

16  
2e



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL MODELO GENERAL DE CONSUMO/INVERSION:  
UNA SOLUCION EXPLICITA, CALCULO DEL  
CONTROL OPTIMO, EVALUACION DE OPCIONES  
Y SU SIMULACION COMPUTACIONAL

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**A C T U A R I O**  
**P R E S E N T A ;**  
**HUGO SALGADO CUEVAS**



DIRECTOR: DR. VICENTE ANGEL SORIANO RAMIREZ.

MEXICO, D. F.



ABRIL DE 1998.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

260149



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA DE  
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule  
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: EL MODELO GENERAL DE CONSUMO/INVERSION: UNA SOLUCION EXPLICITA, CALCULO DEL CONTROL OPTIMO, EVALUACION DE OPCIONES Y SU SIMULACION COMPUTACIONAL.

realizado por HUGO SALGADO CUEVAS.

con número de cuenta 8023831-1 , pasante de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. VICENTE ANGEL SORIANO RAMIREZ.

Propietario M. en C. LAURA ELENA CHAVEZ JOMBELI.

Propietario Mat. HUGO VILLASEÑOR HERNANDEZ

Suplente Dra. LAURA HIDAIGO SOLÍS.

Suplente M. en C. GUSTAVO ARTURO MARCHEZ FLORES

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en A.P. MA. ENCARNACION ALONSO REYES

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS

*Encarnación Alonso Reyes*  
*Laura E. Chávez J.*  
*Hugo Villaseñor Hernández*  
*Laura Hidaigo Solís*  
*Gustavo Arturo Marchez Flores*

# Índice

0.1	Introducción . . . . .	1
<b>1</b>	<b>Cálculo de una solución explícita</b>	<b>16</b>
1.1	Introducción . . . . .	16
1.2	Resultados Preliminares e Hipótesis . . . . .	20
1.3	Conclusiones . . . . .	22
1.4	Políticas o estrategias admisibles. . . . .	23
1.5	Construcción de la ecuación de Bellman . . . . .	25
1.6	Modelo reducido: Teorema de fondos mutualistas . . . . .	27
1.7	Solución a la ecuación Bellman: parte I. . . . .	31
1.8	Candidatos a estrategias óptimas. . . . .	37
1.9	Evaluación de la ejecución de las estrategias óptimas . . . . .	39
1.10	Resolviendo la ecuación de Bellman: parte II. . . . .	43
1.11	Soluciones cuando $U'(0) = \infty$ , $U(0)$ es finita y $P = \frac{U(0)}{\beta}$ . . . . .	43
1.12	Solución cuando $U(0) = -\infty$ . . . . .	45
1.13	Solución de todos los casos donde el consumo restringido es inactivo. . . . .	47
1.14	Solución cuando la restricción del consumo es activo. . . . .	48
1.15	Soluciones para funciones de utilidad HARA. . . . .	55
1.16	Dependencia de la política óptima sobre los precios. . . . .	57
1.17	El modelo con $\alpha$ , $\Sigma$ y $r$ no constante . . . . .	58
1.18	Resultados Tabulados . . . . .	58
<b>2</b>	<b>El Modelo General de Consumo/Inversión</b>	<b>62</b>
2.1	Introducción . . . . .	62
2.2	Procesos de Portafolio y Consumo. . . . .	63

2.2.1	Precios de Opciones . . . . .	70
2.3	Consumo e Inversión Óptimo (Teoría General). . . . .	75
2.3.1	Consumo e Inversión óptimos (Coeficientes constantes). . . . .	77
2.4	Un problema particular de selección de una cartera. . . . .	85
2.4.1	Un problema simplificado . . . . .	85
2.4.2	Una variante sin consumo . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Simulación Computacional</b> . . . . .	<b>91</b>
3.1	Introducción . . . . .	91
3.2	Modelo de Black-Scholes . . . . .	92
3.3	Manejo del Riesgo utilizando el Modelo <i>Black-Scholes</i> . . . . .	99
3.4	Las opciones como objetos (en computación). . . . .	105
3.5	Valoración de opciones a través de árboles de decisión financiera. . . . .	111
3.6	Conclusiones del Capítulo 3. . . . .	119

## 0.1 Introducción

El objetivo principal de este trabajo de tesis consiste en abordar el Problema General de Consumo/Inversión. En una primera aproximación efectuamos el cálculo de una solución explícita para ciertas funciones de utilidad y, en general, bajo adecuadas condiciones de regularidad y diferenciabilidad de la solución o función valor. Que duda cabe que el problema tiene raíces más profundas en un marco abstracto más complejo que el que aquí tratamos que corresponde al de las Soluciones de la Viscosidad (una referencia básica de esta teoría es [Cr-Is-Li]), pero que dada la envergadura de este análisis constituye propiamente un tema de investigación. Para quien esté interesado en esta línea sugerimos consultar [DiSo1].

El capítulo 1 está dedicado a la obtención de una solución explícita para el Modelo de Consumo/Inversión con un bono y  $N$  stocks o acciones cuyos precios evolucionan de manera aleatoria. En otras palabras, los precios están gobernados por las ecuaciones

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = r dt \quad \text{y} \quad (1)$$

$$\frac{dP_i(t)}{P_i(t)} = b_i dt + e_i \mathbb{D} dB_t \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

donde  $r$  es la tasa de interés del bono,  $\alpha_i$  es la tasa de retorno de los stock  $i$  y  $\mathbb{D}$  es una matriz, tal que podemos construir a la varianza  $\Sigma = \mathbb{D}\mathbb{D}^T$ . Por tanto, la varianza es definida positiva y está asociada al proceso estocástico que resuelve la ecuación (2) y en la práctica este parámetro modela la volatilidad del mercado. Si además denotamos formalmente por  $N_i$  al número de unidades del stock  $i$  dentro del portafolio o cartera de inversión, entonces al tiempo  $t$  la riqueza viene dada por la combinación lineal de los precios

$$\mathcal{X}_t^x = \sum_{i=0}^N N_i(t) P_i(t),$$

que, como se puede ver,  $\pi_i(t) = N_i(t) P_i(t)$  es la proporción con la que participa el stock  $i$  en el portafolio  $\pi$ . Observe que tanto  $\mathcal{X}_t^x$ ,  $P_i(t)$  y  $\pi(t)$  son procesos estocásticos y por ello hay que dar hipótesis adecuadas para que puedan ser estudiados.

Consideremos las diferencias después de transcurrido un lapso pequeño de tiempo  $h$

$$\mathcal{X}_{t+h} - \mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t) [P_i(t+h) - P_i(t)];$$

pero una vez transcurrido ese lapso el inversionista está interesado en obtener un producto de su riqueza por el tiempo invertido que denominaremos consumo, por lo que obtenemos

$$\mathcal{X}_{t+h} - \mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t) [P_i(t+h) - P_i(t)] - hC_{t+h}.$$

De aquí que a partir de (3) y (2) obtengamos la versión continua

$$d\mathcal{X}_t^x = (\alpha - r\mathbf{1})\pi^*(t)\mathcal{X}_t^x dt + r\mathcal{X}_t^x dt + \mathcal{X}_t^x \pi^*(t) \mathbb{D}d\mathcal{B}_t - C(t)dt, \quad (3)$$

que junto con la condición inicial  $\mathcal{X}_0^x = x$  se interpreta como el monto de la inversión inicial.

Bajo las hipótesis

$$\int_0^T C(t)dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^T \pi(s)\pi^*(s)ds < \infty$$

para los procesos de consumo y portafolios respectivamente concluimos la existencia y unicidad de la solución (el proceso de riqueza) para la ecuación (3) con valor inicial  $x$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t = & e^{\int_0^t r(s)ds} \left\{ x + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \left[ \pi(s)^T (b(s) - r(s)\tilde{\mathbf{1}}) - C_s \right] ds \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \pi^T(s) \sigma(s) d\mathcal{B}_s \right\}; \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

En particular, existe una dependencia de  $\pi$  y  $C$  para "controlar" a este proceso, puesto que hay muchas maneras de efectuar consumos e innumerables posibilidades de construir los portafolios. Ocurre a veces que con grandes volúmenes de consumo se puede llevar a la bancarrota; en otras ocasiones para algunas elecciones de  $\pi$  de hecho son posibles estos consumos y el no hacerlos representa tener dinero a disposición para otras actividades financieras y no aprovechar en ellas esos recursos. Más comúnmente se conoce esta situación como un *coste de oportunidad*.

La rentabilidad de la inversión se mide clásicamente a través de una función de utilidad  $U$  (creciente, cóncava y en principio diferenciable), evaluada en los consumos  $C(t)$  que el inversionista efectúa y actualizados de manera conveniente a través de una tasa de descuento  $\beta$ . Sin embargo, en virtud de que estamos interesados en la evolución hasta el tiempo de madurez  $T$ , con lo que

$$\int_0^T e^{-\beta t} U(C(t)) dt$$

sería la utilidad total obtenida. El problema es que  $C(t)$  de hecho viene a estar ligada a una única cartera de inversión  $\pi(t)$  y ambas son variables aleatorias, por lo que de hecho es necesario tomar en cuenta el comportamiento promedio de estas utilidades (que dependen también de los parámetros  $\pi$  y  $C$ ):

$$V_{\pi, C}(x) = E_x \left[ \int_0^T e^{-\beta t} U(C(t)) dt \right].$$

Un hecho crucial para este problema es la obtención de la utilidad máxima total esperada

$$V(x) = \sup_{\pi, C} V_{\pi, C}(x)$$

que se traduce como un problema de control óptimo.

Por todo ello, estamos interesados en controlar el proceso y la utilidad con respecto a la cartera  $\pi$  y el consumo  $C$ .

En el primer capítulo observaremos que  $V_{\pi, C}(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \beta V(x) = \max_{c > 0, \pi} \left\{ (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c) \right\}; \end{aligned} \quad (4)$$

por otra parte, se obtiene el portafolio óptimo

$$\pi = \frac{-\hat{V}'(x) \alpha - r}{x \hat{V}''(x) \sigma^2} \quad (5)$$

y, por otra, al maximizar con respecto al consumo  $C$  se obtiene que

$$V'(x) = U'(c),$$

que al considerar a  $c$  como una función de la riqueza obtenemos también

$$V''(x) = U''(C(x))C'(x).$$

A partir de la relación  $X(c) = x$  y  $C(x) = c$  podemos obtener  $C'(x) = C'(X(c)) = \frac{1}{X'(c)}$  que nos permitirá reescribir a la cartera óptima como

$$\pi = \frac{-(\alpha - r)}{\sigma^2 x} \frac{U'(C(x))}{U''(C(x))C'(x)} \quad (6)$$

y también a la ecuación (4) como

$$\beta V(\mathcal{X}(c)) = -\gamma \frac{(U'(x))^2}{U''(C'(x))} \mathcal{X}'(c) + [(r\mathcal{X}(c) - c)U'(c) + U(c)].$$



Finalmente, al considerar la derivada con respecto a  $c$  se obtiene después de algunas simplificaciones la ecuación de segundo orden lineal

$$\begin{aligned} \gamma X''(c) &= X'(c) \left[ (r - \beta - 2\gamma) \frac{U''(c)}{U'(c)} \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{U'''(c)}{U''(c)} \right] + \left( \frac{U''(c)}{U'(c)} \right)^2 [rX(c) - c]. \end{aligned} \quad (7)$$

Para resolverla requerimos inicialmente de una solución a la versión homogénea mediante la teoría clásica de ecuaciones ordinarias al hacer uso del Método de Variación de las constantes; esta solución particular está dada por

$$\begin{aligned} X(c; a) &= \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\lambda_-$  y  $\lambda_+$  verifican  $\lambda_- \lambda_+ = -r/\gamma$  y son las raíces de la ecuación  $\gamma\lambda^2 - (r - \beta - \gamma)\lambda - r = 0$  y  $a \geq 0$  que es un parámetro.

Mientras que, para el caso general de (7) la solución es

$$B(U'(c))^{\lambda_+} + \hat{B}(U'(c))^{\lambda_-} + X(c; a) \sim B(U'(c))^{\lambda_+} + X(c; a)$$

y podemos descartar el segundo sumando debido al rápido crecimiento de  $U'(c)^{\lambda_-}$  que supone la promesa de utilidad infinita, lo que evidentemente no es viable.

Obtenemos con ello

$$\begin{aligned} X(c; a, B) &= B(U'(c))^{\lambda_+} + \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\} \quad c > a, \end{aligned} \quad (8)$$

ante las elecciones  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$ , de tal manera que  $X(c, a; B)$  sea estrictamente creciente sobre  $(a, \infty)$ .

En el caso particular en que  $a = 0$  y  $U'(0) = \infty$  entonces

$$\lim_{c \rightarrow \infty} X(c, a; B) \geq \infty,$$

lo que implica

$$X(\cdot; a, B); [a, \infty) \rightarrow \{X(a; a, B), \infty\}$$

y su función inversa

$$C(\cdot; a, B); [X(a; a, B), \infty) \rightarrow [a, \infty)$$

son  $\mathcal{C}^2$

Respecto a los candidatos a estrategias óptimas obtenidos

$$c_t = C(x_t) \quad \text{y} \quad \pi = \pi_t \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \frac{U'(c_t)}{U''(c_t)C'(x_t)} \quad 0 \leq t \leq T_\xi, \quad (9)$$

donde  $T_\xi$  es el instante de bancarrota.

Como  $X(C(x)) = x$  se tienen las primeras derivadas

$$X'(C(x))C'(x) = 1 \quad \text{y} \quad X''(C(x))(C(x))^2 + X'(C(x))C''(x) = 0, \quad (10)$$

que junto con (7) proporcionan el cambio de variable

$$y_t = U'(C_t)$$

y la ecuación

$$dy_t = -(r - \beta)y_t dt - \frac{\alpha - r}{\sigma} y_t d\mathcal{B}_t, \quad (11)$$

cuya solución es

$$U'(c_t) = y_t = U'(c_0) \exp \left[ -(r - \beta + \gamma)t - \frac{\alpha - r}{\sigma} \mathcal{W}_t \right]. \quad (12)$$

Puesto que  $U$  es estrictamente cóncava tiene inversa  $I$  y el candidato a estrategia óptima es

$$c_t = I \left( U'(c_0) \exp \left[ -(r - \beta + \gamma)t - \frac{\alpha - r}{\sigma} \mathcal{B}_t \right] \right), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_\xi$$

De modo que una vez obtenido el consumo óptimo se obtiene la cartera óptima a través de la igualdad  $\hat{\pi}_t = \pi_t(\hat{c}_t)$

Si evaluamos la ejecución de los candidatos a estrategias óptimas en la utilidad total esperada

$$V_{(c), \pi(c)}(x_0) = H(c_0) = \mathbb{E}_{\gamma_0} \left[ \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} U(c_t) dt + \bar{v} e^{-\beta T_\xi} \right] \quad (13)$$

y por el Teorema 13.16 de Dynkin [Dy] afirmamos que existe  $G \in \mathcal{C}^2$ , tal que  $H(c) = G(U'(c))$ , ello conduce a inferir que  $H \in \mathcal{C}^2$  y además satisface

$$\begin{aligned} \beta H(c) &= -\frac{U'(c)}{U''(c)} \left[ r - \beta + \gamma \frac{U'(c)U'''(c)}{(U''(c))^2} \right] H'(c) \\ &+ \gamma \left( \frac{u'(c)}{u''(c)} \right)^2 H''(c) + U(c) \quad c > a. \end{aligned} \quad (14)$$

También a través de la ecuación diferencial se puede estudiar el comportamiento de la familia de soluciones de (14) a la que pertenece  $H$  y con ello podemos observar su comportamiento según varían los parámetros.

Procediendo similarmente obtenemos una solución general

$$J(c; a, A, \hat{A}) \doteq A(U'(c))^{\rho_+} + \hat{A}(U'(c))^{\rho_-} + J_0(c; a) \sim A(U'(c))^{\rho_+} + J_0(c; a),$$

pues otra vez se tiene un rápido crecimiento o promesa de utilidad infinita, por lo que se desecha ese término. Aquí la solución particular viene dada por

$$J_0(c; a) = \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\gamma(\rho_+ - \rho_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+} + \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}.$$

En estos términos, la función particular que resuelve a la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned} \beta V(x) &= \max_{c > 0, \pi} \left\{ (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c) \right\}, \\ x &> 0, \end{aligned} \quad (15)$$

es

$$V(x; a, B) \doteq J \left( C(x; a, B); a, \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right), \quad x > X(a; a, B) \quad (16)$$

mejor conocida como la función valor.

En ese mismo capítulo son analizados los modelos con restricción del consumo inactiva; es decir, si ocurre que  $C_t \geq 0$  y los modelos con restricción del consumo activa para los que dado el monto  $\bar{x}$  el consumo óptimo viene dado por

$$c = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \bar{x}, \\ C(x; 0, B) & x \geq \bar{x}, \end{cases} \quad (17)$$

donde,  $C(\bar{x}; 0, B) = 0$  y  $C(x; 0, B) > 0$  para  $x > \bar{x}$ . Ahora resolvemos la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\beta V(x) = \frac{-\gamma(V'(x))^2}{V'(x)} + [rx - I(V'(x))]V'(x) + U(I(V'(x))). \quad x > 0 \quad (18)$$

y por analogía obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(y; B) &= Ay^{\rho_+} + \frac{1}{r}I(y) \\ &- \frac{I}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{y^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_0^{I(y)} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{y^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_{I(y)}^{\infty} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \quad y > 0, \end{aligned} \quad (19)$$

y también

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(y; A) &= Ay^{\rho_+} + \frac{1}{\beta}U(I(y)) \\ &- \frac{I}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{y^{\rho_+}}{\rho_+} \int_0^{I(y)} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{y^{\rho_-}}{\rho_-} \int_{I(y)}^{\infty} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \quad y > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

siendo ahora la función valor óptimo precisamente

$$V(x) = \mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x; B); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right), \quad x > 0.$$

En este caso, las letras caligráficas corresponden de manera adecuada a las letras del caso anterior.

Al evaluar la ejecución de los candidatos a estrategias óptimas en

$$\mathcal{H}(y_0) = E_{y_0} \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} U(I(y_t)) dt + P e^{-\beta T_0} \right], \quad 0 < y_0 < \bar{y}, \quad (21)$$

obtenemos

$$\mathcal{H}(y_0) = J(I(y_0), 0, A) = \mathcal{J}(y_0; A) \quad 0 < y_0 \leq U'(0), \quad (22)$$

para una elección apropiada de  $A$ .

También tratamos a los Modelos de Aversión al Riesgo que básicamente son modelados por funciones de utilidad de la forma

$$U(c) = (c + \eta)^\delta, \quad 0 < \delta < 1, \quad \eta \geq 0, \quad (23)$$

$$U(c) = -(c + \eta)^\delta, \quad \delta < 0, \quad \eta \geq 0, \quad (24)$$

y

$$U(c) = \log(c + \eta), \quad \eta \geq 0 \text{ y } \delta = 0. \quad (25)$$

Para esos casos particulares tenemos el proceso de riqueza dado por

$$X(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0, \quad (26)$$

y unas funciones de utilidad total de la forma

$$J(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c^\delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$J(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c^\delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0, \quad \delta < 0,$$

$$J(c; 0, 0) = \frac{1}{\beta} \log c + \frac{r - \beta + \gamma}{\beta^2}. \quad c \geq 0, \quad \delta = 0,$$

así como la correspondiente función valor para cada caso que viene dada por

$$V_\delta(x) = \left( \frac{1 - \delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)} \right)^{1-\delta} x^\delta, \quad x \geq 0, \quad 0 < \delta < 1, \quad (27)$$

$$V_\delta(x) = \left( \frac{1 - \delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)} \right)^{1-\delta} x^\delta. \quad x \geq 0, \quad \delta < 0, \quad (28)$$

$$V_\delta(x) = \frac{1}{\beta} \log(\beta x) + \frac{r - \beta + \gamma}{\beta^2}, \quad x \geq 0, \quad \delta = 0. \quad (29)$$

Finalmente se ofrece una tabla con los casos posibles según las diversas características de las funciones de utilidad, precio terminal, tasa de descuento, tasa de retorno, consumo, cartera y el comportamiento a largo y corto plazo en cada situación; particularmente interesante resultan aquellas situaciones en que nuestro proceso de riqueza es conducido a la bancarrota, por supuesto con la finalidad de evitar este tipo de circunstancias en la práctica.

En el Capítulo 2 hacemos con cierta formalidad la exposición supuesta una función de utilidad arbitraria y observamos como se resuelve una ecuación de tipo parabólico retrógrada en el tiempo; ahí mismo exponemos —de manera simplificada— una estrategia técnica presentada por primera vez por J.Cvitanic y I.Karatzas [Cv-Ka], que tiene la peculiaridad y elegancia para resolver a partir de dos problemas lineales acoplados un problema no-lineal, el problema clásico de consumo/inversión con condiciones de tipo Dirichlet al infinito.

En el capítulo 2 ofrecemos también la generalización apelando únicamente a las técnicas del Cálculo Estocástico. Ahí proporcionamos una técnica elegante y sencilla para establecer la condición de admisibilidad sobre los controles  $\pi_t$  y  $C_t$  de cartera y consumo respectivamente. Esta condición se establece partiendo de

$$\mathcal{X}_t e^{-\int_0^t r(s) ds} + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} C_s ds = x + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} \pi^T(s) \sigma(s) d\widetilde{B}_s; \quad (30)$$

$$0 \leq t \leq T, \text{ c.s.}$$

En virtud de que el lado izquierdo es no negativo y el lado derecho es una martingala local, entonces se sigue (ver Dellachierie y Meyer [DeM1]) que es una supermartingala no negativa.

Por tanto, tenemos la condición de supermartingalas

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \mathcal{X}_T e^{-\int_0^T r(s) ds} + \int_0^T C_t e^{-\int_0^t r(s) ds} dt \right] \leq x, \quad (31)$$

y la condición necesaria para la admisibilidad es

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T C_t e^{-\int_0^t r(s) ds} dt \right] \leq x. \quad (32)$$

Pero la Proposición 2.2.1 nos ofrece una especie de condición suficiente, pues para cada consumo  $C$  siempre es posible encontrar un portafolios  $\pi$ , tal que  $(\pi, C)$  sea admisible para una inversión inicial  $x$ .

En particular, el modelo de los precios de las opciones que exponemos en la sección 2.2.1 es trabajado para opciones europeas (que sólo se pueden hacer líquidas en  $T$ , el día de expiración del instrumento financiero).

En ese mismo capítulo se provee una definición de instrumentos financieros generales, cuya ventaja consiste en dar al inversionista un pago  $g$  por la evolución del proceso de riqueza en el interior del intervalo temporal  $(0, T)$  y un pago terminal  $f$  en la fecha de madurez del instrumento, ambos convenientemente actualizados por la tasa de descuento  $\beta$ .

Se demuestra que un tal proceso de pago aleatorio (en vista de que dependen del proceso de consumo) existe y es finito (Lema 2.2.1 y Teorema 2.2.2) un pago máximo, que, sin lugar a dudas, es el objetivo a alcanzar por el inversionista.

En particular, el Modelo de Black Scholes es obtenido al hacer  $g \equiv 0$  y  $f = (P - q)^+$ , donde  $P$  es el precio en ejercicio del portafolios en el mercado a través de los precios de los stocks que lo componen y  $q$  es el precio preasignado del valor al día de madurez  $T$ .

Si  $P > q$  se gana, pero si  $P < q$ , entonces no se obtiene ningún beneficio, sino simplemente y como lo veremos en el capítulo 3 se ha respaldado el riesgo de los stocks que componen el portafolios.

Una fórmula integral de la solución del Modelo de Black Scholes se proporciona en

$$v(t, x) \doteq \begin{cases} x\Phi(\rho_+(T-t, x)) - qe^{-r(T-t)}\Phi(\rho_-(T-t, x)); & 0 \leq t \leq T, x \geq 0, \\ (x - q)^+ & t = T, x \geq 0 \end{cases} \quad (33)$$

Al introducir las ideas anteriores en la Teoría General del Consumo/Inversión óptimos nos fijamos como meta obtener para las utilidades totales

$$V_{\pi, C}(x) \doteq \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^s \beta(u) du} U(C_s) ds \right],$$

para alcanzar la función valor

$$V(x) = \sup_{(\pi, C)} V_{\pi, C}(x). \quad (34)$$

Debido a que  $U' : [0, \infty] \xrightarrow{\text{sobre}} [0, U'(0)]$  es estrictamente decreciente, ésta tiene una función inversa estrictamente decreciente  $I : [0, U'(0)] \xrightarrow{\text{sobre}} [0, \infty]$ . Extendemos  $I$  por cero  $I(y) = 0$  para  $y > U'(0)$ . Observe que  $I(0) = \infty$  y  $I(\infty) = 0$ . Se verifica fácilmente que

$$U(I(y)) - yI(y) \geq U(c) - yc, \quad 0 \leq c < \infty, \quad 0 < y < \infty. \quad (35)$$

Definamos la función  $\mathcal{X} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  por

$$\mathcal{X}(y) = \tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^s r(u) du} I \left( y Z_s e^{-\int_0^s (\beta(u) - r(u)) du} \right) ds \right], \quad (36)$$

$\mathcal{X}$  es continua y estrictamente decreciente y siendo  $\mathcal{Y}$  su inversa se define el proceso (Proposición 2.3.2)

$$\eta_s^* \doteq \mathcal{Y}(x) Z_s e^{-\int_0^s (\beta(u) - r(u)) du}, \quad (37)$$

obtenido a través de técnicas del Control Óptimo Estocástico para generar el consumo óptimo

$$C_s^* \doteq I(\eta_s^*), \quad (38)$$

con el que se obtiene la función valor óptimo (Teorema 2.3.1)

$$V(x) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} U(C_t^*) dt \right]. \quad (39)$$

Siguiendo el mismo procedimiento trabajamos no sólo en el instante inicial, sino que al considerar un instante arbitrario  $t$  como punto temporal de partida demostramos que esa variante verifica la ecuación Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned} Q_t(t, x) + \max_{\substack{c \geq 0 \\ \pi \in \mathbb{R}^N}} \left\{ [rx - c + (b - r\tilde{\mathbf{1}})^T \pi] Q_x(t, x) + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi\|^2 Q_{xx}(t, x) \right. \\ \left. + e^{-\beta t} U(c) \right\} = 0; \quad 0 \leq t < T, \quad 0 < x < \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

junto con la condición de contorno

$$V(t, x) \leq Q(t, x); \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (41)$$

Bajo adecuadas hipótesis la función valor  $V$  es continua y de clase  $C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$ .

Al seguir el mismo camino podemos tratar otros problemas de selección de cartera, inicialmente donde no hay consumo y que abarca una gran generalidad de funciones de utilidad para, finalmente, obtener los controles óptimos.

De manera similar trabajamos un problema con condición final suficientemente general y un caso de funciones de utilidad con forma polinómica.

En el capítulo 3 nos proponemos hacer aplicaciones prácticas (en el sentido estricto de la palabra), pues procedemos a implementar algunos de los instrumentos financieros más conocidos dentro de un ambiente de objetos orientados en *Mathematica*. Este tipo de aplicaciones tienen la intención de ser útiles en la toma de decisiones en los mercados secundarios de valores. Las frecuentes tormentas financieras a partir de la crisis de México a finales del año 1994 y la reciente crisis de los países asiáticos nos conduce a pensar que este tipo de modelos tendrán (y tienen) gran aceptación, tanto en la Teoría Matemática de las Finanzas, como en los mismos mostradores de las Bolsas de Valores. Debido a los avances tecnológicos, la información y con ella las decisiones sobre los activos financieros deben tomarse con la mayor rapidez, precisión y eficacia; es por ello que el capítulo 3 exhibe una concretización de la teoría expuesta en los dos primeros y exhibe también su alto grado de aplicabilidad.

En el capítulo 3 presentamos un verdadero (literalmente hablando) ejercicio de aplicación de la valoración de opciones en un mercado secundario, pues no nos conformamos con la teoría generada hasta el momento.

Se hace la consideración del *software* matemático actual, preferentemente aquel que manipula simbólicamente y numéricamente las fórmulas, producto de la teoría desarrollada en los capítulos precedentes. En particular, abordamos la situación más simple correspondiente al modelo *Black-Scholes* de valoración de opciones mediante la utilización de Métodos de Diseño de Objetos Orientados a través de *Mathematica*. La ventaja sobre los métodos tradicionales utilizados hoy en día es que aquéllos calculan completamente por separado los elementos del modelo, en tanto que aquí se contemplan simultáneamente todos ellos. Otra ventaja excepcional es que a través de *Mathematica* se pueden definir simbólicamente objetos que satisfacen un cierto conjunto de reglas (los instrumentos financieros definidos



en el capítulo 2) que, como vimos, poseen una serie de cualidades teóricas —que fueron descritas en su momento— y por lo tanto sería ideal contar con aproximaciones numéricas útiles en la vida real. Estos comportamientos se pueden analizar por medio de la construcción de estructuras simbólicas generales y, como es previsible, el desarrollo de nuevos objetos financieros no requiere de una nueva programación de procedimientos de valoración *ad hoc*.

Volvemos al modelo *Black–Scholes* y denotaremos por  $P$  al precio de ejercicio,  $q$  al precio preasignado,  $T$  el día de expiración y así construimos una función de pago **CallPayoff** que indica el valor de la opción en la frontera. Sin embargo, determinado el valor de la opción antes de la expiración es como puede ser estimado y reducido el riesgo al conocerse el precio corriente del stock; con ello es posible realizar proyecciones de este precio para la fecha de expiración. Generamos la función de valoración de opciones **BlackScholes** del mismo modelo *Black–Scholes* a través de una aproximación con una densidad de probabilidad lognormal. Con ella podemos calcular el valor en unidades monetarias de los stocks al emplear **BlackScholes** con argumentos numéricos. Para algunos casos concretos apreciamos una clara dependencia del valor de la opción con respecto al precio del stock y el tiempo transcurrido antes del tiempo de maduración, apreciando una notable curvatura conforme se acerca este tiempo terminal.

La aproximación al valor de la opción es de buena calidad cuando la variable de volatilidad es suficientemente grande; sin duda, es una importante herramienta en el manejo del riesgo

El parámetro más importante que afecta al valor de una opción es el precio del stock subyacente; por ello  $\frac{\partial V}{\partial P} = \delta$  es una excelente medida del riesgo para una opción, pues indica las alteraciones del precio de la opción a los cambios por unidad monetaria del precio del stock. Así *delta* constituye un parámetro de medición del riesgo contenido en una cartera. Concluimos ahí que es posible neutralizar el riesgo teórico asociado a la posesión de un stock si el respaldo en dólares a *delta* de un portafolio de opciones sobre el stock es igual a cero. Algunas otras medidas del riesgo adicionales también son consideradas como rutinas cuando se utiliza *Mathematica*, permitiendo al mismo tiempo manipular algunas peculiaridades o influencias sobre el valor de las opciones.

Construimos también un operador derivada para la función de *Black–Scholes*, incluida también *delta*. Con ella construimos una serie de gráficas que nos permiten realizar

un estudio cualitativo del modelo *Black-Scholes* y de apreciable utilidad práctica en algunos conjuntos particulares de parámetros. En la práctica lo deseable es calcular *delta*, para poder evaluar el riesgo: ello se consigue a partir de la fórmula de *Black-Scholes* que genera una expresión explícita para *delta*. En resumen, contamos con un mecanismo de evaluación en *Mathematica* que no siempre genera fórmulas simples; pueden ser simplificadas de acuerdo a los intereses de eficiencia y cálculo numérico.

Para precio bajo del stock, cuando la opción *call* está fuera del entorno del riesgo<sup>1</sup>, *delta* es virtualmente nula y ello nos dice que el valor de la opción, que también es virtualmente cero, es insensible a los cambios del precio del stock. La principal razón es que dado un incremento modesto debiéramos tener un efecto como consecuencia de que la opción debería expirar con menos valor.

Por otro lado, para precios del stock grandes, es decir, cuando la opción está dentro del entorno de riesgo *in the money* (en su valor), *delta* se aproxima a uno porque el incremento en el precio del stock peso a peso se traduce en un incremento esperado en el valor de la opción en la fecha de expiración.

Generamos también al parámetro *theta* que denota al cambio instantáneo en el valor de la opción conforme pasa el tiempo. Debido a que una opción es más valuable cuanto mayor sea el tiempo de expiración, nos permite concluir que *theta* es siempre negativo. De esta forma, el tiempo de decaimiento del valor tiende a ser más grande cuando el precio del stock está próximo al precio de ejercicio y conforme pasa el tiempo este decaimiento se hace más uniforme.

Todos estos parámetros y medidas pueden ser aplicados al portafolio entero de opciones para determinar la sensibilidad del valor del portafolio a los cambios en una o todas las variables que influyen en la fórmula.

Se propone un método que parte de los precios de las opciones para obtener numéricamente la volatilidad de una opción. Esa es una buena razón por la que la utilidad es un camino extremadamente útil para analizar las opciones. Sin embargo, algunas opciones ajenas a la circulación y otros instrumentos financieros son cotizados en términos de su volatilidad más que de su precio.

Así se incluyen otras medidas de sensibilidad del riesgo: *theta*, *kappa*, *rho*, *gamma* y la elasticidad (precio del stock)

---

<sup>1</sup>Técnicamente se dice que está *out of the money*

Sin duda, la ventaja de *Mathematica* es su facilidad en el cálculo simbólico, numérico y su capacidad para trabajar objetos autocontenidos sobre los que tiene la ventaja de ejecutar una acción o una función dependiendo del tipo de objeto sobre el que es aplicado, como si de un juego de herramientas se crean objetos y abstraen datos. Ahí representamos a las opciones como objetos y en lo que sigue explotaremos esta representación para desarrollar la tecnología de una función **Valor** que sea capaz de evaluar una variedad de opciones y otros instrumentos financieros.

Como se ha de observar, *Mathematica* no provee de un diseño, de un ambiente de objetos orientados para que las propiedades de cada instrumento financiero sean generadas automáticamente, pero sí ofrece parte de la descripción después de una primera utilización. Generamos un procedimiento para la creación de la función valor que tome a una opción como su argumento y recupere la información necesaria para aplicar la función *Black-Scholes*. Nuestro procedimiento tiene algunas limitaciones y en la última sección del tercer capítulo damos otros métodos de valoración de opciones que pueden ser aplicados a opciones en general. Para ello hacemos la valoración de opciones a través de árboles de decisión financiera, usualmente aplicadas a aquellos procesos en que las trayectorias pueden ser interrumpidas al ejecutarse la opción.

Esos métodos pueden ser aplicados a cualquier tipo de opción, en particular a valores con opciones inmersas, por ejemplo, los bonos convertibles y otros tipos de valores bajo influencia de deceso o mortalidad. De ellas son posibles otras extensiones, por ejemplo, con el propósito de abordar stocks con pagos de dividendos. Un tratamiento más detallado de esas técnicas puede ser consultado en el libro de Miller, M.R. [Mi], desarrollado originariamente en LISP.

La clave para resolver los problemas de valoración financiera son los llamados *árboles de decisión financiera*, que consisten en una generalización de los árboles de decisión utilizados en el tradicional Análisis de Decisión. Cuando son contemplados tanto los descuentos como los flujos de efectivo dentro del árbol, más que como condiciones de nodos terminales, que es por cierto uno de los caminos tradicionales para tener en cuenta las restricciones, se minimiza el monto de los cálculos requeridos para representar y evaluar el árbol de decisión que representa a una opción dada o a un instrumento financiero.

Con una opción *put* americana es muy posible que el valor del stock subyacente pueda caer suficientemente bajo, que la corriente natural del sobrepremio del precio del stock

debería hacerlo provechoso para ejercitarlo antes de su fecha de maduración. Sin embargo, un componente significativo del valor de la opción *put* podría estar asociado con el potencial para hacer un ejercicio antes del tiempo de maduración. El simple camino para modelar una opción que facilita la consideración explícita de ejercitar tempranamente es el *modelo binomial*.

Como en el modelo *Black-Scholes*, el valor de la opción es conocido como la expiración y puede ser determinado recursivamente al tomar en cuenta a valor presente los premios. La diferencia es que en cada punto en el tiempo la ventaja potencial de ejercitar la opción debería ser considerada.

Este marco moldea al proceso a través del cambio de los precios de los stocks y la opción que el poseedor de esas opciones considera como alternativa en cada punto del tiempo como un árbol de decisión financiera.

Este método a través de la valoración de cada opción podría generar un árbol de decisión diferente, sin embargo, ofrecemos una función que evalúe a cada árbol y la denominamos **TreeValue**. La conversión de un instrumento financiero a un árbol la hace la función **MakeAmerTree**. Posteriormente, trabajamos sobre un árbol de decisiones de manera clásica utilizando como pesos en cada nodo a las probabilidades asociadas a la conveniencia de la ejecución del instrumento financiero.

Finalmente, volvemos a la función **Valor** introducida al final de la sección anterior y con una noción extendida al tratamiento de opciones sobre un stock.

# Capítulo 1

## Cálculo de una solución explícita

### 1.1 Introducción

En este capítulo se expone el comportamiento óptimo del consumo e inversión de un inversor individual que desea maximizar la utilidad promedio del consumo total descontado.

Denotaremos por  $x$  a la riqueza o capital inicial de la que el inversor quiere retirar o consumir parte de sus ganancias en un tiempo continuo a la vez que va tomando decisiones acerca de su inversión. Para tal efecto, en el mercado existen  $N + 1$  tipos de valores disponibles, de los que uno de ellos no tiene riesgo (por lo tanto es determinista) con una tasa de retorno fija  $r > 0$  y con precio  $P_0(t)$ , mientras que los  $N$  restantes son opciones con riesgo y con vector de precios  $\mathbb{P}(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t))$ .

Supondremos entonces que

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = r dt \quad (1.1)$$

$$\frac{dP_i(t)}{P_i(t)} = \alpha_i dt + e_i \mathbb{D}dB^T(t) \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

donde

$\{\mathcal{B}(t); t \geq 0\}$  es un proceso de Wiener  $N$ -dimensional,

$e_i$  es un vector unitario con un 1 en la entrada  $i$ ,

$\alpha_i$  es la tasa de retorno promedio de la opción  $i$ ,

$\mathbb{D}_{N \times N}$  es tal que  $\Sigma = \mathbb{D}\mathbb{D}^T$  es definida positiva.

El inversor está interesado en un consumo específico dado por  $\{C(t); t \geq 0\}$  (por supuesto positivo) y en una cartera de inversión

$$\{\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_N(t)); \geq 0\},$$

en esta notación la  $i$ -ésima entrada  $\pi_i(t)$  es la fracción de la riqueza o capital invertido en la  $i$ -ésima opción, de esta forma la cantidad invertida en la opción sin riesgo es precisamente

$$\pi_0(t) = 1 - \sum_{i=1}^N \pi_i(t)$$

Se entiende que la cartera de inversión irrestringida significa que es posible pedir prestamos ilimitados y se permiten ventas pequeñas, lo cual, en la realidad no siempre es posible

### Observación 1.1.1

La cartera de inversión  $\pi$  y la tasa de consumo  $C$  dependen de los precios de manera no anticipativa, es decir, que una vez vistos los precios instantáneamente se decide la cartera de inversión y la tasa de consumo. Por ello, dados  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$  y  $\{\pi(t)\}_{t \geq 0}$ , los procesos de riqueza y cartera del inversor están gobernados por las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$X(0) = x \tag{1.3}$$

$$dX(t) = (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T(t)X(t)dt + (rX(t) - C(t))dt + X(t)\pi(t)\mathbb{D}dB^T(t) \tag{1.4}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \text{ y } \mathbf{1} = (1, \dots, 1),$$

donde  $(\alpha - r\mathbf{1})$  es la tasa correspondiente a las opciones con riesgo que participan en la construcción de la cartera  $\pi$ , el factor  $(rX(t) - C(t))$  corresponde a la tasa de las opciones deterministas menos la tasa de consumo de la inversión y, finalmente, el tercer sumando corresponde a la variación aleatoria del proceso cartera de inversión en la que interviene la matriz  $\mathbb{D}$ .  $\square$

Como se observará, el estado en el que la riqueza es cero significa que el inversor se encuentra en bancarrota, por ello es interesante saber el tiempo en que ésta ocurre

$$T_0 = \inf \{t \geq 0, X(t) = 0\}. \tag{1.5}$$

Existen varios aspectos relevantes respecto a la bancarrota. En nuestro modelo haremos la suposición de bancarrota cuando se alcance el valor  $P$ . No es necesario quebrar teniendo un monto de cero unidades monetarias (por ejemplo, pesos, dolares, etc.), basta con que se llegue a un monto  $P$  pesos para que el inversor se sienta en bancarrota y se retire del juego.

Por otra parte, el instante de bancarrota puede llegar ( $T_0 < \infty$ ) o no llegar ( $T_0 = \infty$ ). en el primer caso el agente recibe al ocurrir la bancarrota un pago de  $P$  pesos al tiempo  $T_0$  y el problema de decisión acaba: en el segundo caso se sigue en el sistema controlado por las correspondientes ecuaciones diferenciales estocásticas.

Introducimos las funciones de utilidad  $U$  definidas sobre  $(0, \infty)$  que satisfacen las siguientes hipótesis:

- $U$  es estrictamente creciente,
- $U$  es estrictamente cóncava,
- $U \in \mathcal{C}^3$ , y
- $U$  se puede extender a  $[0, \infty)$  definiendo el valor en el cero por

$$U(0) = \lim_{c \downarrow 0} U(c).$$

El inversor desea elegir adecuadamente

$$\{C(t)\}_{t \geq 0} \quad \text{y} \quad \{\pi(t)\}_{t \geq 0},$$

tal que se maximice el pago total esperado

$$V_{c(\cdot)\pi(\cdot)} = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T_0} e^{\beta t} U(c(t)) dt + P e^{-\beta T_0} \right], \quad (1.6)$$

donde, como se puede observar, el primer sumando es precisamente la utilidad de evolución de la inversión en la bolsa, mientras no ocurra la bancarrota, penalizada por el factor de descuento  $e^{\beta t}$ , por lo que  $\beta > 0$  corresponde a la tasa de descuento; pero como esta evolución únicamente se verifica en todos los instantes mientras no ocurra la bancarrota, entonces se integra desde 0 a  $T_0$ . De ocurrir eventualmente la bancarrota, entonces existe un coste final que se debe hacer y consiste en pagar al corredor de bolsa  $P$  penalizados por el correspondiente factor de descuento  $e^{\beta t}$  hasta  $T_0$ . Como se puede observar, se

trabaja sobre procesos aleatorios lo que indica que la expresión dentro de los corchetes es nuevamente una variable aleatoria (v.a.), por lo que es conveniente saber en promedio el comportamiento del fenómeno analizado, es decir, se considera el valor esperado relativo al estado inicial  $x$ .

La igualdad (1.6) es mejor conocida como *Ecuación de Bellman*. Denominaremos *coste interior* al primer sumando, *coste de frontera* al segundo sumando y *coste total* al valor esperado de la suma de estos pagos. El criterio de optimización indica que se desea maximizar el coste total, es decir, maximizar la utilidad recibida de la inversión en una cierta cartera que evoluciona bajo las decisiones o políticas que el inversor adopte; en suma que se desea maximizar sobre todas las posibles decisiones que se le ofrecen al inversor.

### Observación 1.1.2

Observe que si se define  $P = U(0)/\beta$ , equivaldría a continuar el problema indefinidamente después de la bancarrota permitiendo un consumo de la inversión de cero<sup>1</sup>. El valor  $P$  debería ser llamado el pago natural y debería jugar un papel importante en el modelo.  $\square$

Existen muchas variantes del problema de consumo/inversión. De hecho, las conclusiones varían de la ecuación de Bellman planteada en cada caso; por ejemplo, algunos autores no consideran la naturaleza de las políticas óptimas y algunos otros tampoco la posibilidad de bancarrota. Bajo ciertas políticas óptimas la restricción del consumo no es activa y la bancarrota no puede ocurrir. Es suficiente, por ejemplo, suponer que  $U'(0) = \infty$  y así se alcanza sólo para un conjunto de valores de  $P$ . Ello muestra que la posibilidad de bancarrota no está ligada a  $U'(0)$ ; la bancarrota ocurre con probabilidad positiva si y sólo si  $P > U(0)/\beta$ .

En este primer capítulo nuestro objetivo principal es calcular explícitamente la función valor

$$V^+(x) = \sup_{c(\cdot)\pi(\cdot)} V_{c(\cdot)\pi(\cdot)}(x),$$

para a continuación utilizar esta función y precisar las condiciones bajo las que existe una estrategia, política o decisión óptima para el modelo de consumo/inversión.

Muchos trabajos anteriores presuponen que dicha función valor es  $\mathcal{C}^2$  y satisface la ecuación de Bellman, lo cual no siempre es así. Algunos autores demuestran esto, entre

---

<sup>1</sup> Como se puede observar es precisamente un problema bien conocido de amortización el que se obtiene.



otros P.L.Lions [LI], [LII] y [LIII] y Fleming y Rishel [Fl-Ri]. Como no siempre es así, hay que buscar un marco más general donde la función valor resuelva las ecuaciones; por ello se generaliza a ecuaciones *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) en el sentido de las soluciones de la viscosidad (ver esas referencias).

## 1.2 Resultados Preliminares e Hipótesis

El proceso de riqueza está gobernado por (1.4), se denota la matriz definida positiva por  $\Sigma = \mathbb{D}\mathbb{D}^T$  y el cumplimiento o ejecución de una estrategia por (1.6), donde  $U$  es una función con valores reales estrictamente creciente, estrictamente cóncava y  $\mathcal{C}^3(0, \infty)$ , con extensión a  $[0, \infty)$  definida por

$$U(0) = \lim_{c \downarrow 0} U(c);$$

$$U'(0) = \lim_{c \downarrow 0} U'(c);$$

y de hecho permitimos que  $U(0) = -\infty$  o  $U'(0) = -\infty$ .

Las tasas: de descuento  $\beta > 0$ , de retorno de la opción determinista  $r > 0$  y de retorno de las opciones aleatorias  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  son estrictamente positivas.

Exigimos una condición de *sublinealidad* a la función de utilidad  $U$ , es decir,

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{U(c)}{c} = 0; \quad (1.7)$$

v equivalentemente que

$$\lim_{c \downarrow 0} U'(c) = 0. \quad (1.8)$$

Y definimos la *constante de estandarización* de la cartera de inversión mediante

$$\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - r\mathbf{1})\Sigma^{-1}(\alpha - r\mathbf{1})^T, \quad (1.9)$$

que nos conduce a considerar la ecuación

$$\gamma\lambda^2 - (r - \beta - \gamma)\lambda - r = 0, \quad (1.10)$$

que, cabe hacer la aclaración, es obtenida de la estandarización de la ecuación de Bellman y un posterior cálculo del polinomio característico asociado. Por tanto, se tienen los siguientes casos:

Si  $\gamma > 0$  la ecuación tiene soluciones

$$\lambda_- < -1 \quad \text{y} \quad \lambda_+ > 0. \quad (1.11)$$

Si  $\gamma = 0$  entonces  $\lambda_- = \frac{-r}{(r-\beta)}$  es negativa y es solución de (1.10). Cuando  $\lambda_-$  es definido como antes entonces supondremos

$$\int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} < \infty \quad \forall c > 0 \quad (1.12)$$

que es una condición más fuerte, en principio que (1.8). La suposición (1.12) falla en el modelo HARA con una función valor infinita, pero, sin embargo, es más débil que la condición de Merton que asegura que la función valor es finita.

Bajo las suposiciones técnicas antes mencionadas para la cartera de inversión y para el consumo de riqueza  $\{\pi(t)\}_{t \geq 0}$  y  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$  se recuerda que la función coste total viene dada por (1.6). Por tanto, según el criterio de optimización, estamos interesados en caracterizar a la *función valor*.

La *función valor* se define de este modo como

$$V^*(x) = \sup_{c(\cdot) \pi(\cdot)} V_{c(\cdot) \pi(\cdot)}(x), \quad x \geq 0, \quad (1.13)$$

mientras que sea finita sobre  $x > 0$ .

El modelo que nos interesa cumple la siguiente propiedad

$$\frac{1}{\beta} U(0) \leq P < \frac{1}{\beta} \lim_{c \rightarrow \infty} U(c). \quad (1.14)$$

Es decir, estamos por arriba del modelo de amortización, pero por abajo de la inversión con riesgo y horizonte infinito. Las razones para considerar esta suposición son las siguientes:

a) Suponer

$$P \geq \beta^{-1} \lim_{c \rightarrow \infty} U(c)$$

significa que se debería consumir la inversión rápidamente hasta llegar a la bancarrota y por ello la función valor sería idénticamente igual a  $P$ . No existe en este caso una estrategia óptima; ello es debido a que la bancarrota instantánea no es de nuestro interés.

b) Si  $P < U(0)/\beta$  estaríamos infringiendo el pago natural  $U(0)/\beta$  que se debería dar al corredor al llegar a la bancarrota.  $P$  debería comportarse como pago natural  $U(0)/\beta$ .

Deberíamos ver que este pago no nos da nunca un resultado de bancarrota; de hecho indica que ni siquiera podemos pagar al corredor en caso de tener una bancarrota.

La expresión para  $V^*$  es una mera abstracción en este momento. Sin embargo, consideraremos que si  $\gamma > 0$ , existen dos casos  $\alpha - r\mathbf{1} \neq 0$  y  $\alpha - r\mathbf{1} = 0$ . El último caso indica que las tasas de retorno entre las opciones con riesgo y la opción sin riesgo coinciden (lo cual pesa evidentemente en el ánimo del inversor para quedarse siempre con opciones sin riesgo). Este caso será analizado en la sección 1.18.

### 1.3 Conclusiones

**Primera:** Si  $P = \frac{U(0)}{\beta}$  y  $U'(0) = \infty$ , el consumo óptimo nunca es cero, pero está acotada por él y el proceso de riqueza óptimo no conduce a la bancarrota ( ver 1.11 Teorema 1.12.2).

**Segunda:** Si  $P > \frac{U(0)}{\beta}$  y  $U'(0) = \infty$ , el consumo óptimo está acotado inferiormente por una constante positiva  $a$  (Teoremas 1.12.1 y 1.13.1); con ello el proceso de riqueza conduce a la bancarrota con probabilidad positiva. Esta probabilidad de bancarrota es uno si y solo si  $\beta \geq r + \gamma$  (Observación 1.12.1).

**Tercera:** Si  $U'(0)$  es finita y

$$\frac{1}{\beta}U(0) \leq P < P^* = \frac{1}{\beta}U(0) - \frac{(U(0))^{\lambda_-+1}}{\beta\lambda_-} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}, \quad (1.15)$$

entonces para bajos niveles de riqueza el consumo óptimo es idénticamente nulo; es decir, el inversor no puede consumir como él desearía hacerlo. Si  $P = U(0)/\beta$ , la bancarrota no ocurrirá, pero si por contra ocurre que  $P > U(0)/\beta$ , la bancarrota ocurre con probabilidad positiva y es igual a uno si y sólo si  $\beta \geq r + \gamma$ , como lo veremos en la sección 1.14.

**Cuarta:** Si  $U'(0)$  es finita y  $P \geq P^*$ , el consumo óptimo nunca es nulo y está acotado inferiormente todo el tiempo por cero si y sólo si  $P > P^*$  (Teorema 1.13.2). Existe además probabilidad positiva de bancarrota y es igual a uno si y sólo si  $\beta \geq r + \gamma$  (ver Observación 1.13.1).

## 1.4 Políticas o estrategias admisibles.

Nuevamente la tasa de consumo se denota por el proceso  $\{C(t)\}_{t \geq 0}$  y  $\{n_i(t)\}_{t \geq 0}$  que es el número de acciones  $i = 1, \dots, N$  con precios  $P_i(t)$  gobernados por (1.1) y (1.2). La inversión en acciones al tiempo  $t$  de la riqueza queda descrita por

$$x(t) = \sum_{i=0}^N n_i(t)P_i(t), \quad (1.16)$$

que se considera inicialmente en tiempos discretos  $t-h$ ,  $t$  y  $t+h$  y los niveles de consumo son constantes sobre esos intervalos, por lo que tenemos

$$x(t^-) = \sum_{i=0}^N n_i(t-h)P_i(t) = \sum_{i=0}^N n_i(t-h)P_i(t) + c(t)h = x(t) + c(t)h, \quad (1.17)$$

la riqueza invertida justamente antes del tiempo  $t$ . La inversión (1.17) establece el volumen de acciones al tiempo  $t$  que es usado para financiar el consumo durante el tiempo  $[t, t+h)$ .

Por supuesto, a partir de (1.16) y (1.17) podemos obtener el incremento de la riqueza pasado un tiempo  $h$  a partir del que podemos extraer un volumen  $C(t)$  de consumo:

$$x(t) - x(t-h) = \sum_{i=0}^N n_i(t-h)[P_i(t) - P_i(t-h)] - c(t)h; \quad (1.18)$$

sin embargo, en vista de que el fenómeno tiene lugar en tiempo continuo adoptamos el análogo continuo de (1.18):

$$dx(t) = \sum_{i=0}^N n_i(t)dP_i(t) - c(t)dt \quad (1.19)$$

Los cambios y variaciones de la riqueza se deben únicamente a las ganancias del capital de los cambios del precio en las acciones y al consumo, pero estas variaciones de precio ocurren independientemente en las diferentes acciones (cada tipo de acciones sube o baja independientemente o adquieren popularidad entre los corredores también de forma independiente), por ello es necesario detallar el peso en la cartera de cada una de ellas. De este modo

$$\pi_i(t) = \frac{n_i(t)P_i(t)}{x(t)}$$

es la fracción de la riqueza invertida en la acción  $i$ . Por lo tanto, un uso directo de (1.1), (1.2) y (1.19) proporcionan a (1.4).

Partiremos ahora desde (1.3) y (1.4) para formular el modelo.

### Observación 1.4.1

En nuestro análisis el proceso  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso browniano N-dimensional sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  adaptado a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ . El proceso  $\{C_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de consumo admisible que satisface casi seguramente

$$\int_0^t C_s ds < \infty \quad t \geq 0 \quad (1.20)$$

y el proceso  $\{\pi_t\}_{t \geq 0}$  es aleatorio con tiempo de parada definido por

$$T(\pi) = \sup \left\{ t \geq 0, \int_0^t \pi_s \Sigma \pi_s^T ds < \infty \right\}; \quad (1.21)$$

con  $c$  y  $\pi$  podemos obtener una solución para (1.3) y (1.4) durante el período temporal  $0 \leq t < T(\pi)$ . Ello se hace como sigue

$$x_t \doteq e^{z_t} \left\{ x - \int_0^t c_s e^{-z_s} ds \right\} \quad 0 \leq t < T(\pi), \quad (1.22)$$

donde

$$z_t = \int_0^t \left\{ (\alpha - r \mathbf{1}) \pi_s^T + r - \frac{1}{2} \pi_s \Sigma \pi_s^T \right\} + \int_0^t \pi_s \mathbb{D}d\mathcal{B}_s^T \quad 0 \leq t < T(\pi) \quad (1.23)$$

y la integral de Ito está definida, puesto que

$$\int_0^t \pi_s \Sigma \pi_s^T ds < \infty \quad \text{casi seguramente.}$$

Nos interesa particularmente el tiempo de bancarrota dado por (1.5).

Para cada  $x > 0$  llamamos una estrategia admisible en  $x$  al par de procesos de consumo e inversión  $\{c_t, \pi_t\}_{t \geq 0}$ . Pueden ocurrir los siguientes casos:  $T(\pi) = \infty$ ,  $T_0 < T(\pi)$  o bien  $\lim_{t \uparrow T(\pi)} x_t = 0$ . En todos los casos esto asegura que  $T_0 \leq T(\pi)$ .

Observe que el supremo en (1.13) es tomado sobre todos los pares  $c(\cdot), \pi(\cdot)$  de procesos de consumo e inversión admisibles en  $x$  para los cuales  $V_{c(\cdot), \pi(\cdot)}(x)$  está definido por (1.6); es decir, la integral y el valor esperado se supone que están bien definidos.

Por otra parte, (1.4) es una ecuación diferencial estocástica con coeficientes aleatorios, que en vista de las condiciones anteriores tiene una única solución y además viene dada por (1.22) y (1.23), al menos antes del tiempo  $T_0$ . Esta solución, como se puede observar, es un proceso estocástico. De (1.14) se infiere que existe un  $\hat{c} > 0$  para el que  $U(\hat{c}) > \beta P$ , entonces el par  $c_t \equiv \hat{c}$  y  $\pi \equiv 0$  es admisible para cualquier  $x > 0$ , lo que nos dice que  $V_{c(\cdot), \pi(\cdot)} > P$  para todas las estrategias, en particular, para la óptima se tiene que  $V^*(x) > P$  para  $x > 0$ , por supuesto, siempre que  $V^*(0) = P$ .  $\square$

## 1.5 Construcción de la ecuación de Bellman

El resultado principal de esta sección es el siguiente

**Teorema 1.5.1** *Sea  $P$  un número finito,  $V : (0, \infty) \rightarrow (P, \infty)$  de clase  $C^2$ , tal que satisface la ecuación de Bellman*

$$\begin{cases} \beta V(x) = \max_{c>0, \pi} \left\{ (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2}\pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c) \right\}, \\ x > 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Si  $U(0)$  es finita, entonces  $V(x) \geq V^*(x)$ , para  $x > 0$ .

### Demostración:

La demostración es una variante de la ofrecida en la literatura clásica y consiste en considerar para cada riqueza inicial  $x > 0$  controles admisibles  $c(\cdot)$  y  $\pi(\cdot)$ . Elegimos los estados  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$ , tales que  $0 < \xi_1 < x < \xi_2$  y definimos el primer tiempo de alcance de la volatilidad a la constante  $n$  como

$$S_n = \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^t \pi_s \Sigma \pi_s^T ds = n \right\}$$

y al utilizar (1.24) junto con la regla de diferenciación de Ito nos permite generar la estimación

$$\begin{aligned} & \int_0^{T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n} e^{-\beta t} U(c_t) dt \\ & \leq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n} e^{-\beta t} [\beta V(x_t) - (\alpha - r\mathbf{1})\pi_t^T x_t V'(x_t) - (rx_t - c_t)V'(x_t) + \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}\pi_t \Sigma \pi_t^T x_t^2 V''(x_t)] dt \right] \\ & = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n} [-d(e^{-\beta t} V(x_t)) + e^{-\beta t} x_t V'(x_t) \pi_t Dd\mathcal{B}_t^x] \right] \\ & = -\mathbb{E}_x \left[ \exp(-\beta (T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n)) V(x (T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n)) \right] + V(x). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ya que  $U(0)$  es finito, entonces se reescribe también como

$$V(x) - \frac{1}{\beta} U(0) \geq \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n} e^{-\beta t} [U(c_t) - U(0)] dt \right]$$

$$+E_x \left[ \exp \left( -\beta \left( T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \right) \right) \left[ V \left( x \left( T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \right) \right) - \frac{1}{\beta} U(0) \right] \right].$$

Si nos basamos en las hipótesis de las estrategias admisibles y al hacer tender  $\xi_1 \downarrow 0$ ,  $\xi_2 \downarrow \infty$  y  $n \downarrow \infty$ , de tal modo que  $T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \uparrow T_0$  casi seguramente (brevemente denotada por c.s.) por el Teorema de convergencia monótona y ya que  $U(c_t) - U(0)$  es una cantidad no negativa, entonces el primer valor esperado converge a

$$E_x \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} [U(c_t) - U(0)] dt \right].$$

Por otra parte, (1.14) nos permite obtener la desigualdad

$$V \left( x \left( T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \right) \right) - \frac{1}{\beta} U(0) \geq P - \frac{1}{\beta} U(0) \geq 0.$$

Por lo tanto, al pasar al límite ( $\xi_1 \downarrow 0$ ,  $\xi_2 \downarrow \infty$  y  $n \downarrow \infty$  de tal modo que  $T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \uparrow T_0$ ) y por el lema de Fatou se obtiene también

$$\begin{aligned} \lim E_x \left[ \exp \left( -\beta \left( T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \right) \right) \left[ V \left( x \left( T^{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n \right) \right) - \frac{1}{\beta} U(0) \right] \right] \\ \geq E_x \left[ e^{-\beta T_0} \left( P - \frac{1}{\beta} U(0) \right) \right], \end{aligned}$$

y concluimos al dar una cota inferior

$$\begin{aligned} V(x) - \frac{1}{\beta} U(0) &\geq E_x \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} U(c_t) dt + P e^{-\beta T_0} \right] - \frac{1}{\beta} U(0) \\ &= V_{c(\cdot), \pi(\cdot)}(x) - \frac{1}{\beta} U(0), \end{aligned}$$

para después simplemente minimizar sobre los controles para obtener el resultado.  $\square$

### Observación 1.5.1

Como se puede corroborar, si  $U(0) = -\infty$ , entonces el integrando del lado izquierdo de (1.25) podría ser no acotado como en el caso anterior. Además, si se tiene

$$E_x \int_0^{T_0} e^{-\beta t} U^+(c_t) dt < \infty, \quad (1.26)$$

donde  $U^+ = \max\{0, U\}$  y  $U^- = \min\{0, -U\}$ , entonces (1.25) vale y utilizando el Teorema de Convergencia Monótona sobre las integrales

$$\int_0^{T_{\xi_1} \wedge T_{\xi_2} \wedge S_n} e^{-\beta t} U^\mp(c_t) dt$$

nos permite concluir que  $V(x) \geq V_{c(\cdot), \pi(\cdot)}(x)$ . Sin embargo, si  $V$  satisface las hipótesis del Teorema 1.5.1, entonces  $P$  es finito y (1.26) es válido para cada par admisible  $c(\cdot), \pi(\cdot)$  y, por tanto,  $V(x) \geq V^*(x)$  para toda  $x > 0$  cuando  $U(0) = -\infty$ .  $\square$

## 1.6 Modelo reducido: Teorema de fondos mutualistas.

Supongamos que  $\gamma$  estrictamente positiva definido por (1.9) por el momento y elijamos constantes  $\alpha$  y  $\sigma > 0$ , tales que

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2}, \quad (1.27)$$

entonces se define el modelo reducido como aquél en el que únicamente tenemos una opción (con riesgo con tasa media de retorno  $\alpha$  y varianza  $\sigma^2$ ) y una opción determinista. En este caso la ecuación de riqueza adopta la forma

$$\hat{x}_0 = x \quad (1.28)$$

$$d\hat{x}(t) = (\alpha - r\mathbf{1})\hat{\pi}^T(t)\hat{x}(t)dt + (r\hat{x}(t) - \tilde{c}(t))dt + \hat{x}(t)\hat{\pi}(t)Dd\hat{B}^T(t) \quad (1.29)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad \text{y} \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1),$$

en donde  $\{\hat{B}_t\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Wiener unidimensional y  $\{\hat{\pi}_t\}_{t \geq 0}$  es la fracción de la riqueza invertida en la opción de riesgo al tiempo  $t$ . En este caso la ecuación de Bellman equivalente a (1.24) es

$$\beta V(x) = \max_{c > 0, \pi} \left\{ (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) + \frac{1}{2}\pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c) \right\},$$

$$x > 0. \quad (1.30)$$

Requerimos, por tanto, de maximizar la estrategia a seguir en las carteras de inversión. En otras palabras, la parte interior de las llaves debe maximizarse por métodos conocidos. En particular, al hacer

$$\Psi(x) = (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) + \frac{1}{2}\pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c)$$

se considera entonces

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \pi} = 0$$

y es posible verificar fácilmente que alcanza un máximo en

$$\pi = \frac{-(\alpha - r)x V''(x)}{\sigma^2 x^2 V''(x)}.$$



En vista de que éste es el óptimo lo denotaremos por  $\hat{\pi}$  y la función valor se obtiene una vez conocida esta estrategia (la cartera de inversión). Por otra parte, el estado del proceso al tiempo  $t$  se instala también al seguir la misma estrategia, por esa razón la anterior igualdad se reescribe como

$$\pi = \frac{-\hat{V}'(\hat{x}_t) \alpha - r}{\hat{x} \hat{V}''(\hat{x}_t) \sigma^2}. \quad (1.31)$$

La función asociada es

$$\hat{V}(x) = E_x \left[ \int_0^{\hat{T}_0} e^{-\beta t} U(\hat{c}_t) dt + P e^{-\beta \hat{T}_0} \right], \quad (1.32)$$

donde en este caso  $\hat{T}_0$  denota el primer instante en el que ocurre la bancarrota para esta estrategia, i.e.

$$\hat{T}_0 = \inf \{t \geq 0; \hat{x}_t = 0\}.$$

Aquí  $\hat{v}$  es la función valor y el par  $\{\hat{c}_t, \hat{\pi}_t\}_{t \geq 0}$  es una estrategia óptima para el modelo reducido.

En general bajo las líneas anteriores se puede obtener la estrategia óptima en el caso general:

$$\pi = \frac{-\hat{V}'(x)}{x \hat{V}''(x)} (\alpha - r \mathbf{1}) \Sigma^{-1},$$

que puede ser comparada con (1.31) Para  $x > 0$  deberíamos definir una estrategia de consumo/inversión en el modelo no reducido por

$$c_t = \hat{c}_t \quad (1.33)$$

$$\pi = \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r \mathbf{1}) \sigma^{-1}. \quad (1.34)$$

Precisamente en este modelo no reducido, si sustituimos esta estrategia en (1.4) y utilizamos (1.9) y (1.27), obtendremos

$$x_0 = r \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\alpha - r) \hat{\pi}^T(t) x(t) dt + (r x(t) - \hat{c}(t)) dt \\ &+ x(t) \hat{\pi}(t) \sigma d\hat{B}(t), \end{aligned} \quad (1.36)$$

donde

$$\hat{B}_t \doteq \frac{\sigma}{\alpha - r} (\alpha - r \mathbf{1}) \Sigma^{-1} \mathbb{D} \mathcal{B}_t^T$$

es un proceso de Wiener estándar.

### Observación 1.6.1

En efecto, consideremos la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\alpha - r\mathbf{1}) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right]^T x(t) dt \\ &\quad + (rx(t) - c(t)) dt + x(t) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right] \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t) \end{aligned}$$

y después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} &= (\alpha - r\mathbf{1}) \left[ (\Sigma^{-1})^T (\alpha - r\mathbf{1})^T \hat{\pi}_t^T \frac{\sigma^2}{\alpha - r} \right] x(t) dt + \\ &\quad + (rx(t) - c(t)) dt + x(t) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right] \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t) \\ &= \left[ \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \hat{\pi}_t^T \frac{\sigma^2}{(\alpha - r)} \right] x(t) dt + (rx(t) - c(t)) dt \\ &\quad + x(t) \left[ \hat{\pi}_t^T \frac{\sigma^2}{(\alpha - r)} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right] \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t) \\ &= (\alpha - r) \hat{\pi}_t x(t) dt + (rx(t) - c(t)) dt + x(t) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right] \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t) \\ &= (\alpha - r) \hat{\pi}_t x(t) dt + (rx(t) - \hat{c}(t)) dt + x(t) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \right] \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t). \end{aligned}$$

Por otra parte, es obvio que  $\sigma^2 \Sigma^{-1} = \sigma$ , pues  $\sigma \sigma^T = \Sigma$ , por lo que el modelo reducido puede ser reescrito a través de la igualdad

$$dx(t) = (\alpha - r) \hat{\pi}_t x(t) dt + (rx(t) - \hat{c}(t)) dt + x(t) \hat{\pi}_t \sigma d\mathcal{B}(t)$$

de ahí se obtiene (1.36). Definimos al último sumando como

$$x(t) \left[ \hat{\pi}_t \frac{\sigma^2}{\alpha - r} (\alpha - r\mathbf{1}) \Sigma^{-1} \mathbb{D}d\mathcal{B}^T(t) \right],$$

puesto que el factor aleatorio está caracterizado por

$$x(t) \hat{\pi}_t \sigma_1 d\mathcal{B}(t),$$

donde

$$\sigma_1 = \frac{\sigma^2}{\alpha - r}.$$

Sin pérdida de generalidad la seguiremos denotando simplemente por  $\sigma$ .

Por ello tenemos

$$B_t = \frac{\sigma}{\alpha - r} (\alpha - r \mathbf{1})^{-1} \Sigma \text{IDB}_t^T$$

y esto es un proceso browniano estándar pues  $B$  es proceso browniano.  $\square$

Por otra parte, comparando (1.35)-(1.36) con (1.28)-(1.30) se concluye que  $\{\hat{X}_t\}_{t \geq 0}$  y  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  son equivalentes en distribución y nuevamente desde (1.32) obtenemos la función valor

$$\hat{V}(x) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} U(\hat{c}_t) dt + P e^{-\beta T_0} \right] = V_{c(\cdot)\pi(\cdot)}(x), \quad (1.37)$$

es decir, los tiempos de bancarrota coinciden en probabilidad con

$$T_0 = \inf \{t \geq 0 ; x(t) = 0\}.$$

De (1.37) se observa que la función valor  $V^*$  para el modelo no reducido domina a  $\hat{V}$ , es decir:

$$V^*(x) \geq \hat{V}(x) \quad x \geq 0. \quad (1.38)$$

Distinguiamos las situaciones que podrían ocurrir:

- a) Si  $P > -\infty$  y  $U(0) > -\infty$ , entonces por el teorema 1.5.1 ( $\hat{V} \geq V^*$ ) implica que  $\hat{V} = V^*$  y hemos resuelto el problema no reducido en este caso.
- b) Si  $U(0) = -\infty$  y  $P > -\infty$ , entonces se tiene que  $U(c) \leq 0$  para  $c \geq 0$  o de otro modo podemos encontrar otra función de utilidad  $U_1$ , tal que  $U_1(c) = U(c)$  para  $c \geq c_1$  y  $U_1(c) \geq U^+(c)$  para  $c \geq 0$  y  $U_1(0) > -\infty$ . Con la función valor  $\hat{V}_1$  y  $V_1^*$ , ambos correspondientes a  $U_1$ , de la misma manera que  $\hat{V}$  a  $V^*$  corresponde a  $U$ , tenemos  $V_1^*(x) = \hat{V}_1(x) < \infty$ , aplicando la Observación 1.5.1 se obtiene nuevamente que  $\hat{V} = V^*$ .
- c) Si  $U(0) = -\infty$  y  $P = -\infty$ . En este caso consideraremos una sucesión de números negativos decreciente a  $-\infty$  y construiremos las funciones valor correspondientes, digamos  $\hat{V}_n$  y  $V_n^*$ , correspondientes al pago  $P_n$ , de tal manera que  $\hat{V}$  y  $V^*$  son las correspondientes funciones valor del modelo con pago  $P = -\infty$ . Tenemos entonces que  $\hat{V}_n = V_n^* \geq V^*$ . Por el Teorema 1.12.2 se sigue que el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{V}_n = \hat{V}$ , tal que  $\hat{V} \geq V^*$ .

Conjuntamente con todo lo anterior, (1.38) muestra que en este caso la solución al problema reducido proporciona también una solución al problema no reducido.

Un caso particularmente interesante ocurre cuando  $\gamma = 0$ , es decir  $\alpha = r \mathbf{1}$ , la tasa de retorno de opciones con riesgo es igual a la tasa de opciones sin riesgo. El inversor psicológicamente prefiere en cualquier caso las opciones sin riesgo (pues no hay peligro de

perder su inversión): en este caso cualquiera que sea el conjunto de estrategias admisibles se tiene que

$$\pi_2(t) \equiv \pi_3(t) \equiv \dots \equiv \pi_N(t) \equiv 0.$$

El problema de maximización para este tipo de estrategias fue resuelto en [Le-Se-Sh], una función valor óptima  $\hat{V}$  fue también obtenida y claramente satisface que  $\hat{V} \leq V^*$ , donde  $V^*$  es el resultado de la maximización sobre todas las estrategias admisibles y la versión multidimensional del Teorema 5 de [Le-Se-Sh] puede emplearse para demostrar que  $\hat{V} \geq V^*$ . Cuando  $\alpha = r\mathbf{1}$ , las opciones con riesgo son utilizadas en el modelo únicamente para conducir la riqueza a ser invertida en carteras con opciones de bajo riesgo para obtener  $x_\infty$ . De hecho sólo sirven para formar las carteras exclusivamente con opciones sin riesgo, mas no para controlar aquellas carteras con riesgo.

## 1.7 Solución a la ecuación Bellman: parte I.

Nuevamente consideremos una opción con riesgo y la ecuación diferencial estocástica

$$x_0 = x \tag{1.39}$$

$$dx(t) = (\alpha - r)\pi(t)x(t)dt + (rx(t) - c(t))dt + x(t)\pi(t)\sigma dB(t). \tag{1.40}$$

Entonces vamos a considerar básicamente el problema  $\alpha \neq r$ , debido a que el problema con igualdad en las tasas de retorno entre opciones con riesgo y opciones sin riesgo ya fue tratado en [Le-Se-Sh]. Heurísticamente, utilizando la ecuación de Bellman, se puede descubrir la clase de funciones o estrategias de tipo *feedback* para la riqueza y el consumo. En la sección posterior trabajaremos a fondo en esta clase de estrategias, sin embargo, en la presente nos concentraremos en las condiciones necesarias para la existencia de una estrategia óptima. Esta sección es muy intuitiva y se generalizará posteriormente. Para abordar la ecuación (1.30) es necesario suponer que  $V'' < 0$  y con ello podemos obtener una forma explícita de esta función. En realidad, deberíamos verificar esto (i.e. que  $V'' < 0$ ) de manera formal.

De suponer que  $V'' < 0$ , la maximización en  $\pi$  en (1.30) está dada por

$$\pi = \frac{-\hat{V}'(x) (\alpha - r)}{r\hat{V}''(x) \sigma^2}, \tag{1.41}$$

con lo que la ecuación de Bellman se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \beta V(x) &= \max_{c \geq 0} \max_x \left[ (\alpha - r\mathbf{1})\pi^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}\pi \Sigma \pi^T x^2 V''(x) + U(c) \right] \\
 &= \max_{c \geq 0} \left[ (\alpha - r\mathbf{1})\hat{\pi}^T x V'(x) + (rx - c)V'(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}\hat{\pi} \Sigma \hat{\pi}^T x^2 V''(x) + U(c) \right] \\
 &= -\frac{(\alpha - r)^2 V'(x)}{\sigma^2 x V''(x)} x V'(x) + \frac{1}{2} \frac{(\alpha - r)^2 [V'(x)]^2}{\sigma^4 x^2 [V''(x)]^2} \sigma^2 x^2 V''(x) \\
 &+ \max_{c \geq 0} [(rx - c)V'(x) + U(c)] \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{es precisamente } \gamma \\
 &= -\frac{((\alpha - r)V'(x))^2}{\sigma^2 x V''(x) x V'(x)} + \frac{1}{2} \frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \frac{[V'(x)]^2}{V''(x)} \\
 &+ \underbrace{\max_{c \geq 0} [(rx - c)V'(x) + U(c)]}_{\text{hay que maximizar en } c} \tag{1.42}
 \end{aligned}$$

Al abordar la maximización sobre  $c$  del último sumando se obtiene claramente que

$$V'(x) = U'(c),$$

pero la restricción  $c \geq 0$  aún no la tenemos atada. Para ello consideraremos que el consumo depende del estado en que se encuentra el proceso de inversión  $c = C(x)$  (el consumo de la inversión está sujeto a la situación de la inversión; si ésta produce muchas utilidades, entonces es posible sacar un consumo muy alto), que además debe satisfacer

$$V'(x) = U'(c) = U'(C(x)). \tag{1.43}$$

En estas condiciones debemos maximizar en  $c$ . La estrategia es utilizar la regla de la cadena y diferenciar respecto a la variable  $x$ :

$$V''(x) = U''(C(x))C'(x).$$

Por otra parte, observe que  $\pi$  es una función que depende de  $V'$  y  $V''$ , así que al sustituir las anteriores igualdades en (1.41) se obtiene

$$\pi = \frac{-(\alpha - r)}{\sigma^2 x} \frac{U'(C(x))}{U''(C(x))C'(x)} \tag{1.44}$$

y así quitamos la referencia a la función desconocida  $V$ . Esto ayuda a determinar el consumo  $C(\cdot)$ , que, además, si se supone que tiene función inversa  $\mathcal{X}(\cdot)$  nos permite reescribir a (1.42).

**Observación 1.7.1** Si  $\mathcal{X}(c) = x$  y  $C(x) = c$ , entonces

$$[C(\mathcal{X}(c))]' = C'(\mathcal{X}(c))\mathcal{X}'(c) = 1.$$

o bien

$$C'(x) = C'(\mathcal{X}(c)) = \frac{1}{\mathcal{X}'(c)}.$$

Así se obtiene (1.42)

$$\begin{aligned} & -\frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \frac{(V'(x))^2}{V''(x)} + (r\mathcal{X}(c) - c)U'(c) + U(c) \\ = & -\frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \frac{(U'(x))^2}{U''(C(x))C'(x)} + (r\mathcal{X}(c) - c)U'(c) + U(c) \\ = & -\frac{(\alpha - r)^2}{\sigma^2} \frac{(U'(x))^2}{U''(C(x))} \mathcal{X}'(c) + \overbrace{[(r\mathcal{X}(c) - c)U'(c) + U(c)]}^{\text{le quitamos el 'máximo' pues ya se ha maximizado}}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

En resumen

$$\beta V(\mathcal{X}(c)) = -\gamma \frac{(U'(x))^2}{U''(C(x))} \mathcal{X}'(c) + [(r\mathcal{X}(c) - c)U'(c) + U(c)].$$

Ahora al derivar con respecto a  $c$  se obtiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal:

$$\begin{aligned} 0 = & -\beta V'(\mathcal{X}(c))\mathcal{X}'(c) - \left\{ \left[ \gamma 2U'(c)U''(c)\mathcal{X}'(c) + \gamma \mathcal{X}'''(c)(U'(c))^2 \right] U''(c) \right. \\ & \left. \gamma U'''(c) \left[ (U'(c))^2 \mathcal{X}'(c) \right] \right\} \frac{1}{(U''(c))^2} \\ & + (r\mathcal{X}'(c) - 1)U'(c) + U''(c)[r\mathcal{X}(c) - c] + U'(c). \end{aligned}$$

Pero, por otra parte, puesto que  $V'(x) = U'(C(x))$ , entonces el término

$$-\beta V'(\mathcal{X}(c)) = -\beta V'(x) = -\beta U'(C(x)) = -\beta U'(c)$$

puede ser escrito en sus varias versiones.

Con todas estas consideraciones la ecuación adopta la forma

$$\begin{aligned}\beta V'(X(c))X'(c) &= -\beta \left[ (2(U'(c))U''(c)X'(c) + X''(c)(U'(c))^2)U''(c) + \right. \\ &\quad \left. + U'''(c) \left[ (U'(c))^2 X'(c) \right] \right] \frac{1}{(U''(c))^2} \\ &\quad + (rX'(c) - 1)U'(c) + U''(c) [rX(c) - c] + U'(c):\end{aligned}$$

pero en vista de la observación:

$$\begin{aligned}\beta V'(X(c))X'(c) &= -\frac{\gamma}{(U''(c))^2} \left[ 2U'(c)(U''(c))^2 X'(c) + X''(c)(U'(c))^2 U''(c) \right] + \\ &\quad + rU'(c)X'(c) - U'(c) + U''(c)rX(c) - cU''(c) + U'(c) \\ &= -2\gamma U'(c)X'(c) - \gamma X''(c) \left[ \frac{U'(c)}{U''(c)} \right]^2 U''(c) \\ &\quad - \gamma \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 U'''(c)X'(c) + rU'(c)X'(c) \\ &\quad + U''(c)rX(c) - cU''(c),\end{aligned}$$

se tiene también que

$$\begin{aligned}\gamma X''(x) \frac{(U'(c))^2}{U''(c)} &= -2\gamma U'(c)X'(c) - \beta V'(X(c))X'(c) \\ &\quad - \gamma U'''(c)X'(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 + rU'(c)X'(c) + U''(c) [rX(c) - c] \\ &= X'(c) \left[ -2\gamma U'(c) - \gamma U'''(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 + rU'(c) \right] \\ &\quad - \beta V'(X(c))X'(c) + U''(c) [rX(c) - c],\end{aligned}$$

nuevamente usando la igualdad

$$-\beta V'(X(c)) = -\beta U'(c),$$

y el hecho

$$\begin{aligned}\gamma X''(x) \frac{(U'(c))^2}{U''(c)} &= X'(c) \left[ -2\gamma U'(c) - \gamma U'''(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 + rU'(c) \right] \\ &\quad - \beta U(c)X'(c) + U''(c) [rX(c) - c] \\ &= X'(c) \left[ -2\gamma U'(c) - \gamma U'''(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 + rU'(c) - \beta U'(c) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + U''(c) [rX(c) - c] \\
& = X'(c) \left[ U'(c) (-2\gamma + r - \beta) - \gamma U'''(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 \right] \\
& + U''(c) [rX(c) - c].
\end{aligned}$$

A partir de algunas simplificaciones se llega a

$$\begin{aligned}
\gamma X''(x) & = X'(c) \frac{U''(c)}{(U'(c))^2} [U'(c) (-2\gamma + r - \beta) \\
& - \gamma U'''(c) \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2] + \left( \frac{U''(c)}{U'(c)} \right)^2 [rX(c) - c]
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, se concluye que

$$\begin{aligned}
\gamma X''(c) & = X'(c) \left[ (r - \beta - 2\gamma) \frac{U''(c)}{U'(c)} \right. \\
& \left. + \gamma \frac{U'''(c)}{U''(c)} \right] + \left( \frac{U''(c)}{U'(c)} \right)^2 [rX(c) - c]. \tag{1.46}
\end{aligned}$$

Entonces desde la teoría clásica de ecuaciones ordinarias se postula una solución de la versión homogénea de (1.46) de la forma  $(U'(c))^\lambda$  y, como se puede verificar, hay una solución si y sólo si la constante  $\lambda$  satisface la ecuación

$$\gamma \lambda^2 - (r - \beta - \gamma) - r = 0.$$

Las raíces de la ecuación son  $\lambda_- < -1$  y  $\lambda_+ > 0$ , que mediante el método de variación de las constantes nos permite encontrar una solución

$$\begin{aligned}
X(c, a) & = \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right. \\
& \left. + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\},
\end{aligned}$$

donde  $a \geq 0$  es un parámetro.

Observe que  $X(c; a)$  está bien definida pues de (1.12) no es difícil verificar que  $X(c, a)$  resuelve (1.46); adicionalmente contamos con la siguiente relación útil

$$\lambda_- \lambda_+ = -r/\gamma. \tag{1.47}$$



La solución general de (1.46) es

$$B(U'(c))^{\lambda_+} + \hat{B}(U'(c))^{\lambda_-} + X(c; a)$$

que, sin embargo, como la experiencia sugiere, hay que descartar el término  $\hat{B}(U'(c))^{\lambda_-}$  debido al rápido crecimiento de  $(U'(c))^{\lambda_-}$  (en la práctica se descarta porque supone la promesa de una utilidad infinita), que si se define  $\hat{B} = 0$  se obtiene con ello

$$\begin{aligned} X(c; a, B) &= B(U'(c))^{\lambda_+} + \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(U'(c))^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\} \quad c > a, \end{aligned} \quad (1.48)$$

y la derivada de  $X(c; a, B)$  con respecto a  $c$  está dada por

$$\begin{aligned} X'(c; a, B) &= B\lambda_+(U'(c))^{\lambda_+-1}U''(c) \\ &\quad - \frac{U''(c)}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ (U'(c))^{\lambda_+-1} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right. \\ &\quad \left. + (U'(c))^{\lambda_- - 1} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Entonces se puede elegir  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$ , tal que  $X(\cdot, a; B)$  sea estrictamente creciente sobre  $(a, \infty)$ . Redefinimos en  $a$  a los estados como:

$$X(a; a, B) \doteq \lim_{c \rightarrow a} X(c; a, B).$$

### Observación 1.7.2

Cuando  $a = 0$  y  $U'(0) = \infty$  no podemos sustituir simplemente  $c = a$  en (1.48).  $\square$

De esta manera tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} X(c; a, B) &\geq \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c}{r} - \frac{(U'(c))^{\lambda_+}}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\lambda_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \right\} \\ &\geq \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\lambda_+} \int_a^c d\theta \right\} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\lambda_+} \right) c + \frac{a}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\lambda_+} \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\lambda_+ c}{r(\lambda_+ - \lambda_-)} + \frac{a}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\lambda_+} \\ &= \infty, \end{aligned} \quad (1.50)$$

entonces se tiene que

$$X(\cdot; a, B); [a, \infty) \rightarrow [X(a; a, B), \infty)$$

y su función inversa

$$C(\cdot; a, B); [X(a; a, B), \infty) \rightarrow [a, \infty)$$

es  $\mathcal{C}^2$ .

## 1.8 Candidatos a estrategias óptimas.

Una vez fijados  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$  usamos  $X(c) = X(c; a, B)$  y  $C(x) = C(x; a, B)$ , entonces creamos las estrategias  $\{C(t), \pi(t)\}_{t \geq 0}$  obtenidas en la sección anterior. En la siguiente sección evaluaremos la ejecución de estas estrategias.

Seleccionamos a  $\xi = X(a) \geq 0$  dados  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$ . Para  $x_0 > \xi$ , definimos el proceso de riqueza  $\{x_t\}_{t \geq 0}$  por (1.36) (ver también (1.44)) y para la selección

$$c_t = C(x_t) \quad \text{v} \quad \pi_t = \pi_t \frac{\alpha - r}{\sigma^2} \frac{U'(c_t)}{U''(c_t)C'(x_t)} \quad 0 \leq t \leq T_\xi. \quad (1.51)$$

Mientras que para  $t \geq T_\xi$  supondremos que  $c_t = \varphi_1(x_t)$  y  $\pi_t = \varphi_2(x_t)$ , donde  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) son elegidas, tales que  $c(\cdot)$  y  $\pi(\cdot)$  son admisibles, pero por otra parte arbitrarias.

Bajo los argumentos anteriores derivamos una ecuación diferencial estocástica para el proceso de consumo  $\{c_t\}_{0 \leq t \leq T_\xi}$

### Observación 1.8.1

En vista de que  $X(C(x)) = x$  para  $x > \xi$  tenemos

$$X'(C(x))C'(x) = 1 \quad \text{y} \quad X''(C(x))(C(x))^2 + X'(C(x))C''(x) = 0. \quad (1.52)$$

A partir de (1.51), (1.52) y (1.46) podemos generar también

$$\begin{aligned} dc_t &= -\frac{U'(c_t)}{U''(c_t)} \left[ r - \beta + \gamma \frac{U'(c_t)U'''(c_t)}{(U''(c_t))^2} \right] dt \\ &\quad - \frac{(\alpha - r)}{\sigma} \frac{U'(c_t)}{U''(c_t)} B_t \end{aligned} \quad (1.53)$$

Esta ecuación puede ser resuelta explícitamente. Para tal efecto si se define  $y_t = U'(c_t)$ , entonces mediante una aplicación directa de la regla de Ito se obtiene

$$dy_t = -(r - \beta)y_t dt - \frac{\alpha - r}{\sigma} y_t dB_t, \quad (1.54)$$

una ecuación diferencial estocástica lineal, cuya solución está dada por

$$U'(c_t) = y_t = U'(c_0) \exp \left[ -(r - \beta + \gamma)t - \frac{\alpha - r}{\sigma} B_t \right]. \quad (1.55)$$

Puesto que  $U$  es estrictamente cóncava<sup>2</sup>,  $U'$  tiene una inversa, digamos  $I$ , entonces la ecuación (1.53) proporciona un candidato para la estrategia del consumo óptimo de la forma:

$$c_t = I \left( U'(c_0) \exp \left[ -(r - \beta + \gamma)t - \frac{\alpha - r}{\sigma} B_t \right] \right), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_\xi.$$

En términos de esta estrategia el candidato para la estrategia óptima de inversión es

$$\pi_t = -\frac{\alpha - r}{\sigma^2} \frac{U'(c_t)}{U''(c_t)} \cdot \frac{X'(c_t)}{X(c_t)} \quad 0 \leq t \leq T_\xi.$$

### Observación 1.8.2

Observe que

$$\begin{aligned} T_\xi &\doteq \inf \{t \geq 0: x_t = \xi\} \\ &= \inf \{t \geq 0; c_t = a\} \\ &= \inf \{t \geq 0: y_t = U'(a)\}. \quad \square \end{aligned} \quad (1.56)$$

Si  $a = 0$  y  $U'(0) = \infty$ , entonces  $T_\xi = \infty$  casi seguramente (c.s.) porque  $y_t$  no explota. Bajo tales condiciones la bancarrota no puede ocurrir. Además, si  $\xi = 0$  y  $U'(a)$  es finita, la bancarrota debería ocurrir cuando  $y_t$  alcanza a  $U'(a)$ . Esto sucede casi seguramente si  $\beta \geq r + \gamma$ , y con probabilidad positiva menor que uno si  $\beta < r + \gamma$  (ver (1.55)).

---

<sup>2</sup>Recordamos que es una función de utilidad.

## 1.9 Evaluación de la ejecución de las estrategias óptimas.

Evaluamos la evolución esperada con la estrategia  $\{c(t), \pi(t)\}_{t \geq 0}$  de la sección 1.8.

Si suponemos que  $\bar{v} = V_{c(\cdot), \pi(\cdot)}(\xi)$  es finito y elegimos  $x_0 > \xi$ , basta con hacer  $c_0 = C(x_0)$  para posteriormente utilizar la propiedad de Markov

$$V_{c(\cdot), \pi(\cdot)}(x_0) = H(c_0) = E_{x_0} \left[ \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} U(c_t) dt + \bar{v} e^{-\beta T_\xi} \right], \quad (1.57)$$

donde  $\{y_t\}_{0 \leq t \leq T_\xi}$  está dado por (1.54) y (1.55) con  $y_0 = U'(c_0)$ .

Con todos estos ingredientes derivamos una expresión para  $H$  (bajo el supuesto que está bien definida y es finita para  $c > a$ ). Definimos de esta manera a

$$G(y_0) = H(I(y_0)) = E_{x_0} \left[ \int_0^{T_\xi} e^{-\beta t} U(I(y_t)) dt + \bar{v} e^{-\beta T_\xi} \right], \quad (1.58)$$

para  $0 < y_0 < U'(a)$ .

Por el Teorema 13.16 de Dynkin [Dy] donde establece la fórmula de Feynman-Kac entonces  $G$  está bien definida y es finita para toda  $c > a$  (justificamos esta suposición, aunque después en la Observación 1.11.2 se concluye que  $G \in \mathcal{C}^2$  sobre  $(0, U'(a))$ ). En vista de lo anterior tenemos todas las herramientas para nuestro análisis

$$\beta G(y) = -(r - \beta)yG'(y) + \gamma y^2 G''(y) + U(I(y)), \quad 0 < y < U'(a), \quad (1.59)$$

v si  $U'(a) < \infty$ , entonces

$$\lim_{y \uparrow U'(a)} G(y) = \bar{v} \quad (1.60)$$

Inmediatamente desde (1.59), (1.60) y el hecho que  $H(c) = G(U'(c))$  se infiere que si  $H$  está bien definido y es finito, entonces es de clase  $\mathcal{C}^2$  sobre  $(a, \infty)$  y además satisface

$$\begin{aligned} \beta H(c) &= -\frac{U'(c)}{U''(c)} \left[ r - \beta + \gamma \frac{U'(c)U'''(c)}{(U''(c))^2} \right] H'(c) \\ &+ \gamma \left( \frac{U'(c)}{U''(c)} \right)^2 H''(c) + U(c) \quad c > a. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Si ocurre además  $U'(a) < \infty$ , entonces

$$\lim_{c \downarrow a} H(c) = \bar{v} \quad (1.62)$$

y la solución general a (1.61) es precisamente

$$J(c, a, A, \hat{A}) \doteq A(U'(c))^{\rho_+} + \hat{A}(U'(c))^{\rho_-} + J_0(c; a).$$

En este caso  $\rho_+$  y  $\rho_-$  son las raíces positiva y negativa respectivamente de la ecuación cuadrática

$$\gamma\rho^2 - (r - \beta + \gamma)\rho - \beta = 0,$$

por lo que una solución particular de (1.61) viene dada por

$$J_0(c; a) = \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\gamma(\rho_+ - \rho_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+} \cdot \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}.$$

Existe, por otra parte, una relación entre las raíces:

$$\rho_+ = 1 + \lambda_+ \quad \text{y} \quad \rho_+\rho_- = -\beta/\gamma. \quad (1.63)$$

Para una elección de  $A$  y  $\hat{A}$  se tiene  $H(\cdot) = J(\cdot, a, A, \hat{A})$ .

Nuestro primer objetivo es demostrar que el rápido crecimiento de  $(U'(\theta))^{\rho_-}$  cuando  $c \rightarrow \infty$  para una elección apropiada de  $\hat{A}$  es cero.

**Proposición 1.9.1** *Si  $H(c)$  está bien definido y es finito para toda  $c > a$  y si además  $J(\hat{c}; a, A, \hat{A}) = H(\hat{c})$  para alguna elección  $\hat{c} > a$ ,  $A$  y  $\hat{A}$  donde  $J(\cdot; a, A, \hat{A})$  es acotada por abajo sobre  $[\hat{c}, \infty)$ , entonces  $J(c; a, A, \hat{A}) \geq H(c)$  para toda  $c \geq \hat{c}$ .*

**Lema 1.9.1** *Se tiene que*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{(U'(c))^{\rho_-}} = 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{c \rightarrow \infty} \frac{J_0(c; a)}{(U'(c))^{\rho_-}} \leq 0.$$

**Lema 1.9.2** *El límite de  $J_0(c; a)$  cuando  $c \rightarrow \infty$  está acotado inferiormente, i.e.*

$$\liminf_{c \rightarrow \infty} J_0(c; a) > -\infty.$$

**Proposición 1.9.2** *Si  $H(c)$  está bien definido y es finito para toda  $c > a$ , entonces para alguna elección de  $A$ ,  $J(c; a, A, 0) = H(c)$  para toda  $c > a$ .*

Para simplificar la notación usualmente vamos a escribir  $J(c, a, A)$  en lugar de  $J(c; a, A, 0)$  i.e.,

$$J(c; a, A) \doteq A(U'(c))^{\rho_+} + \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\gamma(\rho_+ - \rho_-)} \left\{ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\rho_+} \int_a^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\} \quad (1.64)$$

**Teorema 1.9.1** Si  $H(a) < \infty$ ,  $H(c)$  está dado por (1.57) y además está bien definida y es finita para toda  $c > a$ , entonces  $H(c) = J(c; a, A)$ , donde  $A$  verifica

$$A(U'(a))^{\rho_+} + \frac{U(a)}{\beta} - \frac{(U'(a))^{\rho_-}}{\gamma\rho_-(\rho_+ - \rho_-)} \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} = \bar{v}. \quad (1.65)$$

**Demostración:** Se obtiene directamente de (1.64) haciendo las cuentas.  $\square$

**Lema 1.9.3** Supongamos que  $U'(0) = \infty$ , entonces

$$\lim_{c \downarrow 0} \frac{J(c; 0, 0)}{(U'(c))^{\rho_+}} = 0.$$

**Demostración:** Se sigue prácticamente de (1.64) también.  $\square$

Por ello se ve que crece más rápidamente  $(U'(c))^{\rho_+}$  que la misma  $J$ .

**Lema 1.9.4** Supongamos que  $U'(0) = \infty$ , entonces

$$\lim_{c \downarrow 0} J(c; 0, 0) = \frac{U(0)}{\beta}.$$

**Demostración:** Distinguiremos dos casos.

Caso I.  $U(0)$  es finito. Deberíamos demostrar que

$$\lim_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\rho_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} = 0, \quad (1.66)$$

$$\lim_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\rho_-} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} = 0. \quad (1.67)$$

En efecto, de la concavidad de  $U$  se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\rho_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} \\ &= \overline{\lim}_{c \downarrow 0} c U'(c) \leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} [U(c) - U(0)] = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto (1.66) es demostrada. Para demostrar (1.67) elegimos  $\varepsilon > 0$  y escribimos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \\ &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} \int_c^\varepsilon \left( \frac{U'(c)}{U'(\theta)} \right)^{\rho_-} U'(\theta) d\theta + \overline{\lim}_{c \downarrow 0} (U'(c))^{\rho_-} \int_\varepsilon^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \\ &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} \int_c^\varepsilon U'(\theta) d\theta = U(\varepsilon) - U(0). \end{aligned}$$

Ahora hay que hacer que  $\varepsilon \downarrow 0$ .

Caso II. Para  $U(0) = -\infty$  tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{c \downarrow 0} J(c; 0, 0) &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} \left\{ \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\gamma \rho_- (\rho_+ - \rho_-)} \left[ \int_c^1 \left( \frac{U'(c)}{U'(\theta)} \right)^{\rho_-} U'(\theta) d\theta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (U'(c))^{\rho_-} \int_1^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right] \right\} \\ &\leq \overline{\lim}_{c \downarrow 0} \left\{ \frac{U(c)}{\beta} - \frac{1}{\gamma \rho_- (\rho_+ - \rho_-)} \int_c^1 U'(\theta) d\theta \right\} \\ &= \overline{\lim}_{c \downarrow 0} \left( \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma \rho_- (\rho_+ - \rho_-)} \right) U(c) - \frac{U(1)}{\gamma \rho_- (\rho_+ - \rho_-)}. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (1.63) se puede ver fácilmente la igualdad

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma \rho_- (\rho_+ - \rho_-)} = -\frac{\rho_-}{\beta (\rho_+ - \rho_-)} > 0,$$

de donde se obtiene claramente que

$$\lim_{c \downarrow 0} J(c; 0, 0) = -\infty \quad \square$$

Se anula el primer término automáticamente y el tercero se anula en el límite por el Lema 1.9.3.  $\square$

**Teorema 1.9.2** Si  $a = 0$ ,  $U'(0) = \infty$  y si  $H(c)$  está bien definido y es finita para cada  $c > 0$ , entonces

$$H(c) = J(c; 0, 0), \quad c > 0.$$

**Demostración:** Por los resultados anteriores se concluye el resultado.  $\square$

Es la condición asintótica que dicta el comportamiento del funcional  $J$ .

## 1.10 Resolviendo la ecuación de Bellman: parte II.

Dados  $a \geq 0$ ,  $B \leq 0$  y la función  $X(\cdot; a, B)$  dada por (1.48) estrictamente creciente y que transforma  $[a, \infty)$  sobre (suprayectivamente) en  $[X(a; a, B), \infty)$ .

La función inversa  $C(\cdot; a, B)$  como una estrategia *feedback* para elegir el consumo como una función de la riqueza. En las secciones 1.8 y 1.9 vimos cuando las estrategias de consumo y de portafolio descritas por (1.51) son empleadas para la riqueza inicial  $x > 0$ , entonces para una elección de  $A$ , el retorno esperado es  $J(C(x; a, B); a, A)$ , donde  $J(\cdot; a, A)$  está definido por (1.64). En el siguiente resultado veremos que un valor fortuito para  $A$  debería ser  $A = \lambda_+ B / \rho_+$ .

**Teorema 1.10.1** Si  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$  la función

$$V(x; a, B) \doteq J\left(C(x, a, B); a, \frac{\lambda_+}{\rho_+} B\right), \quad x > X(a; a, B) \quad (1.68)$$

satisface la ecuación de Bellman (1.30).

## 1.11 Soluciones cuando $U'(0) = \infty$ , $U(0)$ es finita y

$$P = \frac{U(0)}{\beta}.$$

**Teorema 1.11.1** Suponga que  $U'(0) = \infty$ ,  $U(0)$  es finito,  $P = U(0)/\beta$  y si define  $a = 0$  y  $B = 0$ , entonces una estrategia óptima está dada por (1.51). Además la función valor está dada por (1.68).

### Observación 1.11.1

De acuerdo a la Observación 1.56, la estrategia óptima del Teorema 1.11.1 evita casi seguramente la bancarrota.  $\square$



**Corolario 1.11.1** *Bajo las hipótesis de la sección 1.2 se concluye que  $V^*(x)$  es finita para cada  $x > 0$ .*

**Observación 1.11.2**

Puesto que  $H(c)$  está definida por (1.57), por lo que puede interpretarse como el retorno esperado asociado a la estrategia viable  $y$ , por lo tanto,  $H$  está bien definido y  $H(c) < \infty \quad \forall c > 0$ . Si adicionalmente  $U$  es acotada inferiormente por cero sobre  $c_t$ , entonces  $H(c) > -\infty$ , y la condición de que  $H$  está bien definida y es finita cobra sentido y tal como aparece en los Teoremas 1.9.1 y 1.9.2 va ser verificada.  $\square$

**Observación 1.11.3**

Dada cualquier función de utilidad  $U$  que satisface las hipótesis de la sección 1.2, entonces hay la posibilidad de construir otra función de utilidad  $\tilde{U}$ , como en la demostración del Corolario 1.11.1, tal que

$$\tilde{U}(c) \geq U(c) \quad \forall c \geq 0.$$

La función valor correspondiente a  $\tilde{U}$  es finita también para cada estrategia viable; en otras palabras

$$E_x \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} \tilde{U}(c_t) dt \right] < \infty,$$

y por ello (1.26) es válida. De acuerdo a la Observación 1.5.1 la conclusión del Teorema 1.5.1 es válida aun si  $U(0) = -\infty$ . De (1.26) también concluimos que la integral y la esperanza en (1.6) están bien definidas para cada par  $c(\cdot)$  y  $\pi(\cdot)$  admisibles en  $x$ . Esto incluye el caso especial en el que  $U(c) = \log(c)$ .  $\square$

**Observación 1.11.4**

La elección de  $a = 0$  en el Teorema 1.11.1 nos proporciona la siguiente observación: si  $F(c)$  está definida por (1.69), entonces  $a$  es la única solución no negativa de la ecuación  $F(c) + \rho_+ P = 0$ . Sin embargo,  $\lim_{c \downarrow 0} cU'(c) = 0$  ( $0 \leq U'(c)c \leq U(c) - U(0)$ ) para  $c > 0$ , bajo las suposiciones de esta sección y también tenemos desde (1.69) y (1.67) que

$$F(0) = \lim_{c \downarrow 0} F(c) = -\frac{\rho_+}{\beta} U(0) = -\rho_+ P.$$

Por otro lado, a partir de (1.66) y (1.67) se obtiene que

$$X(c; 0, B) - B(U'(c))^{\lambda_+} = \frac{c}{r} - \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)U'(c)} \left[ \frac{(U'(c))^{\rho_+}}{\lambda_+} \int_0^c \frac{d\theta}{(U(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\lambda_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U(\theta))^{\lambda_-}} \right]$$

converge a cero cuando  $c \downarrow 0$ . Puesto que hemos requerido de que  $\lim_{c \downarrow 0} X(c; 0, B) = 0$ , esto nos conduce a que  $B = 0$ .  $\square$

## 1.12 Solución cuando $U(0) = -\infty$ .

Se requiere aquí y en la siguiente sección el lema auxiliar que se enuncia a continuación

**Lema 1.12.1** *Supongamos que  $P > U(0)/\beta$ ,  $U'(0)$  y  $U(0)$  son no necesariamente finitos, al mismo tiempo que definimos*

$$F(c) = -\frac{(U'(c))^{\rho_-}}{\gamma\lambda_- \rho_-} \int_c^\infty \frac{d\theta}{(U(\theta))^{\lambda_-}} - \frac{\rho_+}{\beta} U(c) + \frac{\lambda_+}{r} c U'(c) \quad c > 0. \quad (1.69)$$

Entonces aseguramos que  $F$  es estrictamente decreciente y además

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F(c) + \rho_+ P < 0.$$

En particular, la ecuación

$$F(c) = -\rho_+ P \quad (1.70)$$

tiene a lo más una solución positiva. Sin embargo, se puede precisar aún mas pues ésta tiene una solución si y sólo si  $F(0) + \rho_+ P > 0$  se verifica.

Para tal efecto denotamos

$$F(0) = \lim_{c \downarrow 0} F(c).$$

En particular, si  $U'(0) = \infty$ , entonces  $F(0) + \rho_+ P > 0$ .  $\square$

Cuando se verifica que  $U(0) = -\infty$  también tenemos  $U'(0) = \infty$ ; además si  $P$  es finito, entonces (1.70) tiene una única solución  $c = a > 0$ . De tal forma que podemos elegir  $B$ , tal que  $X(a, a, B) = 0$  i.e.

$$B(U'(a))^{\lambda_+} + \frac{a}{r} - \frac{(U'(a))^{\lambda_-}}{\gamma\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_-)} \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} = 0. \quad (1.71)$$

Es evidente a partir de (1.71) concluir que  $B < 0$ . En este momento ya se puede implementar una estrategia  $c(\cdot)\pi(\cdot)$  descrita por (1.51) con  $\xi = 0$ . En (1.57) definimos  $\bar{v} = P$  y usamos el Teorema 1.9.1 (y la Observación 1.11.2) para concluir que

$$V_{c(\cdot)\pi(\cdot)}(x) \doteq J(C(x; a, B); a, A), \quad x > 0,$$

donde  $A$  está dado por (1.65). Multiplicando en (1.65) por  $\rho_+/U'(a)$  y en (1.71) por  $\lambda_+$ , restando las ecuaciones resultantes y después de algunas simplificaciones se obtiene

$$\begin{aligned} & (\lambda_+ B - \rho_+ A)(U'(a))^{\lambda_-} + \frac{\rho_+}{U'(a)} \left( P - \frac{U(a)}{\beta} \right) + \\ & \frac{\lambda_+ a}{r} + \frac{1}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left( \frac{\rho_+}{\rho_-} - \frac{\lambda_+}{\lambda_-} \right) \int_a^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} = 0. \end{aligned}$$

Que en vista de (1.63) y la ecuación  $F(a) + \rho_+ P = 0$ , se puede reducir a  $A = \lambda_+ B / \rho_+$ .

Así, finalmente hemos llegado al

**Teorema 1.12.1** *Supongamos que  $U(0) = -\infty$ ,  $P$  es finito y sea  $c = a$  la única solución positiva de (1.70) y  $B$  dado por (1.71). Entonces una estrategia óptima está dada por (1.51) y la función valor está dada por (1.68) respectivamente.*

### Observación 1.12.1

Recordamos de la Observación 1.56 que la estrategia óptima conduce casi seguramente a la bancarrota si  $\beta \geq r + \gamma$ , y esto a su vez conduce a la bancarrota con probabilidad positiva menor que uno si  $\beta < r + \gamma$ . Por tanto, existe un criterio para prevenirla o evitarla.  $\square$

**Teorema 1.12.2** *Supongamos que  $U(0) = -\infty$ ,  $P = U(0)/\beta = -\infty$  y también definimos  $a = B = 0$ . Entonces hay una estrategia óptima dada por (1.51), por tanto, la función valor está dada por (1.68) y bajo la estrategia óptima la bancarrota no ocurre.*

### 1.13 Solución de todos los casos donde el consumo restringido es inactivo.

El proceso de consumo óptimo encontrado en las secciones 1.11 y 1.12 fueron de la forma  $c_t = C(x_t; a, B)$ , donde  $\{x_t; t \geq 0\}$  es un proceso de riqueza óptimo cuando  $a \geq 0$  y  $B \leq 0$ . De ocurrir que  $U'(0) = \infty$  y  $a = B = 0$ , o que  $a > 0$  y  $B$  satisface (1.71), entonces  $X(a; a, B) = 0$  y también  $c_t = C(x - t; a, B) > 0$  cuando  $x_t > 0$ . Por lo tanto, decimos que la restricción del consumo es inactiva o más precisamente que  $c_t \geq 0$ . Adicionalmente a los casos analizados en las secciones 1.11 y 1.12. existen otras dos situaciones en las que el consumo restringido es inactivo. Las demostraciones de los siguientes teoremas siguen en líneas generales la misma demostración del Teorema 1.12.1.

**Teorema 1.13.1** *Supongamos que  $U'(0) = \infty$  y  $U(0)$  es finito, y  $P > U(0)/\beta$ . Siendo  $c = a$  la única solución positiva a (1.70) y  $B$  dado por (1.71), entonces hay una estrategia óptima dada por (1.51). Adicionalmente la función valor está dada por (1.68).*

*Si  $U(0)$  y  $U'(0)$  son finitos es posible definir*

$$P^* = \frac{1}{\beta}U(0) - \frac{(U'(0))^{\rho-1}}{\beta^{\lambda-1}} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda-1}}, \quad (1.72)$$

*y, por otra parte, en este caso (1.70) tiene una solución positiva si y sólo si  $P > P^*$ . Mientras que si  $P = P^*$  (1.70) tiene una solución  $c = 0$  y si  $U(0)/\beta \leq P < P^*$ , entonces (1.70) no tiene solución no negativa. Este último caso es el objetivo de la sección 1.16.*

**Teorema 1.13.2** *Supongamos que tanto  $U'(0) = \infty$ , como  $U(0)$  son finitos y que  $P \geq P^*$ . Si  $P > P^*$  y  $a$  es la única solución positiva de (1.70), entonces  $P = P^*$  cuando  $a = 0$ ; en cualquier otro caso  $B$  viene dado por (1.71). Una estrategia óptima es dada por (1.51), y la función valor está dada por (1.68)*

#### Observación 1.13.1

Puesto que  $U'(a)$  es finita en los Teoremas 1.13.1 y 1.13.2. la Observación 1.56 (con  $\xi = 0$ ) muestra que hay una probabilidad (igual a uno si y sólo si  $\beta \geq r + \gamma$ ) de bancarota  $\square$

## 1.14 Solución cuando la restricción del consumo es activo.

El único caso que resta tratar es aquél donde  $U(0)$  es finito y  $U'(0)$  para el que ocurrirá que

$$\frac{1}{\beta}U(0) \leq P < P^*, \quad (1.73)$$

aquí  $P^*$  está definido por (1.72). En esta sección supondremos las condiciones mencionadas anteriormente y estableceremos la existencia de  $\bar{x} > 0$  y  $B \leq 0$ , tales que el consumo óptimo está dado por

$$c = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \bar{x}, \\ C(x; 0, B) & x \geq \bar{x}, \end{cases} \quad (1.74)$$

donde  $C(\bar{x}; 0, B) = 0$  y  $C(\bar{x}; 0, B) > 0$  para  $x > \bar{x}$ . Por un lado, si  $P = U(0)/\beta$ , deberíamos tener que  $B = 0$ . Por otro, si  $U(0)/\beta < P < P^*$ , obtenemos que

$$B = -\frac{\beta}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)\bar{y}^{\rho_+}} \left( P - \frac{1}{\beta}U(0) \right), \quad (1.75)$$

donde

$$\bar{y} = -\beta\lambda_- \left( P - \frac{1}{\beta}U(0) \right) \left[ \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right]^{-1}. \quad (1.76)$$

En resumen, lo que hay que obtener es

$$\bar{x} = B(U'(0))^{\lambda_+} - \frac{(U'(0))^{\lambda_-}}{\gamma\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_-)} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}. \quad (1.77)$$

Observe que la desigualdad  $P < P^*$  implica en (1.76) que  $\bar{y}^{\rho_-} < (U'(0))^{\rho_-}$  y que si ésta última es válida ello nos conduce a

$$\bar{y} > U'(0). \quad (1.78)$$

Cuando ocurra que  $P = U(0)/\beta$ , entonces adoptaremos la convención  $\bar{y} = \infty$ , de modo que (1.78) debería ser verdadera. Cuando  $B = 0$ , una consecuencia clara es que  $\bar{x} > 0$  y finalmente para el caso en que  $U(0)/\beta < P < P^*$  concluimos desde (1.75) y (1.78) que

$$\begin{aligned} B(U'(0))^{\lambda_-} &> \frac{\beta}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} (U'(0))^{\lambda_+ - \rho_+} \left( P^* - \frac{1}{\beta}U(0) \right) \\ &= \frac{(U'(0))^{\lambda_-}}{\gamma\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_-)} (U'(0))^{\lambda_+ - \rho_+} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}}, \end{aligned}$$

de nuevo  $\bar{x} > 0$ . Finalmente, notamos que con  $X(c; 0, B)$  definido por (1.48),  $\bar{x} = X(0, 0, B)$ , tal que  $C(\bar{x}; 0, B) = 0$ .

En las secciones anteriores elegimos el consumo como una variable intermedia y nos referimos a la riqueza a través del consumo vía  $X(c; a, B)$  y al valor del consumo vía  $J(c; a, \lambda_+ B / \rho_+)$ . Esta elección de la variable intermedia es ahora inapropiada porque la transformación desde la riqueza al consumo descrita por (1.74) no es invertible. Entonces por esa razón deberíamos usar a  $y = \frac{dV^*}{dx}$  que debe jugar el rol de variable intermedia. Deberíamos descubrir que  $V^*$  es estrictamente cóncava, de tal manera que la transformación de  $x$  a  $\frac{dV^*}{ds}(x)$  sea invertible.

Además, cuando  $x \geq \bar{x}$ , deberíamos tener el consumo y la riqueza óptimos relacionados por  $\frac{dV^*}{dx}(x) = U'(c)$  (ver (1.43)), tal que  $y = U'(c)$  cuando  $x \geq \bar{x}$ .

Recordemos a la función  $I : (0, U'(0)] \rightarrow [0, \infty)$  (la inversa de  $U'$ ) y consideraremos una extensión de  $I$  por cero  $I \equiv 0$  sobre el intervalo  $[U'(0), \infty)$ . Si  $V$  es  $C^2$  y además es estrictamente cóncava, entonces la ecuación de Bellman (1.30) adopta la forma (1.42) y, por lo tanto, puede ser escrita como

$$\beta V(x) = \frac{-\gamma(V'(x))^2}{V'(x)} + [rx - I(V'(x))]V'(x) + U(I(V'(x))), \quad x > 0. \quad (1.79)$$

Por analogía con (1.48) y (1.57) para  $a = 0$  y  $c = I(y)$  respectivamente. Definimos  $C \leq 0$  y  $A \leq 0$  para obtener

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(y; B) &= Ay^{\rho_+} + \frac{1}{r}I(y) \\ &\quad - \frac{I}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{y^{\lambda_+}}{\lambda_+} \int_0^{I(y)} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{y^{\lambda_-}}{\lambda_-} \int_{I(y)}^{\infty} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \quad y > 0, \end{aligned} \quad (1.80)$$

y también

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(y, A) &= Ay^{\rho_+} + \frac{1}{\beta}U(I(y)) \\ &\quad - \frac{I}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ \frac{y^{\rho_+}}{\rho_+} \int_0^{I(y)} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + \frac{y^{\rho_-}}{\rho_-} \int_{I(y)}^{\infty} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \quad y > 0. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Para  $c \geq 0$  tenemos que  $c = I(U'(c))$  y, por tanto,

$$\mathcal{X}(U'(c); B) = X(c; 0, B), \quad \text{y} \quad \mathcal{J}(U'(c); A) = J(c, 0, A) \quad c \geq 0. \quad (1.82)$$

Por otra parte, puesto que

$$\mathcal{X}'(y; B) = B\lambda_+ y^{\rho_+ - 1} - \frac{I}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left\{ y^{\lambda_+ - 1} \int_0^{I(y)} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_+}} + y^{\lambda_- - 1} \int_{I(y)}^{\infty} \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}} \right\}, \quad y > 0$$

es negativa, entonces inferimos que  $\mathcal{X}(\cdot; B)$  es estrictamente decreciente. Es por ello que desde (1.82) y (1.50) tenemos que

$$\lim_{y \downarrow 0} \mathcal{X}(y; B) = \lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{X}(c; 0, B) = \infty.$$

Al reformar (1.80) tenemos

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \mathcal{X}(y, B) = \lim_{y \rightarrow \infty} B y^{\lambda_-}.$$

Consecuentemente, si  $B = 0$  ya que  $\mathcal{X}(\cdot, B)$  transforma al intervalo  $(0, \infty)$  en sí mismo y tiene inversa  $\mathcal{Y}(\cdot; B) : (0, \infty) \xrightarrow{\text{sobr}} (0, \infty)$ . Para el caso en que  $B < 0$  las fórmulas (1.75), (1.76) y (1.78) pueden ser usadas para mostrar que  $\bar{y}$  está definido por (1.76) y adicionalmente satisface que  $I(\bar{y}) = 0$  y  $\mathcal{X}(\bar{y}; B) = 0$ . Consideramos  $\mathcal{X}(\cdot; B)$  restringida a  $(0, \bar{y})$ , lo que está contenido en  $[0, \infty)$  y su función inversa  $\mathcal{Y}(\cdot, B) : [0, \infty) \xrightarrow{\text{sobr}} (0, \bar{y})$ .

#### Observación 1.14.1

Las condiciones (1.75) y (1.76) son equivalentes a los requerimientos  $\mathcal{Y}(\bar{y}; B) = 0$  y  $\mathcal{J}(\bar{y}; \lambda_+ B / \rho_+) = P$ . La condición (1.77) nos dice que  $\bar{x} = \mathcal{X}(U'(0); B)$ .  $\square$

**Lema 1.14.1** *Si las hipótesis (1.73), (1.75) y (1.76) son válidas, definimos*

$$V(x) = \mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x; B); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right), \quad x > 0.$$

*Entonces la función  $V$  es estrictamente creciente, estrictamente cóncava y además verifica la ecuación de Bellman (1.79) y la condición límite*

$$\lim_{x \downarrow 0} V(x) = P. \tag{1.83}$$

**Demostración:**

La demostración es sencilla y se obtiene a partir de la ecuación (1.80) y (1.81) de donde obtendremos

$$V'(x) = \frac{\mathcal{J}'(\mathcal{Y}(x; B); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B)}{\mathcal{Y}(x; B); B} = \mathcal{Y}(x; B) > 0, \quad x > 0 \quad (1.84)$$

y la segunda derivada satisface

$$V''(x) = \mathcal{Y}'(x; B) = \frac{1}{\mathcal{X}'(\mathcal{Y}(x; B), B)} < 0, \quad x > 0; \quad (1.85)$$

con  $y = \mathcal{Y}(x; B)$  la ecuación (1.79) se convierte en

$$\beta \mathcal{J} \left( y; \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right) = -\gamma y^2 \mathcal{X}'(y; B) + (r \mathcal{X}(y; B) - I(y)) y + U(I(y)) \quad 0 < y < \bar{y},$$

y con ello se obtiene el argumento de verificación de la ecuación.  $\square$

Ahora suprimimos el parámetro  $B \leq 0$  y únicamente hacemos la consideración que  $V$  está definido como en el Lema 1.14.1. Sea  $x_0 > 0$  una riqueza inicial dada y definimos (ver también (1.41), (1.43))

$$c_t = I(V'(x_t)), \quad \pi_t = -\frac{(\alpha - r)V'(x_t)}{\sigma^2 x_t V''(x_t)}, \quad 0 \leq t < T_0, \quad (1.86)$$

donde  $\{x_t, 0 \leq t < T_0\}$  y  $T_0$  están definidos por (1.40) y por (1.5) respectivamente. De tal forma que denotaremos por  $y_t = V'(x_t)$ , tal que  $y_0 = V'(x_0)$ .

**Lema 1.14.2** *El proceso  $\{y_t, 0 \leq t < T_0\}$  verifica (ver (1.54), (1.55)) la igualdad*

$$y_t = y_0 \exp \left[ -(r - \beta + \gamma)t - \frac{\alpha - r}{\sigma} \omega_t \right], \quad (1.87)$$

y

$$T_0 = \inf \{t \geq 0; y_t = \bar{y}\}. \quad (1.88)$$

**Observación 1.14.2**

Si  $P = U(0)/\beta$ , entonces  $B = 0$  y por convención  $\bar{y} = \infty$ . Por otro lado, si (1.88) es válido se elude la bancarota casi seguramente. En este caso  $x_t$  e  $y_t$  están definidas para  $t \geq 0$ . Para el caso  $P > U(0)/\beta$  también  $B < 0$  y se concluye que  $\bar{y}$  es finita y  $y_0 < \bar{y}$ . La bancarota debería ocurrir con probabilidad positiva y sería igual a uno si y sólo si  $\beta \geq r + \gamma$ . Cuando  $T_0 < \infty$ , tanto  $x_t$  como  $y_t$  están definidos para  $0 \leq t \leq T_0$ . En particular,  $\pi(\cdot)$  es admisible y está definido como en la sección 1.4.  $\square$



Ahora evaluaremos la ejecución de la estrategia (1.86). Definimos

$$\mathcal{H}(y_0) = E_{y_0} \left[ \int_0^{T_0} e^{-\beta t} U(I(y_t)) dt + P e^{-\beta T_0} \right], \quad 0 < y_0 < \bar{y}. \quad (1.89)$$

Por el Corolario 1.11.1 y el hecho de que  $U$  es acotada inferiormente por  $U(0)$  llegamos a que  $\mathcal{H}$  está bien definida y además es finita. Mejor aún, si recordamos a (1.78) y hacemos la consideración que  $0 < y_0 \leq U'(0)$ , entonces podemos tomar  $\bar{y}$  dada por (1.77), tal que  $\bar{x} = \mathcal{X}(U'(0); B)$  y  $T_{\bar{x}} = \inf \{t \geq 0; y_t = U'(0)\}$  y junto con todo ello podemos utilizar la propiedad fuerte de Markov hasta obtener

$$\mathcal{H}(y_0) = E_{y_0} \left[ \int_0^{T_{\bar{x}}} e^{-\beta t} U(I(y_t)) dt + \mathcal{H}(U'(0)) e^{-\beta T_{\bar{x}}} \right], \quad 0 < y_0 < U'(0). \quad (1.90)$$

Finalmente, la comparación con (1.58) demuestra que  $\mathcal{H}(y_0) = H(I(y_0))$ , para  $0 < y_0 \leq U'(0)$ , que por el Teorema 1.9.1 nos proporciona

$$\mathcal{H}(y_0) = J(I(y_0); 0, A) = \mathcal{J}(y_0; A) \quad 0 < y_0 \leq U'(0). \quad (1.91)$$

para una elección apropiada de  $A$ .

De acuerdo al Teorema 1.14.2 (ver también Dynkin [Dy]) se concluye que  $\mathcal{H}$  viene dada por (1.89) y además es  $C^2$  sobre  $(0, \bar{y})$ . En concreto, satisface (1.59) sobre ese intervalo y además si  $\bar{y}$  es finito, entonces

$$\lim_{y \uparrow \bar{y}} \mathcal{H}(y) = P. \quad (1.92)$$

La solución general de (1.59) es precisamente  $\mathcal{J}(y; A) + \hat{A}y^{\rho_-}$ . De este modo, (1.91) nos muestra que deberíamos definir  $\hat{A} = 0$  para obtener  $\mathcal{H}$ . Otra consecuencia de que  $\bar{y}$  sea finita es que  $A$  puede ser determinada a partir de (1.92). Sin embargo, también tenemos

$$A\bar{y}^{\rho_+} = P - \frac{1}{\beta}U(0) + \frac{\bar{y}^{\rho_+}}{\gamma\rho_-(\lambda_+ - \lambda_-)} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}},$$

que en vista de (1.75), (1.76) y (1.63) nos permite obtener la igualdad

$$\begin{aligned} \rho_+ A\bar{y}^{\rho_+} &= \rho_+ \left( 1 - \frac{\beta\lambda_-}{\gamma\rho_-(\lambda_+ - \lambda_-)} \right) \left( P - \frac{1}{\beta}U(0) \right) \\ &= \frac{\lambda_+\beta}{\gamma(\lambda_+ - \lambda_-)} \left( P - \frac{1}{\beta}U(0) \right) \\ &= \lambda_+ B\bar{y}^{\rho_+}, \end{aligned}$$

donde

$$A = \frac{\lambda_+}{\rho_+} B.$$

En otras palabras, cuando  $U(0) < P < P^*$  y  $x_0 > 0$ , la estrategia descrita por (1.86) sirve como conducto para obtener el retorno esperado

$$V_{c(\cdot)\pi(\cdot)}(x_0) = \mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x_0 B); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right) \quad x_0 > 0. \quad (1.93)$$

**Teorema 1.14.1** *Suponiendo que  $U(0)$  y  $U'(0)$  son finitos y que  $U(0)/\beta < P < P^*$ ; además, si  $B < 0$  en virtud de (1.75) y (1.76) se concluye que la función valor  $V$  viene dada por (1.93), adicionalmente la estrategia definida por (1.86) es óptima.*

#### Demostración:

De acuerdo al Teorema 1.15.1 y al Lema 1.14.1 concluimos que la función del lado derecho de (1.93) mayoriza a  $V^*$ . Por otra parte, puesto que  $V_{c(\cdot)\pi(\cdot)} \leq V^*$ , el Teorema queda demostrado.  $\square$

Esto reduce el problema actual a estudiar el modelo con  $P = U(0)/\beta$ , ya que nuestro candidato a estrategia óptima evita la bancarrota en este caso. Sin embargo, habría que verificar también la condición de frontera (1.92), que por cierto no puede ser invocada para determinar al parámetro  $A$ .

Llegados a este punto deberíamos considerar este problema como el límite de una sucesión de problemas en los que el  $n$ -ésimo problema tiene un pago  $P_n \in (U(0)/\beta, P^*)$  y tales que  $P_n \downarrow U(0)/\beta$ . Para esa sucesión de problemas la función valor del  $n$ -ésimo problema es  $\mathcal{J}(\mathcal{Y}(x; B_n); \lambda_+ B_n / \rho_+)$ , donde  $B_n$  está dado por (1.75) y (1.76) reemplazado  $P$  por  $P_n$  (como detalle secundario podemos verificar que  $B_n \uparrow 0$ ).

Así que si  $V^*$  es la función valor en el problema con pago  $P$ , entonces el problema con pago  $P_n$  es más favorable, pero la diferencia entre los retornos esperados entre los dos problemas bajo la misma estrategia no puede exceder a  $P_n - U(0)/\beta$ .

Consecuentemente obtenemos la desigualdad

$$\mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x; B_n); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B \right) - \left( P_n - \frac{1}{\beta} U(0) \right) \leq V^*(x) \leq \mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x; B_n); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B_n \right), \quad x \geq 0. \quad (1.94)$$

**Lema 1.14.3** *Cuando  $P_n \downarrow U(0)/\beta$  y  $B_n \uparrow 0$  como anteriormente, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J} \left( \mathcal{Y}(x; B_n); \frac{\lambda_+}{\rho_+} B_n \right) = \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x; 0); 0). \quad x > 0$$

se verifica.

**Teorema 1.14.2** *Supongamos que  $U(0)$  y  $U'(0)$  son finitos y que  $P = U(0)/\beta$ , entonces la función valor es  $V(x) \doteq \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x; 0); 0)$ , con  $x > 0$  y la estrategia definida por (1.86) es óptima.*

### Observación 1.14.3

En vista de que  $\mathcal{Y}(\bar{x}; B) = U'(0)$ , entonces (1.84) implica que cuando  $U(0)/\beta \leq P < P^*$  se obtienen las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}V^*(x) &> U'(0), & 0 < x < \bar{x}, \\ \frac{d}{dx}V^*(\bar{x}) &= U'(0), \\ \frac{d}{dx}V^*(x) &< U'(0), & x > \bar{x}. \end{aligned}$$

Una observación extra es que a partir de (1.82) y (1.84) podemos obtener la estrategia definida por (1.86) que es similar a la descrita por (1.74).  $\square$

### Observación 1.14.4

Adicionalmente tenemos que

$$\mathcal{Y}(x; 0) = (U'(0))/(x/\bar{x})^{1/\lambda}, \quad 0 < x \leq \bar{x} \doteq \frac{(U(0))^{\lambda_-}}{\gamma\lambda_-(\lambda_+ - \lambda_-)} \int_0^\infty \frac{d\theta}{(U'(\theta))^{\lambda_-}},$$

también se verifican cuando  $P = U(0)/\beta$  obteniendo el valor óptimo

$$V^*(x) = \mathcal{J}(\mathcal{Y}(x; 0); 0) = \frac{\lambda_- x}{\rho_-} U'(0) (x/\bar{x})^{1/\lambda_-} + \frac{1}{\beta} U(0), \quad 0 < x \leq \bar{x}.$$

En particular,

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{d}{dx}V^*(x) = \infty$$

es el valor asignado a  $\bar{y}$  para este caso. En el otro caso,  $U(0)/\beta < P < P^*$  tenemos desde (1.84) que  $DV^*(0)/dx = \bar{y}$ .  $\square$

## 1.15 Soluciones para funciones de utilidad HARA.

En esta sección nos referimos a un caso particularmente interesante mejor conocido como *Modelo de Aversión al Riesgo de tipo Absolutamente Hiperbólica* (Hyperbolic Absolute Risk Aversion, en sus siglas en inglés HARA), que comprende a las funciones de utilidad sobre  $(0, \infty)$  de la forma

$$U(c) = (c + \eta)^\delta, \quad 0 < \delta < 1, \quad \eta \geq 0, \quad (1.95)$$

$$U(c) = -(c + \eta)^\delta, \quad \delta < 0, \quad \eta \geq 0. \quad (1.96)$$

y

$$U(c) = \log(c + \eta), \quad \eta \geq 0. \quad (1.97)$$

La última función es mejor conocida como una función HARA con parámetros  $\eta \geq 0$  y  $\delta = 0$ .

Cuando  $\delta \leq 0$ , se observa que  $U$  satisface la condición de crecimiento (1.12) porque  $\lambda_- < -1$ , mientras que si  $0 < \delta < 1$ , entonces (1.12) resulta equivalente a

$$\beta > r\delta + \frac{\gamma\delta}{1-\delta}, \quad (1.98)$$

que es una condición más débil que  $\beta > \delta[r + \gamma(2 - \delta)/(1 - \delta)]$ , que fue impuesta por Merton [Me] (ver la condición (41) de esa referencia) para garantizar la finitud de la función valor

En esta sección nos concentramos en los resultados aplicados sobre éste a las funciones HARA con  $\eta = 0$ , al mismo tiempo que mostramos que para  $\delta < 1$  y cualquier  $\eta \geq 0$  la fórmula (1.98) es una condición necesaria para verificar que una función valor es finita por el uso del Corolario 1.11.1 .

Finalmente, usando (1.47) y el hecho de que  $\lambda_+ + \lambda_- = (r - \beta - \gamma)/\gamma$  podemos mostrar que cuando  $\eta = 0$  la fórmula (1.48) nos proporciona para toda  $\delta < 1$  una expresión de la riqueza

$$X(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0. \quad (1.99)$$

Directamente de una observación a (1.99) puede ser corroborado con facilidad que cuando  $\delta \leq 0$  el denominador es positivo, mientras que cuando  $\delta > 0$  el denominador es

positivo únicamente bajo la condición (1.98). Concluimos, por tanto, a partir de (1.63), (1.64) y el hecho de que  $\rho_+ + \rho_- = (r - \beta + \gamma)/\gamma$  que cuando  $\eta = 0$  las siguientes igualdades

$$J(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c^\delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0, 0 < \delta < 1,$$

$$J(c; 0, 0) = \frac{(1 - \delta)c^\delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)}, \quad c \geq 0, \delta < 0,$$

$$J(c; 0, 0) = \frac{1}{\beta} \log c + \frac{r - \beta + \gamma}{\beta^2}. \quad c \geq 0, \delta = 0$$

son válidas.

Podemos invertir a  $X(c; 0, 0)$  para obtener

$$C(x; 0, 0) = \frac{1}{1 - \delta} \left( \beta - r\delta - \frac{r\delta}{1 - \delta} \right) x$$

Entonces si definimos las funciones valor aproximadas para los diversos valores del parámetro  $\delta$ :

$$V_\delta(x) = \left( \frac{1 - \delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)} \right)^{1-\delta} x^\delta, \quad x \geq 0, 0 < \delta < 1, \quad (1.100)$$

$$V_\delta(x) = \left( \frac{1 - \delta}{\beta - r\delta - \gamma\delta/(1 - \delta)} \right)^{1-\delta} x^\delta, \quad x \geq 0, \delta < 0, \quad (1.101)$$

$$V_\delta(x) = \frac{1}{\beta} \log(\beta x) + \frac{r - \beta + \gamma}{\beta^2}, \quad x \geq 0, \delta = 0. \quad (1.102)$$

Tenemos que a partir de (1.41) se obtiene una política constante de inversión dada por

$$\pi_t = \frac{\alpha - r}{(1 - \delta)\sigma^2}, \quad t \geq 0, \delta \leq 1.$$

**Teorema 1.15.1** *Considerese el problema de Consumo/Inversión para una función de utilidad  $U$  como en (1.95) y (1.96) o (1.97) con  $\eta = 0$  y con  $P = 0$  si  $0 < \delta < 1$ , o  $P = -\infty$  si  $\delta \leq 0$ . Si ocurre que  $0 < \delta < 1$  suponga (1.98). Entonces la función valor está dada por (1.100), (1.101) y (1.102) respectivamente.*

#### Demostración:

Este Teorema es una consecuencia directa del Teorema 1.11.1 y del hecho de que si  $0 < \delta < 1$ , entonces (1.98) implica inmediatamente la veracidad de la fórmula (1.12).  $\square$

Se tiene una consecuencia de esta afirmación

**Corolario 1.15.1** *Si  $0 < \delta < 1$ ,  $\eta \geq 0$  y (1.98) no se verifica, entonces concluimos que  $V^*(x) = \infty$  para toda  $x > 0$  y toda  $P$ .*

## 1.16 Dependencia de la política óptima sobre los precios.

En la sección 1.4 especificamos el consumo e inversión para  $N$  acciones con riesgo adaptando la filtración del proceso de Wiener controlado  $N$ -dimensional  $\{\mathcal{B}_t, \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ ; esta filtración puede ser más grande que la filtración  $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \geq 0}$  generada por este proceso browniano. Resaltamos que los procesos estrategias de inversión y consumo óptimos que hemos manejado son, de hecho, adaptados a  $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \geq 0}$ . Esto se debe a que la matriz  $\mathbb{D}$  de (1.2) es no singular. Por otra parte,  $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \geq 0}$  es también una filtración generada por los vectores de precios  $\mathbb{P}(t)$  con  $t \geq 0$ . Por esa razón, la estrategia óptima es controlada por los precios de las acciones.

Para ver más claramente que las políticas óptimas están controladas  $c(t)$  y  $\pi(t)$  por esa filtración, observemos que en el modelo reducido con una acción de riesgo precisamente las estrategias óptimas  $c(t)$  y  $\pi(t)$  vienen dadas por (1.86), donde el estado  $x$  puede ser determinado a partir de la ecuación

$$y_t = \frac{d}{dx} V^*(x_t), \quad (1.103)$$

y  $y_t$  para  $t \geq 0$  está dado por la fórmula (1.87). Como el consumo restringido no es activo, tenemos que  $U'(c_t) = \frac{dV^*}{dx}(x_t)$  y por lo tanto (1.86) y (1.87) se obtienen directamente de (1.51) y (1.55). Además como  $V^*$  es estrictamente cóncava en la fórmula (1.103), puede resolverse en  $x_t$  despejando en  $y_t$  y como  $y_t$  está adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \geq 0}$ , entonces lo estarán también las estrategias  $c(t)$  y  $\pi(t)$ . De manera semejante se puede proceder en el modelo general con  $N$  acciones que evolucionan bajo riesgo.

## 1.17 El modelo con $\alpha$ , $\Sigma$ y $r$ no constante.

Denotemos por  $V(\cdot; \gamma, r)$  la función valor relativa al modelo con coeficientes variables (de momento hemos concluido acerca del modelo cuyos coeficientes son constantes); en este caso  $\gamma$  viene dada por (1.9). Más generalmente, suponemos que  $\alpha$ ,  $\mathbb{D}$  y  $r$  son reemplazadas por sendos procesos aleatorios  $\alpha_t$ ,  $\mathbb{D}_t$  y  $r_t$  continuos por la derecha y asociados a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ .

Este modelo originariamente fue propuesto por Merton [Mer] como punto de partida para analizar puntos de equilibrio. En este sentido podríamos definir también  $\Sigma_t = \mathbb{D}_t \mathbb{D}_t^T$  y suponer que  $\Sigma_t^{-1}$  existe para toda  $t \geq 0$ . Si se define

$$\gamma_t = \frac{1}{2}(\alpha_t - r_t \mathbf{1}) \Sigma_t^{-1} (\alpha_t - r_t \mathbf{1})^T.$$

Podemos demostrar que si  $0 < \gamma' \leq \gamma_t \gamma''$  y  $r' \leq r_t \leq r''$  valen para toda  $t \geq 0$ , entonces ciertamente se puede obtener la siguiente cadena de desigualdades

$$V(x; \gamma', r') \leq V(x) \leq V(x; \gamma'', r''), \quad x \geq 0,$$

donde por supuesto  $V$  denota la función valor para el modelo gobernado por  $\alpha_t$ ,  $\mathbb{D}_t$  y  $r_t$ . Si  $U$  es de tipo HARA con  $\eta = 0$  (ver (1.95)-(1.97)) y el pago  $P$  es  $U(0)/\beta$ , entonces  $V(x; \gamma', r')$  es una cota inferior<sup>3</sup> para  $V(x)$  visto que

$$\int_0^t \left[ \frac{2\sqrt{\gamma'}}{1-\delta} \left( \sqrt{\gamma_s} - \sqrt{\gamma'} \right) + r_s - r' \right] ds \geq 0.$$

Este resultado nos da pie a trabajos futuros que posiblemente sirvan de continuación a esta tesis.

## 1.18 Resultados Tabulados

Presentamos una serie de tablas que resumen los resultados. Aquí  $q$  representa la probabilidad de bancarrota bajo la utilización de la estrategia óptima,  $\gamma$  está dada por ((1.9)) y  $P^*$  por ((1.15)) respectivamente. En la tabla 1.18 se describen los resultados

<sup>3</sup>De hecho es una subsolución para  $V(x)$ .

que se obtuvieron para las combinaciones entre  $U'(0)$  y  $P$ . Las tablas 1.18 y 1.18 representan esquemáticamente los resultados obtenidos en el modelo en el caso en que  $\alpha = r\mathbf{1}$ . En todas las tablas las referencias son presentadas en la sección 1.2.

$\alpha \neq r\mathbf{1}$			
	$P \leq \frac{1}{\beta}U(0)$	$\frac{1}{\beta}U(0) < P \leq P^*$	$P^* < P < \frac{1}{\beta}U(\infty)$
$U'(0)$ = $\infty$	$C_t > 0$ $q = 0$ Este caso fue estudiado por Merton [Mer] Sec. 2.1, 1.11 Teorema 1.12.2	$C_t > a > 0,$ $0 < q < 1,$ si $\beta < r + \gamma,$ $q = 1$ si $\beta \geq r + \gamma.$ Teoremas 1.12.1, 1.13.1 Observación 1.12.1	$C_t > a > 0.$ $0 < q < 1,$ si $\beta < r + \gamma,$ $q = 1$ si $\beta \geq r + \gamma$ Teoremas 1.12.1, 1.13.1 Observación 1.12.1
$U'(0)$ < $\infty$	$C_t = 0$ si $X_t \in (0, \bar{x}]$ $C_t > 0$ si $X_t \in (\bar{x}, \infty)$ $(\bar{x} = 0$ cuando $P = P^*)$ $0 < q < 1$ si $\beta < r + \gamma$ $q = 1$ si $\beta \geq r + \gamma$ Sec. 1.13 y 1.14	$C_t = 0$ si $X_t \in (0, \bar{x}]$ $C_t > 0$ si $X_t \in (\bar{x}, \infty)$ $q = 0$ Sec. 1.14	$C_t > a > 0,$ $0 < q < 1.$ si $\beta < r + \gamma.$ $q = 1$ si $\beta \geq r + \gamma.$ Teorema 1.13.2 Observación 1.13.1

Consumo rápidamente hasta la bancarrota.

en este caso NO hay política óptima y  $V(x) = P$ , para  $x \geq 0$ .



$\alpha = r1$			
y			
$U'(0) = \infty$			
	$P \leq \frac{1}{\beta}U(0)$	$\frac{1}{\beta}U(0) < P \leq P^*$	$P^* < P < \frac{1}{\beta}U(\infty)$
$\beta$ $\geq$ (0 $\leq$ ) $r$	$C_t > 0$ $\pi_t = 0$ $q = 0$	$C_t > a > 0,$ $\pi_t = 0,$ $q = 1$	$C_t > a > 0,$ $\pi_t = 0$ $q = 1$
$\beta$ $\geq$ (0 $\leq$ ) $r$	$C_t > a > 0,$ $\pi_t = 0$ $q = 1$	$C_t$ irrelevante $\pi_t = \infty$ si $X_t \in [0, X_\infty),$ $q = (X_\infty - x)/X_\infty$ si $x \in [0, X_\infty);$ $C_t > a > 0, \pi_0$ si $X_t \in [X_\infty, \infty),$ $q = 0$ si $x \in [0, X_\infty),$	lo mismo que en el cuadro de la izquierda
$\beta$ $\geq$ (0 $\leq$ ) $r$	$C_t = rX_t,$ $\pi_t = 0,$ $q = 0$	$C_t = rX_\infty,$ $\pi_t$ arbitrario si $X_t \in [0, X_\infty),$ $\frac{X_\infty - x}{X_\infty} \leq q \leq 1$ si $x \in [0, X_\infty);$ $C_t = rX_t, \pi_t = 0$ si $X_t \in [X_\infty, \infty),$ $q = 0,$ si $X_t \in [X_\infty, \infty).$	lo mismo que en el cuadro de la izquierda

Consumo rápidamente hasta la bancarrota,

en este caso NO hay política óptima y  $V(x) = P$ , para  $x \geq 0$ .

$\alpha = r\mathbf{1}$			
$y$			
$U'(0) < \infty$			
	$P \leq \frac{1}{\beta}U(0)$	$\frac{1}{\beta}U(0) < P \leq P^*$	$P^* < P < \frac{1}{\beta}U(\infty)$
$\beta$ > $r$	$C_t > 0$ $\pi_t = 0$ $q = 1$ si $P = \frac{1}{\beta}U(0)$ .	$C_t > a > 0,$ $\pi_t = 0,$ $q = 1$	$C_t > a > 0,$ $\pi_t = 0$ $q = 1$
$\beta$ < $r$	$C_t = 0$ si $X_t \in (0, \bar{x}]$ , $C_t > 0$ si $X_t \in (\bar{x}, \infty),$ $\pi_t = 0$ $q = 0$ .	$C_t$ irrelevante si $X_t \in [0, X_\infty)$ . $C_t = 0,$ si $X_t \in [X_\infty, \bar{x}]$ , ( $X_\infty = \bar{x}$ si $P = P^*$ ); $\pi_t = \begin{cases} \infty & \text{si } X_t \in [0, X_\infty), \\ 0 & \text{si } X_t \in [X_\infty, \infty), \end{cases}$ $q = \begin{cases} (X_\infty - x)/X_\infty & \text{si } x \in [0, X_\infty); \\ 0 & \text{si } x \in [X_\infty, \infty); \end{cases}$	$C_t$ irrelevante si $X_t \in [0, X_\infty)$ $C_t > a > 0$ si $X_t \in [X_\infty, \infty)$ ; $\pi_t = \begin{cases} \infty & \text{si } X_t \in [0, X_\infty), \\ 0 & \text{si } X_t \in [X_\infty, \infty); \end{cases}$ $q = \begin{cases} \frac{X_\infty - x}{X_\infty} & \text{si } X_t \in (0, X_\infty), \\ 0 & \text{si } X_t \in [X_\infty, \infty). \end{cases}$

Consumo rápidamente hasta la bancarrota,  
en este caso NO hay política óptima y  $V(x) = P$ , para  $x \geq 0$ .

# Capítulo 2

## El Modelo General de Consumo/Inversión

### 2.1 Introducción.

En esta sección se aplica la teoría del Cálculo Estocástico y ecuaciones diferenciales a problemas relacionados con financiación económica. La primera parte establece los preliminares y métodos empleados más comúnmente para el tratamiento de este tipo de problemas; sin embargo, la exposición constituye por sí sola una aportación a la literatura existente sobre el tema. Inicialmente se presenta el Modelo del precio de opciones (*option pricing Model*), derivando el modelo de Black & Scholes (1973) con su fórmula de precios de opciones. La segunda aplicación es el modelo de inversión/consumo (*the investment/consumption model*) formulado por Merton (1971). La tercera parte consiste de resultados pequeños, pero originales, y algunas aportaciones apropiadas para el nivel de licenciatura. En concreto estos resultados se trabajan en el problema con valores en la frontera de tipo Dirichlet. En esa parte se abordan algunos ejemplos originales de instrumentos financieros que exhiben la profunda diferencia entre ellos debido a aparentemente pequeñas diferencias en el problema de contorno respectivo. El modelo propiamente no había sido tratado en una tesis de licenciatura debido a su complejidad, sin embargo, lo original del trabajo radica también en el nivel de exposición y técnico alcanzado, tanto en la asimilación de los conocimientos, como en la exposición y en las aportaciones originales.

Esos problemas son unificados por la técnica y la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas al modelo considerando posibilidades de riesgo en tiempos continuos

Sea cual sea la condición en el contorno, esta teoría nos lleva a caracterizar a la función valor y proceso de consumo óptimo en un contexto más general que el considerado aquí (ver [So], [DiSo1] y [DiSo2]).

Se presenta el modelo con una clase de coeficientes constantes para ilustrar el uso de las ecuaciones HJB en el control estocástico.

## 2.2 Procesos de Portafolio y Consumo.

Consideremos un mercado donde hay  $N + 1$  acciones (u opciones) que son tratadas continuamente. Supongamos en esta sección que existe un tiempo fijo (un *horizonte*)  $0 \leq T \leq \infty$ . Una de las acciones llamada *bono* tiene un precio  $P_0(t)$  que evoluciona de acuerdo a la ecuación diferencial

$$\begin{cases} dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt & 0 \leq t \leq T, \\ P_0(0) = p_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

El resto de las acciones llamadas *stocks* son acciones de riesgo cuyos precios están modelados por la EDE lineal para  $i = 1, \dots, N$ ;

$$\begin{cases} dP_i(t) = b_i(t)P_i(t)dt + P_i(t) \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}(t)dB_j^{(i)} & 0 \leq t \leq T, \\ P_i(0) = p_i \end{cases} \quad (2.2)$$

donde el proceso  $B_j^{(i)}$  es la componente  $j$  del movimiento browniano  $N$ -dimensional, definido sobre un cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$  respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , que es la  $\sigma$ -álgebra completada bajo la medida  $\mathbf{P}$  de la filtración estándar obtenida del browniano  $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t \geq 0}$ . El proceso *tasa de interés*  $\{r_t, \mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ , el proceso *tasa media de retorno*  $\mathbf{b}(t) = \{(b_1(t), \dots, b_N(t))^T; \mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$  y la matriz de dispersión  $\{\sigma(t); \mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$  son supuestos medibles, adaptados y acotados uniformemente en  $(t, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ .

Supondremos que  $a(t) = \sigma(t)\sigma(t)^t$  es elíptica<sup>1</sup>, es decir, que para cada  $\varepsilon > 0$

$$\xi^t a(t) \xi \geq \varepsilon \|\xi\|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leq t \leq T \text{ c.s.} \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Es decir, que el movimiento browniano  $N$ -dimensional es no-degenerado

Como se puede observar, una consecuencia inmediata de (2.3) es que  $\sigma^T(t)$  tiene inversa y además

$$\|(\sigma^T(t))^{-1}\xi\| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\xi\| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leq t \leq T \text{ c.s.} \quad (2.4)$$

En la práctica un inversor desea introducirse en el mercado en un instante inicial invirtiendo la cantidad  $x \geq 0$  en las  $N + 1$  acciones antes mencionadas.

Sea  $N_i(t)$  el número de unidades del título  $i$  que tiene el inversor al tiempo  $t$ . De esta manera la riqueza inicial se escribe como  $\mathcal{X}_0 = x = \sum_{i=0}^N N_i(0)p_i$  y la *riqueza* del inversor al tiempo  $t$  como

$$\mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t)P_i(t). \quad (2.5)$$

Si dejamos evolucionar este proceso y observamos los valores en dos puntos del tiempo, digamos en  $t$  y  $t + h$ , y si no hay inyección o extracción total de fondos de la riqueza en este lapso de tiempo, entonces

$$\mathcal{X}_{t+h} - \mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t) [P_i(t+h) - P_i(t)]. \quad (2.6)$$

Sin embargo, si el inversor decide reducir la riqueza (después de transcurrido un lapso de tiempo  $h$ ) mediante el *consumo* de un monto  $hC_{t+h}$  bajo un acuerdo o regla, entonces (2.6) se reemplaza por

$$\mathcal{X}_{t+h} - \mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t) [P_i(t+h) - P_i(t)] - hC_{t+h}. \quad (2.7)$$

El análogo de tiempo continuo de (2.7) es

$$d\mathcal{X}_t = \sum_{i=0}^N N_i(t)dP_i(t) - C_t dt.$$

Sustituyendo (2.1) y (2.2) en (2.5) y denotando por  $\pi_i(t) \doteq N_i(t)P_i(t)$ , con  $1 \leq i \leq N$ , podemos obtener

$$d\mathcal{X}_t = (r(t)\mathcal{X}_t - C_t)dt + \sum_{i=1}^N (b_i(t) - r(t))\pi_i(t)dt + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_i(t)\sigma_{i,j}(t)d\mathcal{B}_t^{(j)}. \quad (2.8)$$

Escrita en términos vectoriales

$$d\mathcal{X}_t = (r(t)\mathcal{X}_t - C_t)dt + \pi(t)^T \cdot (b(t) - r(t))dt + \pi(t)^T \cdot \sigma(t)d\mathcal{B}_t.$$

Se recuerda la siguiente:

**Definición 2.2.1** Un proceso portafolios (o cartera) denotado por

$$\pi = \{(\pi_1(t), \dots, \pi_N(t))^T, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$$

es un proceso vectorial adaptado y medible para el que

$$\sum_{i=1}^N \int_0^T \pi_i^2(t) dt < \infty \quad c.s. \quad (2.9)$$

Un proceso de consumo  $C = \{C_t; \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$  es un proceso adaptado y medible con valores en  $[0, \infty)$  y

$$\int_0^T C_t dt < \infty \quad c.s. \quad (2.10)$$

### Observación 2.2.1

Cualquiera de las componentes de  $\pi(t)$  puede ser negativa, lo cual puede ser interpretado como una venta rápida de stocks (*short-selling stock*). Por otra parte, el monto invertido en el bono

$$\pi_0(t) = \mathcal{X}_t - \sum_{i=1}^N \pi_i(t)$$

puede ser también negativo.  $\square$

### Observación 2.2.2

Las hipótesis (2.9) y (2.10) aseguran que la ecuación diferencial estocástica (2.8) tiene una única solución fuerte. Mas precisamente esta solución es

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t = & e^{\int_0^t r(s) ds} \left\{ x + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} \left[ \pi(s)^T (b(s) - r(s)\tilde{\mathbf{1}}) - C_s \right] ds \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} \pi^T(s) \sigma(s) dB_s \right\}; \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $\tilde{\mathbf{1}}$  es el vector de dimensión  $N$  de entradas 1. Todos los vectores son vectores columna y los transpuestos denotados por el superíndice  $T$ . La demostración que bajo los supuestos (2.9) y (2.10), el proceso  $\mathcal{X}_t$  que es descrito por (2.11) verifica a la ecuación (2.8) es directa.  $\square$

**Definición 2.2.2** Un par  $(\pi, C)$  de procesos portafolios/consumo se dice que es admisable para el estado inicial  $x \geq 0$  si el proceso de riqueza (2.11) satisface

$$\mathcal{X}_t \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad c.s. \quad (2.12)$$

Si ocurriera que  $b(t) = r(t)\tilde{\mathbf{I}}$  para  $0 \leq t \leq T$ , entonces las tasa media de retorno de las opciones con riesgo y la tasa de interés del bono son equiparables y en ese caso la elección es clara, puesto que no se recibe compensación alguna por el riesgo nos decantamos por el bono. Como se observa el factor de descuento  $e^{-\int_0^t r(s)ds}$  debilita la tasa de crecimiento de todas las acciones. En este caso (2.11) adopta la forma

$$\mathcal{M}_t \doteq \mathcal{X}_t e^{-\int_0^t r(s)ds} - x + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} C_s ds \quad (2.13)$$

que es una integral estocástica. En otras palabras, el proceso consistente de la riqueza actual más el consumo acumulativo, ambas propiamente descontadas, es una martingala local.

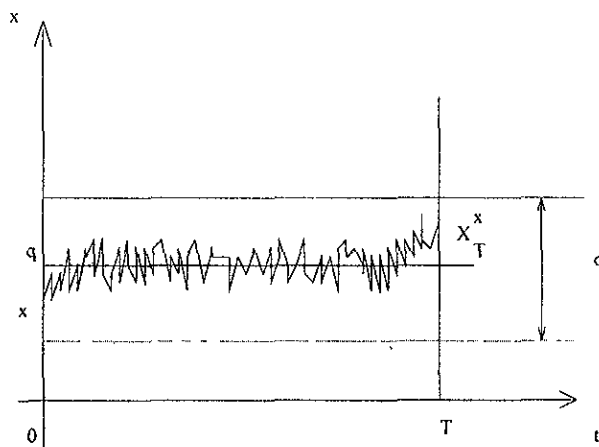


Figura 2 1: Caso de Consumo/Inversión en el que  $b = r\tilde{\mathbf{I}}$ . Obsérvese que en el problema particular de Merton el pago final  $E \left[ \left( P_T^{(1)} - q \right)^+ \right]$ .

Cuando  $b(t) \neq r(t)\tilde{\mathbf{I}}$  (lo cual generalmente ocurre en la práctica debido a que las opciones con riesgo tienen asociadas tasas de interés mayores como factor de compensación de la incertidumbre), entonces (2.13) no es una martingala local bajo  $\mathbf{P}$ , pero si lo es casi con probabilidad 1 bajo una nueva medida  $\tilde{\mathbf{P}}$  asociada al proceso *estandarizado* por el proceso acotado

$$\theta(t) \doteq (\sigma(t))^{-1} (b(t) - r(t)\tilde{\mathbf{I}}). \quad (2.14)$$

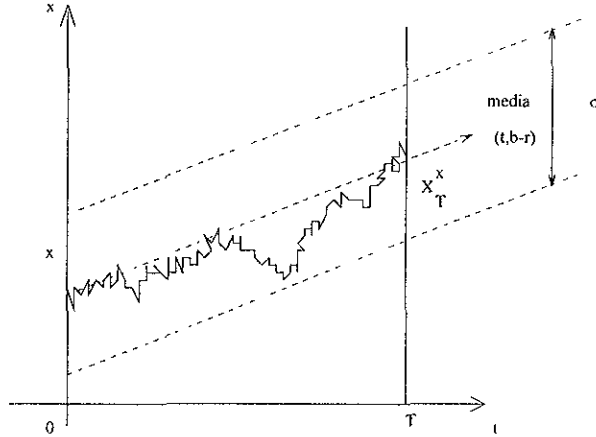


Figura 2.2: Caso de Consumo/Inversión en el que  $b \neq r\bar{1}$ . En este caso se tiene que la media  $b - r\bar{1}$  dirige al proceso (en este caso a lo largo de la recta  $(t, b(t) - r(t))$ ).

Este proceso remueve el término de media  $\pi(t)^T (b(t) - r(t)\bar{1})$  en (2.8) y definimos así un proceso estándar

$$Z_t \doteq \exp \left\{ - \sum_{j=1}^N \int_0^t \theta_j(s) d\mathcal{B}_s^{(j)} - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(s)\|^2 ds \right\}. \quad (2.15)$$

Entonces  $Z = \{Z_t; \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$  ya es una martingala respecto a la nueva medida de probabilidad

$$\tilde{\mathbf{P}}(A) \doteq \mathbf{E}[Z_T \mathbf{1}_A]: \quad A \in \mathcal{F}_T. \quad (2.16)$$

Además, se tiene que  $\mathbf{P}$  y  $\tilde{\mathbf{P}}$  son mutua y absolutamente continuas sobre  $\mathcal{F}_T$  y el proceso

$$\tilde{\mathcal{B}}_t \doteq \mathcal{B}_t + \int_0^t \theta(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.17)$$

es un movimiento browniano  $N$ -dimensional bajo  $\tilde{\mathbf{P}}$ . Intuitivamente hemos conseguido una martingala local "movil" en la dirección del término de media  $\theta$  siguiendo el desplazamiento del movimiento browniano original.

En términos de  $\tilde{\mathcal{B}}$ , (2.11) puede ser reescrita como

$$\mathcal{X}_t e^{-\int_0^t r(s) ds} + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} C_s ds = r + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u) du} \pi^T(s) \sigma(s) d\tilde{\mathcal{B}}_s; \quad (2.18)$$

$$0 \leq t \leq T, \text{ c.s.}$$



donde para un par admisible  $(\pi, C)$  el lado izquierdo de (2.18) es no negativo y el lado derecho es una martingala  $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingala local, por un resultado bien conocido (ver por ejemplo Dellachierie y Meyer [DeM1]) que dice que toda  $\mathbf{P}$ -martingala local no negativa es una supermartingala. Entonces el lado izquierdo y, por lo tanto, también  $\mathcal{X}_t e^{-\int_0^t r(s)ds}$ , es una supermartingala no negativa bajo  $\tilde{\mathbf{P}}$ .

Sin embargo, hasta el momento no se ha contemplado la posibilidad de perder al entrar al juego de la bolsa; ello se detecta en el momento en que la riqueza es nula<sup>2</sup>

$$\tau_0 = T \wedge \inf \{t \in [0, T]; \mathcal{X}_t = 0\}. \quad (2.19)$$

En estas condiciones y a raíz de los elementos anteriores se sabe también que toda supermartingala no negativa, continua y  $\tau_0$  definido como el tiempo de bancarrota satisfacen que

$$\mathcal{X}_t = 0; \quad \tau_0 \leq t \leq T \quad \text{es cierta c.s. sobre } \{\tau_0 < T\}.$$

Si  $\tau_0 < T$ , diremos que la bancarrota ocurre al tiempo  $\tau_0$ .

Por la propiedad de las supermartingalas en (2.18) obtenemos

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \mathcal{X}_T e^{-\int_0^T r(s)ds} + \int_0^T C_t e^{-\int_0^t r(s)ds} dt \right] \leq x; \quad (2.20)$$

por lo tanto, la condición necesaria para la admisibilidad debería ser:

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T C_t e^{-\int_0^t r(s)ds} dt \right] \leq x. \quad (2.21)$$

Esta condición resultará también suficiente para la admisibilidad, en el sentido de la siguiente proposición. Antes mencionaremos un resultado técnico clásico que nos permitirá hacer la demostración.

**Teorema 2.2.1** *Sea  $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t; 0 \leq t < \infty\}$  una submartingala y suponga que la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$  es adaptada, entonces el proceso  $\mathbf{X}$  tiene una modificación continua por la derecha si y sólo si la función  $t \mapsto \mathbb{E}(\mathbf{X}_t)$  de  $[0, \infty)$  a  $\mathbb{R}$  es continua por la derecha. Si una tal modificación continua por la derecha existe, ésta puede ser elegida continua por la derecha sobre  $[0, \infty)$  con límites izquierdos finitos sobre  $(0, \infty)$  y adaptado a  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ , por lo tanto, una submartingala con respecto a  $\{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t < \infty}$ . □*

<sup>2</sup>Aunque, en realidad, se puede definir que la bancarrota ocurra cuando la riqueza alcance un cierto valor  $P$  prefijado de antemano que indique el pago por salir de la bolsa

**Proposición 2.2.1** *Supóngase  $x \geq 0$  y un proceso de consumo  $C$  dado tal que (2.21) se satisface, entonces existe un proceso de portafolios  $\pi$  tal que el par  $(\pi, C)$  es admisible para la inversión inicial  $x$ .*

**Demostración:**

Sea  $D \doteq \int_0^T e^{-\int_0^t r(s)ds} dt$  y defina el proceso no negativo

$$\xi_t \doteq \tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_t^T C_s e^{-\int_t^s r(u)du} ds \middle| \mathcal{F}_t \right] + (x - \tilde{\mathbb{E}}[D]) e^{\int_0^t r(s)ds},$$

tal que

$$\xi_t = e^{\int_0^t r(s)ds} \left\{ x + m_t - \int_0^t C_s e^{-\int_0^s r(u)du} ds \right\}, \quad (2.22)$$

donde

$$m_t \doteq \tilde{\mathbb{E}}[D | \mathcal{F}_t] - \tilde{\mathbb{E}}[D] = \frac{\mathbb{E}[D Z_T | \mathcal{F}_t]}{Z_t} - \mathbb{E}(D Z_T)$$

por la regla de Bayes.

Gracias al Teorema 2.2.1 podemos suponer que  $\mathbf{P}$ -c.d. trayectoria de la martingala

$$\mathcal{N}_t \doteq \mathbb{E}(D Z_T | \mathcal{F}_t), \quad \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t \leq T$$

es continua por la derecha sobre  $[0, \infty)$ , con límites izquierdos finitos sobre  $(0, \infty)$  y también existe un proceso cuadrático medible, adaptado y  $\mathbb{R}^N$ -valuado  $Y$  con

$$\int_0^T \|Y(t)\|^2 dt < \infty \quad \text{y} \quad (2.23)$$

$$\mathcal{N}_t = \mathbb{E}(D Z_T) + \sum_{j=1}^N \int_0^t Y_j(s) d\tilde{\mathcal{B}}_s^{(j)}; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.24)$$

válida  $\mathbf{P}$ -c.s. Ahora  $m_t = u(\mathcal{N}_t, Z_T) - \mathbb{E}(D Z_T)$ , donde  $u(x, y) = (x/y)$ , y de la regla de Ito obtenemos con  $\varphi(t) \doteq (Y(t) + \mathcal{N}_t \theta(t))/Z_t$ :

$$m_t = \sum_{j=1}^N \int_0^t \varphi_j(s) d\tilde{\mathcal{B}}_s^{(j)}; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.25)$$

Usando las relaciones  $dZ_t = -Z_t \theta^T(t) d\mathcal{B}_t$  y (2.17). Ahora definimos

$$\pi(t) = e^{\int_0^t r(s)ds} (\sigma^T(t))^{-1} \varphi(t), \quad (2.26)$$

tal que (2.22) proviene de (2.18) cuando se hace la identificación  $\xi = X$ . La condición (2.9) se sigue desde (2.4), (2.23), la acotabilidad de  $\theta$  y la continuidad de la trayectoria de  $Z$  y  $\mathcal{N}$  (la última debería ser una consecuencia de (2.24)).  $\square$

### Observación 2.2.3

Siendo  $\{\mathcal{B}_t; \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$  un movimiento browniano  $N$ -dimensional. Sea  $M = \{M_t; \mathcal{F}_t : 0 \leq t < \infty\}$  una martingala local con  $M_0 = 0$  y trayectorias continuas por la derecha sobre  $[0, \infty)$  con límites izquierdos finitos sobre  $(0, \infty)$  c.s. Entonces existe un proceso progresivamente medible  $Y^{(j)} = \{Y_t^{(j)}, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$  tal que

$$\int_0^T (Y_t^{(j)})^2 dt < \infty; \quad 1 \leq j \leq N, \quad 0 \leq T < \infty,$$

y

$$M_t = \sum_{j=1}^N \int_0^t Y_s^{(j)} d\mathcal{B}_s^{(j)}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

En particular,  $M$  es c.s. continua.  $\square$

### Observación 2.2.4

La representación (2.25) no puede ser obtenida de una aplicación directa de la Observación 2.2.3 a la  $\tilde{\mathbf{P}}$ -martingala  $\{m_t; \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ . La razón es que la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  es la  $\sigma$ -álgebra aumentada (bajo  $\mathbf{P}$  o  $\tilde{\mathbf{P}}$ ) de  $\{\mathcal{F}_t^{\mathcal{B}}\}$  y no de  $\{\mathcal{F}_t^{\tilde{\mathcal{B}}}\}$ .  $\square$

## 2.2.1 Precios de Opciones

En el contexto de la sección pasada supongamos que al tiempo  $t = 0$  firmamos un contrato que nos proporciona la compra de una opción, de la que se obtiene en un tiempo específico  $T$  (llamado *madurez o día de la expiración*) una cantidad del stock 1 con un precio específico  $q$ , llamado el *precio en ejercicio*. En la fecha de vencimiento, si el precio  $P_T^{(1)}$  del stock 1 está por abajo del anteriormente llamado precio en ejercicio, entonces perdemos; de otra manera si  $P_T^{(1)} > q$ , podemos ejercitar nuestra opción (hacer líquida la inversión) (i.e. comprar una acción con el precio preasignado  $q$ ) y entonces podemos vender inmediatamente en el mercado con  $P_T^{(1)}$ . Este contrato, que es llamado una *opción*, es equivalente al pago de  $(P_T^{(1)} - q)^+$  dolares en el tiempo de madurez.

Algunas veces el término *opción europea* es utilizado para describir este instrumento de financiamiento en contraste a una *opción americana*, que puede ser ejecutada en cualquier tiempo entre  $t = 0$  y la madurez.

La siguiente definición provee una generalización del concepto de acción.

**Definición 2.2.3** *Un título contingente (contingent claim) es un instrumento financiero que consiste de:*

- (i) *una tasa de pago  $g = \{g_t; \mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}$ , y*
- (ii) *un pago terminal en la madurez  $f_T$ .*

Aquí  $g$  es no-negativa, medible y es un proceso adaptado;  $f_T$  es variable aleatoria no-negativa,  $\mathcal{F}_T$ -medible y para alguna  $\mu > 1$  tenemos

$$E \left[ f_T + \int_0^T g_t dt \right]^\mu < \infty. \quad (2.27)$$

**Observación 2.2.5**

Una opción es un caso particular de título contingente (*contingent claim*) con  $g \equiv 0$  y  $f_t = (P_T^{(1)} - q)^+$ . □

**Definición 2.2.4** *Sea  $x \geq 0$  dada y el par  $(\pi, C)$  un proceso portafolio/consumo admisible para una inversión inicial  $x$ . Dicho  $(\pi, C)$  es llamado estrategia de vallado o cercado para el título contingente (hedging strategy against the contingent claim)  $(g, f_T)$ , si se tiene que*

- (i)  $C_t = g; 0 \leq t \leq T$  y
- (ii)  $X_T = f_T$  son válidas casi seguramente, donde  $X$  es el proceso de riqueza asociado con el par  $(\pi, C)$  y con la condición inicial  $X_0 = x$ .

El concepto de estrategia de vallado o cercado (*hedging strategy*) es introducido para obtener la solución del problema de valoración de un título contingente. pero ¿Cómo se obtiene el precio a pagar al tiempo  $t = 0$  para un título contingente? Si existe una estrategia de vallado que es admisible para la inversión inicial  $X_0 = x$ , entonces un agente compra al tiempo  $t = 0$  el título contingente  $(g, f_T)$  para el precio  $x$  en que debería ser invertida la riqueza, de tal manera que multiplicará el pago del título contingente.

Consecuentemente, el precio del título no debería ser mas grande que  $x$ . ¿Deberíamos empezar además con una riqueza inicial estrictamente mas pequeña que  $x$  y a su vez duplicar el pago del título contingente? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como lo muestra el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 2.2.1

Considérese el caso en que  $r \equiv 0$ ,  $N = 1$ ,  $b_1 \equiv 0$  y  $\sigma \equiv 1$ . Entonces en el título contingente  $g \equiv 0$  y  $f_T \equiv 0$  son dados, también obviamente existe una estrategia de vallado con  $x = 0$ ,  $C \equiv 0$ , y  $\pi \equiv 0$ . Como se observa, para cada  $x > 0$  hay una estrategia de vallado con  $X_0 = x$ , ella es precisamente  $X_t^x = x + \mathcal{B}_t$ .  $\square$

El precio razonable para un título contingente es el número más pequeño  $x \geq 0$  que nos permite la construcción de una estrategia de vallado con riqueza inicial  $x$ . Vamos a mostrar que bajo la condición de elipticidad o no degenerancia del proceso (2.3) y las hipótesis descritas anteriormente, cada título contingente tiene un precio razonable; también derivaremos una fórmula explícita para el modelo de Black & Scholes (1973) para el precio razonable de una opción.

**Lema 2.2.1** *Sea el título contingente  $(g, f_T)$  dado y definido por*

$$Q = e^{-\int_0^T r(u)du} f_T + \int_0^T e^{-\int_0^s r(u)du} g_s ds. \quad (2.28)$$

*Entonces  $\tilde{E}[Q]$  es finito y es una cota inferior del precio razonable de  $(g, f_T)$ .*

#### Demostración:

Recordamos que  $r$  es uniformemente acotada en  $t$  y  $\omega$ , podemos escribir  $Q \leq L(f_T + \int_0^T g_s ds)$ , donde  $L$  es alguna constante no aleatoria. Desde (2.15) tenemos para cada  $\nu \geq 1$

$$\begin{aligned} Z_T^\nu &= \exp \left\{ -\sum_{i=1}^N \int_0^T \nu \theta_i(s) d\mathcal{B}_s^{(i)} - \frac{1}{2} \int_0^T \|\nu \theta(s)\|^2 ds \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{2} \int_0^T \|\theta(s)\|^2 ds \right\}, \end{aligned}$$

y puesto que  $\|\theta\|$  es acotada para alguna constante  $K$ , se sigue que

$$\mathbb{E}[Z_T^\nu] \leq \exp \left\{ \frac{\nu(\nu-1)}{2} K^2 T \right\} < \infty.$$

Con  $\mu$  como en (2.27) y  $\nu$  dada por  $(1/\nu) + (1/\mu) = 1$ , la desigualdad de Hölder implica

$$\begin{aligned} \tilde{E}[Q] &\leq L \mathbb{E} \left[ Z_T \left( f_T + \int_0^T g_s ds \right) \right] \\ &\leq L (\mathbb{E}[Z_T^\nu])^{1/\nu} \left[ \mathbb{E} \left( f_T + \int_0^T g_s ds \right)^\mu \right]^{1/\mu} < \infty. \end{aligned}$$

Ahora supóngase que  $(\pi, C)$  es una estrategia de vallado para el título contingente  $(g, f_T)$  y el correspondiente proceso de riqueza es  $X$  con condición inicial  $X_0 = x$ . Recordando la definición 2.2.4 y (2.28) reescribimos (2.20) como  $\tilde{E}[Q] \leq x$ .  $\square$

**Teorema 2.2.2** *Bajo la condición (2.3) y las hipótesis anteriores, el precio razonable de un título contingente  $(g, f_T)$  es  $\tilde{E}[Q]$ . Además, existe una estrategia de vallado con riqueza inicial  $x = \tilde{E}[Q]$ .*

**Demostración:**

Definimos

$$\xi_t \equiv e^{\int_0^t r(s)ds} \left[ \tilde{E}[Q] + m_t - \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} g_s ds \right], \quad (2.29)$$

donde  $m_t = \tilde{E}[Q | \mathcal{F}_t] - \tilde{E}[Q]$ . Procediendo exactamente como en la demostración de la proposición 2.2.1 con  $D$  reemplazado por  $Q$ , definimos  $\pi$  por (2.26) y  $C \equiv g$ , tal que (2.29) a través de (2.18) con las identificaciones  $X = \xi$ ,  $x = \tilde{E}[Q]$ . Pero entonces (2.29) puede también concebirse como

$$X_t = \tilde{E} \left[ e^{\int_t^T r(u)du} f_T + \int_t^T e^{-\int_t^s r(u)du} g_s ds \middle| \mathcal{F}_t \right]; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.30)$$

cuando  $X_t \geq 0$ ;  $0 \leq t \leq T$  y  $X_T = f_T$  han sido vistas con certeza casi seguramente.  $\square$

**Observación 2.2.6**

La estrategia de vallado construida en la demostración del Teorema 2.2.2 es esencialmente (en el sentido de la med  $\times$  P-c.d. equivalentemente) la única estrategia de vallado correspondiente a la riqueza inicial  $x = \tilde{E}[Q]$ . En particular, el proceso  $X$  de (2.30) da el único proceso de riqueza correspondiente al precio razonable: éste es llamado el proceso de valoración (*valuation process*) del título contingente.  $\square$

**Ejemplo 2.2.2**

Siguiendo con el Modelo de Black & Scholes (1973) para la fórmula de valoración de opciones con  $N = 1$  y coeficientes constantes  $r(t) \equiv r > 0$ ,  $\sigma_{11}(t) \equiv \sigma > 0$ , el precio del bono es

$$P_0(t) = p_0 e^{rt} \quad 0 \leq t \leq T$$

y el precio de los stocks obedece a

$$dP_1(t) = b_1(t)P_1(t)dt + \sigma P_1(t)d\tilde{B}_t = rP_1(t)dt + \sigma P_1(t)d\tilde{B}_t.$$

Para la opción de compra de una de las acciones del stock al tiempo  $T$  al precio  $q$ , tenemos desde (2.30) el proceso de valoración

$$X_t = \tilde{\mathbb{E}} \left[ e^{-r(T-t)} (P_1(t) - q)^+ | \mathcal{F}_t \right]; \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.31)$$

Para escribir (2.31) en una forma más explícita observamos que la función

$$v(t, x) = \begin{cases} x\Phi(\rho_+(T-t, x)) - qe^{-r(T-t)}\Phi(\rho_-(T-t, x)); & 0 \leq t \leq T, x \geq 0, \\ (x - q)^+ & t = T, x \geq 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

con

$$\rho_{\pm}(t, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \left[ \log \frac{x}{q} + t \left( r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \right], \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

satisface el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + rv = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rx \frac{\partial v}{\partial x}; & \text{sobre } [0, T) \times (0, \infty), \\ v(T, x) = (x - q)^+; & x \geq 0, \end{cases} \quad (2.33)$$

como en las condiciones del Teorema de obtención de representaciones del problema de Cauchy para condiciones de frontera de tipo Dirichlet

Concluimos desde ese Teorema y desde la propiedad de Markov aplicada a (2.31) que

$$X_t = v(t, P_1(t)); \quad 0 \leq t \leq T, \quad \text{c.s.} \quad (2.34)$$

Entonces tenemos una fórmula explícita para el valor de la opción en el tiempo  $t$  en términos del precio actual del stock  $P_1(t)$ , el tiempo de madurez  $T - t$  y el precio del ejercicio  $q$ .  $\square$

### Observación 2.2.7

En las definiciones del ejemplo 2.2.2 pero con  $f_T = h(P_1(T))$ , donde  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función convexa de clase  $\mathcal{C}^2$  a trozos con  $h(0) = h'(0) = 0$ , se demuestra que el proceso de valoración para un *título contingente*  $(0, f_T)$  está dado por

$$X_t = \tilde{\mathbb{E}} \left[ e^{-r(T-t)} h(P_1(T)) | \mathcal{F}_t \right] = \int_0^{\infty} h''(q) v_{q,T}(t, P_1(t)) dq. \quad (2.35)$$

Aquí denotamos por  $v_{q,T}(t, x)$  la función de (2.32).  $\square$

## 2.3 Consumo e Inversión Óptimo (Teoría General).

En esta subsección pasaremos a resolver un *problema de control óptimo* estocástico para los modelos económicos vistos en la primera sección. Supongamos que, adicionalmente a los datos proporcionados ahí, tenemos un *proceso de descuento* medible, adaptado, uniformemente acotado  $\beta = \{\beta(s), \mathcal{F}_s; 0 \leq s \leq T\}$  y  $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , una función de utilidad estrictamente creciente, estrictamente cóncava y continuamente diferenciable para la que  $U(0) = 0$  y  $U'(\infty) \doteq \lim_{c \rightarrow \infty} U'(c) = 0$ . Permitiendo la posibilidad de que  $U'(0) = \lim_{c \downarrow 0} U'(c) = \infty$  y Dada una riqueza inicial  $x \geq 0$ , un inversor puede elegir un par admisible  $(\pi, C)$  de procesos portafolio y consumo, de manera que se maximice

$$V_{\pi, C}(x) \doteq \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^s \beta(u) du} U(C_s) ds \right].$$

Definimos la función valor de este problema como

$$V(x) = \sup_{(\pi, C)} V_{\pi, C}(x), \quad (2.36)$$

donde el supremo es tomado sobre todos los pares  $(\pi, C)$  admisibles para  $x \geq 0$ . Desde la condición de admisibilidad (2.21) es claro que  $V(0) = 0$ .

Recordamos de la Proposición 2.2.1 que para un proceso de consumo dado  $C$ , (2.21) es satisfecha si y sólo si existe un portafolio de inversión  $\pi$  que hace que  $(\pi, C)$  sea admisible para  $x$ . Definimos  $\mathcal{D}(x)$  la clase de procesos de consumo para los cuales

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t r(s) ds} C_t dt \right] = x. \quad (2.37)$$

Esto indica que en la maximización indicada por (2.36) podemos ignorar el proceso portafolio  $\pi$  y sólo necesitaríamos considerar el consumo  $C \in \mathcal{D}(x)$ .

**Proposición 2.3.1** *Para cada  $x \geq 0$  tenemos*

$$V_{\pi, C}(x) \doteq \sup_{C \in \mathcal{D}(x)} \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} U(C_t) dt \right].$$



**Demostración:**

Supongamos que  $(\pi, C)$  es admisible para  $x > 0$ , y sea

$$y \doteq \tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t r(s) ds} C_t dt \right] \leq x.$$

Si  $y > 0$ , podemos definir  $\hat{C}_t = (x/y)C_t$  tal que  $\hat{C} \in \mathcal{D}(x)$ . Existe entonces un proceso portafolio  $\hat{\pi}$  tal que  $(\hat{\pi}, \hat{C})$  es admisible para  $x$ , y

$$V_{\pi, C}(x) \leq V_{\hat{\pi}, \hat{C}}(x). \quad (2.38)$$

Si  $y = 0$ , entonces  $C_t = 0$ , c.d.  $t \in [0, T]$ , casi seguramente, y podemos encontrar una constante  $c > 0$  tal que  $\hat{C}_t \equiv c$  satisface (2.37). Nuevamente, (2.38) es válida para algún  $\hat{\pi}$  elegido tal que  $(\hat{\pi}, \hat{C})$  es admisible para  $x$ .  $\square$

Debido a que  $U' : [0, \infty] \xrightarrow{\text{sobre}} [0, U'(0)]$  es estrictamente decreciente, ésta tiene una función inversa estrictamente decreciente  $I : [0, U'(0)] \xrightarrow{\text{sobre}} [0, \infty]$ . Extendemos  $I$  por cero  $I(y) = 0$  para  $y > U'(0)$ . Observe que  $I(0) = \infty$  y  $I(\infty) = 0$ . Se verifica fácilmente que

$$U(I(y)) - yI(y) \geq U(c) - yc; \quad 0 \leq c < \infty. \quad 0 < y < \infty. \quad (2.39)$$

Definamos la función  $\mathcal{X} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  por

$$\mathcal{X}(y) = \tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^s r(u) du} I \left( y Z_s e^{-\int_0^s (\beta(u) - r(u)) du} \right) ds \right], \quad (2.40)$$

y supongamos que

$$\mathcal{X}(y) < \infty; \quad 0 < y < \infty. \quad (2.41)$$

Veremos algunas consecuencias más adelante sobre esta suposición en la siguiente subsección, donde nos especializaremos en el modelo para el caso de coeficientes constantes. Definimos

$$\bar{y} \doteq \sup \{ y \geq 0; \mathcal{X} \text{ es estrictamente decreciente sobre } [0, y] \}.$$

**Proposición 2.3.2** *Bajo la hipótesis (2.41),  $\mathcal{X}$  es continua y estrictamente decreciente sobre  $[0, \bar{y}]$  con  $\mathcal{X}(0) = \infty$  y  $\mathcal{X}(\bar{y}) = 0$ .*

*Siendo  $\mathcal{Y} : [0, \infty] \xrightarrow{\text{sobre}} [0, \bar{y}]$  la inversa de  $\mathcal{X}$ . Para una riqueza inicial  $x \geq 0$  definimos el proceso*

$$\eta_s^* \doteq \mathcal{Y}(x) Z_s e^{-\int_0^s (\beta(u) - r(u)) du}, \quad (2.42)$$

$$C_s^* \doteq I(\eta_s^*). \quad (2.43)$$

La definición de  $\mathcal{Y}$  implica que  $C^* \in \mathcal{D}(x)$ . Mostraremos ahora que  $C^*$  es un *proceso de consumo óptimo*.

**Teorema 2.3.1** *Siendo  $x \geq 0$ , supongamos que (2.41) es cierta. Entonces el proceso de consumo dado por (2.43) es óptimo:*

$$V(x) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} U(C_t^*) dt \right]. \quad (2.44)$$

**Demostración:**

Es suficiente comparar  $C^*$  con una  $C \in \mathcal{D}(x)$  arbitraria. Para una tal  $C$  tenemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} (U(C_t^*) - U(C_t)) dt \right] \\ = & \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} [U(I(\eta_t^*)) - \eta_t^* I(\eta_t^*) - (U(C_t) - \eta_t^* C_t)] dt \right] \\ & + \mathcal{Y}(x) \tilde{\mathbb{E}} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t \beta(s) ds} (C_t^* - C_t) dt \right]. \end{aligned}$$

La primera esperanza del lado derecho es no negativa por (2.39) y la segunda se anula debido a que ambas  $C^*$  y  $C$  están en  $\mathcal{D}(x)$ .  $\square$

Tenemos entonces determinada la función valor y el proceso de consumo óptimo; apelamos a la construcción de la prueba de la proposición 2.2.1 para la determinación del correspondiente proceso de cartera óptima  $\pi^*$ . Esto no genera una representación útil de  $\pi^*$ , pero podemos especializarnos en nuestro modelo en varias direcciones para obtener  $V$ ,  $C^*$  y  $\pi^*$  más explícitamente. Haremos esto en la siguiente subsección.

### 2.3.1 Consumo e Inversión óptimos (Coeficientes constantes).

Consideraremos aquí el caso más general que aquél que originalmente fue estudiado por Merton (1971) y reportado sucintamente por Fleming y Rishel (1975), pp. 160-161.

En particular, veremos que  $U$  es tres veces continuamente diferenciable y que en el modelo los datos son constantes:

$$\beta(t) \equiv \beta, \quad r(t) \equiv r, \quad b(t) \equiv b, \quad \sigma(t) \equiv \sigma, \quad (2.45)$$

donde  $b \in \mathbb{R}^N$  y  $\sigma$  es una matriz no singular de  $N \times N$ . Introduciremos el operador lineal diferencial parcial de segundo orden dado por

$$L\varphi(t, y) \doteq -\varphi_t(t, y) + \beta\varphi(t, y) - (\beta - r)y\varphi_y(t, y) - \frac{1}{2}\|\theta\|^2 y^2 \varphi_{yy}(t, y),$$

donde  $\theta = \sigma^{-1}(b - r\tilde{1})$  de acuerdo con (2.14). Nuestra suposición a lo largo de esta subsección es que  $\theta$  es diferente de cero y que existen funciones  $G : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  y  $S : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  de clase  $C^{1,3}$  tales que

$$LG(t, y) = U(I(y)); \quad 0 \leq t \leq T, y > 0; \quad (2.46)$$

$$G(T, y) = 0; \quad y > 0; \quad (2.47)$$

y

$$LS(t, y) = yI(y); \quad 0 \leq t \leq T, y > 0; \quad (2.48)$$

$$S(T, y) = 0; \quad y > 0; \quad (2.49)$$

Esto significa que  $G_t(t, y)$ ,  $G_{ty}(t, y)$ ,  $G_y(t, y)$ ,  $G_{yy}(t, y)$ , y  $G_{yyy}(t, y)$  existen para toda  $0 \leq t \leq T$ ,  $y > 0$ , y que esas funciones son conjuntamente continuas en  $(t, y)$ . Lo mismo es cierto para  $S$ . Supongamos, además, que  $G$ ,  $G_y$ ,  $S$  y  $S_y$  satisfacen condiciones de crecimiento polinomial de la forma

$$\max_{0 \leq t \leq T} H(t, y) \leq M(1 + y^{-\lambda} + y^\lambda); \quad y > 0 \quad (2.50)$$

para alguna  $M > 0$  y  $\lambda > 0$ .

### Observación 2.3.1

Como se recordará, siendo  $H : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  de clase  $\mathcal{C}^{1,2}$  sobre su dominio y satisfaciendo (2.50),  $g : [0, T] \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continua y supóngase que  $H$  resuelve el problema de Cauchy

$$\begin{cases} LH(t, y) = g(t, y), & 0 \leq t \leq T, y > 0, \\ H(t, y) = 0; & y > 0. \end{cases}$$

Entonces  $H$  admite una representación estocástica

$$H(t, y) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\beta(s-t)} g(s, Y_s^{(t,y)}) ds \right],$$

donde con  $t \leq s \leq T$ :

$$Y_s^{(t,y)} \doteq y e^{(\beta-r)(s-t)} Z_s^t. \quad (2.51)$$

$$Z_s^t \doteq \exp \left( -\theta^T (B_s - B_t) - \frac{1}{2} \|\theta\|^2 (s-t) \right). \quad \square \quad (2.52)$$

Aquí deberíamos realizar el cambio de variable  $\ell = \log(y)$ .

A partir de la Observación 2.3.1 derivamos las fórmulas de representación estocásticas

$$G(t, y) = \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta(s-t)} U(I(Y_s^{(t,y)})) ds \right]. \quad (2.53)$$

$$S(t, y) = y \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} Z_s^t I(Y_s^{(t,y)}) ds \right]. \quad (2.54)$$

Es útil considerar el problema de *consumo/inversión* con otros tiempos diferentes de cero.

Entonces para  $0 \leq t \leq T$  fijemos  $x \geq 0$ , definimos el valor

$$V(t, x) = \sup_{(\pi, C)} \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]. \quad (2.55)$$

donde  $(\pi, C)$  debería ser admisible para  $(t, s)$ , lo cual significa que el proceso de riqueza determinado por la ecuación

$$\begin{aligned} X_t &= x + \int_t^s (rX_u - C_u) du + \sum_{i=1}^N \int_t^s (b_i - r) \pi_i(u) du \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_t^s \pi_i(u) \sigma_{ij} d\mathcal{B}_u^{(j)}, \quad t \leq s \leq T, \end{aligned} \quad (2.56)$$

resulta no negativa. Correspondiente a un proceso de consumo  $C$ , hay un proceso portafolio  $\pi$ , tal que  $(\pi, C)$  resulta admisible para  $(t, x)$  y existe si y sólo si (ver la proposición 2.3.1 )

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} Z_s^t C_s ds \right] \leq x. \quad (2.57)$$

Para  $0 \leq t \leq T$ , defina la función  $\mathcal{X}(t, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  por

$$\mathcal{X}(t, y) \doteq \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-r(s-t)} Z_s^t I(Y_s^{(t, y)}) ds \right]. \quad (2.58)$$

Mediante una comparación entre (2.54) y (2.58) se demuestra que

$$y\mathcal{X}(t, y) = S(t, y) \quad 0 < y < \infty. \quad (2.59)$$

Ahora sí

$$\bar{y}(t) \doteq \sup \{y \geq 0; \mathcal{X}(t, \cdot) \text{ es estrictamente decreciente sobre } [0, y]\} = \infty.$$

y tenemos justamente, como en la Proposición 2.3.2 , que para  $0 \leq t < T$ ,  $\mathcal{X}(t, \cdot)$  es estrictamente decreciente sobre  $[0, \infty)$  con  $\mathcal{X}(t, 0) = \infty$  y  $\mathcal{X}(t, \infty) = 0$ . Denotaremos por  $\mathcal{Y}(t, \cdot) : [0, \infty) \xrightarrow{\text{sobre}} [0, \infty)$  la inversa de  $\mathcal{X}(t, \cdot)$ :

$$\mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t, y)) = y \quad 0 \leq y \leq \infty, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.60)$$

Si definimos ahora para  $t \leq s \leq T$ .

$$\eta_s^{(t, x)} \doteq \mathcal{Y}(t, x) Z_s^t e^{(\beta-r)(s-t)}, \quad (2.61)$$

$$C_s^* \doteq I(\eta_s^{(t, x)}), \quad (2.62)$$

entonces

$$V(t, x) = \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta s} U(C_s^*) ds \right]. \quad (2.63)$$

Esta afirmación se demuestra como en el Teorema 2.3.1 , sólo que el nuevo hecho aquí es que para  $y = \mathcal{Y}(t, x)$ , tenemos que  $\eta^{(t, x)} = Y^{(t, y)}$  y consecuentemente

$$V(t, x) = e^{-\beta t} G(t, \mathcal{Y}(t, x)); \quad 0 \leq t < T, \quad x > 0. \quad (2.64)$$

Entonces, si resolvemos los problemas de Cauchy (2.46) - (2.47) y (2.48) - (2.49), podemos expresar  $V(t, x)$  en forma implícita.

**Ejemplo 2.3.1**

Sea  $U(c) = c^\delta$ , donde  $0 < \delta < 1$ . Muestre que si

$$k \doteq \frac{1}{1-\delta} \left( \beta - r\delta - \frac{1}{2} \|\theta\|^2 \frac{\delta}{1-\delta} \right)$$

es no nulo, entonces

$$\begin{aligned} G(t, y) &= \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}) \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\delta/(\delta-1)}, \\ S(t, y) &= \delta G(t, y), \\ V(t, x) &= e^{-\beta t} \left( \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k} \right)^{1-\delta} x^\delta. \end{aligned}$$

Si  $k = 0$ , entonces  $G(t, y) = (T-t) \left( \frac{y}{\delta} \right)^{\delta/(\delta-1)}$ ,  $S(t, y) = \delta G(t, y)$ . y  $V(t, x) = e^{-\beta t} (T-t)^{1-\delta} x^\delta$ .

Directamente de la representación (2.64) para la función valor en nuestro problema de consumo/inversión no tenemos representaciones derivadas para los procesos de consumo e inversión óptimos en forma feedback, i.e. como funciones óptimas del proceso de riqueza óptima. Para obtener tales representaciones introducimos la ecuación *Hamilton Jacobi Bellman (HJB)* de este modelo. Esta ecuación diferencial parcial *no lineal* ofrece una caracterización de la función valor y es la técnica usual para la cual los problemas de control óptimo estocástico son atacados, porque debido a su naturaleza no lineal esta ecuación típicamente resulta difícil de resolver. En el presente problema tenemos que rodear la ecuación HJB por resolver; en su lugar resolvemos dos ecuaciones *lineales* (2.46) y (2.48).  $\square$

**Lema 2.3.1** (*Resultado de Verificación para la ecuación HJB*). Supóngase que  $Q : [0, T] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es continua de clase  $C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$  y resuelve la ecuación HJB

$$\begin{aligned} Q_t(t, x) + \max_{\substack{c \geq 0 \\ \pi \in \mathbb{R}^N}} \left\{ [rx - c + (b - r\tilde{1})^T \pi] Q_x(t, x) + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi\|^2 Q_{xx}(t, x) \right. \\ \left. + e^{-\beta t} U(c) \right\} = 0; \quad 0 \leq t < T, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Entonces

$$V(t, x) \leq Q(t, x); \quad 0 \leq t < T, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (2.66)$$

**Demostración:**

Para cualquier condición inicial  $(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty)$  y cualquier par admisible  $(\pi, C)$  en  $(t, x)$ , sea  $\{X_s; t \leq s \leq T\}$  el proceso de riqueza determinado por (2.56). Con

$$\tau_n \doteq \left(T - \frac{1}{n}\right)^+ \wedge \inf \left\{ s \in [t, T]; X_s \geq n \text{ ó } X_s \leq \frac{1}{n} \text{ ó } \int_0^s \|\pi(u)\|^2 du = \pi \right\},$$

tenemos que  $E \left[ \int_t^{\tau_n} Q_x(s, X_s) \pi^T(s) \sigma dB_s \right] = 0$ . Por lo tanto la regla de Ito implica conjuntamente con (2.56) y (2.65),

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \{Q(\tau_n, X_{\tau_n})\} \\ &= Q(t, x) + E \left[ \int_t^{\tau_n} \left\{ Q_t(s, X_s) + [rX_s - C_s + (b - r\tilde{\mathbf{1}})^T \pi(s)] Q_x(s, X_s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi(s)\|^2 Q_{xx}(s, X_s) \right\} ds \right] \leq Q(t, x) - E \left[ \int_t^{\tau_n} e^{-\beta s} U(C_s) ds \right]. \end{aligned}$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$  y usando el teorema de convergencia monótona, obtenemos  $E \left[ \int_t^T e^{-\beta s} U(C_s) ds \right] \leq Q(t, x)$ . La maximización del lado izquierdo sobre todos los pares  $(\pi, C)$  admisibles proporciona el resultado deseado.  $\square$

Una solución a la ecuación HJB puede no ser única, aun si se especifican las condiciones de frontera

$$Q(t, 0) = 0; \quad 0 \leq t \leq T \quad Q(T, x) = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (2.67)$$

Esto es porque diferentes tasas de crecimiento de  $Q(t, x)$  son posibles cuando  $x$  se aproxima al infinito. Uno espera que la función valor satisfaga la ecuación HJB, y en vista de (2.66) distinguiremos por ello la solución no negativa más pequeña de esta ecuación.

**Proposición 2.3.3** *Bajo las condiciones expuestas al principio de esta subsección, la función valor  $V : [0, T) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es continua, es de clase  $C^{1,2}([0, T) \times (0, \infty))$  y satisface la ecuación HJB (2.65), así como las condiciones de frontera (2.67).*

**Demostración:**

Si  $0 < y \leq U'(0)$ , entonces

$$\frac{d}{dy} U(I(y)) = U'(I(y)) I'(y) = y I'(y); \quad (2.68)$$

si  $y > U'(0)$ , entonces  $I(y) = I'(y) = 0$  y (2.68) resulta válida. De nuestra suposición que  $G$  y  $S$  son de clase  $C^{1,3}$ , podemos diferenciar (2.46), (2.48) con respecto a  $y$ ; observamos que  $\varphi_1(t, y) \doteq -yG_y(t, y)$  y  $\varphi_2(t, y) \doteq -y^2(\partial/\partial y)(S(t, y)/y)$  y ambas satisfacen

$$\begin{cases} L\varphi_i(t, y) &= -y^2 I'(y), & 0 \leq t \leq T, & y > 0, \\ \varphi_i(T, y) &= & 0; & y > 0. \end{cases}$$

En particular,  $I'$  es continua en  $y = U'(0)$ , i.e. una condición necesaria para nuestras suposiciones es  $U''(0) = \infty$ . El problema 2.3.1 implica  $\varphi_1 = \varphi_2$ , porque ambas funciones tienen la misma representación estocástica. Se sigue que

$$G_y(t, y) = y \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{y} S(t, y) \right) = y \mathcal{X}_y(t, y) \quad (2.69)$$

y desde (2.64) y (2.60) tenemos

$$V_x(t, x) = e^{-\beta t} \mathcal{X}_y(t, y). \quad (2.70)$$

$$\mathcal{Y}_i(t, \mathcal{X}(t, y)) = -\mathcal{Y}_r(t, (\mathcal{X}(t, y))) \mathcal{X}_i(t, y). \quad (2.71)$$

Finalmente, desde (2.48) y (2.59) implican que

$$\begin{aligned} -\mathcal{X}_i(t, y) + r\mathcal{X}(t, y) - (\beta - r + \|\theta\|^2)y\mathcal{X}_y(t, y) - \frac{1}{2}\|\theta\|^2y^2\mathcal{X}_{yy}(t, y) &= I(y); \\ 0 < y < \infty, & 0 \leq t < T \end{aligned} \quad (2.72)$$

Deseamos verificar ahora que la función  $V(t, x)$  de (2.64) satisface la ecuación HJB (2.65). Con  $Q = V$ , el lado izquierdo de esta ecuación nos da  $e^{-\beta t}$  veces

$$\begin{aligned} &G_t(t, \mathcal{Y}(t, x)) - \beta G(t, \mathcal{Y}(t, x)) + G_y(t, \mathcal{Y}(t, x))\mathcal{Y}_i(t, x) \\ &+ \max_{\substack{c \geq 0 \\ \pi \in \mathbb{R}^N}} \left[ ((r\tau - c) + (b - r\tilde{\mathbf{I}})^T \pi)\mathcal{Y}(t, x) + \frac{1}{2}\|\sigma^2 \pi\|^2 \mathcal{Y}_r(t, x) + U(c) \right] \end{aligned} \quad (2.73)$$

La maximización sobre  $c$  se completa al definir

$$c = I(\mathcal{Y}(t, x)), \quad (2.74)$$

A partir de la negatividad de  $\mathcal{Y}_r$ , la maximización sobre  $\pi$  se completa definiendo

$$\pi = -(\sigma\sigma^T)^{-1}(b - r\tilde{\mathbf{I}}) \frac{\mathcal{Y}(t, x)}{\mathcal{Y}_i(t, x)}. \quad (2.75)$$



Bajo la sustitución de (2.74), (2.75) en (2.73) lo anterior nos da

$$\begin{aligned} & G_t(t, \mathcal{Y}(t, x)) - \beta G(t, \mathcal{Y}(t, x)) + G_y(t, \mathcal{Y}(t, x)) \mathcal{Y}_t(t, x) \\ & + r x \mathcal{Y}(t, x) - \mathcal{Y}(t, x) I(\mathcal{Y}(t, x)) - \frac{1}{2} \|\theta\|^2 \frac{\mathcal{Y}^2(t, x)}{\mathcal{Y}_x(t, x)} + U(I(\mathcal{Y}(t, x))). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Podemos cambiar las variables en (2.76) tomando  $y = \mathcal{Y}(t, x)$  y usando (2.69), (2.71) y (2.46) para escribir esta expresión como

$$\begin{aligned} G_t(t, y) & - \beta G(t, y) - y \mathcal{X}_t(t, y) + r y \mathcal{X}(t, y) - y I(y) - \frac{1}{2} \|\theta\|^2 y^2 \mathcal{X}_y(t, y) + U(I(y)) \\ & = y \left[ -\mathcal{X}_t(t, y) + r \mathcal{X}(t, y) - (\beta - r + \|\theta\|^2) y \mathcal{X}_y(t, y) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \|\theta\|^2 y^2 \mathcal{X}_{yy}(t, y) - I(y) \right], \end{aligned}$$

la cual se anula debido a (2.72). Esto completa la demostración que  $V$  satisface la ecuación HJB (2.65). Las condiciones de frontera (2.67) son satisfechas por  $V$  en virtud de su definición (2.55) y la condición de admisibilidad (2.57) aplicada cuando  $x = 0$ .

En conclusión, hemos demostrado que para cada  $(t, x) \in [0, T] \times (0, \infty)$  fijo, pero arbitrario, hay un par óptimo  $(\pi^*, C^*)$  de procesos de portafolio y consumo. Siendo  $\{X_s^*; t \leq s \leq T\}$  denota el proceso de riqueza correspondiente. Si ahora repetimos la demostración del Lema 2.3.1, reemplazando  $(\pi, C)$  por  $(\pi^*, C^*)$  y  $Q$  por  $V$ , podemos derivar la desigualdad

$$\begin{aligned} 0 & \leq V(t, x) + \mathbb{E} \left[ \int_t^T \left\{ V_t(s, X_s^*) + [r X_s^* + C_s^* + (b - r \tilde{\mathbf{1}})^T \pi^*(s)] V_x(s, X_s^*) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi^*(s)\|^2 V_{xx}(s, X_s^*) \right\} ds \right] \leq V(t, x) - \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-\beta s} U(C_s^*) ds \right]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Tenemos, usando el Teorema de Convergencia Monótona y la desigualdad

$$\begin{aligned} & V_t(s, X_s^*) + [r X_s^* - C_s^* + (b - r \tilde{\mathbf{1}})^T \pi^*(s)] V_x(s, X_s^*) \\ & + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi^*(s)\|^2 V_{xx}(s, X_s^*) \leq -e^{-\beta s} U(C_s^*) \leq 0; \quad t \leq s \leq T, \end{aligned} \quad (2.78)$$

lo cual se sigue desde la ecuación HJB para  $V$ . Pero (2.63) es válida, tal que la igualdad prevalece en (2.77) y, por lo tanto, también en la primera desigualdad de (2.78), al menos para med  $\times \mathbf{P}$ -casi toda  $(s, \omega)$  en  $[t, T] \times \Omega$ . La igualdad (2.78) ocurre si y sólo si  $\pi_s^*$  y  $C_s^*$  maximiza la expresión

$$[r X_s^* - c + (b - r \tilde{\mathbf{1}})^T \pi] V_x(s, X_s^*) + \frac{1}{2} \|\sigma^T \pi\|^2 V_{xx}(s, X_s^*) + e^{-\beta t} U(c);$$

i.e., (ver (2.74), (2.75)),

$$C_s^* = I(\mathcal{Y}(s, X_s^*)), \quad (2.79)$$

$$\pi_s^* = -(\sigma\sigma^T)^{-1}(b - r\tilde{\mathbf{1}}) \frac{\mathcal{Y}(s, X_s^*)}{\mathcal{Y}_x(s, X_s^*)}. \quad (2.80)$$

donde, ambas identidades son válidas para  $\text{med} \times \mathbf{P}$ -casi toda  $(s, \omega) \in [t, T] \times \Omega$ . Las expresiones (2.79), (2.80) proveen procesos de consumo e inversión óptimos en *forma feedback*.

### Observación 2.3.2

Se puede hacer ver en el contexto del ejemplo 2.3.1 que los procesos de consumo y portafolios óptimos son funciones lineales del proceso de riqueza  $X^*$ . Además que  $X_T^* = 0$  c.s.  $\square$

## 2.4 Un problema particular de selección de una cartera.

### 2.4.1 Un problema simplificado

Consideremos un mercado donde únicamente hay un bono (stock libre de riesgo) y un stock (con riesgo). El problema de Consumo/Inversión en este caso, o también conocido como problema de *selección óptima de cartera* para un "pequeño inversor", o también de un agente cuyas acciones no se ven afectadas directamente por la influencia de los precios en el mercado. Podemos elegir una cartera (o una *estrategia de inversión*) y una *estrategia de consumo* que determine la evolución de su riqueza. El problema es elegirlos de tal manera que se maximice un criterio de utilidad. Es decir, la utilidad total esperado una vez que ha sido descontado el consumo

$$J(s; x, \pi) = \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left[ \int_s^T e^{-\rho t} U(a_2(t)) dt \right].$$

En este caso supondremos que la evolución del precio  $p_1(t)$  del bono está dada por

$$dp_1(t) = rp_1(t)dt,$$

mientras que el precio del stock está dado por

$$dp_2(t) = p_2(t) [\alpha dt + \sigma d\mathcal{B}_t],$$

donde  $\mathcal{B}_t$  es un proceso Browniano unidimensional. Aquí,  $r$ ,  $\alpha$  y  $\sigma$  son constantes positivas tales que  $r < \alpha$ . Una política de consumo/inversión es un par  $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$  consistente de un proceso portafolio  $a_1$  y un proceso tasa de consumo  $a_2$ . Donde como antes  $1 - a_1(t)$  es la proporción invertida em el stock y  $a_2(t)$  es la tasa de consumo; en principio, debido a las condiciones del mercado, los controles han de ser admisibles (*i.e.* tendrán sentido económico) si verifican

$$0 \leq a_1(t) \leq 1, \quad a_2(t) \geq 0.$$

Entonces, al seguir los argumentos descritos anteriormente, cuando se utiliza una estrategia de consumo/inversión  $\pi$  la riqueza  $\mathcal{X}^\pi$  cambia de acuerdo a la Ecuación Diferencial Estocástica

$$d\mathcal{X}_t = (1 - a_1(t))\mathcal{X}_t r dt + a_1(t)\mathcal{X}_t [\alpha dt + \sigma d\mathcal{B}_t] - a_2(t) dt.$$

La interpretación económica de los términos de la derecha de esta última igualdad son:

- la ganancia monetaria por la inversión en el bono,
- la ganancia por la inversión en el stock,
- el decremento de la riqueza debido al consumo.

Por una parte, la anterior ecuación se puede reescribir como

$$d\mathcal{X}_t = [(r + (\alpha - r)a_1(t))\mathcal{X}_t - a_2(t)] dt + \sigma a_1(t)\mathcal{X}_t d\mathcal{B}_t,$$

y por otra, requerimos de una *función de utilidad*  $U$ , que es una función no negativa definida sobre  $[0, \infty)$ , de clase  $\mathcal{C}^2$ , estrictamente creciente, estrictamente cóncava y tal que  $U'(0) = +\infty$ .

Como apuntábamos al principio del ejemplo, nuestro objetivo sería maximizar la utilidad total una vez descontado el consumo

$$J(s; x, \pi) = \mathbb{E}_{s,x}^\pi \left[ \int_s^\tau e^{-\rho t} U(a_2(t)) dt \right],$$

con la tasa de descuento  $\rho > 0$ . Esto, de manera enteramente análoga al procedimiento pasado, nos permite verificar la ecuación en derivadas parciales

$$v_s + \max_a \left\{ e^{-\rho s} U(a_2) + [(r + (\alpha - r)a_1)x - a_2] v_x + \frac{1}{2}(\sigma a_1 x)^2 v_{xx} \right\} = 0, \quad (2.81)$$

con condición terminal de tipo Dirichlet  $v(\tau, x) = 0$  y la maximización sobre todos los pares  $a = (a_1, a_2)$  que verifican la condición de admisibilidad (o tienen sentido económico). Si se ignoran de momento esas restricciones, un cálculo elemental nos muestra que el máximo se alcanza precisamente en

$$a_1^* = -\frac{(\alpha - r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}}, \quad U'(a_2^*) = e^{\rho s} v_x.$$

En éstos apreciamos que si  $v_x > 0$  y  $v_{xx} < 0$  para  $x > 0$ , entonces la solución del presente problema debería depender por supuesto de la función de utilidad particular  $U$  utilizada en el proceso de maximización. En otras palabras, si por ejemplo existe  $(U')^{-1}$ , entonces en particular se tiene que

$$a_2^* = (U')^{-1}(e^{\rho s} v_x).$$

Más concretamente, y para fijar ideas, si la función de utilidad es de la forma  $U(a_2) = a_2^\gamma$ , con  $0 < \gamma < 1$  y proponemos una solución para (2.81) de la forma

$$v(s, x) = h(x)x^\gamma, \quad \text{con} \quad h(\tau) = 0,$$

que nos dice que la riqueza es función de una regla de expectativas  $h$  por el crecimiento exponencial  $\gamma$  de la riqueza y que cuando el proceso de riqueza termina (por cierto al azar), entonces esa regla de expectativas es cero.

En este caso, obtenemos como controles óptimos precisamente a

$$a_1^* = -\frac{(\alpha - r)}{\sigma^2(1 - \gamma)}, \quad a_2^* = x[e^{\rho s} h(s)]^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.82)$$

y si reemplazamos estos valores en (2.81) obtendremos finalmente

$$\left[ h'(s) + C\gamma h(s) + (1 - \gamma)h(s)(e^{\rho s} h(s))^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] x^\gamma = 0,$$

donde  $C = \frac{(1-\gamma)}{(\rho-C\gamma)}$ , entonces a partir de esta función  $h$  y si además  $\alpha - r \leq \sigma^2(1 - \gamma)$ , la estrategia de control óptimo de Consumo/Inversión está dada por (2.82). En particular, el proceso  $a_1^*(\cdot)$  es constante y la tasa de consumo  $a_2^*(\cdot)$  es una función lineal de la riqueza  $x$ .

En este caso la estrategia óptima está perfectamente delimitada, la cartera es claramente propuesta y la política a seguir en cuanto a la tasa de consumo es calculable en la práctica.

Este procedimiento vale para funciones más generales en las que existe la inversa de  $U'$  y es con ello con lo que contribuimos en el siguiente resultado

**Teorema 2.4.1** *Sea  $U$  una función de utilidad general para la que existe  $(U')^{-1}$  entonces los controles óptimos vienen dados por*

$$a_1^* = -\frac{(\alpha - r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}} \quad y \quad a_2^* = (U')^{-1}(e^{\rho s} v_x), \quad (2.83)$$

si  $v_x > 0$  y  $v_{xx} < 0$  para  $x > 0$ . Además, tendrá asociada la ecuación diferencial

$$e^{-\rho s} U\left((U')^{-1}(e^{\rho s} v_x)\right) + v_x \left[1 + r - \frac{1}{2} \frac{(\alpha - r)^2 v_x}{\sigma^2 v_{xx}} - (U')^{-1}(e^{\rho s} v_x)\right] \quad (2.84)$$

que es una ecuación diferencial implícita.

#### Demostración:

La demostración se construye paso a paso como en el caso particular mencionado anteriormente.  $\square$

## 2.4.2 Una variante sin consumo

En la misma línea del ejemplo anterior supongamos que no hay consumo, es decir, digamos que  $a_2 \equiv 0$ , con lo que la ecuación de la riqueza nos proporciona

$$d\mathcal{X}_t = [r + (\alpha - r)a_t] \mathcal{X}_t dt + \sigma a_t \mathcal{X}_t d\mathcal{B}_t,$$

donde  $a_t = a_1(t)$ . De manera análoga queremos maximizar la utilidad esperada a partir de la riqueza terminal

$$J(s, x; \pi) = E_{s, \tau}^{\pi} [U(\mathcal{X}_{\xi})], \quad (2.85)$$

donde  $U$  es una función de utilidad, tal que  $U(0) = 0$  y  $\xi$  es el primer instante de salida desde el conjunto abierto  $Q = (0, T) \times (0, \infty)$ . Este criterio de utilidad es de la forma

$$J(s, x; \pi) = E_{s, r}^{\pi} \left[ \int_s^{\xi} f^{\pi}(t, \mathcal{X}_t) dt + K(\xi, \mathcal{X}_{\xi}) \right],$$

con

$$f(s, x; a) \equiv 0 \quad \text{y} \quad K(s, x) = U(x).$$

Entonces se da la ecuación parcial

$$v_s + \max_{0 \leq a \leq 1} \left[ (r + (\alpha - r)a)xv_x + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 x^2 v_{xx} \right] = 0, \quad (2.86)$$

con la condición de frontera

$$v(s, x) = K(s, x) = U(x) \quad \forall (s, x) \in \partial^* Q, \quad (2.87)$$

donde  $\partial^* Q$  es un subconjunto cerrado de la frontera  $\partial Q$ , tal que  $(\xi, \mathcal{K}_\xi) \in \partial^* Q$  con probabilidad 1 para cada condición inicial  $(s, x) \in Q$  y cada política admisible  $\pi$ ; en este caso  $\partial^* Q$  es la unión de  $[0, \tau] \times \{0\}$  y  $\{\tau\} \times [0, \infty)$ . Si ignoramos por un momento la restricción  $0 \leq a \leq 1$ , encontramos que la maximización es obtenida en

$$a^* = \pi^*(s, x) = -\frac{(\alpha - r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}} \quad (2.88)$$

si  $v_x > 0$  y  $v_{xx} < 0$ . Al sustituir  $a^*$  en la ecuación obtenemos

$$v_s + r x v_x - \frac{(\alpha - r)^2 v_x^2}{2\sigma^2 v_{xx}} \quad \text{sobre } G,$$

con

$$v(s, x) = U(x) \quad \text{para} \quad s = \tau \quad \text{ó} \quad x = 0.$$

Al resolver este problema con valores en el borde, si suponemos además que la función de utilidad tiene la forma precisa  $U(x) = x^\gamma$ , con  $0 < \gamma < 1$ , proporcionamos una solución de la forma

$$v(s, x) = h(s)x^\gamma, \quad \text{donde} \quad h(\tau) = 1.$$

Para esta elección de  $v$  la ecuación se transforma en

$$h'(s) + C\gamma h(s) = 0,$$

donde  $C = r + \frac{(\alpha - r)^2}{2\sigma^2(1 - \gamma)}$ . Por todas estas razones se tiene que  $h(s) = e^{C\gamma(\tau - s)}$  para  $s \leq \tau$ , y, en resumen, una solución

$$v(s, x) = e^{C\gamma(\tau - s)} x^\gamma, \quad \forall \pi^*(s, x) = \frac{(\alpha - r)}{\sigma^2(1 - \gamma)}. \quad (2.89)$$

En conclusión, si  $\frac{(\alpha - r)}{\sigma^2(1 - \gamma)} \leq 1$ , entonces concluimos que las funciones anteriores corresponden a la función valor óptimo  $J^*(s, x) = v(s, x)$  y, de hecho, que la estrategia óptima  $\pi^*$  (el proceso portafolio) es constante.  $\square$

Como hemos visto bajo adecuadas elecciones se obtienen instrumentos financieros distintos, objetos que propiamente en las aplicaciones habría que definir cada vez que se quiera hacer un análisis. Lo interesante de todo esto sería contar con una herramienta capaz de discernir exclusivamente las peculiaridades de cada uno de ellos, pero, al mismo tiempo, que permita someterlos a los mismos procesos de análisis. Por ejemplo, en ambos casos nos interesa saber cuál es el control óptimo, sustituir los controles óptimos en la ecuación para cancelar el máximo, etc. Pero en el primero nos interesa tener presentes ambos controles simultáneamente y analizarlos como funciones del estado  $x$ . conocer sus propiedades, comportamientos, .... En el segundo caso en virtud de que son constantes este tipo de estudio sale sobrando, pues contamos con su valor y resultaría obvio hacerse las mismas preguntas que con el primer instrumento financiero.

# Capítulo 3

## Simulación Computacional

### 3.1 Introducción

En este capítulo presentamos una simulación mediante el uso de *Mathematica* para la valoración de opciones.

Realmente nos proponemos hacer un ejercicio de aplicación de la valoración de opciones, no conformándonos con la teoría descrita hasta este momento. Las instituciones de inversión ciertamente están más interesadas en resultados prácticos. Desde hace ya un tiempo la tecnología se ha empleado para el área financiera no sólo para incluir manipulaciones numéricas y sino también tomando en cuenta los manejos estructurales como el que acabamos de presentar anteriormente.

En un mercado se desean analizar mortalidades en seguros, bonos del Estado, ingeniería de flujos de capital, liquidez, etc. Muchos lenguajes de programación y hojas de cálculo juegan un papel importante en el cálculo financiero, pero existe una opción poco considerada hasta la actualidad que es la de explotar aquellos programas que manipulan simbólicamente y numéricamente al mismo tiempo. Entre ellos esta *Mathematica*, pues permite manipulaciones estructurales con excelentes aproximaciones numéricas. Algunos autores como Miller en 1990 ya han generado tecnología con inteligencia artificial para abordar problemas de cálculos financieros. En este capítulo nos abocaremos al Modelo



de Black-Scholes de valoración de opciones, pues resulta el más asequible para el nivel en el que enmarcamos el presente trabajo. En fin, en este capítulo proporcionamos una aproximación a la valoración de las opciones mediante el uso de Métodos de Diseño de Objetos-Orientados (MDOO) que a través de *Mathematica* nos permite alcanzar este grado de generalidad. Los métodos tradicionales de los economistas hasta la actualidad calculan completamente por separado los elementos del modelo. En la aproximación por medio de los MDOO para modelos de valoración generales, los métodos pueden operar con diferentes tipos de objetos, en particular con las *opciones*. La ventaja de la aproximación de los métodos MDOO es que el desarrollo de nuevos objetos financieros no requiere de una nueva programación de procedimientos de valoración *ad hoc*. Sin embargo, existen objetos que representan relaciones entre (o con) instrumentos financieros y que reflejan innovaciones novedosas con respecto a las ya existentes. Por otra parte, puesto que un instrumento puede ser formalmente definido (tal como se vió en el capítulo anterior) nos va a permitir la creación de otras funciones, por ejemplo, algunas contabilidades (sin partir por supuesto de la bancarrota).

En este trabajo nos importan los resultados, pero no primamos la optimización en la utilización de los recursos de cómputo.

Nuestra primera aproximación se refiere al Modelo de Black-Scholes por ser quizás uno de los más conocidos.

## 3.2 Modelo de Black-Scholes

Este modelo como se vió anteriormente provee un camino directo para la valoración de opciones, más precisamente de una *call option* para un stock común. Recordamos que una *call option* es una opción de compra de un stock a un *precio de ejercicio* prefijado de antemano hasta un día de expiración dado (recordamos que las que pueden hacerse líquidas en cualquier fecha anterior a esa fecha de expiración se llaman opciones *americanas*, mientras que aquéllas que exclusivamente pueden hacerse líquidas en la fecha de la expiración se conocen como opciones *européas*). En la práctica se utilizan las opciones *americanas*, excepto el modelo de Black-Scholes que para ajustarlo a una mecánica de ese tipo hay que modificarlo para ejecutar la opción antes de su día de expiración. Si el

precio del mercado es mayor que el precio en ejercicio en la fecha de expiración entonces lo que se obtiene es un pago; de otro modo no hay pago en la fecha de expiración y el valor de expiración es cero.

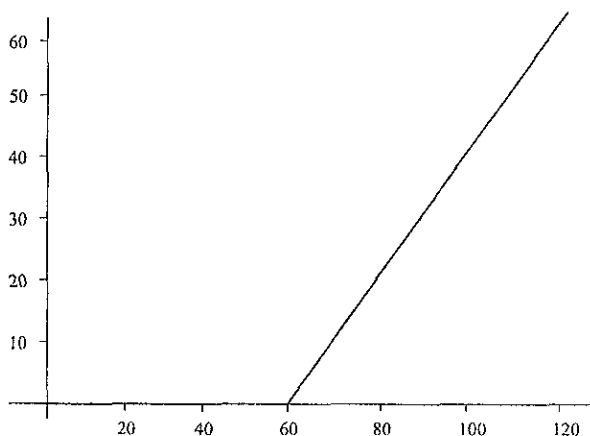
En el mismo esquema en el capítulo 2 definimos la función de pago por salida como *CallPayoff* de la siguiente manera:

```
In[1]:= CallPayoff[ price_, strike_] = Max[0,price-strike]
```

```
Out[1]:= Max[0,price-strike]
```

Por ejemplo, considere una función pago para una opción *call* que da al tenedor la opción a venta de su título al precio de \$60 alrededor del tercer viernes del mes de junio. Si el precio del stock DEC es de \$80 el día de expiración en junio, entonces por la opción debería pagarse \$20, además, si el stock DEC está por abajo de los \$60 no debería pagarse nada por ejercitarse esta opción. Esta función pago puede graficarse como sigue:

```
In[2]:= Plot[CallPayoff[x,60],x,0,120]
```



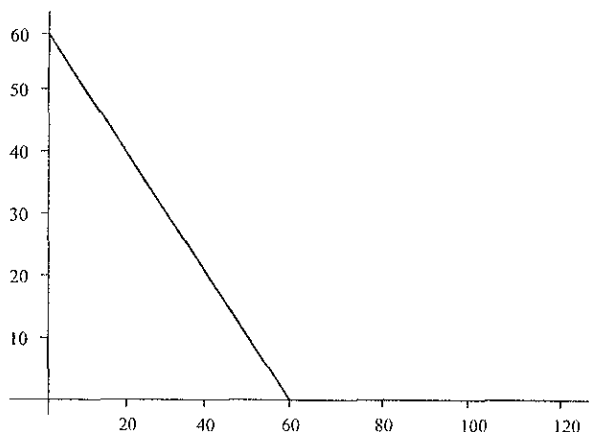
```
Out[2]:= -Graphics-
```

Similarmente la función pago para una opción de tipo *put* (para aquellas cuya oportunidad es la venta del stock puede ser predeterminado el precio en ejercicio –en este caso \$60– puede ser definida y graficada como sigue

```
In[3]:= PutPayoff[ Price_, strike_] = Max[0, strike-price]
```

```
Out[3]:= Max[0, -price+strike]
```

```
In[3]:= Plot[PutPayoff[x, 60], x, 0, 120]
```



La función de pago exclusivamente dice el valor de la opción en la frontera —precisamente en la fecha de vencimiento—. Sin embargo, determinando el valor de la opción antes de la expiración puede ser reducido el riesgo al conocerse el precio corriente del stock, proyectando con ello su valor en la fecha de expiración. Muchos son los factores que podrían afectar al precio de un stock, por ello su proyección debe hacerse más que determinísticamente, de manera probabilista. En el modelo de Black-Scholes es supuesto un cambio en el porcentaje del precio del stock (la tasa de retorno cuando los dividendos no han sido pagados). a través de un proceso de Wiener (i.e., una caminata aleatoria) con media y varianzas conocidas, tal que al día de la expiración, los precios del stock tengan una distribución log-normal con media y varianzas también conocidas. Esta suposición de log-normalidad en muchos casos prácticos puede ser violada, sin embargo, el modelo establecido ayuda a aproximarse a valoraciones aceptables en la práctica. En la práctica, los corredores de bolsa y operadores de paso utilizan otras opciones más rudimentarias (y herramientas estadísticas básicas) para efectuar las proyecciones, entre otras, las tradicionales hojas de cálculo con las que identifican valores aproximados de algunas opciones y para tiempos cortos pueden tomar decisiones.

Bajo las suposiciones de que el stock no paga dividendos hasta el tiempo de expiración, el Modelo de Black-Scholes proporciona una expresión exacta del valor de un *call*. Esto representó una notable ventaja técnica en los 70, ahora en la actualidad es un ejercicio de aplicación estándar del Cálculo Estocástico. Debido a que la fórmula de Black-Scholes es relativamente compleja utilizamos una función auxiliar

Definimos, por tanto, los elementos que vamos a utilizar:

$p$  = precio corriente del stock

$k$  = precio de ejercicio de la opción

$sd$  = volatilidad del stock (desviación de la tasa de retorno anual)

$r$  = tasa de retorno continuamente libre de riesgo, por ejemplo, la tasa de retorno de los EU o México, Coste del dinero en lapsos de tiempo cortos

$t$  = tiempo (en años) hasta la fecha de la expiración

El hecho crítico del Modelo *Black-Scholes* y los modelos de valoración de opciones asociados es que el valor de la opción depende sólo de la desviación estándar de la tasa de retorno del stock y no de su valor esperado. Esto es porque el modelo está basado en un argumento arbitrario en el que cualquier decisión de tomar un riesgo premia al precio antes que cualquier otra decisión libre de él.

Definimos la función de valoración de opciones del Modelo *Black-Scholes* y su función auxiliar como sigue:

In[5] :=  $\text{AuxBS}[p\_ , k\_ , sd\_ , r\_ , t\_ ] = (\text{Log}[p/k] + rt) / (sd \text{ Sqrt}[t] + .5 sd \text{ Sqrt}[t])$

Out[5] :=

$$\frac{p}{k} \exp\left(\frac{rt + \log\left[\frac{p}{k}\right]}{sd \sqrt{t} + 0.5 sd \sqrt{t}}\right)$$

In[6] :=  $\text{BlackScholes}[p\_ , k\_ , sd\_ , r\_ , t\_ ] =$

$$p \text{ Norm}\left[\frac{\text{AuxBS}[p, k, sd, r, t] - k \text{ Exp}[-rt]}{sd \sqrt{t}}\right] + k \text{ Exp}[-rt]$$

```

Out[6] := K Norm[-0.5 sd Sqrt[t] + -----
                                     sd Sqrt[t]
-(-----)+
   r t
   E

                                     P
   rt + Log[-]
                                     k
p Norm[0.5 sd Sqrt[t] + -----
                           sd Sqrt[t]

```

La función `Norm` es la distribución acumulativa normal

```
In[7] := Norm[x_ ,?NumberQ]:= N[0.5 + 0.5 Erf[z/Sqrt[2]]]
```

y para la siguiente sección emplearemos la derivada de ella en los procedimientos de manejo del riesgo

Observe que *Black-Scholes* es definida mediante la función auxiliar `AuxBS` sustituyendo apropiadamente en el valor del parámetro de entrada y con valores actuales. De esta manera, podemos calcular el valor en pesos de los valores de los stocks al llamar a la función `BlackScholes` con argumentos numéricos.

A continuación ofrecemos un ejemplo concreto:

### Ejemplo 3.2.1

Se quiere encontrar el valor de una opción *call* sobre un stock tipo DEC cuyo precio de ejercicio es de 60 (pesos) suponiendo que el precio corriente de DEC es 58 1/2, hasta el tiempo de expiración de 0.3 años, la volatilidad del stock DEC es de 29% y la tasa de retorno continuamente libre de riesgo es de 4%.

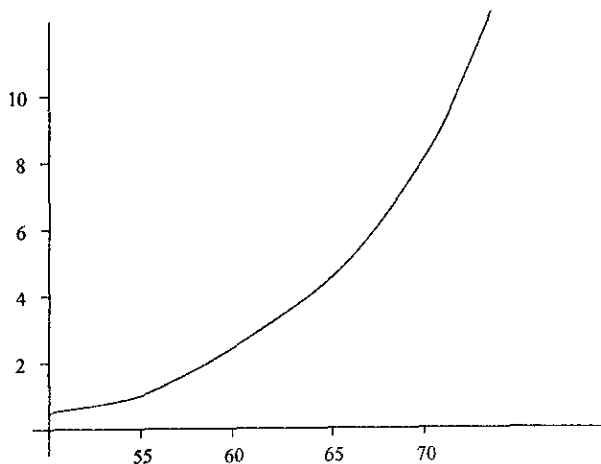
Por lo tanto, los parámetros que se deben introducir en el procedimiento del Modelo *Black-Scholes* son

```
In[8]:= BlackScholes[58.5,60.,0.29,0.04,0.3]
```

```
Out[8].:= 3.34886
```

Utilizando las propiedades gráficas de *Mathematica* podemos analizar algunas propiedades cualitativas interesantes del Modelo *Black-Scholes*. Los dos parámetros del modelo que indican el paso de un cierto estado a otro son el precio del stock y, trivialmente, el tiempo de expiración. La dependencia instantánea del valor de la opción con respecto al precio del stock para la opción DEC puede ser mostrada como sigue:

```
In[9] := Plot[BlackScholes[x,60.,0.29,0.04,0.3],x,50,70]
```



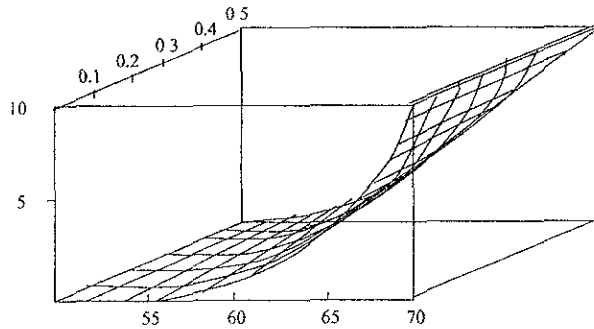
```
Out[9]:= -Graphics-
```

Veamos la gráfica en tercera dimensión de valor de las opciones como una función tanto del precio del stock, como del tiempo de madurez; podemos percibir claramente la curvatura de la anterior gráfica conforme se acerca al tiempo de madurez.

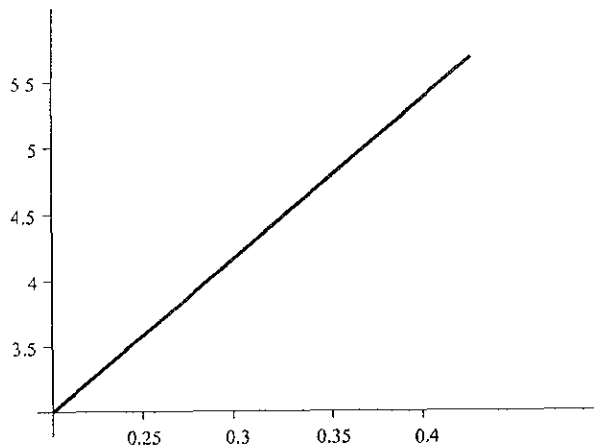
```
In[10]:= Plot3D[BlackScholes[x,60.,0.29,0.04,y],x,50.,70.,
               y,0.01,0.5,
               ViewPoint->{1.450, -2.900, 0.810}]
```

```
Out[10]:= -SurfaceGraphics-
```

Esta sensibilidad del Modelo *Black-Scholes* respecto a los dos parámetros que caracterizan el "estado financiero del mundo" puede ser explorada gráficamente también a través de *Mathematica*. En particular, a través del Modelo *Black-Scholes* y al suponer que la volatilidad del stock es constante y que sobre ella tiende a fluctuar la vida de la opción. La sensibilidad del valor de una opción a los cambios en su volatilidad puede graficarse del siguiente modo:



```
In[11]:= Plot[BlackScholes[60.,60.,x,0.04,0.3],x,0.2,0.4]
```



```
Out[11]:= -Graphics-
```

Esta gráfica no es particularmente atractiva porque sobrestima la volatilidad de la opción valor y la hace perfectamente lineal. Sin embargo, es evidente un hecho relevante a partir del Modelo *Black-Scholes* y es que provee una excelente aproximación al valor de la opción cuando la variable de volatilidad es suficientemente grande, tanto cuanto el valor esperado de la volatilidad es conocido.

El poder y la conveniencia que tiene *Mathematica* para generar gráficas cualitativamente apropiadas a *Black-Scholes* nos habla de la aplicación cuantitativa del modelo, especialmente en el área del manejo de riesgo. Este análisis es facilitado directamente por por las capacidades de manipulación simbólica de *Mathematica* a partir de la fórmula de

*Black–Scholes* .

### 3.3 Manejo del Riesgo utilizando el Modelo *Black–Scholes*

El Modelo *Black–Scholes* es útil porque además de que proporciona una fórmula exacta para el valor de una opción, también nos permite efectuar análisis de sensibilidad ante posibles cambios de los parámetros. Ello se debe a que la fórmula de valoración de opciones puede ser caracterizada como la solución de un cierto problema de ecuaciones en derivadas parciales

Que duda cabe que el parámetro más importante que afecta al valor de una opción es el precio del stock subyacente. Denotaremos la derivada parcial del valor de la opción con respecto al precio del stock como *delta*. De este modo, *delta* es una excelente medida del riesgo para una opción, porque indica cómo se altera el precio de la opción a un cambio por unidad monetaria del precio del stock.

Para opciones de tipo *call*, *delta* puede variar en el rango entre 0 y 1, en otras palabras la opción puede ser insensitiva a las variaciones de precio del stock es posible tener la pista exacta del precio o estar bastante cercanos a él. *Delta* es particularmente útil para medir el riesgo contenido en un portafolio que contiene más de una opción sobre un stock dado. En particular, el riesgo teórico asociado a la posesión de un stock podría ser neutralizado completamente (en un tiempo razonablemente corto) si el respaldo en pesos (o dolares si es el caso) a *delta* de un portafolio de opciones sobre el stock es igual a cero. Ello se debe a que el portafolio *delta* da un cambio al valor del portafolio para cada unidad monetaria del precio del stock, que en este caso es cero. Además, puesto que *delta* es una derivada parcial, se supone que todas las variables deberían ser constantes y, consecuentemente, el cambio en el precio del stock debería ser pequeño. Este no es el caso para periodos con tiempos cortos. Algunas medidas del riesgo adicionales también pueden ser derivadas posteriormente en esta sección o pueden ser consideradas como rutinas cuando se utilice *Mathematica* permitiendo al mismo tiempo manipular algunas peculiaridades o influencias sobre el valor de las opciones.

El uso del operador derivada **D**, construido dentro de *Mathematica*, nos permite cal-



cular simbólicamente la derivada de la función de *Black-Scholes*, incluida también *delta*. Antes de esas derivadas podrían ser definidas, además, primero si fuese necesario la derivada de la función "Norma" denotada por **Norm**, puesto que sólo el valor numérico de la "Norma" provee técnicamente figuras graficables en la computadora de las derivadas de la función *Black-Scholes*. En *Mathematica* la derivada de la Norma es definida como

```
In[1]:= Norm'[z_] = N[1/Sqrt[2Pi]]Exp[-z ^ 2/2]
```

```
Out[1] := 0.398942
-----
      2
     z /2
    E
```

La constante principal en la definición de esta derivada es expresada directamente como un número, además de que los términos a la izquierda de **Pi** aseguran que la conversión numérica ocurre cuando las derivadas de la fórmula de *Black-Scholes* son evaluadas para conjuntos particulares de parámetros.

En la práctica necesitamos saber exactamente cuál es la función que calcula *delta*, para poder evaluar técnicamente el riesgo:

```
In[2]:= Delta[p_, k_, sd_, r_, t_] = D[BlackScholes[p,k,sd,r,t],p]
```

```
Out[2] :=
```

```
0.398942 / (E (0.5 sd Sqrt[t] + (r t + Log[p/k]) /
              2
            (sd Sqrt[t])) /2
            sd Sqrt[t]) - (0.398942 Power[E,-(r t) -
              P
            r t + Log[-]
```

$$\frac{(-0.5 \text{ sd Sqrt}[t] + \frac{k^2}{\text{sd Sqrt}[t]})}{\frac{2}{\text{sd Sqrt}[t]}}] k) /$$

$$(p \text{ sd Sqrt}[t]) + \text{Norm}[0.5 \text{ sd Sqrt}[t] + \frac{p}{\text{sd Sqrt}[t]}]$$

$$\frac{r t + \text{Log}[-]}{k}$$

La asignación que se ha establecido para definir *delta*, a partir de la fórmula de *Black-Scholes*, genera una expresión explícita de *delta*. Por tanto, tenemos un mecanismo de valoración en *Mathematica* que, por otra parte, no necesariamente siempre genera fórmulas en una forma simple, pero que, sin embargo, la expresión de salida para *delta* (y algunas otras derivadas de *Black-Scholes*) pueden ser simplificadas de acuerdo a los intereses de eficiencia y cálculo numérico como actualmente se hace con la función `Norma` `Norm[p,k,sd,r,t]`.

Cuando se aplica *delta* a la situación anterior se tiene

```
In[3]:= Delta[58.5,60.,0.29,0.04,0.3]
```

```
Out[3]:= 0.498235
```

Por tanto, para un incremento de \$1 en el precio del stock se incrementa el precio de la opción *call* en 50 centavos.

Una gráfica de **Delta** contra precio del stock provee una valoración de la opción como sigue:

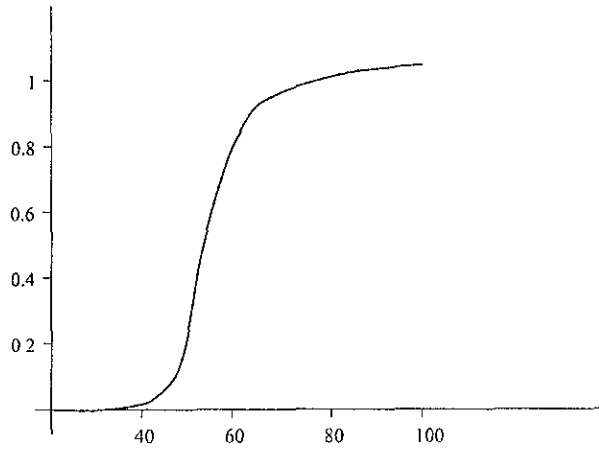
```
In[4]:= Plot[Delta[x,60.,0.29,0.04,0.3],x,20.,100.]
```

```
Out[4]:= -Graphics-
```

Para precio bajo del stock, cuando la opción *call* está fuera del entorno del riesgo<sup>1</sup>, *delta* es virtualmente nula, indicando con ello que el valor de la opción, que también es virtualmente cero, es insensitivo a los cambios del precio del stock, porque dado un incremento

---

<sup>1</sup> *out of the money.*



modesto debiéramos tener un pequeño efecto que es verdaderamente una consecuencia de que la opción debería expirar, con menos valor. Para precios del stock grandes, es decir, cuando la opción está dentro del entorno de riesgo *in the money* (en su valor), delta se aproxima a uno porque el incremento en el precio del stock peso a peso o dolar por dolar se traduce en un incremento esperado en el valor de la opción en la fecha de expiración.

Otros aspectos de la opción valor son, como fácilmente se puede intuir, cómo se puede utilizar símbolos matemáticos en *Mathematica* para expresar a delta. La sensibilidad del valor de una opción en un instante de tiempo, *theta*, se deriva fácilmente de delta como sigue.

```
In[5]:= Theta[p_, k_, sd_, r_, t_] = -D[BlackScholes[p,k,sd,r,t]
```

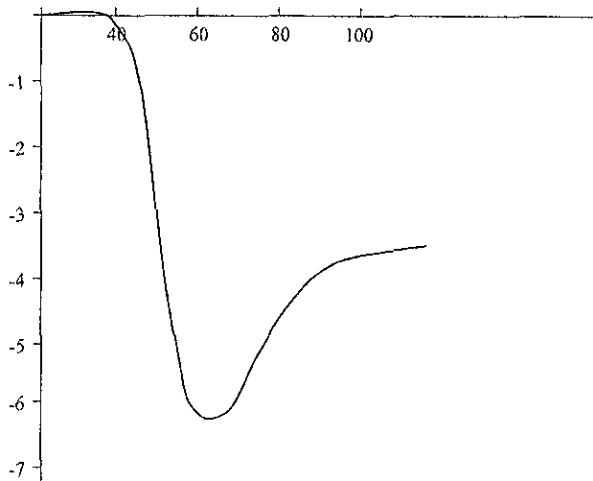
```
Out[5] :=
      p
      r t + Log[-]
      k  2
      (-0.5 sd Sqrt[t] + -----)
      sd Sqrt[t]
0.398942 Power[E, -( r t) - -----] k
      2
      p
      r t + Log[-]
r      0.25 sd      k
```

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{\text{sd Sqrt}[t]}{\text{Sqrt}[t]} \frac{3/2}{2 \text{sd } t} \right) \\
 & 0.38942 \text{ p} \left( \frac{r}{\text{sd Sqrt}[t]} + \frac{0.25 \text{sd}}{\text{Sqrt}[t]} - \frac{\text{p}}{k} \frac{r t + \text{Log}[-]}{\text{Sqrt}[t]} \right) \\
 & \frac{(0.5 \text{sd Sqrt}[t] + (r t + \text{Log}[p/k]) / (\text{sd Sqrt}[t]))^2}{\text{sd Sqrt}[t]} \\
 & \text{E} \frac{\text{p}}{k} \frac{r t + \text{Log}[-]}{\text{sd Sqrt}[t]} \\
 & \text{k r Norm}'[0.5, \text{sd Sqrt}[t] + \frac{\text{p}}{k} \frac{r t + \text{Log}[-]}{\text{sd Sqrt}[t]}] \\
 & \text{E} \frac{r t}{\text{sd Sqrt}[t]}
 \end{aligned}$$

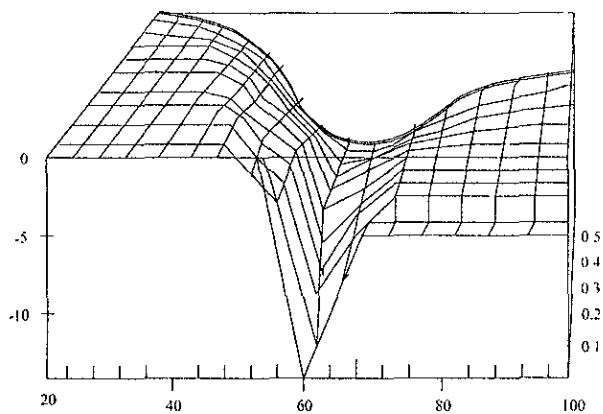
In[6]= Plot[Theta[x,60.,0.29,0.04,0.3],x,20.,100.]

Out[6].=-Graphics-

Por convención theta el negativo de la derivada con respecto al tiempo de expiración, porque al mover el tiempo en el sentido de las manecillas del reloj decrece el tiempo de la expiración. por tanto, theta da el cambio instantáneo en el valor de la opción conforme pasa el tiempo y todos los demás parámetros no sufren alteraciones. Y ya que una opción es más valuable cuanto mayor sea el tiempo de expiración, theta es siempre negativo. Como ya lo corrobora la gráfica anterior, el tiempo de decaimiento en el valor tiende a ser más grande cuando el precio del stock está próximo al precio de ejercicio, además, conforme pasa el tiempo este decaimiento viene a ser mas uniforme atravesando los precios del stock como lo demuestra la siguiente gráfica



```
In[7]:= Plot3D[Theta[x,60.,0.29,0.04,y],x,20.,100.,
              y,0.01,0.5,
              ViewPoint-¿0.520, -3.420, 1.810]
```



```
Out[7]= -SurfaceGraphics-
```

Como se mencionó al principio de esta sección, las derivadas parciales de la fórmula de *Black-Scholes* pueden ser aplicadas también al portafolio entero de opciones para determinar la sensibilidad del valor del portafolio a los cambios en una o todas las variables que influyen en la fórmula.

Una observación importante es que en aquellas situaciones en las que los precios de las opciones se creen como un indicador seguro de este valor, este tipo de situaciones es deseada por los típicos corredores con "ingenio inverso", pues parten de la volatilidad de una opción desde su precio de mercado. La función `ImpliedVolatility` utiliza la rutina construida en `Findroot` para resolver numéricamente la volatilidad de una opción dado su precio como sigue:

```
In[8]:= ImpliedVolatility[p_, k_, r_, t_, optionprice_] :=
          sd / FindRoot[BlackScholes[p,k,sd,r,t] ==
          optionprice, sd,0.2]
```

Por lo tanto, si el precio de la opción DEC es 3.348886. verificaremos que la volatilidad es 0.29 como sigue:

```
In[9]:= ImpliedVolatility[58.5,60.,0.04,0.3,3.34886]
Out[9]:= 0.29
```

Esto implica que la utilidad es un camino extremadamente útil para analizar las opciones. Sin embargo, algunas opciones sobre ajenas a la circulación y otros instrumentos financieros son cotizadas en términos de su volatilidad más que de su precio, así los bonos cotizan al proporcionar cierto margen de seguridad en sus ganancias. Hay muchas estrategias de comercio que son diseñadas para hacer análisis de larga o corta volatilidad mientras que se limite al riesgo mediante el uso de las técnicas descritas anteriormente.

Como con cualquier otro grupo de funciones de *Mathematica*, las funciones asociadas al modelo de *Black-Scholes* pueden ser colectadas en un grupo de programas que aparecen en este trabajo. Ahí se incluyen otras medidas de sensibilidad del riesgo: theta, kappa, rho, gamma y la elasticidad (precio del stock)

### 3.4 Las opciones como objetos (en computación).

La ventaja de *Mathematica* sobre otros programas es que provee no sólo de herramienta de cálculo simbólico y numérico, sino también proporciona la capacidad de trabajar objetos autocontenidos sobre los que tiene la ventaja de ejecutar una acción o una función dependiendo del tipo de objeto sobre el que es aplicado. A través de la manipulación de las capacidades de los objetos enfocada al tratamiento de objetos orientados como si de un

juego de herramientas se tratara, se ofrece un conjunto de facilidades para la creación de objetos y abstracción de datos contenidos en *Mathematica*. En esta sección representaremos a las opciones como objetos y en lo que sigue explotaremos esta representación para desarrollar la tecnología de una función **Valor** que sea capaz de evaluar una variedad de opciones y otros instrumentos financieros.

Deberíamos comenzar por mostrar como una opción *call* de tipo DEC (y su correspondiente stock DEC) puede ser representada como un objeto en *Mathematica*. Para distinguir los quehaceres de un objeto computacional es necesario describir sus propiedades.

Por ejemplo, las propiedades de una opción DEC, DECFL, son que ésta es una opción call sobre un stock DEC, que tiene un precio de ejercicio de \$60 y expira en junio, que además se supone que debería crecer 0.3 por un año transcurrido. En *Mathematica* ligamos esas propiedades al símbolo DECFL como sigue:

```
In[1]:= Type[DECFL]  $\wedge$  = "call" ;
        Asset[DECFL]  $\wedge$  = DEC;
        ExercisePrice[DECFL]  $\wedge$  = 60.;
        ExpirationTime[DECFL]  $\wedge$  = 0.3;
```

El operador  $\wedge =$  es conocido como **UpSet** y es utilizado para asegurar que *Mathematica* asocia el valor asignado con el valor "ascendente" DECFL mas que el puntero del lado izquierdo de las asignaciones como se hace normalmente. Es sencillo chequear que esas propiedades han sido asociadas con DECFL como sigue

```
In[2]:= ?DECFL
```

```
Global`DECFL
```

```
Asset[DECFL]  $\wedge$  = DEC
```

```
ExercisePrice[DECFL]  $\wedge$  = 60.
```

```
ExpirationTime[DECFL]  $\wedge$  = 0.3
```

```
Type[DECFL]  $\wedge$  = "call"
```

Como una conveniencia deberíamos definir una función constructora de objetos `ConsObj`, que toma un símbolo y una lista de propiedades como argumentos:

```
In[3]:= ConsObj[DECFL, {Type, "call",
      Do[Block[propname=proplist[[2*i-1]],
            propval=proplist[[2*i]],
            propname[obj]^=propval],
      {i, Length[proplist]/2}]
```

El objeto, DECFL, puede ser construido como sigue:

```
In[4]:= ConsObj[DECFL, {Type, "call",
      Asset, DEC,
      ExercisePrice, 60.,
      ExpirationTime, 0.3}]
```

Note que no toda la información necesaria para el valor de la opción DECFL está contenida en la descripción del objeto. En particular, el precio y la volatilidad del stock DEC son propiedades que deberían ser inherentes a la representación del objeto del stock.

El objeto DEC puede ser construido como sigue:

```
In[5]:= ConsObj[DEC, Type, "stock",
      Price, 58.5,
      Volatility, 0.29]
```

General::spell1:

```
Possible spelling error: new symbol name "Price"
is similar to exiting symbol "Prime".
```

Y establecemos las propiedades del objeto DEC como sigue:

```
In[6]:= ?DEC
```

```
Global`DEC
```

```
Price[DEC] ^= 58.5
```

```
Type[DEC] ^= "stock"
```



```
Volatility[DEC] ^= 0.29
```

Por supuesto, esas propiedades de la opción DECFL provienen desde el stock subyacente, no son heredadas automáticamente; *Mathematica* requiere de algunas reglas de asignación para facilitar su herencia como sigue:

```
In[7]:= AssetPrice[option_] := (AssetPrice[Option] ^ =
      Price[Asset[option]]);
      AssetVolatility[option_] := (AssetVolatility[Option] ^ =
      Volatility[Asset[option]])
```

Esta forma de asignación asegura que *Mathematica* asocia el valor con la opción que la función. Podemos probar ahora esas dos nuevas propiedades de la opción DECFL que han sido propiamente heredadas:

```
In[8]:= AssetPrice[DECFL]
Out[8]:= OptionValue'private'Price[OptionValue'privateAsset[DECFL]]
In[9]:= AssetVolatility[DECFL]
Out[9]:= OptionValue'private'Volatility[OptionValue'privateAsset[DECFL]]
```

Al chequear los valores asociados con DECFL podemos ver como esas dos nuevas propiedades son listadas:

```
In[10]. = ?DECFL
```

```
Global'DECFL
```

```
Asset[DECFL] ^= DEC
```

```
AssetPrice[DECFL] ^=
  OptionValue'private'Price[OptionValue'privateAsset[DECFL]]
```

```
AssetVolatility[DECFL] ^=
  OptionValue'private'Volatility[OptionValue'privateAsset[DECFL]]
```

```
ExercisePrice[DECFL] ^= 60.
```

```
ExpirationTime[DECFL] ^= 0.3
```

```
Type[DECFL] ^= "call"
```

Como se puede ver, *Mathematica* no provee un diseño de un ambiente completamente a través de objetos orientados para que esas nuevas propiedades sean generadas automáticamente, pero sí ofrece parte de la descripción después de una primera utilización.

La pieza final de la información necesaria para evaluar DECFL es la tasa de retorno libre de riesgo. Porque esta tasa es supuesta como constante y puede ser aplicada a todas las opciones, ello da sentido para definir a ésta como una variable global del siguiente modo.

```
In[11]:= RiskFreeRate = 0.04
```

```
Out[11]:= 0.04
```

Falta ahora simplemente definir una función valor que tome un símbolo de una opción como su argumento y recupere la información necesaria para aplicar la función *Black-Scholes* definida anteriormente:

```
In[12]:= Value[option_] := BlackScholes[AssetPrice[option],
                                         ExercisePrice[option],
                                         AssetVolatility[option],
                                         RiskFreeRate,
                                         ExpirationTime[option]]
```

```
General::spell:
```

```
Possible spelling error: new symbol name "Value"
is similar to existing symbol "ValueQ".
```

Ahora mostriaremos que la función valor actualmente trabaja cuando se aplica a DECFL

```
In[13]:= Value[DECFL]
```

```
Out[13]:= Value[DECFL]
```

Por supuesto, la fórmula de *Black-Scholes* únicamente puede ser aplicada a un número limitado de opciones. En la siguiente sección abordaremos otros métodos de valoración

de opciones que pueden ser aplicados a opciones en general, incluidas las opciones *puts*, y veremos cómo es que la función valor puede ser adecuadamente extendida.

### 3.5 Valoración de opciones a través de árboles de decisión financiera.

Cuando consideramos opciones para las que el modelo *Black–Scholes* no está diseñado, por ejemplo, opciones *put* americanas (aquéllas que pueden ser ejercitadas antes del vencimiento), no hay usualmente una fórmula exacta para la solución y muchas fórmulas de aproximación frecuentemente son inadecuadas. La fuente de este problema es que las técnicas utilizadas para tiempos continuos para derivar la fórmula del modelo *Black–Scholes* no son ampliamente aplicables cuando la trayectoria de la valoración de la opción puede ser interrumpida al ejecutarse la opción. Sin embargo, la manipulación simbólica a través de *Mathematica* puede ser utilizada con grandes ventajas. En esta sección pretendemos dar pie al uso de algunas técnicas que se implementan en *Mathematica*. Esos métodos son suficientes y en su mayoría pueden ser aplicados virtualmente a cualquier tipo de opción, pero también pueden ser aplicados a valores con opciones inmersas, como los llamados bonos convertibles y muchos otros tipos de valores bajo influencia de deceso o mortalidad.

Las extensiones a pesar de ser ambiciosas por ejemplo con el propósito de abordar stocks con pagos de dividendos, pueden ser incorporadas en este marco. Un tratamiento más detallado de esas técnicas puede ser consultado en el libro de Miller, M.R. [Mi] desarrollado originariamente en LISP.

La clave para resolver los problemas de valoración financiera son los llamados *árboles de decisión financiera*; esos árboles son una generalización de los árboles de decisión utilizados en el tradicional Análisis de Decisión. La extensión clave de los árboles de decisión que es introducida en el presente tratado es el descuento aplicado a uno de los trasvases del árbol. Sin embargo, existen otras extensiones que manejan flujos de efectivo que pueden presentarse en cualquier nodo del árbol. La ventaja que tienen los árboles de decisión financiera sobre los árboles de decisión tradicionales es que ofrecen una representación y un cálculo más sencillo. Cuando son contemplados tanto los descuentos, como los flujos de efectivo dentro del árbol más que como condiciones de nodos terminales, que es por cierto uno de los caminos tradicionales para tener en cuenta las restricciones, se minimiza el monto de los cálculos requeridos para representar y evaluar el árbol de decisión que representa a una opción dada o a un instrumento financiero.

Nos interesamos en abordar el problema de las opciones *put* americanas sobre un stock DEC con propiedades idénticas a aquellas de la opción *call* DECFL presentada al inicio de la exposición, excepto que ésta es una opción *put* y tiene el símbolo DECQL. Recordamos que una opción *put* es una opción que vende al stock con un precio de ejercicio dado, en este caso \$60. Como vimos en su momento, la función pago para una *put* es la opuesta que la de una *call*; esto es, que es cero para precios por arriba del precio de ejercicio y tiene pendiente -1 para precios por abajo de él.

La función **ConsObj** puede ser utilizada para crear el objeto DECQL como sigue:

```
In[1]:= ConsObj[DECQL, Type, "put",
               Asset, DEC,
               ExercisePrice, 60.,
               ExpirationTime, 0.3]
```

General::Spell:

```
Possible spelling error: new symbol name "DECQL"
is similar to existing symbol "DECQL".
```

Por supuesto, si quisieramos aplicar la función **Valor** en la forma que hemos venido proponiendo a DECQL, no tenemos un camino para proceder aquí con un *put* como si fuera un *call*. Por todo ello, sería deseable crear una propiedad para las opciones que afecte el modo en que son valoradas. Deberíamos utilizar la función **ExerciseFunction** para establecer la función pago que quedaría como sigue:

```
In[2]:= ExerciseFunction[option_]:= CallPayoff /;
               Type[option]== "call"
ExerciseFunction[option_]:= PutPayoff /;
               Type[option]== "put"
```

Por tanto, para nuestra nueva opción *put* tenemos

```
In[3]:= ExerciseFunction[DECQL]
```

General::Spell:

```
Possible spelling error: new symbol name "DECQL"
```

is similar to existing symbol "DECFL".

```
Out[3]:= ExerciseFunction[DECQL]
```

Con una opción *put* americana es posible que el valor del stock subyacente caiga lo suficientemente bajo como para que la corriente natural del sobrepremio del precio del stock debería hacerlo provechoso para ejercitarlo antes de su fecha de maduración. Sin embargo, un componente significativo del valor de la opción *put* podría estar asociado con el potencial para hacer un ejercicio antes del tiempo de maduración. El simple camino para modelar una opción que facilita la consideración explícita de ejercitar tempranamente es el *modelo binomial*. El modelo binomial divide el tiempo de madurez en un número de períodos iguales y sobre cada segmento considera dos posibilidades, que el stock se mueve hacia arriba en precio una proporción fija o hacia abajo en precio por otra (posiblemente la misma) proporción fija. El tamaño de los movimientos hacia arriba o hacia abajo como sus probabilidades puede ser elegido en el límite según el número de períodos en el infinito, la distribución de los precios debería converger a la distribución lognormal utilizada en el modelo de *Black-Scholes*. La derivación de esos movimientos hacia arriba y hacia abajo y sus probabilidades es un tema tratado por Hull en 1989 y utilizado aquí sin mayor profundidad.

Como en el modelo *Black-Scholes*, el valor de la opción es conocido como la expiración y puede ser determinado recursivamente al tomar en cuenta a valor presente los premios. La diferencia es que en cada instante del tiempo la ventaja potencial de ejercitar la opción debería ser considerada.

La aproximación que deberíamos hacer para el modelo binomial nos lleva a sumergir a éste en un marco más general que pudiera manejar opciones también generales. Este marco moldea al proceso a través del cambio de los precios de los stocks y la opción que el poseedor de las acciones considera como alternativa en cada punto del tiempo como un árbol de decisión financiera.

Este método a través de la valoración de cada opción podría generar un árbol de decisión diferente. sin embargo, ofrecemos una función que evalúe a cada árbol, la denominamos **TreeValue**. Por tanto, el proceso de valoración de una opción debería ser convertido en un árbol y entonces lo valoramos.

La conversión de una opción americana en una opción dentro de un árbol financiero

de decisiones se lleva a buen término con la función `MakeAmerTree` que se define en las siguientes líneas:

```
In[4]:= MakeAmerTree[option_, n_ : 4] :=
      Block[ChanceSymbol=Unique["cnode"],
      DecisionSymbol = Unique["dnode"],
      s=AssetPrice[option],
      k=ExercisePrice[option],
      ex= ExerciseFunction[option],
      t = ExpirationTime[option],
      sd= AssetVolatility[option],
      a = Exp[RiskFreeRate t/n] // N,
      u = Exp[sd],
      d=1/u,
      ConsObj[Evaluate[ChanceSymbol],
        Type, "chance",
        Dfactor, 1/a,
        Upamt, u,
        Downamt, d,
        Upprob, (a-d)/(u-d) // N,
        ExercisePrice, k,
        ExerciseFunction, ex,
        Succsym, DecisionSymbol];
      ConsObj[Evaluate[DecisionSymbol],
        Type, "decision",
        ExercisePrice, k,
        ExerciseFunction, ex,
        Succsym, ChanceSymbol];
      node[ChanceSymbol, s,n,1]
```

Esta rutina incorpora una función que es esencialmente una lista de ingredientes necesarios para construir un árbol financiero de decisiones para una opción americana. Esto se establece por uso de la función `Unique` definida de antemano en *Mathematica*, función que sirve para construir símbolos para los dos tipos de nodos en el árbol, probabilidad de

paso por esos nodos, que se reflejará en un movimiento hacia arriba o hacia abajo en el precio del stock y nodos de decisión, que refleja la habilidad del poseedor de la opción para ejercitar o no la opción. La función **ConsObj** es utilizada de esta forma para asignar las propiedades necesarias para la probabilidad de los nodos de decisión a sus respectivos símbolos, eso se hace mediante las rutinas **ChanceSymbol** y **DecisionSymbol** respectivamente. Finalmente, esto crea la semilla del árbol como una expresión con **node** como su encabezamiento y estado inicial del árbol financiero de decisiones, incluyendo el precio del stock y el período sobrante como su cuerpo. Con propósitos de exposición, **MakeAmerTree** se define para cuatro períodos (aunque se puede definir otro número de ellos) baste utilizar este número de períodos para entender lo que hacemos, pero no son suficientes para asegurar la valoración, ya que ese proceso requiere de cuando menos diez o mas períodos

```
In[5]:= DECTree = MakeAmerTree[DECQL]
Out[5]:= node[cnodel, 58 5, 4, 1]
```

Por tanto, establecemos el árbol en el nodo de cambio llamado *cnodel* con un precio de stock de 58 5, cuatro períodos de partido y un peso de 1. (El peso proporciona únicamente información en los nodos de decisión, como bien se puede ver). Para encontrar los destinos hacia donde podemos ir a partir de este *nodo raíz* requerimos de la función **Successors**, que genera una lista de sucesores para ambos nodos de decisión y probabilidad. Aquí está la definición de una función para cada tipo de nodo:

```
In[6]:= Successors[node[symbol_, price_, left_, weight_]] :=
    nodeSuccsym[symbol],
    Upamt[symbol]*price, left-1,
    Upprob[symbol]],
node[Succsym[symbol],
    Downamt[symbol]*price, left-1,
    1-Upprob[symbol]] /; Type[symbol]==”chance”;
Successors[node[symbol_, price_, left_, weight_]] :=
    nodeSuccsym[symbol],
    price,
    left,
    1],
```



```

nodeSuccsym[symbol],
price,
0,
1]          /; Type[Symbol]==>"decision"

```

Podemos entonces simplemente aplicar la función **Successors** al nodo raíz, **DECQLTree** y ver que sucede:

```

In[7]:= Successors[DECQLTree]
Out[7]:= (node[dnodel, 63.3355, 3, 0.499051],
          node[dnodel, 54.0336, 3, 0.500949])

```

Los sucesores de este nodo de probabilidad son dos nodos de decisión, ambos con el símbolo **dnodel**, pero que reflejan estados de diferente naturaleza. El primer nodo de decisión corresponde al precio del stock DEC de 63.3355, que podría ocurrir con una probabilidad o peso de 0.499051. El segundo nodo de decisión corresponde al precio del stock DEC de 54.0336 que podría ocurrir con una probabilidad o peso de 0.500949. Al "tirar los dados" asociamos con el nodo la probabilidad y también consumimos un periodo y lo hacemos tres veces más

Como un ejercicio vemos directamente cómo se pueden generar los sucesores del primer nodo de decisión:

```

In[8]:= Successors[First[Successors[DECQLTree]]]
Out[8]:= (node[enodel, 63.3355, 3, 1],
          node[enodel, 63.3355, 0, 1])

```

En un nodo de decisión damos una elección de continuidad en la posesión de la opción, ya sea permaneciendo en los periodos a la izquierda o ejercitando la opción al definir los periodos de la izquierda por cero.

La función **TreeValue** automatiza el proceso de generar sucesores y simultáneamente calcula el valor esperado en cada nodo de probabilidad y elige el pago máximo esperado en cada nodo de decisión. Esta función junto con las dos funciones auxiliares, **Prob** y **Expectation**, se definen como sigue:

```

In[9]:= TreeValue[node[symbol_, price_, left_, weight_] :=
        (TreeValue[node[symbol,price,left,weight]]
         =Which[left==0,
                ExerciseFunction[symbol] [price,ExercisePrice[symbol]],

```

```

Type[symbol]==="chance",
  Dfactor[symbol] *
    Expectation[Successors[node[symbol,price,left,weight]],
  Type[Symbol]==="decision",
  Max[TreeValue[Successors[node[symbol, price,left,weight]]]]];
SetAttributes[TreeValue,Listtable]
Prob[node_] := node[[4] ; SetAttributes[Prob,Listtable]
Expectation[nodelist_] := Dot[Prob[nodelist],
  TreeValue[nodelist]]

```

La función **TreeValue** utiliza a la función **Which** que discrimina entre las situaciones que pudieran presentarse. Podrían ocurrir tres de ellas: nodos terminales ( $\text{left}=0$ ), nodos de probabilidad y nodos de decisión. Por **TreeValue** designaremos a la memoria de los valores antiguos que por argumentos de la Programación Dinámica son empleados para reducir sensiblemente el número de evaluaciones que son requeridas. La parte inicial de esta aproximación no sería posible sin un manejo adecuado de memoria adicional. memoria que debería ser ocupada por los resultados viejos de las valoraciones de la opción.

Ahora que **TreeValue** ha sido definido de manera adecuada podemos aplicar esto a **DECQLTree** de la manera siguiente:

```

In[10]:= TreeValue[DECQLTree]
Out[10]:= 4.27628

```

Podemos llegar a un valor más preciso al expandir el tamaño del árbol por medio de la siguiente rutina:

```

In[11]:= TreeValue[MakeAmerTree[DECQL,8]]
Out[11]:= 4.26538

```

Finalmente, volvemos a la función **Valor** introducida al final de la sección anterior y con una noción extendida al tratamiento de opciones americanas sobre un stock que no paga dividendos; ello se hace como sigue:

```

In[12]= Value[option_] := BlackScholes[AssetPrice[option],
  ExercisePrice[option],
  AssetVolatility[option],
  RiskFreeRate,
  ExpirationTime[option]] /;

```

```

Type[option]==”call”
Value[option_] := TreeValue[MakeAmerTree[option,8]] /;
Type[option]==”put”

```

Esta función deberíamos aplicarla sencillamente a la fórmula del modelo de *Black–Scholes* para las opciones *call* y su versión aumentada para evaluar un árbol binomial para opciones *put*. Por tanto, podemos aplicar esto a las dos opciones DEC como sigue:

```
In[13]:= Value[DECQL]
```

```
Out[13]:= 3.34886
```

```
In[14]:= Value[DECQL]
```

```
Out[14]:= 4.27374
```

### 3.6 Conclusiones del Capítulo 3.

En este capítulo nos propusimos dar una aproximación práctica y eminentemente computacional de una forma explícita para la solución y una aproximación numérica a la valoración de opciones por el uso de *Mathematica*. Sin embargo, es posible extender este tipo de análisis a la utilización de algunos otros paquetes de cálculo simbólico o lenguajes de programación (en pascal versión 6 en adelante ya se incorpora el tratamiento dentro de un ambiente de objetos orientados o Clipper versión 5 también incorpora estas herramientas). Los métodos han sido desarrollados ya en la literatura financiera a la que también contribuimos ciertamente de manera original en el capítulo 2 en los ejemplos de cálculo del control óptimo estocástico, en la exposición de la teoría general de consumo/inversión mediante instrumentos financieros en general y que desarrollamos ampliamente en el capítulo 1 para el cálculo explícito de una solución para este problema. Nuestra tarea para continuar con el capítulo 3 nos llevará, sin duda alguna, a buscar una forma más eficiente e inteligente de función valoración de objetos-orientados. En esta línea nos proponemos la elaboración de un *paquete* para el tratamiento práctico en un mercado de valores secundario.

# Bibliografía

- [Cr-Is-Li] Crandall, M.G., Ishii, H. and Lions, P.L. User's Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **27** (1992), 1-42.
- [Cv-Ka] Cvitanić, J. and Karatzas, I. Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization. *The Annals of Applied Probability*, Vol.2, No.4, 767-818, 1992.
- [DeM1] Dellacherie, C. y Meyer, P.A. *Probabilités et Potentials*, Herman, Paris, 1975/1980.
- [DiSo1] Díaz, G. y Soriano, A. Solution of a General Consumption/Investment Model with Constrained Level Risk, por aparecer.
- [DiSo2] Díaz, G. y Soriano, A. Existence of solution for some semilinear elliptic equations from Dynamic Programming, *Publicaciones del Departamento de Matemática Aplicada*, Univ. Complutense de Madrid, 1995.
- [Dy] Dynkin, E.B. *Markov Processes II*. Academic Press, New York, 1965.
- [LI] Lions, P.L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part I. The Dynamic programming principle and applications, *Comm. in P.D.E.* **8(10)**, (1983), 1101-1174.
- [LII] Lions, P.L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part II: Viscosity solutions and uniqueness, *Comm. in P.D.E.* **8(10)**, (1983), 1229-1276.
- [LIII] Lions, P.L. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations Part III: Regularity of the optimal cost function, en *Nonlinear Partial Differential Equations and Applications*, Séminaire du College de France, Vol V, Pitman. (1985), 95-205.

- [Fl-Ri] Fleming, W.H. y Rishel, R.W. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer-Verlag, 1975.
- [Le-Se-Sh] Lehoczky, J., Sethi, S. and Shreve, S. Optimal Consumption and Investment Policies Allowing Consumptions Constraints and Bankruptcy, *Math. Op. Res.*, No. 8, 613-636, 1983.
- [Me] Meyer, P.A. A descomposition theorem for supermartingales, *Illinois J. Math.*, 6, 193-205, 1962.
- [Mer] Merton, R.C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model, *J. Econom. Theory*, 3, 373-413, 1971. Erratum: *Ibid* 6, 213-214. 1973.
- [Mi] Miller, M.R. *Computer-Aided Financial Analysis*, Reading MA, Addison-Wesley, 1990.
- [So] Soriano, A. *Algunas Ecuaciones en Derivadas Parciales que provienen de la Programación Dinámica*, Univ. Complutense de Madrid, 1997.