

00382 4
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTADISTICA ESPECTRAL: DE EIGENFASES
A ENERGIAS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A :

M. EN C. RAFAEL ALBERTO MENDEZ SANCHEZ



DIRECTORES DE TESIS: FRANCOIS LEYVRAZ WALTZ,
THOMAS H. SELIGMAN SCHURCH.

MEXICO, D. F.

1998

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

259582

i



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre: por su optimismo.

A mis hermanos: por el sacrificio.

A mis sobrinos: por su entusiasmo.

A mi esposa: por su amor.

A mis hijas: por su alegría.

A François: por la formalidad.

A Thomas: por creer en mí.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer el apoyo y la valiosa amistad que me han brindado los asesores de mi tesis, el

Dr. Thomas Henry Seligman Schurch

y el

Dr. François Alain Leyvraz Waltz

quienes no solamente me asesoraron en la tesis doctoral sino me asesoraron y me siguen asesorando en mi formación integral. También quiero agradecer el apoyo que me ha brindado (y que me sigue brindando) el

Dr. Jorge Andrés Flores Valdés

con quien he colaborado estrechamente. De hecho quiero agradecerle especialmente el sugerir la búsqueda de otro sistema en donde verificar nuestros resultados. Gracias a su entusiasmo encontramos los resultados en las moléculas de Rydberg.

Asimismo mis más sinceros agradecimientos a mis sinodales, quienes con sus valiosas sugerencias, mejoraron notablemente esta tesis:

- Dr. Pier Achille Mello Picco
- Dr. Jorge Andrés Flores Valdés
- Dr. Thomas Henry Seligman Schurch
- Dr. François Alain Leyvraz Waltz
- Dr. Christoff Jung Köhl
- Dr. Alejandro Frank Hoefflich
- Dr. Luis Benet Fernández.

Quiero también agradecer a mi esposa, la M.en C. Gabriela Báez quien con su apoyo y sus valiosas discusiones ayudaron a que la investigación y la escritura de esta tesis se hicieran más rápido. Quiero agradecer también al M. en C. Hugo Hernández su valioso apoyo a larga distancia desde 10° piso del IFUNAM. Al Ing. Reyes García, al M. en C. Carlos Mejía y al Dr. Luis Benet agradezco su ayuda para resolver todos los problemas computacionales.

Quiero agradecer también a Silvia Landa, Mercedes Sifuentes, Martha Tinoco, Ma. Luisa Araujo, Lizette Ramírez y al Lic. Arcadio Alonso su ayuda en todos los trámites administrativos y por su disposición para procurarme un ambiente apropiado de trabajo.

Finalmente quiero agradecer el apoyo del Laboratorio de Cuernavaca del Instituto de Física de la UNAM, de los Departamentos de Física Teórica y de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la UNAM, al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias de la UNAM, a la DGEP-UNAM por su apoyo via PADEP y a la DGAPA-UNAM por la beca recibida durante todo el doctorado. Quiero mencionar que todas las diagonalizaciones se hicieron en la supercomputadora CRAY-YMP de la UNAM, administrada por la DGSCA-UNAM.

ÍNDICE

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
Índice	iv
RESUMEN	v
1 Introducción	1
2 Invariancia estructural para sistemas excitados periódicamente	4
2.1 Mapeos que no son invariantes ante inversiones en el tiempo	6
2.2 Mapeos invariantes ante inversiones en el tiempo	9
2.3 Simetrías mezcladas	11
2.4 Resumen de invariancia estructural	13
3 Invariancia estructural para Hamiltonianos independientes del tiempo	16
3.1 El mapeo de Poincaré como función de la Energía	17
3.2 El mapeo cuántico de Poincaré	21
4 Propiedades paramétricas de las eigenfases	24
4.1 Método de la integral de frontera	24
4.2 El billar rectangular y el cuarto de estadio	26
5 MQDT: un mapeo cuántico de Poincaré	40
5.1 El conjunto fundamental de ecuaciones	42
5.2 Propiedades de las eigenfases	44
6 Conclusiones	48
Bibliografía	55

**TESIS DOCTORAL
(RESUMEN)**

TÍTULO: Estadística Espectral: de Eigenfases a Energías.

AUTOR: M. en C. Rafael Alberto Méndez Sánchez.

**DIRECTORES: Dr. François Alain Leyvraz Waltz y
Dr. Thomas Henry Seligman Schurch.**

Se muestra que, dado un Hamiltoniano cuyo análogo clásico es completamente caótico, es posible transferir las propiedades estadísticas de las eigenfases de su mapeo de Poincaré asociado a las del espectro de energía del Hamiltoniano original. En el caso completamente caótico se obtiene que las propiedades de fluctuación de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré serán las de los ensembles circulares con probabilidad uno. Luego se muestra que las propiedades locales de fluctuación de los espectros de energía son iguales a las predichas por los ensembles gaussianos con probabilidad uno, resultado conocido como conjetura Bohigas-Giannoni-Schmit. Esto se verifica en dos ejemplos, uno en billares y otro en moléculas de Rydberg. En este último encontramos además, que la teoría del defecto cuántico para varios canales puede interpretarse como un mapeo cuántico de Poincaré que es, por construcción, unitario.

**THESIS DOCTORAL
(ABSTRACT)**

TITLE: Spectral Statistics: from Eigenphases to Energies.

AUTOR: M. en C. Rafael Alberto Méndez Sánchez.

**DIRECTORS: Dr. François Alain Leyvraz Waltz and
Dr. Thomas Henry Seligman Schurch.**

We show that, given a Hamiltonian whose classical analog is completely chaotic, it is possible to transfer the statistical properties of the eigenphases of its associated quantum Poincaré map to the those of the energies of the original Hamiltonian. In the completely chaotic case we obtain that the fluctuation properties of the eigenphases of the quantum Poincaré map will be those of the circular ensembles with probability one. We show later that the local fluctuation properties of the energy spectra are the same as those predicted by the gaussian ensembles with probability one, a result known as Bohigas-Giannoni-Schmit conjecture. This is verified in two examples, one in billiards and the other in Rydberg Molecules. In the latter we furthermore show that the multichannel quantum defect theory can be interpreted as a quantum Poincaré map, with is unitary by construction.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

En años recientes, ha incrementado la importancia de la llamada conjetura Bohigas-Giannoni-Schmit (BGS) [1, 2, 3] que relaciona las propiedades estadísticas de sistemas cuánticos cuyo límite clásico es caótico (QCCS)¹ con la teoría de matrices aleatorias (RMT) [4]. Esta conjetura en su forma original expresa lo siguiente [2]:

Los espectros de sistemas invariantes ante inversión en el tiempo cuyos análogos clásicos son sistemas K , muestran las mismas propiedades de fluctuación que las predichas por el ensemble ortogonal gaussiano (GOE). Si la conjetura fuera cierta, se habrá entonces establecido la universalidad de las leyes de fluctuación en espectros cuánticos, ya encontrada en núcleos y, en un menor grado, en átomos. Entonces, deben también encontrarse en otros sistemas cuánticos, como moléculas, hadrones, etc.

La conjetura fue verificada numéricamente al estudiar algunos QCCS: un cuarto del estadio de Bunimovich y un octavo del billar de Sinaï. Bohigas y colaboradores calcularon algunas medidas de fluctuación —como la distribución de espaciamientos entre niveles cercanos $p(s)$ y la estadística Dyson-Mehta Δ_3 que mide el grado de rigidez del espectro, entre otras— y observaron que son parecidas a las del GOE. Otros grupos estudiaron los eigenvalores de QCCS que no son invariantes frente a inversión en el tiempo [5, 6] y obtuvieron para sus fluctuaciones los valores predichos por el ensemble unitario gaussiano (GUE). Si los valores de estas medidas de fluctuación se asemejan a las de RMT se dice que hay evidencia cuántica de caos.

El trabajo teórico desarrollado para demostrar esta conjetura fue iniciado por Berry [7], quien entre otras cosas mostró, usando la teoría semiclásica de la densidad de estados basada en órbitas periódicas, que para los QCCS, la rigidez espectral Δ_3 para distancias intermedias es la del GOE o GUE, dependiendo de si el sistema es invariante ante inversiones en el tiempo o no. Otras medidas de las fluctuaciones del espectro, al igual que las propiedades de los eigenvectores, son muy difíciles de calcular de esta manera debido a que involucran órbitas periódicas muy largas.

¹En lo que sigue se utilizan las siglas en inglés para éste y otros casos, porque son utilizadas universalmente.

En dos trabajos recientes se investiga la conjetura BGS. El primero usa el concepto de invariancia estructural [8, 9, 10, 11] y el segundo un modelo- σ no-lineal² [12, 13]. En esta tesis seguiremos la primera línea de investigación, que da todas las propiedades de fluctuación a la vez. Siguiendo los artículos de Seligman y Leyvraz [8, 9, 10, 11], usaremos el concepto de invariancia estructural para hacer una conexión entre los QCCS y la RMT. Este concepto fue desarrollado para sistemas forzados periódicamente y para sistemas de dispersión clásica; por ello, Seligman y Leyvraz obtuvieron las propiedades de fluctuación de los ensembles circulares (COE o CUE).

El objetivo principal de esta tesis es obtener las propiedades de fluctuación para los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico (QCCS). Para esto, se usa el mapeo de Poincaré y su versión cuantizada, el mapeo cuántico de Poincaré (QPM) [14, 15]. Con este mapeo es posible transferir las propiedades estadísticas de las eigenfases del QPM a los eigenvalores del Hamiltoniano original. Esto se hace estudiando ambos mapeos como función de la energía.

En el capítulo II se hace una revisión del concepto de invariancia estructural en mapeos canónicos. Allí se estudia el caso más sencillo: un hamiltoniano periódico. Después, se hace la conexión con RMT basada en los trabajos de Dirac, Bargmann, Moshinsky y otros [16, 17, 18, 19, 20]. Estos autores han desarrollado un formalismo que asocia operadores unitarios en mecánica cuántica a las transformaciones canónicas de la mecánica clásica. Los distintos ensembles circulares se obtienen al escoger adecuadamente el grupo de invariancia estructural y su acción sobre los mapeos canónicos.

En el tercer capítulo se trabaja específicamente con el mapeo de Poincaré. Su contraparte cuántica se usa para mostrar que las propiedades estadísticas locales de las eigenfases son las mismas que las de las energías. Esto se tiene ya que los eigenvalores $\{k_n\}$ del Hamiltoniano del sistema cuántico cumplen con la condición

$$\det(1 - T(q', q; k_n)) = 0, \quad (1.1)$$

es decir, cuando alguna de las eigenfases $\theta_i(k)$ del operador $T(q', q; k)$, asociado al QPM, cruza la parte positiva del eje real ($\theta_i(k) = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

En el cuarto capítulo, se estudian las propiedades de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré para el estadio de Bunimovich y para un billar rectangular. Estos estudios se desarrollan a partir del método de la integral de frontera para billares [14, 21]. La superficie cuántica de sección que usamos es la frontera del billar.

En otro contexto, la teoría de defectos cuánticos para varios canales (MQDT) [22, 23] se ha usado para calcular las energías y resonancias de las moléculas de Rydberg [24, 25]. Lombardi y colaboradores [24] aplicaron las técnicas de caos cuántico para analizar las propiedades espectrales de estas moléculas. En

²Se usa este término como traducción de *non-linear σ -model*.

ese mismo trabajo, estos autores propusieron la contraparte clásica de la aproximación cuántica. De aquí se pudo derivar un mapeo de Poincaré para estados ligados [24]. Estudiaremos entonces, en el capítulo quinto, las propiedades de las eigenfases de las moléculas de Rydberg obtenidas con la MQDT. Este método puede considerarse como un QPM, unitario por construcción, y cuyo mapeo clásico es canónico.

En el último capítulo, se exponen las conclusiones: las propiedades de fluctuación de los eigenvalores de los QCCS son las mismas que las de los ensembles gaussianos con probabilidad uno. El argumento funciona de la siguiente manera: Se identifica al mapeo de Poincaré asociado a un Hamiltoniano, como un representante típico de un conjunto de mapeos canónicos caóticos –haciendo la hipótesis: un mapeo canónico arbitrario es caótico con probabilidad uno–. Cuando se cuantiza el conjunto de mapeos, se obtiene un ensemble de operadores unitarios (alguno de los ensembles circulares) ya que el análogo cuántico de las transformaciones canónicas son las matrices unitarias. Aunque el no se sabe si el conjunto de mapeos canónicos forman un ensemble (ya que no se conoce medida invariante), el conjunto de matrices unitarias si son un ensemble ya que los grupos unitarios tienen una medida invariante. Como el mapeo de Poincaré es un miembro típico del conjunto de mapeos canónicos, al ser cuantizado, las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré tendrán las propiedades de fluctuación de los ensembles circulares con probabilidad uno ya que es un miembro de algun ensemble circular. Para completar el argumento, tenemos que encontrar la relación entre las propiedades de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré con las del espectro de energía del Hamiltoniano original. Lo que se encuentra es que las propiedades de fluctuación de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré son localmente las mismas que las del espectro de energía del Hamiltoniano ya que las eigenfases $\theta_i(E)$ se mueven localmente de manera tal que $\frac{d\theta_i}{dE} = \text{const}$. Entonces las propiedades de fluctuación locales de los espectros de energía son iguales a las del GOE o las del GUE con probabilidad uno. Con esto, la conjetura Bohigas-Giannoni-Schmit que asocia las propiedades estadísticas de los espectros de energía de los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico, con la teoría de matrices aleatorias se cambia por una conjetura más débil: un sistema Hamiltoniano arbitrario es caótico con probabilidad uno.

Capítulo 2

INVARIANCIA ESTRUCTURAL PARA SISTEMAS EXCITADOS PERIODICAMENTE

En este capítulo se hace una revisión del concepto de invariancia estructural en mapeos canónicos introducido por Leyvraz y Seligman [9]. Empezamos con un sistema muy sencillo: una secuencia binaria finita. Se obtendrá luego el grupo de invariancia estructural asociado: el grupo simétrico. Después usamos este concepto en el contexto que nos interesa, es decir, en mapeos canónicos para obtener el grupo de invariancia estructural asociado a ellos.

El objetivo principal del concepto de invariancia estructural es construir a partir de un sistema individual un ensemble de sistemas que tengan las mismas propiedades relevantes. Por ejemplo, si cierto mapeo de Poincaré muestra toros invariantes o separatrices, el ensemble debe también mostrarlos; si, por otro lado, el mapeo carece de estructura, el ensemble tampoco debe mostrar estructura alguna. Primero se buscan las propiedades relevantes y después se define el grupo de invariancia estructural (SIG) asociado al sistema como el conjunto de mapeos que transforma el sistema en otro que tiene las mismas propiedades relevantes, es decir, que las deja invariantes. El SIG, como veremos más adelante, define un conjunto Σ de sistemas sobre el cual actúa. El concepto de invariancia estructural es, *a grosso modo*, complementario al concepto de simetría. Si un sistema presenta una simetría mayor, su grupo de invariancia estructural es menor y viceversa.

Para dar un ejemplo, tomemos una secuencia binaria aleatoria de 0's y 1's, n en total; por ejemplo: 0, 1, 0, 0, 1, 0, ..., 1, 0, 1. Si ésta no tiene ninguna propiedad característica, el SIG consiste en todos los mapeos de secuencias binarias en secuencias binarias. Si la secuencia tiene, como propiedad que la define, digamos un 70% de 1's, el SIG consistirá de todos los mapeos que respeten esta propiedad: todas las permutaciones de la secuencia binaria, es decir, el grupo simétrico de orden n sin ninguna restricción. Σ es en este caso el conjunto de todas las secuencias binarias que tienen 70% de 1's. Si la secuencia tiene un mayor número de unos, entonces al SIG lo forman también todas las permutaciones pero Σ tendrá esta restricción. El SIG es el mismo en ambos casos pero el conjunto Σ es diferente. Si

la secuencia es periódica, digamos de periodo m , entonces el SIG deberá respetar también esta propiedad, al igual que Σ . En este caso el SIG será isomorfo al grupo simétrico de orden m . Si se omite alguna simetría de la secuencia original, por estar escondida, Σ tendría propiedades diferentes a las del sistema original. En tal caso no se habrían identificado correctamente las propiedades relevantes y el SIG obtenido, al igual que Σ , no serán los correctos. Nótese que el concepto de invariancia estructural está basado en nociones de teoría de grupos.

El concepto de invariancia estructural, introducido por Leyvraz y Seligman es entonces un argumento probabilístico que, según el artículo de revisión de Guhr, Müller-Groeling y Weindenmüller [26], trabaja de la siguiente manera:

1. Un sistema dado se identifica como un representante típico de algún conjunto.
2. Se sabe que este conjunto tiene una propiedad particular, digamos p , con probabilidad uno.
3. Como miembro del conjunto, el sistema inicial posee la propiedad p también con probabilidad uno.

Según Guhr et al.[26], Leyvraz y Seligman usaron este razonamiento probabilístico general para ligar formalmente sistemas caóticos y la RMT. En este contexto, los tres pasos anteriores se ven de la siguiente forma:

1. Un mapeo canónico clásico¹, completamente caótico, se identifica como un miembro típico de un conjunto Σ de mapeos canónicos caóticos (el grupo de las transformaciones canónicas biyectivas).
2. Cuando se cuantizan los mapeos, se obtienen operadores unitarios que poseen las fluctuaciones de los ensembles circulares con probabilidad uno. Aunque no sabemos si Σ es un ensemble, su análogo cuántico Σ_Q sí lo es, ya que el grupo unitario $U(N)$ posee una medida invariante $d\mu(U(N))$ que es precisamente la de los ensembles circulares.
3. El sistema dado también tiene las propiedades de fluctuación de los ensembles circulares con probabilidad uno al ser cuantizado.

En el resto del capítulo se revisará la aplicación del concepto de invariancia estructural en mapeos canónicos. Trabajaremos con los sistemas más generales (que no son invariantes ante inversiones en el tiempo) y después con sistemas que sí poseen esa simetría. Con éstos, Leyvraz y Seligman obtuvieron los ensembles unitario circular y ortogonal circular (CUE y COE), respectivamente. Para obtener el

¹No debe confundirse "mapeo canónico" con el conjunto de mapeos del SIG que transforma un sistema en otro. Aquí el sistema es el mapeo canónico.

MAPEOS QUE NO SON INVARIANTES ANTE INVERSIONES EN EL TIEMPO.6

simpléctico (CSE) se tendría que admitir el espín en un contexto clásico. Después se revisan casos con simetrías discretas [27], obteniéndose los resultados conocidos para simetrías mezcladas. Sorpresivamente, en el caso de un billar con simetría de rotación de 120 grados C_3 pero sin simetría de reflexión e invariante ante inversiones en el tiempo, se predice que las propiedades de fluctuación son GUE en vez de GOE [27]. Esto se verificó luego numéricamente [27] y teóricamente con las fórmulas semiclásicas de órbitas periódicas [28].

MAPEOS QUE NO SON INVARIANTES ANTE INVERSIONES EN EL TIEMPO.

En esta sección haremos una revisión de la aplicación del concepto de invariancia estructural a un mapeo canónico clásico, que no es invariante ante inversiones en el tiempo. Al cuantizar este mapeo encontraremos que las propiedades de fluctuación de las eigenfases del mapeo cuántico corresponden a las del CUE con probabilidad uno.

Sea $H(q, p; t)$ un Hamiltoniano periódico dependiente del tiempo que actúa sobre un espacio fase M con coordenadas (q, p) y periodo τ tal que $H(q, p; t) = H(q, p; t + \tau)$. Supongamos además que no hay un periodo menor que τ : $H(q, p; t) \neq H(q, p; t + t')$ para todo $t' < \tau$.

Este Hamiltoniano induce un mapeo canónico $C(t_0, t)$ de M en M que tomará cualquier función sobre M al tiempo t_0 y la llevará en la correspondiente al tiempo t . La periodicidad de H implica que $C(t_0 + \tau, t + \tau) = C(t_0, t)$. Fijando arbitrariamente el tiempo inicial t_0 se define el mapeo monodrómico C_τ por

$$C_\tau = C(t_0, t_0 + \tau). \quad (2.1)$$

En lo que sigue suprimiremos el subíndice τ del mapeo monodrómico. Es natural que las iteraciones de este mapeo no dependan de cómo se toma t_0 .

Consideremos entonces el mapeo canónico C que actúa sobre un espacio fase M compacto de manera invertible. C produce sobre M ciertas estructuras que se conservan bajo su acción (toros invariantes, regiones caóticas, etc.). Construyamos ahora un conjunto Σ de mapeos canónicos $C_{\alpha\beta}$ ($\Sigma = \{C_{\alpha\beta}\}$), que preserven sobre M las mismas propiedades que C . Nótese que el conjunto de mapeos canónicos Σ está asociado a un conjunto de Hamiltonianos.

Empecemos con el caso más sencillo, con M en el que C actúa de una manera completamente caótica, es decir, M es un espacio fase que no tiene estructura alguna. Si denotamos por G el grupo de todas las transformaciones canónicas biyectivas, el SIG de C es el producto directo $G \times G$ con la siguiente acción:

$$(C_\alpha, C_\beta) : C \rightarrow C_\alpha C C_\beta; \quad (C_\alpha, C_\beta) \in G \times G, \quad (2.2)$$

es decir, el SIG lo forman las parejas (C_α, C_β) , y el conjunto Σ es G , en donde la acción de $G \times G$ sobre éste está definida por la ecuación anterior. El que $\Sigma = G$

MAPEOS QUE NO SON INVARIANTES ANTE INVERSIONES EN EL TIEMPO.7

puede entenderse de la siguiente manera: C_α y C_β son dos mapeos canónicos arbitrarios y se hace la hipótesis que C transformada es caótica con probabilidad uno (los sistemas integrables y los mezclados serán un conjunto de medida cero). Entonces $C_\alpha C C_\beta$ será también caótico con probabilidad uno ya que será otro mapeo canónico arbitrario. Esta hipótesis se hace debido a que no se conoce una medida invariante en el grupo de las transformaciones canónicas. Por otra parte, la manera de elegir el SIG es la más simple que permite tratar de una manera consistente los mapeos invariantes frente a inversiones en el tiempo. Nótese la ambigüedad que se tiene ya que se podría, por ejemplo, escoger $C \rightarrow C_\alpha C$, el cual no es fácil trasladarlo al caso con invariancia ante inversiones en el tiempo, que relaciona C_α y C_β , como veremos más adelante. Un argumento heurístico de Dyson [29] puede aplicarse también en la definición anterior. El argumento para el COE dice:

El automorfismo

$$S \rightarrow W^T S W \quad (2.3)$$

del espacio de matrices unitarias simétricas en sí mismo, donde W es cualquier matriz unitaria, no es simplemente un cambio en la representación de los estados sino una alteración física del sistema S a un sistema diferente. Intuitivamente hablando, podemos visualizar a S como un representante de un sistema desconocido dentro de una "caja negra", siendo S la matriz de transformación que transforma algún estado inicial φ a un estado final ψ . La transformación 2.3 significa entonces que se somete el estado inicial a alguna interacción W y el estado final a la misma interacción W^T en una manera simétrica en el tiempo. Si somos completamente ignorantes de las interacciones que ocurren dentro de la caja negra, la interacción adicional W no podrá incrementar o disminuir nuestra ignorancia. Si se puede empezar con cualquier sistema S con la misma probabilidad, la aplicación de W debe dejarlo con la misma probabilidad. La invariancia del espacio de matrices unitarias simétricas ante la transformación 2.3 es una idealización matemática razonable del hipotético "estado de total ignorancia".

Para trasladar este argumento a la ecuación 2.2, basta con remplazar las matrices unitarias por las transformaciones canónicas.

Para hacer de Σ un ensemble necesitamos la medida invariante. Aunque para G y $G \times G$ no se conoce una medida invariante², nuestro interés está centrado en las

²Se puede hacer la hipótesis [30] de que la medida invariante (por la derecha o por la izquierda) existe. Con esto se crearían ensembles de mapeos canónicos invariantes (y también no invariantes) ante inversiones en el tiempo.

MAPEOS QUE NO SON INVARIANTES ANTE INVERSIONES EN EL TIEMPO.8

consecuencias de la invariancia estructural para sistemas cuánticos. El siguiente paso es la cuantización.

Siguiendo las ideas de Dirac, Moshinsky y otros [16, 17, 18, 19, 20], procederemos a asociar operadores unitarios a transformaciones canónicas biyectivas, pues el análogo cuántico de las transformaciones canónicas son los operadores unitarios. Esta analogía se debe a que los operadores unitarios dejan invariantes las relaciones básicas de conmutación. Con esto, G se convierte en el grupo unitario $U(N)$, ($\Sigma_Q = G_Q = U(N)$) donde el subíndice indica el grupo cuántico con $N = |M|/(2\pi\hbar)^f$, donde $|M|$ es el volumen de M y f es el número de grados de libertad.

Haciendo esta asociación, la Ec. 2.2 toma la forma

$$(U_\alpha, U_\beta) : U \rightarrow U_\alpha U U_\beta; \quad (U_\alpha, U_\beta) \in U(N) \times U(N), \quad (2.4)$$

donde U, U_α y U_β son los operadores unitarios asociados a C, C_α y C_β , respectivamente (El SIG lo forman todas la parejas (U_α, U_β)).

De aquí inmediatamente se puede construir el ensemble circular unitario ya que la medida de los grupos $U(N)$, la medida de Haar, es la única medida invariante bajo la acción por la derecha e izquierda de $U(N)$ [31]:

$$d\mu(U) = d\mu(U_\alpha U U_\beta). \quad (2.5)$$

Con este enfoque se tienen las siguientes limitaciones:

1. Tenemos un sistema excitado periódicamente. Relajaremos esta condición cuando se trabaje con el mapeo de Poincaré en el capítulo 3.
2. No se construyó el ensemble en mecánica clásica ya que no se conoce una medida invariante para el grupo de transformaciones canónicas biyectivas.
3. El espacio fase en el que se trabaja debe ser compacto para que el espacio de Hilbert sea finito, y por consecuencia que el grupo sea unitario.
4. No se tomaron en cuenta problemas de ordenamiento de los operadores, presentes en el caso cuántico, por lo que solamente trabajamos en el límite semiclásico.

Analicemos ahora la importancia de τ como el periodo primitivo. Si tomamos $\bar{\tau} = 2\tau$ y denotamos por $D_{\bar{\tau}}$ al mapeo con este periodo se tiene,

$$D_{\bar{\tau}} = C_{2\tau} = C_\tau C_\tau = C_\tau^2. \quad (2.6)$$

Definamos la siguiente secuencia como el resultado de aplicar C_τ sobre (q_0, p_0) :

$$\begin{aligned}
 (q_0, p_0) &= (q_0, p_0), \\
 (q_1, p_1) &= C_\tau(q_0, p_0), \\
 (q_2, p_2) &= C_\tau^2(q_0, p_0), \\
 (q_3, p_3) &= C_\tau^3(q_0, p_0), \\
 (q_4, p_4) &= C_\tau^4(q_0, p_0), \\
 &\vdots \\
 (q_N, p_N) &= C_\tau^N(q_0, p_0).
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

El mapeo D_τ al actuar sobre (q_0, p_0) itera solamente la mitad de la secuencia:

$$\begin{aligned}
 &(q_0, p_0), \\
 (q_2, p_2) &= D_\tau^2(q_0, p_0), \\
 (q_4, p_4) &= D_\tau^4(q_0, p_0), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Si hacemos actuar D_τ sobre (q_1, p_1) tendremos el resto de la secuencia que se obtiene de aplicar C_τ :

$$\begin{aligned}
 &(q_1, p_1), \\
 (q_3, p_3) &= D_\tau^2(q_1, p_1), \\
 (q_5, p_5) &= D_\tau^2(q_1, p_1), \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

por lo que D_τ etiqueta las secuencias en pares e impares de la misma manera que un operador de paridad. El resultado final al cuantizar es que se obtienen dos CUE mezclados, como veremos más adelante.

MAPEOS INVARIANTES ANTE INVERSIONES EN EL TIEMPO.

De manera similar que en la sección anterior, aquí haremos una revisión del concepto de invariancia estructural a un mapeo canónico caótico invariante ante inversiones en el tiempo. Como es de esperarse, encontraremos que las propiedades estadísticas de las eigenfases del mapeo cuántico correspondiente, son las del COE con probabilidad uno.

Si queremos incluir invariancia ante inversiones en el tiempo, el mapeo C debe cumplir

$$C(TCT) = 1, \quad (2.10)$$

donde T es un mapeo anti-canónico tal que $T^2 = 1$ y que representa la inversión temporal. El que T sea anti-canónico [32] significa que intercambia los signos en las ecuaciones de Hamilton. En el caso más sencillo, cambia los signos de p y t :

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t \\ p &\rightarrow -p. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Aunque T y CT son anti-canónicos, TCT es de nuevo canónico. Por esto, el subgrupo del SIG $G \times G$ que deje invariante esta propiedad es

$$(C_\alpha, C_\beta) : C \rightarrow C_\alpha C C_\beta; \quad C_\beta = T C_\alpha^{-1} T. \quad (2.12)$$

Esto se tiene ya que si C es invariante ante inversiones en el tiempo (Ec. 2.10), $C_\alpha C C_\beta$ también lo será y entonces

$$(C_\alpha C C_\beta) T (C_\alpha C C_\beta) T = 1. \quad (2.13)$$

Esta ecuación es válida si

$$C_\beta = T C_\alpha^{-1} T. \quad (2.14)$$

Aunque no es claro que ésta sea la única solución, el siguiente argumento muestra que para el caso genérico es lo que se debe satisfacer. Lo que nos interesa es que se cumpla $C_\beta T C_\alpha T = 1$. Si en la Ec. 2.13 se introduce $T^2 = 1$ se obtiene

$$C_\alpha C C_\beta T C_\alpha T C C_\beta T = 1 \quad (2.15)$$

o lo que es lo mismo,

$$C C_\beta T C_\alpha T = C_\alpha^{-1} T C_\beta^{-1} C^{-1} T. \quad (2.16)$$

Multiplicando la ecuación por C^{-1} por la derecha y usando en el lado derecho que $C^{-1} T C^{-1} = T$ obtenemos que

$$C(C_\beta T C_\alpha T) C^{-1} = C_\alpha^{-1} T C_\beta^{-1} T. \quad (2.17)$$

Denotando por X lo que está dentro del paréntesis, tenemos la siguiente ecuación:

$$C X C^{-1} = T X^{-1} T \quad (2.18)$$

o bien,

$$X = (C^{-1}T)X^{-1}TC. \quad (2.19)$$

Esta ecuación se debe satisfacer para cualquier C , en particular $C \neq T$. La solución para lograr esto es $X = 1$, que es la misma que se había sugerido.

Al hacer la cuantización de las transformaciones canónicas se obtiene

$$U \rightarrow U_\alpha U U_T U_\alpha^{-1} U_T, \quad (2.20)$$

donde U_T representa el operador anti-unitario asociado al mapeo anti-canónico de inversión temporal T . Ahora mostraremos que esta regla de transformación es justamente la el COE. Como el operador de inversión temporal U_T asocia a cada función de onda χ su conjugada χ^* tenemos que

$$U_T U_\alpha^{-1} U_T \chi = U_T U_\alpha^{-1} \chi^*. \quad (2.21)$$

Usando que $U_\alpha^{-1} \chi^* = ((U_\alpha^{-1})^* \chi)^*$ y aplicando de nuevo el operador de inversión temporal se obtiene

$$U_T U_\alpha^{-1} U_T \chi = (U_\alpha^{-1})^* \chi. \quad (2.22)$$

Como el operador U_α es unitario obtenemos

$$U_T U_\alpha^{-1} U_T = ((U_\alpha^*)^t)^*. \quad (2.23)$$

Este resultado en la ecuación 2.20 nos da directamente la regla de transformación del COE

$$U \rightarrow U_\alpha U U_\alpha^t. \quad (2.24)$$

Finalmente, la medida invariante para estas matrices es única [29], por lo que podemos asociar sistemas invariantes ante inversiones en el tiempo con el COE. Este caso tiene las mismas limitaciones que el anterior (CUE) por lo que no se discutirán más.

SIMETRÍAS MEZCLADAS

En esta sección hacemos una revisión del concepto de invariancia estructural aplicado a sistemas con simetrías discretas. En particular se obtendrán los resultados correspondientes a sistemas con simetrías mezcladas. Para un sistema invariante ante inversiones en el tiempo e invariante ante una simetría discreta particular, se obtienen resultados inesperados los cuales se discuten en detalle.

Supongamos ahora que el mapeo C tiene alguna simetría discreta \mathcal{P} , digamos la paridad. Se cumplirá entonces que $CP = PC$, para todos los elementos P de \mathcal{P} . El subgrupo de $G \times G$ que deja invariante esta simetría es:

$$(C_\alpha, C_\beta) : C \rightarrow C_\alpha C C_\beta; \quad C_\alpha P = P C_\alpha, \quad C_\beta P = P C_\beta. \quad (2.25)$$

para todos los elementos P . Por esto, en el caso cuántico se tiene el producto directo de $U(N_{IR}) \times U(N_{IR})$ tomado sobre todas las representaciones irreducibles (IR) de dimensión $|N_{IR}|$. El resultado final es que cada uno de los sectores tenga una estadística tipo CUE independiente.

Si el sistema tiene más de una simetría, el problema se vuelve mucho más interesante. Supongamos que el sistema es invariante ante inversiones en el tiempo y que además tiene una simetría discreta de orden mayor o igual a dos. En este caso es de esperarse que los distintos sectores de simetría estén asociadas con el COE. Esto es cierto si cada uno de los sectores es invariante ante inversiones en el tiempo, por separado. Si denotamos por U_1 y U_2 a las matrices de los sectores de un sistema con dos sectores, se tendrá:

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & U_{\alpha,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\alpha,1}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{\alpha,2}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Pero también puede existir el caso en que el operador de inversión temporal lleve uno de los sectores de simetría a otro y viceversa, es decir, el operador de inversión temporal permutará los sectores, el 1 con el 2 en el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} U_{\alpha,1} & 0 \\ 0 & U_{\alpha,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\alpha,2}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{\alpha,1}^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} U_{\alpha,1} U_1 U_{\alpha,2}^{-1} & 0 \\ 0 & U_{\alpha,2} U_2 U_{\alpha,1}^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Este intercambio de sectores puede entenderse con la siguiente representación unidimensional de C_2 : sea $\epsilon = e^{2\pi i/2}$ la segunda raíz de la unidad, A el generador de C_2 y tomemos $A^j \rightarrow \epsilon^j$ como la representación unidimensional. Al aplicar el operador de inversión temporal sobre A^j se obtiene:

$$\begin{aligned} A^1 &\rightarrow A^2 \\ A^2 &\rightarrow A^1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Denotemos por f_1 una función en el sector uno y por f_2 a la función que se obtiene de aplicar el operador de inversión temporal sobre f_1 . Si los sectores no son auto-conjugados, f_2 estará en el sector 2. Ya que el operador de inversión temporal conmuta con el Hamiltoniano, los eigenvalores correspondientes a f_1 y f_2 estarán degenerados, es decir, se tendrán dos sectores degenerados con estadística

CUE cada uno y otro con estadística COE. Dicho de otro modo, dos de los sectores no muestran la invariancia ante inversiones en el tiempo que cumple el sistema completo. En cambio muestran degeneración de Kramers.

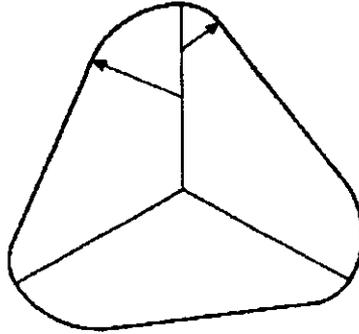


Figura 2.1: Forma del billar estudiado en la referencia [27]. Las esquinas del triángulo equilátero son redondeadas por arcos de circunferencias cuyos radios difieren por un factor de dos. Un billar correspondiente con simetría especular fue también estudiado en ese trabajo. Las puntas redondeadas en este último caso se obtuvieron de un arco de circunferencia con el radio más grande. Tomado de [27].

Un ejemplo inesperado de estadística tipo GUE para un sistema invariante ante inversiones en el tiempo [27] es un billar (sin campo magnético) con simetría C_3 pero no C_{3v} . Aunque este sistema tiene tres sectores, éste fue el ejemplo más sencillo que encontraron Leyvraz y colaboradores. Las propiedades estadísticas de las energías de los sectores permutados será GUE pero no GOE. Dos billares, uno con simetría C_3 y otro con simetría C_{3v} (ver Fig. 2.1) fueron estudiados por Leyvraz y colaboradores [27]. Los valores para las estadísticas $(p(s)$ y $\Delta_3)$ para el primer billar corresponden al GUE y los del segundo al GOE, como fue predicho por los argumentos de invariancia estructural. Estos resultados se muestran en las Figs. 2.2 y 2.3. En estas figuras se incluyen los valores obtenidos para un billar con simetría especular. Este ejemplo es una predicción del concepto de invariancia estructural y subraya su utilidad. Una explicación alternativa a partir de la teoría semiclassical de órbitas periódicas fue dada recientemente por Keating y Robbins [28].

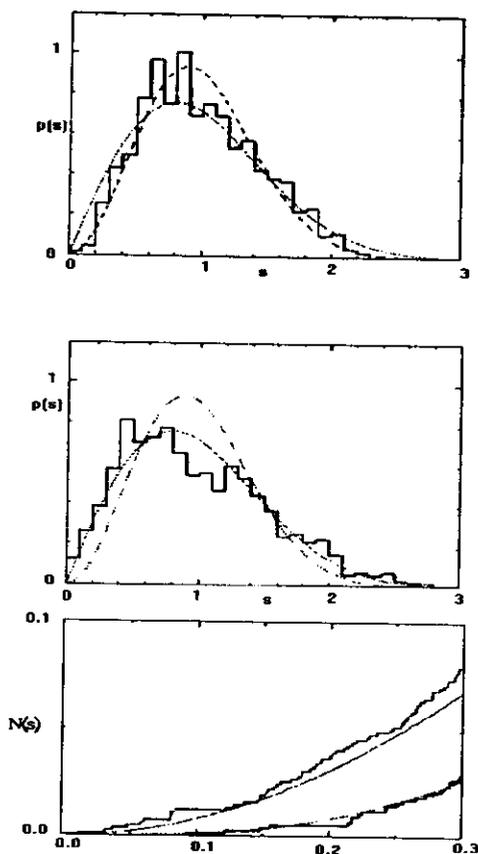


Figura 2.2: Distribución de espaciamentos de primeros vecinos $p(s)$ para a) el billar mostrado en la figura anterior; b) para el billar con simetría especular y c) la distribución acumulada $\int_0^s p(s)ds$ para ambos billares. La línea discontinua representa las predicciones del GUE mientras que los puntos pequeños representan las del GOE. La línea inferior en c) corresponde al billar de la figura anterior mientras que la superior corresponde al billar con simetría especular. El caso a) se comporta como el GUE mientras que el b) recuerda lo predicho por el GOE. Tomado de [27].

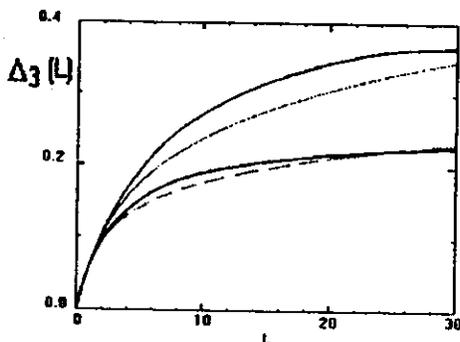


Figura 2.3: Estadística Dyson-Mehta Δ_3 para ambos billares. La línea continua superior corresponde al billar con simetría especular. La inferior al billar con simetría C_{3v} . La línea discontinua corresponde al GUE y la punteada al GOE. Tomado de [27].

RESUMEN DE INVARIANCIA ESTRUCTURAL

Terminaremos este capítulo resumiendo los resultados obtenidos por otros autores y revisados en este capítulo. Con un mapeo C completamente caótico, no invariante ante inversiones en el tiempo, se puede construir un conjunto Σ (G) de mapeos canónicos que es invariante bajo la acción del SIG $G \times G$. Esto se tiene ya que suponemos que todos los mapeos del SIG son caóticos, excepto un conjunto de medida cero. Al cuantizar, Σ se convierte en $U(N)$ que tiene una medida invariante asociada (medida de Haar) que es única, bajo la acción de $U(N)$. Se obtiene entonces el ensemble conocido como CUE. N está determinado por el volumen del espacio fase M . Ya que el mapeo C es un miembro de Σ , al cuantizarlo tendrá también las propiedades del CUE. Cuando se tiene un sistema que es invariante ante inversiones en el tiempo, el conjunto Σ es más pequeño, ya que debe respetar esta propiedad. El ensemble que se obtiene en este caso es el COE. Nótese que las propiedades de fluctuación de las eigenfunciones del sistema original son también las de los ensembles circulares con probabilidad uno.

Este formalismo, además, da otros resultados como la superposición de COEs (o CUEs) para sistemas con simetrías discretas y un resultado inesperado para el caso en que se tiene un sistema invariante ante inversiones en el tiempo e invariante ante una simetría discreta particular.

Capítulo 3

INVARIANCIA ESTRUCTURAL PARA HAMILTONIANOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de invariancia estructural en sistemas periódicamente excitados. Con esto, las transformaciones unitarias tienen las propiedades de fluctuación de los ensembles circulares. Para transferir las propiedades de las eigenfases a las energías, se tendrá que estudiar la dependencia de las eigenfases como función de algún parámetro, por ejemplo, el número de onda o la energía. En este capítulo usaremos el argumento de invariancia estructural en sistemas que no dependen del tiempo. Particularmente, lo usaremos en el mapeo de Poincaré (PM) de estos sistemas. A partir de éste y de su contraparte cuántica, el mapeo cuántico de Poincaré (QPM), mostraremos que los Hamiltonianos originales tienen las mismas propiedades locales de fluctuación que las eigenfases de los QPM. En otras palabras, las propiedades de las energías del Hamiltoniano original serán casi las mismas que las propiedades de las eigenfases del QPM. Por citar un caso, la rigidez espectral es igual en ambos casos para corto alcance, pero difiere a distancias grandes entre niveles. La equivalencia se mostrará tomando la energía E como parámetro.

El punto importante es que el PM es un mapeo canónico. Por esto, su análogo cuántico $T(q', q; k)$ debe ser un operador unitario.¹ Aquí q y q' son coordenadas en la superficie cuántica de sección.² Entonces todo lo dicho en el capítulo anterior

¹Sin embargo, la construcción de Bogomolny [14] para el QPM necesita que $N = \frac{|M|}{(2\pi\hbar)^{f-1}}$, para que el operador sea unitario. Esto se entiende fácilmente si usamos la regla que asocia una celda de tamaño $(2\pi\hbar)^{f-1}$ a cada estado. Con esto, N celdas ocuparán un volumen total dado por $|M|$. Varios de los eigenvalores no están muy cerca del círculo unitario, como veremos en el capítulo siguiente.

²La definición de Bogomolny [14] para la superficie cuántica de sección (QSS), difiere un poco de la usual. Generalmente se toman los mapas de Husimi como el análogo cuántico de la superficie de sección. Bogomolny dice que en mecánica cuántica el espacio fase es un objeto un poco artificial por lo que él define una QSS como una cierta hiper-superficie $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r) = 0$, donde r es el número de grados de libertad. Sin embargo, el mapeo cuántico de Poincaré

para los mapeos canónicos de sistemas periódicamente excitados, vale también para este mapeo. Es también correcta la asociación con los ensembles circulares de la RMT.

Si el Hamiltoniano tiene un eigenvalor k_n , entonces se cumple

$$\det(1 - T(q', q; k_n)) = 0. \quad (3.1)$$

Ya que $T(q', q; k)$ debe ser unitario, cada una de sus eigenfases atravesará la parte positiva del eje real cuando se tenga la condición de eigenvalor. Por esto es necesario obtener el mapeo de Poincaré como función de la energía, es decir, se debe estudiar cómo dependen las eigenfases θ_i de $T(q', q; k_n)$ en la energía. Si suponemos que las eigenfases se mueven localmente de manera tal que

$$\frac{d\theta_i}{dE} = \text{const.}, \quad (3.2)$$

sus propiedades estadísticas serán también las de los eigenvalores. La hipótesis estadística de Dyson puede también trasladarse a la relación entre las eigenfases del mapeo de Poincaré y los eigenvalores del Hamiltoniano. La hipótesis para el COE [29] dice:

El comportamiento de n niveles consecutivos de un sistema real, donde n es pequeño comparado con el número total de niveles, es estadísticamente equivalente al comportamiento, en el ensemble ortogonal circular, de n ángulos consecutivos θ_i en el círculo unitario, donde n es pequeño comparado con N (el número de renglones o de columnas de la matriz unitaria).

En la siguiente sección se construirá una ecuación que determina la dependencia en la energía del PM. En la sección 3.2 se estudia en detalle el QPM y se obtienen las fluctuaciones para los eigenvalores del Hamiltoniano.

EL MAPEO DE POINCARÉ COMO FUNCIÓN DE LA ENERGÍA.

En esta sección se construye una ecuación para el mapeo de Poincaré con una dependencia en la energía la cual será utilizada en la siguiente sección. Como un primer paso mostramos que la transformación canónica $C^{-1}(E + \Delta E)C(E)$ que manda (q, p) en $(q + \delta q, p + \delta p)$, puede interpretarse como el movimiento de (q, p) cuya dinámica se rige por un Hamiltoniano ficticio $\tau(q, p)$ donde ΔE juega el rol del tiempo. Luego se mostrará que $\tau(q, p)$ es el tiempo que la partícula tarda en

transforma una función reducida de la QSS (como función de la longitud sobre la QSS) en otra sobre la misma QSS y la fase de la función de onda reducida está asociada al momento paralelo a la QSS.

regresar a la superficie de sección, partiendo de (q, p) . Esto se hace mostrando que el generador infinitesimal de la transformación canónica es también $\tau(q, p)$ y que $\tau = \frac{\partial S(q', q)}{\partial E}$.

Consideremos un Hamiltoniano $H(\tilde{Q}, \tilde{P})$, independiente del tiempo, con su PM asociado $C(E)$ el cual tiene una dependencia en la energía E . Aquí las variables con tilde son variables en el espacio fase. Las variables sin tilde denotan variables de la superficie de sección, sobre las cuales actúa $C(E)$. Si desarrollamos este mapeo en serie de Taylor alrededor de E se obtiene

$$C(E + \Delta E) = C(E) + \Delta E \frac{d}{dE} C(E). \quad (3.3)$$

Multiplicando por $C^{-1}(E + \Delta E)$ y reacomodando términos se obtiene:

$$C^{-1}(E + \Delta E)C(E) = 1 - \Delta E C^{-1}(E + \Delta E) \frac{d}{dE} C(E). \quad (3.4)$$

La transformación canónica infinitesimal cercana a la identidad,

$$\Phi(\Delta E) = 1 - (\Delta E) C^{-1}(E + \Delta E) \frac{d}{dE} C(E), \quad (3.5)$$

es un propagador infinitesimal de un Hamiltoniano ficticio $\tau(p, q)$. Este resultado puede obtenerse a partir de la función generatriz de la transformación canónica y su generador infinitesimal, de manera análoga a como lo hacen Leech [33] y Fierz [34]. Sea (p', q') el punto sobre la superficie de sección que se obtiene al aplicar $C(E)$ sobre cierto (p, q) . Denotemos por (P, Q) el punto que se obtiene al aplicar $C^{-1}(E + \Delta E)$ sobre (p', q') . Si ΔE es pequeño,

$$\begin{aligned} P &= p + \delta p \\ Q &= q + \delta q. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Pidiendo que la transformación sea canónica, se tiene:

$$\{P, Q\} = \{p, q\} + \{p, \delta q\} + \{\delta p, q\} + O(\delta^2) = 1 \quad (3.7)$$

es decir,

$$\{p, \delta q\} + \{\delta p, q\} = \frac{\partial(\delta p)}{\partial q} + \frac{\partial(\delta q)}{\partial p} = 0, \quad (3.8)$$

lo que implica

$$\frac{\partial(\delta p)}{\partial q} = -\frac{\partial(\delta q)}{\partial p}, \quad (3.9)$$

por lo que existe un Hamiltoniano ficticio τ tal que

$$\begin{aligned}\delta q &= \Delta E \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial p} \\ \delta p &= -\Delta E \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial q}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Finalmente

$$\begin{aligned}P &= p - \Delta E \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial q} \\ Q &= q + \Delta E \frac{\partial \tau(p, q)}{\partial p}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

es decir, (q, p) en la superficie de sección satisfacen las ecuaciones de Hamilton donde ΔE juega el rol del tiempo y τ el papel del Hamiltoniano.

Los cambios infinitesimales en las variables conjugadas pueden entenderse como producidos por la función generatriz infinitesimal τ . Tomando la transformación canónica infinitesimalmente cercana a la identidad

$$F_2(q, P) = qP + \varepsilon \tau(q, P), \quad (3.12)$$

se tiene:

$$\begin{aligned}Q &= \frac{\partial F_2}{\partial P} = q + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial P} \\ P &= \frac{\partial F_2}{\partial q} = p - \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial q},\end{aligned}\quad (3.13)$$

Y como $(P - p)$ es infinitesimal, basta con remplazar p por P para obtener las ecuaciones 3.11. Hemos usado τ en estas ecuaciones ya que este Hamiltoniano es básicamente el tiempo que tarda la partícula en regresar a la superficie de sección. Lo anterior puede entenderse [35] estudiando las propiedades de la acción. Empecemos en el punto q sobre la superficie de sección y terminemos en el punto q' , es decir, mantenemos fijas las coordenadas inicial y final. Tomemos la variación de la acción permitiendo la variación del tiempo final:

$$\delta S = -H \delta t. \quad (3.14)$$

Si tomamos solamente desplazamientos virtuales que satisfacen la ley de la conservación de la energía, podemos remplazar H por la constante E , lo que da

$$\delta S + E \delta t = 0. \quad (3.15)$$

Escribiendo la acción como $S = \int \{pdq - Hdt\}$, reemplazando de nuevo H por E y haciendo la variación tenemos

$$\delta S = \frac{\partial S_E}{\partial E} \delta E - (t - t_0) \delta E - E \delta t, \quad (3.16)$$

donde $S_E = \int pdq$ es la acción reducida. Sustituyendo 3.16 en la ecuación 3.15 se obtiene:

$$\frac{\partial S_E}{\partial E} = t - t_0. \quad (3.17)$$

Veamos ahora cuál es la función generatriz de $C(E)$. Tomemos la diferencial de la acción real que pasa por los puntos inicial y final q y q' . Se tiene

$$dS_E = p'dq' - pdq \quad (3.18)$$

de donde se concluye, recordando que una transformación canónica está definida por

$$dF = pdq - p'dq' + (H' - H)dt, \quad (3.19)$$

que $-S_E$ es la función generatriz de $C(E)$. Por otra parte, la función generatriz de 3.4 es $S_{E+\Delta E} - S_E$. Esto se tiene ya que la acción real³ que pasa por q' y Q , cumple con

$$dS_{E+\Delta E} = PdQ - p'dq'. \quad (3.20)$$

Finalmente, la diferencial de la acción real que pasa por q y por Q , es:

$$dS_{Total} = PdQ - pdq = d(S_{E+\Delta E} - S_E) \quad (3.21)$$

y como ΔE es pequeño, se tiene que

$$dS_{Total} = \frac{\partial S}{\partial E} dE = \tau dE \quad (3.22)$$

Recapitulando: la transformación canónica infinitesimal $C^{-1}(E + \Delta E)C(E)$ que manda (q, p) en $(q + \delta q, p + \delta p)$ puede interpretarse como el movimiento de (q, p) cuya dinámica se rige por un Hamiltoniano ficticio $\tau(q, p)$, en donde ΔE juega el rol del tiempo. Comparando las Ecs. 3.5 y 3.12 se puede ver que el generador infinitesimal de la transformación canónica es también $\tau(q, p)$, por lo que

$$\tau = -C^{-1}(E + \Delta E) \frac{d}{dE} C(E). \quad (3.23)$$

³Se usa el término acción real para la acción calculada sobre la trayectoria real que sigue la partícula en el Hamiltoniano $H(\bar{Q}, \bar{P})$ y no la acción del hamiltoniano ficticio $\tau(p, q)$.

Se mostró luego que el cambio en la acción real que pasa por q y $q + \delta q$ está dado por $\frac{\partial S}{\partial E} \Delta E$. Como $\frac{\partial S}{\partial E}$ es el tiempo que tarda una partícula en llegar a $q + \delta q$, partiendo de q , se tiene que τ es el tiempo que tarda una partícula en regresar a la superficie de sección después de una iteración del PM:

$$\tau = \frac{\partial S(q', q)}{\partial E}. \quad (3.24)$$

EL MAPEO CUÁNTICO DE POINCARÉ.

Utilizando las relaciones obtenidas en la sección anterior, en esta parte calcularemos $\frac{d\theta_m(k)}{dk}$ donde $\theta_m(k)$ es la m -ésima eigenfase del QPM y k es el número de onda. Se encuentra que para sistemas caóticos el valor de esta derivada es independiente de m lo cual dice que las propiedades de fluctuación locales de las eigenfases son las mismas que las de las energías que es el argumento principal de este trabajo.

En 1992 E. Bogomolny [14] introdujo la versión cuántica del PM: el mapeo cuántico de Poincaré (QPM). Doron y Smilansky[15], utilizando un enfoque de dispersión construyeron independientemente el QPM. La forma explícita del QPM, se discutirá en el siguiente capítulo. Por el momento discutiremos las propiedades que son relevantes para la parte formal de este trabajo.

1. La ecuación de Schrödinger se transforma en un mapeo cuántico $(f-1)$ -dimensional de la forma:

$$\psi(q) = \int_{\Omega} T(q, q'; k) \psi(q') dq' \quad (3.25)$$

donde Ω es una cierta superficie de sección. La dimensión N de las aproximaciones finitas del operador $T(q, q'; k)$, asociado al mapeo cuántico de Poincaré para un número de onda (energía) fijo, está relacionada con el tamaño de la superficie de sección, es decir, tratamos con una dimensión menor. El operador $T(q, q'; k)$ depende de las coordenadas de la superficie cuántica de sección y se puede escribir en términos de las trayectorias que conectan los puntos q y q' y que corresponden a una iteración del PM. El QPM no tiene el problema de convergencia que presenta la fórmula de la traza en la que intervienen órbitas muy largas.

2. Los eigenvalores del sistema cuántico obedecen la siguiente condición de cuantización

$$\det [1 - T(q, q'; k_m)] = 0. \quad (3.26)$$

3. El límite semiclásico de $T(q, q'; k)$ sólo depende de la función generatriz $S(q, q')$ del mapeo de Poincaré. Ésta es una ventaja muy importante. ya

que dado un Hamiltoniano y su mapeo de Poincaré, **no** se necesita conocer la forma explícita del Hamiltoniano ficticio de la sección anterior, sino solamente su acción.

4. Debido a la existencia del Hamiltoniano ficticio, $T(q, q'; k)$ tiene las propiedades de un propagador. Las más relevantes para este trabajo se discuten en los dos puntos siguientes.
5. El operador $T(q, q'; k)$ debe ser unitario ya que el PM es canónico⁴. Sus eigenvalores ϕ_m se pueden escribir como

$$\phi_m(k) = \exp [i\theta_m(k)]. \quad (3.27)$$

donde $\theta_m(k)$ son las respectivas eigenfases. Entonces cuando alguna de las fases es cero (mod 2π), se tiene un eigenvalor k_m del Hamiltoniano.

6. La matriz $T(q, q'; k)$ cumple la siguiente regla de composición:

$$T(q, q'; k) = \int T(q, q_1; k) T(q_1, q_2; k) \cdots T(q_{n-1}, q'; k) dq_1 dq_2 \dots dq_{n-1}. \quad (3.28)$$

donde la integración se hace sobre toda la superficie cuántica de sección. Aquí lo que se está haciendo es la iteración del mapeo cuántico de Poincaré, es decir, se toman órbitas que atraviesan $n - 1$ veces la superficie de sección.

Con esta información podemos ya analizar la contraparte cuántica de la ecuación 3.5. Tomemos la derivada con respecto al número de onda de los eigenvalores de $T(q, q'; k)$. Denotando por $|\psi_m(k)\rangle$ sus eigenfunciones, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_m}{dk} = & \left\langle \psi_m(k) \left| T(k) \right| \frac{d\psi_m(k)}{dk} \right\rangle + \left\langle \frac{d\psi_m(k)}{dk} \left| T(k) \right| \psi_m(k) \right\rangle \\ & + \left\langle \psi_m(k) \left| \frac{dT(k)}{dk} \right| \psi_m(k) \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde hemos omitido la dependencia de $T(q, q'; k)$ en q y q' . Actuando $T(k)$ sobre $|\psi_m(k)\rangle$, y tomando la derivada del lado izquierdo se obtiene

$$ie^{i\theta_m} \frac{d\theta_m}{dk} = \left\langle \psi_m(k) \left| \frac{dT(k)}{dk} \right| \psi_m(k) \right\rangle + e^{i\theta_m} \frac{d}{dk} \langle \psi_m(k) | \psi_m(k) \rangle, \quad (3.30)$$

⁴Este punto y el siguiente se cumplen solamente de manera aproximada en la construcción dada por Bogomolny para el QPM [14] ya que la unitariedad es válida solamente en el límite semiclásico. La construcción de Doron y Smilansky [15] tiene el mismo problema.

donde hemos usado la Ec. 3.27 del lado izquierdo. El segundo término del lado derecho es nulo por ortonormalidad. Multiplicando la ecuación anterior por $-ie^{-i\theta_m(k)}$ se obtiene

$$\frac{d\theta_m(k)}{dk} = -ie^{-i\theta_m(k)} \left\langle \psi_m(k) \left| \frac{dT(k)}{dk} \right| \psi_m(k) \right\rangle, \quad (3.31)$$

de lo cual, usando $e^{-i\theta_m(k)} = \langle \psi_m(k) | T^{-1}(k) | \psi_m(k) \rangle$, se obtiene

$$\frac{d\theta_m(k)}{dk} = \left\langle \psi_m(k) \left| -iT^{-1}(k) \frac{dT(k)}{dk} \right| \psi_m(k) \right\rangle. \quad (3.32)$$

El operador del lado derecho se interpreta como la versión cuántica del hamiltoniano "ficticio" $\tau(q, p)$ (ver eq. 3.23):

$$\frac{d\theta_m(k)}{dk} = \left\langle \psi_m(k) \left| \hat{\tau} \right| \psi_m(k) \right\rangle \quad (3.33)$$

es decir,

$$\hat{\tau} = -iT^{-1} \frac{dT}{dk}. \quad (3.34)$$

Como estamos trabajando en el límite semiclásico, $\hat{\tau}$ debe ser suave comparado con $\psi_m(k)$, es decir, $\hat{\tau}$ cambia poco en cambios del orden de la longitud de onda de $\psi_m(k)$. Además, las distribuciones de Husimi asociadas a $\psi_m(k)$ deben tener densidad constante sobre todo el espacio fase, ya que se está suponiendo el caso completamente caótico. Por esto,

$$\frac{d\theta_m(k)}{dk} = \overline{\tau(p, q)} \quad (3.35)$$

donde el promedio se hace sobre el espacio fase.

La conclusión más importante es que la rapidez (local) con la que se mueven las eigenfases es independiente de m en el límite semiclásico. De aquí se sigue inmediatamente que las propiedades de fluctuación de las eigenfases del QPM se trasladan directamente a las de los eigenvalores del Hamiltoniano, de acuerdo con la conjetura BGS. Dicho de otro modo, los espectros de sistemas Hamiltonianos cuyos análogos clásicos presentan caos, tienen las propiedades de fluctuación del GOE o GUE, dependiendo de las propiedades de simetría. Esto es de acuerdo con la conjetura BGS. Es natural que esta conclusión sólo valga localmente. Los cambios seculares en el espectro deben dar la fórmula de Weyl, pues la rapidez de las eigenfases está relacionada con la densidad de estados [14]. Es importante notar que este resultado depende de como se toma la superficie de sección, es decir, se debe buscar una en la que las fluctuaciones de $\tau(p, q)$ sean pequeñas. De otra manera $\frac{d\theta_m(k)}{dk}$ puede desviarse mucho de $\overline{\tau(p, q)}$. También debe notarse que no se están tomando en cuenta las cicatrices, que hacen que los mapas de Husimi no tengan densidad constante sobre todo el espacio fase.

Capítulo 4

PROPIEDADES PARAMÉTRICAS DE LAS EIGENFASES

En este capítulo se hace uso del método de la integral de frontera (BIM) para calcular las propiedades de las eigenfases del QPM para dos billares distintos: un cuarto de estadio y un rectángulo, uno caótico y el otro integrable. Después se estudia la transferencia de las propiedades estadísticas de la eigenfases del QPM a las energías del Hamiltoniano.

MÉTODO DE LA INTEGRAL DE FRONTERA.

En esta sección, basados en el BIM, encontramos un mapeo cuántico del tipo 3.25 para un billar con condiciones de Neumann a la frontera. Luego se da una forma explícita para una aproximación finita de $T(q, q'; k)$ para billares.

Siguiendo Bogomolny [14] y Boasman [21], usaremos el método de la integral de frontera para la ecuación de Helmholtz. Para un billar de área A y frontera B esta ecuación toma la forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_n(x) + k_n^2 \Psi_n(x) &= 0 & x \text{ dentro de } A \\ \frac{\partial \Psi_n(x)}{\partial n} &= 0 & x \text{ sobre } B \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada normal en el punto x .

Introduciendo la función de Green $G_0(x', x; k)$ para el Laplaciano libre y usando la identidad de Green, se obtiene, después de integrar sobre toda el área,

$$\begin{aligned} (k - k_n) \int_A G_0(x', x; k) \Psi_n(x) dx + \oint_B dq \left\{ \frac{\partial G_0(x', q; k)}{\partial n} \Psi_n(q) - \frac{\partial \Psi_n(q)}{\partial n} G_0(x', q; k) \right\} \\ = \begin{cases} \Psi_n(x') & \text{si } x' \text{ está dentro de } A \\ \frac{1}{2} \Psi_n(x') & \text{si } x' \text{ está sobre de } B \\ 0 & \text{si } x' \text{ está fuera de } A. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Haciendo $k = k_n$ e imponiendo condiciones a la frontera de Neumann, la ecuación anterior con x' sobre la frontera toma la forma

$$2 \oint_B \frac{\partial G_0(q', q; k)}{\partial n} \Psi_n(q) dq = \Psi_n(q'). \quad (4.3)$$

Aquí q y q' denotan coordenadas en la frontera B . Nótese que la ecuación 4.3 es una ecuación del tipo 3.25 que envía una función de la superficie cuántica de sección (en este caso la frontera), en otra sobre la misma superficie. Discretizando la frontera por r puntos $\{q_i\}_{i=1, \dots, r}$ igualmente espaciados y aproximando la integral mediante la regla del trapecio, esta ecuación se convierte en

$$2d \sum_{j=1}^r \frac{\partial G_0(q_s, q_j; k)}{\partial n} \Psi_n(q_j) = \Psi_n(q_s). \quad (4.4)$$

Aquí d es la distancia introducida para discretizar la integral. Como la función de Green para el Laplaciano libre en dos dimensiones está dada por la función de Hankel de orden cero y primera especie $H_0^{(1)}$, de acuerdo con

$$G_0(q_i, q_j; k) = \frac{-i}{4} H_0^{(1)}(k|q_i - q_j|), \quad (4.5)$$

se tiene que la derivada normal de $G_0(q_s, q_i; k)$ es proporcional a $H_1^{(1)}$. La Ec. 4.4 es entonces

$$\sum_{j=1}^N \frac{kd}{2i} \{\hat{n}(q_j) \cdot (q_s - q_j)\} H_1^{(1)}(k|q_s - q_j|) \Psi_n(q_j) = \Psi_n(q_s), \quad (4.6)$$

que determina los eigenvalores del Hamiltoniano con la condición

$$\det(1 - T_{s,t}(k)d) = 0 \quad s, t = 1, \dots, N \quad (4.7)$$

con

$$T_{s,t}(k) = \frac{k}{2i} \{\hat{n}(q_t) \cdot (q_s - q_t)\} H_1^{(1)}(k|q_s - q_t|). \quad (4.8)$$

Sin embargo, si se buscan las eigenfases del QPM se debe resolver la ecuación de eigenvalores para la matriz $T_{s,t}(k)$.

Aquí hemos introducido el operador $T_{s,t}(k)$ que, junto con la ecuación 4.3, define el QPM. Sin embargo la definición de Bogomolny[14] usa una versión simetrizada en s y t de $T_{s,t}(k)$ y la forma asintótica de la función de Hankel. Otra manera de discretizar la integral de 4.3, es tomar un cierto conjunto completo de funciones ortonormales sobre la frontera $\{\Phi_s(q)\}$ y expandir la función $\Psi_n(q)$ en estas funciones:

$$\Psi_n(q) = \sum_s a_s \Phi_s(q). \quad (4.9)$$

La manera usual de tomar $\Phi_s(q)$ para billares en dos dimensiones es $\Phi_s(q) = \exp(2\pi i s q/B)$ en donde B es el perímetro del billar y q es la coordenada a lo largo del mismo. Introduciendo este desarrollo, multiplicando por $\Phi_t(q')$ e integrando sobre q' , la ecuación 4.3 se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2 \sum_s a_s \left[\oint_B \Phi_s(q) \frac{\partial G_0(q', q, k)}{\partial n} \Phi_t(q') dq dq' \right] = a_t, \quad \text{para } t = 1, \dots, N. \quad (4.10)$$

De nuevo se tiene que resolver la ecuación de eigenvalores para obtener las eigenfases del QPM. Aunque no es claro que ambas maneras de discretizar sean equivalentes. Boasman [21] ha mostrado que a primer orden son equivalentes.

EL BILLAR RECTANGULAR Y EL CUARTO DE ESTADIO.

En esta sección comenzamos con las aplicaciones a sistemas particulares, es decir, se estudiarán las propiedades de las eigenfases del QPM en un billar rectangular y en un cuarto de estadio usando el BIM. Se encuentra que la distribución de velocidades es más ancha en el caso clásicamente integrable que en el caso clásicamente caótico, de acuerdo con los resultados teóricos obtenidos en el capítulo anterior.

En esta sección estudiaremos un billar rectangular y un cuarto de estadio usando el BIM. Los pasos a seguir son

1. Diseñar el billar (es decir dar la frontera B).
2. Dar el número de puntos en la frontera usando $r \geq N = \frac{M_s}{(2\pi\hbar)^{f-1}}$.
3. Calcular los elementos de matriz $T_{i,j}(k)$ y obtener las eigenfases como función de k .

Tomamos primero un cuarto de estadio de radio R y longitud $L = \frac{R}{2}$ y luego un billar rectangular con razón de lados dada por la razón áurea. Esta proporción se toma así ya que presenta menos degeneraciones exactas y la distribución de espaciamientos de los eigenvalores es muy cercana a la de Poisson para pocos eigenvalores. Si tomamos la frontera del billar como la superficie cuántica de sección, el volumen accesible para ésta es $M_s = 2B$. Como $f = 2$, se tiene que $N = \frac{B}{\pi\hbar}$. En lo que sigue, tomaremos $\hbar = 1$. Estamos listos entonces para estudiar los eigenvalores de $T_{i,j}(k)$, notando que los eigenvalores del billar más altos que se pueden obtener están acotados por $k_{\max} = \frac{2\pi}{2d}$.

En la figura 4.1 se muestran los eigenvalores del QPM para el cuarto de estadio con k fijo. La observación más importante es que algunas fases están en el centro del círculo, es decir, se viola la unitariedad. Esto puede entenderse fácilmente en

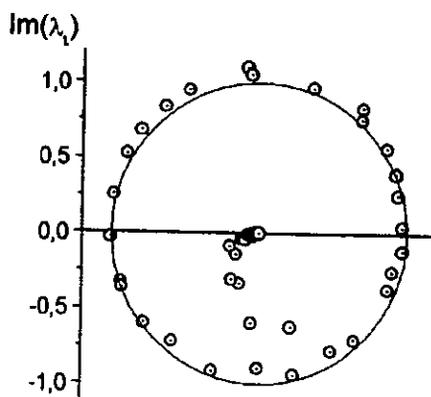


Figura 4.1: Eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para un cuarto de estadio con $R = 40$, $L = 20$ y $k = 0.49$. Nótese que el mapeo no es unitario. Se tomó $N = 58$, es decir, el número de eigenvalores es 58, pero sólo se aprecian alrededor de 30. Los demás se confunden con el origen.

un caso particular: el QPM para un rectángulo de $L_1 \times L_2$, tomando la superficie de sección paralela a L_2 y usando las componentes de Fourier a lo largo de esta línea como la base. En este caso

$$T_{m,m} = \exp\left(i \frac{S_m(k)}{\hbar}\right), \quad T_{m,n} = 0 \quad \text{si } m \neq n, \quad (4.11)$$

y

$$S_m = 2L_1 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi \hbar m}{L_2}\right)^2}. \quad (4.12)$$

El argumento de Bogomolny[36] dice que la matriz será unitaria si $d = \pi/k_m$, donde k_m es el valor máximo del momento en el punto q_m . En el caso del rectángulo, $k_m = \max(\frac{\pi \hbar m}{L_2})$ por lo que se tendrá una matriz unitaria si $k \geq k_m$. Esto equivale a tomar valores positivos para la raíz cuadrada de la acción S_m en 4.12. Desafortunadamente este valor de k corresponde a k_{\max} arriba del cual no podemos obtener resultados confiables. La no unitariedad es entonces por causas numéricas.

En la figura 4.2 se grafican éstos, pero ahora para el rectángulo. Se puede observar que cuando se está cerca de un eigenvalor las normas se acercan más al círculo unitario, como se ve en la figura 4.3, en la que se graficaron las normas como función de las fases para el cuarto de estadio. Para el billar rectangular, los

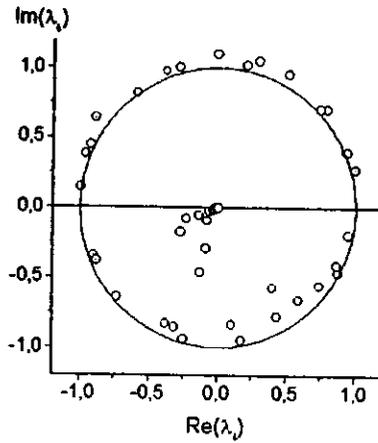


Figura 4.2: Eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para un rectángulo de 36×58.249 , $k = 0.5$. En este caso el mapeo tampoco es unitario.

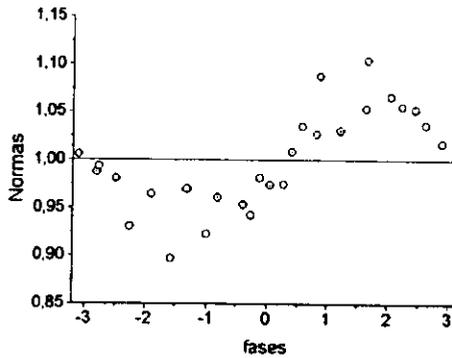


Figura 4.3: Normas de los eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para el cuarto de estadio. Se tomaron sólo las normas mayores que 0.8.

resultados análogos se dan en la figura 4.4. Las propiedades estadísticas de las

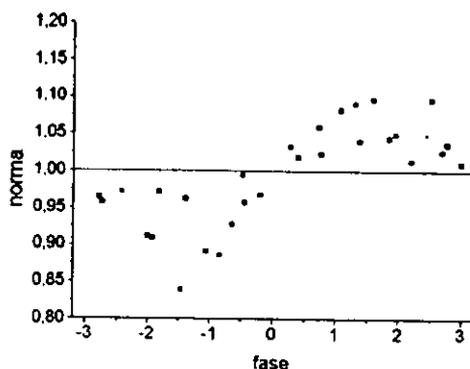


Figura 4.4: Normas como función de las fases para el billar rectangular. Se tomaron solamente las normas que son mayores a 0.8

eigenfases revelaron los resultados conocidos de repulsión de niveles para el cuarto de estadio y de degeneración para el rectángulo. Aparte de la distribución de espaciamientos de primeros vecinos, se estudió la rigidez espectral del número de niveles (o varianza de número), obteniéndose resultados que verifican la asociación:

sistema caótico \implies fluctuaciones tipo COE

y

sistema integrable \implies fluctuaciones no universales,

de acuerdo con la conjetura BGS.

En la figura 4.5 se estudian los eigenvalores para el estadio como función de k . En las figuras 4.6 y 4.7 se estudian sus fases y normas, respectivamente. Al parecer, las normas empiezan desde cero hasta alcanzar el valor uno. Después de esto empiezan a oscilar alrededor de este valor. En primera aproximación la rapidez es constante para casi todas las eigenfases. Los eigenvalores que están muy cerca del origen casi no se mueven.

Para hacer un estudio más detallado de las velocidades de las eigenfases, en la figura 4.8 se grafica un histograma de velocidades. Se puede observar una distribución que tiene sólo un pico, lo cual indica que las eigenfases se mueven, básicamente, con la misma velocidad. El máximo de esta distribución se mantiene casi fijo para varios intervalos de energía como puede apreciarse en la figuras 4.9 y 4.10.

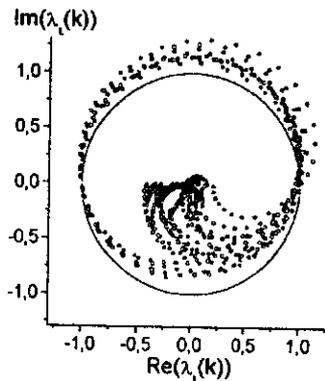


Figura 4.5: Eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para el cuarto de estadio, como función del número de onda. Se graficaron solo aquéllos cuyas normas son mayores que 0.01. Los valores de k están entre 0.05 y 0.25. Se puede notar que algunas fases viajan a velocidad casi constante.

En la tabla 4.1 se tabulan el centro y la anchura de estas distribuciones y también de otros valores de k .

Ya que la Eq. 3.35 debe tener un cambio secular dado por la fórmula de Weyl, el máximo se debería mover. Este resultado, aparentemente contradictorio con las figuras 4.9 y 4.10, puede entenderse si recordamos que la cuantización dada por Bogomolny no es unitaria para todos los valores de k . La densidad promedio de niveles puede entonces aumentar por dos motivos: a) que la velocidad de las eigenfases aumente, lo cual no sucede en este caso y b) que el número de eigenfases sobre el círculo unitario aumente. Un sencillo cálculo a partir del número de fases sobre el círculo unitario nos muestra que la segunda opción es la que se cumple y que la densidad de niveles aumenta proporcionalmente con k , de acuerdo con la fórmula de Weyl.

Las figuras análogas para un billar rectangular se dan en las figuras 4.11 a 4.19. Las normas parecen tener un comportamiento similar a las del cuarto de estadio pero las fases tienen un comportamiento muy distinto. En la figura 4.12 puede observarse que las fases no se mueven con una sola velocidad. Para cuantificar esto, el histograma de velocidades se grafica en la figura 4.14. Se puede apreciar en este caso que las fases viajan con velocidades diferentes. La razón de las velocidades mayor y menor (los máximos más alejados entre sí) están en igual razón que los lados del rectángulo, es decir, están asociadas con las dos acciones clásicas. En las figuras 4.15 a 4.19 se grafican estas distribuciones para distintos intervalos de

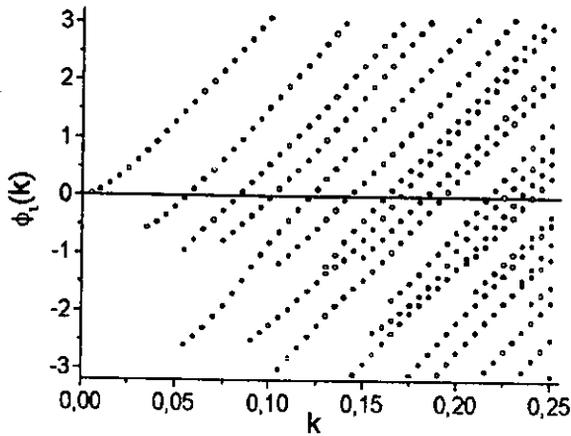


Figura 4.6: Fases de los eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para el cuarto de estadio. Se graficaron sólo aquellas cuya norma asociada es mayor que 0.01. Las fases que están la mayor parte del tiempo en los extremos π o $-\pi$ corresponden a eigenvalores cercanos al origen. Nótese que la mayoría de las fases viajan a velocidad constante y que esta velocidad es casi la misma para todas las fases.

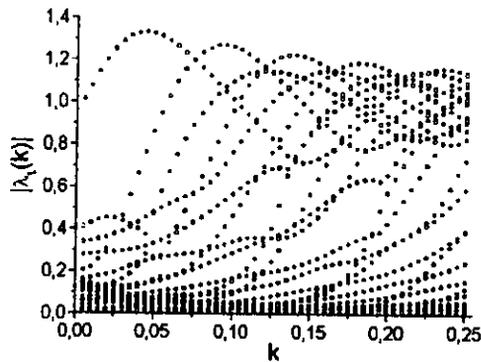


Figura 4.7: Normas de los eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para el cuarto de estadio. Se graficaron solamente las mayores que 0.01.

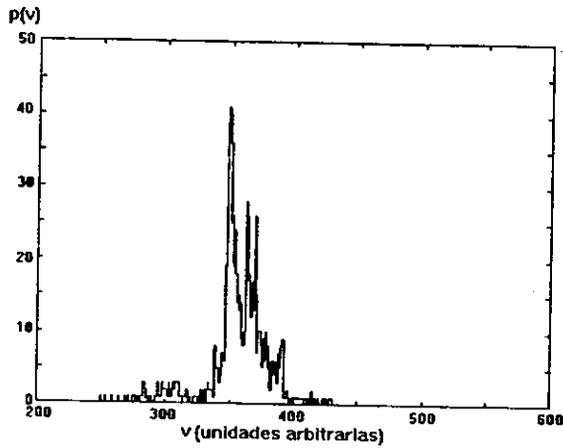


Figura 4.8: Histograma de velocidades para el cuarto de estadio.

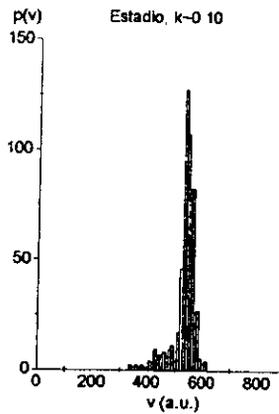


Figura 4.9: Distribución de velocidades para un cuarto de estadio con $R = 200$ y $L = 100$. La dimensión de la matriz es $N = 290$, y se tomaron solamente las fases (en total $Nf = 29$) cuya norma es mayor que 0.6.

$k\sim$	Centro	Anchura
0.10	530.586	39.839
0.15	528.960	39.140
0.20	528.905	42.797
0.25	528.826	42.575
0.30	529.078	39.405
0.35	529.008	38.684
0.40	529.788	37.352
0.45	530.005	33.713

Tabla 4.1: Centros y anchuras para las distribuciones de velocidades para el cuarto de estadio

$k\sim$	Centro	Anchura
0.10	515.438	77.142
0.15	516.801	85.977
0.20	519.923	82.403
0.25	519.559	78.797
0.30	520.720	73.579
0.35	521.260	72.360
0.40	522.025	72.095
0.45	522.057	71.590

Tabla 4.2: Centros y anchuras para las distribuciones de velocidades del billar rectangular

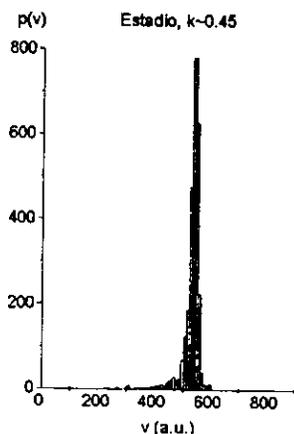


Figura 4.10: Distribución de velocidades para un el cuarto de estadio. Los valores de N , L y R son los mismos que en la figura 4.13 y $Nf = 137$.

energía. En éstas se observa que van apareciendo fases con velocidades diferentes. Los centros y anchuras de las distribuciones de velocidades se dan en la tabla 4.2. En esta tabla se nota que las distribuciones en el caso integrable son más anchas. Otro punto importante es que las anchuras de las distribuciones deberían de hacerse más angostas cuando aumenta la energía E . Esto puede entenderse si notamos que

$$k \frac{d\theta_i}{dE} = \frac{d\theta_i}{dk}. \quad (4.13)$$

Si suponemos que la anchura es constante como función de k , concluimos que las anchuras como función de E van como k^{-1} , de acuerdo con la predicción teórica (suponiendo que $\frac{d\theta_i}{dE} = cte$) y verificación numérica de Doron y Smilansky para el billar de Sinai [15].

Para finalizar este capítulo, resumiremos los resultados numéricos que se obtuvieron. Para el cuarto de estadio (sistema clásicamente caótico), las fases se mueven casi con la misma velocidad (con algunas excepciones), de acuerdo a la teoría. Para el rectángulo (sistema integrable), la distribución es más ancha y a veces tiene varias velocidades típicas. La importancia de éstos resultados para la conjetura BGS es la siguiente: Se sabe de los argumentos de invariancia estructural que las propiedades de fluctuación de las eigenfases del QPM son las mismas que las del COE para sistemas caóticos. Esto se mostró al iniciar el tercer capítulo de esta tesis. En ese mismo capítulo se mostró también que la velocidad

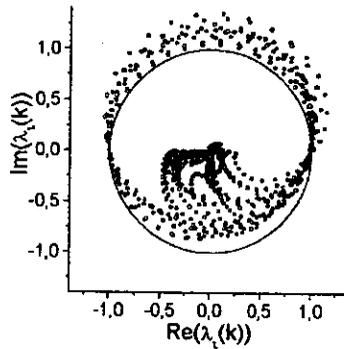


Figura 4.11: Eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré, como función del número de onda, para el billar rectangular de $36 \times (18 \times Aur)$. Se tomó $N=60$. Se graficaron sólo aquellos cuyas normas son mayores que 0.01. Los valores de k están entre 0.05 y 0.25.

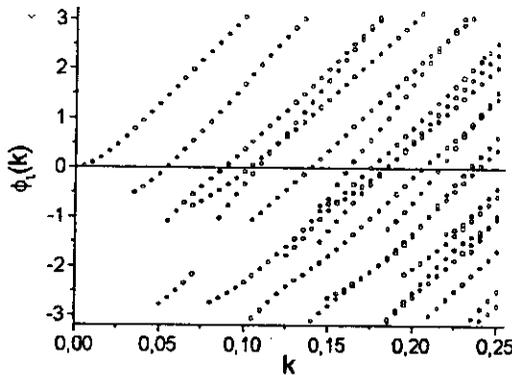


Figura 4.12: Fases de los eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para billar rectangular. Se graficaron sólo aquellas cuya norma asociada es mayor que 0.5. Notese que, aunque las fases se mueven a velocidad constante, esta es diferente para diferentes fases.

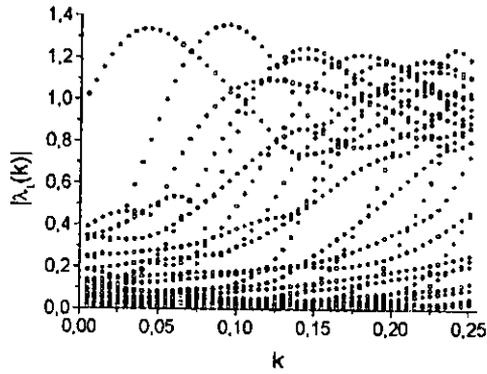


Figura 4.13: Normas de los eigenvalores del mapeo cuántico de Poincaré para el rectángulo. Se graficaron solamente las mayores que 0.01.

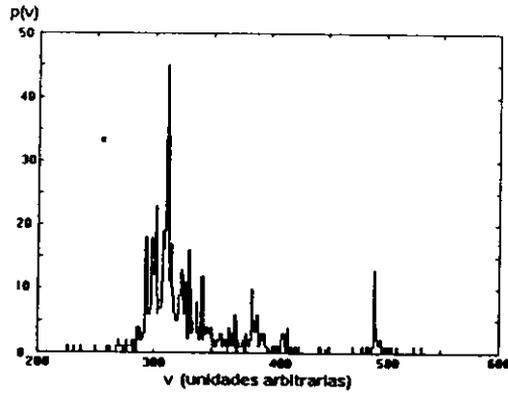


Figura 4.14: Histograma de velocidades para el billar rectangular.

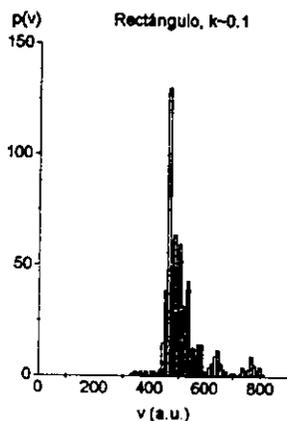


Figura 4.15: Distribución de velocidades de las fases de un billar rectangular cuya razón de lados es la razón áurea. La dimensión de la matriz es $N=300$, y el número de fases que se tomaron $N_f=33$ corresponde a aquellas cuya norma asociada es mayor que 0.6.

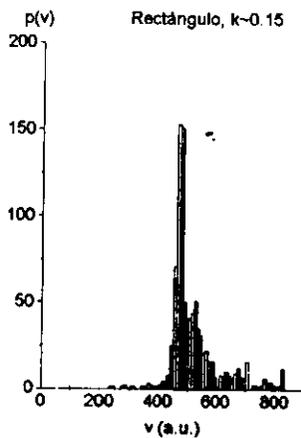


Figura 4.16: Distribución de velocidades para el billar rectangular. $N=300$ y $N_f=46$.

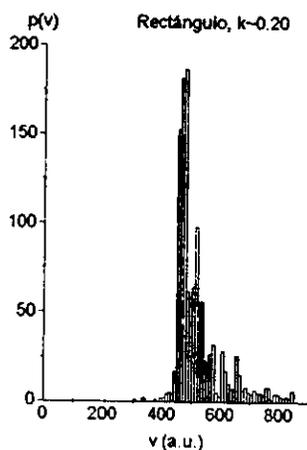


Figura 4.17: Distribución de velocidades para el billar rectangular. $N=300$ y $N_f=62$.

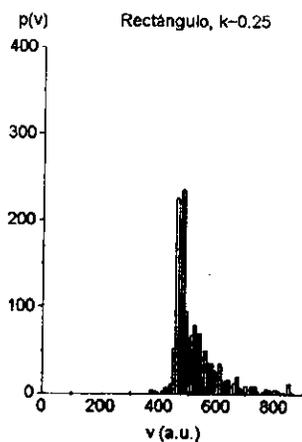


Figura 4.18: Distribución de velocidades para el billar rectangular. $N=300$ y $N_f=78$.

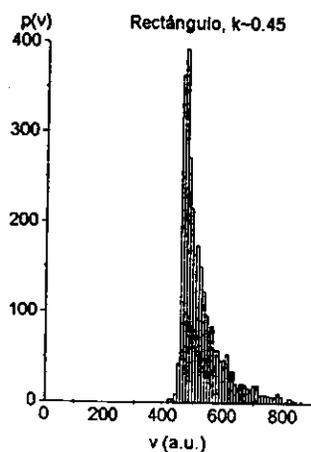


Figura 4.19: Distribución de velocidades para el billar rectangular. $N = 300$ y $Nf = 136$.

de las eigenfases es localmente constante para sistemas caóticos. Esta conclusión da como resultado que las propiedades locales de fluctuación de las eigenfases del QPM se trasladan a las del espectro de energías del Hamiltoniano completo. En este capítulo verificamos entonces que esta conclusión se cumple para un billar completamente caótico y que es falsa para un billar integrable.

Capítulo 5

MQDT: UN MAPEO CUÁNTICO DE POINCARÉ.

En el capítulo anterior verificamos numéricamente que todas las fases del QPM para un billar caótico se mueven casi con la misma velocidad, de acuerdo con la predicción teórica. Puede argumentarse que un billar es un sistema muy simple y particular. Es entonces conveniente buscar otro sistema realista en donde podamos verificar nuestras conclusiones. Recientemente se ha sugerido que las moléculas de Rydberg [24, 25, 37, 38] pueden servir como una excelente prueba para las evidencias cuánticas del caos. Restringiendo el análisis al caso más simple, estas moléculas pueden visualizarse como un electrón que se mueve en una órbita que a grandes distancias es hidrogenoide, alrededor de un carozo iónico rotante con simetría cilíndrica (ver Fig. 5.1). El problema cuántico puede resolverse con gran exactitud para grandes números de niveles usando la teoría del defecto cuántico para varios canales (MQDT) [39, 40]. Esta teoría tiene además un límite clásico que se conoce y que es un mapeo de Poincaré sobre la esfera [37]. Entonces el análogo cuántico de este mapeo de Poincaré es, por construcción, la MQDT. Siguiendo el razonamiento del tercer capítulo, la MQDT puede entonces interpretarse como un mapeo cuántico de Poincaré y se espera que sus eigenfases se muevan rígidamente para moléculas cuyo mapeo de Poincaré sea completamente caótico.

La base de la MQDT para una molécula de Rydberg es la siguiente:

1. Para estudiar la molécula de Rydberg, el espacio de configuración se divide por medio de una cáscara esférica, en una zona cercana y otra lejana para el movimiento del electrón de Rydberg, con respecto al resto del sistema molecular.
2. Cuando el electrón está en la región asintótica, es decir, casi todo el tiempo para un electrón de Rydberg, solamente siente la parte isotrópica Coulombiana del potencial. En esta zona la función de onda está descrita por una función de tipo Coulomb desacoplada del movimiento rotacional del carozo.
3. En la región de colisión, el electrón siente además el potencial de simetría cilíndrica y de corto alcance del carozo iónico. Debido al carácter casi instantáneo de la colisión, la aproximación Born-Oppenheimer es válida.

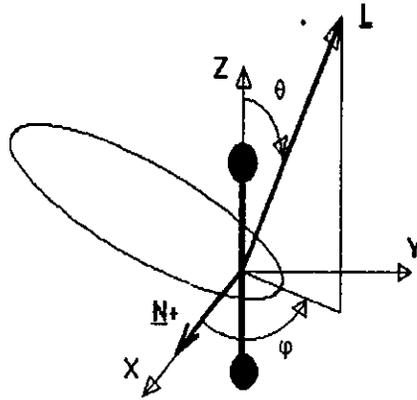


Figura 5.1: Marco de referencia molecular. N^+ es el momento angular del carozo molecular, L es el momento angular del electrón y (θ, φ) son los ángulos polares de L .

4. La MQDT pone el efecto de la colisión del electrón con el carozo iónico como un conjunto de corrimientos de fase (análogos a los definidos en la teoría de dispersión, pero esta vez con respecto a las funciones de Coulomb entrantes y salientes) sobre la superficie que separa las zonas cercana y lejana.
5. Además de los corrimientos de fase de la parte radial, hay una parte angular que pasa del sistema de referencia del laboratorio al sistema de referencia molecular y que es proporcional a un coeficiente de Clebsh-Gordan.

Para profundizar en los detalles de la MQDT existen excelentes libros [22, 41], artículos de revisión [23, 42] y los artículos originales [43, 44]. En la primera parte de este capítulo, reinterpretaremos el conjunto fundamental de ecuaciones de la MQDT como un mapeo cuántico de Poincaré en la representación de momento angular. Haremos también una breve revisión del mapeo de Poincaré sobre la esfera.

En la segunda parte del capítulo se hace un estudio numérico de las propiedades de las velocidades (con respecto al número de onda) de las eigenfases de este QPM, para los estados ligados de una molécula de Rydberg cuyo mapeo de Poincaré es caótico o integrable.

El conjunto fundamental de ecuaciones.

En esta sección analizamos el conjunto fundamental de ecuaciones del MQDT, para una molécula diatómica de Rydberg, el cual puede interpretarse como un mapeo cuántico de Poincaré.

Consideremos un electrón ligado a una molécula de dos átomos, ionizada con una carga $+e$ (ver figura 5.1). Cuando el electrón está lejos del carozo, su función de onda es una función de Coulomb de momento angular orbital L desacoplada del movimiento del carozo de momento angular N^+ . Cuando el electrón de Rydberg está cerca del carozo, siente además la parte del potencial que tiene simetría cilíndrica y es de corto alcance. Esto hace que los niveles de energía se separen en $2L+1$ subniveles de momento angular L sobre los niveles electrónicos etiquetados por la proyección Λ de L en el eje del carozo (eje OZ en la figura 5.1). En esta región se acoplan los momentos angulares del electrón y del carozo iónico, pero la aproximación Born-Oppenheimer es válida ya que la velocidad de electrón es mucho mayor que la del carozo.

Cuando se tiene un estado ligado, se satisface el conjunto fundamental de ecuaciones de la MQDT:

$$\sum_{\Lambda=-L}^{\Lambda=L} U_{N^+, \Lambda} \sin(\pi \{ \nu_{N^+} + \mu_{\Lambda} \}) A_{\Lambda} = 0 \quad (5.1)$$

donde los A_{Λ} son las amplitudes del desarrollo de la función de onda en los armónicos esféricos $Y_L^{\Lambda}(\theta, \varphi)$ y están determinados por este sistema de ecuaciones. Aquí $\nu_{N^+}^2 = (n - \mu_{\Lambda})^2$ es el número cuántico efectivo principal y μ_{Λ} es el defecto cuántico del estado Λ . Los elementos $U_{N^+, \Lambda}$ del operador unitario U son proporcionales a un coeficiente Clebsh-Gordan [39]:

$$U_{N^+, \Lambda} = \langle L, -\Lambda, J, \Lambda | N^+, 0 \rangle (-1)^{J-N^++\Lambda} (2 - \delta_{\Lambda, 0})^{\frac{1}{2}}, \quad (5.2)$$

y provienen del cambio de marco de referencia, del molecular al del laboratorio; J es el momento angular total que resulta de sumar el momento angular del carozo y del electrón en la región asintótica; $\nu_{N^+}^2$ está relacionado con la energía en la siguiente forma:

$$E = \frac{-\mathcal{R}}{\nu_{N^+}^2} + E^+ + BN^+(N^+ + 1), \quad (5.3)$$

donde E^+ es la energía electrónica más la vibracional del carozo (que tomamos como cero). \mathcal{R} es la energía de Rydberg (0.5 en unidades atómicas). Esta fórmula define la dependencia de la energía con N^+ . B es una constante de rotación $1/I$, con I el momento de inercia.

El límite semiclásico de la MQDT para moléculas de Rydberg fue encontrado por Lombardi y colaboradores y es un mapeo canónico [24]. Este mapeo tiene la siguiente forma: sean (θ, φ) los ángulos polares de L con respecto al eje OZ

molecular y sean (α, β) sus ángulos polares con respecto al eje OX (N^+). Dado (θ_0, φ_0) se calcula (α_0, β_0) para después dar

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_0 \\ \beta_1 &= \beta_0 - 2\pi \frac{T_e}{T_n}\end{aligned}\quad (5.4)$$

donde $\frac{T_e}{T_n}$ es la razón de los periodos de rotación entre el electrón y el núcleo molecular. Esto corresponde al movimiento del electrón en la región asintótica. Después, durante la colisión, se tiene una precesión dada por:

$$\delta\varphi = K \cos(\theta_1). \quad (5.5)$$

K es la constante de acoplamiento entre el electrón de Rydberg y la molécula. Este acoplamiento está asociado con los defectos cuánticos de la manera siguiente:

$$\mu_\Lambda = \mu_0 - \frac{K}{4\pi L} \Lambda^2. \quad (5.6)$$

Finalmente, hay que tomar en cuenta que el marco de referencia molecular no es fijo durante la colisión, pues el momento angular total se conserva. De esto tenemos

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \delta\varphi + \delta\varphi' \quad (5.7)$$

donde $\delta\varphi'$ es la precesión del marco de referencia molecular alrededor del eje OZ . Esta precesión se calcula resolviendo el par de ecuaciones que dan la conservación del momento angular total (en las direcciones OX y OY) para $\delta\varphi'$ y N_2 :

$$\begin{aligned}L \sin(\theta) \cos(\varphi_1) + N_1 &= L \sin(\theta) \cos(\varphi_1 + \delta\varphi) + N_2 \cos(\delta\varphi') \\ L \sin(\theta) \sin(\varphi_1) &= L \sin(\theta) \sin(\varphi_1 + \delta\varphi) + N_2 \sin(\delta\varphi') \\ L \cos(\theta_1) &= L \cos(\theta_2)\end{aligned}\quad (5.8)$$

donde N_1 y N_2 son los momentos angulares del núcleo molecular antes y después de la colisión.

Ya que el límite clásico de la MQDT es un mapeo de Poincaré, la MQDT debe ser un QPM. Tomemos este punto de vista de ahora en adelante. Consideremos la transformación unitaria \mathbb{T} con elementos de matriz

$$T_{N^+, \Lambda} = U_{N^+, \Lambda} \exp(i\pi \{\nu_{N^+} + \mu_\Lambda\}). \quad (5.9)$$

Esta transformación contiene una parte angular ($U_{N^+, \Lambda}$) que relaciona el momento angular del electrón en la región asintótica, con el giro libre del carozo. La parte radial está dada por $\exp(i\pi \{\nu_{N^+} + \mu_\Lambda\})$ y toma en cuenta a través de los defectos

cuánticos μ_A el efecto del potencial de corto alcance en el electrón con respecto al efecto del potencial de Coulomb. La ecuación 5.1 equivale a

$$(\mathbb{T} - \mathbb{I})\mathbf{A} = 0 \quad (5.10)$$

donde \mathbf{A} es el vector con componentes A_λ . Esta ecuación tiene solución si

$$\det(\mathbb{T} - \mathbb{I}) = 0 \quad (5.11)$$

y a su vez nos permite considerar eigenfases en vez de eigenvalores de energía ya que la ecuación 5.11 se cumple cada vez que \mathbb{T} tiene un eigenvalor igual a uno o una eigenfase cero. Esto se cumplirá para energías discretas ya que \mathbb{T} depende suavemente de la energía a través de ν_{N+} (ver ecuación 5.3). \mathbb{T} es la cuantización exacta (ya que se está transformando el momento angular del electrón, cuya cuantización es exacta) del mapeo de Poincaré sobre la esfera. Además es un mapeo unitario debido a que se están tomando valores enteros del momento angular. Sin embargo el mapeo clásico es una aproximación al problema original. La aproximación consiste en mantener la magnitud del momento angular orbital del electrón fijo. Esto hace que la dimensión de la superficie de sección sea igual a dos.

PROPIEDADES DE LAS EIGENFASES.

Como complemento a la sección anterior, en esta sección estudiaremos las propiedades de las eigenfases del QPM para una molécula diatómica de Rydberg. Nuevamente encontramos que la distribución de velocidades es más ancha en el caso integrable que en el caso caótico.

Calcularemos en esta sección las propiedades de las eigenfases para una molécula de Rydberg según el MQDT. En este caso tomamos $J = 200$ y $L = 40$. Solamente consideraremos los estados pares. Variamos el acoplamiento K para obtener un mapeo de Poincaré caótico o integrable. El primero se obtiene cuando $K = 39.98765$, el segundo para $K = 3.98765$. En este caso, los eigenvalores sí están sobre el círculo unitario. De hecho, el error en las normas es menor a 10^{-7} , es decir solamente hay un error de redondeo. En las figuras 5.2 y 5.3 se estudian las fases como función de la energía para los casos caótico e integrable. Al igual que en el estadio, todas las fases en el caso caótico viajan casi con la misma velocidad. Las distribuciones de velocidades para ambos casos se dan en las figuras 5.4 y 5.5. La distribución para el caso integrable es mucho más ancha y plana que la del caso caótico. De esto, se concluye que las fases para el caso caótico viajan con velocidades cercanas, lo cual no sucede en el caso integrable.

Resumiendo los resultados de este capítulo: se ha mostrado heurísticamente que la MQDT es un mapeo cuántico de Poincaré. También se mostró que las eigenfases del operador asociado a la MQDT se mueven prácticamente con la misma velocidad para el caso caótico. Por otra parte, para el caso integrable, la

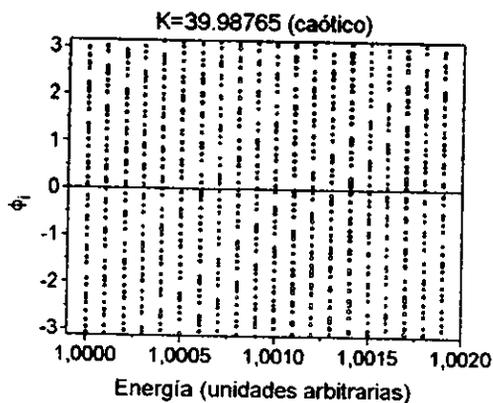


Figura 5.2: Fases del mapeo MQDT para una molécula de Rydberg como función de la energía para el caso caótico. Se tomaron 20 valores de energía entre $-1.26E-6$ y $-1.244E-6$, para los niveles pares, $L=40$, $J=200$.

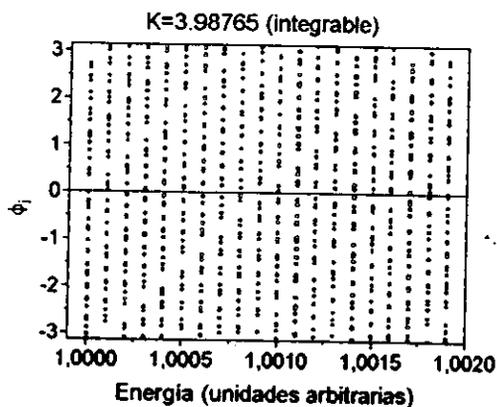


Figura 5.3: Fases del mapeo MQDT para una molécula de Rydberg como función de la energía para el caso integrable. Se tomaron 20 valores de energía entre $-1.26E-6$ y $-1.244E-6$, para los niveles pares, $L=40$, $J=200$.

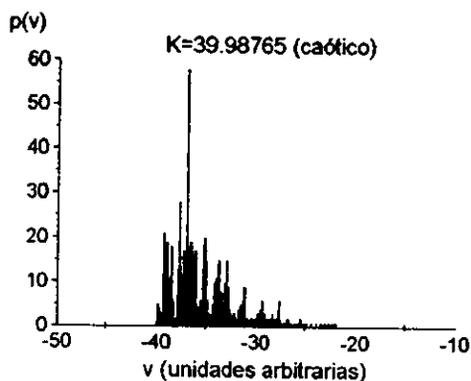


Figura 5.4: Distribuciones de velocidades para una molecula de Rydberg: caso caótico. Se tomaron 20 valores de energía entre $-1.26E-6$ y $-1.244E-6$, para los niveles pares, $L=40$, $J=200$.

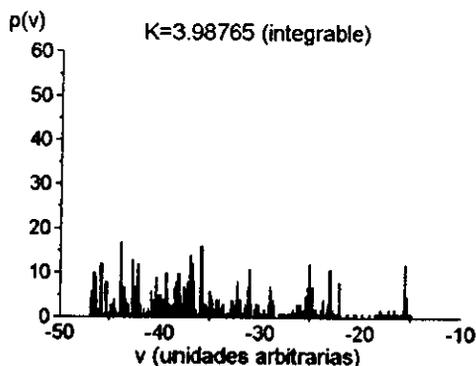


Figura 5.5: Distribuciones de velocidades para una molecula de Rydberg, caso integrable. Se tomaron 20 valores de energía entre $-1.26E-6$ y $-1.244E-6$, para los niveles pares, $L=40$, $J=200$.

distribución de velocidades es mucho mas ancha y plana. El resultado obtenido para el caso completamente caótico, en éste como en el capítulo anterior, verifican los resultados teóricos del capítulo 3 y nos dice que las propiedades estadísticas de las eigenfases (cuando menos para rangos pequeños de energía) pasan a ser las de las energías, y las fases se mueven con velocidades casi iguales.

Como una posible aplicación de este resultado, tenemos que los eigenvalores del Hamiltoniano original pueden obtenerse no solamente a través del determinante, sino también a partir de las gráficas de las fases como función de la energía. Esto puede servir para disminuir los tiempos de cómputo para sistemas caóticos o integrables. En los primeros, es muy probable que podamos predecir con bastante exactitud en dónde aparecerán nuevas energías. En los segundos, es posible saber el número de eigenvalores degenerados por un simple conteo de las eigenfases que no son eigenvalores. La degeneración, en este último caso, hace aumentar los tiempos de cómputo en órdenes de magnitud [25].

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En este trabajo se hizo una revisión del concepto de invariancia estructural, que relaciona el caos hamiltoniano con los ensembles clásicos de matrices de Cartan (CUE y COE). Este argumento probabilístico indica que si un mapeo canónico completamente caótico actúa de tal manera que el espacio fase no muestra estructura alguna, las propiedades espectrales de su análogo cuántico serán iguales a las del COE o CUE, con probabilidad uno, dependiendo de si el mapeo es invariante ante inversiones en el tiempo o no. Con esta nueva técnica se dedujeron también [27] los resultados de simetrías mezcladas que se conocen, que son muy difícil de deducir a partir de argumentos basados en órbitas periódicas o en supersimetría. Se revisó además el resultado que dice que para sistemas que poseen ciertas simetrías discretas (por ejemplo C_3) y la simetría de inversión temporal, algunos sectores de simetría cuánticos pueden tener una estadística CUE, la cual usualmente está asociada a sistemas que no son invariantes ante inversiones en el tiempo.

Posteriormente se mostró que el argumento de invariancia estructural puede aplicarse al mapeo de Poincaré. Esto quiere decir que las propiedades estadísticas de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré son también iguales, con probabilidad uno, a las de los ensembles clásicos de Cartan si el mapeo clásico de Poincaré es completamente caótico. Para saber si las propiedades de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré son las mismas que las de las energías del Hamiltoniano original, obtuvimos la velocidad de las eigenfases como función de la energía. Ésta es en promedio constante y la misma para casi todas las eigenfases en el caso completamente caótico. Esto quiere decir que las propiedades de fluctuación de las eigenfases se trasladan a las de las energías, ya que las primeras se mueven "rigidamente" como función de la energía, salvo variaciones seculares que determinan la densidad de niveles, de acuerdo a la fórmula de Weyl.

Para verificar este resultado se hizo un cálculo numérico basado en el método del elemento frontera para un cuarto de estadio y para un billar rectangular. Para el cuarto de estadio se obtuvo que las fases viajan aproximadamente con la misma velocidad. Esto es válido aunque el mapeo cuántico de Poincaré de Bogomolny no es unitario, debido a efectos numéricos. En el rectángulo, la distribución de velocidades es más ancha y en algunos casos (dependiendo del rango de energía) muestra varias velocidades típicas. Estas velocidades típicas están asociadas con las dimensiones del rectángulo, es decir, están asociadas con las dos acciones

clásicas.

También se mostró que la teoría de defectos cuánticos para varios canales en el caso de moléculas de Rydberg, corresponde a un mapeo cuántico de Poincaré, en la representación de momento angular, que es exactamente unitario. Cuando el límite clásico de este mapeo es completamente caótico, sus eigenfases se mueven rígidamente en concordancia con la parte teórica. La distribución de velocidades para el caso integrable es más ancha y plana que en el caso caótico.

Queremos remarcar, para concluir, que la principal contribución de esta tesis en el área de caos cuántico es la siguiente: se ha mostrado que, dado un Hamiltoniano, es posible transferir las propiedades estadísticas de las eigenfases, de su mapeo cuántico de Poincaré asociado a las del espectro de energía del Hamiltoniano original. Como se mostró anteriormente que en el caso caótico las propiedades de fluctuación de las eigenfases del mapeo cuántico de Poincaré son las mismas que las del COE o las del CUE con probabilidad uno —haciendo la hipótesis: un mapeo canónico arbitrario es caótico con probabilidad uno—, las propiedades de fluctuación locales de los espectros de energías son iguales a las del GOE o las del GUE con probabilidad uno. Con esto se obtiene la relación que asocia las propiedades estadísticas de los espectros de energía de los sistemas cuánticos cuyo análogo clásico es caótico, con la teoría de matrices aleatorias, asociación conocida como conjetura Bohigas-Giannoni-Schmit. Esto se verificó en dos ejemplos, uno en billares y otro en moléculas de Rydberg. En este último, encontramos además que la teoría de defectos cuánticos para varios canales puede interpretarse como mapeo cuántico de Poincaré que es, por construcción, unitario.

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Bibliografia

- [1] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, 1984. *J. Phys. Lett.* **45**, L1015-L1022.

- [2] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, 1984. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1-4.

- [3] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, 1986 en *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, Lecture Notes in Physics, 263. (T. H. Seligman and H. Nishioka, Eds.) pp. 18-40.

- [4] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey and S. S. M. Wong, 1981. *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385.

- [5] T. H. Seligman and J. J. M. Verbaaschot, (1985). *Phys. Lett. A* **108**, 183-207.

- [6] M. V. Berry and M. Robnik, 1986. *J. Phys. A* **19**, 649-668 y 1365-1372.

- [7] M. V. Berry, 1985. *Proc. Roy. Soc. London A* **400**, 229.

- [8] T. H. Seligman, en Proc. Wigner Symposium, Goslar, 1991, World Scientific, Singapore.

- [9] F. Leyvraz and T. H. Seligman, 1992. *Phys. Lett. A* **168**, 348-352.

- [10] T. H. Seligman, en *Quantum Chaos*, (G. Casati and B. V. Chirikov, Eds.), Cambridge University Press, 1995, pp. 577.
- [11] F. Leyvraz and T. H. Seligman, 1996. *Proc. V Wigner Symposium*, Guadalajara, Jal, 1995, World Scientific, Goslar.
- [12] A. V. Andreev, O. Agam, B. D. Simons and B. L. Altshuler, (1996), *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3947.
- [13] A. V. Andreev, O. Agam, B. D. Simons and B. L. Altshuler, (1996). *Nucl. Phys. B* **482**, 536.
- [14] E. B. Bogomolny, 1992. *Nonlinearity*, **2**, 805-867.
- [15] Doron, E., and U. Smilansky. *Nonlinearity* **5** (1992) 1055-1084.
- [16] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Oxford, 1947.
- [17] V. Bargmann, 1968 en "Group Representations on Hilbert Spaces of Analytic Functions in Analytic Methods of Mathematical Physics", (P. P. Gilbert and R. G. Newton), Gordon & Breach, New York.
- [18] P. A. Mello and M. Moshinsky, 1975. *J. Math. Phys.* **16**, 2017.
- [19] J. Deenen, M. Moshinsky and T. H. Seligman, 1980. *Ann. Phys.* **30**, 2512.
- [20] M. Moshinsky 1981 *Group Theory and its Applications in Physics* (AIP Conf. Proc.) **71**, 312.
- [21] P. A. Boasman, 1994. *Nonlinearity*, **7**, 485-537.

- [22] U. Fano and A. R. P. Rau. *Atomic Collisions and Spectra*. Academic Press, London, 1986.
- [23] M. J. Seaton, 1983. *Rep. Prog. Phys.* **46**, 167.
- [24] M. Lombardi, P. Labastie, M. C. Bordas and M. Broyer, 1988. *J. Chem. Phys.* **89**, 3479.
- [25] M. Lombardi and T. H. Seligman, 1993. *Phys. Rev. A.* **47**, 3571-3585.
- [26] Guhr, T., A. Müller-Groeling, H. A. Weidenmüller. Cond-matt/9707301. Enviado a *Phys. Rep.*
- [27] F. Leyvraz, C. Schmit and T. H. Seligman, 1996. *J. Phys. A* **29**, L575-L580.
- [28] Keating, J. P., and J. M. Robbins, 1997. *J. Phys. A* **30**, L177-L181.
- [29] F. J. Dyson, 1962. *J. Math. Phys.* **3**, 1191.
- [30] F. Leyvraz. Comunicación personal.
- [31] Hamermesh, M. *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962).
- [32] P. Roman, *Advanced Quantum Theory*. pp. 534-542. Addison Wesley Publishing Company, Inc, Reading, Massachusetts, 1965.
- [33] L. W. Leech, *Mecánica Clásica*. Manuales UTEHA No. 189. México D. F, 1968, México. 059
- [34] M. Fierz. *Mecánica General*. Trillas, México D. F., 1977.

- [35] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Mecánica*. Reverté, Barcelona, 1991, España.
- [36] E. Bogomolny, 1990. *Comm. At. Mol. Phys.* **25**, 67.
- [37] M Lombardi, J. P. Pique, P. Labastie, M. Broyer and T. H. Seligman, 1991. *Comm. At. Mol. Phys.* **25**, 345.
- [38] R. Jost and M. Lombardi en *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics*, Lecture Notes in Physics, 263. (T. H. Seligman and H. Nishioka, Eds.) pp. 72.
- [39] P. Labastie, M. C. Bordas, B. Tribollett and M. Broyer, 1984. *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1681-1684.
- [40] M. Ch. Bordas, M. Broyer, J Chevaleyre. P. Labastie and S. Martin, 1987. *J. Physique.* **46**, 27-38.
- [41] H. Friedrich. *Theoretical Atomic Physics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [42] C. H. Greene and C. Jungen, 1985. *Adv. At. Mol. Phys.* **21**, 51.
- [43] U. Fano, 1970. *Phys. Rev. A.* **2**, 253.
- [44] U. Fano, 1975. *J. Opt. Soc. Am.* **65**, 979.
- [45] E. Cartan, (1935). *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **11**, 116.
- [46] L. K. Hua, (1963). *Harmonic Analysis of functions of several complex variables in the classical domain*. AMS, Providence.

[47] R. E. Prange, 1996. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2447-2450.

[48] A. Messiah. *Mécanique Quantique*, (Dunod Paris), 1962.