25

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EQUIVALENCIA DE LA CLASIFICACION FORMAL Y ANALITICA DE GERMENES DE CAMPOS VECTORIALES EN EL PLANO COMPLEJO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

EMIGDIO MARTINEZ OJEDA

260077

DIRECTOR DE TESIS: DR. ERNESTO ROSALES GONZALEZ.

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
Equivalencia de la clasificación formal y analítica de gérmenes de campos vectoriales en el plano complejo.

realizado por Emigdio Martínez Ojeda

con número de cuenta 9251731-2 , pasante de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Ernesto Rosales Gonzalez.	Ernesto Rosales González
Propietario	Dra. Laura Ortiz Bobadilla.	Laura Ortiz B.
Propietario	Dr. Santiago López de Medrano.	
Suplente	Dr. Jesus Muciño Raymundo.	
Suplente	Dr. Omegar Calvo Andrade.	Omegar Calvo.

Consejo Departamental de Matemáticas
Mat. Cesar Guevara Bravo.

FACULTAD DE CIENCIAS

A mis padres, Nelly y el Tich.

Agradecimientos

Antes que nada y para que nadie se me escape quiero agradecer a **todos** los que hicieron, de alguna u otra forma posible la realización de este primer sueño. En particular, quiero agradecer a mi familia por el super apoyo que siempre me han brindado; a los super carnales el Becerril, el Igor y la Chana por esos revens y viajes inolvidables, a los gabichos por su compañia y a todos los cuates.

A Ernesto y Laura por el nuevo enfoque, la nueva visión de las matemáticas que me enseñaron, por haber revisado $n+1$ veces este trabajo y por el super apoyo que me han brindado; a Omegar y Jesus Muciño por las sugerencias y los dibujitos, con los cuales me quedo mas claro todo.

A Ana Irene por haberme introducido a este maravilloso mundo de las matemáticas con dibujitos.

Al Benjas, por ser el libro de latex parlante y el super paro que me hizo una infinidad de veces; finalmente quiero agradecer al instituto de matemáticas. Gracias.

Mito.

Mayo de 1998.

Contenido

Introducción

Al hablar de ecuaciones diferenciales, es díficil no remontarse a los inicios de éstas; las ecuaciones diferenciales empiezan ya en forma a partir de Isaac Newton y sus ecuaciones de movimiento; estas ecuaciones de movimiento están sustentadas basicamente en la idea siguiente: si conociésemos todos los posibles cambios infinitesimales en todos los posibles estados de dicho movimiento, entonces, bastaría con dar "las condiciones iniciales" para saber cual sería la evolución de dicho movimiento. Esto plantea el problema siguiente: dada una ecuación diferencial, encontrar todas sus soluciones en forma explicita (i.e. una expresión analítica); el problema así planteado, no tiene solución en la mayoria de los casos. Fue Poincaré quien al percatarse de esta irresolubilidad, propuso un replanteamiento del problema, el cual consiste ya no en dar una expresión analítica si no en dar una descripción topológica del conjunto de las soluciones de dicha ecuación diferencial (retrato de fase de la ecuación). Lo que interesa del retrato de fase, es dar la descripción "cualitativa" del comportamiento de todas las curvas solución y de las relaciones entre estas curvas. Este enfoque se ha desarrollado en las últimas fechas de manera impresionante con el nombre de sistemas dinámicos.

Una técnica fundamental en el estudio de muchas ecuaciones diferenciales, consiste en transformarla a su forma más simple. La teoría de Poincaré de las formas normales, da las formas "mas simples" a la cual una ecuación diferencial puede ser reducida en una vecindad de una posición de equilibrio o de una orbita periódica (teniendo estos puntos dentro del retrato de fase de la ecuación diferencial una dinámica muy rica) ver capitulo 1 y referencias

[1] y [2].

Una ecuación diferencial ordinaria holomorfa en $\mathbb{C}^n$ es una expresión de la forma:

$$\frac{dz_j}{dT} = V_j,\ j = 1, ..., n \tag{0.1}$$

donde las V_j son funciones holomorfas definidas en un abierto U de $\mathbb{C}^n$. Una solución de la ecuación 0.1 es una función ϕ definida en un abierto U' de $\mathbb{C}$ (*i.e.* $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$) tal que para cada $j = 1, ..., n$ se cumple:

$$\frac{d\phi_j}{dT}(T) = V_j(\phi_1(T), ..., \phi_n(T)).$$

Ver apendice [D].

Ahora bien, dada una ecuación diferencial ordinaria holomorfa, de manera natural hay asociado un campo vectorial holomorfo; el problema fundamental, es encontrar los diferentes tipos de clases de campos vectoriales holomorfos (i.e. los diferentes tipos de clases de gérmenes de campos vectoriales holomorfos) bajo algún tipo de equivalencia de estos gérmenes (ver sección 1.1); la clasificación analítica y topológica de gérmenes de campos vectoriales holomorfos definidos en una vecindad del origen en el plano complejo con punto singular el origen y con parte lineal en el domínio de Poincaré o resonate, es ahora bien conocida (ver sección 1.3). La clasificación analítica se sigue del teoréma de linealización de Poincaré (ver sección 1.3); y en el caso resonante es debida a S.Voronin [17], J.Ecalle [6], J. Martinet y J. P. Ramis [15] y B. Malgrange [14] de manera independiente. La clasificación topológica de gérmenes de campos vectoriales sin parte lineal en $\mathbb{C}^2$ fue dada por C. Camacho, Kuiper, Palis [5]. El propósito de este trabajo, es hacer un analisis de la prueba de que bajo ciertas condiciones genéricas de gérmenes de campos vectoriales holomorfos, definidos en vecindades del origen en el plano complejo con punto singular el origen, sin parte lineal y si dos de ellos son formalmente orbitalmente equivalentes, entonces tambien resultan analíticamente orbitalmente equivalentes ver teorema principal 1.2 (i.e. se da la clasificación analítica orbital a un conjunto genérico de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sin parte lineal en una vecindad del origen en el plano complejo con punto singular el origen).

1

Conceptos básicos.

En este capítulo, damos un repaso a la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias.
Comenzamos dando algunas definiciones básicas y ejemplos, enunciamos el teorema sobre el cual trata este trabajo. Finalmente enunciamos los teoremas clasicos de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias así, como algunos de los teoremas de clasificación analítica de gérmenes de campos vectoriales con parte lineal no nula.

1.1 Definiciones.

Sea V un campo vectorial (analítico o C^{∞}) definido en un abierto U de $\mathbb{C}^n$ con punto singular aislado x.

Definición 1.1. El *gérmen determinado por V* en x es la clase de equivalencia de los campos que coinciden con V en alguna vecindad de x.

Ejemplo: Campos vectoirales en la misma clase de equivalencia que el campo vectorial identicamente cero; ver fig.1.

Observación. La vecindad donde coinciden los campos en la definición anterior, no necesariamente es la intersección de sus dominios.

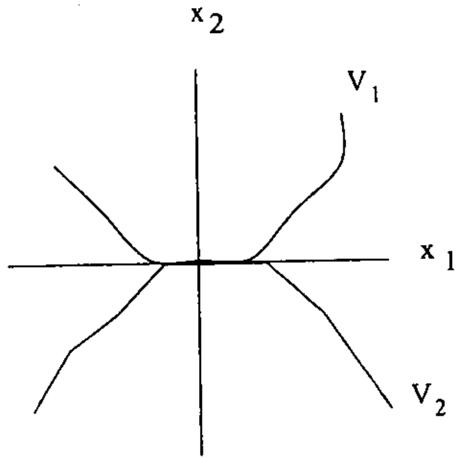

Figura 1.1: Representantes del gérmen determinado por $V = 0$, en el origen.

Sean V_1, V_2 gérmenes de campos vectoriales definidos en vecindades del origen en $\mathbb{C}^n$. El sistema definido por el campo vectorial V_1 sera la ecuación diferencial dada por $\dot{x} = V_1(x)$.

Definición 1.2. V_1 y V_2 son *diferenciablemente equivalentes* si existe un difeomorfismo H del espacio de fase del primer sistema en el espacio de fase del segundo, convirtiendo las curvas de fase orientadas del primer sistema en las curvas de fase del segundo.

Observación. De la definición anterior H transforma al gérmen de campo vectorial V_1 en el gérmen de campo vectorial V_2, i.e se satisface la siguiente relación: $DHV_1(x) = V_2 \circ H(x)$.

Proposición 1.1. *Los eigenvalores de la linealización de un gérmen de campo vectorial en un punto singular, son invariantes de la clasificación diferenciable.*

Demostración. Si H manda el punto singular de un gérmen de campo vectorial V_1 en el punto singular de otro gérmen de campo vectorial V_2 diferenciablemente equivalentes, por la observación anterior, H manda a V_1 en V_2, en particular transforma la parter lineal de V_1 (en el punto sigular de

V_1) en la parte lineal de V_2 (en el punto singular de V_2); así, la parte lineal de V_1 (valuado en el punto singular de V_1) es similar a la parte lineal de V_2 (valuado en el punto singular correspondiente); de donde ambas partes lineales tienen los mismos eigenvalores.

■

Observación. Desde el punto de vista diferenciable V_1 y V_2 son indistinguibles.

Definición 1.3. V_1 y V_2 son *topologicamente equivalentes* si existe un homeomorfismo H que preserva orientación, del espacio de fase del primer sistema en el espacio de fase del segundo, el cual convierte el flujo de fase del primer sistema en el flujo de fase del segundo (i.e $H \circ g_1^t x = g_2^t \circ Hx$).

Ejemplos:

1. $\dot{x} = x$, es topológicamente equivalente a $\dot{x} = 2x$;
2. $\dot{x} = x$, es topológicamente equivalente a $\dot{x} = -x$.

Definición 1.4. V_1 y V_2 son *topologicamente orbitalmente equivalentes* si existe un homeomorfismo H del espacio de fase del primer sistema en el espacio de fase del segundo, convirtiendo las curvas de fase orientadas del primer sistema en curvas de fase orientadas del segundo.

Ejemplo:

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -x_1 \ \ ; \ \ \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1.$$

Notese que este ejemplo, es un no ejemplo de equivalencia topologica.

Observación. El periodo de una solución cerrada, es invariante de la clasificación topológica, pero no de la clasificación topologica orbital.

Definición 1.5. V_1 y V_2 son *analiticamente equivalentes* si existe un biholomorfismo H del espacio de fase del primer sistema en el espacio de fase del segundo, el cual convierte el flujo de fase del primer sistema en el flujo de fase del segundo.

Definición 1.6. V_1 y V_2 son *analiticamente orbitalmente equivalentes* si existe un biholomorfismo H del espacio de fase del primer sistema en el espacio de fase del segundo convirtiendo curvas de fase orientadas del primer sistema en curvas de fase orientadas del segundo.

Definición 1.7. Un *campo vectorial formal* $\hat{V}$ con punto singular en cero es una expresión de la forma:

$$\hat{V} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde f_j esta en el ideal maximal del anillo $K[[x]]$ de series formales con coeficientes en K, (ver apéndice B).

Observación. Para cualquier gérmen de campo vectorial V (analítico o C^∞) con un punto singular aislado, le podemos asociar un campo vectorial formal, que consiste en *la serie de Taylor del gérmen* V, al cual denotaremos por $\hat{V}$.

Definición 1.8. V_1 y V_2 son *formalmente equivalentes* si existe una substitución formal H (ver apéndice C) tal que $\hat{H}(0) = 0$ y se satisface la relación:

$$D\hat{H}\hat{V}_1 = \hat{V}_2 \circ \hat{H}.$$

Observación. Una condición necesaria para la equivalencia analítica o C^∞ de gérmenes de campos vectoriales, es que, las correspondientes series de Taylor formales (ver apéndice C) sean formalmente equivalentes; así, la clasificación formal precede a la clasificación C^∞ y analítica de gérmenes de campos vectoriales. La clasificación formal (y analítica en ciertos casos) esta dada por el toerema de Poincaré [1.3] y el teorema de Poincaré-Dulac [1.5] (ver sección 1.3).

Definición 1.9. V_1 y V_2 son *formalmente orbitalmente equivalentes* si existe una substitución formal $\hat{H}$ (ver apéndice C), tal que $\hat{H}(0) = 0$ y ademas se satisface la igualdad:

$$D\hat{H}\hat{V}_1 = \hat{F}\hat{V}_2$$

para alguna serie de potencias formal $\hat{F}$ invertible en el punto.

Observación. En el caso en que las series formales $\hat{H}$ y $\hat{F}$ convergan, entonces, de las definiciones de equivalencia formal y equivalencia formal orbital obtenemos las definiciones de equivalencia analítica y equivalencia analítica orbital respectivamente.

Definición 1.10. Un $m - jet$ de una función suave en el origen del espacio $\mathbb{C}^k$ *o* $\mathbb{R}^k$, esta definido como las clases de funciones cuya expansión en series de Taylor en el punto 0 coinciden hasta terminos de orden m.

Definición 1.11. *La clase* ν_n, es la clase de gérmenes de campos vectoriales holomorfos en $(\mathbb{C}^2, 0)$ que comienzan con términos de orden n (i.e. sus primeros $(n-1) - jets$ son cero y el $n - jet$ es no cero).

Definición 1.12. Decimos que *una propiedad P de una ecuación, es genérica* (en el sentido topológico) si el conjunto de aquellas ecuaciones para las cuales se cumple P, es una intersección numerable de abiertos densos.

Ejemplo:
El conjunto definido por los polinomios de grado n con coeficientes complejos con la propiedad de tener ceros simples (i.e n ceros distintos), es una propiedad genérica en el conjunto de los polinomios con coeficientes complejos de grado n, usando la topologia usual de $\mathbb{C}^{n+1}$.

1.2 Teorema principal.

Genéricamente dos gérmenes de campos vectoriales en ν_n que son formalmente orbitalmente equivalentes son analíticamente orbitalmente equivalentes.

1.3 Teoremas clasicos.

1.3.1 Formas normales

Reducción formal a las formas normales lineales.

En lugar de un campo vectorial, consideremos una serie de potencias formal que toma valores en $\mathbb{C}^r$, $V(x) = Ax + \ldots$ (donde los puntos denotan terminos de orden mayor que uno). Supongamos que los eigenvalores $\lambda_j,\ j = 1, ..., r$ de A son distintos.

Definición 1.13. La $r - ada$ $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ de eigenvalores de A se dice que es *resonante*, si entre los eigenvalores existe una relación entera de la forma:

$$\lambda_s = (m, \lambda),\ m = (m_1, ..., m_r),\ m_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{r} m_k \geq 2.$$

Ejemplos:

1. $\lambda = (0, n)$ con $n \in \mathbb{N}^+$, $\lambda_2 = ((m_k, 1), (0, n))$ $\forall m_k \geq 2$, es resonsante.

2. $\lambda = (n, m)$ con $n, m \in \mathbb{N}^+$ y $n \neq m$, no es resonante.

Definición 1.14. A la relación $\lambda_s = (m, \lambda)$, se le llama una *resonancia.*

Definición 1.15. El número $|m| = \sum_{k=1}^{r} m_k$ es llamado el *orden de la resonancia.*

Observación. Para una misma $r - ada$ λ resonante puede haber distintos ordenes de la resonancia.

Teorema 1.1. *(de Poincaré;Ver referencia [2]) Si los eigenvalores de la matriz A son no resonantes, entonces la ecuación*

$$\dot{x} = Ax + ...$$

se puede reducir a una ecuación lineal de la forma

$$\dot{y} = Ay$$

por un cambio formal de varaible $x = y + ...$ (donde los puntos denotan series que comienzan con terminos de grado mayor que uno).

El caso resonante.

Consideremos la $r - ada$ $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$ de los eigenvalores del operador A y supongamos que es resonante. Sea e_s un vector de la base en la cual A es diagonal; sean x_i las coordenadas con respecto a los vectores básicos e_i y sea $x^m = x_1^{m_1} ... x_r^{m_r}$ un monómio en terminos de las coordenadas x_i.

Definición 1.16. El *monómio* $x^m e_s$ que toma valores en $\mathbb{C}^r$ se dice que es *resonante* si $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geq 2$.

Consideremos la ecuación diferencial $\dot{x} = Ax + ...$ dada por la serie formal $V(x) = Ax + ...$

Teorema 1.2. *(de Poincaré-Dulac; Ver referencia [2]). La ecuación $\dot{x} = Ax + ...$ puede reducirse a la forma canonica*

$$\dot{y} = Ay + W(y)$$

por medio de un cambio formal de variable $x = y + ...$; donde todos los monómios en la serie W son resonantes.

Dominios de Poincaré y Siegel.

Consideremos el espacio complejo r-dimensional $\mathbb{C}^r = \{\lambda : \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r)\}$ de todas las posibles $r - adas$ de eigenvalores.

Definición 1.17. Un hiperplano en $\mathbb{C}^r$ dado por una ecuación

$$\lambda_s = (m, \lambda),\ m = (m_1, ..., m_r),\ m_k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{r} m_k \geq 2,$$

con coeficintes enteros es llamado *un plano resonante.*

Definición 1.18. Una $r - ada$ de eigenvalores λ pertenece al *dominio de Poincaré,* si la envolvente convexa de los r puntos $\{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ no contiene al cero.

Definición 1.19. Una $r - ada$ de eigenvalores λ pertenece al *dominio de Siegel,* si el cero esta en la envolvente convexa de los r puntos $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$.

Ejemplo:

El dominio de Poincaré en el plano complejo esta dado por:

$$\{\lambda : \lambda = (\lambda_1, \lambda_2)\ y\ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \{\mathbb{R}^- \setminus \{0\}\}\}.$$

Y el dominio de Siegel en el plano complejo esta dado por el complemento del dominio de Poincaré.

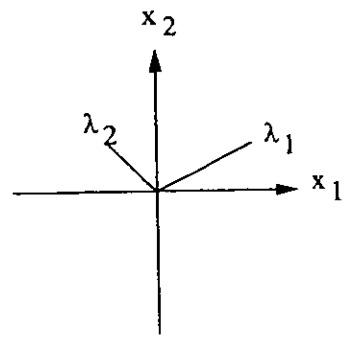

Figura 1.2: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ en el dominio de Poincaré en el plano complejo.

Observación. La propiedad de pertenecer al dominio de Poincaré en el caso del plano complejo es una propiedad genérica.

Ahora supongamos que el campo vectorial esta dado por una serie potencias formal convergente, es decir, consiremos ecuaciones diferenciales holomorfas.

Teorema 1.3. *(de Poincaré; Ver referencia [2]). Si la n-ada de los eigenvalores de la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en un punto singular, pertenece al dominio de Poincaré y es no resonante, entonces, el campo es analiticamente equivalente a su parte lineal en la vecindad del punto singular.*

Definición 1.20. Un punto $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ se dice que es del tipo (C, ν) si para cualquier s, $(s = 1, ..., r)$ se tiene

$$|\lambda_s - (m, \lambda)| \geq \frac{C}{|m|^\nu}$$

para todos los vectores m con componentes enteras no negativas es decir m_i, $\sum_{k=1}^r m_k \geq 2$.

Teorema 1.4. *(de Siegel; Ver referencia [2]). Si la n-ada de los eigenvalores de la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en un punto singular, forman un vector del tipo (C, ν), entonces, el campo es analiticamente equivalente a su parte lineal en la vecindad del punto singular.*

Teorema 1.5. *(de Poincaré-Dulac; Ver referencia [2]). Si los eigenvalores de la parte lineal de un campo vectorial holomorfo en un punto singular pertenecen al dominio de Poincaré, entonces, en una vecindad del punto singular, el campo es analiticamente equivalente a un campo polinomial en el cual todos los monómios* $x^m e_s$ *con coeficientes de grado mayor que uno son resonantes.*

2

Invariantes analíticos de campos vectoriales en puntos singulares.

En este capítulo sentaremos las bases para el trabajo subsecuente. Primero discutiremos un método para analizar puntos singulares de campos vectoriales (el blow-up y σ-proceso), el cual será una herramienta fundamental para nuestro estudio de campos vectoriales analíticos en $\mathbb{C}^2$ en una vecindad de los puntos singulares. Posteriormente damos dos tipos particulares de clases de gérmenes de campos vectoriales holomorfos en ν_n, las clases Σ_n y Σ'_n; estas clases estan en función de los blow-ups de los gérmenes de campos vectoriales en ν_n y de condiciones extras sobre los puntos singulares y los eigenvalores de los operadores lineales valuados en estos puntos singulares. En la sección 2.5 definimos el índice para subvariedades integrales, y con éste demostramos que, para gérmenes de campos vectoriales en la clase Σ'_n, la suma de los índices en sus $n+1$ puntos singulares es igual a -1. En la sección 2.6 se definen las esferas marcadas y la clase $\Sigma(L_n)$; una vez definidas estas, encontramos dos primeros invariantes de la clasificación orbital analítica: la suma de los números característicos de la esfera marcada de un gérmen de la clase Σ'_n es -1 y la clasificación orbital analítica de gérmenes en la clase Σ'_n se reduce a la clasificación orbital analítica de gérmenes de la clase $\Sigma(L_n)$. Posteriormente se define la transformación de monodromía, así como el grupo de monodromía de los gérmenes de la clase $\Sigma(L_n)$. Veremos que: los grupos de monodromía de los gérmenes de la clase $\Sigma(L_n)$ que son analíticamente orbitalmente equivalentes son analíticamente equivalentes. Así mismo se definen las curvas separatrices, así como los conjuntos separatrices asociados al blow-up de gérmenes de campos vectoriales en Σ'_n, con los cuales encontramos más invariantes analíticos: el conjunto separatriz de un gérmen de la clase Σ'_n es una curva analítica reducible que consta de n+1 componentes irreducibles; así como, los conjuntos separatrices de gérmenes de la clase Σ'_n que son formalmente orbitalmente equivalentes son equivalentes analíticamente. Finalmente daremos las condiciones de genericidad impuesta a los gérmenes de campos vectoriales en la clase ν_n en el teoréma principal y para terminar con este capítulo, encontramos que para puntos singulares génericos de campos vectoriales holomorfos con transformaciones de monodromía analíticamente equivalentes y mismos números característicos en los puntos singulares, los campos resultan analíticamente orbitalmente equivalentes en los puntos singulares.

2.1 Resolución de singularidades de campos vectoriales.

Para un estudio en detalle de campos vectoriales (y mas en general aún, de objetos matemáticos) cerca de sus puntos singulares, es de mucha utilidad una herramienta que, por así decirlo "explote" al punto singular para tener una resolución lo suficientemente fina del punto singular y una vecindad de él, esto es llamado la resolución de la singularidad. En terminos analíticos, estamos hablando de elegir un sistema de coordenadas en una vecindad del punto singular, tal que en este sistema "un pequeño desplazamiento del punto singular produzca un agrandamiento de este desplazamiento".

2.1.1 Blow-up y σ-proceso.

Sea K un campo (que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Definiremos primeramente el blow-up de K^2 en el origen; para ello, definamos la aplicacíon $\alpha : K^2\backslash\{0\}\rightarrow KP^1$ la cual asocia a cada punto de $K^2\backslash\{0\}$ la recta que pasa por este punto y el origen, a la que denotaremos por $(x_1 : x_2)$.

Definición 2.1. *El blow-up de K^2 en el origen* es el subconjunto de K^2xKP^1 dado por la cerradura de la gráfica Γ de la aplicacíon α; es decir

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, (x_1 : x_2))\}\bigcup(\{0\}\mathrm{x}KP^1)\}.$$

Observación. Γ es una superficie cuyo atlas (holomorfo si $K = \mathbb{C}$ y analítica real si $K = \mathbb{R}$) es generado por el sistema de coordenadas $\{(\tilde{U}_i, \beta_i)\}$, $i = 1, 2$ donde los $\tilde{U}_i$ son los abiertos en Γ definidos como:

$$\tilde{U}_1 = \left\{(x_1, x_2, (1 : \frac{x_2}{x_1})) : x_1{\neq}0\right\}\bigcup(\{0\}\mathrm{x}KP^1).$$

$$\tilde{U}_2 = \left\{(x_1, x_2, (\frac{x_1}{x_2} : 1)) : x_2{\neq}0\right\}\bigcup(\{0\}\mathrm{x}KP^1);$$

y β_i son las aplicaciones $\beta_i : \tilde{U}_i\rightarrow K^2\backslash\{0\}$ dadas por:

$$\beta_1(x_1, x_2, (1 : u)) = (x_1, u);\ \beta_1(0, 0, (1 : u)) = (0, u).$$

$$\beta_2(x_1, x_2, (v : 1)) = (x_2, v);\ \beta_2(0, 0, (v : 1)) = (0, v).$$

Definimos la aplicacíon π:$\Gamma\rightarrow K^2$ como la proyección en el primer factor (i.e $\pi(x_1, x_2, (x_1 : x_2)) = (x_1, x_2)$; $\pi(0, 0, (x_1 : x_2) = (0, 0))$. Esta proyección π vista en términos de nuestras funciones coordenadas es:

$$\pi \circ \beta_1^{-1}(x_1, u) = (x_1, ux_1)$$

y

$$\pi \circ \beta_2^{-1}(x_2, v)(vx_2, x_2)$$

y por lo tanto es holomorfa (analítica real).

Definición 2.2. A la subvariedad L que resulta de considerar la imagen inversa del origen de K^2 bajo la transformación π, se le llama *el divisor* ($i.e$ $L = \{0\}\mathrm{x}KP^1$).

Observación. La proyección de $\Gamma \setminus L$ en el primer factor, es un biholomorfismo si $K = \mathbb{C}$ (un difeomorfismo analítico si $K = \mathbb{R}$), y ademas la función inversa esta dada por:

$$\sigma(x_1, x_2) = \pi^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, (x_1 : x_2)).$$

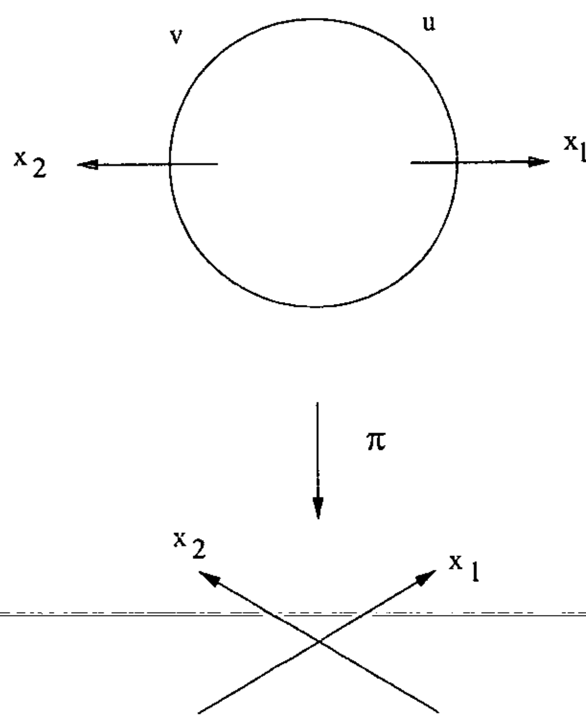

Figura 2.1: El blow-up Γ junto con la proyección π.

Definición 2.3. A el proceso de pasar de K^2 a Γ se le llama, *el σ- proceso con centro en cero.*

Definición 2.4. A la transformación π se le llama *el antisigma-proceso.*

El blow-up nos permite estudiar campos vectoriales en una vecindad de su punto singular descomponiendo a éste punto singular en puntos singulares mas simples como veremos a continuación. Para simplificar la notación llamaremos $\pi_i^{-1} = \beta_i \circ \pi^{-1}$ $(i = 1, 2)$.
Mediante la diferencial de π_i^{-1}($i.e$ $D\pi_i^{-1}$) transformamos gérmenes de campos vectoriales en el origen en gérmenes de campos vectoriales en una vecindad $\tilde{U} \backslash L$ de L (holomorfos si $K = \mathbb{C}$ o diferenciables si $K = \mathbb{R}$) los cuales se extienden a L como cero. Las expresiones de $D\pi_i^{-1}$, $(i = 1, 2)$ estan dadas por

$$D\pi_1^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix}$$

$$D\pi_2^{-1}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2}. \end{pmatrix}$$

Consideremos la restricción de un gérmen de campo vectorial holomorfo V:$(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, con un cero aislado en el origen. Supongamos que el campo vectorial V comienza con terminos de grado n ($i.e.$ $V \epsilon \nu_n$). Por V_i denotaremos a la restricción del campo $D\pi^{-1}V$ a la vecindad $\tilde{U}_i \backslash L$, estos campos V_i tienen las expresiones siguientes en sus respectivas coordenadas: $V_i = x_i^{n-1}\tilde{V}_i$, $(i = 1, 2)$ donde los factores $\tilde{V}_i$, $(i = 1, 2)$ estan dados por:

$$\tilde{V}_1(x_1, u) = (x_1(P_n(1, u) + x_1 R_1(x_1, u)), Q_n(1, u) - uP_n(1, u) + x_1 R_2(x_1, u))$$

$$\tilde{V}_2(x_2, v) = (x_2(Q_n(1, v) + x_2 S_1(x_2, v)), P_n(1, v) - vQ_n(1, v) + x_2 S_2(x_2, v)),$$

donde P_n, Q_n son polinomios de grado n y R_k, S_k, $k = 1, 2$ son funciones holomorfas.

Observación. Los factores $\tilde{V}_i$ son campos vectoriales holomorfos.

Observación. Los campos $\tilde{V}_i$ definen un campo de direcciones $\tilde{V}$ en todo Γ, cuya restricción a $\Gamma \setminus L$ se corresponde mediante $D\pi_i$ con el campo de direcciones generado por V en $K^2 \backslash \{0\}$.

2.2 Clase Σ_n.

Usando la herramienta así como la notación de la sección anterior, damos algunas definiciones y observaciones que usaremos en el resto del trabajo.

Definición 2.5. El campo de direcciones $\tilde{V}$ es llamado *el blow-up* del campo vectorial V.

Observación. Todos los puntos singulares de $\tilde{V}$ están en L ya que V es singular solo en el origen; más aun, sólo hay un número finito de ellos, a saber, $n+1$ (contando multiplicidades). Los cuales satisfacen alguna de las ecuaciones:
$Q_n(1,u) - uP_n(1,u) = 0$
ó
$P_n(1,v) - vQ_n(1,v) = 0$.

Sea c una curva en el plano complejo definida por la ecuación $f(x_1, x_2) = 0$. Sea $p = (a, b)$ un punto de $\mathbb{C}^2$; mediante un cambio de coordenadas podemos suponer que $p = (0,0)$. Escribimos a f como una suma de polinomios homogeneos f_i de grado i en las variables x_1 y x_2; es decir:

$$f = f_1 + \dots + f_d + \dots \tag{2.1}$$

Definición 2.6. La *multiplicidad de p en c* es el menor entero r para el cual $f_r \neq 0$

Definición 2.7. Los factores lineales en la expresión de f_r (ecuación 2.1) determinan *las direcciones de tangencia.*

Observación. Sólo hay un número finito de direcciones de tangencia para $\tilde{V}$.

Observación. En una vecindad de cualquier punto singular, el blow-up $\tilde{V}$ está generado por un campo vectorial holomorfo.

Definición 2.8. Un punto singular de un campo vectorial se llama *elemental* si al menos uno de los eigenvalores del campo linealizado en el punto singular es distinto de cero.

Definición 2.9. El *blow-up de un gérmen* $V \in \nu_n$, es el blow-up de alguno de los representantes de este gérmen; éste sera denotado por $\tilde{V}$.

Definición 2.10. *La clase* Σ_n, es la clase de gérmenes en ν_n tales que todos los puntos singulares del blow-up (despues de un primer σ-proceso) asociados a estos gérmenes son elementales.

2.3 Ejemplos.

2.3.1 Blow-up, caso real.

Consideremos el cuadrado C=$(-1,1)$x$(-1,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ como una vecindad del origen; a las rectas de pendiente uno y menos uno en el cuadrado C les asignamos un nombre, así como un sentido en cada cuadrante. Preservando éstos bajo las aplicaciones π_i^{-1} y haciendo la identificación de los lados correspondientes de las imágenes, obtenemos una banda de Moebius (Γ).

2.3.2 Desingularización de un campo vectorial.

Sea C el cuadrado definido en 2.3.1.

i)Consideremos el campo:

$V(x_1,x_2) = (V_1(x_1,x_2), V_2(x_1,x_2)) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$. Entonces:

$V_1'(x_1,u) = x_1\ (x_1(1-u^2), u+u^3)$; $V_2'(x_1,v) = x_2\ (2x_2v, v^2-1)$.

$\tilde{V}_1 = (x_1(1-u^2), u+u^3)$; $\tilde{V}_2 = (2x_2v, v^2-1)$.

Analizando los puntos singulares de los campos de direcciones $\tilde{V}_1$ y $\tilde{V}_2$, observamos que para el primero el origen es el único punto singular en C y su parte lineal en este caso es (x_1,u), para el segundo no hay puntos singulares, de donde el retrato fase visto en cartas solo tiene un punto singular (solo hay una dirección de tangencia).

ii)Consideremos el campo:

$V(x_1,x_2) = (V_1(x_1,x_2), V_2(x_1,x_2)) = (x_1^3 - 3x_1x_2, 3x_1^2x_2 - x_2^3)$. Entonces:

$V_1'\ (x_1,u) = x_1^2(x_1(1-3u^2), 2u(u^2+1)$; $V_2'\ (x_1,v)$=$x_2^2\ (x_2(3v^2-1), 2v(1+v^2)$.

$\tilde{V}_1$=$(x_1(1-3u^2), 2u(u^2+1))$;$\tilde{V}_2$=$(x_2(3v^2-1), 2v(1+v^2))$.

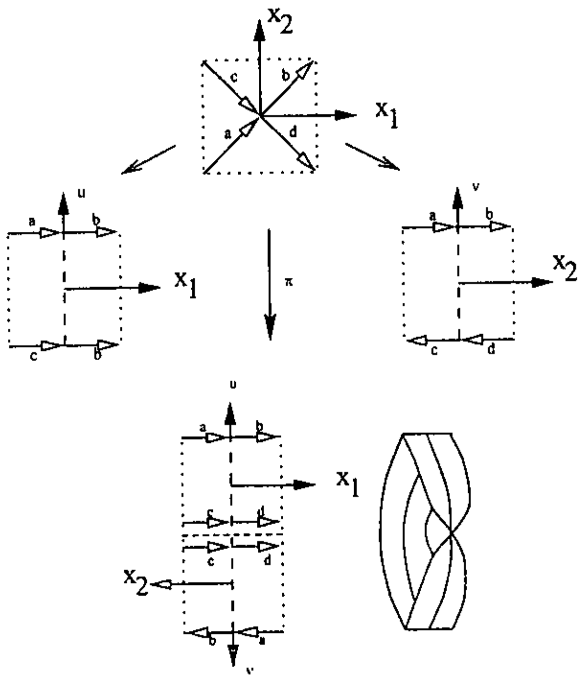

Figura 2.2: El blow-up de una vecindad del origen en $\mathbb{R}^2$ con respecto al origen.

Analizando los puntos singulares de $\tilde{V}_1$ y $\tilde{V}_2$, observamos que para el primero el origen es el único punto singular en C y su parte lineal en este caso $(x_1, 2u)$; para el segundo, tambien el origen es su único punto singular pero la parte lineal en este caso es $(-x_2, 2v)$ de donde hay solo dos direcciones de tangencia.

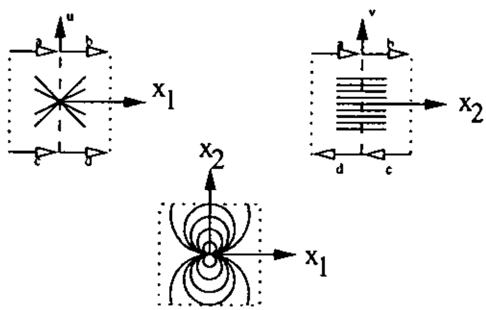

Figura 2.3: El blow-up del campo vectorial $V(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$ con respecto al origen en $\mathbb{R}^2$.

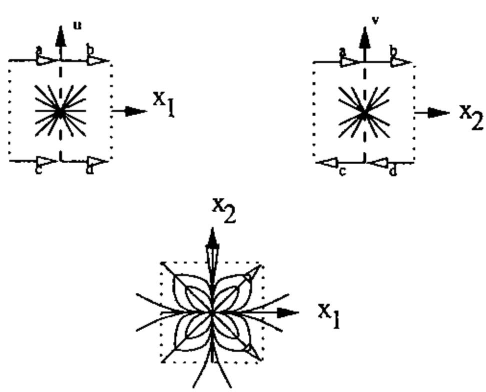

Figura 2.4: El blow-up del campo vectorial $V(x_1, x_2) = (x_1^3 - 3x_1x_2, 3x_1^2x_2 - x_2^3)$ con respecto al origen en $\mathbb{R}^2$.

2.4 Clase Σ'_n

Sea M una variedad compleja de dimensión n.

Definición 2.11. *Una foliación (por curvas) no singular* $\tilde{F}$ de M es una descomposición de M en subconjuntos conexos disjuntos $\{l_\alpha\}_{\alpha\in I}$ denominados hojas de la foliación, tal que todo punto p en M tiene una vecindad V_p y un biholomorfismo $\phi_p : V_p \to W_p \subseteq \mathbb{C}^n$, que satisface que, para toda hoja l_α las componentes conexas de $\phi_p(V_p \bigcap l_\alpha)$ quedan descritas por ecuaciones de la forma:

$$w_1 = k_1, ..., w_{n-1} = k_{n-1},$$

donde $(w_1, ..., w_n)$ son las coordendas de W_p.

Denotaremos por F_V a la foliación de una pequeña vecindad de cero por curvas de fase de algún representante del gérmen V, y por $\tilde{F}_V$ a la foliación del blow-up de esta vecindad de cero por curvas de fase del blow-up $\tilde{V}$.

Definición 2.12. A la foliación $\tilde{F}_V$ la llamaremos el *blow-up de la foliación* F_V.

Definición 2.13. Decimos que el punto $p \in M$ es un *punto singular no degenerado* de un campo vectorial $V \in \chi^r(M)$ si $DV_p : T_pM \to T_pM$ no tiene al cero como un eigenvalor.

Lema 2.1. *Es una propiedad genérica, que los campos vectoriales tengan puntos singulares no degenerados.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del hecho de que para las matrices de $n \times n$ con coeficientes complejos tener eigenvalores distintos de cero es una propiedad genérica.

■

Definición 2.14. Decimos que λ_j es el *número característico del punto singular* p_j si λ_j es el cociente de los eigenvalores λ_j^1, λ_j^2 de la parte lineal del campo de direcciones $\tilde{V}$ en el punto p_j (*i.e* $\lambda_j = \lambda_j^1/\lambda_j^2$).

Observación. Esta definición esta univocamente determinada, si decimos cual de los eigenvalores es el primero. Para un punto singular en L supondremos que el vector, el cual es tangente a la solucion en L es el segundo.

Sea $V \in \Sigma_n$ un gérmen de un campo vectorial holomorfo. Supongamos que:

1. $\tilde{V}$ tiene exactamente n+1 puntos singulares, que ademas son no degenerados (los cuales estan en el divisor L). Sean $p_1, ..., p_{n+1}$ los puntos singulares de $\tilde{V}$.

2. $L_V := L \backslash \{p_1, ..., p_{n+1}\}$, es la hoja de la foliación $\tilde{F}_V$ de Γ, la cual se proyecta en el origen.

Definición 2.15. *La clase* Σ'_n, es la clase de gérmenes en Σ_n que satisfacen las condiciones 1,2 antes mencionadas y cuyos número característicos no son racionales positivos, ni cero $(i.e\ \lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}\})$.

Lema 2.2. *Es una condición genérica que el número característico λ_j de un campo vectorial satisfaga la condición de no ser un racional positivo ni cero $(i.e\ \lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\})$.*

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}$ es un abierto denso en $\mathbb{C}$.

∎

Proposición 2.1. *La propiedad de los gérmenes en ν_n de pertenecer a la clase Σ'_n es una propiedad genérica en ν_n.*

Demostración. Se sigue del ejemplo de propiedad genérica y de los dos lemas anteriores.

∎

2.5 Indice para subvariedades integrales.

Sea M una variedad compleja de dimensión 2. Sea $p \in M$ un punto singular aislado de un campo vectorial holomorfo V, y sea S una curva compleja que pasa por el punto p y que en todos sus puntos (distintos de p) su vector tangente, es tangente a la dirección del campo en los mismos puntos. Sea $\phi{:}(\mathbb{C}^2, 0) \to (M, p)$ una parametrización holomorfa tal que:

1. $\phi(0,0) = p$ y que la curva $x_1 \to \phi(x_1, 0)$, $x_1 \in \mathbb{C}$ es una parametrización de una vecindad de S.
2. $\phi^* V = (A, B)$ donde A y B satisfacen: $A(0,0) = B(0,0) = B(x_1, 0) = 0$.

Definición 2.16. El *índice de V relativo a S* en p es:

$$i_p(V, S) = Res_{x_1=0} \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,0)} \left(\frac{B}{A}\right)$$

Observación. El índice $i_p(V, S)$ es invariante bajo cambios de coordenadas.

Demostración. Sean ϕ y ψ parametrizaciones de S como en la definición, tales que $\phi^* V = (A, B)$ y $\psi^* V = (C, D)$, donde A, B son funciones de x_1, x_2 y C, D son funciones de y_1, y_2 respectivamente. Vamos a demostrar que:

$$Res_{x_1=0} \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,0)} \left(\frac{B}{A}\right) = Res_{y_1=0} \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_{(y_1,0)} \left(\frac{D}{C}\right).$$

Calculando las parciales $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{B}{A})$ y $\frac{\partial}{\partial y_2}(\frac{D}{C})$ tenemos que:

$$Res_{x_1=0} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_{(x_1,0)} \left(\frac{B}{A}\right) \right) = Res_{x_1=0} \left(\left.\frac{\frac{\partial B}{\partial x_2}}{A}\right|_{(x_1,0)} \right)$$

$$Res_{y_1=0} \left(\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_{(y_1,0)} \left(\frac{C}{D}\right) \right) = Res_{y_1=0} \left(\left.\frac{\frac{\partial D}{\partial y_2}}{C}\right|_{(y_1,0)} \right)$$

Consideremos el biholomorfismo $H(x_1, x_2) = (H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2))$ con $H_1 = id + h_1$ y $H_2 = id + h_2$ tal que $DH(A, B) = (C, D)$, haciendo los calculos respectivos encontramos que:

$$(C,D)=\left(A\frac{\partial H_1}{\partial x_1}+B\frac{\partial H_1}{\partial x_2},A\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+B\frac{\partial H_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{(H^{-1}(y))}$$

de esta última igualdad y usando la propiedad de B se tiene que:

$$C|_{H^{-1}(y_1,0)}=A(x_1,0)\frac{\partial H_1}{\partial x_1}(x_1,0)$$

y

$$\frac{\partial D}{\partial y_2}\Big|_{H^{-1}(y_1,0)}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(A\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+B\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial H_1^{-1}}{\partial y_2}\Big|_{H^{-1}(y_1,0)}+$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(A\frac{\partial H_2}{\partial x_1}+B\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right)\frac{\partial H_2^{-1}}{\partial y_2}\Big|_{H^{-1}(y_1,0)}$$

de donde un cálculo directo muestra que:

$$\frac{\frac{\partial D}{\partial y_2}}{C}\Big|_{(y_1,0)}=\frac{\frac{\partial B}{\partial x_2}}{A}\Big|_{(x_1,0)};$$

ahora, tomando el residuo de las últimas dos ecuaciones queda demostrada la observación.

∎

Teorema 2.1. *Sea $V\in\Sigma_n'$ un gérmen de campo vectorial y sea L el divisor asociado al gérmen V, entonces, la suma de los índices $i_p(V,L)$ sobre los $n+1$ puntos singulares p_j, es igual a -1.*

Demostración. Supongamos que el gérmen V se escribe de la forma: $V=(P(x_1,x_2),Q(x_1,x_2))$ donde P y Q son gérmenes de funciones analíticas y sea $\tilde V$ su blow-up. Supongamos que el campo $\tilde V$ tiene todos sus puntos singulares en la carta (x_1,u), entonces $\tilde V$ se escribe de la forma:

$$\tilde V(x_1,u)=(x_1(P_n(1,u)+x_1R_1(x_1,u)),Q_n(1,u)-uP_n(1,u)+x_1R_2(x_1,u)),$$

donde P_n,Q_n son polinomios de grado n y $R_k,\ k=1,2$ son funciones holomorfas; sean $u_j,\ j=1,...n+1$ los ceros del polinomio Q_n-uPn. Aplicando la definición de índice tenemos:

$$i_p(V,L) = Res_{u=u_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=0}\left(\frac{x_1(P_n(1,u)+x_1R_1)}{Q_n(1,u)-uP_n(1,u)+x_1R_2}\right)\right) =$$

$$= Res_{u=u_j}\left(\frac{P_n(1,u)}{Q_n(1,u)-uP_n(1,u)}\right)$$

como $Q_n(1,u) - uP_n(1,u)$ se anula exactamente en los puntos u_j se tiene que: $Q_n(1,u) - uP_n(1,u) = \prod_{j=1}^{n+1}(u-u_j)$ entonces

$$P_n(1,u) = \frac{Q_n(1,u) - \prod_{j=1}^{n+1}(u-u_j)}{u}$$

de donde:

$$\sum_{p=p_1}^{p_{n+1}} i_p(V,L) = \sum_{j=1}^{n+1} Res_{u=u_j}\left(\frac{Q_n(1,u) - \prod_{j=1}^{n+1}(u-u_j)}{u\prod_{j=1}^{n+1}(u-u_j)}\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} Res_{u=u_j}\left(-\frac{1}{u} + \frac{Q_n(1,u)}{u\prod_{j=1}^{n+1}(u-u_j)}\right) = -1$$

lo que prueba el teorema 2.1.

■

Proposición 2.2. *Sean V y L como en el teorema anterior, sean p_j, $j = 1,...,n+1$ los puntos singulares de V sobre L y λ_j los números característicos correspondientes, entonces, $i_{p_j}(V,L) = \lambda_j$ para toda j.*

Demostración. Supongamos que la expresión local del campo $\tilde{V}$ en el punto p_j esta dado por:

$$\tilde{V}(x_1,u) = A(x-1,u)\frac{\partial}{\partial x_1} + uB(x-1,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

con

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}\bigg|_{(0,p_j)} = \lambda_j^1; \quad B(0,p_j) = \lambda_j^2$$

consideremos la ecuación diferencial $\frac{du}{dx_1} = \frac{uB(x_1,u)}{A(x_1,u)} = F(x_1,u)$, notese que las soluciones de esta ecuación diferencial son tangentes a $\tilde{V}$; por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{(0,u)} = \frac{\lambda_j^1}{\lambda_j^2 u} + O(1)$ con lo cual concluimos la demostración de la proposición.

■

2.6 Clase $\Sigma'(L_n)$ y esferas marcadas.

Definición 2.17. Una *esfera marcada* $(L; p_1, ..., p_{n+1}; \lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ *de un gérmen* $V \in \Sigma'_n$, es el divisor L asociado a V, con los puntos singulares del blow-up $\tilde{V}$ marcados y con los números característicos correspondientes a cada punto singular.

Observación. La suma de los números característicos de la esfera marcada de un gérmen de la clase Σ'_n es -1.

Demostración. Usando el teorema 2.1 y la proposición 2.2 obtenemos el resultado.

■

Definición 2.18. Dos *esferas marcadas* se dice que son *equivalentes* si existe un isomorfismo conforme de la esfera marcada del primer sistema en la esfera marcada del segundo sistema, que hace corresponder el marco de una esfera $(L; p_1, ..., p_{n+1}; \lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ con el marco de la otra.

LEMA 1. Las esferas marcadas de dos gérmenes de Σ'_n que son formalmente orbitalmente equivalentes son equivalentes.

Demostración. Consideremos los campos V, $W \in \Sigma'_n$. Sean $\hat{H}$ y $\hat{F}$ automorfismos formales con $\hat{F}$ invertible tales que: $D\hat{H}\hat{V} = \hat{F}\hat{W} \circ \hat{H}$. Supongamos que V es función de x_1, x_2 y que W es función de y_1, y_2. Sea $\hat{H}(x_1,x_2) = (x_1,x_2) + (\sum(h^1_{ij}x_1^i x_2^j), \sum(h^2_{ij}x_1^i x_2^j))$ y sea $\hat{F}(y_1,y_2) = \sum(f_{i,j}y_1^i y_2^j)$ con $f_{0,0} \neq 0$. Calculando el blow-up de los campos formales $\hat{V}, \hat{W}, \hat{F}\hat{V}$ tenemos asociados a cada uno de estos campos, un campo de direcciones el cual tiene

n+1 puntos singulares en L, estos puntos son las raíces de un polinomio de grado n+1.
El campo de direcciones inducido por $D\pi^{-1}(D\hat{H}\hat{V})$ toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=n} y_1^{k-(n-1)}(V_k^1(1,u_0)+...) \\ \\ \sum_{k=n} y_1^{k-n}\{-u_0V_k^1+V_k^2\}+... \end{pmatrix}$$

y el polinomio asociado a este campo es:
$-u_0V_n^1(1,u_0)+V_n^2(1,u_0)$.
El campo de direcciones inducido por $D\pi^{-1}(\hat{W})$ toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=n} y_1^{k-(n-1)}({W_k}^1(1,u_0)+...) \\ \\ \sum_{k=n} y_1^{k-n}\{-u_0{W_k}^1{W_k}^2\}+... \end{pmatrix}$$

y el polinomio asociado a este campo es:
$-u_0{W_n}^1(1,u_0)+{W_n}^2(1,u_0)$
Analizando los polinomios asociados a los campos de direcciones inducidos por $D\pi^{-1}(D\hat{H}\hat{V})$ y por $D\pi^{-1}(\hat{W})$, se puede observar que por ser V y W formalmente orbitalmente equivalentes, los polinomios asociados son linealmente dependientes, por lo cual los puntos singulares estan en correspondencia mediante la transformación identidad, es decir:

$${W_n}^1(1,u_0)=f_{0,0}V_n^1(1,u_0)$$

y

$${W_n}^2(1,u_0)=f_{0,0}V_n^2(1,u_0)$$

Mas aún, los números característicos de los campos de direcciones en estos puntos singulares son los mismos, esto se sigue de un cálculo directo, con lo cual queda demostrado el lema.

■

Definición 2.19. Una *esfera tipo* Σ'_n es una esfera marcada donde sus $n+1$ puntos marcados son tales que sus respectivos números característicos no son racionales no negativos ni cero (i.e. $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}\}$) y su suma es igual a -1.

Sea L_n una esfera tipo Σ'_n.

Definición 2.20. *La clase* $\Sigma(L_n)$, es la clase de gérmenes de Σ_n que tienen esferas marcada equivalentes a L_n.

En virtud del Lema 1, la clasificación orbital analítica de gérmenes en Σ'_n *se reduce a la clasificación orbital analítica de gérmenes de la clase* $\Sigma(L_n)$.

2.7 Grupo de monodromía de los gérmenes de la clase $\Sigma(L_n)$.

Sea L_n una esfera marcada tipo Σ'_n, sean $p_1, ..., p_{n+1}$ sus puntos marcados y $\lambda_1,...,\lambda_{n+1}$ sus números característicos respectivos. Sea L^0 la esfera agujerada (*i.e* $L^0 = L_n \backslash \{p_1, ..., p_{n+1}\}$) y sea $V \in \Sigma(L_n)$; entonces $L_V = L^0$. Sea Γ como en la definición 2.1

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, (x_1 : x_2))\} \bigcup (\{0\} \mathrm{x} KP^1)\}.$$

Definición 2.21. Una *transversal a la foliación no singular* $\tilde{F}_V$ *en* Γ es una subvariedad T inmersa en Γ tal que, para todo punto $p \in \Gamma$ se satisface:

$$T_p\Gamma = T_p\tilde{F}_V \oplus T_pT.$$

Sea l_p hoja de la foliación $\tilde{F}_V$ que pasa por el punto p.

Definición 2.22. Una *transversal local* T *en* p, es una transversal a la foliación $\tilde{F}_V$ definida en una vecindad U_p del punto $p = T \bigcap l_p$, tal que T es un subconjunto cerrado de U_p.

Definición 2.23. (*Transformación de monodromía.*) Sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow L_V$ un lazo cerrado, el cual es un representante de la clase $[\gamma]$ del grupo fundamental de la hoja L_V (i.e $[\gamma] \in \pi_1(L_V)$) y sea $p = \gamma(0) = \gamma(1)$. Sea T_t

una familia de transversales locales a L_V en los puntos $\gamma(t)$, la cual depende continuamente de t y tal que $T_0 = T_1 = T$.
Consideremos la vecindad $U \subset T_0$ del punto p, tal que para cada punto q de la vecindad U, en la hoja de la foliación $\tilde{F}_V$ que pasa por q, existe una curva (el levantamiento de γ en el punto q) $\gamma(q) = \{q(t) \in T_t\}$ que inicia en q, ésta curva se proyecta inyectivamente (excepto en q) en γ a lo largo de la familia de las transversales T_t. Denotaremos por $\Delta_\gamma(q)$ al punto final de $\gamma(q)$. Por la dependencia analítica de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales tenemos que: Δ_γ:$(T,p) \longrightarrow (T,p))$ es una transformación analítica.
El gérmen de la transformación, es la aplicación Δ_γ en p; la aplicación, no depende de la elección del representante de la clase $[\gamma] \in \pi_1(L_V)$.

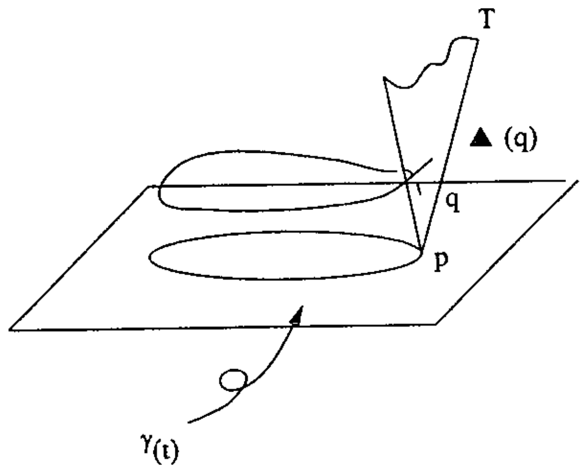

Figura 2.5: Transformación de monodromía.

Sea $\pi_1(L_V,p)$ el grupo fundamental de la hoja de la foliación L_V basado en el punto p y sea $Bih(T,p)$ el grupo de gérmenes de biholomorfismos en una vecindad en T de p que fijan a p.

Observación. $\Delta_\gamma \in Bih(T,p)$ para toda γ en L_V.

Definición 2.24. El homomorfismo $\Delta : \pi_1(L_V,p) \longrightarrow Bih(T,p)$ tal que $[\gamma] \mapsto \Delta_\gamma$ se denomina *homomorfismo de monodromía* de la foliación $\tilde{F}_V$ en el punto p.

Definición 2.25. La imagen del homomorfismo $\triangle$ se denomina *grupo de monodromía* de la foliación $\tilde{F}_V$ en el punto p.

Definición 2.26. Decimos que una hoja L_V de la foliación $\tilde{F}_V$ es *una hoja marcada*, si su grupo fundamental con punto base en algun punto p de la hoja, es finitamente generado y se ha elegido un conjunto finito de generadores $\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}$ del grupo fundamental de L_V en p.

Observación. L^0 es una hoja marcada de la foliación $\tilde{F}_V$ con generadores $\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}$.

Observación. Modificando las coordenadas en la transversal T podemos asumir que $p = 0$ y que $\triangle_j : \triangle_{\gamma_j} : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ como elementos de $Bih(\mathbb{C}, 0)$.

LEMA 2. Sean $\triangle_j$ generadores del grupo de monodromía G_V para el gérmen $V \in \Sigma(L_n)$ entonces :

i) $\triangle_1 \circ ... \circ \triangle_{n+1} = id$.

ii)$\triangle'_j(0) = exp(2\pi i \lambda_j)$ $\forall j = 1, ..., n+1$.

Demostración. Consideremos discos cerrados $\bar{D}_j \subset L^0$ centrados en cada p_j, tales que sean ajenos; sea p cualquier punto en $L^0 \backslash \bar{D}_j$, trazamos lineas desde p que no se intersecten y que conecten a p con la frontera de cada disco cerrado. Definimos γ_j como la curva cerrrada, asociada a la linea y la frontera del disco $j - esimo$. Se puede ver que por la forma en que construimos a las curvas γ_j tenemos que $\gamma_1 \circ ... \circ \gamma_{n+1}$ es homotópica en $L^0 \setminus \{p_1, ..., p_{n+1}\}$ a la curva constante, por lo que $[\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}] = 0$, luego entonces, $\triangle_1 \circ ... \circ \triangle_{n+1} = id$. (ver fig.2.6)

Con las curvas construidas anteriormente y observando, que las derivadas de la transformacion de monodromía en cero (i.e $\triangle'_j(0)$), estan dadas simplemente valuando en p_j, la ecuación de primera variación a lo largo de la curva γ_j de donde se satisface la segunda condición.

■

Definición 2.27. El grupo $G_V := \langle \triangle_1, ..., \triangle_{n+1} \rangle$ con generadores $\triangle_1, ...,$ $\triangle_{n+1}$ es el grupo de monodromía de el gérmen $V \in \Sigma'(L_n)$.

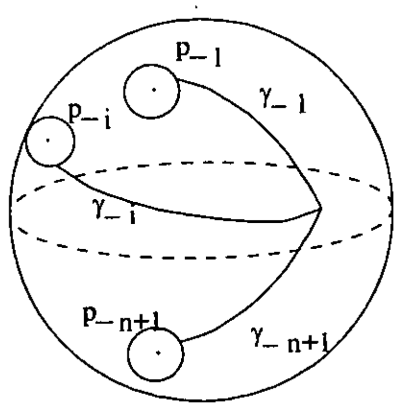

Figura 2.6: Curvas cerradas cuya composición es homotópica a la curva trivial.

Definición 2.28. Dos grupos finitamente generados $G = \langle \Delta_1, ..., \Delta_{n+1} \rangle$ y $\tilde{G} = \langle \tilde{\Delta}_1, ..., \tilde{\Delta}_{n+1} \rangle$ de gérmenes de holomorfismo que fijan el origen, con generadores $\Delta_1, ..., \Delta_{n+1}$ y $\tilde{\Delta}_1, ..., \tilde{\Delta}_{n+1}$ respectivamente, se dice que son *analíticamente (formalmente) equivalentes* si existe un cambio de coordenadas local holomorfo h (formal $\hat{h}$) que conjuga los generadores de esos grupos; es decir $h \circ \Delta_j = \tilde{\Delta}_j \circ h$ ($\hat{h} \circ \hat{\Delta}_j = \hat{\tilde{\Delta}}_j \circ \hat{h}$) para toda $j = 1, \ldots, n+1$.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C},0) & \xrightarrow{\Delta_j} & (\mathbb{C},0) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ (\mathbb{C},0) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_j} & (\mathbb{C},0) \end{array}$$

Sea $V \in \Sigma_n(L_n)$; sean p y q puntos en la hoja L^0.

Proposición 2.3. *Sean Δ, Δ' los homomorfismos de monodromía en p y q respectivamente, entonces, existe un isomorfismo conforme $\bar{\psi}$ tal que $\bar{\psi}$: $\Delta' \mapsto \Delta$; de donde los grupos de monodromía asociados, son analíticamente equivalentes.*

Demostración. Si tomamos otra carta $(U_1, \bar{\varphi_1})$ distingida de la foliación tal que $\bar{\varphi_1}(p) = z_0$ y $\bar{\psi}$ es el biholomorfiso de cambio de coordenadas

$\bar{\psi} : (\mathbb{C}, z_0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ entonces se obtiene el homomorfismo de monodromía $\triangle$' del homomorfismo de monodromía $\triangle$ por conjugacion, es decir: $\triangle'(\gamma) = \bar{\psi} \circ \triangle(\gamma) \circ \bar{\psi}^{-1}$, en particular $\bar{\psi} \circ \triangle_i = \bar{\triangle}_i \circ \bar{\psi}$ de donde podemos concluir que los grupos de monodromía de los gérmenes de la clase $\Sigma_n(L_n)$ en puntos iniciales distintos de la misma hoja son analíticamente equivalentes.

■

Proposición 2.4. *Sean $\gamma_1, ..., \gamma_{n+1}$ y $\gamma'_1, ..., \gamma'_{n+1}$ dos conjuntos de generadores del grupo fundamental de la hoja L^0 basados en los puntos p y q respectivamente, entonces los grupos de monodromía $G_V = \langle \triangle_{\gamma_1}, ..., \triangle_{\gamma_{n+1}} \rangle$ y $G'_V = \langle \triangle_{\gamma'_1}, ..., \triangle_{\gamma'_{n+1}} \rangle$ son analiticamente equivalentes.*

Demostración. Al tomar otro conjunto de generadores γ'_j del grupo fundamental de la esfera agujerada L^0, basados en un punto q no singular de la foliación, siempre podemos construir una curva que una a p con q y haciendo lo analogo a la proposición anterior, los grupos de monodromía asociados a los conjuntos de generadores respectivos son analiticamente equivalentes.

■

Proposición 2.5. *Sean T y T' transversales a L^0 en p distintas, entonces los grupos de monodromía correspondientes a las transversales T y T' son analiticamente equivalentes.*

Demostración. Si tomamos otra transversal T', mediante un cambio de coordenadas biholomorfo podemos llevarla a la transversal T, nuevamente con éste biholomorfismo logramos que los grupos de monodromía correspondientes a las transversales T y T' sean analíticamente equivalentes.

■

LEMA 3. Los grupos de monodromía de los gérmenes de la clase $\Sigma_n(L_n)$ que son analíticamente orbitalmente equivalentes son analíticamente equivalentes.

Demostración. Consideremos V y W gérmenes de la clase $\Sigma_n(L_n)$ que son analíticamente orbitalmente equivalentes, en particular por pertenecer a la misma clase $\Sigma_n(L_n)$, tienen esferas marcadas equivalentes, así, podemos suponer que las esferas marcadas tienen el mismo grupo fundamental y la misma transversal; Sean H y F biholomorfismos tales que hacen a V y a W analíticamente orbitalmente equivalentes, es decir: $DHV = FW$; consideremos los campos de direcciones dados por los blow-ups de los campos V,W,FW, respectivamente; de donde tenemos que $\tilde{V}$ y $\tilde{FW}$ son analíticamente orbitalmente equivalentes en una vecindad de L, sean H' y F' los biholomorfismos que los hacen analiticamente orbitalmente equivalentes (i.e $DH'\tilde{V} = F'\tilde{FW}$).
Notese que las hojas de la foliación de los campos $\tilde{W}$ y $\tilde{FW}$ son las mismas, de donde los grupos de monodromía G_W y G_{FW} son los mismos; así pues basta con ver que los grupos de monodromía G_V y G_{FW} son analíticamente equivalentes, pero esto se sigue del hecho de que el biholomorfismo H' manda soluciones de $\tilde{V}$ en soluciones de $\tilde{FW}$ (i.e manda hojas de la foliación $\tilde{F}_V$ en hojas de la foliación $\tilde{F}_{FW}$).

∎

2.8 Conjuntos separatrices.

Definición 2.29. Sea V un gérmen de campo vectorial holomorfo en $(\mathbb{C}^n, p)$ y sea $c : \mathbb{C} \longmapsto (\mathbb{C}^n, p)$ un gérmen de curva analítica que pasa por el punto p. Decimos que c es una separatriz de V en p si V restringido a c es tangente a c (i.e $V(c(T)) = f(T)c'(T)$,con f holomorfa y $f(T) \neq 0$).

Lema 2.3. *Consideremos un campo vectorial holomorfo V' con punto singular el origen tal que $V' : (u_1, u_2) \longmapsto (\lambda_1 u_1 + ...)\frac{\partial}{\partial u_1} + (\lambda_2 u_2 + ...)\frac{\partial}{\partial u_2}$ (donde los puntos denotan terminos no lineales), supongamos que V' no es linealizable en una vecindad del origen y que los eigenvalores de su parte lineal estan en el dominio de Siegel, entonces, existe un cambio de coordenadas analítico H, definido en una vecindad del origen $(\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $H^*V' = (\lambda_1 x_1 + a_1(x_1, x_2)x_1x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + a_2(x_1, x_2)x_1x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ donde las a_i son funciónes analíticas y $a_i(0,0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que el campo vectorial V' se expresa en la forma:

$$V'(u_1, u_2) = ((\lambda_1 u_1 + f_1(u_1, u_2)), (\lambda_2 u_2 + f_2(u_1, u_2))),$$

donde las f_i son funciones analíticas en una vecindad del origen con parte lineal cero.

Probaremos que existe un cambio de coordenadas holomorfo $(u_1, u_2) = H(x_1, x_2)$ de la forma $H : (x_1, x_2) \longmapsto (x_1 + h_1(x_1, x_2), x_2 + h_2(x_1, x_2))$ con $h_i(x_1, x_2) = \sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} h_{i,q_1,q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2}$ tal que:

$$H^*V'(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1 + \psi_1(x_1, x_2), \lambda_2 x_2 + \psi_2(x_1, x_2)),$$

con $\psi_j(x_1, x_2)$ en el ideal $(x_1 x_2)$ de funciones analíticas generado por el producto $x_1 x_2$.

Así, si $u_j = x_j + h_j(x_1, x_2)$, $j = 1, 2$ entonces $\dot{u_j} = \dot{x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial h_j}{\partial x_2}\dot{x}_2$ y substituyendo $\dot{x_j} = \lambda_j x_j + \psi_j$ obtenemos:

$$\sum_{q_1+q_2=2}^{\infty} (\psi_{j,q_1,q_2} + (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 - \lambda_j) h_{j,q_1,q_2}) x_1^{q_1} x_2^{q_2} =$$

$$f_j(x_1+h_1,x_2+h_2)-(\frac{\partial h_j}{\partial x_1}\psi_1+\frac{\partial h_j}{\partial x_2}\psi_2)\Big|_{(x_1,x_2)}, \qquad (2.2)$$

como queremos que $\psi_j(x_1,x_2)\in(x_1x_2)$ definimos:

$$\psi_{j,q_1,q_2}=0 \ si \ x_1^{q_1}x_2^{q_2}\notin(x_1x_2).$$

y

$$h_{j,q_1,q_2}=0 \ si \ x_1^{q_1}x_2^{q_2}\in(x_1x_2).$$

Por inducción demostraremos que la ecuación (2.2) se puede resolver para h_{j,q_1,q_2} en términos de los coeficientes f_j;
Para $q_1+q_2=2$.
Desarrollando la ecuación 2.2 obtenemos:

$$(\psi_{1,2,0}+\lambda_1h_{1,2,0})x_1^2+(\psi_{1,1,1}+\lambda_1h_{1,1,1})\,x_1x_2+(\psi_{1,0,2}+(2\lambda_2-\lambda_1)h_{1,0,2})\,x_2^2=$$

$$f_{1,2,0}x_1^2+f_{1,1,1}x_1x_2+f_{1,0,2}x_2^2-$$

$$(2h_{1,2,0}x_1+h_{1,1,1}x_2)\left(\psi_{1,2,0}x_1^2+\psi_{1,1,1}x_1x_2+\psi_{1,0,2}+h_{1,0,2}x_2^2\right)$$

$$-(h_{1,1,1}x_1+2h_{1,0,2}x_2)\left(\psi_{1,2,0}x_1^2+\psi_{1,1,1}x_1x_2+\psi_{1,0,2}+h_{1,0,2}x_2^2\right),$$

de donde:

$$\lambda_1h_{1,2,0}=f_{1,2,0}.$$

$$\psi_{1,1,1}+\lambda_2h_{1,1,1}=f_{1,1,1}.$$

$$(2\lambda_2-\lambda_1)h_{1,0,2}=f_{1,0,2}.$$

Analogamente con los coeficientes h_{2,q_1,q_2}.
Supongamos válido para $q_1+q_2\leq k$, por demostrar el caso $q_1+q_2\leq k+1$; primero nótese que los coeficientes de $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ en el segundo miembro de la ecuación 2.2, sólo involucra terminos h_{j,q_1,q_2}, ψ_{j,q_1,q_2} para $|q_1+q_2|\leq|p_1+p_2|$; con un procedimiento análogo al de la base de inducción, podemos encontrar los coeficientes $h_j(x_1,x_2)$ para el caso $q_1+q_2\leq k+1$.
Ahora solo falta probar la convergencia de H (basta con ver la convergencia de las h_j). Dadas cuales quiera dos series $A(x_1,x_2)$ y $B(x_1,x_2)$ con coeficientes positivos escribimos $A\leq B$ si se satisface la desigualdad para cada

uno de los coeficientes, es decir, si $A_{q_1,q_2} \leq B_{q_1,q_2}$ para todo $|q_1+q_2| \geq 1$. Denotaremos por $|C(x_1,x_2)|$ a la serie obtenida de $C(x_1,x_2)$ al remplazar sus coeficientes por sus valores absolutos y por $||C(x)||$ a la serie $|C(x,x)|$, de donde tenemos que: $|C(x_1,x_2)|$ converge para $|x_1|<R, |x_2|<R$ si $||C(x)||$ converge para $|x|<R$.
Así, ahora probaremos que $||h_1|| + ||h_2||$ converge en $|x|<R$ para alguna $R>0$.

Observación. Si $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \notin (x_1 x_2)$ entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$|q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 - \lambda_j| > \delta.$$

Mas aun, el calculo de h_{j,q_1,q_2}, cuando $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \notin (x_1 x_2)$, esta determinado por la igualdad:

$$\sum_{|q_1+q_2|=2} (q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 - \lambda_j) h_{j,q_1,q_2} x_1^{q_1} x_2^{q_2} = f_j(x_1+h_1, x_2+h_2)$$

así

$$\delta(||h_1|| + ||h_2||) \leq$$

$$||f_1(x_1+||h_1||+||h_2||, x_2+||h_1||+||h_2||) + f_2(x_1+||h_1||+||h_2||, x_2+||h_1||+||h_2||)||.$$

De donde tenemos una desigualdad del tipo $S \leq F(x+S_0)$ donde F es una función analítica y S una serie de potencias. Ahora sea $S_0 = F(x+S_0)$ la ecuacion que define la función analítica S_0 (la cual podemos suponer que existe por el teorema de la función implicita). Así tenemos que $\delta \leq \delta_0$ (en la vecindad corespondiente) y esto implica que $S = ||h_1|| + ||h_2||$ converga.

∎

Proposición 2.6. *Hay exactamente dos separatices de $\tilde{V}$ que pasan por el punto p_j; a saber, la esfera agujerada L_V y L_j^* (llamada la separatriz principal del campo vectorial $\tilde{V}$ en el punto singular p_j).*

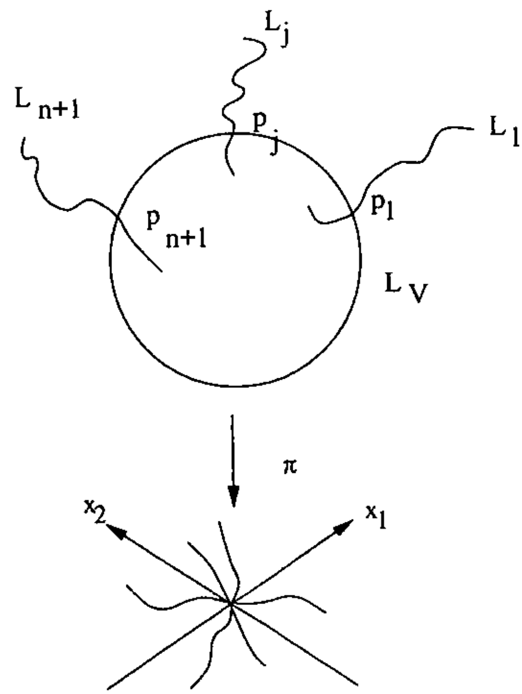

Figura 2.7: Separatrices principales por los puntos p_j y separatrices del gérmen V.

Demostración. i) Si $\tilde{V}$ es linealizable; es inmediato, ya que la parte lineal es diagonalizable.
ii) Si $\tilde{V}$ no es linealizable; por el lema anterior consideramos los ejes coordenados como dichas separatrices (ya que la parte lineal es diagonalizable).

■

Definición 2.30. A la union $\tilde{S}$ de todas las separatrices principales y todos los puntos singulares de $\tilde{V}$ se le llama el *conjunto separatriz de blow-up* $\tilde{V}$.

Definición 2.31. La proyeccion S de $\tilde{S}$ bajo π se llama el *conjunto separatriz del gérmen* V (i.e $S = \pi(\tilde{S})$).

LEMA 4. El conjunto separatriz de un gérmen de la clase Σ_n'es una curva analítica reducible que consta de $n+1$ componentes irreducibles.

Demostración. Al ser V un gérmen de la clase Σ'_n su blow-up $\tilde{V}$ tiene $n+1$ puntos singulares no degenerados, entonces, hay $n+1$ separatrices principales disjuntas, como π es un biholomorfismo fuera de L_v entonces éstas separatrices se proyectan en $n+1$ curvas analíticas que se intersectan en el origen; cada una de estas curvas es analitica en una vecindad del origen (sin el origen); más aun, son continuas en el origen, de donde podemos continuarlas analiticamente al origen.

∎

Definición 2.32. Dos *conjuntos analíticos* de $(\mathbb{C}^2, 0)$ son *equivalentes* si existe un cambio local de coordenadas holomorfo que manda un conjunto en el otro.

LEMA 5. Los conjuntos separatrices de gérmenes de la clase Σ'_n que son formalmente orbitalmente equivalentes son equivalentes.

Demostración. Esta demostración sera dada en una seccion especial (ver sección 3.1).

∎

2.9 Condiciones de genericidad en el teorema principal.

Tomaremos como definicion que un grupo G es soluble si la suceción de sus subgrupos centralizados de G terminan para alguna n, es decir, si $G_{(n)} = id$ para alguna n ($G_{(0)} = G, G_{(i+1)} = [G_i, G_i]$; donde $G_{(i+1)}$ es el subgrupo conmutador de G_i,(ver apendice [A])). El siguiente teorema se debe a Ceveau-Moussu-Ramis(CMR).

Teorema 2.2. *(Teorema de CMR) La equivalencia formal de dos grupos finitamente generados no solubles, de gérmenes de biholomorfismos en una dimension, con generadores distinguidos, implica su equivalencia analítica; es decir el cambio de coordenadas formal que conjuga a esos grupos, es una serie de potencias convergente.*

Demostración. Ver referencias [7], [16].

∎

Nosotros probaremos el teorema principal para gérmenes genericos en ν_n a travéz del teorema de CMR.
Las condiciones de genericidad impuestas a los gérmenes de ν_n en el teorema principal son:
(i) El gérmen V este en la clase Σ_n'.
(ii) El grupo de monodromía G_V del gérmen V sea no soluble.

Proposición 2.7. *Es una condición genérica en ν_n que el grupo de monodromía G_V del gérmen V sea no soluble.*

Demostración. Sean $f, g \in G_V$ y supongamos que $f(x) = a_1x + ...$ y que $g(x) = b_1x + ...$ (donde los puntos significan terminos de orden superior) con $a_1 \neq 0$, y $b_1 \neq 0$. Un calculo directo muestra que $f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \left(\frac{-a_2}{a_1^3}\right)x^2 + \frac{1}{a_1^4}(2a_2^2 - a_3)x^3 + ...$
Observación. Si calculamos el conmutador de f y g ($[f,g](x) = fgf^{-1}g^{-1}(x)$), este comienza con parte lineal la identidad.
Observación. Si calculamos el conmutador de un conmutador, se anulan sus terminos de grado 2 hasta los de grado 5.
Con un procedimiento similar al necesario para checar la ultima observación, se observa que los elementos de G_V para los cuales sus conmutadores dan la identidad despues de calcularlos un numero finito de veces son las f que son funciones polinomiales. Ahora si nos fijamos en el espacio de estas funciones y les asociamos la topología $\mathbb{C}^\infty$ tenemos que el conjunto de funciones para las cuales sus conmutadores dan la identidad despues de calcularlos un numero infinito de veces es un abierto denso.

∎

Proposición 2.8. *Las clases de equivalencia de esferas marcadas, las clases de equvalencia analítica de grupos de monodromía, así como las clases de* *equivalencia analítica de conjuntos separatrices de gérmenes dentro de la clase Σ'_n, son invariantes de la clasificación orbital analítica.*

Demostración. Haciendo uso de los lemas 2,4 y 6 el resultado es inmediato.

■

Sea L_n una esfera marcada tipo Σ'_n, sean $p_1, ..., p_{n+1}$ sus puntos marcados y sean $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ sus números característicos correspondientes.

Definición 2.33. Un *grupo* de gérmenes de holomorfismos finitamente generado $G = \langle \Delta_1, ..., \Delta_{n+1} \rangle$ con generadores distingidos $\{\Delta_1, ..., \Delta_{n+1}\}$, se dice que es *relativo a* L_n si sus generadores satisfacen :
i) $\Delta_1 \circ ... \circ \Delta_{n+1} = id.$
ii)$\Delta'_j(0) = exp(2\pi i \lambda_j)\ \forall j = 1, ..., n+1.$
Donde *i*) y *ii*) son las condiciones del lema 3 y ademas, los generadores que corespondan a números característicos positivos sean analíticamente linealizables.

Definición 2.34. Un *conjunto analítico* S *en* $(\mathbb{C}^2, 0)$ se dice que es *relativo a* L_n si la diferencia $S\backslash\{0\}$ se descompone en $n+1$ componentes irreducibles $S_1, ..., S_{n+1}$ tales que para toda j la curva $\tilde{S}_j = \pi^{-1}(S_j)$ es una curva analítica suave en (Γ, L) la cual intersecta transversalmente a L en los puntos marcados p_j.

TEOREMA 2.(de realización) *Para cualquier esfera marcada L_n de la clase Σ'_n, para cualquier grupo G finitamente generado con generadores relativos a L_n y para cualquier conjunto analítico S relativo a L_n, existe un gérmen de la clase Σ'_n con esfera marcada L_n grupo de monodromía G y conjunto separatriz S.*
La demostración de este teorema se sale de los alcances de este trabajo. Para dicha demostración ver referencia [18].

2.10 Equivalencia orbital de puntos singulares no degenerados.

El objetivo de esta sección es probar que, para puntos singulares genéricos de campos vectoriales holomorfos, la coincidencia de los números característicos y la equivalencia analítica de las transformaciones de monodromía implica la equivalencia orbital analítica en los puntos singulares. Para este fin se establecera un método particular de construir un holomorfismo H que hace a los puntos singulares analíticamente orbitalmente equivalentes.

Definición 2.35. Un *punto singular genérico* es un punto singular no degenerado.

Proposición 2.9. *Sea V un campo vectorial holomorfo con un punto singular genérico y ademas con número característico $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}\}$, entonces, V tiene exactamente 2 separatrices.*

Demostración. Si $\lambda \notin \{\mathbb{R}^- \bigcup \mathbb{Q}^+ \bigcup \{0\}\}$ entonces, (λ_1, λ_2) pertenece al dominio de Poincaré y por el teorema de Poincaré (ver teorema 1.3) V es analiticamente equivalente a su parte lineal.
Si $\lambda \in \mathbb{R}^-$ entonces λ pertenece al dominio de Siegel y hay dos casos; el primero, que (λ_1, λ_2) sea del tipo (C, ν) en cuyo caso V es analiticamente equivalente a su parte lineal por el teorema de Poncaré-Dulac (ver teorema 1.5); si V no es linealizable, por el lema 2.3 hay exactamente 2 separatrices.

■

Observación. El campo V es orbitalmente analiticamente equivalente a un campo de la forma:

$$x\frac{\partial}{\partial x} + y(\lambda + o(1))\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.3}$$

Demostración. Tomando la expresion del lema 2.3:

$H^*V = (\lambda_1 x_1 + a_1(x_1, x_2)x_1x_2)\ \frac{\partial}{\partial x_1} + (\lambda_2 x_2 + a_2(x_1, x_2)x_1x_2)\ \frac{\partial}{\partial x_2}$ donde las a_i son funciónes analíticas y $a_i(0,0) = 0$. Podemos definir un nuevo campo dado como esta expresión dividida entre: $\lambda_1 + a_1x_2$; en la primera entrada nos queda lo que llamamos x y en la segunda componente del campo encontramos el resultado deseado.

■

Sea $S = \{x_2 = 0,\ x_1 \neq 0\}$ una separatriz del gérmen V y sea $T = \{x_1 = \epsilon\}$ una trasversal a la sepratriz S en el punto $p_0 = T \bigcap S$. Considerese la transformación de monodromía $\Delta_V : (T, p_0) \longrightarrow (T, p_0)$ del gérmen V, la cual corresponde a ir alrededor del origen en la separatriz S en el sentido de las manecillas del reloj. Sea $W \in \nu$ tambien de la forma 2.3 y sea $\Delta_W : (T, p_0) \longrightarrow (T, p_0)$ su transformacion de monodromía. Supongase que los gérmenes Δ_V y Δ_W son analíticamente equivalentes (i.e. existe un biholomorfismo $h : (T, p_0) \longrightarrow (T, p_0)$ tal que $h \circ \Delta_V = \Delta_W \circ h$).

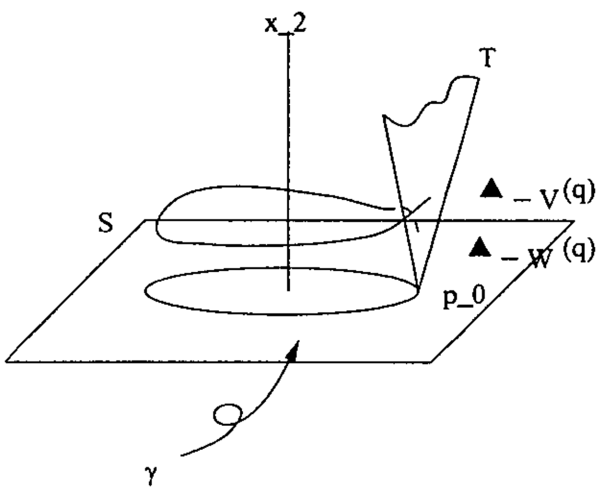

Figura 2.8: Transformaciones de monodromía Δ_V y Δ_W de los gérmenes V y W.

La construcción de la transformación H, la cual conjuga a los gérmenes V y W esta definida como sigue:
Sea $\pi_0 : (x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, 0)$ la proyección estandar en la separatriz S. Para

cualquier punto p en la transversal T, consideremos la curva de fase ϕ_p del gérmen V que pasa a través del punto p y la curva de fase $\psi_{\tilde{p}}$ del gérmen W que pasa por el punto $\tilde{p} = h(p) \in T$. Sea $\gamma \subset \phi_p$ la curva que une al punto p con algún otro punto $q \in \phi_p$, consideremos la curva $\tilde{\gamma} \subset \psi_{\tilde{p}}$ que une al punto $\tilde{p}$ con algún punto $\tilde{q} \in \psi_{\tilde{p}}$, y tal que la proyección de esas curvas a la separatriz S coincida:
$\pi_0(\gamma) = \pi_0(\tilde{\gamma})$. Entonces por definición, pondremos $H^0(q) = \tilde{q}$ (ver fig 2.9).

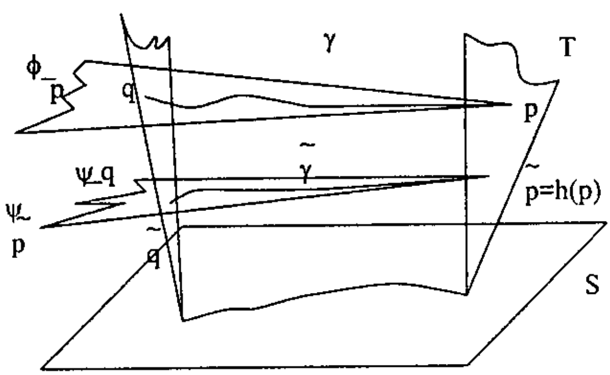

Figura 2.9: Definición de la transformación H^0. .

Observación. La transformación H^0 así construida, esta bien definida, es holomorfa y univaluada en una vecindad de la transversal T.

Demostración. Del hecho de que la proyección de las curvas γ y $\tilde{\gamma}$ a la separatriz S sea la misma, se sigue que la transformación H^0 esta bien definida. Por el teorema de la dependencia analítica de las soluciones con respecto a las condicione iniciales, la transformación H^0 es analítica en alguna vecindad de la separatriz S; y finalmente, dado que por construcción H^0 coincide con h donde h es el biholomofismo que conjuga a los grupos de monodromía G_V y G_W, entonces, tenemos que restringiendonos a la transversal T, la transformación H^0 es univaluada, de donde podemos encontrar una vecindad de la separatriz S, en la cual la trasformación H^0 es univaluada.

∎

LEMA 6. La transformación H^0 puede ser continuada analíticamente a un biholomorfismo H de una vecindad del origen y que ademas conjuga a los gérmenes V y W: $DHV = H'V = W \circ H$.

Demostración. (Debido a la complejidad, no demostraremos este hecho en todos los casos posibles, para dicha demostración ver la referencia [7] y la referencia [11]; pero para un mejor entendimiento incluimos los siguientes caso).
Primero, supongamos que el número característico λ (como en la proposición 2.9) no es real negativo. En este caso, la forma normal formal de los gérmenes es lineal; por el teorema de Poincaré la serie normal formal converge (ver teorema 1.3).

Observación. Para un gérmen del tipo 2.3, el cambio de coordenadas normalizante es de una forma muy especial a saber $(x, y) \longrightarrow (x, f(x, y))$ y preserva las lineas de nivel de la proyeccion π_0.

En vista de la observación, sin perdida de generalidad podemos suponer que ambos gérmenes son lineales:

$$V = W = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Entonces podemos suponer que sus transformaciones de monodromía son tambien linales:

$$\Delta_V = \Delta_W : y \longrightarrow \mu x, donde\ \mu = exp(2\pi\lambda).$$

Puesto que λ no es racional positivo, tenemos que $\mu^k \neq 1$ para toda k natural. Entonces la transformación que conjuga los grupos de monodromía tambien sera lineal, $h : y \longrightarrow cy$ para alguna c compleja distinta de cero. En este caso la transformación H^0 tambien sera lineal, $H^0 : (x, y) \longrightarrow (x, cy)$, y puede ser continuado a un biholomorfismo en cualquier vecindad del origen.
Ahora sea λ negativa.

Proposición 2.10. *Existe un cambio de coordenadas holomorfo tal que podemos expresar al gérmen silla 2.3 como:*

$$x\frac{\partial}{\partial x}+y(\lambda+0((yx)^N))\frac{\partial}{\partial y},\ \textit{donde } N{\geq}\lambda. \tag{2.4}$$

Para la demostración de esta proposición ver refencia [11].
Mas aun, para los gérmenes del tipo 2.3 tal normalizacion preliminar puede tambien ser realizada por cambios de coordenadas que preservan las lineas de nivel $\{x = cte\}$; así, sin perdida de generalidad, podemos asumir que ambos gérmenes son de la forma 2.4. La demostración del lema 7 para estos gérmenes esta probado en la referencias [11] y [7].

Observación. La proyección π_0 tiene las siguientes propiedades:

1. π_0 transforma una de las separatrices del gérmen al punto singular.

2. El complemento de esta separatriz es llevada sobre la segunda separatriz y es la transformación identidad sobre esta segunda separatriz.

Observación. Cualquier foliación de una vecindad del origen $(\mathbb{C}^2, 0)$ dada por lineas de nivel de cualquier proyección, posee las dos propiedades de la observación anterior, es decir, puede ser rectificada; consecuentemente, la foliación F en la proposición anterior puede ser remplazada por cualquier otra foliación del mismo tipo.

Proposición 2.11. *Sea F una foliación de una vecindad del cero dada por lineas de nivel de la proyección π_0, entonces, el holomorfismo H manda el par de foliaciones (F_V, F) en el par de foliaciónes (F_W, F), y esta univocamente determinada por su restriccion a la separatriz S y a la transversal T.*

∎

Definición 2.36. El holomorfismo H descrito en la construcción anterior es llamado *"un cambio a lo largo de la foliación auxiliar"*.

3

Demostración del teorema principal

En este capítulo daremos la demostración del teorema principal, para ello usaremos las siguientes ideas; sean V y W dos gérmenes genéricos en ν_n (ver sección 2.9), es decir, $V, W \in \Sigma'_n$ y sus grupos de monodromía son no solubles. Si suponemos que estos dos gérmenes son formalmente orbitalmente equivalentes, como veremos, podemos asumir que los conjuntos separatrices de los gérmenes V y W son los mismos ($S_V = S_W = S$), más aun, la equivalencia formal orbital de los gérmenes V y W implicará la equivalencia formal de sus grupos de monodromía (lema 10). Usando el teorema de Cervau-Malgrange-Ramis CMR (ver sección 2.9), vemos que esos grupos son analíticamente equivalentes. Ahora, si pudiesemos construir una foliación auxiliar F en una vecindad de L y transversal a L, tal que la union de las hojas de la foliación F coincide con el conjunto separatriz S, entonces, *" un cambio a lo largo de la foliación auxiliar"* (ver sección 2.10) podría transformar a la foliación $\tilde{F}_V$ en la foliación $\tilde{F}_W$ (ver proposición 2.11) y con esto completar la demostración del teorema principal. Desafortunadamente, tal foliación auxiliar F solo puede ser construida para una clase limitada de gérmenes, que tienen un tipo especial de conjuntos separatrices.

Para un gérmen arbitrario V de la clase Σ'_n, esta construcción debe ser modificada levemente, es decir, construiremos una foliación auxiliar $\tilde{F}$ (ver sección 3.2) de una vecindad de L tal que nuevamente, el conjunto separatriz del gérmen V sea la union de las hojas de la foliación $\tilde{F}$, pero ahora la foliación $\tilde{F}$ no tendrá puntos singulares en L así como tambien será transversal a L en casi todos lados, excepto en un número finito de puntos no singulares $w_1, \ldots w_{n-2}$; las hojas de la foliación $\tilde{F}$ que pasan por los puntos w_k tendrán ordenes de tangencia dos con L, para toda k. El holomorfismo que conjuga a las foliaciones estará determinado casi igual al que se describió antes (*"el cambio a lo largo de la foliación auxiliar*, ver corolario 3.2). Pero los puntos de tangencia de la foliación $\tilde{F}$ con la foliación $\tilde{F}_V$ complican virtualmente la situacion; sin embargo el biholomorfismo $\tilde{H}$ que conjuga a los gérmenes de campos vectoriales en una pequeña vecindad U (ver sección 3.5) puede ser continuado de U a una vecindad del divisor L rodeando los puntos singulares $p_1, \ldots, p_{n+1}$ así como a los puntos de tangencia $w_1, \ldots, w_{n-2}$ de la foliación auxiliar $\tilde{F}$ con L (ver prposición 3.2); más aun, $\tilde{H}$ se puede continuar analiticamente a un biholomorfismo en las vecindades de los puntos singulares y de tangencia (ver proposición 3.3 y 3.4), ciertos invariantes de los pares de foliaciones $(\tilde{F}_V, F)$ y $(\tilde{F}_W, F)$ deben necesariamente coincidir; donde esos invariantes son: las curvas tangentes (ver lema 8), los conjuntos separatrices, los grupos de monodromía y el conjunto de las transformaciones correspondientes. Esos invariantes y la construcción de los pares de foliaciones con estos invariantes será discutido en las secciones 3.3 y 3.5. Así como una descripción detallada del biholomorfismo que conjuga será dada en la sección 3.5.

3.1 Demostración del lema 5.

Comenzamos esta sección dandos algunas observaciones del lema 5, posteriormente probamos dicho lema y finalmente damos de manera explicita el biholomorfismo al que hace referencia el lema 5.

Sean V y W dos gérmenes de campos vectoriales genéricos en ν_n (i.e

$V, W \in \Sigma_n'$ y sus grupos de monodromía son no solubles, ver sección 2.9).

Proposición 3.1. *Supongase que V y W son formalmente orbitalmente equivalentes, entonces, podemos suponer que los $N-jets$ de esos gérmenes en cero coinciden para una N suficientemente grande.*

Demostración. Por la forma en la cual se construye el difeomorfismo formal que hace formalmente orbitalmente equivalentes a los dos gérmenes (resolviendo la ecuación homológica para cada grado), si cortamos dicha serie para cualquier grado N, las posteriores soluciones de la ecuación homológica no son modificadas, de donde se sigue el resultado.

■

Observación. Dado que la esfera marcada de un gérmen en la clase Σ_n' esta determinada por el $n-jet$ del gérmen, entonces, los gérmenes V y W estan en la misma clase $\Sigma(L_n)$.

Observación. Podemos suponer sin perdida de generalidad que los conjuntos separatrices de los gérmenes V y W coinciden $S_V = S_W = S$.

Demostración. En efecto, del lema 5 tenemos que los conjuntos separatrices de los gérmenes V y W son analíticamente equivalentes.

■

Demostración. (del lema 5)
Sean V y W dos gérmenes de la clase Σ_n' formalmente orbitalmente equivalentes. Por la proposición 3.1 podemos suponer sin perdida de generalidad que sus jets en cero hasta de un orden suficientemente grande coinciden.

Observación. Para cualquier $k > 1$, el $k-esimo$ jet de cada una de las separatrices de un gérmen de la clase Σ_n', esta determinado por el $k+n-esimo$ jet del gérmen.

En virtud de la observación anterior, los jets de orden superior de los conjuntos separatrices de V y W coinciden. Por el teorema de Tougeron (ver apendice B), tenemos asociado a cada conjunto separatriz una función polinomial (su polinomio de Taylor); ahora, dado que los jets de las separatrices coinciden, los polinomios de Taylor tienen idénticos coeficientes, con lo cual completamos la demostración del lema 5.

■

Ahora daremos de forma explicita el biholomorfismo del lema 5 (el biholomorfismo que hace equivalentes a los conjuntos separatrices); para ello necesitamos unas definiciones básicas:

Definición 3.1. El polinomio $F(y)$ de grado n tal que en n+1 puntos distintos $y_0, ..., y_n$ toma los n+1 valores dados $f_0, ..., f_n$ *con* $f_i = f(y_i)$, es llamado *el polinomio de interpolación de grado n de la función f*.

Sea $Q(y) = \prod_{i=0}^{n}(y - y_i)$

Definición 3.2. *El polinomio de interpolación de Lagrange de la función* f es el polinomio de interpolación de grado n de la función f cuya expresión es:

$$F(y) = Q(y) \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{(y - y_i)Q'(y_i)}.$$

Ahora, escojemos un sistema de coordenadas (x_1, x_2) en $(\mathbb{C}^2, 0)$ cuyos ejes no tocan a las separatrices del gérmen V. Supongamos que las ecuaciones locales de las separatrices de los gérmenes V y W en cada punto singular p_j, $j = 1, ..., n+1$, estan dadas por $x_2 = \psi_j(x_1)$ y $x_2 = \tilde{\psi}_j(x_1)$ respectivamente.

Observación. Para cada j, las expresiones de las ecuaciones locales $\psi_j(x_1)$ y $\tilde{\psi}_j(x_1)$ tienen jets de orden superior idénticos.

Demostración. Es una consecuencia de la proposición 3.1 y de la última observación.

■

Sea $F_{x_1}(x_2)$ el polinomio de interpolación de Lagrange, el cual toma el valor $\tilde{\psi}_j(x_1) - \psi_j(x_1)$ en el punto $\psi_j(x_1)$ para $j = 1, ..., n+1$. La transformación

$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, x_2 + F_{x_1}(x_2)),$$

manda la curva $\{x_2 = \psi_j(x_1)\}$ en la curva $\{x_2 = \tilde{\psi}_j(x_1)\}$ para toda $j = 1, ..., n+1$. Por construcción, la transformación así definida tiene jets de orden superior idénticos en las ecuaciones locales de las separatrices, por lo cual los conjuntos separatrices son cercanos bajo esta transformación, de donde encontramos que algun jet de orden superior de esta transformación es igual a la identidad.

Corolario 3.1. *Consideremos dos gérmenes V y V_1 de la clase Σ'_n formalmente orbitalmente equivalentes. Entonces para toda N existe un gérmen W en la clase Σ'_n analiticamente equivalente al gérmen V_1 tal que los germenes V y W tienen identicos conjuntos separatrices; el $N-jet$ de los gérmenes V y W coincide, los gérmenes V y W son formalmente equivalentes y el cambio de coordenadas formal que los conjuga tiene a la identidad como $N-jet$.*

Demostración. Sea, $N > 0$, como V_1 es formalmente orbitalmente equivalente a V; supongamos que los N-jets coinciden, entonces, tanto V_1 como V pertenecen a la misma clase $\Sigma(L_n)$ y por lo mismo los conjuntos separatrices son analiticamente equivalentes. Sea $H_N : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 + F_{x_1}(x_2))$ la transformación que hace analiticamente equivalentes a los conjuntos separatrices, más aun, tal que su restricción al conjunto separatriz del gérmen V sea la identidad. Definimos al gérmen $W = W_N$ como:
$W_N = DH_N V_1$; notese que por construccíon W_N y V_1 son analiticamente equivalentes y que los conjuntos separatrices son los mismos; puesto que H_N esta definida en terminos de un polinomio de grado N, el N-jet de W_N y el de V coinciden. Ahora solo falta ver que son formalmente equivalentes.

∎

3.2 Foliación auxiliar.

Consideremos a V un gérmen de la clase Σ_n', sea $\tilde{V}$ su blow-up, sean $p_1, ..., p_{n+1}$ los puntos singulares de $\tilde{V}$, sea S_j^0 la separatriz principal de $\tilde{V}$ que pasa a travez del punto singular p_j, y sea $S_j = S_j^0 \bigcup p_j$ con $j = 1, ..., n+1$. Sobre el divisor L marcamos $n-2$ puntos no singulares arbitrarios $w_1, ..., w_{n-2}$, supondremos que estos puntos estan en la carta (x_1, u).

LEMA 7. Sean S_j y w_k definidas como antes. Entonces, existe un gérmen $W = P\frac{\partial}{\partial x_1} + Q\frac{\partial}{\partial x_2} \in \nu$ tal que la foliación $\tilde{F}$ en una vecindad del divisor L por curvas de fase del blow-up del gérmen W satisface las siguientes condiciones:

1. La foliación $\tilde{F}$ no tiene puntos singularc en el divisor L.
2. Las curvas S_j son hojas de la foliación $\tilde{F}$ para $j = 1, ..., n+1$.
3. La foliación $\tilde{F}$ es transversal al divisor L, excepto en los puntos w_k $k = 1, ..., n-2$.
4. En la vecindad de cualquier punto w_k, la foliación $\tilde{F}$ está determinada por una ecuación diferencial de la forma: $\frac{dx_1}{du} = G_{c_0}(u) + O(x_1)$ donde la función $G_{c_0}(u)$ es holomorfa en una vecindad del punto w_k y tiene un cero de orden uno en el punto w_k.
5. La hoja de la foliación $\tilde{F}$ que pasa a travez del punto w_k tiene una tangencia simple con el divisor en el punto w_k para $k = 1, ..., n-2$.

Demostración. Sea $S = \{R = 0\}$ el conjunto separatriz del gérmen V. La condición para que el gérmen de campo vectorial W sea tangente al conjunto S es equivalente a la siguiente condición:

Para algunas funciones C, P, Q se obedece la ecuación

$$PR'_{x_1} + QR'_{x_2} = RC, \tag{3.1}$$

donde $R = R(x_1, x_2)$ y $\nabla R = (R'_{x_1}, R'_{x_2})$.

Supongamos que $f(x_1, x_2) = \prod_{k=1}^{n-2}(x_2 - w_k x_1)$, $C = (n+1)f$, $P = x_1 f + \tilde{P}$

y que $Q = x_2 f + \tilde{Q}$ para algunas funciones $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$. Entonces, la ecuación 3.1 se expresa de la forma:

$$\tilde{P}R'_{x_1} + \tilde{Q}R'_{x_2} = ((n+1)R - x_1 R'_{x_1} - x_2 R'_{x_2})f. \tag{3.2}$$

Observación. El termino homogeneo mas chico R_{n+1} de la función R es de grado $n+1$ y no tiene factores linales multiples.

Demostración. En efecto, si $\phi_i(x_1, x_2) = a_i x_1 x_2 + ...$, $i = 1, ..., n+1$ son las ecuaciones locales de las separatrices, entonces R tiene una expresión de la forma:

$$R(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{n+1} (x_1 - \phi_i(x_1, x_2))$$

∎

Observación. El lado derecho de la ecuación 3.2 no contiene terminos de orden menor que $2n$.

Demostración. Usando la expresión de la observación anterior y haciendo un cálculo directo tenemos que: $x_1 R'_{x_1} + x_2 R'_{x_2} = (n+1)R_{n+1} + ...$ (donde los puntos denotan terminos de orden mayores iguales a n+2) y dado que f tiene solo terminos de orden $n-2$ obtenemos el resultado.

∎

Consideremos el conjunto I en el anillo de gérmenes de funciones holomorfas O definido como:

$$I = \{g : g(0,0) = 0\}$$

Observación. I es ideal maximal de O.

Definición 3.3. I^m es el ideal de todas las sumas finitas de productos de $m - adas$ de elementos de I, es decir, $I^m := \{\sum_{i=1}^{k} g_{i_1} \cdots g_{i_m} : g_{i_j} \in I \ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

Observación. I^{2n} esta contenido en el ideal gradiente de la función R.

Demostración. Este resultado se sigue de la penúltima observación y de la definición de I^m.

∎

Esto significa que la ecuación 3.2 con f y R dadas tiene una solución holomorfa $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$.
Así hemos construido la solución a la ecuación 3.1 y consecuentemente, el campo vectorial tangente a todas las curvas S_j. A continuación modificaremos levemente esta solución para obtener las otras condiciones del lema.
Sea m el grado del termino más chico de las funciones holomórfas $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$, así, tenemos que $\tilde{P} = P_m + ...$ y por otro lado $\tilde{Q} = Q_m + ...$ (donde los puntos denotan terminos de orden superior). Entonces, el grado del termino mas chico $P_m R'_{n+1_{x_1}} + Q_m R'_{n+1_{x_2}}$ en el lado izquierdo de la ecuación 3.2 es $m+n$. Puesto que los polinomios $R'_{n+1_{x_1}}$ y $R'_{n+1_{x_2}}$ no tienen divisores lineales comunes y el lado derecho de la ecuación 3.2 no contiene terminos de grado menor que $2n$, encontramos que $m \geq n$. Consecuentemente, la potencia de las formas homogeneas mas chicas de las soluciones P y Q construidas para la ecuación 3.1 son $n-1$: $P = x_1 f + P_n + ...$ y $Q = x_2 f + Q_n + ...$

Observación. Sea $c \in \mathbb{C}$ y consideremos $(P_c, Q_c) = (P, Q) + c(-R'_{x_2}, R'_{x_1})$. Entonces, la tripleta (P_c, Q_c, c) tambien satisface la ecuación 3.1. Esto significa que el campo $W_c = P_c \frac{\partial}{\partial x_1} + Q_c \frac{\partial}{\partial x_2}$ tambien es tangente al conjunto separatriz S.

Sea $\tilde{F}_c$ la foliación de una vecindad del divisor L por curvas de fase del blow-up del campo W_c. En el dominio de acción de la carta (x_1, u), la foliación $\tilde{F}_c$ es una foliación por curvas integrales de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx_1}{du} = \frac{x_1^2 P_c(x_1, x_1 u)}{x_1 Q_c(x_1, x_1 u) - x_2 P_c(x_1, x_1 u)} = G_c(u) + O(x_1), \qquad (3.3)$$

En efecto la ecuación 3.3 se satisface si y solo si $W_c = P_c \frac{\partial}{\partial x_1} + Q_c \frac{\partial}{\partial x_2}$. Además la expresión para $G_c(u)$ es:

$$G_c(u) = \frac{f(1,u)}{Q_n(1,u) - uP_n(1,u) + c(n+1)R_{n+1}(1,u)}.$$

Por la definición de la función f, el numerador de la función racional G_c se anula unicamente en los puntos w_k. Puesto que los puntos w_k no son singularidades para el blow-up del gérmen V, tenemos que para toda $k = 1, .., n-2$ y para casi todas los valores $c \in \mathbb{C}$, el denominador de la función racional G_c no se anula en ninguno de los puntos w_k y consecuentemente, la foliación $\tilde{F}_c$ no tiene puntos singuares para casi toda $c \in \mathbb{C}$ en el dominio de acción de la carta (x_1, u). De manera análoga podemos demostrar que en el dominio de acción de las otras cartas (x_2, v), la foliación $\tilde{F}_c$ no tiene puntos singulares para casi toda $c \in \mathbb{C}$. Escogiendo una c_0 en una forma adecuada y suponiendo que $W = W_{c_0}$, obtenemos una foliación que satisface las primeras tres condiciones. La cuarta condición es una consecuencia de la ecuación 3.3, y la quinta afirmación se sigue de la cuarta.

∎

3.3 La estructura de las hojas de la foliación cercanas a las curvas tangentes.

Consideremos el gérmen de campo vectorial $W = P\frac{\partial}{\partial x_1} + Q\frac{\partial}{\partial x_2}$ construido para un gérmen $V = A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2}$ de la clase Σ'_n por el lema 8; sean $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ los blow-ups de los gérmenes de campos V y W respectivamente y sea $\tilde{F} = \tilde{F}_W$ la foliación de una vecindad del divisor por curvas de fase del blow-up $\tilde{W}$.

Definición 3.4. *El conjunto tangente* $\tilde{T}$ de los blow-ups de los gérmenes V y W, es el conjunto de puntos en los cuales los campos de direcciones dados por los blow-ups $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ coinciden.

LEMA 8. El conjunto tangente consta de las separatrices del blow-up $\tilde{V}$ y $n-2$ curvas suaves $\tilde{T}_k$ que intersectan transversalmente al divisor L en los puntos w_k, $k = 1, ..., n-2$. En la vecindad de esos puntos, el campo de direcciones $\tilde{W}$ tiene una primera integral $J_k = J_k(x_1, u)$ tal que:

$$J_k(0, w_k) = J'_{k_u}(0, w_k) = 0, \;\; J'_{k_x}(0, w_k) J''_{k_{uu}}(0, w_k) \neq 0, \qquad (3.4)$$

Demostración. Es claro que por contrucción de la foliación auxiliar las separatrices del blow-up del gérmen V estan en el conjunto tangente, de la cuarta afirmación del lema 8 y aplicando el teorema de la función implícita, hay n-2 curvas suaves en el conjunto tangente las cuales intersectan transversalmente al divisor L en los puntos w_k. De la cuarta afirmación del lema 8 y por el teorema de rectificación (ver apendice D), en la vecindad de los puntos w_k el campo de direcciones $\tilde{W}$ tiene una primera integral $J'_k = J_k(x_1, u)$.

∎

Tomando una k arbitraria $(1 \leq k \leq n-2)$ mostraremos que en una vecindad del punto w_k, cualquier par de foliaciones $(\tilde{F}_V, \tilde{F})$ se puede reducir a una forma estandar.

LEMA 9. Consideremos un biholomorfísmo local arbitrario H_0, definido en una vecindad del punto w_k, el cual es la identidad en el divisor L y manda la curva tangente $\tilde{T}_k$ a la recta $\tilde{T}_k^0 = \{u = w_k\}$. Entonces, existe un único biholomorfismo local H en una vecindad del punto w_k, que es la identidad en el divisor L, que coincide con H_0 en la curva $\tilde{T}_k$ y manda la foliación $\tilde{F}_V$ en la foliación estandar $\{x_1 = cte\}$, así como tambien manda la foliación $\tilde{F}$ en alguna foliación estandar del tipo $\{x_1 + g(u) = cte\}$. La función g que define a la segunda foliación estandar, es holomórfa en una vecindad del punto w_k y $g(w_k) = g'(w_k) = 0$. La función g esta univocamente definida por la foliación $\tilde{F}$, la curva $\tilde{T}_k$ y el holomorfismo local H_0.

Demostración. Sea l_u la hoja de la foliación $\tilde{F}$ que pasa a travez del punto $(0, u)$ cerca de w_k y sea $P_u = l_u \bigcap \tilde{T}_k$. En virtud de la definición de la segunda foliación estandar, supongamos que $g(u)$ es igual a la coordenada x_1 del punto $H_0(P_u)$ ver fig.3.1. Supongamos que J_k es la primera integral dada por el lema 8, sean $J = J_k \circ H_0^{-1}$, $\phi(x_1) = J(x_1, w_k)$ y $\psi(u) = J(0, u)$. Entonces $g(u) = \phi^{-1} \circ \psi(u)$. Notese que de 3.4, obtenemos $g(w_k) = g'(w_k) = 0$ y $g''(w_k) \neq 0$.

Sea H_1 un biholomorfísmo tal que rectifique a la foliación $H_0(\tilde{F}_V)$ y más aun, tal que sea la transformación identidad en las lineas T_k^0 y $\{x_1 = 0\}$.

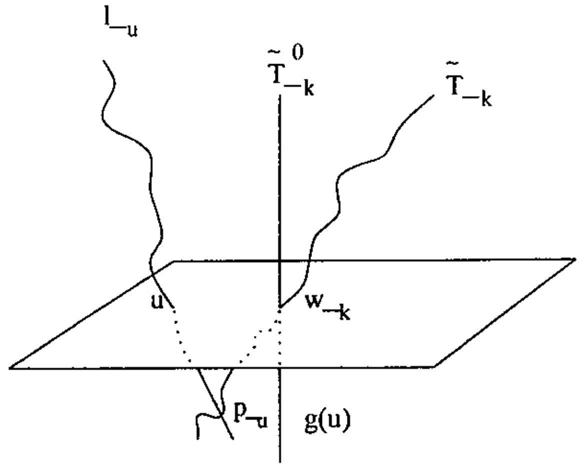

Figura 3.1: Definición de $g(u)$

Observación. La función $\tilde{J} := J \circ H_1^{-1}$ es constante en las hojas de la foliación $F = H_1 \circ H_0(\tilde{F})$.

Demostración. En efecto, ya que J_k es constante a lo largo de las hojas de la foliación $\tilde{F}$.

■

Observación. La función $\hat{J} = \phi^{-1} \circ \tilde{J} = x_1 + O(u - w_k)$ es tambien constante en las hojas de la foliación F.

Demostración. En efecto, ya que por la observación anterior $\tilde{J}$ es constante a lo largo de la foliación F y por otro lado ϕ es biyectiva.

■

Observación. La función $\hat{J}$ tiene la expresión: $\hat{J}(x_1, u) = x_1 + (u - w_k)^2 f(x_1, u)$ para alguna función holomorfa f.

Demostración. En efecto, puesto que las hojas de la foliación F son tangentes a las curvas $\{x_1 = cte.\}$ en los puntos de la linea $\{u = w_k\}$, encontramos que $\hat{J}'_u(x_1, w_k) = 0$.

■

Observación. La función $g(u)$ tiene la expresión: $g(u) = (u - w_k)^2 f(0, u)$, con $f(0, w_k) \neq 0$.

Demostración. Usando la expresión de la observación anterior y dado que $J = \tilde{J}$ en la linea $\{x_1 = 0\}$, tenemos $(u - w_k)^2 f(0, u) = g(u)$; por otro lado, $g''(u) = (u - w_k) f''(0, u) + 4(u - w_k) f'(0, u) + f(0, u)$ y puesto que $g''(w_k) \neq 0$ entonces $f(0, w_k) \neq 0$.

■

Observación. Sea $G(x_1, u)$ una función holomorfa tal que se satisface la relación:

$$(u - w_k)^2 f(x_1, u) = G^2(x_1, u)$$

en alguna vecindad del punto $(0, w_k)$ y definimos $h(u) = G(0, u)$; entonces $h'(w_k) \neq 0$, y la transformación

$$H_2 : (x_1, u) \mapsto (x_1, h^{-1} \circ G(x_1, u)).$$

es un biholomorfismo local en una vecindad del punto $(0, w_k)$.

Demostración. La primera afirmación se sigue de un cálculo directo y usando que $f(0, w_k) \neq 0$; la segunda afirmación, es una consecuencia de la primera afirmación y del hecho que $\frac{\partial G}{\partial u}(0, w_k) \neq 0$, de donde existe una vecindad en la cual h es un biholomorfismo.

■

Observación. El biholomorfismo H_2 definido como en la observación anterior es la identidad en las lineas $\{x_1 = 0\}$ y $\{u = w_k\}$, preserva la primera foliación estandar, y manda la foliación F en la segunda foliación estandar.

Demostración. Las dos primera afirmaciones resultan de una substitución directa, para la última afirmación, de las observaciones anteriores sabemos que la primera coordenada de las hojas de la foliación F son de la forma $x_1 + g(u)$, con lo cual queda demostrada la observación.

■

Para terminar la demostración del lema, consideremos la composición $H_2 \circ H_1 \circ H_0$, la cual por la elección de H_1 y de H_2 da el biholomorfismo buscado; más aun, por construcción g esta univocamente determinada por la foliación $\tilde{F}$, la curva $\tilde{T}_k$ y por el biholomorfismo H_0.

■

Corolario 3.2. *Sea w_k un punto no singular de los blow-ups de los campos de direciones asociados a V y W y sean las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$ tangentes a la foliación auxiliar F (construida anteriormente) en los puntos de la curva $\tilde{T}_k$. Entonces, existe un único biholomorfismo local en el punto w_k, el cual es la identidad en el divisor y en la curva $\tilde{T}_k$, manda el par de foliaciones $(\tilde{F}_V, F)$ en el par de foliaciones $(\tilde{F}_W, F)$.*

Demostración. Consideremos a los biholomorfismos H_1 y H_2, los cuales normalizan a los pares de foliaciones $(\tilde{F}_V, F)$ y $(\tilde{F}_W, F)$ respectivamente (dados por el lema 10); ahora, el biholomorfismo $H = H_1 \circ H_2^{-1}$, es el biholomorfismo buscado; la unicidad de este biholomorfismo, se sigue de la unicidad de los biholomorfismos H_1, H_2.

■

Definición 3.5. A el biholomorfismo construido (en el corolario anterior) fuera de la curva tangente lo llamaremos *"el cambio a lo largo de la foliación auxiliar"*.

3.4 Grupo de monodromía de gérmenes formalmente orbitalmente equivalentes.

En esta sección probaremos el siguiente lema:

LEMA 10. Sean V y W dos gérmenes de la clase Σ'_n formalmente equivalentes, supongamos que son cercanos entre si y que ademas, el cambio formal de coordenadas que los conjuga tambien es cercano a la transformación identidad. Sean G_V y G_W sus grupos de monodromía definidos para la misma transversal T_0 de el divisor L. Entonces, los grupos G_V y G_W son formalmente equivalentes y el difeomorfismo formal que los conjuga es cercano a la transformación identidad.

En virtud del teoréma de CMR (ver sección 2.9), obtenemos el siguiente corolario:
COROLARIO. Si las condiciones del lema 10 se dan y ademas los grupos de monodromía de los gérmenes son no solubles, entonces, existe un biholomorfismo que conjuga a esos grupos, más aun, este biholomorfismo es cercano a la transformación identidad.
Pero antes de probar dicho lema, daremos unas cuantas construcciones auxiliares.

Definición 3.6. Dos gérmenes de funciones (de campos vectoriales) se dice que son *cercanos* si sus jets hasta un orden suficientemente grande coinciden.

Sean $p_1, ..., p_{n+1}$ los puntos singulares del blow-up $\tilde{V}$ de un gérmen de campo vectorial de la clase Σ_n' y sea $L^0 = L \setminus \{p_1, ..., p_n\}$. Supondremos que todos los puntos $p_1, ..., p_{n+1}$ estan en la carta (x_1, u).

Observación. En la carta (x_1, u), la foliación $\tilde{F}_V$ esta definida por una ecuación del tipo:

$$\frac{dx_1}{du} = \sum_{k \geq 1} x^k Q_k(u), \tag{3.5}$$

donde las Q_k son funciones racionales con polos en los puntos $u_j = u(p_j)$, $j = 1, ..., n+1$ (ver subsección 2.1.1).
Sea $U \subset \mathbb{C}$ un dominio arbitrario que no contiene a los puntos u_j, $j = 1, ..., n+1$ y sea $u_0 \in U$.

Definición 3.7. Un par de series formales:

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k z^k, \quad \hat{\psi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k z^k$$

se dice que determinan a la *transversal formal*

$$\hat{T} = \{x_1 = \hat{\phi}(z),\ u = u_0 + \hat{\psi}(z)\}$$

en el punto u_0, si el coeficiente ϕ_1 es distinto de cero.

Definición 3.8. A la variable z de la definición anterior se le llama *un parámetro de la transversal formal* $\hat{T}$ y el punto u_0 es llamado *el punto base de la transversal formal* $\hat{T}$.

Definición 3.9. Una serie de potencias formal

$$x_1 = \hat{x}_1(u,z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u) z^k$$

con coeficientes que son funciones holomorfas en el dominio $U \subset \mathbb{C}$ es llamada *la solución formal* de la ecuación 3.5 en el dominio U, si la substitución de esta serie en la ecuación 3.5, tanto en el lado derecho como en el izquierdo da identicas series formales en z.

Definición 3.10. Una solución formal se dice que *intersecta a la transversal formal* $\hat{T}$ en el punto que corresponde al parámetro z, si la ecuación

$$\hat{\phi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u_0 + \hat{\psi}(z)) z^k$$

se satisface. Es decir, si se substituye la transversal formal en la solución formal y la ecuación anterior se satisface, entonces, la solución formal intersecta a la transversal formal.

Observación. En el caso de que una solución formal $\hat{x}_1$ intersecte a la transversal formal $\hat{T}$ en un punto que corresponde al parámetro z, necesariamente se cumple que $c_1(u_0) \neq 0$.

Observación. La transformación formal ρ que asigna $z \mapsto \hat{x}(u_0, z)$, es invertible.

Definición 3.11. La transformación formal ρ es llamda *un cambio a la linea vertical* $\{u = u_0\}$.

Sean $\hat{T}_0$ y $\hat{T}_1$ dos transversales formales, sean u_0 y u_1 sus puntos base, y sean ρ_0 y ρ_1 los correspondientes cambios a las linea verticales $T_0 = \{u = u_0\}$ y $T_1 = \{u = u_1\}$ respectivamente. Consideremos la curva $\gamma \subset U$ que une a los puntos base de las trasversales holomorfas T_0 y T_1 y sea $\triangle : (T_0, T_0 \bigcap L^0) \longrightarrow (T_1, T_1 \bigcap L^0)$ un gérmen de transformación asociado a la foliación $\tilde{F}_V$ a lo largo de la curva γ.

Definición 3.12. Una transformación formal $\hat{\triangle} = \rho_1^{-1} \circ \triangle \circ \rho_0$ es llamada *la transformación formal asociada a las transversales formales* $\hat{T}_0$ y $\hat{T}_1$ a lo largo de la curva γ.

Definición 3.13. Si las dos transversales formales $\hat{T}_0$ y $\hat{T}_1$ coinciden ($\hat{T}_0 = \hat{T}_1 = \hat{T}$), la transformación formal asociada a las transversales formales $\hat{T}_1$ y $\hat{T}_2$ construida antes, es llamada *la transformación de monodromía formal* de la transversal formal $\hat{T}$ a lo largo de la curva cerrada γ.

Observación. Las clases de equivalencia formal del grupo de transformaciones de monodromía formal, no depende de la elección de la transversal formal usada en la construcción de este grupo.

Observación. La transformación formal asociada a dos transversales formales, conjuga formalmente a los grupos de transformaciones de monodromía formal que corresponden a esas transversales. Más aun, si las transversales son cercanas, entonces la transformación formal que conjuga a los grupos es cercana a la transformación identidad.

Demostración. (del lema 10.) Sea $\hat{H} = (\hat{H}_1, \hat{H}_2)$ un cambio formal de coordenadas cercano a la transformación identidad, que transforma al gérmen V en el gérmen W. Consideremos la transformación $\hat{E} = \pi^{-1} \circ \hat{H} \circ \pi$, que escrita en las coordenadas (x_1, u) tiene la expresión:

$$\hat{E} : (x_1, u) \mapsto \left(\hat{H}_1(x_1, x_2), \frac{\hat{H}_2(x_1, x_1 u)}{\hat{H}_1(x_1, x_1 u)} \right) := (E_1(x_1, u), E_2(x_1, u))$$

Observación. $\hat{E}$ es una transformación ("semiformal") tal que, sus componentes son series formales en la varable x_1 y cuyos coeficientes son funciones holomorfas (de hecho polinomios) en u.

Observación. La transformación $\hat{E}$ es cercana a la transformación identidad para una N suficientemente grande, es decir:

$$\hat{E}(x_1, u) = (x_1, u) + O(x_1^N).$$

Demostración. La demostración se sigue de un cálculo directo.

■

Consideremos una transversal holomorfa T al divisor L en el punto $(0, u_0)$; sea z el parámetro de la transversal, y sean

$$x_1 = \alpha(z), \quad u = u_0 + \beta(z)$$

las ecuaciones paramétricas de la transversal T, donde $\alpha'(0) \neq 0$.
Consideremos las series de potencias:

$$\hat{\alpha}(z) := E_1(\alpha(z), u_0 + \beta(z)) \;\; y \;\; \hat{\beta}(z) := E_2(\alpha(z), u_0 + \beta(z)) - u_0.$$

Observación. Si $\hat{T}$ es la transversal formal con punto base u_0 definida por las series formales $\hat{\alpha}(z)$ y $\hat{\beta}(z)$, entonces, las transversales T y $\hat{T}$ son cercanas.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la ultima observación y de las definiciones de $\hat{T}$ y T.

■

Sea $x_1(u, z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^1(u) z^k$ solución de una ecuación no autonoma del tipo 3.5 que define a la foliación $\tilde{F}_V$ la cual intersecta a la transversal T en el punto correspondiente al parámetro z. Por otro lado, consideremos la solución formal $y_1(u, z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(u) z^k$ de una ecuación no autonoma del tipo 3.5 que define a la foliación $\tilde{F}_W$ la cual intersecta a la transversal formal $\hat{T}$ en el punto correspondiente al parámetro z.

Observación. La trasformación $\hat{E}$ manda la primera solución $x_1(u, z)$ en la segunda solución $y_1(u, z)$.

Demostración. Basta con ver que se satisface la relación: $y_1(E_2(x_1(u,z),u),z) = E_1(x_1(u,z),u)$. Puesto que $\hat{E}$ transforma la transversal T en la transversal formal $\hat{T}$, en particular transforma el punto de intersección de la solución x_1 y la transversal T (en el punto correspondiente al parametro z) en el punto que corresponde al punto de intersección de la solución formal y_1 con la transversal formal $\hat{T}$ (en el punto que corresponde al parametro z) lo cual escrito en formulas es justamente la relación anterior.

■

Observación. La transformación de monodromía del gérmen V, definida por la transversal T y una curva cerrada arbitraria γ; coincide exactamente con la transformación formal de monodromía del gérmen W definida por la transversal formal $\hat{T}$ y la misma curva cerrada γ.

Demostración. Por la observación anterior, las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$ son las mismas con lo cual queda demostrada esta observación.

■

Concluimos la demostración del lema 10 de la definición de las transformaciones formales correspondientes a las transversales y de la última observación.

■

3.5 Demostración del teorema principal.

Sean V y W gérmenes de la clase Σ'_n formalmente orbitalmente equivalentes, con grupos de monodromía no solubles. Por el corolario establecido en la sección 3.1, podemos suponer que: los gérmenes V y W son cercanos, tienen conjuntos separatrices identicos y que son formalmente equivalentes; más aun, el cambio formal de coordenadas que conjuga a estos gérmenes, lo podemos suponer cercano a la transformacón identidad. En virtud del corolario del lema 10, podemos suponer que los grupos de monodromía de los gérmenes definidos por la misma transversal, son analiticamente equivalentes y el biholomorfismo que los conjuga es cercano a la transformación identidad.

Consideremos la foliación auxiliar $\tilde{F}$ por curvas de fase del blowp-up $\tilde{W}'$ del campo vectorial W' construido en la sección 3.2 para el gérmen V. Como mostramos en la sección 3.3, el conjunto tangente $\tilde{T}$ de las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}$ consta de las separatrices del gérmen $\tilde{V}$ y $n-2$ curvas suaves $\tilde{T}_k$ que intersectan transversalmente al divisor L en los puntos no singulares $w_1, ..., w_{n-2}$ del blow-up $\tilde{V}$. Sean $p_1, ..., p_{n+1}$ los puntos singulares de $\tilde{V}$, sea $L^0 = L \setminus \{p_1, ..., p_{n+1}\}$ y sea $w_0 \in L^0$ un punto distinto de los puntos de tangencia $w_1, ..., w_{n-2}$.

Consideremos una hoja T_0 de la foliación $\tilde{F}$ a travez del punto w_0; notese que por construcción de la foliación $\tilde{F}$, T_0 es una transversal a las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$. En la esfera agujerada L^0, tomamos una curva γ_k la cual une a los puntos w_0 y w_k para cada $k = 1, ..., n-2$. Sea $\delta_k : (T_0, w_0) \longrightarrow (T_k, w_k)$ la transformación de monodromía asociada a la foliación $\tilde{F}_V$ a lo largo de la curva γ_k. Analogamente sea $\tilde{\delta}_k : (T_0, w_0) \longrightarrow (T_k, w_k)$ la transformación de monodromía asociada a la foliación $\tilde{F}_W$ a lo largo de la misma curva γ_k. Finalmente, sean G_V y G_W los grupos de monodromía de los gérmenes V y W construidos para la transversal T_0 a L^0 por w_0 y sea $h : (T_0, w_0) \longrightarrow (T_0, w_0)$ el biholomorfismo que los conjuga.

El siguiente lema técnico muestra que sin perdida de generalidad, podemos suponer que: las curvas $\tilde{T}_k$ pueden asumirse como las curvas donde las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$ son tangentes, que $G_V = G_W$, así como $h = id$ y $\delta_k = \tilde{\delta}_k$ $\forall k = 1, ..., n-2$.

LEMA 11. Sean $\gamma_s = \{y = \phi_s(x)\}$ gérmenes de curvas suaves analíticas en $(\mathbb{C}^2, 0)$ los cuales se intersectan tranversalmente en cero y sean $F_s : \gamma_s \mapsto \gamma_s$ gérmenes de biholomorfismos, donde $s = 1, ..., m$ para alguna m. Sean V y W gérmenes de campos vectoriales de la clase Σ_n' formalmente equivalentes; supongamos que el gérmen V no es tangente a las curvas γ_s con números $s \leq K$, $K \leq \cancel{m}$ ~~fuera del origen~~. ~~Supongamos que todos~~ los ~~biholomorfis-~~

mos F_s son suficientemente cercanos a la transformación identidad y que el gérmen W es suficientemente cercano al gérmen V.
Entonces, existe un biholomorfismo local $H : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ el cual transforma las curvas γ_s en si mismas, coincide con F_s en γ_s para $s = 1, ..., m$ y transforma al gérmen W en un gérmen que coincide con el gérmen V en las curvas γ_s, para $s = 1, ..., K$.
En efecto, el lema 11 es útil en la construcción de un biholomorfismo tal que su levantamiento a una vecindad del divisor L coincide con h^{-1} en la transversal T_0, preserva el conjunto separatriz, coincide con $\delta_k \circ h^{-1} \circ \tilde{\delta_k}^{-1}$ en la transversal T_k, y transforma el campo de direcciones $\tilde{W}$ en un campo de direcciones que coincide con el campo de direcciones $\tilde{V}$ en el conjunto tangente $\tilde{T}$. Remplazando el gérmen W por su imagen bajo este biholomorfismo obtenemos que las curvas tangentes, los conjuntos separatrices, los grupos de monodromía y los conjuntos de las transformaciones correspondientes coincide.

Primero, definiremos el biholomorfismo $\tilde{H}$ que conjuga los blow-ups $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ en una pequeña vecindad U del punto w_0, posteriormente checaremos cada una de las afirmaciones anteriores, con lo cual concluiremos la demostración del teorema principal finalmente, daremos la demostración del lema 12.

Definición del biholomorfismo $\tilde{H}$:

consideremos las restricciones de las foliaciones $\tilde{F}$, $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$ a U, las cuales denotaremos por: $\tilde{F}^U$, $\tilde{F}^U_V$ y $\tilde{F}^U_W$ respectivamente.
Para un punto $q \in T_0$ suficientemente cercano a w_0, consideremos las hojas de las foliaciones ${\phi_q}^V$ y ${\phi_q}^W$ de las foliaciones $\tilde{F}^U_V$, $\tilde{F}^U_W$ respectivamente, que pasan a travez del punto q. Para un punto $w \in L$ suficientemente cercano a w_0, consideremos la hoja ψ_w de la foliación $\tilde{F}$ que pasa por w. Por definición tomaremos $\tilde{H}({\phi_q}^V \bigcap \psi_w) = {\phi_q}^W \bigcap \psi_w$.

Proposición 3.2. *La transformación biholomorfa $\tilde{H}$ así definida, se puede extender continuamente del dominio U a alguna vecindad del divisor L,*

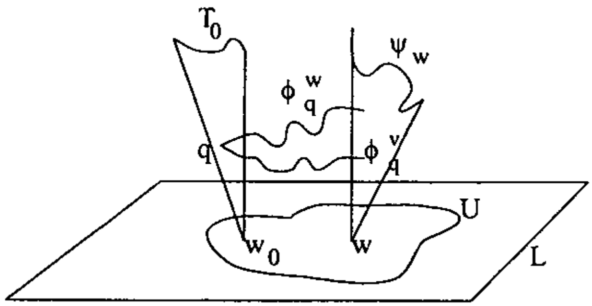

Figura 3.2: Definición del biholomorfismo $\tilde{H}$

para la cual las vecindades de los puntos singulares $p_1, ..., p_{n+1}$ así como las vecindades de los puntos $w_1, ..., w_{n-2}$ son distantes.

Demostración. Es una consecuencia del hecho que los grupos de monodromía de los blow-ups $\tilde{V}$ y $\tilde{W}$ coinciden.

∎

Proposición 3.3. *El biholomorfismo $\tilde{H}$ se puede continuar analíticamente a un biholomorfismo de las vecindades de los puntos singulares.*

Demostración. En cada punto singular $\tilde{H}$ puede ser continuado analíticamente a un biholomorfismo como una consecuencia del lema 5 y sus observaciones.

∎

Finalmente

Proposición 3.4. *$\tilde{H}$ se puede continuar analiticamente a un biholomorfismo de las vecindades de los puntos de tangencia.*

Demostración. Esto es una consecuencia de la coincidencia de las trasformaciones asociadas a las foliaciones $\tilde{F}_V$ y $\tilde{F}_W$ en virtud del corolario del lema 10 y sus observaciones.

∎

Abusando de la notación llamaremos $\tilde{H}$ al biholomorfismo que se obtiene de las dos proposiciones anteriores.

Proposición 3.5. *El biholomorfismo $\tilde{H}$ de las vecindades del divisor, transforma la foliación $\tilde{F_V}$ en la foliación $\tilde{F_W}$.*

Demostración. En efecto, es una consecuencia del corolario asociado a el lema 10, que $\tilde{H}$ transforma el par de foliaciones $(\tilde{F}, \tilde{F_V})$ en elpar de foliaciones $(\tilde{F}, \tilde{F_W})$.

■

Proposición 3.6. *El biholomorfismo $\tilde{H}$ es el blow-up de algun biholomorfismo local H.*

Proposición 3.7. *El biholomorfismo $\tilde{H}$ manda la foliación F_V en la foliación F_W; así, establecemos la equivlaencia orbital analítica de los gérmenes V y W.*

Demostración. Es una consecuencia de las 2 últimas proposiciones

■

Con todo lo anterior completamos la demostración del teorema principal. Ahora daremos la demostración del lema 11.

3.5.1 Demostración del lema 11.

Supongamos que la variable x_1 es un parámetro local en γ_s. Sea F_s el biholomorfismo que manda el punto $(x_1, \phi_s(x_1))$ en el punto $(f_s(x_1), \phi_s \circ f_s(x_1))$.

Observación. Sin perdida de generalidad, podemos tomar $\phi_s'(0) \neq 0 \; \forall \; s$.

Vamos a dar la demostración del lema 11 analizando dos casos:

1. Cuando los gérmenes de transformaciones F_s son distintos.
   Para una x_1 fija, consideremos el polinomio de interpolación de Lagrange $H^1_{x_1}(x_2)$ de grado $m-1$ el cual toma los valores $f_s(x_1) - x_1$

en los puntos $x_2 = \phi_s(x_1)$, $s = 1, ..., m$. Para una x_2 fija, consideremos el polinomio de interpolación de Lagrange $H^2_{x_2}(x_1)$ de grado $m-1$, el cual toma los valores $\phi_s \circ f_s \circ \phi_s^{-1}(x_2) - x_2$ en los puntos $x_1 = \phi_s^{-1}(x_2)$, $s = 1, ..., m$.

Proposición 3.8. *La transformación $H : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + H^1_{x_1}(x_2), x_2 + H^2_{x_2}(x_1))$ es cercana a la transformación identidad, manda las curvas γ_s en si mismas y coincide con F_s en γ_s $\forall$ $s = 1, ..., m$.*

Demostración. Por la construcción de H'_{x_1} y H'_{x_2} el resultado es inmediato.

■

2. Cuando los gérmenes de transformaciones F_s son los mismos.
En este caso, supongamos que $D(x_1, x_2) = \prod_{s=1}^{M}(x_2 - \phi_s(x_1))$. Buscamos que el biholomorfismo H que conjuga tenga una expresión del tipo: $H = id + DG$ para alguna función vectorial desconocida G. La solución del sistema de ecuaciones:

$$H'V = W \circ H \text{ en } \gamma_s, \qquad s = 1, ..., M$$

se reduce a encontrar una función vectorial G cercana a cero, que coincida en las curvas γ_s, para $s = 1, ..., k$, con la función vectorial dada, la cual escercana a cero, la solución a este problema como en el primer caso de esta demostración, esta dada por la formula de interpolación de Lagrange. Esto completa la demostración del lema 12.

Apéndices

Apéndice A

Grupos solubles.

Definición A.1. Una serie normal de un grupo G es una sucesion de subgrupos:
$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = id.$
En la cual G_{i+1} es subgrupo normal de G_i (i.e $G_{i+1} \lhd G_i$) para toda i.
Los grupos factores para esta serie normal son los subgrupos G_i/G_{i+1} para $i = 0, 1, ...n - 1$.

Definición A.2. Una serie soluble de un grupo G es una serie normal en la cual todos sus factores son abelianos.

Definición A.3. Un grupo G es soluble si tiene una serie soluble.

Teorema A.1. *Cualquier subgrupo H de un grupo soluble G es soluble.*

Teorema A.2. *Cualquier cociente de un grupo soluble es soluble.*

Teorema A.3. *Si $H \lhd G$ y si tanto H como G/H son solubles, entonces G es soluble.*

Teorema A.4. *Cualquier p-grupo finito G es soluble.*

Definición A.4. Los subgrupos *centralizadores de G* estan definidos inductivamente de la siguiente manera:
$G_{(0)} = G, G_{(i+1)} = [G_i, G_i]$; esto es $G_{(i+1)}$ es el subgrupo conmutador de G_i.

Definición A.5. La serie $G = G_{(0)} \geq G_{(1)} \geq \ldots \geq G_{(n)} = id$ es llamada la serie derivada de G.

Para ver que los subgrupos centralizadores de G son subgrupos normales, es conveniente introducir un nuevo tipo de subgrupo.

Definición A.6. Un subgrupo H de G es llamado caracteristico en G , denotado por $HcharG$, si $\varphi(H) = H$ para cualquier automorfismo φ de G.

Observación. Si $\varphi(H) \leq H$ para cualquier automorfismo φ, entonces H char G.

Demostración. Puesto que tanto φ como φ^{-1} son automorfismos entonces tanto $\varphi(H) \leq H$ como $\varphi^{-1} \leq H$ se da de donde: $H = \varphi \circ \varphi^{-1}(H) \leq \varphi(H)$ por lo tanto $\varphi(H) = H$.

∎

Lema A.1. *1. Si $HcharK$ y $KcharG$ entonces $HcharG$.*

2. Si $HcharK$ y $K \lhd G$ entonces $H \lhd G$.

Demostración. 1. Si φ es un automorfismo de G entonces $\varphi(K) = K$ de donde la restricción de φ a K es un automorfismo de K y puesto que H char K entonces $\varphi(H) = \varphi|_K(H) = H$.

2. Sea $a \in G$ y sea $\varphi : G \longrightarrow G$ la conjugacion por a. Puesto que $K \lhd G$, $\varphi|_K$ es un automorfismo de K; ahora, dado que H char K entonces $\varphi|_K(H) \leq K$, pero con esto tenemos que si $h \in H$ entonces $aha^{-1} = \varphi(h) \in H$.

∎

Teorema A.5. *Para cualquier grupo G, los subgrupos centralizadores de G son caraterísticos, por tanto son subgrupos normales.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre i. Recalcamos que el centralizador $G_{(1)} = G'$, es decir, el subgrupo de G generado por todos los conmutadores, esto es, por todos los elementos de la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Si φ es un automorfismo de G, entonces $\varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1}$ es un conmutador y así, $\varphi(G')\leq G'$. Para el paso inductivo,tenemos que demostrar justamente que $G_{(i+1)}$ char $G_{(i)}$; puesto que $G_{(i)}$ char G por hipotesis de inducción, y en virtud del inciso 1 del lema anterior resulta que $G_{(i+1)}$ es caracteristico en G.

∎

Lema A.2. *Si* $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = id$ *es una serie soluble, entonces* $G_i \geq G_{(i)} = [G_{i-1} : G_{i-1}]$ *para toda* i.

Demostración. La demostración es por inducción sobre i. Si $i = 0$, entonces $G_0 = G \geq G_{(0)}$. Para el paso inductivo existe un teorema que nos dice justamente que el subgrupo conmutador G_i' del subgrupo G_i es el subgrupo de G_{i+1} es decir, $G_{i+1} \geq G_i'$, puesto que G_i/G_{i+1} es abeliano. Por hipotesis de inducción tenemos que: $G_i \geq G_{(i+1)}$, así que $G_i' \geq G_{(i)}' = G_{(i+1)}$, de donde $G_{i+1} \geq G_{(i+1)}$, con lo cual queda demostrado el lema.

∎

Teorema A.6. *Un grupo* G *es soluble si y solo si* $G_{(n)} = id$ *para alguna* n.

Demostración. Sea $G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_n = id$ una serie soluble. Por el lema anterior, $G_i \geq G_{(i)}$ para toda i. En particular, $id = G_n \geq G_{(n)}$, asi $G_{(n)} = id$. Conversamente, si $G_{(n)} = id$, entonces la serie derivada es una serie normal; puesto que tiene grupos factores abelianos, esto es, es una serie normal para G.

∎

Observación. Si G es soluble, entonces $G \neq G_{(1)}$ a condicion de que $G \neq id$.

Apéndice B

Teorema de Tougeron.

B.1 El álgebra local de una transformación en un punto.

Definición B.1. Un *álgebra* consta de un espacio vectorial V sobre un campo K, junto con una operación binaria de multiplicación en el conjunto V de vectores, tal que para toda $a \in K$ y $\alpha, \beta, \gamma \in V$ las siguientes condiciones se satisfacen:

1. $(a\alpha)\gamma = \alpha(a\gamma) = a(\alpha\gamma)$.

2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

La llamaremos incorrectamente un *álgebra V sobre el campo K.*

Consideremos una función suave f, definida en una vecindad del origen en $\mathbb{R}^m$, la cual manda el origen de $\mathbb{R}^m$ al origen de $\mathbb{R}^n$ ($i.e$ $f : (0, \mathbb{R}^m) \longrightarrow (0, \mathbb{R}^n)$). Esta función está dada en terminos de coordenadas por n funciones de m variables

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_m), ..., y_n = f_n(x_1, ..., x_m).$$

Puesto que hay varios tipos de clases de "suavidad" requeridas de estas funciones, introducimos una notación uniformizante $\mathbf{A}_x$ para la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones de las clases consideradas. El álgebra $\mathbf{A}_x$ puede ser por ejemplo:

1. $\mathbb{R}[[x_1, ..., x_m]]$ la $\mathbb{R}[[x]]$ álgebra de las series de potencias formales.

2. H_x el álgebra de las series de potencias convergentes.

En el caso de H_x, el radio de convergenia depende de la serie; en los dos casos anteriores uno tambien puede considerar el caso complejo, esto es, las algebras de los gérmenes de funciones holomorfas y de series de potencias formales $\mathbb{C}[[x]]$.
Los elementos $f_1, ..., f_n$ del álgebra de funciones $\mathbf{A}_x$ generan en $\mathbf{A}_x$ un ideal, donde este ideal está formado por todas las combinaciones lineales $h_1 f_1 + ... + h_n f_n$ con los coeficientes h_k en $\mathbf{A}_x$. Denotaremos a este ideal generado por $f_1, ..., f_n$ como $I_f = (f_1, ..., f_n)$.

Definición B.2. El *álgebra local de una transformación* f en el origen de $\mathbb{R}^m$, es el álgebra cociente, asociada a el álgebra de funciones y al ideal generado por las componentes de la función f:

$$Q_f = \mathbf{A}_x/(f_1, ..., f_n).$$

Observación. El álgebra Q_f no depende del sistema local de coordenadas usadas en las vecindades $(R^m, 0)$ y $(R^n, 0)$. Mas presisamente, pasar a otro sistema de coordenadas induce pasar de cualquier sucesión exacta de R-álgebras $0 \to I_f \to \mathbf{A}_x \to Q_f \to 0$ a otra isomórfa.

Demostración. ∎

Definición B.3. El *álgebra local de una transformación* f en un punto, es el álgebra cociente, asociada a el álgebra de funciones y al ideal generado por las componentes de la función f:

$$Q_f = \mathbf{A}_x/(f_1, ..., f_n).$$

B.2. **Teorema de Tougeron en la determinación finita de un gérmen de función en un punto c**

Observación. En terminos álgebraicos, decimos que un álgebra es *local* si, esta tiene unicamente un ideal maximal. Geométricamente, los ideales maximales corresponden a subvariedades minimas, esto es, a puntos. Así la localización de un álgebra significa que estamos concentrando todo en un punto.

Observación. Nuestras álgebras de funciones $\mathbf{A}_x$ y Q_f son álgebras locales; donde el ideal maximal $\mathbf{m_x}$ es el conjunto de funciones que se anulan en el punto x.

B.2 Teorema de Tougeron en la determinación finita de un gérmen de función en un punto crítico de multiplicidad finita.

Definición B.4. Una *equivalencia diferenciable* de transformaciones diferenciables $f_1 : M_1 \longrightarrow N_1$ y $f_2 : M_2 \longrightarrow N_2$ es un diagrama conmutativo en el cual las flechas verticales son difeomorfismos. El diagrama conmutativo representa la identidad $k(f_1(h^{-1}(x))) = f_2(x)$, i.e:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2; \end{array}$$

en esta formula h^{-1} esta a la *derecha* de f_1 y k a la *izquierda*, así el difeomorfismo h^{-1} se dice que es un *cambio derecho* del dominio .

Definición B.5. Dos gérmenes de transformaciones suaves se dice que son *(diferenciablemente, izquierdo-derecho) equivalentes* si existe un gérmen de difeomorfismo entre los dominios de las transformaciones que trasnforman el primer gérmen en el segundo.

Definición B.6. El punto crítico 0 de una función suave $f : (\mathbb{R}^m, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ se dice que será de *multipicidad finita*, si el álgebra local de la transformación gradiente es de multiplicidad finita, esto es, si

$$\mu = dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[[x_1, ..., x_m]]/(\partial f/\partial x_1, ...\partial f/\partial x_m) = dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[[x]]/I_{\nabla f} < \infty.$$

El número μ es llamado la *multiplicidad* del punto crítico.

Teorema B.1. *(de Tougeron)En una vecindad de un punto crítico de multiplicidad finita una función es equivalente derecha a una función polinomial (para presisar, a su polinomio de Taylor de grado $\mu + 1$ si la multiplicidad es igual a μ).*

Para la demostración de este teorema, la idea es resolver tres lemas:

Lema B.1. *Cualquier monómio de grado suficientemente grande (y en particular de grado μ) esta en el ideal gradiente $I_{\nabla f}$ de la función f (que esta, en el ideal generado por $(\partial f/\partial x_1, ...\partial f/\partial x_m)$).*

Lema B.2. *Cualquier monómio de grado suficientemente grande (y en particular de grado μ) esta en el ideal gradiente de la función $f + \varphi$, esto es $\mathbf{m}^{\mu} \subset I_{\nabla(f+\varphi)}$.*

Lema B.3. *Cualquier monómio de grado suficientemente grande (y en particular de grado $\mu + 1$) la ecuación homológica tiene una solución v_t, la cual depende suavemente en t y toma el valor cero en el origen.*

Observación. En todos los casos anteriores podemos considerar en lugar del campo de los números $\mathbb{R}$ el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Para la demostración de los lemas así como para la demostración del teorema ver la refencia [3]

Apéndice C

Series formales.

Como sabemos un polinomio sobre un dominio entero D esta definido como una suma finita formal $a_0 + a_1x + ...a_nx^n$, donde las $a_i \in D$ y x es una indeterminada. De manera similar definimos una serie de potencias formal.

Definición C.1. Una *serie formal* es una suma formal $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_1x^i$, donde los coeficientes a_i estan en D.

Observación. Si sumamos y multiplicamos series formales de la misma manera que a los polinomios, obtenemos un dominio entero (el dominio entero de las series formales) $D[x]'$ el cual contiene al anillo de polinomios $D(x)$.

Observación. $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n + ...$ es una unidad de $D[x]'$ si y solo si a_0 es unidad de D.

Denotaremos por K a cualquiera de los campos $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

C.1 Substitución en una serie formal

La substitución de una constante por la indeterminada x en una serie de formal usualmente no tiene sentido. Sin embargo si la serie solo tiene un número finito de coeficientes distintos de cero este es un elemento del anillo de polinomios $K(x)$ y la substitución sí tiene sentido. Ahora, si la constante

es la constante cero definimos $f(0) = a_0$; en otro caso es dificil darle sentido a $f(a)$, a menos que exista la noción de continuidad en K; por medio de la cual podriamos definir la convergencia de una serie infinita.
Podemos sin embargo definir la substitución de una serie de formal en otra de la siguiente manera:

Definición C.2. Sean $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ *y* $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ de series formales en una variable, las primeras n componentes de *la serie substitución* $f \circ g(x)$ *(composición)* estan dadas por los primeros n terminos de las siguiente suma

$$f \circ g(x) = f\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) = a_1\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) + \dots + a_n\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right)$$

C.2 Derivada de una serie de potencias formal

Definición C.3. *La derivada de una serie formal* $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *en una variable* es la serie formal $\frac{dg}{dx} = g'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$.

Es decir, es la serie compuesta por las derivadas de cada componente de g.
De manera natural podemos extender estas definiciones al conjunto de las series formales en varias variables, a dicho conjunto lo denotaremos por $K[[x]]$.

Definición C.4. Consideremos una serie formal H en varias variables (i.e $H \in K[[x]]$), la derivada de la serie formal H es la derivada con respecto a cada una de sus variables, es decir

$$DH = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}\right).$$

Definición C.5. La *serie de taylor formal* es una expresión de la forma:

$$f(x) = \sum_{\mathbb{N}^n} a_k x^k,\ a_k \in K,\ x^k = (x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}),$$

donde $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$

Definición C.6. Una substitución formal con punto fijo 0 es una expresión de la forma:

$$\tilde{H} = (H_1(x), ...H_n(x)),\ H_i \in K[[x]],\ H_i(0) = 0,\ detDH(0) \neq 0$$

Apéndice D

Ecuaciones diferenciales complejas.

D.1 Funciones de varias variables complejas.

De manera semejante a como se define una función holomorfa de una variable compleja, decimos que una función definida en un abierto U de $\mathbb{C}^n$ con valores en $\mathbb{C}$ es *holomorfa* si como función de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^2$ tiene derivadas parciales continuas y si esta derivada interpretandola como tomando valores en las matrices de $2n \times 2$ con coeficientes reales, es un elemento de $M(n, 1,\mathbb{C})$; esto es, visto como inmerso en $M(2n, 2, \mathbb{R})$ bajo la inclución, (donde la inclución la obtenemos de considerar una función $\mathbb{C}$-lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}$ como una función $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^2$). Una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ definida de un abierto U de $\mathbb{C}^n$ es *holomorfa*, si es continuamente diferenciable, vista como función de un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ en $\mathbb{R}^{2m}$ y su derivada toma valores en las transformaciones $\mathbb{R}$-lineales que se obtienen de las transformaciones $\mathbb{C}$-lineales $M(n, m,\mathbb{C})$, nuevamente inmersas en $M(2n, 2m, \mathbb{R})$.

Teorema de la función implicita.

Sean $f_1, ..., f_r$ funciones holomorfas definidas en un abierto U de $\mathbb{C}^n$ definiendo una función holomorfa $f = (f_1, ..., f_r) : U \longrightarrow \mathbb{C}^r$. Supongamos que la matriz jacobiana

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

tiene rango máximo en z_0. Entonces existe un cambio de coordenadas en z_0 tal que en estas coordenadas tenemos:

1. Si $r \leq n$ entonces $f_1 = z_1, ..., f_r = z_r$.

2. Si $r \geq n$ entonces $f_1 = z_1, ..., f_n = z_n, f_{n+1} = K_{n+1}, ..., f_r = K_r$ con K_j constantes.

D.2 El teorema fundamental de la teoria de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición D.1. Un *campo vectorial holomorfo* definido en un abierto U de $\mathbb{C}^n$ es una n-ada de funciones holomorfas definidas en U

$$V = (V_1, ..., V_n) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

donde $z_1, ..., z_n$ representan a las funciones coordenadas en U.

Definición D.2. Sea U un abierto de $\mathbb{C}^n$ y V un campo vectorial holomorfo definido en U. *La ecuación diferencial holomorfa* asociada al campo V se define como

$$\frac{dz_i}{dT} = V_i(z_1, ..., z_n), \ i = 1, ..., n. \tag{D.1}$$

Donde T denota una variable en los complejos. Diremos que σ es una solución de la ecuación diferencial D.1 si $\sigma = (\sigma^1, ..., \sigma^n) : U' \mapsto U \subset \mathbb{C}^n$ es una función holomorfa definida en un abierto U' de $\mathbb{C}$ tal que, para todo T en $\mathbb{C}$

$$\frac{d\sigma^i}{dT}(T) = V_i(\sigma^1(T), ..., \sigma^n(T)). \tag{D.2}$$

Es decir; $\sigma : U' \mapsto U$ es una solución de la ecuación D.1 si para todo punto T_0 en U' se tiene que la derivada de σ con respecto a T en T_0 corresponde al vector asociado por el campo en el punto $\sigma(T_0)$ (e.i. $\frac{d\sigma}{dT}(T_0) = V(\sigma(T_0))$.)

Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sean $V_1, ..., V_n$ funciones holomorfas definidas en el abierto U de $\mathbb{C}^n$, entonces para todo punto p de U y T_0 de $\mathbb{C}$, existe una única solución de la ecuación diferencial holomorfa D.1 definida en una vecindad de T_0 en $\mathbb{C}$ y satisfaciendo la condición inicial $z(T_0) = p$.
La demostración de este teorema se puede consultar en [12].

Teorema de rectificabilidad de un campo vectorial.

Sea V un campo vectorial holomorfo definido en una vecindad suficientemente pequeña de un punto no singular, entonces V es analiticamente equivalente al campo constante $e_1 = (1, 0, ..., 0)$.
En otras palabras, en una vecindad de un punto no singular hay un biholomorfismo el cual lleva al campo original en el campo constante e_1.
El teorema anterior es valido para campos vectoriales diferenciables; el biholomorfismo (difeomorfismo si el campo es diferenciable) es llamado el biholomorfismo rectificante.

Bibliografía

[1] Arnol'd V.I
Ordinary Differential Equations, MIT 1978.

[2] Arnol'd V.I
Geometrical Methods in the theory of Differential Equations, Springer Verlag 1983.

[3] Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M.
Singularitie of Differentiable Maps Vol.I Monographs in Mathematics vol. 82 Birkhauser.

[4] Camacho C. and Sad P.
Topological clasification and bifurcation of holomorphic flows whit resonances in C^2. Invent. Math. 67 (1982) 447-472.

[5] Camacho C., Kuiper N., Palis J.
The topology of holomorphic flow with singularity. Pub. Math. IHES 48, 5-38 (1978).

[6] Ecalle J.
Les fonctions résurgentes, Pub. Math. Orsay, tomes I-II 1985.

[7] Cervau D. et Moussu R.
Groups d'automorphismes de $(\mathbb{C},0)$ et équations differentielles $ydy + \ldots = 0$. Bull. Soc. Math. France, 1988, Vol. 116, pp. 459-488.

[8] Eliazarov P.M. and Ilyashenko, Yu. S.
A Remark on the orbital analytic classification of the germs of vector fields. Mat.Sb. 1983 vol.121 p.p. 111-116.

[9] Fraleigh J.B.
A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley Reading, Massacusetts, 1972.

[10] Gomez-Mont X. y Ortiz-Bobadilla L.
Sistema dinámicos holomorfos en superficies, aportaciones matemáticas, sociedad matemática mexicana 1989.

[11] Hirsch,M. Smale,S.
Differntial Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York,1970.

[12] Hille E.
Ordinary Differential Equations in The Complex Domain,John Wiley, 1976

[13] Ilyashenko, Yu. s.
Limiting cycles of polynomial vector fields with no degenerate singular points on the real plane. Funkts. Analiz.,1984 vol. 18, no. 3, p.p. 32-42.

[14] Malgrange B.
Travaux d'Ecalle et Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, seminaire Bourbaki 582 (1981).

[15] Martinet J. et Ramis J.P.
Classification analytique des équations differentialles non lineaires resonnantes du premiere ordre, Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 (1983) 571-621.

[16] Ramis J.P.
Confluence et resurgence, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 1989, vol.36 pp. 706-716.

[17] Voronin S.

Analytical classification of germs of maps $(C,0) \longrightarrow (C,0)$, J. Funct. Anal. 15 (1981) 1-17.

[18] Voronin S.

Orbital analytic equivalence of degenerate singular points of holomorphic vector fields on a complex plane. Steklov Institute of Mathematics, vol. 213, 1996, pp. 30-49.

Lista de Figuras