

00372

2  
2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**ESTRUCTURA ORBITAL DEL POTENCIAL  
GALACTICO Y SU APLICACION A CUMULOS  
ESTELARES**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
**MAESTRO EN CIENCIAS (ASTRONOMIA)**

PRESENTA:

**JOSE HECTOR NORIEGA MENDOZA**



DIRECTORES DE TESIS:  
M.C. CHRISTINE ALLEN ARMIÑO Y  
DR. ROBERTO ALEJANDRO RUELAS MAYORGA

MEXICO, D.F.

1998

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

261032



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

A mis 4 grandes con cariño,

*Mamá, Papá, Irma y Charly.*

## PMS Y AGRADECIMIENTOS PERSONALES

En el contexto de las decisiones académicas diarias de los investigadores, existe la posibilidad de un criterio guía que me gustaría llamar el “principio de mayor satisfacción científica” (PMS). Esta tesis es el resultado de haber seguido tal principio, el cual cobra sentido natural ante preguntas como ésta : de las varias opciones para aprender y hacer ciencia, ¿ cuál de ellas es la que libre y personalmente *nos* resulta más interesante, instructiva, estimulante para el trabajo futuro y congruente con el espíritu creativo y reflexivo de la ciencia ? Trabajar en una tesis de maestría tratando de acotar el caos orbital galáctico fue mi respuesta personal a esa pregunta.

Mi motivación original en el caos se debe al Dr. José Luis Mateos y su curso de Mecánica Clásica en el IFUNAM, durante el cual se dio la afortunada intersección de intereses con la M.C. Christine Allen del IAUNAM. Chris me ofreció un tema de investigación astronómica muy motivante que ha culminado en este trabajo, fusión de 2 de mis más grandes intereses: los fenómenos caóticos y la astronomía galáctica.....el PMS en toda la extensión de la palabra.

En un ambiente internacional de alta competencia, sin embargo, el “principio de mayor satisfacción” no siempre tiene cabida, pues la ciencia actual se basa fundamentalmente en elevados estándares de producción y eficiencia, generalmente incompatibles con la esencia del PMS, el cual fomenta un goce intelectual ajeno a la rigidez temporal, a temáticas estrictas y a la producción “masiva”. Todo científico joven (principalmente) tendrá el derecho a elegir libremente el PMS y a rechazar filosofías académicas populares como la de la “vida dura” (hard life philosophy, hlp), sin el menor temor de ver limitada su carrera, ó en el peor de los casos, amenazada su vocación. La ciencia es una de las más nobles, trascendentales y satisfactorias actividades humanas; existe y se elabora para ser disfrutada principalmente por sus creadores, educadores y divulgadores, los científicos. Una ciencia que no se goza en su construcción y transmisión diaria no tiene sentido. El PMS deberá encontrar un nuevo espacio propio en las próximas generaciones e instituciones académicas de inicio de milenio.

Quiero agradecer a todos aquellos que, en menor ó mayor grado, han apoyado y hecho madurar este PMS personal durante mi estancia en el Instituto :

Al Dr. Alejandro Ruelas en primer término (co-director de esta tesis), por haber aceptado la fuerte responsabilidad de ser, simultáneamente en estos años, un asesor comprometido, académico honesto y motivador, sensible profesor, excelente amigo y genuino ser humano. Mi más grande agradecimiento para él, por esa permanente presencia.

La M.C. Christine Allen (directora de esta tesis) ha sido, en la parte final de mi estancia, un apoyo invaluable. A ella debo el tema de este trabajo y la oportunidad de incursionar en la dinámica galáctica. Tanto a la maestra Allen como al Dr. Arcadio Poveda agradezco el apoyo brindado a través del proyecto CONACyT 4332-E.

Debo un agradecimiento muy especial a los Dres. Edmundo Moreno y José Luis Mateos, a quienes literalmente considero co-asesores de esta tesis. Ambos estuvieron desde el primer momento muy atentos al desarrollo de este trabajo, el cual enriquecieron ampliamente con discusiones detalladas, comentarios y sugerencias.

A todos los investigadores quienes amablemente aceptaron ser parte de mi grupo de sinodales, y quienes leyeron esta tesis afinando detalles y sugiriendo cambios y mejoras: M.C. Christine Allen, Dres. Alejandro Ruelas, Manuel Peimbert, Edmundo Moreno, José Luis Mateos, Marco A. Martos, Arcadio Poveda, Luis F. Rodríguez, William Schuster y Miguel A. Herrera (quien tuvo la gentileza de revisar el escrito bajo presiones de tiempo).

...y por supuesto, a Octavio Valenzuela y Erika Sohn, "influencias redondeadoras" importantes del PMS.

Finalmente, un cúmulo de gratitud al Instituto de Astronomía de la UNAM como institución científica nacional, por sus contrastes y su presencia pionera en México.

Héctor Noriega Mendoza

Ciudad Universitaria,

México, D.F.,

Abril de 1998

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I. LA GALAXIA.....	3
I.1 Las preguntas básicas	4
I.2 Poblaciones estelares	5
I.3 Cinemática y dinámica galáctica	7
I.4 La curva de rotación galáctica	8
I.5 Cúmulos estelares	10
CAPÍTULO II. MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE MASA EN LA GALAXIA.....	11
II.1 EL MODELO DE CALDWELL Y OSTRIKER (1981)	13
II.2 EL MODELO DE BAHCALL, SCHMIDT Y SONEIRA (1982)	14
II.3 EL MODELO DE ALLEN Y SANTILLÁN (1991)	15
II.4 ÓRBITAS EN UN POTENCIAL AXISIMÉTRICO	19
II.4.1 Integrales de movimiento	19
II.4.2 Ecuaciones de movimiento	21
II.4.3 Características de las órbitas	22
CAPÍTULO III. ESTRUCTURA ORBITAL DEL POTENCIAL GALÁCTICO CON EL MODELO DE ALLEN Y SANTILLÁN (1991).....	26
III.1 ANTECEDENTES	27
III.1.1 El trabajo de Ollongren (1962)	27
III.1.2 El trabajo de Hénon y Heiles (1964)	29
III.1.3 El trabajo de Martinet y Hayli (1971)	30
III.1.4 El trabajo de Valera, Aguilar y Schuster (1994)	31
III.2 EL MAPEO DINÁMICO A TRAVÉS DE SUPERFICIES DE SECCIÓN	33
III.3 OBTENCIÓN NUMÉRICA DE LAS SUPERFICIES DE SECCIÓN	35

*III.4 EXTENSIÓN DEL MAPEO: INTERVALO DE VARIACIÓN DE E Y h* 38

*III.5 RESULTADOS DEL MAPEO DINÁMICO* 39

**III.5.1** Presentación del mapeo dinámico 41

**III.5.2** Superficies de sección verticales 41

**III.5.3** Acotación de las regiones caóticas en la Galaxia 42

**III.5.4** Análisis de regiones y detalles de particular interés 45

**III.5.5** Órbitas representativas 50

**CAPÍTULO IV. IMPLICACIONES DEL MAPEO DINÁMICO EN LAS  
ÓRBITAS DE CÚMULOS ESTELARES.....53**

**IV.1** Cúmulos abiertos 55

**IV.2** Cúmulos globulares 57

**CONCLUSIONES.....60**

**REFERENCIAS.....63**



## INTRODUCCIÓN

El propósito central de esta tesis es el crearnos una idea clara y general sobre la **estructura orbital del potencial galáctico**; es decir, el formarnos un panorama amplio y realista de las características cinemáticas y dinámicas de las trayectorias de puntos masa orbitando en nuestra galaxia, suponiendo el modelo axisimétrico de distribución de masa propuesto por Christine Allen y Alfredo Santillán en 1991. Este modelo ha sido frecuentemente utilizado por la comunidad astronómica, dadas las facilidades que brinda para el manejo numérico y cálculo de órbitas; sin embargo, no existe hasta el momento un sondeo detallado del comportamiento orbital que el modelo genera en las distintas regiones de la Galaxia, ni de sus posibles repercusiones en la dinámica de objetos directamente observables, siendo el único antecedente en este sentido el estudio de Valera, Aguilar y Schuster (1994).

En este trabajo se obtienen los detalles estructurales de un gran conjunto de familias de órbitas. Tales detalles se logran a través de un MAPEO DINÁMICO detallado, conformado por un amplio conjunto de cortes de Poincaré que pretenden cubrir toda la Galaxia. El mapeo se desarrolla con base en las variaciones regulares tanto de la **energía total  $E$**  como del **momento angular  $h$**  en la dirección perpendicular al plano galáctico de dichas familias de órbitas, partiendo del hecho fundamental de la **conservación** de ambas cantidades físicas en un potencial axisimétrico independiente del tiempo.

La existencia de regiones de **caos orbital** en la Galaxia, previamente registradas en la literatura y claramente confirmadas y extendidas en este trabajo, resulta de gran interés por la estrecha relación que guardan con las órbitas de objetos con bajo momento angular, como es el caso de estrellas y cúmulos globulares del halo galáctico. Siendo el tema de las poblaciones y cúmulos estelares de particular interés tanto para el autor como para los asesores de esta tesis, las aplicaciones que este mapeo tiene en la comprensión del origen y evolución de dichos objetos y del sistema estelar galáctico son por lo tanto valiosas.

De esta manera, nuestro trabajo queda dividido como sigue: **Capítulo I**, generalidades sobre nuestro sistema estelar y cinemática galáctica; **Capítulo II**, modelos estándar de distribución de masa y dinámica orbital general; **Capítulo III**, estructura orbital del modelo Allen-Santillán a través del mapeo con familias de superficies de sección; **Capítulo IV**, aplicaciones de los resultados del mapeo a un conjunto de cúmulos estelares observados. Finalmente, se obtienen algunas **Conclusiones** sobre el mapeo mismo y sus potencialidades como recurso comparativo en el pronóstico de órbitas de objetos galácticos.

*CAPÍTULO I*

**LA GALAXIA**

# CAPÍTULO I. LA GALAXIA

## I.1 Las preguntas básicas

Durante el siglo XX, los humanos hemos ido al encuentro astrofísico directo y profundo con nuestra galaxia la **Vía Láctea**. En los inicios de este encuentro teórico-observacional supimos que, indiscutiblemente, nuestro Sistema Solar está inmerso en una de esas enormes y abundantes **estructuras estelares independientes y aisladas** que permean el Universo. Comprobamos que somos parte de una galaxia y que no estamos colocados en su centro (Shapley, 1918). En este proceso natural de exploración y entendimiento, los primeros trabajos de investigación se enfocaron a tratar de aclarar varios puntos fundamentales: las dimensiones, la estructura global y el comportamiento dinámico interno de ésta, la Galaxia que habitamos (en general, cuando se habla de la Vía Láctea, se escribe la palabra galaxia con mayúscula). Pronto los astrónomos pudieron darse cuenta de que, a pesar de tratarse de preguntas generales, sus respectivas respuestas son más complejas de lo que quizás en algún momento se creyó. Aunque en nuestros días se cuenta con un esquema general y consistente que aspira a responder esas preguntas básicas, existen nuevos retos y detalles finos que necesitan aún ser entendidos e incorporados a ese esquema general.

La Vía Láctea es un extenso y complejo sistema aplanado de estrellas, gas, polvo, rayos cósmicos y campos magnéticos, el cual alcanza un radio del orden de 100 kpc. Considerado una **galaxia espiral** del tipo **Sbc** en la clasificación de Hubble (1936), nuestro sistema estelar consta de un total aproximado de  $10^{11}$  estrellas de todos los tipos. Hoy sin embargo sabemos que, a pesar de este impresionante número de objetos estelares independientes en la Galaxia, la mayor parte de su masa no está contenida en tales estrellas, sino en el no del todo entendido **halo galáctico oscuro**. Los modelos recientes asignan a la Vía Láctea una masa total de hasta varias veces  $10^{12} M_{\odot}$  (donde  $1M_{\odot} = 1$  masa solar). Por otra parte, sólo  $10^{10} M_{\odot}$  se encuentran repartidas en nubes y conglomerados de **gas interestelar** (Binney y Tremaine, 1987). Es así que, para grandes radios galactocéntricos, la dinámica interna de la Galaxia queda regida de hecho por la influencia gravitacional predominante del halo

oscuro, mientras que es la masa estelar la que determina el comportamiento orbital en las regiones más próximas al centro y al plano galácticos.

A lo largo de los años, la estructura general de la Vía Láctea fue revelándose con las primeras evidencias de sus características discoidales. Este hecho fue manifiesto desde que las observaciones telescópicas mostraron que, en la dirección de esa banda de luz que por las noches identificamos propiamente como la Vía Láctea, el número de estrellas es enorme, mientras que en una dirección perpendicular a tal banda el número de estrellas es mucho más limitado. Este fenómeno sugería la idea de que nuestro Sol debía estar inmerso en un sistema estelar **aplanado**.

Técnicas pioneras basadas en conteos estelares y métodos estadísticos (Kapteyn y van Rhijn, 1920; Kapteyn, 1922) mostraron que vivimos efectivamente en un sistema aplanado; sin embargo, sus dimensiones reales fueron subestimadas en aquellas primeras investigaciones. La distribución espacial del sistema de cúmulos globulares galácticos vendría a dar argumentos para expandir notablemente el tamaño real de la Vía Láctea; asimismo, esa distribución sería la prueba contundente de que el Sol se encuentra muy lejos del centro de la Galaxia (Shapley, 1918). El singular hecho de que el gas y el polvo interestelares permean el disco de la Vía Láctea como un todo (Trumpler, 1930), fue fundamental para interpretar correctamente las distancias astronómicas inferidas de estos estudios que, finalmente, llevaron a un modelo más realista de la estructura general de nuestro sistema estelar.

## **I.2 Poblaciones estelares**

El nuevo concepto de **poblaciones estelares** (Baade, 1944a y 1994b), se uniría a todo el conjunto de recursos teóricos y observacionales para construir, con mayor certeza y detalle, la estructura global de nuestra galaxia. Como ya se venía haciendo simultáneamente a la exploración de ésta, la observación y el estudio de galaxias exteriores ayudaron a la comunidad astronómica a hacer analogías y comparaciones útiles con la nuestra (la aportación de Baade surgió de sus observaciones de M31 y otras galaxias cercanas). Estas analogías fueron inmediatas, por ejemplo, en relación con el mapeo de los brazos espirales en la vecin-

dad solar (Morgan et al., 1952). Los **diagramas Hertzsprung-Russell** observacionales, esto es, los llamados diagramas Color-Magnitud, han desempeñado desde entonces, de hecho, una manera de **definir** (Stetson, 1993) a las 2 principales poblaciones estelares en ésta y otras galaxias : **Población I** (asociada a objetos de disco) y **Población II** (asociada a objetos de halo). Hoy en día, esta rígida clasificación sigue siendo útil únicamente como un recurso guía y simplificado dentro del estudio de las poblaciones estelares. Algunos autores incluso llegan a hablar de una población primigenia III (un término en desuso hoy), la que dio origen a los elementos químicos hoy observados en cúmulos globulares y estrellas del halo (Gilmore, King y van der Kruit, 1990).

En los últimos años, por ejemplo, el conocimiento de las poblaciones estelares y un mayor entendimiento de la dinámica galáctica han permitido sugerir, aparte del ya bien conocido disco “delgado”, la existencia de un disco “grueso” viejo, más extendido y con características físicas propias (Gilmore y Wyse, 1985). Los análisis dinámicos serán indudablemente importantes en el esclarecimiento de la composición estelar de regiones como el **bulbo galáctico**, población que, por ejemplo, Ruelas-Mayorga y Noriega-Mendoza (1995) modelan como una extensión de la población I de disco sobre la bien conocida componente estelar típica de población II, con base en criterios estadísticos y fotométricos que reproducen en buena medida las observaciones.

Como parte integrada a toda esta serie de trabajos, los **cúmulos estelares** han representado una importante fuente de información básica en varios sentidos, que van desde el origen, estructura y evolución de nuestro propio sistema estelar, hasta los modernos descubrimientos hechos por el telescopio espacial Hubble, hacia el entendimiento de las galaxias externas. Los cúmulos estelares en varias de esas galaxias, hoy observacionalmente accesibles, ya proveen información concreta sobre los mismos aspectos estructurales y evolutivos que nos han motivado a estudiar la Vía Láctea. Desde luego, las galaxias cercanas han sido la primera etapa en esta empresa expansiva del conocimiento; tal es el caso de los cúmulos globulares de la galaxia de Andrómeda (M31), estudiados por el telescopio espacial (Ajhar et al., 1996).

### I.3 Cinemática y dinámica galáctica

Entre los primeros estudios relativos a la cinemática y dinámica internas de nuestra galaxia pueden mencionarse los debidos a Lindblad (1926) y a Oort (1927, 1928). A Lindblad se debe el desarrollo de un modelo matemático que, como principales características, considera a la Vía Láctea como un gran conjunto de subsistemas en rotación alrededor de un eje central. A cada uno de estos subsistemas o componentes, el autor le asigna características físicas particulares, como grado de aplanamiento y dispersión interna de velocidades. El trabajo de Lindblad apoya el modelo de una Galaxia más masiva que la propuesta en el modelo clásico de Kapteyn (astrónomo que modeló la Vía Láctea como un sistema esferoidal aplanado, 5 veces más largo que grueso y con un radio aproximado de 10 kpc). Por su parte, Oort es quien desarrolla una teoría cinemática completa de la **rotación diferencial** en la Galaxia; de igual forma, a este astrónomo se le debe el reconocimiento de la importante diferencia cinemática, en nuestro sistema estelar, entre objetos con órbitas circulares y alto momento angular (como nuestro Sol) y aquellos con órbitas muy excéntricas y bajo momento angular (estrellas de alta velocidad y algunos cúmulos globulares). Su determinación de la masa de la Galaxia es compatible con el modelo de Lindblad.

Posteriormente, el enorme avance de la radioastronomía después de la Segunda Guerra Mundial, permitió a los astrónomos tener claras pruebas observacionales de la estructura **espiral** de la Galaxia, a través de la línea de emisión a 21 cm del **hidrógeno neutro (HI)**, predicha por H. van de Hulst en 1944. El hidrógeno resulta ser el gas más abundante del Universo y del medio interestelar, por lo que es fácil detectarlo a través de su contribución a la densidad columnar sobre líneas de visión de vasta profundidad óptica. Es justamente este gas neutro, además de las estrellas OB y las regiones HII, el que delinea los brazos espirales del disco galáctico, así como el disco mismo. Existe también un **disco grueso** de gas, revelado por observaciones en HI y HII.

Una de las repercusiones más importantes de las observaciones de hidrógeno neutro en el disco galáctico ha estado relacionada con el conocimiento de la distribución de masa en la Vía Láctea. Este avance fundamental ha sido posible a través de la medición, a distintos

radios galactocéntricos ( $R$ ), de la velocidad circular con la que el gas se mueve alrededor del centro galáctico ( $V_c$ ), para construir lo que se denomina la **curva de rotación**. Actualmente, la forma de esta curva es conocida en nuestra galaxia hasta distancias galactocéntricas que sobrepasan la órbita solar (Fich, Blitz y Stark, 1989). Tradicionalmente, el método usado para obtener la curva de rotación en la región interna a la órbita solar,  $R < 8.5$  kpc, es el de tomar las velocidades circulares del HI en los puntos de tangencia de nuestras visuales con las órbitas circulares del gas. Para la región externa a la órbita solar,  $R > 8.5$  kpc, éstos y otros autores utilizan un método basado en la medición de velocidades de la molécula trazadora de CO, así como en la determinación de distancias espectrofotométricas de las regiones de **hidrógeno ionizado (HII)** asociadas. Es así como se determina la curva de rotación para  $R > 8.5$ . El método ha sido empleado hasta un radio de 17 kpc, con una buena certeza. En otras galaxias, también se usa la línea de  $H\alpha$  y varias más.

Como es evidente, el gas interestelar ha sido crucial en la determinación de la curva de rotación galáctica. Sin embargo, en nuestros días es motivo de discusión el tipo de información cinemática que podemos obtener de este gas, incluyendo la necesaria para construir la curva de rotación dado que, a diferencia de las estrellas, la dinámica de las nubes interestelares es muy sensible ante la presencia de presión y **campos magnéticos**. De esta manera, la interpretación de la curva de rotación obtenida a partir del gas puede ser distinta de la que obtendríamos, por ejemplo, de la curva de rotación a partir de estrellas. El papel de los campos magnéticos sobre la dinámica del gas y su repercusión en la curva de rotación es explorado por autores como Nelson (1988) y Battaner et al. (1992).

#### I.4 La curva de rotación galáctica

La curva de rotación de una galaxia cualquiera es así una gráfica de  $V_c$  en contra de  $R$ , siendo posible a través de ella estimar la cantidad de masa contenida en la Galaxia hasta un radio determinado. Para lograr esto, es necesaria una hipótesis de simetría para la distribución de masa; asimismo, se hace uso de la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ) y, suponiendo una fuerza central, de la ley de gravitación universal ( $F = \frac{GMm}{R^2}$ ).



Igualando las dos expresiones y escribiendo el resultado por unidad de masa, tenemos que  $a = \frac{GM}{R^2}$ . Finalmente, suponiendo movimiento circular, el valor de la aceleración está dado por  $a = \frac{V_c^2}{R}$ . Si la masa  $M$  es sólo función de la variable  $R$ , entonces llegamos a que

$$\frac{V_c^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} .$$

De este modo, tenemos ya una manera de calcular la cantidad de masa contenida hasta un radio  $R$  en la Galaxia ( $M(R)$ ), si sabemos tanto el valor de  $R$  como de  $V_c$  correspondiente a tal radio (datos que como hemos visto, pueden obtenerse de la curva de rotación **observada**). Este cálculo, sin embargo, no es más que una buena aproximación, pues supone que la Galaxia tiene simetría esférica. Ahora, conociendo la relación entre la componente radial de la fuerza  $F$  y el **potencial gravitacional**  $\phi$ , la cual establece que  $F = -m \frac{\partial \phi}{\partial R}$ , el desarrollo anterior puede escribirse en forma compacta como

$$\frac{\partial \phi}{\partial R} = \frac{-V_c^2}{R} ,$$

en donde  $\phi$  es el **potencial gravitacional** o simplemente el **potencial**, es decir, la energía gravitacional por unidad de masa debida a la Galaxia como un todo. La forma funcional de este potencial depende de la manera como está distribuida la masa a lo largo y ancho de nuestro sistema estelar. Ante este panorama, notamos que si deseamos conocer la cantidad de materia contenida en la Vía Láctea, es muy importante tener una idea clara de cómo ésta se encuentra distribuída formando la gran estructura de miles de millones de estrellas, gas, polvo y materia oscura en la que habitamos, desde el centro hasta sus fronteras externas. Con tal fin y a lo largo de todo este siglo, se han hecho varias propuestas analíticas y numéricas concretas de distribución de masa en nuestra galaxia, basadas generalmente en datos observacionales muy importantes como son la propia curva de rotación y la cinemática de objetos en la vecindad solar, entre otros. La densidad local de masa, el gradiente de densidad y la componente vertical de la fuerza ( $K_z$ ) son, por ejemplo, cantidades obtenidas de la observación de nuestro inmediato entorno en la Galaxia que aportan valiosa información sobre la distribución de masa en ella.

## I.5 Cúmulos estelares

Por último, mencionaremos que un modelo adecuado y realista para el potencial gravitacional galáctico, entre otras ventajas, nos ayuda a inferir importantes conclusiones sobre objetos particulares como los cúmulos estelares. En los últimos años, el descubrimiento de la existencia de dos distintos subsistemas de **cúmulos globulares** (Zinn, 1985; Armandroff, 1989) y el particular interés en los llamados **cúmulos abiertos viejos** (Carraro y Chiosi, 1994; Finlay et al., 1995), han hecho y siguen haciendo uso de argumentos dinámicos para obtener conclusiones cada vez más generales, en un contexto astronómico amplio, sobre los mecanismos que han dado origen y hacen evolucionar a la Galaxia misma.

Un punto de interés particular dentro de los cúmulos estelares, en el que la dinámica promete aportar información específica, es el del esclarecimiento de las relaciones entre los mencionados cúmulos globulares y los cúmulos abiertos viejos. Hasta el momento, no existen criterios definitivos para diferenciar claramente, desde un punto de vista astrofísico, a los objetos situados en la frontera de los cúmulos globulares más jóvenes y los cúmulos abiertos más viejos, razón por la cual se ha sugerido la existencia de un **continuo** de propiedades entre ellos; en este sentido, los cúmulos “fronterizos” serían simplemente indistinguibles de una u otra población (Noriega-Mendoza y Ruelas-Mayorga, 1997). En esta línea, Allen y Martos (1988) dan evidencia de que, bajo un estricto criterio orbital, ciertos cúmulos globulares como  $\bar{M}71$  (del subsistema de cúmulos globulares del disco; Zinn, 1985) guardan estrecha semejanza con los cúmulos abiertos más viejos, como M67.

Es así que un modelo útil, apegado a las observaciones recientes y lo más sencillo posible, se torna fundamental para la descripción de dónde y cómo se encuentra repartida la materia que conforma nuestra galaxia. El capítulo II se enfoca a presentar varios de estos modelos para el potencial galáctico, haciendo especial énfasis en el trabajo de Allen y Santillán (1991). La propuesta de estos autores es la utilizada para el presente estudio de la **estructura orbital** de la Galaxia: el estudio del conjunto de órbitas dominado por las principales familias de órbitas periódicas.

*CAPÍTULO II*

**MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE MASA**

**EN LA GALAXIA**

## CAPÍTULO II. MODELOS DE DISTRIBUCIÓN DE MASA EN LA GALAXIA

Existen varios modelos de distribución de masa en nuestra galaxia que han gozado de reconocida aceptación astronómica, a través de los últimos 40 años; tales modelos han sido ampliamente utilizados en la literatura. Dentro de ellos, el modelo de Schmidt (1956) es el primero que logra reproducir exitosamente el conjunto global de observaciones que, hasta su tiempo, se habían acumulado sobre nuestro sistema estelar.

Muy conveniente resulta en este punto el comentario, importante y aclaratorio, de que el cálculo de la fuerza gravitacional debida a una distribución de masa es generalmente complicado. A excepción de las bien conocidas distribuciones de tipo esferoidal ó de un disco delgado e infinito, las expresiones algebraicas asociadas para calcular tal fuerza no son sencillas, por lo que hay que valerse normalmente del recurso numérico. Existen, sin embargo, ciertas distribuciones de masa que son relativamente cómodas de manejar matemáticamente hablando; tal es el caso de los **esferoides oblatos** y los **discos exponenciales** (Gilmore, King y van der Kruit, 1990). De esta manera el potencial de Schmidt (1956), usado durante muchos años como el modelo estándar en la astronomía galáctica, se vale de una configuración de 13 **elipsoides de revolución** con distintas excentricidades y leyes de densidad. El conjunto de elipsoides, ajustado con las observaciones ópticas y radioastronómicas, fue sugerido para predecir la curva de rotación tanto en las regiones interiores como en las exteriores a la órbita solar.

El potencial de Schmidt, sin embargo, adolece de una limitante que lo hizo ser desplazado por los modelos más modernos: a grandes distancias galactocéntricas, predice una caída gradual de la curva de rotación galáctica, fenómeno que contradice a las observaciones actuales, ya que éstas indican que tal curva se mantiene prácticamente **constante** aun a grandes distancias del centro de la Galaxia (a 34 kpc, por ejemplo, la velocidad circular se infiere de los efectos gravitatorios de las galaxias satélites de la nuestra). Esta constancia de la curva de rotación pudo ser representada a través de la inclusión de una nueva componente

del potencial global, extensa, masiva y con simetría esférica: el halo galáctico oscuro. Es así como se proponen los nuevos modelos de distribución de masa, los cuales incorporan ahora un halo oscuro masivo que envuelve como un todo a la Vía Láctea, extendiéndose radialmente hasta distancias del orden de los 100 kpc. Dentro de estos nuevos modelos destacan los potenciales galácticos propuestos por Caldwell y Ostriker (1981), Bahcall, Schmidt y Soneira (1982) y Allen y Santillán (1991).

Desde hace una década, algunos astrónomos han hecho énfasis en el papel que el campo magnético de la Galaxia tiene en la dinámica del gas interestelar. Nelson (1988) propone que este campo, aunque pequeño ( $5 \mu G$  en promedio), es capaz de generar suficiente tensión magnética en las nubes interestelares como para infundirles, en las regiones galácticas distantes, una velocidad circular que puede explicar el aplanamiento observado de la curva de rotación, haciendo así menos significativo el papel de un halo galáctico masivo. Según estas consideraciones, un halo menos masivo que el usualmente supuesto podría dar posibilidad a una ligera caída de la curva de rotación estelar, mientras la curva de rotación a partir del gas se mantendría constante (como realmente se observa) por efectos del campo magnético.

### *II.1 EL MODELO DE CALDWELL Y OSTRIKER (1981)*

Esta propuesta numérica para modelar el potencial galáctico se apoya en la contribución de las componentes siguientes :

- i) Un bulbo central con densidad de la forma  $R^{-3}$**
- ii) Un disco resultado de la diferencia de 2 discos exponenciales**
- iii) Un halo esférico con densidad de la forma  $R^{-2}$**

Algunas cantidades físicas asociadas al modelo :

**Posición del Sol**

8.2 kpc del centro galáctico

### Velocidad circular en esta posición

238 km/s

### Masa total de la Galaxia

$2.07 \times 10^{12} M_{\odot}$  (hasta  $R=150$  kpc)

### Constantes de Oort

$A = 12.6 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ ,  $B = -13.1 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$

Los autores basan su propuesta en la medición de cantidades cinemáticas como la curva de rotación galáctica y las bien conocidas constantes de Oort, definidas como

$$A = \frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_o}{R_o} - \left( \frac{d\theta}{dR} \right)_{R_o} \right],$$
$$B = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\theta_o}{R_o} + \left( \frac{d\theta}{dR} \right)_{R_o} \right],$$

donde  $R_o$  = distancia del Sol al centro de la Galaxia, medida sobre el disco,  $R$  = distancia de un punto cualquiera al centro galáctico, medida sobre el disco,  $\theta_o$  = velocidad lineal de rotación al radio  $R_o$  y  $\theta$  = velocidad lineal de rotación al radio  $R$ .

Los parámetros del modelo guardan correspondencia con las características estructurales reales observadas en las galaxias externas y con los tipos de poblaciones estelares conocidos en nuestra galaxia. Este trabajo además presenta la flexibilidad de poder introducir, conforme vayan siendo cuantificadas, las nuevas y posibles restricciones observacionales al modelo.

## II.2 EL MODELO DE BAHCALL, SCHMIDT Y SONEIRA (1982)

El potencial propuesto por estos autores, resultado de aproximaciones tanto analíticas como numéricas, es generado por la contribución de las siguientes componentes :

- i) Un bulbo central con densidad de la forma  $e^{-R^{1/4}}$
- ii) Un disco exponencial
- iii) Un halo esférico con leyes de densidad de la forma  $R^{-1.2}$  (para  $R \leq 30$  kpc) y  $R^{-2.7}$  (para  $R > 30$  kpc)

iv) Una componente adicional, oblata y central con densidad de la forma

$$e^{-R^2}$$

Algunas cantidades físicas asociadas al modelo :

**Posición del Sol**

8.0 kpc del centro galáctico

**Velocidad circular en esta posición**

225 km/s

**Masa total de la Galaxia**

$6.3 \times 10^{11} M_{\odot}$  (hasta  $R=60$  kpc)

**Constantes de Oort**

$$A = 13.8 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}, B = -14.3 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$$

Este modelo está basado principalmente en el resultado de conteos estelares en distintas direcciones en la Galaxia, así como en la información obtenida de estrellas de alta velocidad. Es además, como puede notarse dentro de los potenciales mencionados, el que requiere de más componentes para reproducir la curva de rotación galáctica y otras observaciones cinemáticas.

### *II.3 EL MODELO DE ALLEN Y SANTILLÁN (1991)*

El modelo de distribución de masa debido a C. Allen y A. Santillán (1991), es un modelo que reproduce con buena exactitud la curva de rotación de la Vía Láctea y la fuerza perpendicular al plano, considerando a nuestra galaxia constituida por 3 componentes bien diferenciadas, con características físicas realistas. El modelo es una versión mejorada del trabajo de Allen y Martos (1986) y postula la existencia de :

- i) Un esferoide central**
- ii) Un disco aplanado y**
- iii) Un halo esférico masivo**

Algunas cantidades físicas asociadas al modelo :

**Posición del Sol**

8.5 kpc del centro galáctico

**Velocidad circular y de escape en esta posición**

220 km/s y 535.7 km/s, respectivamente

**Densidad total de masa en esta posición**

$$\rho_0 = 0.15 M_s \text{pc}^{-3}$$

**Masa total de la Galaxia**

$9.0 \times 10^{11} M_s$  (hasta  $R=100$  kpc)

**Constantes de Oort**

$$A = 12.95 \text{ km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}, B = -12.93 \text{ km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$$

Hay que hacer notar que las dos primeras componentes tienen la forma dada por Miyamoto y Nagai (1975). Las principales ventajas del potencial de Allen y Santillán radican en que es matemáticamente simple, completamente analítico, con derivadas continuas y sumamente adecuado para el manejo numérico. Esta última virtud nos ha permitido obtener, con relativa fluidez, la gran cantidad de información contenida en el mapeo dinámico presentado en este trabajo. Órbitas precisas y bien definidas son asimismo obtenidas en su representación bidimensional en **planos meridionales**, según veremos más adelante. Varios autores encuentran en este potencial una conveniente herramienta para el estudio orbital via estrategia numérica (p. ej. King, 1994; Carraro y Chiosi, 1994; Finlay et al., 1995; Scholz et al., 1996).

En este modelo, el potencial total es la suma escalar de las contribuciones parciales debidas al esferoide central, disco y halo :

$$\phi_T(R, z) = \phi_E + \phi_D + \phi_H ,$$

donde la forma de cada una de estas componentes está dada por :

$$\phi_E(R, z) = \frac{-M_E}{(R^2 + z^2 + b_E^2)^{1/2}} ,$$



$$\phi_D(R, z) = \frac{-M_D}{[R^2 + (a_D + [z^2 + b_D^2]^{1/2})^2]^{1/2}},$$

$$\phi_H(r) = \frac{-M(r)}{r} - \frac{M_H}{1.02a_H} \left[ \frac{-1.02}{1 + (r/a_H)^{1.02}} + \ln(1 + (r/a_H)^{1.02}) \right]^{100},$$

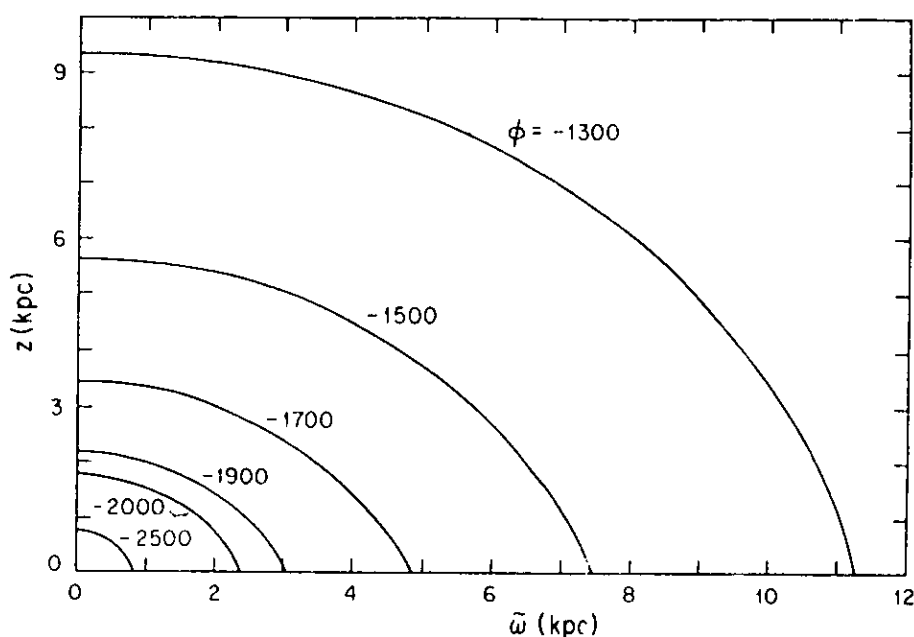
con

$$r^2 = R^2 + z^2, \quad M(r) = \frac{M_H (r/a_H)^{2.02}}{1 + (r/a_H)^{1.02}},$$

y donde  $r$  = distancia galactocéntrica,  $R$  = distancia al eje de rotación de la Galaxia y  $z$  = altura en kiloparsecs sobre el disco galáctico. Los valores de las constantes  $M_E$ ,  $M_D$ ,  $M_H$ ,  $b_E$ ,  $a_D$ ,  $b_D$  y  $a_H$  se incluyen en la tabla 1.

**TABLA 1.** Constantes utilizadas en el potencial de Allen y Santillán. Las masas de las 3 componentes están dadas en unidades de masa galáctica ( $1 M_g = 2.32 \times 10^7 M_s$ );  $b_E$ ,  $a_D$ ,  $b_D$  y  $a_H$  están dadas en kpc.

Esferoide central	$M_E$	606.0
	$b_E$	0.3873
Disco	$M_D$	3690.0
	$a_D$	5.3178
	$b_D$	0.25
Halo	$M_H$	4615.0
	$a_H$	12.0



**FIGURA 1.** Superficies equipotenciales asociadas al modelo de Allen y Santillán, proyectadas en el llamado plano meridional ( $R, z$ ). Los distintos valores de la energía están dados en unidades de  $100 \text{ km}^2/\text{s}^2$  (de Allen y Santillán, 1991).

La facilidad con que el potencial Allen-Santillán permite la determinación de órbitas galácticas, ha hecho popular su aplicación entre la comunidad astronómica. Por mencionar sólo algunos ejemplos recientes :

Carraro y Chiosi (1994) hacen uso del potencial Allen-Santillán para calcular, a partir de las medidas de movimientos propios y velocidades radiales de Friel y Janes (1993), las órbitas de 5 cúmulos abiertos viejos (CAVs) en la Galaxia. El objetivo de estos autores es el de conectar los aspectos orbitales de tales cúmulos con sus abundancias químicas actuales y su relación con las abundancias primordiales en el disco galáctico. Se considera así el papel de los CAVs como trazadores de metalicidad primordial.

Finlay et al. (1995) extienden el trabajo de Carraro y Chiosi, calculando las órbitas de 7 CAVs, de 2 de los cuales no se tenían estudios orbitales previos. Los autores aplican el modelo Allen-Santillán a estos objetos, obteniendo asimismo sus superficies de sección, las que indican que las órbitas de los CAVs los mantienen lejos de las nubes moleculares con las

que, en un momento dado, podrían interaccionar. Este hecho explica la larga permanencia de los cúmulos abiertos viejos.

Schuster y Allen (1997) emplean el mismo potencial galáctico para calcular las órbitas de 280 estrellas del halo de la Vía Láctea, pretendiendo encontrar tanto en las superficies de sección horizontales  $(R, \dot{R})$  como en las verticales  $(z, \dot{z})$  (ambas definidas en la sección II.4.3), la influencia del **caos orbital**. Casi el 45% de tales órbitas muestran evidencia de una dinámica caótica. Cerca de un tercio de ellas presentan estructura dentro del caos en sus superficies de sección.

El modelo de Allen y Santillán ha sido importante en la determinación de las órbitas de cúmulos globulares (Allen y Santillán, 1993; Scholz et al., 1996), aunque con este propósito también ha sido empleada la versión anterior de tal modelo (Allen y Martos, 1986 y 1988). La contribución de Allen y Martos se ha utilizado durante la última década en el cálculo de órbitas tanto de estrellas individuales como de cúmulos estelares (p.ej. Brosche et al., 1991; Müllär et al., 1994; Colin et al., 1994).

## II.4 ÓRBITAS EN UN POTENCIAL AXISIMÉTRICO

### II.4.1 Integrales de movimiento

Todos los potenciales galácticos revisados hasta ahora, además de su independencia del tiempo, tienen la característica común de ser potenciales galácticos **axisimétricos**, es decir, el de ser simétricos respecto a un eje que en el caso de la Vía Láctea es precisamente su eje de rotación. Se supone que la presencia de brazos espirales no altera la simetría de tales modelos, pues la masa contenida en los brazos representa sólo una perturbación menor en la distribución de masa del disco de la Galaxia, dominada por estrellas poco masivas. Esta simetría se adopta como un principio de sencillez, pues las evidencias recientes de una **barra** central en la Galaxia (Blitz y Spergel, 1991; Weiland et al., 1994; Zhao, 1996), por ejemplo, traen como consecuencia que tal simetría ciertamente se rompa, repercutiendo en una mayor complejidad matemática de los modelos de distribución de masa. La barra central, de acuerdo a las observaciones que sugieren su existencia, tiene una masa proba-

blemente demasiado pequeña como para afectar significativamente la estructura orbital a gran escala; algunos autores sugieren sin embargo que los efectos dinámicos de esta barra pueden no ser despreciables (Merritt y Aguilar, 1985; Núñez, Cincotta y Muzzio, 1993; Hernández y Moreno, 1998). Es relevante el hecho de que, si la dinámica es caótica, aún la perturbación de una barra pequeña puede tener consecuencias importantes. La relativa sencillez de los modelos axisimétricos, sin embargo, nos ayuda a simplificar las cosas para reproducir, de la mejor manera posible, la mayoría de las observaciones actuales.

Un sistema de coordenadas cilíndricas  $R, z, \theta$ , llamado el sistema de **coordenadas galácticas cilíndricas**, es el más adecuado para representar posiciones y movimientos en nuestro sistema estelar.  $R$  es la distancia al eje de rotación de la Galaxia;  $z$  es la altura sobre el plano galáctico y  $\theta$  es el ángulo con vértice en el centro de la Vía Láctea, medido sobre su plano a partir de una dirección preferencial convenida.

El **espacio fase** correspondiente a esta situación es entonces un espacio de 6 dimensiones  $(R, z, \theta, \dot{R}, \dot{z} \text{ y } \dot{\theta})$  donde existen como máximo 5 integrales de movimiento conservativas e independientes; o sea, 5 funciones independientes  $I_n(R, z, \theta, \dot{R}, \dot{z}, \dot{\theta})$  (con  $n = 1, \dots, 5$ ) que se mantienen constantes a lo largo de cualquier trayectoria en dicho espacio fase ( $I_n = C_n$ ). La representación de cada una de estas funciones es la de una **hipersuperficie** y pueden ser clasificadas en dos tipos: **integrales aislantes** e **integrales no aislantes**.

**Integrales no aislantes** : Son aquellas funciones cuyas correspondientes hipersuperficies están hechas de un número infinito de "hojas", las que usualmente llenan densamente el espacio fase. En un sentido puramente físico, una integral no aislante no arroja gran información, aunque como veremos más adelante puede estar asociada a la existencia de ergodicidad (caos).

**Integrales aislantes** : Son funciones cuyas correspondientes hipersuperficies NO llenan el espacio fase densamente. Para el caso de nuestro potencial axisimétrico, se encuentra que existen 2 bien conocidas integrales aislantes de movimiento :

a) **La energía total del sistema**,  $I_1 = E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + \phi(R,z)$  ,

(relación por unidad de masa resultado de la simetría en el tiempo; es decir, de la independencia de  $\phi$  respecto al tiempo),

b) **El momento angular en la dirección z**,  $I_2 = h = R^2\dot{\theta}$

(relación por unidad de masa resultado de la simetría respecto a un eje de rotación; es decir, de la independencia de  $\phi$  respecto a  $\theta$ ).

La posibilidad de la existencia de una **tercera integral aislante** además de las bien conocidas  $E$  y  $h$  ha sido ampliamente discutida (ver p.ej. Ollongren, 1962; Hénon y Heiles, 1964; Contopoulos, 1967). En esta tesis, sólo haremos una breve mención de la tercera integral en cuanto a la relación que guarda con la estructura orbital en nuestro mapeo.

#### II.4.2 Ecuaciones de movimiento

En nuestra consideración original, donde 3 coordenadas espaciales ( $R, z, \theta$ ) se usan para describir el movimiento de una partícula en un potencial axisimétrico, la suposición de una simetría respecto al eje de rotación galáctica nos ayuda a simplificar nuestro esquema dinámico, ya que así la coordenada  $\theta$  se vuelve una variable **ignorable**; es decir, que aunque  $\theta$  sigue siendo necesaria para fijar la posición de cualquier objeto en la Galaxia, su dinámica no requiere de esta variable, ya que el potencial axisimétrico adoptado sólo es función finalmente de  $R$  y  $z$ .

El trabajo de Ollongren (1962) presenta las ecuaciones que reproducen la dinámica de una masa orbitante bajo la acción de un potencial axisimétrico  $\phi(R, z)$ . Sobre este marco dinámico, 2 integrales de movimiento de profundo significado físico se mantienen constantes: la energía total  $E$  y el momento angular  $h$ . Por otro lado, debido a que  $h$  es constante, puede efectuarse una simplificación cuando al tratar el problema de órbitas en 3 dimensiones bajo la acción del potencial  $\phi(R, z)$ , definimos el llamado **potencial efectivo**

$$\phi_{ef}(R, z) = \phi(R, z) + \frac{h^2}{2R^2} ,$$

el cual nos permite analizar dichas órbitas en sólo 2 dimensiones. De esta manera, las ecuaciones a resolver en nuestro problema serán

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \dot{R}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{R}}{dt} &= -\frac{\partial\phi_{ef}}{\partial R}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial\phi_{ef}}{\partial z}. \end{aligned}$$

La descripción de la órbita en 2 dimensiones se logra en el plano  $(R, z)$ , llamado el **plano meridional**, sobre el cual queda claramente representada la órbita tridimensional real. Esto es posible después de hacer una proyección sobre tal plano de todos los puntos por donde pasa el objeto orbitante, a lo largo de su recorrido real por el toroide que limita su movimiento en la Galaxia.

Finalmente, la ecuación para la energía total por unidad de masa de un objeto en órbita bajo este potencial está dada por

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 + \frac{h^2}{R^2}) + \phi(R, z) .$$

### II.4.3 Características de las órbitas

Con el potencial efectivo ya definido, es posible hablar de los tipos de órbitas resultantes cuando en la realización del mapeo variamos los 2 parámetros libres  $E$  y  $h$ . Como veremos, esta variación **no puede ser** totalmente arbitraria, pues no todas estas parejas  $(E, h)$  son compatibles con la ecuación para la energía total de una partícula.

La gráfica del potencial efectivo queda definida cuando conocemos el potencial gravitacional real  $\phi(R, z)$  (en este caso el modelo Allen-Santillán) y el momento angular  $h$ . La curva asociada al potencial efectivo  $\phi_{ef}(R, z)$  en el plano  $(R, E)$  siempre alcanza un valor mínimo; este valor corresponde precisamente a la órbita cerrada con **mínima energía**,

esto es, la órbita circular. De esta manera, el valor más pequeño aceptable que podemos escoger para  $E$  tiene que ser el que permita al menos el punto de tangencia entre la curva del potencial efectivo y la recta horizontal que marca la constancia de la energía escogida (negativa). Así definido el potencial efectivo con el  $h$  dado, podemos escoger una energía mayor a la mínima para obtener **órbitas acotadas**. El caso de  $E = 0$  marca el límite de las órbitas acotadas, para dar origen a las **órbitas no acotadas**.

En este trabajo, nuestro interés está centrado exclusivamente en las **órbitas acotadas (ligadas)**, todas las cuales se asocian con energías negativas, de tal forma que :

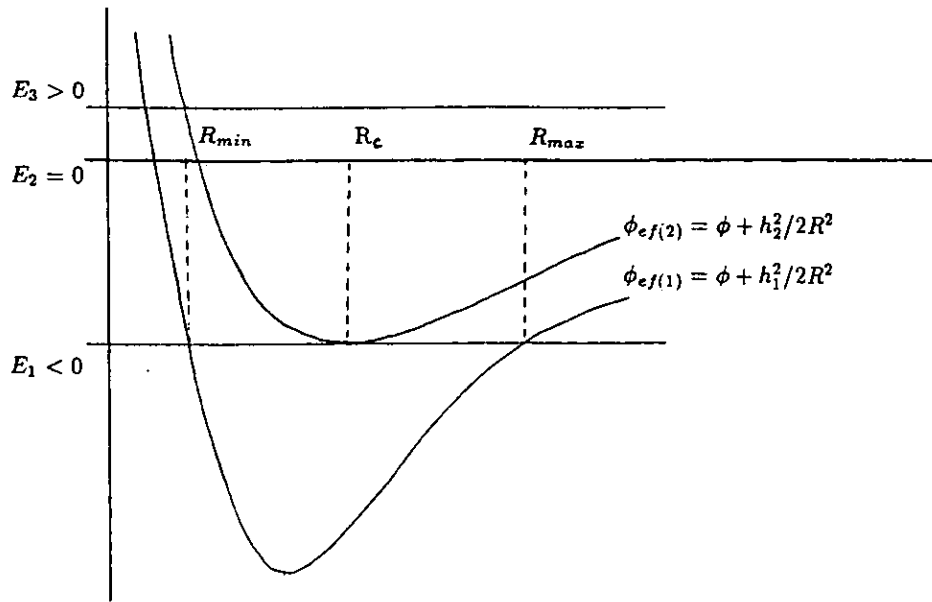
$E = E_{min}$  ,      representa la órbita circular    y

$E_{min} < E < 0$  ,      a todas las órbitas ligadas.

Una representación gráfica simplificada de este análisis se muestra en la **fig. 2**, por medio de un potencial efectivo análogo dependiente sólo de  $R$  (y no de  $R$  y  $z$ ), para 2 valores distintos del momento angular  $h$ .

Por otro lado, ya hemos visto que nuestro potencial finalmente sólo tiene dependencia en las variables  $R$  y  $z$ , por lo que el nuevo subespacio donde la partícula se moverá estará formado por  $R, \dot{R}, z$  y  $\dot{z}$ ; es decir, por 4 dimensiones (si hubiéramos conservado la coordenada  $\theta$ , el espacio sería de 6 dimensiones). Puesto que la visualización de la trayectoria de una partícula en un espacio simplificado de 4 dimensiones aún resulta imposible, tenemos que escoger un método que nos permita lograrlo. Tal método consiste en hacer "cortes" a ese espacio, con planos que llevan el nombre del creador del método, H. Poincaré.

Los **cortes de Poincaré** (o **superficies de sección**, como también son llamados), son planos en los que se grafican cada una de las variables consideradas en contra de sus respectivas derivadas temporales. Así, en nuestro caso, 2 cortes de Poincaré son posibles:  $R$  vs.  $\dot{R}$ , llamado **superficie de sección horizontal** y  $z$  vs.  $\dot{z}$ , llamado **superficie de sección vertical**.



**FIGURA 2.** Potencial efectivo sólo dependiente de  $R$  para 2 valores distintos del momento angular.  $E_1$  intersecta a  $\phi_{ef(1)}$  en  $R_{min}$  y  $R_{max}$ , determinando una órbita acotada entre estos límites para un momento angular  $h_1$ .  $E_1$  es la mínima energía permitida para ser “compatible” con  $\phi_{ef(2)}$ , que posee un momento angular  $h_2 > h_1$ , determinando en el punto de tangencia una órbita circular de radio  $R_c$ .  $E_2$  y  $E_3$  son ejemplos de órbitas no acotadas para cualquier valor de  $h$ .

Si en la ecuación anterior para la energía total, después de fijar los valores de  $E$  y  $h$ , hacemos que  $\dot{R} = 0$  y  $\dot{z} = 0$ , estaremos buscando los puntos donde las masas orbitantes están instantáneamente en reposo en el plano meridional. La ecuación  $E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 + \frac{h^2}{R^2}) + \phi(R, z)$  se simplificará entonces a la forma

$$E = \frac{h^2}{2R^2} + \phi(R, z),$$

que por la definición de potencial efectivo es totalmente equivalente a decir que

$$E = \phi_{ef}(R, z).$$

De esta nueva ecuación podemos obtener una relación entre  $R$  y  $z$  que podremos representar en el ya mencionado plano meridional. El resultado de esto es una curva



cerrada llamada la **curva de cero velocidad**, que es la que marca el límite para el movimiento de la partícula en el plano  $(R, z)$ .

Volviendo al subespacio de 4 dimensiones  $(R, \dot{R}, z$  y  $\dot{z})$ , procedemos a simplificarlo haciendo  $z = 0$ , es decir, interesándonos específicamente en el momento de las órbitas cuando éstas cruzan el plano de la Galaxia. Esta simplificación nos permite trabajar en un subespacio de dimensión 3, el subespacio conformado ahora por  $(R, \dot{R}, \dot{z})$ . La última simplificación proviene de adoptar la siguiente convención: únicamente tomaremos en cuenta aquellos cruces con el plano galáctico tales que  $\dot{z} > 0$ , los cruces donde la órbita pasa de  $z < 0$  a  $z > 0$ . Con esta última convención, obtenemos finalmente la información dinámica completa de nuestro sistema en tan solo 2 dimensiones, la superficie de sección  $(R, \dot{R})$ , dado el hecho fundamental de que, a una  $E$  y una  $h$  constantes,  $\dot{z}$  es expresable únicamente en función de  $R$  y  $\dot{R}$  (sección III.3). Toda la información dinámica en la superficie de sección estará contenida en curvas y conjuntos de puntos, como podrá verse en el mapeo del próximo capítulo.

De la forma de las curvas ó los conjuntos de puntos en la superficie de sección es posible, por tanto, saber de la existencia tanto de ergodicidad (asociada al **caos orbital**), como de regularidad en las órbitas de los objetos galácticos.

Así, una curva cerrada simple en la superficie de sección  $(R, \dot{R})$  es llamada **curva invariante**, indicación de la existencia de una **tercera integral aislante** en el movimiento meridional (aparte de la energía y el momento angular). La existencia de puntos en la superficie de sección que **NO** puedan unirse con una curva cerrada simple es indicativo de **ergodicidad ó caos**, es decir, de la ausencia de esa tercera integral aislante de movimiento. Aclaremos que en este trabajo **ergodicidad** y **caos** son términos totalmente equivalentes.

*CAPÍTULO III*

**ESTRUCTURA ORBITAL DEL POTENCIAL GALÁCTICO**

**CON EL MODELO DE ALLEN Y SANTILLÁN (1991)**

# CAPÍTULO III. ESTRUCTURA ORBITAL DEL POTENCIAL GALÁCTICO CON EL MODELO DE ALLEN Y SANTILLÁN (1991)

## III.1 ANTECEDENTES

Podemos encontrar en la literatura astronómica de los últimos 40 años, una serie de trabajos muy importantes que consideramos antecedentes a la presente investigación de la estructura del potencial galáctico. Todos esos trabajos están relacionados con la dinámica estelar en un potencial axisimétrico, partiendo ya sea de consideraciones puramente teóricas ó de intereses con perspectivas de aplicación observacional, utilizando distintos modelos de distribución de masa. Cabe señalar que varias de las conclusiones obtenidas en dichas investigaciones son **confirmadas y ampliadas** en este trabajo de tesis. Hacemos pues una breve descripción de algunas de esas contribuciones.

### III.1.1 El trabajo de Ollongren (1962)

La aportación de A. Ollongren (1962), considerada clásica dentro del área, marca el inicio de una serie de ideas y análisis claves en el estudio orbital en nuestra galaxia. Pretendiendo conocer las órbitas de estrellas de alta energía en el potencial de Schmidt (1956), el cual por su compleja forma analítica hace complicada la integración de éstas, Ollongren aproxima muy adecuadamente dicho potencial a través de la fórmula de interpolación

$$\phi_{IF} = \frac{-1000}{Q_{IF}^{1/4}},$$

donde  $Q_{IF}$  es una función algebraica resultado de la combinación de polinomios en las variables cilíndricas  $R$  y  $z$ . Esta expresión permite así el cálculo de órbitas por medios numéricos, logrando que el potencial en el sistema de coordenadas cilíndricas escogido tenga simetría rotacional (respecto al eje  $z$ ) y respecto al plano de la Galaxia (plano  $z=0$ ), i.e., haciendo que

$$\phi_{IF} = \phi_{IF}(R, z^2).$$

Ya que el potencial tiene tanto independencia del tiempo como simetría axial, existen dos integrales aislantes de movimiento: la energía total ( $E$ ) y la componente  $z$  del momento angular ( $h$ ).

Para la representación bidimensional general de órbitas con valores específicos de  $E$  y  $h$ , Ollongren hace uso del plano meridional ( $R, z$ ). En dicho plano, la trayectoria del objeto orbitante está comprendida dentro de los límites de la **curva equipotencial** ( $E = \phi$ ) ó **curva de cero velocidad**, dada por la ya señalada relación  $E = \frac{h^2}{2R^2} + \phi(R, z)$ . Después de realizar las integraciones numéricas para una familia de órbitas con valores fijos de  $E$  y  $h$ , Ollongren discute cuidadosamente los tipos principales de órbitas resultantes de tales integraciones. La clasificación orbital producto de este estudio permanece hasta nuestros días, con ligeras modificaciones. Fue muy claro desde entonces que, aunque en principio las trayectorias en el plano meridional debían ocupar toda la superficie encerrada por la curva de cero velocidad, sólo una subregión de tal superficie era realmente ocupada por la órbita resultante. Esta subregión presenta tres características fundamentales :

- 1) Ser un cuadrilátero de lados curvos al que se le conoce como “**caja**”, la cual es tangente a la curva de cero velocidad en sus 4 vértices y simétrica respecto al eje  $R$ .
- 2) Los lados curvos de la caja forman ángulos rectos.
- 3) Cada vértice de la caja señala un punto de la órbita donde  $\dot{R} = \dot{z} = 0$ , es decir, donde el movimiento se hace instantáneamente nulo tanto en  $R$  como en  $z$ .

Asimismo, Ollongren reconoce dos tipos principales de órbitas :

- 1) Las **órbitas no periódicas**, caracterizadas por ser topológicamente equivalentes a las figuras de Lissajous y por llenar densamente la caja que las contiene después de un tiempo suficientemente grande.
- 2) Las **órbitas periódicas**, caracterizadas por tocar sólo en dos puntos a la curva de cero velocidad y por no llenar densamente la caja que las contiene.

En este artículo, el autor ya hace mención de las llamadas **órbitas de tubo**, un tipo especial de órbita periódica. Las órbitas de tubo son descritas como aquellas que, a un

tiempo dado  $t_0$ , se localizan en la vecindad de una órbita periódica estable y permanecen cercanas a ella para todo tiempo distinto de  $t_0$ . Un trabajo posterior (Ollongren, 1965) amplía el esquema :

1) Los puntos de intersección de una órbita de tubo con el eje  $R$  se acumulan en ciertas secciones de este eje.

2) Su trayectoria en el plano meridional tiene la forma de un tubo, asociado a la órbita periódica estable.

3) Si la órbita de tubo es infinitamente angosta en el plano meridional, se trata de una órbita periódica estable.

### III.1.2 El trabajo de Hénon y Heiles (1964)

En la línea de investigación de la existencia de una **tercera integral de movimiento** en la dinámica de nuestra galaxia, en la cual se ha supuesto un potencial axisimétrico e independiente del tiempo, Hénon y Heiles (1964) encuentran en las superficies de sección una útil herramienta para la caracterización de órbitas. Así, los autores pueden discriminar de una forma sencilla, entre

a) **Comportamiento ergódico (caótico)**, asociado a una tercera integral del tipo no aislante, donde el espacio fase está densamente lleno de puntos y

b) **Comportamiento no ergódico (periódico, cuasiperiódico)**, relacionado con una tercera integral del tipo aislante, donde los puntos del espacio fase pueden unirse formando una curva cerrada.

Hénon y Heiles hacen uso de un potencial particular, sin conexión con el potencial galáctico real, para estudiar en 2 dimensiones la existencia de una posible **segunda integral de movimiento**, adicional a la energía (que servirá para inferir, para un potencial en 3 dimensiones, la existencia en tal caso de la tercera integral propiamente dicha, adicional a la energía y al momento angular). El potencial bidimensional utilizado es de la forma

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - 2/3y^3) ,$$

y es a través de él que varias peculiaridades aparecen en la superficie de sección analizada, al variar la energía del objeto estudiado. El artículo de estos autores hace notar que, al aumentar paulatinamente la energía, un **mar ergódico** aparece y cobra extensión, contrastando notablemente con detalles morfológicos como las llamadas **islas** y **cadenas de islas** en las superficies de sección. Las islas y cadenas de islas están asociadas directamente con órbitas periódicas estables. Algunas propiedades sobre dichas cadenas son inferidas. Para el caso de las energías más altas consideradas, el mar ergódico se extiende hasta ocupar totalmente la región limitada por la curva de cero velocidad en las superficies de sección.

Los autores concluyen afirmando que, para el caso de energías bajas, los resultados siempre indican la presencia de una integral adicional (aislante) de movimiento (segunda integral en su potencial bidimensional; tercera integral en un potencial tridimensional). Para energías mayores que un cierto valor crítico, esta integral adicional parece todavía existir para el infinito de pequeñas regiones separadas en la superficie de sección. Entre tales regiones un mar ergódico prevalece, en el cual tal integral adquiere características no aislantes.

### III.1.3 El trabajo de Martinet y Hayli (1971)

Valiéndose del potencial de Schmidt (1956), para el cual Ollongren (1962) proporciona una fórmula de interpolación con el fin de hacerlo adecuado para el manejo numérico, Martinet y Hayli (1971) exploran las órbitas de estrellas cercanas de alta velocidad en nuestra galaxia. En este análisis, las superficies de sección juegan también un papel muy importante.

Pretendiendo encontrar las condiciones iniciales de un conjunto de órbitas que, en su análisis, pudieran asociarse con la existencia de una tercera integral de movimiento ( $I_3$ ), los autores exploran el **diagrama de Lindblad** ( $E, h$ ) al variar los valores de la energía ( $E$ ) y la componente  $z$  del momento angular ( $h$ ), clasificando las regiones dentro de tal diagrama de acuerdo a las superficies de sección resultantes ( $R, \dot{R}$ ), en 2 tipos básicos:

a) La llamadas regiones **cuasi-periódicas**, donde las superficies de sección se encuentran principalmente cubiertas por curvas invariantes; es decir, curvas cerradas que pueden obtenerse por la unión simple de puntos, dentro de las incertidumbres propias de la aproximación numérica.

b) Las regiones **semi-ergódicas**, caracterizadas por el hecho de que para cualquier pareja  $(E, h)$ , siempre existe un conjunto de valores de  $R$  que producen órbitas semi-ergódicas (donde  $R$  es la distancia al eje de rotación de la Galaxia). Las órbitas semi-ergódicas se identifican como un conjunto de puntos que no pueden unirse en una curva cerrada simple, dentro de las incertidumbres naturales del cálculo numérico.

Los resultados finales del trabajo de Martinet y Hayli muestran clara evidencia de que, entre más pequeños son los momentos angulares ( $h$ ) considerados, menores son las energías ( $E$ ) necesarias para la aparición de las regiones ergódicas en las respectivas superficies de sección. Al aumentar el momento angular, se requieren mayores energías para la aparición de ergodicidad. Por último, estos resultados se comparan con las propiedades cinemáticas de algunos objetos galácticos sobre los que existe información observacional, como las estrellas RR Lyrae y cúmulos globulares. La conclusión es que la mayoría de las RR Lyrae y los cúmulos globulares ricos en metales sobre los que existe información cinemática confiable, al ubicarse en el diagrama de Lindblad, caen dentro de las regiones cuasi-periódicas; asimismo, que los cúmulos globulares pobres en metales tienden a ocupar las regiones semi-ergódicas del mismo diagrama.

### III.1.4 El trabajo de Valera, Aguilar y Schuster (1994)

El más reciente y amplio trabajo relacionado con el mapeo dinámico del potencial galáctico es el de Valera, Aguilar y Schuster (1992). Los autores exploran 3 de los modelos más utilizados para la distribución de masa en nuestra galaxia : el de Bahcall, Schmidt y Soneira (1982), el de Caldwell y Ostriker (1983) y el propio modelo de Allen y Santillán (1991). Los mapeos obtenidos en este trabajo cubren regiones representativas de la Galaxia a 1, 2, 4, 8 y 16 kpc de su centro, considerando 4 valores distintos para el momento angular

en sus superficies de sección, el cual expresan como  $J/J_c$  : el cociente del momento angular total sobre el momento angular correspondiente a la respectiva órbita circular.

De su investigación se desprenden una serie de conclusiones, las cuales se describen a continuación:

1) En los 3 modelos de distribución de masa señalados, se hace uso de familias de superficies de sección, las cuales muestran una **estructura orbital muy regular y similar** en todos ellos para valores altos del momento angular; es decir, una estructura con un claro predominio de órbitas periódicas y cuasi-periódicas sobre órbitas caóticas.

2) Es en la región galáctica comprendida entre 1 y 4 kpc, con valores intermedios del momento angular, donde más diferencias se perciben en la **estructura orbital** entre los 3 modelos : justo la zona donde el potencial deja de ser dominado por el bulbo, para pasar a ser dominado por el disco. Es por ello que esta región resulta interesante, al contener familias de órbitas regulares coexistiendo con órbitas irregulares.

3) Las órbitas irregulares tienden a aparecer con mayor frecuencia hacia las regiones de órbitas radiales. Dicho de otro modo, el caos orbital se vuelve bastante evidente en aquellas superficies de sección que contienen, de forma predeterminada, familias de órbitas con **momentos angulares bajos**; esto es, órbitas radiales y excéntricas.

4) La región próxima a la órbita solar ( $R = 8.0$  kpc) se encuentra dominada por **órbitas regulares**, excepto en el modelo de Bahcall, Schmidt y Soneira (1982), el cual predice la existencia de 2 islas simétricas respecto a la órbita circular, en la familia de superficies de sección más cercana a la órbita del Sol. Este modelo es el que también presenta la región **caótica** más extensa de los 3 mencionados.

El mapeo del potencial galáctico desarrollado en esta tesis, enfocado a explorar la estructura orbital dentro de la Vía Láctea, **confirma y extiende** los resultados de Valera, Aguilar y Schuster (1992, **fig. 3**) para el caso específico del modelo de Allen y Santillán; asimismo, nuestro trabajo arroja varios resultados novedosos y presenta equivalencias evidentes con las contribuciones pioneras de Ollongren (1962), Hénon y Heiles (1964) y Martinet y Hayli (1971).



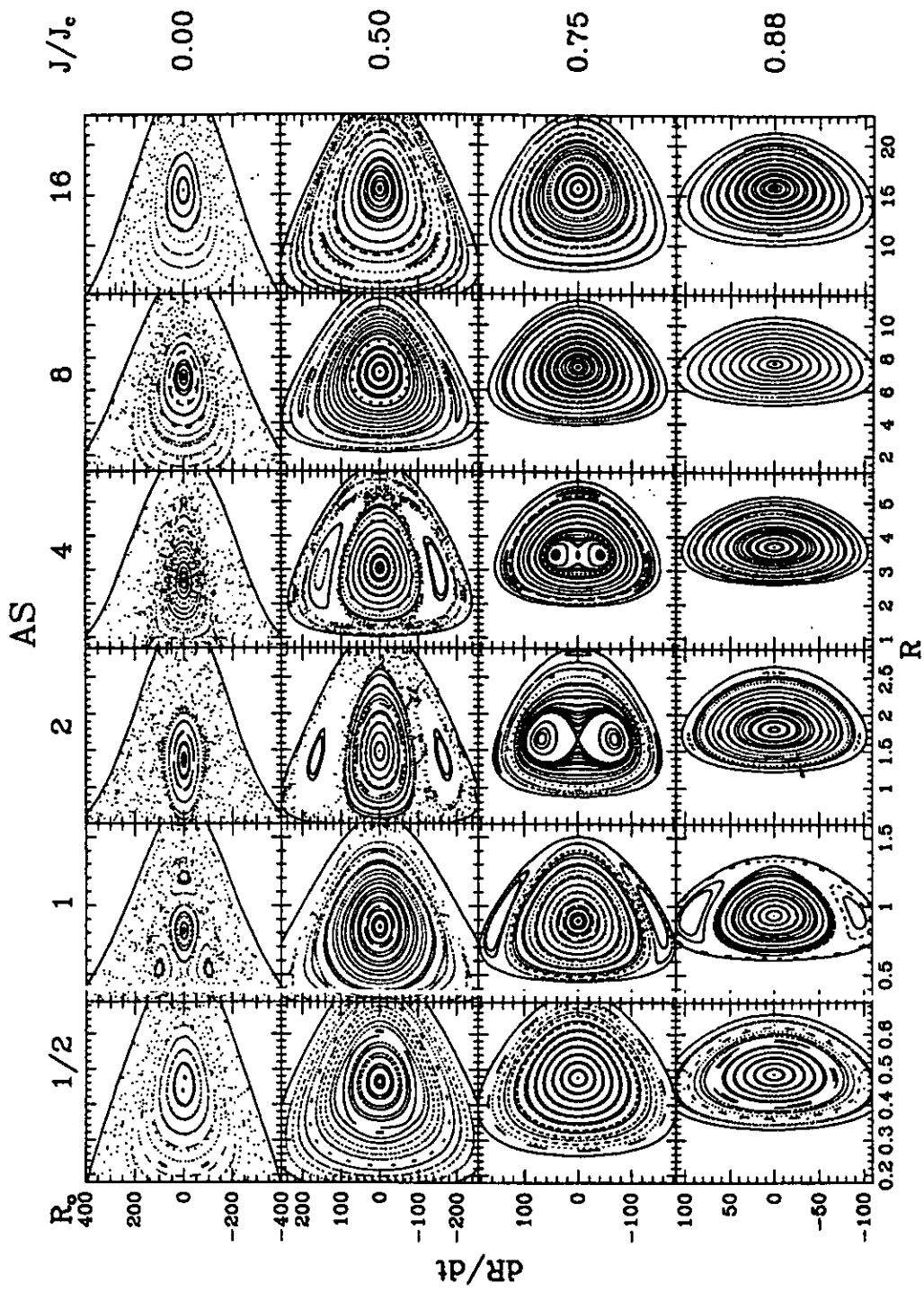


FIGURA 3 . Mapeo dinámico de Valera, Aguilar y Schuster (1994) para el modelo del potencial galáctico de Allen y Santillán (1991).

Las ventajas que consideramos tiene esta tesis sobre la aportación de Valera, Aguilar y Schuster (1992) son las siguientes :

a) Durante la construcción del presente mapeo se han considerado variaciones más finas y regulares tanto de la energía  $E$  como del momento angular  $h$ , nuestras 2 variables caracterizadoras.

b) Se analiza un intervalo más amplio de distancias  $R$ , con un alcance de 100 kpc. Este alcance nos permite, por ejemplo, incluir la regiones dinámicas ocupadas por los cúmulos globulares más distantes de la Vía Láctea.

c) Las variables utilizadas para caracterizar nuestro mapeo ( $E$  y  $h$ ) son fácilmente interpretables y manejables, dadas directamente en múltiplos y submúltiplos de  $E_s$  y  $h_s$  (definidas en la siguiente sección); esta bondad nos ha permitido utilizar el mapeo como un recurso comparativo, el cual brinda la ventaja de pronosticar el comportamiento orbital de objetos galácticos.

d) Se cubre adecuadamente el entorno de distancias  $R$  y los intervalos de variación de  $E$  y  $h$  directamente accesibles a las observaciones astronómicas en la Galaxia, permitiendo así una apropiada comparación entre las inferencias teóricas del mapeo y la realidad. Las estrellas en un radio de 500 pc del Sol y un reducido número de cúmulos abiertos y globulares son, ciertamente, el tipo de objetos accesibles a la observación.

### *III.2 EL MAPEO DINÁMICO A TRAVÉS DE SUPERFICIES DE SECCIÓN*

El presente mapeo se apoya en un amplio conjunto de familias de superficies de sección horizontales en las que se grafican las variables  $R$  y  $\dot{R}$ , que corresponden respectivamente a la distancia galactocéntrica de la masa orbitante en cuestión (en kiloparsecs) y a la velocidad radial (en unidades de 10 km/s) que la misma tiene cuando, bajo un cierto conjunto de condiciones iniciales, cruza el plano galáctico con la convención de que  $\dot{z} > 0$ ; es decir, en el momento de su órbita cuando  $z = 0$  pasando de  $z < 0$  a  $z > 0$ . Cada una de estas familias de superficies de sección está caracterizada por un par de parámetros que,

por razones de sencillez y sistematización, hemos considerado conveniente sean

- a) la energía total del objeto ( $E$ ) y
- b) la componente  $z$  de su momento angular ( $h$ ),

ambas por unidad de masa .

Como unidad de medida para los parámetros  $E$  y  $h$ , hemos escogido tanto el valor de la **energía orbital total del Sol** ( $E_s = -1192.9075$ , en unidades de  $100 \text{ km}^2/\text{s}^2$ ) como el de la componente  $z$  del **momento angular** de su órbita en la Galaxia ( $h_s = 187.0$ , en unidades de  $10 \text{ km kpc/s}$ ), ambos parámetros dados también por unidad de masa. De esta manera, nuestro mapeo se logra construyendo superficies de sección con múltiplos y submúltiplos de tales valores; es decir, todas nuestras familias de superficies de sección quedan definidas y etiquetadas con múltiplos y submúltiplos de  $E_s$  y  $h_s$ .

Ahora, en las superficies de sección existe una curva límite bajo la cual, invariablemente, están confinadas **todas** las órbitas de una familia definida por la  $E$  y  $h$  proporcionadas :

Después de resolver para  $\dot{R}$  en la ecuación para la energía total nos queda que

$$\dot{R} = [2E - 2\phi(R, 0) - \frac{h^2}{R^2}]^{1/2} ,$$

bajo la suposición de que  $z = 0$  y que  $|\dot{z}| = 0$ . Suponer esto implica una órbita imaginaria que nunca sale del plano galáctico. Esta "órbita" perfectamente plana es el límite que buscamos representar, pues es la única curva donde a cada valor de  $R$  en la superficie de sección corresponderá el máximo valor posible de  $\dot{R}$ , para un par  $(E, h)$  dado. Inferimos que la  $\dot{R}$  de la ecuación anterior es ese valor máximo precisamente porque  $|\dot{z}| = 0$  es un mínimo que introducimos, aplicando un argumento de conservación de energía total. Se logra de esta forma la curva de cero velocidad en  $(R, \dot{R})$ , dentro de la cual quedará incluida toda una familia de órbitas con una  $E$  y  $h$  dadas.

### III.3 OBTENCIÓN NUMÉRICA DE LAS SUPERFICIES DE SECCIÓN

Para la obtención de la información dinámica contenida en las superficies de sección nos hemos valido del cálculo numérico. Como es bien sabido, en Mecánica Newtoniana la órbita de una masa bajo la acción de un potencial gravitacional (cuya forma funcional es conocida) queda perfectamente determinada cuando :

- i) Proporcionamos un conjunto suficiente de **condiciones iniciales** y
- ii) Procedemos a integrar las **ecuaciones de movimiento** .

Los conjuntos de condiciones iniciales utilizadas en este trabajo para el cálculo de órbitas fueron generados a través del programa **inic2.f**, escrito por el autor tomando en cuenta que tales conjuntos requerían estar caracterizados por los 2 parámetros previamente mencionados:  $E$  y  $h$ . Así, este programa genera conjuntos de condiciones iniciales que darán origen a una **familia de órbitas**. En resumen: cada conjunto de superficies de sección contiene la información de toda una familia de órbitas determinada por una  $E$  y una  $h$  dadas. Cada órbita de esta familia se logra proporcionando un sexteto particular de condiciones iniciales  $R, z, \theta, \dot{R}, \dot{z}$  y  $R\dot{\theta}$ , de acuerdo al sistema natural de coordenadas galácticas cilíndricas seleccionado. Por simplicidad, tomamos  $z_o = 0$  (cruce de la órbita por el plano galáctico) y  $\theta_o = 0$  (de hecho, la axisimetría del modelo Allen-Santillán para el potencial galáctico hace a  $\theta$  una variable ignorable, como ya se ha señalado).

Durante la realización del mapeo y con la intención de dar mayor detalle a su estructura dinámica, decidimos incluir **30 órbitas** en cada familia representada por su correspondiente conjunto de superficies de sección. Por lo tanto, el programa computacional genera 30 sextetos distintos de condiciones iniciales: una familia de 30 órbitas distintas caracterizada por una misma energía  $E$  y un mismo momento angular  $h$ . Por simplicidad, como se ha comentado ya, en la determinación de estas condiciones iniciales se ha supuesto para los 30 sextetos que  $z_o = 0$  y  $\theta_o = 0$ . Es importante mencionar que **inic2.f** calcula dichas condiciones usando ya explícitamente el potencial de Allen y Santillán dentro de su rutina.

El cálculo de los 30 sextetos de condiciones iniciales se realizó por tanto de la siguiente manera:

a) Se proporciona el par de valores para  $E$  y  $h$  (en las unidades ya señaladas) ,

b) Se proporciona un valor arbitrario de  $R$  que se encuentre entre las 2 raíces de  $\frac{h^2}{2R^2} + \phi(R, 0) - E = 0$  ; se supone que  $z_o = 0$  y que  $\theta_o = 0$ ,

c)  $R\dot{\theta}$  se calcula a partir de la relación

$$R\dot{\theta} = h/R ,$$

d) De la ecuación para la energía total

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2 + R^2\dot{\theta}^2) + \phi(R, z) ,$$

se despeja  $\dot{R}_{max}$  que corresponde, por conservación de energía, a  $|\dot{z}_{min}| = 0$ , es decir,

$$\dot{R}_{max} = [2E - 2\phi(R, 0) - \frac{h^2}{R^2}]^{1/2} .$$

Conociendo ya este valor para  $\dot{R}_{max}$ , se subdivide el intervalo  $[0, \dot{R}_{max}]$  en **30 partes iguales**, lográndose así un conjunto de 30 valores distintos de  $\dot{R}$  para cada uno de los cuales, finalmente, se calcula el correspondiente  $\dot{z}$  a través de la relación

$$\dot{z} = [2E - 2\phi(R, 0) - \dot{R}^2 - \frac{h^2}{R^2}]^{1/2} .$$

De esta forma se logra tener el conjunto completo de condiciones iniciales

$$R, z, \theta, \dot{R}, \dot{z}, R\dot{\theta},$$

todas ellas compartiendo un par  $(E, h)$  común.

Como es de esperarse, mientras que 4 de estos valores de las condiciones iniciales se mantienen constantes en cada familia de órbitas,  $\dot{R}$  y  $\dot{z}$  van variando en sentido inverso mutuo. Para ilustrar este procedimiento, a continuación se muestra el conjunto de 30 sextetos de condiciones iniciales calculadas para  $E = 1.0 E_s$  y  $h = 0.1 h_s$ , centrado en  $R = 7.35$  kpc :

$R$	$z$	$\theta$	$\dot{R}$	$\dot{z}$	$R\dot{\theta}$
(kpc)	(kpc)	(rad)	(10 km/s)		
7.3500	0.0000	0.0000	24.0312	6.3651	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	23.2026	8.9250	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	22.3739	10.8362	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	21.5452	12.4023	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	20.7166	13.7418	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	19.8879	14.9159	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	19.0592	15.9612	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	18.2306	16.9015	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	17.4019	17.7535	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	16.5733	18.5295	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	15.7446	19.2385	2.5442
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
7.3500	0.0000	0.0000	4.9720	24.3576	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	4.1433	24.5122	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	3.3147	24.6379	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	2.4860	24.7353	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	1.6573	24.8046	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	0.8287	24.8461	2.5442
7.3500	0.0000	0.0000	0.0000	24.8599	2.5442

Cada grupo de 30 sextetos de condiciones iniciales es utilizado posteriormente, como datos de entrada, en el programa `ornatcao.f` debido a C. Allen, el cual incluye el potencial Allen-Santillán, además de una rutina Runge-Kutta de orden 7 para integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento.

De `ornatcao.f` obtenemos, como datos de salida, un grupo de archivos conteniendo toda la información dinámica que el programa genera :

- 1) Superficies de sección horizontales; i.e.,  $R$  vs.  $\dot{R}$  ,
- 2) Superficies de sección verticales; i.e.,  $z$  vs.  $\dot{z}$  ,
- 3) Órbitas en el plano meridional; i.e.,  $R$  vs.  $z$  ,
- 4) Características de las órbitas, como valores máximos y mínimos de  $R, z, \dot{R}, \dot{z}$ , así como sus excentricidades ,
- 5) Cantidades de control, para verificar la integridad de los cálculos .

El programa permite la variación de 2 parámetros de entrada: **el tiempo final** y **el número de pasos** . En todas las integraciones se usó un tiempo de integración igual a **-1600**, que en unidades familiares corresponde a  $1.6 \times 10^{11}$  años hacia el pasado. Siendo uno de los objetivos principales del mapeo el evidenciar las regiones de caos orbital en la Galaxia, estos tiempos de integración tan altos (10 veces la edad de la Vía Láctea) son **sólo un recurso operativo** que nos ha permitido ubicarlas mediante una caracterización completa de las órbitas y sus superficies de sección. No se pretende implicar que la representación del potencial galáctico empleada sea válida durante esos intervalos de tiempo. El número de pasos escogido en las integraciones fue de **15000**, por ser una cifra que proporciona suficiente cantidad de datos como para percibir, con el detalle requerido, la estructura orbital dentro de las superficies de sección.

#### *III.4 EXTENSIÓN DEL MAPEO: INTERVALO DE VARIACIÓN DE $E$ Y $h$*

Un objetivo fundamental del mapeo es el lograr un mayor detalle en la estructura orbital de nuestra galaxia, sobre todo en las regiones de interés astronómico, que son aquellas susceptibles de ser observadas (digamos  $5 \text{ kpc} < R < 50 \text{ kpc}$ ). Así, los valores considerados de energía y momento angular para la construcción de las familias de superficies de sección se hicieron variar de **forma regular**. Puesto que, como ya habíamos mencionado, nuestras unidades de medida son la energía y el momento angular del Sol, el intervalo de variación de nuestro mapeo cubre :

**en energía :**

desde  $1.7 E_s$  ( $-202794.28 \text{ km}^2/\text{s}^2$ ) hasta  $0.3 E_s$  ( $-35787.23 \text{ km}^2/\text{s}^2$ ) ;

**en momento angular :**

desde  $0.1 h_s$  ( $187 \text{ km kpc/s}$ ) hasta  $0.9 h_s$  ( $1683 \text{ km kpc/s}$ ) .

Estos intervalos fueron definidos arbitrariamente pretendiendo una amplia cobertura de radios galactocéntricos, así como un mayor detalle orbital en las regiones galácticas observacionalmente explorables, dentro de los límites dados por los tiempos de cómputo y la cantidad de información manejable. Tanto en  $E$  como en  $h$  las variaciones fueron dándose en pasos de  $0.1 E_s$  y  $0.1 h_s$ , respectivamente. De esta manera, nuestro mapeo resulta de conformar un verdadero mosaico de familias de superficies de sección, en donde es posible ubicar y seguir la evolución de todo un conjunto de estructuras que definen la dinámica orbital dentro de la Vía Láctea, desde sus zonas más centrales y con mayor incertidumbre ( $R \sim 0.5 \text{ kpc}$ ) hasta aquellas localizadas a  $R \sim 100 \text{ kpc}$  del centro galáctico.

Las características ya mencionadas del modelo Allen-Santillán, entre las que destaca su aplicabilidad para el manejo numérico, nos han permitido reunir una gran cantidad de información dinámica sobre nuestro sistema estelar, contenida básicamente en un conjunto de 77 familias de superficies de sección horizontales ( $R, \dot{R}$ ) ubicadas en distintas zonas del plano  $z = 0$ , barriendo el radio de la Galaxia a través de las variaciones sistemáticas de energía y momento angular. También se incluyen 16 familias de superficies de sección verticales ( $z, \dot{z}$ ), complementando la información orbital correspondiente a la vecindad solar, región de particular interés por su accesibilidad desde el punto de vista observacional.

A continuación, revisamos con detalle los resultados obtenidos con el presente mapeo, así como las inferencias que con él tienen un sentido astronómico concreto.

### *III.5 RESULTADOS DEL MAPEO DINÁMICO*

Los resultados aquí presentados han sido todos obtenidos por medios numéricos a través de los programas *inic2.f* y *ornatcao.f*, hechos especialmente para :



1) generar un conjunto suficiente de condiciones iniciales para el movimiento orbital de una partícula, bajo la influencia del potencial galáctico propuesto por Allen y Santillán (1991) ,

2) resolver las ecuaciones diferenciales de movimiento en las cuales tales condiciones iniciales han sido incluídas, a través de una rutina Runge-Kutta de orden 7.

El cálculo numérico fue desarrollado totalmente con el equipo de cómputo del Instituto de Astronomía (UNAM), particularmente con la estación de trabajo Axil 311 (titán), clon de Sun-Sparc 20 provista con 32 Mb en RAM y 9 Gb en disco duro. Nuestros programas fueron corridos en esta máquina, cuyo procesador integra una típica familia de 30 órbitas en aproximadamente 15 minutos de CPU. La Axil 311 produjo así el grueso de superficies de sección (horizontales y verticales) y de órbitas galácticas presentadas en esta tesis.

Dividimos a continuación los resultados en 4 partes principales :

A) **Presentación del mapeo dinámico.** Conjunto completo de 77 familias de superficies de sección.

B) **Acotación de las regiones caóticas en la Galaxia.** Uno de los objetivos principales de esta tesis es conocer, con el mayor detalle posible, las regiones de nuestra galaxia en las cuales el caos juega un papel importante dentro de la estructura orbital. Deseamos tener una idea clara de cuáles son los valores límite de la energía  $E$  y el momento angular  $h$ , traducidos en condiciones iniciales concretas, que permiten la aparición de dicho caos orbital.

C) **Análisis de regiones y detalles de particular interés.** Este mapeo pone muy en claro una serie de detalles dinámicos que, considerados cuidadosamente, pueden proporcionarnos mucha información sobre aspectos claves como lo son la estabilidad e inestabilidad de órbitas en la Galaxia. Las **islas**, los **conjuntos de islas** y los **puntos de ensilladura** son ejemplos de estos detalles perceptibles en las superficies de sección.

D) **Órbitas representativas.** Principales tipos de órbitas presentes en el mapeo, proyectadas en el plano meridional  $(R, z)$ .

Como parte final de este trabajo, se hace una primera aplicación práctica de los 2 puntos considerados anteriormente, en el sentido de su repercusión directa sobre la dinámica específica de cúmulos estelares.

### III.5.1 Presentación del mapeo dinámico

El conjunto completo de superficies de sección horizontales es a continuación presentado, de acuerdo al orden general que las distribuye de **menor a mayor energía** y de **menor a mayor momento angular**. Un panorama global de todo este conjunto puede obtenerse en nuestro primer **diagrama de Lindblad (fig. 4)**. En este diagrama, se grafica la energía  $E$  en el eje horizontal y el momento angular  $h$  en el vertical.  $E$  aumenta de derecha a izquierda y  $h$  lo hace de arriba hacia abajo. De esta manera, las primeras superficies de sección presentadas son las que están localizadas en el rincón superior derecho de nuestro diagrama de Lindblad. Cada conjunto individual de ellas está etiquetado con su número de orden en dicho diagrama, así como con sus respectivos valores de  $E$  y  $h$ . Como se ha señalado anteriormente, cada conjunto individual de superficies de sección (cada gráfica) contiene un total de 30 órbitas.

### III.5.2 Superficies de sección verticales

Como complemento a las extensamente utilizadas superficies de sección horizontales ( $R, \dot{R}$ ), herramienta básica en los análisis dinámicos (en general) y de las órbitas de objetos galácticos (en particular), las llamadas **superficies de sección verticales** representadas como  $(z, \dot{z})$ , son un auxiliar muy importante en estos análisis y tareas interpretativas. Una superficie de sección vertical está definida de la siguiente forma: Para cada una de las órbitas de la familia con una  $E$  y una  $h$  dadas, es el conjunto de pares  $(z, \dot{z})$  medidos para cada punto donde la órbita cruza con  $\dot{R} > 0$  a un cilindro de radio  $R = 8.5$  kpc, cuyo eje coincide con el eje de rotación de la Galaxia. Esta variante vertical de superficie de Poincaré presenta la ventaja de que puede ser, por ejemplo, comparada **directamente** con las observaciones de velocidades radiales de objetos situados verticalmente a distancias positivas ó negativas respecto al plano galáctico, justo desde nuestra posición a 8.5 kpc del

centro de la Vía Láctea. Esta ventaja viene de la misma definición de superficie de sección vertical.

Hemos incluido en este trabajo una serie de 16 familias de superficies de sección verticales. Nueve de ellas corresponden a la energía del Sol, con valores crecientes de momento angular; las siete restantes a una energía igual a  $1.1 E_s$ , con distintos momentos angulares. Las 16 familias de superficies verticales son un complemento al respectivo conjunto de superficies horizontales. Nuestro especial interés en la estructura orbital de la inmediata vecindad solar justifica esta inclusión, en beneficio de una mayor información dinámica de nuestro entorno observacionalmente accesible.

Es claramente notorio a partir de estas superficies verticales, que el mismo y complejo conjunto de características morfológicas presentes en las superficies horizontales (mar caótico, islas, órbitas regulares, etc.) se manifiesta usando este nuevo enfoque-recurso, el cual empieza a ser empleado con buen éxito en la literatura (p.ej., Schuster y Allen, 1997). Dado que hemos incluido el conjunto de superficies verticales correspondientes a  $1.0 E_s$  y  $1.1 E_s$ , para todos los valores permitidos de momento angular, el análisis que más adelante haremos de las superficies de sección horizontales podrá hacerse extensivo a las verticales, comparando una a una con el mismo par  $(E, h)$ , pues las estructuras morfológicas en ambos grupos de superficies guardan una estrecha y evidente analogía.

### III.5.3 Acotación de las regiones caóticas en la Galaxia

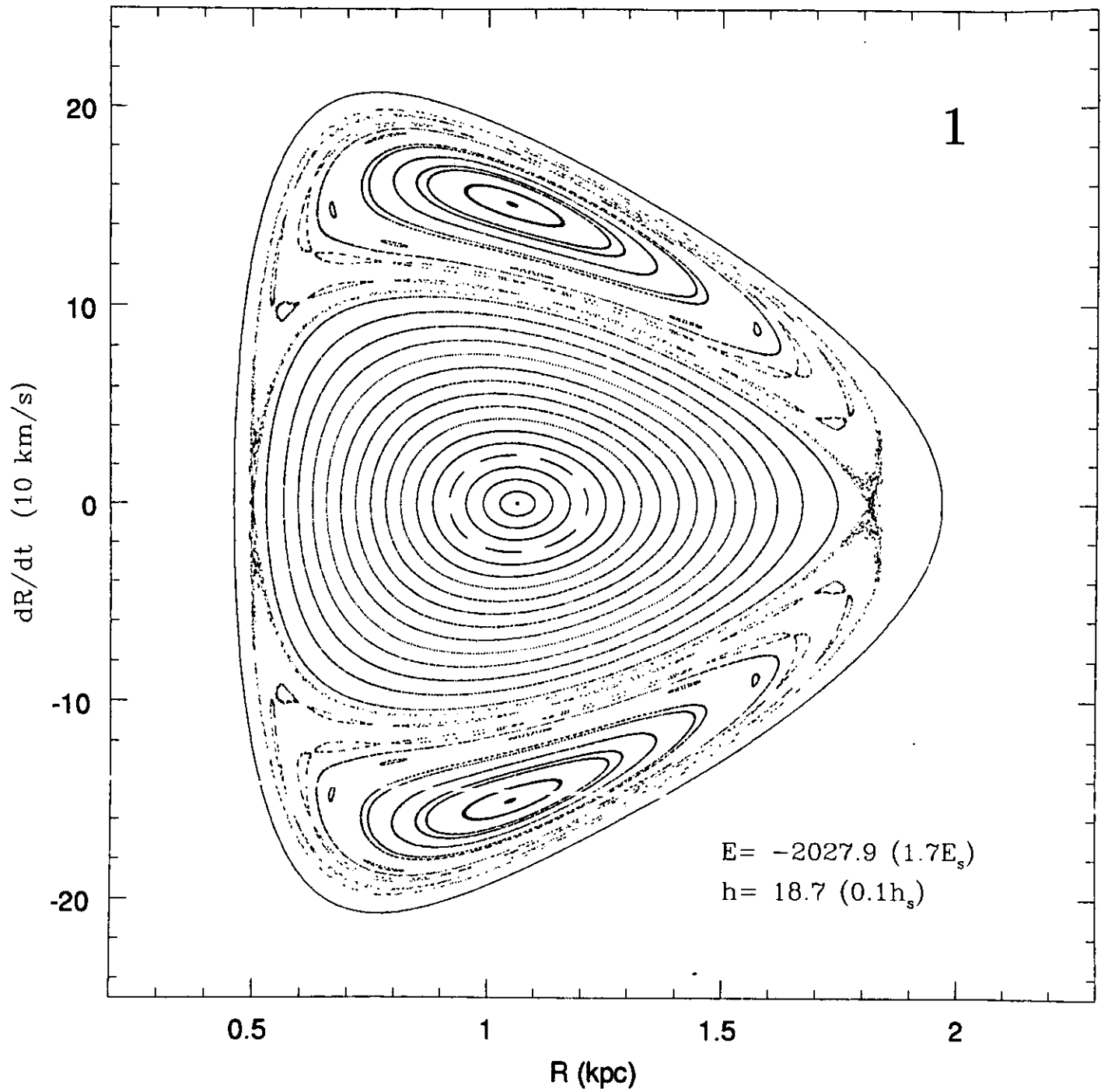
Un sistema dinámico es **integrable** si el número de grados de libertad es menor ó igual al número de constantes de movimiento. Puesto que en nuestro análisis orbital contamos con 3 grados de libertad  $(R, z, \theta)$  y sólo 2 constantes de movimiento  $(E$  y  $h)$ , tenemos un sistema en general **no integrable**. Por otro lado, es claro que las ecuaciones de movimiento que rigen la dinámica de las partículas en la Galaxia son **no lineales**. Finalmente, podemos comprobar que nuestras órbitas están **acotadas** por un par de valores  $E$  y  $h$ , los cuales las confinan a una determinada región del espacio.

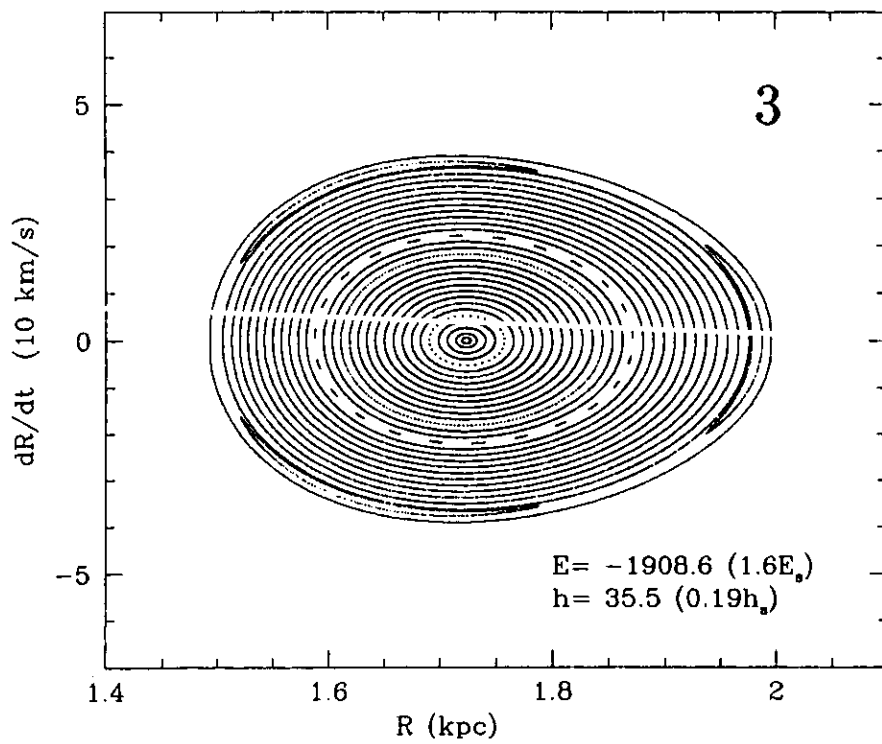
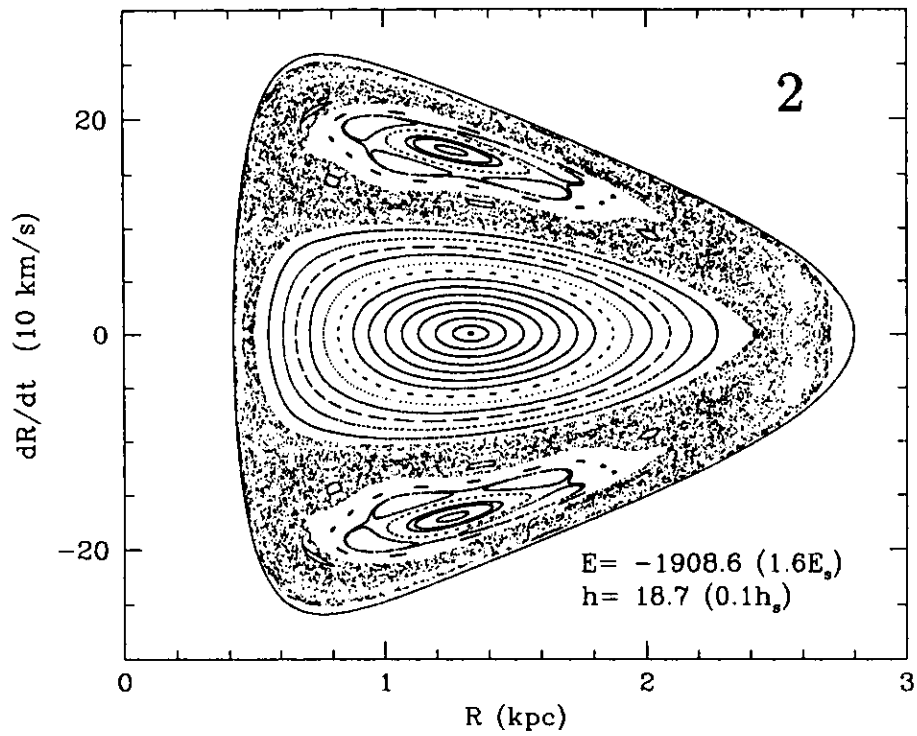
$E$ 
 $0.3E_s, 0.4E_s, 0.5E_s, 0.6E_s, 0.7E_s, 0.8E_s, 0.9E_s, 1.0E_s, 1.1E_s, 1.2E_s, 1.3E_s, 1.4E_s, 1.5E_s, 1.6E_s, 1.7E_s,$ 

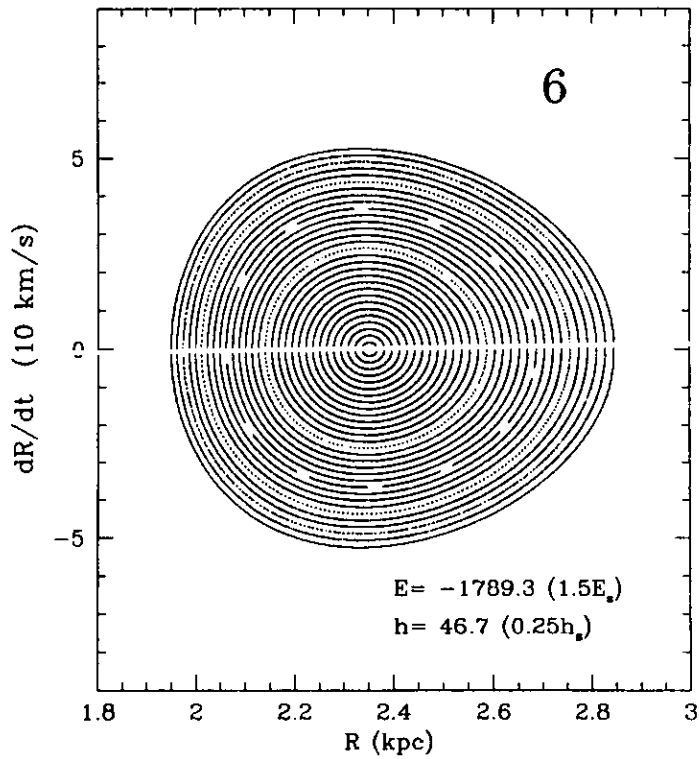
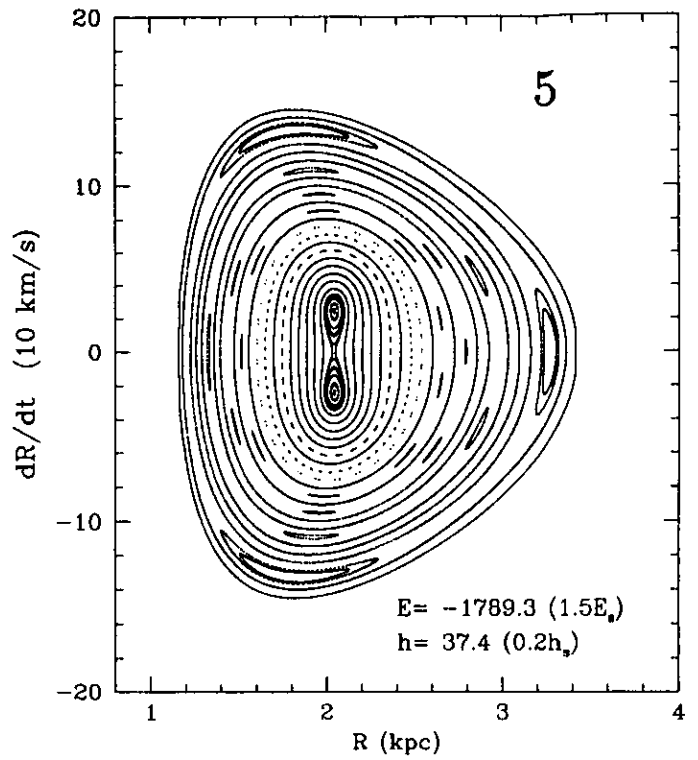
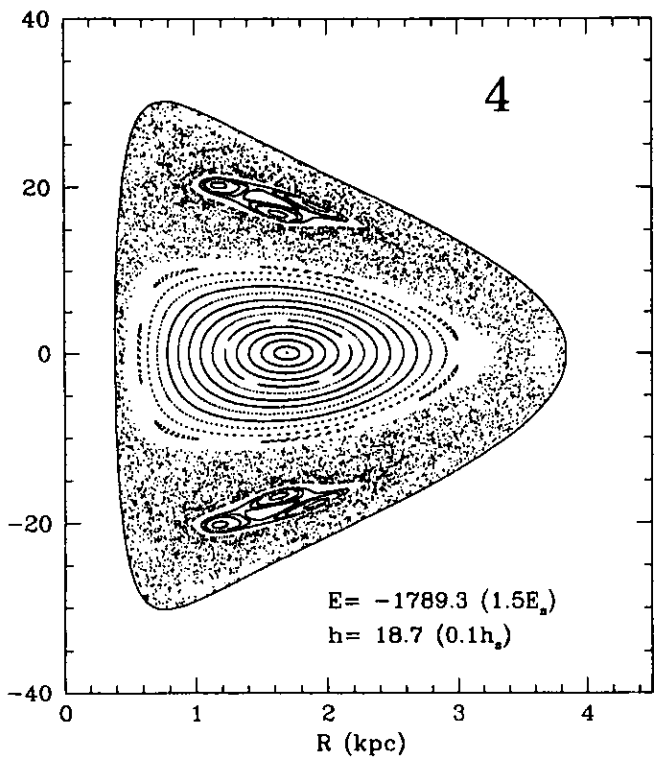
$0.1h_s$	74	63	56	48	39	30	22	16	11	7	4	2	1
$0.2h_s$	75	70	64	57	49	40	31	23	17	8	5	3	
$0.3h_s$	76	71	65	58	50	41	32	24	18	9	6		
$0.4h_s$		72	66	59	51	42	33	25	19	10			
$0.5h_s$		73	67	60	52	43	34	26	20	15			
$0.6h_s$			68	61	53	44	35	27	21				
$0.7h_s$				62	54	45	36	28					
$0.8h_s$					55	46	37	29					
$0.9h_s$						47	38						

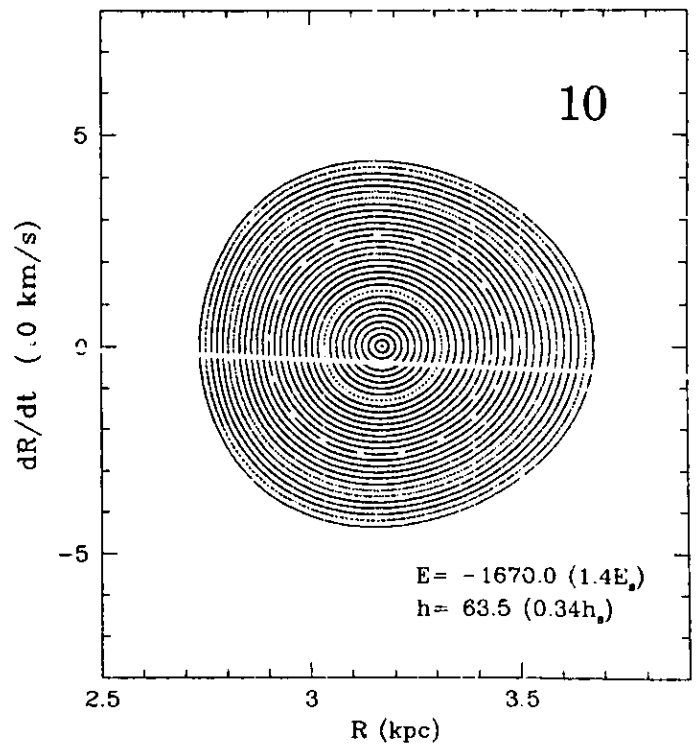
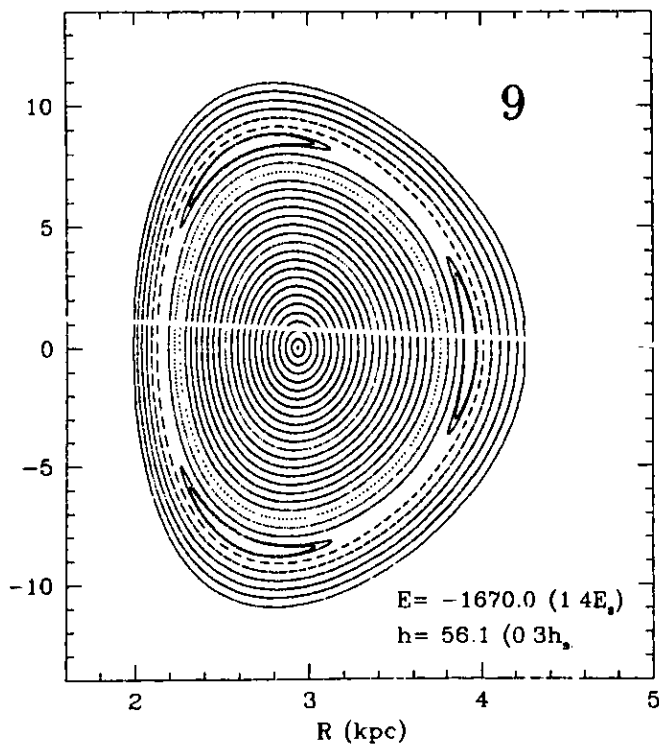
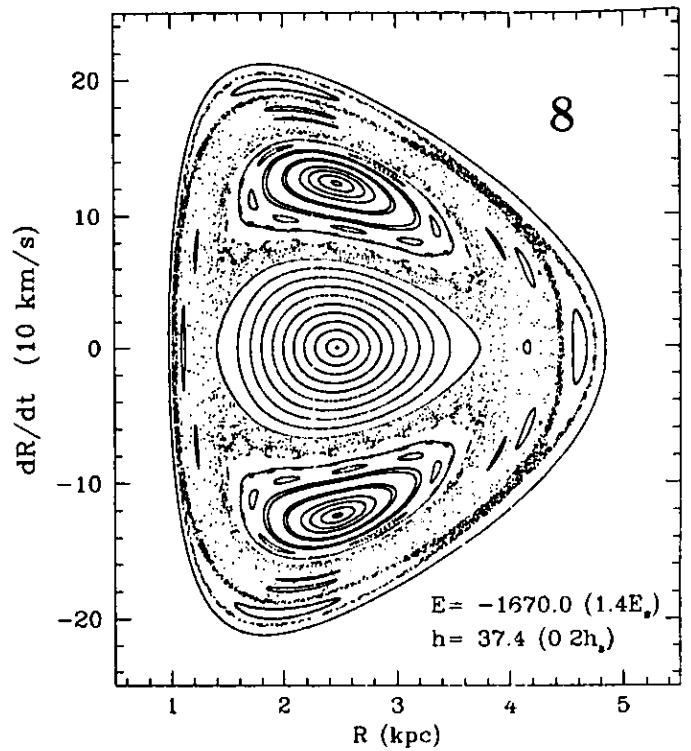
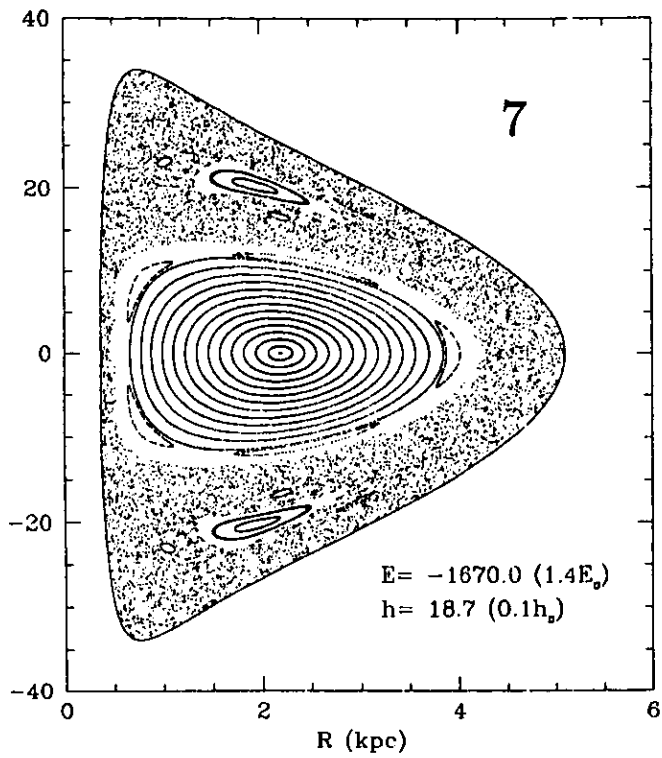
FIGURA 4

Diagrama de Lindblad ( $E, h$ ), conteniendo el MAPEO global del potencial galáctico analizado en esta tesis. El mosaico está formado por un total de 77 familias de superficies de sección. Los valores considerados para la energía  $E$  y el momento angular  $h$  están dados en múltiplos y submúltiplos de la energía y momento angular del Sol (ver texto). La energía crece hacia la izquierda y el momento angular hacia abajo.

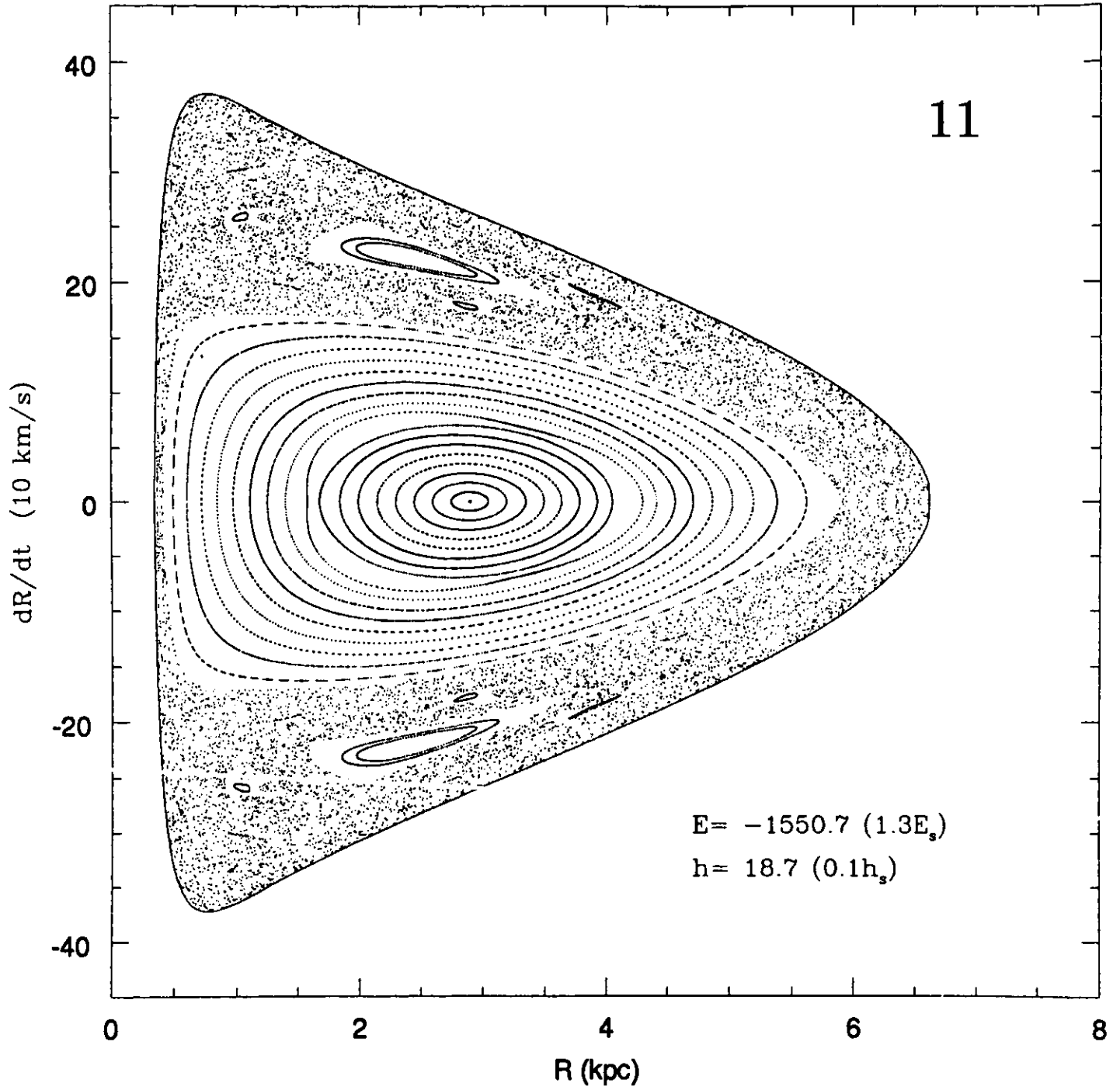


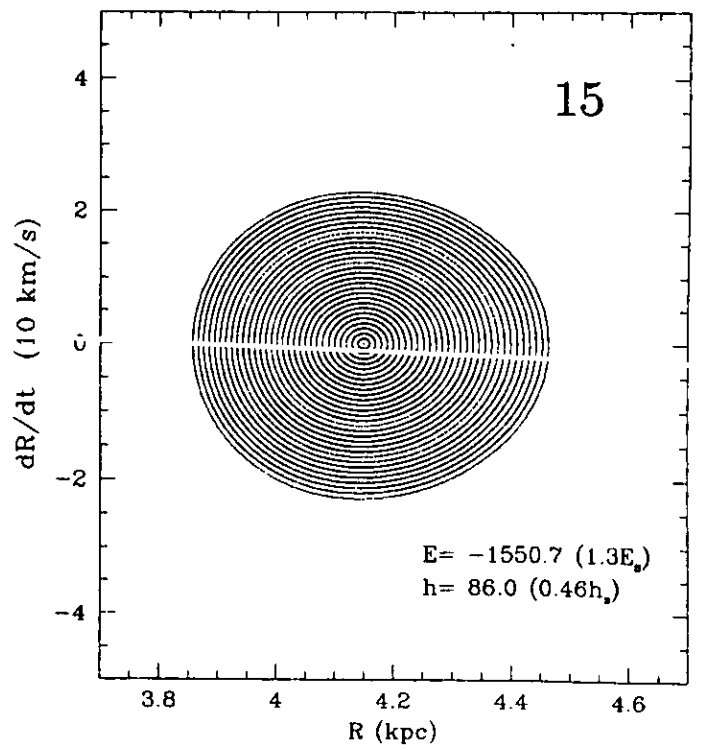
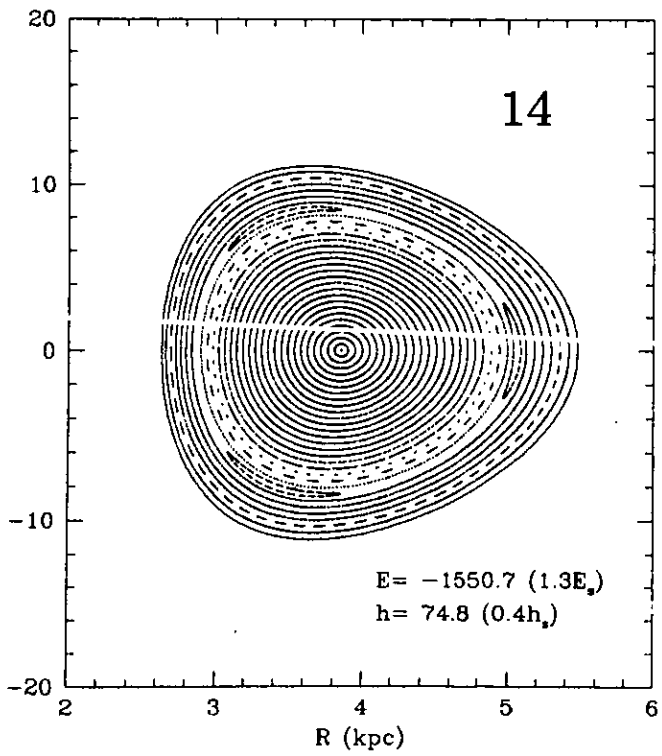
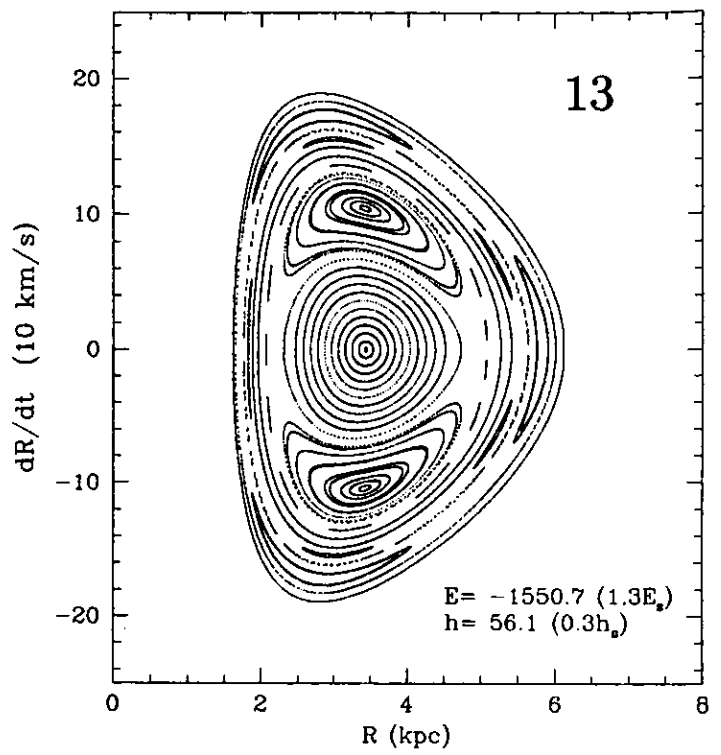
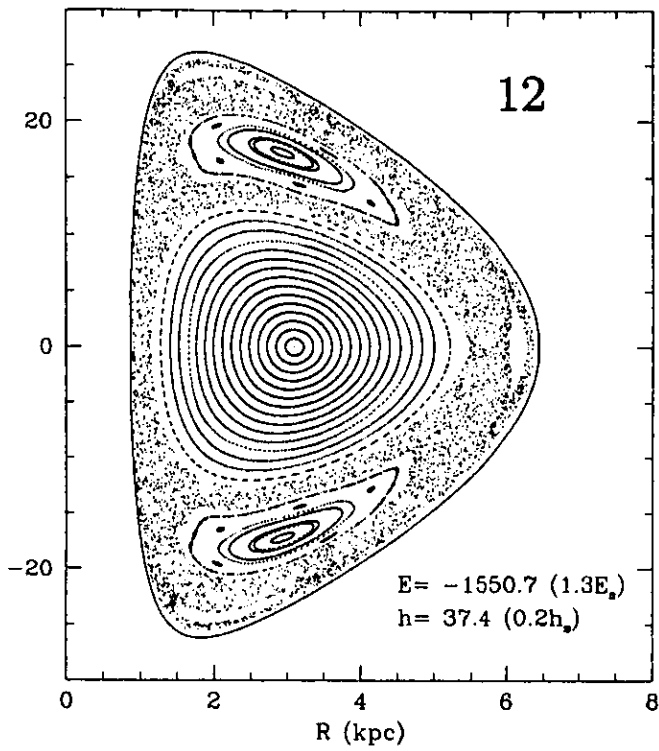


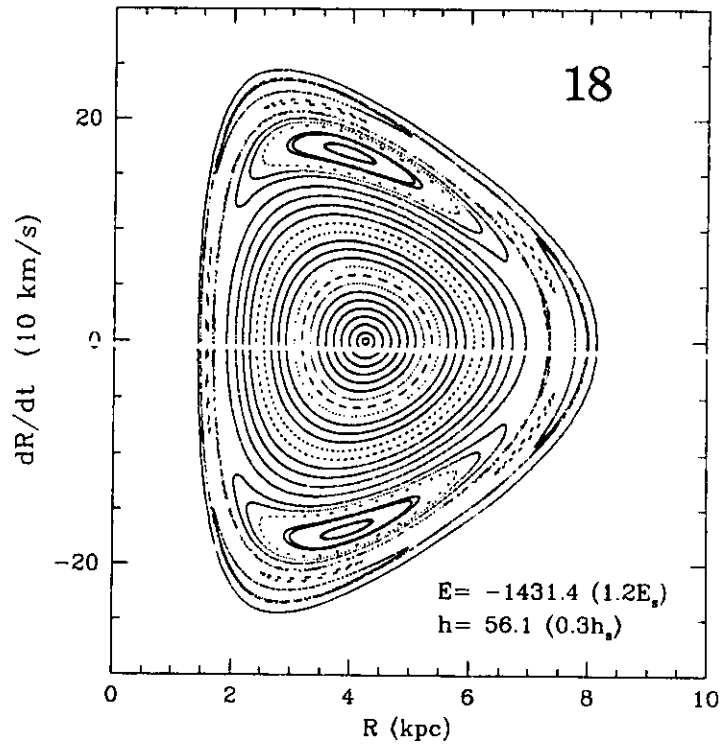
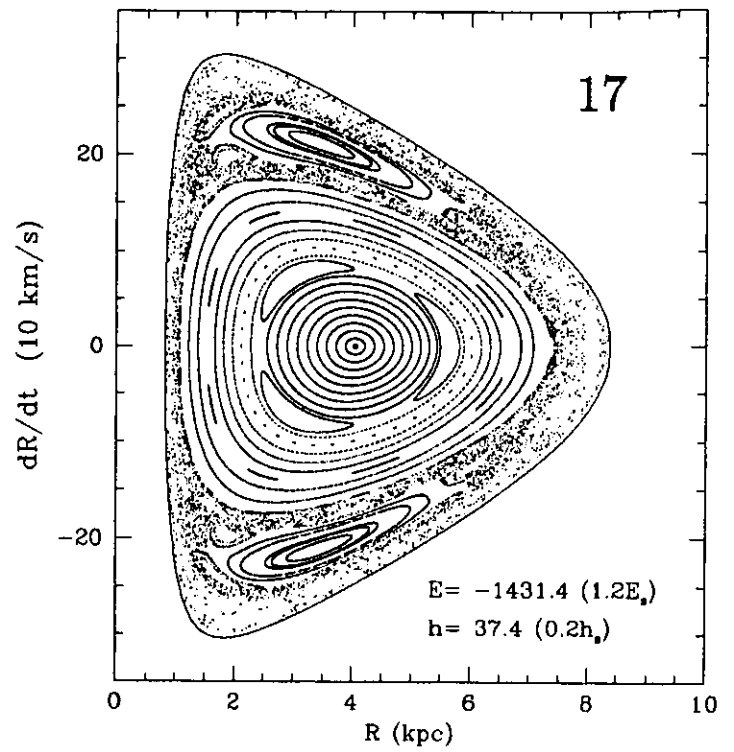
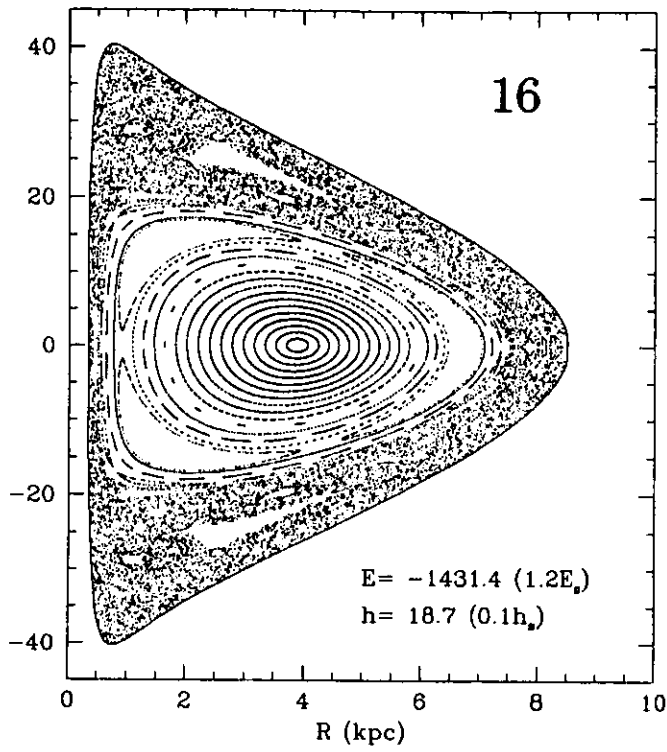


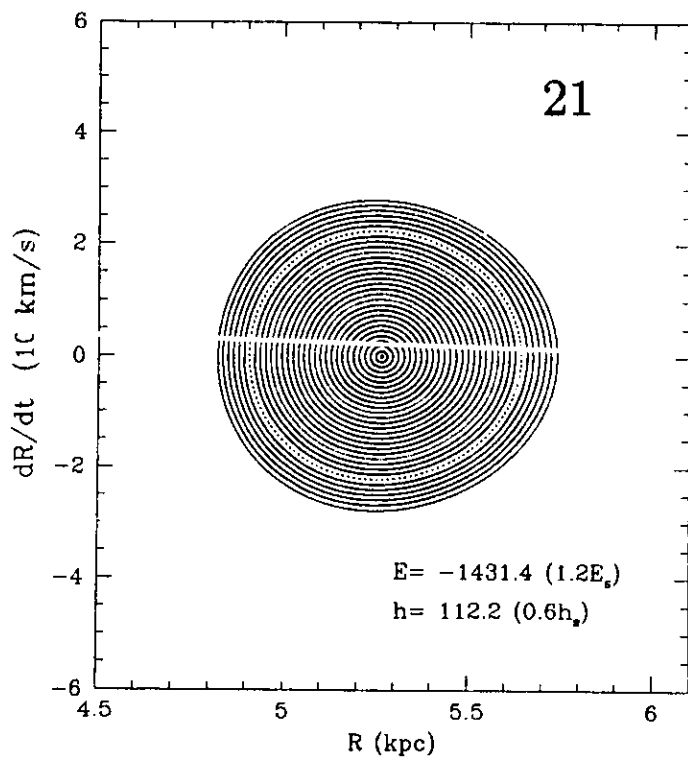
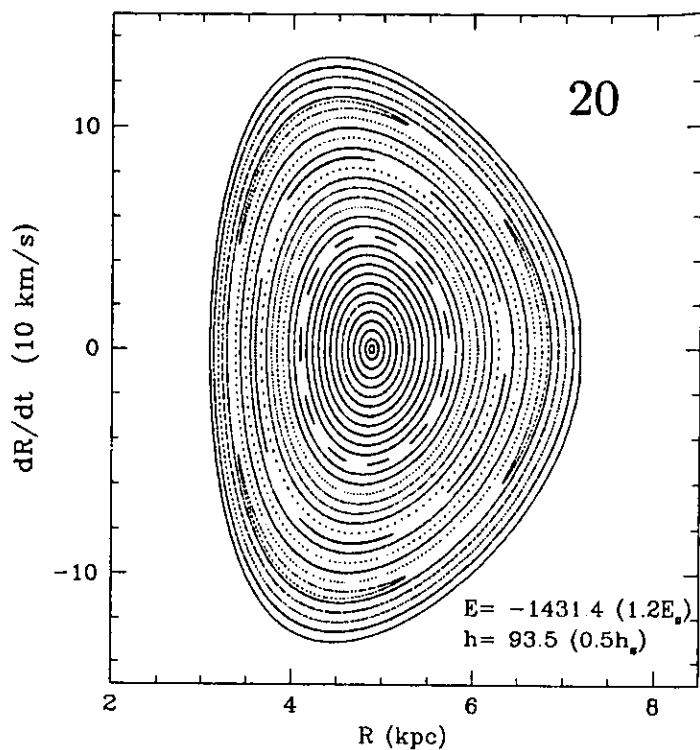
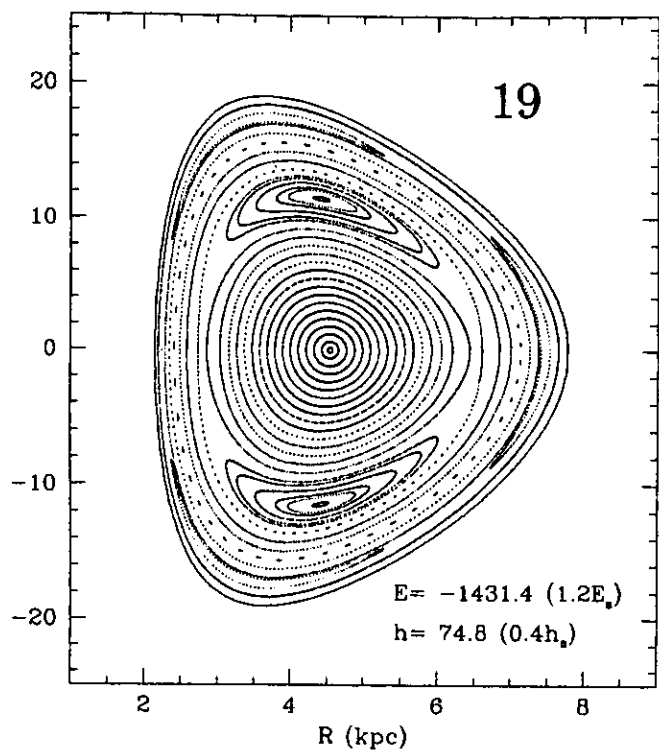


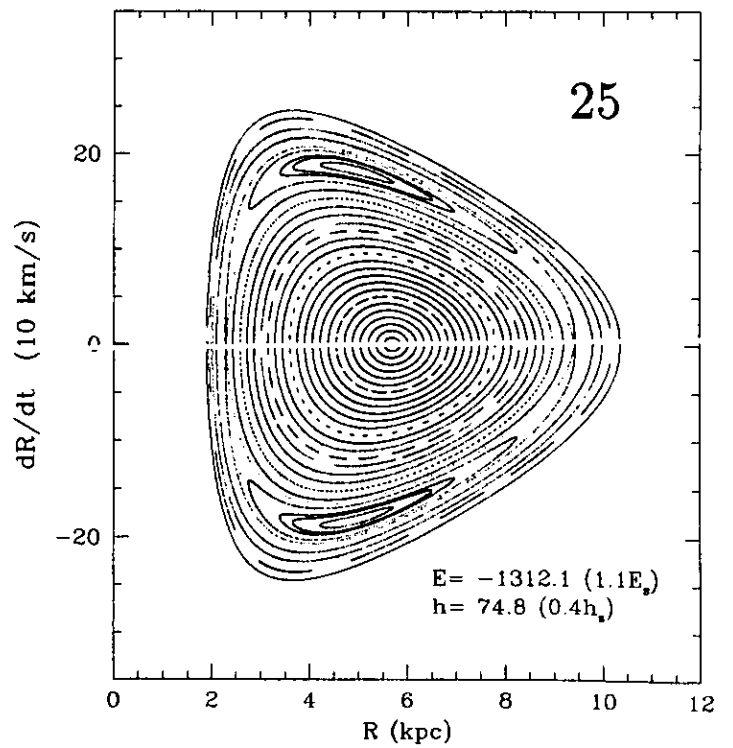
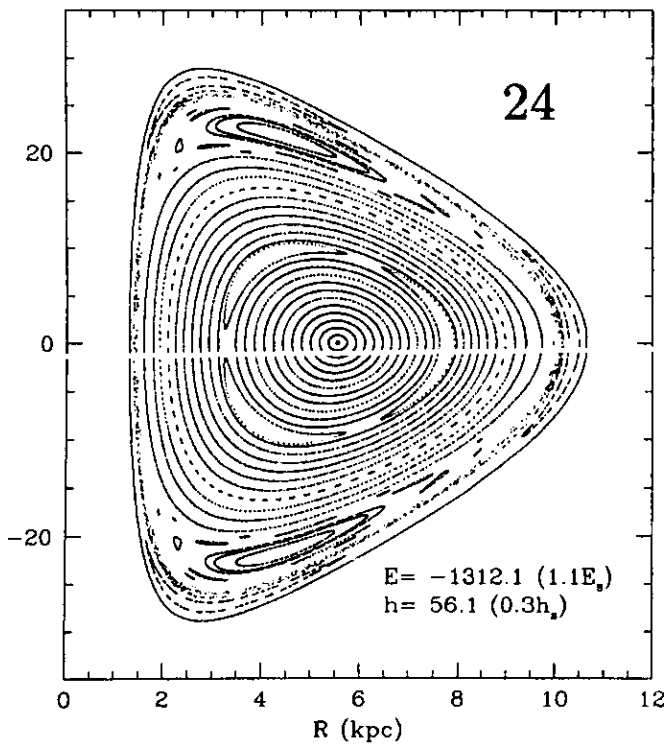
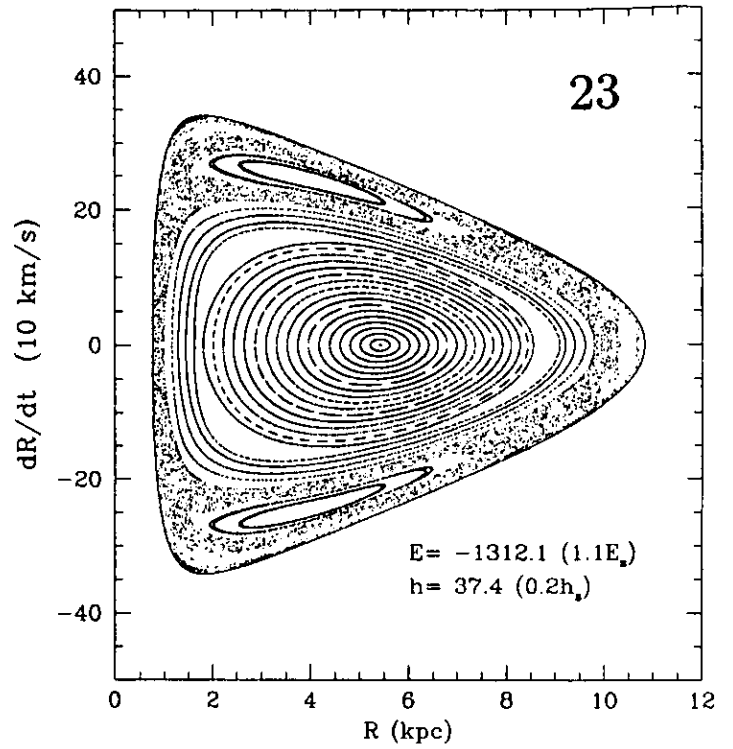
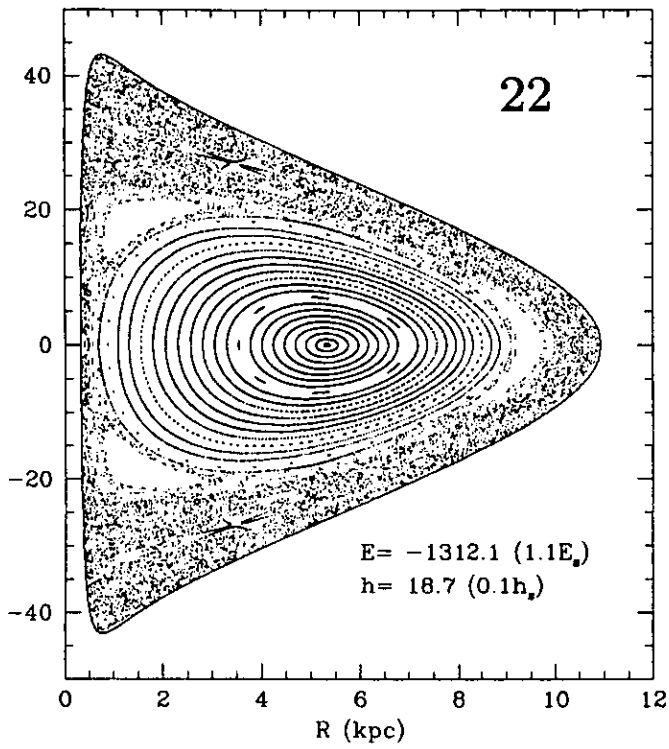


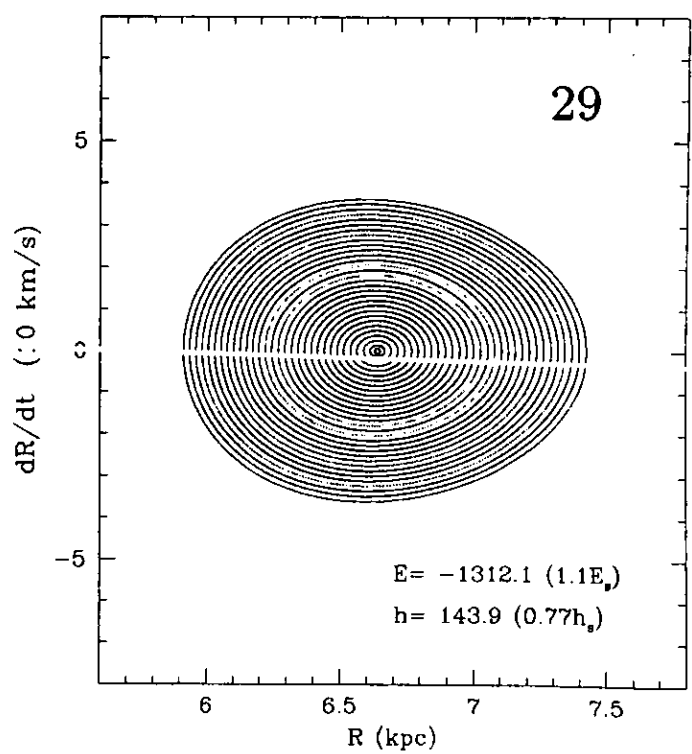
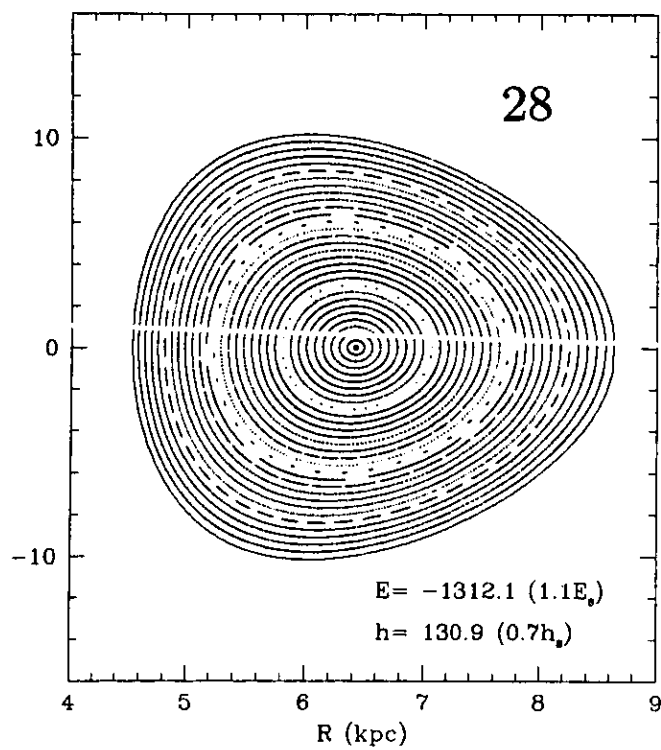
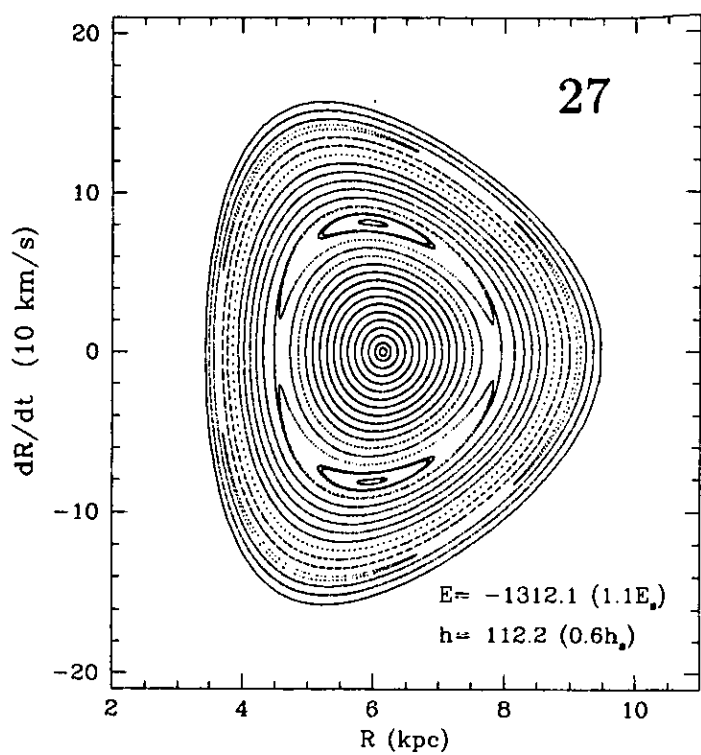
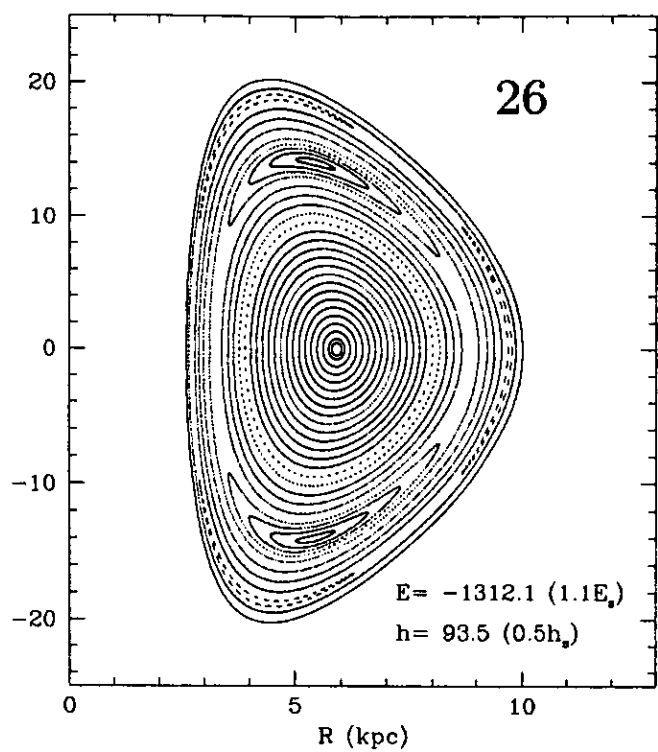


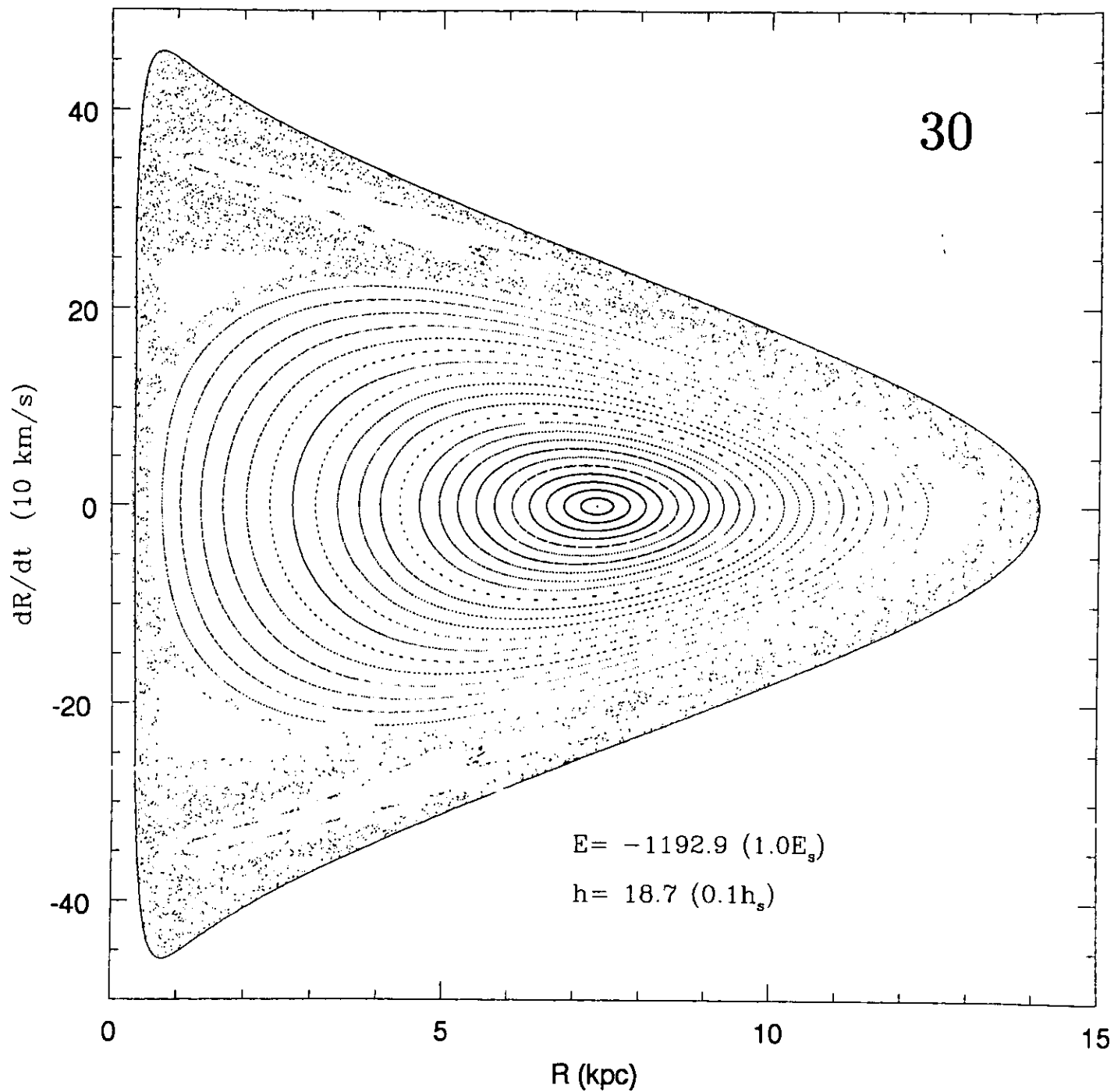


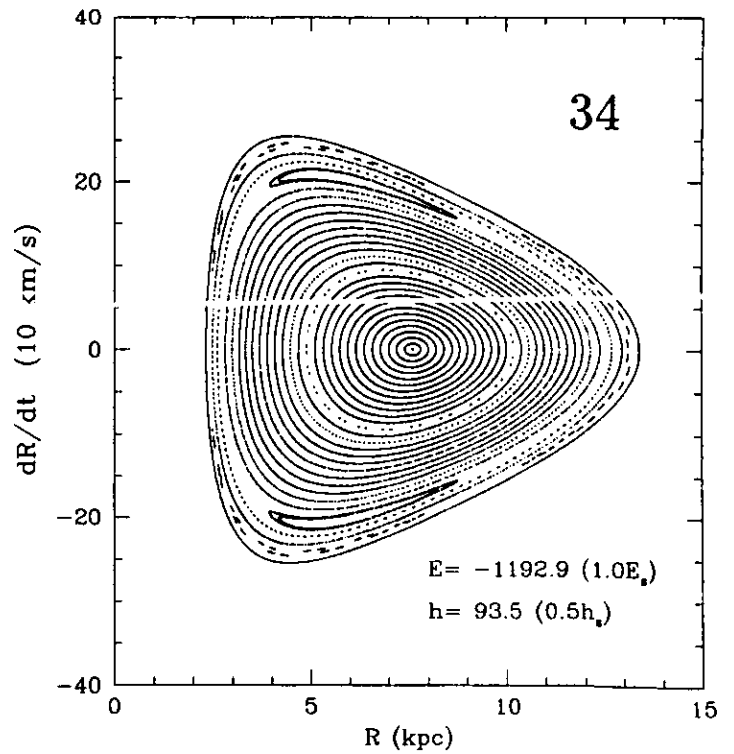
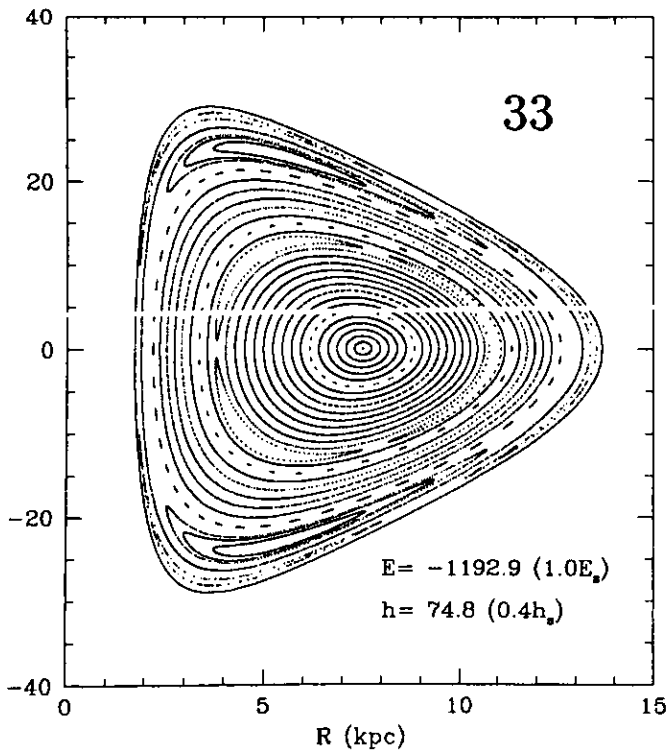
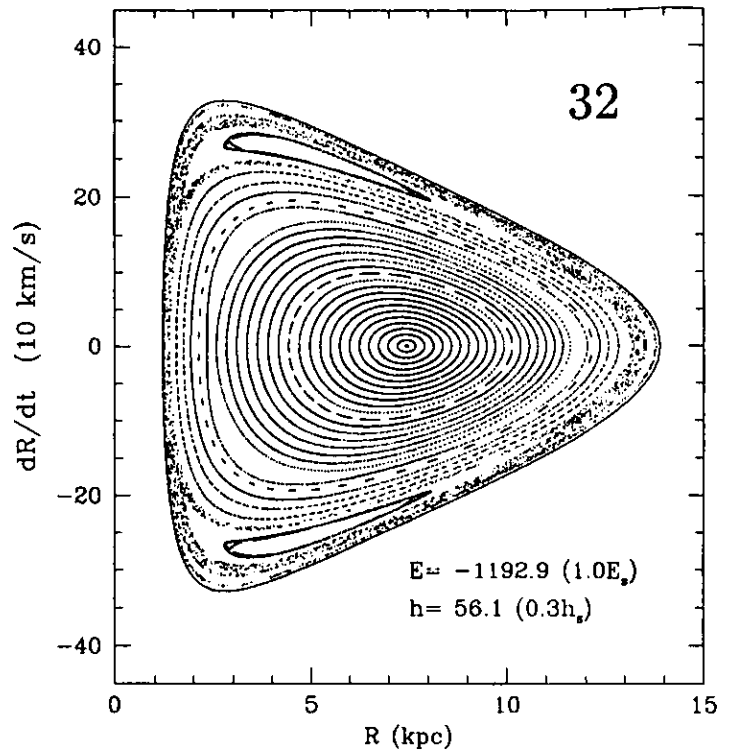
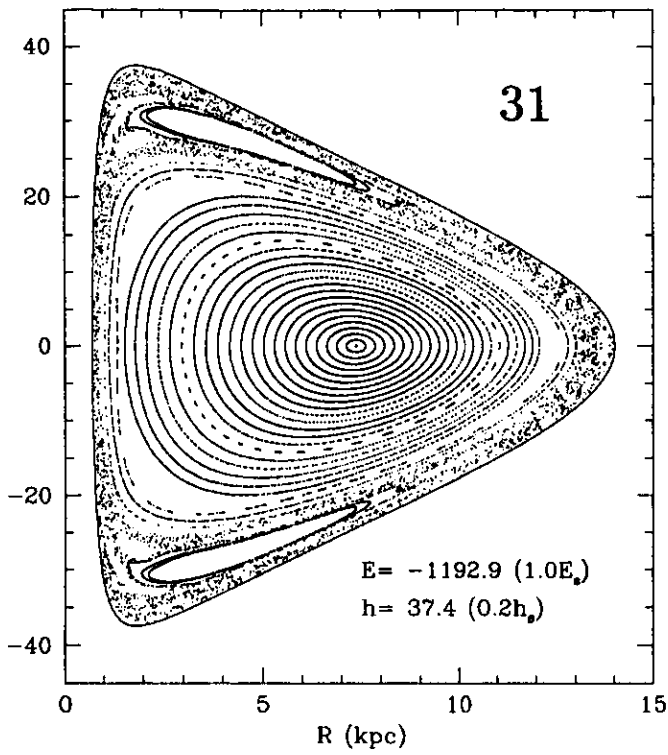




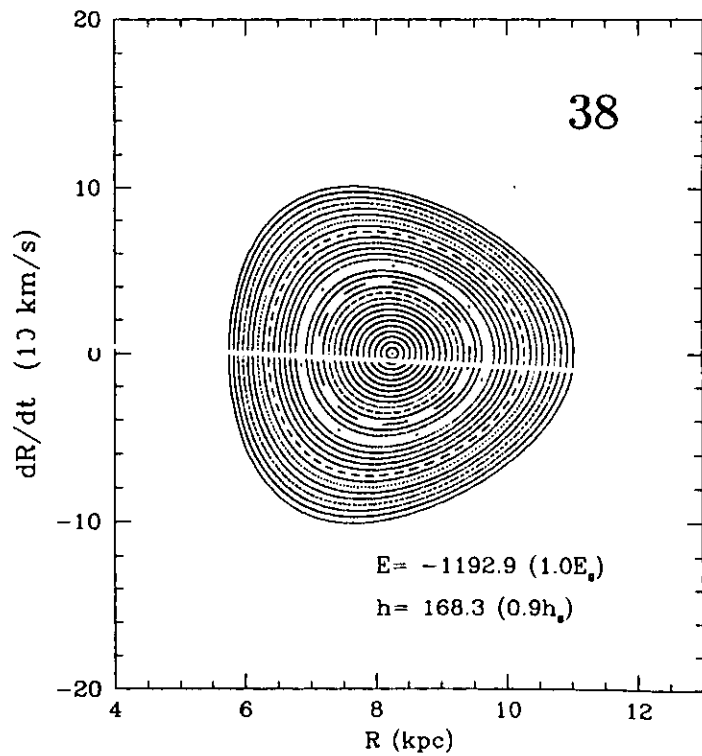
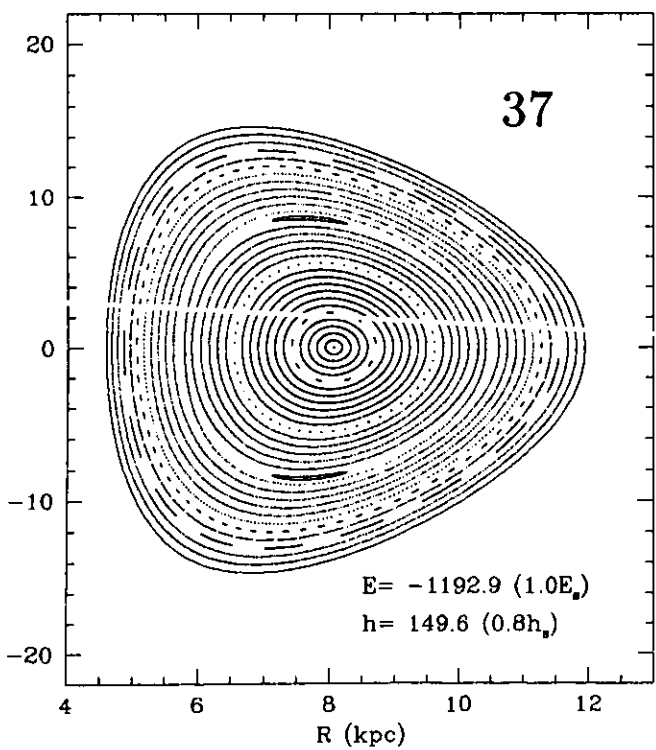
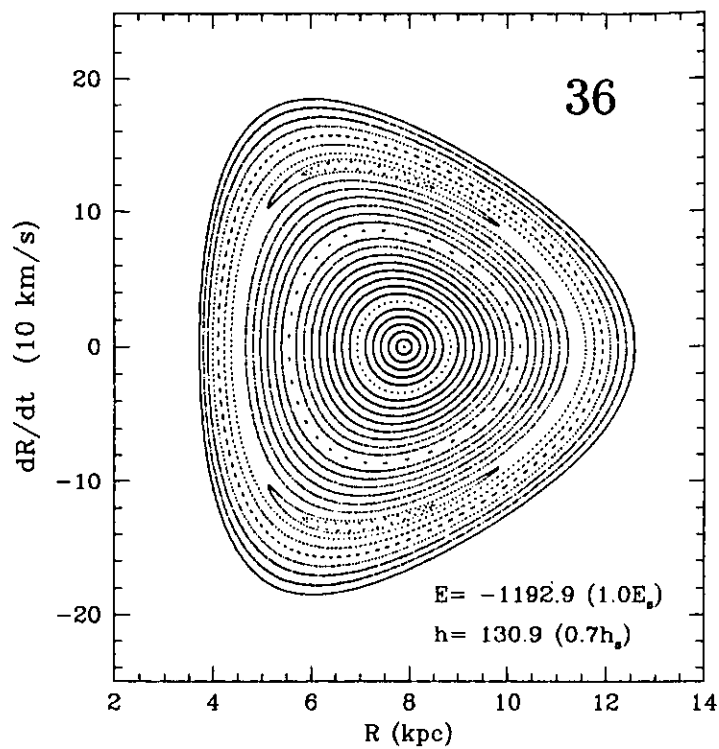
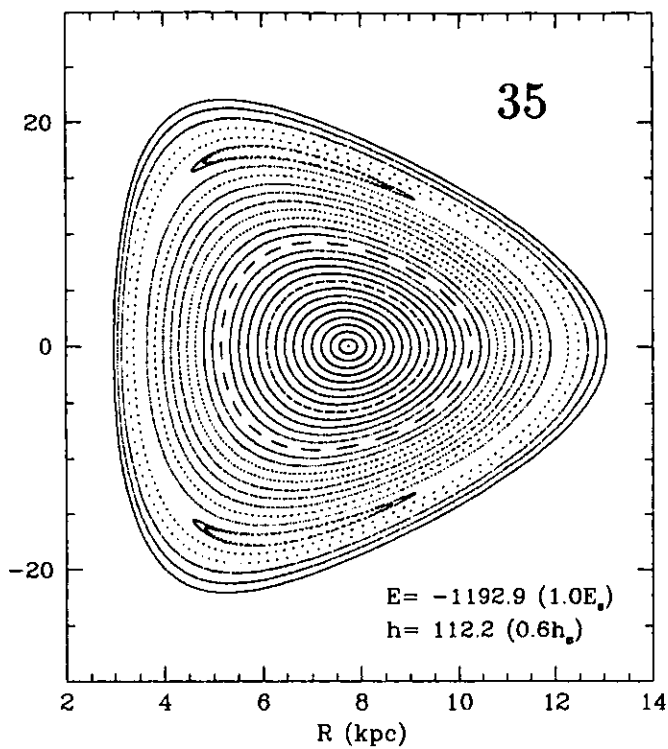




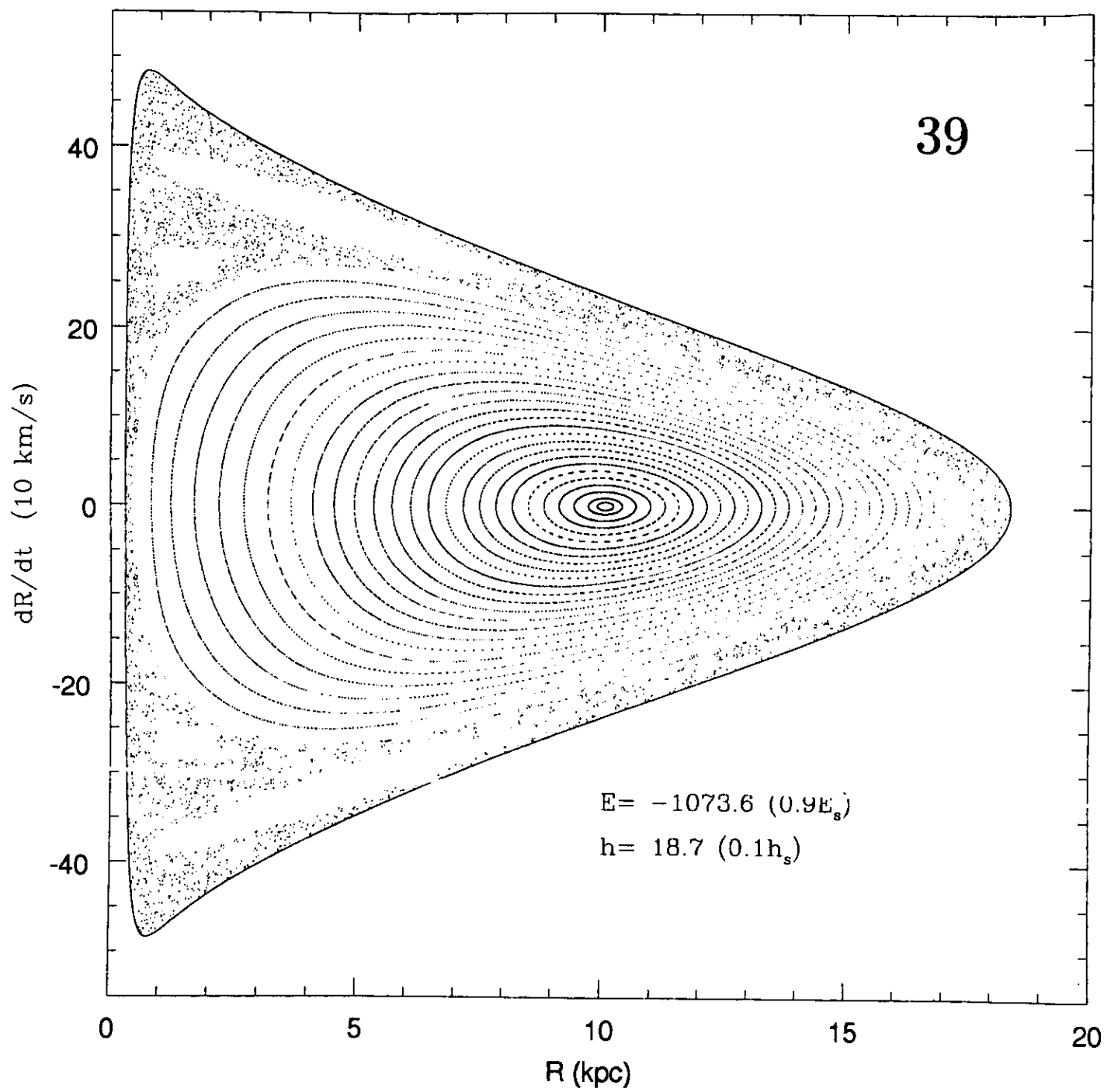


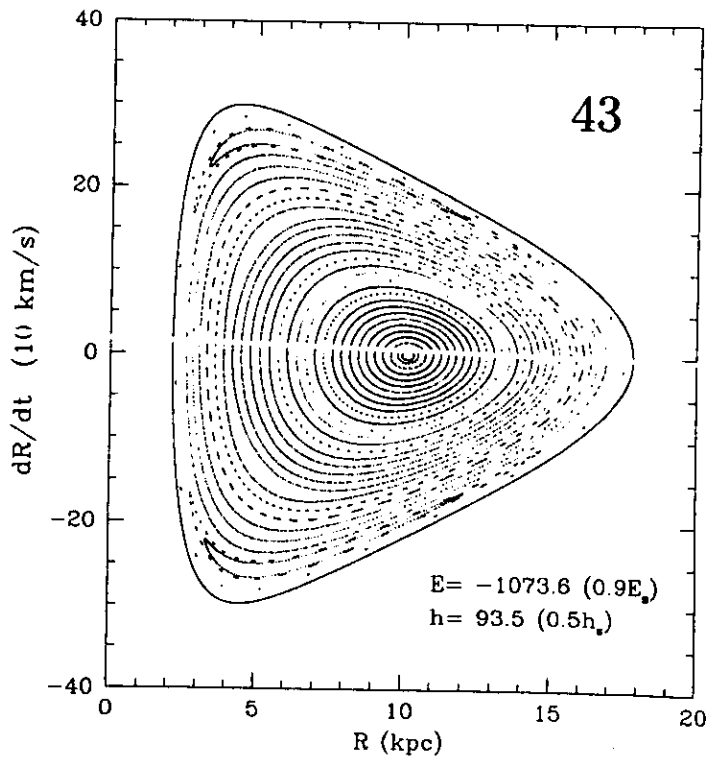
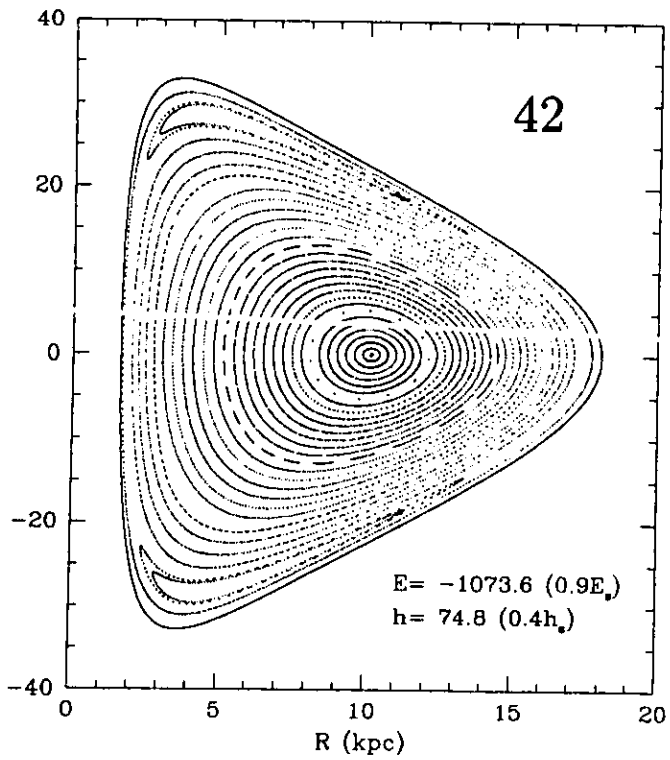
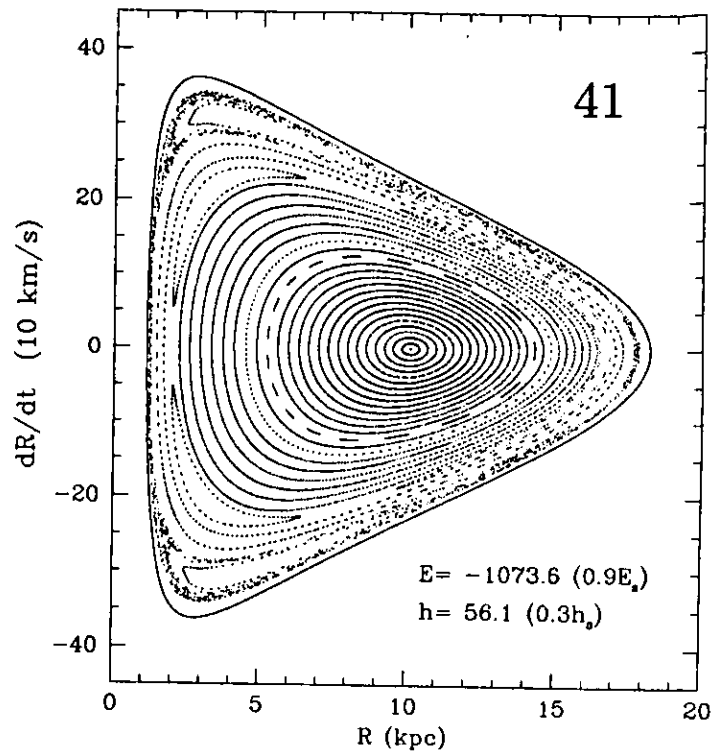
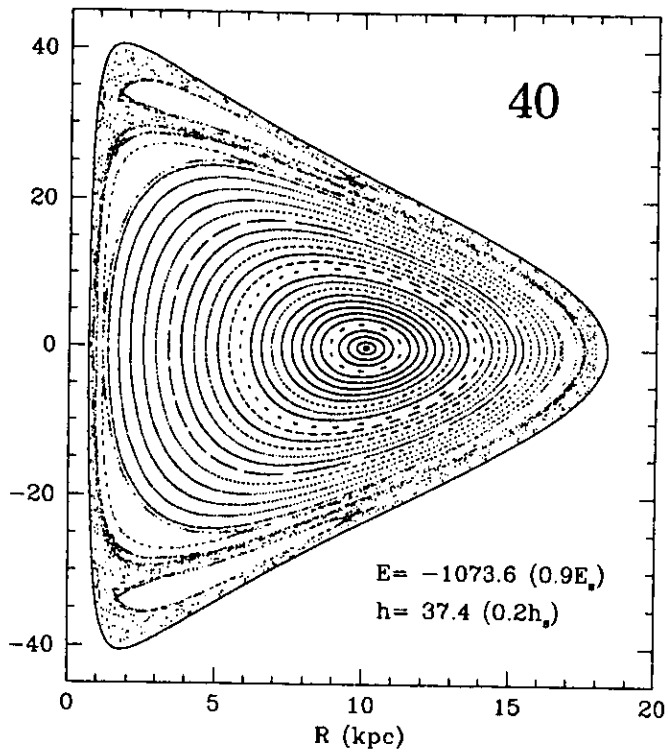


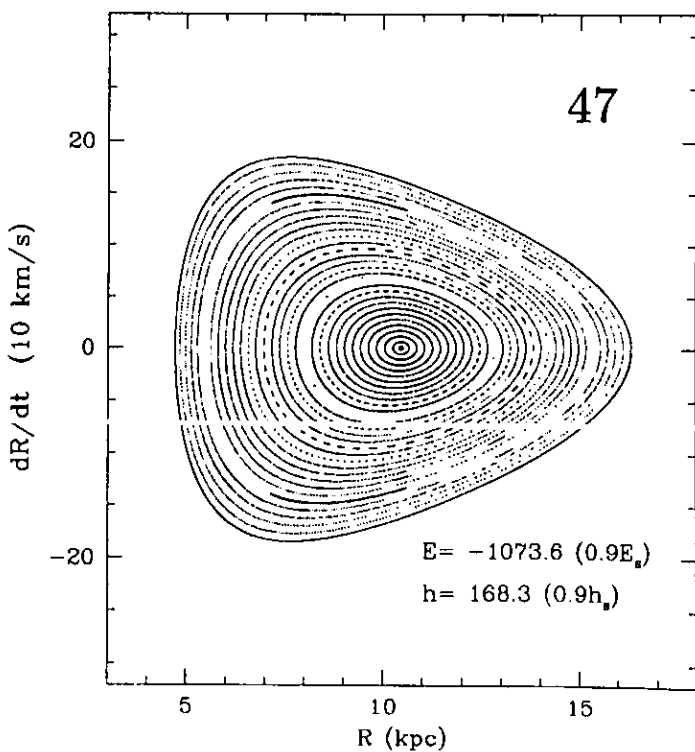
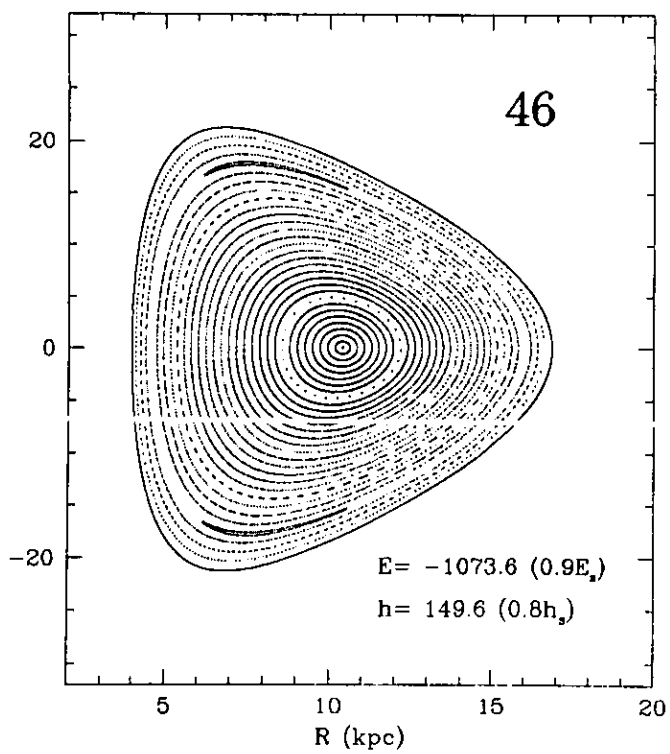
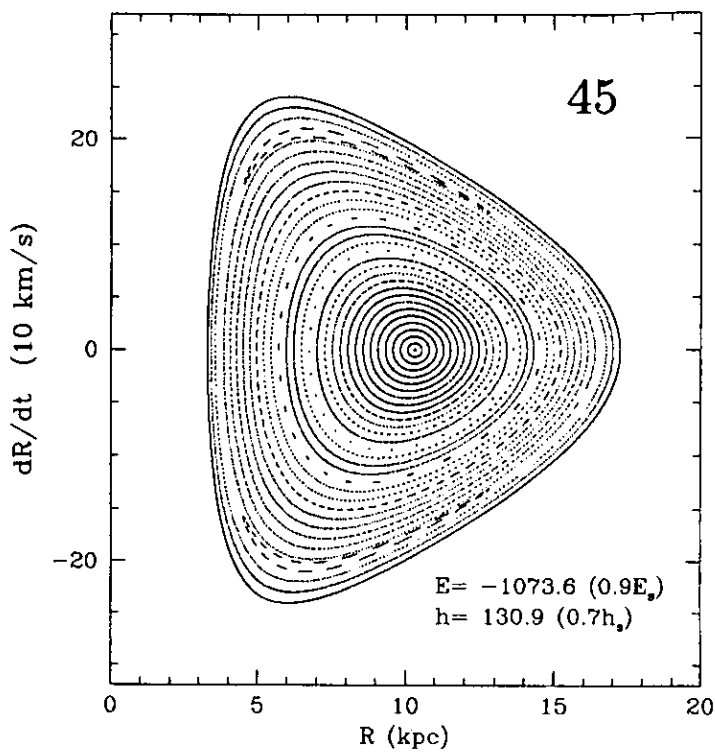
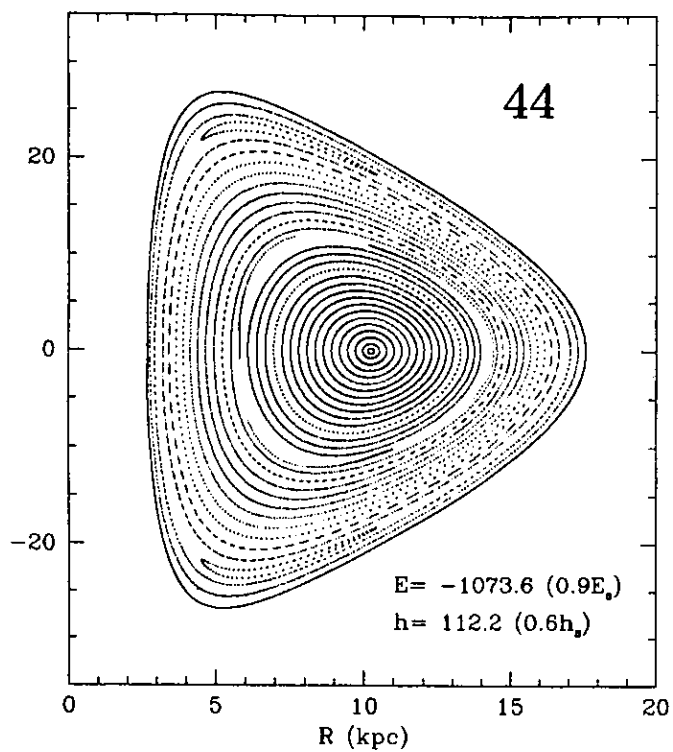


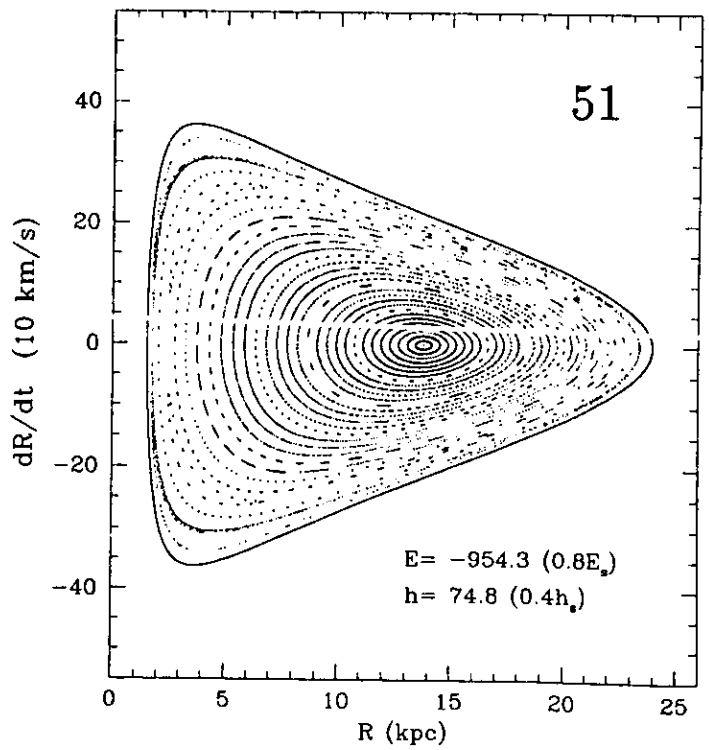
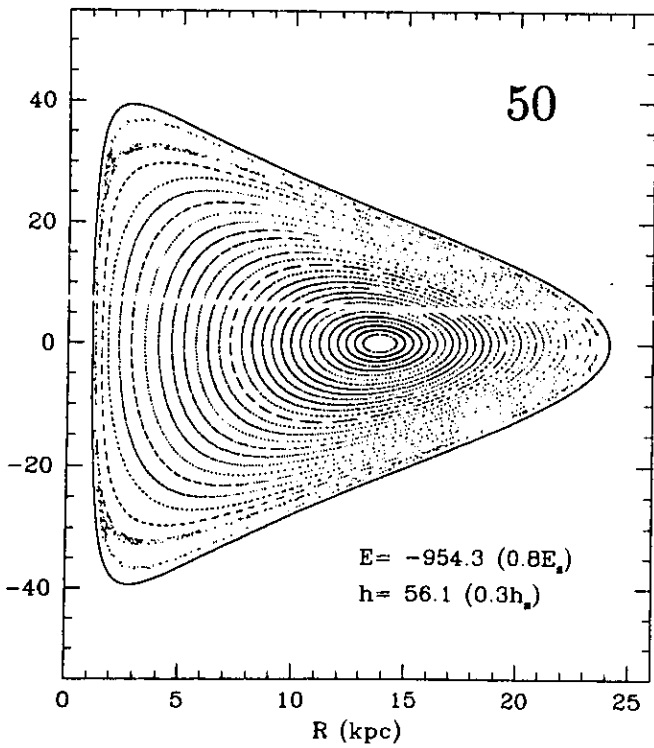
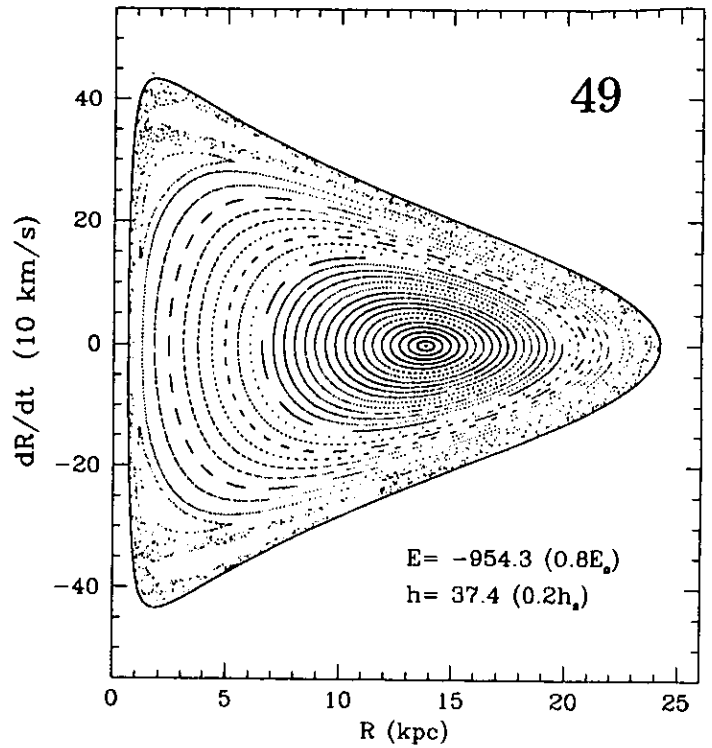
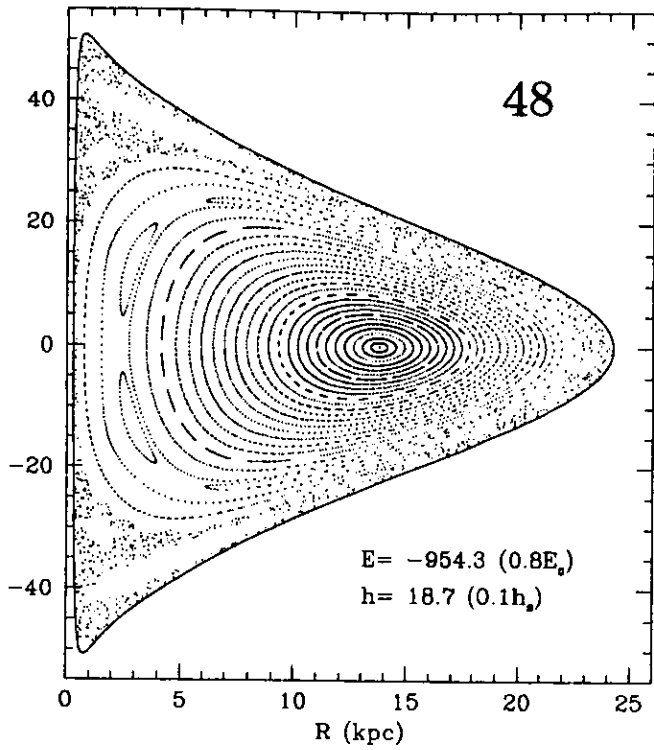


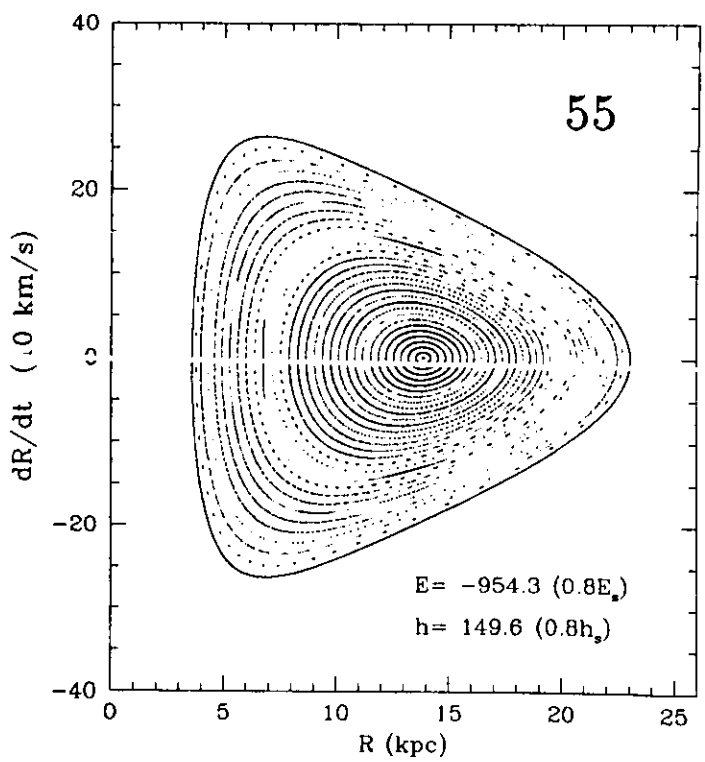
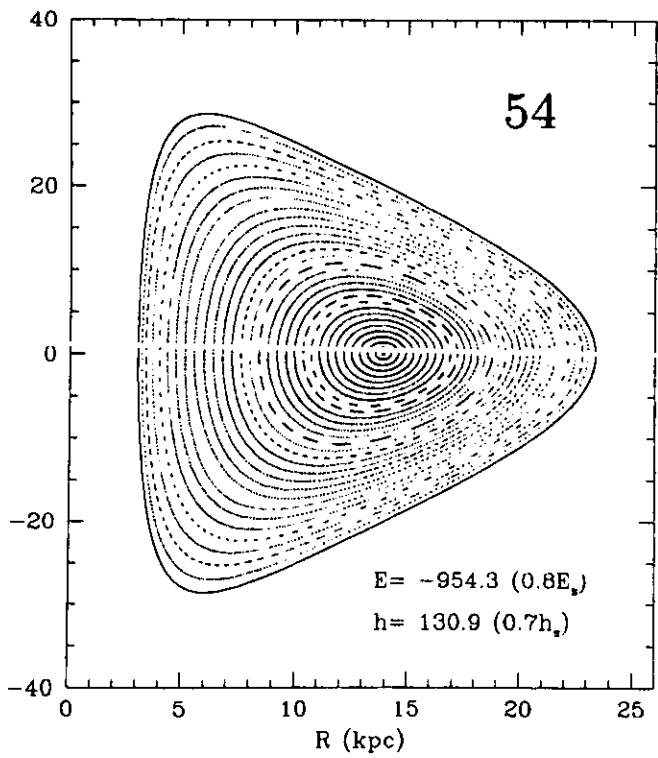
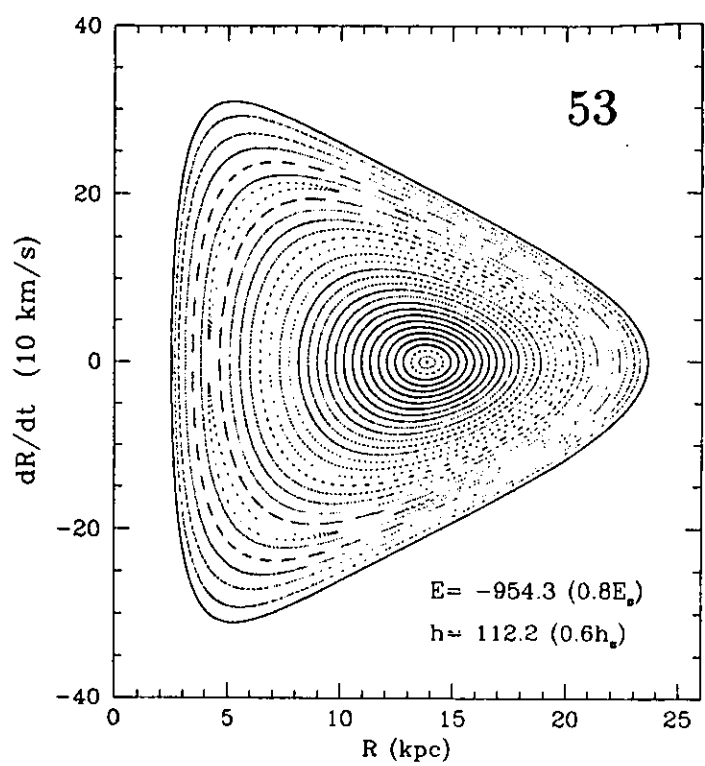
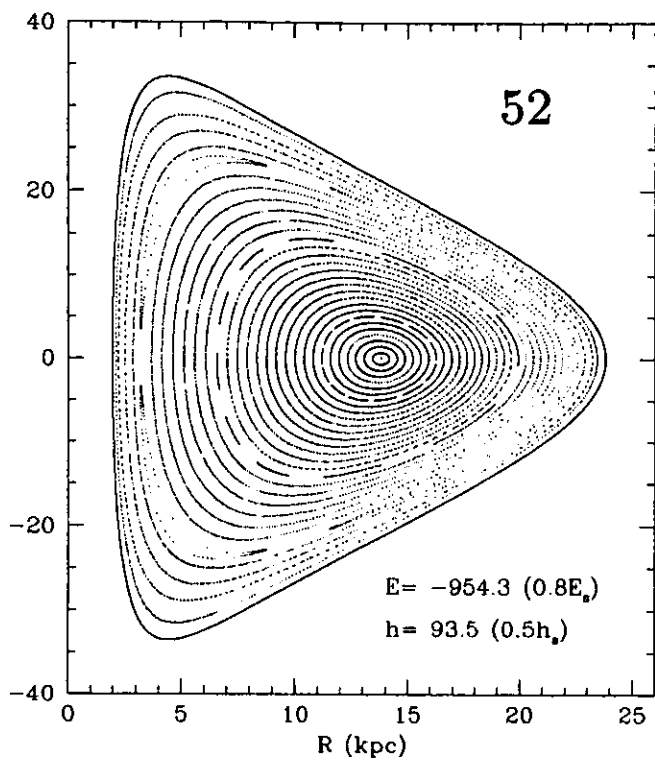
39

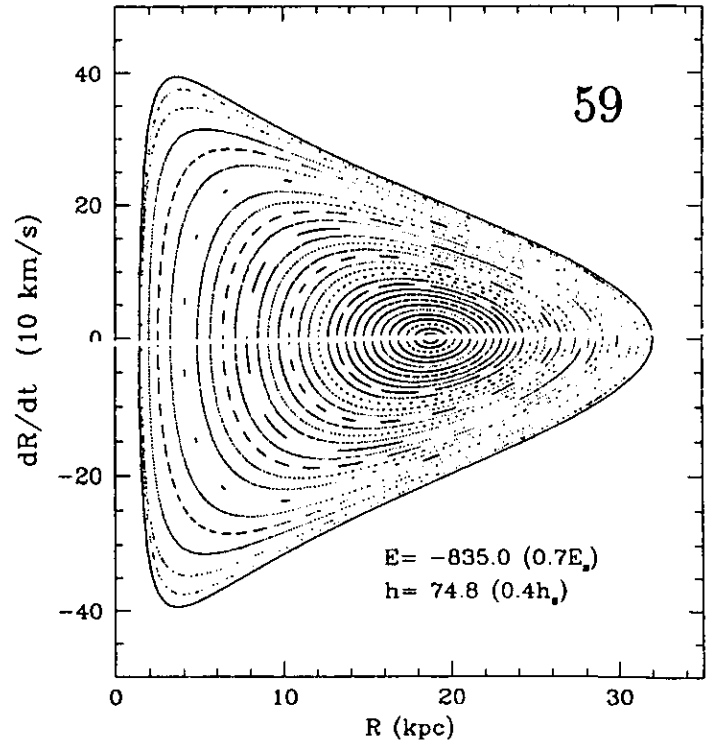
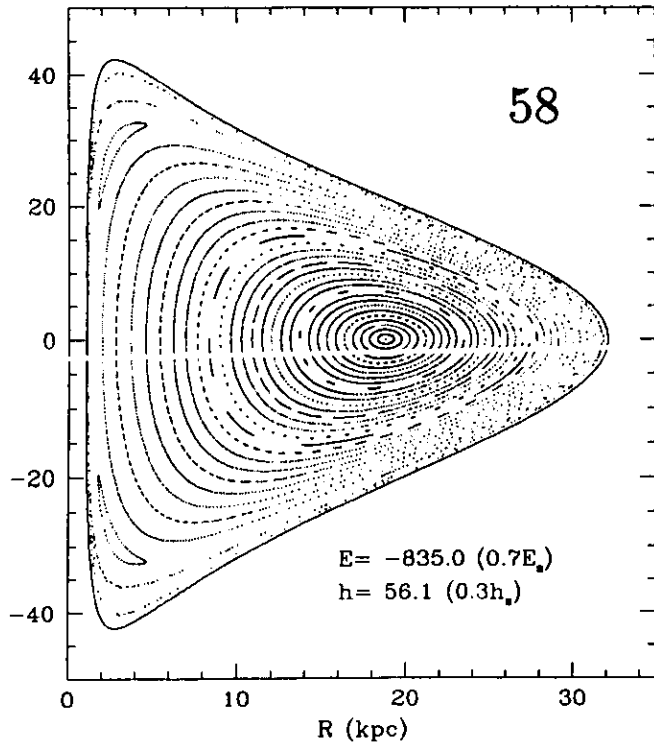
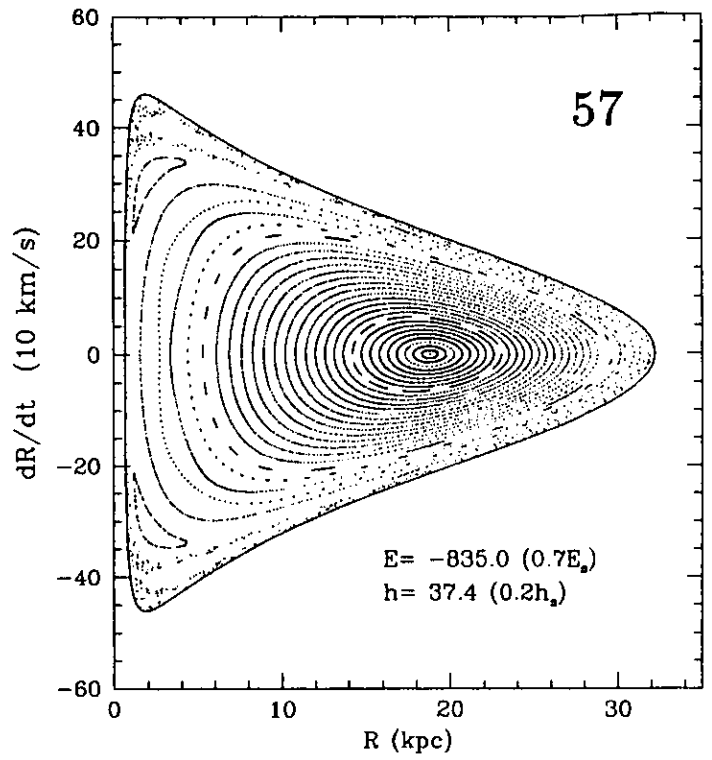
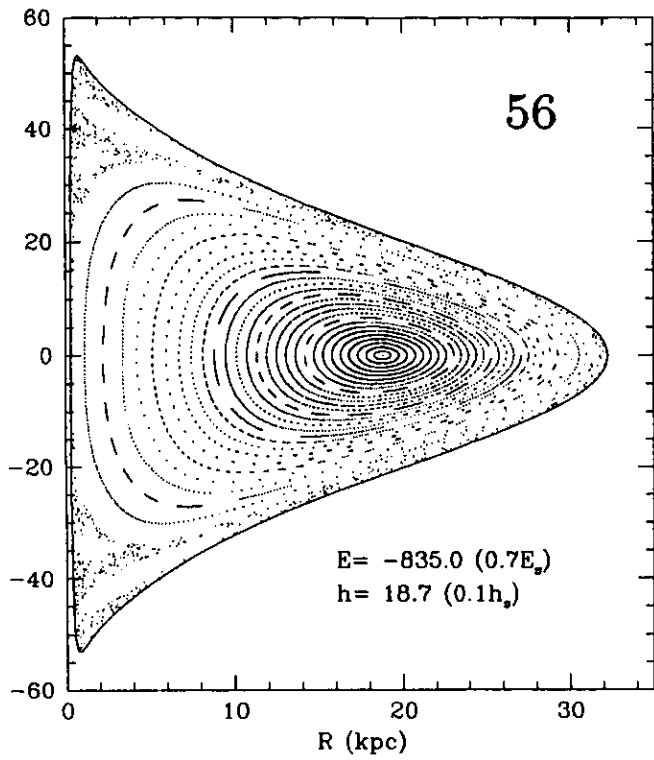


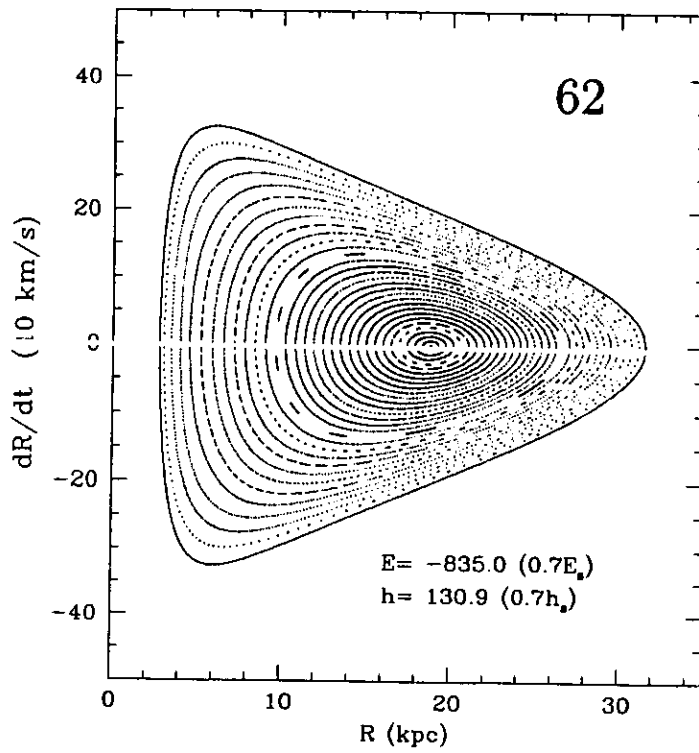
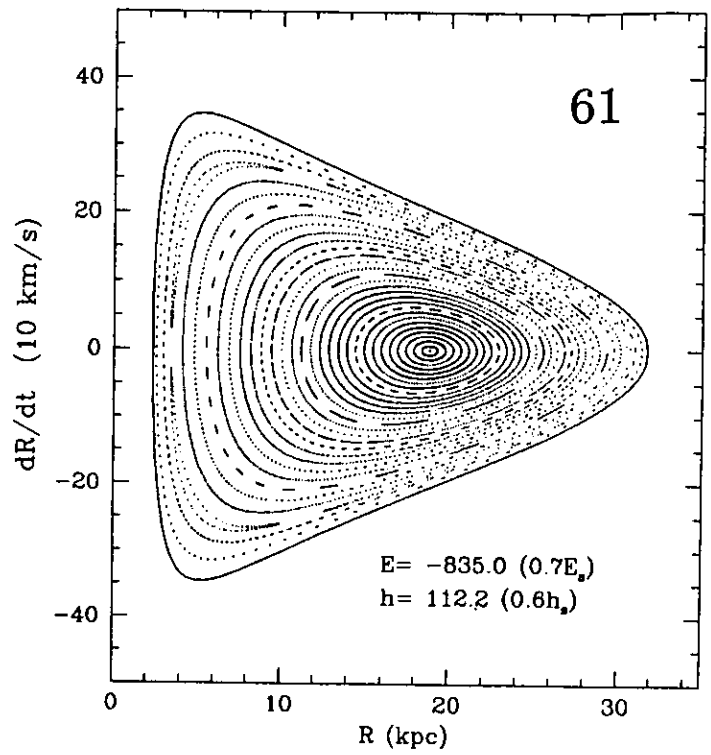
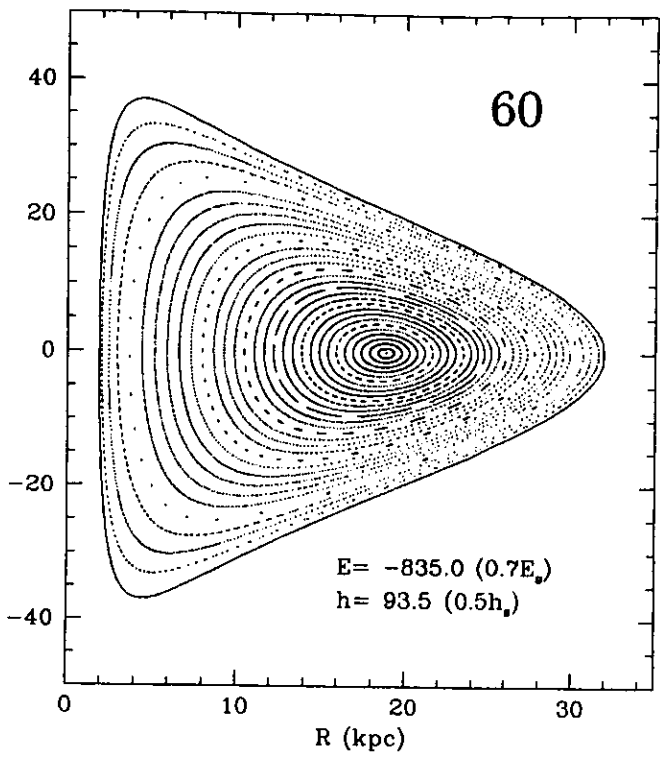




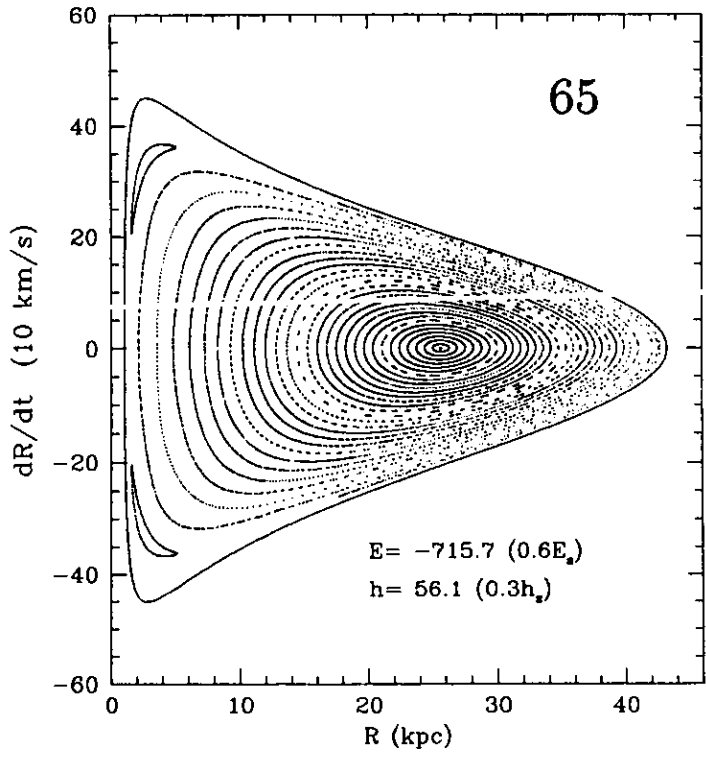
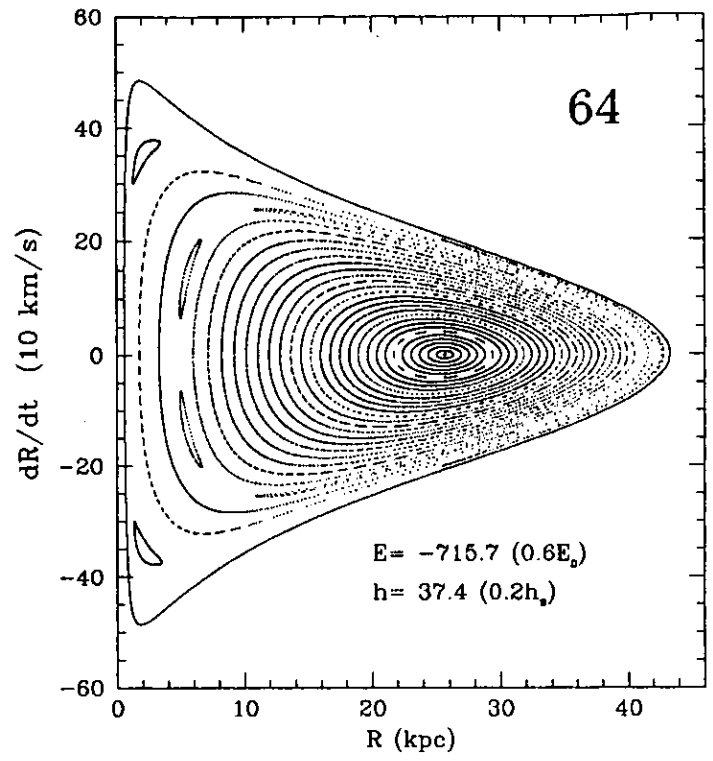
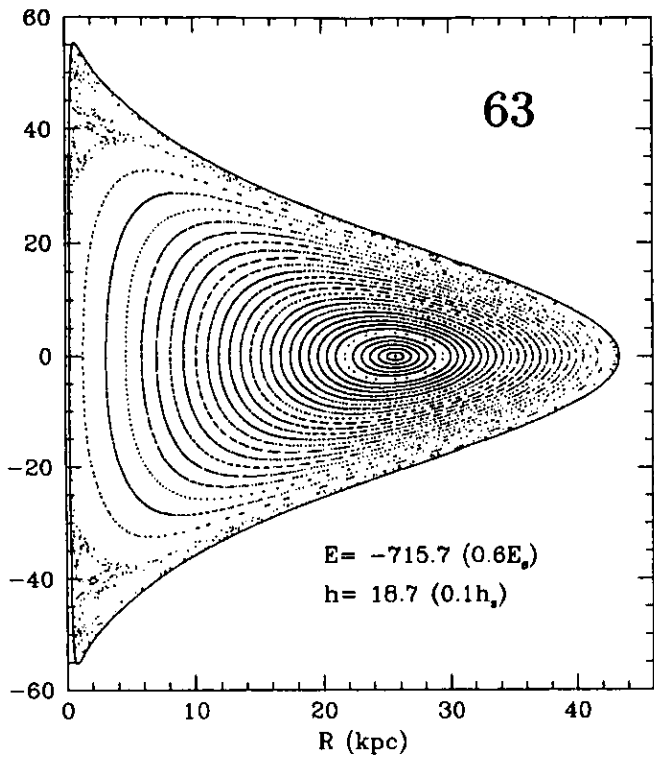


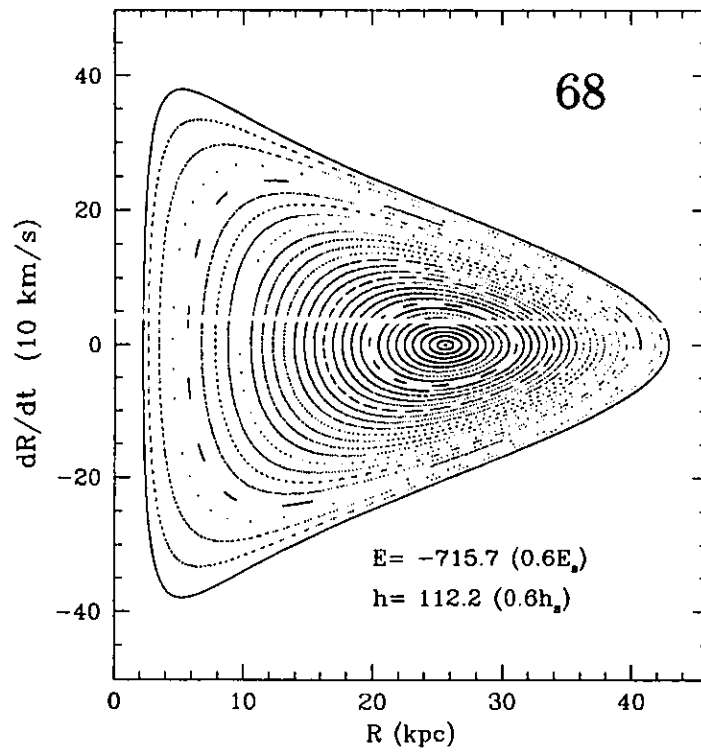
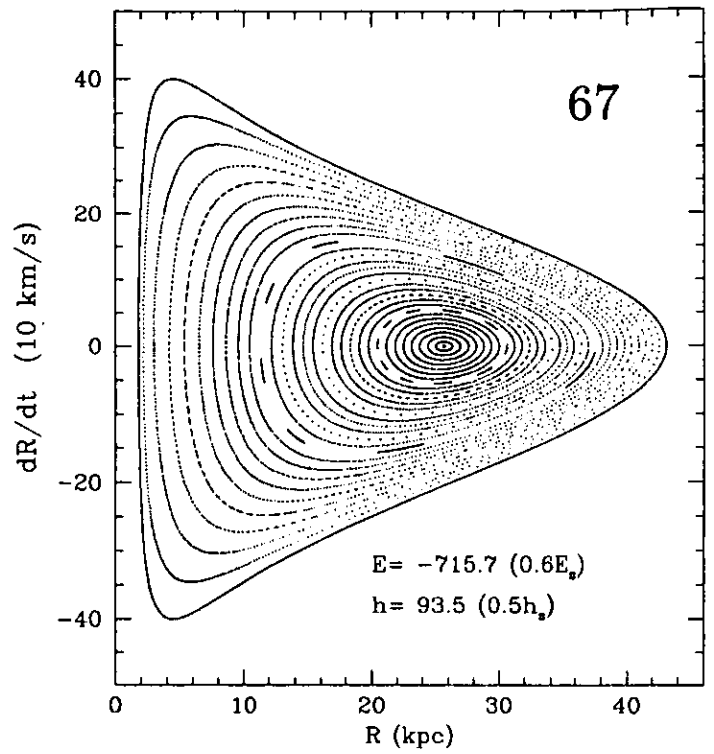
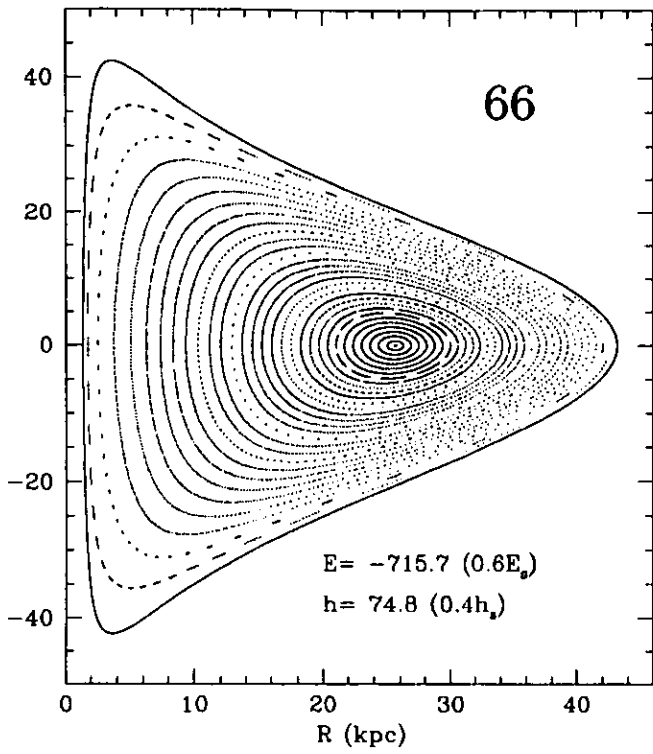


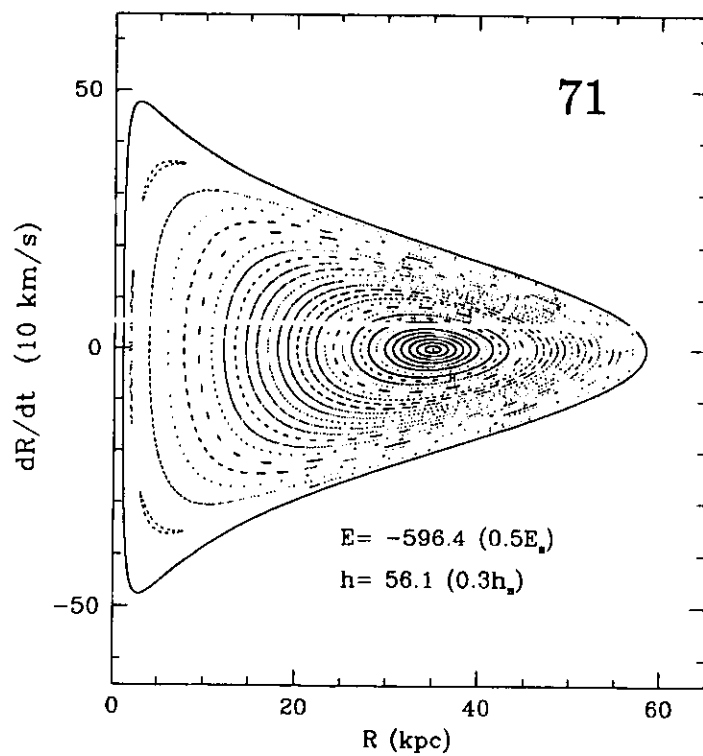
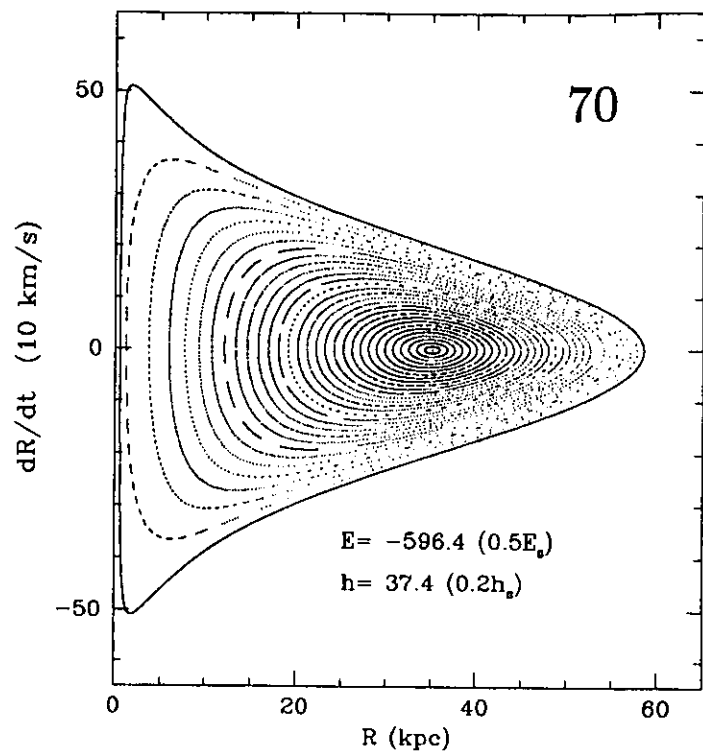
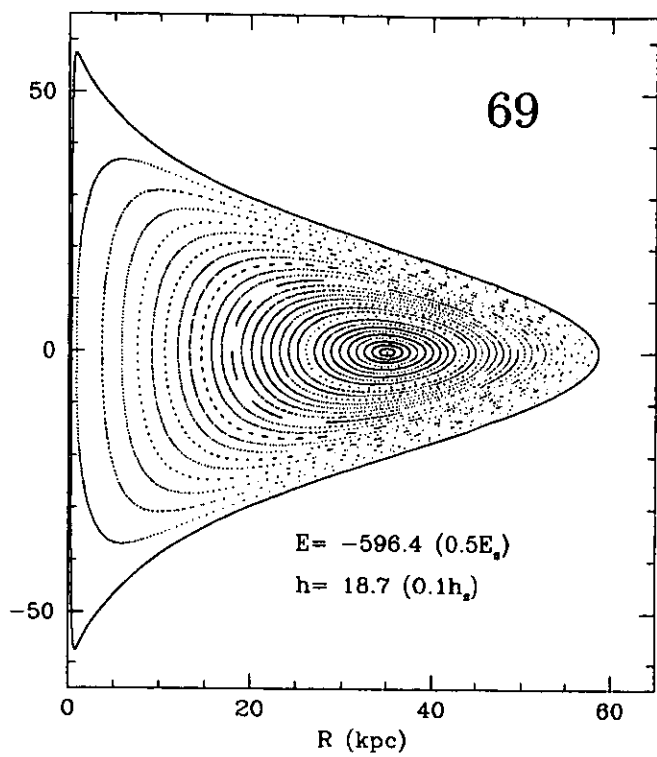


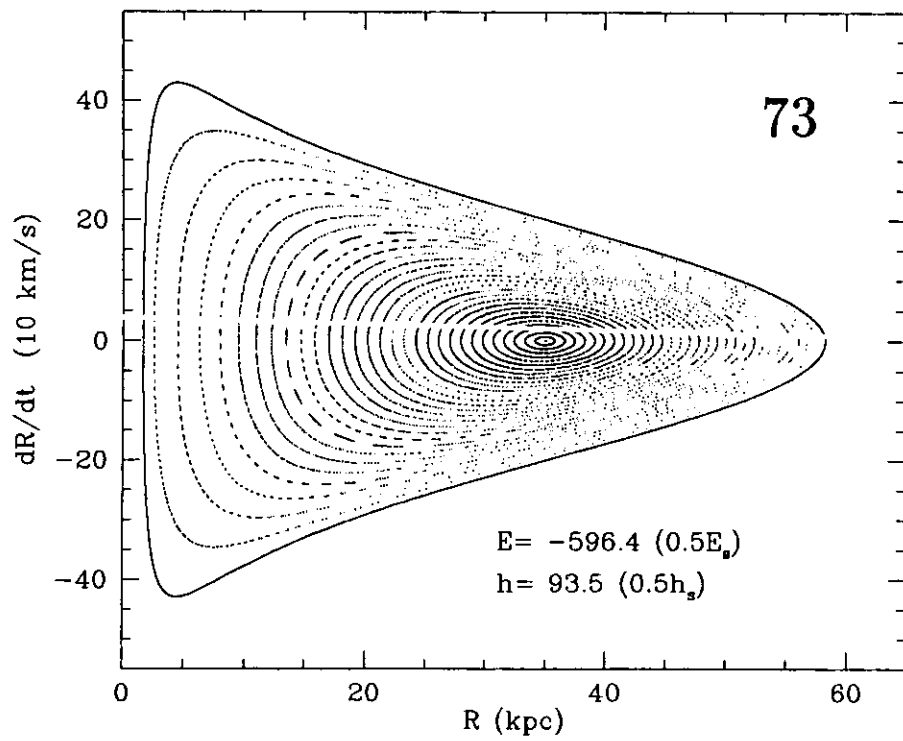
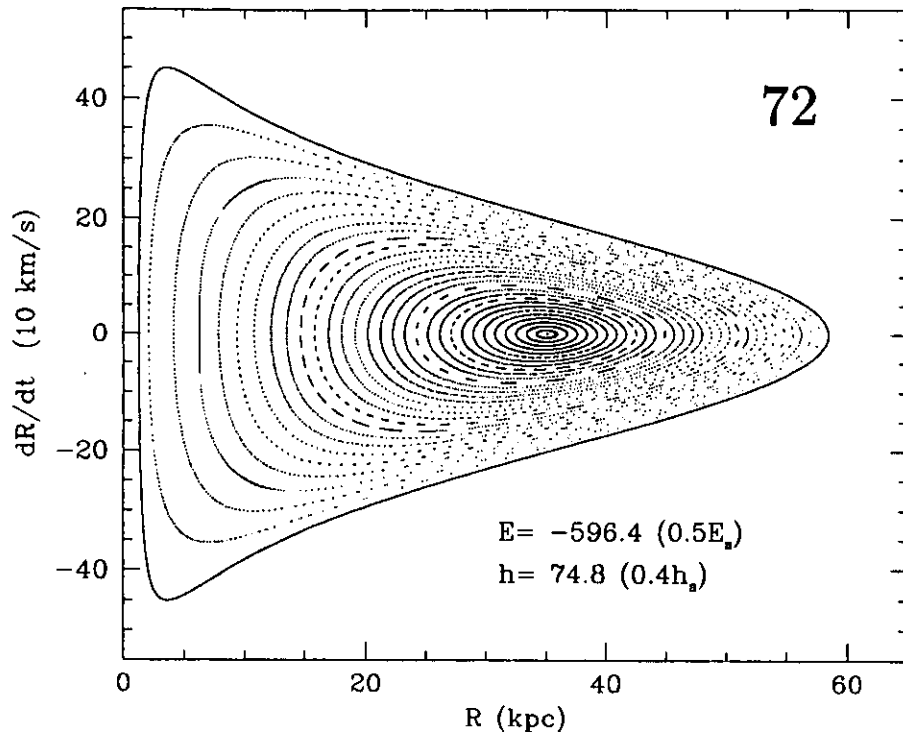


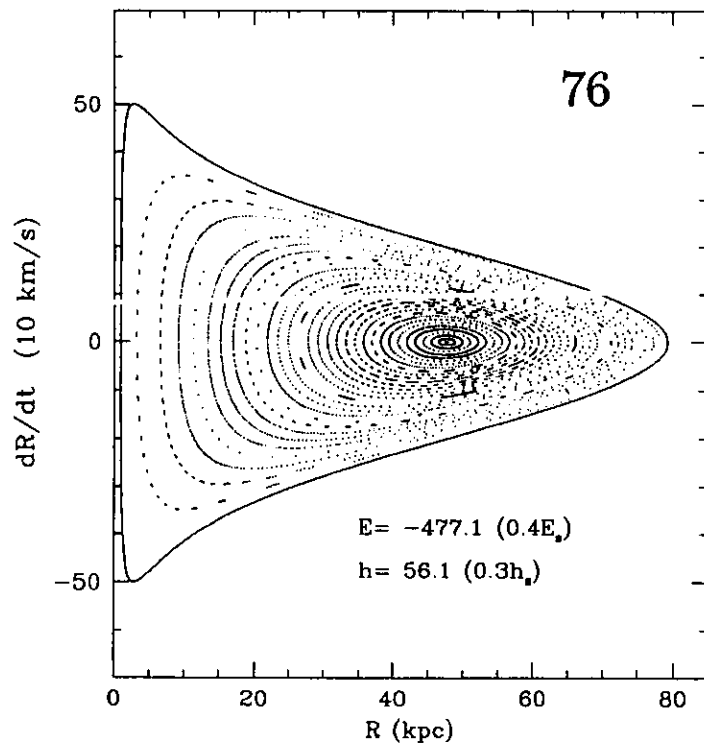
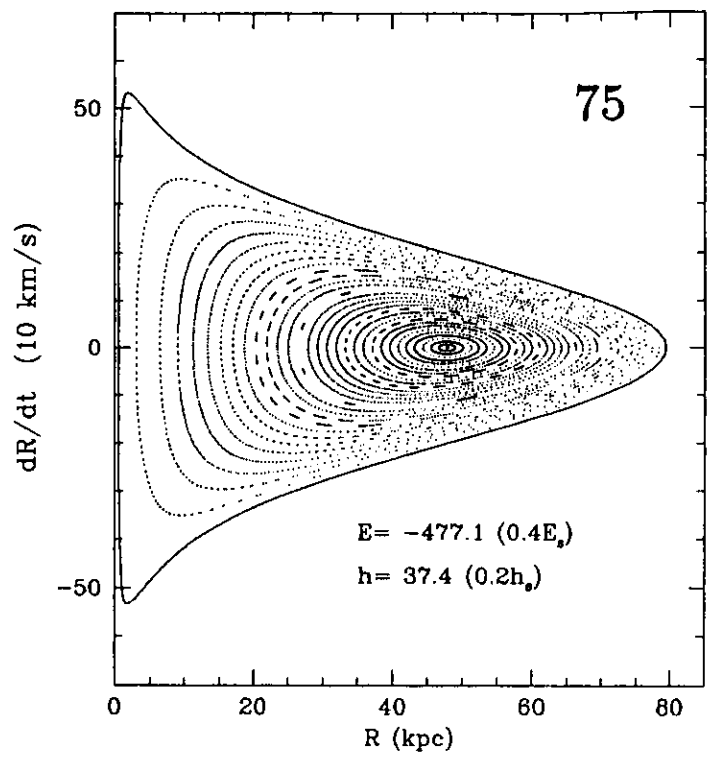
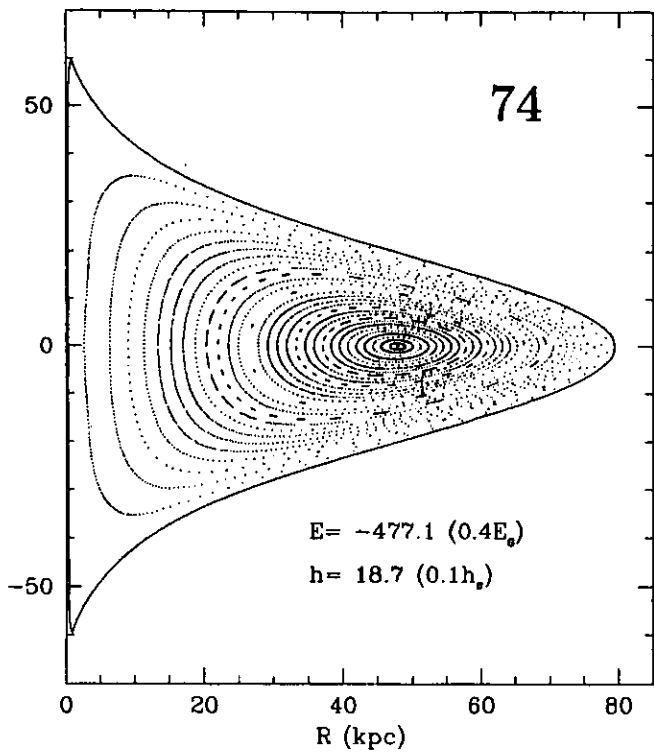




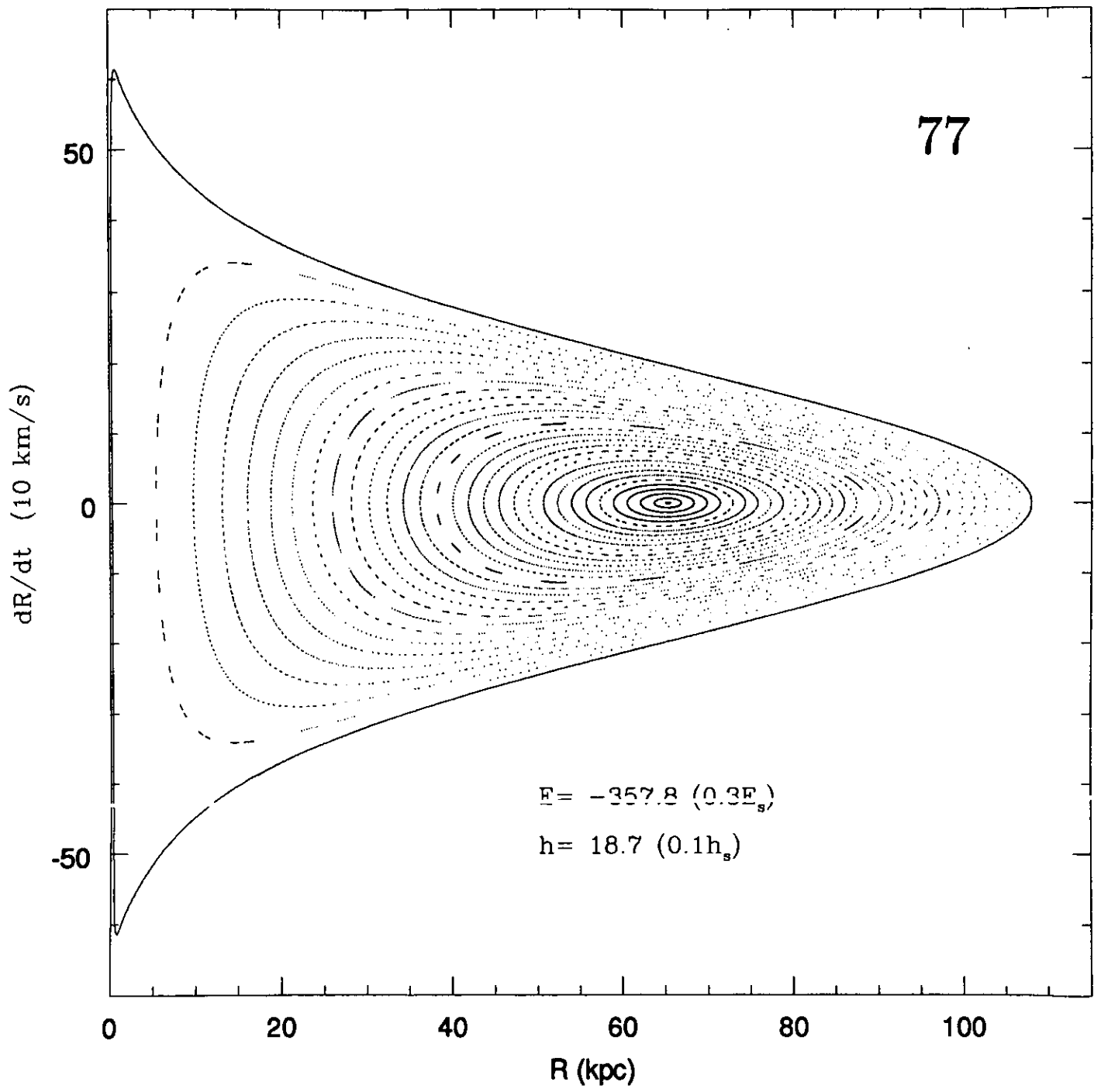


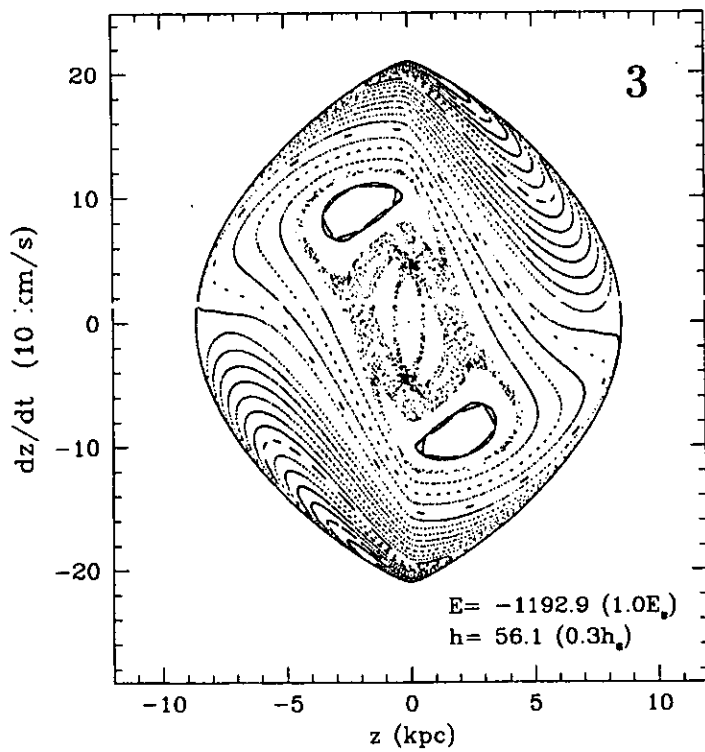
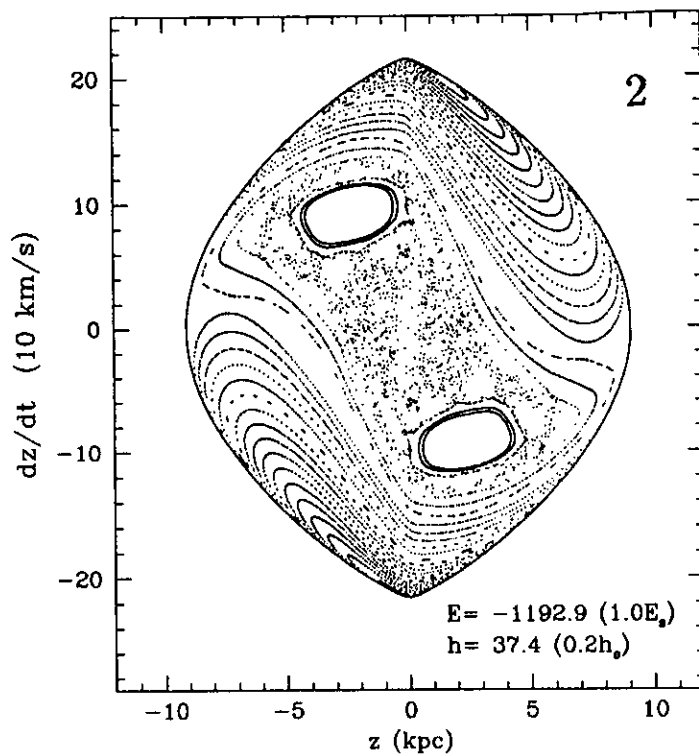
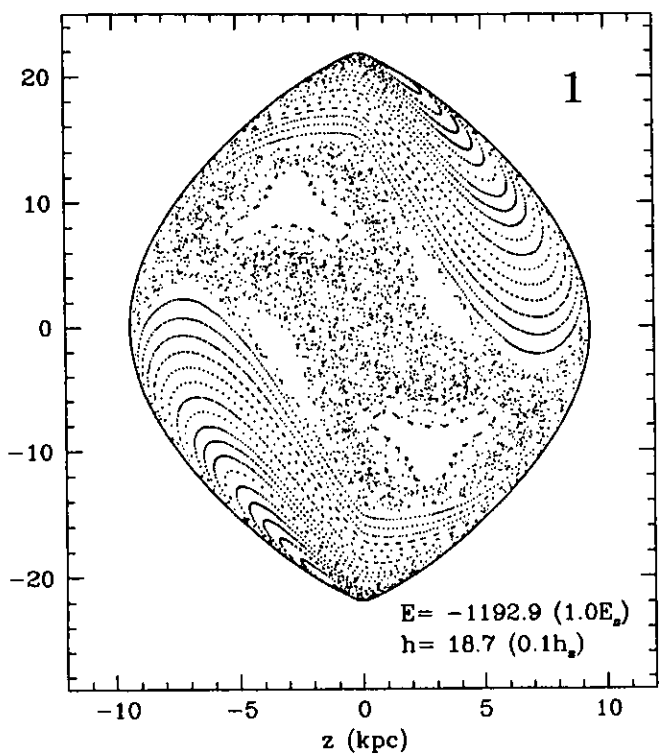


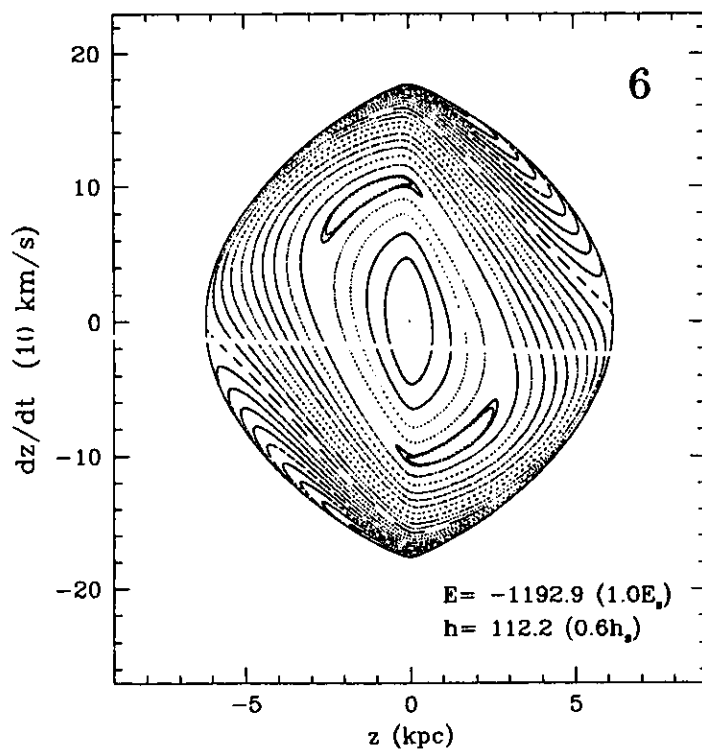
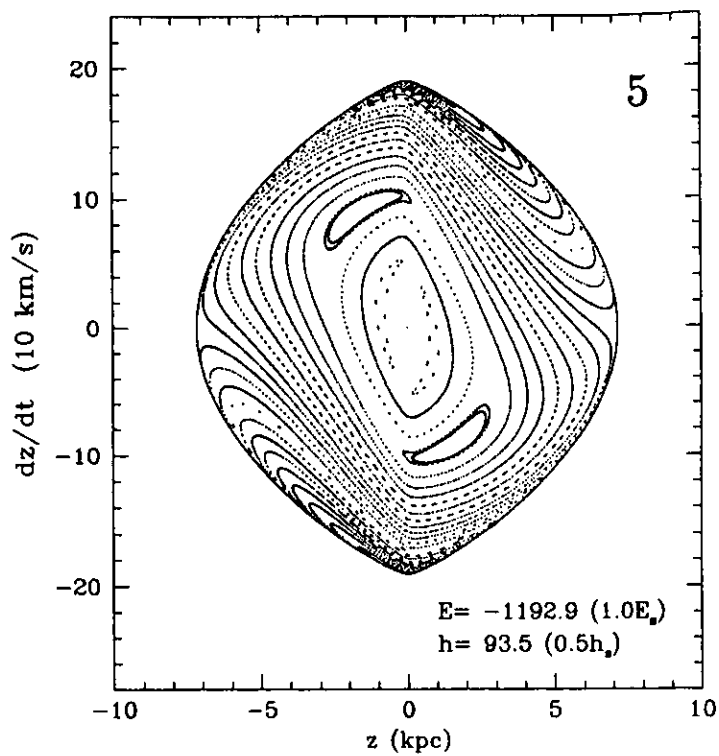
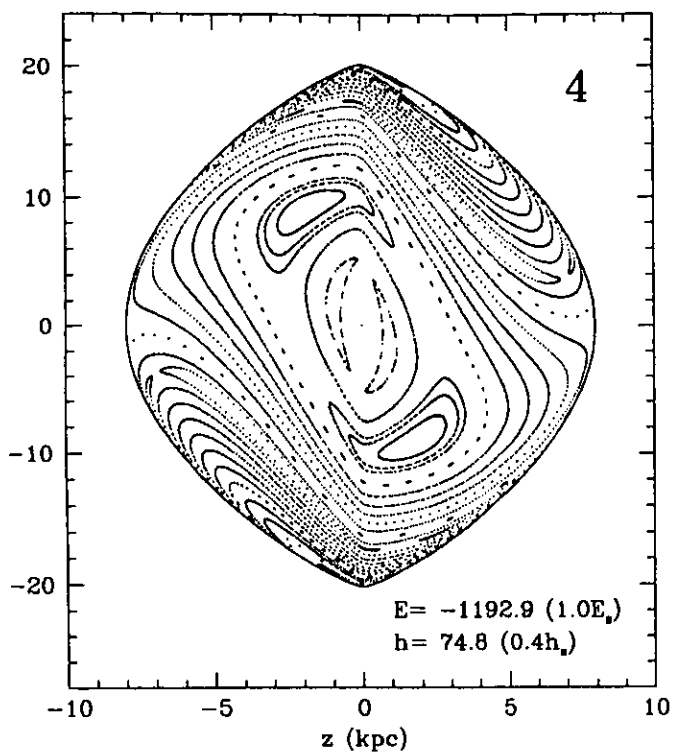




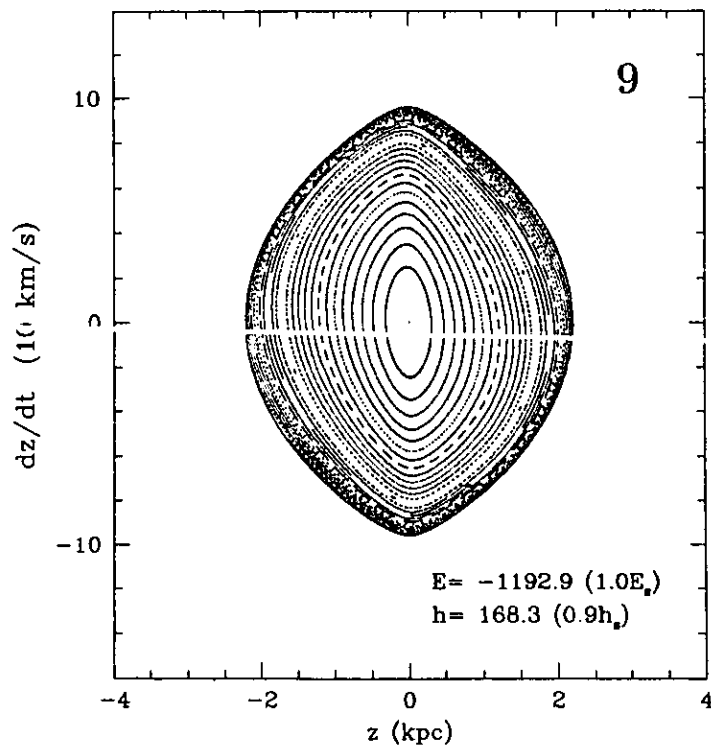
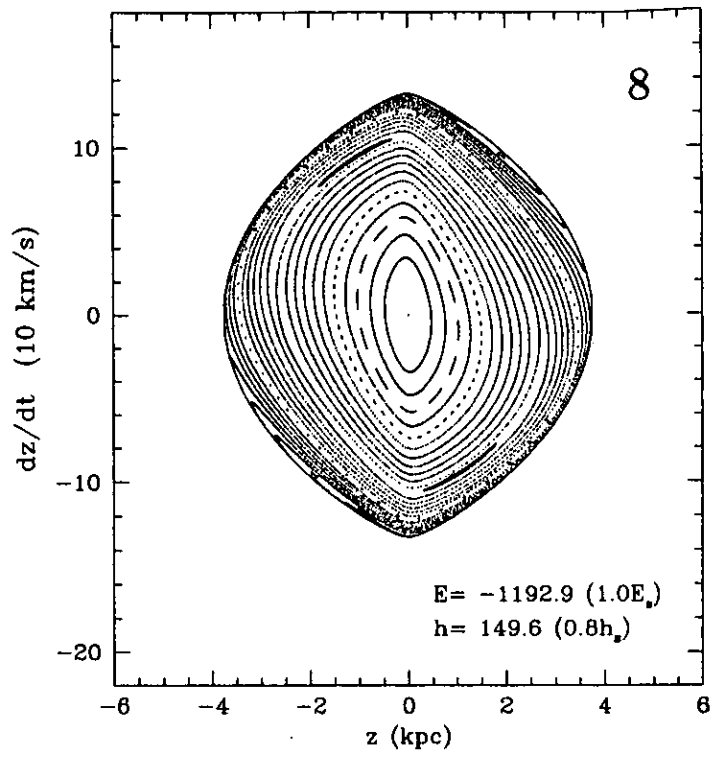
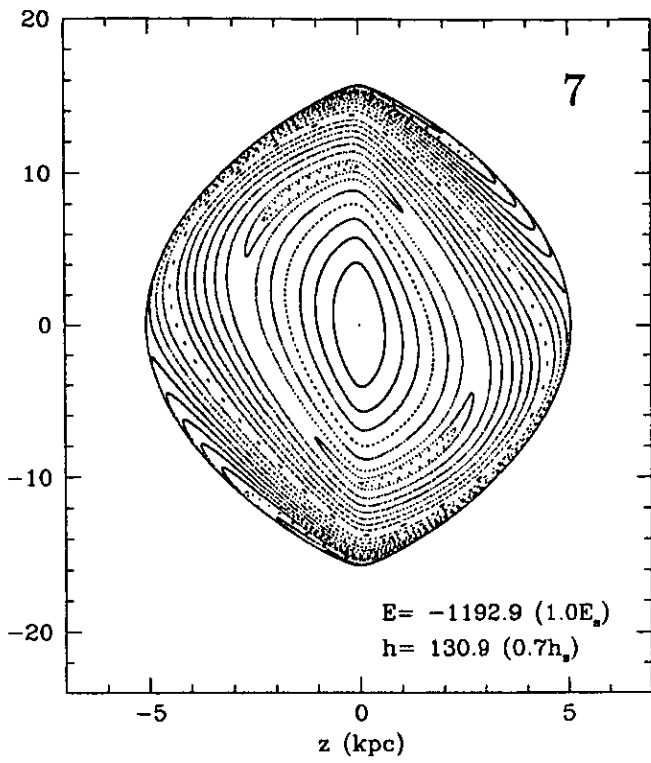
77

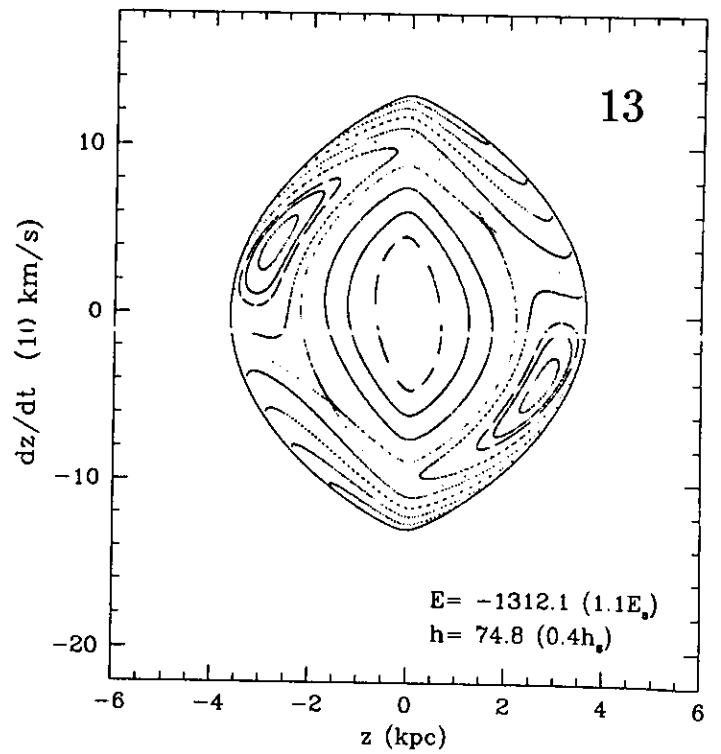
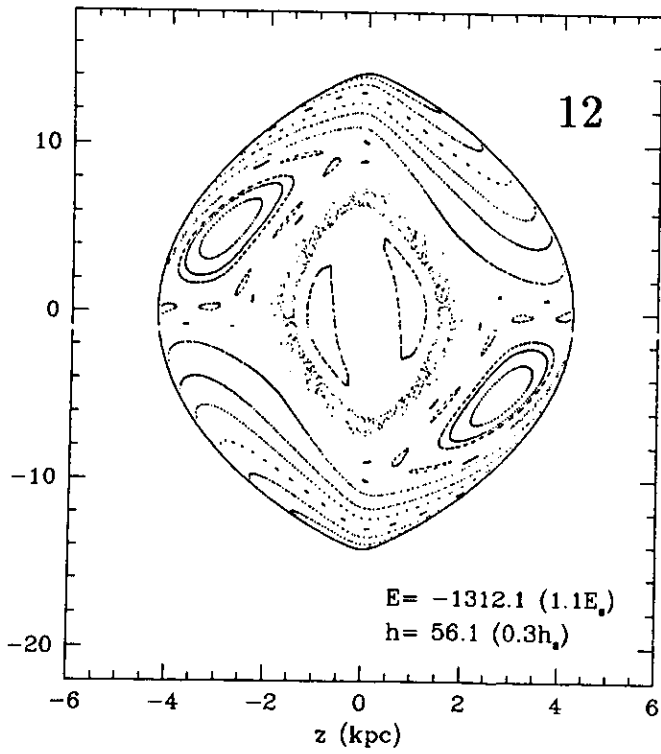
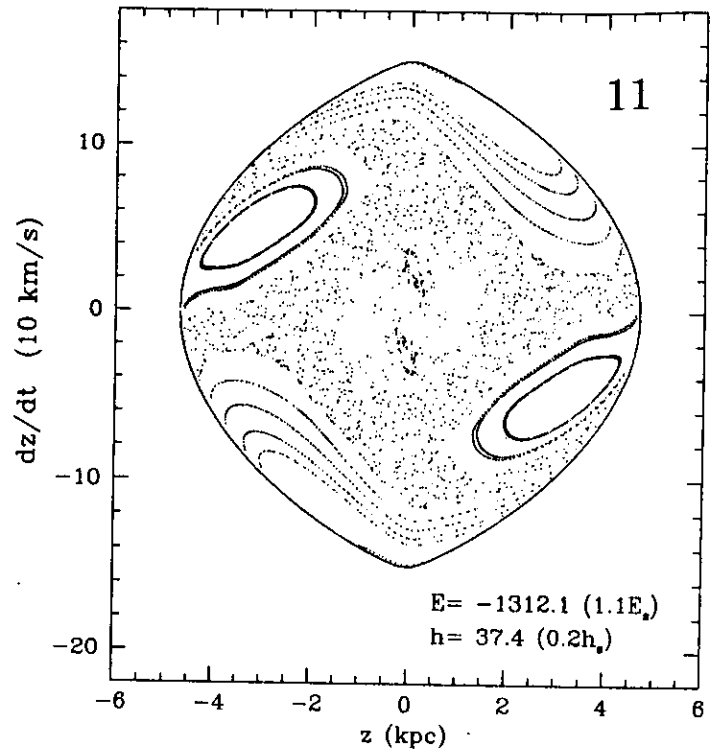
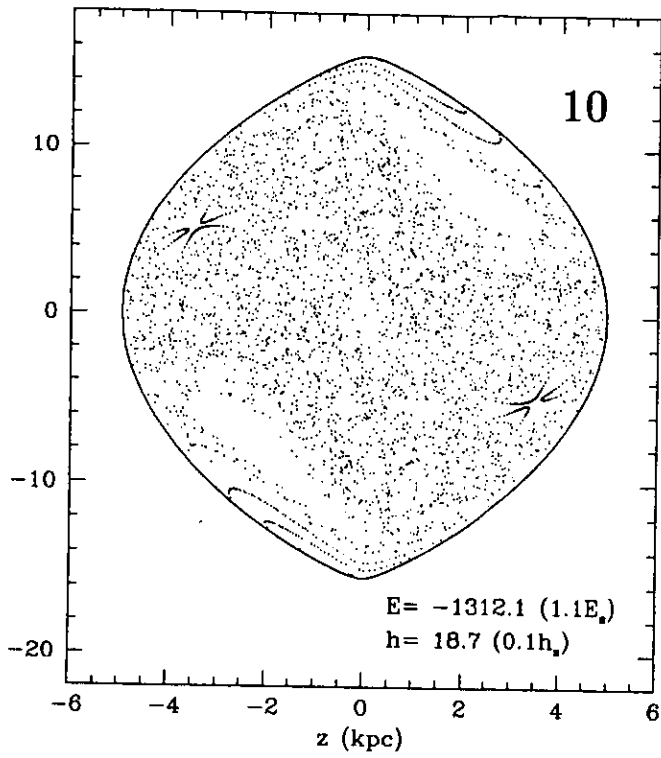


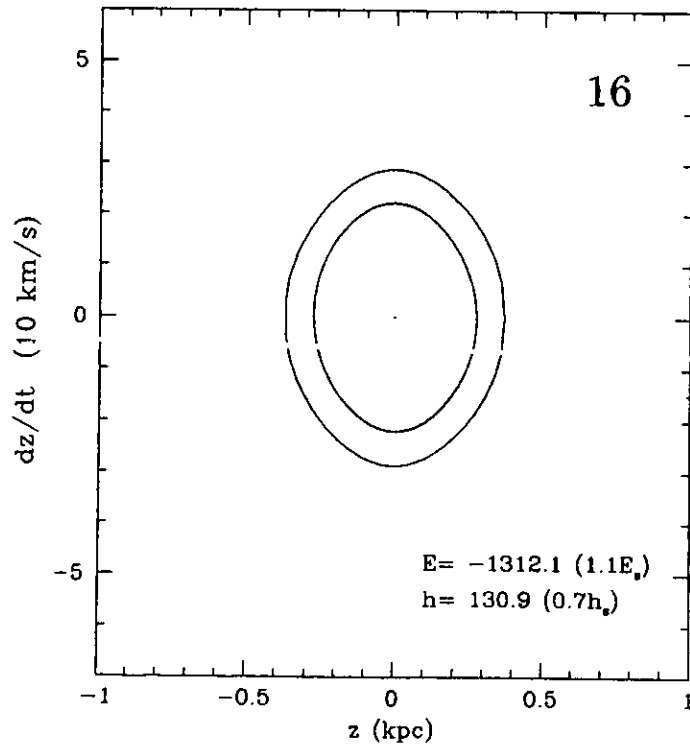
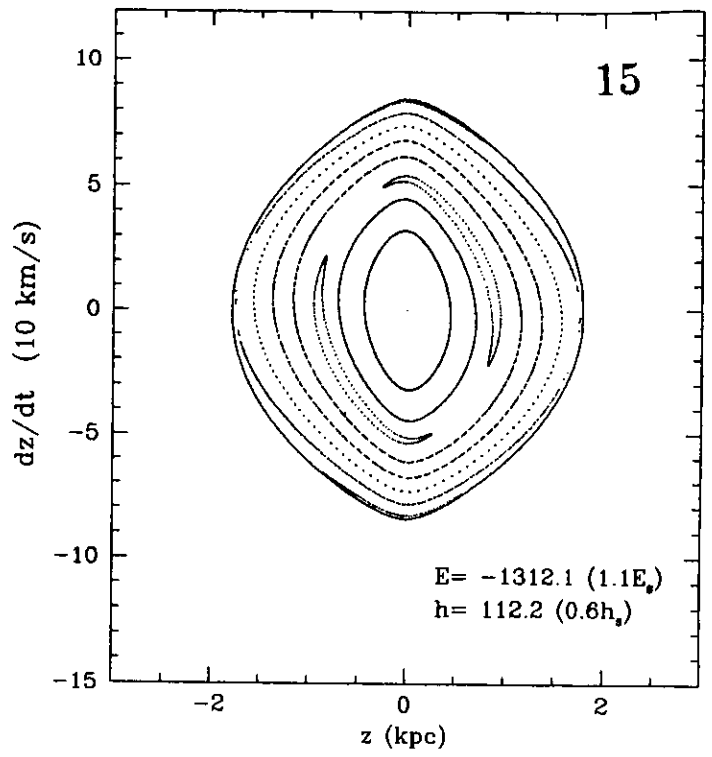
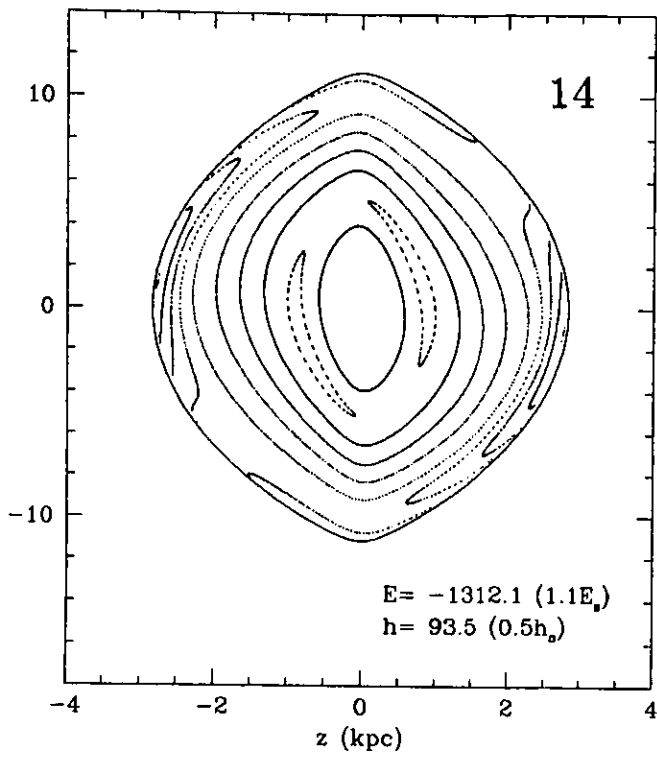












La no integrabilidad del sistema, la no linealidad de las ecuaciones y una dinámica acotada son 3 condiciones fundamentales para la aparición del caos.

La teoría de sistemas dinámicos establece básicamente 2 tipos de caos determinista :

- a) Caos hamiltoniano y
- b) Caos disipativo.

En nuestro estudio, hemos considerado a la Vía Láctea como un sistema dinámico no disipativo; entonces es el **caos hamiltoniano** el que se hace patente en nuestras familias de superficies de sección. Desde los trabajos pioneros en la exploración del potencial galáctico en forma teórica (Hénon y Heiles, 1964) y siguiendo modelos como el de Schmidt (1956) (Martinet y Hayli, 1971), se pudieron derivar algunas conclusiones preliminares sobre la aparición de regiones caóticas en las superficies de sección estudiadas.

Los resultados que nuestro mapeo arroja son congruentes con los trabajos previos debidos a otros autores, en el sentido de que **las regiones caóticas tienden a aparecer y a hacerse más extensas hacia valores bajos de momento angular ( $h$ ) y valores altos de energía ( $E$ )**. Este hecho queda claramente confirmado con la serie de familias de superficies de sección. Sin embargo, con base en los resultados obtenidos en esta tesis, podemos afirmar que en general dichas regiones caóticas **se hacen presentes para cualquier valor dentro del amplio intervalo de energías analizado en este trabajo, siempre y cuando se tomen valores suficientemente pequeños del momento angular**. De esta manera, el momento angular parece ser la variable que define la extensión y el detalle de las regiones de caos orbital para una energía dada. Como es sabido desde los trabajos de Oort (1927, 1928), las estrellas de alta velocidad son objetos que se caracterizan por tener precisamente bajos momentos angulares, es decir, por tener órbitas sumamente excéntricas, casi radiales. Con órbitas tan excéntricas, estos objetos llegan a acercarse notablemente al centro galáctico, el cual con su distribución esférica de masa provoca un proceso de “dispersión” que, a gran escala, genera una órbita caótica. Así, las órbitas de dichas estrellas están representadas en aquellas de nuestras superficies de sección donde  $E$  es alta y  $h$  es baja.

Como puede percibirse en todo el conjunto de superficies de sección aquí presentado, los momentos angulares bajos tienen **siempre** asociada una **estructura mixta**; esto es, regiones donde el caos y la regularidad coexisten. Dentro de tal estructura, el espacio dominado por el caos es llamado comúnmente **mar caótico**. La estructura mixta contiene una serie de detalles morfológicos que evolucionan conforme cambian tanto  $E$  como  $h$ . En todo este análisis, el mínimo valor arbitrario para el momento angular que hemos considerado es el de  $h = 0.1 h_s = 187 \text{ km kpc/s}$ , pues valores más pequeños que éste nos llevan a órbitas sumamente radiales que, sólo para casos muy particulares, son interesantes para los objetivos de esta tesis.

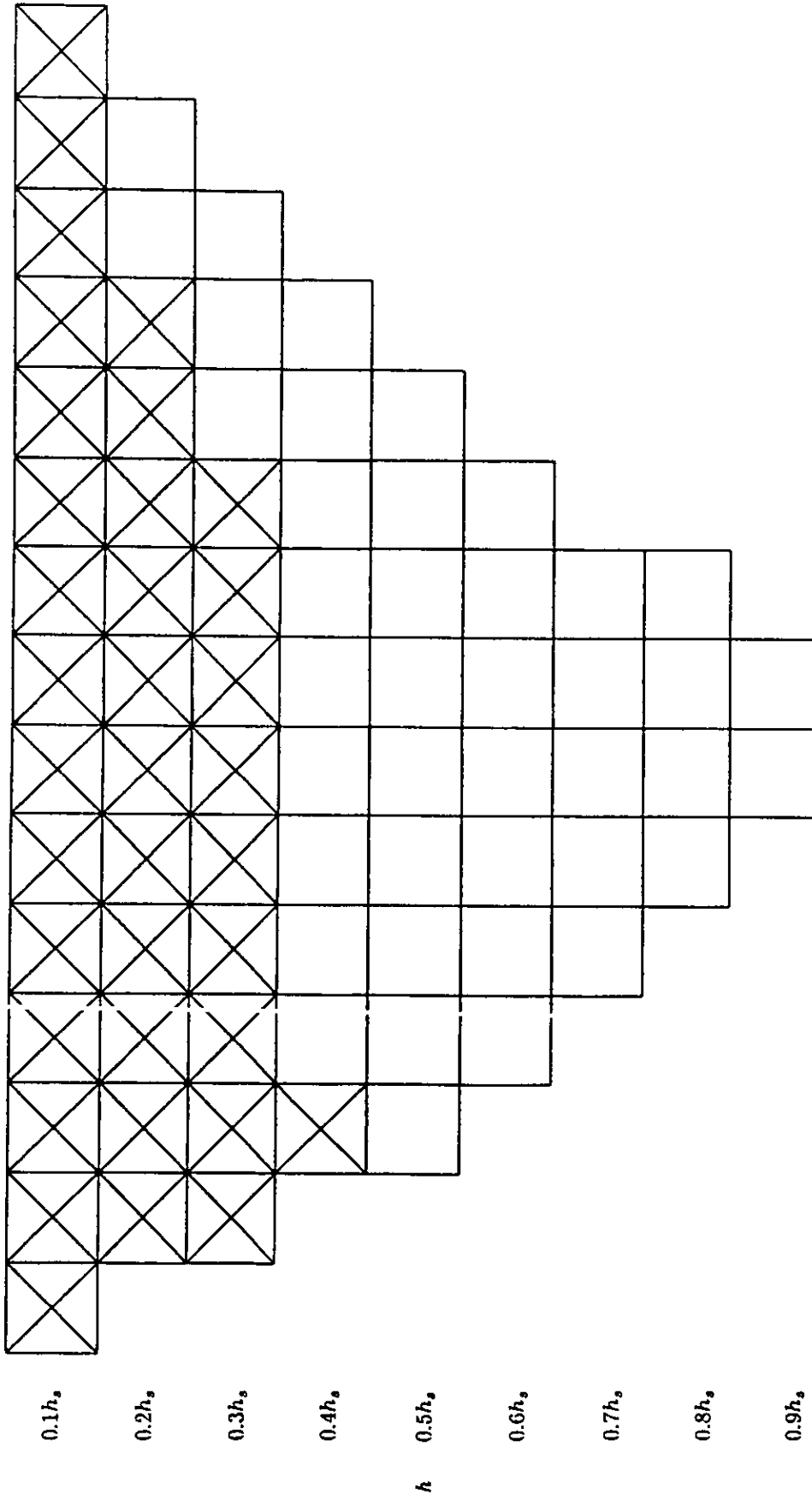
El panorama más general y claro de nuestros resultados, enfocados en este caso a la búsqueda y acotación de las regiones de caos orbital en la Galaxia, se muestra en el **diagrama 2 de Lindblad (fig. 5)**. En este diagrama hemos señalado el subconjunto de todas las familias de superficies de sección en las que, en menor ó mayor grado, **existe evidencia de comportamiento orbital caótico**. Son incluidas en este subconjunto todas aquellas familias en las que, de manera directa ó por amplificaciones especiales, el caos está claramente presente como una típica distribución azarosa de puntos. Como podrá notarse, la región del mapeo en la que el caos es fácilmente identificable es la parte superior del diagrama de Lindblad, sitio donde encontramos los valores más bajos del momento angular. A continuación, se describen las conclusiones más importantes inferidas a partir de estos resultados preliminares :

a) Se han encontrado regiones caóticas para **todos** los valores de energía considerados en esta muestra (desde  $1.7 E_s$  hasta  $0.3 E_s$ ), los que nos han permitido mapear el intervalo  $0.5 \text{ kpc} < R < 100 \text{ kpc}$ .

b) A menor energía constante, menor el máximo valor de momento angular permitido para producir caos (en las menores energías aquí presentadas, el caos únicamente aparece en las familias de superficies de sección con el más bajo momento angular considerado,  $0.1 h_s$ ).

$E$

$0.3E, 0.4E, 0.5E, 0.6E, 0.7E, 0.8E, 0.9E, 1.0E, 1.1E, 1.2E, 1.3E, 1.4E, 1.5E, 1.6E, 1.7E,$



**FIGURA 5**  
Diagrama 2 de Lindblad  
**SUPERFICIES DE SECCIÓN CON EVIDENCIA DE COMPORTAMIENTO ORBITAL CAÓTICO**

c) A mayor momento angular constante, mayor la energía mínima necesaria para producir caos (en  $0.4 h_s$ , una energía tan alta como  $0.5 E_s$ , es necesaria para empezar a generar caos).

d) Del total de 77 familias de superficies de sección analizadas, con muy buena aproximación encontramos que 36 de ellas muestran evidencia de caos orbital, el cual desaparece alrededor de  $0.4 h_s$ , **valor que marca una cota superior en nuestra muestra.**

e) En forma general, dentro de las superficies de sección un mar caótico envuelve al conjunto de órbitas regulares centrales; este “cinturón envolvente de caos” presenta un grosor muy uniforme cuando se consideran bajas energías y bajos momentos angulares. El cinturón se adelgaza, hasta desaparecer, cuando se aumenta el momento angular manteniendo la energía constante. Si se mantiene el momento angular constante y se aumenta la energía, las regiones de caos tienden a concentrarse y a hacerse más notorias en los 2 “vértices” (superior e inferior) de la curva de cero velocidad.

### III.5.4 Análisis de regiones y detalles de particular interés

En esta sección hacemos un análisis general de ciertas regiones, así como de una serie de detalles presentes en nuestras familias de superficies de sección que, por sus características peculiares ó por su repercusión directa en las observaciones de objetos galácticos, representan un interés particular a la astronomía.

La fundamentación teórica para la compleja serie de estructuras presentes en el mapeo viene dada por el famoso **teorema KAM**, debido a Kolmogorov (1954), Arnold (1963) y Moser (1962).

Sea un sistema con  $n$  grados de libertad. El espacio fase correspondiente tendrá por lo tanto dimensión igual a  $2n$ . Si existe una cantidad conservada como  $E$ , entonces el subespacio de energía constante tendrá dimensión  $2n - 1$ . Si trabajáramos con un sistema de 2 grados de libertad, entonces  $n = 2, 2n = 4$  y  $2n - 1 = 3$ ; además, la dimensión del toroide formado por las 2 variables de ángulo (p.ej.  $\theta_1$  y  $\theta_2$ ), correspondientes a los 2

grados de libertad, sería también 2. Este toroide bidimensional inmerso en un subespacio de 3 dimensiones confina entonces a todas las órbitas (toroides) con una  $E$  y una  $h$  dadas. Hay sin embargo 2 tipos distintos de órbitas en el toroide :

- a) Aquellas cuyo cociente de frecuencias de oscilación  $f_1$  y  $f_2$  asociadas a las 2 variables de ángulo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  es un número **racional**, i.e., órbitas donde  $f_1/f_2 = \text{racional}$  .
- b) Aquellas donde  $f_1/f_2 = \text{irracional}$ .

El primer tipo corresponde a órbitas periódicas que se cierran sobre sí mismas después de un tiempo finito; el segundo tipo define a las llamadas órbitas cuasiperiódicas que nunca se cierran y llenan densamente su espacio.

En forma general, una órbita será periódica si se cumple que

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 = 0 ,$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son números enteros.

Dicho de una manera muy intuitiva, el teorema KAM establece que **ante la menor perturbación de un sistema dinámico, los toroides periódicos en el espacio fase son los más inestables y los primeros en desaparecer, dando origen a puntos estables (elípticos) e inestables (hiperbólicos), los cuales siempre quedan confinados entre 2 toroides cuasiperiódicos. Es alrededor de los puntos inestables donde nace el caos, por lo que toda región caótica siempre está limitada por 2 toroides cuasiperiódicos, los últimos en destruirse ante perturbaciones cada vez mayores.**

Cuando contamos con un sistema de 3 grados de libertad como el que nos ocupa en esta tesis,  $n = 3$ ,  $2n = 6$  y  $2n - 1 = 5$ . Ahora tendremos 3 variables de ángulo asociadas ( $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ ) y sus respectivas frecuencias de oscilación  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ . La condición general para la periodicidad de órbitas será ahora

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 + n_3 f_3 = 0 .$$



De acuerdo al teorema KAM, habrá destrucción de toroides periódicos ante perturbaciones crecientes, las cuales darán nacimiento al caos alrededor de puntos inestables. Sin embargo, una diferencia cualitativa importante surge al pasar de 2 a 3 grados de libertad. Dado que con  $n = 2$  teníamos un toroide bidimensional inmerso en un subespacio de 3 dimensiones, el caos quedaba a su vez limitado entre 2 toroides cuasiperiódicos, separando así al espacio fase en 2 regiones, una interna y otra externa a la zona de caos. Con  $n = 3$  tenemos un toroide tridimensional inmerso en un subespacio de 5 dimensiones. Las regiones de caos estarán confinadas también entre 2 toroides cuasiperiódicos, pero ahora no separarán al espacio fase en 2, sino en múltiples regiones. El caos puede difundirse a través de todo el espacio fase. Esta propiedad de los sistemas con  $n \geq 3$  es la **difusión de Arnold**, fenómeno implícito en los resultados de este trabajo.

Iniciemos el análisis del mapeo con la familia de superficies de sección 1 (SS1), correspondiente a una energía igual a  $1.7 E_s$ , que es la mínima considerada en esta tesis (recuérdese que  $E_s < 0$ ). Como es de notar, esta primera SS muestra tres regiones internas muy bien diferenciadas, envueltas por una ya perceptible “banda de caos”, la cual se convertirá propiamente en un mar caótico para valores más altos de la energía. La región más interna de la SS1 está dominada por todo un conjunto de órbitas claramente cuasiperiódicas. Las **resonancias ó puntos elípticos**, a manera de dos lóbulos arriba y abajo de la región central, despliegan una interesante serie de cadenas de islas asociadas a **órbitas periódicas estables**. El número de islas en cada cadena de la SS1 va disminuyendo gradualmente hacia la región central de cada lóbulo. Cada isla en una cadena dada envuelve a un punto fijo, de tal forma que los  $n$  puntos fijos de la cadena representan una órbita  $n$ -periódica. Las  $n$  islas de la cadena forman órbitas de tubo en la clasificación de Ollongren (1965).

Nótese cómo el caos empieza a producirse justo en la vecindad de los **puntos hiperbólicos**  $(0.5, 0.0)$  y  $(1.8, 0.0)$  de SS1, resultado del rompimiento de un toroide periódico en el espacio fase. Estos puntos hiperbólicos están asociados a **órbitas periódicas inestables**. Los puntos elípticos estables en la SS1 que también surgieron de tal rompimiento son, desde luego, las resonancias señaladas (lóbulos).

La evolución morfológica de los detalles descritos anteriormente, puede verse claramente siguiendo la secuencia de todas las SS que tienen el mismo momento angular que la SS1 ( $0.1 h_s$ ) a energías crecientes. En la SS2 puede percibirse, por ejemplo, que aunque la estructura orbital básica de SS1 permanece, ya el mar caótico es mucho más notorio, consecuencia de una mayor destrucción de toroides periódicos en el espacio fase; además, las resonancias y las cadenas de islas ocupan poco a poco una menor área dentro de la SS. Pueden distinguirse ya algunas islas fuera de tales lóbulos, inmersas en el mar caótico, que corresponden a órbitas periódicas estables.

En la SS4, las resonancias prácticamente parecen sólo contener una cadena de cuatro islas, mientras que en los límites de las órbitas centrales periódicas y el caos, empieza a aparecer estructura (una serie de siete islas internas). Como podrá comprobarse para valores más altos de la energía, esas nuevas islas se alejarán de la región central de órbitas periódicas para internarse en el caos, creando zonas de suficiente regularidad orbital dentro del caos mismo. Este fenómeno es ya bien notorio en la SS22, donde tres islas (regiones claras) se han separado de las órbitas regulares centrales. En la SS30, correspondiente a la energía del Sol, las mismas tres islas permanecen, por lo que hemos hecho en una de ellas el **ACERCAMIENTO 2** (fig. 7), centrado en 1.4 kpc para mostrar su estructura interna y valiéndonos en esta ocasión de un conjunto más fino de condiciones iniciales para obtener mayor resolución morfológica: en vez de una partición normal para generar treinta condiciones iniciales, se utilizó una partición que genera ciento veinte, de las cuales se tomaron únicamente las condiciones iniciales correspondientes a las órbitas inmersas en la isla en cuestión.

Como es claro en el **ACERCAMIENTO 2**, nos encontramos con una compleja estructura en forma de “capullo” (**ESTRUCTURA 2**), consistente en una nueva cadena de islas rodeada totalmente por el mar caótico. Por estar inmediatamente rodeada por una perceptible línea cuasicontinua, tal cadena nos habla de una órbita periódica estable dentro de una zona con ausencia de periodicidad, es decir, caótica. Por otro lado, la gran región clara y alargada que aparece en el mismo **ACERCAMIENTO 2**, no es otra cosa que la región ocupada por la estructura detallada en el **ACERCAMIENTO 1** (fig. 6).

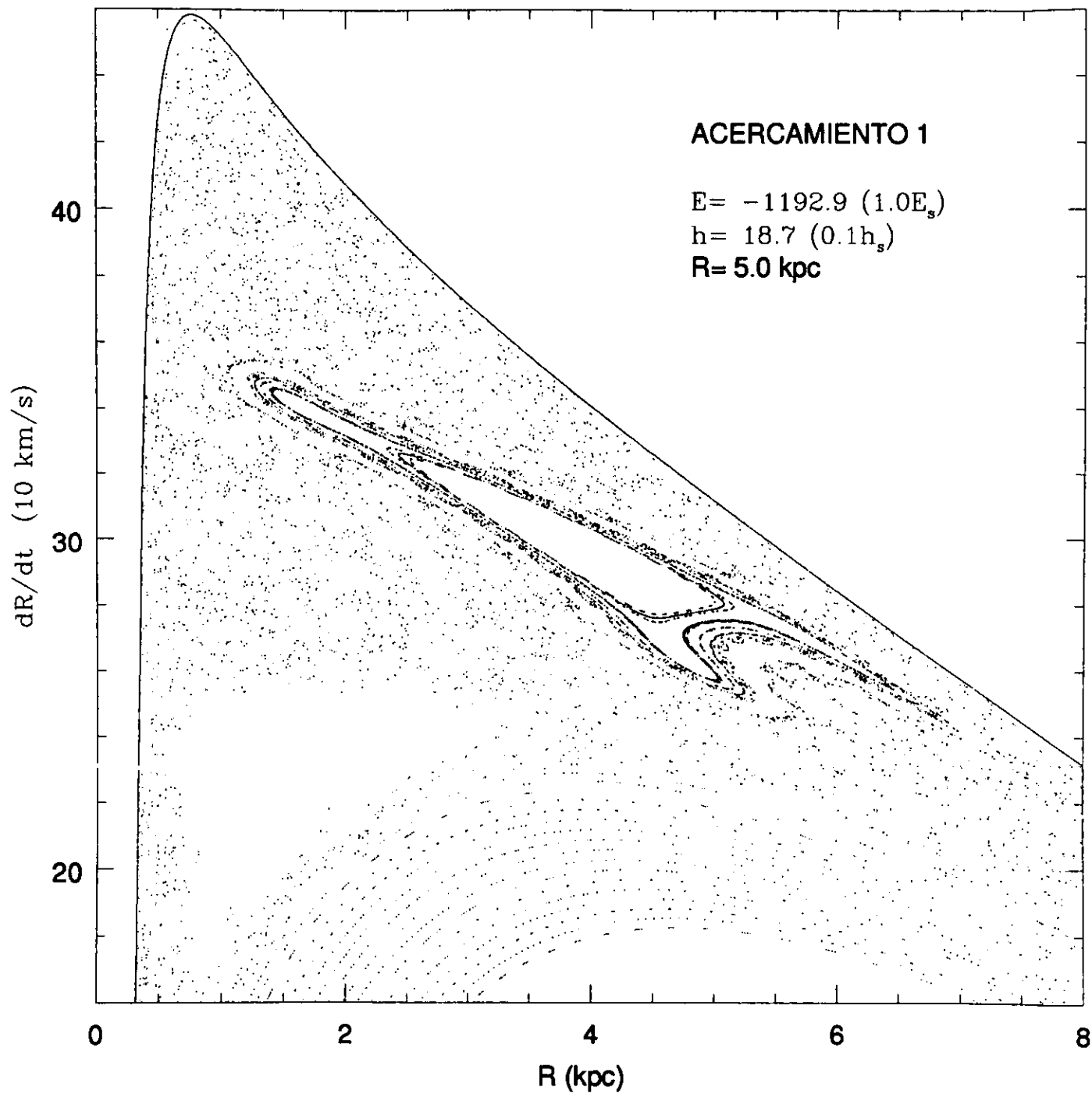
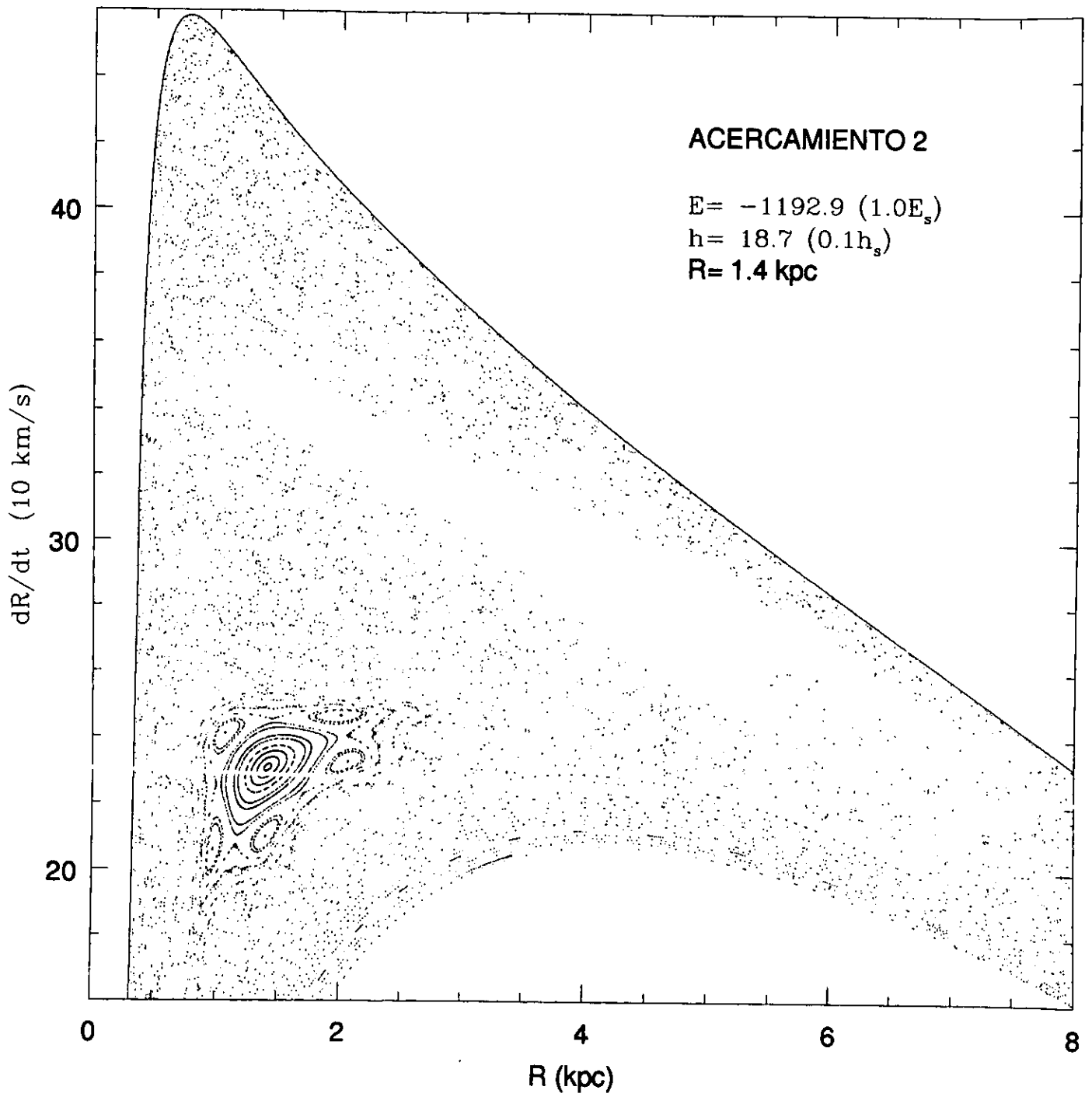
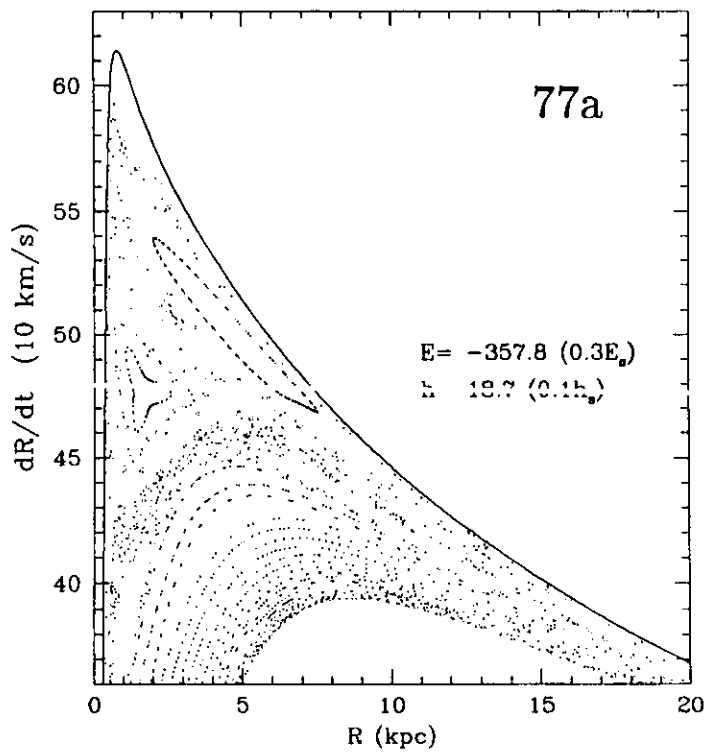
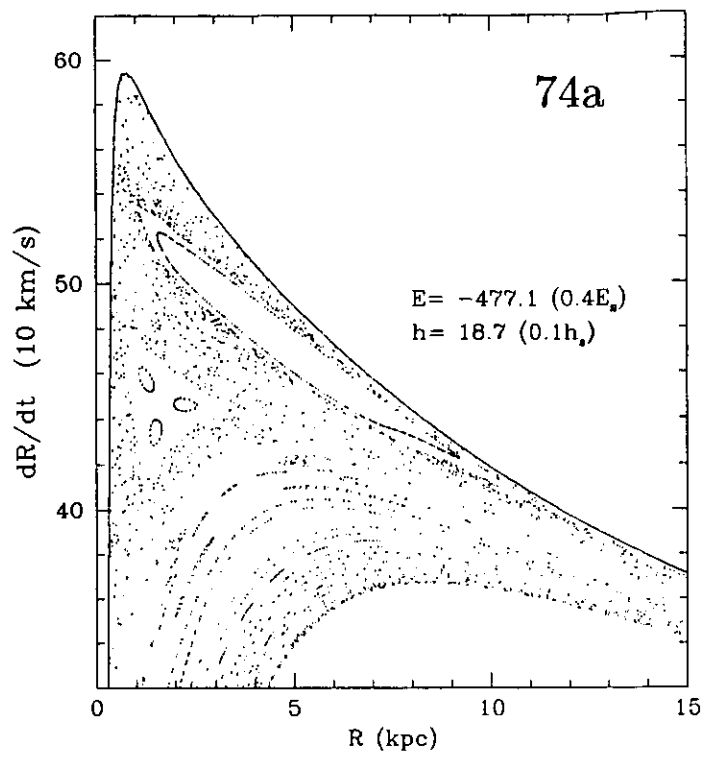
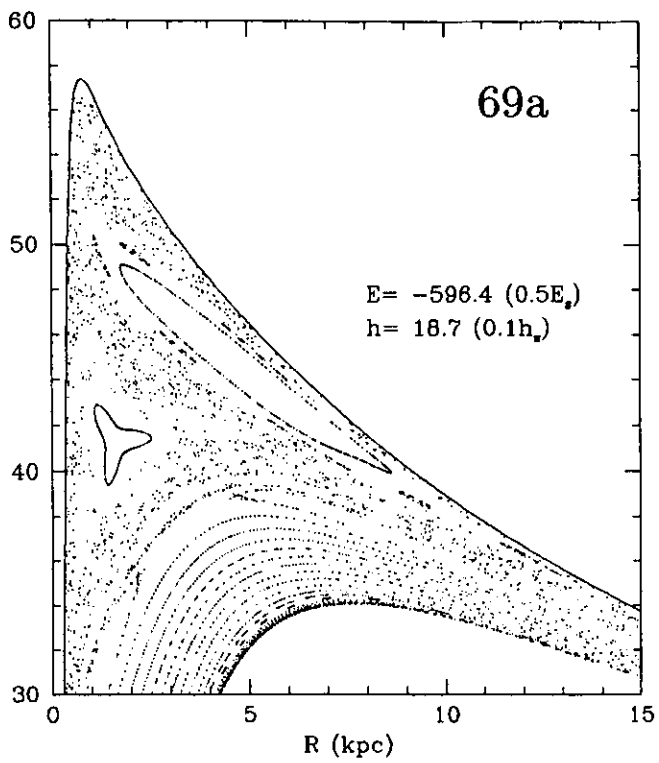


FIGURA 6



**FIGURA 7**



El **ACERCAMIENTO 1** está centrado en 5.0 kpc, lo cual da origen a una estructura de “daga” (**ESTRUCTURA 1**) en la superficie de sección. Es claramente notorio que, como en el **ACERCAMIENTO 2**, estas estructuras regulares dentro del mar caótico contienen órbitas regulares que pueden cortar al plano de la Galaxia en puntos incluso muy separados en  $R$ . Éstas son órbitas de tubo. Nótese la transformación de la “daga” conforme aumenta el momento angular  $h$ , iniciando en la SS30, hasta la desaparición de dicha estructura en la SS38.

La permanencia y evolución de la **ESTRUCTURA 1** y la **ESTRUCTURA 2** es un hecho comprobado dentro de nuestro mapeo. Ambas regiones de regularidad dentro del caos se hacen presentes de manera clara desde la SS20, para los más bajos valores de momento angular. Las mismas dos regiones aparecen y evolucionan en todas las siguientes superficies de sección con los mismos valores bajos de momento angular, extendiéndose hasta los casos más energéticos: SS69, SS74 y SS77. Para una mayor claridad en la visualización de la **ESTRUCTURA 1** y la **ESTRUCTURA 2**, se han construido tres SS adicionales que evidencian la permanencia y evolución de ambas estructuras en los sectores extremos del mapeo; las hemos llamado SS69a, SS74a y SS77a. Además, hemos aprovechado estos tres conjuntos de superficies de sección para mostrar la presencia del mar caótico, el cual simplemente no es perceptible en SS69, SS74 y SS77, dado que éstas estuvieron centradas para su construcción en radios galactocéntricos mayores que el de sus correspondientes SS69a, SS74a y SS77a.

En SS69a, SS74a y SS77a, tanto la **ESTRUCTURA 1** como la **ESTRUCTURA 2** mantienen prácticamente su misma forma y extensión en  $R$ , cambiando perceptiblemente su posición en  $dR/dt$ : a mayor energía considerada, mayor el valor de la velocidad radial en el cual las dos estructuras de órbitas estables quedarán centradas dentro del caos. El fenómeno de “pegajosidad” de las órbitas caóticas (Karney, 1983; Ott, 1993, entre otros) alrededor de las órbitas regulares es perfectamente claro e ilustrativo precisamente en los **ACERCAMIENTOS 1 y 2** (figs. 6 y 7), pues es justo en la periferia de las **ESTRUCTURAS 1 y 2** donde existe una zona de difusión en la que se presenta la formación de islas y cadenas de islas, muy suavizadas en ambos casos. Tal formación

es típica en la región de transición de la regularidad al caos. La SS8, uno de nuestros mejores ejemplos de la intrincada complejidad orbital que puede darse en ciertas regiones galácticas, ilustra muy bien esa “pegajosidad” del caos a través de una pronunciada cadena de islas, la cual puede localizarse fácilmente en el espacio comprendido entre los conjuntos central y superior de órbitas regulares.

Por otro lado, es importante notar que las 2 resonancias de la SS8 no son más que la consecuencia natural del evidente doblamiento de período de la órbita central en SS5, familia con el mismo momento angular que SS8. El doblamiento de período es una conocida **ruta al caos** en sistemas dinámicos: nótese cómo la órbita al centro de SS5 se rompe en 2 pequeños lóbulos ó puntos elípticos estables, separados por el respectivo punto hiperbólico inestable. Ya en SS8, a una mayor energía, estos puntos elípticos se encuentran muy separados y amplificadas; el punto hiperbólico ha desaparecido pero la región inter-lóbulos se ha empezado a llenar de caos (hecho ya muy evidente en SS12).

Para finalizar este análisis general de la estructura orbital presente en nuestro mapeo, simplemente nos queda agregar que, dado un valor cualquiera de la energía, siempre existe un valor límite del momento angular después del cual las órbitas son regulares en su mayoría ó casi en su totalidad. Ejemplos de conjuntos de superficies de sección donde se presenta esta dominante regularidad son SS3, SS6, SS9, SS10, SS14, SS15, SS20, SS21, SS28, SS29, SS37, SS38, etc. Estas regiones del mapeo con momento angular alto presentarán interés, como se verá, en la caracterización de las órbitas de cúmulos abiertos en la Galaxia, mientras que aquellas con momento angular bajo e intermedio serán útiles, particularmente, en la caracterización cinemática de los cúmulos globulares de nuestro sistema estelar.

### III.5.5 Órbitas representativas

Con el propósito de ilustrar sus geometrías típicas, hemos incluido en la **fig. 8** tres tipos distintos de órbitas representativas de la dinámica estelar subyacente a todo nuestro MAPEO, obtenidas directamente de éste y proyectadas en el plano meridional  $(R, z)$ : órbitas caóticas, periódicas y cuasiperiódicas. Las 3 órbitas representadas forman parte

de la familia con  $E = 1.0 E_s$  y  $h = 0.1 h_s$ , la cual es mostrada completa en la SS30 y parcialmente amplificada en los **ACERCAMIENTOS 1 y 2**.

El caso (A) representa una **órbita caótica** de la región más externa de la SS30. Es de notar la marcada tendencia de la misma a permanecer confinada al plano galáctico, mostrando bruscos cambios que la llevan a alcanzar valores en  $z$  de hasta 10 kpc. Ésta es una clara manifestación gráfica del poder del caos para transformar energía orbital horizontal a vertical y viceversa. La **órbita periódica** en (B) corresponde a la más pequeña curva cerrada justo al centro del “capullo” del **ACERCAMIENTO 2**. Como toda órbita periódica, se trata también de una curva cerrada en el plano meridional que, particularmente, cruza el plano de la Galaxia en sólo 2 puntos. Las condiciones iniciales que han dado origen a esta órbita difieren sólo un poco de aquellas que producen una dinámica caótica, de ahí el parecido de (B) con (A): ambas tienen un aplanamiento considerable y cambios bruscos hacia valores altos de  $z$ ; además, sus  $R_{min}$  y  $R_{max}$  son comparables. La diferencia cualitativa fundamental entre ellas es que, mientras en (B) la posición galáctica es conocida para todo tiempo, en la órbita caótica (A) la posición es incierta para tiempos grandes, dados por el pequeño valor numérico de los **exponentes de Lyapunov** ( $\lambda$ ) asociados, definidos como

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t},$$

donde  $d(t)$  = separación exponencial entre órbitas contiguas,  $d_0$  = separación entre ellas a  $t = 0$ ,  $\lambda$  = exponente de Lyapunov y  $t$  = tiempo. Puesto que el exponente  $\lambda t$  debe carecer de unidades, se define un tiempo  $\tau$  tal que  $\tau \sim \lambda^{-1}$ , que es el tiempo característico de separación entre órbitas contiguas. Por lo tanto, un  $\lambda$  pequeño y positivo indica que el caos es manifiesto sólo después de tiempos característicos grandes, como es el caso en las órbitas galácticas. El cálculo de estos exponentes forma parte de próximos proyectos con el tema central de esta tesis.

Recordemos que aunque la dinámica newtoniana y el caos en nuestro sistema son completamente **deterministas**, es decir, que a condiciones iniciales iguales corresponden órbitas iguales para todo tiempo, las posiciones de las partículas después de tiempos muy



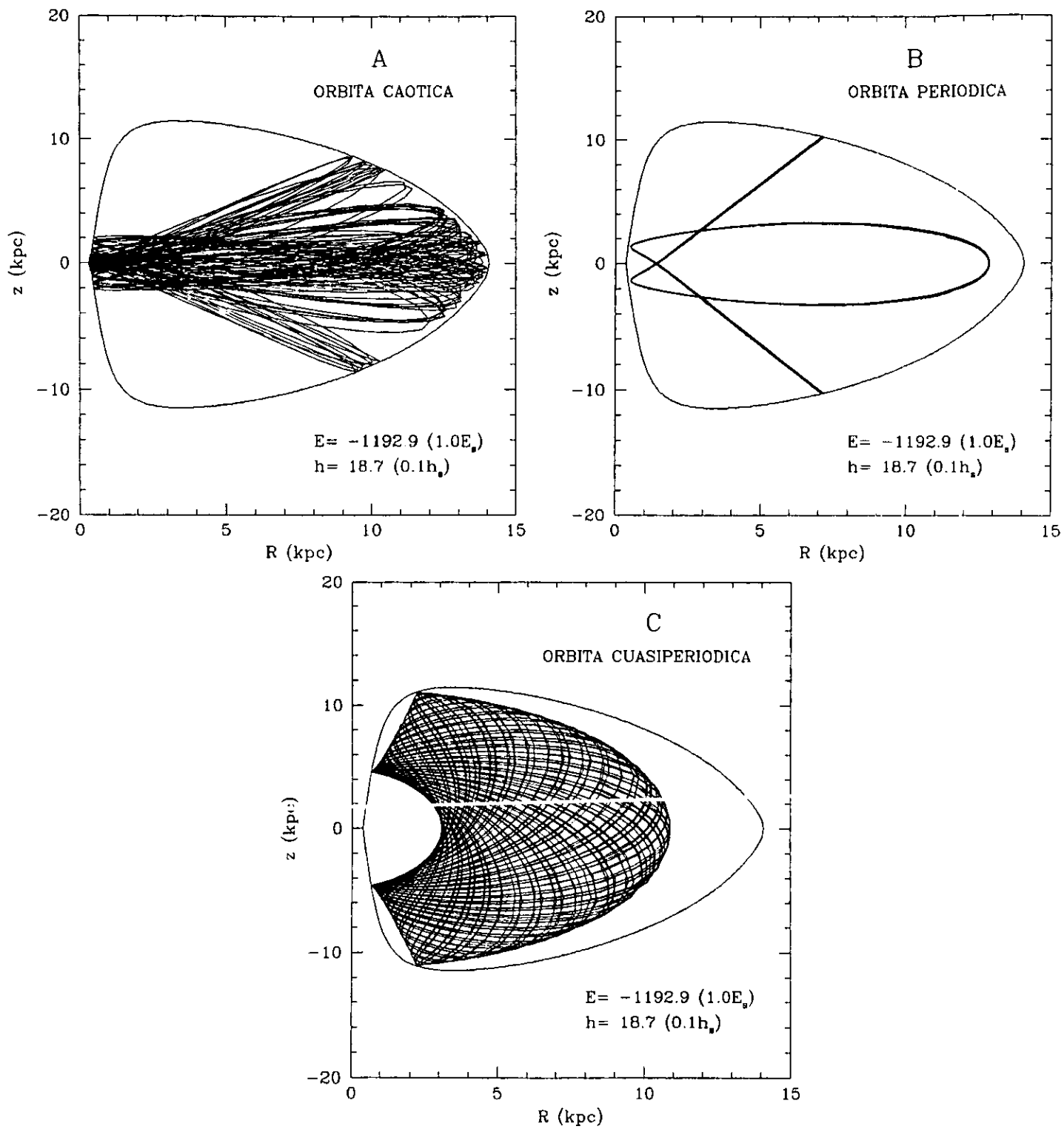


FIGURA 8

largos (comparados con  $\lambda^{-1}$ ) se vuelven **impredecibles** por la acción del caos mismo, el cual separa exponencialmente las órbitas contiguas en el espacio fase.

En (C) encontramos un ejemplo de las bien conocidas órbitas de "caja". Como es evidente en este tipo de **órbita cuasiperiódica**, los desplazamientos son tales que la caja se va llenando densamente. Como en (B), la posición galáctica en (C) es bien conocida para todo tiempo. Este tipo de órbita regular es representativo de la mayoría de las curvas cerradas contenidas en la SS30 y las restantes 76 familias de superficies de sección.

*CAPÍTULO IV*

**IMPLICACIONES DEL MAPEO DINÁMICO EN**

**LAS ÓRBITAS DE CÚMULOS ESTELARES**

## IV.1 Cúmulos abiertos

Para el análisis de las implicaciones dinámicas del mapeo sobre las órbitas de cúmulos abiertos, disponemos de la valiosa y amplia muestra de datos cinemáticos de objetos fundamentalmente jóvenes de E. Glushkova (1997), recientemente publicada (Glushkova et al., 1996 y 1997). La muestra proporciona las condiciones iniciales necesarias para la determinación de las órbitas de los 119 cúmulos abiertos, las cuales fueron integradas empleando el programa **ornatcao.f**. Es importante mencionar que, hasta donde tenemos noticia, las órbitas de tales cúmulos se calculan **por vez primera** y se presentan en esta tesis. Una razón importante para explicar por qué esto no había sido hecho con anterioridad radica en la conocida dificultad observacional para obtener movimientos propios absolutos de confiable calidad.

La **tabla 2** muestra los parámetros resultantes de la integración de las órbitas para los 119 cúmulos considerados, así como sus edades y metalicidades. Todos los datos sobre edad y metalicidad han sido tomados del Catálogo de datos de Cúmulos Abiertos de Lyngå (1987), a excepción de los valores de metalicidad para NGC 1502, NGC 3293, NGC 4755, NGC 6231, IC 2581 e IC 4665, obtenidos del trabajo de Strobel (1991).

Los resultados obtenidos de las integraciones numéricas nos muestran, como era de esperarse para cúmulos abiertos, órbitas muy aplanadas y regulares tipo “caja” (Ollongren, 1965) con excentricidades muy pequeñas en general, cubriendo el intervalo de distancias galactocéntricas comprendido entre 5 y 13 kpc. Las dos excepciones más notables a esta muestra de más de 100 objetos son los cúmulos Ru 55 y Ru 79, cuyas excentricidades orbitales alcanzan 0.43 y 0.35, respectivamente. Bochum 2 resulta ser el cúmulo más remoto de la muestra, el cual oscila entre los 13 y 14 kpc del centro galáctico. Sólo un objeto alcanza 300 pc de altura máxima sobre el plano de la Galaxia (NGC 2439).

El par energía-momento angular ( $E, h$ ) correspondiente a cada cúmulo individual incluido en la **tabla 2** es, de hecho, nuestro nexa con el mapeo dinámico para ubicarnos en un conjunto específico de superficies de sección; esto es, para remitirnos al conjunto correspondiente a la  $E$  y  $h$  del cúmulo de interés. De esta manera, los distintos pares

## CAPÍTULO IV. IMPLICACIONES DEL MAPEO DINÁMICO EN LAS ÓRBITAS DE CÚMULOS ESTELARES

Hemos hecho ya una revisión analítica de los resultados arrojados por nuestro mapeo dinámico, en el cual la estructura orbital de la Galaxia ha quedado al descubierto por medio del recurso de las superficies de sección de Poincaré. Se ha puesto atención en las características orbitales más generales evidenciadas por tal conjunto de superficies de sección. De igual manera, los detalles finos del mapeo que presentan un interés particular han sido objeto de una descripción detallada y discusión. Puesto que cada conjunto de superficies de sección tiene asociada una familia de 30 órbitas con una  $E$  y una  $h$  comunes, cada una de ellas con parámetros orbitales específicos y bien determinados, el mapeo completo adquiere así la función de un PATRÓN ORBITAL COMPARATIVO que nos permite **pronosticar** el comportamiento de los objetos orbitantes en la Galaxia, siempre y cuando dispongamos de la información sobre sus  $E$  y  $h$  particulares.

Dentro de este esquema, por lo tanto, el patrón comparativo de órbitas con el que ahora contamos en el mapeo nos proporciona un medio útil para la caracterización de las órbitas de objetos galácticos. En esta última parte, hacemos así una aplicación directa y concreta de las implicaciones de nuestro mapeo en las órbitas de objetos galácticos de interés. Se han tomado en cuenta para este ejercicio de aplicación tanto a los cúmulos abiertos (o galácticos) como a los cúmulos globulares.

Es importante mencionar que, alternativamente al método sugerido en esta tesis para la clasificación de órbitas galácticas via un patrón orbital comparativo (mapeo), existen otros métodos de clasificación recientes como el propuesto por Carpintero y Aguilar (1997). El trabajo de estos autores es válido para potenciales en 2 y 3 dimensiones y se apoya en el concepto de la llamada “**dinámica espectral**”, la cual hace uso de la transformada de Fourier de las coordenadas de la órbita en estudio para la posterior clasificación de ésta.

$(E, h)$  característicos de los 119 cúmulos abiertos podrán relacionarse directamente con las distintas familias de superficies de sección del mapeo dinámico.

Teniendo cada cúmulo un par  $(E, h)$ , la comparación directa de estos valores con las familias de superficies de sección respectivas del mapeo nos indica que, efectivamente, las órbitas de todos los cúmulos abiertos jóvenes de la muestra de Glushkova et al. (1996 y 1997) se ubican hacia las regiones de alta regularidad orbital, definitivamente lejos de las fronteras caóticas que hemos encontrado. Esta conclusión es válida incluso para los cúmulos abiertos más excéntricos y alejados del plano galáctico. La gran mayoría de los 119 cúmulos tiene momentos angulares tan altos (órbitas casi circulares), que de hecho su ubicación en  $h$  sobrepasa la región inferior del **diagrama 3 de Lindblad** (fig. 9) cubierta por nuestro mapeo.

El intervalo de energías ocupado por los 119 cúmulos abiertos es  $1.1 E_S < E < 0.8 E_S$ , con momentos angulares  $h \geq 0.9 h_s$ .

A partir de estos resultados podemos esperar que, aun a muy largo plazo, las órbitas de los cúmulos abiertos sigan siendo órbitas estrictamente confinadas al plano galáctico, favoreciendo así conclusiones como las de Carraro y Chiosi (1994), en el sentido de que muy probablemente las abundancias químicas observadas actualmente en los cúmulos abiertos son, en sí, representativas de las abundancias primigenias en las regiones galácticas donde tales cúmulos se formaron.

Como puede comprobarse en nuestro mapeo, los cúmulos abiertos se ubican en las zonas inferiores del **diagrama 3 de Lindblad**, sitios de alto momento angular donde no hemos encontrado evidencias de caos orbital. Por lo tanto, aun suponiendo que estos cúmulos ó estrellas individuales sean perturbados, por ejemplo, por nubes densas de gas del disco galáctico, sus órbitas seguirán conservando su carácter regular, dada la ausencia de regiones caóticas obvias en sus superficies de sección. Cambios drásticos en el carácter de las órbitas ("mutaciones orbitales"), que estarían asociados al paso de una isla a otra cruzando el mar caótico son, por ende, muy improbables en estos casos.

Cúmulo	$E$ ( $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ )	$h$ ( $10 \text{ km kpc s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ (kpc)	$R_{\text{max}}$ (kpc)	$ z_{\text{max}} $ (kpc)	$E_{\text{rc}}$	Edad (logT)	[Fe/H]
NGC654	-1122.83	215.58	9.38	10.30	0.11	0.047	7.18	--
NGC1647	-1135.65	208.87	8.80	10.33	0.17	0.080	8.33	--
NGC2168	-1122.04	215.53	9.23	10.48	0.11	0.063	8.03	--
NGC2244	-1124.29	215.24	9.54	10.09	0.10	0.027	6.48	--
NGC2264	-1143.96	206.52	9.09	9.72	0.11	0.033	7.30	-0.15
NGC2516	-1206.32	180.76	7.66	8.85	0.10	0.072	8.03	-0.23
NGC4755	-1169.67	188.10	7.08	10.65	0.13	0.201	6.85	-0.30
NGC5662	-1150.14	200.24	7.97	10.56	0.09	0.140	7.80	--
NGC6087	-1204.89	180.36	7.44	9.11	0.11	0.101	7.74	--
NGC6530	-1241.75	167.41	6.96	8.39	0.09	0.092	6.30	--
NGC6611	-1240.70	166.33	6.79	8.58	0.08	0.116	6.74	--
NGC6709	-1225.08	174.14	7.42	8.47	0.09	0.066	7.89	--
NGC6823	-1182.42	186.18	7.32	9.99	0.08	0.153	6.70	--
NGC6913	-1241.75	166.18	6.76	8.58	0.08	0.118	7.00	--
IC1805	-1120.90	216.11	9.81	9.96	0.10	0.007	6.12	--
IC4665	-1188.88	188.14	8.20	8.92	0.11	0.042	7.56	-0.11
IC4725	-1186.35	188.19	7.94	9.27	0.09	0.077	7.95	-0.06
Carina	-1135.10	195.16	6.89	12.10	0.10	0.274	6.40	--
Orión	-1157.79	199.14	8.47	9.80	0.08	0.072	6.50	--
Tr37	-1094.93	222.17	8.59	12.24	0.14	0.175	6.00	--
Bas03	-1235.03	159.11	5.73	9.71	0.10	0.257	--	--
Be86	-1209.40	180.18	7.80	8.61	0.08	0.049	6.78	--
Bochum2	-975.55	294.17	13.01	14.36	0.20	0.049	6.00	--
Cr121	-1199.27	183.31	7.87	8.87	0.21	0.059	6.18	--
Cr135	-1219.84	175.48	7.44	8.61	0.17	0.073	--	--

TABLA 2. Parámetros orbitales y observacionales de los 119 cúmulos abiertos de nuestra muestra.

Cúmulo	$E$ ( $100\text{km}^2\text{s}^{-2}$ )	$h$ ( $10\text{kmkpc}\text{s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ (kpc)	$R_{\text{max}}$ (kpc)	$ z_{\text{max}} $ (kpc)	$E_{\text{sc}}$	$E_{\text{dad}}$ (logT)	$[\text{Fe}/\text{H}]$
Cr140	-1171.87	194.70	8.43	9.32	0.08	0.051	7.35	0.05
Cr197	-1215.92	174.67	7.05	9.10	0.24	0.127	6.80	--
Cr223	-1182.01	181.94	6.75	10.53	0.12	0.219	--	--
Cr228	-1153.72	190.99	6.94	11.37	0.11	0.242	6.00	--
Cr394	-1187.55	187.53	7.86	9.30	0.12	0.084	--	--
Do25	-1096.58	225.80	9.33	11.49	0.12	0.104	6.00	--
Hafner19	-1157.54	187.82	6.73	11.41	0.13	0.258	6.80	--
Hogg16	-1148.37	194.98	7.21	11.33	0.10	0.222	7.40	--
IC1848	-1112.12	220.88	9.95	10.21	0.10	0.013	6.00	--
IC2395	-1155.74	179.46	8.18	10.16	0.10	0.108	7.20	--
IC2581	-1160.56	189.63	6.98	11.08	0.09	0.227	7.00	0.15
IC2944	-1193.78	178.20	6.66	10.21	0.10	0.211	7.00	--
IC4996	-1220.13	174.83	7.21	8.84	0.08	0.101	7.00	--
Lg6	-1184.54	181.86	6.80	10.40	0.08	0.209	7.60	--
Mark18	-1168.97	191.37	7.48	10.33	0.10	0.160	6.00	--
Mark38	-1272.47	157.42	6.64	7.80	0.08	0.080	--	--
Mark6	-1143.75	203.44	8.98	9.86	0.09	0.047	7.40	--
NGC103	-1093.69	220.01	9.15	11.79	0.14	0.126	7.58	--
NGC129	-1176.09	197.47	8.20	9.39	0.13	0.068	8.18	--
NGC1502	-1148.05	204.44	8.85	9.81	0.12	0.052	7.30	0.16
NGC1778	-1075.57	236.76	9.97	11.84	0.12	0.085	8.20	--
NGC1893	-1029.85	260.74	11.06	13.10	0.15	0.084	6.00	--
NGC1960	-1100.47	224.97	9.51	11.15	0.10	0.080	7.40	--
NGC2129	-1070.05	238.80	9.90	12.17	0.11	0.103	7.21	--
NGC2169	-1117.47	217.33	9.46	10.46	0.10	0.051	7.70	--

TABLA 2. Cont.



Cúmulo	$E$ ( $100\text{km}^2\text{s}^{-2}$ )	$h$ ( $10\text{kmkpc}\text{s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ (kpc)	$R_{\text{max}}$ (kpc)	$ z_{\text{max}} $ (kpc)	$E_{\text{rc}}$	$E_{\text{dad}}$ ( $\log T$ )	[Fe/H]
NGC2175	-1075.88	237.46	10.25	11.56	0.11	0.060	6.00	--
NGC2232	-1166.80	197.21	8.81	9.13	0.07	0.018	7.35	-0.20
NGC2323	-1135.07	209.65	8.92	10.26	0.10	0.070	7.89	--
NGC2362	-1195.30	183.92	7.58	9.30	0.13	0.102	7.40	--
NGC2367	-1163.55	195.99	8.01	10.02	0.15	0.111	6.00	--
NGC2384	-1138.45	203.89	7.99	11.00	0.15	0.158	6.00	--
NGC2414	-1145.87	200.61	7.86	10.83	0.19	0.159	6.80	--
NGC2422	-1204.28	181.80	7.80	8.79	0.11	0.060	7.89	--
NGC2439	-1175.91	179.01	6.37	11.04	0.30	0.268	7.82	--
NGC2467	-1242.18	162.10	6.15	9.14	0.10	0.196	6.00	--
NGC2546	-1183.15	190.00	8.14	9.19	0.08	0.061	7.62	0.30
NGC2547	-1188.46	187.96	8.07	9.08	0.08	0.059	7.76	-0.13
NGC3114	-1170.04	191.72	7.76	10.03	0.11	0.128	8.03	0.01
NGC3293	-1147.28	191.29	7.11	11.46	0.10	0.235	7.40	0.15
NGC3572	-1180.25	180.73	6.57	10.75	0.09	0.241	7.10	--
NGC3590	-1187.12	179.79	6.65	10.45	0.09	0.222	7.70	--
NGC3766	-1148.37	196.53	7.38	11.17	0.09	0.204	7.35	--
NGC436	-1176.13	186.51	7.16	10.34	0.26	0.182	7.90	--
NGC4463	-1156.00	197.25	7.79	10.52	0.10	0.149	7.40	--
NGC457	-1128.99	212.15	9.17	10.24	0.24	0.055	7.40	--
NGC5606	-1163.38	190.77	7.19	10.79	0.09	0.201	7.10	--
NGC581	-1124.13	214.61	9.24	10.39	0.15	0.059	7.60	--
NGC6067	-1196.56	180.50	7.04	9.76	0.13	0.162	7.89	-0.05
NGC6178	-1210.38	178.60	7.41	8.97	0.08	0.095	6.80	--
NGC6193	-1200.58	181.61	7.42	9.28	0.10	0.112	6.00	--

TABLA 2. Cont.

Cúmulo	$E$ ( $100\text{km}^2\text{s}^{-2}$ )	$h$ ( $10\text{kmkpc}\text{s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ ( $\text{kpc}$ )	$R_{\text{max}}$ ( $\text{kpc}$ )	$ z_{\text{max}} $ ( $\text{kpc}$ )	$E_{\text{xc}}$	$Edad$ ( $\log T$ )	$[Fe/H]$
NGC6204	-1151.25	196.96	7.54	10.92	0.11	0.183	7.13	---
NGC6231	-1223.61	173.58	7.16	8.77	0.08	0.101	6.50	-0.16
NGC637	-1143.80	205.58	8.67	10.15	0.11	0.078	7.60	---
NGC6383	-1230.94	171.31	7.14	8.56	0.08	0.091	6.65	---
NGC6396	-1217.33	176.01	7.30	8.84	0.10	0.095	7.40	---
NGC6405	-1184.88	188.36	7.82	9.44	0.08	0.094	7.71	0.10
NGC6514	-1213.80	178.02	7.54	8.73	0.08	0.073	---	---
NGC6531	-1225.53	173.92	7.42	8.47	0.08	0.066	6.66	---
NGC6604	-1286.98	151.87	6.27	7.75	0.11	0.106	6.60	---
NGC6613	-1233.18	171.21	7.32	8.33	0.08	0.065	7.50	---
NGC663	-1142.20	207.29	9.14	9.76	0.11	0.033	7.35	---
NGC6649	-1261.59	131.08	6.80	7.96	0.08	0.078	7.70	---
NGC6664	-1207.19	179.28	7.34	9.14	0.08	0.109	7.57	---
NGC6694	-1239.98	168.62	7.17	8.25	0.11	0.070	7.95	---
NGC6755	-1212.76	176.12	7.05	9.22	0.10	0.133	7.55	---
NGC6834	-1210.51	175.56	6.87	9.47	0.09	0.159	7.90	---
NGC6871	-1194.23	184.20	7.56	9.37	0.10	0.107	7.00	---
NGC6910	-1232.71	169.48	6.86	8.77	0.09	0.122	7.00	---
NGC7086	-1164.24	197.52	8.45	9.58	0.09	0.063	7.93	---
NGC7160	-1190.51	187.72	8.39	8.69	0.10	0.018	7.00	---
NGC7235	-1212.64	171.61	6.55	9.69	0.09	0.193	6.30	---
NGC7243	-1184.83	189.80	8.45	8.82	0.13	0.022	8.03	---
NGC7380	-1179.55	186.15	7.47	9.96	0.11	0.143	6.58	---
NGC7654	-1191.49	181.29	7.85	9.18	0.09	0.078	7.55	---
NGC7788	-1190.65	181.75	7.28	9.75	0.11	0.145	7.20	---

TABLA 2. Cont.

Cúmulo	$E$ ( $100\text{km}^2\text{s}^{-2}$ )	$h$ ( $10\text{kmkpc}\text{s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ (kpc)	$R_{\text{maz}}$ (kpc)	$ z_{\text{maz}} $ (kpc)	$E_{\text{xc}}$	$E_{\text{dad}}$ ( $\log T$ )	$[\text{Fe}/\text{H}]$
NGC7790	-1210.22	170.85	6.30	9.99	0.13	0.227	7.89	--
NGC869	-1154.27	199.94	8.24	10.15	0.20	0.104	6.75	--
NGC884	-1134.61	209.94	9.08	10.11	0.19	0.054	6.50	--
NGC957	-1137.89	208.83	9.10	9.97	0.15	0.045	7.19	--
Pis16	-1184.69	181.64	6.78	10.41	0.10	0.211	6.80	--
Pis20	-1183.43	180.79	6.66	10.56	0.11	0.226	6.30	--
Pis6	-1186.63	183.99	7.15	10.01	0.12	0.167	7.50	--
Ros3	-1200.33	192.53	7.65	9.07	0.14	0.085	--	--
Ru127	-1233.05	170.25	7.06	8.57	0.11	0.097	6.80	--
Ru55	-1143.05	168.81	5.23	13.17	0.20	0.432	6.00	--
Ru79	-1184.53	166.71	5.53	11.49	0.11	0.350	7.10	--
Stock14	-1189.85	179.05	6.64	10.36	0.09	0.219	6.80	--
Stock16	-1122.32	203.37	7.36	12.21	0.10	0.248	7.45	--
Tr1	-1156.22	197.54	7.86	10.44	0.13	0.141	7.41	--
Tr10	-1203.32	182.21	7.81	8.82	0.09	0.061	7.67	-0.08
Tr24	-1239.26	163.32	7.01	8.43	0.09	0.092	6.00	--
Tr35	-1247.82	165.69	6.97	8.21	0.07	0.081	7.62	--
Tr7	-1178.88	190.88	7.98	9.50	0.11	0.087	7.40	--
VDB1	-1110.92	221.07	9.67	10.54	0.10	0.043	7.40	--

TABLA 2. Cont.

## IV.2 Cúmulos globulares

Para el estudio orbital de los cúmulos globulares en nuestra galaxia y su relación con el mapeo dinámico, hemos basado nuestro análisis en las contribuciones de Allen y Martos (1988), Allen (1990 y 1997), Allen y Santillán (1993) y Dauphole et al. (1996). La muestra de objetos que logra así obtenerse asciende a 26 cúmulos, de los cuales 2 pertenecen a la subpoblación de cúmulos globulares del disco (47 Tuc y M71; Zinn, 1985). En la **tabla 3** se reproducen los parámetros orbitales resultantes del trabajo de estos autores, incluyendo además sus edades y metalicidades.

Las metalicidades asociadas a los 26 objetos han sido obtenidas, en su totalidad, del Catálogo de Parámetros para los Cúmulos Globulares de la Vía Láctea de Harris (1996), mientras que sus edades se han tomado en general del trabajo de Chaboyer, Sarajedini y Demarque (1992), con las siguientes excepciones: Omega Centauri (Alcaino y Liller, 1987), M22 (Davidge y Harris, 1996), M71 (Davidge y Simons, 1994), M28 (Davidge, Cote y Harris, 1996), M12 (Sato, Richer y Fahlman, 1989), M53 (Heasley y Christian, 1991) y M10 (Hurley, Richer y Fahlman, 1989). La determinación de las edades de cúmulos globulares es un tema activo y controversial actualmente, principalmente en su relación con la cosmología y la edad del Universo. Los resultados del satélite **Hipparcos** parecen indicar, con las nuevas calibraciones de distancias, que las edades de los cúmulos globulares no son tan grandes como se había creído; asimismo, aunque existen nuevas aproximaciones que asignan a los cúmulos edades menores que las inferidas por técnicas convencionales (Jiménez et al., 1996; Padoan y Jiménez, 1997), en esta tesis hemos adoptado los valores estándar de Chaboyer, Sarajedini y Demarque (1992).

Después de establecer una relación directa entre el par  $(E, h)$  de cada cúmulo globular y el par  $(E, h)$  más semejante obtenible del mapeo dinámico, encontramos una muy buena concordancia entre las conclusiones orbitales que sobre estos objetos inferen C. Allen y sus colaboradores (después de haber integrado numéricamente sus órbitas) y aquellas deducibles del propio mapeo en las superficies de sección específicas, sin necesidad de efectuar más integraciones.

Muy especial atención merecen 4 de los cúmulos globulares de la muestra: M4, M92, NGC 362 y NGC 6712. De acuerdo a Allen (1990) y Allen y Santillán (1993), las órbitas de estos objetos caen dentro de la categoría caótica, conclusión obtenida a partir de las características peculiares presentes tanto en el plano meridional  $(R, z)$  como en la superficie de sección horizontal  $(R, \dot{R})$ , para la órbita de cada cúmulo.

Los conjuntos de superficies de sección horizontales  $(R, \dot{R})$  de nuestro mapeo dinámico, para el respectivo valor del par  $(E, h)$  de cada uno de los 4 objetos, claramente confirman que todos ellos se encuentran inmersos dentro de la región del mar caótico presente en tales diagramas. Como puede notarse en la **tabla 3**, las órbitas de los 4 cúmulos globulares en cuestión los llevan a distancias menores de 1 kpc del centro de la Galaxia, donde el efecto dispersor de la distribución esférica de masa da pie al comportamiento caótico pronosticado.

NGC 6779 (M56) ha representado un objeto interesante: dentro de las incertidumbres en sus movimientos propios observados y después de correr su órbita un tiempo 10 veces mayor que el del resto de los cúmulos, los valores de su energía y momento angular resultantes lo colocan indudablemente dentro del mar caótico de la SS22. **Es así que M56 se convierte en el quinto cúmulo globular con órbita caótica conocida.** Dauphole et al. (1996) no llegan en su trabajo a esta misma conclusión. Atribuimos la diferencia al hecho de que estos autores han usado tiempos de integración menores a los nuestros, los que les han impedido detectar las sutilezas orbitales de M56 a largo plazo. Como es de notar en la **tabla 3**, este objeto es el que posee el menor momento angular de los 26 globulares, alcanzando una distancia mínima inusual de 30 parsecs al centro de la Galaxia.

Como es de notar en el **diagrama 3 de Lindblad (fig. 9)**, los cúmulos globulares presentan gran variedad de energías y momentos angulares. M71 y 47 Tucanae, ambos de la subpoblación de cúmulos globulares del disco, se ubican como era de esperarse en la región inferior del diagrama, muy cercana a la ocupada por los cúmulos abiertos. El resto de los globulares pueden llegar a tener energías tan bajas como  $1.4 E_s$  (M28) ó tan altas como  $0.2 E_s$ , que es el caso de M5. Los resultados del mapeo convierten a M5, con una  $R_{min} = 1.26 \text{ kpc}$ , un muy bajo momento angular y alta energía, en **un nuevo candidato**

a presentar órbita caótica, aunque ni Allen y Martos (1988), ni Dauphole et al. (1996) la han registrado como tal.

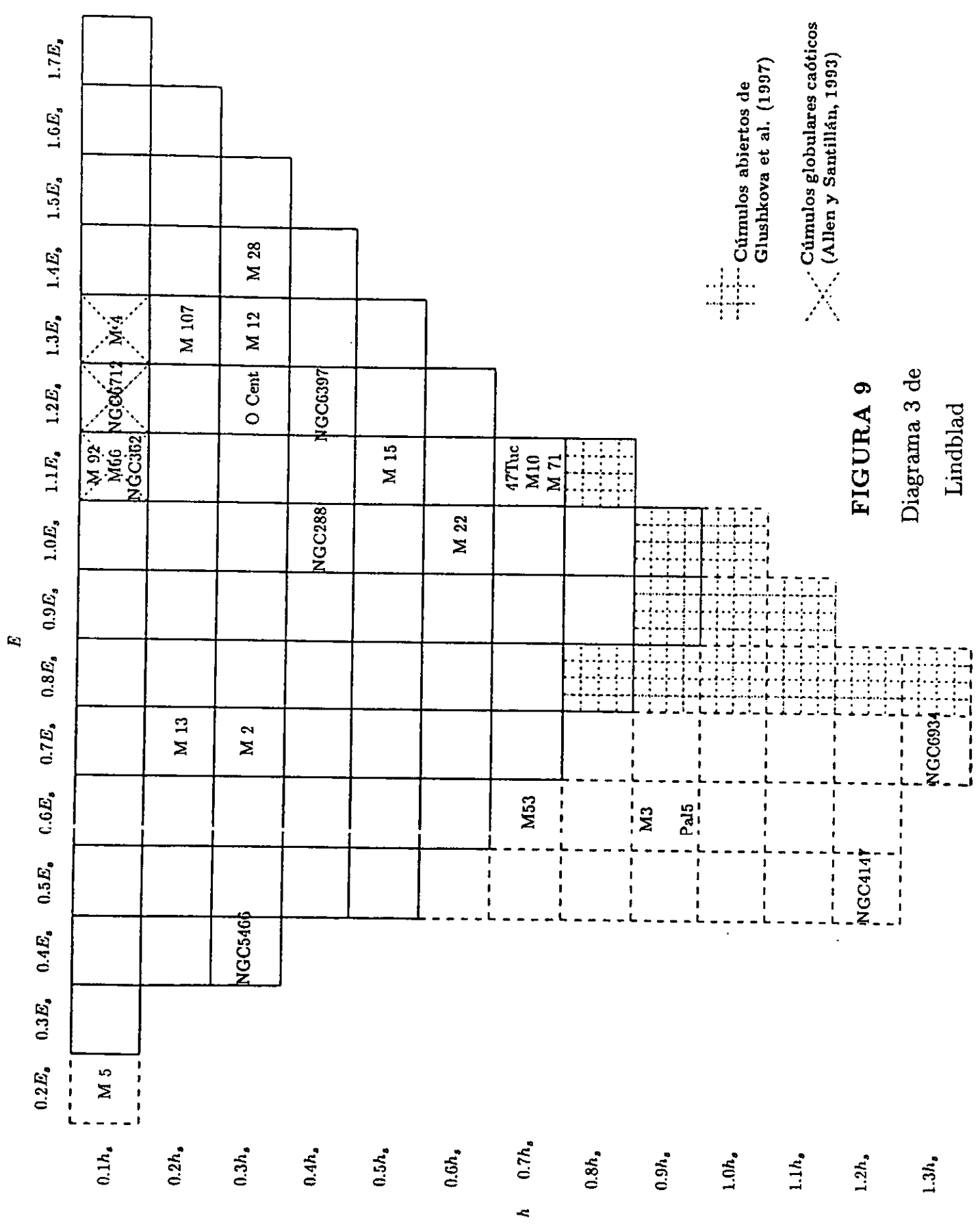
Los 5 cúmulos caóticos hasta este momento registrados están ubicados en un intervalo de energías relativamente estrecho ( $1.3 E_S < E < 1.1 E_S$ ). Cinco objetos con altos momentos angulares han quedado fuera de nuestro mapeo: M53, M3, Pal 5, NGC 4147 y NGC 6934 (este último con un  $h$  tan alto como  $1.3 h_s$ ); igualmente M5, por su alta energía.

Pal 3 es, de los 26 cúmulos revisados en nuestra muestra, el que definitivamente cuenta con los parámetros orbitales extremos. Teniendo la peculiaridad de poseer valores de energía y momento angular impresionantemente altos, la órbita de este distante objeto se encuentra acotada entre 60 y 188 kpc, lejos de las regiones de interés del presente mapeo dinámico.

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Cúmulo	$E$ ( $100\text{km}^2\text{s}^{-2}$ )	$h$ ( $10\text{kmkpc}\text{s}^{-1}$ )	$R_{\text{min}}$ (kpc)	$R_{\text{max}}$ (kpc)	$ z_{\text{max}} $ (kpc)	$E_{\text{zc}}$	$E_{\text{dad}}$ ( $10^9$ años)	$[Fe/H]$
NGC104(47 Tuc)	-1250.36	+128.38	6.07	8.21	3.49	0.175	14.0	-0.76
NGC288	-1187.51	-69.37	3.33	11.81	8.72	0.658	14.9	-1.24
NGC362	-1270.22	-29.29	0.70	10.97	7.07	0.880	12.1	-1.16
NGC4147	-553.44	+222.01	11.17	61.09	51.29	0.820	15.6	-1.83
NGC5024(M53)	-708.50	+134.86	16.38	35.01	33.37	0.362	17.0	-2.07
NGC5139(OmegaCent)	-1393.10	-63.83	2.26	7.97	3.02	0.598	17.0	-1.57
NGC5272(M3)	-672.22	+168.60	12.14	42.61	38.43	0.779	14.2	-1.57
NGC5466	-447.52	-66.70	6.81	83.82	81.45	0.963	15.8	-2.22
NGC5904(M5)	-259.43	+6.90	1.26	148.95	147.94	0.998	13.3	-1.33
NGC6121(M4)	-1522.87	+23.29	0.47	6.91	3.98	0.875	14.0	-1.18
NGC6171(M107)	-1595.31	+40.68	2.30	3.74	2.54	0.277	14.0	-1.04
NGC6205(M13)	-869.89	-41.32	5.12	26.81	26.09	0.913	14.6	-1.56
NGC6218(M12)	-1465.80	+47.10	2.07	5.81	3.78	0.511	17.0	-1.48
NGC6254(M10)	-1267.08	+126.23	5.04	8.91	2.89	0.277	17.0	-1.52
NGC6341(M92)	-1275.89	+3.26	0.06	11.35	8.84	0.991	17.0	-2.33
NGC6397	-1413.85	+82.28	3.18	6.95	2.54	0.389	16.4	-1.91
NGC6626(M28)	-1665.39	+58.90	2.58	3.59	0.61	0.161	16.0	-1.45
NGC6656(M22)	-1252.67	+104.46	3.25	10.70	2.34	0.541	12.0	-1.64
NGC6712	-1478.95	+20.94	0.72	7.22	3.71	0.871	--	-1.01
NGC6779(M56)	-1278.15	+2.08	0.03	11.77	9.10	0.994	--	-1.94
NGC6838(M71)	-1355.64	+127.14	4.96	7.19	0.29	0.184	16.0	-0.73
NGC6934	-843.21	-256.49	9.92	26.29	13.64	0.452	--	-1.54
NGC7078(M15)	-1248.48	+85.29	3.15	10.24	5.33	0.562	15.1	-2.22
NGC7089(M2)	-852.02	-53.48	4.22	28.65	26.85	0.902	--	-1.62
Pal3	-163.15	+920.28	59.83	188.32	159.51	0.517	--	-1.66
Pal5	-762.18	+174.86	17.79	27.62	25.20	0.216	12.2	-1.38

TABLA 3. Parámetros orbitales y observacionales de los 26 cúmulos globulares de nuestra muestra.



⋈ Cúmulos abiertos de  
Glushkova et al. (1997)

X Cúmulos globulares caóticos  
(Allen y Santillán, 1993)

FIGURA 9

Diagrama 3 de  
Lindblad



## CONCLUSIONES

Se ha presentado en esta tesis el primer mapeo dinámico detallado de nuestra galaxia basado en el modelo de distribución de masa propuesto por Allen y Santillán (1991). Este mapeo tiene dos objetivos principales:

1) Poner en clara evidencia la complicada estructura orbital presente en la Galaxia a través del recurso de las superficies de sección de Poincaré, buscando acotar las regiones de caos orbital.

2) Hacer una aplicación de la información contenida en tales superficies a las órbitas de cúmulos estelares galácticos sobre los cuales se tiene información cinemática observacional.

**Sobre el punto número uno, nuestras principales conclusiones son las siguientes :**

a) Hemos comprobado evidencia de caos a lo largo de todo el intervalo de energías considerado en este trabajo.

b) El caos es especialmente común en las regiones del mapeo donde el valor del momento angular es bajo. Esto da lugar a la aparición de órbitas irregulares (semiergódicas). Ha sido posible confirmar que, dentro del mar caótico, dos estructuras prominentes (islas) de regularidad orbital permanecen y evolucionan. De esta forma, pueden coexistir órbitas regulares e irregulares en una misma región de la Galaxia.

c) Mas allá de 0.4 veces el momento angular del Sol, no hemos encontrado evidencia de caos en nuestro mapeo para ningún valor particular de la energía orbital dentro del intervalo considerado. Estas regiones se encuentran pobladas predominantemente por órbitas regulares.

d) El mapeo nos ha proporcionado un recurso útil para la identificación del comportamiento dinámico de objetos en la Galaxia, de tal forma que sin necesidad de integrar su órbita, sólo por comparación directa con nuestro mapeo para el par  $(E, h)$  adecuado,

podemos pronosticar si una estrella ó un cúmulo estelar tendrá una órbita regular ó si ésta podría ser caótica.

e) Las posibles perturbaciones orbitales causadas por nubes densas ó de alta velocidad, supernovas, etc., sólo tendrán consecuencias importantes en las regiones de coexistencia caos-periodicidad, dentro de una familia dada de superficies de sección. En esas regiones, incluso pequeñas perturbaciones pueden provocar un cambio drástico en el carácter cualitativo de una órbita, transformándola de periódica a caótica ó viceversa (“mutaciones orbitales”).

**Con respecto al segundo punto, las conclusiones obtenidas son :**

a) Por comparación directa de la energía y momento angular de los 119 cúmulos abiertos jóvenes de la muestra de Glushkova et al. (1996, 1997) con el mapeo, cuyas órbitas se presentan por vez primera en este trabajo, fue posible pronosticar la regularidad orbital de dichos cúmulos. Las órbitas de estos objetos galácticos están confinadas exclusivamente en las regiones del mapeo con altos momentos angulares, donde prevalecen las órbitas regulares y NO existe evidencia de caos.

b) Por medio del mismo recurso comparativo, a través de  $E$  y  $h$ , se ha encontrado que los cúmulos globulares de la Vía Láctea ocupan posiciones muy variadas dentro de nuestro mapeo. Merecen especial atención 4 cúmulos que, al ser ubicados, caen dentro de las regiones caóticas evidenciadas por el mapeo, confirmando la irregularidad de sus órbitas reportada previamente por Allen y Santillán (1993). Los valores de la energía y momento angular de un cúmulo particular (M5) nos hacen suponer que éste podría presentar órbita caótica, aunque este hecho no haya sido reportado hasta el momento.

c) Hemos encontrado que la energía y momento angular del cúmulo M56 lo colocan dentro de las regiones de caos dinámico de nuestra galaxia. De esta manera, reportamos el quinto cúmulo globular caótico en nuestro sistema estelar.

El hecho de que el caos orbital exista en un sistema estelar como el nuestro tiene repercusiones importantes para toda la astronomía galáctica. Las consecuencias más di-

rectas están relacionadas con la propiedad del caos para **borrar condiciones iniciales y transferir energía plana a vertical ó viceversa**. Así, es imposible deducir información sobre los sitios de origen de los objetos en órbita caótica en nuestra galaxia, los que ya para tiempos del orden de  $10^9$  años se tornan impredecibles. Esto significa que el caos nos impide conocer el pasado dinámico de algunos objetos a partir de observaciones actuales. De la misma forma, la transferencia de energía orbital paralela al plano galáctico a energía orbital perpendicular al mismo y viceversa, típica del caos, impide deducir parámetros físicos que dependen de la posición en la Galaxia, tales como la metalicidad. Al haber caos orbital, consecuentemente, los parámetros físicos observados actualmente en objetos galácticos pueden no tener ninguna relación con los mismos parámetros de hace  $10^9$  ó más años. Esta pérdida de información física original de hecho se da, por ejemplo, en los 5 cúmulos globulares caóticos aquí referidos, mientras otros objetos con órbitas regulares y predecibles para todo tiempo, como los cúmulos abiertos viejos (CAVs), son utilizados incluso como trazadores de metalicidad primordial en la Galaxia (Carraro y Chiosi, 1994).

Las repercusiones que el caos tiene para el entendimiento de la evolución de nuestro sistema estelar justifican que se fomenten sondeos dinámicos como éstos, principalmente los que permiten la interrelación con otras áreas de la astrofísica en la exploración de modelos cada vez más apegados a la realidad observable. Confiamos en que el trabajo de esta tesis contribuya en ese encuentro, en ese esfuerzo continuado hacia el esclarecimiento de las interrogantes más fundamentales sobre el origen y evolución de nuestra galaxia.

## REFERENCIAS

- Ajhar, E.A., Grillmair, C.J., Lauer, T.R., Baum, W.A., Faber, S.M., Holtzman, J.A., Lynds, C.R. y O'Neil, E.J., 1996, AJ, 111, 1110
- Alcaino, G. y Liller, W., 1987, AJ, 94, 1585
- Allen, C., 1990, Rev.Mex.Astron.Astrof., 20, 67
- Allen, C., 1997, en preparación
- Allen, C. y Martos, M.A., 1986, Rev.Mex.Astron.Astrof., 13, 137
- Allen, C. y Martos, M.A., 1988, Rev.Mex.Astron.Astrof., 16, 25
- Allen, C. y Santillán, A., 1991, Rev.Mex.Astron.Astrof., 22, 255
- Allen, C. y Santillán, A., 1993, Rev.Mex.Astron.Astrof., 25, 39
- Armandroff, T.E., 1989, AJ, 97, 375
- Arnold, V.I., 1963, Usp. Mat. Nauk, 18, 13
- Baade, W., 1944a, APJ, 100, 137
- Baade, W., 1944b, APJ, 100, 147
- Bahcall, J.N., Schmidt, M. y Soneira, R.M., 1982, APJ, 258, L23
- Battaner, E., Garrido, J.L., Membrado, M. y Florido, E., 1992, Nature, 360, 652
- Binney, J. y Tremaine, S., 1987, Galactic Dynamics, Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey
- Blitz, L. y Spergel, D.N., 1991, APJ, 379, 631
- Brosche, P., Tucholke, H.-J., Klemola, A.R., Ninković, S., Geffert, M. y Doerenkamp, P., 1991, AJ, 102, 2022
- Caldwell, J.A. y Ostriker, J.P., 1981, APJ, 251, 61
- Carpintero, D.D. y Aguilar, L.A., 1997, en preparación

- Carraro, G. y Chiosi, C., 1994, *A&A*, 288, 751
- Chaboyer, B., Sarajedini, A. y Demarque, P., 1992, *APJ*, 394, 515
- Colin, J., de Boer, K.S., Dauphole, B., Ducourant, C., Dulou, M.R., Geffert, M., Le  
Campion, J.-F., Moehler, S., Odenkirchen, M., Schmidt, J.H.K. y Theissen, A., 1994,  
*A&A*, 287, 38
- Contopoulos, G., 1967, *Bull. Astr., Paris* 2, 223
- Dauphole, B., Geffert, M., Colin, J., Ducourant, C., Odenkirchen, M. y Tucholke, H.-J.,  
1996, *A&A*, 313, 119
- Davidge, T.J., Cote, P. y Harris, W.E., 1996, *APJ*, 468, 641
- Davidge, T.J. y Harris, W.E., 1996, *APJ*, 462, 255
- Davidge, T.J. y Simons, D.A., 1994, *APJ*, 435, 207
- Fich, M., Blitz, L. y Stark, A., 1989, *APJ*, 342, 272
- Finlay, J., Noriega-Crespo, A., Friel, E.D. y Cudworth, K.M., 1995, *Bull. American Astron.  
Soc.*, 187, # 107.02
- Friel, E.D. y Janes, K.A., 1993, *A&A*, 267, 75
- Gilmore, G., King, I. y van der Kruit, P., 1990, *The Milky Way as a Galaxy*, University  
Science Books, Mill Valley, California
- Gilmore, G. y Wyse, R.F.G., 1985, *AJ*, 90, 2015
- Glushkova, E., 1997, comunicación personal
- Glushkova, E.V., Zabolotskikh, M.V., Rastorguev, A.S., Uglova, I.M. y Fedorova, A.A.,  
1997, *Pis'ma v Astron. Zhurn.*, 23, 90
- Glushkova, E.V., Zabolotskikh, M.V., Rastorguev, A.S., Uglova, I.M., Fedorova, A.A. y  
Volchkov, A.A., 1996, *Pis'ma v Astron. Zhurn.*, 22, 850
- Harris, W.E., 1996, *Catalog of Parameters for Milky Way Globular Clusters*, con versión  
internet en <http://www.physics.mcmaster.ca/Globular.html>

- Heasley, J.N. y Christian, C.A., 1991, AJ, 101, 967
- Hénon, M. y Heiles, C., 1964, AJ, 69, 73
- Hernández, D. y Moreno, E., 1998, en preparación
- Hubble, E.P., 1936, *The Realm of the Nebulae*, Yale University Press, New Haven
- Hurley, D.J.C., Richer, H.B. y Fahlman, G.G., 1989, AJ, 98, 2124
- Jiménez, R., Thejll, P., Jorgensen, U.G., MacDonald, J. y Pagel, B., 1996, MNRAS, 282, 926
- Kapteyn, J.C., 1922, APJ, 55, 302
- Kapteyn, J.C. y van Rhijn, P.J., 1920, APJ, 52, 23
- Karney, C.F.F., 1983, Physica 8D, 360
- King, I., 1994, *An Introduction to Classical Stellar Dynamics*, University of California, Berkeley, p. 66, en prensa
- Kolmogorov, A.N., 1954, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98, 527
- Lindblad, B., 1926, Arkiv f: ur Mat. Astron. och Fysik., 19B: No. 7
- Lyngå, G., 1987, *Catalog of Open Cluster Data*, con versión internet en <ftp://cdsarc.u-strasbg.fr/cats/VII/92A/>
- Martinet, L. y Hayli, A., 1971, A&A, 14, 103
- Merritt, D. y Aguilar, L.A., 1985, MNRAS, 217, 787
- Mihalas, D. y Binney, J., 1981, *Galactic Astronomy*, Freeman and Company, San Francisco
- Miyamoto, M. y Nagai, R., 1975, PASJ, 27, 543
- Morgan, W.W., Sharpless, S. y Osterbrock, D.E., 1952, AJ, 57, 3
- Moser, J., 1962, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1
- Müllär, A.A., Nechitailov, Y.V., Ninković, S. y Orlov, V.V., 1994, A&SS, 218, 1
- Nelson, A.H., 1988, MNRAS, 233, 115

- Noriega-Mendoza, H. y Ruelas-Mayorga, A., 1997, *AJ*, 113, 722
- Núñez, J.A., Cincotta, P.M. y Muzzio, J.C., 1993, en *Ergodic Concepts in Stellar Dynamics* (Lecture Notes in Physics), edits. V.G. Gurzadyan y D. Pfenniger, p. 267
- Ollongren, A., 1962, *Bull. Astron. Ints. Neth.*, 16, 241
- Ollongren, A., 1965, en *Stars and Stellar Systems, Vol.5 (Galactic Structure)*, University of Chicago Press, edits. A. Blaauw y M. Schmidt, pp. 506-509
- Oort, J.H., 1927, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 3: 275
- Oort, J.H., 1928, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 4: 269
- Ott, E., 1993, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press
- Padoan, P. y Jiménez, R., 1997, *APJ*, 475, 580
- Ruelas-Mayorga, A. y Noriega-Mendoza, H., 1995, *Rev.Mex.Astron.Astrof.*, 31, 115
- Sato, T., Richer, H.B. y Fahlman, G.G., 1989, *AJ*, 98, 1335
- Schmidt, M., 1956, *APJ*, 129, 243
- Scholz, R.-D., Odenkirchen, M., Hirte, S., Irwin, M.J., Börngen, F. y Ziener, R., 1996, *MNRAS*, 278, 251
- Schuster, W. y Allen, C., 1997, *A&A*, 319, 796
- Shapley, H., 1918, *APJ*, 48, 154
- Stetson, P., 1993, en *The Globular Cluster-Galaxy Connection*, ASP Conference Series, Vol. 48, edits. G.H. Smith y J.P. Brodie, p. 17
- Strobel, A., 1991, *AN*, 312, 177
- Trumpler, R.J., 1930, *Lick Obs. Bull.*, 14, 154
- Valera, F., Aguilar, L. y Schuster, W., 1994, en *Numerical Simulations in Astrophysics*, edits. J. Franco, S. Lizano, L. Aguilar y E. Daltabuit, Cambridge University Press, p. 111

Weiland, J.L., Arendt, R.G., Berriman, G.B., Dwek, E., Freudenreich, H.T., Hauser, M.G.,  
Kelsall, T., Lisse, C.M., Mitra, M., Moseley, S.H., Odegard, N.P., Silverberg, R.F.,  
Sodroski, T.J., Spiesman, W.J. y Stemwedel, S.W., 1994, APJ, 425, L81

Zhao, H.S., 1996, MNRAS, 283, 149

Zinn, R., 1985, APJ, 293, 424