

2011



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TERMODINAMICA DEL MODELO XY UNIFORMEMENTE FRUSTRADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

ADAN MERCADO DIAZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. GUILLERMO RAMIREZ SANTIAGO.



1998

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

25 8689



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA DE
MEXICO

M. en C. Virginia Abrín Batule
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis: "Termodinámica del Modelo XY Frustado".

realizado por Adan Mercado Díaz

con número de cuenta 8808157-5 , pasante de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

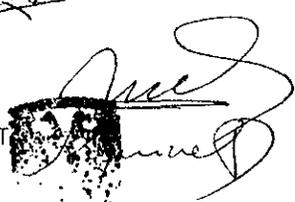
Atentamente

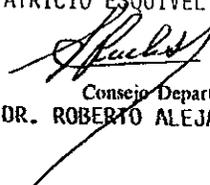
Director de Tesis

Propietario DR. GUILLERMO RAMIREZ SANTIAGO 

Propietario DR. CHUMIN WANG CHEN 

Propietario DR. ALFONSO MONDRAGON BALLESTEROS 

Suplente DR. ROBERTO ESCUDERO DERAT 

Suplente DR. RAUL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT 

Consejo Departamental de Física
DR. ROBERTO ALEJANDRO INUELAS MAYORCA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dedico esta tesis a

*Mi esposa Mónica Irlanda Mendoza Romero y a
Mi hijo Yair Adán Mercado Mendoza por su cariño y
comprensión durante todo este tiempo que me
necesitaban a su lado, y qué a pesar de todo siempre
me recibieron con una sonrisa y brindaron su ayuda
en todo momento del desarrollo de este trabajo.*

A mis padres

Por su estímulo a enfrentar y superar cualquier problema por muy difícil que se me presentase. Por que siempre estuvieron en los momentos difíciles de mi vida apoyándome incondicionalmente. Por que supieron respetar y apoyar las decisiones personales que se me presentaron en el transcurso de todos mis estudios, sobre todo quiero enfatizar el cariño, comprensión y apoyo que se me brindo durante todo el tiempo que se trabajo en la realización del trabajo de tesis.

A mis hermanos

Úlises, Rubén, Israel, Alma rosa y Rafael por su constante apoyo y estímulo.

cuñados y amigos

Por su incondicional apoyo para seguir con las metas planeadas en mi vida profesional.

Agradecimientos

Al Dr. Guillermo Ramírez Santiago:

Por la sugerencia del tema de tesis y la dirección del trabajo, así como el estímulo y ayuda que me ofreció en la realización de este trabajo.

Quiero hacer patente mi reconocimiento a los sinodales de mi examen profesional, **Srs. Drs. Alfonso Mondragón Ballesteros, Chumin Wang Chen, Raúl Patricio Esquivel Sirvent y Roberto Escudero Derat**, por la cuidadosa revisión del trabajo y sus consejos para mejorarlo.

A la Dr. Cecilia Noguez Garrido y a Lázaro Huerta Arcos por su amistad y ayuda que me brindaron.

Agradezco al **Instituto de Física de la UNAM** y al **Instituto Mexicano del Petróleo** el apoyo otorgado para realizar el trabajo de tesis.

A Juan José Martínez de la Rosa por su ayuda valiosa en la realización de la presentación del trabajo de tesis.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1 CAPITULO I	
Propiedades del modelo XY con y sin frustración	4
Modelo XY	5
Modelo XY uniformemente frustrado	10
2 CAPITULO II	
Método de Monte Carlo	15
3 CAPITULO III	
Termodinámica del sistema frustrado	19
Resultados	23
Modelo XY sin frustración	23
Modelo XY totalmente frustrado	26
Grados de libertad quiral	29
Modelo XY con frustración 2/5	31
Modelo XY con frustración 1/3	36
4 CAPITULO IV	
Conclusiones	40
Referencias	41

INTRODUCCION

En esta tesis se estudian las propiedades termodinámicas y las transiciones de fase que ocurren en el modelo XY bidimensional con frustración uniforme para los casos $F = 1/2$, $F = 2/5$ y $F = 1/3$. Una realización experimental inmediata de este modelo lo constituye una malla de junturas Josephson o de alambres superconductores en un campo magnético transversal uniforme. Estos estudios están motivados por experimentos recientes donde se usan técnicas sofisticadas basadas en el efecto Hall para detectar y visualizar los vórtices (supercorrientes alrededor de las celdas unitarias de la malla) producidos por el campo magnético externo. El índice de frustración F mide la cantidad de flujo magnético *promedio*, en unidades del "cuanto" de flujo $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$, que atraviesa cada una de las celdas unitarias de la malla.

El término "frustración" puede entenderse intuitivamente como la existencia de interacciones "contradictorias" entre dos fases vecinas cercanas pertenecientes a la misma celda unitaria. En lenguaje magnético esto puede entenderse como la interacción de un espín con sus dos vecinos más cercanos en la celda unitaria, en donde la interacción con el primero es ferromagnética mientras que la interacción con el segundo es antiferromagnética; esto es, el espín no sabe como responder en presencia de estas dos interacciones "antagónicas" y se dice que está frustrado. Así pues, el campo magnético introduce una fase adicional que cambia el tipo de interacción en uno de los enlaces de la celda unitaria, de interacción ferromagnética a interacción antiferromagnética.

Las cantidades termodinámicas que se estudian para tratar de caracterizar las transiciones de fase en el modelo XY con frustración $F = 1/2, 2/5$ y $1/3$ son: la energía interna, el calor específico, el módulo de helicidad y su correspondiente derivada respecto de la temperatura. Estas cantidades se analizan como función de la temperatura y tamaño de la malla. El módulo de helicidad mide la energía necesaria para efectuar una torsión de los espines en la frontera del sistema en una dirección específica y es directamente proporcional a la densidad superfluida.

En el primer capítulo se introducen muy brevemente los ensambles más usuales de mecánica estadística y las propiedades más importantes del modelo XY puro ($F=0$) en dos dimensiones con el fin de tener elementos con los cuales comparar el comportamiento del modelo XY uniformemente frustrado. También se define el modelo XY con frustración uniforme y algunas de sus propiedades fundamentales.

A diferencia del modelo XY puro que se puede estudiar analíticamente en forma aproximada en la región de bajas temperaturas usando técnicas del grupo de renormalización, el modelo XY uniformemente frustrado es muy difícil de estudiar analíticamente [10,11]. De hecho, estudios analíticos, [9] también del grupo de renormalización, han demostrado que es extremadamente difícil separar las diferentes contribuciones de las excitaciones elementales: (i) ondas de espín, (b) pares vórtice-antivórtice creados por fluctuaciones térmicas (con vorticidad $2\pi n(\vec{r})$, con $n(\vec{r})$ un entero) y (iii) vórtices fraccionarios (de vorticidad $2\pi F$, con F el índice de frustración) producidos por el campo magnético externo aplicado. Debido a estas dificultades, uno tiene que recurrir a técnicas numéricas para tratar de entender el comportamiento de este sistema. En particular, los métodos de simulación de Monte Carlo han resultado ser muy útiles en el estudio de muchos sistemas físicos. En esta tesis usamos extensamente el algoritmo de Metropolis para estudiar el modelo XY con frustración uniforme.

En el capítulo II se presentan los fundamentos del algoritmo de Monte Carlo que se usó para calcular las propiedades termodinámicas. También se plantean algunos factores que deben tomarse en cuenta para obtener resultados confiables con una precisión aceptable. En el capítulo III se presentan y analizan los resultados de las simulaciones de Monte Carlo de cantidades termodinámicas estudiadas para los sistemas con índice de frustración $F=0, 1/2, 2/5$ y $1/3$. Aquí se estudian las propiedades y comportamiento del modelo XY puro para usarlas como punto de referencia en los otros tres casos con frustración.

Finalmente en el capítulo IV se presentan las conclusiones, donde se sugieren diferentes tipos de transiciones para cada valor del índice de frustración. Estas diferencias parecen estar relacionadas con las propiedades de simetría de los estados base (estados de tempera-

tura $T=0$) para cada índice de frustración. Específicamente se encuentra que para $F=1/3$ la transición parece ser de segundo orden, mientras que para $F=2/5$ se encuentra una discontinuidad en el comportamiento de la energía interna sugiriendo una transición de primer orden. En particular, se obtiene un ciclo de histéresis en el comportamiento de la energía interna como evidencia clara de una transición de fase de primer orden. Estos resultados son consistentes con los obtenidos en experimentos y estudios teóricos muy recientes. En el caso de frustración total, $F=1/2$, el comportamiento encontrado es similar al de estudios teóricos previos, sin embargo, de los estudios realizados en esta tesis no es posible obtener alguna conclusión clara en relación al tipo de transiciones que ocurren.

CAPITULO I

PROPIEDADES DEL MODELO XY CON Y SIN FRUSTRACION

En mecánica estadística es usual definir tres tipos de ensambles que se aplican de acuerdo con las restricciones del sistema de interés. Estos son: (i) Ensemble Microcanónico, (ii) Ensemble Canónico y (iii) Ensemble Gran-canónico. Si para describir los estados macroscópicos del sistema se requiere especificar el número de partículas N , el volumen V , y la energía E entonces se usa el ensemble microcanónico. Por otra parte, el ensemble canónico es útil en los casos en que N , V y la temperatura T son las variables que definen los estados macroscópicos. Finalmente, el ensemble Gran-canónico se usa cuando V , T y el potencial químico μ especifican los estados macroscópicos.

En esta tesis se estudia sistemas clásicos, que son aquéllos en los que las variables conjugadas son soluciones de las ecuaciones canónicas de movimiento de Hamilton. En particular estudiaremos sistemas en los que las variables termodinámicas relevantes son el número de elementos N en el sistema, el tamaño del sistema (volumen V) y la temperatura. Así pues, usaremos el ensemble Canónico que está definido por la siguiente función de partición:

$$Q_N(V, T) = \sum_k \exp(-\beta H(q_k, p_k)) \quad (1.1)$$

aquí q_k y p_k representan las variables canónicas, $H(p_k, q_k)$ es el hamiltoniano del sistema, $\beta = 1/(k_B T)$ con k_B la constante de Boltzman y la suma se realiza sobre todos los estados accesibles al sistema. La dependencia de N y V es a través de los valores de la energía $E_k = H(q_k, p_k)$.

La probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado de energía E_k es:

$$P = \frac{\exp(-\beta H(q_k, p_k))}{\sum_k \exp(-\beta H(q_k, p_k))} \quad (1.2)$$

Por tanto, el valor promedio de una cantidad física A se obtiene evaluando la siguiente expresión:

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_k A(E_k) \exp(-\beta H(q_k, p_k))}{\sum_k \exp(-\beta H(q_k, p_k))} \quad (1.3)$$

que una vez calculada la suma es independiente de los grados de libertad microscópicos y corresponde al valor macroscópico de la variable termodinámica A del sistema. Así pues, el problema de estudiar el comportamiento de las variables termodinámicas de un sistema a partir de un modelo microscópico, se reduce a la evaluación de la suma (1.3). Sin embargo, por lo general es extremadamente difícil evaluar en una forma exacta tanto $Q_N(V, T)$ como el valor promedio, debido a que tanto $A(q, p)$ como $H(q, p)$ son funciones complicadas de las variables canónicas. Este es el caso para los sistemas de interés en esta tesis como se verá en la siguiente sección donde se introduce brevemente el modelo XY como modelo canónico representativo de muchos sistemas bidimensionales experimentales, en particular, en mallas bidimensionales de alambres superconductores.

MODELO XY

El modelo XY en dos dimensiones consiste de $N = l^2$ espines unitarios con componentes $(\cos \phi_{\vec{r}}, \text{sen} \phi_{\vec{r}})$ localizados en los sitios \vec{r} de una malla cuadrada de dimensiones $l \times l$, donde $\phi_{\vec{r}}$ representa el ángulo que el espín forma respecto de la horizontal. La energía de interacción entre dos espines vecinos cercanos es $-J \vec{S}_{\vec{r}} \cdot \vec{S}_{\vec{r}'}$, donde J es la constante de acoplamiento que se supone es la misma para la interacción entre dos espines vecinos cercanos cualesquiera. Así pues, la función hamiltoniana representativa de este sistema es:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\phi_{\vec{r}} - \phi_{\vec{r}'}). \quad (1.4)$$

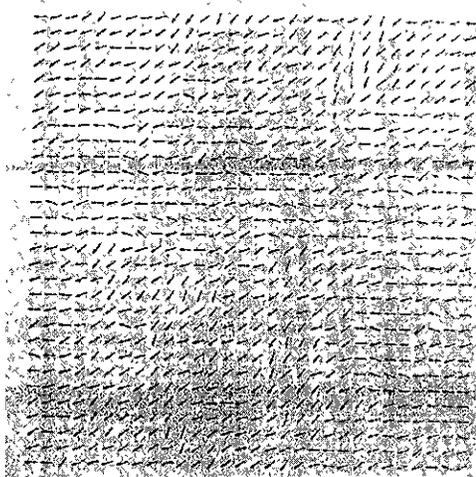


FIG 1. Ondas de espín a baja temperatura

donde la notación $\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle$ indica suma sobre todos los espines vecinos más cercanos o primeros vecinos.

El modelo XY en dos dimensiones fué extensamente estudiado en la década de los 70 y los primeros en estudiar este sistema desde un punto de vista cuantitativo fueron Berezinskii, Kosterlitz y Thouless [1-4]. Ellos sugirieron que el diagrama de fases consiste de dos regiones. En la primera región, la fase ordenada o de bajas temperaturas (fase superconductor) donde las excitaciones elementales dominantes son “ondas de espín” (figura 1) a temperaturas muy bajas y a temperatura relativamente más altas pares “vórtice-anti-vórtice” ligados a través de un potencial que varía logarítmicamente como función de la separación entre ellos (figura 2). Conforme la temperatura aumenta la densidad de los pares vórtice-anti-vórtice también aumenta hasta que a la temperatura crítica, denominada de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (T_{BKT}) estos pares se disocian. La segunda región de temperaturas altas, arriba de la temperatura T_{BKT} en la que los vórtices se mueven independientemente corresponde a la fase desordenada.

Estudios cuantitativos detallados usando técnicas del grupo de renormalización han demostrado que la fase de bajas temperaturas está caracterizada por la divergencia de la

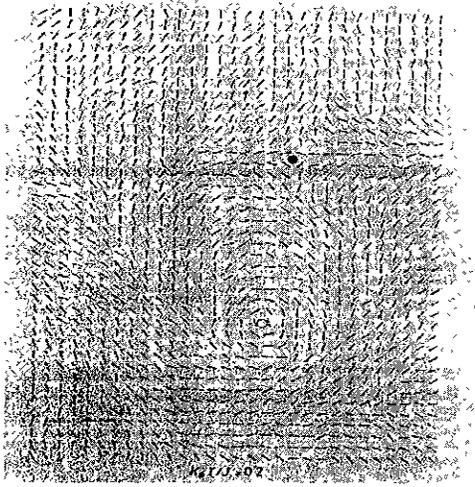


FIG. 2. par vórtice-antivórtice

susceptibilidad y de la longitud de correlación de las fases de los espines. La primera es una medida de las fluctuaciones de la magnetización mientras que la segunda representa la distancia a la cual las orientaciones de los espines se correlacionan. La divergencia de estas cantidades a bajas temperaturas conduce a un exponente η de la función de correlación entre espines, que es función de la temperatura, produciendo así una línea continua de puntos críticos. Este exponente tiene el valor universal de $1/4$ justo a la temperatura T_{BKT} . A esta temperatura la longitud de correlación diverge exponencialmente como función del inverso de la raíz cuadrada de T , esto es:

$$\xi(T) \sim \frac{\exp(A_\xi(T - T_{BKT})^{-1/2})}{r^\eta}, \quad (1.5a)$$

así también la susceptibilidad diverge como:

$$\chi(T) \sim \frac{\exp(A_\chi(T - T_{BKT})^{-1/2})}{r^\nu}, \quad (1.5b)$$

indicando que el exponente $\nu = 1/2$. Debido a la simetría rotacional del sistema la magnetización es cero a cualquier temperatura.

Este escenario se ha podido corroborar experimentalmente en diferentes sistemas bidimensionales algunos de los cuales son: mallas superconductoras, películas superconductoras,

películas superfluidas, cristales líquidos, etc. Así también se han realizado estudios numéricos que sugieren el mismo escenario obteniendo, $T_{BKT} = 0.90$ junto con índices críticos consistentes con los obtenidos usando técnicas de grupo de renormalización. Entre las cantidades termodinámicas que se pueden estudiar numéricamente están: la energía interna E , el calor específico, C_v , que se obtiene de la derivada de E respecto de la temperatura y/o de las fluctuaciones de la energía

$$C_v = \left(\frac{\beta}{N}\right)^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2), \quad (1.6)$$

que no diverge sino presenta un máximo aproximadamente 10% arriba de T_{BKT} .

Otra cantidad termodinámica importante, que está relacionada directamente con la densidad superfluida $\rho_s(T)$, es el módulo de helicidad Υ , que mide la "rigidez" de un sistema isotrópico ante una torsión de las fases en la frontera del sistema, en la dirección \vec{k}_0 . El módulo de helicidad se define en términos de la energía libre del sistema, \mathcal{F} , como:

$$\Upsilon = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial k_0^2}\right)_{k_0=0}. \quad (1.7)$$

La relación entre $\rho_s(T)$ y $\Upsilon(T)$ está dada por la ecuación [5]:

$$\rho_s(T) = \left(\frac{m}{\hbar}\right)^2 \Upsilon(T), \quad (1.8)$$

donde m es la masa de la partícula superfluida y \hbar la constante de Planck. Es posible demostrar analíticamente que $\rho_s(T)$ tiene un salto discontinuo de un valor finito positivo universal $\rho_s(T_{BKT})$ a un valor cero, esto es [6]:

$$\frac{m^2 k_B T_{BKT}}{\rho_s(T_{BKT}) \hbar^2} = \frac{\pi}{2}. \quad (1.10)$$

Como consecuencia de estas dos últimas ecuaciones se tiene que el valor del salto discontinuo del módulo de helicidad satisface la relación:

$$\Upsilon(T_{BKT}) = \frac{\pi}{2} (k_B T_{BKT}). \quad (1.11)$$

Esta es una ecuación importante que usaremos para estimar T_{BKT} a partir del cálculo de $\Upsilon(T)$, en los casos donde aplique esta teoría. La magnitud de este salto en $\Upsilon(T)$ está

relacionada directamente con el exponente de la función de correlación por la ecuación:

$$\eta = \frac{k_B T_{BKT}}{2\pi\Upsilon(T_{BKT})}. \quad (1.12)$$

Hasta aquí se han presentado brevemente los aspectos más importantes de la teoría de transiciones de fase de sistemas bidimensionales, tomando como modelo canónico el modelo XY. Estos serán de importancia para estudiar transiciones de fase en mallas bidimensionales de superconductores en un campo magnético transversal uniforme, que se representa mediante el modelo XY con frustración uniforme. En la siguiente sección se define este modelo junto con sus propiedades y cantidades relevantes.

MODELO XY UNIFORMEMENTE FRUSTRADO

En esta sección se define el modelo XY con frustración uniforme y se describe algunas de sus propiedades en el contexto de mallas bidimensionales de superconductores en un campo magnético transversal. Desde el punto de vista teórico el interés por estudiar sistemas con frustración se inicia en la década de los 70 [7-9] teniendo como motivación principal tratar de entender el comportamiento de los *vidrios de espín*. Posteriormente, en la década de los 80 con el desarrollo de técnicas de fotolitografía, es posible construir mallas de superconductores con propiedades preconcebidas [12-19], que en presencia de un campo magnético transversal presentan un sistema experimental fértil para estudiar sistemas con frustración. Además, con el descubrimiento de los cerámicos superconductores, el interés teórico por entender mejor estos sistemas se refuerza debido a que muchas de las propiedades magnéticas de estos materiales se pueden modelar mediante mallas de junturas Josephson [20].

Recientemente, usando microscopía de alta resolución basada en el efecto Hall [22,23] fué posible observar directamente las diversas configuraciones de vórtices (tubos de flujo magnético) en una malla de alambres superconductores para diferentes valores del flujo magnético por celda unitaria (parámetro de frustración), corroborando predicciones teóricas en relación a los estados base [24]. Los resultados de estos experimentos se muestran en la figura 3 donde se observan las diferentes estructuras del estado base para distintos valores de F .

Más recientemente, mediciones experimentales de las características Voltaje-Corriente ($V-I$) en mallas de alambres superconductores para valores diferentes del campo magnético sugieren diversos escenarios de las transiciones de fase en tales sistemas [25]. En las figuras 4,5 se muestran dos micrografías donde se observa la estructura de las mallas de alambres superconductores en dos escalas de longitud diferentes, que fueron usadas en estos experimentos.

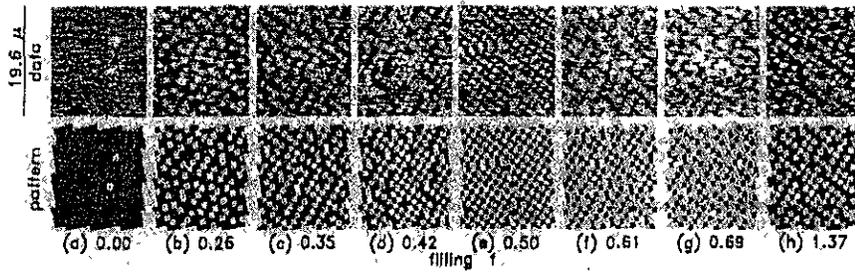


FIG. 3. Las imágenes de la parte superior muestran las configuraciones de los vórtices en una malla de superconductores de Niobio, obtenidas usando microscopía de alta resolución basada en el efecto Hall, para diferentes valores del índice de frustración. En el segundo renglón se muestran los mapas de ocupación de las imágenes. Los cuadros en blanco representan los vórtices magnéticos. Figuras tomadas de la referencia [24]

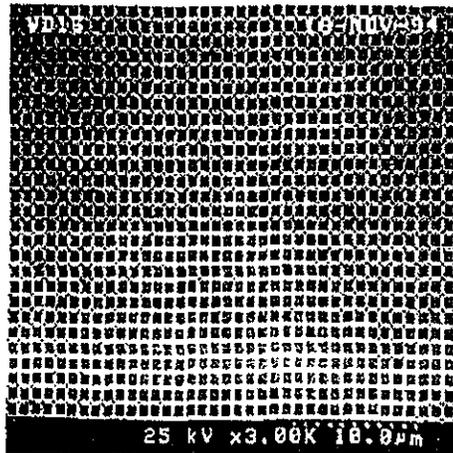


FIG. 4. Malla bidimensional de alambres superconductores [25] hechos de niobio

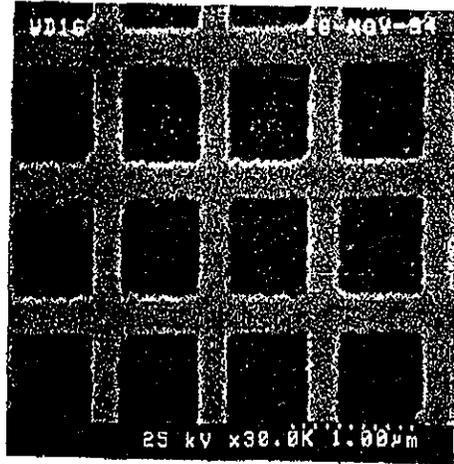


FIG. 5. Estructura de la malla de alambres superconductores [25] de niobio

La función hamiltoniana que define el modelo XY con frustración uniforme es:

$$\mathcal{H} = -E_J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\phi_{\vec{r}} - \phi_{\vec{r}'} + f_{\vec{r}, \vec{r}'}), \quad (1.13)$$

donde $\phi_{\vec{r}}$ es la fase del espín en el sitio \vec{r} , E_J es la energía de interacción y $\langle r, r' \rangle$ indica que la suma de interacciones es entre vecinos más cercanos. Las cantidades $f_{\vec{r}, \vec{r}'}$ definidas en los enlaces de la malla se denominan las variables de frustración. Estas representan la “distorsión” –producida por defectos magnéticos– en las fases de los espines que interactúan. Por ejemplo, si $f_{\vec{r}, \vec{r}'} = \pi$, el efecto es cambiar la interacción del tipo ferromagnético a una del tipo antiferromagnética entre los espines $\vec{S}_{\vec{r}}$ y $\vec{S}_{\vec{r}'}$. En el lenguaje de mallas superconductoras, que es el que se usa en esta tesis, $\phi_{\vec{r}}$ representa la fase del parámetro de orden en el nodo \vec{r} y las cantidades $f_{\vec{r}, \vec{r}'}$'s corresponden la fase extra en la función de onda superconductor del alambre o de la juntura, debida a la presencia del campo magnético externo. Así pues, las variables de frustración se definen como:

$$f_{\vec{r}, \vec{r}'} = \frac{2\pi}{\phi_0} \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (1.14)$$

donde $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$ es el “cuánto” de flujo magnético, \vec{A} es el potencial vectorial magnético, $d\vec{l}$ es el elemento de línea entre los alambres o junturas localizados en \vec{r} y \vec{r}' . En el caso de

frustración uniforme, las variables de frustración deben cumplir con la siguiente condición:

$$\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle \in \mathcal{P}} f_{\vec{r}, \vec{r}'} = \frac{2\pi}{\phi_0} \oint_{\mathcal{P}} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi F, \quad (1.15)$$

en esta ecuación la notación $\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle \in \mathcal{P}$ indica que la suma de las $f_{\vec{r}, \vec{r}'}$'s debe efectuarse en los enlaces que forman una "plaqueta" (celda unitaria de la malla). La cantidad F se denomina el índice de frustración y representa la cantidad de flujo magnético (medido en unidades de ϕ_0) que *en promedio* atraviesa una celda unitaria.

La hamiltoniana (1.13) es una función periódica de F con periodo 1 y tiene una simetría de reflexión alrededor de cero, esto es, \mathcal{H} es invariante bajo las transformaciones:

$$F \rightarrow F + 1, \quad F \rightarrow -F, \quad (1.16)$$

En consecuencia, basta considerar el rango de valores $0 \leq F \leq \frac{1}{2}$.

Cuando F es cero o un número entero la naturaleza de la transición es bien conocida y esta descrita por el escenario de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless. Sin embargo, cuando F es una fracción del "cuánto" de flujo magnético, esto es, $F = \frac{p}{q}$, con p y q números primos relativos, los estados base (configuraciones a $T=0$) del sistema presentan estructuras y simetrías diferentes, dependiendo de los valores de p y q . Por ejemplo, cuando $F = \frac{1}{2}$ la configuración de vórtices semi-enteros (generados por el campo magnético) en el estado base tiene estructura de tablero de ajedrez (figura 6), donde los cuadros blancos representan vórtices de vorticidad $\frac{1}{2}$, mientras que los cuadros negros representan vórtices de vorticidad $-\frac{1}{2}$, es decir, las vorticidades positiva y negativa están alternadas simulando un antiferromagneto de Ising en dos dimensiones. Por tanto, el sistema presenta dos simetrías, una rotacional asociada a las fases de las funciones de onda superconductoras de los alambres (junturas) y otra discreta, simetría "quiral", relacionada con las vorticidades semi-enteras generadas por el campo magnético. Estas simetrías dan lugar a dos tipos de excitaciones topológicas: pares vórtice-antivórtice y paredes de dominio. Si los dos tipos de excitaciones no interactúan deben conducir a dos transiciones de fase independientes: una transición de BKT en la fase de la función de onda superconductoras y una transición "quiral" de tipo Ising. De estas

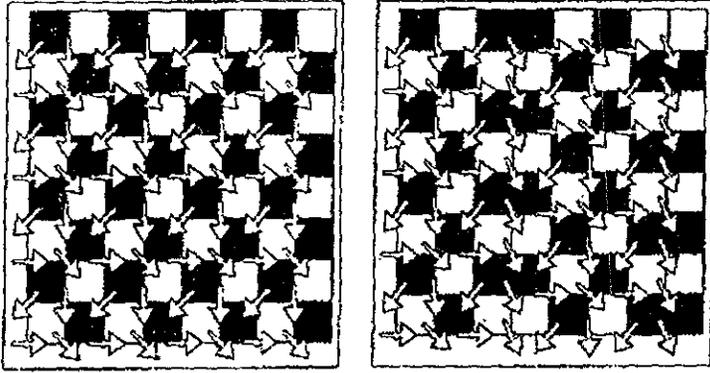


FIG. 6. Estado base del modelo XY con frustración [43]

dos, la transición superconductor ocurre a más baja temperatura. Sin embargo, cuando los dos tipos de excitaciones están acopladas, que es exactamente lo que ocurre en los sistemas experimentales, el problema es extremadamente complicado ya que no es posible separar las contribuciones a la(s) transición(es) de cada una de estas excitaciones topológicas. Existe la creencia generalizada de que la generación espontánea de paredes de dominio da lugar a la disociación de pares de vórtices-antivórtice produciendo una transición del tipo BKT. En éste último escenario se ha sugerido la posible existencia de una sola transición superconductor perteneciente a una clase de universalidad nueva [27,35]. A pesar de intensos estudios teóricos y experimentales en relación a este problema aún se desconoce la naturaleza exacta de la transición y ha generado una amplia controversia en años recientes [26,27,35,38]

Para otros valores del índice de frustración, por ejemplo $F = 1/3$ y $F = 2/5$, que son de interés teórico debido a su reciente estudio experimental [25], la naturaleza de la(s) posible(s) transiciones no es conclusiva y existe evidencia reciente en relación a ello. En esta tesis, estudiamos varias cantidades termodinámicas usando diferentes valores del índice de frustración, a saber: $F = 0$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ con el fin de estudiar las posibles transiciones que ocurren en estos sistemas. Estos dos últimos valores de F han recibido atención, tanto teórica [28] como experimental [25], muy recientemente.

CAPITULO II

EL METODO DE MONTE CARLO

Las propiedades termodinámicas de los sistemas físicos, se estudian analíticamente calculando la función de partición del correspondiente Hamiltoniano. En muchos sistemas físicos de interés es muy difícil evaluar analíticamente la función de partición y por esta razón se utilizan métodos numéricos para describir sus propiedades termodinámicas. Estos métodos han demostrado ser de gran utilidad, en particular, el algoritmo de Monte Carlo (MC) tiene un amplio uso en diferentes campos de la física y ha tenido éxito en el estudio de muchos sistemas. El método de MC evalúa los valores promedio de cantidades físicas, mediante la generación de una sucesión estocástica de configuraciones del sistema.

Desde el punto de vista de mecánica estadística, el estado macroscópico del sistema a una temperatura T (entre otras variables), representa a un conjunto de estados microscópicos o configuraciones. No todos los estados microscópicos contribuyen equitativamente al promedio termodinámico, sino más bien, hay algunos que contribuyen más que otros. Así pues, las configuraciones se eligen de acuerdo con una función de peso que es proporcional al factor de Boltzmann $\exp(-\beta E)$, donde E es la energía de la configuración respectiva. Por lo anterior, el proceso de MC es un algoritmo basado en la "importancia de la muestra". El valor promedio de una cantidad física $\langle F \rangle$ sobre M configuraciones, se calcula con la siguiente expresión:

$$\langle F \rangle = \frac{\sum_{\mu=1}^M F_{\mu} P^{-1}(x_{\mu}) \exp\left(\frac{-E_{\mu}(x_{\mu})}{k_B T}\right)}{\sum_{\mu=1}^M P^{-1}(x_{\mu}) \exp\left(\frac{-E_{\mu}(x_{\mu})}{k_B T}\right)}, \quad (2.1)$$

donde F_{μ} es el valor de la cantidad de interés en el μ -ésimo estado y E_{μ} es la energía de la correspondiente configuración. $P(x_{\mu})$ es el factor de peso que en su versión más simple se escribe como:

$$P(x_{\mu}) = \frac{\exp\left(\frac{-E_{\mu}}{k_B T}\right)}{\sum_{\mu=1}^M \exp\left(\frac{-E_{\mu}}{k_B T}\right)}. \quad (2.2)$$

Sustituyendo ésta probabilidad en la ecuación (2.1), el promedio de F se reduce al promedio

aritmético

$$\bar{F} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^M F_{\mu}. \quad (2.3)$$

La realización de la ecuación 2.3 se hace generando una serie de configuraciones que forman un proceso de Markov. Un proceso de Markov es un proceso estocástico que genera una nueva configuración $x_{\mu'}$ a partir de su antecesora x_{μ} con una probabilidad de transición $W(x_{\mu} \rightarrow x_{\mu'})$. El proceso de Markov tiene la propiedad de que x_{μ} converge a un punto fijo x_{μ}^{eq} cuando $M \rightarrow \infty$, si satisface la condición de balanceo detallado

$$P(x_{\mu})W(x_{\mu} \rightarrow x_{\mu'}) = P(x_{\mu'})W(x_{\mu'} \rightarrow x_{\mu}), \quad (2.4)$$

ésto significa que la razón en las probabilidades de transición para “mover” $x_{\mu} \rightarrow x_{\mu'}$ y regresarlo $x_{\mu'} \rightarrow x_{\mu}$ depende solamente del cambio de la energía $\delta E = E(x_{\mu'}) - E(x_{\mu})$, esto es

$$\frac{W(x_{\mu} \rightarrow x_{\mu'})}{W(x_{\mu'} \rightarrow x_{\mu})} = \exp\left(\frac{-\delta E_{\mu}}{k_B T}\right) \quad (2.5)$$

El objetivo principal en el Método de Metropolis, explicado anteriormente, es maximizar la razón de cambio de una configuración a la siguiente. Esto se realiza maximizando la probabilidad de transición de tal manera que al cambiar de una configuración a otra tenga menor energía, es decir, que minimice la energía.

En esta tesis se usa este algoritmo para estudiar el modelo XY puro y con frustración uniforme. Además se aplican condiciones de frontera periódicas, donde los espines en el inicio y al final de los renglones (columnas) son los mismos. Se consideran condiciones a la frontera periódicas con el fin de minimizar efectos de bordes y de tamaño finito.

Para determinar las propiedades termodinámicas del sistema utilizando la ecuación (2.1), se empieza por especificar una configuración inicial de fases asignadas a los espines, que se elige de acuerdo con la región de temperaturas que se desea estudiar. Se considera una configuración inicial ordenada en la región de bajas temperaturas o una configuración desordenada en la región de altas temperaturas dependiendo de la región que se desea estudiar. En el caso de metaestabilidad (por ejemplo, una transición de fase de primer

orden) se considera una configuración inicial mixta (configuración parcialmente ordenada y parcialmente desordenada). Una vez asignado los valores iniciales de las fases se elige la fase ϕ_i y se gira aleatoriamente un ángulo $\delta\phi_i$ a partir de su configuración inicial, al efectuar la rotación se identifica a los vecinos más cercanos de la fase i con los que interacciona para calcular el cambio de la energía δE_i asociada con la rotación y se evalúa la probabilidad de transición $W = \exp(\beta\delta E)$. Se obtiene un número aleatorio r distribuido uniformemente en el intervalo $0 < r < 1$. Si $W < r$ rechazamos el movimiento, y la configuración correspondiente. Si $W > r$, se acepta la nueva coordenada (ϕ_i) para formar una nueva configuración que será incluida para evaluar el promedio de las propiedades termodinámicas. Este proceso se repite para cada una de las fases de la malla, generando así una serie de configuraciones que dan lugar a una cadena de Markov de M eventos. Las primeras configuraciones generadas no son propiamente representativas de un sistema en "equilibrio", por lo tanto, los primeros pasos se descartan y no se usan en el cálculo del promedio. El número de pasos que se eliminan para alcanzar el equilibrio debe ser del orden del tiempo de relajación que es el tiempo para que el sistema alcance el equilibrio. En general, el tiempo de relajación depende de la región de temperaturas a estudiar. Una vez que el sistema alcanza el equilibrio se forman M_p grupos cada uno con N_p configuraciones, y se hace un promedio para cada grupo. Después del número deseado de subgrupos que han sido generados se calcula el promedio final y entonces se repite el cálculo para otra temperatura.

Para calcular el promedio \bar{F} de alguna propiedad física se evalúa un total de M pasos/espín de MC (al cambio de la fase ϕ_i se le llama un paso/espín de MC)

$$\bar{F} = \frac{1}{M} \sum_{\mu=\mu_0}^{\mu=M+\mu} F(x_\mu). \quad (2.6)$$

El número μ_0 es la cantidad de pasos para alcanzar el equilibrio y desde un punto de vista práctico se escoge tal que las variaciones en F sea a lo más del orden de la desviación estandar $\sigma = \sqrt{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}$. Esta forma de escoger μ_0 es por supuesto ad hoc y es una manera práctica de estimar el tiempo para que el sistema se equilibre. Estrictamente, uno debería de estimar el tiempo de relajación, sin embargo, uno necesita mucho tiempo de

cómputo.

Para evaluar el promedio de una propiedad física utilizando el método de MC tenemos varios factores que influyen en la precisión. Por ejemplo la calidad del generador de números aleatorios, el tamaño finito de la muestra, el tiempo de correlación entre configuraciones, etc.

En el cálculo del error deben tomarse en cuenta varios factores, algunos de ellos ya se mencionaron, pero el más difícil y desde el punto de vista estadístico muy importante, es el tiempo de correlación entre configuraciones sucesivas. Éste se puede minimizar empleando algoritmos más eficientes. En principio, el verdadero error asociado con los valores promedio de las observables se determinan mediante un estudio dinámico del modelo. Tal estudio tiene un tiempo de procesador de computo extremadamente grande y requiere un análisis complicado. Con el objeto de disminuir la posible correlación entre configuraciones se divide el número total de M pasos de MC dentro de M_p grupos de p pasos cada uno (i.e. $M = pM_p$). El promedio para cada uno de los M_p grupos de configuraciones se calcula por la fórmula:

$$F_s = \frac{1}{p} \sum_{\text{enesimo}} F_\mu. \quad (2.7)$$

La varianza de los valores promedios en M_p grupos es dada por

$$(\sigma)^2 = \frac{p}{M-1} \sum_{\mu=1}^{M_p} [F_\mu - \bar{F}]^2. \quad (2.8)$$

El error en el valor promedio de \bar{F} es igual a la desviación estandar σ . Esto supone datos no correlacionados. Conforme p crece se espera que la correlación entre grupos sucesivos disminuya.

CAPITULO III

TERMODINAMICA DEL SISTEMA FRUSTRADO

En éste capítulo se estudia el comportamiento termodinámico del modelo XY en dos dimensiones cuando el índice de frustración F tiene los valores $1/2$, $2/5$ y $1/3$. Las cantidades termodinámicas que se analizan como función de la temperatura y tamaño del sistema $l \times l$ son: (a) energía interna E , (b) calor específico C_v , (c) módulo de helicidad Υ y (d) la derivada del módulo de helicidad Υ' respecto de la temperatura. Localizando el máximo de Υ' se estima la temperatura crítica $T_c(F)$, tal como se hace para el modelo XY puro [33]. Mediante una comparación del comportamiento de $\Upsilon(T)$ y $C_v(T)$ cuando $F \neq 0$ con el correspondiente a $F = 0$ (modelo XY puro), se infieren algunas de las propiedades críticas del sistema con frustración. Como ya se indicó en el capítulo I la motivación de estos estudios esta relacionada con experimentos recientes donde se usan técnicas sofisticadas de medición [22,23] para observar en forma directa y detallada el comportamiento de los vórtices en una malla de alambres superconductores a muy bajas temperaturas [24]. Estos estudios han permitido corroborar muchas de las características y propiedades del estado base, para los valores de F arriba indicados, que se habian sugeridas previamente en base a estudios teóricos [32,37]. Por otra parte, también se ha investigado la naturaleza de las transiciones de fase de una malla de alambres superconductores en un campo magnético transversal para índices de frustración $F = 1/2$ y $2/5$ [25]. En la región de temperaturas altas se observa un comportamiento lineal (comportamiento ohmico) de las curvas voltaje-corriente (V-I) de la malla. Conforme la temperatura decrece la resistencia disminuye hasta que a la temperatura crítica se establece una coherencia de cuasi-largo alcance que da lugar a la fase superconductora. Usando la relación [44] $R(T)/R_n = 2\pi\xi^2(T)n_f$, donde $R(T)$ es la resistencia de la malla, R_n la resistencia en el estado normal, $\xi(T)$ es la longitud de coherencia de la fase superconductora y n_f la densidad de vórtices libres se puede demostrar

que $R(T)$ decrece como:

$$\frac{R}{R_n} \sim \exp\left[\frac{b}{(T - T_{BKT})^\nu}\right], \quad (3.1)$$

justo arriba de la temperatura de transición superconductor, siendo ν el exponente de la longitud de coherencia. En ausencia de campo magnético externo se encuentra que $\nu = 1/2$, de acuerdo con la teoría de Berezinski-Kosterlitz-Thouless. Para otros valores de frustración experimentalmente ha sido extremadamente difícil discernir si el exponente ν es $1/2$, debido al “ancho” de la transición superconductor. Por otra parte, en la fase superconductor (región de bajas temperaturas), caracterizada por la presencia de pares vórtice-antivórtice, -supercorrientes con circulaciones opuestas que interaccionan a través de un potencial logarítmico- las curvas V-I tienen un comportamiento no lineal de ley de potencia, $V \sim I^{a(T)}$. Justo a la temperatura de transición $T_{BKT}(F)$, el exponente $a(T)$ es distinto de la unidad y tiene un valor “universal” de $a(T_{BKT}) = 3$ cuando $F = 0$ [25,38] y $a(T_{BKT}) = 1/5$ cuando $F = 1/2$ [25,38]. El valor de $a(T)$ para un valor específico de F , está directamente relacionado con el exponente crítico de la función de correlación $\eta(T)$ a través de la ecuación:

$$\eta(T) = \frac{1}{2(a(T) - 1)}. \quad (3.2)$$

Sin embargo, en la referencia [25] las curvas V-I de las mallas superconductoras estudiadas sugieren que $V \sim I^3$ cuando $F = 2/5$ y $1/2$ -comportamiento típico de una transición del tipo BKT- las cuales se presentan justo abajo de la transición superconductor. Esto se justifica experimentalmente como debido a la existencia de un proceso de nucleación de paredes de dominio. Existe la creencia de que al menos para el caso $F = 1/2$ la transición superconductor es *inducida* por la presencia de paredes de dominio -creadas por los grados de libertad quiral- que apantallan las interacciones vórtice-antivórtice. Si este fuera el caso, entonces la disociación de pares vórtice-antivórtice debería ocurrir antes del *derretimiento* de las paredes de dominio: esto es, la transición de BKT debería ocurrir a una temperatura menor que la transición quiral. Por lo tanto, las transiciones ocurrirían en forma desacoplada dando lugar a exponentes críticos del tipo XY e Ising en dos dimensiones, respectivamente.

Sin embargo, experimentalmente no es posible medir las quiralidades y teóricamente *no es posible* separar las fases de los grados de libertad quiral, lo que dificulta en forma extrema un estudio separado y más detallado de las transiciones de fase en el modelo XY totalmente frustrado. Este ha sido un punto muy controversial en la última década.

En este capítulo se presentan los resultados de extensas simulaciones de Monte Carlo de una malla cuadrada de superconductores de tamaño $l \times l$ en un campo magnético transversal de intensidad tal que conduzca a índices de frustración $F = 1/2, 2/5$ y $1/3$. En lo que resta de esta sección se introducen las expresiones matemáticas explícitas que se usarán en las simulaciones de MC para calcular la energía interna, y el módulo de helicidad, así como las cantidades asociadas a los grados de libertad quiral en el caso de frustración máxima ($F=1/2$).

La energía interna del sistema es igual a la energía de interacción Josephson E_J entre superconductores (que se supone constante) multiplicada por el promedio del coseno de la diferencia de las fases $\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}')$ en los sitios vecinos cercanos \vec{r} y \vec{r}' de la función de onda superconductora, más la “torsión” $f(\vec{r}, \vec{r}')$ debida al campo magnético externo, esto es:

$$E = \frac{1}{N} \langle -E_J \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') + f(\vec{r}, \vec{r}')) \rangle, \quad (3.3)$$

En esta expresión los paréntesis triangulares indican el promedio sobre las distintas configuraciones generadas en el proceso de MC. Esta notación para los promedios se usará en lo que resta de esta tesis. El calor específico del sistema se obtiene calculando las fluctuaciones de la energía, definidas en la ecuación (1.6) o bien, mediante la derivada de la energía interna respecto de la temperatura. Aquí usamos la segunda alternativa que ha demostrado ser útil para el modelo XY, puro [33].

El módulo de helicidad, que mide la “rigidez” del sistema ante una torsión de las fases en la frontera del sistema en la dirección del vector \vec{k}_0 , definido en la ecuación (1.7), y que se relaciona directamente con la densidad superflúida por la ecuación (1.8). El módulo de helicidad se calcula mediante la expresión:

$$\begin{aligned}
\gamma_x &= \frac{1}{N} \left\langle \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} X_{\vec{r}, \vec{r}'}^2 \cos(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') + f(\vec{r}, \vec{r}')) \right\rangle - \\
&\quad \frac{1}{Nk_B T} \left\langle \left(\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} X_{\vec{r}, \vec{r}'} \sin(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') + f(\vec{r}, \vec{r}')) \right)^2 \right\rangle + \\
&\quad \frac{1}{Nk_B T} \left\langle \sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle} X_{\vec{r}, \vec{r}'} \sin(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') + f(\vec{r}, \vec{r}')) \right\rangle^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde k_B la constante de Boltzman y la dirección de la torsión se ha tomado en la dirección del eje x . $x_{\vec{r}, \vec{r}'} = x - x'$, que es igual con el espaciamiento de la red a_0 que se tomará de ahora en adelante igual a la unidad. Cuando la torsión es en la dirección del eje Y se usa una expresión análoga. De hecho los resultados del modulo de helicidad reportados en esta tesis corresponden al promedio aritmético de γ_x y γ_y .

Con la finalidad de estudiar las propiedades termodinámicas de los grados de libertad quirales del sistema totalmente frustrado ($F=1/2$) se define la *quiralidad* de una “plaqueta” o celda unitaria de la malla mediante la siguiente ecuación:

$$\chi(\vec{R}) = \text{sgn} \left(\sum_{\langle \vec{r}, \vec{r}' \rangle \in \mathcal{P}} \text{sen}(\phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') + f(\vec{r}, \vec{r}')) \right), \tag{3.5}$$

donde el vector $\vec{R} = ([i+\frac{1}{2}]a_0, [j+\frac{1}{2}]a_0)$ corresponde al punto central de la celda unitaria \mathcal{P} de dimensiones $a_0 \times a_0 = 1 \times 1$ y “*sgn*” indica la función que toma el signo de la cantidad entre paréntesis. Así pues, la variable $\chi(\vec{R})$ tiene solamente dos valores, $+1$ y -1 , dependiendo del sentido de circulación de las supercorrientes (vorticidad) en cada celda unitaria de la malla. En consecuencia, $\chi(\vec{R})$ se puede considerar como una variable del tipo Ising en dos dimensiones. Para un sistema totalmente frustrado la configuración a $T = 0$ (estado base) se ordena como un *antiferromagneto de Ising*, esto es, los dos valores de la quiralidad ocurren en forma alternada, como si se tratase de un “tablero de ajedrez” tal como se muestra en la figura 6 (cap.I). Conforme aumenta la temperatura, las fluctuaciones térmicas dan lugar a regiones de quiralidad $+1$ y otras de quiralidad -1 , generando “paredes de dominio”. Como una “medida” del ordenamiento del sistema, tal como se procede con el antiferromagneto de Ising, calcularemos la magnetización *alternada* así como sus correspondientes fluctuaciones

Estas cantidades están definidas, respectivamente, por las ecuaciones

$$M_x^{alt} = \frac{1}{N} \sum_R (-1)^{R_x + R_y} \chi(R), \quad (3.6)$$

$$\chi_x = \frac{N}{k_B T} \left(\langle (M_x^{alt})^2 \rangle - \langle M_x^{alt} \rangle^2 \right), \quad (3.7)$$

Es también usual para el antiferromagneto de Ising en dos dimensiones calcular el promedio, sobre las configuraciones, del cuadrado de la magnetización alternada $\langle (M^{alt})^2 \rangle$, con sus correspondientes fluctuaciones. Estas cantidades son más convenientes de estudiar debido a que son numéricamente más estables que aquellas definidas por las ecuaciones (3.6) y (3.7). Las fluctuaciones de $\langle (M^{alt})^2 \rangle$ se calculan mediante la ecuación:

$$\chi_x^2 = \frac{N^2}{k_B T} \left(\langle (M^{alt})^4 \rangle - \langle (M^{alt})^2 \rangle^2 \right), \quad (3.8)$$

En esta tesis se estudian ambas magnetizaciones con la finalidad de estimar mejor la temperatura crítica de los grados de libertad quiral.

En la siguiente sección se presentan y discuten los resultados obtenidos para el modelo XY puro. Como ya se mencionó usaremos las propiedades de este modelo como término de comparación cuando el sistema está frustrado.

RESULTADOS

El modelo XY no frustrado

El modelo XY no frustrado ha sido extensamente estudiado analíticamente y mediante simulaciones de Monte Carlo (MC). Aquí se presentan los resultados de simulaciones de MC realizadas en mallas de tamaño $l \times l$ con $l = 36$ y 48 , en el rango de temperaturas $0 \leq T \leq 1.6$. El número de pasos de MC (NPMC) requerido para equilibrar el sistema en la región de altas temperaturas (arriba de la temperatura crítica) fue de 15,000 PMC mientras que en la región de bajas temperaturas (abajo de la temperatura crítica) se requirieron del

orden de 25, 000 PMC Los promedios de las cantidades termodinámicas estudiadas, energía interna, calor específico, módulo de helicidad y derivada del módulo de helicidad, que abajo se detallan, se realizaron sobre un total de 60,000 a 120,000 configuraciones en la región de temperaturas altas y bajas, respectivamente.

En la figura 7(a) se muestran los resultados para de la energía interna donde se observa que alrededor de la temperatura de transición $T \approx 1$, los datos de MC muestran ligeras variaciones como función del tamaño del sistema. Sin embargo, arriba y abajo de la región crítica no se observan efectos de tamaño finito. Estos resultados son consistentes con estudios numéricos previos. Siguiendo la referencia [33] el calor específico se obtuvo de la derivada de la energía interna respecto de la temperatura. Los resultados para el comportamiento de esta cantidad como función de T para los dos tamaños de malla estudiados se muestran en la figura 7(b). Se observa que esta cantidad tiene un máximo cuya posición es sensitiva al tamaño del sistema y para $l = 48$ se localiza ligeramente arriba de $T \approx 1$. Estos resultados son consistentes con estudios numéricos previos [33,34]. Además, el valor de C_{max} es aproximadamente el mismo para los dos valores de l estudiados. Esto esta de acuerdo con el hecho de que para el modelo XY puro no hay divergencia en C_v sino más bien, hay un efecto de saturación en el valor de C_{max} como función de l .

Los resultados para el módulo de helicidad indican que no existen efectos de tamaño finito en la región de bajas temperaturas ($T < T_c$) Sin embargo, justo arriba de T_{BKT} estos efectos son importantes. Como se observa el módulo de helicidad decrece más rápidamente a cero para la malla más grande figura 7(c). La ecuación (1.11) sugiere que la temperatura crítica puede obtenerse localizando la intersección de la recta con pendiente $\frac{2}{\pi}$ con $\Upsilon(T)$. En la figura 7(c), observamos que esta intersección se presenta en $T \approx 0.95$, que corresponde a la temperatura crítica obtenida en estudios previos [4,31,33,34] para el modelo XY sin frustración. Nótese que es posible estimar T_{BKT} de esta manera debido a que la ecuación (1.11) se obtiene de la solución de las ecuaciones de renormalización.

En la figura 7(d) se muestra la derivada de $\Upsilon(T)$ como función de la temperatura. Esta cantidad presenta un pico agudo cuya posición se mueve hacia temperaturas más bajas

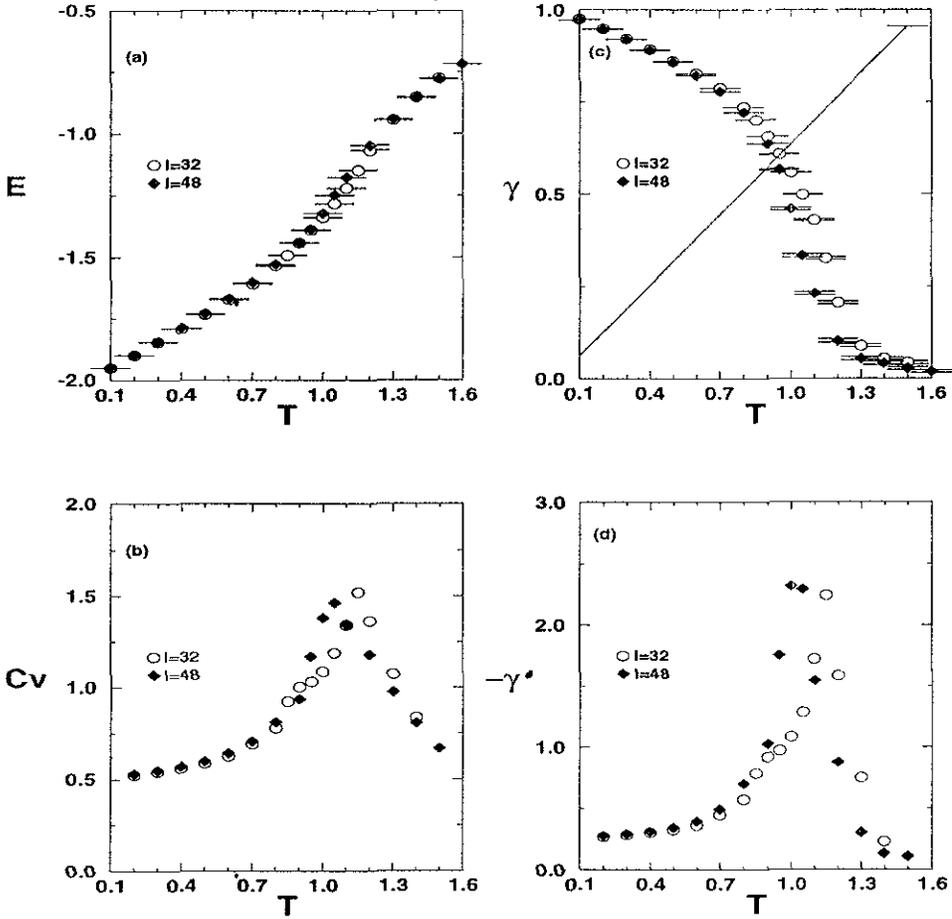


FIG. 7. Resultados para (a) la energía interna, (b) el calor específico, (c) el módulo de helicidad y (d) la derivada del módulo de helicidad como función de la temperatura y tamaño de la malla para el caso $F=0$

conforme aumenta el tamaño de la malla indicando la temperatura a la que $\Upsilon(T)$ va a cero. La temperatura a la que se presenta el pico en esta cantidad para la malla más grande es en $T \approx 1$, que es una temperatura ligeramente mayor que T_{BKT} obtenida usando la ecuación (1.11) y $\Upsilon(T)$. Este resultado está de acuerdo con los cálculos de la derivada del módulo de helicidad para este modelo [33]

Como se verá para otros valores de F no es posible aplicar el criterio dictado por la ecuación (1.11), así que se estimará $T_{BKT}(F)$ localizando el pico en la derivada de $\Upsilon(T)$ tal como se hizo para el modelo XY puro.

El modelo XY totalmente frustrado

El modelo XY totalmente frustrado se ha estudiado en forma extensa y en la actualidad es motivo de una amplia controversia en relación a la posible existencia de dos transiciones de fase asociadas con los grados de libertad de las fases y de las quiralidades. En esta sección se presentan los resultados de simulaciones numéricas en una malla cuadrada de dimensiones lineales $l = 16, 32$ y 48 . Al igual que en el caso $F = 0$ se estudió la energía interna, el calor específico, el módulo de helicidad y su correspondiente derivada respecto de la temperatura para las fases. También se estudiarán las propiedades magnéticas asociadas con los grados de libertad quiral, esto es, la magnetización alternada, el cuadrado de esta cantidad y sus correspondientes fluctuaciones. En las simulaciones de MC se requirieron del orden de 40,000 PMC para equilibrar el sistema a bajas temperaturas, mientras que en la región de altas temperaturas el número de PMC requeridos fue del orden de 10,000. Las cantidades físicas estudiadas se obtuvieron haciendo promedios sobre 160,000 a 200,000 PMC. Las barras de error asociadas se calculan como la desviación estándar de la muestra.

En la figura 8(a) se muestran los resultados para la energía interna como función de la temperatura para tres diferentes tamaños de la malla. Se observa que los efectos de tamaño finito son despreciables en el rango de temperaturas estudiado. Excepto en la región crítica

donde hay ligeras variaciones de E con el tamaño del sistema.

El calor específico se obtuvo a partir de la derivada de E respecto de T y los resultados se muestran en la figura 8(b). Esta cantidad muestra un pico cuya altura aumenta con el tamaño de la malla y su posición se localiza en $T \approx 0.45$, sugiriendo la existencia de una transición de fase. Este comportamiento es consistente con estudios previos [34]. Notese que los efectos de tamaño finito son mínimos a bajas temperaturas mientras que a altas temperaturas éstos son importantes.

Los resultados para el módulo de helicidad se muestran en la figura 8(c). Se observa que esta cantidad disminuye significativamente en $T_c \approx 0.45$ lo que es una evidencia clara de una transición de fase. De acuerdo con la ecuación (1.11), que muestra la relación directa entre $\Upsilon(T)$ y la densidad superfluida, el sistema se encuentra en su estado superconductor a temperaturas $T < 0.45$, mientras que a más altas temperaturas la densidad superfluida es cero lo que sugiere que el sistema se encuentra en su estado normal. Justo arriba de $T = 0.45$ se observan efectos de tamaño finito, esto es, los valores de $\Upsilon(T)$ dependen ligeramente del tamaño de la malla que se usó para calcular esta cantidad. Sin embargo, a más bajas temperaturas los efectos de tamaño finito son despreciables.

Para estimar la temperatura de transición se procedió como en el caso del modelo XY puro, esto es, se obtuvo la intersección de $\Upsilon(T)$ con la recta con pendiente $\frac{2}{\pi}$. El punto de intersección ocurre en $T \approx 0.44$, valor que es ligeramente menor que la temperatura a la que ocurre el pico en C_v . Estos resultados son consistentes con la teoría de Berezinski-Kosterlitz-Thouless. Este procedimiento para estimar T_c fue usado en los primeros estudios de este sistema, sin embargo, en los últimos años se ha puesto en *duda* su validez debido a que estimaciones de los exponentes críticos η y ν sugieren que esta transición pertenece a una nueva clase de universalidad, [26,27,35,38] además de que la magnitud de la discontinuidad en $\Upsilon(T_{BKT})$ es distinto del valor universal predicho por la teoría de BKT

En la figura 8(d) se muestra el comportamiento de la derivada de $\Upsilon(T)$ como una función de T para tres valores de l . Al igual que en el caso sin frustración se encuentra un pico en $T \approx 0.44$ indicando la temperatura a la que $\Upsilon(T)$ cambia de un valor finito positivo a cero.

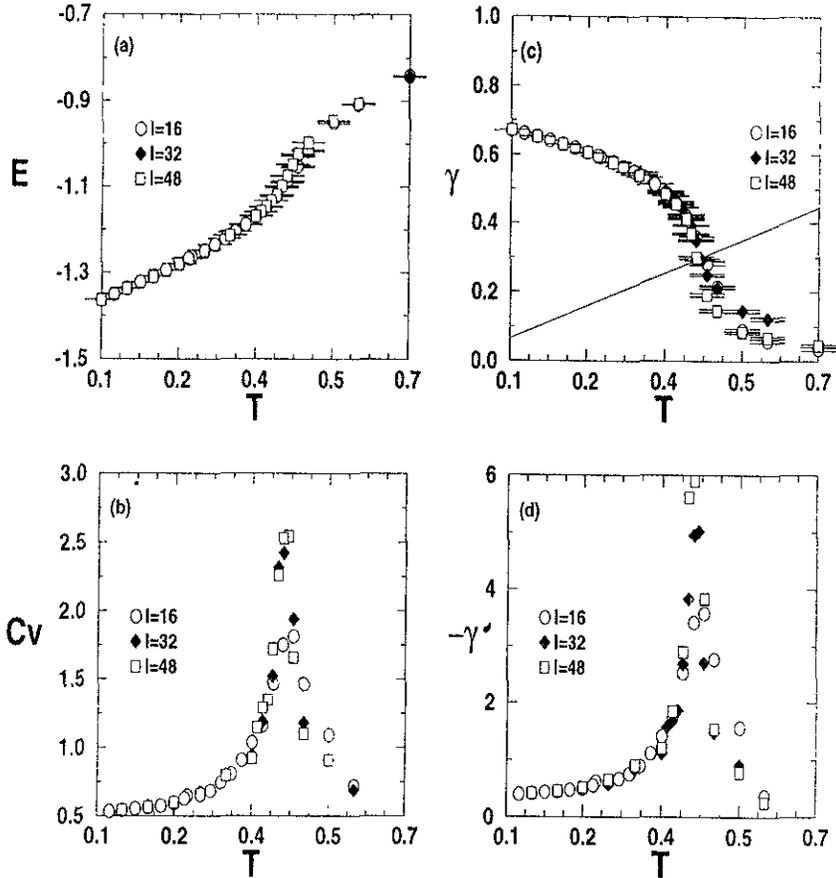


FIG. 8 Resultados para (a) la energía interna, (b) el calor específico, (c) el módulo de helicidad y (d) la derivada del módulo de helicidad como función de la temperatura para $l = 16, 32$ y 48 para el modelo XY totalmente frustrado

esto es, una transición de fase. Esto es consistente con la $T_{BK\Gamma}$ estimada en el párrafo anterior y con la posición del pico en C_v .

Grados de libertad quiral

Con la finalidad de estudiar el ordenamiento de los grados de libertad quiral, supercorrientes circulando alrededor de las celdas unitarias de la malla, se calcularon la magnetización quiral alternada M_χ^{alt} , el cuadrado de la magnetización quiral alternada M_χ^2 , la susceptibilidad alternada χ_χ y el cuadrado de la susceptibilidad alternada χ_χ^2 como función de la temperatura para tamaños de la malla $l = 32$ y $l = 48$. Como se mencionó en el capítulo I, se calculan estas cantidades debido a que las quiralidades se ordenan como si fuesen un antiferromagneto de Ising. En la figura 9(a) se muestra el comportamiento de la magnetización alternada donde se observa que en $T \approx 0.42$ esta cantidad va a cero indicando la presencia de una transición de fase en los grados de libertad quirales. El comportamiento de la correspondiente susceptibilidad como función de T se muestra en la figura 9(b), donde se observa que ésta cantidad desarrolla un pico agudo justo a la temperatura a la que M_χ^{alt} va a cero, confirmando una transición de fase de los grados de libertad quirales a la temperatura $T \approx 0.42$. Debido a que M_χ^{alt} es una cantidad difícil de evaluar numéricamente debido a que sus valores oscilan entre valores positivos y negativos, también se calculó el promedio de M_χ^2 , que es una cantidad numéricamente más estable, para estudiar la consistencia en la estimación de la temperatura crítica. En la figura 9(c) se muestra M_χ^2 como función de T donde se observa un comportamiento similar al de M_χ^{alt} , esto es, decae súbitamente a cero en $T \approx 0.42$. En la figura 9(d) se muestran las fluctuaciones, susceptibilidad, de $M_\chi^2(T)$. Esta cantidad también desarrolla un pico en $T \approx 0.42$, temperatura a la cual el cuadrado de la magnetización decae a cero. Por tanto, las cantidades magnéticas asociadas a los grados de libertad quirales indican claramente la existencia de una transición de fase a $T \approx 0.42$, temperatura ligeramente menor a la temperatura en que ocurre la tran-

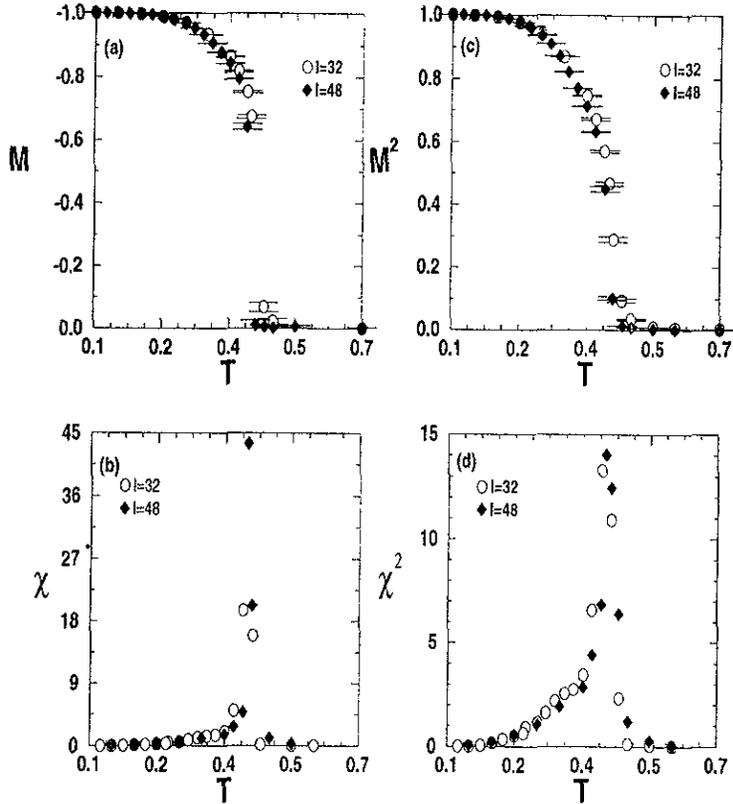


FIG. 9. Comportamiento de las propiedades magnéticas de los grados de libertad quirales. (a) magnetización quiral alternada, (b) susceptibilidad quiral alternada. (c) cuadrado de la magnetización quiral alternada, (d) cuadrado de la susceptibilidad quiral alternada. Estas cantidades se grafican como función de T para diferentes tamaños del sistema.

sición de fase de los grados de libertad rotacionales $U(1)$. Sin embargo, debido a que en esta tesis se hace solamente una estimación de las temperaturas críticas, no es posible discernir en relación a la existencia de dos transiciones de fase independientes o de una transición de fase que es la superposición de las transiciones de fase de los grados de libertad quirales y rotacionales. Esto ha sido un punto muy controversial en años recientes.

El modelo XY frustrado para el caso $F=2/5$

En esta sección se presentan los resultados del comportamiento de E , C_v , Υ y Υ' , como función de T para diferentes sistemas cuando por cada una de las celdas unitarias de la malla pasan *en promedio* $2/5$ del cuanto de flujo magnético. Estudios recientes tanto experimentales [25] como teóricos [28,37] indican que el estado base (estado a $T=0$) de este sistema consiste de "escaleras" alineadas de tal forma que la celda unitaria del estado base consiste de 5×5 celdas unitarias de la malla. Se ha sugerido que las características y propiedades de este estado base tienen consecuencias importantes en la naturaleza de la transición a $T > 0$. Estos estudios sugieren también que las *paredes de dominio* tienen un papel importante en la transición de fase del sistema. Como se verá en los siguientes párrafos, para este valor del índice de frustración se tiene una transición de primer orden que da lugar a un comportamiento de las cantidades termodinámicas totalmente distinto al obtenido para los casos $F = 0$ y $1/2$.

Para estudiar el comportamiento de la malla superconductora con este índice de frustración se realizaron simulaciones de MC en mallas de tamaño $l \times l$ con $l = 25, 40$ y 55 , en el rango de temperaturas $0.1 \leq T \leq 0.5$. Para equilibrar el sistema se requirieron entre 20,000 PMC y 30,000 PMC, dependiendo de la región de temperaturas. Los promedios de las cantidades termodinámicas de interés se efectuaron sobre 200,000 PMC en todo el rango de temperaturas estudiado.

En lo que sigue se describen los resultados para la energía interna como función de la

temperatura, cuyo comportamiento se muestra en la figura 10(a). Notese que en casi todo el rango de temperaturas los efectos de tamaño finito son despreciables, sin embargo, alrededor de una cierta temperatura, ($T \approx 0.22$) se observa que los valores de la energía interna muestran una ligera dependencia con el tamaño de la malla. Por otra parte, alrededor de esta temperatura se encuentra que la energía interna tiene un *salto discontinuo*, que como se acaba de indicar, es sensible al tamaño de la malla. Este salto discontinuo se incrementa ligeramente conforme aumenta el tamaño del sistema. En la figura 11(a) se muestra la magnitud del salto para la malla más grande. Esta discontinuidad ocurre a la temperatura $T \approx 0.225$ y sugiere la posibilidad de una transición de fase de primer orden. Esta transición se manifiesta por la competencia entre dos estados energéticamente distintos que el sistema puede ocupar dependiendo cual sea su estado anterior. Con la finalidad de investigar con más detalle la existencia de estos dos estados se estudió la evolución de la energía interna como función del número de pasos de MC a una T cercana al salto discontinuo. En la figura 11(b) se muestra evidencia en relación a la existencia de estos dos estados. Los puntos de la distribución (i) que representan la evolución de E se obtuvieron iniciando con una configuración de equilibrio a $T = 0.24$, mientras que los correspondientes a la distribución (ii) se obtuvieron iniciando con una configuración de equilibrio a $T = 0.22$. Estas dos configuraciones iniciales son energéticamente diferentes y conducen a dos valores distintos de E a la temperatura $T = 0.225$. Esto es una clara indicación de la existencia de una transición de primer orden. Por tanto, el comportamiento de la malla superconductora para este índice de frustración ($F=2/5$) es significativamente distinto al obtenido para los índices de frustración $F = 0$ y $1/2$. Con $F = 0$ se tiene una transición de tipo BKT debido a la disociación de pares vórtice-antivórtice, así también, cuando $F = 1/2$ se tiene una transición del tipo de BKT (pares vórtice-antivórtice) para las fases mientras que para las qualidades una del tipo Ising (paredes de dominio), pero con exponentes críticos diferentes a los del modelo XY puro y diferentes a los del modelo de Ising en dos dimensiones, respectivamente. De acuerdo con la interpretación tanto de los estudios teóricos como experimentales esta transición es fundamentalmente producida por la nucleación de *paredes de dominio* [35].

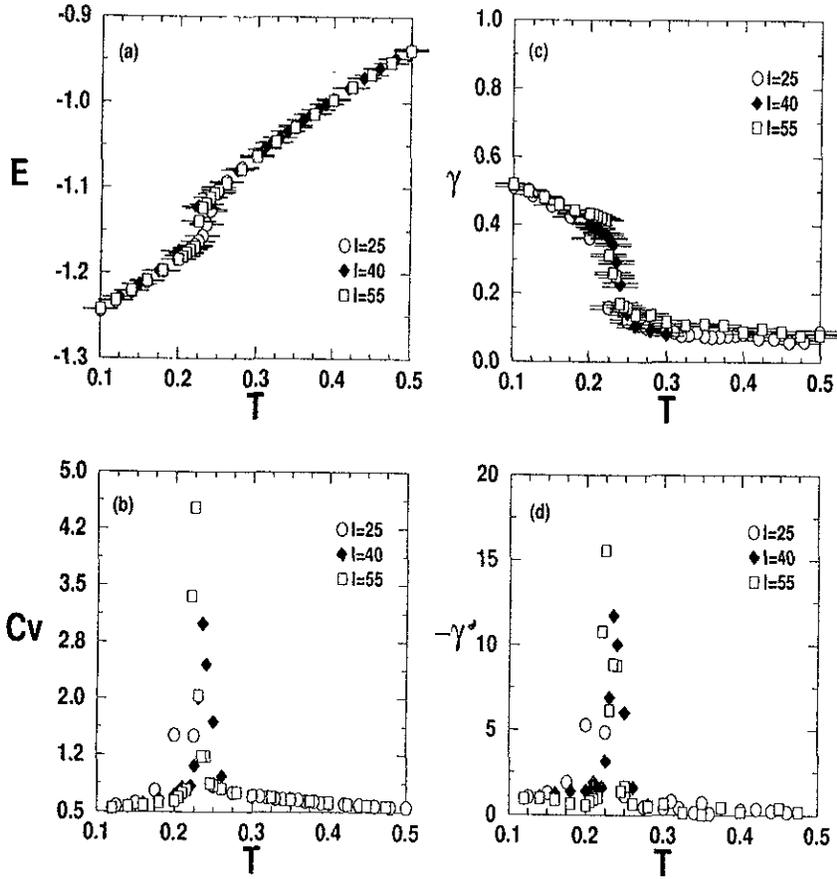


FIG. 10. Comportamiento de (a) la energía interna, (b) del calor específico, (c) del módulo de helicidad y (d) derivada del módulo de helicidad, como función de la temperatura para diferentes tamaños de sistema, $l = 25, 40$ y 55 para $F = 2/5$.

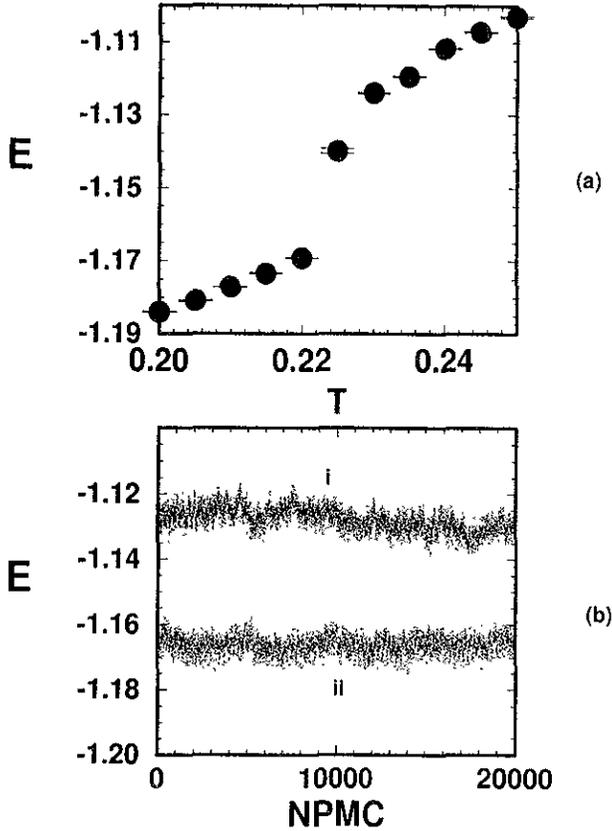


FIG 11. (a) Comportamiento de E alrededor de la temperatura crítica cuando $l = 55$ y $F = 2/5$. (b), Energía interna como función del número de pasos de Monte Carlo para $T=0.225$. Los resultados de la distribución (i) se obtuvieron iniciando con una configuración en equilibrio a $T = 0.24$, mientras que los de la distribución (ii) corresponden a una configuración inicial en equilibrio a $T = 0.22$. Estas distribuciones indican la competencia entre dos estados de diferentes energías, comportamiento característico de una transición de fase de primer orden.

El comportamiento del calor específico se muestra en la figura 10(b). Se observa que esta cantidad desarrolla un pico agudo que es sensible al tamaño de la malla. es decir, el máximo del calor específico C_{max} depende de l . También se nota que la temperatura a que ocurre el máximo del calor específico C_{max} es precisamente la temperatura a la que se presenta la discontinuidad en la energía interna. Este resultado es consistente con el que se obtuvo en la referencia [39] donde se estudia un gas de Coulomb neutro con cargas fraccionarias de $\pm 2/5$ en dos dimensiones. Existe la creencia generalizada de que el gas de Coulomb con cargas fraccionarias (neutro) en dos dimensiones, esta en la misma clase de universalidad que el modelo XY uniformemente frustrado. Así pues, los resultados obtenidos para este índice de frustración parecen ser consistentes con esta hipótesis.

El comportamiento del módulo de helicidad como función de T y del tamaño del sistema se muestra en la figura 10(c). Esta cantidad muestra dependencia importante con el tamaño de la malla alrededor de la temperatura donde ocurre el salto discontinuo en E , además de que se observa una disminución abrupta en Υ aproximadamente a la temperatura a la que ocurre el salto en la energía interna y el máximo del calor específico.

En la figura 10(d) se muestra la derivada del módulo de helicidad como función de la temperatura y del tamaño del sistema. Υ' esta caracterizada por un pico pronunciado cuya altura es sensible al tamaño de la malla; conforme crece el tamaño de la malla aumenta la altura del pico. No obstante, su posición es consistente con el comportamiento de las otras cantidades termodinámicas estudiadas. Específicamente el pico en Υ' ocurre a la temperatura $T \approx 0.22$. En conclusión, en el caso de frustración $F = 2/5$ se obtuvo evidencia de una transición de fase de primer orden lo que esta de acuerdo con resultados teóricos recientes [39] para el modelo XY y con estudios hechos para el gas de coulomb frustrado en dos dimensiones [28]. Así también con resultados experimentales recientes [25]. En estos trabajos se sugiere que el mecanismo que produce la transición es la nucleación de *paredes de dominio*, a diferencia de lo que ocurre en los casos $F = 0$ y $1/2$. Es importante enfatizar que esto *no significa* que no se tengan pares vórtice-antivórtice, estos están presentes en el sistema y son debidos al campo magnético y su densidad es independiente de la temperatura

El modelo XY frustrado para el caso $F=1/3$

El modelo XY uniformemente frustrado con $F = 1/3$ se ha estudiado recientemente tanto desde el punto de vista experimental [24] como teórico [21,28]. En el primer caso ha sido posible observar la estructura del estado base del sistema que consiste de una celda unitaria 3×3 que en su diagonal tiene una estructura de “escalera”. Estas observaciones son consistentes con las predicciones teóricas originales [32,37]. En esta sección se presentan los resultados de simulaciones de MC realizadas en mallas de tamaño $l \times l$ con $l = 9, 15, 24, 36$ y 48 , en el rango de temperaturas $0.1 \leq T \leq 0.5$. Estos sistemas requirieron de 20K a 30K PMC para obtener configuraciones de equilibrio en las regiones de alta y baja temperatura esto es, a T 's mayores y menores que T_c , respectivamente. Las cantidades termodinámicas se obtuvieron promediando entre 300,000 y 400,000, PMC a altas temperaturas mientras que a bajas temperaturas los promedios se efectuaron sobre 500,000 PMC.

Los resultados para el comportamiento de la energía interna como función de T y del tamaño del sistema se muestran en la figura 12(a). En ésta podemos observar que a temperaturas menores que 0.40 los efectos de tamaño finito del sistema son importantes para $l \leq 24$. Sin embargo, una mirada cuidadosa nos permite ver que para las redes más grandes $l = 36, 48$ los efectos del tamaño del sistema son despreciables. En la figura 12(b) se muestran los resultados para el calor específico como función de la temperatura para los mismos tamaños del sistema indicados en el caso de la energía interna. Se observa que la altura del pico aumenta conforme aumenta el tamaño de la malla y su posición se desplaza ligeramente hacia temperaturas menores. La posición del máximo de C_v para la malla más grande está en $T \approx 0.21$.

Estudios teóricos recientes [21,28] sugieren que la transición de fase es del tipo Ising en dos dimensiones, esto es, una transición de segundo orden. De hecho en la referencia [28] se estimaron los exponentes críticos para este índice de frustración obteniendo resultados consistentes con los exponentes críticos del modelo Ising en dos dimensiones. Con la finalidad de comparar los resultados de MC de esta tesis con trabajos recientes en la figura 13 se

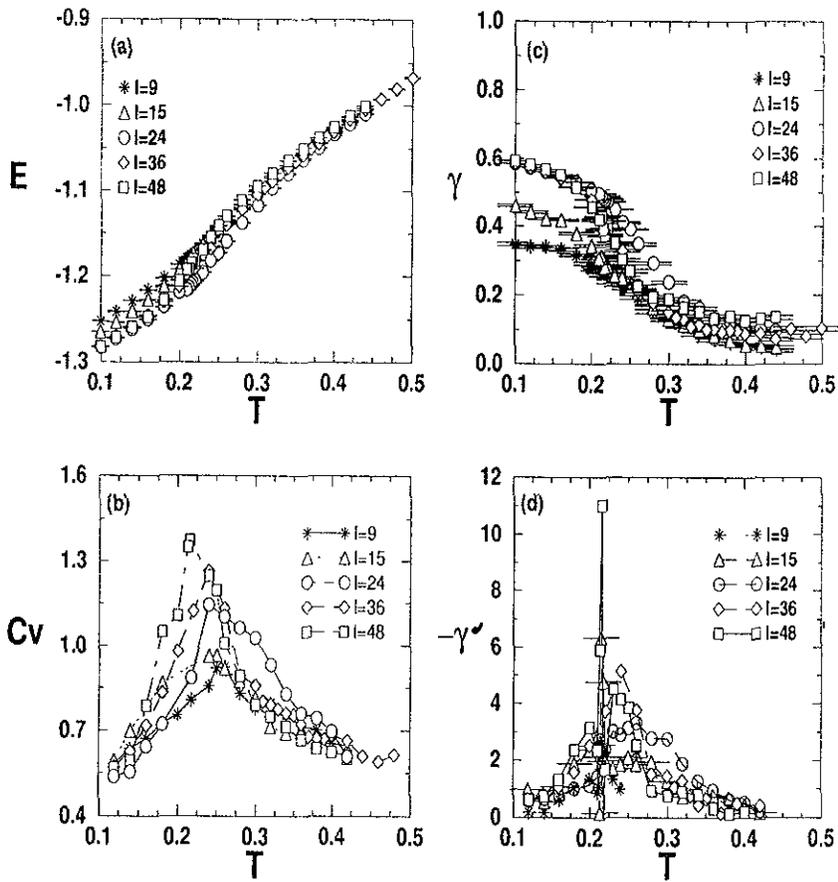


FIG. 12 Resultados modelo XY frustrado con $f=1/3$ para (a) la energía interna, (b) el calor específico, (c) el módulo de helicidad y (d) la derivada del módulo de helicidad como función de la temperatura para diferentes tamaños de la malla, con $l=9,15,24,36$ y 48 .

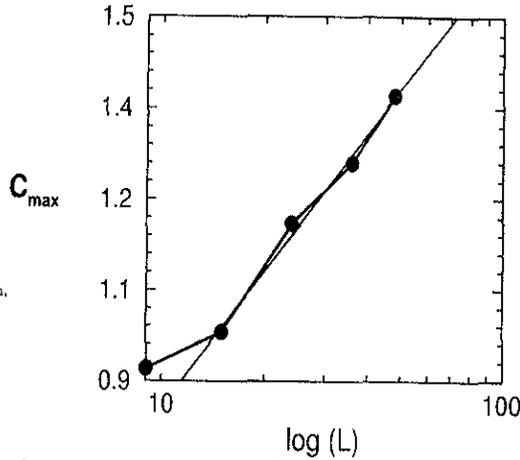


FIG. 13. Resultados para el máximo del calor específico como función del logaritmo de l , donde $l=9,15,24,36$ y 48 .

grafica el máximo del calor específico como función del logaritmo de l , el tamaño lineal del sistema. Se observa que los puntos para las cuatro mallas más grandes se encuentran aproximadamente sobre una línea recta. De hecho, se hizo un ajuste de mínimos cuadrados a los cuatro puntos y se obtuvo un resultado bastante aceptable para la función de error (χ^2). La línea recta resultante de este ajuste se muestra en la figura. Por tanto, los resultados de MC para C_{max} versus $\log(l)$ sugieren que el exponente crítico α del calor específico es cero. Este resultado es consistente con una transición de fase de segundo orden, tal como se ha sugerido en recientes estudios teóricos [28].

Por otra parte, en la figura 12(c) se muestran los resultados para el módulo de helicidad como función de la temperatura para diferentes tamaños del sistema. Al igual que en el caso de las cantidades anteriores se tienen efectos de tamaño finito importantes para los sistemas más pequeños. No obstante, para los dos tamaños de malla más grandes $l=36$ y 48 , los resultados son casi idénticos en la región de temperaturas bajas. A altas temperaturas se observa que el módulo de helicidad no es cero como uno esperaría. Esto es debido a que en esta región los efectos del tamaño del sistema son importantes. Para obtener $T=0$ dentro

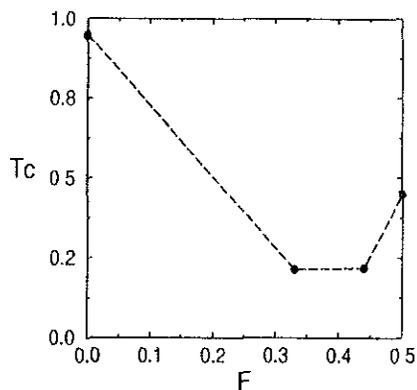


FIG. 14. Diagrama de fase T_c versus F .

del error estadístico se requiere de sistemas más grandes y de un mayor número de iteraciones de MC. Esto no se hizo debido a los requerimientos excesivos de cómputo. Finalmente, en la figura 12(d) se tienen los resultados para la derivada de Υ respecto de la temperatura. Lo más importante a destacar en esta figura es la presencia de un pico en $T \approx 0.21$ que es consistente con la posición del pico en el calor específico; es decir, estos resultados indican una temperatura de transición de aproximadamente 0.21. Este valor de T_c está de acuerdo con recientes estudios teóricos [28].

Por último, en la figura 14 se muestra el diagrama de fases temperatura crítica como función del índice de frustración. Este diagrama resume los resultados obtenidos en el estudio de la termodinámica del modelo XY en dos dimensiones con frustración uniforme. En la figura se incluyen los cuatro valores de F estudiados en esta tesis y sugiere que hay un valor de F para el cual T_c es mínima. Esta F se localiza en el intervalo $\frac{1}{3} < F < \frac{2}{5}$.

CAPITULO IV

CONCLUSIONES

En esta tesis se estudió el modelo XY en dos dimensiones con frustración uniforme para valores de $F = 0, 1/3, 2/5$ y $1/2$. Estos estudios han sido motivados por recientes experimentos en mallas de superconductores en un campo magnético uniforme, así como estudios teóricos recientes. Los resultados obtenidos de simulaciones de Monte Carlo son consistentes tanto con estudios teóricos como experimentales. Estos se pueden resumir de la siguiente forma:

(i) Se demuestra que el comportamiento de las cantidades termodinámicas estudiadas es consistente, para el caso $F = 0$, con una transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless.

(ii) Para el modelo XY con frustración total se encuentra que la termodinámica asociada con las fases (ángulos) es consistente con estudios previos, así también la temperatura crítica estimada. En relación a los grados de libertad quirales, se obtiene que el comportamiento de la magnetización y la susceptibilidad son similares al comportamiento de un antiferromagneto de Ising.

(iii) En el caso del modelo XY con $F = 2/5$, a diferencia de los dos casos anteriores, se encuentra evidencia de una transición de primer orden.

(iv) Por último, en el caso $F = 1/3$ el comportamiento del máximo del calor específico sugiere un exponente crítico $\alpha = 0$, característico de una transición de fase de segundo orden.

Estos resultados están de acuerdo con recientes estudios teóricos y experimentales en mallas de superconductores en un campo magnético transversal.

Finalmente, con las temperaturas críticas estimadas a partir del comportamiento termodinámico, se sugiere el diagrama de fases T_c versus F .

REFERENCIAS

- [1] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. **JETP** **32**, 493 (1971).
- [2] V. L. Berezinskii, Sov. Phys. **JETP** **34**, 610 (1972).
- [3] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, Jour. Phys. **C6**, 1181 (1973)
- [4] J. M. Kosterlitz, Jour. Phys. **C7**, 1046 (1974).
- [5] M. Fisher, M. Barber y D. Jasnow, Phys. Rev. **A8**, 1111 (1973).
- [6] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, Phys. Rev. Lett. **39**, 1201 (1977).
- [7] J. Villain, J. Phys. **C 10**, 1771 (1977).
- [8] E. Frandkin, B.A. Huberman, y S. Shenker, Phys. Rev. **B 18**, 4789 (1978).
- [9] J. V. José, Phys. Rev. **B 20**, 2167 (1979).
- [10] E. Granato y J. M. Kosterlitz. Jour. Phys. **C19**, L59 (1986); Phys. Rev. **B 33**, 4767 (1986).
- [11] M. Y. Choi y D. Stroud, Phys. Rev. **B 32**, 5773 (1985); Phys. Rev. **B 35**, 7109 (1987)
- [12] Ch. Leeman, Ph. Lerch, G. A. Racine, y P. Martinoli, Phys. Rev. Lett. **56**, 1291 (1986)
- [13] P. Martinoli, Ph. Lerch, Ch. Leeman, y H. Beck, Proceedings of the 18th international Conference on Low Temperature Physics, Kyoto, 1987 Jpn. J. Appl. Phys. **26**, Suppleent 263(1987).
- [14] B. J. Van Wees, H. S. J. Van der Zant, y J. E. Mooij, Phys. Rev. **B 35**, 7291 (1987).
- [15] H. S. J. Van der Zant, H. A. Rijken, y J. E. Mooij, Jpn. J. Phys. **26**, Suppl 263, 1994(1987)
- [16] J. P. Carini, Phys. Rev. **B 38**, 63 (1988).
- [17] H. S. J. Van der Zant, H. A. Rijken, y J. E. Mooij, J. Low Temp. Phys. **79**, 289 (1990).

- [18] B. Pannetier, J. Chaussy, y R. Rammal y J. Phys.(Paris) **44**, L1853 (1983).
- [19] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal y C. Villagier, Phys Rev Lett **53**, 1845 (1984)
- [20] C. Ebner y D. Stroud, Phys Rev B **31**, 165 (1985), W. Y. Shi et al, Phys Rev B **30**, 1341 (1984). J. Choi y J. V. José Phys. Rev. Lett. **62**, 1320 (1989); J. V. José y G. Ramírez Santiago, Jour. Phys A **26**, L535 (1993)
- [21] F. Falo, A. R. Bishop y P. S. Lomdahl. Phys. Rev. **B41**, 10983 (1990).
- [22] A. M. Chang et al, Appl Phys. Lett **61**, 1974 (1992).
- [23] A. M. Chang et al., Europhys. Lett **20**, 645 (1992).
- [24] H. D. Hallen, et al, Phys Rev Lett. **71**, 3007 (1993).
- [25] X. S. Ling, et al, Phys. Rev. Lett **76**, 2989 (1996)
- [26] Peter Olsson, Phys. Rev. Lett. **75**, 2758 (1995)
- [27] J. V. José y G. Ramírez Santiago. Phys Rev Lett. **77**, 4849 (1996).
- [28] Colin Denniston y Chao Tang. Phys Rev. Lett. **79**, 451 (1997).
- [29] K. Binder (ed): Monte Carlo Methods in Statistical Physics, en "Topics current Physics", Vol. 7 (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1979)
- [30] D. P. Landau. Phys Rev. **B 13**, 2997 (1976).
- [31] Tobochnik y G.V. Chester, Phys Rev B **20**, 3761 (1979).
- [32] Teitel y C. Jayaprakash, Phys. Rev Lett. **51**, 1999 (1983).
- [33] J.E. Van Himbeiger y S. Chakravarty, Phys. Rev B **23**, 359 (1981).
- [34] S. Teitel y C. Jayaprakash, Phys Rev B **27**, 598 (1983).
- [35] G. Ramírez Santiago y Jorge V. José, Phys Rev B **49**, 9567 (1994).

- [36] Seiji Miyashita, Hidetoshi Nishimori, Akira Kuroda y Masuo Suzuki, *Progress of Theoretical Phys.* **60**, 1669 (1978)
- [37] T. C Halsey, *J. Phys. C* **18**, 247 (1985).
- [38] J V José, G. Ramírez Santiago y H. S J Van der Zant, *Physica B* **194-196**, 1671 (1994).
- [39] Y. H Li y S. Teitel, *Phys Rev Lett.* **65**, 2595 (1990)
- [40] B. Pannetier et al., *Phys. Rev Lett.* **53**, 1845 (1984)
- [41] M Aizenman and J. Wehr, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2503 (1989), K. Hui and A. N. Berker, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2507 (1989).
- [42] S Chen, A. M. Ferrenberg and D. P. Landau, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1213 (1992).
- [43] J. Mikalopas, M. Jarrell, F. J. Pinski, Woonki Chung y M. A. Novotny, *Phys. Rev. B* **50**, 1321 (1994).
- [44] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Mc Graw Hill, New York, (1975) Cap 5.