(√8+1)	1/2	-1/2(√8+1)	1
5	1/2(√8+1)	1/2	-(1+√2)/2(√8+1)	1
6	-1/2(√8+1)	1/2	-(1+√2)/2(√8+1)	1
7	-(1+√2)/2(√8+1)	1/2	-1/2(√8+1)	1
8	-(1+√2)/2(√8+1)	1/2	1/2(√8+1)	1
9	-1/2(√8+1)	(1+√2)/2(√8+1)	1/2	1
10	1/2(√8+1)	(1+√2)/2(√8+1)	1/2	1
11	1/2	(1+√2)/2(√8+1)	1/2(√8+1)	1
12	1/2	(1+√2)/2(√8+1)	-1/2(√8+1)	1
13	1/2(√8+1)	(1+√2)/2(√8+1)	-1/2	1
14	-1/2(√8+1)	(1+√2)/2(√8+1)	-1/2	1
15	-1/2	(1+√2)/2(√8+1)	-1/2(√8+1)	1

16	-1/2	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	1
17	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
18	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
19	1/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
20	i/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
21	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
22	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
23	-1/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
24	-1/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
25	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
26	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
27	1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
28	1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
29	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
30	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
31	-1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
32	-1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
33	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
34	$1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1/2	1
35	1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	1
36	1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1
37	$1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
38	$-1/2(\sqrt{8+1})$	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	1
39	-1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1
40	-1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	$1/2(\sqrt{8+1})$	1
41	$-1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
42	$1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
43	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	1
44	$(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1
45	$1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
46	$1/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	1
47	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$-1/2(\sqrt{8+1})$	1
48	$-(1+\sqrt{2})/2(\sqrt{8+1})$	-1/2	$1/2(\sqrt{8+1})$	1 ; (fig. 64)

11 Gran Rombicosidodecaedro

$$1 \quad -1/(6\phi) \quad (\phi^2+2)/6 \quad 1/(6\phi) \quad 1$$

2	$1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	1
3	$1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	1
4	$-1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	1
5	$\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	1
6	$\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	1
7	$\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	1
8	$-\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	1
9	$-\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	1
10	$\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	1
11	$\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	1
12	$\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	1
13	$-1/3$	$(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	1
14	$1/3$	$(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	1
15	$1/3$	$(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	1
16	$-1/3$	$(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	1
17	$-1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	1
18	$1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	1
19	$1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	1
20	$-1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	1
21	$-\phi/6$	$1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	1
22	$\phi/6$	$1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	1
23	$\phi/6$	$1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	1
24	$-\phi/6$	$1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	1
25	$-1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	1
26	$1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	1
27	$1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	1
28	$-1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	1
29	$-(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	$1/3$	1
30	$(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	$1/3$	1
31	$(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	1
32	$-(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	1
33	$-(\phi+1)/6\phi$	$1/3$	$(\phi^2+1)/6$	1
34	$(\phi+1)/6\phi$	$1/3$	$(\phi^2+1)/6$	1
35	$(\phi+1)/6\phi$	$1/3$	$-(\phi+1)/6$	1
36	$-(\phi+1)/6\phi$	$1/3$	$-(\phi+1)/6$	1
37	$-(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	$1/2$	1
38	$-1/(3\phi)$	$\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	1

39	$1/(3\phi)$	$\phi/6$	$1/2$	1
40	$(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	$1/2$	1
41	$(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	$-1/2$	1
42	$-1/(3\phi)$	$\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	1
43	$-1/(3\phi)$	$\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	1
44	$-(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	$-1/2$	1
45	$-(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	$\phi/6$	1
46	$(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	$\phi/6$	1
47	$(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	$-\phi/6$	1
48	$-(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	$-\phi/6$	1
49	$-(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	1
50	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	1
51	$-1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	1
52	$1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	1
53	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	1
54	$(\phi^2+1)/6$	$1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	1
55	$(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	1
56	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	1
57	$1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	1
58	$-1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	1
59	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	1
60	$-(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	1
61	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	$\phi^2/6$	1
62	$-1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	1
63	$1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	1
64	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	$(\phi^2+2)/6$	1
65	$(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	1
66	$(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	1
67	$(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	1
68	$1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	1
69	$-1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	1
70	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	1
71	$-(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	$-1/(6\phi)$	1
72	$-(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	$1/(6\phi)$	1
73	$-(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	$\phi/6$	1
74	$(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	$\phi/6$	1
75	$(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	$-\phi/6$	1

76	$-(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	$-\phi/6$	1
77	$-(\phi+1)/6$	$-\phi/6$	$1/2$	1
78	$-1/(3\phi)$	$-\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	1
79	$1/(3\phi)$	$-\phi/6$	$(2+\sqrt{5})/6$	1
80	$(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	$1/2$	1
81	$(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	$1/2$	1
82	$1/(3\phi)$	$-\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	1
83	$-1/(3\phi)$	$-\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	1
84	$-(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	$-1/2$	1
85	$-(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	$(\phi^2+1)/6$	1
86	$(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	$(\phi^2+1)/6$	1
87	$(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	1
88	$-(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	1
89	$-(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	$1/3$	1
90	$(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	$1/3$	1
91	$(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	1
92	$-(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	$-1/3$	1
93	$-1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	1
94	$1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	$(\phi+\sqrt{5})/6$	1
95	$1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	1
96	$-1/(6\phi)$	$-\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	1
97	$-\phi/6$	$-1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	1
98	$\phi/6$	$-1/2$	$(\phi+1)/3\phi$	1
99	$\phi/6$	$-1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	1
100	$-\phi/6$	$-1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	1
101	$-1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	1
102	$1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	$\phi/6$	1
103	$1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	1
104	$-1/2$	$-(\phi+1)/3\phi$	$-\phi/6$	1
105	$-1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	1
106	$1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	$(\phi+2)/6\phi$	1
107	$1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	1
108	$-1/3$	$-(\phi^2+1)/6$	$-(\phi+2)/6\phi$	1
109	$-\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	1
110	$\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	1
111	$\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$1/(6\phi)$	1
112	$-\phi^2/6$	$-(\phi+\sqrt{5})/6$	$-1/(6\phi)$	1

113	$-\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	1
114	$\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	$1/(3\phi)$	1
115	$\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	1
116	$-\phi/6$	$-(2+\sqrt{5})/6$	$-1/(3\phi)$	1
117	$-1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	1
118	$1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	$1/(6\phi)$	1
119	$1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	1
120	$-1/(6\phi)$	$-(\phi^2+2)/6$	$-1/(6\phi)$	1 ; (fig. 65)

Los poliedros semirregulares que siguen tienen algo de quimérico , pues no bastan los instrumentos que hasta ahora hemos utilizado para generarlos . Quizá en eso radica su encanto . Exigen el recurrir a un poco de álgebra más elevada , lo cual hace necesario modificar un poco nuestra aproximación a la generación de poliedros . Si estamos en la disposición de aceptar que , virtualmente toda construcción geométrica se puede realizar mediante la iteración o algún otro algoritmo semejante (vgr. las fracciones continuas) entonces aun podremos considerar como suficientes regla y compás . Pero como tal proceso sería infinito , no hay otro camino que utilizar la mejor aproximación .

Esto no significa que renunciaremos a nuestros instrumentos predilectos . Es más , valga decir que incluso un veloz artilugio electrónico utiliza aproximaciones , por ejemplo , al calcular una tangente .

Los poliedros en cuestión se les llama romos o achataados , y únicamente el cubo y el dodecaedro tienen versiones romas o achatadas . Recordaremos que entre el conjunto de poliedros semirregulares existen dos que tienen versiones enantiomorfas . Careciendo de planos de simetría reflexiva exhiben un "movimiento" parecido a un giro en todas las caras que pueden inscribirse , en el octaedro para el caso del cubo achatado , y en el icosaedro en el caso del dodecaedro achatado . Las propiedades métricas (40) involucran ecuaciones cúbicas .

Para efectos de trazo no es necesario utilizar muchas cifras decimales : dentro de una hoja normal de 11x 8 pulgadas nos son suficientes tres cifras después de la coma . Pude calcular las coordenadas hasta con 15 cifras exactas , pero es físicamente imposible dibujar ya no digamos .0000000000000001 unidades sino únicamente .01 , por lo cual creo conveniente dar seis cifras decimales exactas .

La ecuación $2\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha-1=0$ tiene como raíz real 0.3522011287389. . . y sitúa un punto en un octaedro de arista unidad que permite el trazo del cubo achatado . De un modo similar , al resolver la ecuación $\phi^2\alpha^3-4\alpha^2+4\alpha-1=0$, obtenemos la raíz positiva

real 0.3397718676059. . . que permite situar un punto en un icosaedro de arista unidad .
Entonces las coordenadas de los vértices son (41) ,

12 Cubo Achatado o Romo

1	-.067442	.384446	.228155	1
2	.228155	.384446	.067442	1
3	.067442	.384446	-.228155	1
4	-.228155	.384446	-.067442	1
5	.191487	.209019	.352201	1
6	.352201	.209019	.191487	1
7	-.191487	.209019	.352201	1
8	-.352201	.209019	.191487	1
9	-.124045	.113641	.419643	1
10	.419643	.113641	.124045	1
11	.124045	.113641	-.419643	1
12	-.419643	.113641	-.124045	1
13	.124045	-.113641	.419643	1
14	.419643	-.113641	-.124045	1
15	-.124045	-.113641	-.419643	1
16	-.419643	-.113641	.124045	1
17	-.191487	-.209019	.352201	1
18	.352201	-.209019	.191487	1
19	.191487	-.209019	-.352201	1
20	-.352201	-.209019	-.191487	1
21	.067442	-.384446	.228155	1
22	.228155	-.384446	-.067442	1
23	-.067442	-.384446	-.228155	1
24	-.228155	-.384446	.067442	1 ; (fig. 66)

13 Dodecaedro Achatado o Romo

1	-.120407	.763025	.136381	1
2	.120407	.763025	-.136381	1
3	.233970	.719648	.206566	1
4	-.233970	.719648	-.206566	1
5	.454639	.635360	-.070185	1
6	-.454639	.635360	.070185	1
7	-.308386	.599240	.401077	1
8	.308386	.599240	-.401077	1

9	.265009	.529055	.514952	1
10-	.265009	.529055	-.514952	1
11	.529055	.514952	.265009	1
12-	.529055	.514952	-.265009	1
13-	.070185	.454639	.635360	1
14	.070185	.454639	-.635360	1
15-	.599240	.401390	.308386	1
16	.599240	.401390	-.308386	1
17-	.401390	.308386	.599240	1
18	.401390	.308386	-.599240	1
19	.514952	.265009	.529055	1
20-	.514952	.265009	-.529055	1
21	.206566	.233970	.719648	1
22-	.206566	.233970	-.719648	1
23	.719648	.206566	.233970	1
24-	.719648	.206566	-.233970	1
25	.763025	.136381	-.120407	1
26-	.763025	.136381	.120407	1
27-	.136381	.120407	.763025	1
28	.136381	.120407	-.763025	1
29-	.635360	.070185	.454639	1
30	.635360	.070185	-.454639	1
31	.635360	-.070185	.454639	1
32-	.635360	-.070185	-.454639	1
33	.136381	-.120407	.763025	1
34-	.136381	-.120407	-.763025	1
35-	.763025	-.136381	-.120407	1
36	.763025	-.136381	.120407	1
37-	.719648	-.206566	.233970	1
38	.719648	-.206566	-.233970	1
39-	.206566	-.233970	.719648	1
40	.206566	-.233970	-.719648	1
41-	.514952	-.265009	.529055	1
42	.514952	-.265009	-.529055	1
43	.401390	-.308386	.599240	1
44-	.401390	-.308386	-.599240	1
45	.599240	-.401390	.308386	1
46-	.599240	-.401390	-.308386	1
47	.070185	-.454639	.635360	1
48-	.070185	-.454639	-.635360	1

49-	.529055	-.514952	.265009	1
50	.529055	-.514952	-.265009	1
51-	.265009	-.529055	.514952	1
52	.265009	-.529055	-.514952	1
53	.308386	-.599240	.401390	1
54-	.308386	-.599240	-.401390	1
55	.454639	-.635360	.070185	1
56-	.454639	-.635360	-.070185	1
57-	.233970	-.719648	.206566	1
58	.233970	-.719648	-.206566	1
59	.120407	-.763025	.136381	1
60-	.120407	-.763025	-.136381	1 ; (fig. 67)

Los 5 sólidos regulares y los 13 semirregulares pertenecen a una clase de poliedros conocidos como uniformes . La serie infinita de prismas y antiprismas también pertenece a esta . Uniforme significa que el poliedro está construido con polígonos regulares y que todos sus vértices son congruentes . Mientras estos que discutíamos son convexos el conjunto total también comprende a muchos que son cóncavos , i.e presentan hoyitos y surcos en su figura .Hasta mediados de la década del setenta el conjunto comprendía 75 poliedros distintos .En las siguientes láminas ilustro algunos de ellos.

Los poliedros semirregulares poseen sus duales . La característica principal común de estos poliedros es la de tener todas sus caras congruentes , consecuencia directa de la congruencia de vértices de los poliedros semirregulares . Mientras los poliedros semirregulares son isósceles , sus duales poseen aristas de diferente longitud . Sus caras ya no son polígonos regulares . Un poliedro semirregular no posee una esfera que toque todos los centros de todas sus caras , pero sí posee una que pasa por sus vértices , en los duales el caso es al revés : existe una esfera que toca los "centros" de todas las caras pero no existe una que pase por todos y cada uno de sus vértices . La única esfera común que comparten ambos , el poliedro semirregular y su dual , es una que toca los puntos medios de las aristas del semirregular y al mismo tiempo algún punto en las aristas del respectivo recíproco .

El trazo de la cara del poliedro dual perteneciente a uno semirregular depende de las dimensiones de las aristas de la figura vertical (42) en el poliedro semirregular . Tomando en cuenta que esta figura vertical se puede inscribir en un círculo , la cara del dual , así como sus propiedades métricas , se obtienen fácilmente (43) .

Aquí es fácil darse cuenta que aquellos vértices que "desaparecieron" durante el proceso de truncamiento en los poliedros semirregulares , tienen como contraparte unos

vértices en el poliedro dual que parecen "emerger" del poliedro recíproco el cual en principio truncamos . En algunos textos de química inorgánica , este nuevo vértice se toma como referencia para decir que una cara queda "monocofiada" . En la tradición de los textos sobre sólidos que no son necesariamente los de la química , suele utilizarse la partícula en griego "-akis-" para denotar ese nuevo vértice .

El par recíproco se puede identificar usando el par de números que les he asignado . Así , por ejemplo , el par de números "5-5' " corresponde al par recíproco "dodécaedro truncado-triakisicosaedro".

1' Triakistetraedro

1'	-1/2	1/2	-1/2	1
2'	1/2	1/2	1/2	1
3'	-3/10	3/10	3/10	1
4'	3/10	3/10	-3/10	1
5'	-3/10	-3/10	-3/10	1
6'	3/10	-3/10	3/10	1
7'	-1/2	-1/2	1/2	1
8'	-1/2	-1/2	-1/2	1 ; (fig .68)

2' Triakisoctaedro

1'	0	1	0	1
2'	1-√2	√2-1	√2-1	1
3'	√2-1	√2-1	√2-1	1
4'	√2-1	√2-1	1-√2	1
5'	1-√2	√2-1	1-√2	1
6'	-1	0	0	1
7'	0	0	1	1
8'	1	0	0	1
9'	0	0	-1	1
10'	1-√2	1-√2	√2-1	1
11'	√2-1	1-√2	√2-1	1
12'	√2-1	1-√2	1-√2	1
13'	1-√2	1-√2	1-√2	1
14'	0	-1	0	1 ; (fig. 69)

3' Tetrakishehexaedro

1'	0	$3/(4\sqrt{2})$	0	1
2'	$-1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	1
3'	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	1
4'	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	1
5'	$-1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	1
6'	$-3/(4\sqrt{2})$	0	0	1
7'	0	0	$3/(4\sqrt{2})$	1
8'	$3/(4\sqrt{2})$	0	0	1
9'	0	0	$-3/(4\sqrt{2})$	1
10'	$-1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	1
11'	$1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	1
12'	$1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	1
13'	$-1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	$-1/(2\sqrt{2})$	1
14'	0	$-3/(4\sqrt{2})$	0	1 ; (fig.70)

4' Pentakisdodecaedro

1'	$-1/(2\phi)$	$\phi/2$	0	1
2'	$1/(2\phi)$	$\phi/2$	0	1
3'	0	$3\phi/(10-2\phi)$	$3/(10-2\phi)$	1
4'	0	$3\phi/(10-2\phi)$	$-3/(10-2\phi)$	1
5'	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	1
6'	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
7'	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	1
8'	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	1
9'	$-3\phi/(10-2\phi)$	$3/(10-2\phi)$	0	1
10'	$3\phi/(10-2\phi)$	$3/(10-2\phi)$	0	1
11'	0	$1/(2\phi)$	$\phi/2$	1
12'	0	$1/(2\phi)$	$-\phi/2$	1
13'	$-\phi/2$	0	$1/(2\phi)$	1
14'	$-3/(10-2\phi)$	0	$3\phi/(10-2\phi)$	1
15'	$3/(10-2\phi)$	0	$3\phi/(10-2\phi)$	1
16'	$\phi/2$	0	$1/(2\phi)$	1
17'	$\phi/2$	0	$-1/(2\phi)$	1
18'	$3/(10-2\phi)$	0	$-3\phi/(10-2\phi)$	1
19'	$-3/(10-2\phi)$	0	$-3\phi/(10-2\phi)$	1

20'	$-\phi/2$	0	$-1/(2\phi)$	1
21'	0	$-1/(2\phi)$	$\phi/2$	1
22'	0	$-1/(2\phi)$	$-\phi/2$	1
23'	$-3\phi/(10-2\phi)$	$-3/(10-2\phi)$	0	1
24'	$3\phi/(10-2\phi)$	$-3/(10-2\phi)$	0	1
25'	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$	1
26'	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	1
27'	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1
28'	$-1/2$	$-1/2$	$-1/2$	1
29'	0	$-3\phi/(10-2\phi)$	$3/(10-2\phi)$	1
30'	0	$-3\phi/(10-2\phi)$	$-3/(10-2\phi)$	1
31'	$-1/(2\phi)$	$-\phi/2$	0	1
32'	$1/(2\phi)$	$-\phi/2$	0	1 ; (fig. 71)

5' Triakisicosaedro

1'	$-\phi/2$	$\phi^2/2$	0	1
2'	$\phi/2$	$\phi^2/2$	0	1
3'	0	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
4'	0	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
5'	0	$\phi/2$	$\phi^2/2$	1
6'	0	$\phi/2$	$-\phi^2/2$	1
7'	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
8'	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
9'	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
10'	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
11'	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	1
12'	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	1
13'	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
14'	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
15'	$\phi^2/2$	0	$\phi/2$	1
16'	$\phi^2/2$	0	$-\phi/2$	1
17'	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
18'	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
19'	$-\phi^2/2$	0	$-\phi/2$	1
20'	$-\phi^2/2$	0	$\phi/2$	1
21'	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	1

22'	$\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	0	1
23'	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
24'	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
25'	$(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
26'	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	$-(\phi^2+1)/(7-\sqrt{5})$	1
27'	0	$-\phi/2$	$\phi^2/2$	1
28'	0	$-\phi/2$	$-\phi^2/2$	1
29'	0	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
30'	0	$-\phi^2\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	$-\sqrt{5}/(7-\sqrt{5})$	1
31'	$-\phi/2$	$-\phi^2/2$	0	1
32'	$\phi/2$	$-\phi^2/2$	0	1 ; (fig. 72)

Los poliedros cuasiregulares tienen como duales a unos muy importantes limitados con figuras rómbicas por caras .

6' Dodecaedro Rómbico

1'	0	$3/(2\sqrt{8})$	0	1
2'	$-3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	1
3'	$3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	1
4'	$3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	1
5'	$-3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	1
6'	$-3/(2\sqrt{8})$	0	0	1
7'	0	0	$3/(2\sqrt{8})$	1
8'	$3/(2\sqrt{8})$	0	0	1
9'	0	0	$-3/(2\sqrt{8})$	1
10'	$-3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	1
11'	$3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	$3/(8\sqrt{2})$	1
12'	$3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	1
13'	$-3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	$-3/(8\sqrt{2})$	1
14'	0	$-3/(2\sqrt{8})$	0	1 ; (fig. 73)

7' Triacentaedro Rómbico

1'	$-\sqrt{5}/8$	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	1
2'	0	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1

3'	$\sqrt{5}/8$	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	1
4'	0	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1
5'	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	0	1
6'	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1
7'	$(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1
8'	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	0	1
9'	$(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1
10'	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1
11'	0	$\sqrt{5}/8$	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
12'	0	$\sqrt{5}/8$	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
13'	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	$\sqrt{5}/8$	1
14'	$-(\phi\sqrt{5})/8$	0	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
15'	$(\phi\sqrt{5})/8$	0	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
16'	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	$\sqrt{5}/8$	1
17'	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	$-\sqrt{5}/8$	1
18'	$(\phi\sqrt{5})/8$	0	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
19'	$-(\phi\sqrt{5})/8$	0	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
20'	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	$-\sqrt{5}/8$	1
21'	0	$-\sqrt{5}/8$	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
22'	0	$-\sqrt{5}/8$	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	1
23'	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	$-\phi\sqrt{5}/8$	0	1
24'	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1
25'	$(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1
26'	$(\phi^2\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	0	1
27'	$(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1
28'	$(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1
29'	$-\sqrt{5}/8$	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	1
30'	0	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	$(\phi\sqrt{5})/8$	1
31'	$\sqrt{5}/8$	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	0	1
32'	0	$-(\phi^2\sqrt{5})/8$	$-(\phi\sqrt{5})/8$	1 ; (fig. 74)

Los dos poliedros que siguen son los recíprocos de los poliedros semirregulares que llevan la partícula "rombi-" en su nombre , y tienen sus caras con forma trapezoidal .

8' Icositetraedro Trapezoidal

1'	0	$2-\sqrt{2}$	0	1
2'	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	1
3'	0	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
4'	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	1
5'	0	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
6'	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
7'	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
8'	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
9'	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
10'	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
11'	0	0	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
12'	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
13'	$2-\sqrt{2}$	0	0	1
14'	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
15'	0	0	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
16'	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
17'	$-(2-\sqrt{2})$	0	0	1
18'	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
19'	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
20'	$\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
21'	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}/(3+\sqrt{2})$	1
22'	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	1
23'	0	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
24'	$(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	0	1
25'	0	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	$-(2-\sqrt{2})/\sqrt{2}$	1
26'	0	$-(2-\sqrt{2})$	0	1 ; (fig.75)

9' Hexacontaedro Trapezoidal

1'	0	$(4\phi+3)/(5\phi+3)$	0	1
2'	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	1
3'	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	1
4'	0	$(2+\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
5'	0	$(2+\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
6'	$-(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	1
7'	$(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	1

8'	$(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	1
9'	$-(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	1
10'	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
11'	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
12'	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
13'	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
14'	$-(2+\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	0	1
15'	$(2+\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	0	1
16'	$-(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	1
17'	$(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	1
18'	$(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	1
19'	$-(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	1
20'	0	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	1
21'	0	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	1
22'	$-\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	1
23'	$\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	1
24'	$\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	1
25'	$-\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	1
26'	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	1
27'	$\sqrt{5}/3\phi$	0	$(2+\phi)/3\phi$	1
28'	0	0	$(4\phi+3)/(5\phi+3)$	1
29'	$\sqrt{5}/3\phi$	0	$(2+\phi)/3\phi$	1
30'	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	1
31'	$(4\phi+3)/(5\phi+3)$	0	0	1
32'	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	1
33'	$\sqrt{5}/3\phi$	0	$-(2+\phi)/3\phi$	1
34'	0	0	$-(4\phi+3)/(5\phi+3)$	1
35'	$-\sqrt{5}/3\phi$	0	$-(2+\phi)/3\phi$	1
36'	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	1
37'	$-(4\phi+3)/(5\phi+3)$	0	0	1
38'	$-\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	1
39'	$\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	$(3-\phi)/2\phi$	1
40'	$\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	1
41'	$\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	1
42'	0	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$(11\phi+7)/(14\phi+9)$	1
43'	0	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	1
44'	$-(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	1

45'	$(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	$\sqrt{5}/2\phi$	1
46'	$-(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	1
47'	$-(3\phi-4)/2\phi$	$-(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	1
48'	$-(2+\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	0	1
49'	$(2+\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	0	1
50'	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
51'	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
52'	$(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
53'	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	$-(7\phi+4)/(14\phi+9)$	1
54'	$-(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	1
55'	$(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	$(3\phi-4)/2\phi$	1
56'	$(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	1
57'	$-(3-\phi)/2\phi$	$-\sqrt{5}/2\phi$	$-(3\phi-4)/2\phi$	1
58'	0	$-(2+\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
59'	0	$-(2+\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
60'	$-(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	1
61'	$(4\phi+3)/(14\phi+9)$	$-(11\phi+7)/(14\phi+9)$	0	1
62'	0	$-(4\phi+3)/(5\phi+3)$	0	1 ; (fig. 76)

10' Hexakisoctaedro

1'	0	$(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	0	1
2'	-3/7	3/7	0	1
3'	0	3/7	3/7	1
4'	3/7	3/7	0	1
5'	0	3/7	-3/7	1
6'	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	1
7'	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	1
8'	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	1
9'	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8}+1)$	1
10'	$-(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	0	0	1
11'	-3/7	0	3/7	1
12'	0	0	$(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	1
13'	3/7	0	3/7	1
14'	$(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	0	0	1
15'	3/7	0	-3/7	1
16'	0	0	$-(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	1
17'	-3/7	0	-3/7	1

18'	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	1
19'	$\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	1
20'	$\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	1
21'	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	$-\sqrt{2}/(\sqrt{8+1})$	1
22'	$-3/7$	$-3/7$	0	1
23'	0	$-3/7$	$3/7$	1
24'	$3/7$	$-3/7$	0	1
25'	0	$-3/7$	$-3/7$	1
26'	0	$-(6-3\sqrt{2})/(11-6\sqrt{2})$	0	1 ; (fig. 77)

11' Hexakisicosaedro

1'	0	$(\phi+2)/(\phi+3)$	0	1
2'	$-(3-\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3$	0	1
3'	$(3-\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3$	0	1
4'	0	$1/(3-\phi)$	$1/\sqrt{5}$	1
5'	0	$1/(3-\phi)$	$-1/\sqrt{5}$	1
6'	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
7'	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
8'	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
9'	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
10'	$-\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
11'	$\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
12'	$\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
13'	$-\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
14'	$-1/(3-\phi)$	$1/\sqrt{5}$	0	1
15'	$1/(3-\phi)$	$1/\sqrt{5}$	0	1
16'	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
17'	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
18'	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
19'	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
20'	0	$(3-\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3$	1
21'	0	$(3-\phi)/3\phi$	$-1/(3-\phi)$	1
22'	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
23'	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
24'	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
25'	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1

26'	$-\sqrt{5}/3$	0	$(3-\phi)/3\phi$	1
27'	$-1/\sqrt{5}$	0	$1/(3-\phi)$	1
28'	0	0	$(\phi+2)/(\phi+3)$	1
29'	$1/\sqrt{5}$	0	$1/(3-\phi)$	1
30'	$\sqrt{5}/3$	0	$(3-\phi)/3\phi$	1
31'	$(\phi+2)/(\phi+3)$	0	0	1
32'	$\sqrt{5}/3$	0	$-(3-\phi)/3\phi$	1
33'	$1/\sqrt{5}$	0	$-\sqrt{5}/3$	1
34'	0	0	$-(\phi+2)/(\phi+3)$	1
35'	$-1/\sqrt{5}$	0	$-\sqrt{5}/3$	1
36'	$-\sqrt{5}/3$	0	$-(3-\phi)/3\phi$	1
37'	$-(\phi+2)/(\phi+3)$	0	0	1
38'	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
39'	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
40'	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
41'	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
42'	0	$-(3-\phi)/3\phi$	$\sqrt{5}/3$	1
43'	0	$-(3-\phi)/3\phi$	$-1/(3-\phi)$	1
44'	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
45'	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
46'	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
47'	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	1
48'	$-1/(3-\phi)$	$-1/\sqrt{5}$	0	1
49'	$1/(3-\phi)$	$-1/\sqrt{5}$	0	1
50'	$-\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
51'	$\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	$\sqrt{5}/3\phi$	1
52'	$\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
53'	$-\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	$-\sqrt{5}/3\phi$	1
54'	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
55'	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
56'	$\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
57'	$-\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-\phi\sqrt{5}/(6\phi-4)$	$-(3-\phi)/(6\phi-4)$	1
58'	0	$-1/(3-\phi)$	$1/\sqrt{5}$	1
59'	0	$-1/(3-\phi)$	$-1/\sqrt{5}$	1
60'	$-(3-\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3$	0	1
61'	$(3-\phi)/3\phi$	$-\sqrt{5}/3$	0	1
62'	0	$-(\phi+2)/(\phi+3)$	0	1 ; (fig. 78)

Siguen los recíprocos de los poliedros romos , y verás que estos también carecen de planos de simetría reflexiva . A semejanza con los casos del cubo y dodecaedro romos , doy las coordenadas de sus vértices con seis cifras decimales exactas.

12' Icositetraedro Pentagonal

1'	0	.458062	0	1
2'	-.228155	.344421	.124045	1
3'	.124045	.344421	.228155	1
4'	.228155	.344421	-.124045	1
5'	-.124045	.344421	-.228155	1
6'	-.191487	.249043	.295597	1
7'	0	.249043	.352201	1
8'	.295597	.249043	.191487	1
9'	.352201	.249043	0	1
10'	.191487	.249043	-.295597	1
11'	0	.249043	-.352201	1
12'	-.295597	.249043	-.191487	1
13'	-.352201	.249043	0	1
14'	.067442	.073616	.419643	1
15'	.419643	.073616	-.067442	1
16'	-.067442	.073616	.419643	1
17'	-.419643	.073616	.067442	1
18'	-.323899	0	.323899	1
19'	.323899	0	.323899	1
20'	.323899	0	-.323899	1
21'	-.323899	0	-.323899	1
22'	-.067442	-.073616	.419643	1
23'	.419643	-.073616	.067442	1
24'	.067442	-.073616	-.419643	1
25'	-.419643	-.073616	-.067442	1
26'	-.295597	-.249043	.191487	1
27'	0	-.249043	.352201	1
28'	.191487	-.249043	.295597	1
29'	.352201	-.249043	0	1
30'	.295597	-.249043	-.191487	1
31'	0	-.249043	-.352201	1
32'	-.191487	-.249043	-.295597	1

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

33' -.352201 -.249043 0 1
 34' -.124045 -.344421 .228155 1
 35' .228155 -.344421 .124045 1
 36' .124045 -.344421 -.228155 1
 37' -.228155 -.334421 -.124045 1
 38' 0 -.458062 0 1 ; (fig. 79)

13' Hexacontaedro Pentagonal

1' .079496 .763025 .070185 1
 2' -.079496 .763025 -.070185 1
 3' -.274881 .719648 0 1
 4' .274881 .719648 0 1
 5' 0 .687121 .424664 1
 6' 0 .687121 -.424664 1
 7' -.300165 .678737 .206566 1
 8' .300165 .378737 -.206566 1
 9' .413728 .635360 .136381 1
 10' -.413728 .635360 -.136381 1
 11' .349297 .599240 .335194 1
 12' -.349297 .599240 -.335194 1
 13' .462859 .555863 .265009 1
 14' .462859 .555863 -.265009 1
 15' -.265009 .462859 .555863 1
 16' .265009 .462859 -.555863 1
 17' -.444767 .444767 .444767 1
 18' .444767 .444767 .444767 1
 19' .444767 .444767 -.444767 1
 20' -.444767 .444767 -.444767 1
 21' .687121 .424664 0 1
 22' -.687121 .424664 0 1
 23' .136381 .413728 .635360 1
 24' -.136381 .413728 -.635360 1
 25' .335194 .349297 .599240 1
 26' -.335194 .349297 -.599240 1
 27' .599240 .335194 .349297 1
 28' -.599240 .335194 -.349297 1
 29' -.206566 .300165 .678737 1
 30' .206566 .300165 -.678737 1
 31' 0 .274881 .719648 1

32'	0	.274881	-.719648	1
33'	-.555863	.265009	.462859	1
34'	.555863	.265009	-.462859	1
35'	-.678737	.206566	.300165	1
36'	.678737	.206566	-.300165	1
37'	-.635360	.136381	-.413728	1
38'	.635360	.136381	.413728	1
39'	-.070185	.079496	-.763025	1
40'	.070185	.079496	.763025	1
41'	-.763025	.070185	-.079496	1
42'	.763025	.070185	.079496	1
43'	-.719648	0	.274881	1
44'	-.424664	0	.687121	1
45'	.424664	0	.687121	1
46'	.719648	0	.274881	1
47'	.719648	0	-.274881	1
48'	.424664	0	-.687121	1
49'	-.424664	0	-.687121	1
50'	-.719648	0	-.274881	1
51'	.763025	-.070185	-.079496	1
52'	-.763025	-.070185	.079496	1
53'	-.070185	-.079496	.763025	1
54'	.070185	-.079496	-.763025	1
55'	-.635360	-.136381	.413728	1
56'	.635360	-.136381	-.413728	1
57'	.678737	-.206566	.300165	1
58'	-.678737	-.206566	-.300165	1
59'	.555863	-.265009	.462859	1
60'	-.555863	-.265009	-.462859	1
61'	0	-.274881	-.719648	1
62'	0	-.274881	.719648	1
63'	-.206566	-.300165	-.678737	1
64'	.206566	-.300165	.678737	1
65'	-.599240	-.335194	.349297	1
66'	.599240	-.335194	-.349297	1
67'	-.335194	-.349297	.599240	1
68'	.335194	-.349297	-.599240	1
69'	.136381	-.413728	-.635360	1
70'	-.136381	-.413728	.635360	1
71'	-.687121	-.424664	0	1

72'	.687121	-.424664	0	1
73'	-.444767	-.444767	.444767	1
74'	-.444767	-.444767	-.444767	1
75'	.444767	-.444767	.444767	1
76'	.444767	-.444767	-.444767	1
77'	.265009	-.462859	.555863	1
78'	-.265009	-.462859	-.555863	1
79'	.462859	-.555863	.265009	1
80'	-.462859	-.555863	-.265009	1
81'	.349297	-.599863	-.335194	1
82'	-.349297	-.599863	.335194	1
83'	-.413728	-.635360	.136381	1
84'	.413728	-.635360	-.136381	1
85'	-.300165	-.678737	-.206566	1
86'	.300165	-.678737	.206566	1
87'	0	-.687121	.424664	1
88'	0	-.687121	-.424664	1
89'	-.274881	-.719648	0	1
90'	.274881	-.719648	0	1
91'	-.079496	-.763025	.070185	1
92'	.079496	-.763025	-.070185	1

; (fig. 80)

Descendiendo en jerarquía podríamos considerar varias clasificaciones de poliedros , vgr. los deltaedros (44), los poliedros convexos formados con polígonos regulares (45) &c. . Pero quiero fijar la atención en unos muy importantes , los transpoliedros .

Hareh Lalvani publicó en 1977 un libro ilustrándolos con dibujos y fotografías . Lo notable de estos sólidos radica en su proceso de generación , viz. el de explosión - implosión mediante el cual un poliedro transita , de un modo digamos "cinemático" , hacia su dual , pasando por varios transpoliedros que son los estados parciales del proceso . A grosso modo , las caras de un poliedro se trasladan paralelamente a las caras origen en aquellas direcciones que unen el centro de cada cara con el centro del sólido (fig.81) , las direcciones se toman hacia el exterior ; a determinada distancia se definen los vértices del transpoliedro que contiene tanto las caras del poliedro origen (digamos el tetraedro truncado) y las de su dual (el triakistetraedro) más una serie de caras rectangulares . Esto es la explosión .

La implosión hace retornar al transpoliedro al poliedro origen o a su recíproco . Esta vez se trasladan sus caras (digamos hexágonos y triángulos equiláteros en el ejemplo anterior para producir el tetraedro truncado ,o los triángulos isósceles para producir el

triakistetraedro) hacia el interior . Simultáneamente los rectángulos se reducen hasta que desaparecen confundándose en el límite con las aristas del poliedro o su dual (fig. 82).

En este libro , Lalvani no incluye los poliedros mínimos que contienen a las caras rectangulares . Ahora es el momento de hablar de ellos . Para comenzar , una propiedad extraordinaria de los transpoliedros es la que presentan sus vértices ; son "4-connected" (tetra-conectados) , i.e. ,en cada vértice concurren cuatro aristas . Esto significa que todo recíproco de un transpoliedro es un poliedro formado únicamente con polígonos de 4 lados . Por otro lado , y curiosamente , los poliedros mínimos que contienen a las caras rectangulares también están formados con polígonos de 4 lados .

No conozco los nombres para estos sólidos ; la primera vez les dí un nombre bastante pueril : "superfi-duales" (1) , después les dí un nombre más serio "poliedros de tangencia" , debido a que las caras de estos contienen simultáneamente a las aristas de dos poliedros duales cualesquiera .

Mediante una construcción geométrica "cinemática" , cada cara del poliedro de tangencia determina las caras rectangulares del transpoliedro . En la figura 83 muestro cómo dentro de un trapecoide el perímetro del rectángulo se hace variable y va desde la línea hasta formar un cuadrado perfecto pasando en varias etapas por distintos rectángulos , hasta regresar a una línea pero orientada ortogonalmente . Una vez en el espacio esta construcción se repite para cada cara del poliedro de tangencia .

El cálculo de las coordenadas de los vértices de los transpoliedros mediante matrices es posible , pero es muy extenso y complicado . Esta razón dá vida a los poliedros de tangencia . Resulta bien fácil encontrar las coordenadas de estos sólidos ; es más ; ya las hemos encontrado ! : las diagonales de los cuadriláteros que los conforman no son otras más que las aristas de los poliedros semirregulares y sus duales . Por lo tanto basta escribir juntas las coordenadas del poliedro semirregular y su dual para obtener una sola matriz que expresa las coordenadas de los vértices del poliedro de tangencia . Tuve cuidado en dar las coordenadas de los poliedros semirregulares y sus recíprocos compartiendo una misma esfera inscrita a las aristas de ambos , lo cual garantiza que las dos aristas estén contenidas en el mismo plano que la cara del poliedro de tangencia . Ahora , las coordenadas de los poliedros de tangencia se denotan del siguiente modo : $(X + X')$, donde la X sola indica el poliedro semirregular , y la X con el superíndice , el dual . Entonces , para dar las coordenadas del poliedro de transición entre el tetraedro truncado y el triakistetraedro utilizo $(1+1')$, que es lo mismo que dar las coordenadas en forma de matriz como sigue :

$$(1+1')$$

1	$-1/(3\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$-1/(3\sqrt{2})$	1
2	$1/(3\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(3\sqrt{2})$	1
3	$1/(3\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	$1/(2\sqrt{2})$	1

6'	3/10	-3/10	3/10	1
7'	-1/2	-1/2	1/2	1
8'	-1/2	-1/2	-1/2	1

Adyacentes a las figuras de estos poliedros he colocado la nomenclatura propuesta . Las figuras de los poliedros de tangencia están resueltas en proyección ortogonal . Entonces basta dividir los cuatro lados del cuadrilátero (las cuatro aristas de la cara del poliedro de tangencia) en la misma relación λ para trazar cualquier transpoliedro . Obviamente $-\infty < \lambda < \infty$.

Se dice que un poliedro está inscrito en una esfera cuando todos sus vértices tocan a ésta . ¿ Qué sucede cuando el radio de esta esfera se hace infinito ? ; el poliedro se convierte en una red en el plano . Los griegos de la antigüedad sabían que sólo existen 3 redes regulares en el plano (la de triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares) . Si la condición de regularidad para el polígono se torna más laxa , emerge un número grande de posibilidades : primero cualquier triángulo , cuadrado y hexágono pueden cubrir el plano sin intersticios si se les aplica en la mayoría de los casos únicamente traslaciones y rotaciones (46) . Aparte , y con las mismas simetrías , hay varios pentágonos que igualmente cubren el plano (47) . Después se supo que es imposible construir una red aplicando cualquier operación de simetría a una figura con más de seis lados (48) . Esto es lo que puede decirse de las redes hechas con una figura congruente . Siguen 8 redes semirregulares conteniendo polígonos regulares (49) y 14 redes demirregulares (50) . Pueden existir otras redes hechas con polígonos regulares pero dejan de ser periódicas . Todas las redes poseen , por supuesto , su recíproca .

Descendiendo , existen muchas otras clasificaciones de redes . La cristalografía ofreció más luz al asunto cuando definió 17 grupos planos que reproducen las celosías que colocan un motivo por todo el plano aplicando las operaciones de simetría .

La fascinación por las redes puede conducir a la obsesión y , por otro lado , a percibir la perfección de la naturaleza en la obra de arte . Esto es evidente en el arte islámico , en particular en el trabajo del maestro persa Mirza Akbar , y en los trabajos de Moeser y Escher .

Las "redes" que son más estrechas con los poliedros , aunque sea en términos "poéticos" (si se permite usar el adjetivo) , son las que utilizaron los árabes en los mosaicos , celosías y otros objetos definitorios de sus obras artísticas . Ese virtuosismo palpitante que mostraban en la construcción geométrica , en la confección de tratados de álgebra y astronomía , en la elaboración de una perfecta caligrafía es entendible pues , ¿ de que otra manera se puede dirigir uno a dios ? .

En la siguiente lámina exhibo tres diseños geométricos . Adyacente a cada una está la versión sólida que se acerca a su aspecto . ¿ cuál es el objeto de la comparación ? ; básicamente la intención es que demos cuenta que en realidad cada espacio contiene la versión "sombra" o "rebanada" del politopo en un espacio superior (51) .

En la lámina 8 muestro un grabado en linóleo de un sólido uniforme . Su aspecto intemporal (¿o atemporal ?) es resultado de la comunión del arte del grabado y el arte del poliedro . El hecho de que esté resuelto en proyección ortogonal de ningún modo demerita a su extraordinaria belleza .

La cristalografía geométrica , dentro de su campo de acción , nos dá otra fuente de inspiración . Hay cientos de minerales , pero atendiendo a su forma se les puede clasificar dentro de siete sistemas cristalinos o singonías , y dentro de estos se les puede clasificar dentro de clases de simetría .

Lo que caracteriza a cada sistema cristalino es su cruz axial , i.e. los ejes sobre los cuales se consideran cortan los planos que forman las caras de los cristales . sus longitudes y las direcciones definen al sistema . Las clases son las posteriores variaciones , hechas mediante la regla de "complicación de las formas" a cada uno de los poliedros representativos del sistema (ver láminas 9 , 10).

1 sistema cúbico :

- 1 hexakisoctaedro
- 2 hexakistetraedro
- 3 diakisdodecaedro
- 4 icositetraedro pentagonal
- 5 tetartoedro

2 sistema tetragonal :

- 6 bpirámide ditetragonal
- 7 pirámide ditetragonal
- 8 bpirámide tetragonal
- 9 trapezoedro tetragonal
- 10 pirámide tetragonal

- 11 escalonetro tetragonal
- 12 biesfeniote tetragonal
- 3 sistema hexagonal :
 - 13 bpirámide dihexagonal
 - 14 pirámide dihexagonal
 - 15 bpirámide hexagonal
 - 16 trapezoetro hexagonal
 - 17 pirámide hexagonal
 - (trigonal 18 bpirámide ditrigonal)
 - (trigonal 19 bpirámide trigonal)
- 4 sistema romboédrico :
 - 20 escalonetro ditrigonal
 - 21 pirámide ditrigonal
 - 22 romboetro
 - 23 trapezoetro trigonal
 - 24 pirámide trigonal
- 5 sistema ortorrómbico :
 - 25 bpirámide ortorrómbica
 - 26 pirámide ortorrómbica
 - 27 biesfenoide ortorrómbico
- 6 sistema monoclinico :
 - 28 *prisma monoclinico*
 - 29 *domo monoclinico*
 - 30 *esfenoide monoclinico*
- 7 sistema triclinico :
 - 31 *pinacoide triclinico*
 - 32 *pedión triclinico* .

Otra ciencia obsoleta , la cristalografía . Puede servir bien a nuestros propósitos . Hay excelentes libros (muy viejos) que contienen discusiones amplias y otros tantos términos que solían utilizarse . Si no fuera suficiente atractivo la , hasta cierto punto "árida" teoría , si lo pueden ser las sobresalientes ilustraciones que abundan en éstos ; para demostrarlo , aquí se encuentran algunas . ¿ quién dice que el arte y la ciencia no son lo mismo ? (figs. 97, 98 , 99) .

Entre los poliedros "cristalográficos" es imposible encontrar relaciones que se aproximen a la simetría dinámica . La "ley de índices racionales" que relacionan los coeficientes en que un plano cualquiera corta a los ejes del sistema , quiere explicar que siempre hay relaciones sencillas en los índices de Miller (52) de cualquier cristal . por lo tanto no podremos ver pentágonos , heptágonos , &c. regulares entre los cristales .

Es muy difícil ver en la naturaleza un cristal "perfecto", quiero decir, no se parece en nada a los poliedros ideales que estamos acostumbrados a pensar y analizar. Suelen presentarse distorsionados o asociados con otros cristales diferentes o iguales en composición química. Así por ejemplo un cristal de sal puede ser un prisma rectangular; y desde el punto de vista cristalográfico es un "cubo" legítimo pues presenta isotropía en las direcciones típicas del cubo, i.e. a lo largo de los ejes de la cruz cartesiana de longitud unidad. por lo tanto cristaliza en ese sistema. Cuando los cristales se ven interpenetrados se les llama maclas.

No importa cual sea el hábito (53) de un cristal, si desde su centro se trazan normales a todas las caras, se formara un haz de rectas que tienen la simetría completa de el cristal como si este no estuviera deformado. El estereograma (54) revelará cada línea del haz como un punto (llamado polo); estos puntos están distribuidos simétricamente en el estereograma en un modo que corresponde a la simetría del poliedro holosimétrico (55) que es como la forma "ideal" del cristal. En la figura 100 muestro un estereograma de un cristal del sistema cúbico según el hábito que posee, y en la figura 101 su estereograma. Nótese que a pesar de que el poliedro que representa el cristal no es simétrico, su estereograma sí lo es.

Como imagen es posible utilizar al cristal de muchas maneras. Se pueden cambiar un poco las condiciones que los definen para construirlos según nuestro gusto, capricho o necesidades. El uso de la perspectiva cónica vendrá bien esta vez. De los muchos métodos de perspectiva recomiendo el método de matrices, pues abre la posibilidad de utilizar otros métodos (fascinantes) que demuestran definitivamente que los poliedros y en general los entes geométricos de tres dimensiones son indispensables para el diseño gráfico. En la siguiente lámina muestro algunos que yo he realizado.

Una constante que revelan los cristales es la exhibición de zonas (56). Las zonas son partes de prismas de altura indefinida, que se cortan de modo que determinan algunas caras de los cristales. Estrictamente la definición es como sigue: "conjunto de todas las caras cuyas normales coinciden en un mismo plano" o también "conjunto de caras paralelas a una dirección común (eje de zona) y que se cortan, por tanto, en aristas también paralelas a dicha dirección". La ley de zonas en la cristalografía dice: "los cristales naturales tienen siempre todas sus caras reales o posibles agrupadas en zonas". En el estereograma los polos de las caras están contenidos en un círculo; este círculo es la proyección del plano que contiene a la zona. El gran cristalógrafo ruso Evgrat S. Fiódorov fué quien estableció la teoría de paraleloedros (nombre que dió a unos sólidos que tienen simetría central y con caras opuestas paralelas), aparte de deducir los 230

grupos espaciales de la cristalografía (57) . En la lámina 12 están dibujados los paraleloedros de Fiódorov (58) .

Un sinónimo para el nombre de los paraleloedros es el de zonoedros (59) . Los zonoedros serán esenciales en la última parte de este trabajo.

Pueden existir poliedros completamente irregulares , i.e. ni sus caras ni sus vértices ni sus ángulos diedros son congruentes . Pero podemos inventar poliedros que aún conserven ciertos elementos de simetría como pueden ser planos de reflexión , ejes de rotación , o centro de inversión . Existen muchas clasificaciones . Las más interesantes se encuentran en varios libros vgr. (60) , (61) . Quiero compartir unos poliedros que me parecen muy agradables de ver e "ingeniosos" en su carácter . El modo de generarlos se asemeja al que describe Anthony Pugh en su libro "Polyhedra : a visual approach " ; añadir "gaps" (claros o vacíos) en las aristas "vacantes" de un poliedro aunque los "vacíos" son en realidad caras creadas por insertar caras extras en un poliedro base . Como Pugh inserta un par de triángulos , la simetría completa del poliedro aparece "girada" , de manera parecida a lo que ocurre con los poliedros semirregulares romos . Yo inserto hexágonos regulares y en las partes vacantes ajusto un vértice de modo que concurren pentágonos irregulares a él , pero sin perder la simetría original del poliedro .

Con ejemplos ilustro algunos de los poliedros que se obtienen si partimos del tetraedro regular , el octaedro regular , el icosaedro y de un paraleloedro . A un lado se ven algunas relaciones interesantes que ayudan a trazar el poliedro o la forma del pentágono (figs. 102,103,104,105) .

Si tenemos un haz de líneas en el espacio que pasan por un punto y los segmentos que se toman sobre estas líneas en ambos sentidos a partir del punto son de la misma longitud obtenemos una estrella y le llamaremos no-singular si no hay tres líneas que sean coplanares (62) . Consideremos un plano que pasa por el punto y que gira alrededor de él ; si todos los segmentos que quedan de ambos lado del plano se consideran vectores y se suman , se obtendrán , mientras gire el plano , los vértices de un zonoedro . Tanto la estrella como su zonoedro tienen la misma simetría . También el zonoedro está constituido con $2n$ -gonos . Si la estrella es no singular el zonoedro tiene rombos por caras , si la estrella es singular los $2n$ -gonos serán rombos y $2n$ -gonos , siendo $n > 3$. Las caras $2n$ -gonales se pueden disectar de varios modos y las subdivisiones se consideran caras aunque sean , ¡coplanares! . La importancia de las zonoedros es superlativa : los zonoedros son PROYECCIONES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL DE POLIEDROS (POLITOPOS) ANALOGOS AL HEXAEDRO EN ESPACIOS DE DIMENSION SUPERIOR A 3 .

En la siguiente lámina dibujo algunos zonoedros isósceles (i.e. sus estrellas contienen segmentos de longitudes iguales) .

Para terminar , comento algunas técnicas que uso para representar y hacer poliedros . La primera la tomé prestada de la fotogrametría , lo cual sugiere , como puede adivinarse , el auxiliarse de la fotografía . Pero fieles a nuestra mística usaremos nuestras construcciones geométricas conocidas o las matrices . La estereoscopia es una parte de la óptica que se ocupa de representar el relieve y la distancia en un plano tomando en cuenta que la visión humana es binocular . Existen varias maneras de reproducir el fenómeno de la visión binocular , pero todas se basan en el mismo principio . La distancia que se verifica sobre el eje nuclear (63) entre las dos estaciones , i.e. los ojos (o más exactamente , la mácula lútea (64) de los ojos) se la denomina paralaje . Se trata ahora de construir dos imágenes que correspondan a la visión de cada uno de los ojos para que al reconstruir la visión se reproduzca el efecto espacial . Para ello se utilizan los estereogramas de paralaje (65) . Un método que involucra colores complementarios para construir unos filtros para cada uno de los ojos puede reconstruir el efecto con dos anaglifos que son las imágenes que recibirán los ojos , dibujados o proyectados en el color opuesto en el plano . El otro método más directo , el ortoscópico no se basa en colores y no se necesitan lentes o filtros especiales : sólo requiere concentración y quizá un poco de entrenamiento para aprender a fundir las dos imágenes en una sola .

"... Se obtienen de la figura , las coordenadas de un punto cualquiera P , pues basta trazar la P*O₁ paralela a PO₂ y suponer abatido el punto P , sobre el plano del dibujo , en P resultando :

$$y/f = b/(x' - x'') , \quad x = (x'y) / f , \quad z = (z'y) / f ,$$

$$y = (bf)/p \quad (\checkmark) , \quad x = (bx')/p , \quad z = (bz')/p$$

Esta sencilla relación (✓) , que determina y representa la *ecuación fundamental de la estereofotogrametría* , en la cual $p = x' - x''$ viene a ser el paralaje estereoscópico horizontal , e y la distancia normal del punto P a la base b ." (66) (fig .106) . En la figura 107 muestro un par estereoscópico .

Para construir modelos , podemos utilizar los conocidos desarrollos pero no serán muy adecuados cuando tengamos que hacer modelos con , digamos alrededor de 100 o más caras . Es mejor hacer las caras una por una . Magnus , Holden y Pugh (67) proponen buenos métodos . A mí en particular me gusta hacerlos vaciados en plástico . A veces no hay manera de reconocer , a simple vista , un cristal verdadero de uno hecho por mí .



Ejemplos de aplicación

Las ideas expuestas permiten producir muchas cosas útiles para la expresión gráfica . El potencial y la calidad de estas cosas estarán en razón directamente proporcional a la atención que le dispensemos a la geometría como el proceso intelectual que representa . Quizá la sola exposición de esta frase sea la mejor conclusión a mi tesis . Por otro lado , esto que obtenemos debe aplicarse de alguna manera y con seriedad en nuestro trabajo .

Cavilando mucho sobre cuales deberían ser los tipos de aplicaciones que merecen incluirse en mi tesis por mostrar más congruencia con los motivos que animan al diseño gráfico , me decido por las que lleven rasgos parecidos a los siguientes . Primero que tengan mayor relación con un proceso artesanal . Segundo que sugieran alguna relación con el pasado , inmediato o lejano . Tercero que no se pierda su calidad "geométrica" mientras interactúa con otras partes del diseño . Y cuarto que el resultado final sea eminentemente didáctico (en el sentido amplio) .

Entre las numerosas formas gráficas posibles escojo al ex-libris , la viñeta , la museografía , y a la geometría misma .

El ex-libris representa un tema controversial ya que siempre es resuelto por un grabador o un pintor y es poco común que el diseñador gráfico se ocupe de él . Pero debido a que es un medio muy cómodo de manejar gracias a sus dimensiones pequeñas , resulta favorable para integrar a los poliedros y contemplar una imagen más enigmática . En la figura 108 muestro un ex-libris que muestra un octaedro truncado vacío ; el modo de solucionar al cuerpo es tradicional entre los libros antiguos dedicados a la perspectiva . La leyenda no puede faltar ; quiere decir " la luz de los maravillosos cuerpos" .

Quiero comentar que me parece mejor idea elaborar ex-libris en un solo color , preferiblemente el negro .

En comparación la viñeta tiene menos restricciones . Creo que representa la mejor manera de demostrar que una imagen geométrica , como un simple poliedro , llega a ser un tema gráfico . La viñeta viene a ser como un dibujito que adornaba las páginas de texto en el libro , y si se repetía como un motivo simple se obtenía una orla . Es más , los

libros de geometría llevaban los dibujos de demostraciones y teoremas al margen del texto . La viñeta no es tan ambiciosa , y eso facilita las cosas ; se puede utilizar un motivo figurativo o abstracto para convertirla en el dibujito que acompaña al texto . Los poliedros con el pretexto de cristales o simbolitos caben bien (fig. 109) .

La museografía , se caracteriza por ser una actividad interdisciplinaria y multidisciplinaria , i.e. que dentro de ella trabajan conjuntamente muchas otras disciplinas . La arquitectura , la curaduría , la restauración , la arqueología , la pedagogía , &c. tienen mucho que ver con la museografía . El diseño gráfico también .

Analizando de superficialmente el discurso museográfico moderno , parte fundamental sobre la que se cimienta el museo , llegamos a darnos cuenta que posee una retórica muy especializada y hasta algo compleja porque se desarrolla en tiempo y espacio . El museo es como el recinto hecho para dar disertaciones con objetos . Y así de modo condensado decimos que por ser el espacio inherente al museo , la geometría debe entrar para sustentar esa retórica . Lo hace por medio de la arquitectura (principalmente) , y a través de todas las disciplinas que necesitan del espacio para funcionar .

Para nuestro caso , los poliedros dan sustento al espacio porque pueden aportar "módulos" que subdividen el espacio de modo isotrópico , o se integran estos a manera de un rompecabezas . Si consideramos las proyecciones de los mismos (estereoscópicas o cualesquiera otras) podemos también organizar el espacio bidimensional . El espacio bidimensional en el museo está representado por las mamparas , las peanas , el cedulario , las cartelas , &c. . o mejor dicho , sus representaciones en un plano ideal . La solución para la distribución de estos elementos se debe definir en este nivel .

Sacando de la experiencia personal comento que elaboré un display para museo , (aunque debo decir , con poco éxito) utilizando un segmento de corte de un poliedro con simetría cuaternaria y se adaptó a manera de una "pirámide" con base cuadrada de aproximadamente 60 cms. por lado para exhibir una colección acerca de la utilización de los cristales en el mundo de los antiguos mexicanos . Curiosamente el display puede verse como una extraña transición entre una cruz y el cuadrado . La exposición se llevó a efecto en el museo nacional de antropología e historia en la primavera de 1992 . El display se produjo con cartón corrugado armado y pegado con un adhesivo sencillo , luego se pintó con pistola de aire . El interior llevaba un refuerzo también de cartón sobre las diagonales del cuerpo para darle mejor resistencia (una solución involuntaria de diseño estructural e industrial) . El plano inclinado de la forma era ideal para que las cédulas se leyeran fácilmente . A razón de un poco más de un metro de distancia la visual hacia el plano del texto era completamente perpendicular si se está considerando el nivel de los ojos y la altura a la que se instalaron los objetos dentro de los contenedores . Es evidente que el

tamaño de las letras debe ser relativamente grande y el plano de la cédula debe estar correctamente iluminado . De nuevo geometría y diseño se juntaron en una solución (fig. 110) .

También se puede llegar al módulo de manera sintética , usando una pirámide recta de base cuadrada con una pendiente lateral igual a la raíz cuadrada de 2 . En la figura 111 muestro un esquema del display .

Confieso que hacer geometría es cosa divertida y a la vez fértil en descubrimientos nuevos . Las coordenadas de los poliedros clásicos y sus duales en forma de matriz , la determinación de la relación λ para determinar los poliedros semirregulares , la determinación de trazos diversos , los rectángulos heterotómicos , la notación en forma de fracción continua con la misma constante , los poliedros de tangencia y sus respectivas proyecciones , las proyecciones de los zonoedros , los poliedros irregulares con caras pentagonales y caras hexagonales , &c. son totalmente míos y son , hasta donde sé , completamente inéditos .

Demstrar mis construcciones según lo dicta la geometría es cosa que podría hacer gustosamente , pero ya no queda espacio . Sin embargo , me atrevo a garantizar que son categóricamente correctos todos los conceptos y las expresiones matemáticas utilizadas .

Con espíritu lúdico , y a petición de mis maestros , incluyo varias figuras renderizadas en computador que servirán bien como colofón .

Notas :

- 1 - " ... la forma es un diagrama de fuerzas ... " D'Arcy W. Thompson
- 2 - No existe consenso en cuanto a identificar al Demiurgo como idea del bien o dios . Para Platón se trataba de un ser con alma y exento de toda maldad ; quizá en ese sentido se le corresponda la idea de "creador" .
- 3- La " lambda mística " , llamada así por el parecido con la letra del alfabeto griego es un diagrama donde fluye por un lado una sucesión de números doblándose y por el otro una sucesión triplicándose . De entre todas las relaciones aparece un "alma" o una música , principio del orden cósmico.
- 4- " Homage To Pythagoras , rediscovering sacred science " / Critchlow et. al. / Lindisfarne Press ; Hudson , N.Y. ; E.U.A. / 1994 .pp.156.
- 5- Evidentemente no pretendo construir una geometría en particular ; únicamente intento decir que , más que reglas se trata de unos "requisitos" informales , bien informales , para introducimos en el estudio de los poliedros . Existen espacios hiperbólicos , proyectivos y muchos otros que requieren para su estudio fundamentos más amplios y , con razón , un poco más de "concentración". La parte medular de estos axiomas la tomé prestada de la versión castellana del libro de Dan Pedoe " La geometría en el arte " .
"La geometría en el arte" , col. punto y línea / Pedoe, Dan / Gustavo Gili ; Barcelona , España / pp.124
- 6- Con respecto a la iteración , es conveniente dejar en claro que los poliedros pueden utilizarse con el ánimo " fractal " y que he hurgado tímidamente en ése campo , y quizá hasta se desapruebe como fractales legítimos . Como los L-systems que reproducen redes no periódicas basados en una "turtle-like-geometry" , mis intentos serán objeto de una monografía posterior .
- 7- " Wilars De Honecort , su manuscrito " Colección Mexicana de Traductistas / Carlos Chanfón Olmos / UNAM , México / 1994 / . pp.146.
- 8- Brevemente, una transformación es una correspondencia , en el caso biunívoca , entre dos conjuntos de puntos . La correspondencia se hace con un mapeo u otro recurso parecido.
- 9- Valga decir que la tangente trigonométrica es otra manera de " multiplicar " .
- 10- Semiplano es la región del plano que está contenida de un lado de una recta . Cada recta divide el plano entero en dos semiplanos.
- 11- También se la llama *región de Dirichlet* o *polígono de Voronoi* . En el plano , si se tiene una red cualquier , se obtienen las regiones

fundamentales si se trazan líneas que contengan a todos los puntos "más cercanos" a los centros de los polígonos que forman la red . En esencia es una red dual .

12-"M.C.Escher:Art and Science , edited by H.S.M.Coxeter ..." / H.S.M.Coxeter,M . Emmer , Penrose P.,Teuber M.L. , editores/North Holland , Holanda/1988. pp 15-16 .

13-"Fundamentos de Geometría"/Coxeter, H.S.M./ Limusa , México/1988. pp. 54

14- ídem , pp.72

15- Las coordenadas homogéneas , se utilizan para señalar que todos los puntos de una configuración geométrica están en el mismo espacio . La columna de "unos" en las matrices indica que se trata de coordenadas homogéneas.

16-En la perspectiva por ejemplo , se hace necesario dividir los productos parciales por un número para hacer las coordenadas homogéneas.

17-"The Geometry of Art And Life"/Ghyka , Matila/ Dover ; New York ; E.U.A./pp.20-21.

18-"Regular Polytopes"/Coxeter , H.S.M./Dover ; New York ; E.U.A/ pp.4

19-ídem , pp. 5

20-"Introducción a la Teoría de los Grupos" cuadernos # 136/Alexandroff , P.S./EUDEBA ; Buenos Aires ; Argentina./1977. pp 84-86

21-Un vector de posición , es el segmento que une el centro del sistema de referencia (cartesiano) con un punto . En cuanto al dibujo de las imágenes de los primeros cinco sólidos regulares , debo aclarar que utilicé una proyección utilizada por los cristalógrafos , por esto las imágenes no se observan como usualmente . Ver (53) .

22-"Matemáticas más Fáciles con Manualidades de Papel"/Donovan Johnson & Magnus J. Wenninger /Dístein ; Barcelona ; España/1975. pp. 64-65.

23- Coxeter , op.cit. ; pp. 24

24-"Técnica Gráfica del Dibujo Geométrico" /Vicente Nadal Mora/ El Ateneo , Buenos Aires, Argentina/1944. pp.72. El autor le llama "cuadrilongo homotómico".

25- "simetría" viene a ser sinónimo de tema de proporción .

26- Ghyka , op.cit. ; pp. 30

27- "Gráficos para Arquitectos"/ Kevin Forseth /Gustavo Gili ; México/ 1981. pp.12

28-"Geometría Descriptiva" / Rowe , McFarland /C.E.C.S.A.; México/1976. pp. 29

29-Una fracción continua es la representación de un número en coeficientes parciales . se obtiene de una fracción ordinaria al restar enteros y escribir como denominadores a los recíprocos de cada fracción parcial . Así , por ejemplo :

$$61/27 = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}$$

Las fracciones continuas son una manera eficaz para reconocer la naturaleza de un número . Véase "Fracciones Maravillosas" /Beskin ,N/ Mir ; Moscú ; URSS /1987.

30- La notación es mía . Aquí indico que todos los coeficientes parciales son iguales a { x } , por lo tanto la secuencia es infinita . Si va precedido por un signo negativo entonces el convergente es menor que la unidad .

31-"Frazioni Continue" / C.D. Olds / Zanichelli ; Bolonia ; Italia/1976. pp.93.

32- Cualquier tratado de geometría proyectiva explica la dualidad con más amplitud.

33-Coxeter ; op.cit. pp.89

34- ídem .

35-" La Perspectiva Curvilínea , del Espacio Visual a la Imagen Construida " / Andre Barré , Albert Flocon / Paidós ; Barcelona ; España / 1985 .

36-"Representación de figuras espaciales" /Beskin , N / Mir ; Moscú ; URSS / 1987. pp. 55 .

37- Alexandroff , op.cit.

38- "Geometry of Estructural Forms" /Adrian Ghorghiu , Virgil Dragomir /(?)/(?).

39-Coxeter ; op.cit. pp. 17.

40- Las propiedades métricas son las constantes que se verifican entre números y proporciones cada vez que se construye el sólido . la deducción completa de las ecuaciones se encuentra en " Vielecke un Vielflache ..." /Max Brückner/ Leipzig /1900.

41- La versión enantiomorfa se encuentra aplicando una simetría opuesta , vgr. una reflexión en cualquier plano del espacio.

42- Coxeter , op.cit.

- 43- Brückner , op.cit.
- 44-"Polyhedra : A Visual Approach" /Pugh , Anthony . pp. 28-33.
- 45-Pugh ; op.cit. pp. 33-35
- 46-"Viajes por el Tiempo y otras Perplejidades Matemáticas"/ Martin Gardner / RBA.; Barcelona ; España / 1988 . pp. 197-198.
- 47-ídem ; pp.201-209.
- 48-ídem ; pp. 197
- 49-"Structure in nature is a Strategy for design" /Peter Pearce/ MIT press ; Cambridge , Mass. ; E.U.A. y Londres ; Inglaterra /1990 . pp 28-29 .
- 50-"Order in space , a design sourcebook " /Keith Critchlow/ Thames & Hudson ; Londres , Inglaterra y Hong Kong /1987 . pp .60-67.
- 51-"Arabic Geometrical Pattern & Design , 200 Plates" /Bourgoin , J./Dover ; New York ; U.S.A.
- 52- "Dana's Textbook Of Mineralogy" / Edward Salisbury Dana / John Wiley & Sons . Inc. ; New York /1932 . pp. 46 .
- 53-"Introducción a la Cristalografía" / Phillips F.C. /Paraninfo ; Madrid ; España/ 1971 . pp. 25.
- 54-Proyección central en un plano , Por lo general es de una esfera (como la tierra en la cartografía) o las normales que pasan por los polos de las caras de los cristales .
- 55- Phillips , op.cit. pp.24-25.
- 56- Dana ; op.cit. pp.47-48.
- 57- La determinación de los grupos de simetría en el espacio de tres dimensiones es muy extensa , no la podemos ver aquí .
- 58- "Principios de Cristalografía" / Flint , E. / Mir ; Moscú ; URSS / pp. 111-112
- 59-Coxeter ; op.cit. pp. 27-33 .
- 60-Pugh ; op.cit.
- 61-"The Geometrical Foundations of Natural Structure , A source Book of Design" / Robert Williams/ Dover ; New York ; E.U.A .
- 62-Coxeter ;op.cit. pp. 27.
- 63-"Fotogrametría Terrestre y Aérea"/Schwidefsky K./Labor ; Barcelona ; España /1943 .pp 17.
- 64-ídem ; pp . 43 (pie de página)
- 65-ídem ; pp. 46
- 66-ídem ; pp. 18-19
- 67-Magnus ; Pugh ; op.cit . " Shapes , Space And Symmetry" /Alan Holden/ Dover New York ; E.U.A .

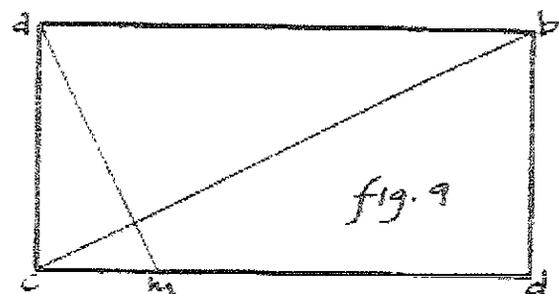
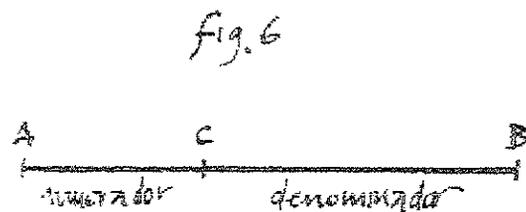
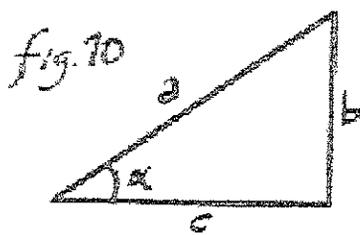
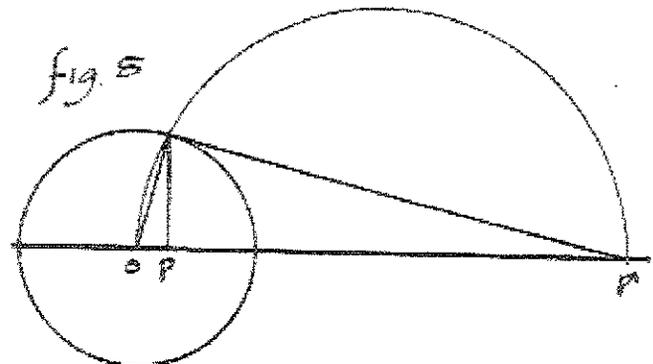
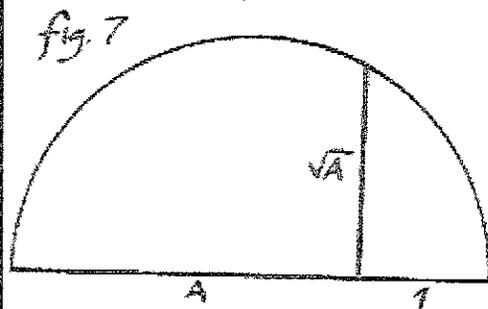
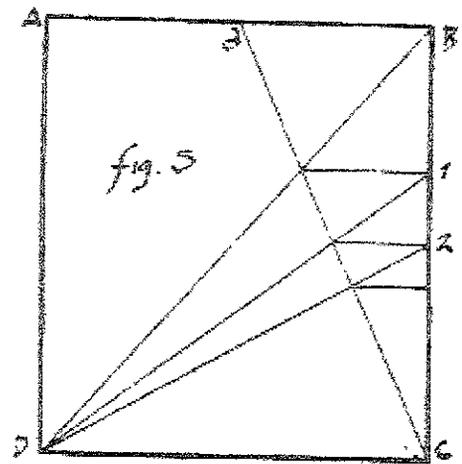
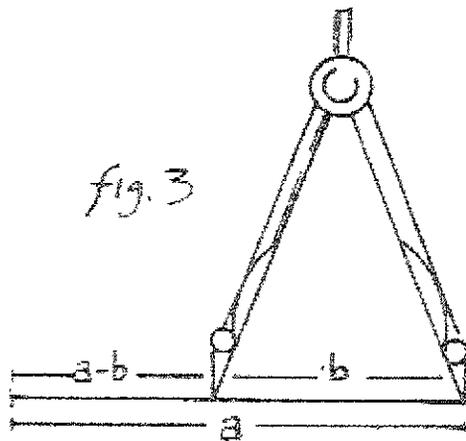
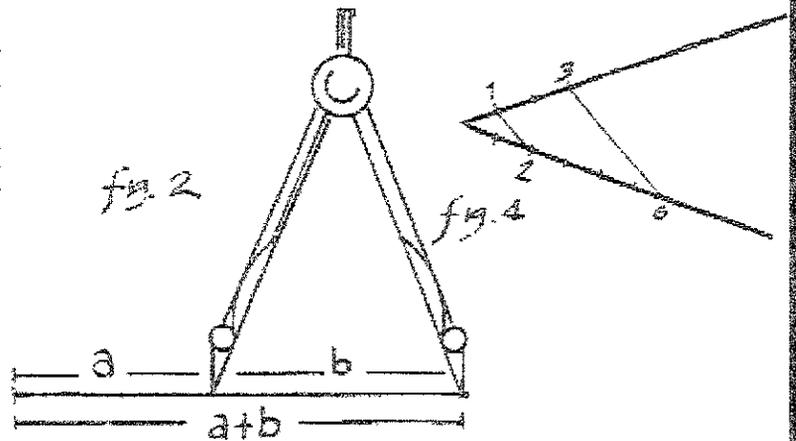
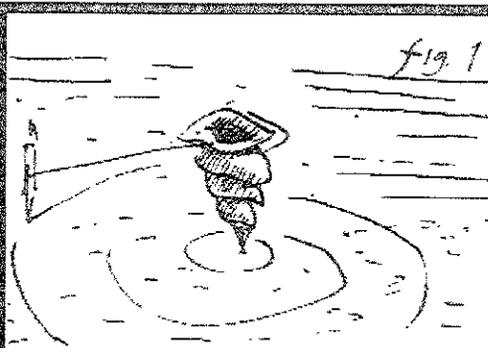
Bibliografía Esencial

En esta bibliografía cuento solamente los libros que a mi parecer deben ser revisados para entender la manera con la que realicé mi trabajo . Para ser más exactos , se trata de los libros que lo "inspiraron" fuertemente .

Es injusto no poner todos los libros que utilicé , pero es difícil seleccionar una bibliografía por las cualidades que les imprime el autor a sus libros y por la disponibilidad de los mismos (no hay que olvidar que son libros técnicos) . Muchas veces desespero por la escasez de buen material y de los medios para estar en la posibilidad de conseguirlo .

Viendo el lado positivo , me encuentro en la necesidad de inventar , como lo demostré , mi propia manera de crear el material y añadiendo los libros que se hace uno con el tiempo , se construye una minúscula biblioteca a la que le tenemos mucho cariño .

- " La Divina Proporción " (Serie " Fuentes de Arte " # 3) / Fra Luca Pacioli / Ediciones Akal / Madrid , España / 1991 .
- " Perspectiva Corporum Regularium " / Wentzel Jamnitzer / Ediciones Siruela / Madrid , España / 1993 .
- " Projective Ornament " / Claude Bragdon / Dover / New York , E.U.A. /1992 .
- " Mathematical Elements For Computer Graphics " / Rogers , David F. ; Adams , J. Alan / McGraw-Hill / Singapur - E.U.A. / 1990 .



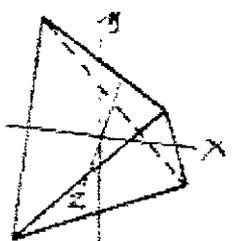
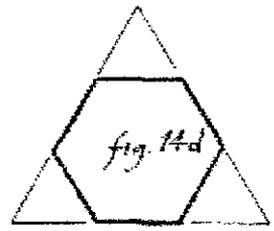
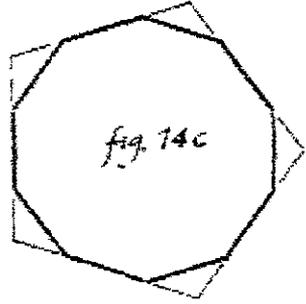
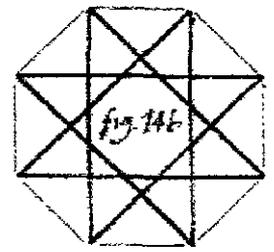
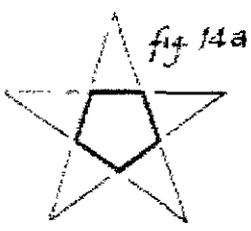
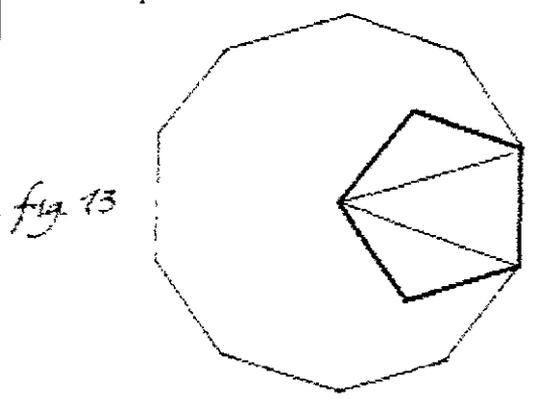
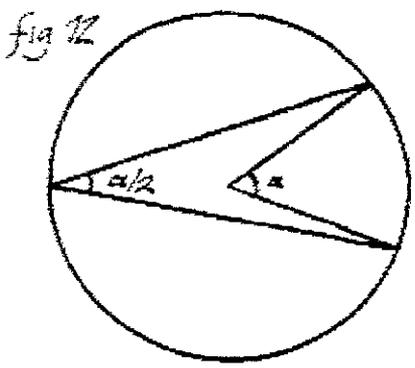
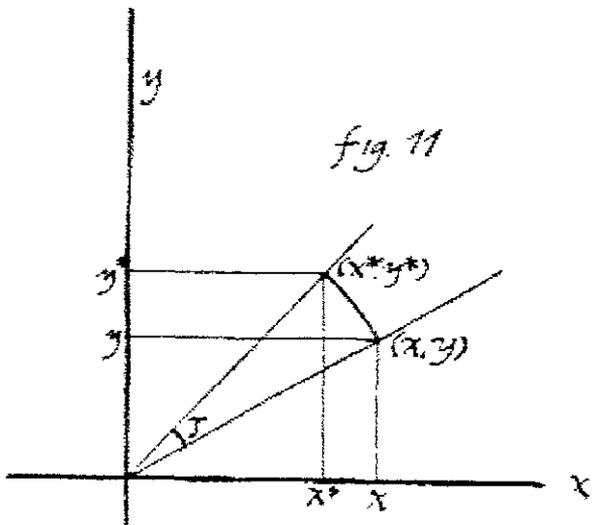


fig 16

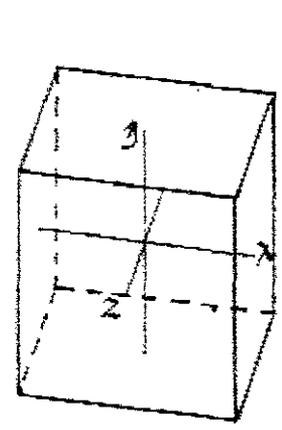
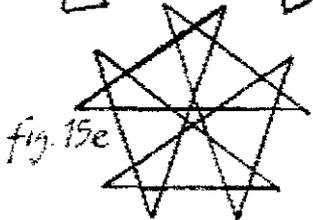
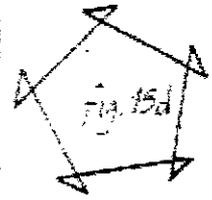
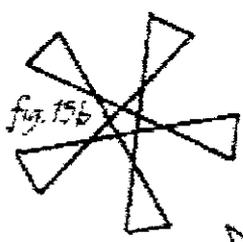
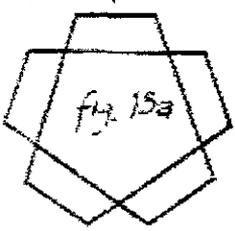
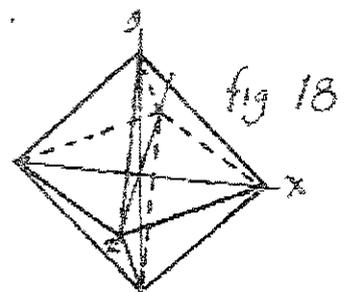
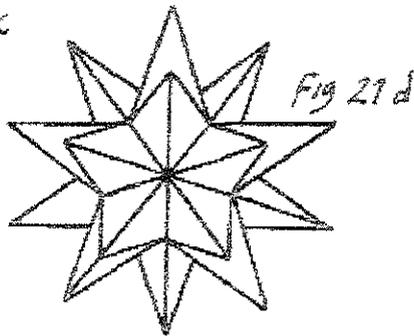
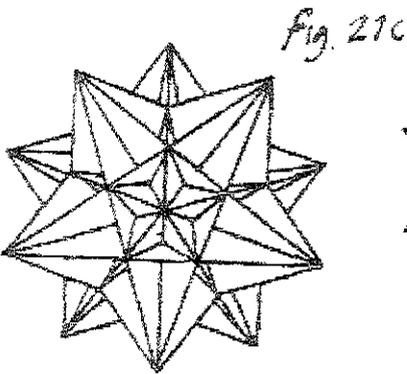
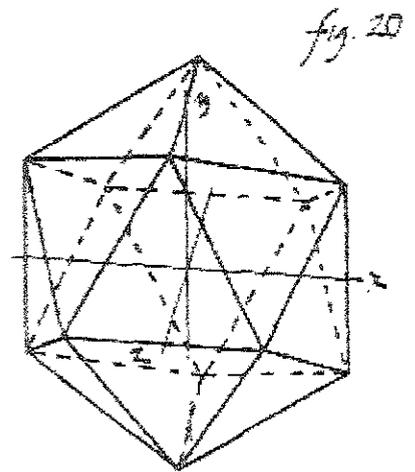
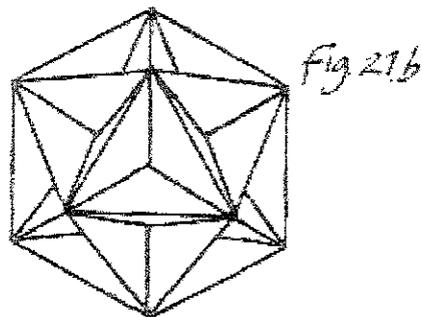
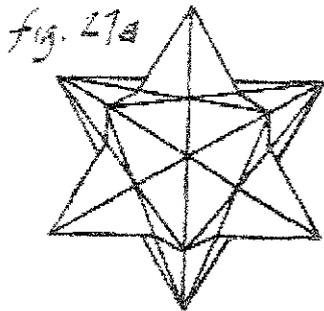
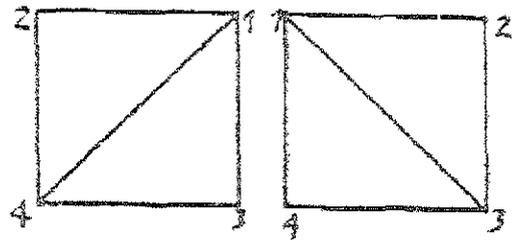
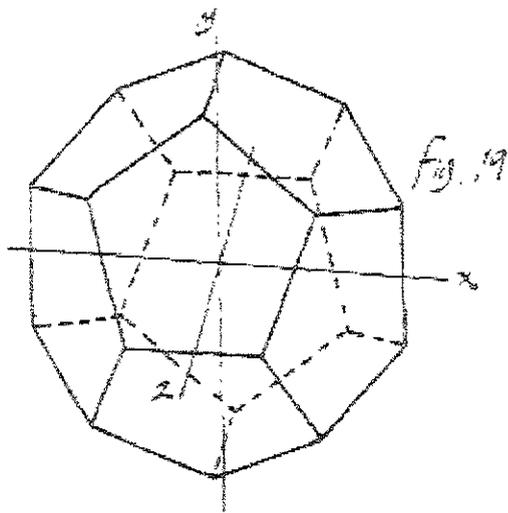


fig. 17



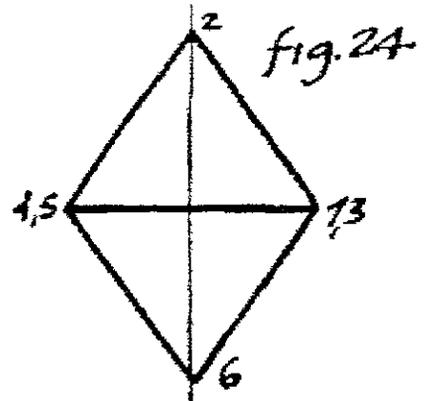
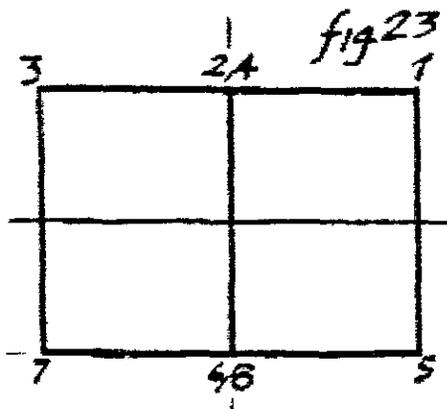
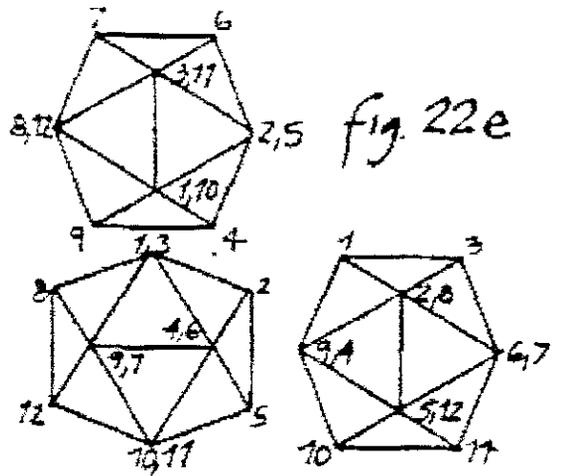
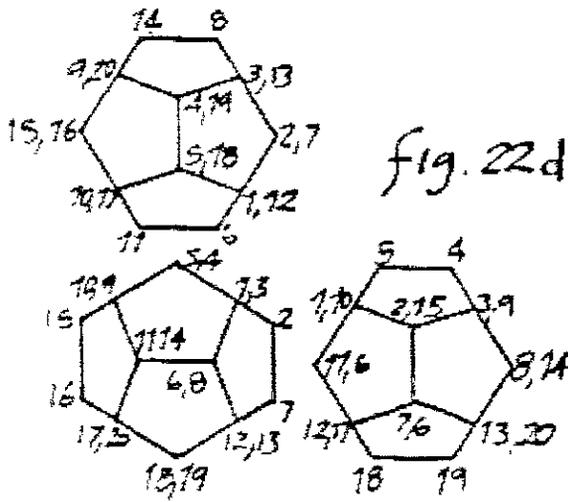
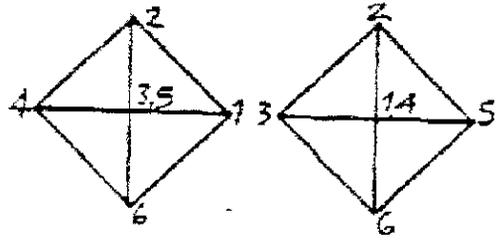
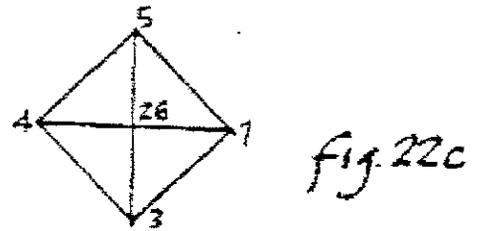
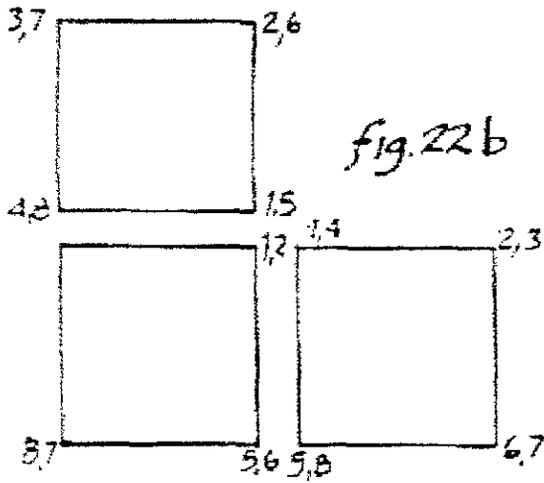


fig. 25a

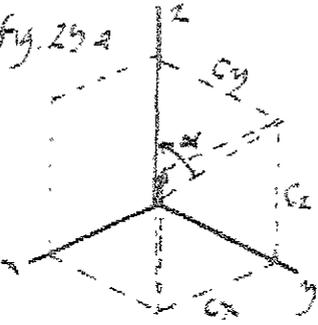


fig. 25b

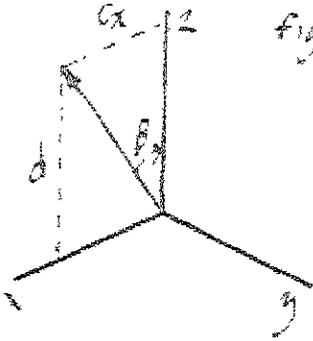


fig. 26

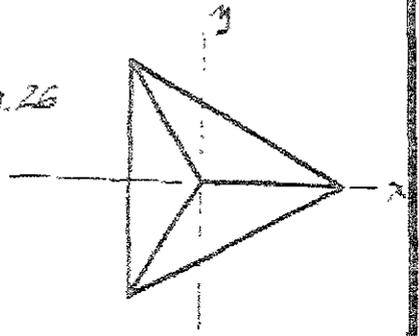


fig. 27

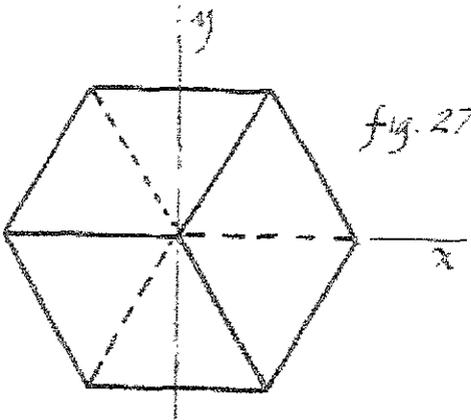


fig. 28

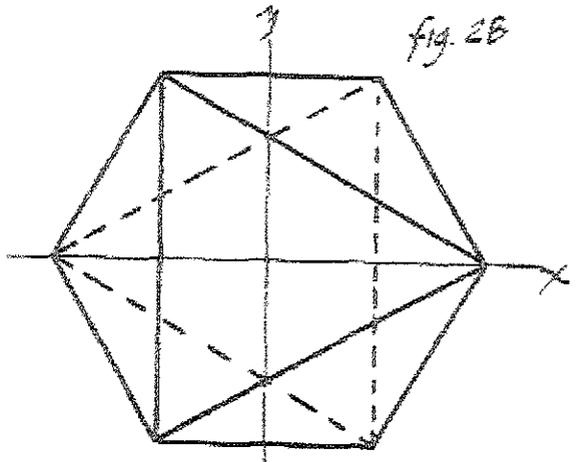


fig. 29

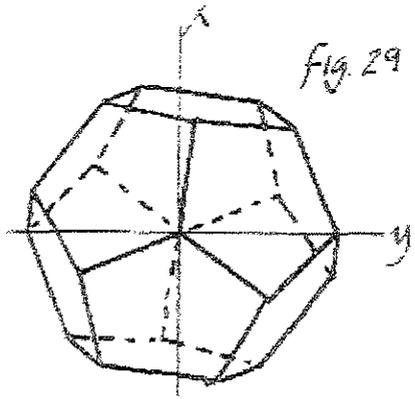


fig. 30

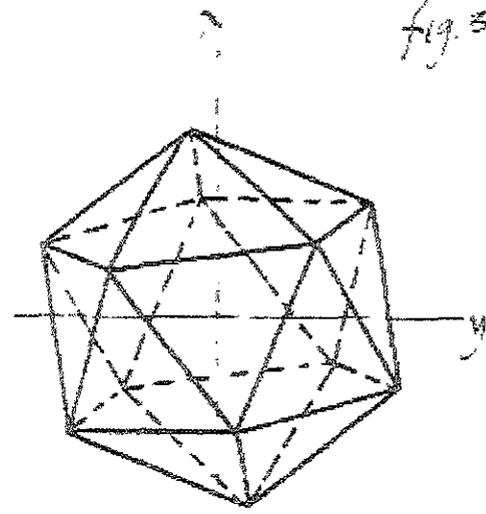
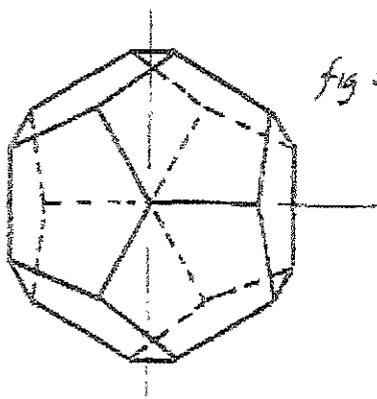


fig. 31



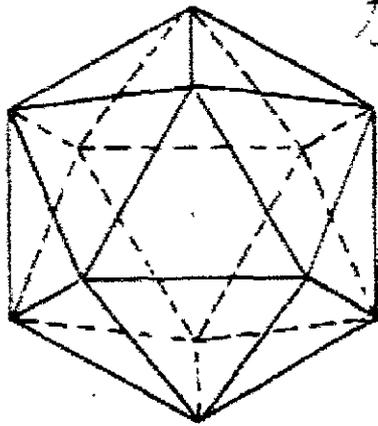


fig. 32

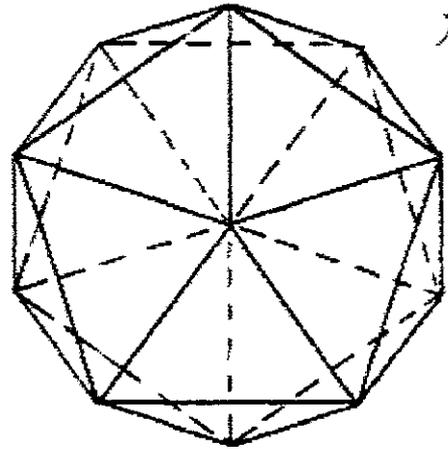


fig. 33

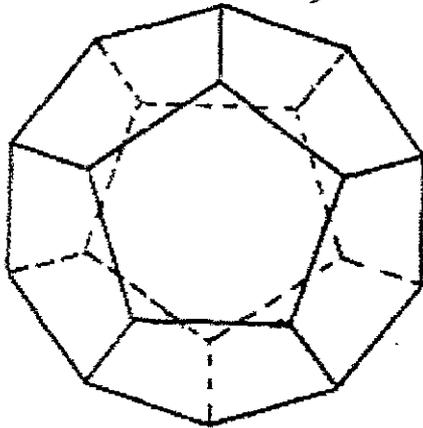


fig. 34

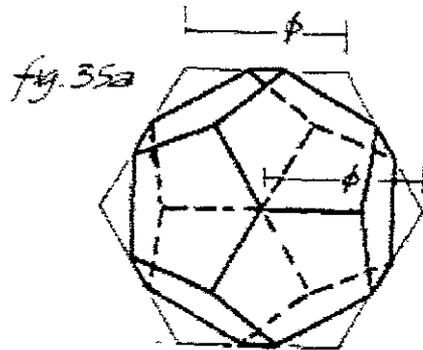


fig. 35a

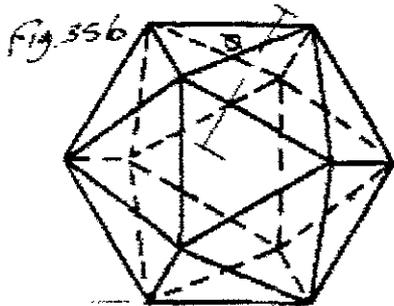


fig. 35b

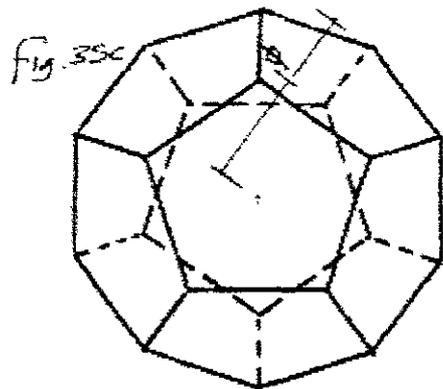
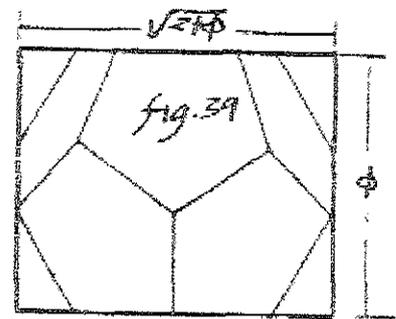
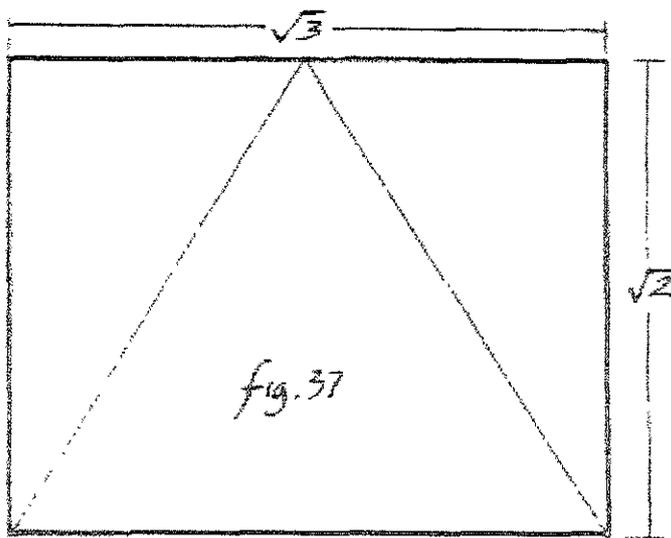
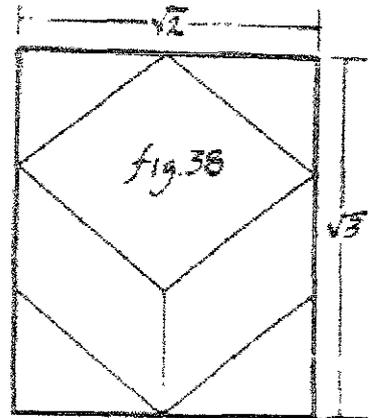
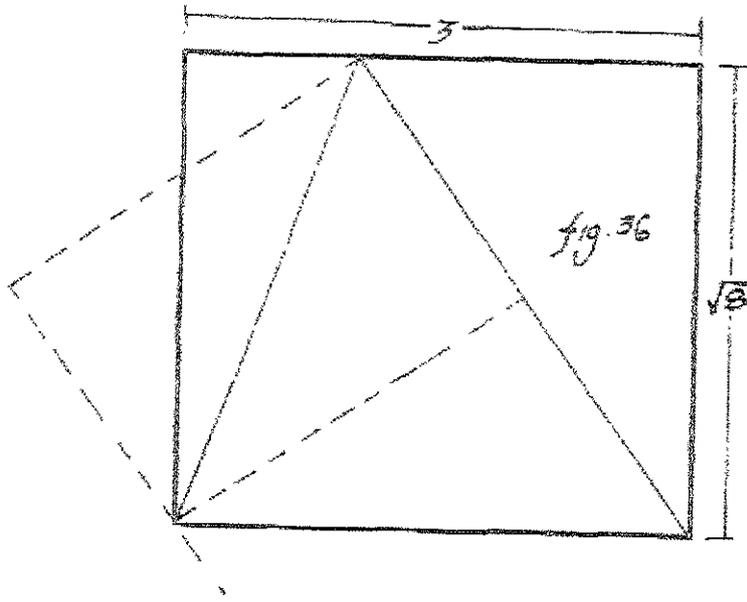
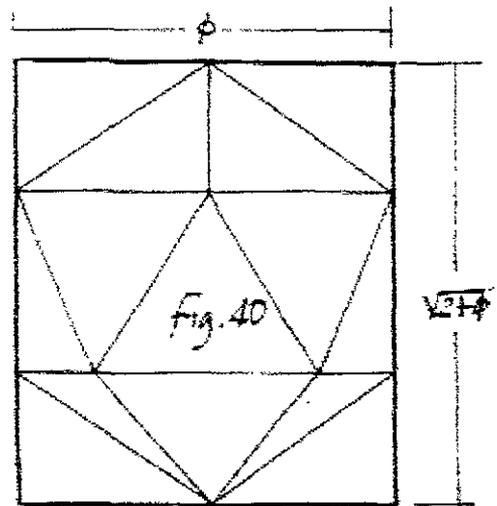
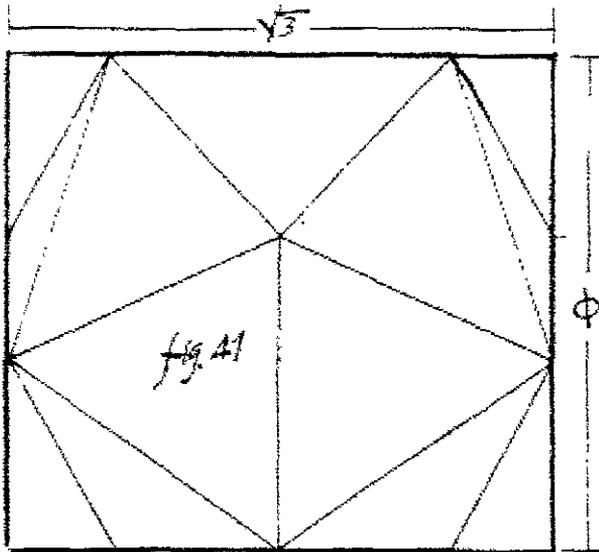
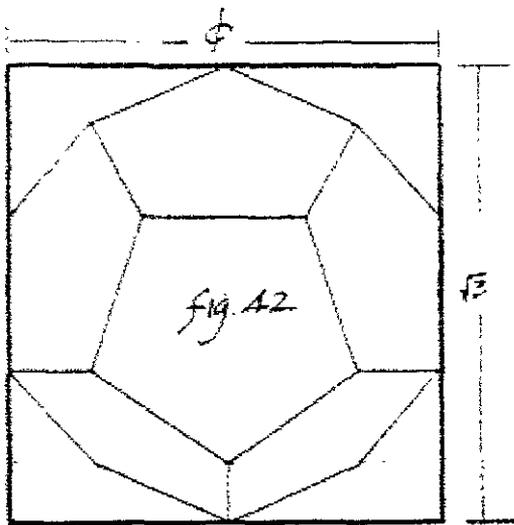


fig. 35c





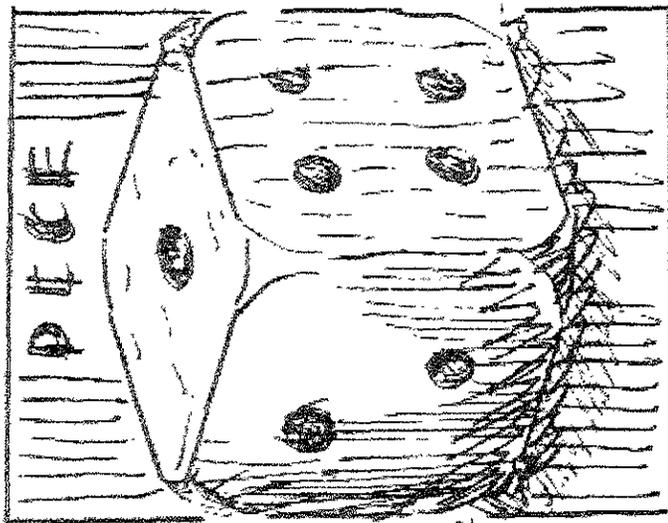


fig. 44

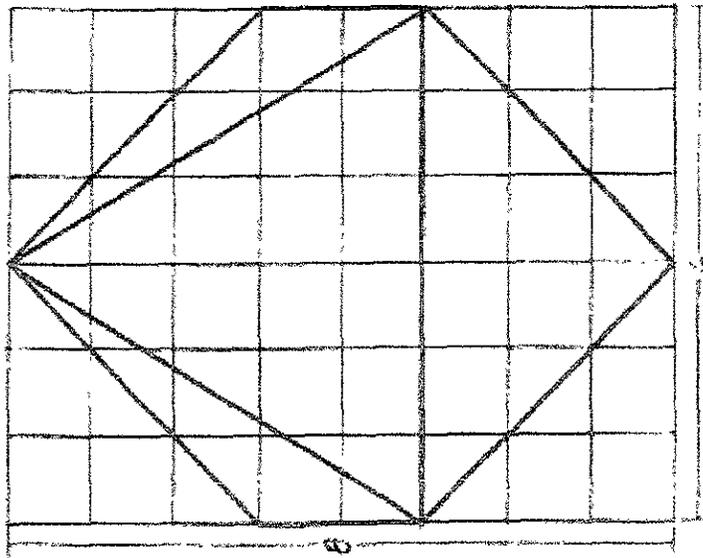


fig. 43

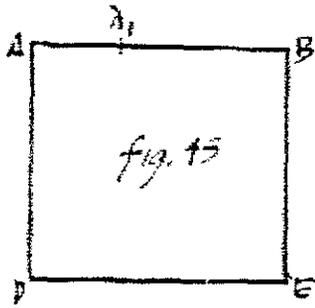


fig. 45

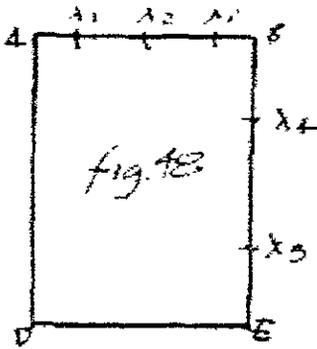


fig. 48

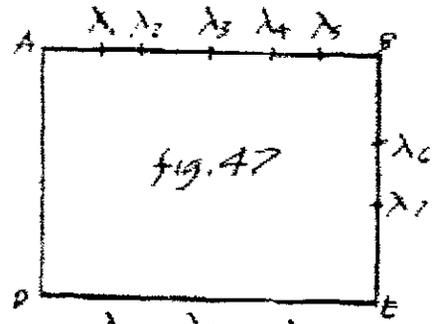


fig. 47

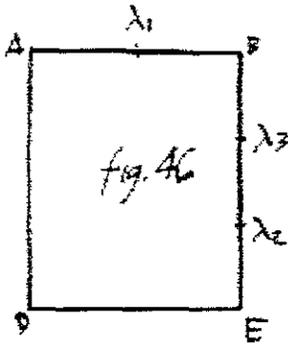


fig. 46

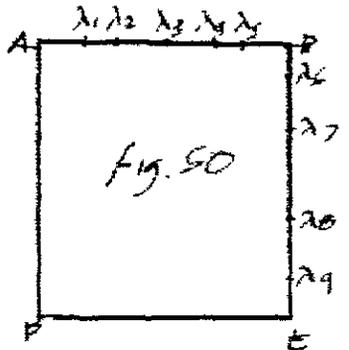


fig. 50

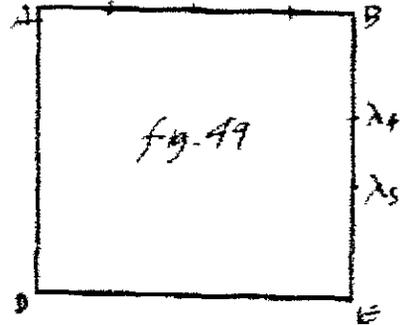


fig. 49

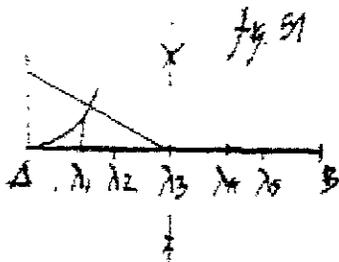


fig. 51

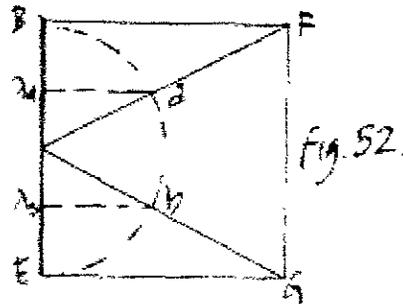


fig. 52

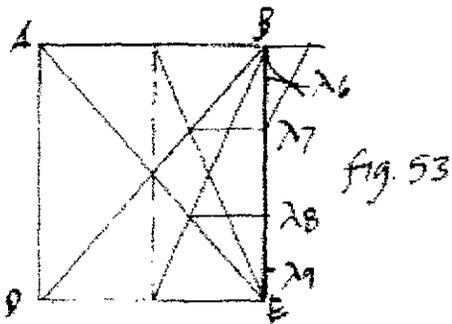


fig. 53

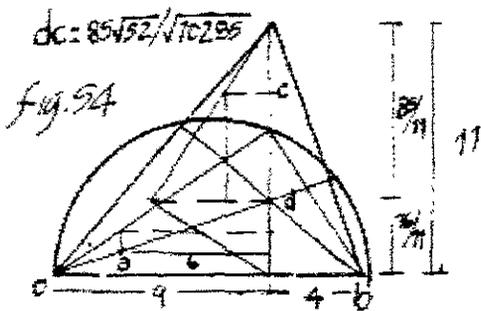
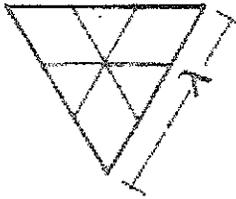
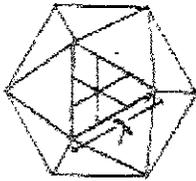


fig. 54

$\lambda=2$



$\lambda=2$



$\lambda=1+\sqrt{2}$

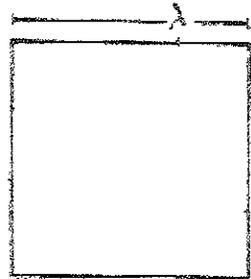


fig. 55

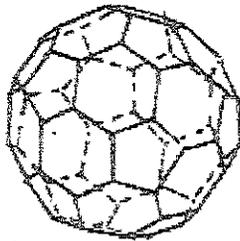


fig. 58

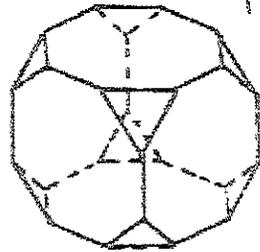


fig. 56

$\lambda=\phi^2$

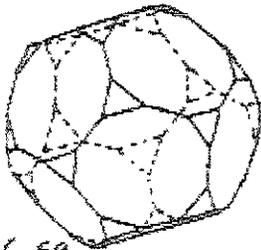
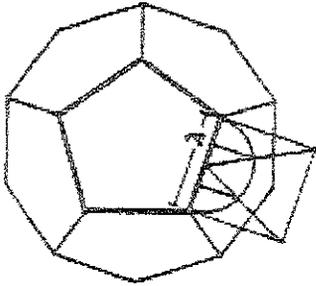
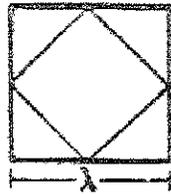


fig. 59

$\lambda=1$



$\lambda=1$

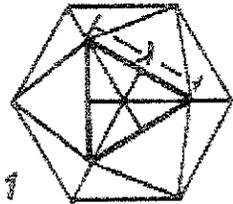


fig. 60

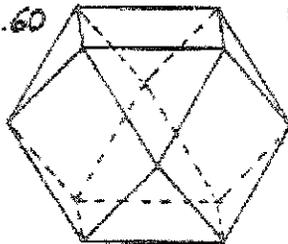


fig. 61

$\lambda=2$

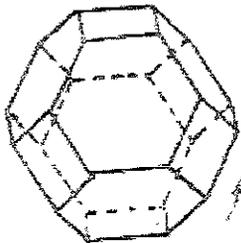
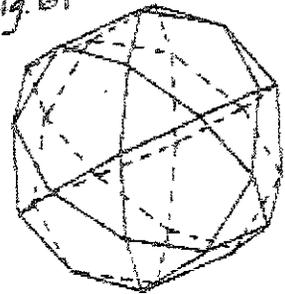
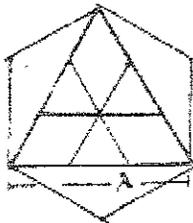


fig. 57



$$\lambda = .3522... / (1 - .3522...)$$

$$\lambda = 1 + \sqrt{2}$$

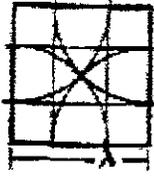
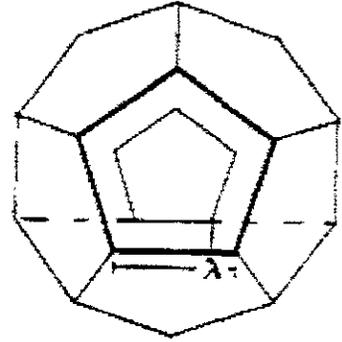
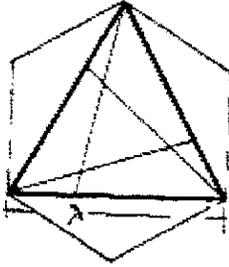
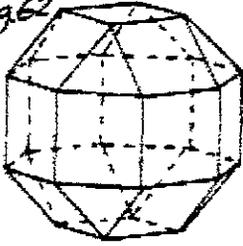


fig. 62



$$\lambda = 2 + \sqrt{5}$$

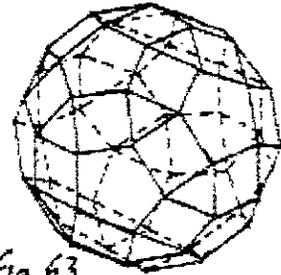


fig. 63

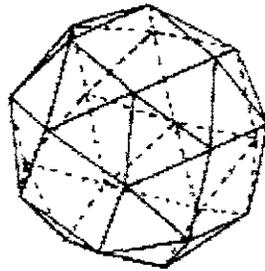
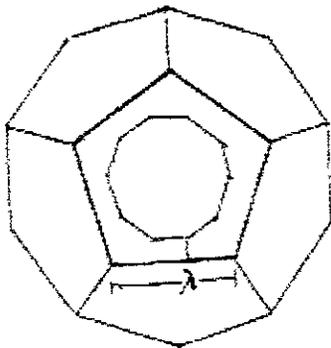


fig. 66

$$\lambda = 4 + \sqrt{5}$$



$$\lambda = (1 + \sqrt{2}) / \sqrt{2}$$

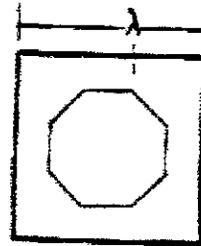


fig. 65

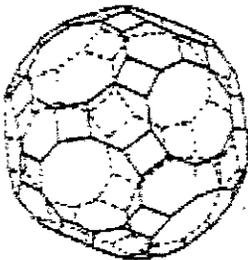
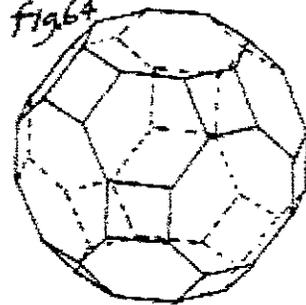


fig. 64



$$\lambda = .3392 / (1 - .3392)$$

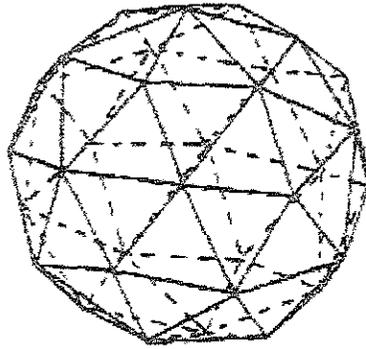
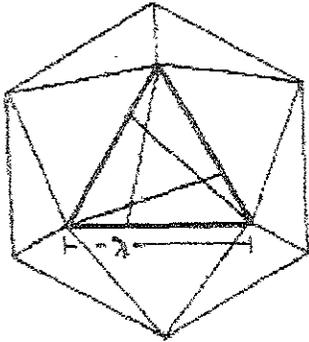


fig. 71

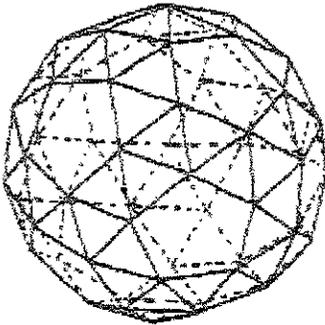
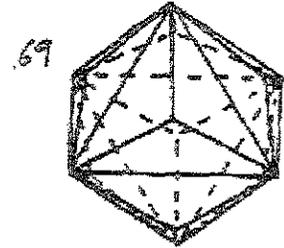


fig. 67



69

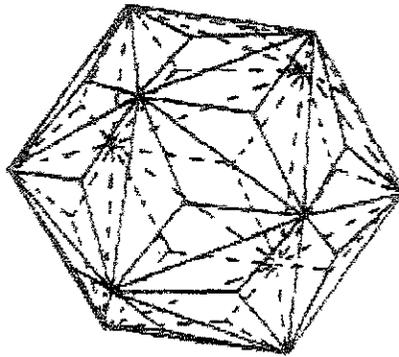


fig. 72

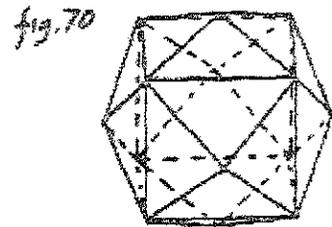


fig. 70

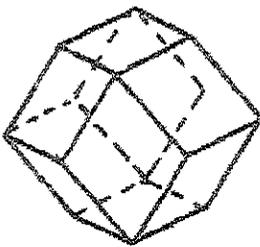


fig. 73

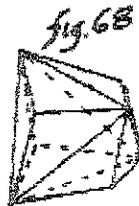


fig. 68

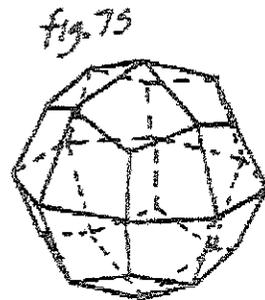


fig. 75

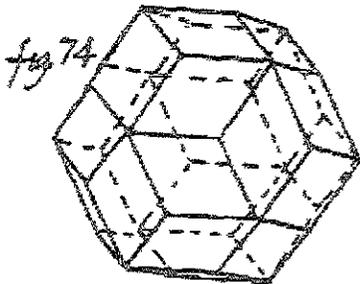


fig. 74

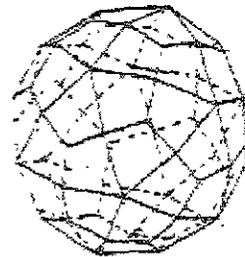


fig. 76

fig. 77

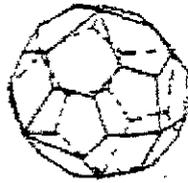


fig. 83

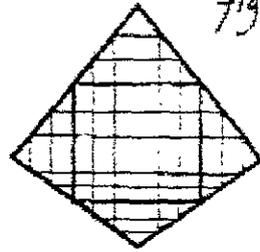


fig. 77

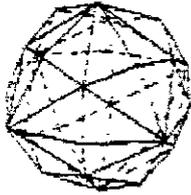


fig. 8.

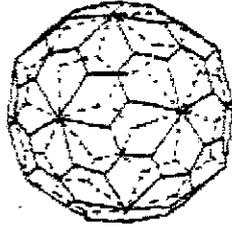


fig. 78

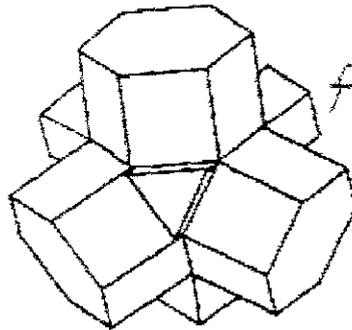
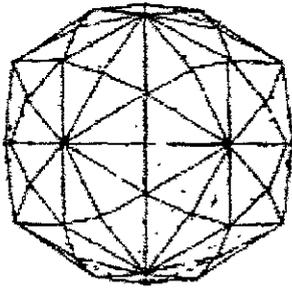


fig. 51

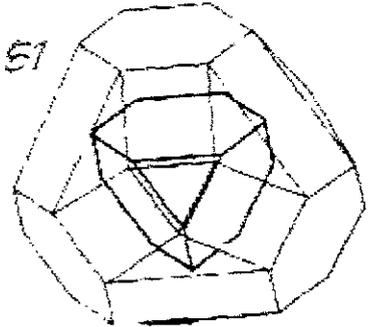
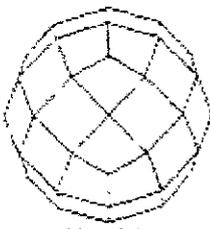
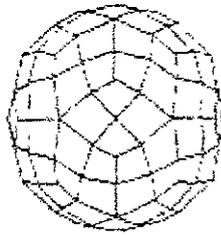


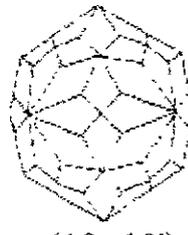
fig. 82



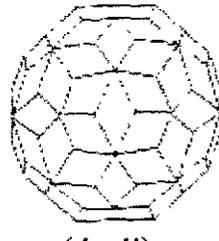
(8+8')



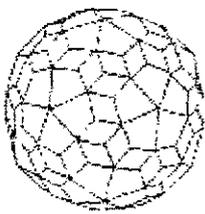
(9+9')



(10+10')



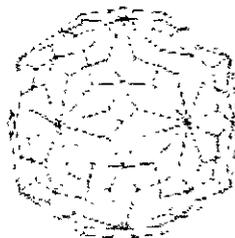
(4+4')



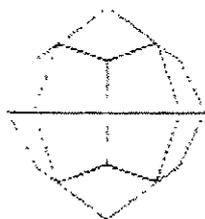
(13+13')



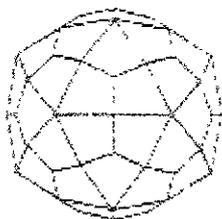
(12+12')



(11+11')



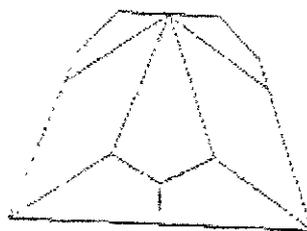
(6+6')



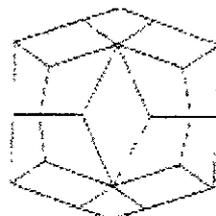
(7+7')



(2+2')



(1+1')



(3+3')

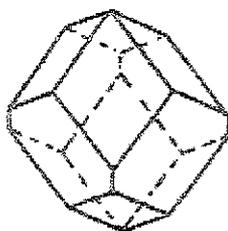


fig 100

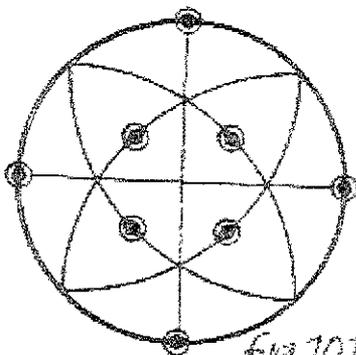
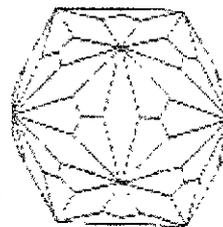


fig 101



(5+5')

$$M = \frac{\sqrt{6\sqrt{3}-1}}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{4+3\sqrt{3}}}{4\sqrt{2}}$$

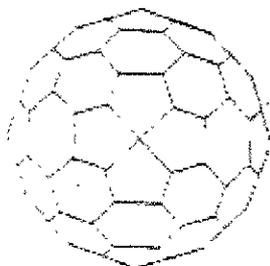
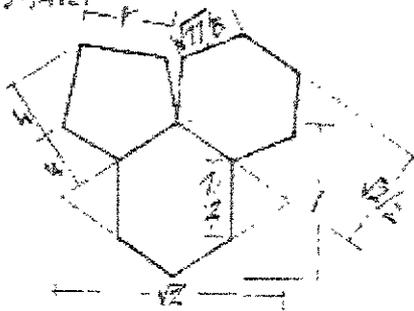


fig. 103



$$M = \frac{\sqrt{2}\sqrt{63+56\sqrt{3}}}{3\sqrt{15+8\sqrt{3}}} \left[\frac{6(5+2\sqrt{3})}{7\sqrt{2}+13\sqrt{6}} \right]$$

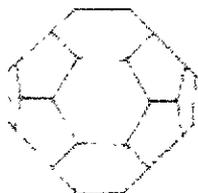


fig. 102

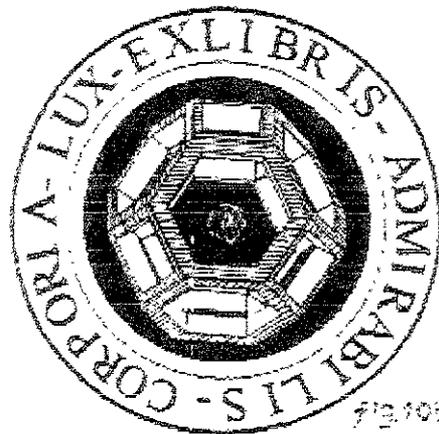
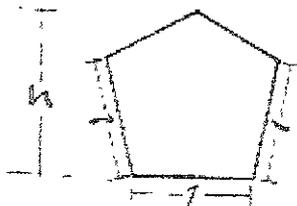


fig 105

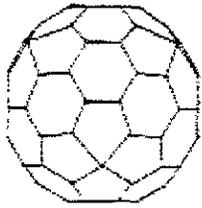


fig. 104

$$h = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{24} / 4}{2}$$

$$a = \sqrt{1 + (2\sqrt{24} / 16)}$$

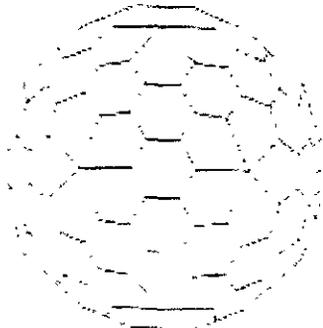
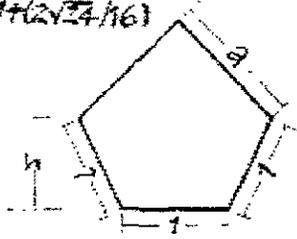


fig. 106

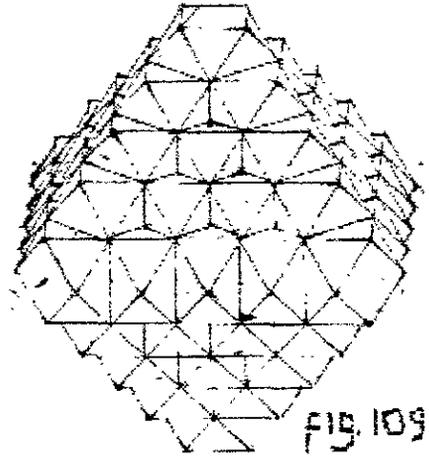
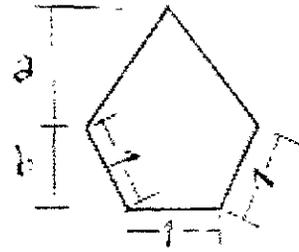


fig. 109

$$a = \sqrt{1 - \left[\frac{(\phi\sqrt{3}-1)^2}{16} \right]}$$

$$b = \frac{\sqrt{1 - \left[\frac{(\phi\sqrt{3}-1)^2}{16} \right]} \left[\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{5}) + \phi^2}{\sqrt{2+\phi}} \right]}{\left[\frac{\sqrt{(3+\phi/5) - \left[\frac{(\phi\sqrt{3}-1)^2}{4} \right]} / 2 \right]}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(3+\phi/5) - \left[\frac{(\phi\sqrt{3}-1)^2}{4} \right]} / 2 \right]$$

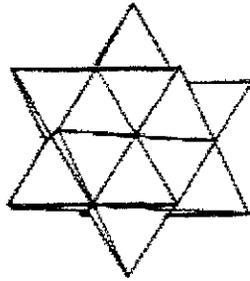
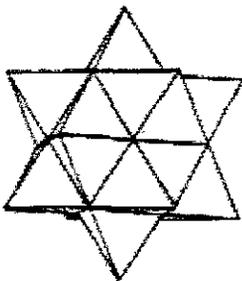


fig. 107

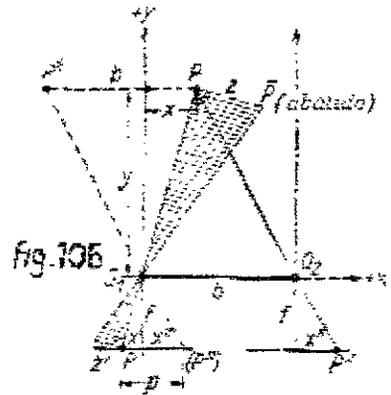
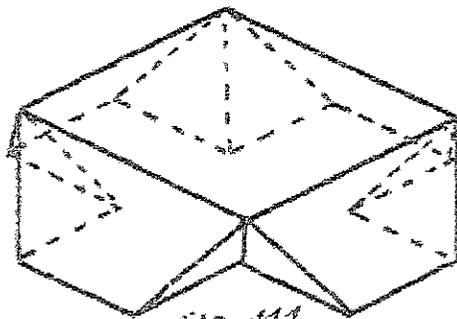


fig. 106



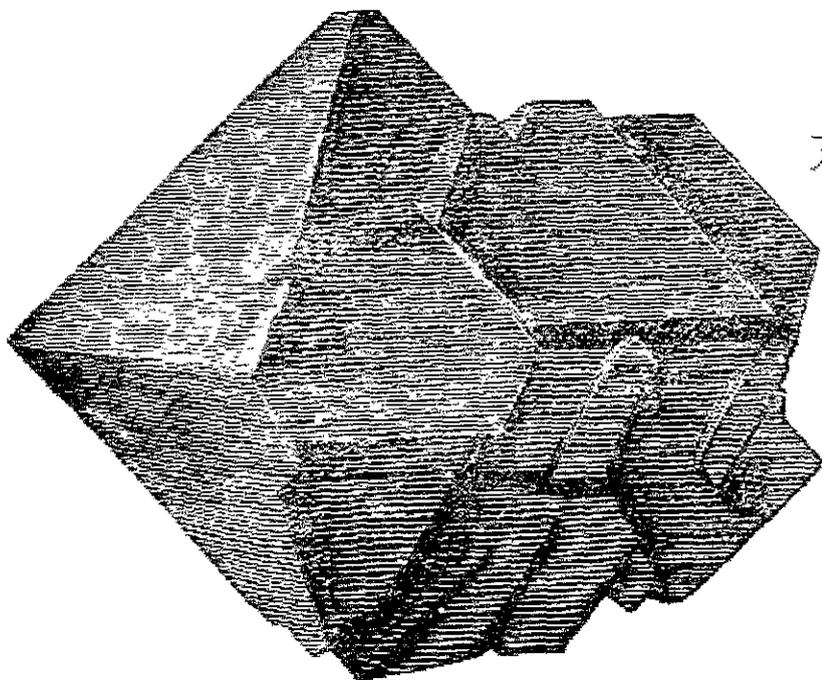
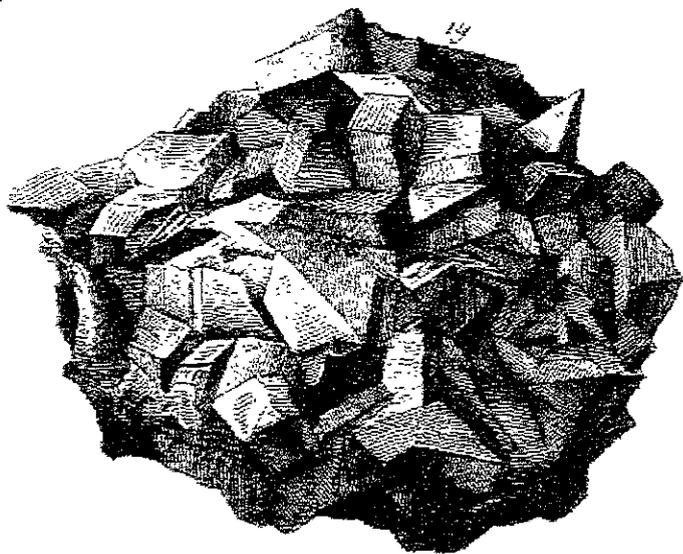


fig. 97



14

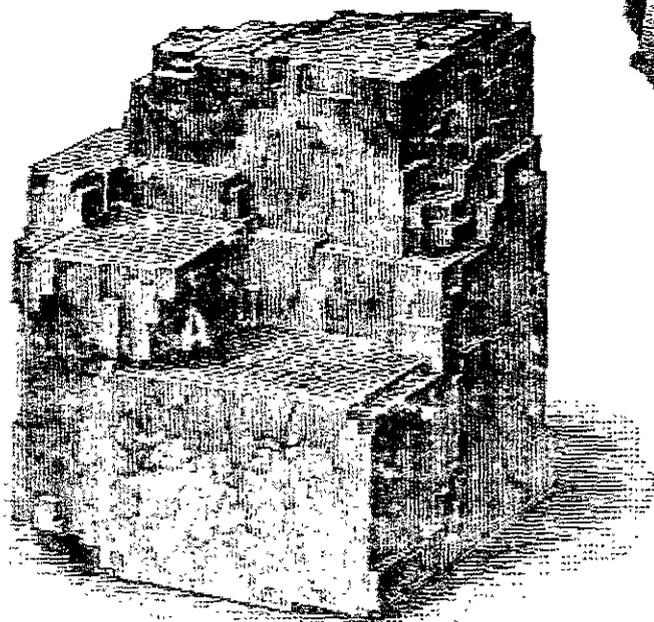


fig. 98

fig. 99

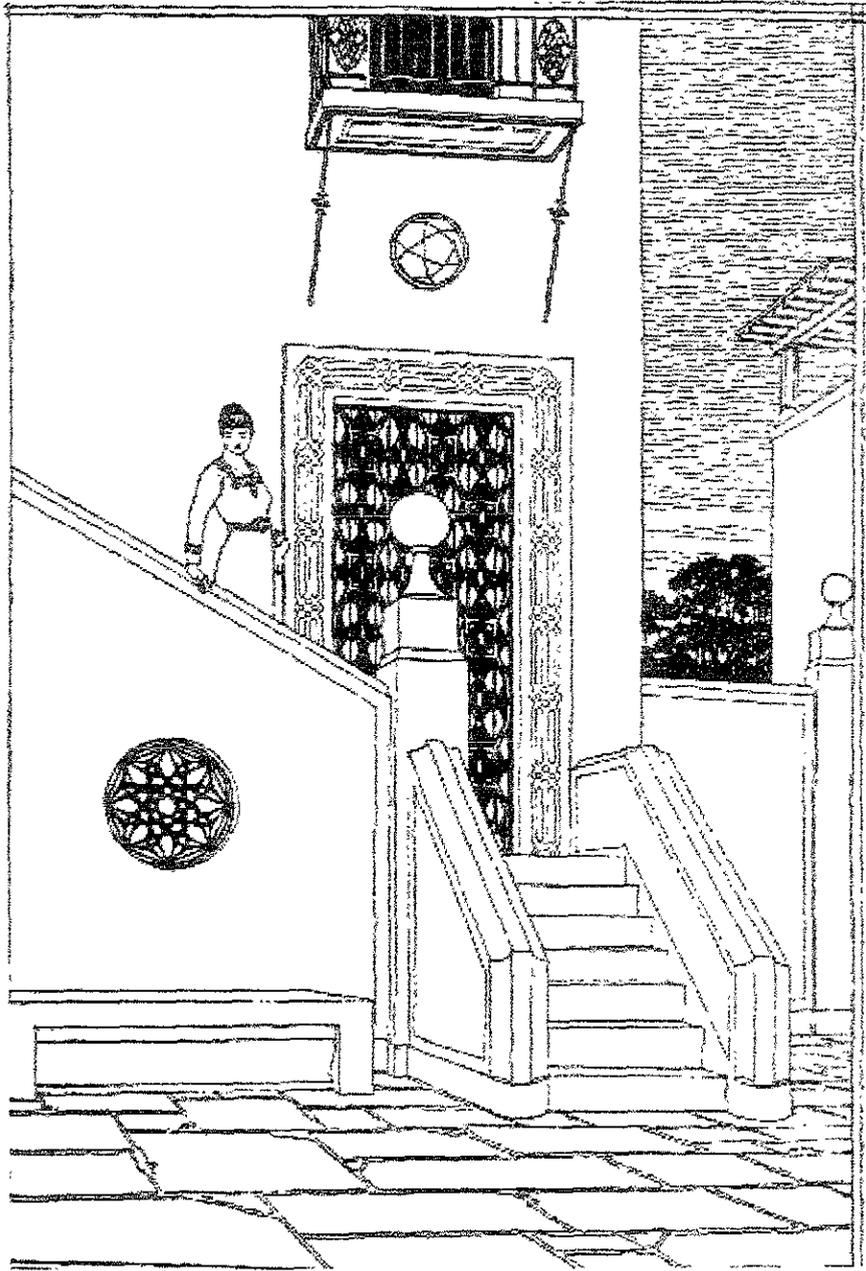


lámina 1

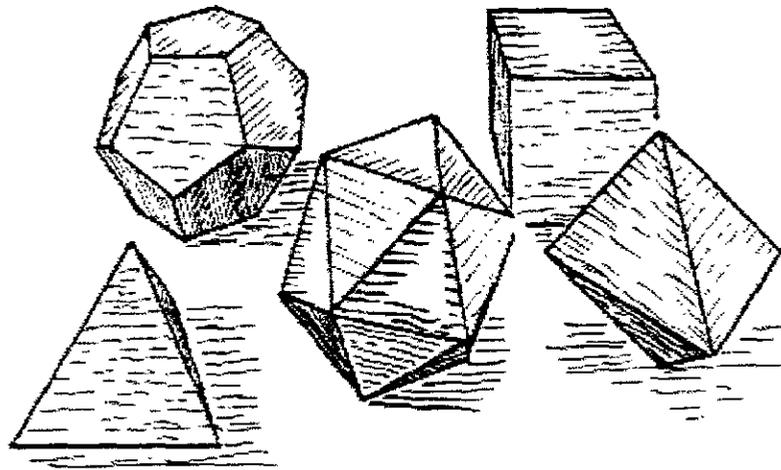


lámina 2

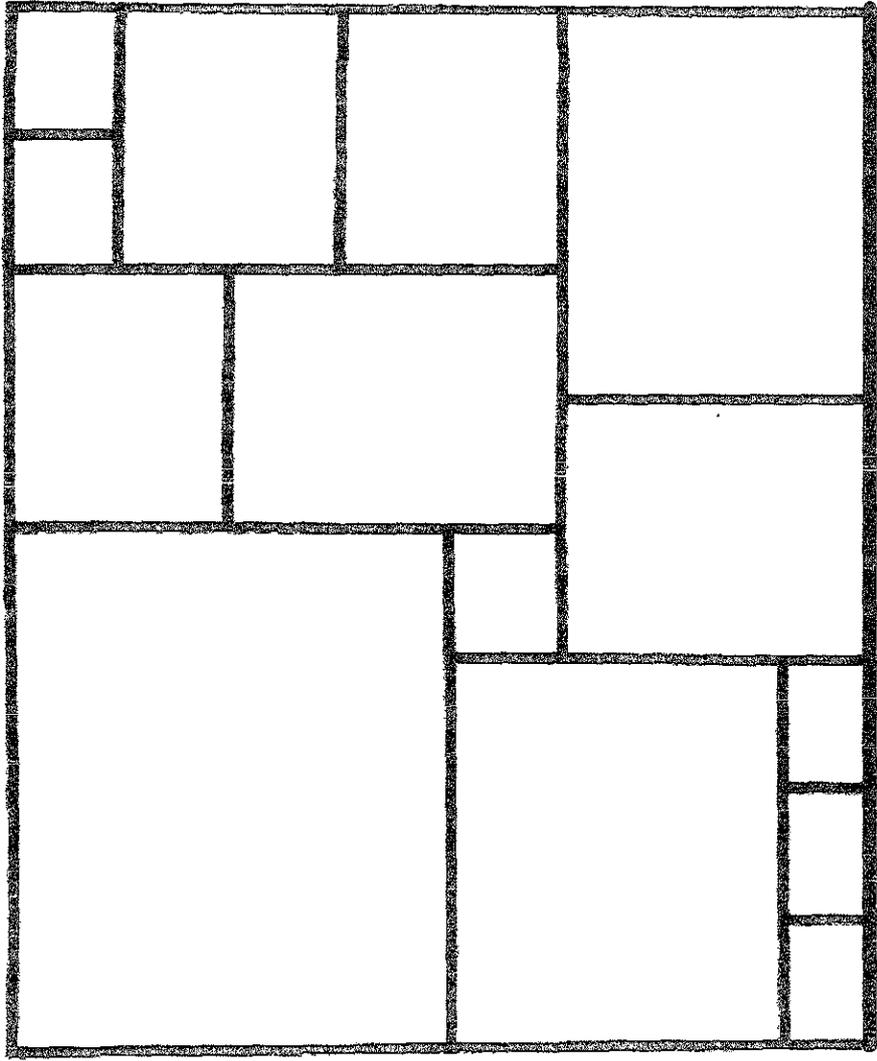


lámina 3

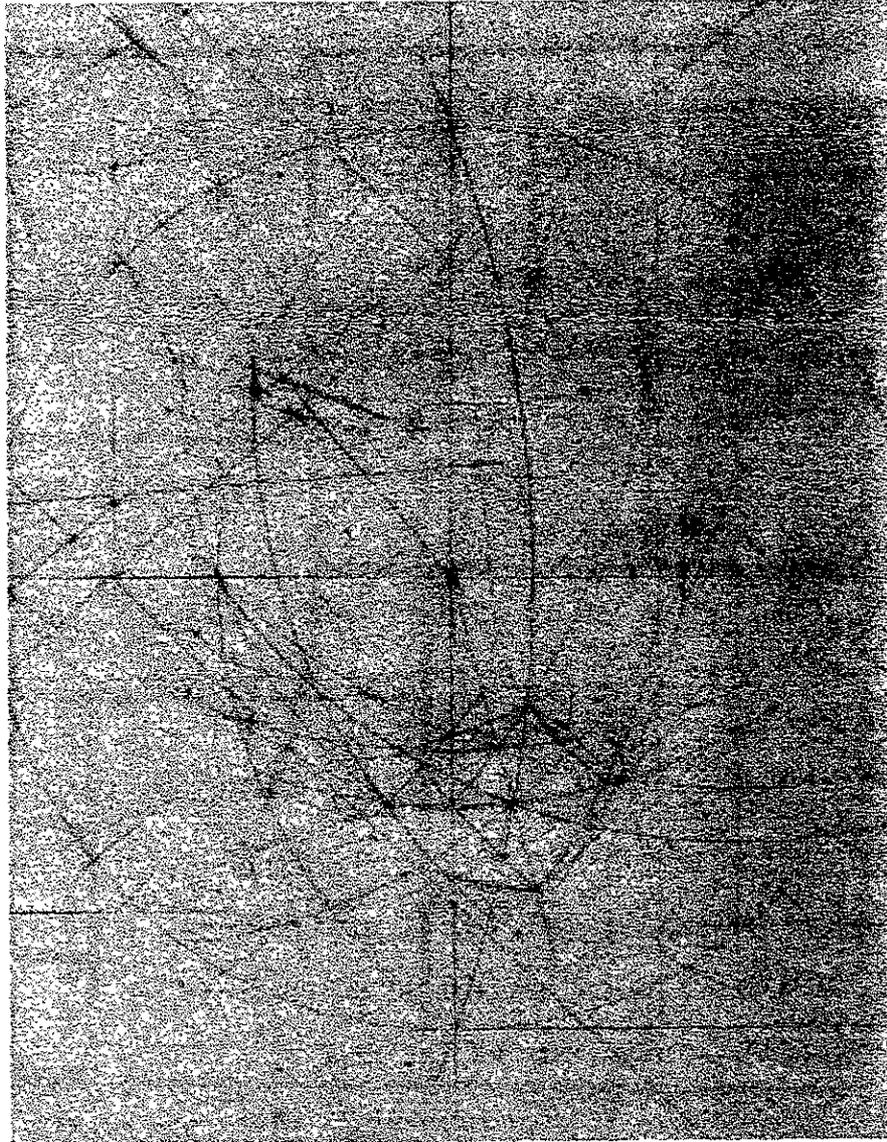


lámina 4

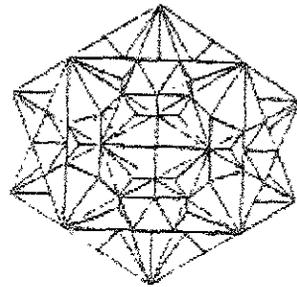
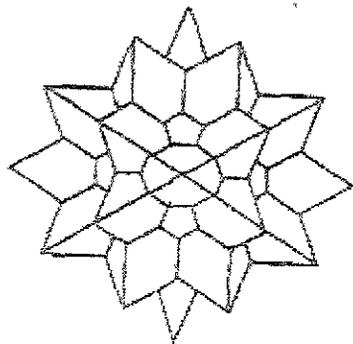
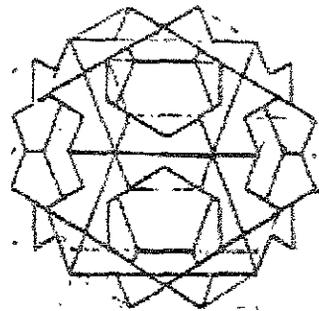
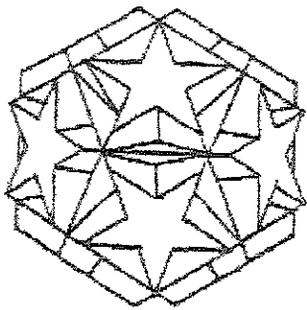
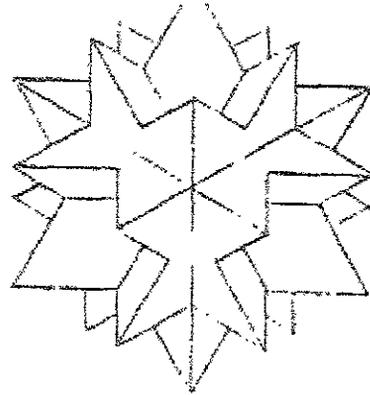
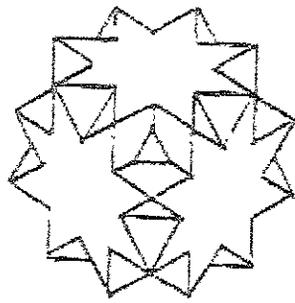


lámina 5

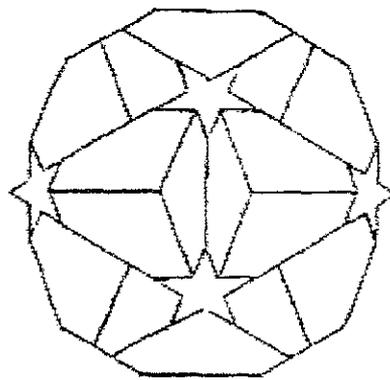
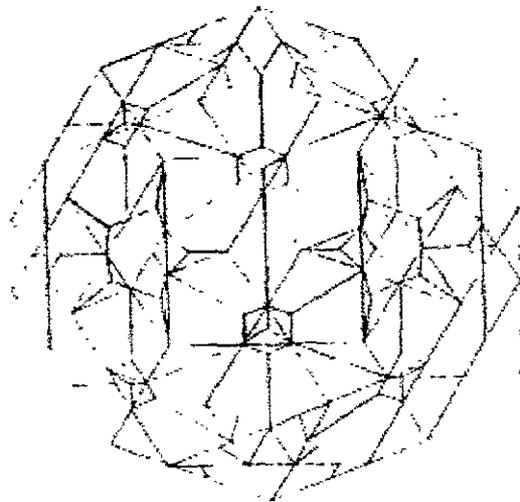


lámina 6

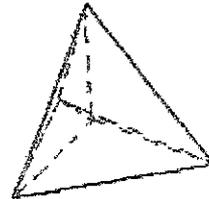
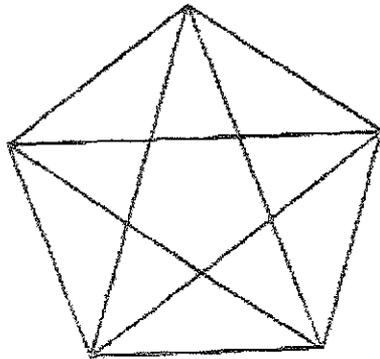
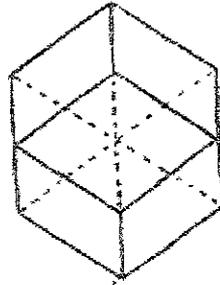
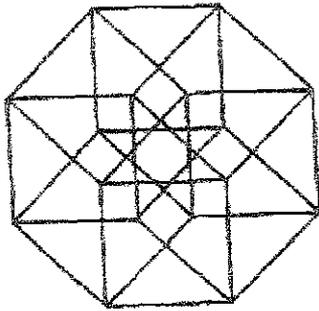
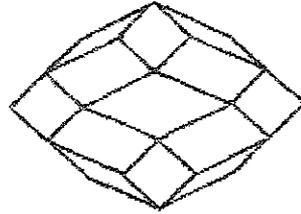
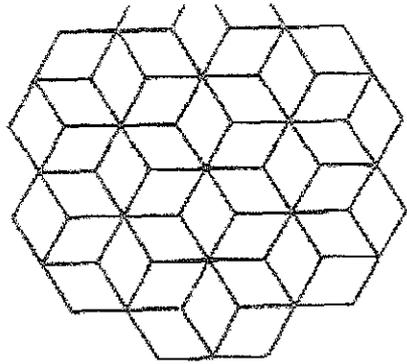


lámina 7

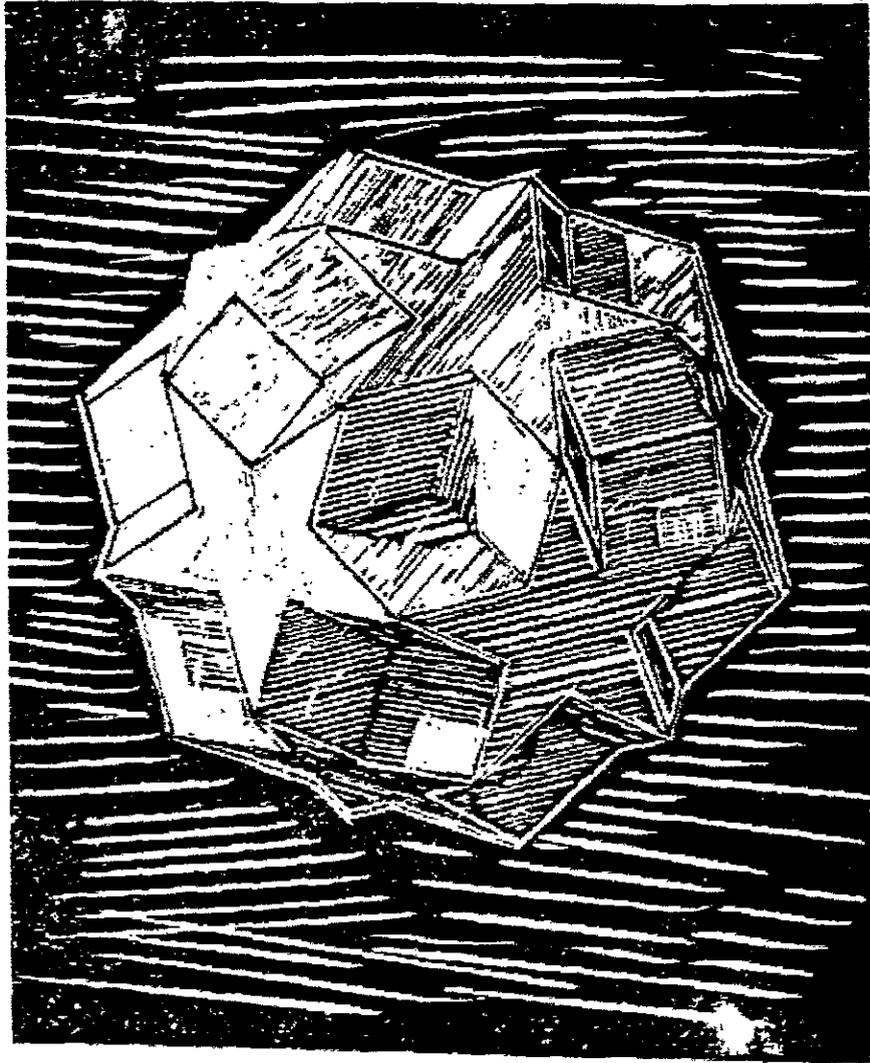


lámina 8

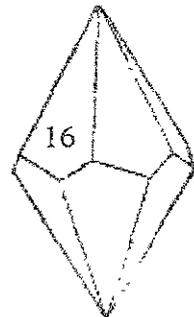
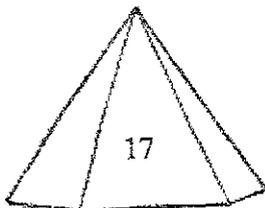
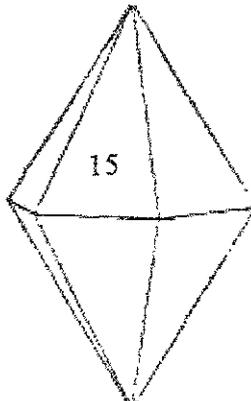
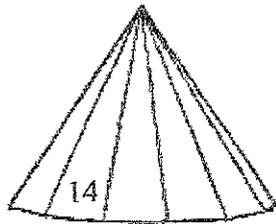
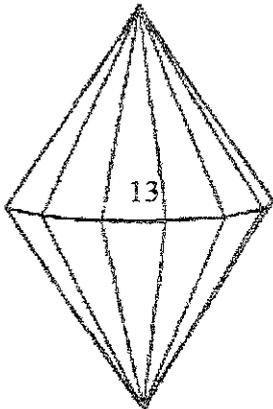
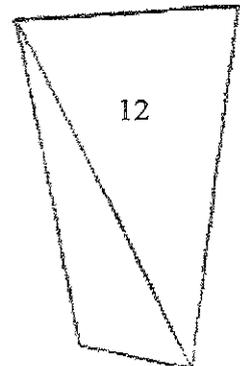
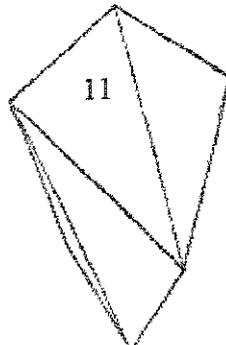
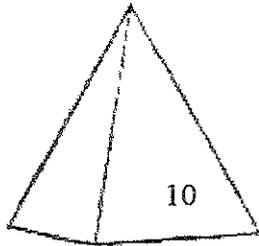
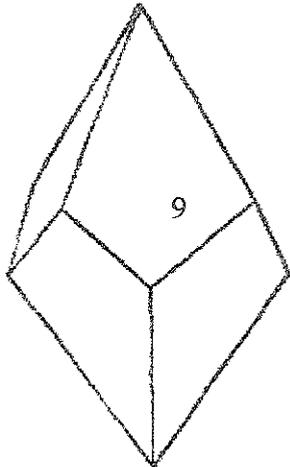
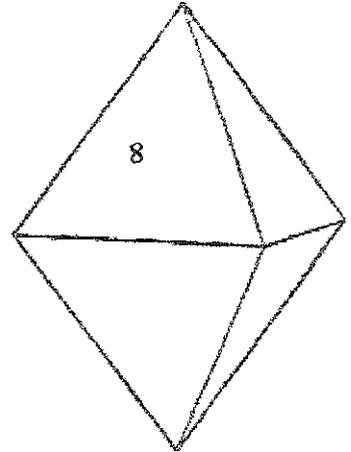
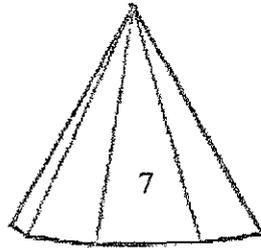
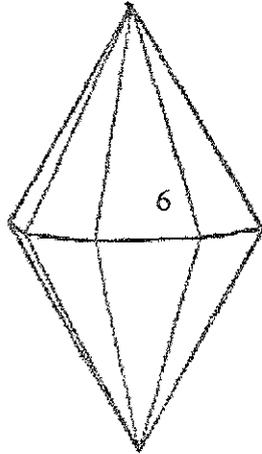
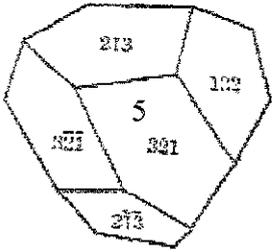
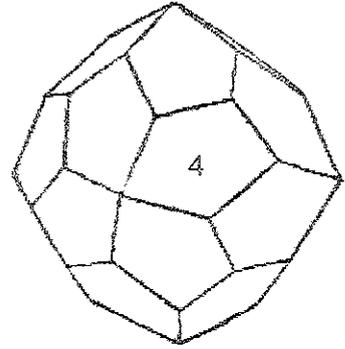
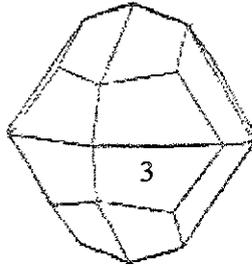
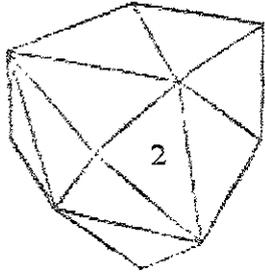
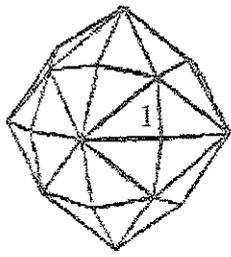


lámina 9

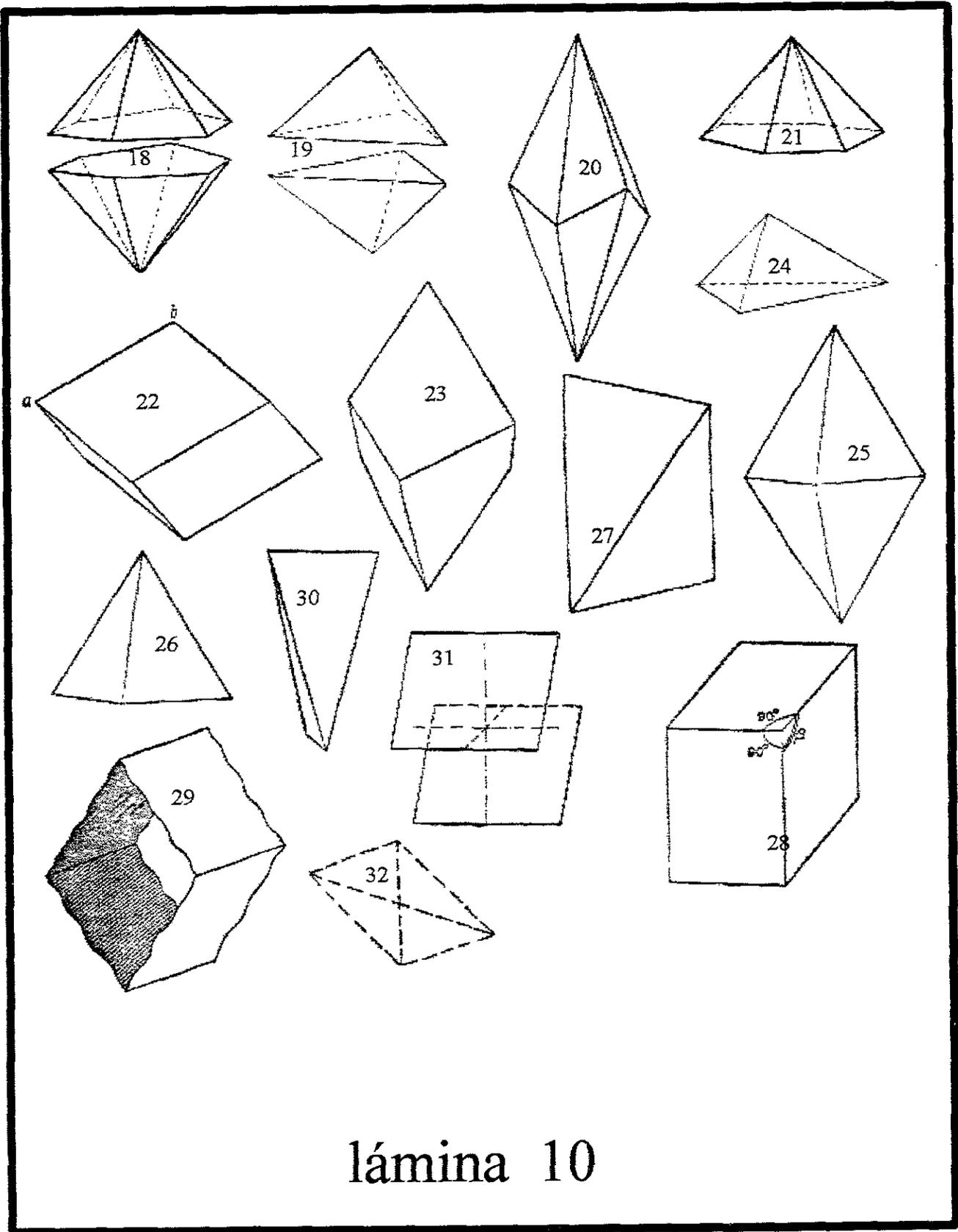


lámina 10

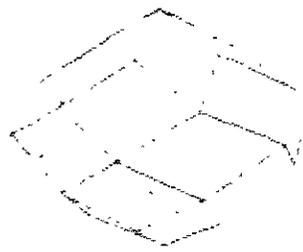


lámina 11



lámina 12

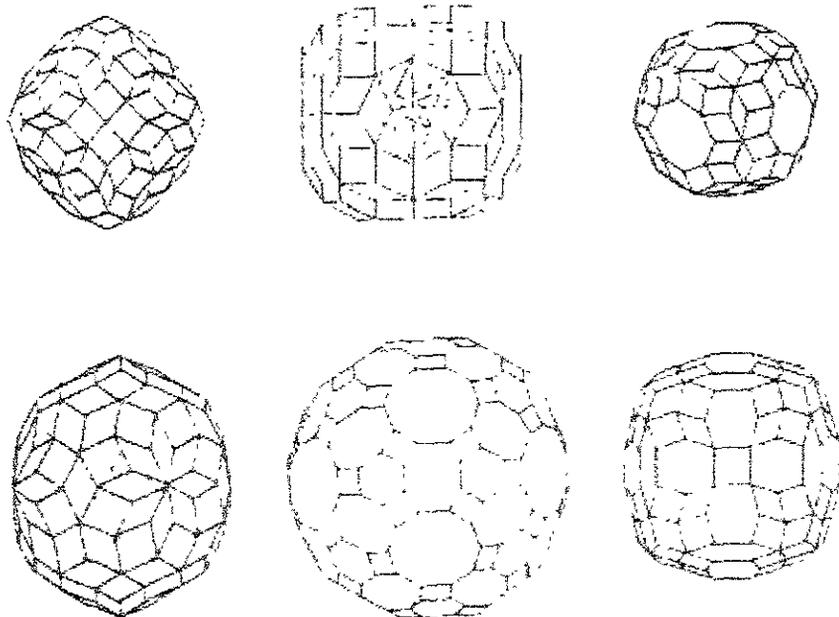


lámina 13

