2
2 ejm

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE STEINHAUS, MEDIDA Y CATEGORIA

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

JOSUE BARRIOS AGAPITO

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

260047

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:

"EL TEOREMA DE STEINHAUS, MEDIDA Y CATEGORIA"...

realizado por JOSUE BARRIOS AGAPITO

con número de cuenta 8017196 - 0 , pasante de la carrera de MATEMATICO

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA
Propietario	Dr. FERNANDO BRAMBILA PAZ
Propietario	M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA
Suplente	M. en C. CARMEN ROCIO VITE GONZALEZ
Suplente	Mat. JORGE ESCAMILLA ACOSTA

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

ÍNDICE

PÁGINA

GLOSARIO

$\in$ es un elemento de

$\notin$ no es un elemento de

$\{\ldots\}$ conjunto

$\subset$ es un subconjunto de

$A \supset B$ B es un subconjunto de A

$\cap$ intersección

$\cup$ unión

$\varnothing$ conjunto vacío

A^C complemento de A

$\setminus$ diferencia de conjuntos

Δ diferencia simétrica

$[a,b]$ intervalo cerrado

(a,b) intervalo abierto

$\forall$ para todo

$\exists$ existe

$\Rightarrow$ implica que

$|A|$ cardinalidad de A

λ_* medida interior

$\Leftrightarrow$ si y solo si

$f, g, \varnothing, \psi$ función

f^{-1} función inversa

χ_A función característica

$<$ menor que

$>$ mayor que

$\geq$ mayor o igual que

$\leq$ menor o igual que

I, J intervalo

d(a,b) distancia de a a b

$|a|$ valor absoluto de a

A' el conjunto derivado de A

[x] entero menor o igual que x

A^{o} interior de A

$\overline{A}$ cerradura de A

lim límite

$\overline{\lim}$ límite superior

F_{σ} unión infinita numerable de cerrados.

G_{δ} intersección infinita numerable de abiertos

!! Esto constituye una contradicción

λ medida de Lebesgue

∞ infinito

$\P_1$ proyección sobre el eje X

A - B conjunto de pares de diferencias donde el minuendo pertenece a A y el sustraendo pertenece a B

Σ suma

$\mathbb{R}$ números reales

$\mathbb{Q}$ números racionales

$\mathbb{N}$ números naturales

$\mathbb{Z}$ números enteros

Φ (E) densidad de lebesgue del conjunto E

INTRODUCCIÓN

En el artículo "Sur les distances des points de ensembles de mesure positive, Fund. Math. 1 1920 pp. 93 - 104" de Hugo Steinhaus se prueba que el conjunto de distancias de un conjunto de medida positiva contiene un intervalo.

Es decir, sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda(A) > 0$ existe un intervalo I donde

$$I \subset \{d(a,b) \mid a, b \in A\}$$

El presente trabajo aborda en los capítulos 1 y 2 los resultados obtenidos en el artículo citado anteriormente. En el capítulo 1 se demuestra que un conjunto de medida positiva contiene una infinidad de puntos distintos cuyas distancias son mutuamente racionales, se introduce la noción de conjunto de distancias de un conjunto dado y se demuestra que éste contiene un intervalo siempre que el conjunto base sea de medida positiva. En el capítulo 2 se demuestra que para una sucesión numerable de conjuntos de medida positiva existe una sucesión de puntos (donde $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... etc.) tales que todas sus distancias dos a dos son racionales, además se prueba que para un conjunto medible E existe un conjunto P a lo más numerable cuyas distancias entre sus puntos son racionales y un conjunto Z de medida cero tal que:

$$P \subset E \subset P' \cup Z$$

donde P' designa el conjunto derivado de P.

Los capítulos 3 y 4 se basan en un artículo de R. Anantharaman y J. P. Lee "Planar sets whose Complements do not contain a Dense set of Lines" buscando una generalización del teorema de Steinhaus en $\mathbb{R}^2$.

En el capítulo 3 se presentan propiedades de las proyecciones de conjuntos planos, además se demuestra que la proyección (proyección medible) de un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$ es compacta (F_σ), y finalmente se demuestra una generalización del teorema de Steinhaus para conjuntos en $\mathbb{R}^2$.

En el capítulo 4 se analiza la σ-álgebra generada por los conjuntos con la propiedad de Baire, un teorema análogo al de Steinhaus, así como el resultado principal del artículo de R. Anantharaman y J. P. Lee.

El lector de este trabajo debe poseer conocimientos de Teoría de la medida I, además conocer propiedades de la medida de Lebesgue como:

i) $\lambda(E) = \lambda(E + x)$

ii) Si $\lambda(E) > 0$ entonces $\lambda(mE) > 0$ $\quad (m \neq 0)$

iii) Si $E \subset \mathbb{R}$ y $\lambda(E) > 0$; existe $F \subset E$, F cerrado tal que $\lambda(F) > 0$

iv) Teorema de la Densidad de Lebesgue

v) $\forall\ \varepsilon > 0$ Si $E \subset \mathbb{R}$ con $0 < \lambda\,(E) < \infty$ entonces $\exists$ U abierto $E \subset U$ tal que $\lambda\,(U \setminus E) < \varepsilon$

Asimismo hacemos notar al lector, que se asume en este trabajo el hecho de que trabajaremos únicamente con conjuntos Lebesgue medibles.

Además el lector debe poseer conocimientos básicos de topología; por ejemplo, conjuntos abiertos, cerrados, densos, densos en ninguna parte, de primera categoría, de segunda categoría, etc. ...

1.- EL TEOREMA DE STEINHAUS

TEOREMA 1.1 Todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva contiene dos puntos a, b, tales que $a \neq b$ y $d(a, b) \in \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN.

El teorema se demostrará por reducción al absurdo.

Es decir, supondremos que existe $E_0 \subset \mathbb{R}$ de medida positiva tal que para cualesquiera $a,b \in E_0$ la distancia $d(a,b) \notin \mathbb{Q}$.

AFIRMACIÓN 1.

La sucesión de conjuntos:

$$E_0 + 1,\ E_0 + (1/2),\ E_0 + (1/3),\ \ldots,\ E_0 + (1/k),\ \ldots$$

es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos.

PRUEBA

En efecto, si admitimos que

$[E_0 + (1/k)] \cap [E_0 + (1/h)] \neq \varnothing$ con $k \neq h$.

Es decir, si existe $a \in [E_0 + (1/k)] \cap [E_0 + (1/h)]$ esto significa que $a = e_1 + 1/k$ y $a = e_2 + 1/h$ con $e_1, e_2 \in E_0$.

Claramente $e_1 \neq e_2$ ya que $h \neq k$, igualando los términos tenemos que $e_1 + 1/k = e_2 + 1/h$ así que $e_2 - e_1 = (1/k) - (1/h) \in \mathbb{Q}$.

Esto implica que existe $e_1, e_2 \in E$; $e_1 \neq e_2$ y $d(e_1, e_2) \in \mathbb{Q}$!!

Antes de continuar la demostración del Teorema haremos una segunda afirmación.

AFIRMACIÓN 2. Si $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva, existe $F \subset E$ acotado y $0 < \lambda(F) < \infty$.

PRUEBA

Sea $I_n = [-n, n]$; podemos escribir al conjunto E de la siguiente forma:

$$E = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right] \cap E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E), \text{ así}$$

$$0 < \lambda(E) = \lambda\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap E)\right] = \lim_{n\to\infty} \lambda(I_n \cap E)$$

(Puesto que $I_n \cap E \subset I_{n+1} \cap E$ $\forall n$, es decir la sucesión $(I_n \cap E)$ es creciente).

$0 < \lim_{n\to\infty} \lambda\,(I_n \cap E) \Rightarrow \exists\ n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda\,(I_{no} \cap E) > 0$

Así $F = I_{no} \cap E$; F esta contenido en E y F es acotado de medida positiva.

Dada la afirmación anterior podemos aseverar que $\exists\ F \subset E_0$, F acotado con medida positiva, y además que la sucesión de conjuntos

$F + 1,\ F + (1/2),\ F + (1/3), \ldots,\ F + (1/k), \ldots$

son ajenos dos a dos, es decir,

$[F + (1/h)] \cap [F + (1/k)] = \varnothing$ si $h \neq k$.

Consideremos

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F + (1/k))$$ es un conjunto medible de medida positiva

(puesto que es unión numerable de conjuntos medibles), además S es un conjunto acotado.

Ahora la medida de S.

$$\lambda(S) = \lambda\,[\bigcup_{k=1}^{\infty}\{F + (1/k)\}] = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\,(F + (1/k)) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda\,(F) = \lambda\,(F)\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Esto constituye una contradicción. Por lo tanto, el teorema ha sido demostrado.

TEOREMA 1.2 Para todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva y para todo $k \in \mathbb{N}$ podemos encontrar en el conjunto E k puntos: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ $a_i \neq a_j$ $\forall\, i \neq j$ donde $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}$

DEMOSTRACIÓN.

a) Por el Teorema anterior el resultado es cierto para $n = 2$.

b) Supongamos el Teorema válido para k. Esto es para todo $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva existen $a_1, \ldots, a_k \in E$ tales que $a_i \neq a_j$ y $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}^+$ para todo $i \neq j$

p.d. $\forall\, E \in \mathbb{R}$, E de medida positiva $\exists$ $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \in E$ tal que $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}^+$ para $i, j = 1, 2, \ldots k,\ k + 1$.

Sea $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva por hipótesis existe un conjunto de puntos distintos $\{a_1, a_2, \dots a_k\}$ con $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}$, podemos suponer que los puntos están ordenados de modo que:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_k$$

Sea

$G = \{b \in E \mid \exists\, b_1, b_2, \dots, b_{k-1} \in E$ tales que $b_1 < b_2 < \dots b_{k-1} < b$

donde $d(b_i, b) \in \mathbb{Q}$ y $d(b_i, b_j) \in \mathbb{Q}$ para $1 \leq i, j \leq k-1\}$

$$G \subset E$$

y

$$G \neq \emptyset \text{ porque } a_k \in G$$

Ahora G se puede escribir como G*

$$G^* = \cup \ \{E \cap (E + w_1) \cap \dots \cap (E + w_{k-1}) \mid \{w_i\}_{j=1}^{k-1} \text{ es}$$

ordenación estrictamente creciente de racionales positivos$\}$

Demostremos que G = G*

i) En efecto, si $b \in G$ entonces $\exists\ b_1, b_2, \ldots, b_{k-1} \in E$ tal que

$b_1 < b_2 \ldots < b_{k-1} < b_k$ y $d(b_i, b_j) \in Q \quad 1 \leq i, j \leq k-1$ y $d(b_i, b) \in Q\ \forall i$

$\Rightarrow w_i = b - b_i$ para $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$\Rightarrow b = b_i + w_i\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, k-1$

$\Rightarrow b \in E + w_i\ \ \forall i = 1, 2, \ldots, k-1$

$\Rightarrow b \in E \cap (E + w_1) \cap (E + w_2) \cap \ldots \cap (E + w_{k-1})$

$\Rightarrow b \in \cup\ \{E \cap (E + w_1) \cap (E + w_2) \cap \ldots \cap (E + w_{k-1}) \mid \{w_i\}^{k-1}_{j=1}$

ordenación estrictamente creciente de racionales positivos$\}$

$\Rightarrow b \in G^*$

ii) Ahora, si

$\Rightarrow b \in \cup\ \{E \cap (E + w_1) \cap \ldots \cap (E + w_{k-1}) \mid \{w_i\}^{k-1}_{j=1}$ ordenación

estrictamente creciente de racionales positivos$\}$

$\Rightarrow b \in E \cap (E + w_1) \cap \ldots \cap (E + w_{k-1})$ para alguna ordenación $\{w_i\}$ estrictamente creciente; entonces $b \in E + w_j \;\; \forall j = 1 \ldots k - 1$

$\Rightarrow \;\forall j = 1, \ldots, k - 1; \;\exists\; b_j \in E$ tal que $b = b_j + w_j$

y $\; b - b_j = w_j \;\; \forall j = 1, \ldots k - 1$

$\Rightarrow b_j = b - w_j, \quad b_{k-1} < b_{k-2} < \ldots < b_2 < b_1 < b$

$\therefore b \in G$

Así $G = G^*$

El conjunto de ordenaciones de racionales positivos es posible demostrar que es numerable, puesto que $(\mathbb{Q}^+)^{k-1}$ es numerable

Por otra parte, se tiene que: la intersección de conjuntos medibles es medible, y la unión numerable de conjuntos medibles es medible.

De lo anterior se concluye que G es medible.

Definamos $\; H = E \setminus G$

H es medible pues es diferencia de conjuntos medibles.

Si λ (H) > 0 entonces por hipótesis de inducción existen $c_1, c_2, ..., c_k, \in H$ tal que: $i < j$ $c_j - c_i \in \mathbb{Q}^+$ y $c_1, c_2, ..., c_k \in E$; por consiguiente $c_k \in G$, lo cual no es posible.

Por ende, $\lambda(H) = 0$.

Así, tenemos que λ (G) = λ (E) > 0.

Aplicando a G el Teorema 1.1, se tiene que existen $a, b \in G$, $a < b$, tal que $d(a,b) \in \mathbb{Q}$ y como $a \in G$ entonces existen $a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a, b$, tales que $a_1 < a_2 < ... < a_{k-1} < a < b$ donde $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}$ y $d(a_i, a) \in \mathbb{Q}$ $\forall$ i, j = 1, ... , k - 1

$\therefore$ Si $a_k = a$ y $a_{k+1} = b$ obtenemos que $a_1 < a_2 < ... < a_{k+1}$ y $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}$ $\forall$ i, j = 1, ... , k + 1

TEOREMA 1.3 Todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida positiva contiene un conjunto infinito R de puntos distintos tales que $d(x,y) \in \mathbb{Q}$; $\forall$ x, y $\in$ R.

DEMOSTRACIÓN.

Sea E un conjunto de medida positiva $E \subset \mathbb{R}$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto G_n

$$G_n = \cup \{E \cap (E + w_1) \cap \ldots \cap (E + w_{n-1}) \mid (w_j)_{j=1}^{n-1} \text{ ordenación estrictamente creciente de racionales positivos}\}$$

Si $H_n = E \setminus G_n$ tenemos que

$\lambda(H_n) = 0 \ \forall n$ (ver prueba del Teorema 1.2).

Ahora definamos $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$

$$\lambda(S) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(H_n) = 0 \quad (\text{ya que } \lambda(H_n) = 0 \ \forall n)$$

Sabemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset E$

Por otro lado

$$E \setminus S = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \;=\; E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \setminus G_n) \;=\; E \cap \Big[\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \setminus G_n)\Big]^c$$

$$= E \cap \Big[\bigcap_{n=1}^{\infty}(E \setminus G_n)^c\Big] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[(E \;\cap\; G^c{}_n)^c \cap E\Big]$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[(E^c \cup (G^c{}_n)^c) \cap E\Big]$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[(E^c \;\cup G) \cap E\Big]$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big[EF^c \cap E) \cup (E \cap (G_n))\Big] \quad \text{pero } E^c \cap E = \varnothing$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty}(E \cap G_n) \qquad \text{como } G_n \;\subset E$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \; G_n$$

Hemos demostrado que $E \setminus S = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ y puesto que $m(S) = 0$

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lambda(E) > 0 \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$$

Sea $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a \in G_n$, esto es para cada n existe un

conjunto de puntos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ en E con

$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = a$ tal que $d(a_i,a_j) \in \mathbb{Q}$

Para cada n sea $R_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = a\}$

Sea $R_1^* = R_1$

Observación: $|R_1^*| = 1$, $a \in R_1^*$ y $d(x,y) \in \mathbb{Q}$; si $x, y \in R_1^*$

Supongamos que hemos definido R_n^*, tal que $|R_n^*| = n$,

$a \in R_n^*$ y $d(x,y) \in \mathbb{Q} \quad \forall \quad x, y \in R_n^*$

Como $|R_{n+1}| = n + 1 > n = |R_n^*|$

Existe $b_{jn} \in R_{n+1} \setminus R_n^*$

Definimos $R_{n+1}^* = R_n^* \cup \{b_{jn}\}$

Entonces: i) $|R_{n+1}{}^*| = |R_n{}^*| + |b_{jn}| = n + 1$, porque $b_{jn} \notin R_n{}^*$

ii) $a \in R_{n+1}{}^*$ porque $a \in R_n{}^*$

iii) Si $x, y \in R_{n+1}{}^* \Rightarrow d(x,y) \in Q$

El resultado es claro si $x, y \in R_n{}^*$ por definición de $R_n{}^*$ y también si $x, y \in \{b_{jn}\}$.

En caso de que $x \in R_n{}^*$, $y \in \{b_{jn}\}$ se tiene que

$x - y = x - b_{jn} = (x - a) + (a - b_{jn})$

Ahora, $x - a \in Q$ porque $x, a \in R_n{}^*$

$a - b_{jn} \in Q$ porque $a, b_{jn} \in R_{n+1}$

Así, $x - y \in Q$ y por ende $d(x,y) \in Q$

Por definición de $R_{n+1}{}^*$ tenemos que $R_n{}^* \subset R_{n+1}{}^*\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Sea $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n{}^*$

R es un conjunto infinito pues $|R| \geq |R_n{}^*| = n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$

Además, si $x, y \in R$ tal que $x \neq y$

$\Rightarrow$ $x \in R_n^*$ para alguna n y $y \in R_m^*$ para alguna m.

$\Rightarrow$ $x,y \in R_{n+m}$

$\Rightarrow$ $d(x,y) \in \mathbb{Q}$

Por lo tanto, $R \subset E$ es un conjunto infinito de puntos tales que la distancia entre cada par es un número racional.

TEOREMA 1.4

Todo conjunto $E \subset \mathbb{R}$ de medida interior positiva contiene una infinidad de puntos distintos cuyas distancias son racionales positivos.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida interior positiva, es decir,

$$\lambda_*(E) = \sup \{\lambda(F) \mid F \subset E, F \text{ medible}\} > 0$$

entonces $\exists$ F_1 medible $F_1 \subset E$ y $\lambda(F_1) > 0$

Así, por el Teorema 1.3 $\exists$ $R \subset F_1$, R infinito tal que $d(x,y) \in \mathbb{Q}$; para todo x, y que pertenezcan a R .

Dado que $F_1 \subset E$, entonces $R \subset E$.

TEOREMA 1.5

Sea $E \subset \mathbb{R}$, tal que $\lambda(E) > 0$, si $E = A \cup B$ entonces al menos uno de los conjuntos A, B contiene una infinidad de puntos distintos tales que la distancia entre cada dos de ellos es racional.

DEMOSTRACIÓN.

Sea E tal que $\lambda(E) > 0$, $E = A \cup B$ entonces por el Teorema 1.3.

$\exists$ R un conjunto infinito de puntos distintos cuyas distancias son racionales y el cual está contenido en E. Puesto que,

$R = R \cap E = (R \cap A) \cup (R \cap B)$

Como $|R| = \infty \Rightarrow |R \cap A| = \infty$ o $|R \cap B| = \infty$

Digamos que $|R \cap A| = \infty$, entonces se tiene que

i) $R \cap A \subset A$

ii) Si $x, y \in R \cap A$ entonces $x,y \in R \Rightarrow d(x,y) \in \mathbb{Q}$.

Por consiguiente existe una infinidad de puntos en al menos uno de los conjuntos A o B tales que la distancia entre cada par de ellos es un número racional.

TEOREMA 1.6

Sean A, B $\subset \mathbb{R}$ dos conjuntos de medida positiva y sea ξ un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Existen dos puntos a, b pertenecientes a A y B respectivamente tales que $d(a,b) \in \xi$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea A tal que $\lambda(A) > 0$, además sea

$$\Phi(A) = \{x \in A \mid \lim_{h \to 0} \frac{\lambda([x - h, x + h] \cap A)}{2h} = 1\}$$

Φ (A) es llamada la densidad de Lebesgue del conjunto E. Utilizando el Teorema de la densidad de Lebesgue se tiene que $\lambda(A) = \lambda(\Phi(A))$; esto implica que:

$\lambda(\Phi(A)) > 0$ y entonces $\Phi(A) \neq \varnothing$

$\Rightarrow$ Existen $x \in A$ y $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $0 < \delta < \varepsilon_1$ entonces

$$\frac{\lambda([x - \partial,\ x + \partial] \cap A)}{2\partial} \rangle \frac{3}{4}$$

Análogamente si $\lambda(B) > 0$ se sigue que, $\lambda(\Phi(B)) > 0$ y luego $\Phi(B) \neq \varnothing$.

$\Rightarrow$ existen $y \in B$ y $\varepsilon_2 > 0$ tal que si $0 < \partial < \varepsilon_2$ entonces

$$\frac{\lambda([y - \partial,\ y + \partial] \cap B)}{2\partial} \rangle \frac{3}{4}$$

Supongamos que $y < x$.

Si tomamos δ, tal que $0 < \delta < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, x - y\}$ con lo cual se tiene que

$$\frac{\lambda([x - \partial,\ x + \partial] \cap A)}{2\partial} \rangle \frac{3}{4}$$

Ahora escogemos ∂' tal que $\frac{2\partial}{3} < \partial' < \partial$

con lo cual se tiene que

$$\frac{\lambda([x - \partial', x + \partial'] \cap A)}{2\partial'} \rangle \frac{3}{4}$$

y

$$\frac{\lambda([y - \partial', y + \partial'] \cap B)}{2\partial'} \rangle \frac{3}{4}$$

Sea ξ un subconjunto denso de R, tomemos $\omega \in [x - y - (\delta - \delta'), x - y + (\delta - \delta')] \cap \xi$.

$\Rightarrow x - y - (\delta - \delta') \leq \omega \leq x - y + (\delta - \delta')$

$\Rightarrow x - y - \delta + \delta' \leq \omega \leq x - y + \delta - \delta'$

$\Rightarrow x - \delta \leq y + \omega - \delta' < y + \omega + \delta' \leq x + \delta.$

De esta última desigualdad se desprende que

$[y + \omega - \delta' , y + \omega + \delta'] \subset [x - \delta, x + \delta]$

$\Rightarrow [y + \omega - \partial', y + \omega - \partial'] \cap (B + \omega) \subset [x - \partial, x + \partial]$

y también $[x - \partial', x + \partial'] \subset [x - \partial, x + \partial]$

Los conjuntos $[x - \partial', x + \partial'] \cap A$ y $[y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega)$ no son ajenos, puesto que si lo fueran como ambos estan contenidos en

$(x - \partial, x + \partial)$ la suma de sus medidas sería menor que 2∂, sin embargo:

$$\frac{\lambda([x - \partial', x + \partial'] \cap A)}{2\partial'} + \frac{\lambda([y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega))}{2\partial'} > \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda([x - \partial', x + \partial'] \cap A) + \lambda([y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega)) > (3/2)\ (2\partial')$$

$$\Rightarrow \lambda([x - \partial', x + \partial'] \cap A) + \lambda([y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega)) > (3/2)\ (4/3)\ \partial$$

$$\Rightarrow \lambda([x - \partial', x + \partial'] \cap A) + \lambda([y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega)) > 2\partial$$

Por lo cual los conjuntos descritos anteriormente no pueden ser ajenos.

Por consiguiente,

$$([x - \partial', x + \partial'] \cap A) \cap (y + \omega - \partial', y + \omega + \partial'] \cap (B + \omega) \neq \varnothing$$

$$\Rightarrow A \cap (B + \omega) \neq \varnothing$$

Sea $z \in A \cap (B + \omega)$, entonces $z = a$ y $z = b + \omega$ para $a \in A$, $b \in B$ de lo cual tendremos que $b = a - \omega$.

$\Rightarrow d(a,b) = |a - b| = |a - (a - \omega)| = |\omega| = \omega$ donde $\omega \in \xi$. Esto concluye la demostración del teorema.

DEFINICIÓN

Sean A, B dos conjuntos dados, llamaremos al conjunto de distancias de A y B a todos los números d(a,b) donde $a \in A$, $b \in B$. Este conjunto lo designaremos por D(A,B).

Es decir, $D(A,B) = \{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$

Si A = B, el conjunto de distancias de A y A está dado por

$D(A,A) = \{d(a_1,a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$.

En este caso también lo denominaremos el conjunto de distancias de A y en lugar de escribir D(A,A) escribiremos simplemente D(A).

TEOREMA 1.7 (STEINHAUS)

El conjunto de distancias de dos conjuntos A, B $\subset \mathbb{R}$ de medida positiva contiene al menos un intervalo.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $D = D(A,B) = \{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ y sea $C = D^c$, dado que D contiene todas las distancias de A a B, entonces C no contiene distancia alguna, y en virtud del Teorema anterior C no puede ser denso en todas partes, esto implica que D contiene al menos un intervalo.

TEOREMA 1.8

Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto lineal de medida positiva, el conjunto de distancias $D(E) = \{d(a,b) \mid a,\ b \in E\}$ contiene un intervalo cuyo extremo izquierdo es el 0.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda(E) > 0$.

Sea $F \subset E$ un conjunto cerrado y acotado tal que $\lambda(F) > 0$.

F puede ser encerrado en G un conjunto abierto acotado con

$\lambda(G \setminus F) < 1/3 \, \lambda(F)$

$\Rightarrow \lambda(G) - \lambda(F) < 1/3 \, \lambda(F)$

$\Rightarrow \lambda(G) < 4/3 \, \lambda(F)$.

Puesto que G es abierto, G puede ser descrito como la unión de una sucesión de intervalos mutuamente ajenos.

Esto es,

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{donde} \quad I_i \cap I_j = \varnothing \quad \text{si } i \neq j.$$

y

$$\lambda(G) < 4/3 \, \lambda(F)$$

AFIRMACIÓN

Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(F \cap I_n) > 3/4 \, \lambda(I)$

PRUEBA

Supongamos que para toda n, $\lambda\ (F \cap I_n) \leq 3/4\ \lambda\ (I_n)$

$$\Rightarrow \sum_{n\in N} \lambda\ (F \cap I_n) \leq\ 3/4\ \sum_{n\in N} \lambda\ (I_n)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in N} \lambda\ (F \cap I_n)\ \leq 3/4\ \lambda\ (G)$$

$\Rightarrow \lambda\ (F) = \sum_{n\in N} \lambda\ (F \cap I_n)\ \leq 3/4\ \lambda\ (G)$ lo cual contradice que

$\lambda(G) < 4/3\ \lambda(F)$

Sea n_0 el menor número natural tal que el intervalo $I_{no} = I$ cumpla la condición de que

$$\lambda(F \cap I)\ >\ 3/4\ \lambda(I)$$

Tomemos $\partial = \dfrac{\lambda(I)}{2}$

Sea x tal que $0 < x < \partial$.

Si $I = (a,b)$; entonces $\lambda(I) = b - a$, $\quad I + x = (a + x,\ b + x)$.

y $I \cup \{I + x\} = (a,\ b + x)$

Así $\{I + x\} \cup I$ es un intervalo

La medida

$\lambda(I \cup \{I + x\}) = \lambda[(a, b + x)] = (b - a) + x < \lambda(I) + \lambda(I)/2 = 3/2\, \lambda (I)$

es decir,

$$\lambda(I \cup \{I + x\}) < 3/2\, \lambda(I)$$

Además tenemos que

$$F \cap I \subset I$$

$$y\ (F \cap I) + x \subset I + x$$

$\therefore (F \cap I) \cup \{(F \cap I) + x\} \subset I \cup \{I + x\}$

$\therefore \lambda (E) < 3/2\, \lambda (I)$

Los conjuntos $F \cap I$ y $(F \cap I) + x$ no son ajenos, ya que si lo fueran se tendría que:

$$\lambda[(F \cap I) \cup \{(F \cap I) + x\}] = \lambda(F \cap I) + \lambda(\{F \cap I\} + x)$$

$$> 3/4\, \lambda(I) + 3/4\, \lambda(I)$$

$$> 3/2\, \lambda(I)$$

Así,

$(E+ x) \cap E \supset [(F \cap I) + x] \cap (F \cap I) \neq \varnothing \ \forall x, 0 < x < \partial.$

Sea $\omega \in (E + x) \cap E$ con $0 < x < \partial$

esto significa que $\omega = a_1 + x$ y $\omega = a_2$ donde $a_1, a_2, \in E$.

Esto implica que $a_2 - a_1 = x$

Es decir, $d(a_1,a_2) = a_2 - a_1 = x \ \forall x \quad 0 < x < \partial.$

Por lo tanto, $\forall x, 0 < x < \delta$ existen a_1, a_2, en E tales que
$d (a_1, a_2) = a_2 - a_1 = x$

$\therefore (0, \delta) \subset D(E)$

OBSERVACIÓN

En los teoremas 1.7 y 1.8 se puede reemplazar la hipótesis de medida positiva por la de medida interior positiva.

Lo expresado anteriormente se cumple, pues si A y B tienen medida interior positiva entonces existen $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$ conjuntos de medida positiva. Luego a los conjuntos A_1 y B_1 se les puede aplicar el

Teorema 1.7 lo cual implicaría que $d(A_1, B_1)$ contiene un intervalo. Puesto que $d(A, B) \supset d(A_1, B_1) \supset I$ donde $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$; podemos concluir que $d(A, B)$ contiene un intervalo.

2. DERIVACIONES DEL TEOREMA DE STEINHAUS

LEMA 2.1

Sean A_1, A_2 dos conjuntos de medida positiva, casi todos los puntos a pertenecientes a A_2 cumplen la condición:

$$\exists\, a_1 \in A_1, \text{ tal que } d(a_1,a) \in \mathbb{Q}.$$

Es decir, $\lambda\,(\{a \in A_2 \mid \exists\, a_1 \in A_1 \text{ con } d(a, a_1) \in \mathbb{Q}\}) = \lambda(A_2)$

DEMOSTRACIÓN.

Sean A_1, A_2 tales que $\lambda(A_1) > 0$ y $\lambda(A_2) > 0$

El conjunto G de los elementos a pertenecientes a A_2 que cumplen la condición pueden expresarse como:

$$\bigcup_{r=1}^{\infty} \{[(A_1 + w_r) \cap A_2]\} \text{ donde } \{w_r\} \text{ es la sucesión de los números racionales positivos.} \qquad (1)$$

En efecto,

$$\text{Si } a \in \bigcup_{r=1}^{\infty} [(A_1 + w_r) \cap A_2]$$

$\Rightarrow a \in (A_1 + w_r) \cap A_2$ para alguna $r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = a_1 + w_r$ y $a \in A_2$ para alguna $r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = a_1 + w_r$ para alguna $r \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a - a_1 = w_r$ para alguna r

$\Rightarrow \exists\, a_1 \in A_1$ tal que $d(a_1,a) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a \in G$

Ahora bien,

Si $a \in G \Rightarrow a \in A_2$. y existe $a_1 \in A_1$ tal que $d(a_1, a) \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a - a_1 = w_s$ con $s \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a = a_1 + w_s \quad s \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a \in A_2$ y $a = a_1 + w_s \in A_1 + w_s$ con $s \in Q$

$$\Rightarrow a \in \bigcup_{r=1}^{\infty} A_1 + w_r$$

y como $a \in A_2$ entonces $a \in A_2 \cap [\bigcup_{r=1}^{\infty} (A_1 + w_r)]$

$$\Rightarrow a \in \bigcup_{r=1}^{\infty} [(A_1 + w_r) \cap A_2]$$

$\Rightarrow a \in \bigcup_{r=1}^{\infty} [(A_1 + w_r) \cap A_2]$ donde $\{w_r\}$ es la sucesión de todos los números racionales positivos.

Por tanto, $a \in G$, con lo cual G se puede escribir como (1).

Dado que A_1 es medible, también $A_1 + w_r$ es medible.

Más aún $(A_1 + w_r) \cap A_2$ es medible.

Puesto que; G es unión numerable de conjuntos medibles, G es medible y $G \subset A_2$

Ahora probaremos la siguiente afirmación con lo cual se concluirá la demostración del teorema.

AFIRMACIÓN

$\lambda(G) = \lambda(A_2)$

PRUEBA

i) Primeramente $G \subset A_2 \Rightarrow \lambda(G) \leq \lambda(A_2)$

ii) Supongamos que $\lambda(G) < \lambda(A_2)$ y formemos el conjunto $B = A_2 \setminus G$, entonces $\lambda(B) > 0$.

Así, el conjunto de distancias de A_1 y B.

$D(A_1,B) = \{d(a_1,b) \mid a_1 \in A_1, b \in B\}$ contiene un número racional por el Teorema 1.6.

Es decir, existen 2 puntos $a_1 \in A_1$, $b \in B$ tal que $d(a_1,b) = p$, $p \in \mathbb{Q}$.

Esto es, existen $a_1 \in A_1$, $b \in B = A_2 \setminus G$ tal que

$$a_1 - b = p \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow b = a_1 + p \in A_1 + p$ con $p \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow b \in (A_1 + p) \cap A_2 \qquad p \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow b \in (A_1 + w_r) \cap A_2$ para alguna $r \in \mathbb{N}$ donde $\{w_r\}$ es una sucesión de todos los racionales positivos

$$\Rightarrow b \in \bigcup_{r=1}^{\infty}[(A_1 + w_r) \cap A_2]$$

$\Rightarrow b \in G$

Por ende, $b \in G$ y $b \notin G$!!

Por consiguiente $\lambda(B) = 0$ y $\lambda(G) = \lambda(A_2)$.

TEOREMA 2.2

Sean $A_1, A_2 \ldots, A_k$ $(k \geq 2)$ conjuntos de medida positiva. Entonces, el conjunto:

$$B_i = \{a \in A_i \mid \text{para toda } j \neq i \text{ existen } a_j \in A_j \text{ tal que } d(a, a_j) \in \mathbb{Q}\}$$

tiene medida $\lambda(B_i) = \lambda(A_i)$

DEMOSTRACIÓN

Se realizará por inducción y se generalizará siguiendo la idea mostrada en el Lema anterior.

i) Para $k = 2$

Sean A_1, A_2 conjuntos tales que $\lambda(A_1) > 0$ y $\lambda(A_2) > 0$ y llamemos $B_1 = \{x \in A_2 \mid \exists\, y \in A_1$ tal que $d(x,y) \in \mathbb{Q}\}$

por el lema anterior $\lambda(B_1) = \lambda(A_2)$ y así $\exists\, a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ tales que $d(a_1,a_2) \in \mathbb{Q}$

ii) Supongamos que el Teorema se cumple para $k = n$; es decir, si A_1, $A_2 \ldots, A_n$ son conjuntos de medida positiva entonces el conjunto

$B_n = \{a_n \in A_n \mid$ existen $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots a_{n-1} \in A_{n-1}$; tales que $d(a_i,a_j) \in \mathbb{Q}$ si $i,j = 1, 1, \ldots, n\}$ tiene la propiedad de que $\lambda(B_n) = \lambda(A_n)$.

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n, A_{n+1}$ conjuntos de medida positiva.

Consideremos el conjunto

$B_{n+1} = \{a_{n+1} \in A_{n+1} \mid$ existen $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ tales que $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}$ para $i,j = 1, \ldots, n+1\}$

p.d. $\lambda(B_{n+1}) = \lambda(A_{n+1})$

Este conjunto puede ser descrito como en el Lema anterior; es decir,

$G = \cup\, [(A_1 + w_{1,k1}) \cap \ldots \cap (A_n + w_{n,kn}) \cap A_{n+1}]$ donde

$\{w_{i,ki}\}_{ki \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de todos los números racionales positivos para $i = 1, \ldots, n$.

Formemos el conjunto

$$B = A_{n+1} \setminus B_{n+1} = A_{n+1} \setminus G$$

Si $\lambda(B) > 0$ entonces B y A_i donde $i = 1, \ldots, n$ son conjuntos de medida positiva y puede ser aplicado el Lema 2.1; esto es, sea $b \in B$ y A_i entonces

$G_i = \{a \in A_i \mid d(a,b) \in \mathbb{Q}\}$ tiene la propiedad de que

G_i es casi todo A_i, es decir, $\lambda(G_i) = \lambda(A_i) > 0$.

$\Rightarrow G_i \neq \varnothing$

$\Rightarrow \exists\, a_i \in A_i$ tal que $d(a_i, b) \in \mathbb{Q}$

En otras palabras, para cada $b \in A_{n+1}$ existen $a_i \in A_i$ tales que

$b - a_i \in \mathbb{Q}$ para $i = 1, \ldots, n$

Sea $w_i = b - a_i \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow b \in (A_i + w_i) \cap A_{n+1}$ para $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow b \in \cup\, [(A_1 + w_{1,k1}) \cap \ldots \cap (A_n + w_{n,kn}) \cap A_{n+1}]$ donde $\{w_{i,ki}\}_{ki \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de todos los números racionales positivos para $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow b \in G = B_{n+1}$

Pero $b \in B = A_{n+1} \setminus B_{n+1}$ es decir $b \notin B_{n+1}$!!

De esta manera $\lambda(B) = 0$

Por consiguiente, $\lambda(B_{n+1}) = \lambda(A_{n+1})$

TEOREMA 2.3

Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de medida positivas,

existe una sucesión de puntos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $a_i \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ tales

que $d(a_i,a_j) \in \mathbb{Q} \qquad \forall i \neq j$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de medida positiva

Formemos los conjuntos

$$B_1 = \{x \in A_1 \mid \exists\, a_2 \in A_2 \text{ tal que } d(x,a_2) \in \mathbb{Q}\}$$

$$B_2 = \{x \in B_1 \mid \exists\, a_3 \in A_3 \text{ tal que } d(x,a_3) \in \mathbb{Q}\}$$

$$\vdots$$

$$B_k = \{x \in B_{k-1} \mid \exists\, a_{k+1} \in A_{k+1} \text{ tal que } d(x,a_{k+1}) \in \mathbb{Q}\}$$

$$\vdots$$

Por el lema demostrado anteriormente

$$\lambda(B_k) = \lambda\,(A_1)\ \forall\ k \in \mathbb{N}$$

Además, $B_k \supset B_{k+1} \quad \forall \quad k \in \mathbb{N}$

Tomemos, ahora la intersección de todos los $B_{k's}$, esto es, $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$

La medida $\lambda(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) = \lambda(A_1) > 0$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \varnothing$$

Sea $a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \Rightarrow a \in B_k \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

Así, podemos formar la lista

$a \in A_1,\ a_{12} \in A_2$ para $k = 1$

$a \in A_1,\ a_{22} \in A_2,\ a_{23} \in A_3$ para $k = 2$

..

.

$a \in A_1,\ a_{n2} \in A_2,\ a_{n3} \in A_3, \ldots,\ a_{n(n+1)} \in A_{n+1}$ para $k = n$

.

.

Cada renglón de esta lista tiene la propiedad de que la distancia entre cada par de sus elementos es racional. Además, como el punto a es fijo se tiene que la distancia entre cada par de elementos de la lista es racional.

En efecto, pues

$$a_{hl} - a_{mn} = (a_{hl} - a) + (a - a_{mn}) \in \mathbb{Q}^{+}$$

De esta manera podemos formar la sucesión

$a_1 = a,\ a_2 = a_{22},\ a_3 = a_{33}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Por lo tanto,

$a_1 \in A_1,\ a_2 \in + A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ a_n \in A_n, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
y $d(a_i, a_j) \in \mathbb{Q}^{+}$

TEOREMA 2.4

Sea E un conjunto medible, existe un conjunto P a lo más numerable cuyas distancias entre sus puntos son racionales y un conjunto Z de medida nula, tales que

$$P \subset E \subset P' \cup Z$$

donde P' es el conjunto derivado de P.

DEMOSTRACIÓN.

Sea E un conjunto medible.

Si E es de medida nula, el Teorema se cumple eligiendo $P = \emptyset$ y $Z = E$.

Supongamos que la medida de E es positiva.

Sea $Z = \cup \{(p,q) \cap E \mid p,q \in \mathbb{Q} \text{ y } \lambda[(p,q) \cap E] = 0\}$

Z tiene medida nula, pues

$$\lambda(Z) \leq \sum_{p,q \in \mathbb{Q}} \lambda[(p,q) \cap E] = 0$$

$\forall$ p, q, r, s, $\in \mathbb{Q}$ tal que $\lambda[(p,q) \cap E] > 0$ y $\lambda[(r,s) \cap E] > 0$

escogemos $x_{pq} \in (p,q) \cap E$, $x_{rs} \in (r,s) \cap E$ de modo que $d(x_{pq}, x_{rs}) \in \mathbb{Q}$.

Formemos el conjunto

$$P = \{x_{pq} \mid p, q \in \mathbb{Q}, \lambda[(p,q) \cap E] > 0\}$$

$\forall x \in E$; $\exists$ p, q $\in \mathbb{Q}$ tal que $x \in (p,q)$, $\lambda[(p,q) \cap E] = 0$

o $\forall$ p, q $\in \mathbb{Q}$ tal que $x \in (p,q)$, $\lambda[(p,q) \cap E] > 0$

Esto es;

$\forall\, x \in E$; $x \in Z$ o $\forall\, p,q \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in (p,q)$, $\lambda[(p,q) \cap E] > 0$

Si $x \notin Z$, el conjunto $[(p,q) \cap E] \setminus \{x\}$ lo podemos escribir como:

$$[(p,q) \cap E] \setminus \{x\} = \cup \{(p,p') \cap E \mid p' \in \mathbb{Q},\ p < p' < x\} \cup \{(q',q) \cap E \mid q' \in \mathbb{Q},\ x < q' < q\}$$

esto implica que; $\exists\, p'$ tal que $\lambda[(p,p') \cap E] > 0$, $x_{pp'}, \in (p,q) \cap P$

o $\exists\, q'$ tal que $\lambda[(q',q) \cap E] > 0$, $x_{qq'}, \in (p,q) \cap P$

con lo cual $x \in P'$

Por lo tanto, $P \subseteq E \subseteq P' \cup Z$

3. EL TEOREMA DE STEINHAUS Y LAS PROYECCIONES DE CONJUNTOS PLANOS

En este capítulo y en el posterior usaremos la siguiente terminología:
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lineal; es decir, existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = mx$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Para $c \in \mathbb{R}$ denotamos por f_c la gráfica de f_c: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f_c(x) = f(x) + c$, $x \in \mathbb{R}$.

La medida de Lebesgue de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^2$) es denotada por λ_1 (respectivamente λ_2), y definimos:

$$\P_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \text{ por}$$
$$\P_1(x,y) = x$$

$\P_1$: es llamada la proyección sobre el eje X.

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ definimos la f-proyección, la f-proyección en medida y la f-proyección categoría de E, denotadas por P(f,E), Q(f,E) y R(f,E) como sigue:

$$P(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid f_c \cap E \neq \varnothing\}$$
$$Q(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 [\P_1 (f_c \cap E] > 0\}$$
$$R(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid \P_1 (f_c \cap E) \text{ es de segunda categoría en } \mathbb{R}\}.$$

En general, Q(f,E) y F(f,E) son subconjuntos propios de P(f,E) como en el siguiente ejemplo.

Sea

$E = [1,3] \times [-1,0] \cup [1,3] \times [4,5] \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 \quad y \quad 0 \leq y \leq 4\}$
además, sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad.

Así $P(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid f_c \cap E \neq \varnothing\} = [-4,4]$

Mientras que,

$$Q(f,E) = (-4,-1) \cup (1,4).$$

y $\quad R(f,E) = (-4,-1) \cup (1,4)$

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ definiremos el conjunto de diferencias donde el minuendo pertenece a A y el sustraendo pertenece a B que denotaremos por A - B como:

$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$

PROPOSICIÓN 3.1

Sea $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $E = A \times B$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal, $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$.

Entonces:

i) $P(f,E) = B - f(A)$

ii) $[P(f,E)]^c = \{c \mid c + f(A) \subset B^c\}$

iii) $Q(f,E) = \{c \mid \lambda_1 [A \cap f_c^{-1} (B)] > 0\}$

iv) $R(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid A \cap f_c^{-1} (B)$ es de segunda categoría$\}$

donde A y B son medibles.

DEMOSTRACIÓN

Para el caso i)

a) pd. $P(f,E) \subset B - f(A)$

Sea $c \in P(f,E) \Rightarrow f_c \cap E \neq \varnothing$

$\Rightarrow$ existen $x \in A$, $y \in B$ tal que $y = mx + c$

$\Rightarrow$ existen $x \in A$, $y \in B$ tal que $y - mx = c$

$\Rightarrow y - mx \in B - f(A)$

b) pd. $B - f(A) \subset P(f,E)$

Sea $w \in B - f(A) \Rightarrow w = b - f(a)$ donde $b \in B$ y $f(a) \in f(A)$

$\Rightarrow b = f(a) + w$ donde $a \in A$, $b \in B$, $w \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Existen $a \in A$, $b \in B$ tal que $b = f(a) + w$, con $w \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f_w \cap E \neq \emptyset$

$\Rightarrow w \in P(f,E)$

ii) $[P(f,E)]^c = \{c \mid c + f(A) \subset B^c\}$

$c \in [P(f,E)]^c \Leftrightarrow f_c \cap E = \emptyset$

$\Leftrightarrow \{(x, mx + c) \mid x \in A\} \cap (A \times B) = \emptyset$

$\Leftrightarrow \forall x \in A \quad \exists y \in B$ tal que $y = mx + c$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in A \quad \exists\, y \in B$ tal que $y = c + f(x)$

$\Leftrightarrow \forall\, x \in A \quad \exists\, y \in B$ tal que $y \in c + f(A)$

$\Leftrightarrow c + f(A) \subset B^c$

$\Leftrightarrow c \in \{c \mid c + f(A) \subset B^c\}$

iii) $Q(f,E) = \{c \mid \lambda_1 [A \cap f_c^{-1} (B)] > 0\}$

Basta probar que $\forall c, \quad \P_1 \ (f_c \cap E) = A \cap f_c^{-1} (B)$

Sea $x \in \P_1 \ (f_c \cap E)$

$\Leftrightarrow x \in \P_1 \ [\{(x,f(x) + c) \mid x \in \mathbb{R}\} \cap (A \times B)]$

$\Leftrightarrow x \in A$ y $f_c(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in A$ y $x \in f_c^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap f_c^{-1} (B)$

Es necesario que A y B sean medibles para que también f_c^{-1} (B) sea medible.

iv) Se sigue inmediatamente de iii).

COROLARIO 3.2

Sean A de segunda Categoría, B residual y $E = A \times B$. Entonces, $P(f,E) = \mathbb{R}$ para cada función lineal no identicamente cero.

DEMOSTRACIÓN

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineal $f \equiv 0$ transforma conjuntos de segunda categoría en conjuntos de segunda categoría, además si A es de segunda categoría $c + f(A)$ es de segunda categoría para $c \in \mathbb{R}$.

Por hipótesis B es residual con lo cual B^c es de primera categoría, y por consiguiente no existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c + f(A) \subset B^c$. Por tanto, el conjunto

$$P(f,E)^c = \{c \mid c + f(A) \subset B^c\} = \varnothing$$

finalmente, se concluye que: $P(f,E) = \mathbb{R}$

PROPOSICIÓN 3.3

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ y f lineal. Entonces $P(f,E)^o = \varnothing$ si y sólo si E contiene un conjunto de líneas paralelas a f, donde el conjunto de ordenadas al origen es un conjunto denso.

DEMOSTRACIÓN

De la proposición 3.1 $P(f,E)^c = \{c \mid fc \subset E^c\}$.

Así, $P(f,E)^o = \varnothing \Leftrightarrow P(f,E)^c$ es denso en $\mathbb{R} \Leftrightarrow E^c$ contiene un conjunto de líneas paralelas a f, donde el conjunto de ordenadas al origen es un conjunto denso.

Para establecer la siguiente proposición utilizaremos dos resultados uno relativo a las funciones semicontinuas superiormente y otro relativo al límite superior de una sucesión de conjuntos.

DEFINICIÓN

Una función $\varnothing$ es semicontínua superiormente siempre que $x_n \to x$ entonces $\overline{\lim}\, \varnothing(x_n) \le \varnothing(x)$.

LEMA 3.4

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\varnothing$ es semicontinua superiormente
2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\varnothing^{-1}(-\infty,\alpha)$ es abierto
3. $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\varnothing^{-1}[\alpha,\infty)$ es cerrado

DEMOSTRACIÓN

Los enunciados 2 y 3 son equivalentes por complementación. Probaremos que el enunciado 1 es equivalente al 2.

$\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \varnothing^{-1}(-\infty, \alpha) = \{t \mid \varnothing(t) < \alpha\} = B$

Supongamos ahora que B no es abierto; es decir, existe $x \in B$ tal que B no contiene ninguna vecindad de x. Esto implica que $\forall n\ (x - 1/n, x + 1/n) \not\subset B$.

$\Rightarrow \forall n\ \exists\ x_n \in (x - 1/n, x + 1/n) \setminus B$ entonces $x_n \to x$, y $x \notin B$

$\Rightarrow x_n \to x$ y $\varnothing(x_n) \geq \alpha$

Por consiguiente, $\alpha \leq \underline{\lim}\ \varnothing\,(x_n) \leq \varnothing\,(x) < \alpha$. Esto constituye una contradicción.

Por lo tanto, $\varnothing^{-1}(-\infty,\alpha) = \{t \mid \varnothing\,(t) < \alpha\}$ es abierto.

$\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $x_n \to x$.

y $\forall\ \epsilon > 0$ el conjunto $\{t \mid \varnothing\,(t) < \varnothing\,(x) + \epsilon\} = B_\epsilon$ es abierto, y como $x \in B_\epsilon$

Entonces sea M tal que $(x - 1/M,\ x + 1/M) \subset B_\epsilon$

Como $x_n \to x$ entonces $\exists$ N tal que $\forall n \geq N\ |x_n - x| < 1/M$;
$\Rightarrow x_n \in B_\epsilon \Rightarrow \varnothing\,(x_n) < \varnothing\,(x) + \epsilon$

Esto implica que $\overline{\lim}\ \varnothing\,(x_n) \leq \varnothing\,(x) + \epsilon$.

Por lo tanto, $\overline{\lim}\ \varnothing\,(x_n) \leq \varnothing\,(x)$.

DEFINICIÓN

Para cualquier sucesión $\{A_k\}^{\infty}_{k=1}$ de conjuntos en un espacio métrico X el Límite Superior (L_sA_k) está definido por: $L_sA_k = \{ x \in X \mid \exists$ una subsucesión $\{A_i\}$ de A_k y $x_i \in A_i$ para cada i, tal que $x_i \to x\}$

LEMA 3.5

I. $L_sA_k \supset \overline{\text{lím}}\, A_k$

DEMOSTRACIÓN

Primeramente, $\overline{\text{lím}}\, A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$

Sea $x \in \overline{\text{lím}}\, A_k \Rightarrow \forall\, k,\, x \in \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow \forall\, k,\, \exists\, n_k \geq k$ tal que $x \in A_{nk}$

En consecuencia, se puede obtener una subsucesión $\{x_{nk}\} = \{x\}$ tal que $x_{nk} \in A_{nk}$ y $x_{nk} \to x$. Por consiguiente, $x \in L_sA_k$.

Los conceptos L_sA_k y $\overline{\text{lím}}\, A_k$ nos son iguales. Por ejemplo, si tenemos

$A_k = \mathbb{Q}\ \forall\ k$ el $\overline{\text{lím}}\, A_k = \mathbb{Q}$. Sin embargo, $L_sA_k = \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 3.6

Si E es compacto en $\mathbb{R}^2$, entonces para cada f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lineal se cumplen:

a) P(f,E) es compacto en $\mathbb{R}$

b) Q(f,E) es un F_σ

DEMOSTRACIÓN

a) $c \in P(f,E) \Leftrightarrow \exists\ (x,y) \in f_c \cap E$

$\Leftrightarrow\ c = y - f(x)$ para alguna $(x,y) \in E$

Definimos $\varnothing : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\varnothing(x,y) = y - f(x)\ \ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\varnothing$ es continua, y

puesto que: E es compacto, $\varnothing(E)$ es compacto.

Además

$$\varnothing(E) = \{y - f(x) \,/\, (x,y) \in E\}$$

$$= \{c \in \mathbb{R} \,/\, \exists\, (x,y) \in E \cap f_c\,;\ c = y - f(x)\}$$

$$= P(f,E) \text{ es compacto}$$

Así P(f,E) es compacto.

b) Por demostrar que Q (f, E) es un F_σ

Sea $\alpha = \inf P$ y $\beta = \sup P$

Definimos $\varnothing : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

$$\varnothing\,(c) = \lambda_1\,(¶_1\,(f_c \cap E)), \qquad c \in [\alpha, \beta]$$

Entonces $Q \equiv Q\,(f,E) = \{c \,/\, \varnothing\,(c) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$

donde $Q_n = \{\, c/\ \varnothing\,(c) \geq 1/n\} = \varnothing^{-1}\,[\,1/n, \infty)$.

Para probar que Q es un F_σ es necesario únicamente probar que Q_n es cerrado, lo cual se sigue de la semicontinuidad superior de $\varnothing$ (por el lema 3.4).

Para demostrar que $\varnothing$ es semicontinua superiormente, sea

$\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [\alpha, \beta]$ tal que $c_k \to c$, $c \in [\alpha, \beta]$; pd $\overline{\lim}\ \varnothing\,(c_k) \leq \varnothing\,(c)$.

Antes de continuar la demostración probaremos que:

$\mathrm{Ls}\ \P_1\ (f_{ck} \cap E) \subset \P_1\ (f_c \cap E)$ si $c_k \to c$.

Sea $x \in \mathrm{Ls}\ \P_1\ (f_{ck} \cap E)$. Entonces, $\exists\ \{c_i\}$ subsucesión de $\{c_k\}$ y $x_i \in \P_1\ (f_{ci} \cap E)$ para cada i tal que $x_i \to x$ si $i \to \infty$. Dado que $\P_1$ es la primera proyección $\exists\ y_i \in \mathbb{R}$ tal que $(x_i, y_i) \in f_{ci} \cap E$, esto significa que $y_i = f(x_i) + c_i$.

Por consiguiente la sucesión $\{y_i\}$ converge a $f(x) + c = y$.

Así, $(x,y) \in f_c$ y la sucesión $\{(x_i, y_i)\} \subset E$, E es cerrado; además $\{(x_i, y_i)\} \to (x,y) \Rightarrow (x,y) \in E$ y $(x,y) \in E \cap f_c$ lo cual implica que $x \in \P_1\ (E \cap f_c)$.

Regresando a la demostración obtenemos que

$$\begin{aligned}
\varnothing\ (c) = \lambda_1\ (\P_1\ (f_c \cap E)) &\geq \lambda_1\ (\mathrm{Ls}\ \P_1\ (f_{ck} \cap E)) \\
&\geq \lambda_1\ (\overline{\lim}\ (f_{ck} \cap E)) \text{ (por el lema 3.5)} \\
&\geq \overline{\lim}\ \lambda_1\ (\P_1\ (f_{ck} \cap E)) \text{ (por el lema de Fatou)} \\
&= \overline{\lim}\ \varnothing\ (c_k)
\end{aligned}$$

Por tanto, $\varnothing\ (c) \geq \overline{\lim}\ \varnothing\ (c_k)$ y $\varnothing$ es semicontinua superiormente.

Además concluimos que Q_n es cerrado y Q es un F_σ.

TEOREMA 3.7

Sea E medible $E \subset I$, I intervalo finito, entonces para todo x
$0 \leq \lambda(E) - \lambda(E \cap (x + E)) \leq \lambda(I \setminus E) + |x|$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $E \subseteq I$ donde I es un intervalo finito. El conjunto $x + E \subseteq x + I$.

Si $|x| \geq \lambda(I)$ entonces la desigualdad es obvia porque

$\lambda(E) - \lambda[E \cap (x + E)] = \lambda(E) \leq \lambda(I) + \lambda(I \setminus E) \leq |x| + \lambda(I \setminus E)$

Si $|x| < \lambda(I)$ entonces $J = I \cup (x + I)$ es un intervalo y la medida de J

$\lambda(J) = \lambda(I) + |x|$

El intervalo J puede expresarse como

$$J = [J \cap (E \cap (x + E))] \cup [J \cap (E \cap (x + E))^c]$$

y $J \cap (E \cap (x + E))^c = (J \cap E^c) \cup (J \cap (x + E)^c)$
$$= (J \setminus E) \cup (J \setminus (x + E))$$

Por lo anterior, la medida de J es $\lambda(I) + x$ y también

$$\lambda(J) \leq \lambda[J \cap (E \cap (x + E))] + \lambda(J \setminus E) + \lambda[J \setminus (x + E)] \quad \dots \quad (1)$$

Además, $\lambda(J) = \lambda(I) + x = \lambda(I \setminus E) + \lambda(I \cap E) + x \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$

de (1) y (2) obtenemos que

$$\lambda(I \setminus E) + \lambda(I \cap E) + |x| \leq \lambda[J \cap (E \cap (x + E))] + \lambda(J \setminus E) + \lambda[J \setminus (x + E)] \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

También tenemos, $\lambda(J \setminus E) = \lambda(J) - \lambda(E) = \lambda(I) + |x| - \lambda(E)$

$$= \lambda(I) - \lambda(E) + |x|$$

$$= \lambda(I \setminus E) + |x| \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

análogamente $\qquad \lambda[J \setminus (x + E)] = \lambda[(x + I) \setminus (x + E)] + |x|.$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (5)$

y $\qquad \lambda[(x + I) \setminus (x + E)] = \lambda(I \setminus E) \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$

De (5) y (6) obtenemos:

$$\lambda[J \setminus (x + E)] = \lambda(I \setminus E) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Combinaremos las expresiones (3), (4) y (7) para obtener:

$$\lambda (I \setminus E) + \lambda (I \cap E) + |x| \leq \lambda [J \cap (E \cap (x + E))] + 2 \lambda (I \setminus E) + 2|x| \ .. \qquad (8)$$

Considerando que $I \cap E = E$ y que $J \cap (E \cap (x + E)) \subset E \cap (x + E)$ la desigualdad (8) se puede transformar en

$$\lambda (E) \leq \lambda (E \cap (x + E)) + \lambda (I \setminus E) + |x|$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \lambda (E) - \lambda (E \cap (x + E)) \leq \lambda (I \setminus E) + |x|$$

TEOREMA 3.8

Sea $E \subset \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda (E) < \infty$. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ entonces $\lambda (E) - \lambda (E \cap (x + E)) < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$ y E medible, entonces
existe **U** abierto tal que $E \subseteq \mathbf{U}$ y $\lambda (\mathbf{U} \setminus E) < \varepsilon/3$ ... (1)

Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de componentes conexas abiertas de **U**, es decir,

$$I_n \cap I_l = \emptyset \text{ si } n \neq l \text{ y } \mathbf{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{y} \quad \lambda(\mathbf{U}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(In) < \infty$$

Sea N el primer número natural tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon/3$ ... (2)

Tomemos $\delta = \epsilon/3N$ Si $|x| < \delta$ por el teorema 3.7 tenemos que:

$$\forall n,\ \lambda(E \cap I_n) \leq \lambda[(E \cap I_n) \cap (x + (E \cap I_n))] + \lambda[I_n \setminus (E \cap I_n)] + |x| . \quad \text{... (3)}$$

De la desigualdad anterior realizaremos la suma desde
n = 1, ... , N obteniendo

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(E \cap I_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda[(E \cap I_n) \cap (x + (E \cap I_n))] + \sum_{n=1}^{N} \lambda[I_n \setminus (E \cap I_n)] + \epsilon/3 \quad \text{... (4)}$$

La idea de la demostración es ir acotando los términos de la desigualdad anterior en términos de ε.

Acotaremos $\lambda[I_n \setminus (E \cap I_n)]$.

Consideremos, $\mathbf{U} \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus (E \cap I_n))$

así tenemos que $\lambda(\mathbf{U} \setminus E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n \setminus (E \cap I_n)) < \varepsilon/3$ [por (1)] ... (5)

Llamemos $F = \bigcup_{n=1}^{N} (E \cap I_n)$

Consideremos además el conjunto $F \cap (x + F)$

$$E \cap (x + E) \supset F \cap (x + F) = \left(\bigcup_{n=1}^{N} (E \cap I_n)\right) \cap \left(x + \bigcup_{n=1}^{N} (E \cap I_n)\right)$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{N} (E \cap I_n)\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} (x + E \cap I_n)\right)$$

$$\supseteq \bigcup_{n=1}^{N} [(E \cap I_n) \cap (x + E \cap I_n)] \quad \text{... (6)}$$

En la desigualdad (4) se utilizará la desigualdad (5) para obtener

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda(E \cap I_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda[(E \cap I_n) \cap (x + (E \cap I_n))] + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \quad \text{....(7)}$$

Dado que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n)$ tenemos:

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E \cap I_n) = \sum_{n=1}^{N} \lambda(E \cap I_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(E \cap I_n)$$

y puesto que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(E \cap I_n) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon/3$ por (2)

Es decir, $\lambda(E) < \sum_{n=1}^{N} \lambda(E \cap I_n) + \varepsilon/3$

O bien, $\lambda(E) - \varepsilon/3 < \sum \lambda(E \cap I_n)$ ..... (8)

Con los resultados obtenidos en (6) y (8) la desigualdad (7) se transforma en

$$\lambda(E) - \varepsilon/3 < \lambda[(E) \cap (x + E)] + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow \lambda(E) - \varepsilon < \lambda(E \cap (x + E)) \Rightarrow \lambda(E) - \lambda(E \cap (x + E)) < \varepsilon$$

con lo cual hemos demostrado el teorema.

TEOREMA 3.9

Sea E medible tal que $0 < \lambda(E) < \infty$. Entonces, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$ $\lambda(E\, \Delta\, (x + E)) < \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos primeramente que

$$E = [E \cap (x + E)] \cup [E \setminus (x + E)]$$

$$x + E = [(x + E) \cap E] \cup [(x + E) \setminus E]$$

Hemos expresado E y $x + E$ como unión de dos conjuntos ajenos por lo cual

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap (x + E)) + \lambda(E \setminus (x + E))$$

y $\quad \lambda(E) = \lambda(x + E) = \lambda(E \cap (x + E)) + \lambda((x + E) \setminus E)$

De lo anterior se desprende que

$$\lambda(E) - \lambda(E \cap (x + E)) = \lambda(E \setminus (x + E))$$

y $\lambda(E) - \lambda(E \cap (x + E)) = \lambda((x + E) \setminus E)$

Por el teorema 3.8 $\exists\, \delta$ tal que si $|x| < \delta$ entonces

$\lambda(E) - \lambda(E \cap (x + E)) < \varepsilon/2$

Por consiguiente

$$\lambda(E \,\Delta\, (x + E)) = \lambda(E \setminus (x + E)) + \lambda((x + E) \setminus E) < \varepsilon.$$

OBSERVACIÓN

En el caso en que $\lambda(E) = \infty$ la tesis del Teorema anterior no se cumple necesariamente, por tal razón se pide que $0 < \lambda(E) < \infty$. Lo cual puede observarse en el siguiente ejemplo:

Sea

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n)$$

E es unión numerable de intervalos ajenos dos a dos.

En efecto; si $[n, n + 1/n) \cap [m, m + 1/m) \neq \emptyset$ con $n \neq m$, entonces existe x tal que $x \in [n, n + 1/n) \cap [m, m + 1/m)$. Puesto que $n \neq m$ sin pérdida de generalidad consideremos el caso en que $n < m$.

Esto implica que $n + 1/n \leq m$; como $x \in [n, n + 1/n)$ y $x \in [m, m + 1/m)$ entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$x < n + 1/n$ y $m \leq x$

con lo cual, $x < n + 1/n \leq m$ y $m \leq x$

pero $x < m$ y $m \leq x$ lo cual no es posible.

Por tanto, E es unión numerable de intervalos ajenos dos a dos.

Calculemos $\lambda(E)$

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda([n, n + 1/n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n) = \infty$$

Se demostrará a continuación el siguiente resultado.

AFIRMACIÓN

$$\forall\, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \qquad \lambda\,(E \cap (x + E)) < \infty$$

PRUEBA

Caso 1.

Sea $0 < r < 1/2$

$$r + E = r + \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + 1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r + [n, n + 1/n)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + r, n + r + 1/2)$$

$$E \cap (r + E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[n, n + 1/n)\} \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[n + r, n + r + 1/n)\}$$

Puesto que $\{[n, n + 1/n)\}$ es una familia de intervalos ajenos dos a dos entonces $\{[n + r, n + r + 1/n)\}$ es también una familia de intervalos ajenos dos a dos.

Se puede observar que $[n, n + 1/n) \cap [m + r, m + r + 1/m) \neq \varnothing$ solo cuando $n = m$ o $m = 1$ y $n = 2$.

En efecto si $n \neq m$ y suponemos que

$x \in [n, n + 1/n) \cap [m + r, m + r + 1/m)$

$\Rightarrow n \leq x < n + 1/n$ y $m + r \leq x < m + r + 1/m$

Si suponemos que $n < m$ entonces

$\Rightarrow n \leq x < n + 1/n < m + r \leq x < m + r + 1/m$

$\Rightarrow x < m + r$ y $m + r \leq x$!!

Supongamos que $m < n$ y $m \neq 1 \Rightarrow m \geq 2$ y $m < n$

$\Rightarrow 1/m \leq ½$ y $m < n$ $\Rightarrow r + 1/m < 1$ y $m < n$

Si suponemos que $x \in [n, n + 1/n) \cap [m + r, m + r + 1/m)$

$\Rightarrow m < m + r \leq x < m + r + 1/m < m + 1 \leq n \leq x < n + 1/n$

$\Rightarrow x < n$ y $n \leq x$!!

Así obtenemos que

$$E \cap (r + E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[n, n + 1/n) \cap [n + r, n + r + 1/n)\} \cup \{[2, 1 + 1/2) \cap [1 + r, 2 + r)\}$$

Ahora tomemos el primer número natural n_o tal que $0 < 1/n_o < r < 1/2$.

Si $n \geq n_o, \Rightarrow 1/n \leq 1/n_o < r \Rightarrow [n, n + 1/n) \cap [n + r, n + r + 1/n) = \varnothing$.

Así, el conjunto $E \cap (r + E)$ se transforma en una unión finita de intervalos.

$$E \cap (r + E) = \bigcup_{n=1}^{no-1} \{[n, n + 1/n) \cap [n + r, n + r + 1/n)\} \cup J$$

donde $J = [2, 2 + 1/2) \cap [1 + r, 2 + r)$

y $\lambda (E \cap (r + E)) \leq ½ + \sum_{n=1}^{no-1} \lambda ([n, n + 1/n)) = ½ + \sum_{n=1}^{no-1} 1/n < \infty$

CASO 2 Sean $½ \leq r < 1$

Procediendo como en el caso anterior se puede probar que

$[n, n + 1/n) \cap [m + r, m + r + 1/m) \neq \varnothing$ solo cuando $n + 1 = m$ y cuando $n = m = 1$.

Así, el conjunto $E \cap (r + E)$ se puede reescribir como:

$$E \cap (r + E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{[n + 1, n + 1 + 1/(n+1)) \cap [n + r, n + r + 1/n)\} \cup K$$

donde $K = \{[1,2) \cap [1 + r, 2 + r)\}$

Consideremos n_o el primer número natural para el cual $r + 1/n_o < 1$, se mostrará que si $n > n_o$ se tendrá que

$$[n + 1, n + 1 + 1/(n+1)) \cap [n + r, n + r + 1/n) = \varnothing$$

Supongamos que $n \geq n_o$ y que la intersección de $[n + 1, n + 1 + 1/(n+1)) \cap [n + r, n + r + 1/n) \neq \varnothing$

Esto implica que, existe x tal que

$n + 1 \leq x < n + 1 + 1/(n+1)$ y $n + r \leq x < n + r + 1/n$

Como, $n + r \leq x < n + r + 1/n \leq n + 1$ entonces $x < n + 1$

y $n + 1 \leq x < n + 1 + 1/(n+1)$ entonces $n + 1 \leq x$ lo cual constituye una contradicción.

Por consiguiente, el conjunto $E \cap (r + E)$ se transforma en una unión finita de intervalos y por tanto $\lambda (E \cap [r + E]) < \infty$.

CASO 3 Sea $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

pd. $\lambda (E \cap (c + E)) < \infty$

El número $c \in \mathbb{R}$ se puede expresar como $[c] + r$ donde $[c]$ es el menor entero menor o igual que c y $0 < r < 1$.

Por lo visto en los casos 1 y 2 tenemos que el conjunto $E \cap (c + E)$ puede expresarse como:

i) $\bigcup_{n=[x+1}^{n_0+[x]-1} \{[n - [x], n - [x] + 1/(n - [x])) \cap [n - [x] + r, n - [x] + r + 1/(n - [x]))\} \cup J$

donde n_o es el primer número natural tal que $1/n_o < r$ con $0 < r < 1/2$

ó

ii) $\bigcup_{n=[x]+1}^{n_0+[x]-1} \{[n - [x] + 1, n - [x] + 1 + 1/(n - [x] +1)) \cap [n - [x] + r, n - [x] + r + 1/(n - [x]))\} \cup K$

donde n_0 es el primer número natural tal que $r + 1/ n_0 < 1$

y $\frac{1}{2} \leq r < 1$.

En cualquier de los 2 casos $E \cap (c + E)$ es la unión finita de intervalos acotados y los intervalos J y K son acotados; por consiguiente, $\lambda (E \cap (c + E)) < \infty$.

Ahora, presentaremos un resultado consecuencia del Teorema anterior, pero antes necesitamos un Lema y recordaremos algunas igualdades de la Teoría de los -Conjuntos.

LEMA 3.10

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos medibles. Entonces,

$$|\lambda (A) - \lambda (B)| \leq \lambda (A \Delta B)$$

DEMOSTRACIÓN

Puesto que $A \subset B \cup (A \Delta B)$

se tiene que $\lambda (A) \leq \lambda [B \cup (A \Delta B)] \leq \lambda (B) + \lambda (A \Delta B)$

de donde $\lambda (A) - \lambda (B) \leq \lambda (A \Delta B)$

Análogamente, $\lambda (B) - \lambda (A) \leq \lambda (A \Delta B)$

Por lo tanto, $|\lambda (A) - \lambda (B)| \leq \lambda (A \Delta B)$. Esto concluye la demostración del teorema.

Sea A una σ - álgebra en R, existe un homomorfismo ψ de.

$$(\mathrm{A}, \cap, \Delta) \xrightarrow{\Psi} (Z_2)^{\mathrm{R}}$$

donde $(Z_2)^{\mathrm{R}}$ es el anillo de funciones de R en Z_2 con la suma y el producto usuales.

El homomorfismo esta dado por

$$\psi (A) = \chi_A$$

donde χ_A es la función característica de A

Comprobemos que ψ es un homomorfismo

$$\psi (A \cap B) = \chi_{A \cap B} = \chi_A \bullet \chi_B = \psi (A) \bullet \psi (B)$$

También,

$$\psi\,(A \,\Delta\, B) = \chi_{A\Delta B} = \chi_{A} + \chi_{B}$$
$$= \psi\,(A) + \psi\,(B)$$

En consecuencia, ψ es un homomorfismo.

Así, las propiedades de Z_2 con el producto y la suma usuales también se cumplen para las operaciones de $\cap$ y Δ. Por ejemplo:

1. La propiedad asociativa para la diferencia simétrica

$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$$

2. La propiedad distributiva

$$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$$

TEOREMA 3.11

Sean A , $B \subset \mathbb{R}$ de medida positiva finita.

La función $\varnothing : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ definida por

$$\varnothing\,(c) = \lambda\,[A \cap (c + B)] \text{ es continua}$$

DEMOSTRACIÓN

pd. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tal que si $|\, c_1 - c_2 \,| < \delta$ entonces $|\, \varnothing (c_1) - \varnothing (c_2) | < \varepsilon$.

Primeramente ,

$$| \varnothing (c_1) - \varnothing (c_2) | = | \lambda [A \cap (c_1 + B)] - \lambda [A \cap (c_2 + B)] |$$

$$\leq \lambda [(A \cap (c_1 + B)) \,\Delta\, (A \cap (c_2 + B))]$$ por el Lema 3.10.

El conjunto

$(A \cap (c_1 + B)) \,\Delta\, (A \cap (c_2 + B)) = A \cap [(c_1 + B) \,\Delta\, (c_2 + B)]$ aplicando la propiedad distributiva.

Además,

$$A \cap [(c_1 + B) \,\Delta\, (c_2 + B)] \subset [(c_1 + B) \,\Delta\, (c_2 + B)]$$

También se tiene que

$$(c_1 + B) \Delta (c_2 + B) = (c_1 + B) \Delta (c_1 + (c_2 - c_1) + B)$$

En consecuencia

$$|\varnothing (c_1) - \varnothing (c_2)| \leq \lambda [(c_1 + B) \Delta (c_1 + (c_2 - c_1) + B]$$

Sustituyendo $W = c_1 + B$ la desigualdad se transforma en

$$|\varnothing (c_1) - \varnothing (c_2)| \leq \lambda [W \Delta (c_2 - c_1) + W]$$

Sea $\varepsilon > 0$ aplicando el Teorema 3.9 existe $\delta > 0$ tal que si

$|c_1 - c_2| < \delta$ entonces

$$|\varnothing (c_2) - \varnothing (c_1)| \leq \lambda [W \Delta ((c_2 - c_1) + W)] < \varepsilon$$

Con lo cual queda demostrado el Teorema.

TEOREMA 3.12

Sean A, B conjuntos medibles en $\mathbb{R}$ con medida positiva finita y sea E = A x B. Entonces, Q(f,E) es un subconjunto abierto de P(f,E) para f lineal, $f \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$Q(f, E) = \{c \mid \lambda_1 [A \cap f_C^{-1} (B)] > 0\}$$
$$= \{c \mid \lambda_1 [A \cap (B - c)] > 0\}$$

La última igualdad se desprende del hecho de que
$f_c^{-1} (B) = 1/m (B - c)$.

En efecto, $x \in f_c^{-1} (B) \Leftrightarrow f_c (x) \in B \Leftrightarrow mx + c \in B$

$\Leftrightarrow mx \in B - c \Leftrightarrow x \in (1/m) (B - c)$

Más aún $Q(f,E) = \{c \mid \lambda_1 [A \cap (1/m) (- c + B)] > 0\}$
$$=\{c \mid \lambda_1 [A \cap ((- c/m) + (1/m) B)] > 0\}$$

$$\varnothing (c) = \lambda [A \cap (c + (1/m) B)]$$

es continua, ya que A y (1/m) B son conjuntos de medida positiva si m es distinto de 0.

Como la función $(-\ 1/m)\ c$ es también continua entonces la composición $\varnothing \circ (-\ c/m)$

$\varnothing(-\ c/m) = \lambda\ [A \cap ((-\ c/m) + (1/m)\ B)]$ es continua.

Así, su soporte $Q\ (f, E) = \{c \mid \lambda\ [A \cap ((-\ c/m) + (1/m)\ B)] > 0\}$ es un conjunto abierto. Esto concluye la demostración del teorema.

TEOREMA 3.13

Sean A, B subconjuntos de los reales de medida positiva. Entonces, la f-proyección en medida de A x B contiene un intervalo. Además, si A = B f es la función identidad entonces el intervalo contiene al 0.

DEMOSTRACIÓN

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos de medida positiva. Designemos por

$Q = Q(f,E)$ donde $E = A \times B$.

Dado que para cualquier ξ denso en $\mathbb{R}$ existe $\xi' \subset \xi$ tal que ξ' es denso numerable en $\mathbb{R}$.

Es suficiente mostrar que $Q \cap \xi \neq \varnothing$ para cualquier conjunto numerable ξ denso en $\mathbb{R}$.

En efecto, si suponemos que $Q \cap \xi \neq \varnothing$ para todo ξ denso numerable y que Q no contiene ningún intervalo.

Entonces $\forall \ I \quad \exists \ x_I$ tal que $x_I \notin Q$.

Formemos el conjunto $\mathfrak{B} = \{x_I \mid I \text{ es un intervalo}\} \subset \mathbb{R} \setminus Q$.

$\mathfrak{B}$ es denso en $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \ \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B} \subset \mathbb{R} \setminus Q$, $\quad \mathfrak{B}'$ denso numerable.

$\Rightarrow \ \mathfrak{B}' \cap Q \neq \varnothing$. Esto constituye una contradicción.

Fijaremos un conjunto ξ denso numerable en $\mathbb{R}$.

Supongamos que $Q \cap \xi = \varnothing$. Entonces para cada $c \in \xi$.

$$\Rightarrow \{r \mid \lambda\,[\P_1\,(f_c \cap E)] > 0\} \cap \xi = \varnothing$$
$$\Rightarrow \forall\, c \in \xi \quad \P_1\,(f_c \cap E) = 0$$
$$\Rightarrow \forall\, c \in \xi \qquad \lambda(\{x \in A \mid f(x) + c \in B\}) = 0.$$

Consecuentemente el conjunto

$$W = \bigcup_{c \in \xi} \{x \in A \mid f_c(x) \in B\}; \qquad\qquad \lambda(W) = 0.$$

Elegimos P un subconjunto cerrado de $A \setminus W$ tal que $\lambda(P) > 0$ (en efecto, pues $\lambda(A \setminus W) = \lambda(A) - \lambda(W) = \lambda(A) > 0$ y se puede escoger un conjunto cerrado $P \subset A \setminus W$ tal que $\lambda(P) > 0$).

De acuerdo al teorema de Steinhaus el conjunto B - f(P) contiene un intervalo.

Por tanto, $\xi \cap (B - f(P)) \neq \varnothing$.

Lo cual significa que existe $b \in B$, $c \in \xi$ y $p \in P \subseteq A$ tal que $b = f(p) + c$.

Así, $p \in W$ lo cual es una contradicción y por lo tanto se concluye el teorema en su primera parte.

Para la segunda parte, asumimos que A = B y f(x) = x para toda x.

En este caso la f-proyección se puede escribir como

$$\begin{aligned} Q(f,E) = Q(f, A \times A) &= \{c \mid \lambda\, [\P_1\, (f_c \cap (A \times A))] > 0\} \\ &= \{c \mid \lambda\, [\{x \in A \mid x + c \in A\}] > 0\} \end{aligned}$$

$\mathbf{0} \in \mathbf{Q}$ **(f, E)** pues el conjunto

$$\lambda[\{x \in A \mid x + 0 \in A\}] = \lambda[\{x \in A \mid x \in A\}]$$

$$= \lambda\,(A) > 0$$

Por consiguiente, $Q(f,E) \neq \varnothing$

Finalmente, por el teorema 3.12 se concluye que Q(f,E) contiene un intervalo I tal que $0 \in I$.

4. EL TEOREMA DE STEINHAUS Y LOS CONJUNTOS CON LA PROPIEDAD DE BAIRE

En este capítulo probaremos un resultado parecido al Teorema de Steinhaus para los conjuntos con la propiedad de Baire.

A continuación A continuación enlistaremos igualdades de conjuntos que se usarán a lo largo del capítulo. El lector puede verificar fácilmente las igualdades.

Sean A, B conjuntos cualesquiera y c, m constantes cualesquiera.

1) $m(A \cap B) = mA \cap mB$

2) $c + (A \cap B) = (c + A) \cap (c + B)$

3) $c + (A \setminus B) = (c + A) \setminus (c + B)$

4) $m(A \setminus B) = (mA) \setminus (mB)$

5) $m(A \,\Delta\, B) = (mA) \,\Delta\, (mB)$

6) $(A \,\Delta B)^c = A^c \,\Delta\, B$

DEFINICIÓN

Un subconjunto E de un espacio Topológico tiene la propiedad de Baire si

$$E = G \Delta P \text{ con } G \text{ abierto y } P \text{ de } 1^{\circ} \text{ categoría.}$$

TEOREMA 4.1

La clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos junto con los conjuntos de 1ª categoría.

DEMOSTRACIÓN

Antes de realizar la demostración estableceremos el siguiente resultado.

AFIRMACIÓN

Un conjunto A tiene la propiedad de Baire sí y sólo si $A = F \Delta Q$, donde F es cerrado y Q es de la 1ª categoría.

⇒) En efecto, si A tiene la propiedad de Baire entonces $A = G \Delta P$ donde G es abierto y P es de 1ª categoría. Formemos el conjunto $N = G \setminus \overline{G}$. N es un conjunto cerrado, pues $N = G \setminus G = \overline{G} \cap G^c$ donde $\overline{G}$ y G^c son conjuntos cerrados. N es un conjunto denso en ninguna parte, porque

$\overline{N} = (\overline{\overline{G} \setminus G})$ no tiene puntos interiores.

Ahora, si llamamos $Q = N \Delta P$, obtenemos que A es de la 1a. categoría, ya que $Q = N \Delta P = (N \setminus P) \cup (P \setminus N) \subset N \cup P$ donde N es denso en ninguna parte y P es de 1a. categoría; lo cual nos lleva a que $N \cup P$ es de 1a. categoría y por consiguiente Q es de 1a. Categoría.

Además, $\overline{G} \Delta N = (\overline{G} \setminus N) \cup (N \setminus \overline{G})$

$$= (\overline{G} \setminus (\overline{G} \setminus G)) \cup ((\overline{G} \setminus G) \setminus \overline{G})$$

$$= (\overline{G} \cap (\overline{G} \cap G^c)^c) \cup ((\overline{G} \cap G^c) \cap \overline{G}^c)$$

$$= (\overline{G} \cap (\overline{G^c} \cup G)) \cup ((G^c \cap \overline{G}) \cap \overline{G}^c)$$

$= ((\overline{G} \cap \overline{G^c}) \cup (\overline{G} \cap G)) \cup (G^c \cap \overline{(G \cap \overline{G})})$

$= (\varnothing \cup (\overline{G} \cap G)) \cup (G^c \cap \varnothing)$

$= \overline{(G \cap G)} \cup \varnothing$

$= \overline{G} \cap G$

$= G$ (pues $G \subset \overline{G}$)

Así, $\overline{G} \Delta N = G$

Esto implica que, $A = G \Delta O = \overline{(G \Delta N)} \Delta P$

$= \overline{G} \Delta (N \Delta P)$ (propiedad asociativa)

$= F \Delta Q$ $(Q = N \Delta P)$

donde $F = \overline{G}$ es cerrado y $Q = N \Delta P$ es de 1ª categoría.

$\Leftarrow$) Inversamente, si $A = F \Delta Q$ donde F es cerrado y Q es de 1ª categoría. Sea $G = F^0$ y $N = F \setminus G = F \setminus F^0$

N es denso en ninguna parte.

Si $P = N \Delta Q \subset N \cup Q$; $N \cup Q$ es de 1ª. categoría por lo cual P es de 1ª. categoría

Además, $G \Delta N = (G \setminus N) \cup (N \setminus G)$

$$= (F^0 \setminus (F \setminus F^0)) \cup ((F \setminus F^0) \setminus F^0)$$

$$= F^0 \cup (F \setminus F^0) \quad = F$$

Así tenemos que, $F = G \Delta N$.

En consecuencia

$$\begin{aligned} A = F \Delta Q &= (G \Delta N) \Delta Q \\ &= G \Delta (N \Delta Q) \quad \text{(propiedad asociativa)} \\ &= G \Delta P \qquad (N \Delta Q = P) \end{aligned}$$

Donde $G = F^0$ es abierto y P es de 1ª categoría.

Ahora comenzaremos la demostración del Teorema.

i) $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de Baire, pues $\mathbb{R} = \mathbb{R} \Delta \varnothing$,. $\mathbb{R}$ es abierto $\varnothing$ es de 1ª categoría.

ii) p.d. si E tiene la propiedad de Baire, entonces E^C tiene la propiedad de Baire.

De la siguiente igualdad de conjuntos

$$(A \Delta B)^C = A^C \Delta B$$

tomando G = A y P = B

Entonces, si $E = G \Delta P$ con G abierto y P de 1ª categoría, $E^C = (G \Delta P)^C = G^C \Delta P$, donde G^C es cerrado y P es de 1ª categoría.

Así, E^C tiene la propiedad de Baire.

iii) p. d. si $\{E_i\}^{\infty}_{i=1}$ es una sucesión de conjuntos con la propiedad de Baire,

entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ tiene la propiedad de Baire.

Sea $E_i = G_i \Delta P_i$ una sucesión de conjuntos con la propiedad de Baire.

Designemos por $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$; $P = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$ y $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$

G es abierto y P es de 1ª categoría.

Esto implica que

$$G \setminus P = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \,\Delta\, P_i) = E$$

$\Rightarrow G \setminus P \subset E$

Además

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \,\Delta\, P_i) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) = G \cup P$$

$\Rightarrow E \subset G \cup P$

Por lo anterior tenemos que

$G \setminus P \subset E \subset G \cup P$

Dado que $E \subset G \cup P$

$\Rightarrow E \setminus G \subset (G \cup P) \setminus G$

$\Rightarrow E \setminus G \subset P$ .... (1)

Además de $G \setminus P \subset E$ se obtiene que

$\Rightarrow E^c \subset (G \setminus P)^c$

$\Rightarrow G \setminus E \subset G \setminus (G \setminus P)$

Por consiguiente

$$G \setminus E \subset G \setminus (G \setminus P) = G \cap (G \cap P^c)^c$$

$$= G \cap (G^c \cup P)$$

$$= (G \cap G^c) \cup (G \cap P)$$

$$= \varnothing \cup (G \cap P) = G \cap P \subset P$$

De donde $G \setminus E \subset P$ .... (2)

De (1) y (2) concluimos que

$G \Delta E \subset P$ por lo que $G \Delta E$ es de 1ª categoría, y

$$E = G \Delta (G \Delta E)$$

(pues, $G \Delta (G \Delta E) = (G \Delta G) \Delta E = \varnothing \Delta E = E$)

Es decir,

$E = G \Delta (G \Delta E)$; donde G es abierto y $G \Delta E$ es de 1ª categoría.

Luego, $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ tiene la propiedad de Baire.

Así, la clase de los conjuntos con la propiedad de Baire es una σ-álgebra la cual contiene a los conjuntos abiertos y los conjuntos de 1^a categoría.

Sea β cualquier σ-álgebra que contenga los conjuntos abiertos y los conjuntos de 1^a categoría.

Sea E un conjunto con la propiedad de Baire; esto es, $E = G \Delta P$ donde G es abierto y P es de 1^a categoría. Puesto que, $G \in \beta$ y $P \in \beta$ esto implica que $E = G \Delta P \in \beta$.

Por consiguiente, cualquier σ-álgebra β que contenga a los conjuntos abiertos junto con los de 1^a categoría contendrá forzosamente a los conjuntos con la propiedad de Baire.

Por lo tanto, la clase de los conjuntos con la propiedad de Baire es la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos junto con los de 1^a categoría. Los conjuntos con la propiedad de Baire también contienen a los conjuntos F_σ y G_δ

TEOREMA 4.2

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos de segunda categoría teniendo ambos la propiedad de Baire, y $E = A \times B$.

Entonces $R(f,E)^0 \neq \varnothing$ para f lineal, $f \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que cumplen la hipótesis del Teorema.

Recordemos que

$$R(f,E) = \{c \in \mathbb{R} \mid \P_1 (f_c \cap E) \text{ es de segunda categoría en } \mathbb{R}\}$$

$$= \{c \in \mathbb{R} \mid A \cap f_c^{-1} (B) \text{ es de segunda categoría en } \mathbb{R}\}$$

Esta última igualdad es consecuencia de la proposición 3.1.

Además el conjunto $A \cap f_c^{-1} (B) = A \cap (1/m) (B - c)$.

Los conjuntos de la segunda categoría tienen la propiedad de que bajo una traslación o la multiplicación por un escalar siguen siendo de la segunda categoría. Así el conjunto $A \cap (1/m) (B - c)$ es de segunda categoría si y sólo si $(c + m A) \cap B$ es de segunda categoría.

Sean $A = G \Delta P$ donde G es abierto y P de 1ª categoría.

y $B = H \Delta Q$ donde H es abierto y Q de 1ª categoría.

Puesto que A y B son de segunda categoría entonces G y H son distintos del vacio.

Es decir, exiten intervalos I y J tales que $I \subset G$ y $J \subset H$.

Sea $m \neq 0$, entonces para cada $c \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(c + m A) \cap B &= [c + (m (G \Delta P))] \cap (H \Delta Q) \\
&= [c + (mG \Delta mP)] \cap (H \Delta Q) \quad \text{(igualdad de conjuntos (5))} \\
&\supset [c + (mG \setminus mP)] \cap (H \setminus Q) \\
&= [(c + mG) \setminus (c + mP)] \cap (H \cap Q^c) \quad \text{(por 3)} \\
&= [(c + mG) \cap (c + mP)^C] \cap (H \cap Q^C) \\
&= [(c + mG) \cap H] \cap [(c + mP)^C \cap Q^C] \\
&= [(c + mG) \cap H] \cap [(c + mP) \cup Q]^C \\
&= [(c + mG) \cap H] \setminus [(c + mP) \cup Q] \\
&\supset [(c + mI) \cap J] \setminus [(c + mP) \cup Q] \\
&= [(c + I') \cap J] \setminus [(c + mP) \cup Q]
\end{aligned}
$$

$(c + I') \cap J$ es un intervalo para un conjunto de c's dentro de un intervalo.

Por ejemplo si $I' = [a, b]$ y $J = [a_1, b_1]$ con $a \leq b \leq a_1 \leq b_1$; basta que $c \in [a_1 - a, b_1 - a]$ para que $(c + I') \cap J$ sea un intervalo.

Se sigue que para c's dentro de un intervalo el conjunto $(c + mA) \cap B$ es un intervalo menos un conjunto de 1ª categoría.

Por consiguiente, existe un intervalo O tal que para cada $c \in O$ el conjunto $(c + mA) \cap B$ contiene un intervalo abierto no vacio menos un conjunto de 1ª categoría.

Esto es, para cada $c \in O$ el conjunto $(c + mA) \cap B$ es de segunda categoría, o analogamente el conjunto $A \cap (1/m)(B - c)$ es de segunda categoría.

Por lo tanto

De la igualdad

$$A \cap (1/m)(B - c) = A \cap f_C^{-1}(B) \text{ se deduce que}$$

$$O \subset \{ c \mid A \cap f_C^{-1}(B) \text{ es de segunda categoría} \}.$$

Es decir, $O \subset \mathbb{R}(f,E)$

Por lo tanto, $\mathbb{R}(f,E)^0 \neq \varnothing$

TEOREMA 4.3

Existe un conjunto residual E en $\mathbb{R}^2$ con medida plena tal que $P(f,E)^0 = \varnothing$ para un conjunto denso de funciones lineales f.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de números racionales.

Para cada $m \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$ sea

$$L_{m,r} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R},\ y = mx + r\}$$

Para cada m fija $L_{m,r}$ es un conjunto denso en ninguna parte y $\lambda\,(L_{m,r}) = 0$. Además, $L^c_{m,r}$ es un conjunto abierto denso.

Así, para cada m fija, el conjunto

$L_m = \cup\ \{L_{m,r} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ es de 1ª categoría en $\mathbb{R}^2$ y L_m tiene medida cero.

DEFINIMOS

$$E = \Big[\ \bigcup_{m \in Q} L_m\ \Big]^c$$

E^C es de 1ª categoría y tiene medida cero.

Por consiguiente, E es residual en $\mathbb{R}^2$ y $\lambda_2(E) = \lambda_2(\mathbb{R}^2)$

Para cada m $\in \mathbb{Q}$, el conjunto E^C contiene líneas paralelas y = mx, cuyas ordenadas al origen forman un conjunto denso de números reales.

Y así, $P(f,E)^0 = \varnothing$ por la proposición 3.3.

COROLARIO 4.4

Existe un conjunto G_δ denso, E con medida plena en $\mathbb{R}^2$ el cual no contiene un rectángulo medible A x B con A y B satisfaciendo simultáneamente cualquiera de las siguientes condiciones:

i) G_δ denso

ii) Medida positiva.

iii) Propiedad de Baire y de la segunda categoría.

DEMOSTRACIÓN

Sea E el conjunto descrito en el Teorema 4.3, es decir,

$$E = [\bigcup_{m \in Q} L_m]^c = [\bigcup \{L_m \mid m \in Q\}]^c$$

Puesto que; $\cup\{L_m \mid m \in Q\}$ es un F_σ, entonces E es un G_δ residual.

En caso de que E contenga un rectángulo A x B donde ambos conjuntos posean la propiedad i) entonces tenemos que $P(f,E)^0 \neq \varnothing$ para cada $f \neq 0$, por el Corolario 3.2.

Ahora en el caso de que E contenga un rectángulo A x B donde ambos conjuntos posean la propiedad ii) entonces por el Teorema 3.13 el conjunto $Q(f,E)^0 \neq \varnothing$; y puesto que $Q(f,E) \subset P(f,E)$ entonces $P(f,E)^0 \neq \varnothing$.

Por último en el caso de que E contenga un rectángulo A x B donde A y B posean ambos la propiedad iii) entonces por el Teorema 4.2 $R(f,E)^0 \neq \varnothing$; y puesto que $R(f,E) \subset P(f,E)$ entonces $P(f,E)^0 \neq \varnothing$.

Esto es, cualquiera que sea el caso tenemos que $P(f,E)^0 \neq \varnothing$ lo cual contradice al Teorema 4.3.

BIBLIOGRAFIA

1. H. Steinhaus , Sur les distances des points de mesure positive, Fund. Math 1 (1920), pp. 93 - 104.

2. R. Anantharaman & J. P. Lee, Planar sets whose Complements do not contain a dense set of lines, Real Anal., Exch. 11 (1985-86), pp. 168-178.

3. J. Ceder & D. K. Ganguliy, On Projetions of Big Planar Sets, Real Anal., Exch. 9 (1983-84). pp. 206 - 214.

4. J. C. Oxtoby, Mesure and Category, Springer - Verlag (New York), 1970.

5. R. G. Bartle, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, New York, 1964.

6. K. Kuratowski, Topology I, Academic Press (New York), 1966.

7. P. R. Halmos, Measure Tehory, D. Van Nostrand, New York, 1950.

8. A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, Mir (Moscú), 1975.