UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE PSICOLOGIA

ESTUDIO DE ALGUNOS COMPONENTES INSTRUCCIONALES QUE INTERVIENEN EN LA ADQUISICION DEL RAZONAMIENTO NUMERICO Y EL CALCULO ARITMETICO

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN PSICOLOGIA

P R E S E N T A:

JOSE ANTONIO LOPEZ IÑIGUEZ

Director de Tesina: Dr. Miguel López Olivas
Director de la Facultad de Psicología:
Dr. Arturo Bouzas Riaño

SINODALES:

MTRA. LIZBETH VEGA PEREZ
DRA. SUSANA ORTEGA PIERRES
LIC. FERNANDO MATA R.
DRA. IRENE MURIA VILA

México, D.F. 1998

Con especial dedicación y mi agradecimiento a Dolores, Frida y Cuauhtémoc, principales motores de este trabajo y motivo de orgullo en mi vida.

A mi madre, mi padre (q.e.p.d.) y mis hermanos, los diez, para tratar de esclarecer que la psicología no es un producto traumatizante.

A mi asesor, al Dr. Miguel López Olivas, por su valiosa dirección en esta obra y su irrestricto compromiso con la excelencia académica.

A mis sinodales, la Dra. Irene Muria V., Mtra. Lizbeth Vega, Dra. Susana Ortega y Lic. Fernando Mata, por sus vavaliosos comentarios y aportaciones que enriquecieron este trabajo.

ÍNDICE

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

SUMARIO

Existe cada vez un mayor interés de los psicólogos por estudiar los componentes que intervienen en la adquisición de las matemáticas básicas, como el razonamiento numérico y las primeras operaciones del cálculo aritmético, debido al rezago educativo que prevalece en esta materia desde los primeros años escolares, reflejándose en altos índices de fracaso escolar. Los objetivos de este trabajo radican en la realización de una revisión de los procesos cognoscitivos que intervienen para que los individuos adquieran la información y cómo utilizarla para desarrollar habilidades y destrezas sobre problemas cada vez más complejos. La adquisición de estrategias de aprendizaje que intervienen en el cálculo aritmético a partir de la elaboración, organización y transformación de la información en la memoria se da con el desarrollo del conocimiento declarativo y procedural, asociado a la resolución de problemas como generador de habilidades para alcanzar nuevas metas. La psicología instruccional aporta alternativas para desarrollar capacidades en la comprensión matemática y las habilidades de cálculo, para facilitar su aprendizaje, fomentar la autosuficiencia en los estudiantes, utilizar su creatividad y evitar el fracaso generalizado que existe en esta materia.

PRÓLOGO

Un problema fundamental que prevalece en la educación actual es el bajo rendimiento escolar que existe en el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles del sistema educativo. Esta asignatura es una de las que con frecuencia presenta un grado mayor de dificultad para su conocimiento con respecto a otras que comprenden los planes de estudio.

Los problemas que se presentan en este trabajo centran su interés en los niveles de educación elemental -preescolar y primaria- por ser parte de los contenidos que se integran en los primeros años escolares, como son los expuestos en el Capitulo II. Estos determinarán en buena parte el éxito o fracaso de la vida educativa del individuo, por ser el soporte de los subsiguientes estudios de las matemáticas más especializadas. Si se dan deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas elementales, existe una mayor probabilidad que en los sistemas de educación que requieren tener el dominio de las primeras nociones aritméticas.

Su conocimiento no depende solamente de la realización mecánica de operaciones básicas y reglas algorítmicas que por fórmulas se ejecutan de manera ciega, sino que va más allá de esto. Comprende todos los ámbitos de la vida cotidiana y es un componente que incluye la historia del ser humano.

Para entender el problema que significa, es necesario analizar los componentes psicológicos que intervienen en su adquisición, como son el razonamiento numérico, el cálculo aritmético, la geometría y la lógica, entre alguna de las áreas que se desarrollan en su estudio.

Si bien los nuevos programas y planes de estudio han sido orientados para abatir el rezago que existe en esta área académica, tendientes a modificar técnicas y métodos instruccionales, no siempre ha sido satisfactorio, ya que esta asignatura es una de las que presenta un mayor índice de fracasos escolares y es común detectar la aversión que causa su estudio en los estudiantes de todos los niveles.

Para tener una idea sobre el problema que significa en México, la Secretaría de Educación Pública, en 1994, reportó datos desalentadores sobre el índice de reprobación en la materia de matemáticas que existe a nivel nacional en primaria, secundaria y bachillerato. Según datos oficiales, en el ciclo escolar 1988-1989 existió el 10.3% de niños de primaria que no aprobaron, en secundaria el 27.5% y en bachillerato el 47.1% de los estudiantes presentaron una experiencia de reprobación durante sus estudios. Para el ciclo 1992-1993, si bien hubo una disminución en el índice de reprobación, no se puede considerar como un avance significativo. En primaria representó el 8.3%, en secundaria el 26.4% y en bachillerato el 46.6%.

Respecto a la situación actual que priva en la UNAM, el Colegio de Ciencias y Humanidades reporta esta materia como la de mayor índice de reprobación, incrementándose a partir de la puesta en marcha del nuevo plan de estudios. Tomándose como referente la asignatura de Matemáticas I, en el semestre 96-1 el 58.8% acreditó esta materia, mientras que en el semestre 97-1 con el plan de estudios vigente se redujo al 54.6%. Inclusive los resultados obtenidos de los cinco planteles, en los exámenes extraordinarios del periodo 97-2 solamente el 5.6% aprobó dicho examen, destacando el plantel Vallejo en que sólo 13 estudiantes de 773 inscritos lo presentaron satisfactoriamente, lo que representa el 1.68%.

Aún sin tener datos de otras instituciones educativas es evidente que representa un grave problema difícil de solucionar, lo cual podría ser dirigido a detectar qué es lo que ocasiona en amplios sectores estudiantiles esta situación y los orígenes que tienen desde los primeros años escolares.

El campo que ocupa la investigación científica sobre el aprendizaje de las matemáticas es tan amplio y complejo que sería una obra con pocas posibilidades de plasmar en su totalidad en un trabajo como el que se presenta, por lo que el propósito de éste es analizar los procesos psicológicos que intervienen en la adquisición e instrucción de conceptos elementales para el aprendizaje de las matemáticas en sus conocimientos iniciales.

Desde esta óptica, en la Introducción se presentan los antecedentes en la práctica educativa de las matemáticas, así como los avances en la investigación sobre este tema, culminando con un esbozo histórico sobre el origen del número y el sistema decimal de numeración que hasta la actualidad es el que predomina su utilización.

El Capítulo I abarca los procesos por los que se adquiere el concepto del número, así como la estructura lógica con que se conforma el sistema numérico decimal.

En el Capítulo II se tratan los procesos que intervienen en torno a la adquisición de las habilidades del cálculo aritmético, consistente en la operación de contar y las cuatro operaciones básicas que inician en el aprendizaje de estructuras complejas. Asimismo, se presentan algunos modelos que intentan formalizar los procesos cognitivos subyacentes a estas habilidades.

El Capítulo III se centra en torno a las diferentes aproximaciones psicológicas, intentando rescatar las ideas principales y los fundamentos que sostienen las principales teorías. Se aborda desde cuatro perspectivas diferentes: el asociacionismo, la gestalt, la teoria de Piaget y el procesamiento humano de información.

En el Capítulo IV se estudia el papel de la psicología instruccional en el campo de las estrategias de aprendizaje y la adquisición del conocimiento matemático, en relación con los procesos en que interviene la memoria. La importancia de este capítulo se centra en las estrategias que desarrollan los sujetos con tres aspectos fundamentales: el conocimiento declarativo, el conocimiento procedural y el papel instruccional de la solución de problemas, elementos instruccionales que proponen el desarrollo de habilidades y destrezas para un mejor aprendizaje.

Por último, en el Capítulo V se presentan las conclusiones de este trabajo.

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL SISTEMA EDUCATIVO

Desde el inicio de este siglo muchos fueron los intentos para mejorar la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Más aún, con anterioridad el problema de la eficiencia en su enseñanza incipientemente se tomaba en consideración y sus contenidos educativos ya se ponían a debate. En 1805 Lacroix (Adda, 1981) consideraba que debían enseñarse "un poco abstractas", en el sentido de que los libros y métodos en su enseñanza se caracterizaban como rígidos y severos al insistir sobre detalles "puramente metafísicos", proponiendo analizar las diversas formas de razonamiento que se emplean para llegar a su conocimiento.

En 1908 se inició la conformación de comisiones internacionales para comparar los métodos y programas con el objetivo de discutir qué y cómo se debían enseñar las matemáticas, observando la necesidad de incluir a la psicología como una ciencia destinada a aportar explicaciones y soluciones sobre los procesos del conocimiento matemático en los individuos. Surge así un gran interés de varios psicólogos por estudiar estos procesos mentales, y en los Estados Unidos se dieron los primeros pasos para incluir a la psicología en el estudio sobre temas específicos de la educación, como la lecto-escritura y las matemáticas. Además de los estudios de laboratorio , los psicólogos llevaban a cabo investigaciones directas sobre el aprendizaje de las materias escolares.

Uno de los pioneros en este campo fue el psicólogo Thorndike en 1922 (Resnick y Ford, 1990), que basó sus estudios en el aprendizaje de los contenidos. Sin embargo, a partir de los últimos años de la década de los treinta se inició un distanciamiento entre la psicología experimental y la educativa. Las teorías asociacionistas de Thorndike sentaron muchas de las bases para el estudio de los contenidos educativos que aún en la actualidad tienen vigencia.

En 1932, en Francia, autores como Marijon y Leroy (Adda, op. cit.) expresaban que los contenidos educativos abusaban de los trinomios y el álgebra, así como de la geometría euclidiana en la enseñanza secundaria, lo que implicaba que, sin conocer procedimientos pedagógicos, saturaban de información a los estudiantes que ni siquiera comprendían lo que se estudiaba. Desde aquellos años ya existía la necesidad de vincular una ciencia que se dedicara a estudiar los procesos mentales que dirigían el conocimiento de una área específica, como era el caso de las matemáticas.

Durante las décadas de los cuarenta y cincuenta, según Resnick y Ford (op. cit.), la psicología poco influyó en la aportación de las tareas específicas del aprendizaje de las matemáticas, ya que no fue centro de experimentos ni de teorías psicológicas. La psicología se ocupó de los principios universales del aprendizaje, del pensamiento y del desarrollo, suponiendo que los principios generales proporcionarían automáticamente la explicación de la conducta de las personas en situaciones específicas, y que los educadores pasarían a aplicar a la enseñanza esos hechos universales y deducidos científicamente, además de dejar en manos de los expertos en matemáticas la elaboración y diseño de los contenidos que se incluían en la enseñanza escolar.

No es sino hasta 1957 (Adda, op. cit.), cuando se produce un mayor énfasis por renovar la enseñanza de las matemáticas en los países del mundo occidental, cuando los soviéticos ponen en órbita su primer cohete Sputnik, lo que evidenció un estancamiento en la formación científica, principalmente de los norteamericanos. Surge así la corriente de reforma llamada "matemáticas modernas", reformulando el principio de la mecanización de la enseñanza.

En Francia, desde la década de los sesenta surgieron grandes movimientos por modificar lo que se llamó la "enseñanza tradicional", que por medio de la constante repetición mecanizada se implementaban los métodos de enseñanza, lo que llevó al matemático Choquet representar lo que debería ser la actividad matemática de un alumno, como un ciclo de cuatro tiempos: observar - axiomatizar - deducir - utilizar, distinguiendo dos etapas esenciales de su enseñanza: 1) antes de los 16 años, se concebía la enseñanza de iniciación; 2) después de los 16 años, las enseñanzas de formación.

Al mismo tiempo, en Bélgica, Papy (Freudenthal,1981) comenzaba sus experiencias de enseñanza para la escuela elemental y secundaria. Junto con Didier introdujo en la enseñanza gráficas multicolores para la mejor comprensión de la aritmética y la geometría.

Es en Francia donde se da un gran interés por perfeccionar la enseñanza de esta materia, creando organismos para investigar y desarrollar mejores programas educativos encargados de reordenar los contenidos escolares, sin embargo las reformas realizadas en la década de los sesenta representaron un viraje significativo para las escuelas, impugnando sus resultados diez años después, ya que se les consideraba "muy abstractas" (Adda, 1981), así como la existencia de un rompimiento generacional entre maestros y padres de familia ante los alumnos. Sin embargo, la mayor dificultad que se observó fue la formación de los maestros, los cuales no se encontraban preparados para explicarles a los alumnos en qué consistía lo que enseñaban.

Una razón fundamental de este fracaso fue que no se incluían los procesos psicológicos por los que el alumno transita para comprender las matemáticas, esto debido a que los contenidos educativos tradicionalmente eran elaborados por matemáticos y pedagogos, que poco vinculaban el trabajo del psicólogo en los procesos específicos del aprendizaje en la escuela.

DIVERSOS ENFOQUES EDUCATIVOS SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Los resultados del rendimiento escolar de las matemáticas se han estudiado desde diversos enfoques. Las explicaciones que conlleva el fracaso escolar en esta materia se dan en dos vertientes: uno emocional o afectivo, que incluiría sentimientos de nerviosismo, tensión, miedo o incluso problemas de carácter clínico; y segundo, por razones de aprendizaje.

Desde otra óptica, numerosas investigaciones sugieren que los rendimientos bajos en matemáticas pueden atribuirse a déficits lingüísticos, de modo que los niños con problemas en matemáticas suelen tenerlos también en lectura, y los factores asociados al rendimiento en ambas áreas presentan una estrecha vinculación entre sí (Bryant y Bradley, 1985). Aún mas, se sugiere que los rendimientos bajos en matemáticas en ciertos niños se atribuyen a la pobreza de sus habilidades para leer. Sin embargo, no todos los estudios apoyan esta premisa. Se ha observado (Benson y Geshwind, cit. por Bermejo, 1990) que los niños presentan dificultades aritméticas y, no obstante, gozan de un nivel de habilidad lectora normal.

Algunos estudios se inclinan por proponer que existen causas vinculadas al aspecto motivacional, en que la precisión y el énfasis en la solución de problemas producen efectos de ansiedad que afectan el rendimiento matemático, lo que se incrementa con la edad, que conlleva una baja autoestima, ya que el estado emocional negativo podría interferir en los procesos de atención y de aprendizaje que se ponen en práctica en la resolución de las tareas matemáticas.

Una explicación muy generalizada entre profesores y adultos del por qué no se comprenden las matemáticas, es que "se atribuye a una carencia de concentración", lo que implicaría a fenómenos psicológicos relacionados con la atención, la memoria desde el punto de vista clínico considerada como *anamnesia* (Freudenthal, 1981), o una vinculación a la "falta de hábitos correctos" en los estudiantes, lo que descartaría los procesos de enseñanza- aprendizaje que se dan en la escuela, trasladando el problema a otros factores de la vida, tales como la familia, la herencia biológica y otros.

Si bien los factores motivacionales, afectivos o lingüísticos tienen amplia influencia para el aprendizaje de las matemáticas, la problemática surge cuando se limita al ámbito estrictamente matemático como ocurre frecuentemente, lo que determinaría que existe un problema de déficit dentro del área del mismo conocimiento, así como a patrones culturales existentes y los contenidos de aprendizaje en el curriculum e instruccionales.

En estudios realizados durante el periodo de 1963 a 1980 (Gagné, 1991) en los estudiantes norteamericanos decrecieron las habilidades matemáticas. Una explicación parcial coincidió en que los maestros evadían su enseñanza por sentirse incómodos con una materia que no tenían un amplio dominio, por lo que dedicaban un menor tiempo a esta asignatura. Además se detectó que los contenidos educativos habían disminuido su nivel, por lo que se daba un descenso en la competencia matemática.

Otro aspecto que puede influir es que en varios niveles educativos, principalmente los de posprimarias, los maestros se formaron en otras disciplinas a la docente, por lo que se encuentran incómodos dando esta asignatura, sumándose la carencia de elementos pedagógicos.

En los estudios transculturales y transnacionales se observa la existencia de diferencias importantes en el nivel matemático de los niños pertenecientes a distintos países. En 1988, Uttal y Lummis (cit. por Bermejo, 1990) observaron que el rendimiento matemático de los niños españoles suele ser superior al de los franceses, suizos e ingleses, debido fundamentalmente a que los objetivos instruccionales de los programas educativos de estos países valoran menos la cantidad de contenidos y el aprendizaje de los procedimientos computacionales, para insistir más en la maduración de procesos cognitivos superiores, como son, por ejemplo, el nivel de razonamiento y la comprensión conceptual. Igualmente, esta diferencia curricular aparece también entre niños norteamericanos y niños de China y Japón, en el sentido que estos últimos alcanzan mejores puntuaciones que los primeros, incrementándose cada vez más en los cursos más elevados.

Otro aspecto que influye culturalmente es la creencia de lo innecesario que significa profundizar en su conocimiento a partir del surgimiento de las calculadoras que prescinde a las personas del cálculo mental, asociado a que sólo lo requieren algunas profesiones como la ingeniería. Sin embargo esto se descarta si se observa que este conocimiento es necesario en cualquier actividad cotidiana.

Varias investigaciones (Saunders, 1980; Czepiel,1980; Graziano,1982; cit. por Gagné, 1991) contemplaron la utilidad de las matemáticas en las diversas actividades humanas: el 62 por ciento de los empleos urbanos requerían su conocimiento amplio; el 93 por ciento de las noticias de primera plana de los diarios no se podrían comprender sin conocimientos básicos de cálculo aritmético; en el ámbito deportivo las matemáticas juegan un papel importante en la relación espacio, tiempo y cantidad, características fundamentales de las matemáticas.

En Inglaterra, Orton (1990) reportó que las diferencias en capacidad matemática con respecto al género, si bien no son firmes los datos existentes, tienden a relacionar una mayor capacidad de los estudiantes varones que las mujeres, esto debido principalmente a factores sociológicos más que psicológicos, al existir una discriminación a las alumnas por considerarse socialmente una actividad masculina. Son diversas las influencias de la sociedad y del entorno que pueden afectar el desarrollo matemático de las niñas, desde los tipos de juguetes entregados a los niños por cuestión de género y en los tipos de juegos y actividades desarrolladas.

Lo anterior se ha explicado por la diferencia en el tipo de actividades predominantes en los varones, donde se sobresale en capacidad espacial, mientras que las mujeres destacan en destreza verbal (Fennema, cit. por Orton, 1990), sin embargo varios autores han llegado a la conclusión que la capacidad espacial no resulta en sí misma necesariamente vital para toda la gama de actividades matemáticas.

Con respecto a la pregunta inicial sobre la dificultad en la comprensión de las matemáticas, se ha coincidido en que no existe una teoría unitaria que permita guiar la práctica y la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de éstas.

Puente y Poggioli (1989) centran la importancia de su estudio en varios factores que determinan la preocupación de mejorar su aprendizaje: En primer lugar, el fracaso consistente y hasta masivo de los niños y los jóvenes en la adquisición de las habilidades matemáticas requeridas en los niveles básico, medio y superior de la educación. En segundo, la fobia evidente para todas aquellas actividades que impliquen procesos de naturaleza aritmética y/o algebraica. En tercero, la importancia creciente que cada día tienen las matemáticas en la vida cotidiana y en el desarrollo en otras disciplinas, incluyendo las de naturaleza humanística. Y por último, las matemáticas no sólo constituyen un área específica del conocimiento, sino que se vinculan con la estructura del pensamiento de los individuos.

Doyle (1988), atribuye a tres razones fundamentales el aprendizaje deficiente en la escuela: el tipo de tareas que suele proponerse a los niños, la desvinculación de las matemáticas escolares de los problemas de la vida real infantil y la separación existente entre aprendizaje y enseñanza, atribuido a la falta de información por parte del profesor de los conocimientos que poseen los niños, y sobre todo, de la naturaleza propia del conocimiento infantil, consistente en analizar minuciosamente los procesos psicológicos que intervienen en la adquisición y aprendizaje de las primeras nociones aritméticas fundamentales, como el conteo, el número, la adición y la sustracción, para proseguir en las nociones de multiplicación y división.

Con la desvinculación entre la escuela y la vida cotidiana se da un distanciamiento de las actividades escolares con respecto a las restantes actividades infantiles, no aprovechando los conocimientos previos a su escolarización y al utilizar el excesivo formalismo en la instrucción de los contenidos matemáticos. Resnick y Ford (op. cit.) menciona que los niños, incluso antes de ir a la escuela, desarrollan conceptos matemáticos robustos, aunque simples, que son capaces de aplicar a una gran variedad de situaciones prácticas, pero estos mismos niños encuentran dificultades para aprender las matemáticas escolares. Esta disonancia se daría porque los símbolos y reglas formales se enseñarían como si se tratara de convenciones arbitrarias, y no como expresiones de regularidades y relaciones fundamentales entre cantidades y entidades físicas, por lo que la enseñanza se da en dos contextos separados: en el aula y fuera de ésta.

Por estas razones, en la escuela no se contemplan factores relacionados con los procesos de aprendizaje que el niño requiere, como son: la planeación instruccional que implica el funcionamiento de procesos cognitivos superiores, tales como la comprensión, la interpretación, la toma de decisiones, la flexible aplicación de conocimientos y habilidades, y la organización de la información, vinculado con las estrategias de aprendizaje.

Una explicación que ha trascendido a lo largo del tiempo es clasificar el problema de la adquisición del conocimiento de las matemáticas desde el punto de vista neuropsicológico, donde se diagnostica como *discalculia*, atribuyendo su causa a un problema de inmadurez neurológica reflejado en una disfunción del hemisferio derecho, que se deriva en dificultades aritméticas específicas, mostrando un menor desarrollo en habilidades no verbales (espacio-visuales y táctiles), mientras que la incapacidad en la lectura resultaría de una disfunción del hemisferio izquierdo. Bajo esta interpretación se supondría que "...todo alumno con discalculia escolar es fundamentalmente un inmaduro neurológico, aunque hay muchos niños inmaduros que permanecen en este estado a través de todo un ciclo escolar, sin presentar ningún trastorno de aprendizaje" (Giordano y Ballent, 1978, p. 193), asegurándose que si bien el niño no es culpable de su fracaso, detrás de cada uno de sus errores hay un motivo, y específicamente un padecimiento que lo provoca, lo que implica que el problema se origina o parte siempre del niño, lo que se plantea un enfoque pedagógico para estos casos dirigido a que el niño madure neurológicamente, que haría posible la ausencia de trastornos de aprendizaje.

Bajo estas premisas, Nancy (cit. por Velásquez y cols., 1987, p. 36), sostiene que para que se dé el aprendizaje matemático "el alumno debe ser normal, es decir, libre de trastornos orgánicos y deficiencias físicas y existir una perfecta armonía de las funciones psíquicas, sin deterioros ni traumas afectivos", implicando como causas de trastornos específicos del cálculo inclusive lo referente a la psicomotricidad en órganos como la boca, lengua, laringe, tórax y manos, entre otras, donde el movimiento estará siempre presente en la función de comprensión trasladada a otros órganos.

Esto último ha sido contradictorio en el sentido de que la psicomotricidad no es fundamental para el conocimiento matemático, pues si bien los órganos de los sentidos tienen una función especifica, no se explica cómo un sordo, un ciego o un paralítico, aunque con mayores dificultades en algunos casos, llegan a ser capaces de tener una visión organizada del mundo, pueden clasificar, efectuar operaciones matemáticas, aprender a leer, etc., en tanto que son capaces de construir conceptos y conocimientos (Velásquez y cols., op. cit.).

Estas concepciones predominaron durante mucho tiempo y en las cuales, incluso actualmente, se canaliza a niños a servicios clínicos para ser atendidos en instituciones de educación especial.

A partir de una reorientación teórica en lo filosófico y educativo, los criterios y prácticas que se utilizaban para determinar una *discapacidad* en los procesos de aprendizaje específicos han sido modificados. La atención a alumnos con "requerimientos de educación especial" se centraba en el alumno y sus "problemas de aprendizaje", y quienes perdían el ritmo uniforme del programa de enseñanza eran detectados para ser remitidos a instituciones de educación especial, denominándolos de "lento aprendizaje", y al responsabilizar al alumno de su rezago se les caracterizaba con "problemas de aprendizaje". Esto ha sido sustituido por el "derecho a la diversidad", que contempla el principio de la equidad en las oportunidades para el aprendizaje (Guajardo, 1996).

En la actualidad se pretende llevar a cabo un proceso de integración de los niños con necesidades educativas especiales, por una educación sin segregación ni reclusión en centros escolares destinados a niños "especiales". El objetivo principal es abordar su problemática desde la escuela regular, implementando programas de apoyo tanto al niño como a los educadores para orientar sus métodos instruccionales hacia estos niños, con la intervención de equipos interdisciplinarios. El problema que repercute excluir a los niños de un ámbito social igualitario no ayuda a su mejoramiento y sí contradice los actuales principios internacionales en materia de educación especial, que se pronuncian contra la segregación del individuo. Sin embargo, dadas las prácticas burocráticas y la lenta y descoordinada aplicación gubernamental de los planes establecidos, en México todavía hace falta mucho por hacer.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN PSICOLÓGICA EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Durante décadas, los matemáticos y los educadores que se dedicaban a mejorar los contenidos educativos de las matemáticas no encontraron nada interesante en la labor de la psicología, esto debido a que los psicólogos casi siempre intentaban conseguir que los contenidos matemáticos *encajasen* en las leyes generales de los procesos particulares de pensamiento matemático. Sin embargo, este estudio se trasladó de preguntarse "¿cómo piensa la gente?" a "¿cómo piensa la gente en matemáticas?"

El aprendizaje del contenido no fue centro de experimentos ni de teorías psicológicas, ocupándose sobre todo de los principios universales del aprendizaje, del pensamiento y del desarrollo, suponiendo que los principios generales proporcionarían automáticamente la explicación de la conducta de las personas en situaciones específicas.

No siempre ha sido así. Históricamente la vinculación entre la psicología y la educación ha pasado por diversas etapas.

Inicialmente, a principios de los años veinte, Thorndike y Dewey (Resnick y Ford, op. cit.), consideraban que a partir de desarrollar una ciencia de la conducta humana, ésta sería la que enlazaría a la psicología y a la educación como una "ciencia encadenante". Esta relación daría frutos en el desarrollo de la educación como profesión científica.

Posteriormente, en las décadas de los treinta y cuarenta existió una separación entre ambas disciplinas a partir de que la psicología se centró en el estudio de laboratorios sobre aspectos generales de la conducta, desdeñando el campo de la práctica docente donde ocurren los problemas trascendentales de la educación. Es así como la psicología pierde interés por abarcar campos de estudio como el diseño curricular, métodos de aprendizaje y enseñanza y la elaboración de materiales educativos.

Una última etapa se generó a partir de la Segunda Guerra Mundial, donde se requirió la formación de recursos humanos que adquirieran habilidades en la relación hombre - máquina, por lo que la psicología tuvo una amplia participación, principalmente el paradigma cognitivo, dada la naturaleza de las necesidades que se requerían desarrollar.

En un análisis retrospectivo, Resnick y Ford (op. cit.) ubica a Thorndike, considerado el "padre fundador " de la psicología de la enseñanza matemática, como pionero en el estudio de este campo a partir de su enunciado de la *ley del efecto* y la *ley del ejercicio*, experimentando principalmente en animales y trasladando éstos al ámbito humano, aduciendo que toda conducta humana, tanto de pensamiento como de obra, se podía analizar en términos de dos elementos, el *estímulo*, relacionado a sucesos exteriores a la persona, y la *respuesta*, lo que hacía la gente como reacción a dichos sucesos exteriores, formando un vínculo o asociación entre el estímulo y la respuesta, que se sucedía una recompensa, y cuando más frecuente fuese esta recompensa más fuerte se haría el vínculo. Por lo tanto la *ley del efecto* sugería que uno de los medios importantes del aprendizaje humano era la práctica seguida de recompensas.

Sin embargo, la duda siguiente era ¿cómo aplicar estos principios a algo tan complejo como el aprendizaje en la escuela?. Thorndike consideraba que todo el conocimiento, incluso el mas complejo, estaba formado de relaciones sencillas por las cuales el alumno piensa, siente y actúa en la escuela, de acuerdo a situaciones similares en la vida fuera de ésta. Para hacer efectiva la enseñanza dentro de la escuela, Thorndike consideró que los profesores necesitaban descubrir y formular el conjunto determinado de vínculos que conformaba la aritmética, para que los más importantes se practicaran con más frecuencia.

A partir de la selección adecuada de vínculos "propedéuticos", que solo se utilizarían temporalmente como facilitadores del aprendizaje y que cumplirían la función de "enclave" para llegar a una respuesta más compleja, se tendrían que implementar acciones para desarrollar hábitos correctos en los niños, así como apoyar el trabajo en equipo para llevar a cabo cálculos cada vez más complejos. A esto Thorndike los consideraba como " sistemas organizados cooperativos de vínculos", donde conjuntamente se superarían enseñándose en forma progresiva conforme a su complejidad.

Thorndike enfatizó que los problemas de ejercitación deberían ser verificados con objetos concretos, pero su posición fue principalmente considerar a la ejercitación como el método fundamental de la instrucción en la aritmética (Puente y Poggioli, 1989). En su época, Thorndike lo enfatizó como el medio principal de instrucción en esta área, y hoy en día todavía forman parte de la curricula escolar, aunque acompañadas de experiencias concretas, o explicaciones de los principios matemáticos subyacentes. Aún se acepta que tanto la ejercitación como la práctica son necesarias, ya que éstas ayudan a adquirir precisión y velocidad, destrezas ampliamente aceptadas como criterios de eficiencia en el cálculo.

Los problemas que no resolvió Thorndike fueron muchos. No definió cuál sería la labor del profesor, si consistía solo en ofrecer cantidades adecuadas de ejercicios en un determinado orden, qué vínculos eran más fáciles, cuánta práctica era necesaria, cómo organizar esta práctica y fundamentalmente en qué procesos psicológicos del desarrollo del niño se encuentra en posibilidades de ejercitar estos vínculos. Sin embargo, su contribución a la psicología de la enseñanza matemática consistió en abrir el campo sobre el "contenido" del aprendizaje y su investigación de donde surgieron avances posteriores.

Una pregunta que se hicieron varios psicólogos era ¿qué hace fáciles o difíciles los problemas aritméticos?. Thorndike y otros examinaron los libros de texto de aquella época y concluyeron que variaba la cantidad de práctica que se aplicaba a las diferentes combinaciones numéricas, tales como 9+5, 7+3, 4+5, etc. y cabría explicar que si se reforzaba la ejercitación de todas las fórmulas y sus propiedades conmutativas se lograría precisión y velocidad.

En 1928, Knight y Behrens (Resnick y Ford, op. cit.), descubrieron que existían combinaciones con mayor dificultad que otras, como 5+9 la de mayores errores cometidos en los niños, asi como 0+3 la que representó mayor facilidad. La conclusión de esto fue que el profesor debía poner más tiempo y ejercicios a las que representaban un mayor grado de dificultad, lo que suponía que debía dedicarse a la ejercitación de 100 reactivos por separado para las combinaciones aritméticas del 0 al 9, así como las respectivas tablas de la resta, lo cual representaba una tarea inmensa. Otra objeción a este método era que no explicaba porqué una combinación era más difícil que otra y cuáles eran los elementos que intervenían para su dificultad.

Desde esa época, en 1928, surgió una oposición a la psicología asociacionista y al método de instrucción por medio de ejercicios derivada de la misma. Brownell (Puente y Poggioli, op. cit.) se opuso a estos métodos por dos razones fundamentales: primero, por considerar que no se diferenciaba cualitativamente el razonamiento entre el niño y el adulto, ya que no se presentaban los parámetros que identificaran el proceso mental entre un menor y el adulto, aunado a que los ejercicios de práctica servían para adquirir velocidad en los procedimientos que habían adquirido por sí mismos y no por el recuerdo directo propio de los adultos, como responder al azar, contar con los dedos o la intuición.

En segundo lugar, este método intentaba medir la precisión el 100% de la respuesta que dé el sujeto, sin preguntarse si fue capaz de comprender el porqué de esta respuesta, distorsionándose así los objetivos de la enseñanza. Según Brownell (Resnick y Ford, op. cit.) "el niño que es capaz de responder enseguida <12> cuando se le pregunta <7+5> no demuestra, ni mucho menos que <se sabe> cuánto es 7+5. No <se sabrá> esa combinación hasta que empiece a comprender porqué 7 y 5 son 12... hasta que la combinación tenga significado para él" (p. 198).

Brownell (Puente y Poggioli, op. cit.) consideró que existían tres fases superpuestas para la adquisición de destrezas en el cálculo:

1) El niño aprendía un procedimiento para realizar un cálculo apoyado a contar con los dedos, el recuerdo directo o por valores conocidos.
2) Se acerca un proceso de exactitud en los procedimientos.
3) Se inicia un procedimiento de rápido incremento en la ejecución del cálculo.

Esto no implicaba descartar los ejercicios de práctica si éstos cubrían los objetivos de reforzar el conocimiento y después de existir una familiarización con el proceso de cálculo. A partir de este procedimiento, se impediría un proceso de aprendizaje a base la emisión de "ruidos correctos" y que inducía a una automatización sin comprensión. Si se utiliza el método de significado práctico, serviría para ayudar a los alumnos a organizar y unificar su conocimiento del número, a desarrollar su facilidad de manejo de los números y a comprender los principios de las combinaciones numéricas.

Bajo estas premisas se desarrolló la idea de que, dada una comprensión adecuada de los conceptos y procedimientos matemáticos, los estudiantes serían mas capaces de aplicar su conocimiento a situaciones nuevas, para lo cual Mc Connell, en 1934 (Resnick y Ford, op. cit.) comparó el método de ejercicios de práctica, con el método de enseñanza con significado práctico, asociado a dibujos o a objetos, descubriendo que el primer método era eficaz para dar respuestas automáticas e inmediatas a las preguntas de tipo numérico, mientras que el método de significado práctico daba mejores resultados en las combinaciones numéricas no aprendidas.

Un estudio importante para comparar los diferentes modelos fue el de Swenson (Resnick y Ford, op. cit.) en 1949, en que aplicó en niños de segundo año de primaria tres métodos distintos: uno consistente en atractivos ejercicios de práctica; otro de generalización, donde se aplicaba a nuevos problemas lo ya conocido y utilizando procedimientos como contar con los dedos y aplicar el recuerdo directo; el tercero era una combinación de ejercicios de práctica con instrucción de significado en trabajo de grupo. Los resultados arrojaron que el método de *generalización* fue el más efectivo para potenciar el aprendizaje; el tercer método le siguió en eficiencia y el de práctica pura fue el menos eficiente.

Si bien el aprendizaje de las matemáticas consistía para Thorndike en una serie de vínculos entre sí, y para Brownell era un conjunto integrado de principios y de esquemas, la pedagogía actual reivindica a ambos como necesarios para el aprendizaje, sin embargo en su integración no queda clara cómo debe darse, ya que tanto ejercicios de práctica y enseñanza con significado son conceptualizaciones que implican una gran diversidad entre sí.

En los años cincuenta se inició el interés por los problemas de la instrucción, y sobre todo Skinner aplicó los principios del análisis conductual y de la teoría del refuerzo, orientándose al diseño de los entornos de aula para reforzar el aprendizaje, tanto social como intelectualmente. Este método fue el que imperó profundamente durante muchos años, e inclusive los programas actuales y la práctica instruccional no pueden prescindir de éste.

En 1967, Piaget (Puente y Poggioli, op. cit.) centró su interés por estudiar el desarrollo de habilidades matemáticas y el concepto del número y su internalización. Al comprender la estructura del número y los principios de conservación, correspondencia, seriación e inclusión de clase, Piaget consideró que determinaría las leyes que rigen la lógica del pensamiento matemático desde sus orígenes, priorizando la comprensión de conceptos antes que la ejercitación mecanizada de la aritmética, lo que reorientó sus estudios iniciales sobre la génesis del pensamiento matemático dirigidos a su aplicación en los contenidos educativos y la práctica docente.

En la actualidad la psicología cognitiva ha profundizado el interés por analizar los procesos y conocimientos internos del individuo. La comprensión de un problema matemático en su representación interna, la selección e integración de la información, los procesos cognitivos para ejecutar una operación y las estrategias que utiliza el individuo para desarrollar su aprendizaje son objeto de estudio en la psicología cognitiva, generalizándose cada vez más en la programación de la práctica educativa para las matemáticas.

LA FORMACIÓN DEL NÚMERO: UNA REVISIÓN HISTÓRICA

La importancia de este apartado es recuperar la historia por la cual la humanidad ha atravesado para llegar a la conformación del actual sistema de numeración que utilizamos, un proceso similar al que los individuos transitan desde su nacimiento.

El Sistema Decimal de Numeración (SDN) de ninguna manera se limita a una cierta forma de representar las cantidades; éste y las normas que lo rigen están presentes en la geometría, en los sistemas de pesos y medidas que utilizamos, en los algoritmos de las operaciones, etc., los cuales no son conocimientos transitorios en el ser humano, sino un objeto cultural construido durante el curso de la historia.

La naturalidad y familiaridad con que se utiliza hace pensar que es un patrimonio hereditario de la humanidad, dándose su origen en la prehistoria ante las relaciones cuantitativas que se daban entre los objetos que le rodeaban. Schmand y Besserat (1982) explican que el hombre descubrió la forma de dominar y registrar las cantidades por medio del principio de correspondencia. Se ayudaba de soportes materiales de todo tipo (piedras, huesos, frutos, conchas), o incluso de su propio cuerpo (los dedos y las articulaciones) y apareaba cada uno de los objetos de la realidad con un elemento de los que utilizaba como soporte. En la Mesopotamia (s. XV a. C.) se utilizaban recipientes de arcilla con forma de bolsa, en cuyo interior se contenían tantas piedras o fichas como elementos interesaba mantener registros de sus transacciones comerciales.

La utilización de la correspondencia, según Sellares y Bassedas (1983) constituye la forma mas primitiva de registro de cantidades y fue un recurso que durante muchos siglos bastó a las necesidades de la humanidad. Sin embargo, esas necesidades sólo dan resoluciones a una relación de objetos sin tener la noción del número, lo que permite enunciar un grupo de objetos. La obtención de la noción del número representa un indicador de categorías de colecciones e incluido en un sistema de unidades numéricas jerarquizadas y enlazadas sucesivamente una en las otras.

La noción del número abstracto debió pasar por un desarrollo lento, desembocando en la construcción de la serie numérica, lo que permitió la posibilidad de contar y recurrir al principio de la base, lo que evitaba el esfuerzo de memoria o representación que supondría enunciar cada número con un nombre que no tuviera relación con los demás elementos circundantes.

El principio de la base numérica más utilizada en la historia es la base 10, esto debido a la tendencia humana de usar las manos, que ofrece una sucesión natural de colección para el conteo.

Según Guitel (cit. por Ifrah,1988), inicialmente se aplicó la noción de base a la numeración hablada para posteriormente aplicarse al registro material de los números, en sustitución de un determinado número de objetos con características disímbolas entre sí, generalmente bolas de arcilla como elementos a representar, se utilizaban varios tipos de fichas, cada una de las cuales correspondía a valores numéricos distintos y determinados.

Estos sistemas de numeración se ajustaron siempre a la numeración verbal que les precedía. Si éstos se agrupan tomando en cuenta la potencialidad del sistema de numeración de base, se distinguen dos tipos primordiales: los aditivos y los posicionales.

Los sistemas aditivos incluyen un número limitado de signos numéricos independientes unos de otros y su ejecución obedece a la yuxtaposición de los valores correspondientes como suma de elementos. Es el caso de la numeración azteca y romana, entre otras.

Radice (1983) describe lo complicado de los sistemas aditivos por las limitaciones de su simbología numérica para representar cada una de las operaciones que se realizan, a diferencia del sistema de numeración posicional como la indo-arábiga que superó otros sistemas por incluir el factor "cero" como operador posicional.

El origen de la numeración actual, proviene de la India, desde el siglo II antes de Cristo. Sus nueve primeras cifras como unidades simples eran signos desvinculados de intuiciones y distintos entre sí. Por ejemplo, la cifra 9 ya no se componía de nueve barras o puntos, y se representaba como un signo propio que con características cuantitativas específicas determinaba un monto. La importancia del cero, según Ifrah (op. cit.) radicó en que al transferirse su significado de "vacío" o "nada", a representar un valor factorial según su posición en las decenas, centenas, millares, etc., lo que facilitó efectuar sencillamente las seis operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación, división, elevación a las potencias y extracción de raíces) así como las nociones de números positivos, negativos o nulos. Su influencia no se limitó al campo de la aritmética ya que al abrir el camino a la idea generalizadora del número permitió el desarrollo del álgebra y por consiguiente, desempeñó un papel esencial en todas las ramas de las ciencias. Surge de ahí la ley fundamental de "el número opuesto a un número positivo es un número negativo y a la inversa", o sea, el fenómeno de la reversibilidad.

Los sistemas posicionales se caracterizan hasta la fecha por prescindir de la representación de las potencias de la base y por conceder un valor variable a las cifras en la escritura de los números, según el lugar que ocupan. Por esto, Sellares y Bassedas (op. cit., p. 73) aseguran que "justamente con el descubrimiento del principio de posición, el del 0 ha constituido, sin duda alguna, la etapa decisiva de una evolución sin la que no se podría imaginar el progreso de las matemáticas, de las ciencias y la técnica moderna".

Los mismos autores relacionan el proceso que lleva un niño a comprender el SDN, tal como el recorrido de la humanidad hasta su invención. El primer paso, a partir de la correspondencia entre los objetos, se transita al conteo, lo que aprende a individualizar y a ordenar, dando sentido a la serie de números que logra diferenciar. A la cifra se le suman cada vez más atributos para distinguir sus cualidades, apropiándose de las leyes que rigen la combinación de los signos del sistema de numeración posicional y su diferencia con el sistema de escritura alfabética.

Esta base de conocimientos genera la consecución del aprendizaje cada vez más complejo que los individuos adquieran en el transcurso de su vida. Sin el conocimiento de las leyes que rigen al SDN sería imposible conocer todo el universo de ideas que de éste se deriva.

En etapas posteriores (Block y Dávila, 1993), y a partir de un laborioso proceso de construcción intelectual, se adquieren capacidades para identificar grafías y propiedades específicas a éstas, la combinatoria y transposición del sistema posicional, la correspondencia entre objetos hasta llegar a la aditividad en el niño, en que se transita el mismo proceso que en esos órdenes se han presentado en la historia de la civilización.

CAPÍTULO I

COMPONENTES COGNOSCITIVOS QUE PARTICIPAN EN EL RAZONAMIENTO NUMÉRICO

Un aspecto central que interesa investigar es el proceso por el cual el individuo adquiere las nociones del número. Comúnmente se vincula esta adquisición a partir del conocimiento escolarizado, sin embargo el niño desde sus primeros años ya representa, aunque rudimentariamente, procesos de comprensión de notaciones numéricas antes de lo que piensan los adultos.

Esta cualidad de identificación numérica no sólo es condición de la especie humana. Desde el enfoque de la psicología comparativa (Skinner, cit. por Bermejo, 1990), se sostiene la continuidad de los procesos de aprendizaje en el hombre y los animales, de modo que las posibles diferencias entre ambos serian sólo cuantitativas, por lo que la capacidad de aprendizaje se incrementaría progresivamente a través de las diferentes especies animales hasta el hombre. Existen estudios que demuestran que aves y mamíferos pueden percibir la numerosidad de pequeñas colecciones de objetos, y la correspondencia uno a uno, agrupando y clasificando pequeñas cantidades de objetos.

Se ha observado (Bermejo, op. cit.) que tanto los chimpancés como los niños pequeños poseen la percepción de la numerosidad. Así, mientras el niño de dos años alcanza a percibir hasta tres objetos, el chimpancé puede llegar hasta cuatro, y ambos construyen correspondencias. Sin embargo, en sus procesos evolutivos el niño supera ese estado, adquiriendo un sistema numérico y procesos complejos de matematización, por medio de estructuras lógicas de pensamiento.

En la adquisición de los componentes cognoscitivos matemáticos no existen reglas inmanentes ni estáticas en relación a las estrategias que desarrollan los individuos para solucionar problemas matemáticos. Las estrategias producidas son variables en cada individuo y no se puede describir que en una determinada etapa de la vida se presentan. Cada individuo logra elaborar sus procedimientos por diferentes medios descartándose pasos determinados que describan cronológicamente su cognición, es decir no existen tiempos preestablecidos para su adquisición.

1.1.- ESTRUCTURA DEL NÚMERO

Según Gómez y cols. (1995), la concepción acerca del significado del número y sus propiedades ha partido de definirlo como el resultado de la síntesis de la operación de clasificación y de la operación de seriación: un número es la clase formada por todos los conjuntos que tienen la misma propiedad cuántica y que ocupa un rango en una serie, considerada a partir de la propiedad numérica. De ahí que la clasificación y la seriación se fusionen en el concepto de número.

El niño conoce desde muy temprana edad un rudimentario sistema de numeración con el proceso de agrupación y clasificación de objetos, por medio de su conteo y su ordenamiento. Con esta actividad aprende a individualizar y ordenar los objeto dándole sentido a la serie de números que aprende a recitar precozmente. Así, el niño adquiere las primeras nociones aritméticas antes de que asista a un sistema escolarizado, incluso con anterioridad a la época de usos de los numerales convencionales. Los niños están en contacto con la cultura mucho antes que la escuela la transmita de forma organizada. El aprendizaje escolar nunca parte de un conocimiento vacío, sino que está precedido por las ideas que el niño ha construido acerca de la cuantificación de los objetos y la representación.

Según Piaget y Szeminska (1941, p. 20), la formación del concepto de número parte de la conservación de la materia, es decir, que "en todas partes y siempre, la conservación de algo es para el espíritu la conservación necesaria de toda inteligibilidad matemática" ya que desde el punto de vista psíquico, la necesidad de conservación constituye una especie de "a priori" funcional del pensamiento, es decir, que en el curso de su desarrollo la interacción histórica entre su maduración y su experiencia se impone la necesidad de incluir esquemas de posesión de la noción numérica.

Este proceso de desarrollo se sucede en etapas: la primera se da con la ausencia de la conservación, como se refleja en sus estudios clásicos de la cantidad de líquido, según las características del vaso, atribuyendo su cantidad en base a su grosor o a su altura. La segunda fase, etapa transitoria, es la de respuestas intermedias, donde el niño es capaz de postular la conservación del líquido en el transvase, de un vaso grande a dos chicos, pero si intervienen tres o más recipientes, se mantiene la ausencia de conservación.

La conservación necesaria, llamada así a la tercera etapa, es una presumible respuesta concreta en el caso de los recipientes en el transvase, sin determinarse si es real o solo aparente al no afirmar el niño sus respuestas. Estas etapas constitutivas llegan fácilmente a multiplicar las relaciones de altura y anchura que resultan de la comparación de dos objetos distintos con contenidos equivalentes.

Bajo los criterios de Piaget, Gómez y cols.(op. cit.) define al número como la propiedad común a todas las colecciones, cuyos objetos puedan ponerse en correspondencia biunívoca (apareamiento) unos con otros, y que es diferente en aquellas colecciones para las cuales esa correspondencia no es posible.

Vergnaud (1991) refiere al número como una propiedad de los conjuntos, implica comprender ciertas reglas: no tiene que ver con la naturaleza de los objetos, ni es una propiedad de los mismos, sino una asignación arbitraria; el número que designa a una cantidad de objetos será siempre el mismo, y al realizar un conteo, el último número indica el total de objetos contados y no solo el correspondiente al último objeto, implicando la cardinalidad y la ordinalidad.

1.1.1.- CARDINALIDAD Y ORDINALIDAD

Para la construcción del pensamiento numérico, Vergnaud (op. cit.) define que es necesario adquirir la noción de *cardinalidad*, la cual es la propiedad numérica de los conjuntos y se basa en la posibilidad de hacer corresponder dos o más conjuntos cualesquiera de una determinada cantidad de elementos. Así, el número cuatro por ejemplo, es la propiedad común a todos los conjuntos de objetos que tienen cuatro elementos y opera la correspondencia con otros conjuntos similares.

Por su parte, la *ordinalidad* es una relación de orden jerárquico, donde se tiene un rango determinado por el sentido que se le da al ordenamiento y con base en la cardinalidad de cada conjunto. La relación de ordinalidad que se establece entre las clases de conjuntos a partir de sus propiedades numéricas, establece las equivalencias entre sí, dándose la expresión <mayor que> y <menor que>.

1.1.2.- CLASIFICACIÓN

Por clasificación se entiende (Gómez y cols., op. cit.) como una operación lógica fundamental en el desarrollo del pensamiento, cuya importancia es la de "juntar" por semejanzas y "separar" por diferencias, entendiéndose esto como una acción interiorizada, lo que implica dos tipos de relaciones: la pertenencia y la inclusión.

La primera se refiere a la relación que se establece entre cada elemento y la clase de la que forma parte fundada en la semejanza, ya que decimos que un elemento pertenece a una clase cuando se parece a los otros elementos de una misma clase. La segunda es la relación que se establece entre cada subclase y la clase de la que forma parte, de tal modo que nos permite determinar que la clase es mayor que la subclase.

La clasificación se fundamenta en las propiedades cualitativas al agrupar los elementos en conjuntos, es decir, que en el caso del número no se buscan semejanzas entre elementos, sino semejanzas entre conjuntos donde se cuantifican esas propiedades cualitativas. Además, bajo la relación de inclusión el número juega el papel de jerarquizar, en la que cada clase incluye a las que son inferiores y ésta es incluida en todas las superiores. Por ejemplo, la clase "cinco" incluye a "cuatro", "tres", etc., y está incluida en las clases "seis", "siete", etc.

Según Piaget y Szeminska (op. cit.) existen dos tipos de conocimiento del número: en un extremo el conocimiento físico, que constituyen ejemplos de propiedades que están en los objetos de la realidad externa y pueden conocerse por observación. Por otro lado, se da el conocimiento lógico-matemático que surge a partir de establecer las diferencias entre los objetos, coordinando sus relaciones como una abstracción mental por la deducción de *igual, diferente* y *más*.

Para designar propiedades a partir de los objetos, el sujeto utiliza la abstracción *empírica*. Para la abstracción del número utiliza la abstracción *reflexiva*.

La primera se centra en una determinada propiedad del objeto, ignorando las otras, en cambio la abstracción reflexiva implica la construcción de relaciones entre los objetos, tratándose de una verdadera construcción de la mente más que una centración en algo que ya existe en los objetos (Kamii, 1985).

Según Piaget y Szeminska (op. cit.), el número es el resultado de la síntesis de la inclusión y la seriación, ya que cada número es un todo formado por elementos, que son al mismo tiempo equivalentes y por tanto organizados inclusivamente, por lo que la clase, la relación asimétrica y el número son tres manifestaciones complementarias de la misma construcción operatoria, y aparecen al mismo tiempo en el desarrollo infantil, ya que poseen un mismo fundamento operatorio, es decir, la estructura del *agrupamiento*.

Este sincronismo con que aparece el agrupamiento y la clasificación, no se comparte por varios autores (Bermejo, op. cit.) ya que se atribuye a diferentes razones, tales como a las conceptualizaciones de las nociones estudiadas, a diferencias en el diseño experimental, la medición y muestreo para la evaluación del niño.

1.1.3.- SERIACIÓN

La seriación es otra operación implícita en la formación del razonamiento numérico que constituye uno de los aspectos fundamentales del pensamiento lógico. Al igual que la clasificación, la seriación establece relaciones entre elementos que son diferentes en sus aspectos y ordena esas diferencias en sentido creciente o decreciente (Gómez y cols., op. cit.). De aquí parten dos propiedades fundamentales: la *transitividad* y la *reciprocidad*.

La transitividad consiste en establecer una relación entre un elemento de una serie y el siguiente y de éste con el posterior, deduciendo la relación entre el primero y el último de los elementos bajo la siguiente fórmula: si 5 es mayor que 4 y 4 es mayor que 3, entonces 5 es mayor que 3.

La reciprocidad se explica como la relación con elementos inmediatos que al invertir el orden de la comparación, dicha relación también se invierte. Por eso podemos apreciar que si 8 es mayor que 5, entonces 5 es menor que 8, presentándose el efecto de la conmutatividad.

Vemos así que la serie numérica es el resultado no solo de elementos, sino como representante de la clase a la cual pertenece. En síntesis, puede decirse que el número es al mismo tiempo clase y relación asimétrica que se deriva tanto de la clasificación como de la seriación, siendo el resultado de la fusión de esas dos operaciones. Sin embargo (Kamii, op. cit.), esta fusión se presenta en el caso del concepto del número pero no cuando se clasifica o se seria con base en las propiedades cualitativas.

Esto último se explica en la clasificación basada en cualidades, la cual se centra en las semejanzas donde los elementos se consideran equivalentes independientemente de sus diferencias. Son equivalentes porque a cualquier elemento de un conjunto le puede corresponder cualquier elemento del otro. Seriar implica ordenar las diferencias que en la abstracción de las cualidades permite diferenciar cada unidad de las demás.

Por otra parte, y para establecer la equivalencia, se recurre a la operación de correspondencia, que es el cálculo mas simple y directo para la comparación cuantitativa. Piaget y Szeminska (op. cit.) consideró que el análisis de los comienzos de la cuantificación plantea el problema de la correspondencia. Comparar dos cantidades es efectivamente, o bien poner en proporción sus dimensiones, o bien poner sus elementos en correspondencia término a término. De estos dos procedimientos, sólo este último se nos presenta como el verdaderamente constitutivo del número entero mismo, ya que proporciona el cálculo más simple y más directo de la equivalencia de los conjuntos.

La importancia de la correspondencia radica en que, como mencionan Gómez y cols. (op. cit.), al realizarla de manera biunívoca (relación de uno a uno entre los elementos de dos conjuntos), se pueden comparar los conjuntos y decidir si son o no equivalentes, y por lo tanto formar clases con los equivalentes. Después se pueden ordenar dichas clases mediante su puesta en correspondencia biunívoca, asi como construir la serie numérica considerando la relación +1 y -1. Así, la fusión de la clasificación y la seriación se realiza por medio de la correspondencia.

1.2.- EL SISTEMA DECIMAL DE NUMERACIÓN

Los diferentes sistemas de numeración que se han desarrollado a través de la historia han creado sus reglas que dan forma lógica a las connotaciones que utiliza, entre los cuales se encuentra el Sistema Decimal de Numeración (SDN).

Según Gómez y cols. (op. cit.), existe diferencia entre el sistema numérico y sistema de numeración. El primero se refiere a un conjunto de números que posee propiedades y características independientes de los signos usados para su representación. El sistema de numeración es un conjunto de signos y reglas que permiten la representación de los números, determinan las formas en que se combinan para construir los numerales y establecen las formas de operar con ellos.

1.2.1.- LA BASE Y LA POSICIÓN EN LA NUMERACIÓN

El sistema de numeración presenta dos características: la *base* y la *posición*, en las cuales se prescinde de la representación de las potencias de la base y se concede un valor variable a las cifras, según el lugar que ocupan en la representación convencional de los números.

Según Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev (1985), la noción de número abstracto se ha desarrollado lentamente, y al recurrir al principio de la base se evita el esfuerzo de la memoria o representar lo que supondría enunciar cada número con un nombre que no tuviera relación con los demás. La base más utilizada en la historia de la numeración es la base 10, debido a la tendencia del hombre a utilizar las manos como facilitador del contaje, lo que significa que se requieren diez unidades simples para formar una unidad de segundo orden, las decenas, y diez decenas para formar una unidad de tercer orden, las centenas, y así sucesivamente; es decir, que cada diez unidades de cualquier orden forman una unidad del orden inmediato superior.

A este proceso se le llama agrupamiento, y al proceso inverso desagrupamiento, el cual consiste en descomponer toda unidad en diez unidades del orden inmediato anterior, como puede ser el ejemplo del número 584 que en notación desarrollada es:

$$5\,(100) + 8\,(10) + 4 = 584 \quad (500 + 80 + 4 = 584)$$

significando una notación en escala decreciente a partir de las unidades de mayor orden.

El mayor perfeccionamiento que tiene el SDN con respecto a otros sistemas que han imperado en la historia, es la creación del cero, (Ifrah, op. cit.) que se fusiona la noción de "nada" y "vacío" según la posición donde se aplique, lo que implica facilitar la notación posicional del número y bajo el mismo signo representar dos nociones aparentemente distintas: la de *ausencia* y la de *nulidad*.

El concepto de número no tiene una imagen inmediata; no puede ser exhibido, sino sólo concebido en la mente, formulándose el pensamiento en el lenguaje, y sin nombres no puede haber conceptos. Según Aleksandrov (op. cit.), la importancia de los símbolos numéricos suministra una materialización sencilla del concepto del número abstracto. Así, + nota adición, **X** nota número desconocido, **a** un número cualquiera dado, etc., además los símbolos numéricos proporcionan un medio particularmente sencillo de realizar operaciones con ellos, permitiendo reemplazar una parte del razonamiento con cálculos por algo que es casi mecánico.

En este capítulo se ha pretendido describir la estructura y las reglas que tiene el número y el SDN, así como los procesos que siguen los niños en el aprendizaje del sistema numérico que se utiliza y su consecución en el cálculo aritmético que los niños descubren, comprenden y utilizan como producto de una adquisición cognitiva.

La estructura del número y sus propiedades se concibe como la base de todo conocimiento posterior, y una enseñanza descontextualizada de éste puede dar por resultado que los niños las conceptualicen sin ninguna conexión con la vida diaria y sin fundamento lógico. La comprensión del SDN es fundamental, pues requiere de un conocimiento que se desarrolla paulatinamente y de acuerdo al potencial que desarrolle el niño.

CAPÍTULO II

PROCESOS BÁSICOS QUE PARTICIPAN EN LA ADQUISICIÓN DEL CÁLCULO ARITMÉTICO

Desde temprana edad los procesos de adquisición del cálculo aritmético intervienen en la cuantificación de los objetos físicos y la relación espacial que los sujetos experimentan.

Diversos estudios sobre los procesos de adquisición aritmética han considerado al conteo como elemento inicial para lograr algoritmos considerados como superiores, tales como la suma, resta, multiplicación y división. El conteo se concibe como prerrequisito para posteriores habilidades matemáticas y se adquieren estrategias que eficientizan su conocimiento.

Reys (1995) detectó que antes de la adquisición del conteo, desde los dos años de edad los niños organizan habilidades de cuantificación, por medio de la percepción inmediata (o subitación) de la numerosidad y las habilidades de estimación del número como un acercamiento al monto que se percibe. La estimación como parte del razonamiento matemático es una habilidad que persiste y se perfecciona en el transcurso de la vida y facilita la solución de problemas cotidianos.

2.1.- EL CONTEO

Un paso inicial que interviene en la adquisición del cálculo aritmético es el proceso que lleva el niño en la cuantificación de los objetos que relaciona. Este proceso resulta básico para adquirir habilidades que necesitan una mayor elaboración cognitiva, y que por sus características precede al proceso de la aditividad.

Sin embargo, este proceso tiene una estrecha relación con el razonamiento numérico, que matemáticamente define al conteo como un proceso por el cual los objetos de un conjunto se designan uno a uno y cada objeto se designa una vez y sólo una. Además (Resnick y Ford, op. cit.), al designar cada objeto se asocia con una palabra (el nombre de un número) y estas palabras se pronuncian en un orden fijo. Este proceso de cuantificación se puede percibir desde el exterior, pero en otras se lleva a cabo internalizada, lo que se infiere que se ejecuta como un *conteo interno*.

El conteo es una de las habilidades numéricas que se presentan más temprano en el desarrollo infantil, sin embargo no es fácil determinar cómo la adquiere el niño ni en qué etapa precisa de su edad.

Para unos autores (Barody y Ginsburg; cit. por Bermejo, 1990), los inicios de esta habilidad se fundan en una comprensión mecánica o en un aprendizaje memorístico carente de sentido, y se entendería que la habilidad numérica temprana de los niños se debería a la creación de hábitos. La aplicación mecánica del procedimiento de conteo sería modificada paulatinamente por la comprensión del mismo, originando procedimientos cada vez más sofisticados que pueden conducir a posteriores aprendizajes conceptuales.

Desde otro punto de vista (Gelman y Meck, 1986), algunos autores defienden la existencia de unos principios que guían la adquisición de un conocimiento cada vez más elaborado de la habilidad del conteo, donde el papel desempeñado por dichos principios sería determinar las características que debe tener una ejecución correcta. Esto contempla la existencia de estados intermedios, que durante los primeros años parecen consistir en la mejora de los procedimientos y en la habilidad de llevarlos correctamente a la práctica.

Según Gelman y Meck (op. cit.), existen tres principios procesuales con respecto a la adquisición del conteo: 1) principio de correspondencia uno-a-uno; 2) principio de orden estable; y 3) principio de cardinalidad.

El primero se identifica con el aspecto cardinal del número y la secuencia ordenada de numerales con el aspecto ordinal. Como componente del conteo ha de coordinarse con la secuencia de elementos ordenados, lo que conlleva los procesos de partición y etiquetación. Se entiende por partición al mantenimiento, paso a paso, de dos categorías de ítems: los que ya han sido contados y los que aún no han sido contados. La etiquetación requiere la existencia de un conjunto de etiquetas que se harán corresponder una sola vez con cada objeto.

El segundo principio, Gelman y Meck (op. cit.) lo conciben como de orden estable, representa una tarea de aprendizaje serial que plantea problemas prácticos a los niños, ya que implica el aprendizaje memorístico de los quince primeros numerales. El aprendizaje memorístico es necesario antes de que puedan emplear la secuencia estándar de numerales, y los niños se aferran a él como forma de expresar X cantidad, adquiriendo en esta fase el aprendizaje de la secuencia convencional.

Las secuencias de numerales se producen a través de un sistema que implica: a) nombre de las unidades (de 1 a 9); b) nombre de decenas (de 10 a 90); c) reglas que permiten combinar las unidades y decenas. Para que se dé esto, los pasos seguidos por los niños para aprender este sistema numérico serían los siguientes:

1) memorizar mecánicamente los nombres de las unidades;
2) producir las decenas a partir de las unidades;
3) aprender las reglas que indican el modo en que deben combinarse las unidades y decenas para formar números mayores. Así se evita que el aprendizaje de las secuencias de numerales tenga que ser memorístico hasta 100.

Al tercer principio Gelman y Meck (op. cit.) lo denominan de cardinalidad, el cual asigna un significado especial a la última etiqueta empleada durante el procedimiento de conteo, de modo que representa el conjunto como un todo, es decir, que el último número empleado durante el conteo indica el número de objetos de una muestra.

Resnick y Ford (1990) incluyen dentro de estos procesos el de *subitación* (del latín súbito), como una respuesta a la cuantificación de objetos sin la necesidad de recurrir al conteo, apareciendo en conjuntos pequeños - hasta 5 o 6 -, lo que permite disponer de más espacio en la memoria de trabajo para realizar otras operaciones necesarias. Es más un <bloque> que un conjunto de operaciones separadas.

2.2.- LA SUMA

Para descubrir los procesos por los que se adquiere el conocimiento de la adición se ha analizado la aplicación gradual del proceso de cálculo, que en los niños se encuentra desde antes de una educación formal, y uno de los aspectos en que los niños suelen presentar más dificultades es la resolución de problemas verbales, de modo que aquellos que resuelven eficazmente el algoritmo de sumar, con frecuencia encuentran obstáculos en el momento de aplicar este procedimiento a los problemas verbales.

Carpenter (cit. por Puente y Poggioli, 1989) centró el estudio de la secuencia evolutiva del concepto de suma a partir de los procesos de solución de problemas verbales, analizando las respuestas de los niños en problemas de suma y resta, adoptando para ello un marco teórico que le permita clasificar los problemas en función de su estructura semántica. Los problemas aritméticos expresados en palabras presentaron mayor dificultad que los problemas presentados numéricamente, por lo que se infiere que las principales variables son de naturaleza lingüística, es decir, variables semánticas o una combinación de ambas.

Se pueden identificar cuatro operaciones, tanto de suma como de resta, para comprender la estructura semántica: *cambiar*, *combinar*, *comparar* e *igualar*.

La operación de cambiar, según Puente y Poggioli (op. cit.), se refiere a los problemas de "juntar" o "separar" cosas, caracterizados por una acción que modifica una cantidad inicial, dando como resultado el incremento o decremento de esa cantidad. Hay subtipos de problemas de cambio en función del lugar en que se encuentre la incógnita o cantidad desconocida. En un primer subtipo se propone la cantidad inicial y la magnitud del cambio, teniendo que calcular el estado final:

> Pedro tenía 8 canicas. María le da 4 más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro?

En un segundo subtipo la cantidad inicial y el resultado del cambio son conocidos, debiéndose hallar la magnitud del cambio:

> Pedro tiene 6 canicas. ¿Cuántas canicas más necesita para tener 13?

En un tercer subtipo de cambio se desconoce la cantidad inicial:

> Pedro tenía algunas canicas. María le dio 5 más y ahora tiene 13. ¿Cuántas canicas tenía Pedro al principio?

Los problemas de tipo *combinación* y *comparación* involucran relaciones estáticas y no existen acciones. En los de combinación proponen dos cantidades que pueden considerarse aisladas entre sí o como parte de un todo:

> Pedro tiene 5 canicas rojas y 8 azules. ¿Cuántas canicas tiene en total?

Los problemas de comparación implican la relación de dos conjuntos distintos, donde uno de ellos cumple funciones de referente y el otro funciones de comparado, derivando la diferencia o excedente entre ambos conjuntos:

> Pedro tiene 13 canicas y María tiene 5. ¿Cuántas canicas más tiene Pedro que María?

> María tiene 5 canicas. Pedro tiene 8 más que María. ¿Cuántas canicas tiene Pedro?

Puente y Poggioli (op. cit.) clasifican los problemas de *igualación* como un híbrido de los problemas de comparación y cambio, ya que hay una acción implícita que tiene que aplicarse a uno de los conjuntos, como sucede en los problemas de cambio basada en la comparación de dos conjuntos disjuntos. Existen también subtipos para representarlos según la posición de la incógnita:

> Pedro tiene 13 canicas y María tiene 5. ¿Cuántas canicas necesita María para tener las mismas que Pedro?

> Pedro tiene 3 canicas. Si le dan 8 más, tendrá las mismas que María. ¿Cuántas canicas tiene María?

> Pedro tiene 13 canicas. Si María gana 5 canicas tendrá las mismas que Pedro. ¿Cuántas canicas tiene María?

El conflicto que presentan los niños y no pocos adultos, para dar una respuesta acertada en todas las variantes anteriores, es que cuando se ve un signo de + se piense en general que indica "agregar" una cantidad a otra para obtener una mayor a ambas, (Velásquez y cols., 1988) lo que desmiente la idea generalizada y muy arraigada que los problemas de suma son más fáciles que los de resta, al igual que los de multiplicación son mas fáciles que los de división. Esto nos llevaría a la conclusión de que son las operaciones las que hacen diferente los problemas (Ávila, 1994), y por lo tanto dos problemas que implican la misma operación pueden tener el mismo nivel de dificultad; y si dos problemas implican dos operaciones diferentes pueden ser de nivel de dificultad diferente.

Al respecto, Kamii (1986) explica que la adición puede concebirse también como la combinación de dos conjuntos, es decir, en sentido binario, tal como ocurre en los problemas de combinación y comparación, y en el mismo sentido, la concepción unitaria estaría presente en los problemas de cambio, suponiendo a la operación aditiva como un cambio de estado.

Según Velásquez y cols. (op. cit.), el conteo constituye el punto de partida de las diversas operaciones aritméticas elementales, el cual se convierte directamente en la operación aditiva que, a su vez por un proceso de repetición da lugar a la multiplicación, y a través de su inversión a la resta, se cierra el ciclo al aplicar repetidamente la operación sustractiva, originándose la división.

Lo anterior es sostenido por la idea de que los niños suelen entrar en la escuela con un alto desarrollo de conocimientos informales en torno a la aritmética, y estos conocimientos se aplican gradualmente a tareas de cálculo de tal manera que, antes de recibir instrucción formal sobre adición o sustracción, inventan estrategias de conteo para solucionar problemas simples de tipo N+1 y N-1 como una secuencia numérica mental, en donde los números se enlazan entre sí como una relación de <siguiente> (Greeno y Riley, 1988). Esta condición es modificada con la estrategia de < contar todo>, no respetando el orden de los sumandos a la hora de representarlos, ni empezar su conteo con el primer sumando representado. Posteriormente los niños inventarían estrategias de <acortamiento>, como <contar a partir del sumando mayor>, como un procedimiento ahorrativo para solucionar los problemas, como sería el caso de la operación 2+4 en la que el niño la interpretaría como "a 4 elementos le aumento 2 elementos".

2.3.- LA RESTA

La sustracción suele ser considerada como una operación en que su enseñanza se posterga en el curriculum escolar con respecto a la adición, por considerársele un proceso cognitivo que le sigue a ésta.

El desarrollo de las operaciones de restar no suele empezar antes de su proceso escolarizado (Carpenter; cit. por Bermejo, 1990), sin embargo desde antes de la escuela preescolar los niños son capaces ya de resolver ciertos problemas simples de sustracción principalmente cuando pueden utilizar directamente objetos físicos, para modelar la acción o relaciones descritas en un problema específico, como puede ser en el añadido o reducción de monedas depositadas en su mano.

Según Kamii (1986), los niños preescolares inician su abstracción con el nivel más primitivo cuando usa objetos físicos (por ejemplo, los dedos) para modelar la acción, utilizando principalmente las estrategias *separar de*, *separar a*, *añadir a* y *emparejar*. En un segundo nivel se interioriza el modelamiento concreto del nivel anterior consiguiendo una mayor flexibilidad y eficiencia centrado en el conteo.

Surgen también en los niños de educación primaria estrategias más sofisticadas para su nivel que eficientizan sus operaciones, como son el *contar a partir de lo dado*, utilizando el *contar hacia adelante*, o *hacia atrás*, como un preámbulo de sus habilidades en la resta.

Según Kamii (op. cit.), los problemas que se presentan en la comprensión de la resta es que tradicionalmente los niños tienden a pensar positivamente, y dado que construyen la sustracción después y a partir de la adición, consideran ésta como de carácter negativo, con una consecuente dificultad para descartar el concepto de *quitar* o perder algo habido o logrado.

Carpenter (Puente y Poggioli, op. cit.) describe tres niveles básicos en la descripción de estrategias sustractivas aplicables también a la adición:

a) estrategias que se realizan utilizando los dedos.
b) basadas en secuencias de numerales.
c) fundadas en el recuerdo de hechos numéricos.

Con base en esto, describe las siguientes estrategias:

1) *Separar de*, representando primero la cantidad mayor y quitándole la cantidad menor.

2) *Contar hacia atrás a partir de*, como una estrategia paralela a la anterior fundada en el conteo y donde la última cifra es la respuesta correcta.

3) *Separar a*, estrategia derivada de la primera con la excepción de que se separan objetos del conjunto mayor, hasta que queden en el número representado por el conjunto menor.

4) *Contar hacia atrás*, desde el número mayor hasta el menor, contando los numerales emitidos durante el conteo hacia atrás para encontrar la respuesta.

5) *Añadir a*, formando primero el conjunto mayor y después constituir el conjunto menor, añadiendo a esta cantidad, sin contar, los objetos necesarios para igualar ambos conjuntos.

6) *Contar a partir de lo dado*, donde se cuenta a partir del número menor hasta el mayor y el resultado de los dígitos que hacen la diferencia es el resultado.

7) *Emparejamiento*, utilizando objetos se forman los dos conjuntos formando correspondencia uno-a-uno entre ambos y los objetos no emparejados da la respuesta correcta.

8) *Elección*, es una combinación de las estrategias 2 y 6, donde se emplea una u otra en función de la eficiencia.

En otro aspecto, el proceso de adquisición de la resta conlleva una lógica similar al de la adición en lo que concierne a la solución de problemas que se presentan de tipo verbal, demostrándose que las principales variables son de tipo sintácticas, semánticas o una combinación de ambas (Puente y Poggioli, op. cit.). Siguiendo el modelo de la adición, los problemas tipo *cambio* serían representados así:

> Pedro tenía 9 canicas. Le dio 5 a María. ¿Cuántas canicas le quedan ahora?
>
> Pedro tenía 12 canicas. Le dio algunas a María. Ahora le quedan 7 canicas. ¿Cuántas canicas le dio Pedro a María?

donde la incógnita se encuentra en la sustracción o en el sustraendo, lo que implica diferente proceso de razonamiento.

Los problemas tipo *combinación* son:

> Pedro tiene 13 canicas. 5 son rojas y el resto azul. ¿Cuántas canicas son azules?

Los problemas de tipo *comparación* se dan en dos niveles:

> Pedro tiene 12 canicas. María tiene 7 menos que Pedro.
> ¿Cuántas canicas tiene Pedro?
>
> Pedro tiene 7 canicas, pero 5 menos que María. ¿Cuántas
> canicas tiene María?

Por último, los problemas tipo *igualación* se representan de la siguiente forma:

> Pedro tiene 8 canicas. María tiene 5. ¿Cuántas canicas tiene
> que perder Pedro para tener las mismas que María?
>
> Pedro tiene 8 canicas. Si pierde 5 tendría las mismas que
> tiene María. ¿Cuántas canicas tiene María?

Sin embargo, existen opiniones (Resnick y Ford, op. cit.) de que no todos los procesos para adquirir habilidades y estrategias de aprendizaje son bajo modelos acabados. Una serie de experimentos sobre los procesos tanto de suma como de resta pueden descubrir que la forma de enseñanza en la ejecución no siempre es idéntica a la forma en que los acaban ejecutando los niños, sino que suelen inventar métodos para ejecutar los procedimientos matemáticos, como es el caso de la resta.

2.4.- LA MULTIPLICACIÓN

Una de las ventajas del sistema de numeración decimal consiste en la facilidad de realizar una operación que bajo otro sistema representaría una mayor dificultad. El proceso de adquisición de la multiplicación se da a partir del manejo de la suma sin que se puedan desvincular ambos de sí mismos, como primer paso para su aprendizaje.

La suma adquiere la condición de ser un prerrequisito para lograr una eficiente habilidad para multiplicar, y esta operación aritmética sustituye a la suma facilitando la solución de problemas.

La multiplicación, según Skemp (1993), presenta tres propiedades en su estructura: la propiedad *conmutativa*, *asociativa* y *distributiva*. Las dos primeras las comparte con la suma, y la tercera es la que le caracteriza su diferencia.

Es conmutativa porque sus elementos pueden variar en su posición sin alterar el resultado (p.e.: 5 X 3 y 3 X 5 el resultado es el mismo).

La propiedad asociativa se caracteriza por que el cardinal del resultado final puede ser el mismo cualesquiera que sean los otros operadores (p.e.: (a X b) X c = a X (b X c).

La propiedad distributiva respecto de la suma permite extender habilidades para llegar a resultados con números de cualquier magnitud (p.e.: n X (a+b) = (n X a) + (n X b).

Es frecuente la identificación de errores en los niños cuando se encuentran con el obstáculo de determinar si es un problema de multiplicar o su solución requiere de otra operación. Jiménez (1996) identificó que en la escuela primaria los problemas aritméticos que con frecuencia se les proponen no reconocen la relación multiplicativa o aditiva entre los datos, para posteriormente realizar el algoritmo correspondiente y así obtener el resultado.

Las estrategias a las que el niño recurre para resolver problemas multiplicativos tienen relación con procesos más complejos en los que ya no participan operaciones elementales, sino operaciones como el uso del porcentaje, la proporcionalidad y el número fraccionado. Figueras (1994) relaciona el fracaso escolar en la aritmética elemental a partir de la enseñanza de las fracciones numéricas muy relacionado al proceso multiplicativo, atribuyendo esto a la incorrecta instrucción que proporcionan los maestros para realizar el algoritmo correcto. El razonamiento que el alumno necesita elaborar para comprender la partición de la unidad requiere de un proceso cognitivo que bajo una instrucción que no contemple el estado del nivel de comprensión, puede producir la falta de habilidades para posteriores problemas matemáticos.

Skemp (op. cit.) considera que un problema que surge en las aulas es utilizar la multiplicación como la suma reiterada, lo que conlleva a un conflicto al no utilizar estrategias para otros tipos de problemas.

La multiplicación se concibe a partir de la teoría de conjuntos, como un producto cartesiano, ya que si se consideran los conjuntos A y B se puede representar gráficamente dos espacios de medida cardinales entre sí.

Vergnaud (1991) considera que la multiplicación es un caso particular de la regla de tres que estructuralmente se relaciona con la proporción. En la resolución de problemas los resultados están directamente relacionados con la función del multiplicando y el multiplicador y si el resultado deseado presenta una cantidad extensiva o intensiva. Se ha planteado la clasificación de problemas de cuatro tipos:

de *razón*, de *comparación*, de *combinación* y de *conversión* estrechamente relacionados con la división.

Maza (1991) clasificó seis tipos de estrategias en los niños que les permite calcular las multiplicaciones básicas. Estas son:

1) *Estrategia conmutativa*, donde el orden de los dos factores no altera el resultado de la multiplicación.

2) *Multiplicación por 10*, que por su sencillez de manejo una vez aprendida es de constante utilización.

3) *Cálculo del doble*, multiplicando por 2 se deduce para agilizar la carga de memoria y cantidades grandes.

4) *Cálculo de la mitad*, habitualmente aplicada en operaciones de 10 a 5. La multiplicación de 10 es fácil de aplicarse en los niños por lo que se reduce el resultado cuando se opera con el 5.

5) *Adición del multiplicando*, que apoyándose en una multiplicación por un determinado número, se facilita añadir una vez el multiplicando.

6) *Sustracción del multiplicando*, analógicamente con la anterior se resta una vez el multiplicando, facilitando en estas dos últimas estrategias cuando no se recuerda un resultado de la tabla de multiplicar.

Un apoyo amplio que utiliza el niño en fase inicial del aprendizaje y hasta la edad adulta son las tablas de multiplicar, instrumento que facilita el recuerdo y automatiza el procedimiento algorítmico, lo cual es la base fundamental de las matemáticas. Su utilización reduce la carga de memoria y por su importancia se integra al curriculum escolar de manera sistemática a partir de la enseñanza de la multiplicación.

2.5.- LA DIVISIÓN

Del conjunto de las operaciones aritméticas elementales los problemas de división son el final de los procesos que se adquieren, su estudio puede ser abordado de igual manera que la multiplicación por su estrecha relación en su aprendizaje inicial. Para Vergnaud (1991) existen dos problemas de división que le caracterizan sus funciones. El primer tipo de problema presenta la propiedad de la *partición*, en que la incógnita resulta ser el valor asociado al principio del reparto, caso más utilizado en la vida común. Se trata de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales (p.e.: compré tres libros y me cobraron 75 pesos, ¿cuánto vale cada uno?).

El segundo tipo de división según Vergnaud (op. cit.), es donde el problema requiere que la incógnita se resuelva conformando el número de grupos (p.e.: si un libro cuesta 25 pesos y me cobraron 75 pesos, ¿cuántos libros compré?) por lo que recibe el nombre de *agrupamiento*.

En los inicios de la adquisición de la división, Maza (1991) observó que los niños realizaban por ensayo y error una combinación de la partición y agrupamiento en donde el algoritmo más utilizado era un conjunto de operaciones de resta hasta llegar al resultado correcto. Posteriormente, los niños resolvían problemas por medio de procedimientos más fáciles y con menos pasos a seguir.

León y Alvarez (1990) investigaron las dificultades que conlleva el aprendizaje de la división, encontrando que en el procedimiento de "llevar" y el "pedir prestado" los niños no lo logran comprender por la confusión que genera en el sistema posicional recurrir a las decenas o centenas, según el grado de complejidad.

Figueras (1994) y Reys (1995) coinciden que un problema fundamental en la operación de la división es el razonamiento del número fraccionado y el decimal, vinculado a la fragmentación de la unidad. Se detectó que el razonamiento del niño no reflejaba "cómo a un número le puede sobrar". A esto se reflejaba una imposibilidad instruccional de parte de los maestros para poderlo explicar.

Saiz (1997) relacionó las causas por las que no se logra adquirir estas habilidades: los alumnos no atribuyen significado al algoritmo que ponen en juego y aparece como un puro trabajo sobre los números, carecen de recursos para reconocer si su solución es errónea o no, esto es provocado por una instrucción orientada a "adivinar" la operación adecuada.

Varios autores coinciden (Maza, 1991; Vergnaud, 1991; Figueras, 1994) que la investigación sobre las estrategias en la resolución de problemas de división no ha sido profundizada, existiendo un vacío sobre este tema para la psicología, principalmente porque se ha centrado el estudio en operaciones que anteceden a la división. Asimismo es fundamental detectar las repercusiones que tiene una deficiente instrucción en procesos superiores del pensamiento matemático.

CAPÍTULO III

ENFOQUES PSICOLÓGICOS SOBRE EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Desde varias perspectivas se ha estudiado el fenómeno del aprendizaje matemático diseñándose así explicaciones y propuestas de cómo aplicar en la escuela una mayor eficiencia a la enseñanza de esta materia.

Las teorías del aprendizaje de las matemáticas se puede ubicar, según Gimeno y Pérez (1992), en dos amplios enfoques con sus diferentes corrientes. Desde una perspectiva, las aproximaciones asociacionistas dan una explicación relacionada a la asociación de estímulos y respuestas provocado y determinado bajo el influjo de contingencias externas al individuo que, bajo la organización y manipulación de tales contingencias, producirá las conductas deseadas.

Una segunda perspectiva, según Gimeno y Pérez (op. cit.), la representa lo que considera como *teorías mediacionales*, donde se considera que en todo aprendizaje intervienen las peculiaridades de la estructura interna, que desde diferentes visiones ofrecen un panorama sobre la complicación de los fenómenos. Éstas son contempladas desde varios enfoques, en el que sobresalen las teorías de la gestalt, el procesamiento humano de información y el desarrollo genético-evolutivo

3.1.-EL ASOCIACIONISMO

Las primeras décadas de este siglo habían estado dominadas por los postulados del análisis asociacionista más o menos sofisticados de la conducta, y negaban o minimizaban el valor funcional de los procesos mentales. El conductismo se consolida a partir de 1930 caracterizado por la aplicación de su paradigma objetivista, basado en los estudios de aprendizaje mediante condicionamiento, que considera innecesario el estudio de los procesos mentales superiores para la comprensión de la conducta humana. Pozo (1993) refiere su origen por del rechazo al uso de la introspección como método científico, lo que conlleva a la exigencia de cumplir requisitos metodológicos de objetividad.

Según Pozo (op. cit.), el conductismo está constituido por su concepción *asociacionista* del conocimiento y del aprendizaje que nace de los postulados aristotélicos y del empirismo inglés con la obra de Hume, en el cual el conocimiento está constituido exclusivamente de impresiones e ideas. Las impresiones serían los datos primitivos recibidos a través de los sentidos, mientras que las ideas serían copias que recoge la mente de esas mismas impresiones, que perdurarían una vez desvanecidas éstas. El conocimiento se alcanza mediante la asociación de ideas según los principios de semejanza, contigüidad espacial y temporal, y causalidad.

Esta posición asume los principios evolucionistas de Darwin, y en los que Thorndike (De Vega, 1984) asegura que las leyes de la conducta son universales y compartidas por todas las especies incluido el hombre, donde las diferencias serían meramente cuantitativas.

Bajo los principios de la ley del efecto y la ley del ejercicio, Orton (1990) refiere que la enseñanza se organiza buscando proporcionar satisfacción por una respuesta correcta, suponiendo que es necesario proporcionarla extrínsecamente, brindándole premios, menciones honoríficas, etc. conforme al supuesto de que mantendrá el interés y así generará más respuestas correctas, u otro, el castigo se presentará bajo diferentes modalidades, las que el alumno tratará de evitar.

Según esta posición, el mejor método de aprender aritmética es realizar muchos problemas una y otra vez, conociendo siempre si el resultado obtenido es correcto o no. Todo ello se traduce en una enseñanza maquinal y en la utilización de muchas pruebas, lo que arrojaría como resultado que el niño tuviera que aprender un número indefinido de elementos informativos de manera repetitiva para aprender las cuatro operaciones básicas. Mayer (1985) deduce que en el caso de sumar números de un dígito, habría 90 problemas diferentes, incluyendo los de dos cifras, serían más de 8 mil hechos aditivos distintos entre sí, a lo que se tendrían que añadir respecto a la sustracción, la multiplicación y la división. Cada persona necesitaría memorizar, literalmente, miles de hechos aritméticos, aunque gran parte de ellos nunca los utilizaría.

Para Gimeno y Pérez (op. cit.) los fundamentos en que se asientan las diferentes técnicas y procedimientos didácticos del conductismo son, por una parte, la consideración del aprendizaje como un proceso ciego y mecánico de asociación de estímulos, respuestas y recompensas; por otro, la creencia en el poder absoluto de los reforzadores siempre que se apliquen adecuadamente sobre unidades simples de conducta. Así, la educación y específicamente la enseñanza, se convierten en una tecnología que prepara las contingencias, las características del contexto y las peculiaridades de cada situación, y regula la administración de refuerzos. Desde la perspectiva didáctica, es el conductismo, específicamente el condicionamiento operante de Skinner, el que ha tenido una incidencia más significativa, por medio de los *programas de refuerzo*, la *enseñanza programada*, las *máquinas de enseñar*, los *programas de economía de fichas* en el aula, el *análisis de tareas* y los programas de *modificación de conductas*, entre muchos más, los que han centrado sus objetivos prácticos.

La aplicación conductual en el campo de la enseñanza de las matemáticas han sido varias, de las cuales Hernández (1994) recoge las siguientes:

a) La *enseñanza programada*, como una técnica instruccional que contemple la definición explícita de los objetivos del programa; presentación secuenciada de la información según la lógica de dificultad creciente, asociada al principio de complejidad acumulativa; participación del estudiante; razonamiento inmediato de la información; individualización (avance de cada estudiante a su propio ritmo); y registro de resultados.
b) Los programas computacionales por medio de la *instrucción asistida por computadora*, con una mayor interactividad que proporciona los prototipos del *software* educativo que se utilizan en los usos de los ordenadores para la educación.
c) Las técnicas y procedimientos de modificación de conducta en la educación formal y especial, dependiendo de las diversas poblaciones *normales* y *atípicas* en todos los niveles y modalidades educativas.

Las teorías asociacionistas del aprendizaje han propiciado la introducción de innovaciones en la didáctica para optimizar el proceso de "transmisión y adquisición" del conocimiento, basada en las aproximaciones conductistas (Moreno, 1995), proponiendo una serie de técnicas - máquinas de enseñanza, textos programados, programación por objetivos, entre otros -, bajo el supuesto de que el aprendizaje consiste en la modificación de ciertas conductas observables, provocada por un programa de enseñanza basado en el binomio estimulo-reforzamiento. Estas teorías no han logrado separarse de la idea de que el conocimiento es una especie de "paquete" que se transmite y se adquiere mejor si se perfeccionan los vehículos que lo transportan.

Desde esta aproximación, la conducta matemática se define como una clase funcional de respuestas que se relaciona con clases de estímulos que provienen de dimensiones del ambiente en forma de objetos y eventos, que son susceptibles de constituirse como referentes básicos de convenciones verbales simbólicas. Según García (1994), esta conducta se desarrolla a lo largo de un continuo que va desde el aprendizaje incipiente de la aritmética de un niño hasta la formación de un científico matemático, interviniendo procesos de discriminación condicional que a partir de la reiteración de los estímulos que intervienen, se perfecciona la generalización de conductas adquiridas, táctil, auditiva y visualmente.

Green (1992) describió "procesos continuos" en la adquisición de conductas aritméticas secuenciadas, donde se presenta la numerosidad de objetos y eventos como la propiedad básica para el origen de la conducta matemática.

A partir de este hecho adquirido se relaciona con ocho subcategorías de aprendizaje:
1) conocimiento del nombre de los números;
2) recitar la rutina de los números y en secuencia;
3) reconocimiento e identificación de los números;
4) respuesta en secuencias dobles de enumeración;
5) diferenciación de números sin respuesta sucesiva de la enumeración;
6) escribir números;
7) concepto de número;
8) aritmética de suma y resta.

Vargas (1995) evaluó las aportaciones que se han dado desde una aproximación conductual para el aprendizaje de las matemáticas, recalcando las ventajas para mejorar el desempeño y reducción de errores en las operaciones básicas de la aritmética, presentando algunos hallazgos al medir el porcentaje de problemas resueltos correctamente, identificar a los niños con deficiencias en habilidades matemáticas cuando el sujeto presenta una adecuada respuesta pero una ejecución lenta, o cuando se realizan las operaciones con buena velocidad pero con resultados inexactos.

Bajo estas premisas, Macotela, Bermúdez y Castañeda (1991) elaboraron el Inventario de Ejecución Académica (IDEA) en la cual integra una sección especifica de matemáticas, que tiene como objetivo medir la eficiencia en la respuesta matemática en niños que cursan los tres primeros años del nivel primaria con grados de dificultad creciente. El IDEA se encuentra diseñado con un carácter diagnóstico-prescriptivo y presenta alternativas para desarrollar programas correctivos.

3.2.- LA GESTALT

Una reacción contraria al estructuralismo de Wundt se desarrolló en Europa formulando métodos científicos más rigurosos que la introspección. Además representó un rechazo a la orientación mecánica y atomista del asociacionismo conductista, considerando que la conducta es una totalidad organizada. El todo, los fenómenos de aprendizaje y conducta, es algo más que la suma y yuxtaposición lineal de las partes.

A diferencia del asociacionismo, Mayer (1985) menciona que la gestalt consideró que los procesos y estructuras mentales eran objetos dignos de conocimiento para la psicología cognitiva.

Según Wertheimer (Resnick y Ford, op. cit.), la mente humana interpreta todas las sensaciones y experiencias de entrada según ciertos principios organizativos, de forma que, en lugar de recibir simplemente la información, se consigue algún tipo de comprensión, estudiando la organización de los procesos perceptivos humanos. El interés de los gestaltistas se centró en el problema de la naturaleza del pensamiento y de la resolución de problemas, creyendo que los procesos del pensamiento y de la percepción se regían por los mismos principios básicos, que la forma en que el perceptor registraba las ordenaciones de formas se podría parecer a la forma en que el pensador organizaba los pensamientos.

Según Pozo (1993), la gestalt consideraba que la resolución de problemas no se limita a un empleo más o menos mecánico de la experiencia pasada (pensamiento reproductivo), sino que supone la génesis de algo nuevo no mìmético de la información mnémica (pensamiento productivo). Ese "algo nuevo" es una *gestalten* o configuración perceptíva, alcanzada bruscamente o por un *insight*, o el aprendizaje por descubrimiento. El pensamiento y la resolución de problemas no pueden equivaler a la suma sencilla de las asociaciones de estÍmulo-respuesta, sino que deben suponer la percepción de problemas como complejos funcionales. Esta comprensión procede de una reorganización de los elementos de un problema, de forma que se ven en un nuevo contexto.

Tanto Wertheimer como otros, añadieron el fenómeno de *fijación* para interpretar las dificultades que experimentan los sujetos en la resolución de problemas, donde la experiencia previa no sólo no facilita, sino que obstruye su solución, por las características propias de los individuos de actuar bajo costumbres perceptuales incambiables.

Así, a diferencia de Thorndike (Resnick y Ford, op. cit.) que creía que la habilidad de cálculo era anterior a la comprensión, la gestalt creía que la comprensión servía de base al desarrollo de la habilidad de cálculo. Wertheimer enfocó su interés en el estado gráfico de la solución de problemas en términos visuales, sin considerar que la estructura matemática no siempre tiene un paralelismo en forma de estructura espacial, por lo que muchos de sus ejemplos pedagógicos procedan de la geometría, que se ocupan de conceptos más espaciales que algebraicos.

La riqueza de esta aproximación estriba en las grandes aportaciones a la práctica en el aula, en los procesos cognitivos de discernimiento y de búsqueda intencional de objetivos y metas, sin embargo en la actualidad los conceptos de *insight* y *fijación* han tenido un carácter meramente descriptivo por no quedar claro, según De Vega (1984), en la interpretación de los datos la naturaleza del proceso psíquico que interviene en el *insight* o reorganización súbita, y por otra parte el fenómeno de la *fijación* no obtiene una clara constatación empírica. Como dato importante, si a los sujetos se les proporcionan sugerencias relevantes para eliminar la *fijación*, el rendimiento no mejora sustancialmente.

En la actualidad se ha replanteado la idea inicial de la gestalt, principalmente en lo que respecta a la resolución de problemas de razonamiento lógico-matemático, promoviendo el aprendizaje de nuevas situaciones, como el caso de Greeno (cit. por Pozo, 1993), donde ha desarrollado la taxonomía de problemas de *transformación*, de *inducción* y de *ordenación*, dirigidos a la enseñanza de las matemáticas.

A partir de lo anterior, los objetivos instruccionales para la adquisición del conocimiento aritmético, comprenderían las estrategias utilizadas por el niño para solucionar problemas específicos, interviniendo un conocimiento autorregulatorio de sus propias capacidades en torno al número, que le permita al niño construir relaciones entre eventos y desarrollar con ello la construcción del conocimiento lógico-matemático.

3.3.- TEORÍAS DEL DESARROLLO COGNOSCITIVO

Desde diferentes ópticas se ha abordado la interpretación del desarrollo en la construcción del conocimiento en el individuo, que a diferencia de la gestalt, no sólo estudia el funcionamiento de la estructura interna del organismo como mediadora de los procesos de aprendizaje, sino su génesis, su estructura y su funcionamiento. Desde el trabajo que Piaget y la Escuela de Ginebra formaron en torno suyo, pretende dar explicación a qué es, cómo funciona y cómo se generan las instancias mediadoras.

Según Gómez Y cols. (1995), para Piaget el aspecto más importante de la psicología reside en la comprensión de los mecanismos del desarrollo de la inteligencia, donde el individuo recibe dos tipos de herencia intelectual: una *estructural* y por otro lado, una *funcional*. La primera parte de las estructuras biológicas que determinan al individuo en su relación con el medio ambiente, y nos lleva a percibir un mundo específicamente humano. Sin embargo, es gracias a la segunda que se van a producir distintas estructuras mentales, que parten de un nivel muy elemental hasta llegar a un estadio máximo. Este desarrollo se llama *génesis*.

La problemática del paradigma constructivista, según Hernández (1994), es fundamentalmente epistémica, donde las preguntas básicas que se realizan como objeto de estudio son tres: ¿cómo conocemos?, ¿cómo se traslada el sujeto de un estado de conocimientos inferior a otro de orden superior? y ¿cómo se originan las categorías básicas del pensamiento racional?. Dentro del esquema conceptual piagetiano, siempre se parte de la categoría de la acción, entendiéndose ésta como el principio fundamental de toda interacción recíproca del sujeto y el objeto de conocimiento en el proceso del conocimiento, en que el sujeto actúa para conocer al objeto. No puede haber una acción en que no esté involucrado algún tipo de organización interna que la origine y la regule.

Para lograr este desarrollo es necesario que el sujeto transite por diversas etapas madurativas bajo un orden de sucesión constante, y las estructuras que aparecen progresivamente son integrativas en tanto que incorporan a la precedente como estructura subordinada, de lo que surge el principio fundamental del paradigma piagetiano: el aprendizaje surge a partir del desarrollo del individuo.

A partir de este principio, la teoría piagetiana distingue tres tipos de conocimiento que el sujeto puede poseer: el físico, el lógico-matemático y el social (Kamii, 1986; Vergnaud, 1991).

El conocimiento físico es el que pertenece a los objetos del mundo natural, el que está incorporado por abstracción empírica en los objetos.

El conocimiento lógico-matemático es el que no existe en la realidad objetal, la fuente de este razonamiento está en el sujeto y éste la construye por abstracción reflexiva, derivándose de la coordinación de las acciones que realiza el sujeto con los objetos. El ejemplo más típico es el número, producto de una abstracción de la coordinación de acciones que el sujeto ha realizado.

El conocimiento social, tanto convencional y no convencional, están determinados por los formatos que interioriza el sujeto como producto de su formación moral.

Los tres tipos de conocimiento interactúan entre sí, y como lo expresa Kamii (1986), el lógico-matemático, que representa el armazón del sistema cognitivo dado en las estructuras y esquemas, juega un papel preponderante en tanto que sin él los conocimientos físico y social no se podrían incorporar o asimilar, y de acuerdo con esto el razonamiento lógico-matemático no puede ser enseñado.

En consecuencia con lo anterior, la práctica escolar de las matemáticas debe estar dirigido al desarrollo de sus habilidades y en los procesos internos inferidos estos del análisis de los errores cometidos por los niños. Como lo describen Puente y Poggioli (1989), no fue del interés de Piaget el aprendizaje del cálculo aritmético, las habilidades básicas de carácter cuantitativo ni el análisis cronométrico. Lo que centró su preocupación fue el estudio del concepto del número para determinar su origen y función como estructura pivote para la generación de las habilidades aritméticas y estudiar fundamentalmente los principios de conservación, correspondencia, seriación e inclusión de clase como determinantes del concepto del número.

De acuerdo a esto, en el contexto escolar según Gómez y cols. (op. cit.), el alumno construye su propio conocimiento a través de la actividad autoestructurante, y en consecuencia es necesario respetar y favorecer al máximo dicha actividad durante el proceso enseñanza-aprendizaje, en términos de propiciar en el alumno la autonomía para organizar y estructurar sus actuaciones. Según Kamii (1986), la atención del maestro debería centrarse prioritariamente en el modo de pensar del niño y no en su capacidad para escribir respuestas correctas. El desarrollo infantil se realiza a partir de su intuición y su lógica naturales, y los educadores deberían favorecer este desarrollo en vez de buscar la definición de objetivos, ajenos a su pensamiento.

La tarea del educador, según plantea Moreno (1995), consiste en diseñar y presentar en situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consiste en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes.

3.4.- EL PROCESAMIENTO HUMANO DE INFORMACIÓN

El paradigma del procesamiento de información dio a luz, según Pozo (1993), a finales de la década de los cincuenta, precisamente en 1956, con la aparición de trabajos de investigación en tres campos: la lingüística, la teoría de la información y la ciencia de los ordenadores. Sin embargo, existían antecedentes a partir de la Segunda Guerra Mundial que bajo el amparo de la revolución tecnológica, recuperaba para la psicología todos aquellos procesos mentales que habían sido relegados por las aproximaciones objetivistas, y existía la necesidad de utilizar técnicas psicológicas para un mejor entrenamiento en el trabajo militar, recurriendo al paradigma cognitivo.

A partir de los sesenta y hasta nuestros días, se ha desarrollado un considerable número de investigaciones e información teórica sobre las diversas facetas de la cognición, entendida como la adquisición, organización y uso del conocimiento inspirada en el uso del ordenador. Al respecto, De Vega (1984) concibe esta metáfora donde el ordenador es una instancia de los sistemas del procesamiento de información a la que también el hombre pertenece.

Castañeda y López (1992) consideran que en reacción a la insuficiencia mostrada por el "objetivismo" del conductismo descalificador de los procesos mentales, cobró gran importancia la investigación sobre las estructuras y el funcionamiento del sistema cognitivo humano, y gracias a su impacto, las prácticas educativas que enfatizaba el aprendizaje como un mero "cambio de conducta", fueron dejadas atrás por otra concepción, en la que el aprendizaje fue visto como un "proceso constructivo", en el que es el aprendiz el que construye de manera activa y controlada su propio conocimiento, utilizando procesos psicológicos "no observables" como el pensamiento y la memoria.

Para la psicología cognitiva los comportamientos no son regulados por el medio externo, sino más bien por las representaciones que el sujeto ha elaborado o construido concibiéndose al sujeto como un ente activo, cuyas acciones dependen en gran parte por dichas representaciones o procesos internos que él ha elaborado, como resultado de las relaciones previas con su entorno físico y social.

El sujeto organiza tales representaciones dentro de su sistema cognitivo general, entendiéndose esto como la adquisición dentro de la base de conocimientos de estructuras en la memoria semántica, memoria episódica, jerarquías de conocimiento, etc., con lo que se niega la noción de una simple acumulación de información (Hernández, 1994), explicándose cómo es que se realiza el procesamiento de la información, desde que ingresa al sistema cognitivo hasta que finalmente es utilizado para realizar una conducta en un contexto.

Como lo describen Castañeda y López (1989a), a partir de que un impulso nervioso es recibido, se registra por el sistema nervioso central, y de la información sensorial registrada, una pequeña fracción es mantenida para continuar con la construcción de la representación en la memoria a corto plazo, realizándose así una percepción selectiva. La información mantenida en esta memoria de trabajo puede ser codificada y guardada en la memoria de largo plazo. La codificación es también un proceso de transformación y gracias a él se integra la información ya conocida, que será almacenada en la memoria permanente para su uso posterior.

En este proceso, para recordar la información es necesario estimular sensorialmente a la persona, de manera preatentiva, luego haber recibido su atención suficiente para ser transferida de un registro sensorial a una memoria a corto plazo, para posteriormente ser transferida a la memoria de largo plazo. Como apuntan Castañeda y López (1989a), la recuperación de los datos almacenados de la memoria de largo plazo, es necesario operar el "generador de respuestas", salvo cuando el proceso ocurre de manera automática, la información es transferida de manera directa, desde la memoria de largo plazo hasta el generador de respuestas, sin pasar antes a la memoria de trabajo.

El objetivo central de la psicología, según este enfoque (Castañeda y López, 1989a) es el análisis de los procesos y no de conductas, ya que éstos son los que se afectan y modifican, y las conductas son más bien los productos de lo ya aprendido, es decir, en vez de ejecuciones interesa la comprensión, lo que ha permitido que el interés de estudio pase de *qué* es lo que se aprende a *cómo* es que se aprende.

En esta óptica, Glaser (cit. por Bermejo, 1990) pionero de la psicología instruccional, fundamenta que la investigación en este campo debe dirigirse a una teoría instruccional orientada hacia el individuo y depender del estado o situación cognitiva del alumno para explicar las diferencias individuales, y llegar a la generalización a través de la modelación de los rendimientos individuales.

Además plantea que la actual psicología instruccional presenta varias características importantes para su aplicación en la práctica escolar, en que Castañeda y López (1989a) destacan las siguientes:

a) La especificación de estados meta (objetivos instruccionales).

b) La especificación de un estado inicial (habilidades de aprendizaje y conocimientos previos).

c) Operaciones admisibles que transformen el estado inicial en un estado-meta, desatacándose las técnicas de enseñanza y materiales instruccionales.

d) La evaluación de los estados intermedios o submetas, monitoreados con pruebas de diagnóstico, para determinar su seguimiento.

A partir de los procesos cognitivos que intervienen en la adquisición de un conocimiento nuevo, Brown (cit. por Cárdenas y Yáñez, 1994) describe las habilidades que se requieren para interpretar, supervisar y llevar a cabo una evaluación de este conocimiento:

a) predecir las limitaciones en la capacidad de conocimiento;
b) estar consciente del repertorio estratégico que maneja habitualmente y su dominio apropiado de utilidad;
c) identificar y caracterizar el problema o tarea;
d) monitorear y supervisar las estrategias aplicadas;
e) evaluar sus resultados sobre el proceso.

En el aprendizaje de las matemáticas repercute una gran importancia y un interés por conocer las estrategias por las cuales se adquiere la información y cómo la utilizan en los campos complejos del conocimiento. Como lo mencionan Resnick y Ford (op. cit.), la relevancia de las matemáticas consiste en que es la asignatura que depende menos del procesamiento del lenguaje natural de entre todas las escolares, lo que repercute en varios campos de estudio:

1) Las habilidades de cálculo y comprensión matemática, centrándose en cómo influye la comprensión sobre la adquisición de rutinas de cálculo, y a la inversa.
2) La práctica en el aprendizaje, que comprende la automatización de los componentes de un procedimiento, de tal manera que exista más "espacio" en la memoria de trabajo para explorar el entorno de la tarea.
3) Representaciones mentales en el aprendizaje, en relación entre habilidad y comprensión, lo que implica a la representación mental de la cantidad, las operaciones entre la cantidad y los conceptos matemáticos relacionados en transcurso del aprendizaje y de la ejecución matemática.

4) La elaboración propia del conocimiento matemático, en que el nuevo conocimiento lo "elabora" en gran parte el estudiante a partir del conocimiento previo que tiene ya estructurado.
5) Las diferencias individuales, ya que los individuos responden de diferente manera en la ejecución de las tareas y las jerarquías del conocimiento no son idénticas entre los individuos.

Según Puente y Poggioli(op. cit.), el paradigma cognitivo del procesamiento humano de información centra el interés de su estudio en analizar procesos y conocimientos internos del estudiante para la interpretación de los problemas de carácter matemático. Entre algunos de los aspectos se encuentran:

1) La descripción del contexto en el cual se encuentra la tarea.
2) El análisis de todas las conductas asociadas con las respuestas para ejecutar la tarea.
3) Las mediciones repetidas de las ejecuciones.
4) Las inferencias de los mecanismos cognitivos que relacionan la información acerca de la tarea con su ejecución y su relación con los cambios experimentados.
5) La representación del problema.
6) Las estrategias y planes de resolución de un problema o tarea.

La metodología para analizar los procesos cognitivos ha sido variada y depende del problema específico que se pretenda abordar. Puente y Poggioli (op. cit.) resume los más utilizados por su confiabilidad: la *aritmética mental*, que basa su técnica en la medición cronométrica de las respuestas; *el análisis de protocolos*, referente a la producción de las secuencias de pasos de las acciones observables en tareas complejas; *estudios clínicos o de caso*, que intenta captar procesos y su desarrollo en estudios longitudinales; la *entrevista individual*, donde se presentan los problemas en forma individual a los sujetos y se infieren los procesos; y el *análisis de errores*, donde se diagnostican las dificultades, sobre todo en la resolución de problemas de tipo aritmético.

Una de las bases para el conocimiento del procesamiento de la información es el desarrollo de las ciencias del ordenador y su analogía con la mente humana. Los sistemas artificiales de cómputo suelen definirse como sistemas de <propósito general> (De Vega, 1984), es decir, que se puede programar para cualquier tipo de cómputo, al igual que el sistema nervioso humano tiene una gran versatilidad funcional, de modo que se puede categorizar también como un procesador de propósito general. De aquí parte el modelo del ordenador para plantear hipótesis psicológicas y elaborar interpretaciones teóricas. La mente y el ordenador son sistemas de procesamiento de propósito general. Ambos codifican, retienen y operan con símbolos y representaciones internas, con una analogía mente-ordenador funcional, no física. De lo anterior se desprende del uso de dos modelos computacionales: la Inteligencia Artificial (IA) y la Simulación (S), en que el primero establece el interés por la eficiencia de su modelo, y el segundo pretende mimetizar el comportamiento humano incluidos sus errores y sesgos.

En el campo educativo ha existido una amplia aplicación de estos dos modelos con la configuración de la psicología instruccional, cuyos objetivos se centran en lograr el desarrollo de habilidades de aprendizaje y no sólo la enseñanza de conocimientos. Según Bruner (1991), el estudiante debe desarrollar una serie de habilidades intelectuales, estrategias, etc., para aplicar los conocimientos adquiridos frente a situaciones nuevas de cualquier índole, desarrolle su potencialidad cognitiva y se convierta en un aprendiz estratégico que sepa cómo aprender y solucionar problemas. La escuela debe centrar sus objetivos y metas, según lo anterior, en formar alumnos con métodos en que su finalidad esté encaminada *a aprender a aprender* y/o a *enseñar a pensar*, entendiendo al alumno como un sujeto activo procesador de información y con conocimiento efectivo de habilidades de estrategias para aprender a solucionar problemas.

CAPÍTULO IV

ELEMENTOS INSTRUCCIONALES QUE INTERVIENEN EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

La instrucción tiene por finalidad propiciar el desarrollo de habilidades y destrezas y favorecer la adquisición de conocimiento sin que el educando se vea en la necesidad de pasar por las mismas situaciones que originalmente produjeron tales conocimientos y habilidades, es decir, de manera más directa y económica.

Según Castañeda y Acuña (1996) los diseños instruccionales deben ser capaces de enseñar el conocimiento organizado y procurar que el alumno desarrolle capacidades que le permitan de modo eficiente tener acceso al conocimiento útil y productivo. Asimismo, tales diseños de instrucción significan haber identificado previamente la información pertinente para que el alumno construya conocimientos integrados, lo que implica la necesidad de contar con sistemas de análisis y organización del conocimiento que den por resultado estructuras aprehensibles.

Según estos autores, en los últimos años el interés se ha dirigido hacia el desarrollo de procesos cognitivos para la adquisición y representación del conocimiento, tales como el almacenamiento, codificación, representación y elaboración de la información; cómo infiere el estudiante a partir de ella, cómo la transforma en conocimiento y cómo la emplea para la solución de problemas y la generación de nuevo conocimiento. Se ha priorizado el brindar un ambiente educativo adecuado al desarrollo de las variables pertinentes para que el alumno despliegue su autonomía, respetando su modo particular de procesamiento de información, y ofrecer conocimientos estructurados afines a sus modelos mentales.

Para apoyar estos objetivos, Gagné (1991) enfatiza la enseñanza de estrategias, definiendo éstas como secuencias de operaciones cognitivas dirigidas hacia una meta que guían al estudiante desde la comprensión de una pregunta o unas instrucciones hasta la emisión de una respuesta o la realización de un trabajo requerido. Estas se efectúan mentalmente y se pueden describir las diferencias cognitivas entre las estrategias utilizadas por las personas con mayor y menor destreza de actuación.

4.1.- ESTRATEGIAS QUE APOYAN EL APRENDIZAJE

Según el modelo de procesamiento de la información propuesto por Gagné (op. cit.), los fenómenos mentales se describen como transformaciones de la información de entrada (input) a la información de salida (output), la cual se recibe a través de los *receptores* en forma de algún tipo de energía física, enviando señales en forma de impulsos electroquímicos al cerebro. La adquisición va al *registro sensorial* del sistema nervioso central, lo que una pequeña fracción de esta representación permanece en la *memoria a corto plazo* (MCP), también denominada *memoria operativa* (MO), mientras que el resto desaparece del sistema, proceso denominado como *percepción selectiva*. La MO es el "lugar", en términos funcionales, donde se efectúan las operaciones mentales.

La información que se encuentra en la MO se puede codificar, la que se almacena en la *memoria a largo plazo* (MLP) para ser usada posteriormente, y se integra de diversas maneras con la información ya conocida. Una vez que la información está almacenada en la MLP, para que se pueda utilizar de nuevo es necesario recuperarla, formando la base sobre la que opera el proceso de *generación de respuestas*. En el pensamiento consciente, aparentemente la información va desde la MLP a la MCP y de ahí al *generador de respuestas*, que organiza las respuestas y guía a los *efectores*, denominados así los músculos y glándulas que ejecutan una acción.

Se consideran <estrategias de aprendizaje>, según Castañeda y López (1989b), aquellas acciones que un estudiante realiza para aprender, y en la cual utiliza tanto su estilo cognoscitivo particular como sus habilidades representacionales, tanto de cálculo como de lecto-escritura, las selectivas y las de control ejecutivo sobre su persona, así como la utilización de sus conocimientos y sus presuposiciones sobre el mundo en general.

Según Weinstein (1989) las estrategias de aprendizaje son consideradas como cualquier comportamiento o pensamiento que facilite de tal manera la codificación, que mejoren la integración y recuperación del conocimiento, lo que representa la constitución de planes organizados de acción, diseñados para alcanzar una meta.

Considera que existen dos categorías de estrategias de aprendizaje que dependen de las cualidades del estudiante: las estrategias para tareas básicas y para tareas complejas, involucrándose aquí la diferencia entre expertos y novatos.

La adquisición del conocimiento básico es necesario para crear una base de datos más unificada, y constituye el primer paso en que no es posible comprometerse con formas de procesamiento de información más profundas y tareas más complejas de aprendizaje, hasta que adquieran esta base de conocimientos.

La *adquisición* de nuevo conocimiento declarativo se da cuando se activa un conocimiento previo pertinente, ocasionando su almacenamiento en la red proposicional que tengan relación entre sí.

La *elaboración* se refiere al proceso mediante el cual se generan ideas nuevas relacionadas con las ideas que se reciben de fuentes externas al individuo, lo cual añade información nueva a la ya existente en la MLP. Anderson (cit. por Gagné, 1991) detectó que la elaboración facilita el proceso de recuperación de dos formas: primero, proporciona vías alternas de recuperación de información existente. Segundo, proporciona información adicional a partir de la cual se pueden construir respuestas novedosas de la ya existente.

La importancia del proceso de elaboración en el aprendizaje es que en la medida que exista un mejor proceso de elaboración tienen un mejor éxito escolar, en virtud de que conectan entre sí las partes de la información que se necesita recordar.

Las estrategias de elaboración involucran el aumento de algún tipo de construcción simbólica a lo que uno está tratando de aprender de manera que sea más significativo, utilizando la imaginería mental para ayudar a recordar la secuencia de acción de una obra. A esto se le considera un prerrequisito importante para el aprendizaje significativo, en contraposición a la codificación superficial para el recuerdo. Un proceso mas complejo incluye la creación de analogías, parafraseo y la utilización de conocimientos previos y experiencias, donde la meta principal es hacer que el alumno esté activamente involucrado en la construcción de puentes entre lo que ya conoce y lo que está tratando de conocer.

Según De Vega (1984), dentro de un determinado nivel de procesamiento el recuerdo es variable en función del grado de elaboración, es decir, de la riqueza o extensión de la codificación de la información en la MLP, lo que sugiere la existencia de un componente cuantitativo, en este caso la elaboración, que afecta la persistencia del trazo de memoria.

Según este punto de vista, junto con la codificación de la información se generan estrategias vinculadas a la recuperación de ésta, que representa un papel funcional, y sus contenidos se ven afectados por parámetros situacionales o contextuales.

La recuperación del conocimiento se da cuando se activa un área específica de la red proposicional propagándose hacia proposiciones relacionadas con el conocimiento deseado.

En relación a lo anterior, Tulving (cit. por De Vega,1984) considera que la recuperación de la información se establece en dos parámetros: la memoria <episódica> y la memoria <semántica>. La primera almacena y recupera eventos organizados en pautas espaciales y temporales, y tienen un carácter autobiográfico que no se generalizan a otros eventos. La segunda es un gran almacén de conocimientos organizados y contiene reglas conceptuales que integran una mayor capacidad de conocimientos, lo que permite una mejor posición para utilizarlo.

La organización es el proceso de dividir un conjunto de información en subconjuntos indicando la relación entre los subconjuntos, proceso espontáneo en el pensamiento que aumenta la facilidad para recordar una información. A partir del proceso escolarizado, los alumnos utilizan una mejor organización para mejorar la memoria. Es así como el alumno de manera automatizada logra agrupar y clasificar un problema más eficiente, como sería la elección de una operación aritmética y su procedimiento a ejecutar (Gagné, op. cit.).

La importancia de lo anterior estriba en que dependiendo de la organización del conocimiento se determina a qué parte de los problemas atiende el estudiante, y por tanto, cómo los soluciona.

López, Castañeda y Gómez (1989) distinguen cuatro categorías de estrategias de aprendizaje, que por medio del "Inventario de Habilidades de Estudio" (IHE) se puede detectar la capacidad de los estudiantes en cuanto a sus habilidades de estudio, incluido el conocimiento matemático. Estas son:

1) *Estrategias de adquisición* de la información, en que intervienen procesos que guían el aprendizaje para ser incluida en la MLP.
2) *Estrategias para el manejo de los recursos de la memoria*, donde se preactivan, reactivan y mantienen activada la memoria para su operación necesaria.
3) *Estrategias metacognoscitivas*, que de manera autorreguladora establece las metas del aprendizaje, la evaluación del grado que se ha logrado y la modificación de las estrategias iniciales, permitiendo al alumno que evalúe, planifique y regule lo que aprende, cómo lo aprende y para qué lo aprende.
4) *Estrategias de organización y lectura creativa*, que permite transformar la información en una estructura que de manera novedosa y original integra en un todo coherente y significativo la búsqueda de la solución a un problema nuevo.

Estas estrategias permiten clasificar al alumno en tres categorías: el autosuficiente, el instruccional y el insuficiente, que para el caso del conocimiento matemático y geométrico detectó distintos estilos de aprendizaje, tanto para los hombres como para las mujeres, lo que implica recurrir a diferentes tipos de necesidades instruccionales para el desarrollo de habilidades.

Donald (cit. por Castañeda y Acuña, 1996) detectó que la estructura del conocimiento que posee un individuo se incluye en un *esquema*, que se define como una estructura de datos que representa conceptos genéricos almacenados en memoria, y cumple dos clases de tareas: localizar o recuperar información y resolver problemas.

Según Castañeda y López (1989a) el esquema constituye un patrón o guía para entender, al dirigir la búsqueda de información específica, lo que ordenará las relaciones y secuencias de eventos regulares que guiará el recuerdo. Estos describen redes de conceptos relacionados entre sí que ayudan a comprender y sumar nueva información, que dependiendo de su buen o mal almacenamiento, determinará la calidad de acceso y recuperación de ésta.

Siguiendo la propuesta teórica de Gagné, Castañeda y Acuña (1996) pueden advertirse los siguientes tipos de estructura:

a) El aprendizaje por jerarquía de relaciones que comprende lo que el alumno debe saber para aprender algo nuevo, es decir, debe saber *x* para poder aprender *y*.
b) La jerarquía procedural que contempla dos relaciones: de requisito o relaciones de secuencia (hay que hacer *x* antes que *y*), y de decisión (debe hacerse *x* en vez de *y* o *z*).
c) La estructura taxonómica que establece una relación de pertenencia a un concepto mayor (*x* es una variedad de *y*) o de subordinación (*x* es parte de *y*).
d) La estructura teórica o modelo que muestran las relaciones de encadenamiento entre conceptos, como suelen ser las fórmulas matemáticas. Estas comprenden la finalidad de propiciar comprensión significativa de las causas, el qué, porqué y cómo funciona, mientras que lo procedural explica cómo hacer algo.

Estos tipos de estructuras constituyen en conjunto lo que se *denomina estructuras descriptivas,* basadas en conocimiento declarativo, y estructuras orientadas hacia la acción, basadas en conocimiento procedural.

El papel de la memorización representa un punto nodal para el aprendizaje de las matemáticas. Son útiles recursos para la automatización de los procedimientos de ejecución. La repetición tanto escrita como oral desempeñan un amplio papel para la comprensión, como es el caso de las *tablas* y su constante repetición. Estas técnicas, según Orton (1990), no pueden considerarse incorrectas si logran su objetivo, pero por sí solas no es el único modo de promover su aprendizaje, en tanto existen relaciones y propiedades dentro de las tablas que les proporcionan un componente conceptual, y es necesario antes de que el niño pueda emplear una secuencia estándar de numerales, y los niños se aferran a él porque encuentran un orden estable en su ejecución.

En el caso del conteo, como uno de los primeros pasos en la adquisición del conocimiento matemático, durante la fase de adquisición se realiza el aprendizaje de la secuencia convencional, en cambio en la fase de elaboración los numerales establecen entre ellos nuevas relaciones y se constituyen como elementos sobre los que operan las estrategias de resolución de problemas. En la fase de elaboración, los vínculos entre los elementos de la secuencia se fortalecen dividiéndose en cinco niveles (Greeno y Riley, 1988):

1) el nivel de hilera, donde no son objeto de reflexión y solo se emiten ordenadamente.
2) nivel de cadena irrompible, donde los numerales se convierten en objeto de reflexión.
3) nivel de cadena fragmentable, en que la secuencia puede emitirse comenzando a partir de un punto cualquiera sin la necesidad de comenzar con el primer elemento.
4) nivel de cadena numerable, cuando se alcanza un mayor grado de abstracción.
5) nivel de cadena bidireccional, que culmina el proceso de elaboración ya que los numerales se emiten en dirección creciente o decreciente.

A partir de las estrategias del conteo los niños perfeccionan sus esquemas de numeración concerniente a los procedimientos que utilizan para solucionar las tareas aditivas, es decir, las estrategias. Estas son variadas y nunca únicas, en las que Carpenter (cit. por Moreno, 1995) describe tres principales que aparecen incluso antes que el aprendizaje escolarizado:

1) *Las estrategias de modelamiento* directo, donde se representan dos conjuntos mediante objetos fisicos o los dedos y recontar después estos objetos en función de una operación planteada.
2) *Estrategias de conteo sin modelos*, similar a la anterior pero con la diferencia de que el niño prescinde de la utilización de objetos o sus dedos para representar los términos de la suma. Fuson (op. cit.) detectó que cuando el conteo se produce mentalmente, se constituye el objeto físico usando ciertos ritmos corporales como el movimiento de cabeza.
3) *Estrategias de hechos numéricos*, fundadas en la memorización y en reglas como resultado del entrenamiento que generalmente se da en la escuela. Esto surge porque permite eliminar la necesidad de aprender y almacenar asociaciones numéricas individuales que resulta cognitivamente más económico que basarse sólo en una red de hechos numéricos individuales. Las reglas se refieren a procedimientos en los que el niño compone y descompone los números para hallar la suma total.

La elección del tipo de estrategias es un factor que, según Fuson (op. cit.) depende de la necesidad de reducir la carga en la memoria de trabajo, lo que se observa en la resta, considerado un proceso más complejo que la adición, apoyándose en el "conteo con los dedos" en un procedimiento de reversibilidad, y la "recuperación" sin la utilización de objetos físicos, sino por el recuerdo.

4.2.- ESTRATEGIAS QUE DESARROLLAN EL APRENDIZAJE

En la actualidad existe una tendencia que se orienta hacia la construcción de modelos que representan las diferencias entre solucionadores de problemas eficientes y deficientes, donde se compara el comportamiento de expertos y novatos en relación a la forma de cómo se representan los problemas, en aspectos vinculados con la percepción de la estructura del problema, la organización de los elementos dados y supuestos, el nivel lingüístico, el reconocimiento de patrones en la memoria y la capacidad de transferencia hacia situaciones nuevas.

De acuerdo con esto, Castañeda y López (1989a), consideran que la enseñanza de las habilidades cognoscitivas requieren una mayor atención, puesto que los fracasos consistentes en el aprendizaje tanto del cálculo como de la lecto-escritura básicamente, han centrado el interés por entender cómo es que se desarrollan para poder enseñarlas.

Las "estrategias de aprendizaje" son equiparadas con la elección de un *método para resolver una tarea*, consideradas como las partes flexibles del sistema cognoscitivo, mismas que modifican a los componentes fijos del sistema como es la capacidad de la memoria de trabajo, por ejemplo. Para esto es necesario cubrir los requisitos relacionados por la autorregulación, es decir, la *metacognición*, entendiéndose como el conocimiento de la persona acerca de sus propios procesos cognoscitivos, los procesos que controlan la manera como organizamos y recuperamos lo que sabemos, la manera como administramos nuestra búsqueda o nuestros recursos para aprender algo nuevo, a diferencia de algo que tenga relación con lo que ya sabemos (Castañeda y Acuña,1996). Son cuatro formas generales de la metacognición:

a) La *predicción*, con base a lo que ya sabemos,
b) La *planeación* para resolver tareas que implican organizaciones novedosas de los elementos que definen la situación.
c) La *supervisión* del avance y resultados obtenidos en cada etapa.
d) El *monitoreo* de la manera como aplicamos los recursos disponibles para lograr ciertas metas.

A estas cuatro formas generales es necesario complementar con el tipo de procesos que la educación debe promover, en las cuales están la creatividad, mayor eficiencia en el uso del pensamiento crítico ante las situaciones que requieren modificarse, sobre la manera de hacerlo y mayor eficiencia en solución de problemas.

Gagné (1991) plantea que si bien no se puede enseñar cómo pensar, existe una serie de elementos de enseñanza, identificables, que contribuyen en forma indirecta a ello. Considera que existe una clase de capacidad en los individuos que permite el control del propio pensamiento y del aprendizaje, que es la estrategia cognoscitiva, donde su función es controlar procesos de atención, percepción, codificación y recuperación de material aprendido. Establece además, la necesidad de una estrategia que permita a la persona pasar de un tipo de estrategia cognoscitiva a otro, o seleccionar entre éstos el mejor, es decir, una estrategia ejecutiva, desarrollable sólo mediante experiencia relativa a una variedad de situaciones, y no por vía directa de la enseñanza.

De igual forma varios autores (Castañeda y López, 1989a; Gagné,1991) coinciden en el modelo que propone Anderson para la clasificación del conocimiento que se da en dos etapas: el conocimiento *declarativo* y el conocimiento *procedural*. Esta dualidad corresponde a la distinción entre *saber qué* y *saber cómo* hacer las cosas.

4.2.1.- CONOCIMIENTO DECLARATIVO

Para De Vega (1984) este tipo de conocimiento se considera descriptivo y factual referido a objetos y eventos, es cuestión de todo o nada porque se conoce un contenido o no se conoce, y se adquiere repentinamente al poderse comunicar verbalmente con facilidad. Este tipo de conocimiento se puede adquirir por simple exposición organizada de material de aprendizaje como los textos, clases teóricas, etc.

El conocimiento declarativo es considerado como una gran red de proposiciones relacionadas entre sí en que se encuentran todos los sucesos personales que se experimentan constantemente. Todo conocimiento declarativo implica su representación mediante redes proposicionales almacenadas en la MLP, lo cual consiste en unir el conocimiento nuevo al conocimiento previo en las redes proposicionales. Este tipo de proposiciones nuevas se denominan elaboraciones dado que añaden información a la información de entrada (Gagné, op. cit.).

Según Castañeda y Acuña (op. cit.) el conocimiento declarativo se subdivide en *conocimiento conceptual* y *conocimiento causal*. El primero se refiere al conocimiento acerca de hechos, clases y conceptos de relación y se representa en la memoria mediante redes proposicionales o en esquemas, los que dependen del reconocimiento de rasgos según el tipo de problema que se enfrente. El conocimiento causal se refiere a cadenas de eventos o cadenas causales y su representación se da por modelos de procesos cuantitativos.

De acuerdo a lo anterior, la frecuente solución de problemas sobre un dominio particular, desarrolla conocimiento especifico de ese dominio y produce una mayor eficiencia en el uso de habilidades específicas, por lo que estas habilidades se *proceduralizan*. Como condición para el proceso cognitivo que se establece entre conocimiento y habilidad, el conocimiento declarativo es requisito para que se dé el conocimiento procedural a partir de la constante ejecución de tareas.

La habilidad para ejecutar tareas matemáticas se debe frecuentemente a cómo organiza el individuo su conocimiento. De aquí surge un problema de comprensión aritmética cuando no se adquieren redes proposicionales que integren el conocimiento en su conjunto, por lo que las fallas se deben a una falta de conocimiento previo necesario para resolver problemas. Cabe mencionar que el estudio sobre la relación entre la presentación del problema y la organización del conocimiento no se ha profundizado, por lo que Gagné (1991) señala que deben estudiarse los mecanismos que operan entre ambos durante la resolución de problemas para mejorar esta capacidad.

4.2.2.- CONOCIMIENTO PROCEDURAL

Esta segunda etapa se constituye según Castañeda y López (1989a), cuando los procedimientos en la ejecución de la habilidad aprendida se codifica en producciones que desarrollan el refinamiento de la habilidad cognoscitiva adquirida.

Este proceso tiene que ver con las destrezas ejecutivas dirigidas a la acción y se pueden poseer parcialmente, de forma gradual por la práctica y es difícil verbalizar. Los conocimientos procedimentales se adquieren mediante la práctica reiterada del propio sujeto y se ajustan a reglas o producciones (De Vega, 1984).

Según Anderson (cit. por Castañeda y López,1989a) el conocimiento procedural fundamenta su dominio en el principio *si - entonces*, donde la parte correspondiente a *si* constituye una serie de condiciones que la situación debe llenar, y la correspondiente a *entonces* se refiere a las acciones que se realizarán si las condiciones se cumplen y si esas habilidades cubren una eficiente aplicación en los grados de dificultad creciente, se pasará de la condición de novato a experto. Los objetivos de la instrucción se centrarán en base al conocimiento actual de las características de la ejecución competente en una tarea, considerando varios aspectos como el conocimiento automatizado, funcional y procedural, característico de una habilidad cognoscitiva bien desarrollada; la utilización eficiente de estrategias de control autorregulatorio que propicien la comprensión, y la organización y estructuración del conocimiento para aportar explicaciones y solucionar problemas.

Para una eficiente proceduralización del conocimiento es requisito saber cómo clasificar y tener reglas para el manejo de la información. Para esto, Anderson

(1982) detectó dos tipos de procedimientos: el de *reconocimiento de patrones* y los de *secuencias de acción.*

El primero se refiere a la generalización y discriminación de la información adquirida por el individuo que en base a su experiencia puede determinar cómo llegar a la acción. Los patrones son un prerrequisito para la organización de las acciones. Por esta condición adquirida un individuo sabe proceder para determinar que una simbología presentada es una adición o sustracción, por ejemplo.

Los procedimientos de secuencias de acción según Anderson (op. cit.), se caracterizan por ser un proceso lento y con errores constantes que se cometen. Se aprenden con la representación de una secuencia de acciones de forma declarativa (proposicional) seguida del desarrollo de una representación procedimental. Esto se observa en la ejecución cada vez más refinada en los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas que con la ejecución de diversos ensayos los errores se evitan automáticamente.

La procedimentalización elimina la activación del conocimiento declarativo, por lo que requiere una amplia capacidad en la memoria operativa y la adquisición del conocimiento previo.

La adquisición de velocidad y precisión en el cálculo aritmético es básica para resolver problemas de la vida diaria, por lo que las destrezas almacenadas de forma declarativa requieren desarrollarse procedimentalmente. El desarrollo de estrategias en la solución de problemas permite generar las condiciones cognitivas para esto.

4.2.3.- PROCESOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La solución de problemas depende de problemas generales aplicables a una gama de situaciones diferentes y centra su interés en la pregunta de en qué consiste que un problema sea difícil o fácil de resolver para unas u otras personas, es decir, las características del problema y la forma en que intervienen los procesos cognitivos del sujeto. En este aspecto intervienen los estudios comparativos de la ejecución de tareas en los considerados expertos y novatos.

Se entiende como *proceso de solución* a la utilización de reglas de transformación (instrucciones) y la derivación de nueva información para la modificación de la estructura de un problema. Un *problema* es aquella situación formada por datos, condiciones e incógnitas que guardan relaciones entre sí, dando lugar a una estructura o contexto (Acuña y Batllori, 1988). Con relación a lo anterior, Gagné (1991) concibe que existe un problema cuando una persona tiene una meta y todavía no ha identificado una forma de alcanzarla, por lo que el objetivo instruccional de la escuela es que los alumnos transfieran lo que han aprendido a los problemas con que se enfrentan a situaciones generalizadas fuera de ésta.

En el aprendizaje de las matemáticas existen estrategias particulares sobre este dominio para la solución de problemas. Así lo observó Kintsch (Puente y Poggioli, op. cit.) al descubrir tres posibles fuentes de error al resolver problemas aritméticos sencillos presentados verbalmente:

1) mal uso o desconocimiento de estrategias aritméticas, falsas concepciones y fracaso en el procedimiento del conteo.
2) comprensión equivocada del problema, principalmente por factores lingüísticos.
3) sobrecarga de elementos en la MCP.

Glaser (1990) identificó que los sujetos que poseen estructuras de conocimiento amplias, muestran mejor ejecución de codificación y de memoria que aquellos con estructuras mas pobres, debido a que cuentan con mayor cantidad de elementos de anclaje para nuevos conceptos. Además, uno de los componentes principales de la pericia es el acceso rápido a conocimiento procedural o conceptual que tengan, y su uso eficiente.

En relación a la pericia, Glaser (op. cit.) ha observado que la experiencia de los expertos les permite desarrollar habilidades ejecutivas para monitorear su propia ejecución. Los expertos revisan rápidamente su trabajo, juzgan con precisión la dificultad, distribuyen su tiempo, evalúan el progreso logrado y predicen el resultado de sus actividades. El conocimiento estructurado permite las capacidades de inferencia, lo que sirve de apoyo en la elaboración de nueva información y mejora el recuerdo.

De acuerdo con lo anterior, una característica del experto es la existencia de grandes estructuras de conocimiento de dominios específicos, donde a diferencia del novato, utiliza mayor cantidad de conocimiento procedural, creando esquemas de acciones en condiciones específicas de aplicabilidad.

Según De Vega (1984) existen tres fases en la solución de un problema: la *preparación* que supone un análisis e interpretación de los datos disponibles inicialmente: la *producción*, que comprende operaciones como la recuperación de información de MLP, la transformación en MCP, aplicando diferentes estrategias con la utilización de procedimientos heurísticos o cómputos algorítmicos, entre muchos; la fase de *enjuiciamiento* evalúa la solución generada, contrastándola en el criterio de solución.

Al respecto, Castañeda (1995) considera que los procesos de aprendizaje y de pensamiento requeridos en las actividades del salón de clases y en las de estudio independiente, varían principalmente por dos causas fundamentales: los *algorítmicos*, en los que basta que el alumno se ajuste al modelo establecido, y los *heurísticos*, donde el alumno debe ajustar a cada paso la solución al problema hasta conseguir la meta. Cada proceso requiere formas diferentes de operar.

La solución de problemas se concibe como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva, y su aplicación en las matemáticas consiste en que aprenda a operar en este campo. Así, Gagné (op. cit.) considera que la solución de problemas puede definirse como la verdadera esencia de las matemáticas, ya que tras haber resuelto un problema se ha aprendido, y si bien puede que sólo se haya aprendido a resolver ese problema, es probable que se haya aprendido a solucionar una variedad de problemas semejantes.

Según Castañeda y Acuña (1996) cada área del conocimiento representa el repertorio social sistematizado y registrado de reglas y procedimientos útiles para problemas particulares para esa área, como sería el caso de la aritmética y la geometría en los problemas de tipo algorítmico, lo que ha arrojado resultados negativos respecto a la posibilidad de transferir este tipo de procedimientos. Esto conlleva a que los diseños instruccionales deben integrar los conocimientos propios de la materia tomando en cuenta el contexto en que se aplica.

Cárdenas y Yáñez (1994) describieron algunas estrategias para la solución de problemas aritméticos, consistentes en inducir a los niños a definir metas, descubrir problemas, explorar y evaluar alternativas para solucionar problemas, con el objetivo de autorregular sus propias habilidades matemáticas. Estas comprendían:

a) El análisis de las metas y demandas de un problema.
b) Planeación de las estrategias específicas para la solución, como pueden ser las estrategias del conteo.
c) Aplicación de estrategias específicas como las operaciones de suma y resta.
d) Estas deben ser supervisadas por un adulto para corregir los errores.
e) Es necesario evaluar todo el proceso para llegar a la solución del problema.
f)Aplicar las habilidades adquiridas a nuevos problemas para su generalización.

Estas habilidades dadas en la adquisición de estrategias para la solución de problemas aritméticos, son desarrolladas a partir de los procesos autorregulatorios que se requieren para que los individuos ejerzan control sobre sus procesos psicológicos.

Campione y Brown (cit. por Cárdenas y Yáñez, 1994) describieron cuatro pasos para lograr la autorregulación:

a) definir un problema o meta,
b) plantear estrategias adecuadas para lograr la meta definida,
c) aplicar las estrategias mientras se registra y evalúa su eficacia, y
d) tomar medidas correctivas cuando surjan problemas.

Lo anterior refiere que en la solución de problemas el aprendizaje del niño involucra la transferencia del control ejecutivo del experto hacia éste bajo su supervisión, lo que determinaría la autosuficiencia cognitiva sobre los procesos de adquisición de un conocimiento específico.

Además, los problemas que se presentan a los niños señalan la dificultad del uso del lenguaje matemático y la instrucción utilizada. Ávila (1994) detectó que variando la posición del "referente" en un problema determinado, la dificultad para solucionar este procedimiento cambia, como es en el siguiente caso:

> En el recreo se vendieron 410 tacos y quedan 200 tacos, ¿cuántos tacos había al iniciar la venta?
>
> En la cooperativa había 300 tortas, después trajeron 250 tortas, ¿cuántas tortas hay ahora en la cooperativa?

Ambos problemas se pueden resolver mediante sumas con dificultad muy similar, sin embargo un mayor número de niños pretendió restar en la primera pregunta, concibiendo una inversión del planteamiento del problema. Esto puede explicar que la solución de un problema es una combinación de comprensión y búsqueda. Si la persona comprende la estructura subyacente a una tarea, a partir de la descripción del problema, o de la información que ha adquirido por experiencia con problemas semejantes, aplicará estrategias específicas para esa tarea, de lo contrario usará estrategias generales.

Los procesos algorítmicos existen sólo para ciertas clases de problemas en que se espera que el alumno aprenda los procedimientos y fórmulas para cada problema y que sepa reconocer cuándo deben aplicarse sin esperar que proponga otros procedimientos, puesto que éstos se aplican de manera automática. Este tipo de conocimiento estratégico no es inválido, pues su importancia radica en desarrollar habilidades cognitivas que en la aritmética y geometría no son modificables por ser estructuras ya dadas universalmente. Sin embargo un aprendizaje orientado al razonamiento algorítmico tiende a la excesiva memorización dando paso al olvido y a una retención pobre, o que se pierda en la búsqueda de criterios para elegir los procedimientos adecuados a cada situación.

En contraposición (Acuña, 1991), los procesos heurísticos suponen la necesidad de recurrir a procedimientos que requieren de estrategias de exploración que guían el comportamiento sin garantizar que se llegará a una solución por no contar con procedimientos secuenciales, formular hipótesis, proceder por ensayo y error e identificar correctamente un problema.

Los procesos heurísticos fomentan en el alumno la necesidad de desarrollar capacidades autorregulatorias que mejoran las habilidades para una mayor comprensión del conocimiento matemático y comprender el sentido de esta materia en situaciones fuera del aula. La importancia de permitir a los alumnos que construyan sus propios caminos de razonamiento y sus propias estrategias de resolución tiene la importancia de que puedan explicitar el porqué de esa resolución. El proceso de resolución es un medio para desarrollar el razonamiento matemático y una actitud positiva hacia éstas, al mismo tiempo que se ponen en juego los conocimientos que interesa adquirir.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

El estudio de los procesos psicológicos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas es un campo que la investigación psicológica ha retomado en las últimas décadas. A partir de los estudios realizados por Thorndike se sentaron las bases para investigar a fondo esta área del conocimiento, sin embargo durante muchos años éstos fueron olvidados por considerar que el estudio de leyes generales de la psicología de manera automática se podrían trasladar a los diferentes campos del aprendizaje.

Las necesidades que se presentan en la actualidad tendientes a mejorar la calidad educativa y los avances en la investigación psicológica, han llegado a la conclusión de que es necesario entender las formas de pensamiento en procesos específicos en el aprendizaje escolar. En la actualidad ya no se considera como única forma de enseñanza la ejecución mecánica de operaciones y reglas de cálculo para considerar que se tiene un conocimiento acertado de las matemáticas. Actualmente la investigación de este tema ha tomado un giro importante con la incorporación de nuevos conceptos para explicar su conocimiento básico. Está surgiendo una psicología propia que explique el pensamiento matemático, centrada en los procesos que intervienen cognitivamente para su adquisición y el desarrollo de habilidades. Actualmemte en la psicología no sólo se trata de explicar procesos generales del aprendizaje, sino cómo se da este aprendizaje en contextos específicos.

La investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas se ha dirigido desde cuatro aproximaciones distintas como las más representativas en la actualidad. Sus objetivos, si bien disímbolos, pueden confluir en el perfeccionamiento de su estudio en la escuela. El asociacionismo, con sus limitaciones en el objeto de estudio que le caracteriza, centra su interés en la corrección del error a partir de las prácticas perfeccionadoras en lo que denominan la conducta matemática, dirigido a una respuesta rápida y correcta.

La gestalt orienta sus estudios para generar una comprensión autorregulatoria de sus propias capacidades por medio de la resolución de problemas. Su interés central es el aprendizaje de las matemáticas por medio de la percepción espacial, es decir la geometría entendida como la matematización del espacio, para lo cual su aprendizaje se facilita con la constante ejercitación de problemas. El constructivismo refiere su estudio a la construcción de conceptos que por sí mismo desarrolla el sujeto en su relación con los objetos de acuerdo con las etapas vitales del niño. Los programas de Dienes Zoltan y de High Scope son sus máximos exponentes en esta materia.

La psicología cognitiva profundiza el estudio del pensamiento estratégico que promueven las habilidades del estudiante a partir de una visión reconstructiva del conocimiento, promotor de la resolución de problemas. Los estudios sobre el análisis del error en sus tres vertientes, los relacionados con el algoritmo, con los procesos de atención y con la organización de la información, influyen en descubrir los problemas que intervienen para su mayor comprensión.

El rumbo actual de la psicología ha sido revisar e interpretar los procesos instruccionales por los que las personas adquieren la información y cómo la utilizan en los campos complejos del conocimiento.

A partir de los años ochenta se inició una nueva etapa en el estudio de los procesos cognitivos y las estructuras lógicas que intervienen en el razonamiento aritmético, y cómo los individuos, desde su temprana infancia, organizan y elaboran este razonamiento cada vez más complejo. El interés se ha centrado en descubrir cómo la nueva información se integra al sistema de conocimiento, qué conexiones realiza y qué tipo de prácticas hacen falta para que se lleven a cabo estas elaboraciones.

Uno de los supuestos fundamentales de la psicología cognitiva del aprendizaje es que el nuevo conocimiento lo "elabora" el individuo. Los estudiantes no se limitan a añadir nueva información a lo ya conocido, sino por el contrario, deben conectar la nueva información con las estructuras del conocimiento ya establecidas y elaborar nuevas relaciones entre dichas estructuras, desarrollando amplias redes propositivas que generalizan el conocimiento adquirido a los diversos ámbitos de la vida. Sin embargo falta mucho por explicar cómo se dan los cambios en las capacidades y las habilidades cognitivas, así como el estudio de las diferencias individuales.

Han sido superadas las concepciones de un conocimiento recibido por acumulación mecánica de información, que concebía al individuo como un receptor pasivo de los estímulos ambientales. En la actualidad se concibe al ser humano como un ser activo donde él mismo elabora y construye dinámicamente un conocimiento socialmente construido a lo largo de la historia, como sería el matemático.

En la psicología cognitiva el alumno es entendido como un sujeto activo procesador de información que posee una serie de esquemas, planes y estrategias para aprender a solucionar problemas, los cuales deben ser desarrollados para lograr un procesamiento más efectivo.

La psicología instruccional ofrece alternativas para que el alumno aprenda organizadamente, y a partir de su conocimiento previo, su potencial y habilidades cognitivas y metacognoscitivas.

El papel de la psicología instruccional en el aprendizaje de las matemáticas es generar las condiciones necesarias para que los estudiantes desarrollen su capacidad en los dos principales campos:

La comprensión matemática, entendida como una forma de interpretar e identificar información recibida por los receptores; una forma de controlar las acciones que se ejecutan; una forma de guiar los recursos cognitivos para eficientar el aprendizaje; y el desarrollo de estrategias propias para resolver problemas matemáticos.

Las habilidades de cálculo, entendido como la destreza para la realización del cálculo, las reglas de producción en los algoritmos y la automatización que en esto repercute, como la base más importante para la ejecución.

Estos dos procesos de aprendizaje están íntimamente relacionados entre sí, por lo que es importante centrar el estudio de cómo influye la comprensión sobre la adquisición de rutinas de cálculo, y a la inversa, cómo puede modificarse la comprensión matemática de un individuo por medio de una larga práctica de habilidad de cálculo.

La importancia de las habilidades de cálculo con la aparición de la automatización es que reduce la carga de almacenamiento de la MLP, facilitando el recuerdo y un mejor almacenamiento de la información, lo que derivaría esto a una profundización en los estudios en el desarrollo de estrategias cognoscitivas.

Estas estrategias requieren de una eficaz planeación instruccional para que el estudiante se apropie de habilidades en la realización del cálculo con creatividad. El cálculo puede ser ineficaz si la habilidad está almacenada en forma declarativa en vez de procedimental. Aún así, cuando estas habilidades se hayan procedimentalizado, puede haber fuentes de ineficacia, si para lograr alcanzar una meta no se tengan presentes los pasos a seguir de la manera más rápida y precisa.

La escuela debe proveer al alumno de capacidades para que éstos sepan para qué sirve en otros ámbitos de la vida lo que se está enseñando. Tanto la comprensión como la rapidez y la precisión son los componentes más importantes de la habilidad de cálculo, y el éxito en éste consiste en generalizarlo a otros problemas que se presenten.

Aquí radica la importancia de la eficaz programación instruccional de la resolución de los problemas matemáticos en la escuela, ya que desarrollará estrategias metacognoscitivas en el alumno para promoverle procesos autorregulatorios que lo hagan más autosuficiente en problemas fuera de la escuela.

Los procesos de solución de problemas se pueden definir como la esencia de las matemáticas, ya que éstas se dirigen a la búsqueda de una meta, lo que requiere elaborar y organizar la información adquirida. La solución de problemas es la vinculación del conocimiento declarativo con el conocimiento procedural, que bajo diferentes mecanismos en cada estudiante se llegará a la calidad de experto.

Es necesario analizar y comprender la causa por la que los alumnos cometen errores y que pueden proporcionar elementos para detectar cuál es el motivo de la falla. Los procedimientos incorrectos pueden ser una causa, y otra pueden ser la falta de habilidades previas o prerrequisitos para comprender lo que está aprendiendo.

En las tareas que se resuelven en la escuela, generalmente existe la falta de creatividad, los problemas que ahí se presentan no le significan al estudiante nada en la vida cotidiana porque la capacidad de pensar matemáticamente, de buscar soluciones a los problemas y de inventar procedimientos de solución no son tomados en cuenta. El algoritmo se enseña como una regla inamovible y no se exploran los métodos heurísticos que promuevan las producciones de los alumnos.

El papel de la psicología en la enseñanza de las matemáticas abre un campo de participación muy amplio en los centros educativos encaminados a investigar hacia dónde y cómo dirigir la práctica docente de esta materia. En nuestro país es generalizada la contratación de profesionales expertos en el conocimiento matemático formados en disciplinas que no tienen afinidad con la educación, por lo que encuentran una gran dificultad para transmitir eficazmente su conocimiento. Inclusive los maestros egresados de las instituciones formadoras de docentes poco incluyen en su práctica innovaciones que mejoren su desempeño profesional para proponer cambios en la enseñanza.

El papel del psicólogo puede estar dirigido a apoyar una orientación a los maestros para que se apropien de herramientas más eficaces para desarrollar estrategias instruccionales que mejoren la educación, además de organizar, planear y diseñar los programas y materiales instruccionales que desarrollen en el estudiante desde sus primeros años escolares amplias habilidades para resolver problemas acordes con las necesidades cognitivas que se le presenten.

Para cumplir los objetivos anteriores es necesario intensificar la investigación científica que explique los procesos cognoscitivos que intervienen en su adquisición, elaboración y organización, cómo construye y reconstruye el individuo el conocimiento matemático a partir del aprendizaje escolarizado y de una manera más eficaz.

Desafortunadamente en México no existen estudios profundos, salvo excepciones, que intenten descubrir los factores por los que el aprendizaje de las matemáticas presenta una gran serie de problemas en un gran número de estudiantes, motivo suficiente para apoyar este tipo de estudios. Mientras tanto, tradicionalmente la mayoría de los estudiantes tratan su evitación seguramente para no incurrir en el fracaso.

Las matemáticas deben ser impartidas desde el inicio de la escuela elemental por expertos y especialistas comprometidos para asumir la responsabilidad que significa, y superar los programas instruccionales orientados hacia la consecución de habilidades de cálculo, mediante el aprendizaje y dominio de objetivos dirigidos a la vida fuera del aula.

Es necesario eliminar la idea de que las matemáticas son "difíciles", inclusive transmitida generacionalmente, que no promueve la competencia cognitiva en los alumnos y sí desmotiva su estudio. La creencia de que su estudio eficaz es sólo para unos cuantos conocedores es algo muy arraigado culturalmente, lo que predispone a la población estudiantil de todos los niveles educativos a evadir su estudio.

Asimismo, es necesario profundizar su investigación científica sobre la elaboración de los métodos y contenidos educativos a utilizar más efectivos, para crear estudiantes con mejores herramientas y superar en mucho las deficiencias con las que históricamente han egresado las generaciones de escolares.

BIBLIOGRAFÍA

ACUÑA, C. (1991). *Aprendizaje en solución de problemas.* En *Estrategias Cognoscitivas, Serie Sobre la Universidad*, no. 16, México:CISE-UNAM

ACUÑA, C., y BATLLORI, A. (1988). *El Proceso de Solución de problemas.* En *Metacognición y Estrategias de Aprendizaje, Serie Sobre la Universidad*, no. 9, México: CISE-UNAM

ADDA, J. (1981). La Reforma de las Matemáticas Modernas. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. México

ALEKSANDROV, A., KOLMOGOROV, A. y LAURENTIEV, M. (1985). *La matemática: Su contenido, métodos y significado.* Madrid:Alianza Editorial.

ANDERSON, J. (1982). *Acquisition of Cognitive Skill.* Psychological Review, no. 89, N.J.

ÁVILA, A. (1994). *Problemas fáciles y problemas difíciles.* México: Universidad Pedagógica Nacional.

BARODY, A. (1994). *El pensamiento matemático de los niños.* Madrid: Aprendizaje Visor

BERMEJO, V. (1990). *El niño y la aritmética.* Barcelona: Paidós.

BLOCK, D. y DÁVILA, M. (1993). *La matemática expulsada de la escuela.* Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV - IPN. *En La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria.* México:SEP

BRUNER, J. (1991). *Actos del significado más allá de la revolución cognitiva.* Madrid: Alianza.

BRYANT, P. y BRADLEY, L. (1985).*Children's reading problems.* Oxford:Basil

CÁRDENAS, G. y YÁÑEZ, M. (1994). *Programa de experiencias psicoeducativas para promover habilidades autorregulatorias en el área de las matemáticas a nivel preescolar.* Tesis de Licenciatura. Facultad de Psicología, UNAM: México.

CASTAÑEDA, S. (1995).*Los Problemas de la Educación Superior y la Formación del Psicólogo en la UNAM.* En *Perfiles Educativos,* no. 68. México: CISE-UNAM.

CASTAÑEDA, S. y LÓPEZ, M. (1989a).*La Psicología del Aprendizaje Escolar.* En S. Castañeda y M. López (compiladores) *La Psicología Cognoscitiva del Aprendizaje.* México: Facultad de Psicología, UNAM.

CASTAÑEDA, S. y LÓPEZ, M. (1989b). *Contribuciones de la inteligencia artificial a la evaluación del aprendizaje: THOR-OMBOLO, un sistema inteligente para el diagnóstico de estudiantes de riesgo.* En S. Castañeda y M. López (compiladores) *La Psicología Cognoscitiva del aprendizaje.* México: Facultad de Psicología, UNAM.

CASTAÑEDA, S. y LÓPEZ, M. (1992). *La Psicología Instruccional Mexicana.* En *Revista intercontinental de psicología y educación*, vol. 5, no. 1

CASTAÑEDA, M. y ACUÑA, C. (1996). *Diseño instruccional: métodos de representación del conocimiento.* En *Perfiles Educativos*, no. 72, vol. XVIII abril-junio, 1996. México, CISE-UNAM.

DE VEGA, M. (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid:Alianza Editorial.

DOYLE, W. (1988). *Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction.* Educational Psychologist Review, no. 23.

FIGUERAS, O. (1994). *Estrategias de los estudiantes de primaria y secundaria en problemas relacionados con proporciones.*Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

FREUDENTHAL, H. (1981).*Problemas mayores de la educación matemática.* En *Problema de la Enseñanza de las Matemáticas.*México:UNAM,1988

FUSON, K. (1988). *El conteo en el niño y el concepto del número.* En *Revista de Educación y ciencia*. México: CINVESTAV-IPN.

GARCÍA H., V. (1994). *Discriminación Condicional y conducta matemática.* Tesis de Doctorado. México:Facultad de Psicología,UNAM.

GAGNÉ, E. (1991). *Modelos y métodos de la psicología cognitiva.* En *La Psicología Cognitiva del Aprendizaje Escolar.* Madrid: Aprendizaje Visor.

GELMAN, R. y MECK, E. (1986). *The notion of principle: the case of counting.* En *Cognitive Development*, I

GIMENO, J. y PÉREZ, A. (1992). *Comprender y transformar la enseñanza.* Madrid: Morata.

GIORDANO, L. y BALLENT, E. (1978). *Discalculia Escolar. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Buenos Aires: El Ateneo.

GLASER, R. (1990). *The Reemergence of Learning Theory Within Instructional Research.* American Psychologist. no. 45.

GÓMEZ, M. y cols. (1995). *El niño y sus primeros años en la escuela.* México: SEP.

GREEN, G. (1992). *Perspectives on Relational Learning in Mental Retardation.* American Journal on Mental Retardation.

GREENO, J. y RILEY, M. (1988). *Conceptual competence and children's couting.* Cognitive psychology, no. 16.

GUAJARDO, E. (1996). *Hacia una educación básica en México para la diversidad, a finales del siglo XX y principios del XXI.* Dirección de Educación Especial. Ponencia presentada para US/México Symposyum on Disabilities, Tucson, Arizona.

HERNÁNDEZ, G. R. (1994). *Paradigmas de la Psicología Educativa.* México: ILCE.

IFRAH, G. (1988). *Las cifras: historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial.

JIMÉNEZ, E. (1996). *Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio.* Tesis de Maestría. Departamento de Investigaciones Educativas, CINVESTAV-IPN, México

KAMII, C. (1985). *El número en la educación preescolar.* Madrid: Visor.

KAMII, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética.* Madrid: Visor.

LEÓN, C. y ALVAREZ, V. (1990). *Evaluación, entrenamiento correctivo y análisis de errores de conducta aritmética en niños de primaria.* Tesis de Licenciatura. México: Facultad de Psicología, UNAM.

LÓPEZ, M., CASTAÑEDA, S. y GÓMEZ, T. (1989). *Contribución a la evaluación de estrategias de aprendizaje. El Inventario de Habilidades de Estudio (IHE).* En M. López y S. Castañeda (compiladores) *La Psicología Cognoscitiva del Aprendizaje.* México: Facultad de Psicología, UNAM.

MACOTELA, S., BERMÚDEZ y CASTAÑEDA (1991). *Inventario de Ejecución A-démica: Un Modelo Diagnóstico - Predictivo para el manejo de problemas de escritura, lectura y matemáticas en los tres primeros grados de enseñanza básica.* México: Facultad de Psicología, UNAM.

MAYER, R. (1985). *El fúturo de la Psicología Cognitiva.* Madrid: Alianza.

MAZA, C. (1991). *Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas.* Madrid: Aprendizaje Visor.

MORENO, L. (1995). *Educación matemática(2).* México: DIE, Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV.

ORTON, A. (1990).*Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula.* Londres: Morata.

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A. (1941). *Génesis del número en el niño.* Madrid: Guadalupe.

POZO, J. (1993). *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Madrid: Morata.

PUENTE, A. y POGGIOLI, L. (1989). *La Adquisición y Desarrollo de Estrategias Cognitivas en Matemáticas.* En S. Castañeda y M. López (compiladores) *La Psicología Cognitiva del Aprendizaje.* México: Facultad de Psicología, UNAM.

RADICE, L. (1983). *La matemática de Pitágoras a Newton.* Barcelona: Laia.

RESNICK, L. y FORD, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

REYS, R. (1995). *Mental Computation and Estimation.* Universidad de Missouri, Columbia. Traducción del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

SAIZ, I. (1997). *Dividir con dificultad o la dificultad de dividir.* En *Didáctica de matemáticas.* México: Paidós.

SCHMAND - BESSERAT (1982). *El Primer Antecedente de la Escritura.* En *Revista de Investigación y Ciencia*, no. 31. Barcelona.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA (1994). *Indicadores educativos 1988 - 1989 a 1994 - 1995.* Subsecretaría de Planeación y Coordinación; Dirección General de Planeación, Programación y Presupuesto.

SELLARES, R. y BASSEDAS, M. (1983). *La construcción de sistemas de numeración en la historia y en los niños.* En *La Pedagogía Operatoria.* Barcelona: Laia.

SKEMP, R. (1993). *Psicología del Aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Morata.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO (1997). *Aprovechamiento del plan de estudios actualizado del Colegio de Ciencias y Humanidades Evaluación ordinaria 97-1 y extraordinaria 97-2.* Documento interno de la Dirección de la Unidad Académica.

VARGAS, E. (1995). *Elaboración de un programa de tratamiento para alumnos de primer a tercer grado que presentan dificultades en la solución de las cuatro operaciones básicas.* Tesis de Licenciatura. México: Facultad de Psicología, UNAM.

VELÁSQUEZ, I. y cols. (1987). *El sistema decimal de numeración.* Fascículo 1. México: Dirección General de Educación Especial, SEP.

VELÁSQUEZ, I. y cols. (1988). *Problemas y operaciones de suma y resta.* Fascículo 2. México: Dirección General de Educación Especial, SEP.

VERGNAUD, G. (1991).*El niño, las matemáticas y la realidad.* México: Trillas.

WEINSTEIN, C. (1989). *Medición y entrenamiento de aprendizaje en alumnos.* En S. Castañeda y M. López (compiladores) *La Psicología Cognoscitiva del Aprendizaje.* Traducción de M. López y S. Castañeda. México: Facultad de Psicología, UNAM.