15
2ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS TEOREMAS DE GEOMETRIA MODERNA DEMOSTRADOS CON TRANSFORMACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JORGE AUREO ILLINGWORTH HERNANDEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ

260483

1998

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
P r e s e n t e

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: ALGUNOS TEOREMAS DE GEOMETRIA MODERNA DEMOSTRADOS CON TRANSFORMACIONES

realizado por ILLINGWORTH HERNANDEZ JORGE AUREO

con número de cuenta 8407875-1 **, pasante de la carrera de** MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ	
Propietario	Dra. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER	
Propietario	Dr. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO	
Suplente	M. EN C. DIANA MAYA PADILLA	Diana Maya Padilla
Suplente	M. EN C. VINICIO ANTONIO GOMEZ GUTIERREZ	VAGómez G.

Consejo Departamental de Matemáticas
MAT. GUEVARA BRAVO JULIO CESAR

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A Dios Jehobá y su hijo Cristo..................................

A mis padres por su ayuda y comprensión......................

A mi familia y amigos que me brindaron su apoyo.........

A mis maestros por su sabiduría y disciplina que me dieron.

Dedico la presente tesis

Con mi mas profundo agradecimiento

Quisiera darle las gracias, a dios, a mis padres, que ya no están conmigo, pero como si lo estubieran por todo su apoyo y cariño y a otros seres queridos que se me han ido pero espero que algún día estemos todos juntos para decirles el profundo amor que siento por todos.

Al profesor Struck Chábez Francisco por toda su ayuda, apoyo y sugerencias.

INDICE

CAPITULO II

PROPIEDADES DE TRANSFORMACIONES

CAPITULO III

TEOREMAS DE GEOMETRÍA MODERNA DEMOSTRADOS CON TRANSFORMACIONES

INTRODUCCIÓN

" ¿Que es la geometría?. La respuesta a esta pregunta parece que es una función del tiempo.

La geometría se inició, con toda probabilidad, mucho antes que la historia escrita, como la acumulación gradual de nociones subconscientes acerca del espacio fisico y de las formas, contenidos y relaciones espaciales de objetos fisicos específicos situados en dicho espacio.

Estas nociones se originaron en simples observaciones que provienen de la capacidad humana para reconocer la forma fisica y comparar figuras y tamaños.

La inteligencia humana evolucionó hasta el punto en que fue capaz de extraer de cierto número de observaciones relativas de formas, tamaños y relaciones especiales de objetos fisicos determinados.

El espacio no era considerado como una colección de puntos, sino más bien como una región, o lugar, en el cual los objetos podían ser movidos libremente unos respecto a otros y comparados entre si. Desde este punto de vista, la relación básica en la geometría era la de congruencia o superposición.

Los matemáticos aceptaron la situación de que hay más de un espacio concebible y, en consecuencia, más de una geometría.

Pero el espacio era considerado todavía como un lugar en el cual las figuras podían ser comparadas entre sí. La idea central llegó a ser entonces la de un grupo de transformaciones congruentes de un espacio en sí mismo, y la geometría vino a considerarse como el estudio de aquellas propiedades de configuraciones de puntos que permanecen invariables cuando el espacio contiene es sometido a dichas transformaciones.

Fue desarrollado clara y elegantemente por Félix Klein en su programa de Erlangen de 1872. En el programa de Erlangen, se definió una geometría como la teoría de los invariantes de un grupo de transformaciones. Este concepto sintetizó y generalizó todos los conceptos geométricos primitivos, y proporcionó una clasificación singularmente nítida de un gran número de geometrías importantes.

Como desde este punto de vista, una geometría se define por un conjunto de objetos cualesquiera y por un grupo de transformaciones a las cuales puede someterse dicho conjunto, la geometría se alejó aún más de su conexión intima anterior con el espacio físico, y llegó a ser una cuestión relativamente simple el inventar nuevas y quizá extrañas geometrías.

A fines del siglo XIX, David Hilbert y otros formularon el concepto de la axiomática formal (en contraste con la axiomática material de los griegos), y desarrollaron la idea de una rama de la matemática como un cuerpo abstracto de teoremas deducidos de un conjunto de postulados.

Cada geometría llegó a ser, desde ese punto de vista, una rama particular de la ciencia matemática. Se estudiaron conjuntos de postulados para una gran variedad de geometrías, pero el programa de Erlangen no fue alterado en forma alguna, pues una geometría podía ser considerada como una rama de la matemática que consiste en la teoría de los invariantes de un grupo de transformaciones.

Sin embargo, en 1906, Maurice Fréchet inauguró el estudio de los espacios abstractos, y aparecieron algunos estudios muy generales que los matemáticos todavía querían llamar geometrías, pero los cuales no encajaban necesariamente dentro de la nítida clasificación Kleiniana. Un espacio se volvió meramente un conjunto de objetos, llamados corriente punto, y una geometría simplemente se convirtió en la teoría de tal espacio. El conjunto de relaciones a que quedaban sujetos los puntos se denominó estructura del espacio y dicha estructura puede ser explicable, o no es función de la teoría de los invariantes de un grupo de transformaciones".

Todo lo mencionado anteriormente aparece en el libro de Howard Eves, ESTUDIO DE LAS GEOMETRIAS, Tomo 2.

El objetivo principal de la presente tesis, es rehacer la geometría euclidiana en base a grupos de transformaciones, para así poder demostrar algunos teoremas de Geometría Moderna a partir de transformaciones.

Para demostrar estos se ocuparon algunas ideas del libro de George E. Martín, TRANSFORMATION GEOMETRY AN INTRODUCTION TO SYMMETRY.

CAPITULO I

Definición: Sea G un conjunto no vacío se dice que G es un grupo si en G esta definida una operación binaria "o" tal que :

1) Si a y b $\in$ G entonces (a o b) $\in$ G (CERRADURA).

2) Si a, b y c $\in$ G entonces (a o (b o c)) =((a o b) o c) (ASOCIATIVIDAD).

3) Existe e $\in$ G tal que (a o e) = (e o a) = a; para toda a $\in$ G (IDENTICO)

4) Para toda a $\in$ G existe la inversa de a, a^{-1} $\in$ G tal que:

   (a o a^{-1}) = (a o a^{-1}) = e (INVERSO).

Definición: Un subconjunto H de un grupo G, se dice que es subgrupo de G si respecto respecto a la operación binaria "o" en G, H misma forma un grupo.

Proposición 1): Un subconjunto no vacío H de un grupo G es un subgrupo de G si y solo si:

a) a y b $\in$ H $\Rightarrow$ (a o b) $\in$ H.

b) Para toda a $\in$ H, a^{-1} $\in$ H.

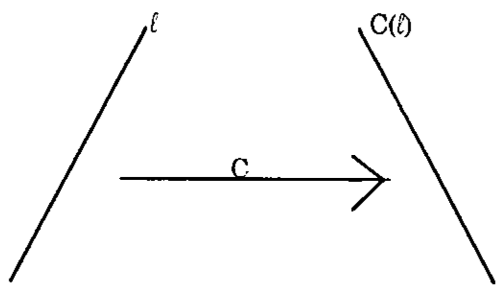
Definición: Una transformación F es una función biyectiva, de un conjunto en si mismo.

Nota: En esta tesis, en particular el conjunto que se menciona en la última definición será el plano Euclidiano E^2.

Proposición 2): Sea $\overline{F}$ el conjunto de todas las transformaciones entonces $\overline{F}$ es grupo bajo la operación composición "o".

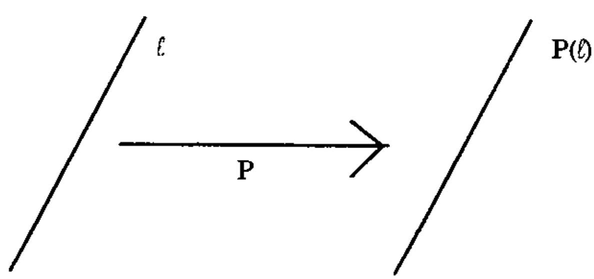
Definición: Se dice que tres puntos A, B y C son colineales si $\underline{AB} + \underline{BC} = \underline{AC}$ donde A, B y C $\in E^2$ ($\underline{AB}$ es el segmento dirigido del punto A al punto B).

Definición: Una Colineación C es una transformación, con la propiedad de que si ℓ es una recta entonces $C(\ell)$ es también una recta.



Proposición 3): El conjunto $\overline{C}$ de todas las transformaciones es subconjunto de $\overline{F}$.

Definición: Una colineación P es un paralelismo, si $P(\ell) // \ell$ para toda recta ℓ en E^2.



Proposición 4): El conjunto $\overline{P}$ de todos los paralelismos es subgrupo de $\overline{C}$ y por tanto de $\overline{F}$.

Definición: Una transformación M es una isometría si y solo si PQ = P′Q′ para todo par de puntos P y Q $\in E^2$, con M(P) = P′ y M(Q) =Q\` (PQ es la distancia del punto P al punto Q).

"Al conjunto de todas las isometrías las llamaremos $\overline{M}$ ".

Proposición 5): Las isometrías son subgrupo de $\overline{F}$

Proposición 6): Toda isometría es una colineacion.

Definición: Una isometría es directa si preserva la orientación y es indirecta si invierte la orientación (se denotará isometría directa como Md e isometría indirecta como Mi).

Isometría directa Md. Isometría indirecta Mi.

Proposición 7): El conjunto $\overline{Md}$ de todas las isometrias directas es subgrupo de $\overline{M}$.

Observación: Las isometrias indirectas no forman grupo, dado que la composición de dos isometrias indirectas es una isometría directa.

Definición: Dos figuras son congruentes si y solo si existe una isometría una en la otra.

Definición: Si $r \neq 0$ entonces una similitud L de razón r, es una transformación tal que r $\underline{PQ} = \underline{P'Q'}$ para todos los puntos P y Q en E^2 y $r \in IR-\{0\}$ con $L(P) = P'$ y $L(Q) = Q'$ (IR en el conjunto de los números reales).

Proposición 8): El conjunto $\overline{L}$ de todas las similitudes es subgrupo de $\overline{F}$.

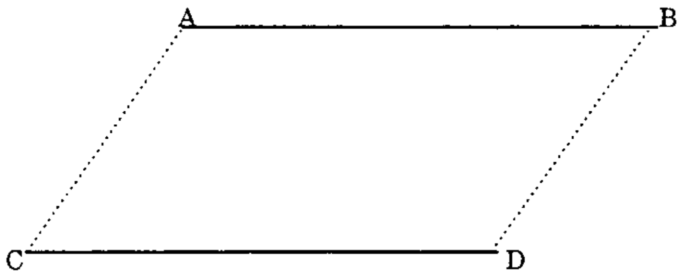
Definición: Dos figuras son semejantes si y solo si existe una similitud que manda una en la otra.

Proposición 9): Congruencia y semejanza son relaciones de equivalencia.

Definición: Se dice que un conjunto A es fijo bajo una transformación F si $F(P) = P$ para toda $P \in A$.

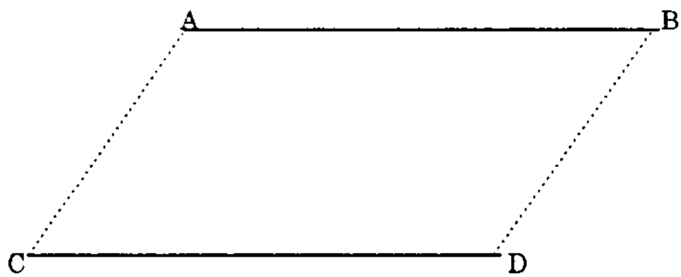
Definición: Se dice que un conjunto A es invariante bajo una transformación F, si la imagen de A bajo F es el conjunto A, es decir "$F(P) \in A$ para toda $P \in A$".

Definición: Una traslación T[A,B] es una transformación tal que si T[A,B](A) =B y T[A,B](C) = D entonces el cuadrilátero ∎CABD es un paralelogramo



Teorema 1): Una traslación T[A,B] es un paralelismo y una isometría.

Demostración:



Sean A,B,C y D $\in E^2$.

Sea T[A,B] una traslación tal que T[A,B](A) = B y T[A,B](C) = D.

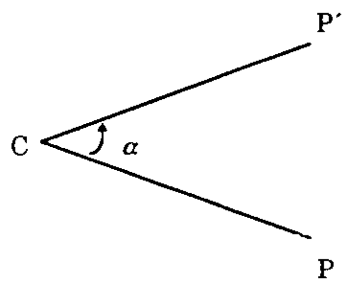
Por definición de traslación T[A,B] tenemos que el cuadrilátero ▮ABCD es un paralelogramo entonces $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$, AB = DC y CA = BD ($\overleftrightarrow{AB}$ es una recta que pasa por los puntos A y B).

Como $\overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$ entonces la traslación T[A,B] es un paralelismo y también como CA = BD entonces la traslación T[A,B] es una isometría.

Proposición 10): El conjunto $\overline{T}$ de todas las traslaciones es subgrupo de $\overline{F}$.

Definición: Una rotación R(C,α) con centro en el punto C y ángulo "α" es una transformación que fija al punto C y para todo P$\neq$C, CP = CP´ y el ángulo

$\measuredangle$ PCP´ es "α" donde R(C, α)(P) =P´.



Teorema 2): Una rotación R(C, α) es una isometría.

Demostración:

Sea R(C, α) una rotación.

Sean P y Q $\in E^2$.

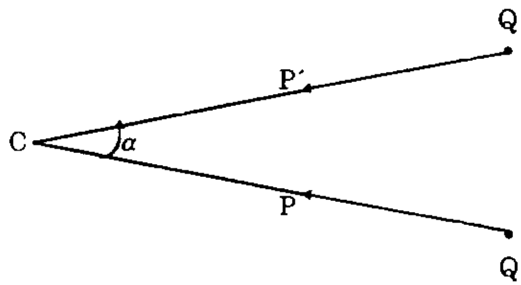
Aplicamos la rotación R(C, α) a los puntos P y Q respectivamente.

R(C, α) (P) = P´ y R(C, α) (Q) =Q´.

Caso 1): Supongamos que los puntos C, P y Q son colineales.

Por demostrar que PQ = P´Q´.

Demostración:

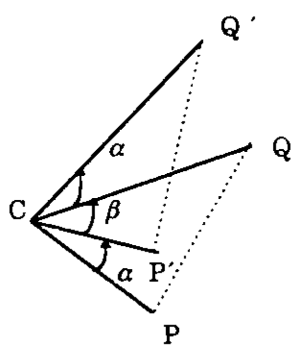


Como los puntos C,P y Q son colineales entonces los puntos C,P´ y Q´ también son colineales CP = CP´ y CQ = CQ´ por lo tanto PQ = P´Q´.

Caso 2): Supongamos que los puntos C, P y Q no son colineales.

Por demostrar que PQ = P´Q´.

Demostración:



Los triángulos ΔCPQ y $\Delta CP'Q'$ son congruentes porque $CP = CP'$, $CQ = CQ'$ y $\measuredangle CPQ = \measuredangle P'CQ'$. Por la proposición 8) existe una isometria que manda uno en otro.

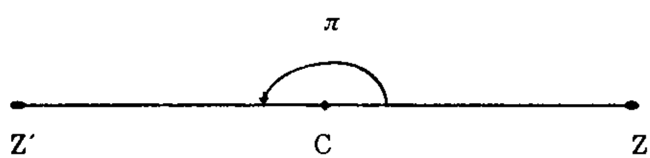
Por lo tanto $PQ = P'Q'$.

Por lo tanto, una rotación $R(C, \alpha)$ es una isometría.

Definición: Una transformación V es una involución si y solo si $V \neq I$ y $V^2 = I$.

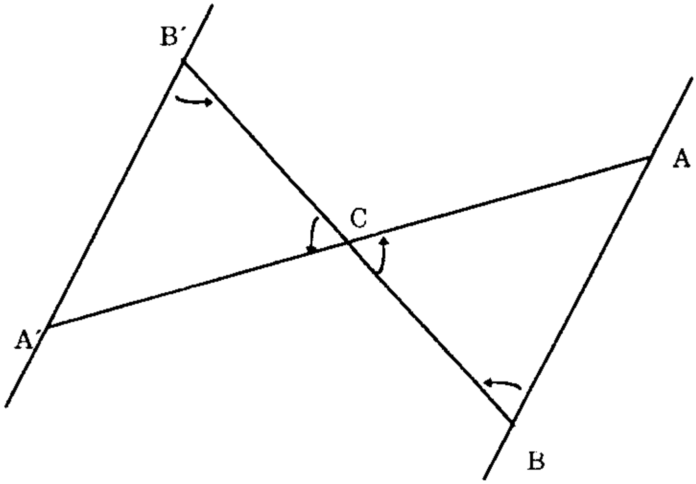
Definición: Un semigiro σC es una rotación π con centro en el punto C es decir "$\sigma C = R(C,\pi)$". Para todo $Z \in E^2$ los puntos Z, C y Z, son colineales y C es el punto medio de Z y Z′ con:

$\sigma C(Z) = Z'$.



Teorema 3): Un semigiro σC es un paralelismo.

Demostración:



Sea σC el semigiro.

Aplicamos el semigiro σC a los puntos A y B respectivamente.

$\sigma C(A) = A'$ y $\sigma C(B) = B'$.

Por definición de semigiro σCA, C y A´ son colineales, los puntos B, C y B´ son colineales además $CA = CA'$ y $CB = CB'$.

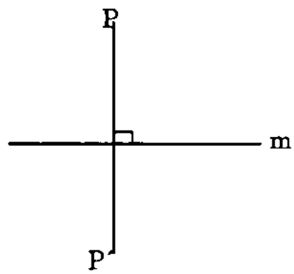
También tenemos que $\measuredangle B'CA' = \measuredangle BCA$ entonces $\Delta B'CA' \cong \Delta BCA$.

Entonces $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C$.

Por lo tanto $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.

Proposición 11): Un semigiro σC es una involución.

Definición: Una reflexión Rm en la recta m es una transformación tal que para todo punto $P \notin m$, m es la matriz de el segmento $\underline{PP'}$ donde $Rm(P) = P'$. Y si $P \in m$ entonces $Rm(P) = P$



$Rm(P) = P$

Teorema 4): Una reflexión Rm es una isometría.

Demostración:

Sea Rm una reflexión.

Sean P y $Q \in E^2$.

Aplicamos la reflexión Rm a los puntos P y Q respectivamente.

$Rm(P) = P'$ y $Rm(Q) = Q'$.

Supongamos que los puntos P y Q están fuera de la recta m y que la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ no sea paralela ni perpendicular a la recta m.

Sabemos que la recta m es la matriz de los segmentos $\underline{PP'}$ y $\underline{QQ'}$

Sea el punto T la intersección de las rectas m y $\overleftrightarrow{PP'}$.

Sea el punto S la intersección de las rectas m y $\overleftrightarrow{QQ'}$.

Sea l la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ y l´ la recta $\overleftrightarrow{P'Q'}$.

Sea R el punto de intersección de las rectas l y m.

Sabemos que la recta m es mediatriz de los segmentos $\underline{PP'}$ y $\underline{QQ'}$ entonces $\Delta RPS \cong \Delta RP'S$ y $\Delta RQT \cong \Delta RQ'T$.

Por lo tanto el punto R es la intersección de las rectas l y l´ y PQ = P´Q´.

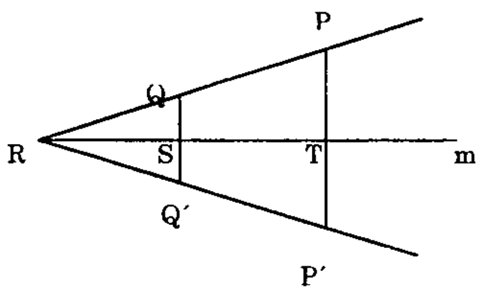


Fig.1): Si los puntos P y Q están en el mismo semiplano respecto a la recta m.

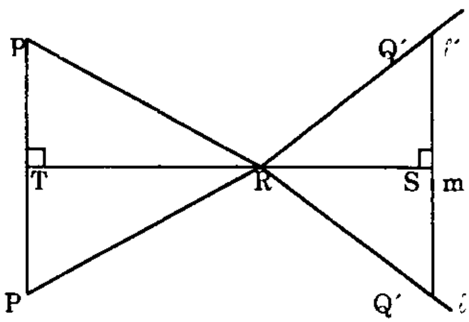


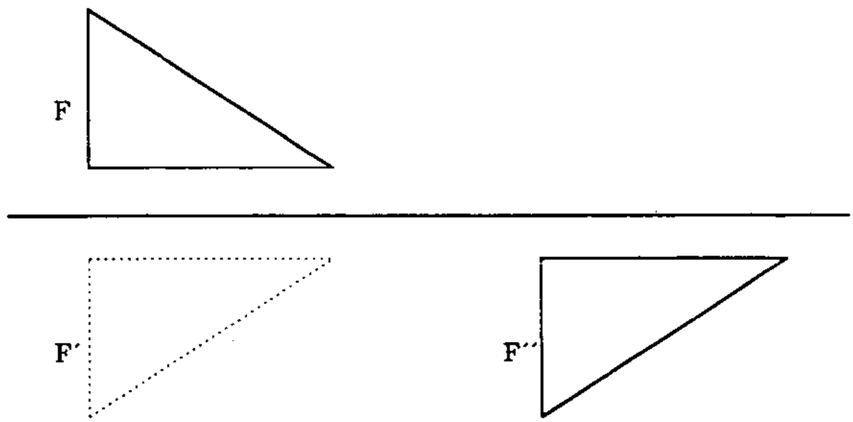
Fig. 2): Si los puntos P y Q están en semiplanos distintos respecto a la recta m.

Los siguientes casos no se demostraran ya que son bastante evidentes.

$\overleftrightarrow{PQ} // m$, $\overleftrightarrow{PQ} \perp m$, P ó Q $\in$ m y P y Q $\in$ m.

Proposición 12): Una reflexión Rm es una involución.

Definición: Un deslizamiento Dm es una composición de una reflexión Rm seguida de una traslación T en la dirección de la recta de reflexión m "Dm = (T o Rm)".



F´ es la reflexión de F, y F´´ es la traslación de F´ en dirección de la recta de reflexión m.

Teorema 5): Un deslizamiento Dm es una isometría.

Demostración:

Sea Dm el deslizamiento.

El deslizamiento Dm es la composición de una reflexión Rm seguida de una traslación T es decir Dm = (T o Rm).

Sabemos que Rm y T son isometrias y la composición de isometrias es una isometria entonces Dm es una isometría.

Observación: Las traslaciones y las rotaciones son isometrias directas y las reflexiones y los deslizamientos son isometrias indirectas.

Teorema 6): Toda isometría diferente de la identidad es uno de los siguientes casos:

a): Traslación, b): Rotación, c): Reflexión ó d): Deslizamiento.

Demostración:

Partiendo de que dos figuras son congruentes si y solo si existe una isometría que manda una en la otra.

La demostración va a consistir que se dan dos figuras congruentes y se demostrara que la isometría que manda una en la otra es a), b), c) o´ d) dependiendo de la posición relativa de las figuras.

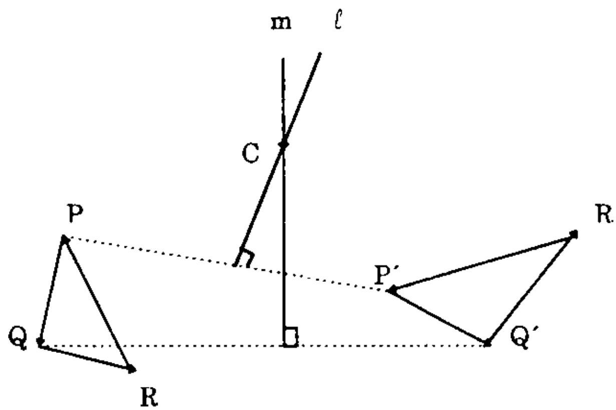
Para esta demostración las figuras congruentes serán triángulos.

Sean los triángulos ΔPQR y $\Delta P'Q'R'$ congruentes entonces existe una isometría M tal que $M(P) = P'$, $M(Q) = Q'$ y $M(R) = R'$.

Supongamos que los triángulos ΔPQR y $\Delta P'Q'R'$ tienen la misma orientación, es decir la isometría M es directa.

Se demostrara que si la isometría directa M no es traslación entonces necesariamente es rotación.

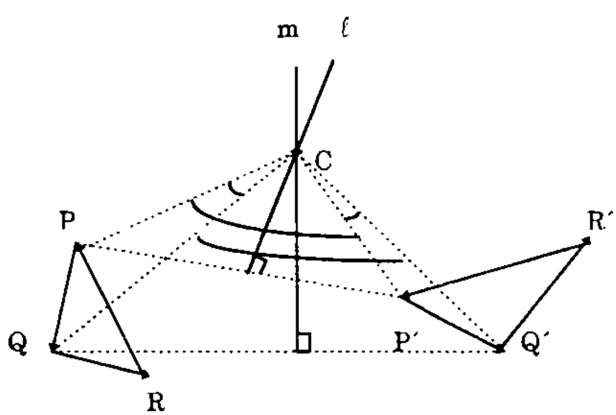
Demostración:



Como la isometría directa M no es traslación entonces los lados homólogos de los dos triángulos ΔPQR y $\Delta\ P'Q'R'$ no son paralelos y por lo tanto al menos dos de las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{QQ'}$, y $\overleftrightarrow{RR'}$ no son colineales.

Supongamos que $\overleftrightarrow{PP'}$ y $\overleftrightarrow{QQ'}$ no son paralelas.

Sean l y m las mediatrices de los segmentos $\underline{PP'}$ y $\underline{QQ'}$ respectivamente y sea C la intersección de las mediatrices l y m.



Como las rectas l y m son las mediatrices de los segmentos $\underline{PP'}$ y $\underline{QQ'}$ entonces $CP = CP'$ y $CQ = CQ'$.

Como $PQ = P'Q'$ entonces los triángulos ΔPCQ y $\Delta P'CQ'$ son congruentes.

Por lo tanto $\measuredangle PCQ = \measuredangle P'CQ'$ entonces $\measuredangle PCP' = \measuredangle QCQ'$.

Sea $\alpha = \measuredangle PCP' = \measuredangle QCQ'$.

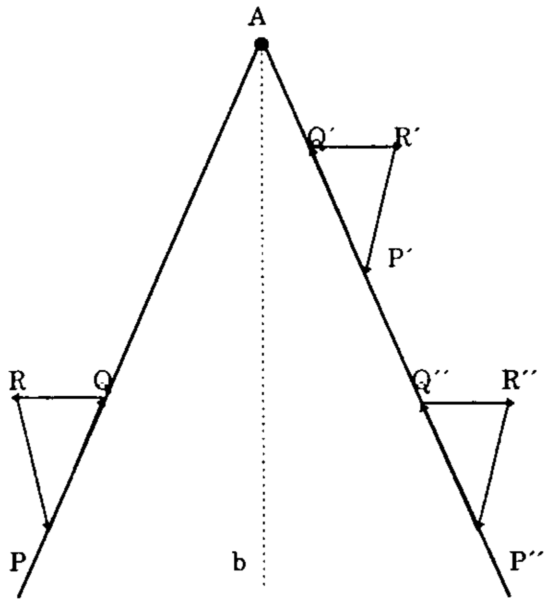
Por lo tanto existe una rotación $R(C, \alpha)$ tal que manda P en P'y Q en Q' entonces $R(C, \alpha)(R) = R'$ porque si no fuera así los triángulos ΔPQR Y $\Delta P'Q'R'$ no serian congruentes y eso sería una contradicción a la hipótesis.

Por lo tanto, la isometría directa M es una rotación.

Supongamos que los dos triángulos ΔPQR y $\Delta P'Q'R'$ tienen diferente orientación, es decir la isometría M es indirecta.

Se demostrara que si la isometría indirecta M no es reflexión entonces necesariamente es deslizamiento.

Demostración.



Como M es isometría indirecta entonces existe una pareja de lados homogéneos de los dos triángulos ΔPQR y ΔP´Q´R´ que se intersectan.

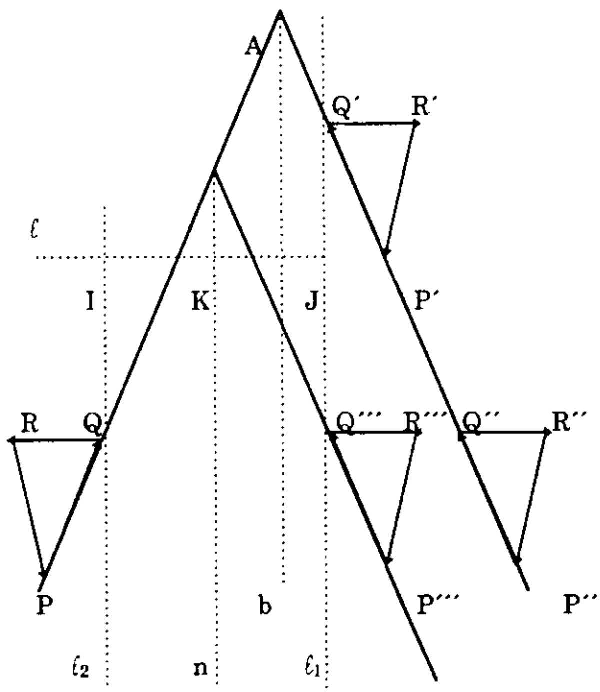
Sea A la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{P'Q'}$.

Sea b la bisectriz del ángulo ∡ QMQ´.

Sea la reflexión Rb tal que Rb(P) = P´´, Rb(Q) = Q´´ y Rb(R) = R´´.

Los triángulos ΔP´Q´R´ y ΔP´´Q´´R´´ están en distintos lugares porque la isometría indirecta M no es reflexión.

Lo que se puede asegurar es que los triángulos ΔP´Q´R´ y ΔP´´Q´´R´´ tienen lados homogéneos paralelos entonces existe una traslación T que manda uno en el otro pero la traslación T no tiene porque estar en la dirección de b.



Para lograr que la traslación T este en la dirección de la recta de reflexión buscamos una recta paralela a b que equidiste a los dos triángulos ΔPQR y ΔP´Q´R´, esto lo logramos trazando rectas paralelas a b por los dos vértices homólogos por ejemplo Q y Q´ y a esas rectas las llamamos ℓ_2 y ℓ_1 respectivamente.

Trazamos una recta perpendicular a ℓ_2 y ℓ_1 y la llamamos ℓ.

Sea J el punto de intersección de la rectas ℓ_1 y ℓ.

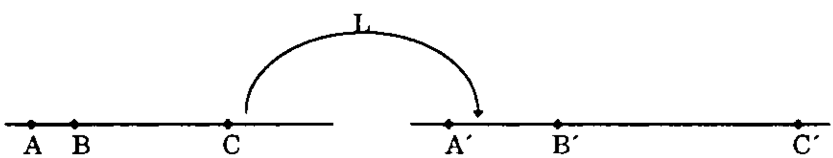
Sea I el punto de intersección de las rectas ℓ_2 y ℓ.

Buscamos el punto medio de el segmento $\underline{IJ}$ y lo llamamos K.

Trazamos una recta paralela a B por el punto K y la llamamos n esta es la recta que necesitábamos puesto que al reflejar el triángulo ΔPQR en la recta n obtenemos el triángulo ΔP′′′Q′′′R′′′ donde sus lados homólogos son paralelos a los del triángulo ΔP′Q′R′ y la traslación T que manda uno en el otro está en la dirección de la recta n.

Teorema 7): Una similitud es una colineación.

Demostración:



Sea L la similitud de razón r≠0.

Sean A,B y C tres puntos colineales y L(A) = A′, L(B) = B′ y L(C) = C′.

Por demostrar que los puntos A′, B′ y C′ son colineales.

Demostración:

Sabemos que r $\underline{AB}$ = $\underline{A'B'}$, r $\underline{BC}$ =$\underline{B'C'}$ y r $\underline{AC}$ = $\underline{A'C'}$ y como los puntos A,B y C son colineales entonces tenemos que:

$\underline{AB}$ + $\underline{BC}$ + = $\underline{AC}$ -----------(*).

Se multiplica por " $r\neq 0$ " a la ecuación (*) y obtenemos que

$r(\underline{AB} + \underline{BC}) = r\,\underline{AC}$ entonces $r\,\underline{AB} + r\,\underline{BC} = r\,\underline{AC}$ entonces

$\underline{A'B'} + \underline{B'C'} = \underline{A'C'}$.

Por lo tanto los puntos A´, B´ y C´ son colineales.

Por lo tanto la similitud L es una colineación.

Proposición 13): Una similitud preserva ángulos y rectas paralelas.

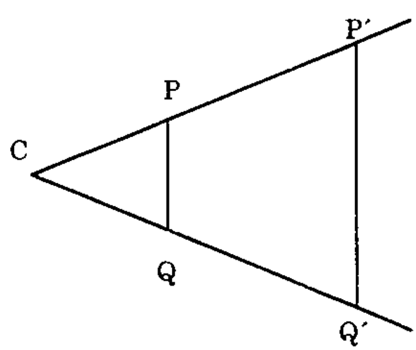
Definición: Sea $C \in E^2$ y $r \in IR\text{-}\{0\}$ entonces una homotecia H(C,r) con centro en el punto C y razón r es una transformación que fija al punto C y a cualquier punto P, $P\neq C$ lo manda en un punto P´ en la recta CP y tal que $r\,\underline{CP} = \underline{CP'}$.

Nota 1): si $r > 0$ entonces P y P´ están del mismo lado de C y si $r < 0$ entonces C está entre P y P´.

Nota 2): $H(C,r) = (\sigma C \text{ o } H(C,-r))$.

Teorema 8): Una homotecia es un paralelismo y una similitud.

Demostración:



Sea H(C,r) una homotecia.

Aplicamos H(C,r) a los puntos P y Q respectivamente.

H(C,r) (P) = P´ y H(C,r) (Q) = Q´ entonces:

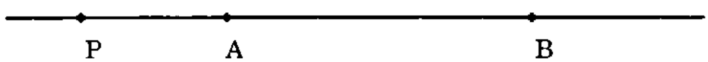
$r = (\underline{CP'}/\underline{CP}) = (\underline{CQ'}/\ \underline{CQ})$ y el ángulo $\measuredangle$ QCP = $\measuredangle$Q´CP´ entonces

$\Delta CPQ \sim \Delta CP'Q'$, $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overleftrightarrow{P'Q'}$ y $r = (\underline{P'Q'}/\underline{PQ})$.

Por lo tanto la homotecia H(C,r) es un paralelismo y una similitud.

Teorema 9): Si $y \neq -1$ entonces existe un único punto P en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ diferente de B tal que $(\underline{AP}/\underline{PB}) = y$.

Demostración:



Sea $(\underline{AP}/\underline{PB}) = y$ con $P \neq B$.

Como el punto P está en la recta AB entonces los puntos A, P y B son colineales es decir $\underline{AP} + \underline{PB} = \underline{AB}$.

El problema de existencia y unicidad se resuelve si el sistema de ecuaciones:

$(\underline{AP}/\underline{PB}) = y$ ---------------(*)

$\underline{AP} + \underline{PB} = \underline{AB}$ -----------(**)

tiene solución "única".

De (*) obtenemos que $\underline{AP} = y\ \underline{PB}$ ----------(***).

Sustituimos (***) en(**) y obtenemos que:

CAPITULO II

Los siguientes dos teoremas no se demostraran ya que son evidentes.

Teorema 10): Una isometría es una similitud.

Teorema 11): Un paralelismo es una similitud.

Teorema 12): Una similitud con dos puntos fijos es una isometría.

Demostración.

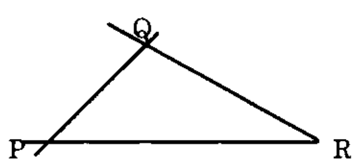
Sea L la similitud.

Sean P y Q tales que L(P) = P y L(Q) = Q entonces r PQ = PQ y por lo tanto,

r = 1 y la similitud L es una isometría.

Teorema 13): Una similitud con tres puntos no colineales fijos es la identidad.

Demostración :



Sea L una similitud.

Sean P, Q y R los tres puntos fijos no colineales de la similitud L.

Por el teorema 12) sabemos que L es una isometría.

Como la similitud L fija a tres puntos es una isometría directa.

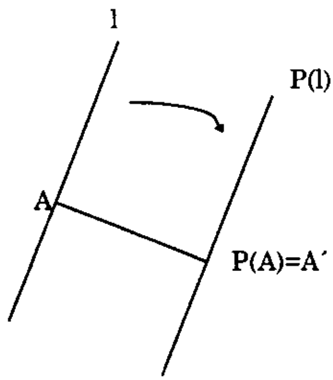
Una isometría directa diferente de la identidad es la traslación o rotación.

La isometría directa L no es una traslación ni rotación porque la traslación no fija ningún punto y la rotación fija solo un punto.

Por lo tanto, la isometría directa L es la identidad.

Teorema 14): Si P es un paralelismo que no fija al punto A entonces la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ es invariante por P donde P(A) =A´.

Demostración:



Por hipótesis del teorema tenemos que el paralelismo P, no fija al punto A es decir P(A) = A´ entonces el punto A´ está en las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $P(\overleftrightarrow{AA'})$ y como $\overleftrightarrow{AA'}$ // $P(\overleftrightarrow{AA'})$ entonces la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ es invariante por el paralelismo P.

Nota: La composición de dos rotaciones debe ser una isometría directa y por lo tanto es traslación o rotación. En el siguiente teorema analizaremos cuando es una o la otra.

Teorema 15): Sean R(A,α) y R(B,β) dos rotaciones entonces

a): Si A=B y $\alpha+\beta=2\pi k$, $k \in Z$ entonces la composición (R(B,β) o R(A,α) es la identidad.

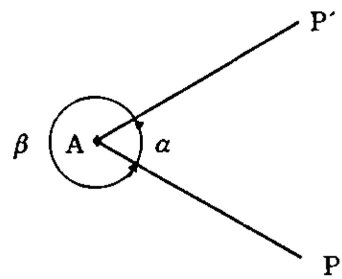
b): Si A=B y $\alpha+\beta \neq 2\pi k$, $k \in Z$ entonces la composición (R(B, β) o R(A,α) es una rotación con centro en A.

c): Si A≠B y $\alpha+\beta = 2\pi k$, $k \in Z$ entonces la composición (R(B, β) o R(A,α) es una traslación.

d): Si A≠B y $\alpha+\beta \neq 2\pi k$, $k \in Z$, entonces la composición (R(B, β) o R(A,α) es una rotación.

Demostración.

a)



Por hipótesis A=B y $\alpha+\beta=\pi k$, $k \in Z$.

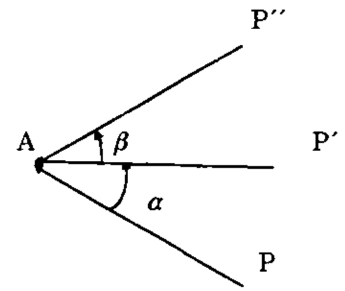
Sea R(A α) (P) =P´

Aplicamos la composición (R(B, β) o R(A,α) al punto P.

(R(B, β) o R(A,α) (P) = (R(B, β) o R(A,α) (P) = (R(B, β) (P´) = R(A,α) (P´) =P

Por lo tanto (R(B, β) o R(A,α) es la identidad.

b)



Por hipótesis A=B y $\alpha+\beta \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

Como A=B entonces la composición (R(B, β) o R(A,α) fija al punto A.

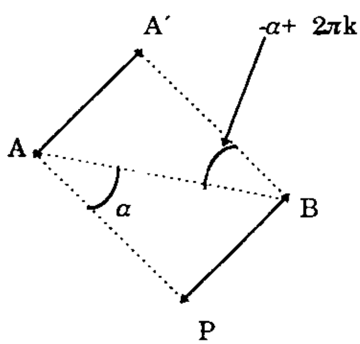
Se aplica la composición (R(B, β) o R(A,α) al punto P.

(R(B, β) o R(A,α) (P) = (R(B, β) o R(A,α) (P) = (R(B, β) o R(A,α) (P´) = P´´.

Por definición de rotación sabemos que AP=AP´=AP´´ entonces AP= AP´´ y que el ángulo $\measuredangle$ PAP´´ es igual a $\alpha+\beta$.

Por lo tanto, (R(B, β) o R(A,α) = R (A, $\alpha+\beta$.).

c)



Por hipótesis A≠B y $\alpha + \beta = 2\pi k$, $k \in Z$ entonces $\beta = -\alpha + 2\pi k$.

Se aplica la composición (R(B, β) o R(A, α)) al punto A.

(R(B, β) o R(A, α))(A) = R(B, β) o R(A, α)(A) = R(B, β)(A)

=R(B,$-\alpha + 2\pi k$)(A) = A´ con A´ $\in E^2$.

Por definición de rotación sabemos que BA = BA´.

Sea P tal que R(A, α)(P) = B entonces:

R^{-1}(A, α)(B) = R(A,- α)(B) = P (La función inversa de R(A, α) es R^{-1}(A, α) que es igual a R(A,- α)).

Se aplica la composición (R(B, β) o R(A, α)) al punto P.

(R(B, β) o R(A, α))(P) = R(B, β) o R(A, α)(P) = R(B, β)(B) = B.

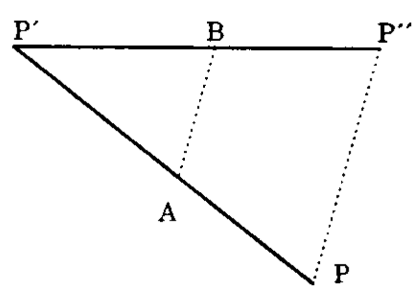
Por definición de rotación sabemos que AP = AB.

Como BA = BA´ y AP = AB entonces AP = BA´ y el ángulo ∢ PAB mide lo mismo que el ángulo ∢ ABA´ entonces $\overleftrightarrow{AP}$ // $\overleftrightarrow{BA'}$ y el cuadrilátero■ PAA´B es un paralelogramo entonces T[A,A´] = T[P,B].

Por lo tanto, (R(B, β) o R(A, α)) es una traslación.

"En un caso particular".

Fig. A.



Supongamos que $\alpha = \pi = \beta$ entonces $\alpha + \beta = 2\pi$.

$R(A, \alpha)$ y $R(B, \beta)$ son semigiros y por lo anterior sabemos que la composición

$(R(B, \pi) \circ R(A, \pi))$ es una traslación

Se aplica la composición $(R(B, \pi) \circ R(A, \pi))$ al punto P.

$(R(B, \pi)) \circ R(A, \pi))\ (P) = R(B, \pi) \circ R(A, \pi)(P) = R(B, \pi)(P') = P''$.

"ver fig. A".

A y B son puntos medios de los lados $\underline{PP'}$ y $\underline{P'P''}$ respectivamente.

Por lo tanto, la traslación $T[P,P'']$ esta en la dirección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la longitud de la traslación $T[P,P'']$ es el doble de la longitud del segmento $\underline{AB}$ es decir $PP'' = 2AB$.

d)

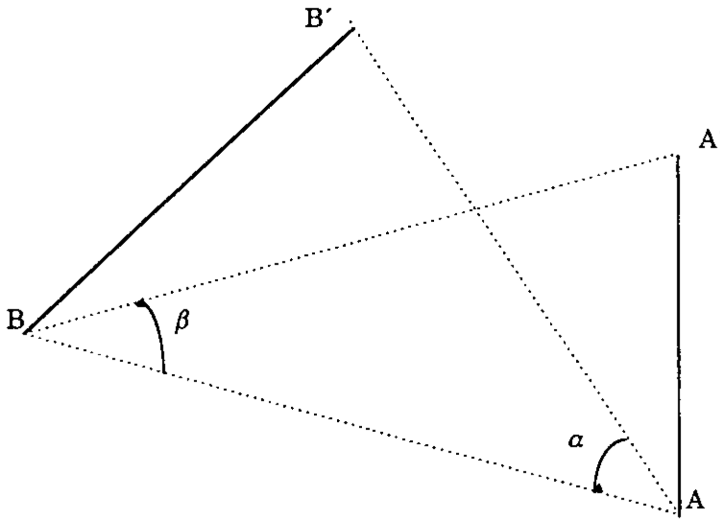


Fig. 1.

Supongamos que A = B y $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, $k \in Z$.

Sea $B' = R^{-1}(A, \alpha)(B) = R(A, -\alpha)(B)$ entonces $R(A, \alpha)(B') = B$.

Se aplica la composición $(R(B, \beta) \circ R(A, \alpha))$ a los puntos A y B´ respectivamente.

$(R(B, \beta) \circ R(A, \alpha))(A) = R(B, \beta) \circ R(A, \alpha)(A) = R(B, \beta)(A) = A'$.

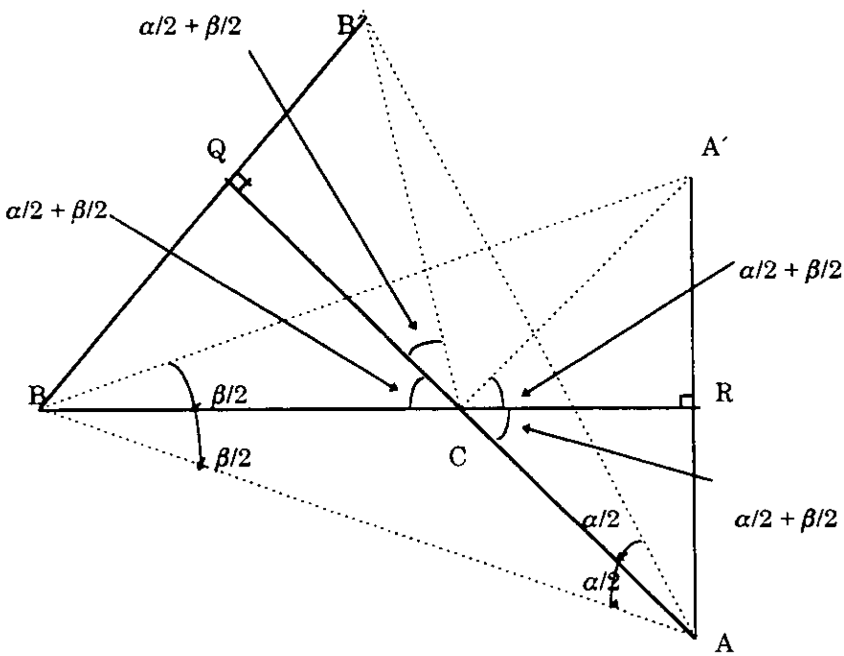
$(R(B, \beta) \circ R(A, \alpha))(B') = R(B, \beta) \circ R(A, \alpha)(B') = R(B, \beta)(B) = B.$

Por definición de rotación sabemos que AB´= AB, BA = BA´, el ángulo Δ B´AB es α y el ángulo Δ ABA´ es β.

Se construyen los segmentos <u>AA</u>´ y <u>BB</u>´.

Como AB´= AB y BA = BA´ entonces los triángulos Δ BAB y Δ ABA´ son isósceles "ver fig. 1".

Fig. 2.



Sea R y Q tales que Q es el punto medio del segmento <u>BB</u>´ y R es el punto medio del segmento <u>AA</u>´.

Se traza la mediatriz del segmento <u>BB</u>´ que es la recta $\overleftrightarrow{QA}$ y se traza la mediatriz del segmento <u>AA</u>´ que es la recta $\overleftrightarrow{RB}$.

(Por ser los triángulos $\Delta B'AB$ y $\Delta ABA'$ isósceles las mediatrices coinciden con las bisectrices).

Sea C tal que $C = \overleftrightarrow{QA} \cap \overleftrightarrow{RB}$.

El punto C esta en las dos mediatrices $\overleftrightarrow{QA}$ y $\overleftrightarrow{RB}$ entonces CB=CB′ y CA=CA′.

Por demostrar que el ángulo$\measuredangle ACA'$ es $\alpha + \beta$ y que el ángulo $\measuredangle BCB'$ es también $\alpha + \beta$.

Demostración :

Los ángulos $\measuredangle ACR$, $\measuredangle RCA'$,$\measuredangle B'CQ$ Y $\measuredangle QCB$ son iguales.

(Los dos primeros y los dos últimos porque $\overleftrightarrow{RC}$ y $\overleftrightarrow{QC}$ son bisectrices y el primero y el cuarto son opuestos por el vértice).

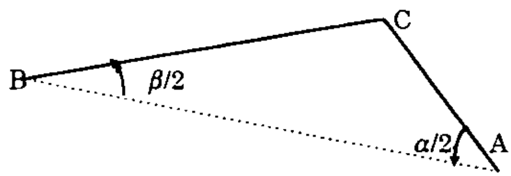
Y todos ellos miden $\alpha/2 + \beta/2$.

(Porque $\measuredangle ACR$ es ángulo exterior del triángulo ΔABC).

Por lo tanto, $\measuredangle ACA' = \measuredangle B'CB = \alpha + \beta$ "ver fig. 2".

Solo falta demostrar que C es fijo bajo la composición (R(B,β) o R(A,α)).

Fig. 3.



Partiendo de la "figura 3" aplicamos la composición: (R(B,β) o R(A,α)) al punto C.

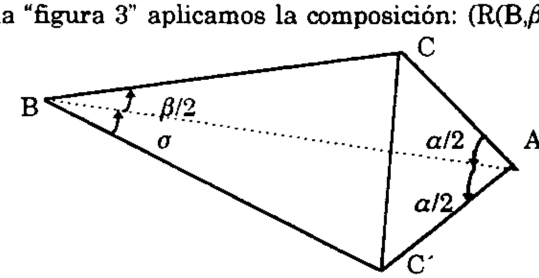


Fig. 4

Sea $R(A,\alpha)(\,C\,) = C'$.

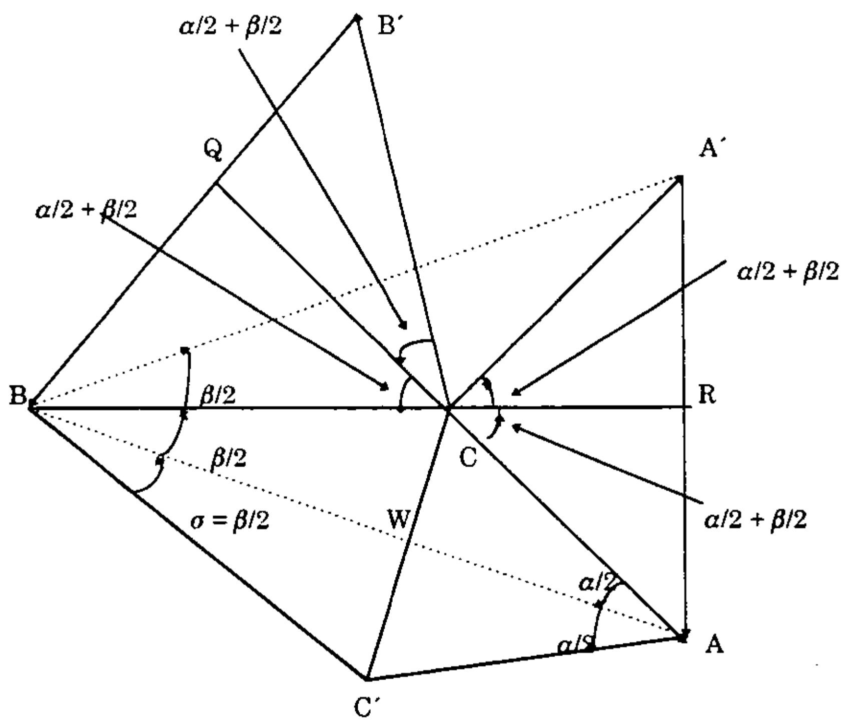
Entonces $(R(B,\beta) \text{ o } R(A,\alpha))\,(\,C\,) = R(B,\beta) \text{ o } R(A,\alpha)(\,C\,)$

$= R(B,\beta)\,(\,C')$ "ver fig. 4".

Basta demostrar que $\sigma = (\beta/2)$ y que $BC' = BC$ esto se concluye que los triángulos ΔABC y $\Delta ABC'$ son congruentes puesto que el segmento $\underline{AB}$ es común, $AC = AC'$ y los triángulos $\sphericalangle$ CAB y $\sphericalangle$ BAC′ son iguales.

Por lo tanto $R(B,\beta)\,(\,C') = C$.

Por lo tanto, la composición $(R(B,\beta) \text{ o } R(A,\alpha))$ es una rotación con centro en C y ángulo $\alpha + \beta$.



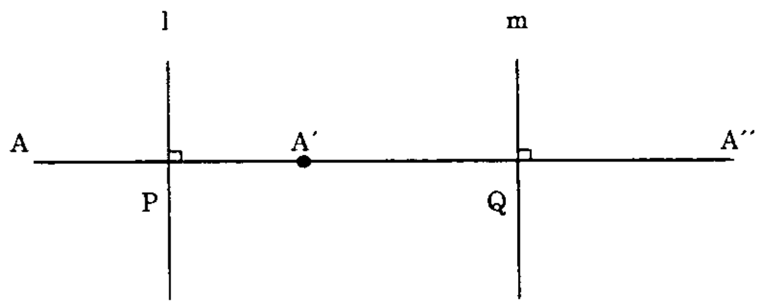
Teorema 16): La composición de dos reflexiones en rectas paralelas es una traslación, con dirección perpendicular a las rectas y con longitud de traslación igual al doble de la distancia entre las rectas.

El inverso de este teorema también es cierto.

Dada una traslación está se puede expresar siempre como la composición de dos reflexiones en dos rectas paralelas perpendiculares a la dirección de la traslación y la distancia entre las rectas paralelas, es igual a la mitad de la longitud de la traslación.

Demostración:

(la primera parte de le teorema).



Sea l y m dos rectas paralelas y A y B dos puntos arbitrarios.

Sean Rl y R m dos reflexiones.

Aplicamos la composición (Rm o Rl) al punto A.

(Rm o Rl) (A) = (Rm o Rl(A)) = Rm(A´) = A´´.

Como l y m son paralelas entonces los puntos A, A´ y A´´ son colineales y la recta que los une es perpendicular a las rectas l y m.

Sea P la intersección de las rectas l y $\overleftrightarrow{AA''}$ y sea Q la intersección de las rectas m y $\overleftrightarrow{AA''}$.

Por demostrar que $AA'' = 2\,PQ$.

Demostración:

$AA'' = AP + PA' + A'Q + QA''$.

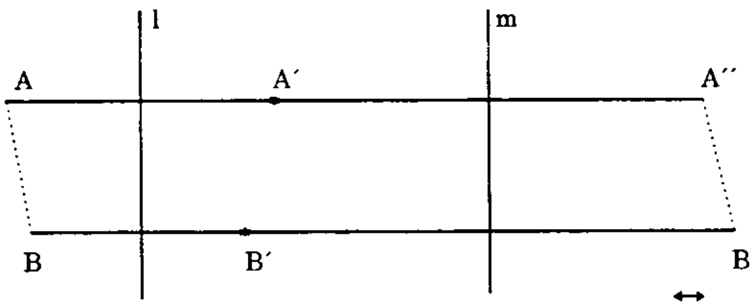
Pero $AP = PA'$ y $A'Q = QA'$ entonces $AA'' = 2\,PA' + 2\,A'Q$

$$= 2\,(PA' + A'Q) = 2\,PQ.$$

(El dibujo está hecho en el caso más fácil, pero la demostración es valida para cualquier punto).

Aplicamos la composición (Rm o Rl) al punto B.

(Rm o Rl) (B) = Rm(Rl(B)) = Rm(B´) = B´´.

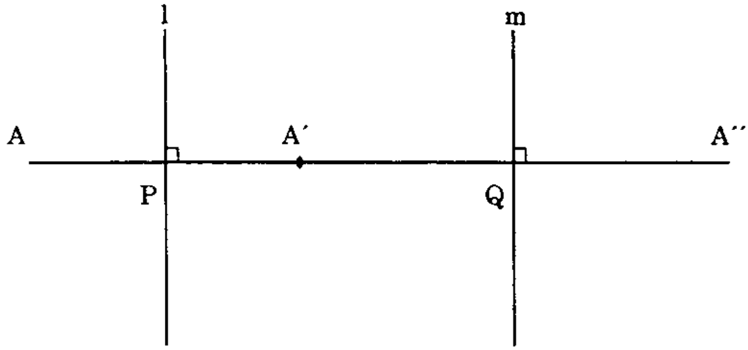


Podemos observar que $AA'' = BB'' = 2\,PQ$ y que las rectas $\overleftrightarrow{AA''}$ y $\overleftrightarrow{BB''}$ son paralelas.

Por lo tanto, el cuadrilátero $\square BAA''B''$ es un paralelogramo.

Por lo tanto, $T[A,A''] = T[B,B'']$.

(la segunda parte "el inverso" de el teorema).



Sea T[A,A´´] una traslación.

Construimos dos rectas l y m perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{AA''}$ donde la longitud de la traslación T[A,A´´] es el doble de la longitud de la recta l a m.

Por la primera parte del teorema sabemos que la composición (Rm o Rl) es la traslación T[A.A´´}.

Por lo tanto, la traslación T[A,A´´] es la composición: (Rm o Rl).

Observación: La composición (Rm o Rl) no es conmutativa.

(Rl o Rm) es también una traslación, en la misma dirección y con sentido opuesto a la recta $\overleftrightarrow{AA''}$ y además $(Rm \text{ o } Rl)^{-1} = (Rl \text{ o } Rm)$.

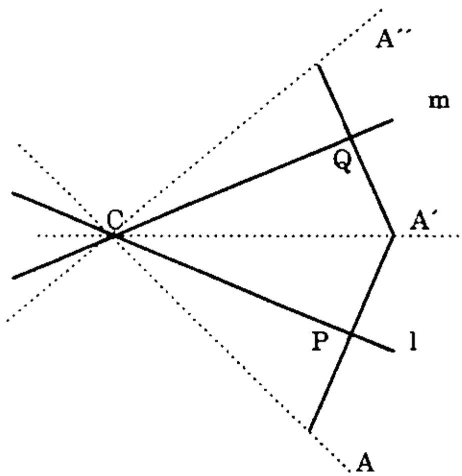
Teorema 17): Si Rm y Rl son dos reflexiones y las rectas m y l se intersectan entonces la composición de las dos reflexiones es una rotación.

El inverso de este teorema también es cierto.

Una rotación se puede expresar como la composición de dos reflexiones cuyas rectas de reflexión se intersectan.

Demostración:

(la primera parte de el teorema)



Supongamos que las rectas m y l se intersectan y que Rm y Rl son dos reflexiones.

Por demostrar que la composición (Rm o Rl) es una rotación.

Demostración:

Sea C el punto de intersección de las rectas l y m.

Aplicamos la composición (Rm o Rl) al punto C.

(Rm o Rl) (C) = (Rm o Rl (C)) = Rm (C) = C.

Por lo tanto, el punto C es fijo bajo la composición (Rm o Rl).

Sea A un punto arbitrario.

Aplicamos la reflexión Rl al punto A.

$Rl(A) = A'$.

Aplicamos la reflexión Rm al punto A´.

$Rm(A') = A''$.

Aplicamos la composición (Rm o Rl) al punto A.

$(Rm \circ Rl)(A) = Rm \circ Rl(A) = Rm(A') = A''$.

Sabemos que $CA = CA'$ y $CA' = CA''$ entonces $CA = CA''$.

Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas l y $\overleftrightarrow{AA'}$ y m y $\overleftrightarrow{AA''}$ respectivamente.

$\sphericalangle ACP = \sphericalangle PCA'$ y $\sphericalangle A'CQ = \sphericalangle QCA''$ entonces:

$\sphericalangle PCQ = \sphericalangle ACP + \sphericalangle QCA''$ entonces $\sphericalangle ACA'' = 2 \sphericalangle PCQ$.

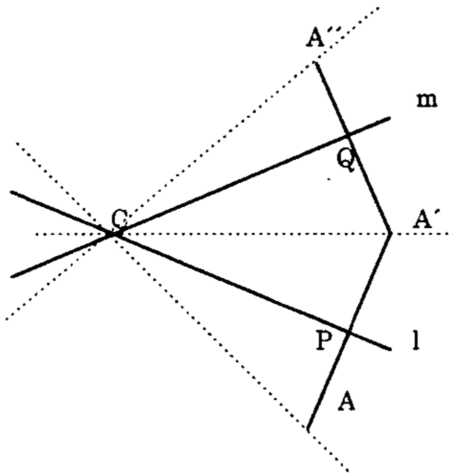
Sea $\alpha = \sphericalangle ACA'' = 2 \sphericalangle PCQ$.

Por lo tanto, la composición (Rm o Rl) es una rotación con centro en el punto C y ángulo "α" es decir:

(Rm o Rl) es $R(C,\alpha)$.

(El dibujo está hecho en el caso más fácil, pero la demostración es valida para cualquier punto).

(la segunda parte "el inverso" de el teorema).



Sea R(C,α) una rotación tal que R(C,α)(A) = A´´.

Construimos las rectas l y m de tal forma que se intersecten en el punto C y que uno de los ángulos formados por ellas mida la mitad y tenga la misma orientación del ángulo α.

Por la primera parte de el teorema sabemos que la composición (Rm o Rl) es una rotación con centro en el punto C y ángulo α es decir (Rm o Rl) es R(C, α).

Observación: La composición (Rm o Rl) no es conmutativa.

(Rm o Rl) es también una rotación, con centro en el punto C y ángulo

$-\alpha = \measuredangle$ A´´CA y además (Rm o Rl)$^{-1}$ = (Rl o Rm).

Teorema 18): Un paralelismo distinto de la identidad es una traslación ó una homotecia.

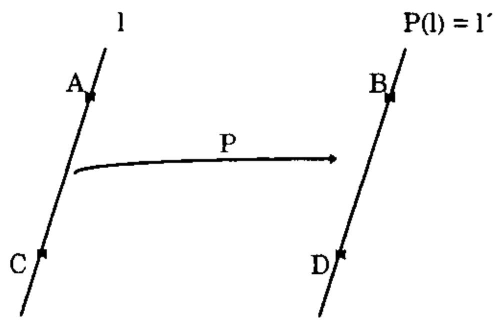
Demostración:

Sea P un paralelismo y sea l una recta tal que P(l) = l′.

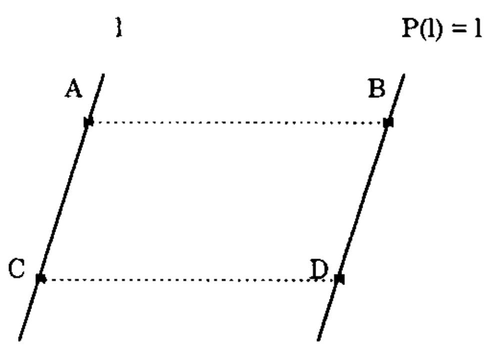
Sean A y C ∈ l tales que P(A) = B y P(C) = D.

Sea l′ la recta que pasa por los puntos B y D.

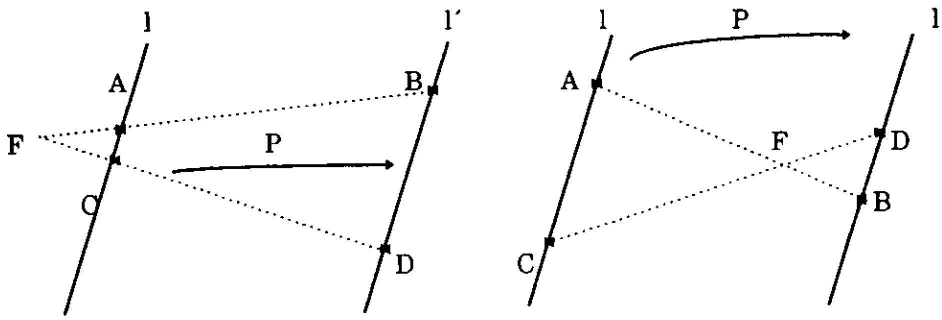
P(l) = l′ entonces l′// l.



Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ entonces el paralelismo P es una traslación.



Supongamos que $\overleftrightarrow{AB} \nparallel \overleftrightarrow{CD}$.



Sea el punto F la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Por el teorema 14) sabemos que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son invariantes y por lo tanto, el punto F es fijo bajo el paralelismo P.

los triángulos ΔFAC y ΔFBD son semejantes y:

$r = (\underline{FB}/\underline{FA}) = (\underline{FD}/\underline{FC})$.

Por lo tanto, el paralelismo P es una homotecia con centro en el punto F y razón r.

Observación: un paralelismo que fija dos puntos es la identidad.

Nota: Sea H(A,a) una homotecia de razón "a" entonces su inversa es

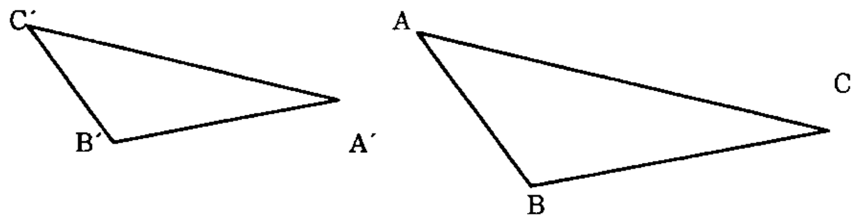
$H^{-1}(A,a) = H(A,1/a)$.

De todo lo que se ha dicho antes, se puede deducir el siguiente teorema.

Teorema 19): La composición de una homotecia seguida de una isometría es una similitud y toda similitud se puede expresar, como la composición de una homotecia seguida de una isometría.

Teorema 20): Dados dos triángulos semejantes ΔABC y $\Delta A'B'C'$ existe una única similitud L tal que L(A) = A´, L(B) =B´ y L(C) = C´.

Demostración:



Como los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes entonces existe una similitud de razón r, que manda uno en el otro donde r = (<u>A´B</u>/<u>ÁB</u>) = (<u>A´C´</u>/<u>AC</u>).

Partiendo de un punto arbitrario D construimos la homotecia H(D,r).

Aplicamos la homotecia H(D,r) a los puntos A,B,C.

H(D,r) (A) = A´´, H(D,R) (B) = B´´ y H(D,r) (C) = C´´.

Entonces los triángulos $\Delta A'B'C'$ y $\Delta A''B''C''$ son congruentes y por lo tanto existe una isometría M que manda uno en el otro.

Por el teorema 19) la composición de la homotecia H(D,r) seguida de la isometría M es una similitud L es decir L = (M o H(D,r)).

Por demostrar que la similitud L es única.

Demostración:

Supongamos que la similitud L no es única.

Sea L y K dos similitudes distintas tales que:

L(A) = A´, L(B) = B´, L(C) = C´, K(A) = A´, K(B) = B´ y K(C) = C´.

Claramente la composición (K^{-1} o L) deja fijos a los puntos A, B y C.

Por la proposición 8) sabemos que la composición (K o L) es una similitud.

Por el teorema 13) sabemos que una similitud que deja fijo a tres puntos es la identidad es decir (K^{-1} o L) = I.

Por lo tanto, L = K.

Por lo tanto, la similitud L existe y es única.

Teorema 21): Una similitud sin un punto fijo es una isometría.

Demostración:

Sea L una similitud de razón $r \neq 0$.

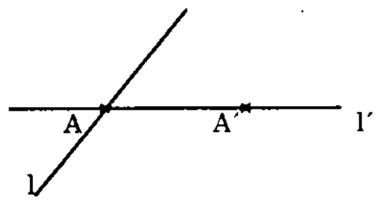
Supongamos que la similitud L no es isometría.

Demostraremos que la similitud L tiene un punto fijo.

Caso 1): Si L es una similitud que no es isometría y hay paralelismo entonces L tiene un punto fijo. Esto es porque sabemos que un paralelismo es una traslación ó una homotecia, pero una traslación es una isometría y esto seria una contradicción por lo tanto, es una homotecia y una homotecia tiene un punto fijo.

Caso 2): Si L es una similitud que no es isometría y no hay paralelismo.

Fig. 1.



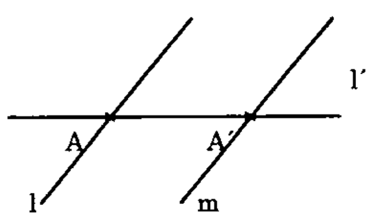
Sea l una recta en E^2.

L(l) = l´ donde l´ es una recta no paralela a la recta l.

Sea A la intersección de las rectas l y l´.

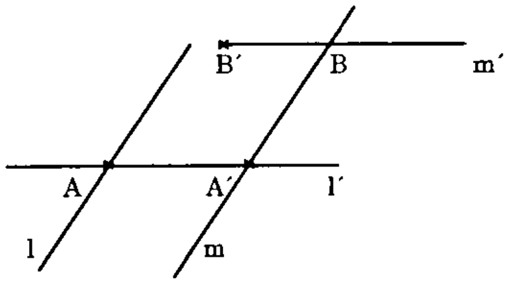
L(A) = A´ donde A´ está en la recta l´ pero es distinto del punto A "ver fig. 1".

Fig. 2.



Sea m una recta que pase por el punto A´ y que sea paralela a la recta l "ver fig. 2".

Fig. 3.



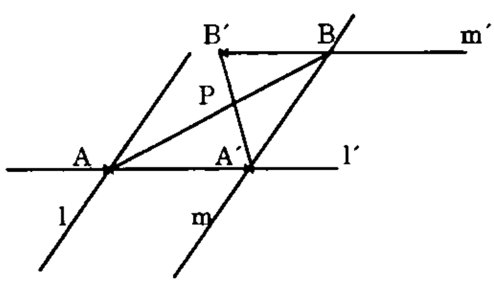
L(m) = m´ donde m´ es una recta no paralela a la recta m.

Sabemos por la proposición 13) que la recta m´es paralela a la recta l´.

Sea B la intersección de las rectas m y m´.

L(B) = B´donde B´ está en la recta m´pero es distinto del punto B "ver fig. 3".

Fig. 4.



Por hipótesis sabemos que en la similitud L no hay isometría entonces la recta $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela a la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Sea P la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ "ver fig. 4".

Sea L(P) = P´.

Demostraremos que P = P´.

Como $\overleftrightarrow{B'B} \parallel \overleftrightarrow{AA'}$ entonces $(\underline{AP}/\underline{PB}) = (\underline{A'P}/\underline{PB'})$ y los triángulos ΔAA´P y ΔPB´B son semejantes.

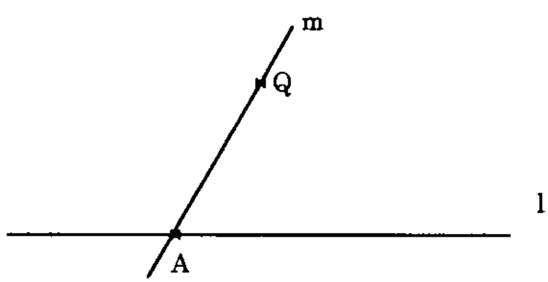
Como $(\underline{AP}/\underline{PB}) = (r\ \underline{AP}/r\ \underline{PB}) = (\underline{A'P'}/\underline{P'B'}) = (\underline{A'P}/\underline{PB'})$ aplicando el teorema 9) tenemos que P = P´.

Por lo tanto, la similitud L fija al punto P.

Nota: los teoremas 22, 23, 24 y 25 que a continuación veremos, son importantes ya que los utilizaremos en el capitulo 3 para demostrar algunos teoremas.

Teorema 22): Si un paralelismo deja invariante a una recta l y deja fija a un punto Q fuera de l entonces es la identidad.

Demostración:



Sea P un paralelismo.

Q es el punto fijo de P.

Por el teorema 18) sabemos que un paralelismo P con punto fijo es una homotecia.

El punto Q es el centro de homotecia.

"Las homotecias tienen un solo punto fijo".

Por hipótesis el paralelismo P deja invariante a la recta l.

Sea $A \in l$.

Sea $\overleftrightarrow{QA} = m$.

La recta m es invariante bajo P porque pasa por el centro de homotecia.

$P(A) \in m$ y $P(A) \in l$ por lo tanto, $P(A) = A$.

Como esto pasa para todo punto en l entonces P fija tres puntos no colineales.

Sabemos que P es una similitud, por el teorema 13) P es la identidad.

Teorema 23): La composición de homotecias es una homotecia más preciso,

Sean H(A,a) Y H(B,b) dos homotecias entonces :

$(H(B,b) \circ H(A,a)) = H(C,ab)$ y C está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración:

Supongamos que $A \neq B$ y $ab \neq 1$.

La composición $(H(B,b) \circ H(A,a))$ es un paralelismo.

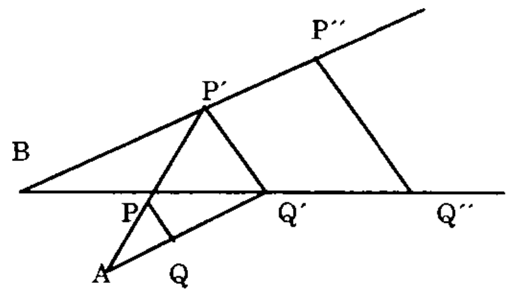
Sean P y $Q \in E^2$ tal que $H(A,a)(P) = P'$, $H(A,a)(Q) = Q'$, $H(B,b)(P') = P''$ y

$H(B,b)(Q') = Q''$.

Aplicamos la composición $(H(B,b) \circ H(A,a))$ a los puntos P y Q respectivamente.

$(H(B,b) \circ H(A,a))\ (P) = H(B,b)\ (P') = P''$.

$(H(B,b) \circ H(A,a))\ (Q) = H(B,b)(Q') = Q''$.



$a\ \underline{PQ} = \underline{P'Q'} \Rightarrow a = (\underline{P'Q'} / \underline{PQ})$.

$b\ \underline{P'Q'} = \underline{P''Q''} \Rightarrow b = (\underline{P''Q''} / \underline{P'Q'})$.

$ab = (\underline{P'Q'} / \underline{PQ})\ (\underline{P''Q''} / \underline{P'Q'}) = (\underline{P''Q''} / \underline{PQ})$.

Por lo tanto, ab $\underline{PQ} = \underline{P''Q''}$.

Como ab $\neq$ 1 entonces el paralelismo (H(B,b) o H(A,a)) no es isometría entonces no es traslación.

Por el teorema 18) sabemos que el paralelismo (H(B,b) o H(A,a)) es una homotecia de razón ab.

Sea C el centro de la homotecia.

Ahora demostraremos que $C \in \overleftrightarrow{AB}$.

La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es invariante bajo la homotecia (H(B,b) o H(A,a)), porque:

$A \in \overleftrightarrow{AB}$ entonces $\overleftrightarrow{AB}$ es invariante bajo la homotecia H(A,a).

$B \in \overleftrightarrow{AB}$ entonces $\overleftrightarrow{AB}$ es invariante bajo la homotecia H(B,b).

Por lo tanto, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es invariante bajo la composición (H(B,b) o H(A,a)).

Supongamos que $C \notin \overleftrightarrow{AB}$ y ab $\neq$ 1 entonces esto contradice el teorema 22) y por lo tanto, $C \in \overleftrightarrow{AB}$.

Observación: Si ab = 1 entonces tenemos los siguientes casos :

Caso 1): Si a = 1 y b = 1 entonces (H(B,b) o H(A,a)) = I.

Caso 2): Si uno de los dos a ó b es distinto de 1 el otro también y a = 1/b.

Como ab = 1 entonces PQ = P′′Q′′.

Por lo tanto, el paralelismo (H(B,b) o H(A,a)) es una isometría por el teorema 18) el paralelismo (H(B,b) o H(A,a)) es una traslación.

Si A = B y ab ≠ 1 entonces (H(B,b) o H(A,a)) = H(A,ab).

Teorema 24) Si (H(A,a) o H(B,b) o H(C,c)) = I, los puntos A, B y C distintos y uno de los números reales a, b ó c es diferente de 1 entonces los puntos A, B y C son colineales.

Demostración:

Supongamos, sin perdida de generalidad que a = 1 entonces H(A,a) = H(A,1) = I entonces (H(B,b) o H(C,c)) = I entonces bc = 1.

Por Demostrar que b= 1 y c = 1.

Suponemos que b ≠ 1 entonces c ≠ 1.

Por hipótesis B ≠ C.

(H(B,b) o H(C,c))(C) = H(B,b)(C) = C′ es una contradicción porque (H(B,b) o H(C,c)) = I, Por lo tanto b = 1 y c = 1.

Observación: Si uno de los números a, b ó c es 1 entonces a, b y c son 1.

Supongamos sin perdida de generalidad que a ≠ 1 entonces (1 /a) ≠ 1.

Por hipótesis (H(B,b) o H(C,c)) = H(A,1 /a) donde A ≠ B ≠ C y:

$H(A,1/a) = H^{-1}(A,1/a)$.

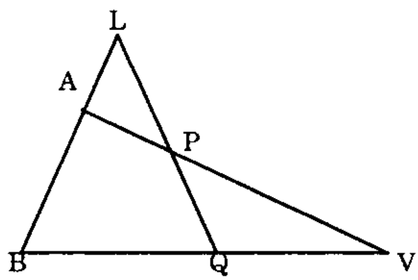
Por el teorema 4) tenemos que $A \in \overleftrightarrow{BC}$.

Por lo tanto, A, B y C son colineales.

Teorema 25): Supongamos que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ son dos rectas distintas que se intersectan en el punto L y si $H(A,a)(P) = H(B,b)(Q) = V$ entonces

$(H(B,1/b) \circ H(A,a)) = H(L,a/b)$.

Demostración:



Supongamos que $H(A,a)(P) = H(B,b)(Q) = V$.

Caso 1): Si $a= b$.

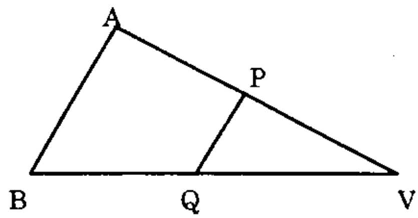
$H(A,a)(P) = V \Rightarrow a\,\underline{AP} = \underline{AV} \Rightarrow a = (\underline{AV}/\underline{AP})$.

$H(B,b)(Q) = V \Rightarrow b\,\underline{BQ} = \underline{BV} \Rightarrow b = (\underline{BV}/\underline{BQ})$.

Como $a = b$ entonces $(\underline{AV}/\underline{AP}) = (\underline{BV}/\underline{BQ})$ y $\measuredangle PVQ = \measuredangle AVB$ entonces

$\Delta PVQ \sim \Delta AVB$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$.

Por lo tanto no existiría el punto L.



Caso 2): Si $a \neq b$.

Como $a \neq b$ entonces $(a/b) \neq 1$.

Por el teorema 23) tenemos que $(H(B,1/b) \circ H(A,a)) = H(C,a/b)$ con $C \in \overleftrightarrow{AB}$.

Demostraremos que $C = L$ donde $L = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

Aplicamos la homotecia $H(C,a/b)$ al punto P.

$H(C,a/b)(P) = (H(B,1/b) \circ H(A,a))(P) = (H(B,1/b) \circ H(A,a)(P))$

$=(H(B,1/b)(V)) = Q$.

Por lo tanto, $C \in \overleftrightarrow{PQ}$ entonces $C = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{PQ}$.

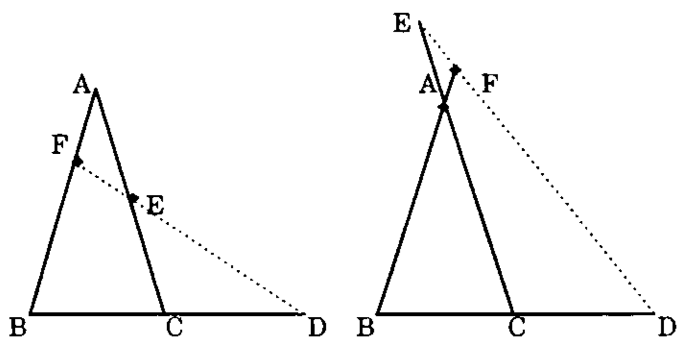
Por lo tanto, $C = L$ y $(H(B;1/b) \circ H(A,a)) = H(L,a/b)$.

CAPITULO III

"TEOREMA DE MENELAO"

Teorema 26): Sea Δ ABC un triángulo y sean D, E y F puntos sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente distintos de los vértices del triángulo Δ ABC, D, E y F son colineales si y sólo si $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$.

Demostración:



$\Leftarrow$) Supongamos que $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$.

Por demostrar que los puntos D, E y F son colineales.

Demostración:

$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1 \Rightarrow 1 = -(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$

$\Rightarrow 1 = -(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$.

Sean f, d y e números reales tales que:

$f = (\underline{FA}/\underline{FB})$, $d = (\underline{DB}/\underline{DC})$ y $e = (\underline{EC}/\underline{EA})$.

Definimos las homotecias H(F,f)(B) = A, H(D,d)(C) = B y H(E,e)(A) = C y que

1 = fde.

Sea $\hat{H}$ la siguiente composición $\hat{H}$ = (H(F,f) o H(D,d) o H(E,e)).

Si demostramos que $\hat{H}$ = I entonces por el teorema 24) tenemos que D, E y F son colineales. Como la razón de $\hat{H}$ es 1 solo falta mostrar que tiene un punto fijo, para esto aplicamos $\hat{H}$ al punto A.

$\hat{H}$(A) = (H(F,f) o H(D,d) o H(E,e))(A)

= (H(F,f) o H(D,d)) o (H(E,e)(A)) = (H(F,f) o H(D,d)(C))

= H(F,f)(B) = A.

Entonces $\hat{H}$(A) = A-------------(*).

Por lo tanto, $\hat{H}$ = I lo cual implica que D, E y F son colineales.

$\Rightarrow$) Supongamos que los puntos D, E y F son colineales.

Por demostrar que $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$.

Demostración:

Sean f, d y e números reales diferentes de 0 y 1.

Sean las siguientes homotecias H(F,f), H(D,d) y H(E,e) tales que

H(F,f)(B) = A, H(D,d) (C) = B y H(E,e)(A) = C.

Como H(F,f)(B) = A entonces f $\underline{FB} = \underline{FA}$ entonces $f = (\underline{FA}/\underline{FB})$.

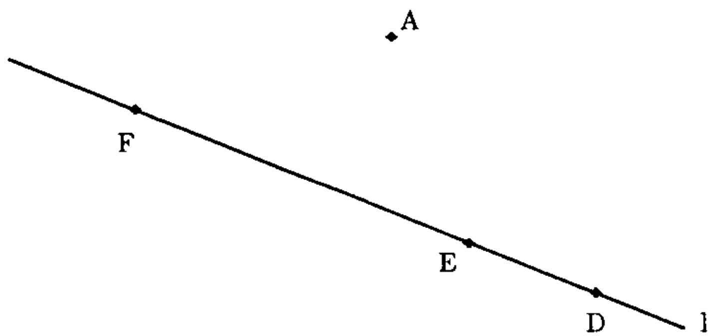
Como H(D,d) (C) = B entonces d $\underline{DC} = \underline{DB}$ entonces $d = (\underline{DB}/\underline{DC})$.

Como $H(E,e)(A) = C$ entonces $e\ \underline{EA} = \underline{EC}$ entonces $e = (\underline{EC}/\underline{AE})$.

Sea $\widehat{H}$ la siguiente composición $\widehat{H} = (H(F,f) \text{ o } H(D,d) \text{ o } H(E,e))$.

Por (*) sabemos que $\widehat{H}$ fija al punto A entonces:

$\widehat{H} = (H(F,f) \text{ o } H(D,d) \text{ o } H(E,e)) = H(A,fde)$.



Sea l la recta que pasa por los puntos D, E y F.

La recta l es invariante bajo $\widehat{H}$ puesto que es invariante bajo cada una de las tres homotecias con centros D, E y F.

Sabemos que el punto A no esta en la recta l, por el teorema 22) sabemos que $\widehat{H}$ es la identidad.

$\widehat{H} = (H(F,f) \text{ o } H(D,d) \text{ o } H(E,e)) = H(A,fde) = H(A,1) = I$.

Por lo tanto, $fde = 1$.

$1 = fde = (\underline{FA}/\underline{FB})(\underline{DB}/\underline{DC})(\underline{EC}/\underline{EA}) = (-(\underline{AF}/\underline{FB}))(-(\underline{BD}/\underline{DC}))(-(\underline{CE}/\underline{EA}))$

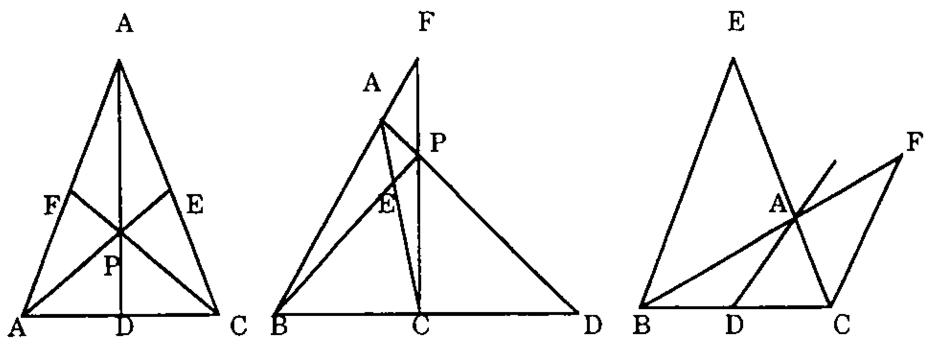
$= -(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$.

Por lo tanto, $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = -1$.

"TEOREMA DE CEVA"

Teorema 27): Sea Δ ABC un triángulo y sean D, E y F puntos sobre las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente distintos de los vértices del triángulo ΔABC, entonces las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas ó concurrentes si y sólo si $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$.

Demostración:



⇒) Supongamos que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas ó congruentes.

Por demostrar que $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$.

Demostración:

Sean las siguientes homotecias H(F,f), H(C,c),H(D,d) y H(A,a) tales que

H(F,f)(B) = H(C,c)(E) = A y H(D,d)(B) = H(A,a)(E) = C donde f, c, d y a son números reales distintos de 0 y 1.

Puesto que $f\,\underline{FA} = \underline{FB}$, $c\,\underline{CE} = \underline{CA}$, $d\,\underline{DB} = \underline{DC}$, $a\,\underline{AE} = \underline{AC}$ entonces

$f = (\underline{FA}/\underline{FB})$, $c = (\underline{CA}/\underline{CE})$, $d = (\underline{DC}/\underline{DB})$ y $a = (\underline{AC}/\underline{AE})$.

$$((fa)/(dc)) = ((\underline{FA}/\underline{FB})(\underline{AC}/\underline{AE}) \,/\, (\underline{DC}/\underline{DB})(\underline{CA}/\underline{CE}))$$

$$= (\underline{FA}\ \underline{AC}\ \underline{DB}\ \underline{CE}) \,/\, \underline{FB}\ \underline{AE}\ \underline{DC}\ \underline{CA}))$$

$$= -(\underline{FA}/\underline{FB})\ (\underline{DB}/\underline{DC})\ (\underline{CE}/\underline{AE})$$

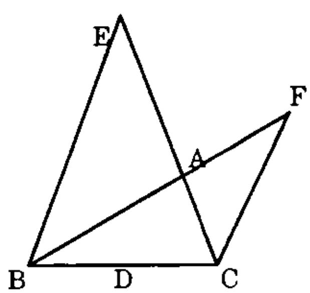
$$= -(-(\underline{AF}/\underline{FB}))(-(\underline{BD}/\underline{DC}))(-(\underline{CE}/\underline{EA}))$$

$$= (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}).$$

Por lo tanto, $((fa)/(dc)) = (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$.

Supongamos que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas.

1): $CF // BE \Leftrightarrow f = c$.



$\Rightarrow$) Supongamos que $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{EB}$.

Por demostrar que $(\underline{FA}/\underline{CA}) = (\underline{FB}/\underline{CE})$.

Demostración:

Como $\overleftrightarrow{CF} // \overleftrightarrow{EB}$ entonces $\Delta CAF \sim \Delta EAB$ de aquí tenemos que:

r $\underline{CA} = \underline{FA}$------------------(*)

r $\underline{AE} = \underline{AB}$------------------(**)

la suma de (*) y (**) obtenemos lo siguiente:

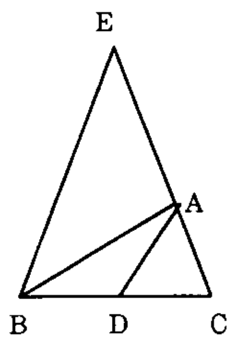
r $(\underline{CA} + \underline{AE}) = \underline{FA} + \underline{AB}$ entonces r $\underline{CE} = \underline{FB}$ entonces r = $(\underline{FB}/\underline{CE})$ y de (*) sabemos que r = $(\underline{FA}/\underline{CA})$.

Entonces $(\underline{FA}/\underline{CA}) = (\underline{FB}/\underline{CE})$ entonces $(\underline{FA}/\underline{FB}) = (\underline{CA}/\underline{CE})$.

Por lo tanto, f = c.

⇐) La demostración se hace siguiendo los mismos pasos en sentido contrario.

2): $\overleftrightarrow{DA} \,//\, \overleftrightarrow{EB} \Leftrightarrow d = a$.



⇒) Supongamos que $\overleftrightarrow{DA} \,//\, \overleftrightarrow{EB}$.

Por demostrar que $(\underline{DC}/\underline{DB}) = (\underline{AC}/\underline{AE})$.

Demostración:

$\Delta CEB \sim \Delta CAD$ entonces tenemos que:

$(\underline{DC}/\underline{AC}) = (\underline{DB}/\underline{AE})$ entonces $(\underline{DC}/\underline{DB}) = (\underline{AC}/\underline{AE})$.

Por lo tanto d = a.

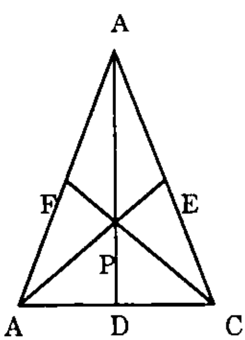
⇐) Otra vez siguiendo los pasos en sentido contrario se obtiene la demostración.

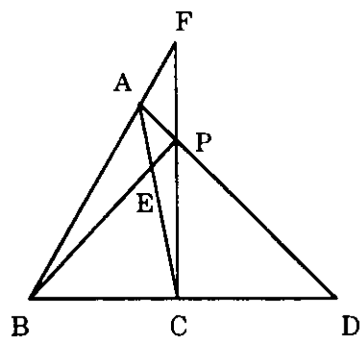
Por lo tanto, si las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas tenemos que f = c y d = a entonces:

$1= ((fa)/(dc)) = (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$.

Por lo tanto, $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$.

Supongamos que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son concurrentes en el punto P.





Como H(F,f)(B) = H(C,c)(E) = A y H(D,d)(B) = H(A,a)(E) = C y $\overleftrightarrow{FC} \cap \overleftrightarrow{BE}$ = P y $\overleftrightarrow{DA} \cap \overleftrightarrow{BE}$ = P aplicamos el teorema 25) tenemos que (H(C,1/c) oH(F,f)) =H(P,f/c) y (H(A,1/a) o H(D,d)) = H(P,d/a).

Sean H1 =(H(C,1/c) oH(F,f)) =H(P,f/c) y:

H2 = (H(A,1/a) o H(D,d)) = H(P,d/a).

El punto P es fijo para H1 y H2.

Por demostrar que H1(B) = H2(B) = E.

Demostración:

H(F,f)(B) = H(C,c)(E) = A $\Rightarrow$ (H(C,1/c) o H(F,f))(B) = E

Por lo tanto, H1(B) = E.

H(D,d)(B) = H(A,a)(E) = C $\Rightarrow$ (H(A,1/a) o H(D,d))(B) = E

Por lo tanto, H2(B) = E.

Por lo tanto, H1(B) = H2(B) = E.

H(P,f /c)(B) = H(P,d /a)(B) = E entonces (f /c) =(d /a) entonces 1= ((fa)/(dc)) =

$(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$

Por lo tanto, $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $(\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA}) = 1$.

Por demostrar que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas ó concurrentes.

Demostración:

Por hipótesis $1 = (\underline{AF}/\underline{FB})(\underline{BD}/\underline{DC})(\underline{CE}/\underline{EA})$ = ((fa)/(dc)).

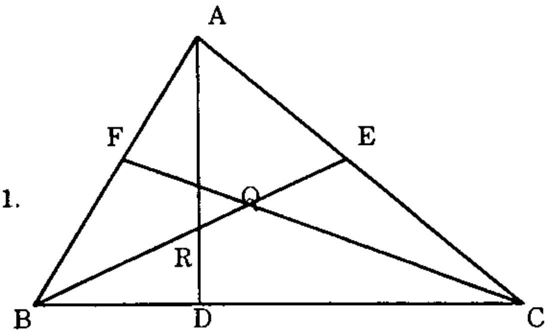
Como ((fa)/(dc)) entonces (f /c) = (d /a).

Caso 1): Si (f /c) = (d /a) = 1.

Si (f /c) = (d /a) = 1 entonces f =c y d = a y ya se demostró que las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son paralelas.

Caso 2): Si (f /c) = (d /a) $\neq$ 1.

Fig. 1.



Supongamos que H1 y H2 son igual que anteriormente solo que los centros son distintos como se muestra en la figura 1.

$H1 = (H(C,1/c) \circ H(F,f)) = H(Q,f/c)$.

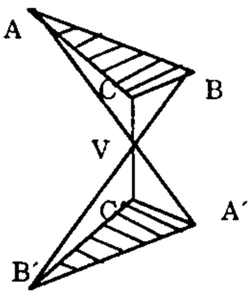
$H2 = (H(A,1/a) \circ H(D,d)) = H(R,d/a)$.

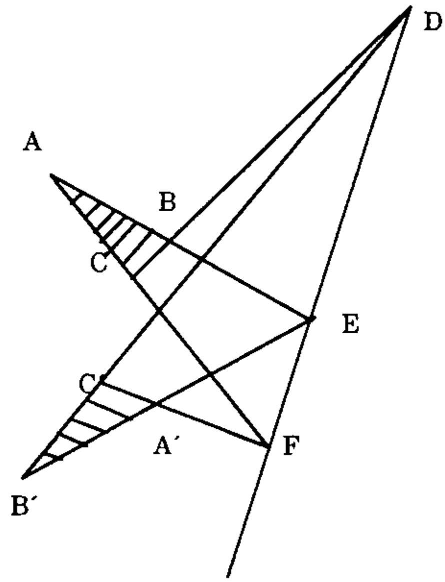
Sabemos que $H1(B) = H2(B) = E$ entonces:

$H(Q,f/c)(B) = H(R,d/a)(B) = E$ y como $(f/c) = (d/a)$ entonces $Q = R$.

Por lo tanto, las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son concurrentes.

"Ahora definiremos lo que es perspectiva desde un punto y desde una recta".





Perspectiva desde un punto   Perspectiva desde una recta

Definición: Se dice que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto V, si al unir los vértices correspondientes por las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ concurren.

Definición: Se dice que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ estan en perspectiva desde una recta $\overleftrightarrow{FD}$, si las intersecciones de los lados correspondientes $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = D$, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = E$ y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = F$ son colineales.

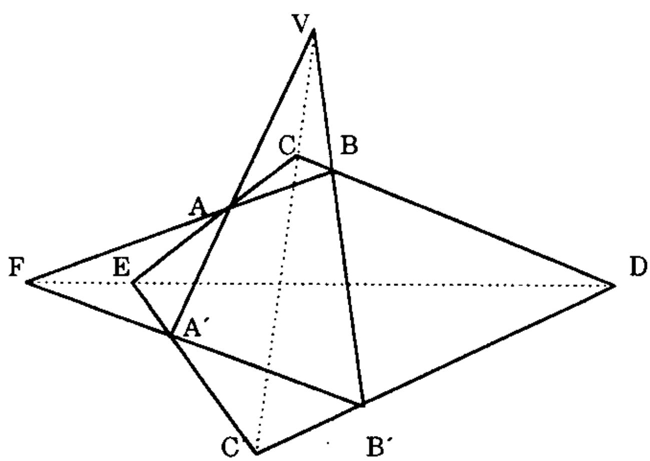
"TEOREMA DE DESARGUES"

El teorema de Desargues establece que:

Teorema 28): Dos triángulos están en perspectiva desde un punto si y sólo si están en perspectiva desde una recta.

Demostración:

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos. $F = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $E = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$, $D = \overleftrightarrow{CB} \cap \overleftrightarrow{C'B'}$ y $V = \overleftrightarrow{AA'} \cap \overleftrightarrow{BB'}$ distintos.



El teorema de Desargues es valido también cuando V es el punto al infinito, cuando alguno de los puntos de F, E ó D es punto al infinito y cuando dos de los puntos F, E ó D son puntos al infinito

Primero demostraremos que si los triángulos ΔABC Y ΔA´B´C ´ están en perspectiva desde un punto entonces están en perspectiva desde una recta.

se realizara en seis casos que son los siguientes:

CASO	**V**	**F, E, D**
1	**En el plano**	**En el plano**
2	**En el plano**	**Uno de los puntos al infinito**
3	**En el plano**	**Dos de los puntos al infinito**
4	**Punto al infinito**	**En el plano**
5	**Punto al infinito**	**Uno de los puntos al infinito**
6	**Punto al infinito**	**Dos de los puntos al infinito**

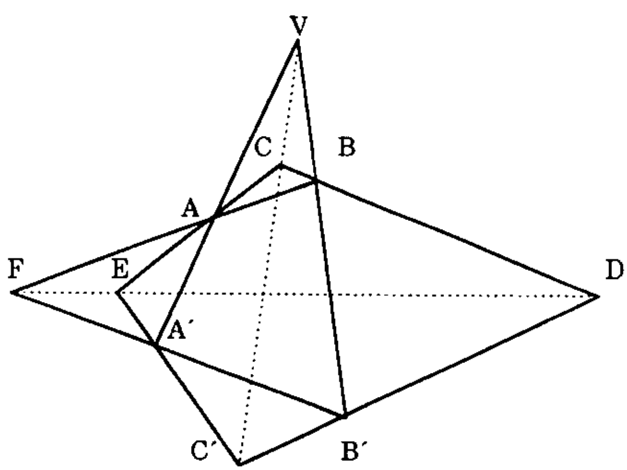
Para el regreso demostraremos que si los triángulos ΔABC Y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde una recta entonces están en perspectiva desde un punto son necesarios nada mas tres casos que son:

1) Si los puntos F, E y D están en el plano.

2) Uno de los tres puntos F, E ó D es punto al infinito.

3) Dos de los tres puntos F, E ó D son puntos al infinito.

⇒) Primero supongamos que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto V en el plano.



Sean H(A,a), H(B,b) y H(C,c) homotecias tales que:

H(A,a)(A´) = H(B,b)(B´) = H(C,c)(C´) = V.

Caso 1) Supongamos que los puntos F, E y D están en el plano.

Como H(C,c)(C´) = H(A,a)(A´) = V, H(B,b)(B´) = H(C,c)(C´) = V y

H(A,a)(A´) = H(B,b)(B´) = V y $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'} = E$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'} = D$ y $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'} = F$

aplicando el teorema 25) tenemos que:

(H(A,1 /a) o H(C,c)) = H(E,c /a).

(H(C,1 /c) o H(B,b)) = H(D,b /c).

(H(B,1 /b) o H(A,a)) = H(F,a /b).

Sea $\hat{H}$ la siguiente composición:

$\hat{H}$ = (H(E,c /a) o H(D,b /c) o H(F,a /b)).

El paralelismo $\hat{H}$ fija al punto A´ es decir $\hat{H}$(A´) = A´ entonces $\hat{H}$ es una homotecia con centro en A´ y razón (cba /acb) = 1.

Por lo tanto, $\hat{H}$ = (H(E,c /a) o H(D,b /c) o H(F,a /b)) = I y los números reales (c /a) ≠ 1, (b /c) ≠ 1 y (a /b) ≠ 1 por el teorema 24) tenemos que los puntos E, D y F son colineales.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔA´B´C´ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{FD}$.

Caso 2): Supongamos que uno de los puntos F, E ó D es un punto al infinito.

Supongamos Sin perdida de generalidad que F es un punto al infinito entonces $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{A'B'}$ entonces a = b.

Entonces tenemos que:

(H(A,1 /a) o H(C,c)) = H(E,c /a).

$(H(C,1/c) \circ H(B,b)) = H(D,b/c)$.

Es claro que:

$H(E,c/a)(C') = A'$.

$H(D,b/c)(B') = C' \Rightarrow B' = H^{-1}(D,b/c)(C')$

$\Rightarrow B' = H(D,c/b)(C')$.

$H(E,c/a)(C') = A' \Rightarrow (c/a) = (\underline{EA'}/\underline{EC'})$.

$H(D,c/b)(C') = B' \Rightarrow (c/b) = (\underline{DB'}/\underline{DC'})$.

Como $a = b$ entonces $(c/a) = (c/b)$ entonces:

$(\underline{EA'}/\underline{EC'}) = (\underline{DB'}/\underline{DC'})$ entonces $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$

Como $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ entonces $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Por lo tanto los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{ED}$ con el punto al infinito.

Caso 3): Supongamos que dos de los puntos F, E ó D son puntos al infinito.

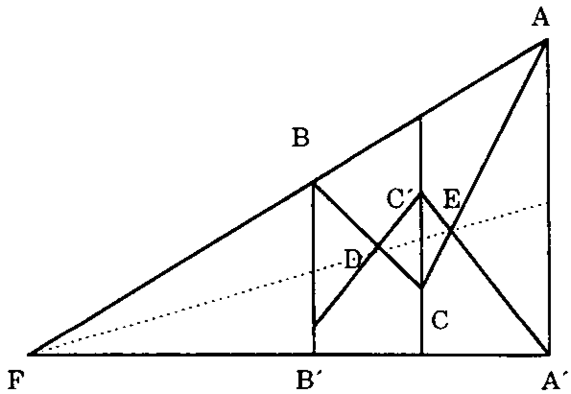
Supongamos sin perdida de generalidad que E y D son puntos al infinito entonces $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ entonces es claro que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ es decir F es punto al infinito entonces $a = b = c$.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde la recta al infinito.

En segundo lugar supongamos que los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde el punto V al infinito es decir $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$.

Supongamos que las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son distintas

Caso 4): Supongamos que los puntos F, E y D están en el plano.



Como $\overleftrightarrow{AA'} // \overleftrightarrow{CC'} // \overleftrightarrow{BB'}$ entonces los triángulos $\Delta CEC'$ y $\Delta AEA'$ son semejantes, los triángulos $\Delta FBB'$ y $\Delta FAA'$ son semejantes.

Sean las homotecias H(E,e), H(D,d) y H(F,f) tales que:

$H(E,e)(C) = A$ entonces $H(E,e)(C') = A'$.

$H(D,d)(B) = C$ entonces $H(D,d)(B') = C'$.

$H(F,f)(A) = B$ entonces $H(F,f)(A') = B'$.

Sea $\hat{H}$ la siguiente composición:

$\hat{H} = (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f))$.

$\hat{H}$ es un paralelismo y a continuación veremos que fija al punto A.

$\hat{H}(A) = (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f))(A)$

$= (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f)(A))$

$= (H(E,e) \circ H(D,d)(B))$

$= H(E,e)(C) = A.$

Por lo tanto $\hat{H}(A) = A.$

Entonces $\hat{H}$ es un paralelismo que fija un punto entonces $\hat{H}$ es una homotecia.

Ahora $\hat{H}$ también fija al punto A'.

$\hat{H}(A') = (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f))(A')$

$= (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f)(A'))$

$= (H(E,e) \circ H(D,d)(B'))$

$= H(E,e)(C) = A'.$

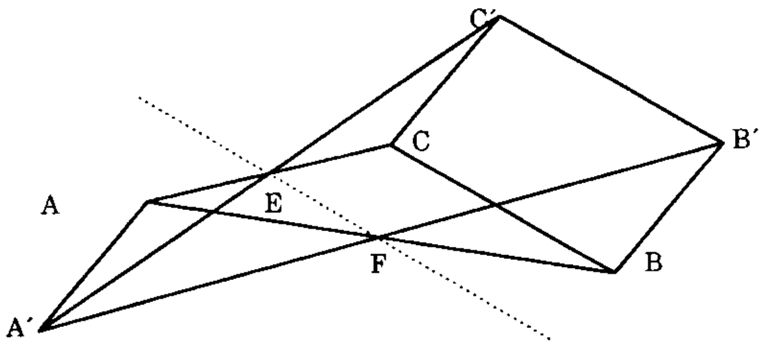
Por lo tanto $\hat{H}(A') = A'.$

La homotecia $\hat{H} = (H(E,e) \circ H(D,d) \circ H(F,f))$ fija a los puntos A y A′ entonces $\hat{H} = I$ y como e, d y f son distintos de 1 por el teorema 24) sabemos que los puntos D, E y F son colineales.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{FD}$.

Caso 5): Supongamos que uno de los puntos F, E ó D es punto al infinito.

Supongamos sin perdida de generalidad que D es un punto al infinito entonces $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{C'B'}$.



Como lo anterior:

H(E,e) (C) = A ⇒ H(E,e)(C´) = A´.

Entonces e = (<u>EA</u> /<u>EC</u>) = (<u>EA´</u>/ <u>EC´</u>).

H(F,f)(B) = A ⇒ H(F,f)(B´) = A´.

Entonces f = (<u>FA</u> /<u>FB</u>) = (<u>FA´</u>/ <u>FB´</u>).

Es claro que (H(F,1 /f) o H(E,e)(C)) = H(F,1 /f)(A) = B y que:

(H(F,1 /f) o H(E,e)(C´)) = H(F,1 /f)(A´) = B´.

Como $\overleftrightarrow{BB'}$ // $\overleftrightarrow{CC'}$ entonces T[C,B] = T[C´,B´].

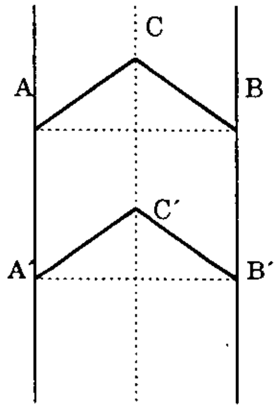
Entonces (e /f) = 1 y por lo tanto e = f.

Entonces $\overleftrightarrow{EF}$ // $\overleftrightarrow{CB}$ // $\overleftrightarrow{C'B'}$.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔA´B´C´ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{FE}$ con el punto al infinito.

Caso 6): Supongamos que dos de los puntos F, E ó D son puntos al infinito.

Supongamos sin perdida de generalidad que E y D son puntos al infinito entonces $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{C'B'}$ entonces $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ es decir F es un punto al infinito



Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔA´B´C´ están en perspectiva desde la recta al infinito.

⇐) Supongamos que los triángulos ΔABC y ΔA´B´C´ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{FD}$, es decir los puntos F, E y D son colineales.

Caso 1): Supongamos que los puntos F, E y D están en el plano.

Los triángulos ΔAEA´ y ΔBDB´ están en perspectiva desde el punto F, es decir las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$ concurren en F, entonces por lo anterior sabemos que los triángulos ΔAEA´ y ΔBDB´ están en perspectiva desde la recta $\overleftrightarrow{VC'}$ entonces los puntos C´, V y C deben ser colineales.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔA´B´C´ están en perspectiva desde el punto V en el plano.

Caso 2): Supongamos que uno de los puntos F, E ó D es el punto al infinito.

Supongamos sin perdida de generalidad que F es punto al infinito.

Entonces $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.

Es claro que los triángulos $\Delta A'EA$ y $\Delta B'DB$ están en perspectiva desde el punto al infinito, por lo anterior sabemos que los puntos V, C´ y C son colineales.

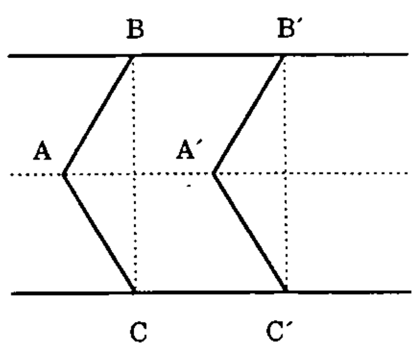
Por lo tanto los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ están en perspectiva desde un punto.

Caso 3): Supongamos que dos de los puntos F, E ó D son puntos al infinito.

Supongamos, sin perdida de generalidad, que E y D son puntos al infinito, entonces $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{C'B'}$.

Como F, E y D son colineales entonces $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$.

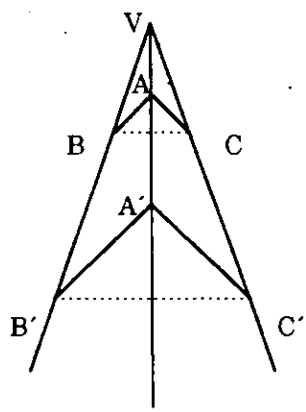
supongamos que $AC = A'C'$, $CB = C'B'$ y $AB = A'B'$.



Entonces T[A,A′] = T[B,B′] = T[C,C′] y por lo tanto $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$.

Por lo tanto los triángulos ΔABC y ΔA′B′C′ están en perspectiva desde el punto al infinito.

Supongamos que AC ≠ A′C′, CB ≠ C′B′ y AB ≠ A′B′.



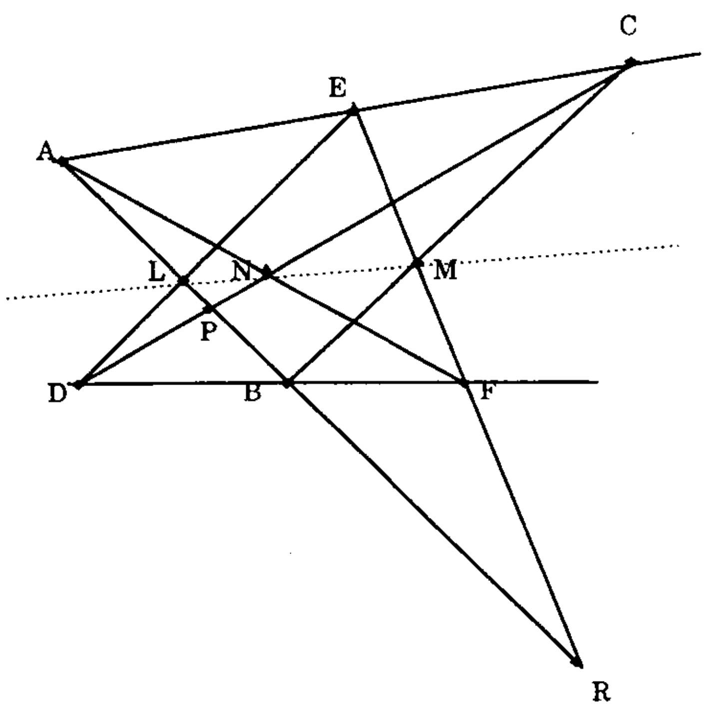
Entonces H(V,v)(A) = A′, H(V,v)(B) = B′ y H(V,v)(C) = C′.

Por lo tanto, los triángulos ΔABC y ΔA′B′C′ están en perspectiva desde el punto V en el plano.

"TEOREMA DE PAPPUS"

Teorema 29): Supongamos que A, B, C, D, E y F son seis puntos tal que los puntos A, C y E son colineales, Los puntos B, D y F son colineales, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ se intersectan en el punto L, las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ se intersectan en el punto M, las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{FA}$ se intersectan en el punto N entonces los puntos L, M y N son colineales.

Demostración:



Sean P, Q y R $\in E^2$ tales que P es la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, Q es la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ y R es la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$.

Definimos homotecias de forma que $H(D,d)(P) = H(E,e)(R) = Q$,

$H(B,b)(R) = H(C,c)(Q) = P$ y $H(F,f)(Q) = H(A,a)(P) = R$.

Para los números reales a, b, c, d, e y f diferentes de 0 y 1.

Como $H(D,d)(P) = H(E,e)(R) = Q$, $H(B,b)(R) = H(C,c)(Q) = P$ y $H(F,f)(Q) = H(A,a)(P) = R$ y $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{PR} = L$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{RQ} = M$ y $\overleftrightarrow{FA} \cap \overleftrightarrow{QP} = N$ aplicando el teorema 25) tenemos que:

$(H(E,1/e) \circ (H(D,d)) = H(L,d/e)$.

$(H(C,1/c) \circ (H(B,b)) = H(M,b/c)$.

$(H(A,1/a) \circ (H(F,f)) = H(N,f/a)$.

Sea $\hat{H}$ la siguiente composición:

$\hat{H} = (H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e))$.

$\hat{H}$ es un paralelismo y a continuación veremos que fija al punto P.

$\hat{H}(P) = (H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e))(P)$

$= (H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e)(P))$

$= (H(N,f/a) \circ H(M,b/c)(R))$

$= (H(N,f/a)(Q)) = P$

Por lo tanto, $\hat{H}(P) = P$.

Entonces $\hat{H}$ es un paralelismo que fija al punto P entonces $\hat{H}$ es una homotecia con centro en el punto P y razón $r = ((fbd) / (ace))$.

Sabemos que $d = (\underline{QD}/\underline{PD})$, $e = (\underline{QE}/\underline{RE})$, $b = (\underline{PB}/\underline{RB})$, $c = (\underline{PC}/\underline{QC})$, $f = (\underline{RF}/\underline{QF})$ y $a = (\underline{RA}/\underline{PA})$.

A continuación demostraremos que $r = ((fbd) / (ace)) = 1$.

$fbd = (\underline{RF}/\underline{QF})\ (\underline{PB}/\underline{RB})\ (\underline{QD}/\underline{PD}) = -\ (\underline{RF}/\underline{FQ})\ (\underline{QD}/\underline{DP})\ (\underline{PB}/\underline{BR})$.

$$ace = (\underline{RA}/\underline{PA})\ (\underline{PC}/\underline{QC})\ (\underline{QE}/\underline{RE}) = -\ (\underline{RA}/\underline{AP})\ (\underline{PC}/\underline{CQ})\ (\underline{QE}/\underline{ER})$$
$$= -\ (\underline{QE}/\underline{RE})\ (\underline{RA}/\underline{AP})\ (\underline{PC}/\underline{QC}).$$

Nos fijamos en el triángulo ΔPQR y como transversal a la recta $\overleftrightarrow{FD}$, aplicando el teorema de Menelao tenemos que:

$(\underline{RF}/\underline{FQ})\ (\underline{QD}/\underline{DP})\ (\underline{PB}/\underline{BR}) = -1$.

Análogamente si nos fijamos en el triángulo ΔPQR como transversal a la recta $\overleftrightarrow{AC}$, tenemos que:

si $(\underline{RA}/\underline{AP})\ (\underline{PC}/\underline{CQ})\ (\underline{QE}/\underline{ER}) = -1$ entonces $fbd = 1 = ace$.

Por lo tanto $r = ((fbd) / (ace)) = 1$.

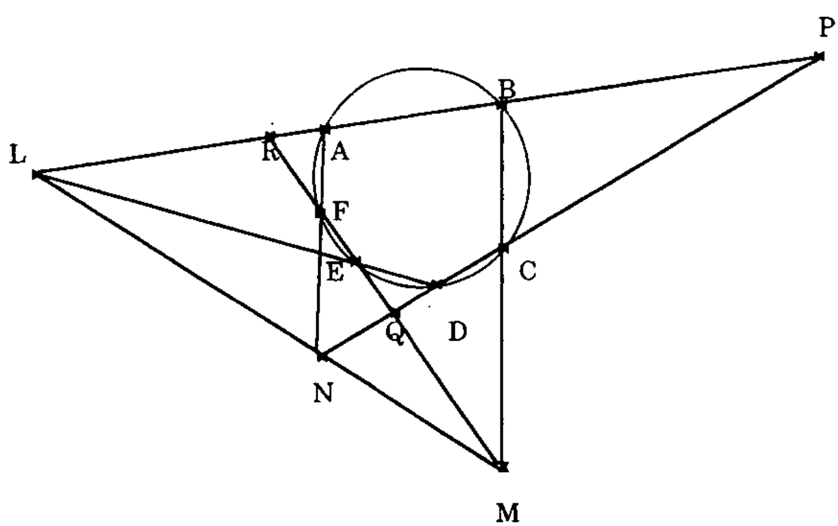
Por lo tanto, la homotecia $(H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e))$ con centro en el punto P y razón $r = ((fbd) / (ace)) = 1$ es la identidad.

Como $(H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e)) = I$ y (f/a), (b/c) y (d/e) son diferentes de 1, por el teorema 24) tenemos que los puntos N, M y Lson colineales.

"TEOREMA DE PASCAL"

Teorema 30): Supongamos que A, B, C, D, E y F son seis puntos en el circulo, tal que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ se intersectan en el punto L, las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ se intersectan en el punto M, las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{FA}$ se intersectan en el punto N entonces los puntos L, M y N son colineales.

Demostración:



La demostración es análoga a la del teorema 29) hasta donde dice que:

A continuación demostraremos que $r = ((fbd) / (ace)) = 1$.

$(f /a) = ((\underline{RF}/\underline{QF}) / (\underline{RA}/\underline{PA})) = (\underline{RF}\cdot\underline{PA}) / (\underline{RA}\cdot\underline{QF})$

$(b /c) = ((\underline{PB}/\underline{RB}) / (\underline{PC}/\underline{QC})) = (\underline{PB}\cdot\underline{QC}) / (\underline{PC}\cdot\underline{RB})$

$(d/e) = ((\underline{QD}/\underline{PD}) / (\underline{QE}/\underline{RE})) = (\underline{QD}\cdot\underline{RE}) / (\underline{QE}\cdot\underline{PD})$

Sustituimos los valores de (f/a), (b/c) y (d/e) en:

$r = ((fbd) / (ace))$.

$r = ((\underline{RF}\cdot\underline{PA}) / (\underline{RA}\cdot\underline{QF})) \cdot ((\underline{PB}\cdot\underline{QC}) / (\underline{PC}\cdot\underline{RB})) \cdot ((\underline{QD}\cdot\underline{RE}) / (\underline{QE}\cdot\underline{PD}))$.

$r = ((\underline{RE}\cdot\underline{RF}) / (\underline{RA}\cdot\underline{RB})) \cdot ((\underline{QC}\cdot\underline{QD}) / (\underline{QE}\cdot\underline{QF})) \cdot ((\underline{PA}\cdot\underline{PB}) / (\underline{PC}\cdot\underline{PD}))$.

Por demostrar que $((\underline{RE}\cdot\underline{RF}) / (\underline{RA}\cdot\underline{RB})) = 1$, $((\underline{QC}\cdot\underline{QD}) / (\underline{QE}\cdot\underline{QF})) = 1$ y

$((\underline{PA}\cdot\underline{PB}) / (\underline{PC}\cdot\underline{PD})) = 1$.

Demostración:

Los triángulos "ΔRFB y ΔRAE", "ΔQEC y ΔQDF" y "ΔPDB y ΔPCA" son semejantes respectivamente, entonces existen s, s´ y s´´ respectivamente, tales que:

$s = (\underline{RE}/\underline{RA}) = (\underline{RB}/\underline{RF})$, $s' = (\underline{QC}/\underline{QE}) = (\underline{QF}/\underline{QD})$ y $s'' = (\underline{PD}/\underline{PB}) = (\underline{PA}/\underline{PC})$.

Entonces $((\underline{RE}\cdot\underline{RF}) / (\underline{RA}\cdot\underline{RB})) = 1$, $((\underline{QC}\cdot\underline{QD}) / (\underline{QE}\cdot\underline{QF})) = 1$ y

$((\underline{PA}\cdot\underline{PB}) / (\underline{PC}\cdot\underline{PD})) = 1$.

Entonces:

$r = ((fbd) / (ace))$

$\quad = ((\underline{RE}\cdot\underline{RF}) / (\underline{RA}\cdot\underline{RB})) \cdot ((\underline{QC}\cdot\underline{QD}) / (\underline{QE}\cdot\underline{QF})) \cdot ((\underline{PA}\cdot\underline{PB}) / (\underline{PC}\cdot\underline{PD})) = 1$.

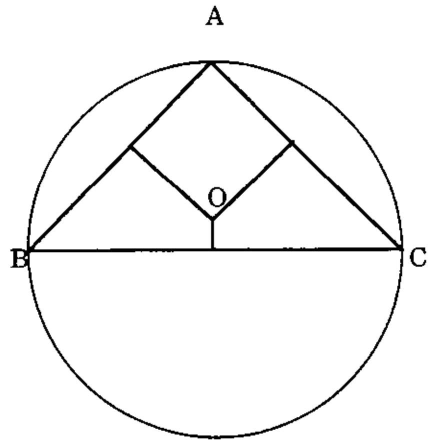
Por lo tanto la homotecia $(H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e))$ con centro en el punto P y razón $r = ((fbd) / (ace)) = 1$ es la identidad.

Como $(H(N,f/a) \circ H(M,b/c) \circ H(L,d/e)) = I$ y (f/a), (b/c) y (d/e) son diferentes de 1, por el teorema 24) tenemos que los puntos N, M y L son colineales.

A continuación se mencionará el siguiente teorema:

Teorema 31): Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

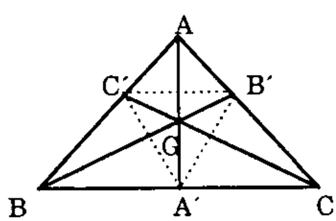
Nota: Al punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo se le llama circuncentro, que es el centro de la circunferencia y es también llamada circuncírculo.



Teorema 32): Las medianas de un triángulo son concurrentes a un punto que trisecta a cada mediana.

Demostración:

Nota: Al punto donde concurren las medianas se llama centroide.



La demostración de que las medianas de un triángulo son concurrentes a un punto es evidente usando el teorema de Ceva entonces pasaremos a demostrar que este punto trisecta a cada mediana.

Sea ΔABC un triángulo.

Sean C´, A´ y B´ los puntos medios de los lados $\underline{AB}$, $\underline{CD}$ y $\underline{CA}$ respectivamente.

Las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son las medianas del triángulo ΔABC.

Sea G el centroide del triángulo ΔABC.

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo $\Delta ABA'$ y como transversal a la recta $\overleftrightarrow{CC'}$ obtenemos que:

$(\underline{AC'}/\underline{C'B})(\underline{BC}/\underline{CA'})(\underline{A'G}/\underline{GA}) = -1$ entonces:

$(\underline{GA}/\underline{A'G})(\underline{CA'}/\underline{BC})(\underline{C'B}/\underline{AC'}) = -1$ entonces:

$(\underline{AG}/\underline{GA'})(\underline{A'C}/\underline{CB})(\underline{BC'}/\underline{C'A}) = -1$ entonces:

$(\underline{AG}/\underline{GA'})(-1/2) = -1$ entonces $(\underline{AG}/\underline{GA'}) = 2$ entonces $\underline{AG} = 2\,\underline{GA'}$.

Por lo tanto, el punto G trisecta a la mediana $\overleftrightarrow{AA'}$.

Como $\underline{AG} = 2\,\underline{GA'}$ entonces $(1/2)\,\underline{AG} = \underline{GA'}$ entonces:

$(-1/2)\underline{GA} = \underline{GA'}$.

Por lo tanto se puede definir la siguiente homotecia:

$H(G,-1/2)(A) = A'$.

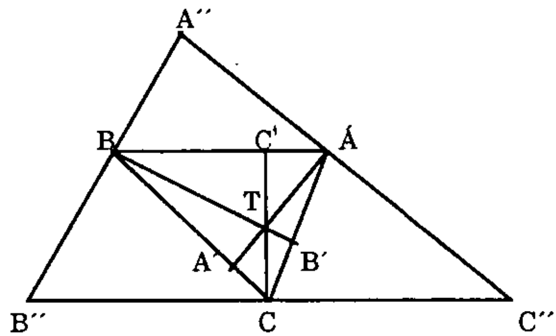
Análogamente G trisecta a las medianas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ y la homotecia $H(G,-1/2)$ es de tal forma que:

$H(G,-1/2)(B) = b'$ y $H(G,-1/2)(C) = C'$.

Observación: El triángulo $\Delta A'B'C'$ es el triángulo medio del triángulo ΔABC.

Teorema 33): Las alturas de un triángulo son concurrentes.

Demostración:



Sea ΔABC un triángulo.

Sean C', A' y B' los pies de las alturas del triángulo ΔABC en las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{CA}$ respectivamente.

Por demostrar que las alturas $\overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son concurrentes.

Demostración:

Sea el triángulo $\Delta A''B''C''$ tal que el ΔABC sea su triángulo medio.

Las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son las mediatrices del triángulo $\Delta A'B'C'$.

Como $\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{C''A''}$ entonces $\overleftrightarrow{AA'} \perp \overleftrightarrow{C''A''}$ y sabemos que $C''A = AA''$ entonces la recta $\overleftrightarrow{AA'}$ es la mediatriz del lado $\underline{C''A''}$.

Análogamente las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son las mediatrices de los lados $\underline{A''B''}$ y $\underline{B''C''}$ respectivamente.

Por el teorema 31) tenemos que las mediatrices $\overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son concurrentes.

Por lo tanto, las alturas $\overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ son concurrentes.

Nota: Al punto de intersección de las alturas se le llama ortocentro.

Enseguida se mencionarán dos corolarios:

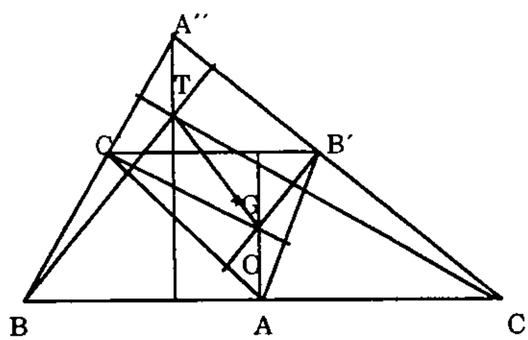
Corolario 1): Si O es el circuncentro de un triángulo si y sólo si es el ortocentro de su triángulo medio.

Corolario 2): El centroide de un triángulo es el mismo que el de su triángulo medio.

"TEOREMA DE EULER"

Teorema 34): Dado un triángulo y su triángulo medio, el ortocentro T, el centroide G, el circuncentro O del triángulo y el circuncentro N del triángulo medio son colineales y también se cumple que $\underline{TG} = 2\ \underline{GO} = 4\ \underline{NG}$.

Demostración:



Sea ΔABC un triángulo.

Sea el triángulo $\Delta A'B'C'$ el triángulo medio de el triángulo ΔABC.

Por el corolario 1) tenemos que el circuncentro O del triángulo ΔABC es el ortocentro del triángulo medio $\Delta A'B'C'$.

Por el corolario 2) tenemos que el centroide G del triángulo ΔABC es el mismo que el del triángulo medio $\Delta A'B'C'$.

Por el teorema 32) y el corolario 2) tenemos que:

Si H(G,-1/2)(A) = A´, H(G,-1/2)(B) =B´, H(G,-1/2)(C) = C´ y H(G,-1/2)(G) = G entonces H(G,-1/2)(T) = O.

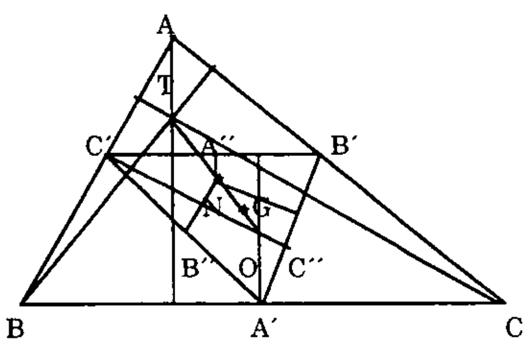
Puesto que si bajo la homotecia H(G,-1/2), el triángulo ΔABC lo manda en el triángulo ΔA´B´C´ entonces el ortocentro "T" del triángulo ΔABC lo manda al ortocentro "O" del triángulo ΔA´B´C´.

Por lo tanto, los puntos G, T y O son colineales y también tenemos que:

Si H(G,-1/2)(T) = O entonces (-1/2) $\underline{GT} = \underline{GO}$ entonces $-\underline{GT} = 2\ \underline{GO}$ entonces $\underline{TG} = 2\ \underline{GO}$.

Por lo tanto, $\underline{TG} = 2\ \underline{GO}$.

"De forma análoga para el punto N".



Si H(G,-1/2)(A´) = A´´, H(G,-1/2)(B´) = B´´ y H(G,-1/2)(C´) = C´´ entonces H(G,-1/2)(O) = N.

Observación: El triángulo ΔA´´B´´C´´ es el triángulo medio del triángulo ΔA´B´C´, el circuncentro N del triángulo ΔA´B´C´ es el ortocentro del triángulo

$\Delta A''B''C''$ y G es el centroide del triángulo $\Delta A''B''C''$.

Por lo anterior, la homotecia H(G,-1/2) manda el ortocentro "O" del triángulo $\Delta A'B'C'$ en el ortocentro "N" del triángulo $\Delta A''B''C''$.

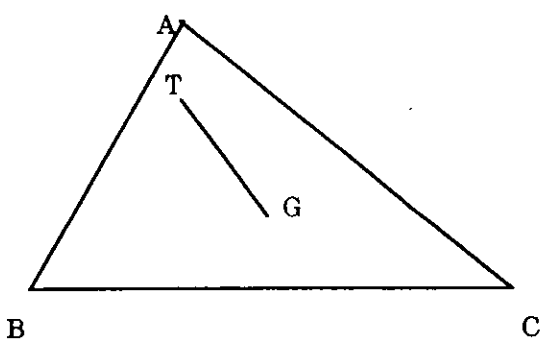
Por lo tanto, los puntos G, O y N son colineales y también tenemos que:

Si H(G,-1/2)(O) = N entonces $(-1/2)\underline{GO} = \underline{GN}$ entonces $-\underline{GO} = 2\ \underline{GN}$ entonces $\underline{GO} = -2\ \underline{GN}$ entonces $\underline{GO} = 2\ \underline{NG}$ entonces $2\ \underline{GO} = 4\ \underline{NG}$.

Sabemos de lo anterior que $\underline{TG} = 2\ \underline{GO}$.

Por lo tanto, $\underline{TG} = 2\ \underline{GO} = 4\ \underline{NG}$ y los puntos T, N, G y O son colineales.

Definición: La recta de Euler de un triángulo ΔABC, es aquella recta que pasa por el ortocentro T y el centroide G del triángulo ΔABC.

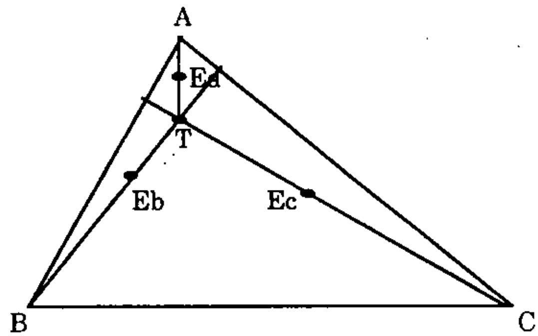


Teorema 35): La recta de Euler de un triángulo no equilátero, es la misma recta de Euler para el triángulo medio.

Demostración:

La demostración es inmediata aplicando el teorema de Euler.

Definición: Los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro del triángulo con los vértices A, B y C de un triángulo ΔABC, son los tres puntos de Euler Ea, Eb y Ec respectivamente.

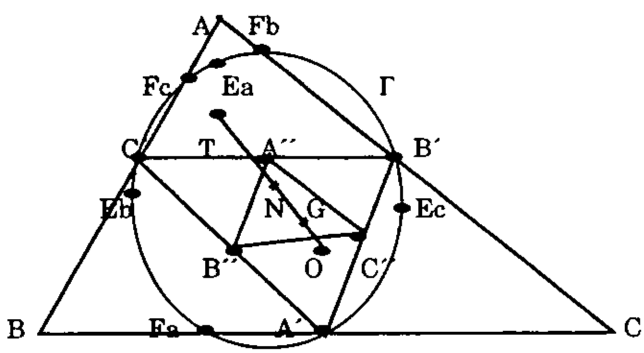


"TEOREMA DE BRIANCHON Y PONCELET"

"TEOREMA DE LOS NUEVOS PUNTOS"

Teorema 36): Para cualquier triángulo los puntos medios de los lados respectivos, los pies de las alturas y los puntos de Euler están en un circulo.

Demostración:



Como en el teorema de Euler, tenemos lo siguiente:

ΔABC un triángulo, el triángulo $\Delta A'B'C'$ es el triángulo medio del triángulo ΔABC, G es el centroide de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, T es el ortocentro del triángulo ΔABC, O es el circuncentro del triángulo ΔABC y ortocentro del triángulo $\Delta A'B'C'$ y N es el circuncentro del triángulo $\Delta A'B'C'$.

Sea el triángulo $\Delta A''B''C''$ el triángulo medio del triángulo $\Delta A'B'C'$.

Por el corolario 2) sabemos que G también es centroide del triángulo $\Delta A''B''C''$.

Por el corolario 1) sabemos que N es el ortocentro del triángulo $\Delta A''B''C''$.

Sea Γ el circuncírculo del triángulo $\Delta A'B'C'$.

Sean Fa, Fb y Fc los pies de las alturas del triángulo ΔABC en las rectas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente.

Como r es el circuncirculo del triángulo $\Delta A'B'C'$ entonces A',B'y C' están en r.

En otras palabras demostraremos que $NFa = NA'$, $NFb = NB'$ y $NFc = NC'$.

Por construcción sabemos que Fa y A' están en la recta $\overleftrightarrow{BC}$.

Supongamos que $Fa \neq A'$.

Como la recta $\overleftrightarrow{AFa}$ es una altura del triángulo ΔABC entonces $\overleftrightarrow{AFa} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Como el punto O es el ortocentro del triángulo $\Delta A'B'C'$ entonces la recta $\overleftrightarrow{OA'} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$ y como la recta $\overleftrightarrow{B'C'} // \overleftrightarrow{BC}$ entonces la recta $\overleftrightarrow{OA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Por el teorema de Euler sabemos que los puntos T, N, G y O son colineales.

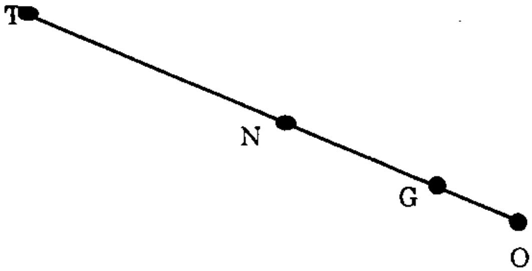
Por demostrar que N es el punto medio del segmento $\underline{TO}$.

Demostración:

Por el teorema de Euler tenemos que $\underline{TG} = 2\,\underline{GO} = 4\,\underline{NG}$.

Entonces $\underline{TG} = 4\,\underline{NG}$ y $\underline{GO} = 2\,\underline{NG}$.

Fig. 1.



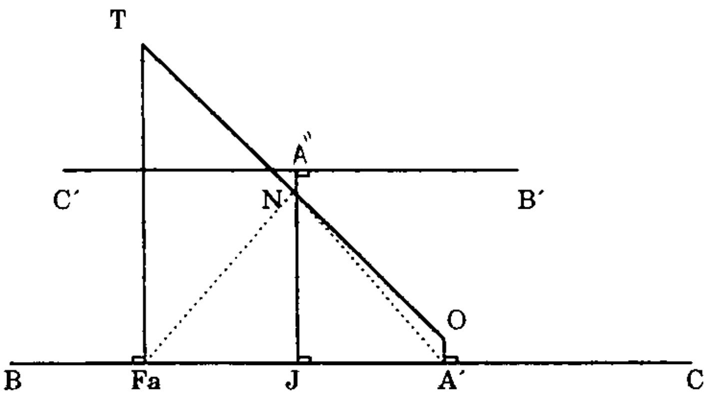
Ahora $\underline{TO} = \underline{TG} + \underline{GO} = 4\,\underline{NG} + 2\,\underline{NG} = 6\,\underline{NG}$ y

$\underline{NO} = \underline{NG} + \underline{GO} = \underline{NG} + 2\,\underline{NG} = 3\,\underline{NG}$.

Entonces $\underline{TO} = 6\,\underline{NG}$ y $\underline{NO} = 3\,\underline{NG}$ "ver fig. 1".

Por lo tanto, N es punto medio del segmento $\underline{TO}$.

Fig. 2.



La recta $\overleftrightarrow{A''N}$ es mediatriz del segmento $\underline{C'B'}$ entonces $\overleftrightarrow{A''N} \perp \overleftrightarrow{B'C'}$ y como $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \overleftrightarrow{B'C'}$ entonces $\overleftrightarrow{A''N} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

Sea J la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{A''N}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

Se puede observar que las rectas $\overleftrightarrow{TFa}$, $\overleftrightarrow{NJ}$ y $\overleftrightarrow{A'O}$ son perpendiculares a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ entonces las rectas $\overleftrightarrow{TFa}$, $\overleftrightarrow{NJ}$ y $\overleftrightarrow{A'O}$ son paralelas "ver fig. 2"

Entonces el cuadrilatero ■ FaTOA′ es un trapecio rectangular y como N es el punto medio del segmento $\underline{TO}$ entonces FaJ = JA′ y por lo tanto los triángulos ΔFaNJ y ΔA′NJ son congruentes.

Como los triángulos ΔFaNJ y ΔA′NJ son congruentes entonces NFa = NA′.

Análogamente se demuestra que NFb = NB′ y NFc = NC′.

Sabemos que Γ es el circuncirculo y N es el circuncentro del triángulo ΔA′B′C′, es decir N es el centro del circulo Γ y por lo tanto NA′, NB′ y NC′ son radios de Γ.

Por lo tanto Fa, Fb y Fc $\in$ Γ.

Sean Ea, Eb y Ec los puntos medios de los segmentos $\underline{AT}$, $\underline{BT}$ y $\underline{CT}$ respectivamente.

Observación: Los puntos Ea, Eb y Ec son los puntos de Euler.

Por demostrar que Ea, Eb y Ec $\in$ Γ.

Demostración:

Sean H(G,-1/2) y H(T,2) dos homotecias.

Sea $\hat{H}$ la siguiente composición $\hat{H}$ = (H(G,-1/2) o (H(T,2))

Sabemos que $\hat{H}$ es un paralelismo.

Mostraremos que $\hat{H}$ fija un punto.

Aplicamos $\hat{H}$ al punto N.

$\hat{H}(N) = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2))(N) = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)(N))$

$= H(G,-1/2)(O) = N.$

Por lo tanto, $\hat{H}(N) = N$.

Entonces $\hat{H} = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2))$ es una homotecia que fija al punto N.

Por el teorema 23) tenemos que:

$\hat{H} = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)) = H(N,-1).$

En este caso la homotecia:

$\hat{H} = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)) = H(N,-1) = \sigma N$ en donde σN es un semigiro con centro en el punto N.

Demostraremos que $H(N,-1)(Ea) = A'$, $H(N,-1)(Eb) = B'$ y $H(N,-1)(Ec) = C'$.

$H(N,-1)(Ea) = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2))(Ea)$

$= (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)(Ea)) = H(G,-1/2)(A) = A'.$

$H(N,-1)(Eb) = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2))(Eb)$

$= (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)(Eb))$

$= H(G,-1/2)(B) = B'.$

$H(N,-1)(Ec) = (H(G,-1/2) \circ (H(T,2))(Ec)$

$= (H(G,-1/2) \circ (H(T,2)(Ec))$

$= H(G,-1/2)(C) = C'.$

Por lo tanto:

H(N,-1) (Ea) = A´, H(N,-1) (Eb) = B´ y H(N,-1) (Ec) = C´.

Si H(N,-1) (Ea) = A´ entonces -$\underline{NEa}$ = $\underline{NA´}$ entonces $\underline{EaN}$ = $\underline{NA´}$ entonces

EaN = NA´.

Si H(N,-1) (Eb) = B´ entonces -$\underline{NEb}$ = $\underline{NB´}$ entonces $\underline{EbN}$ = $\underline{NB´}$ entonces

EbN = NB´.

Si H(N,-1) (Ec) = C´ entonces -$\underline{NEc}$ = $\underline{NC´}$ entonces $\underline{EcN}$ = $\underline{NC´}$ entonces

EcN = NC´.

Como EaN = NA´, EbN = NB´, EcN = NC´ y sabemos que NA´, NB´ y NC´ son radios de Γ entonces también EaN, EbN y EcN son radios de Γ.

Por lo tanto, Ea, Eb y Ec ∈ Γ.

Por lo tanto, A´, B´, C´, Fa, Fb, Fc, Ea, Eb y Ec ∈ Γ.

Nota: A el circuncirculo Γ del triángulo ΔA´B´C´ se le llama el círculo de los nueve puntos del triángulo ΔABC.

BIBLIOGRAFIA

George E. Martin, TRANSFORMATION GEOMETRY AN INTRODUCTION TO SYMMETRY, 1932, Springer-Verlag.

Levi S. Shively, PH. D., INTRODUCCION A LA GEOMETRIA MODERNA, 1984, C.E.C.S.A.

Eugene D. Nichols, William F. Palmer y John F. Shacht, GEOMETRIA MODERNA, 1989, Cia. Editorial Continental.

Dan Pedoe, GEOMETRY A COMPREHENSIVE COURSE, 1970, Dover Publications, Inc.

John Roe, ELEMENTARY GEOMETRY, 1993, Oxford Sience Publications.

Edwin E. Moise, Floy L. Downs Jr., GEOMETRIA MODERNA, 1986, Addison-Wesley Iberoamericana.

Howard Eves, A SURVEY OF GEOMETRY, 1963, Allyn and Bacon, Inc.

Edwin M. Hemmerling, GEOMETRIA ELEMENTAL, 1971, Noruega editores.

Marvin Jay Greenberg, SECOND EDITION EUCLIDIAN Y NON-EUCLIDIAN GEOMETRIES DEVELOPMENT AND HISTORY, 1980, W.H. Freeman and Company San Francisco.

I.N. Herstein, ALGEBRA MODERNA, 1990, Trillas.

Humberto Cardenas, Emilio Lluis,Francisco Raggi y Francisco Tomás, ALGEBRA SUPERIOR, 1988, Trillas.

Howard Eves, ESTUDIO DE LAS GEOMERÍAS Tomo II, UTEHA