

2 2+



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

**MODELADO GEOFISICO DEL REGISTRO
DE POTENCIAL NATURAL**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO GEOFISICO
P R E S E N T A
AMBROSIO AQUINO LOPEZ

144



DIRECTOR DE TESIS:
DR. PEDRO ANGUIANO ROJAS

258640

MEXICO, D.F. 1998

TECNOLOGIA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

A mi madre.

Por todo el amor y confianza
que depositó en mí.

A mi padre.

Por el impulso y ayuda que
siempre me ha brindado.

A mis hermanas.

Por su confianza y ayuda
desinteresada.

A Martha.

Por el apoyo que me has
brindado y por el amor que
siempre nos ha unido.

Agradecimientos

De forma muy especial agradezco al Dr. Pedro Anguiano por su confianza, consejos y apoyo incondicional, al Mtro. Andrés Tejero por su confianza y sus valiosos comentarios.

De igual forma, agradezco al Dr. James H. Spurlin por su paciencia, tiempo dedicado y su invaluable ayuda. A los ingenieros Ricardo Castrejón y Alejandro Arroyo por sus valiosos comentarios, sin los cuales, no habría sido posible la realización del presente trabajo.

Agradezco profundamente al Instituto Mexicano del Petróleo su apoyo económico y técnico y a la Universidad Nacional Autónoma de México todas las facilidades brindadas para la realización del presente trabajo.

**Modelado Geofísico del Registro de Potencial
Natural**

por
Ambrosio Aquino López

INDICE

LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABLAS	x
Capítulo 1 INTRODUCCION	1
1.1 DESARROLLO HISTORICO DEL REGISTRO POTENCIAL NATURAL	1
1.2 DEFINICION DEL <i>SP</i>	3
1.3 USOS DEL <i>SP</i>	7
1.4 COMPONENTES DEL <i>SP</i>	7
1.4.1 POTENCIAL ELECTROQUIMICO	7
1.4.2 POTENCIAL POR ELECTROFILTRACION	14
1.4.3 EFECTO DORN O POTENCIAL DE SEDIMENTACION	15
1.5 CALCULO DE LAS FUENTES ELECTROMOTRICES (ΔV)	15
1.6 POTENCIAL ESPONTANEO ESTATICO (<i>SSP</i>)	19
1.7 CORRECCION DE LA CURVA <i>SP</i>	20
1.8 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA FORMA DE LA CURVA DEL <i>SP</i>	21
1.9 CONTENIDO DE ARCILLA EN LAS CAPAS PERMEABLES	23
Capítulo 2 MODELADO DE POTENCIAL NATURAL EN GEOMETRIA CILINDRICA	28

2.1	CALCULO DEL POTENCIAL DIPOLAR	28
2.2	SOLUCION EN 1D PARA GEOMETRIA CILINDRICA	31
2.3	CALCULO NUMERICO DE LA SOLUCION DE LA ECUACION POTENCIAL PARA GEOMETRIA CILINDRICA	37
2.3.1	METODO DE FILON	39
2.4	EJEMPLOS DE APLICACION DEL METODO DE SOLUCION EN 1D PARA GEOMETRIA CILINDRICA	43
2.5	METODO DE ANGULO SOLIDO	50
2.5.1	CALCULO DEL POTENCIAL DE UNA SUPERFICIE DIPO- LAR	54
2.6	DESARROLLO DEL METODO DE ANGULO SOLIDO	56
2.7	EJEMPLOS DE APLICACION DEL METODO DE ANGULO SOLIDO	59
2.8	CORRECCION AL METODO DE ANGULO SOLIDO PARA IN- VOLUCRAR CONTRASTE DE RESISTIVIDADES	59
2.9	EJEMPLOS COMPARATIVOS DE LOS METODOS DESCRITOS .	66
Capítulo 3 MODELADO DEL POTENCIAL NATURAL EN CA- PAS PLANAS		75
3.1	CALCULO DEL <i>SP</i> EN CAPAS PLANAS (METODO DE ANGULO SOLIDO).	75
3.2	CALCULO DEL <i>SP</i> EN CAPAS PLANAS RECTANGULARES, SIN CONTRASTE DE RESISTIVIDAD	78
3.3	CALCULO DEL <i>SP</i> EN CAPAS PLANAS RECTANGULARES AL CONSIDERAR CONTRASTE DE RESISTIVIDAD	81

3.4	CALCULO DEL SP EN CAPAS PLANAS CIRCULARES CONSIDERANDO CONTRASTE DE RESISTIVIDAD	85
Capítulo 4	MODELADO DEL POTENCIAL NATURAL EN 2D	89
4.1	MODELADO DEL SP EN 2D POR MEDIO DEL METODO DE ANGULO SOLIDO	89
4.2	MODELADO DEL SP EN 2D POR MEDIO DE LA SUMA DE EFECTOS	92
4.3	EJEMPLOS DE MODELADO DE SP EN 2D POR MEDIO DEL METODO DE SUMA DE EFECTOS	96
Capítulo 5	CONCLUSIONES	112
	REFERENCIAS	116
Apéndice A	ANGULO SOLIDO	119

LISTA DE FIGURAS

1.1	Representación esquemática del corte de un pozo donde se muestra la medición del <i>SP</i>	4
1.2	El lado izquierdo muestra los elementos que conforman la medición de la curva de <i>SP</i> . El lado derecho marca la tendencia general de la curva en horizontes arcillosos y arenosos.	5
1.3	Condiciones experimentales del potencial de difusión. Nótese que los iones negativos quedan del lado derecho debido al flujo de la solución más concentrada a la menos concentrada.	11
1.4	Polaridad resultante del paso de iones de <i>Na</i> a través de la membrana.	12
1.5	Esta figura muestra el acomodo de los iones positivos y negativos en el pozo por efecto del potencial de membrana.	12
1.6	Circuito eléctrico dentro del contacto arena-lutita que genera el potencial electroquímico total.	18
1.7	Comportamiento del factor ΔV al variar el valor de la resistividad del agua de la formación de 0.1 a 100 ($\Omega - m$).	18
2.1	Disposición geométrica de los dipolos sobre la pared del pozo.	29
2.2	Parámetros necesarios para el cálculo del <i>SP</i> en geometría cilíndrica.	33
2.3	Comportamiento de las funciones modificadas de Bessel.	38

2.4	Comportamiento de algunas funciones que involucran a las modificadas de Bessel.	40
2.5	Comportamientos de la parte no oscilatoria cuando μ toma diferentes valores.	41
2.6	Comportamiento de la relación SP/SSP para el caso de una capa de arena entre dos capas de lutitas de 1000 in. Los parámetros son: $\Delta V_1 = \Delta V_3 = -10$, $\Delta V_2 = 20$ y el SSP = 30 mV.	45
2.7	Comportamiento del SP debido a tres cilindros, no existe contraste de resistividad.	46
2.8	Comportamiento del SP para el caso de 3 cilindros considerando que existe contraste de resistividad en el cilindro medio.	48
2.9	Modelado del SP en geometría cilíndrica considerando contraste de resistividad en la capas extremas.	49
2.10	Modelado del SP en geometría cilíndrica para el caso de nueve capas sin contraste de resistividad.	51
2.11	Modelo de un pozo para el cálculo del potencial natural (método de ángulo sólido).	53
2.12	Cuando dos superficies cargadas eléctricamente (con cargas opuestas) quedan separadas infinitesimalmente, se forma una capa dipolar.	54
2.13	Parámetros necesarios para el cálculo de los ángulos sólidos subtendidos por cada una de las dobles capas.	57

2.14	Comportamiento de la curva de potencial natural para el caso de tres cilindros por medio del método de ángulo sólido.	60
2.15	Comparación entre los métodos de ángulo sólido y de la ecuación potencial para el caso de 9 cilindros, sin considerar contraste de resistividad. 61	61
2.16	Comportamiento de la curva de corrección propuesto por Spurlin (1997). 65	65
2.17	Comparación de los métodos exacto y de ángulo sólido corregido para el caso de tres cilindros, suponiendo contraste de resistividad en el cilindro medio.	68
2.18	Comparación del comportamiento del <i>SP</i> para los casos de las soluciones exacta y ángulo sólido modificado.	69
2.19	Comparación de las curvas ángulo sólido y exacto suponiendo el contraste de resistividades dentro del factor ΔV	71
2.20	Comparación de las curvas ángulo sólido y exacta suponiendo que la capa de arena es muy grande respecto a las capas de lutita.	72
2.21	Comparación de las curvas ángulo sólido y exacto suponiendo el contraste de resistividades dentro del factor ΔV y que las capas son de espesor considerable.	73
3.1	Parámetros necesarios para el cálculo del potencial natural por medio del método de ángulo sólido.	76
3.2	Comportamiento de la curva de <i>SP</i> para el caso de capas planas resuelto por el método de ángulo sólido. Obsérvese el comportamiento cuando varía el diámetro del agujero.	79

3.3	Cálculo del potencial para el caso de una capa infinita.	81
3.4	Comparación de los métodos geométrico (considerando que el diámetro de agujero tiende a cero) y ecuación potencial (considerando que las longitudes tienden a infinito).	84
3.5	Cálculo del potencial en una placa de radio a	85
3.6	Comparación de los métodos de ángulo sólido (ang. sol.) y propuesto, considerando diferentes radios de pozo (r).	87
4.1	Modelo de un pozo atravesando capas planas.	90
4.2	Distribución de cargas propuestos para el desarrollo del método de ángulo sólido.	91
4.3	Posición de los dipolos al sumar el cilindro con la capa plana.	94
4.4	Comportamiento del campo secundario. a) Se muestra la dirección del campo eléctrico en las superficies dipolares y b) muestra las líneas de campo eléctrico en un punto determinado.	95
4.5	Reproducción de la figura 3 de Doll (1945).	98
4.6	Reproducción de la figura 5 de Doll (1945).	101
4.7	Reproducción de la gráfica 19 de Doll (1945).	104
4.8	Reproducción de la gráfica 19 de Doll (1945) con diferentes valores de diferencia de potencial.	107
4.9	Modelado en 2D del pozo A.	109

4.10 Modelado en 2D del pozo A.	110
4.11 Modelado del pozo B.	111
A.1 Parámetros necesarios para el cálculo del ángulo sólido.	120
A.2 Origen de las superficies exterior e interior necesarios para el conocimiento del ángulo sólido.	121
A.3 Parámetros para encontrar el ángulo sólido de una diferencial de superficie.	123
A.4 Parámetros que muestran el ángulo sólido dentro de una superficie cerrada.	126
A.5 Cálculo del ángulo sólido fuera de una superficie cerrada.	126
A.6 Perfil del comportamiento del ángulo sólido cuando el punto de observación no intersecta a la superficie.	128
A.7 Ángulo sólido de un disco de radio "a".	130
A.8 Cálculo del ángulo sólido cuando existen dos superficies.	130

LISTA DE TABLAS

2.1	Comparación para el cálculo del potencial mediante la fórmula exacta y la aproximación	31
2.2	Comportamiento del Kernel de la ecuación 2.26	39
2.3	Modelo de tres cilindros, $r=4$ in, $R_m=2$ Ω -m, $\rho=0$ m, SSP=30 mV . .	44
2.4	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_f=12$ m.	44
2.5	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m	47
2.6	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m	50
2.7	Modelo de nueve cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=1090$ m, $z_m=1200$ m	52
2.8	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m	66
2.9	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=0.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m	67
2.10	Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=0.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m	68

4.1	Datos para reproducir la figura 3 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$	97
4.2	Datos para reproducir la figura 3 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$	97
4.3	Datos para generar la figura 5 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$	99
4.4	Datos para generar la figura 5 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$	100
4.5	Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$	102
4.6	Reproducción de la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$	103
4.7	Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$ (2a. versión).	105
4.8	Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$ (2a versión).	106

Capítulo 1

INTRODUCCION

El objetivo del presente capítulo, es dar un panorama del desarrollo histórico del registro de potencial natural (*SP*), las fuentes que lo generan y las condiciones que lo afectan, así como sus características y usos.

1.1 DESARROLLO HISTORICO DEL REGISTRO POTENCIAL NATURAL

En el año de 1912, Conrad Schlumberger inició estudios sistemáticos de prospección eléctrica a lo largo de la superficie de la Tierra (patente francesa 450,784). El 5 de septiembre de 1927, Conrad y Marcel Schlumberger obtuvieron el primer registro eléctrico en Pêchebron, Francia.

En 1928 Conrad Schlumberger descubrió el *SP*; dos años después recibió una patente para medirlo en pozos y localizar estratos permeables. Fue hasta 1931 cuando lo ofreció comercialmente y lo introdujo en Venezuela.

Existe una confusión creada por Anne Gruner Schlumberger (hija de Conrad Schlumberger y esposa de Henry Doll) respecto a quién descubrió el *SP*, ya que en su libro *THE SCHLUMBERGER ADVENTURE*, señala a su esposo como tal, lo cual no es avalado por la mayoría de los autores que refieren el caso. Anne relata que la aventura de Henry Doll, la más inesperada de todas las que le sucedieron cuando vivía en Nueva York, fue la observación de manera casual de un fenómeno que parecía anormal. Un día cuando éste trabajaba en algunas mediciones eléctricas en un pozo, cerca de *Seminole*, se percató de un ligero movimiento de la aguja del potenciómetro

cuando no se había enviado corriente entre los electrodos. Cuando un segundo trazo de la curva confirmó la observación tomó nota, atrás del registro, con la leyenda "*Vibraciones en la aguja. Probable SP*".

Seis meses después, en París, logró, a través de esa nota, desarrollar gran cantidad de pensamientos e ideas que le permitieron asociar el comportamiento del *SP* con capas permeables e impermeables. En alguna ocasión, después de este descubrimiento, Henry habló con Conrad acerca de esto, aunque se desconocen los pormenores de la charla. Este último le dijo a su hija, en confidencia, que Henry estaba justamente trabajando en un descubrimiento que podría brindar el poder decisivo para el futuro de la compañía que habían creado los hermanos Schlumberger.

Anne añade en su libro, que su marido trabajó en los laboratorios de investigación en Péchelbronn, en 1930-31, y en Maracaibo, Grozni y Baku en 1932, donde se mostró que la curva de *SP* traía consigo un fenómeno de electrofiltración debido no solamente -como Henry lo había pensado- a la diferencia de presión entre la columna de lodo en el pozo y el estrato que lo rodea, sino también al diferente grado de salinidad en el lodo y en el agua que se encuentra presente en forma capilar en los estratos permeables, cuyo efecto de batería es resultado de las corrientes de tipo electroquímico, las cuales incluyen variaciones de potencial. Mounce y Rust en 1943 publicaron que el efecto de electrofiltración puede ser debido al relativamente impermeable enjarre y no a la formación misma.

Henry Doll le explicó a su esposa que la curva de *SP* da información de la permeabilidad de los estratos y la curva de resistividad la brinda de la cantidad de agua ó aceite contenida en ella. Lo anterior fue la causa del rápido éxito de estos registros (Schlumberger Anne, 1982).

A finales de 1931, los registros que se obtenían incluían una curva *SP* y una curva

de resistividad (normal-corta).

El potencial natural varía de formación en formación, en rangos de pocos a cientos de milivolts (mV) medidos, relativos al nivel de lutitas. La figura 1.1 muestra un corte esquemático del pozo atravesando un paquete de arenas, el cual es limitado por dos capas de lutitas; a su vez, muestra el comportamiento de la curva cuando se mide en diferentes zonas.

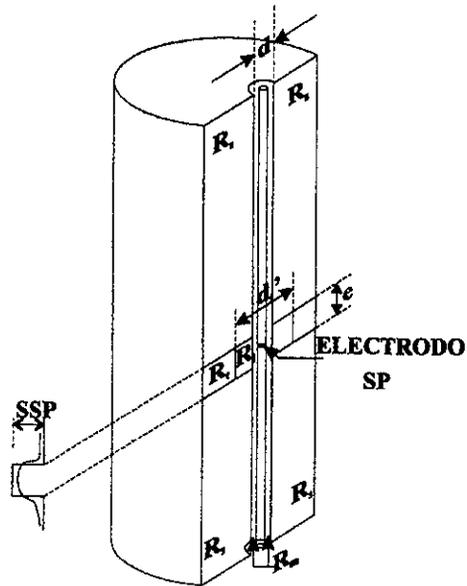
En las primeras mediciones de resistividad se observó un potencial natural, el cual en formaciones areno-arcillosas presenta una línea base, más o menos constante, en las zonas de arcillas presentando deflexiones a la izquierda en las formaciones con arenas.

En 1948, Doll mostró cómo las dimensiones y conductividades del pozo, estratos y zona invadida producen la forma y las amplitudes de la curva *SP*. El significado del *SP* estuvo bajo estudio hasta alrededor de 1962.

1.2 DEFINICION DEL *SP*

En la figura 1.2, se muestra esquemáticamente el *SP* que se define como la diferencia de potencial entre un electrodo colocado en la superficie del suelo y un electrodo móvil en el lodo dentro del pozo. Se puede notar que no existe un punto cero en el registro. El fenómeno que se desarrolla en el pozo es natural, es decir, no es necesario inducir o inyectar una corriente eléctrica.

La forma del registro *SP* se debe a diversos factores tales como la diferencia de salinidades del agua de formación con la del filtrado de lodo, el espesor de las capas permeables, el contenido de arcilla dentro de las capas arenosas, entre otros. El *SP* es un buen indicador del límite entre capas permeables e impermeables y éste se identifica en los puntos de inflexión de la curva, siempre y cuando, los espesores de las



R_1 : RESISTIVIDAD VERDADERA DE LAS ARENAS
 R_2 : RESISTIVIDAD DE LA ZONA INVADIDA
 R_3 : RESISTIVIDAD DE LA LUTITA
 R_4 : RESISTIVIDAD DEL LODO
 d : DIÁMETRO DEL POZO
 d' : DIÁMETRO DE INVASIÓN

FIG. 1.1. Representación esquemática del corte de un pozo donde se muestra la medición del SP .

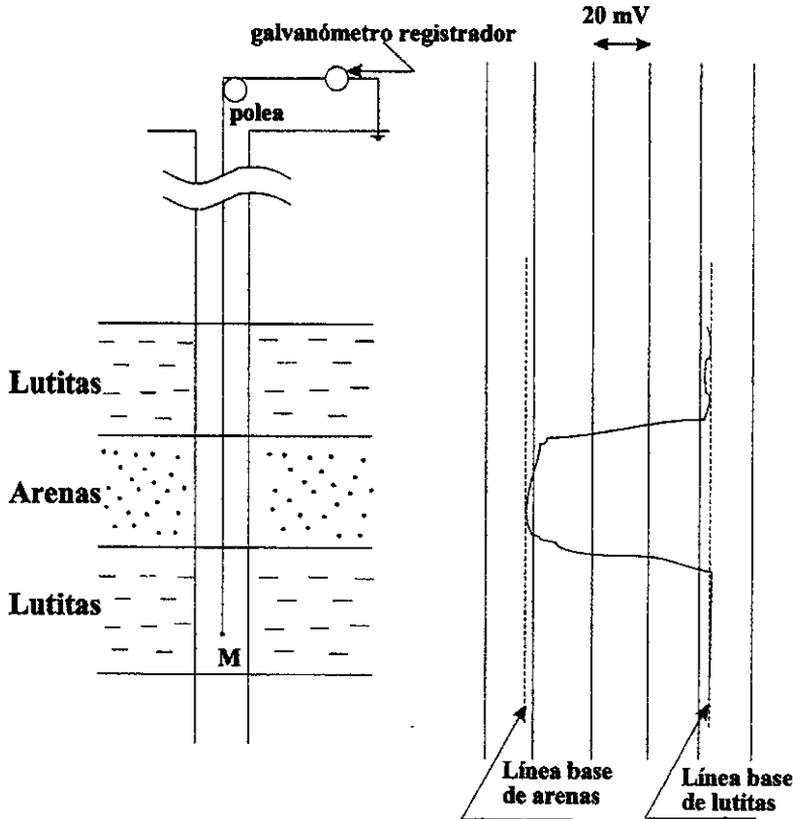


FIG. 1.2. El lado izquierdo muestra los elementos que conforman la medición de la curva de SP. El lado derecho marca la tendencia general de la curva en horizontes arcillosos y arenosos.

capas sean cuando menos 2 veces el espesor del radio del pozo, y las capas adyacentes sean también gruesas. En caso contrario, el punto de inflexión estará ligeramente movido de los límites (Doll, 1948).

El *SP* se mide generalmente en combinación con otras herramientas en pozos, en los cuales, la salinidad del fluido de perforación difiere de la correspondiente al agua de formación. Esto significa que la resistividad del agua de formación (R_w) y la resistividad del filtrado de lodo (R_{mf}) deben ser diferentes. La medida en *mV* de la diferencia de potencial entre el electrodo en la sonda y el electrodo en la superficie, generalmente muestra dos características útiles: una línea recta frente a las arcillas impermeables y deflexiones hacia la izquierda frente a estratos permeables cuando la salinidad del agua de formación es mayor que aquella del fluido de perforación.

Un parámetro importante en el área de Registros de Pozos, es el conocimiento de la saturación del agua en la formación, ya que da una idea de la cantidad de hidrocarburos presente en ésta, para ello es necesario obtener el valor de R_w . La resistividad del agua de la formación puede ser estimada con el registro *SP* considerando que dicha agua y el filtrado de lodo contienen únicamente cloruro de sodio ($NaCl$) en solución, y que la lutita se comporta como una membrana perfecta por la cual sólo pueden circular cationes.

Para el análisis cuantitativo de los registros eléctricos, en general, y del *SP*, en particular, debe considerarse que la resistividad del filtrado de lodo R_{mf} y la resistividad del lodo R_m son frecuentemente diferentes y por ello, no es correcto usar el valor de la primera en lugar de la última.

1.3 USOS DEL SP

La curva del *SP* está situada en la pista izquierda de la película del registro. La línea correspondiente al potencial de las lutitas se llama línea base de las lutitas, y es, a partir de aquí, que se hacen las lecturas del potencial frente a las capas porosas y permeables.

Con lodos ordinarios (lodos en donde la fase líquida es agua) el *SP* permite:

- a) Diferenciar entre capas permeables e impermeables.
- b) Determinar límites de estratos y por tanto espesores de las capas.
- c) Correlacionar capas.
- d) Obtener la resistividad del agua intersticial de las formaciones (R_w).
- e) Conocer en forma cualitativa el contenido de lutita de las capas.

1.4 COMPONENTES DEL SP

Los potenciales naturales que se registran en el lodo frente a las formaciones en los pozos son originados por diversas fuentes. Experimentos de laboratorio y de campo han demostrado que las fuentes, que a continuación se analizan, son las responsables de que exista el *SP*.

1.4.1 POTENCIAL ELECTROQUIMICO

Durante muchos años los investigadores del *SP* han observado que todas las lutitas tienen propiedades electroquímicas de la misma naturaleza, lo cual permite estudiar el efecto en ellas. Además se considera que el cloruro de sodio es la única sal contenida en el agua de la formación y en el filtrado de lodo.

El potencial electroquímico se genera cuando dos soluciones de diferente concentración se ponen en contacto. Si bajo estas condiciones, se coloca un voltímetro a través del límite que separa ambas soluciones, se podrá medir una diferencia de potencial. Por lo general, el agua intersticial de la formación es más salada que el agua del filtrado de lodo.

Wyllie (Wyllie, 1949) determinó experimentalmente que la componente electroquímica está dada en mV por:

$$E_c = -k \log_{10} \left(\frac{a_w}{a_{mf}} \right) \approx -k \log_{10} \left(\frac{R_{mf}}{R_w} \right)$$

donde:

k es proporcional a la temperatura absoluta y es igual a 70.65 a una temperatura de $25^\circ C$,

R_{mf} es la resistividad del filtrado de lodo,

R_w es la resistividad del agua de la formación,

a_{mf} y a_w son las actividades químicas del filtrado de lodo y del agua de formación, respectivamente.

Dos años después, el mismo autor (Wyllie, 1951) propone que el potencial electroquímico a través del filtrado de lodo es dado por:

$$E_{kmc} = k_1(\Delta P)^y$$

donde:

E_{kmc} es dada en mV ;

y varía en un rango de 0.57 a 0.90,

k_1 es la constante de temperatura de la formación y,

ΔP es la presión diferencial entre la columna de lodo y la formación.

A fines de los años 50's, otros autores (Goundain y Scala, 1958) y (Hill y Anderson, 1959), propusieron una fórmula para calcular el potencial electroquímico a través de las lutitas:

$$E_{\text{kah}} = k_2 \Delta P$$

donde:

$$k_2 = -0.018(R_{\text{mf}})^{\frac{1}{3}}.$$

El fenómeno electroquímico se puede dar en dos formas: cuando el límite que separa las dos soluciones es una membrana permeable e inerte (*potencial de difusión*) y cuando se tiene como límite que las separa una lutita (*potencial de membrana*).

En 1949 Wyllie (Wyllie, 1949) llegó a la conclusión experimental de que en ciertas condiciones de la formación de arenas Cypress, al medir el valor de la curva *SP*, ésta varió de acuerdo a la resistividad del lodo. Es decir, a mayores valores de la resistividad del lodo, se obtuvo un valor mayor del *SP* medido. Este mismo autor logró realizar una gráfica que permite obtener el valor del *SP* teniendo como datos únicamente la temperatura de la formación y la relación de resistividad del filtrado de lodo entre la resistividad del agua de la formación. La comparación entre los resultados obtenidos por medio de la gráfica que él propone y los valores leídos directamente del registro es buena para el caso que propone en su artículo.

POTENCIAL DE DIFUSION Las condiciones necesarias para obtener el potencial de difusión, se determinan cuando existe una diferencia de contenido de *NaCl* entre dos soluciones separadas por una membrana porosa. Esta membrana facilita el contacto entre las dos soluciones sin mezclarse. De acuerdo a las condiciones del

problema habrá un movimiento de iones de Na^+ y de Cl^- de la solución de mayor (150,000 a 200,000 ppm) a menor concentración (3,000 a 4,000 ppm), moviéndose más rápidamente los iones de cloro.

Al cabo de cierto tiempo, se tendrá una mezcla en donde ambos lados de la membrana tenderán al equilibrio. Hasta antes de esta situación, los iones de Cl^- pasarán más rápido a través de la membrana porosa, y por tanto, existirá un exceso de cargas negativas en el lado que inicialmente contenía la solución menos concentrada de $NaCl$ (figura 1.3).

Este potencial se puede calcular, aproximadamente, con la ecuación de Nernst:

$$E_d = -11.5 \log \left(\frac{R_{mf}}{R_w} \right)$$

para $25^\circ C$ y donde:

E_d está dado en mV .

En el caso específico del pozo, el E_d se origina en el contacto entre el lodo de perforación y la pared de la formación porosa y permeable. El agua de la formación es la solución más concentrada, el filtrado de lodo es la solución menos concentrada, y la arena (o formación porosa) es la membrana.

POTENCIAL DE MEMBRANA La figura 1.4 muestra que si se coloca entre dos soluciones de diferente concentración de $NaCl$ una membrana catiónica (que sólo permita el paso de cationes o iones positivos, que en el caso real queda representado por las lutitas), pasarán sólo los iones positivos de mayor a menor concentración, dejando a la solución que inicialmente estaba más saturada de $NaCl$, con exceso de cargas negativas, y del otro lado de la membrana, con exceso de cargas positivas (figura 1.5).

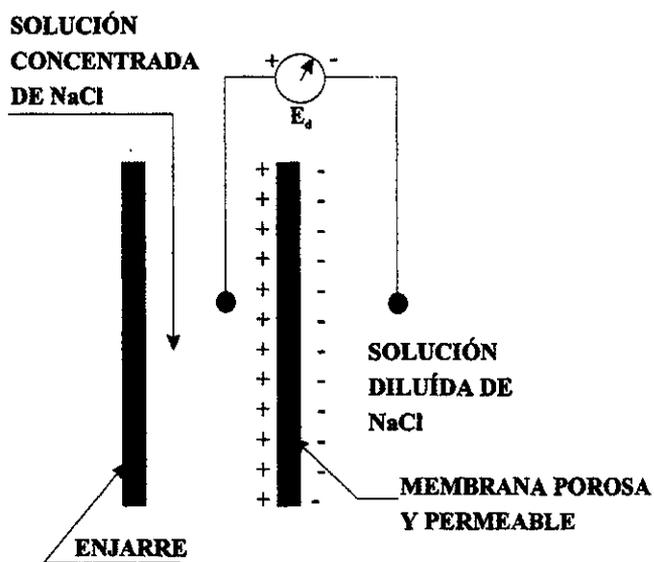


FIG. 1.3. Condiciones experimentales del potencial de difusión. Nótese que los iones negativos quedan del lado derecho debido al flujo de la solución más concentrada a la menos concentrada.

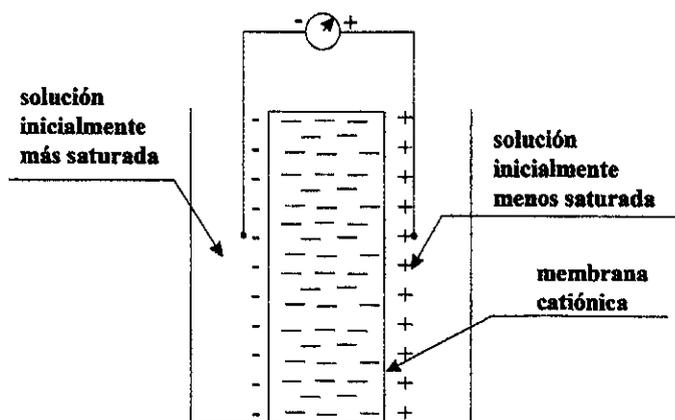


FIG. 1.4. Polaridad resultante del paso de iones de Na a través de la membrana.

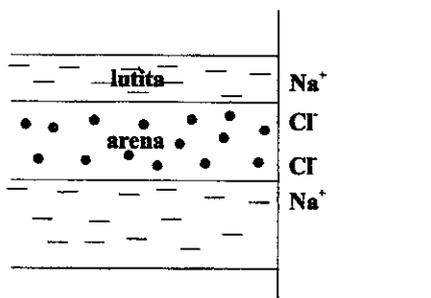


FIG. 1.5. Esta figura muestra el acomodo de los iones positivos y negativos en el pozo por efecto del potencial de membrana.

La ecuación experimental de Nerst permite calcular el potencial de membrana de la forma siguiente:

$$E_m = -59.1 \log \left(\frac{R_{mf}}{R_w} \right)$$

para $25^\circ C$ y donde:

E_m está dado en mV .

En términos cuantitativos, el potencial de membrana es el que más contribuye a una curva SP .

POTENCIAL ELECTROQUIMICO TOTAL (PET).

La suma de los potenciales de difusión y de membrana forma el *PET*, y equivale a dos pilas en serie (figura 1.6).

Una fórmula que permite cuantificar este potencial es dado por:

$$SP = E_d + E_m = -70.6 \log \left(\frac{R_{mf}}{R_w} \right)$$

para $25^\circ C$. Para diferentes temperaturas, se puede obtener la siguiente expresión general:

$$SP = -k \log \left(\frac{R_{mf}}{R_w} \right) \quad (1.1)$$

donde:

k es la constante de la temperatura de la formación dada en mV y,

$k = 64 + 0.23T$; T es dada en grados centígrados.

1.4.2 POTENCIAL POR ELECTROFILTRACION

El potencial por electrofiltración, también llamado potencial electrocinético, potencial de corriente (Gómez Rivero, 1975), se origina cuando el filtrado de lodo se pone en contacto con el enjarre (membrana permeable). El significado físico es que cuando se hace pasar un electrolito a través de una membrana permeable no metálica se observa una diferencia de potencial. Dicho fenómeno se presenta cuando se perforan pozos con lodos de alta densidad (1.9 a 2.5 gr/cm^3). La densidad del lodo de perforación debe ser alta ya que si la presión del pozo es menor que la presión de la formación, entonces el pozo puede descontrolarse.

Es importante señalar, que como la presión del pozo debe ser mayor que la presión de la formación, entonces habrá un desplazamiento del filtrado de lodo hacia la formación, con la consecuente invasión de aquél en ésta. Es decir, el efecto electrocinético resulta cuando existe un movimiento relativo entre un sólido y un líquido.

Hilchie (1967) menciona que generalmente se considera que el potencial electrocinético se crea a través del filtrado de lodo, y también, a través de las arcillas, casi siempre estos dos potenciales son iguales pero de sentido contrario, y se cancelan, por lo cual pueden ser ignorados.

En tanto, se cita a Desbrandes (Gómez Rivero, 1975), quien experimentalmente obtuvo la siguiente expresión aproximada para calcular el potencial de electrofiltración:

$$E_f = 0.37P\sqrt{R_{mc}T_{mc}Q_f}$$

donde:

R_{mc} es la resistividad del enjarre en $\Omega - m$

T_{mc} es el espesor del enjarre en cm

Q_f es el filtrado de lodo en $cm^3/30$ min por cada 700 KPa

P es la presión diferencial en cientos de KPa

Por lo general, el efecto electrocinético hace que la curva SP tenga grandes anomalías. Casi siempre este efecto es ignorado debido a que ocurre en muy pocas ocasiones, y porque aún no es posible corregirlo.

1.4.3 EFECTO DORN O POTENCIAL DE SEDIMENTACION

El potencial de sedimentación ó efecto Dorn surge cuando se permite que ciertos fluidos pasen a través de partículas pequeñas bajo la influencia de la gravedad. Debido a ello, una diferencia de potencial es observada entre dos electrodos colocados a diferentes niveles, dentro de la corriente que pasa por entre las partículas (Wyllie, 1949). En realidad, éste potencial contribuye muy poco a la curva del potencial natural, su contribución no pasa el 1% del total de la curva.

1.5 CALCULO DE LAS FUENTES ELECTROMOTRICES (ΔV)

El ΔV representa el valor de las fuentes electromotrices que actúan a través de cada superficie dipolar, su cálculo, se realiza mediante la ecuación de Nernst (Taherian et al., 1995):

$$\Delta V = (t_+ - t_-) \frac{KT}{e} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) \quad (1.2)$$

donde:

a_1 y a_2 son las actividades salinas,

K es la constante de Boltzman con valor $K = 1.38 \times 10^{-23} \left[\frac{J}{^\circ K} \right]$,

T es la temperatura absoluta y

e es la carga del electrón con valor $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C];

$$t_+ = \frac{i_+}{i_+ + i_-} = \frac{\sigma_+}{\sigma_+ + \sigma_-} = \frac{U_+}{U_+ + U_-} \quad (1.3)$$

y

$$t_- = \frac{i_-}{i_+ + i_-} = \frac{\sigma_-}{\sigma_+ + \sigma_-} = \frac{U_-}{U_+ + U_-} \quad (1.4)$$

son los números de transferencia de un ión positivo y de uno negativo, respectivamente, donde:

i_+ es la corriente de un ión positivo y i_- de un ión negativo,

σ_+ y σ_- son las conductividades de un ión positivo y de uno negativo, respectivamente, y

U_+ y U_- son las movilidades de un ión positivo y de uno negativo en el mismo orden.

De acuerdo a experimentos de laboratorio se ha comprobado (Taherian, et al., 1995) y (De Witte L., 1954) que para el caso de las arenas limpias $t_+ = 0.4$ y $t_- = 0.6$, en contraparte, para el caso de una lutita perfecta $t_+ - t_- = 1$. Con base en lo anterior, resulta claro que para el caso más común en registros, es decir, para una arena arcillosa, se cumple la siguiente desigualdad:

$$-0.2 \leq t_+ - t_- \leq 1. \quad (1.5)$$

Una relación bien conocida para el caso del potencial natural indica que $\frac{\alpha_w}{\alpha_{mf}} = \frac{R_{mf}}{R_{we}}$. El valor ΔV sirve para calcular el potencial espontáneo en los casos de geometría plana y de geometría cilíndrica.

Para el caso del *SP* se cumple la siguiente relación:

$$\ln \frac{a_w}{a_{mf}} \simeq c \ln \frac{R_{mf}}{R_w} \quad (1.6)$$

donde el valor de la constante c depende de la temperatura de la formación.

La figura 1.7 muestra el comportamiento del factor ΔV considerando que el valor de la constante c es igual a 1 y que el eje x incrementa el valor de R_w . El cálculo del factor mencionado se realizó para una temperatura de $45^\circ C$, con $t_+ - t_- = 0.5$, $R_{mf} = 0.5$ y donde el valor de R_w varía de 0.1 a $100 \Omega \cdot m$. Se puede observar que para valores de R_w menores a R_{mf} , el valor ΔV es positivo (lo cual es congruente con la ecuación 1.2, ya que el argumento del logaritmo será mayor a uno), en caso contrario, los valores ΔV son negativos ya que se incrementa el valor de R_w . Es mostrado además, que cuando $R_w = R_{mf}$, el factor al que hacemos referencia, es cero, ya que se tendría el logaritmo de 1.

Al hacer un análisis dimensional del factor ΔV , se tiene que t_+ y t_- son adimensionales debido a que se obtienen de una división de elementos de la misma clase, por ello, $t_+ - t_-$ también es adimensional. La constante de Boltzman tiene unidades de $\frac{J}{^\circ K}$, la carga del electrón está dada en C , y por tanto, la temperatura debe ser dada en $^\circ K$.

$$\Delta V = \left[\frac{\frac{J}{^\circ K} K}{C} \right] = \left[\frac{J}{C} \right] = Volts. \quad (1.7)$$

Es importante hacer notar que en los algoritmos desarrollados en el presente trabajo, los valores ΔV no fueron calculados, sólo se asignó un valor arbitrario debido a la dificultad intrínseca del cálculo para los casos reales. Como un trabajo complementario a los objetivos de la presente tesis se propone hacer inversión con el objeto de poder obtener un valor aceptable de ΔV para cada una de las capas, con base en

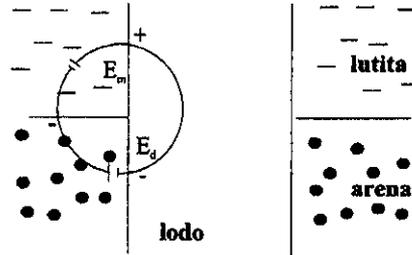


FIG. 1.6. Circuito eléctrico dentro del contacto arena-lutita que genera el potencial electroquímico total.

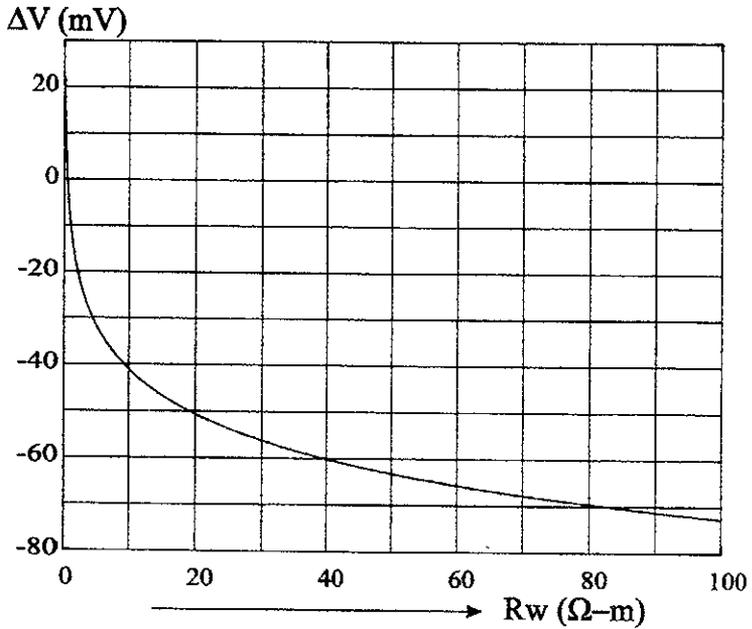


FIG. 1.7. Comportamiento del factor ΔV al variar el valor de la resistividad del agua de la formación de 0.1 a 100 ($\Omega\text{-m}$).

el conocimiento de la resistividad del agua de la formación y contenido de arcilla en las capas permeables.

1.6 POTENCIAL ESPONTANEO ESTATICO (*SSP*)

En la figura 1.6 se ha visto que el potencial puede ser caracterizado mediante un circuito eléctrico; al circular una corriente, habrá una caída de potencial debido a la resistencia de los conductores (lodo, arena con agua y lutita). Si se coloca un tapón aislante en el contacto lutita-arena, el circuito eléctrico no se cierra a través del lodo y la corriente eléctrica ya no circula. Bajo estas condiciones la caída de potencial en el sistema, es cero, y por tanto, el potencial es máximo, lo cual se puede ejemplificar, para su mayor comprensión, si se considera una pila común de 1.5 V y se conecta un voltímetro ideal (que no tenga resistencia interna) a sus polos, entonces se mide ese mismo valor. Pero si se conecta un voltímetro real y se mide la diferencia de potencial de la pila, entonces se obtiene como resultado un potencial menor de 1.5 V.

El concepto anterior se denomina potencial espontáneo estático *SSP*; su deflexión se mide a partir de la línea base de lutitas, y su magnitud, a partir de la siguiente ecuación:

$$SSP = -k \log \left(\frac{a_w}{a_{mf}} \right).$$

Las condiciones para que se presente el *SSP* son que las resistividades de la formación sean de bajas a moderadas y las capas sean moderadamente gruesas. Por tanto, la deflexión de la curva de *SP* se aproxima al valor de *SSP* en la mayoría de las capas gruesas y permeables. El *SSP* es el *SP* corregido por todas las influencias que causan perturbación, tales como el espesor de las capas, diámetro del pozo, etc. El diagrama *SSP* es una representación visual del *SP* corregido por todas estas

influencias.

1.7 CORRECCION DE LA CURVA SP

Las cartas de corrección han sido desarrolladas tradicionalmente por las compañías que toman los registros, ya que son éstas las que conocen perfectamente las condiciones bajo las cuales modelan la curva de *SP*.

En teoría, cuando se mide el *SP* en arenas limpias de espesor grande, se debería obtener el valor del *SSP*, sin embargo, cuando se mide en capas permeables de espesor pequeño y con invasión, el valor medido del *SP* es menor que el *SSP*. Por ello, se deben hacer correcciones que permitan eliminar el efecto de la invasión, contraste de resistividad y del espesor de las capas.

Las cartas de corrección del *SP* se construyeron a partir de datos tomados para casos de capas delgadas en donde se toman en cuenta los **problemas de invasión y no invasión**. Es importante mencionar que en la simulación de la curva *SP*, se considera que las *fem* más importantes que la producen son de origen electroquímico.

Para hacer el análisis teórico de la curva, se simulan los efectos que se desarrollan en el pozo por medio de resistencias eléctricas. Existen casos en los cuales las condiciones que se especifican en las cartas no son las mismas que las que ocurren en realidad. Por ejemplo, hay cartas en las que un dato de entrada es la relación R_s/R_m (Schlumberger, 1989) en donde R_s es la resistividad de la capa adyacente que puede ser medida con un registro eléctrico y R_m es la resistividad del lodo que en muchos casos se puede leer en el registro. En la práctica, esta relación no siempre da valores de 1, 5 ó 20 como aparecen en las cartas de Schlumberger. El autor del presente trabajo propone hacer la corrección con el valor más cercano de los que existan en

las cartas, ya que es como tradicionalmente se utiliza y brinda buenos resultados. ¹

Como ejemplo de la necesidad de hacer correcciones se mencionará que Segesman (1962) encontró que el efecto del diámetro de agujero afecta la relación $SP/SP_{\text{corregido}}$ hasta en órdenes de 6 ó 7%.

1.8 FACTORES QUE INFLUYEN EN LA FORMA DE LA CURVA DEL SP

Como se mencionó anteriormente, el potencial natural que se mide en el pozo está influenciado por el espesor de las capas, resistividad de las mismas, invasión, contenido de arcilla, y por la relación R_{mf}/R_w . A continuación se dará una breve idea de los factores anteriores.

ESPESOR DE LAS CAPAS. La curva SP siempre muestra deflexiones hacia la izquierda o hacia la derecha, cuando se mide al pasar de capas impermeables a permeables, aunque cuando se tienen capas gruesas, la forma de la curva queda bien definida. Otra característica importante es que la amplitud de la curva SP se va reduciendo cuando los espesores de las capas disminuyen.

RESISTIVIDAD DE LOS ESTRATOS. En el caso de los registros geofísicos de pozos se observa que las formaciones por sí solas, se comportan como no conductoras de la corriente eléctrica, aunque es necesario mencionar que si tiene, por ejemplo, una mineralización de piritas, la formación sería conductora.

Cuando la resistividad del agua de la formación es mayor que la resistividad del filtrado de lodo, las capas impermeables se identifican en el registro como una

¹Comentarios del personal del IMP

tendencia recta del lado derecho, cuando se mide en una formación permeable, se tienen deflexiones hacia la izquierda.

Por lo general, las capas permeables que no contienen hidrocarburos son más conductivas que las impermeables, por el agua contenida en ellas, ya que es muy raro encontrar formaciones porosas completamente secas.

INVASION. La invasión es generada durante la perforación de un pozo, los parámetros que la controlan son los relativos a la velocidad de perforación, peso del lodo y demás parámetros relacionados con la perforación.

La profundidad de invasión del filtrado de lodo dentro de la formación, está influenciada, además de lo expresado en el párrafo anterior, por la porosidad y por la permeabilidad de la formación. En las formaciones se observa que cuando se tiene alta porosidad y alta permeabilidad, la profundidad de invasión del filtrado de lodo dentro de la formación, es pequeña, debido a que es más fácil tapar los poros grandes que los poros pequeños (contenidos en las formaciones menos porosas) por las sustancias que se encuentran en el filtrado de lodo. De acuerdo a esto, se puede observar que la invasión influye en la forma del *SP* para identificar estratos permeables de los impermeables.

CONTENIDO DE ARCILLA. Aunque el registro *SP* puede identificar claramente zonas de arenas y zonas de arcillas, es posible pensar que existan variaciones en la curva por el contenido de arcillas en aquéllas. La realidad es que la amplitud de la curva se reduce cuando hay arcilla contenida en las arenas. El contenido de la arcilla puede ser calculado cuando los valores de la curva *SP* están asociados con información de registros de resistividad. Más adelante se desarrollará ampliamente el presente punto.

RELACIÓN R_{mf}/R_w . Cuando no existe una diferencia de salinidad (o de resistividad) entre los fluidos que interactúan en el pozo no se desarrolla un potencial electroquímico. Para que se verifique el *SP* es necesario que haya diferencia en las resistividades de los fluidos. Cuando la resistividad del agua de la formación es mucho mayor que la resistividad del lodo, entonces habrá una disminución en la amplitud de la curva.

1.9 CONTENIDO DE ARCILLA EN LAS CAPAS PERMEABLES

En la práctica se ha visto que las deflexiones de la curva *SP* frente a capas gruesas de arenas son mayores que las deflexiones de la misma curva frente a estratos de arenas con cierto contenido de lutitas. Para el primer caso, se puede medir lo que se ha llamado el *SSP* a partir de la línea base de las lutitas. Cuando los estratos de arenas con contenido de lutita son de espesores altos se mide lo que se llama *SP pseudoestático*.

Doll (1949) menciona que el *SP pseudoestático* depende de la salinidad del agua connata, la diferencia de presión entre el lodo y el yacimiento (de acuerdo a esta diferencia de presión se sucede la invasión del filtrado de lodo), el porcentaje de arcilla contenida en la arena, las resistividades de la arcilla, de la arena limpia, y de la zona invadida por el filtrado de lodo.

El análisis cuantitativo del *SP pseudoestático* ha sido desarrollado por diversos autores tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Los estratos de arenas arcillosas son gruesos y están constituidos por secuencias alternadas de capas delgadas de arenas limpias y de lutitas.
2. Los espesores de las capas de arenas son los mismos entre sí, al igual que los espesores de las lutitas.

3. Los espesores de las capas de arena y de lutitas deben ser mucho menores que el diámetro del agujero.
4. La profundidad de penetración del filtrado de lodo dentro de las zonas de arenas, es muy grande en comparación con su espesor.
5. El efecto del potencial de electrofiltración es despreciado.

Como un ejemplo de caso teórico, cuando se tienen exactamente la mitad de arenas y la mitad de arcillas, y considerando además que no existe contribución del potencial de difusión, se puede obtener:

$$a = \frac{SP \text{ pseudoestático en arenas arcillosas}}{SP \text{ estático en arenas limpias}} = \frac{1}{1 + \frac{R_i + R_t}{2R_{sh}}}$$

donde:

- a es llamado *factor de relación*,
- R_i es la resistividad en la zona invadida,
- R_t es la resistividad verdadera, y,
- R_{sh} es la resistividad en las lutitas.

Lo importante de la ecuación anterior es notar que el factor de relación está en función únicamente de las resistividades de las formaciones, y no importa el tamaño de las mismas. Es también importante mencionar que el volumen de arcilla es igual a 1 menos a (Gómez Rivero, 1975).

Al considerar que el efecto de difusión interviene en el valor del *SP pseudoestático*, es posible obtener el factor de relación de la siguiente manera:

$$a = \frac{\log \frac{u+q}{1+q}}{\log u}$$

donde

$$u = \frac{R_t}{R_s},$$

$$q = \frac{R_t}{R_{sh}}.$$

Las relaciones anteriores implican que los espesores de las capas de las arenas y de las lutitas sean las mismas, pero en las consideraciones para el análisis cuantitativo nunca se menciona que estos espesores sean iguales, y por tanto, tampoco impide analizar para cuando el volumen de arcilla es diferente del volumen de arenas. Para el caso general, el factor de relación es dado por:

$$a = \frac{\log \frac{u+q'}{1+q'}}{\log u}$$

donde

$$u = \frac{R_t}{R_s}$$

$$q' = \frac{p}{1-p} \frac{R_t}{R_{sh}} \text{ en donde } p \text{ es la proporción de lutita en la arena arcillosa.}$$

Con lo anterior, se mostró que el valor de a ($V_{arcilla} = 1 - a$) puede calcularse tomando en cuenta ciertas condiciones cercanas a la realidad, y este valor puede ser usado para cuantificar el volumen de arcilla dentro de una formación permeable.

En la práctica, desde hace mucho tiempo, se ha encontrado que en zonas arenosas, el *SP pseudoestático* tiene mayor o menor deflexión, de acuerdo al líquido que se encuentre presente en la formación. Por ejemplo, en las arenas arcillosas, la deflexión es menor si la arena contiene aceite, y mayor, si contiene agua, ya que en el primer caso la R_t es más grande y por tanto afecta en mayor medida el parámetro q' definido anteriormente.

En la realidad, las arcillas (clays) están constituidas esencialmente de cristales de aluminosilicatos hidratados. Diversos tipos de éstos tienen una carga negativa interna por la substitución de iones en su estructura cristalina por iones de diferente valencia. Esta carga es compensada por los cationes externos, los cuales, cuando el

agua está presente, pueden moverse dentro de un campo eléctrico.

La importancia fundamental del cálculo de contenido de arcilla se basa en el hecho de que éste puede hacer que la interpretación de los registros eléctricos sea incorrecta ya que puede bajar la resistividad real debido a que la arcilla retiene agua salada.

El presente capítulo ha sido una breve introducción al registro de potencial natural; primero se mencionó en forma resumida el desarrollo histórico del *SP*, después, se ha dicho que la principal fuente que crea el potencial natural es debido a un efecto electroquímico que tiene dos componentes (potencial de membrana y potencial de difusión). Otro punto de interés mostrado es el que se refiere al cálculo de los ΔV 's para cada una de las capas, este valor está determinado por el contenido de arcilla dentro de la formación y por el contraste de resistividad del agua contenida en cada medio.

Se vio también que la curva de potencial natural está influenciada por el tamaño de la capa, el diámetro de agujero y contenido de arcilla, principalmente. El valor de resistividad de la capa hace que la curva de *SP* aumente o disminuya en amplitud. Los principales usos del *SP* son la diferenciación de capas permeables de la impermeables, y el cálculo de la resistividad del agua de formación.

Es también muy importante mencionar que el registro de potencial natural es una parte importante dentro de la revaluación de los pozos antiguos ya que era el único que se tomaba aparte de los eléctricos convencionales (normal corta y normal larga). Finalmente se hizo énfasis en que el contenido de arcilla dentro de las capas permeables, ocasiona una menor deflexión de la curva de potencial natural.

Los capítulos subsecuentes, tendrán como base, el conocimiento de los conceptos ligados al *SP* para poder dar interpretaciones correctas de las curvas que se modelen.

Además, tiene importancia fundamental el valor ΔV , ya que es necesario para el modelado geofísico del potencial natural.

Capítulo 2

MODELADO DE POTENCIAL NATURAL EN GEOMETRIA CILINDRICA.

Existen dos problemas en geofísica, éstos se refieren al hecho de tratar de conocer la curva de campo a partir de ciertos valores contenidos en las ecuaciones que modelan un fenómeno (*problema directo*), y el caso de obtener los parámetros que originan una señal con base en la obtención de ésta por medio de aparatos de medición (*problema inverso*). En el caso del presente trabajo, se resolverá el primero de ellos.

Una parte importante en el análisis del presente trabajo se refiere al hecho de trabajar con geometrías de doble capas. Físicamente, significa que existen una serie de dipolos eléctricos a lo largo de una dirección determinada. Una forma de conceptualizar lo anterior es suponer que existen dos superficies con cargas positivas y negativas respectivamente, al juntar estas superficies se tendrá una sola capa, donde, en un lado se tendrán cargas positivas, y en el otro cargas negativas. En realidad se tendrá una sola superficie que contendrá dipolos eléctricos.

El modelado que a continuación se analiza tiene como base la idea de que el pozo es completamente vertical.

2.1 CALCULO DEL POTENCIAL DIPOLAR

Al considerar una carga de prueba positiva $de(p)$ (localizada en el punto p), colocada sobre el eje z , y dos cargas q_+ y q_- localizadas a ciertas distancias r_+ y r_- del lugar donde está colocada la carga de prueba (fig.2.1), se tiene que la fuerza con

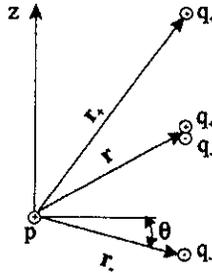


FIG. 2.1. Disposición geométrica de los dipolos sobre la pared del pozo.

la cual es atraída esta carga es la siguiente:

$$\mathbf{F}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de(p)q_+}{r_+^2} \mathbf{r}_+ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de(p)q_-}{r_-^2} \mathbf{r}_-. \quad (2.1)$$

donde:

\mathbf{F}_p es la fuerza de atracción eléctrica que experimenta la carga de prueba,

ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío,

q_+ y q_- son cargas eléctricas elementales positiva y negativa respectivamente y

\mathbf{r}_+ , \mathbf{r}_- son los vectores que unen a la carga de prueba con las cargas elementales positiva y negativa, respectivamente.

Al utilizar el concepto de carga elemental, se puede decir que:

$$|q_+| = |q_-| = de(p). \quad (2.2)$$

Del concepto de campo eléctrico, se tiene que:

$$\mathbf{E}_p = \frac{\mathbf{F}_p}{de(p)}, \quad (2.3)$$

entonces:

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_+}{r_+^2} \mathbf{r}_+ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_-}{r_-^2} \mathbf{r}_-, \quad (2.4)$$

y por tanto se puede observar que:

$$|\mathbf{E}_p| \propto \left| \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2} \right| \quad (2.5)$$

El objetivo en este trabajo es obtener el potencial, para ello se hace uso de la siguiente relación:

$$\mathbf{E}_p = -\nabla\Phi_p \quad (2.6)$$

donde:

Φ_p es la función potencial.

Al integrar la ecuación (2.5), se tiene:

$$\int \mathbf{E}_p dr \propto \int \frac{1}{r_+^2} dr_+ - \int \frac{1}{r_-^2} dr_- \quad (2.7)$$

por tanto, el potencial es proporcional a:

$$\Phi_p \propto \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \quad (2.8)$$

En la figura 2.1 se observa que cuando las cargas se acercan hasta una distancia infinitesimal, las distancias r_+ y r_- se aproximan a r . Bajo ésta situación, es posible hacer una aproximación al potencial:

$$\Phi_p \propto \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.9)$$

Distancia	Separación	Θ	Exacto	Aproximación	Error
10	100	40	9.11673e-12	1.14211e-9	12427.62
10	10	40	1.09310e-10	1.14211e-10	4.7671
10	1	40	1.14211e-11	1.14211e-11	0
10	0.1	40	1.14211e-12	1.14211e-12	0

Tabla 2.1. Comparación para el cálculo del potencial mediante la fórmula exacta y la aproximación

donde:

r es la distancia del centro del dipolo a la carga de prueba.

La derivada con respecto al eje z es debido a que la variación se da únicamente respecto a este eje pues los dipolos se localizan paralelos al eje z . Es importante mencionar que la ecuación (2.9) es una aproximación al potencial, con la ventaja de que ésta es más fácil de maniobrar debido a que sólo se tiene una distancia para calcular el potencial y no dos.

Para corroborar lo anterior, se desarrollaron algoritmos de ambas ecuaciones y se llegó a la conclusión que cuando las distancias r_+ y r_- se aproximan a r , la ecuación (2.8), denominada exacta y la (2.9), llamada aproximación son casi iguales. La tabla 2.1 muestra los datos propuestos para validar lo anterior, donde se puede observar que cuando las cargas están muy cerca, el potencial exacto es el mismo que el potencial de aproximación. Físicamente significa que para el caso de un dipolo ambas fórmulas son prácticamente las mismas.

2.2 SOLUCION EN 1D PARA GEOMETRIA CILINDRICA

Para el caso de geometría cilíndrica se iniciará considerando una capa dipolar con valor ΔV a lo largo de la dirección radial r , localizada en la pared del pozo y

distribuida sobre una distancia vertical d_0 que se extiende desde:

$$z_u = z_0 - \frac{d_0}{2} \quad (2.10)$$

hasta

$$z_a = z_0 + \frac{d_0}{2} \quad (2.11)$$

donde:

z_u es el límite superior del cilindro,

z_a es el límite inferior del cilindro, y,

z_0 es la profundidad a la mitad del cilindro.

Las conductividades del lodo y de la formación son representadas por σ_m y por σ_t respectivamente (Figura 2.2). La resistividad del filtrado de lodo a veces no aparece en el encabezado del registro. Sin embargo, puede ser calculada mediante el uso de la gráfica Gen-7 del libro de nomogramas de la compañía Schlumberger.

La distribución potencial en el espacio es obtenida resolviendo la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas (Taherian et al., 1995). Debido a que el problema es de doble capa, el potencial es dado por dos expresiones que corresponden a los potenciales dentro y fuera del pozo. La solución que interesa es la que se refiere al potencial dentro del cilindro, la cual está dada por (Taherian et al., 1995):

$$\Phi_1(0, 0, z) = -\sigma_t \Delta V(z) \frac{d_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\{\eta(z - z_0)\} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\eta d_0}{2}\right)}{\frac{\eta d_0}{2}} \frac{1}{N(\eta)} K_1(\eta r) I_0(\eta \rho) d\eta \quad (2.12)$$

donde

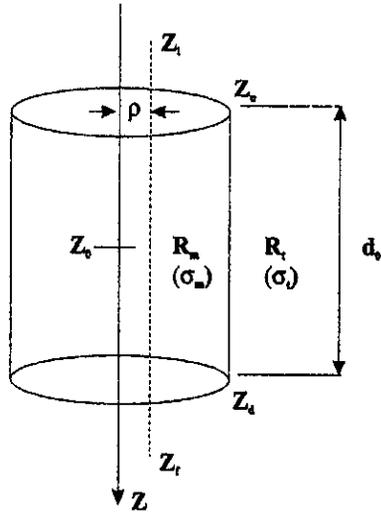


FIG. 2.2. Parámetros necesarios para el cálculo del *SP* en geometría cilíndrica.

$$N(\eta) = \sigma_t K_1(\eta r) I_0(\eta r) + \sigma_m K_0(\eta r) I_1(\eta r) \quad (2.13)$$

$\Phi_1(0, 0, z)$ es el potencial medido en la posición r, θ, z de un sistema de coordenadas cilíndrico,

η es una variable ficticia de integración que corresponde a la variable espectral de la transformada de Fourier,

r es el radio del pozo,

ρ es la distancia del eje del cilindro al punto de medición,

K_0, K_1, I_0 e I_1 son las funciones modificadas de Bessel de orden cero y uno,

z es la profundidad en la cual se calcula el *SP*,

$\Delta V(z)$ es la fuente electromotriz para cada una de las capas (depende de la

profundidad de cada capa).

Sustituyendo (2.13) en (2.12) se obtiene

$$\Phi_1(0, 0, z) = -\sigma_t \Delta V(z) \frac{d_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\{\eta(z - z_0)\} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\eta d_0}{2}\right)}{\frac{\eta d_0}{2}} \frac{K_1(\eta r) I_0(\eta \rho)}{\sigma_t K_1(\eta r) I_0(\eta r) + \sigma_m K_0(\eta r) I_1(\eta r)} d\eta,$$

y al hacer $\sigma_t = \frac{1}{R_t}$ y $\sigma_m = \frac{1}{R_m}$ y sustituir en la ecuación anterior se tiene:

$$\Phi_1(0, 0, z) = -\frac{1}{R_t} \Delta V(z) \frac{d_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\{\eta(z - z_0)\} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\eta d_0}{2}\right)}{\frac{\eta d_0}{2}} \frac{K_1(\eta r) I_0(\eta \rho)}{\frac{1}{R_t} K_1(\eta r) I_0(\eta r) + \frac{1}{R_m} K_0(\eta r) I_1(\eta r)} d\eta$$

donde:

R_t y R_m son las resistividades de las formación y del lodo respectivamente.

Multiplicando y dividiendo por R_t :

$$\Phi_1(0, 0, z) = -\Delta V(z) \frac{d_0}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\{\eta(z - z_0)\} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\eta d_0}{2}\right)}{\frac{\eta d_0}{2}} \frac{K_1(\eta r) I_0(\eta \rho)}{K_1(\eta r) I_0(\eta r) + \frac{R_t}{R_m} K_0(\eta r) I_1(\eta r)} d\eta \quad (2.14)$$

Cuando se usa la relación de las funciones modificadas de Bessel siguiente: (Abramowitz, 1968).

$$K_1(\eta r) I_0(\eta r) = \frac{1}{\eta r} - K_0(\eta r) I_1(\eta r) \quad (2.15)$$

y se sustituye:

$$\mu = \frac{R_t}{R_m} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}x &= \eta r \\ \frac{dx}{r} &= d\eta\end{aligned}\tag{2.17}$$

en (2.14) se obtiene:

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{-2\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\{\eta(z - z_0)\} \operatorname{sen}\left(\frac{\eta d_0}{2}\right) \frac{K_1(x)I_0(\eta\rho)}{1-xK_0(x)I_1(x)+\mu xK_0(x)I_1(x)} dx\tag{2.18}$$

Usando la identidad trigonométrica de multiplicación de senos y cosenos (Bronshstein et al., 1973), se tiene que:

$$\cos\{\eta(z - z_0)\} \operatorname{sen}\left\{\frac{\eta d_0}{2}\right\} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}\left\{\eta\left(z - z_0 + \frac{d_0}{2}\right)\right\} - \operatorname{sen}\left\{\eta\left(z - z_0 - \frac{d_0}{2}\right)\right\} \right],\tag{2.19}$$

y al sustituir (2.19) en la ecuación (2.18), se llega:

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{-2\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}\left\{\eta\left(z - z_0 + \frac{d_0}{2}\right)\right\} - \operatorname{sen}\left\{\eta\left(z - z_0 - \frac{d_0}{2}\right)\right\} \right) \frac{K_1(x)I_0(\eta\rho)}{1-xK_0(x)I_1(x)+\mu xK_0(x)I_1(x)} dx.\tag{2.20}$$

Al realizar algunos pasos algebraicos a la ecuación anterior, y al sustituir (2.10) y (2.11) en (2.45) se tiene:

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{-2\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \left(\operatorname{sen}\{\eta(z - z_u)\} - \operatorname{sen}\{\eta(z - z_d)\} \right) \frac{K_1(x)I_0(\eta\rho)}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx.$$

Separando los dos términos de la función potencial, se logra:

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, 0, z) &= \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ \eta (z - z_d) \} \frac{K_1(x) I_0(\eta \rho)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx \\ &\quad - \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ \eta (z - z_u) \} \frac{K_1(x) I_0(\eta \rho)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx.\end{aligned}\quad (2.21)$$

El argumento de la función I_0 puede ser desarrollado de la forma siguiente:

$$\eta \rho = \eta r \frac{\rho}{r} = x \frac{\rho}{r} = x \beta \quad (2.22)$$

y sustituyendo (2.22) en (2.21) se obtiene:

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, 0, z) &= \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ \eta (z - z_d) \} \frac{K_1(x) I_0(x \beta)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx \\ &\quad - \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ \eta (z - z_u) \} \frac{K_1(x) I_0(x \beta)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx.\end{aligned}\quad (2.23)$$

Para eliminar la variable η se pueden seguir los siguientes cambios de variables:

$$\begin{aligned}y &= \frac{z}{r}, \\ y_u &= \frac{z_u}{r}, \\ y_d &= \frac{z_d}{r},\end{aligned}\quad (2.24)$$

y dividiendo entre r el argumento de la función seno en los dos sumandos de la función potencial y sustituyendo (2.17) en (2.23), se tiene:

$$\begin{aligned}\Phi_1(0, 0, z) &= \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ x (y - y_d) \} \frac{K_1(x) I_0(x \beta)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx \\ &\quad - \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \text{sen} \{ x (y - y_u) \} \frac{K_1(x) I_0(x \beta)}{[\mu-1] x K_0(x) I_1(x) + 1} dx.\end{aligned}$$

Finalmente, es conveniente expresar los argumentos de los senos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\alpha_u &= y - y_u \\ \alpha_d &= y - y_d\end{aligned}\quad (2.25)$$

con lo cual se obtiene la función potencial, cuya solución numérica se mostrará en la siguiente sección:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, 0, z) = & \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \{x\alpha_d\} \frac{K_1(x)I_0(x\beta)}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx \\ & - \frac{\Delta V(z)}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \{x\alpha_u\} \frac{K_1(x)I_0(x\beta)}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3 CALCULO NUMERICO DE LA SOLUCION DE LA ECUACION POTENCIAL PARA GEOMETRIA CILINDRICA

A continuación se hará un análisis del comportamiento de la función (2.26) cuando x tiende a valores cercanos a cero y para cuando tiende a valores muy grandes. Para ello, es conveniente conocer el comportamiento de las funciones modificadas de Bessel (figura 2.3).

Para valores pequeños del argumento fueron utilizadas las siguientes expresiones (Abramowitz, 1968):

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (2.27)$$

$$I_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \quad (2.28)$$

$$K_0(x) = -\left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \quad (2.29)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + \left(\ln \frac{x}{2} + C\right) I_1(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} \left[\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} + \frac{1}{2(k+1)} \right] \quad (2.30)$$

donde C es el número de Euler, cuyo valor es $C \simeq 0.57721566$.

Para argumentos grandes, se tienen las fórmulas asintóticas, cuyas expresiones son las siguientes (Abramowitz, 1968):

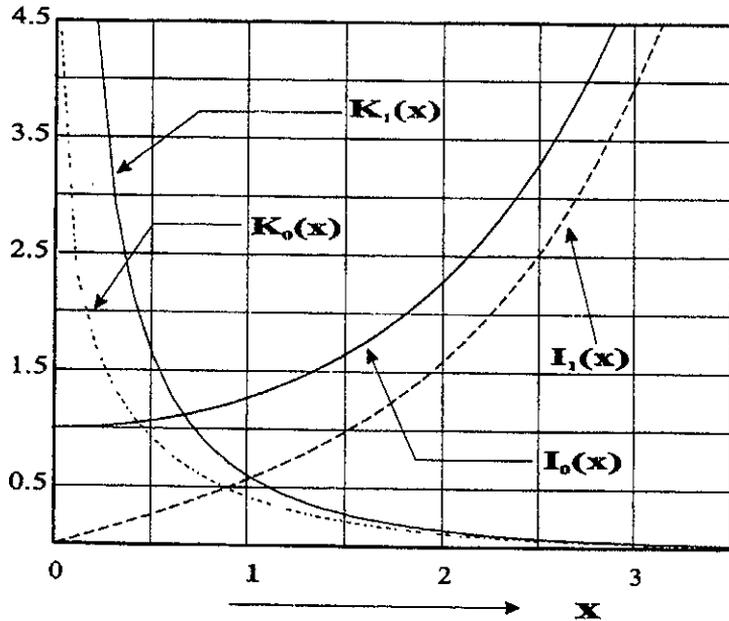


FIG. 2.3. Comportamiento de las funciones modificadas de Bessel.

$$I_0(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\{(2k-1)!!\}^2}{k! (8x)^k} \right] \quad (2.31)$$

$$I_1(x) = \frac{e^x}{(2\pi x)^{1/2}} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!! (2k+1)!!}{k! (8x)^k} \right] \quad (2.32)$$

$$K_0(x) = e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \{(2k-1)!!\}^2}{k! (8x)^k} \right] \quad (2.33)$$

$$K_1(x) = e^{-x} \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-3)!! (2k+1)!!}{k! (8x)^k} \right] \quad (2.34)$$

x	$K_0(x)$	$I_1(x)$	$xK_0(x)I_1(x)$
0.01	4.7212	0.0250	0.0011803
0.10	2.3332	0.0506	0.0118059
0.20	1.7061	0.1005	0.0342926
0.30	1.3424	0.1516	0.0610523

Tabla 2.2. Comportamiento del Kernel de la ecuación 2.26

El comportamiento de la multiplicación de las funciones modificadas de Bessel en el denominador de la ecuación (2.26) se ve en la Tabla 2.2, que ayuda a mostrar que cuando x tiende a cero (figura 2.4), el primer término del denominador de la función (2.26) vale cero, sin embargo el denominador tiende a uno.

En el caso general, se va a modelar el *SP* suponiendo que la sonda va centrada en el pozo, lo que matemáticamente significa que el argumento de la función I_0 es cero, es decir $I_0(x\beta)$ es uno.

A continuación se analizará el comportamiento de la función $K_1(x)$ ya que es otro factor importante dentro de la ecuación (2.26), la figura (2.3) muestra que tiende a infinito cuando x tiende a cero; sin embargo, el valor del seno en la ecuación (2.26) tiende a cero para el mismo caso, esto hace que el numerador sea un valor que no tiende a infinito puesto que ambas funciones se compensan.

2.3.1 METODO DE FILON

La ecuación (2.26) puede ser expresada como la suma de dos miembros que tienen la forma siguiente:

$$F(\alpha) = \int_{\lambda=a}^{\lambda=b} g(\lambda) \operatorname{sen}(\alpha\lambda) d\lambda, \quad (2.35)$$

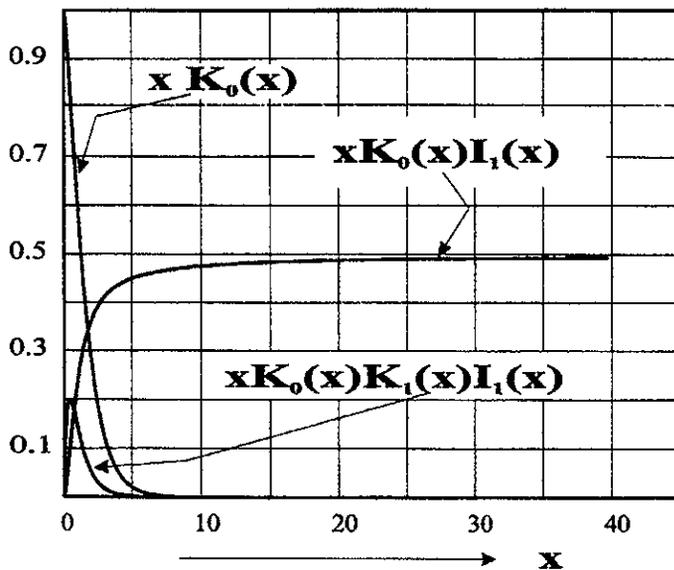


FIG. 2.4. Comportamiento de algunas funciones que involucran a las modificadas de Bessel.

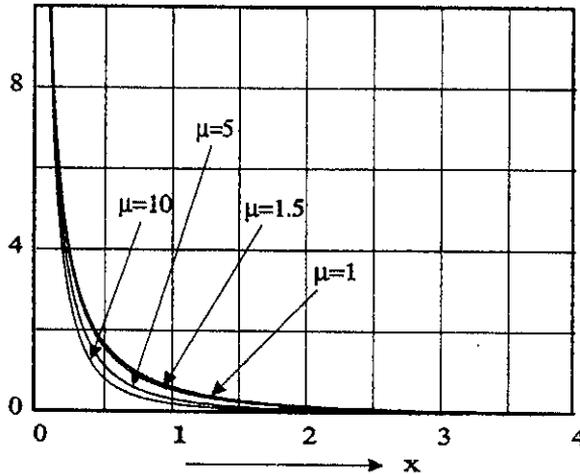


FIG. 2.5. Comportamientos de la parte no oscilatoria cuando μ toma diferentes valores.

el factor de oscilación $\sin(\alpha\lambda)$ complica la integración numérica principalmente cuando el argumento tiene altas frecuencias, es decir, cuando α tiende a valores muy grandes. La función $g(\lambda)$ es suave y decae para valores grandes de λ ya que el numerador tiende a cero y el denominador tiende a un valor finito.

Para comprobar que la parte no oscilatoria es una función suave se obtuvo la figura 2.5 donde se muestran los comportamientos de la parte no oscilatoria de la función cuando se varia el valor de μ . Es posible observar que todas las curvas obtenidas presenta un comportamiento suave y por tanto no representan problemas a la integración (excepto para cuando x tiende a cero).

A continuación, se hará una aproximación mediante el método de Filon (Kaufman, 1992), de la parte no oscilatoria del integrando por medio de una ecuación

polinomial de segundo grado. Debido al hecho de que el integrando es una función que decrece para valores grandes de λ , es posible dividir el rango de integración en subintervalos de diferentes tamaños.

La parte no oscilatoria del integrando $g(\lambda)$ es aproximado mediante:

$$g(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \quad (2.36)$$

con cada intervalo $[\lambda_i, \lambda_{i+2}]$. Se tiene que la integral sobre este intervalo es:

$$\begin{aligned} F_j(\alpha) &= \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2) \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda = \\ &= a_0 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda + a_1 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda + a_2 \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda^2 \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

donde:

$$j = i/2 + 1, i = 0, 1, \dots, n;$$

n es el número total de muestras del integrando. Las integrales anteriores tienen las siguientes soluciones analíticas:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda &= \frac{-1}{\alpha} [\cos(\alpha x)]_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \\ \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\alpha^2} [\text{sen}(\alpha\lambda) - \alpha\lambda \cos(\alpha\lambda)]_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \\ \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}} \lambda^2 \text{sen}(\alpha\lambda) d\lambda &= \frac{1}{\alpha^3} [2\cos(\alpha\lambda) - \alpha^2\lambda^2 \cos(\alpha\lambda) + 2\alpha\lambda \text{sen}(\alpha\lambda)]_{\lambda_i}^{\lambda_{i+2}}. \end{aligned}$$

Los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 son la solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 &= g(\lambda_i) \\ a_0 + a_1\lambda_{i+1} + a_2\lambda_{i+1}^2 &= g(\lambda_{i+1}) \\ a_0 + a_1\lambda_{i+2} + a_2\lambda_{i+2}^2 &= g(\lambda_{i+2}). \end{aligned}$$

El resultado final $F(\alpha)$ es la suma de las integrales $F_j(\alpha)$ sobre todo el intervalo, es decir,

$$F(\alpha) = \sum_j^{n/2} F_j(\alpha).$$

Se ha mencionado que se puede dividir el intervalo de integración en partes, en el presente trabajo se tomarán 3:

1. Intervalo inicial: $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$
2. Intervalo intermedio $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_n$, e
3. Intervalo final $\lambda_n \leq \lambda < \infty$.

Como se ha visto, la parte no oscilatoria tiende a cero a partir de un cierto valor de λ , por ello, λ_n puede ser escogido de forma tal que el tercer intervalo sea despreciable. La integración del segundo intervalo se realiza por el método descrito arriba. La idea de tratar el intervalo inicial en forma diferente, se basa en el hecho de que la función $g(\lambda)$ tiende a infinito en ésta región y por ejemplo, el método de cuadratura gaussiana facilita el tratamiento bajo éstas condiciones.

Para el método de Filon las λ_i 's son escogidas de acuerdo a una progresión geométrica, es decir, $\lambda_{i+1} = 2^{1/N} \lambda_i$ donde N es una potencia de dos.

2.4 EJEMPLOS DE APLICACION DEL METODO DE SOLUCION EN 1D PARA GEOMETRIA CILINDRICA

La primer aplicación a la que se hará referencia es la obtención del comportamiento de la relación del potencial natural y del potencial espontáneo estático cuando se tiene una capa de arena entre dos capas de lutitas de un cierto espesor. Las consideraciones tomadas en cuenta para el desarrollo del algoritmo son que el

Capa	ΔV	R_t
1	-10	5
2	20	0.5
3	-10	5

Tabla 2.3. Modelo de tres cilindros, $r=4$ in, $R_m=2 \Omega\text{-m}$, $\rho=0$ m, $SSP=30$ mV

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-20	-10	-2	1.5
2	35	-2	2	1.5
3	-20	2	10	1.5

Tabla 2.4. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5 \Omega\text{-m}$, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_f=12$ m.

potencial se medirá en el centro de la capa de arena y los espesores de las capas de lutita arriba y abajo son de 1000 pulgadas y cuyo espesor varía de 1 a 50 pulgadas. La figura 2.6 muestra la relación SP/SSP para las condiciones mencionadas arriba. Los datos de entrada se muestran en la tabla 2.3. Es importante notar que la relación mostrada en la gráfica no sobrepasa 1 ya que el límite del potencial natural para una capa de arena es el potencial espontáneo estático.

Se probaron los programas de modelado de SP para verificar que funcionan correctamente. La figura 2.7 muestra el comportamiento de la curva de potencial natural para el caso de tres cilindros con los datos que se muestran en la tabla 2.4, en donde el muestreo fue de 25 cm. Se puede observar que los valores ΔV para cada una de las capas son alcanzados debido a que el espesor de cada una de ellas son mayores que el diámetro del pozo, además, los puntos de inflexión en la capa media coincide con el límite entre los estratos.

Una inquietud que puede surgir, es el hecho de que no existe contraste de re-

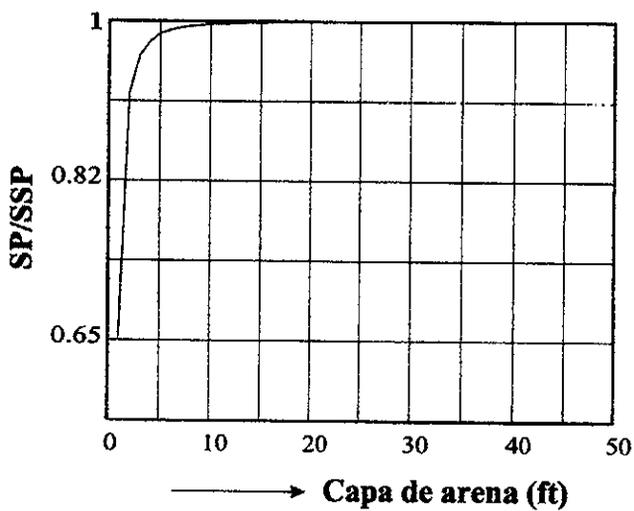


FIG. 2.6. Comportamiento de la relación SP/SSP para el caso de una capa de arena entre dos capas de lutitas de 1000 in. Los parámetros son: $\Delta V_1 = \Delta V_3 = -10$, $\Delta V_2 = 20$ y el $SSP = 30$ mV.

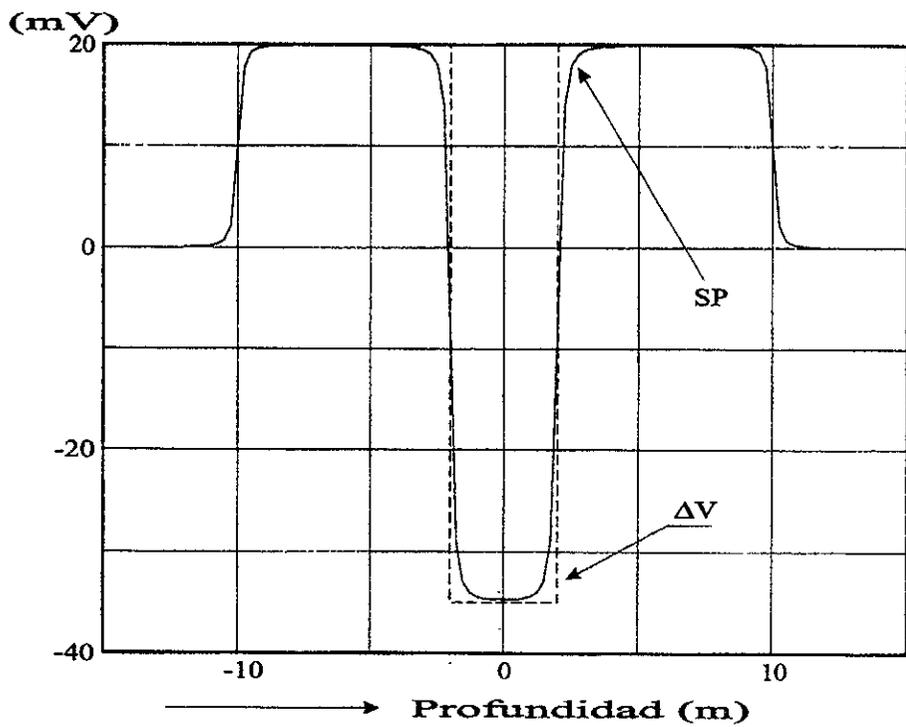


FIG. 2.7. Comportamiento del SP debido a tres cilindros, no existe contraste de resistividad.

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-20	-10	-2	1.5
2	35	-2	2	150
3	-20	2	10	1.5

Tabla 2.5. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5 \Omega\cdot m$, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m

sistividad entre el filtrado de lodo y el agua de la formación, sin embargo, en la práctica se ha visto que el potencial surge por el hecho de que hay una membrana separando los dos medios. Es conveniente hacer la siguiente aclaración, la diferencia de potencial que se establece en dos medios de diferente conductividad eléctrica está dada por la ecuación 1.2, sin embargo, si en esta ecuación las resistividades son las mismas, el valor de ΔV es 0. Físicamente se pueden tener dos medios con permitividades dieléctricas diferentes, pero con resistividades iguales en cada medio, con lo cual se puede generar una diferencia de potencial entre ambos medios aunque las resistividades sean las mismas.

Otra prueba se realizó con los parámetros mostrados en la tabla 2.5. La figura 2.8 muestra que la amplitud de la curva del SP en el cilindro medio disminuye notoriamente debido al alto contraste de resistividad (100 veces) del filtrado de lodo respecto al agua de la formación. La amplitud máxima en los cilindros extremos se acerca al valor del ΔV en estas partes debido a que no existe contraste de conductividades, otra característica interesante es el hecho que la curva de potencial se deforma al acercarnos a la capa media, sin embargo, en forma cualitativa, se puede observar que los puntos de inflexión de la curva siguen marcando los contactos entre las capas.

Otra situación interesante, es cuando el contraste se da en las zonas de lutitas

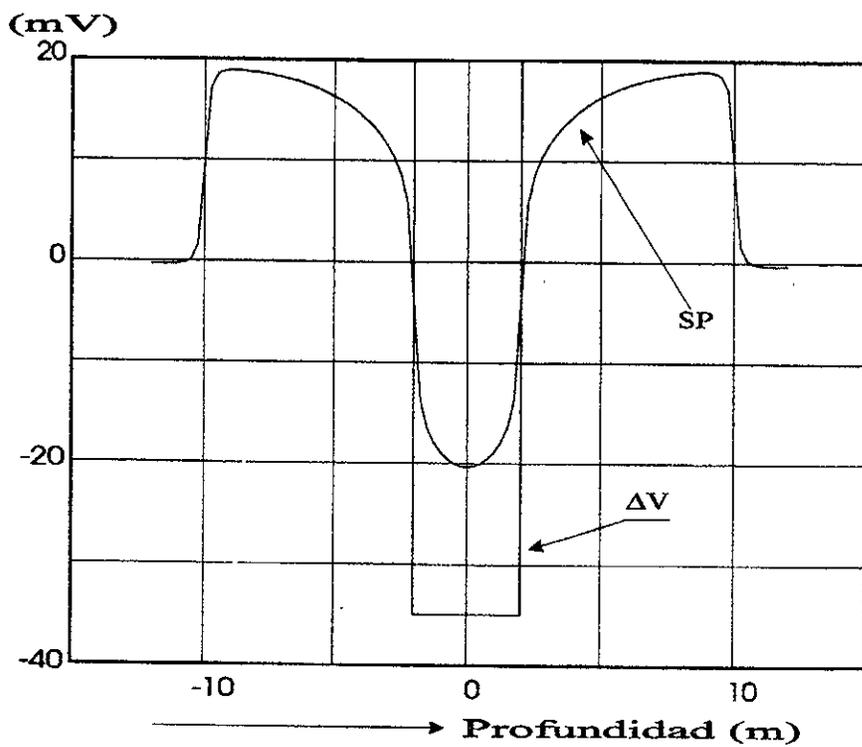


FIG. 2.8. Comportamiento del SP para el caso de 3 cilindros considerando que existe contraste de resistividad en el cilindro medio.

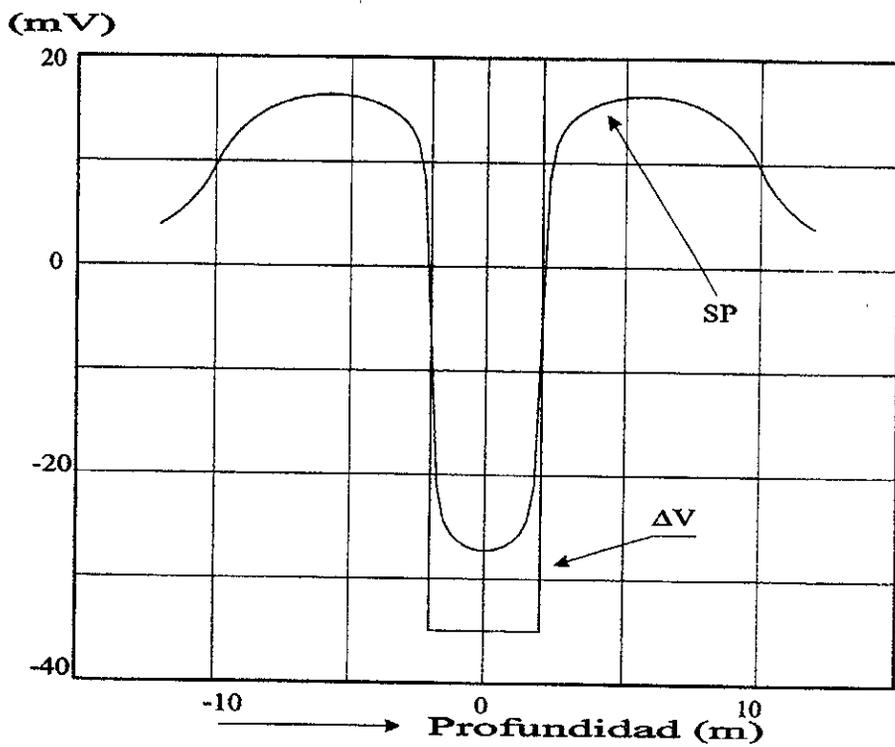


FIG. 2.9. Modelado del *SP* en geometría cilíndrica considerando contraste de resistividad en la capas extremas.

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-20	-10	-2	150
2	35	-2	2	1.5
3	-20	2	10	150

Tabla 2.6. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5 \Omega\text{-m}$, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m

y cuando la resistividad del agua de la formación en el cilindro medio es igual a la resistividad del filtrado de lodo. Los datos de entrada se muestran en la tabla 2.6 (figura 2.9). Bajo las características mostradas en la tabla mencionada, es posible observar que la amplitud de la curva SP aumenta en la zona media respecto a la figura 2.8 pero no llega al valor límite de -35. En las capas extremas es posible observar la deformación de la curva en las zonas más alejadas del centro. En los extremos de la curva, el potencial se aproxima a cero pero lentamente debido al contraste alto de resistividad en la zona de lutitas y la resistividad del filtrado de lodo.

Finalmente, se realizó una prueba para el caso de 9 capas con diferentes valores ΔV con el objetivo de observar el comportamiento del algoritmo, los datos de entrada se muestran en la tabla 2.7.

Se puede observar que existe una buena correspondencia entre los datos de entrada y la curva modelada (figura 2.10).

2.5 METODO DE ANGULO SOLIDO

Si se considera que las conductividades dentro y fuera del pozo son iguales, y que en la interfase se tiene una capa dipolar con valor ΔV , entonces se puede llegar a una solución más sencilla que la obtenida en la ecuación (2.26), suponiendo además, que se mide en el eje del cilindro (figura 2.11).

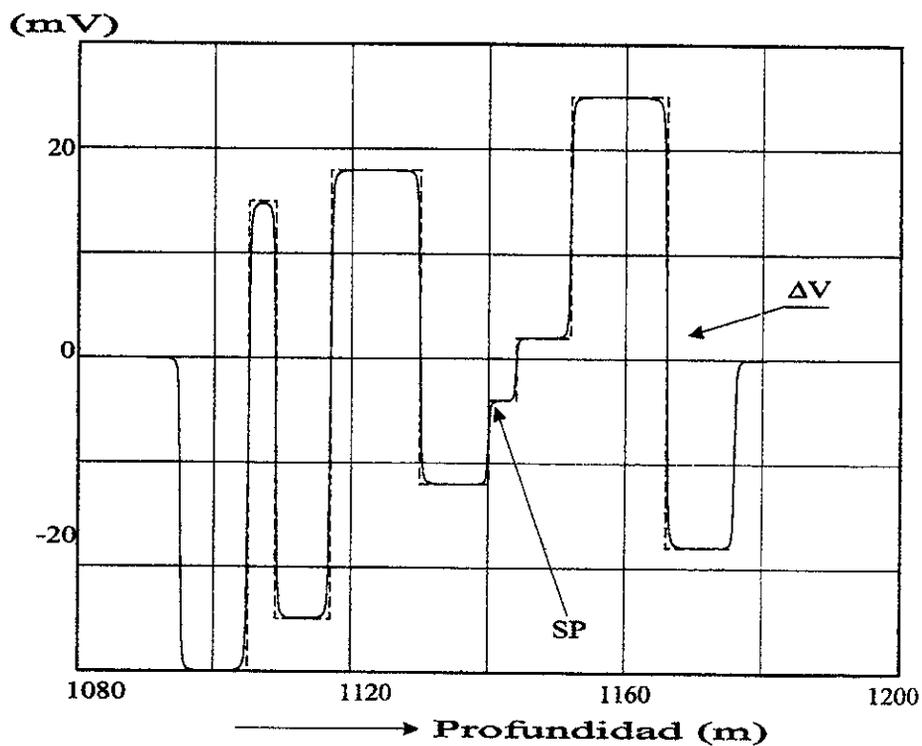


FIG. 2.10. Modelado del SP en geometría cilíndrica para el caso de nueve capas sin contraste de resistividad.

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	30	1095	1105	1.5
2	-15	1105	1109	1.5
3	25	1109	1117	1.5
4	-18	1117	1130	1.5
5	12	1130	1140	1.5
6	4	1140	1144	1.5
7	-2	1144	1152	1.5
8	-25	1152	1166	1.5
9	18	1166	1176	1.5

Tabla 2.7. Modelo de nueve cilindros, $r=8$ in, $R_m=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=1090$ m, $z_m=1200$ m

Las superficies s_{01} , s_{02} y s_{03} son superficies de doble capa localizadas en la pared del pozo. Al considerar el sistema como de doble capa, se puede suponer que existe una superficie s entre dos capas s_+ y s_- con cargas positiva y negativa respectivamente cuyo vector normal n va de la superficie con carga negativa a la de carga positiva (Figura 2.12).

Al considerar un punto q de la superficie s , y dos cargas localizadas a una distancia $\ell(q)$ una de la otra, las ecuaciones siguientes son válidas:

$$\begin{aligned} e_2 &= e = \Sigma(q) ds \\ e_1 &= -e = -\Sigma(q) ds \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde:

e_2 y e_1 son cargas positiva y negativa respectivamente,

e es una carga elemental,

$\Sigma(q)$ es la densidad superficial de carga en la superficie s y

ds es una diferencial de la superficie s .

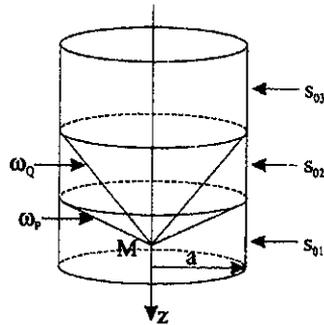


FIG. 2.11. Modelo de un pozo para el cálculo del potencial natural (método de ángulo sólido).

Las cargas mencionadas en (2.37) forman un dipolo eléctrico con un momento dipolar dm igual a:

$$\begin{aligned} dm &= de \ell(q) \\ dm &= \Sigma(q) ds \ell(q) \mathbf{n} \\ dm &= \eta(q) ds, \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde:

$$\eta(q) = \Sigma(q) \ell(q), \quad (2.39)$$

el cual caracteriza el momento dipolar y es llamado *densidad de la doble capa*.

Antes de continuar, es necesario hacer un paréntesis para obtener el potencial de un dipolo eléctrico, ya que, como se ha mencionado, el trabajo se desarrolla con base en la teoría de los dipolos eléctricos.

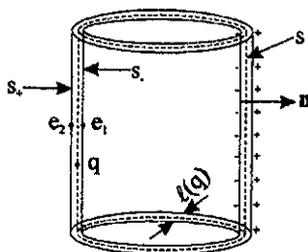


FIG. 2.12. Cuando dos superficies cargadas eléctricamente (con cargas opuestas) quedan separadas infinitesimalmente, se forma una capa dipolar.

2.5.1 CÁLCULO DEL POTENCIAL DE UNA SUPERFICIE DIPO-LAR

Al suponer que se tienen dos cargas elementales iguales en magnitud y de diferente signo, entonces el potencial $U(p)$ medido en el punto p debido a estas cargas es:

$$U(p) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{L_{q_2p}} - \frac{1}{L_{q_1p}} \right] \quad (2.40)$$

donde:

q_1 y q_2 son los puntos donde se localizan las cargas negativa y positiva respectivamente, con una magnitud de carga e .

L_{q_2p} y L_{q_1p} son las distancias de las posiciones de las cargas al punto p .

Si la distancia dl entre las cargas e_2 y e_1 es mucho menor que la correspondiente entre el punto de medición y el punto q se considera un dipolo eléctrico, matemáticamente se puede escribir como:

$$dl \ll L_{qp} \text{grad} \frac{1}{L_{qp}}. \quad (2.41)$$

Tomando en cuenta la desigualdad (2.41), la diferencia en el lado derecho de la ecuación (2.40), puede ser representada por:

$$\frac{1}{L_{qp}} - \frac{1}{L_{qp}} = \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{L_{qp}} d\ell. \quad (2.42)$$

De acuerdo a lo anterior, es posible obtener la función potencial de la forma siguiente:

$$U(p) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial \ell} \frac{1}{L_{qp}} d\ell = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} d\ell \cdot \text{grad} \frac{1}{L_{qp}}, \quad (2.43)$$

ya que $\text{grad}(1/L_{qp}) = L_{qp}/L_{qp}^3$ la ecuación (2.43) puede ser presentada como:

$$U(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3} \quad (2.44)$$

donde el momento dipolar eléctrico es $\mathbf{M} = e d\ell$.

Utilizando el resultado obtenido por la ecuación (2.44) y substituyendo (2.38) y (2.39) en aquella, se tiene:

$$dU(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \eta(q) \frac{d\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}$$

6

$$dU(p) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \eta(q) \frac{d\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{pq}}{L_{qp}^3}. \quad (2.45)$$

El término $(d\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}_{qp})/L_{qp}^3 = d\omega(p)$ es la diferencial del ángulo sólido subtendido por ds al ser visto desde el punto p (ver apéndice A), por ello, se puede escribir lo siguiente:

$$dU(p) = -\frac{\eta}{4\pi\epsilon_0} d\omega(p), \quad (2.46)$$

al integrar la ecuación 2.46 se obtiene:

$$U(p) = -\frac{\eta}{4\pi\epsilon_0}\omega(p) \quad (2.47)$$

donde $\omega(p)$ es el ángulo sólido subtendido por una superficie s cuando es vista desde el punto p .

2.6 DESARROLLO DEL METODO DE ANGULO SOLIDO

De acuerdo con las condiciones del problema (figura 2.11), se observa que los únicos potenciales generados son, precisamente, los que se localizan en la pared del pozo, por tanto:

$$U(0,0,z) = U_{01} + U_{02} + U_{03}, \quad (2.48)$$

donde:

$U(0,0,Z)$ es el potencial total medido en el eje del cilindro en un sistema de referencia r, θ, z, y ,

U_{0x} son los potenciales debidos a las superficies S_{0x} .

La relación :

$$U(0,0,z) = \frac{\omega}{4\pi}\Delta V(z) \quad (2.49)$$

es muy útil debido a que obtiene el potencial con parámetros muy sencillos y sin necesidad de involucrar funciones demasiado complicadas.

La ecuación (2.49) muestra la necesidad de calcular los ángulos sólidos y los

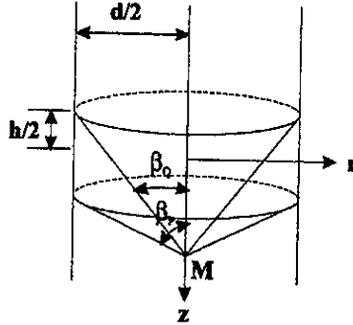


FIG. 2.13. Parámetros necesarios para el cálculo de los ángulos sólidos subtendidos por cada una de las doble capas.

voltajes para cada una de las superficies dipolares. Para ello, se tiene (figura 2.11):

$$\begin{aligned}\omega_{01} &= -4\pi + \omega_P \\ \omega_{02} &= -4\pi + \omega_Q - (-4\pi + \omega_P) = \omega_Q - \omega_P \\ \omega_{03} &= -4\pi + \omega_Q\end{aligned}\quad (2.50)$$

donde:

ω_{0x} son los ángulos sólidos subtendidos por las superficies S_{0x} , y,

ω_P y ω_Q son los ángulos sólidos subtendidos por las superficies P y Q .

Sustituyendo las ecuaciones (2.50) y (2.49) en (2.48) se tiene:

$$U(0, 0, z) = \frac{-4\pi + \omega_P}{4\pi} \Delta V_{01} + \frac{\omega_Q - \omega_P}{4\pi} \Delta V_{02} + \frac{-4\pi + \omega_Q}{4\pi} \Delta V_{03} \quad (2.51)$$

donde:

ΔV_{0x} son las diferencias de potencial a través de las superficies s_{0x} .

Se puede demostrar (ver ápendice A) que:

$$\begin{aligned}\omega_P &= 2\pi [1 - \cos \beta_P] \\ \omega_Q &= 2\pi [1 - \cos \beta_Q]\end{aligned}\quad (2.52)$$

en donde (ver figura 2.13):

$$\cos \beta_P = \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}}\quad (2.53)$$

y

$$\cos \beta_Q = \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}}\quad (2.54)$$

donde:

h es el espesor de la capa y

d es el diámetro de pozo.

Sustituyendo los valores de (2.53) y (2.54) en (2.52) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\omega_P &= 2\pi \left[1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right] \\ \omega_Q &= 2\pi \left[1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{\left(z - \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{4}}} \right],\end{aligned}\quad (2.55)$$

manipulando las ecuaciones anteriores y agrupando términos semejantes, se tiene:

$$\begin{aligned}U(0, 0, Z) &= -\frac{\Delta V_{01}}{2} \left[1 + \frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2 + d^2}} \right] - \frac{\Delta V_{02}}{2} \left[\frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2 + d^2}} - \frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2 + d^2}} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta V_{03}}{2} \left[1 + \frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2 + d^2}} \right].\end{aligned}\quad (2.56)$$

Esta última ecuación es la utilizada para desarrollar el algoritmo computacional que resuelve el problema por medio del método de ángulo sólido.

2.7 EJEMPLOS DE APLICACION DEL METODO DE ANGULO SOLIDO

La ecuación (2.56) se probó en dos ocasiones, con la idea de validar los resultados obtenidos anteriormente. En las siguientes figuras, la curva denominada como *SP* (*exacta*) ó solución exacta se refiere a la solución dada por la ecuación 2.26. Los datos de esta prueba son los mismos que se tienen en la Tabla 2.4. El resultado se muestra en la figura 2.14.

Es posible observar que las gráficas mostradas en la figura 2.14 se superponen casi completamente. Las variaciones pueden ser observadas en los archivos de salida de cada algoritmo, las pequeñas diferencias se deben a problemas de aproximación numéricos en el primer método mostrado en éste capítulo. **Se ha calculado el error porcentual, éste no sobrepasa al 1.42%.**

La figura 2.15 muestra la comparación entre los métodos de ángulo sólido y de la ecuación potencial para el caso de 9 capas, cuyos datos fueron mostrados anteriormente en la Tabla 2.7. Lo importante es mostrar la buena correspondencia entre los valores obtenidos del potencial por cada uno de los métodos y comparar los tiempos de máquina. **El programa de solución del primer método tardó aproximadamente 75 minutos, mientras que el programa desarrollado usando el método de ángulo sólido tardó cerca de 60 segundos y además el error porcentual no sobrepasó el 1%.**

2.8 CORRECCION AL METODO DE ANGULO SOLIDO PARA INVOLUCRAR CONTRASTE DE RESISTIVIDADES

La obtención del potencial para el caso de geometría cilíndrica se puede resolver por medio de dos ecuaciones. Sin embargo, las condiciones que se plantean en cada problema son diferentes. Por ello, es necesario buscar un factor de corrección que

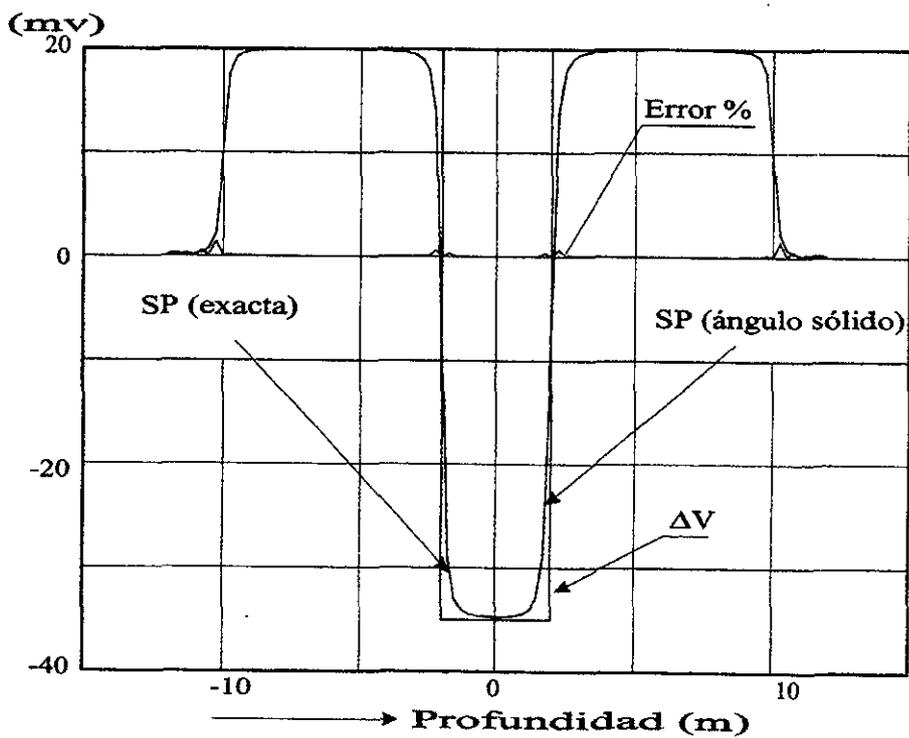


FIG. 2.14. Comportamiento de la curva de potencial natural para el caso de tres cilindros por medio del método de ángulo sólido.

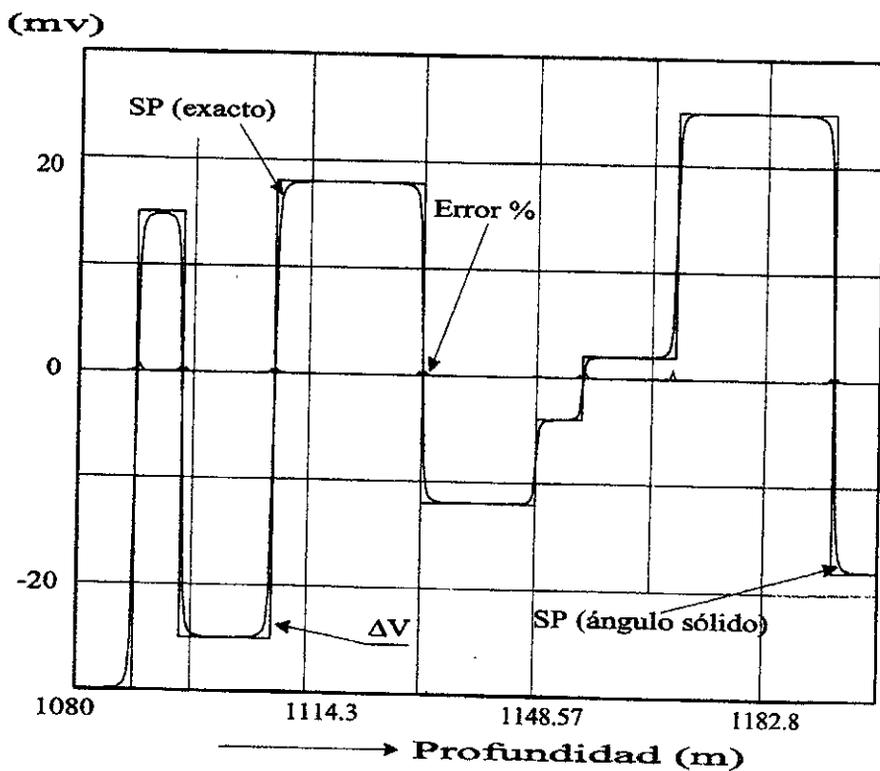


FIG. 2.15. Comparación entre los métodos de ángulo sólido y de la ecuación potencial para el caso de 9 cilindros, sin considerar contraste de resistividad.

permita igualar las soluciones para condiciones iguales. Además, se ha mencionado que el tiempo de proceso para el método de ángulo sólido es insignificante comparado con el tiempo que tarda el algoritmo que se basa en la solución de la ecuación 2.26.

La solución del potencial por medio del ángulo sólido considera que se tienen tres cilindros, dos de extensión infinita que se localizan arriba y abajo de otro de espesor h , la consideración más importante es la que se refiere al hecho de que **no existe contraste de resistividad a ambos lados de la superficie dipolar**. La expresión matemática del hecho anterior es:

$$\begin{aligned}
 U(0, 0, z) = & -\frac{\Delta V_{01}}{2} \left[1 + \frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2+d^2}} \right] \\
 & -\frac{\Delta V_{02}}{2} \left[\frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2+d^2}} - \frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2+d^2}} \right] \\
 & -\frac{\Delta V_{03}}{2} \left[1 + \frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2+d^2}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

La solución exacta es para el caso que considera contraste de resistividad a ambos lados de una superficie dipolar, su ecuación es:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(0, 0, z) = & \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^\infty \{\text{sen}\{x\alpha_u\}\} \frac{K_1(x)I_0(x\beta)}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx \\
 & -\frac{\Delta V}{\pi} \int_0^\infty \{\text{sen}\{x\alpha_d\}\} \frac{K_1(x)I_0(x\beta)}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Las ecuaciones (2.57) y (2.58) serán las mismas siempre y cuando $\mu = 1$, ya que implicaría que no existe contraste de resistividades.

Igualando las soluciones mencionadas se tiene que:

$$\frac{\omega\Delta V}{4\pi} = \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^\infty \{\text{sen}\{x\alpha_u\} - \text{sen}\{x\alpha_d\}\} K_1(x) I_0(x\beta) dx$$

al considerar que los puntos de medición están sobre el eje del cilindro, entonces $\beta = 0$,

de esta forma se tiene:

$$\frac{\omega}{4} = \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] K_1(x) dx. \quad (2.59)$$

Ahora se tiene que trabajar suponiendo que el valor de $\mu \neq 1$, es decir, que exista contraste de resistividades a ambos lados de la superficie dipolar.

La idea en este momento es obtener alguna aproximación a la solución de la función (2.58) a partir del método de ángulo sólido, para ello, se manipula algebraicamente (2.58):

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] K_1(x) I_0(x\beta) \frac{1}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} dx \quad (2.60)$$

donde se puede aproximar de la forma siguiente (Anguiano Rojas, 1998):

$$\frac{1}{[\mu-1]xK_0(x)I_1(x)+1} \simeq 1 - [\mu-1]xK_0(x)I_1(x) \quad (2.61)$$

sustituyendo (2.61) en la ecuación (2.60) se tiene:

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] K_1(x) I_0(x\beta) (1 - [\mu-1]xK_0(x)I_1(x)) dx. \quad (2.62)$$

La ecuación anterior puede ser expresada por:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, 0, z) = & \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] K_1(x) I_0(x\beta) dx \\ & - [\mu-1] \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] x K_1(x) I_0(x\beta) K_0(x) I_1(x) dx, \end{aligned}$$

el primer término de la ecuación anterior es el cálculo del potencial por medio del

método de ángulo sólido, además, $\beta = 0$, por tanto la expresión anterior se transforma en:

$$\Phi_1(0, 0, z) = \frac{\omega \Delta V}{4\pi} - [\mu - 1] \frac{\Delta V}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{sen } \{x\alpha_u\} - \text{sen } \{x\alpha_d\}] x K_1(x) K_0(x) I_1(x) dx. \quad (2.63)$$

Es posible hacer un análisis simple de la expresión anterior, éste consiste en reconocer que el comportamiento de la parte no oscilatoria es suave y que decae gradualmente, por tanto, se tendrán problemas debido a la parte oscilatoria de ésta integral.

Se puede observar que la integral en la ecuación (2.63) es una parte muy importante para el cálculo de la aproximación referida, por ello, se ha obtenido la solución para ciertos valores de α .

La figura 2.16 muestra el comportamiento de la integral de corrección que se habría que aplicar al método de ángulo sólido para obtener la solución exacta. Se encontró (Spurlin, 1998), una ecuación que genera la figura 2.16, ésta es:

$$f(a) = e^{-b}$$

donde b se comporta de la forma siguiente:

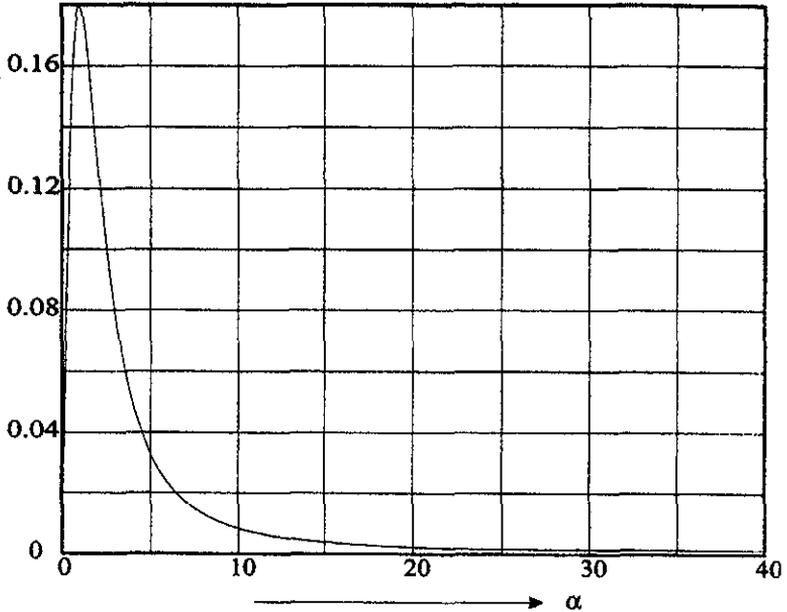


FIG. 2.16. Comportamiento de la curva de corrección propuesto por Spurlin (1997).

$$\begin{aligned}
 b = & -1.717023850317786 - 0.02057627446696214 \log(a) + \\
 & -0.6115524020897468 [\log(x)]^2 - 0.113407754643069 [\log(x)]^3 + \\
 & 0.04124122606294228 [\log(x)]^4 + 0.01745486905244414 [\log(x)]^5 + \\
 & -0.001989981480226374 [\log(x)]^6 - 0.00153228605412329 [\log(x)]^7 + \\
 & -1.553396153273687 \times 10^{-6} [\log(x)]^8 + 0.00007057063450946304 [\log(x)]^9 + \\
 & 4.740766769749188 \times 10^{-6} [\log(x)]^{10} - 1.317869416988789 \times 10^{-6} [\log(x)]^{11} + \\
 & -1.449505902239242 \times 10^{-7} [\log(x)]^{12}.
 \end{aligned}$$

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-20	-10	-2	1.5
2	-15	-2	2	15
3	-20	2	10	1.5

Tabla 2.8. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=1.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m

2.9 EJEMPLOS COMPARATIVOS DE LOS METODOS DESCRITOS

Las figuras que se muestran a continuación grafican el segundo término de la ecuación (2.63) y será llamada en adelante *corrección*, la ecuación completa (2.63) se llamará en adelante *aproximación*, la curva de la ecuación (2.57) se denominará *ángulo sólido* y la curva que modela la ecuación (2.58) será llamada *solución exacta*. Es importante mencionar que los valores de resistividades y los ΔV 's se propusieron arbitrariamente.

La figura 2.17 muestra la comparación de las curvas mencionadas, los datos de entrada se muestran en la tabla 2.8. Se puede observar que la curva *ángulo sólido* muestra una discrepancia con relación a la curva *solución exacta* puesto que aquella no supone contraste de resistividades. La curva *aproximación* se acerca a la *solución exacta*, pero en las zonas cercanas a los límites de las capas existen discrepancias, esto se ve en la curva *corrección* que presenta sus valores máximos y mínimos en las zonas cercanas a los límites. La curva *corrección* en los cilindros extremos marca valores cercanos a cero debido, posiblemente, a que en esta zona no existe contraste de resistividad. Otro comentario importante es que en el cilindro medio, el método de *ángulo sólido* difiere de la *solución exacta* ya que existe contraste de resistividad

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-20	-10	-2	0.15
2	-15	-2	2	2.5
3	-20	2	10	0.15

Tabla 2.9. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=0.5$ Ω -m, $\rho=0$ m, $z_1=-12$ m, $z_m=12$ m

entre los dos lados de la membrana.

La figura 2.18 se obtuvo con los datos mostrados en la tabla 2.9. Al existir contraste de resistividades respecto a cada una de las capas, la curva *corrección* tiene un comportamiento que se aleja de cero en todas las zonas de los límites de las capas. La curva *ángulo sólido* no es la mejor aproximación a la solución exacta ya que existe contraste de resistividad en cada cilindro respecto a la del lodo.

Cabe resaltar que después de obtener los resultados anteriores, surgió la idea (Tejero,1997), respecto a la posibilidad de no tener que hacer una aproximación por medio del segundo término al método de ángulo sólido, es decir, se planteó la posibilidad de que el contraste de resistividades quedara implícito en el valor ΔV para cada cilindro. Las figuras que a continuación se presentan intentan responder a tales inquietudes.

La figura 2.19 muestra el caso de tres cilindros, cuyos datos se muestran en la tabla 2.10. Se supuso la misma temperatura para las tres capas y se consideró que las capas extremas son lutitas perfectas y la capa media es una arena limpia. Los límites de las capas están en -10 , -2 , 2 y 10 m. respectivamente. La curva *ángulo sólido* se aleja de la curva exacta en las zonas cercanas a los límites de las capas. La capa de arena es de 4 unidades de espesor y se puede observar que la discrepancia es mayor que en la zona de lutitas que tienen espesores mayores. La curva *corrección*

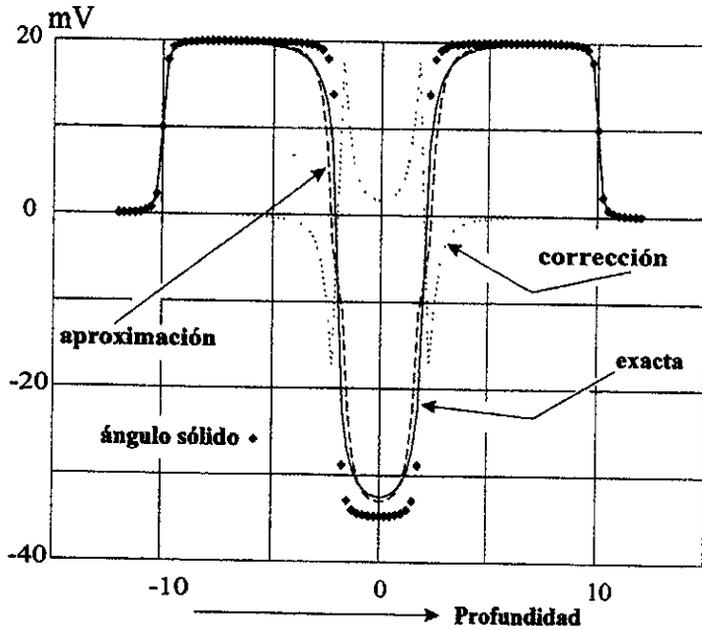


FIG. 2.17. Comparación de los métodos exacto y de ángulo sólido corregido para el caso de tres cilindros, suponiendo contraste de resistividad en el cilindro medio.

Capa	ΔV	z_d	z_u	R_t
1	-30.1464	-10	-2	4.5
2	-12.01162	-2	2	1.2
3	-30.1464	2	10	4.5

Tabla 2.10. Modelo de tres cilindros, $r=8$ in, $R_{mf}=0.5 \Omega\text{-m}$, $\rho=0$ m, $z_i=-12$ m, $z_m=12$ m

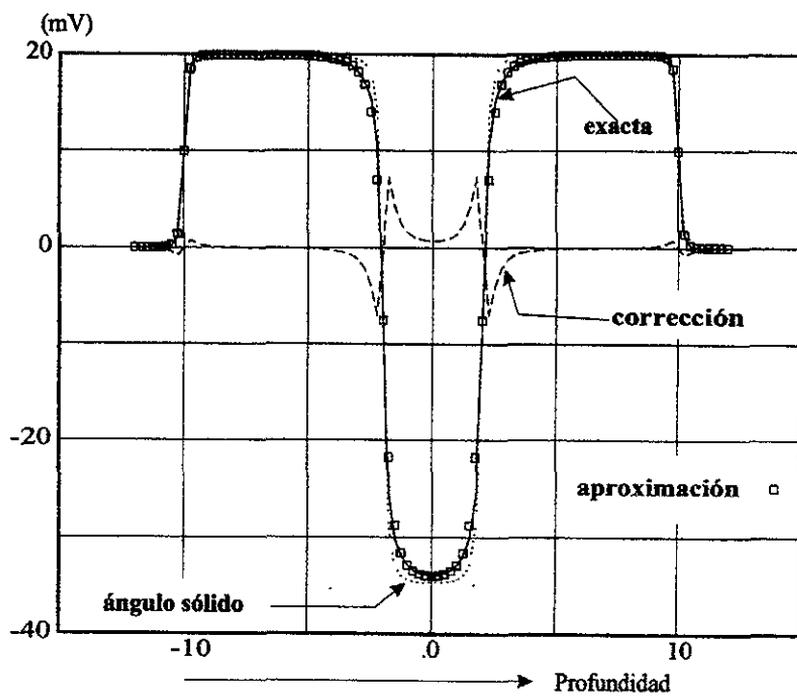


FIG. 2.18. Comparación del comportamiento del *SP* para los casos de las soluciones exacta y ángulo sólido modificado.

muestra grandes problemas en las zonas cercanas a los límites, ya que los contrastes de resistividad son altos.

A continuación se hace un análisis variando el espesor de la capa de arena a 12 unidades y las capas de lutita a 2 unidades, obteniéndose la figura 2.20, los datos de entrada son los mismos que los mostrados para la figura anterior. Ahora se observa que la curva *ángulo sólido* tiene una muy buena aproximación en el centro de la capa de arena, pero en las zonas de lutitas se tienen grandes errores, con esto se muestra que para capas gruesas el método de *ángulo sólido* se aproxima al valor exacto. Otra cosa importante de mencionar aquí es que la curva *corregida* tiene problemas muy graves en la zona de los límites, se observa que cerca de la profundidad de 8 esta curva tiene una amplitud muy grande, pero cerca de 10 su amplitud es menor, debido posiblemente, a que esta curva está influenciada por las capas adyacentes.

Finalmente, se probó qué sucede cuando las capas de arena y las de lutita son de espesor grande y los datos de entrada son los mismos que en las dos últimas figuras. La representación gráfica se muestra en la figura 2.21. Se observa que la curva *ángulo sólido* funciona bien para éstas condiciones aunque el error máximo se tiene en los límites de las capas.

En éste capítulo se trató el problema de modelar el potencial para el caso de geometría cilíndrica, se propusieron dos modelos que se enfocan al problema planteado, el primero de ellos considera que existe contraste de resistividad a través de una superficie dipolar, pero la solución tiene que ser evaluada numéricamente. La evaluación numérica que se propuso, consiste en aplicar los métodos de Filon y cuadratura gaussiana en ciertos intervalos de la solución propuesta en la ecuación (2.26).

El segundo modelo propuesto considera que a través de la superficie dipolar no hay contraste de resistividad, la ventaja de ésta suposición es que la solución es muy

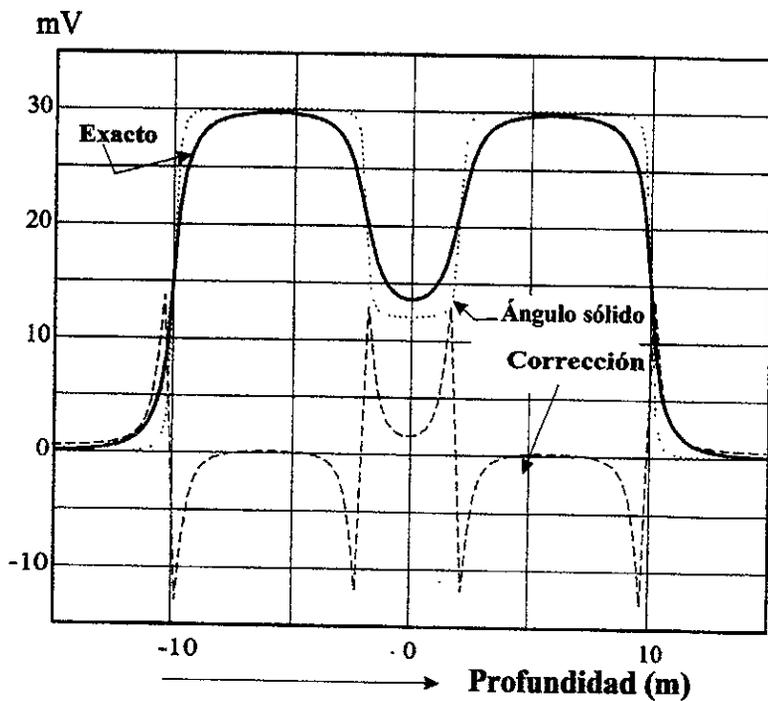


FIG. 2.19. Comparación de las curvas ángulo sólido y exacto suponiendo el contraste de resistividades dentro del factor $\delta\sigma$.

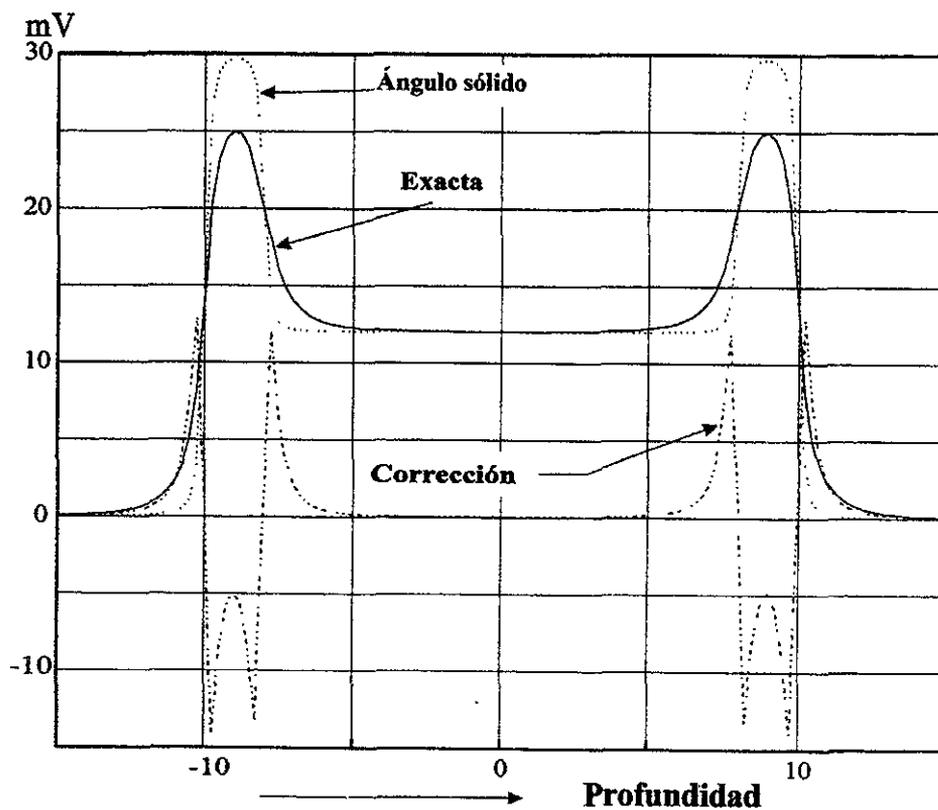


FIG. 2.20. Comparación de las curvas ángulo sólido y exacta suponiendo que la capa de arena es muy grande respecto a las capas de lutita.

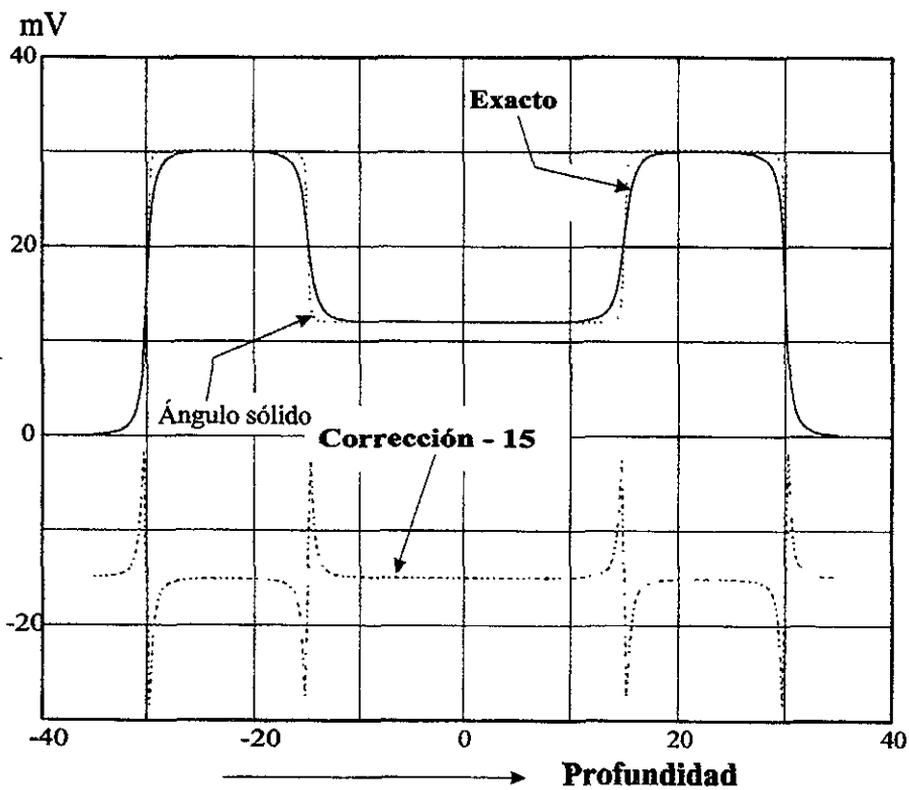


FIG. 2.21. Comparación de las curvas ángulo sólido y exacto suponiendo el contraste de resistividades dentro del factor ΔV y que las capas son de espesor considerable.

sencilla y no se necesita aplicar algún método numérico en la evaluación del potencial.

Surgió la idea de proponer una solución sencilla a partir del modelo de ángulo sólido, pero involucrando contraste de resistividad. Anguiano (1998) propuso un término de aproximación al método de ángulo sólido, dando como resultado una forma de evaluación relativamente rápida, pero que funciona para contrastes bajos de resistividad (hasta contraste de 8).

Las conclusiones del presente capítulo se pueden resumir de la forma siguiente:

1. La solución dada por la ecuación (2.26) funciona muy bien, pero tiene como inconveniente que el algoritmo del cálculo numérico es lento.
2. El método de ángulo sólido funciona adecuadamente, pero en la realidad, las capas separan medios con diferentes resistividades, situación por la cual no es posible aplicarlo.
3. La aproximación propuesta por Anguiano y desarrollada por Spurlin, funciona en forma adecuada para cuando los contrastes de resistividad son pequeños.
4. Cuando se intenta aplicar el método de ángulo sólido suponiendo contraste de resistividad, es decir, suponiendo que el valor ΔV lo lleva implícito, se vio que funciona para contrastes de resistividad bajos y para espesores de estratos grandes.

Hasta aquí, se ha resuelto en forma parcial el problema de modelar la curva de SP en 2D. En el siguiente capítulo se tratará el problema en capas planas, es importante mencionar que el método de ángulo sólido también será mencionado, al igual que en capas cilíndricas.

Capítulo 3

MODELADO DEL POTENCIAL NATURAL EN CAPAS PLANAS

Hasta ahora se ha mencionado la importancia y fuentes que generan el potencial natural y del modelado en geometría cilíndrica, sin embargo, es necesario destacar el efecto del modelado de capas planas dentro del potencial natural para tener listo el marco que permitirá resolver el problema de encontrar el SP en 2D.

3.1 CALCULO DEL SP EN CAPAS PLANAS (METODO DE ANGULO SOLIDO).

El problema de encontrar el potencial en capas planas se resuelve por medio de los conceptos de ángulo sólido y diferencia de potencial (voltaje) entre las capas adyacentes, en forma similar a como se realizó en el caso de geometría cilíndrica.

La figura 3.1 muestra los parámetros involucrados en el cálculo del potencial debido a capas planas. El potencial en el punto de medición M es calculado de la forma siguiente:

$$U(M) = U_{21} + U_{23}, \quad (3.1)$$

donde:

$U(M)$ es el potencial debido a las capas planas medido en el punto M .

U_{21} y U_{23} son los potenciales debidos a las superficies de doble capa S_{21} y S_{23} , mostradas en la misma figura.

De acuerdo a lo mencionado en el capítulo anterior, el potencial para este pro-

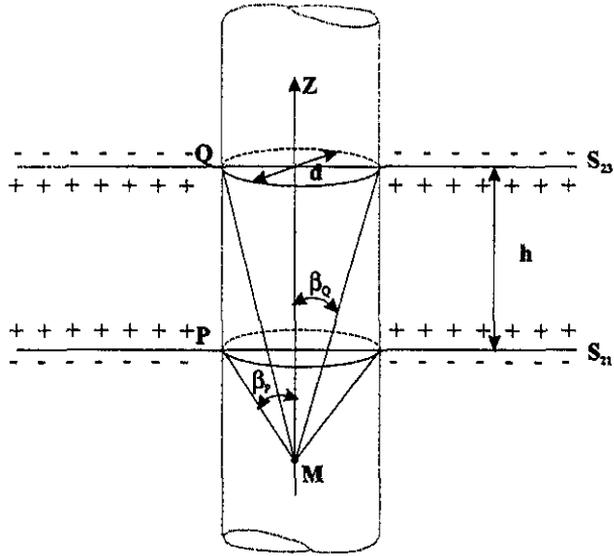


FIG. 3.1. Parámetros necesarios para el cálculo del potencial natural por medio del método de ángulo sólido.

blema es (Kaufman, 1995):

$$U = \frac{\omega_{21}}{4\pi} \Delta V_{21} + \frac{\omega_{23}}{4\pi} \Delta V_{23}, \quad (3.2)$$

donde:

ΔV_{21} y ΔV_{23} son las fuerzas electromotrices o diferencias de potencial, debido a las correspondientes dobles capas,

ω_{21} y ω_{23} son los ángulos sólidos subtendidos por las superficies S_{21} y S_{23} cuando éstas son vistas desde un punto intermedio.

El ángulo sólido subtendido por un plano infinito, tiene el valor de $\pm 2\pi$ (ver

Apéndice A) dependiendo de la posición del punto de observación. De acuerdo a ello, se tiene:

$$\begin{aligned}\omega_{21} &= 2\pi - \omega_P \\ \omega_{23} &= -2\pi - (-\omega_Q) = -2\pi + \omega_Q\end{aligned}\quad (3.3)$$

donde:

ω_P y ω_Q son los ángulos sólidos subtendidos por las superficies que representan el agujero. Se observa que $\omega_{21} = -\omega_{23}$ debido a que la dirección del vector normal a la superficie va de las cargas positivas a las negativas, es decir, los vectores normales van en sentidos opuestos.

Además, se tiene la siguiente relación (Kaufman, 1995):

$$\begin{aligned}\omega_P &= 2\pi (1 - \cos \beta_P) = 2\pi \left[1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{(z - \frac{h}{2})^2 + \frac{d^2}{4}}} \right] \\ \omega_Q &= 2\pi (1 - \cos \beta_Q) = 2\pi \left[1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{(z + \frac{h}{2})^2 + \frac{d^2}{4}}} \right]\end{aligned}\quad (3.4)$$

donde:

β_P y β_Q son los ángulos mostrados en la figura 3.1,

h es la distancia entre las capas,

d es el diámetro del pozo, y

z es la profundidad de medida.

Al sustituir (3.4) en (3.1) y manipular algebraicamente se llega finalmente a:

$$U = \frac{\Delta V_{21}}{2} \left[\frac{2z - h}{\sqrt{(2z - h)^2 + d^2}} \right] - \frac{\Delta V_{23}}{2} \left[\frac{2z + h}{\sqrt{(2z + h)^2 + d^2}} \right]. \quad (3.5)$$

La figura 3.2 muestra el comportamiento del potencial natural para diferentes diámetros del agujero. Se puede observar que la curva no deflexiona completamente

cuando el diámetro del agujero es grande; esto es de esperarse ya que cuando d tiende a cero, la curva debe tender a la mayor deflexión.

3.2 CALCULO DEL SP EN CAPAS PLANAS RECTANGULARES, SIN CONTRASTE DE RESISTIVIDAD

En el caso de la geometría plana, y al considerar que las cargas se encuentran localizadas a ambos lados del eje z , entonces, la ecuación (2.8) es válida ya que el eje del dipolo es paralela a la dirección en z y se cumple también la ecuación (2.9). Para el caso que ahora se analiza se considera que existe una distribución continua de carga a ambos lados del plano $z = 0$, a lo largo de los ejes x y y , por lo que es necesario integrar la ecuación (2.9) sobre el área de la membrana e introducir una constante para obtener la igualdad:

$$\Phi = \frac{\Delta V}{4\pi} \int_A \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dA, \quad (3.6)$$

donde:

dA es la diferencial de área

r tiene componentes en las direcciones x y y , cuyos límites son:

$$\begin{aligned} -a &\leq x \leq a \\ -b &\leq y \leq b \end{aligned} \quad (3.7)$$

Al expresar en una ecuación la discusión anterior se tiene que la ecuación (3.6) puede ser reescrita como:

$$\Phi = \frac{\Delta V}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dy' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad (3.8)$$

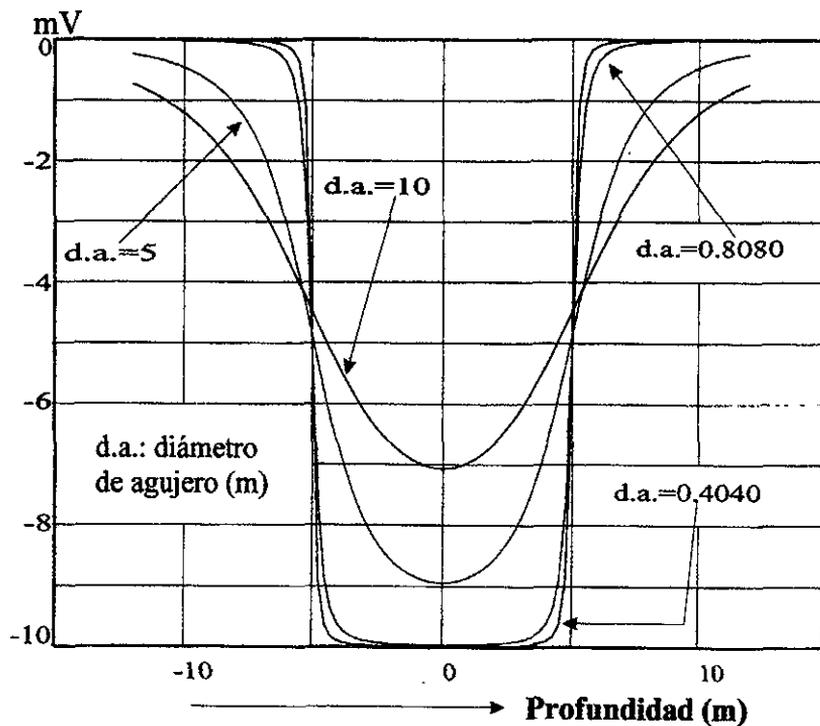


FIG. 3.2. Comportamiento de la curva de SP para el caso de capas planas resuelto por el método de ángulo sólido. Obsérvese el comportamiento cuando varía el diámetro del agujero.

donde se tiene:

un punto de medición P con coordenadas (x, y, z) ,

la posición del dipolo con coordenadas $(x', y', 0)$.

Al derivar respecto a z , y al sustituir en (3.8), se tiene:

$$\Phi = \frac{\Delta V}{4\pi} \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dy' \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.9)$$

Debido a que la capa se extiende hasta el infinito, se propondrá primero que una de las direcciones tiene dimensiones muy grandes, es decir, b tiende a ∞ . Entonces se tendrá:

$$\Phi = \frac{\Delta V}{4\pi} \int_{-a}^a dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} dy'. \quad (3.10)$$

La resolución de la integral anterior es la siguiente (Taberian et al., 1995):

$$\Phi = \text{signo}(z) \frac{\Delta V}{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \pi - \arctan\left(\frac{2a|z|}{a^2 - x^2 - z^2}\right) ; x^2 + z^2 < a^2 \\ \arctan\left(\frac{2a|z|}{x^2 + z^2 - a^2}\right) ; x^2 + z^2 > a^2 \end{array} \right\}$$

donde:

$\text{signo}(z) = 1$ cuando $z > 0$ y,

$\text{signo}(z) = -1$ cuando $z < 0$.

Este desarrollo considera que no existe una diferencia de conductividades respecto al plano $z = 0$.

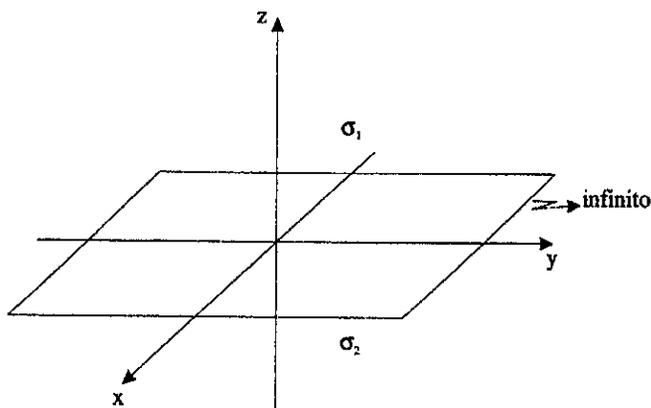


FIG. 3.3. Cálculo del potencial para el caso de una capa infinita.

3.3 CALCULO DEL SP EN CAPAS PLANAS RECTANGULARES AL CONSIDERAR CONTRASTE DE RESISTIVIDAD

Se tienen ciertos inconvenientes para usar el desarrollo mencionado en la sección anterior, uno de ellos es la imposibilidad de simular el efecto del pozo que corta al plano, ya que la sección debe ser circular y no rectangular; otro inconveniente, es la suposición de que las conductividades a ambos lados de la capa son las mismas. Para resolver el segundo inconveniente se procederá suponiendo una capa dipolar de longitud infinita, a través de la cual existen diferentes conductividades (figura 3.3).

Se supondrá que en la superficie $z = 0$ se ha inducido una densidad de carga σ_f , la cual da origen al potencial observado en la región $z > 0$. De acuerdo al Teorema de Green, se tiene que la solución del potencial en $z > 0$ está dada por:

$$U(\mathbf{r}) = + \oint_s G \frac{\partial U}{\partial z'} \Big|_{z'=0} ds, \quad (3.11)$$

donde

$$\frac{\partial U}{\partial z'} = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

Entonces, el potencial puede expresarse de la forma siguiente:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \sigma_f G ds. \quad (3.13)$$

La función de Green para el semiespacio de conductividades diferentes se obtiene por el método de las imágenes de la forma siguiente:

$$G = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \left[\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right] \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}}. \quad (3.14)$$

En $z' = 0$, la función de Green se transforma en:

$$G = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (3.15)$$

Al hacer $\rho = x^2 + y^2$ y sustituir la ecuación (3.15) en (3.13), se obtiene el potencial como:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int_S \frac{\sigma_f ds}{\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad \forall z > 0. \quad (3.16)$$

El potencial de un dipolo es la derivada direccional del potencial monopolar en la dirección de z (Tejero, 1997), entonces:

$$U_{dip} = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) ds, \quad (3.17)$$

al realizar la derivada se tiene que:

$$U_{dip} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int \frac{z \Delta V}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} ds \quad (3.18)$$

donde:

$$\Delta V = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}.$$

Al ser la superficie una capa rectangular, se extiende en las direcciones de x y y . El desarrollo realizado por Taherian (Taherian et al., 1992) propone que en una dirección, la capa tiene una longitud infinita, y la otra dirección una extensión de a . De esta forma se tendría la siguiente ecuación para calcular el potencial:

$$U_{dip} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \Delta V \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy'. \quad (3.19)$$

Una forma de comprobarlo es utilizar la definición del potencial dada por las funciones de Green:

$$U = - \int_V G \nabla^2 U dV - \int_S \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (3.20)$$

De la ecuación (3.15) se tiene:

$$\frac{\partial G}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{- \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) z}{4\pi [\rho^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (3.21)$$

A continuación se hará un análisis de la ecuación (3.20). En realidad, la función U es armónica para $z > 0$ debido a que no existe fuente, por tanto, el Laplaciano de U vale cero. Así, se tiene:

$$U = - \int_V G \nabla^2 U dV - \int_S \frac{- \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) z}{4\pi [\rho^2 + z^2]^{3/2}} ds. \quad (3.22)$$

Finalmente, el potencial será:

$$U = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z \Delta V}{[\rho^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy'. \quad (3.23)$$

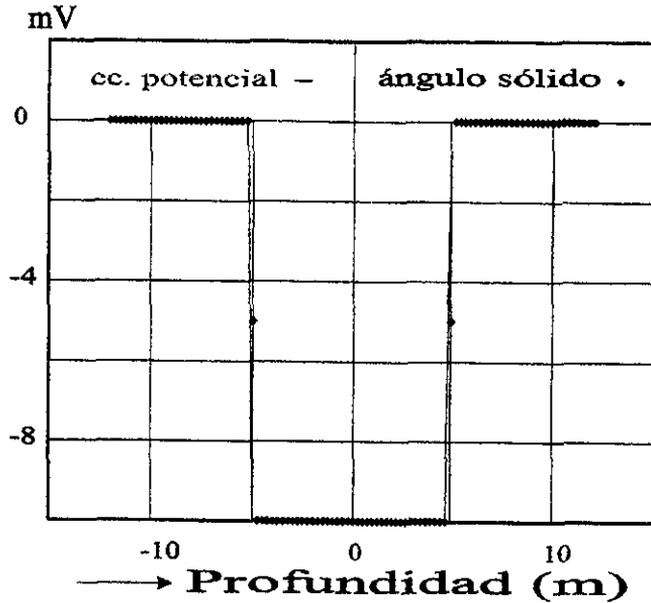


FIG. 3.4. Comparación de los métodos geométrico (considerando que el diámetro de agujero tiende a cero) y ecuación potencial (considerando que las longitudes tienden a infinito).

Al ser iguales (3.19) y (3.23) se comprueba el resultado anterior. La ecuación (3.23) es la publicada en Taherian (Taherian et al., 1995). Se puede observar que una de las longitudes se extiende hasta el infinito y la otra tiene una distancia de 2 veces a .

La figura (3.4) muestra la comparación del método de ángulo sólido (considerando un diámetro de pozo de 0.0000001), con el de la ecuación potencial, considerando que el valor de a es de 10000000000000.

Los resultados obtenidos, muestran que es lo mismo calcular el potencial debido

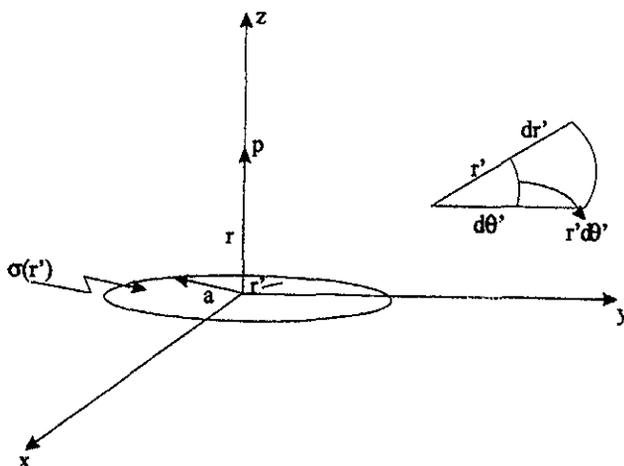


FIG. 3.5. Cálculo del potencial en una placa de radio a .

a capas planas, considerando que esta es una circunferencia o al considerar que es un rectángulo, siempre y cuando las capas sean muy grandes.

3.4 CALCULO DEL SP EN CAPAS PLANAS CIRCULARES CONSIDERANDO CONTRASTE DE RESISTIVIDAD

El objetivo en esta parte es encontrar la función potencial para una capa de extensión infinita que incluya el agujero. Bajo la perspectiva mencionada es factible considerar una capa circular de extensión infinita, es decir, de radio muy grande y un círculo de radio igual al radio del pozo.

En realidad, hay que resolver la ecuación (3.23) en coordenadas polares (figura

3.5). Se iniciará con la siguiente consideración:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} = r'\mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= z\mathbf{z} \\ ds' &= r'dr'd\theta'. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sustituyendo (3.24) en (3.23), se tiene la función potencial en coordenadas polares:

$$U = \frac{\Delta V}{2\pi} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{zr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' d\theta', \quad (3.25)$$

$$U = \Delta V \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \int_0^a \frac{zr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr'. \quad (3.26)$$

Resolviendo únicamente la integral y haciendo los siguientes cambios de variables, se tiene:

$$\begin{aligned} u &= z^2 + r'^2; \quad r' \rightarrow 0 \implies u = z^2 \\ du &= 2r'dr'; \quad r' \rightarrow a \implies u = z^2 + a^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\int_0^a \frac{zr'}{[z^2 + r'^2]^{3/2}} dr' = \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{z du}{2u^{3/2}} = \frac{z}{2} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}} \quad (3.28)$$

$$\frac{z}{2} \int_{z^2}^{z^2+a^2} \frac{du}{u^{3/2}} = -z \left[(z^2 + a^2)^{-1/2} - z^{-1} \right] = -z \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{z} \right]. \quad (3.29)$$

Sustituyendo (3.29) en (3.26) se llega:

$$U = \Delta V \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right]. \quad (3.30)$$

Se ha desarrollado un algoritmo a partir de la ecuación (3.30), la curva que modela esta ecuación será llamada propuesto. La figura (3.6) muestra la comparación

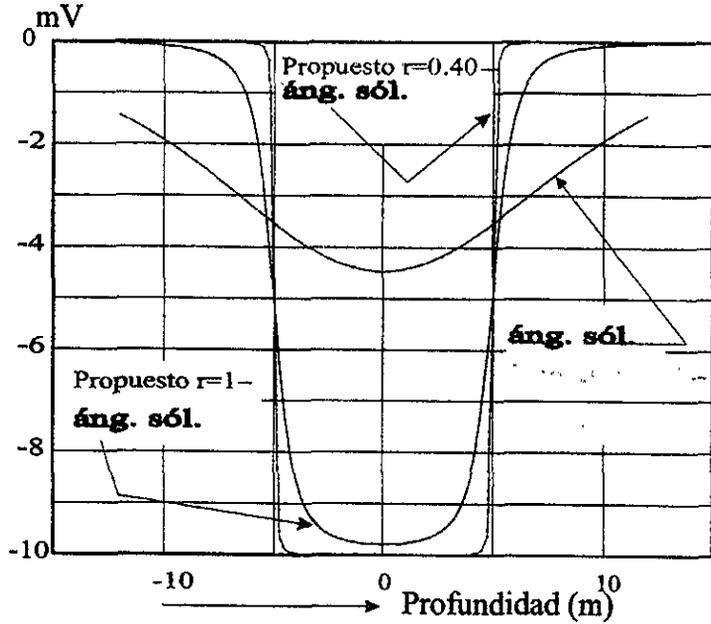


FIG. 3.6. Comparación de los métodos de ángulo sólido (ang. sól.) y propuesto, considerando diferentes radios de pozo (r).

para el caso de capas planas por los métodos propuestos en esta tesis y por el método de ángulo sólido, lo importante es mostrar que el modelado realizado con la ecuación 3.30 permite restar el efecto de agujero a una capa de extensión infinita y que el resultado de la aproximación es bueno aun para radios de pozo muy grandes.

El desarrollo de este capítulo tuvo como objetivo el comprobar los resultados obtenidos por Taherian para el caso de la solución de la ecuación potencial debido a capas planas. Se planteó además, la necesidad de considerar que las capas son circulares para poder restar el efecto del agujero a las capas planas.

Se planteó el problema, para ser resuelto por medio del método de ángulo sólido y se comprobó que las formas de solución para el mismo problema arrojan resultados similares.

El resultado que se obtuvo permitirá, junto con los de geometría cilíndrica, encontrar el potencial en 2D, tema del siguiente capítulo.

Capítulo 4

MODELADO DEL POTENCIAL NATURAL EN 2D

Hasta ahora se ha desarrollado por separado el modelado del potencial para dos casos relativamente sencillos. En el capítulo 2 se obtuvieron dos formas de cuantificar el potencial para el caso de geometría cilíndrica, en el capítulo 3, se mostró que se puede obtener el potencial para el caso de capas planas de dos formas rápidas y sin discrepancia apreciable en los resultados obtenidos en cada uno de los métodos desarrollados.

En esta parte de la tesis se justificará la propuesta de sumar los efectos del potencial debido a la geometría cilíndrica y a las capas planas para obtener el modelado 2D; en realidad, no existe una solución analítica cerrada en este caso, al considerar contraste de resistividad a ambos lados de las superficies dipolares, por ello se recurre a la idea de poder sumar ambos efectos.

4.1 MODELADO DEL SP EN 2D POR MEDIO DEL METODO DE ANGULO SOLIDO

Una forma de resolver el problema para el caso de 2D es mediante al desarrollo del método de ángulo sólido, el cual se puede ejemplificar considerando dos capas planas en donde se simulan dos formaciones de lutita entre una de arena de espesor h y tres cilindros de radio a , en cada una de las superficies planas, y en el entendido de que, además, **no existe contraste de resistividades** en los medios considerados.

Es muy importante aclarar que el método de ángulo sólido indica que el potencial está determinado por el valor del ángulo sólido debido a un plano infinito y a super-

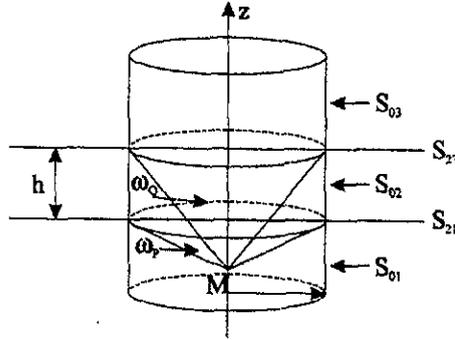


FIG. 4.1. Modelo de un pozo atravesando capas planas.

ficies cerradas, considerando la posición del punto de medición. Al igual que en los dos capítulos anteriores, aquí se considera que el valor de la diferencia de potencial a través de la superficie dipolar es conocido, es decir, que de alguna forma se ha podido caracterizar correctamente el ΔV .

La figura 4.1 muestra los parámetros físicos que se han supuesto para el desarrollo del método de ángulo sólido. La distribución de las cargas se suponen de la forma mostrada en la figura 4.2 en donde h es el espesor de la capa en cuestión.

El potencial en el punto de observación M es igual a la suma de los potenciales originados por cada una de las dobles capas:

$$U(0, 0, z) = U_{21} + U_{23} + U_{01} + U_{02} + U_{03}, \quad (4.1)$$

donde:

$U(0, 0, z)$ es el potencial medido a la profundidad z sobre el eje del cilindro y, U_{ij} son los potenciales debidos a las superficies S_{ij} .

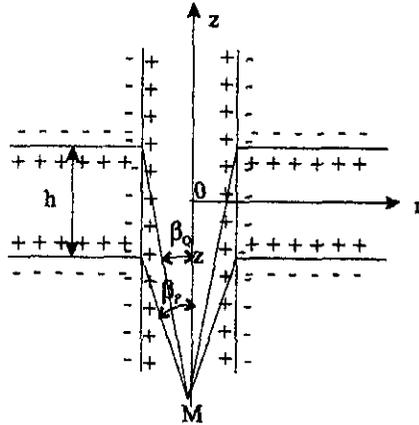


FIG. 4.2. Distribución de cargas propuestas para el desarrollo del método de ángulo sólido.

De acuerdo al conocimiento del valor del potencial para una doble capa (ver capítulo 2), se tiene:

$$U = \frac{\omega}{4\pi} \Delta V, \quad (4.2)$$

donde:

ω es el ángulo sólido subtendido por la superficie dipolar y

ΔV es la diferencia de potencial a través de la superficie dipolar.

La obtención del ángulo sólido ha sido mencionada en el apéndice A, en este caso, pueden ser representados para cada doble capa como:

$$\begin{aligned} \omega_{21} &= -2\pi + \omega_P & \omega_{23} &= 2\pi - \omega_Q \\ \omega_{01} &= 4\pi - \omega_P & \omega_{02} &= \omega_P - \omega_Q \\ \omega_{03} &= \omega_Q \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde:

ω_p y ω_q son los ángulos sólidos subtendidos por las superficies que representan el agujero, y

ω con sus diferentes subíndices, representa los ángulos sólidos subtendidos por cada una de las superficies.

Al sustituir (4.2) y (4.3), en (4.1), se tendrá el potencial de la siguiente forma:

$$U(0, 0, z) = \frac{-2\pi + \omega_p}{4\pi} \Delta V_{21} + \frac{2\pi - \omega_q}{4\pi} \Delta V_{23} + \frac{4\pi - \omega_p}{4\pi} \Delta V_{01} + \frac{\omega_p - \omega_q}{4\pi} \Delta V_{02} + \frac{\omega_q}{4\pi} \Delta V_{03}. \quad (4.4)$$

Manipulando en forma algebraica y siguiendo los desarrollos mostrados en los capítulos 2 y 3, se llega a que:

$$U(0, 0, z) = \frac{2z+h}{\sqrt{(2z+h)^2+d^2}} \frac{\Delta V + \Delta V_{02} - \Delta V_{03}}{2} - \frac{2z-h}{\sqrt{(2z-h)^2+d^2}} \frac{\Delta V_{21} - \Delta V_{01} + \Delta V_{02}}{2} + \frac{\Delta V_{01} + \Delta V_{03}}{2}. \quad (4.5)$$

La expresión (4.5) ha sido implementada en un algoritmo computacional que es muy rápido, pero que tiene como limitante el hecho de que no considera contraste de resistividad.

4.2 MODELADO DEL SP EN 2D POR MEDIO DE LA SUMA DE EFECTOS

Una parte muy importante del desarrollo de este trabajo, se basa en el hecho de proponer que los dos modelados en 1D que se han discutido en los capítulos anteriores se pueden sumar, y obtener, de ésta forma, el potencial en 2D. Asumir lo anterior significa físicamente que se desprecia el efecto de potencial generado por la interacción de las cargas eléctricas producidas de manera natural por las formaciones geológicas.

No se puede perder de vista el hecho de que se trabaja con superficies dipolares, es decir, que existen efectos de doble capa en cada uno de los límites de estratos y del pozo-formación. En el capítulo 2 se mostró que el cálculo del potencial eléctrico para el caso de un dipolo, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto de medición y el centro del dipolo.

Al proponer la suma de efectos de capas planas y geometría cilíndrica, se tiene el problema de que habrá interacciones entre las cargas en las zonas cercanas al límite de los cilindros con las capas planas. Se mostrará en forma intuitiva (sin hacer ningún tipo de demostración matemática) que el efecto de interacción entre las cargas es muy pequeño en comparación con los potenciales debidos a las superficies dipolares de geometrías plana y cilíndrica.

Cuando se suman los efectos descritos anteriormente, habrá una zona de interacción de cargas, ésto es muy importante ya que será despreciado el efecto de potencial creado en esta zona.

De acuerdo a la figura 4.3 se puede observar que el potencial eléctrico debido a la interacción de cargas, decae:

$$U \propto \frac{1}{R^2}, \quad (4.6)$$

donde se tiene que:

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad (4.7)$$

siendo:

r la distancia radial entre la posición de los dos dipolo en cuestión, y

z la distancia paralela al eje del cilindro de la posición de los dipolos en cuestión.

Sustituyendo (4.7) en (4.6), se ve que el potencial eléctrico decae de la forma

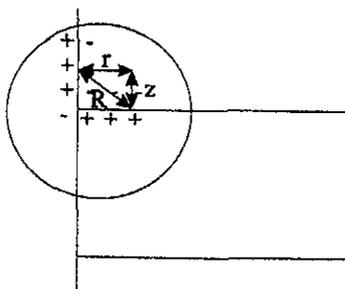


FIG. 4.3. Posición de los dipolos al sumar el cilindro con la capa plana.

siguiente:

$$U \propto \frac{1}{r^2 + z^2}. \quad (4.8)$$

La ecuación anterior muestra, físicamente, que cuando los dipolos se encuentran a una cierta distancia, el efecto de potencial de interacción entre los dipolos es pequeño, ya que depende del inverso del cuadrado de la distancia entre ellos. Es necesario recalcar que la ecuación (4.8) indica que cuando los dipolos se separan un poco, el potencial de interacción decae rápidamente, y por tanto, el efecto de interacción es muy pequeño.

Es posible decir que el campo secundario que se genera a partir de la interacción de los dipolos eléctricos es pequeño. La explicación se dá con base en la figura 4.4; los campos eléctricos debidos a los dipolos se representan como E . El lado izquierdo de la figura muestra las líneas de campo eléctrico debido a las interacciones entre las cargas. El lado derecho, muestra las componentes del campo total en un punto que tiene carga negativa, producto de la influencia de las cargas que conforman los dipolos. Los campos E_{sn1} y E_{sp1} son aproximadamente iguales, pero de sentido contrario, de

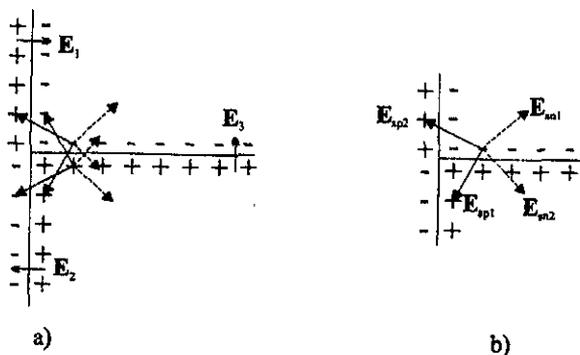


FIG. 4.4. Comportamiento del campo secundario. a) Se muestra la dirección del campo eléctrico en las superficies dipolares y b) muestra las líneas de campo eléctrico en un punto determinado.

igual forma que los campos E_{an2} y E_{sp2} . De acuerdo a lo anterior, el campo secundario, producto de la interacción de las cargas es muy pequeño. Además, ya que el potencial depende del campo eléctrico:

$$U = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

entonces, el potencial también será pequeño.

En otras palabras, lo anterior significa que el campo eléctrico producto de la interacción entre los dipolos eléctricos que conforman las superficies que se suman (cilíndrica y de capas planas) decae como la relación $1/R^3$, de ésta forma, cuando los dipolos están a una distancia R , entonces el campo eléctrico de interacción es muy pequeño.

Vale la pena mencionar que no es posible dar en forma cuantitativa la contribución del potencial de interacción: hasta ahora no se ha resuelto el problema de

plantear la ecuación potencial para el caso en 2D, sin embargo, en forma cualitativa, es posible despreciar el efecto de interacción.

4.3 EJEMPLOS DE MODELADO DE SP EN 2D POR MEDIO DEL METODO DE SUMA DE EFECTOS

Ahora, se mostrarán ciertos casos en donde de alguna forma se han podido caracterizar las diferencias de potencial, es decir, sólo se modelará tomando en cuenta los contrastes de resistividad, la longitud de la capa y el diámetro del pozo.

Existe un trabajo muy importante desarrollado por Doll (Doll, 1948) que permite comparar los resultados obtenidos con base en el modelado del presente trabajo con sus resultados teóricos. Se han podido reproducir algunas gráficas obtenidas en la literatura, lo que da la pauta para suponer que el presente trabajo es correcto.

Las tablas 4.1 y 4.2 muestran los datos para la obtención de la figura 3 de la referencia mencionada, en este caso se mostrarán los datos para geometría cilíndrica y capas planas para que se puedan visualizar bien los datos de entrada, considerando $R_m = 1 \Omega - m$.

La figura 4.5 muestra la curva resultante de los datos mostrados en las tablas 4.1 y 4.2. Se puede observar que la curva denominada ΔV tiene una máxima deflexión, de 100 (mV), además, se consideran secuencias de lutita-arena con diferentes espesores de las capas permeables. Se puede comprobar que los resultados obtenidos ajustan con los obtenidos por Doll.

Como parte de la validación de los resultados obtenidos, se reprodujo la figura 5 de la referencia mencionada anteriormente (Doll, 1948). En este caso, lo que existe son secuencias de arena-lutita, la diferencia con el modelo geológico anterior es que ahora hay intercalaciones de lutita dentro de la formación arenosa. Los datos de

Capa	$\Delta V(mV)$	$z_d(m)$	$z_u(m)$	$R_t(\Omega - m)$
1	-60	0	20	1
2	12	20	36	1
3	-60	36	56	1
4	12	56	64	1
5	-60	64	84	1
6	12	84	88	1
7	-60	88	108	1
8	12	108	110	1
9	-60	110	130	1
10	12	130	131	1
11	-60	131	151	1
12	12	151	151.5	1
13	-60	151.5	171.5	1

Tabla 4.1. Datos para reproducir la figura 3 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$.

Capa	$\Delta V(mV)$	$R_{t1}(\Omega - m)$	$R_{t2}(\Omega - m)$
1	-28	1	1
2	28	1	1
3	-28	1	1
4	28	1	1
5	-28	1	1
6	28	1	1
7	-28	1	1
8	28	1	1
9	-28	1	1
10	28	1	1
11	-28	1	1
12	28	1	1
13	-28	1	1
14	28	1	1

Tabla 4.2. Datos para reproducir la figura 3 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$.

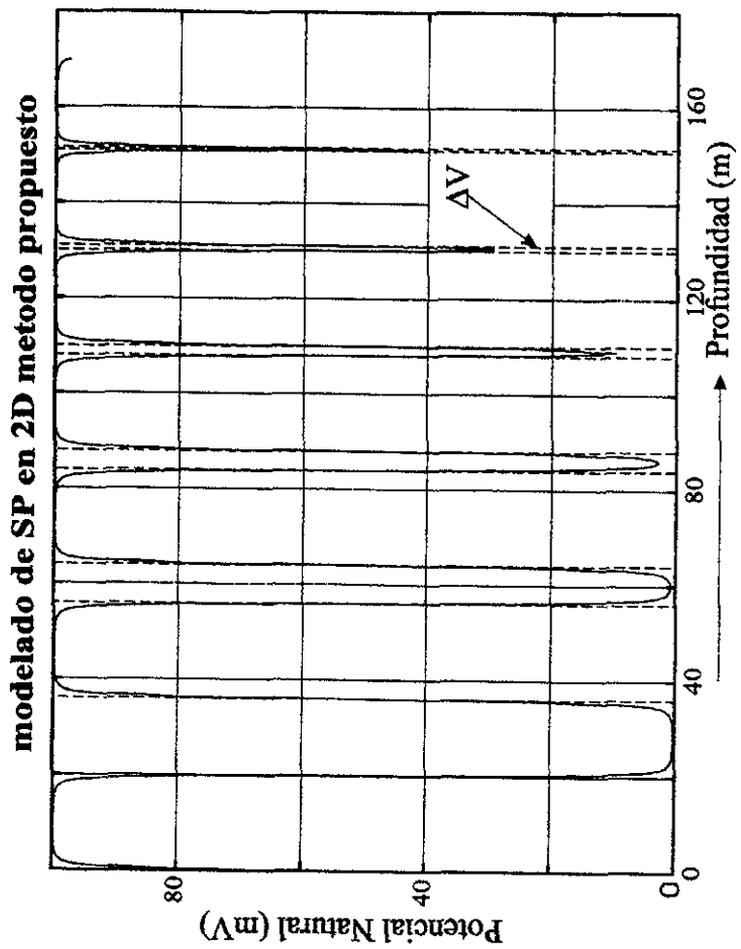


FIG. 4.5. Reproducción de la figura 3 de Doll (1945).

Capa	$\Delta V(mV)$	$z_d(m)$	$z_u(m)$	$R_t(\Omega - m)$
1	-60	0	50	1
2	12	50	66	1
3	-60	66	116	1
4	12	116	118	1
5	-60	118	168	1
6	12	168	171.75	1
7	-60	171.75	172.25	1
8	12	172.25	176	1
9	-60	176	226	1
10	12	226	227	1
11	-60	227	228	1
12	12	228	229	1
13	-60	229	230	1
14	12	230	231	1
15	-60	231	232	1
16	12	232	233	1
17	-60	233	234	1
18	12	234	235	1
19	-60	235	236	1
20	12	236	237	1
21	-60	237	287	1

Tabla 4.3. Datos para generar la figura 5 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$.

entrada se muestran en las tablas 4.3 y 4.4:

Los dos análisis obtenidos hasta ahora se han realizado bajo la condición teórica de que no existe contraste de resistividad a través de las superficies dipolares. Ahora se mostrará otra figura que reproduce los resultados obtenidos en la figura 19 de Doll y el comportamiento de la curva modelada cuando se tienen secuencias de arena con diferentes resistividades de la profundidad 0 hasta aproximadamente 175 (m). A partir de esta profundidad, se tiene una capa de arena con un cierto contenido de arcilla (es por ello que la curva ΔV no deflexiona completamente hasta la línea base

Capa	$\Delta V(mV)$	$R_{e1}(\Omega - m)$	$R_{e2}(\Omega - m)$
1	-28	1	1
2	28	1	1
3	-28	1	1
4	28	1	1
5	-28	1	1
6	28	1	1
7	-28	1	1
8	28	1	1
9	-28	1	1
10	28	1	1
11	-28	1	1
12	28	1	1
13	-28	1	1
14	28	1	1
15	-28	1	1
16	28	1	1
17	-28	1	1
18	28	1	1
19	-28	1	1
20	28	1	1
21	-28	1	1
22	28	1	1

Tabla 4.4. Datos para generar la figura 5 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$.

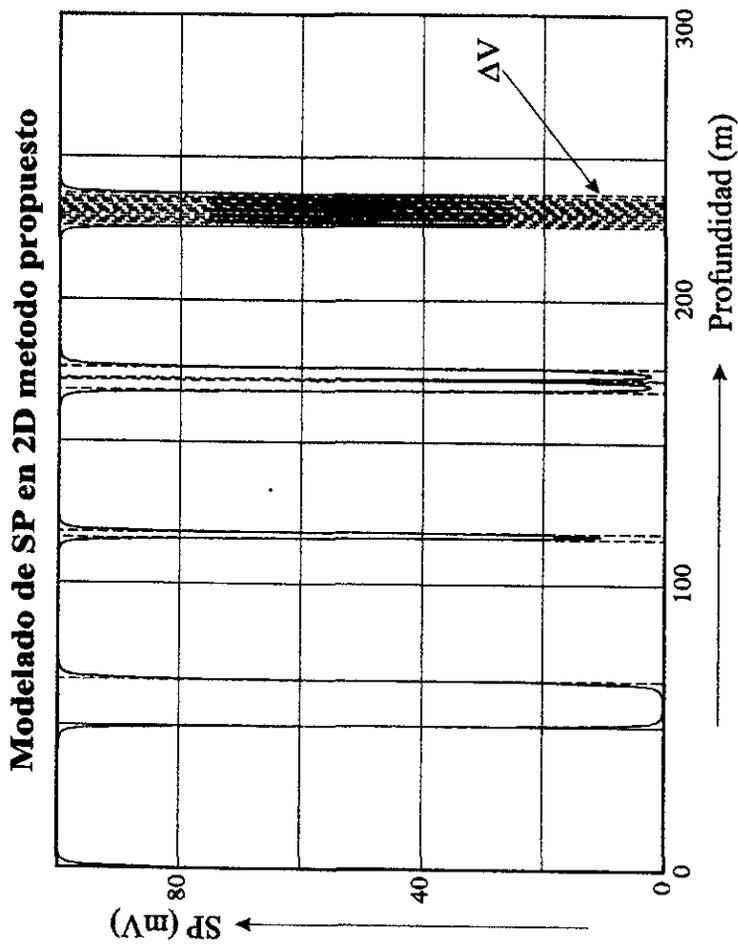


FIG. 4.6. Rreproducción de la figura 5 de Doll (1945).

Capa	$\Delta V(mV)$	$z_d(m)$	$z_u(m)$	$R_t(\Omega - m)$
1	-40	0	44	8
2	-40	44	49	10
3	12	49	58	30
4	12	58	68	25
5	12	68	88	45
6	12	88	139	30
7	12	139	175	50
8	-40	175	179	70
9	12	179	189	75
10	12	189	198	110
11	12	198	205	250
12	-40	205	219	310
13	12	219	235	70
14	12	235	249	40
15	-40	249	254	20
16	12	254	298	30

Tabla 4.5. Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$.

de las lutitas). Aproximadamente en la profundidad 215 (m) se tiene una capa con alta resistividad, Doll la caracteriza como una caliza; finalmente, pasando 250 (m), se modela una capa de lutita delgada. Los datos de entrada se muestran en las tablas 4.5 y 4.6.

La figura 4.7 muestra el comportamiento de la curva obtenida con los datos de las tablas 4.5 y 4.6. En este punto es importante hacer un pequeño paréntesis para recalcar que se pueden escoger arbitrariamente los valores de ΔV para cada una de las capas y obtener una curva que muestre la tendencia que se busca. Sin embargo, para obtener exactamente la curva de Doll, es necesario conocer el ΔV usado por él.

Las tablas 4.7 y 4.8 indican los datos para obtener la curva de la figura 4.7, sólo que se han variado los parámetros de ΔV . La figura 4.8 muestra la contribución de

Capa	$\Delta V(mV)$	$R_{r1}(\Omega - m)$	$R_{r2}(\Omega - m)$
1	0	8	8
2	0	8	10
3	48	10	30
4	0	30	25
5	0	25	45
6	0	45	30
7	0	30	50
8	-10.5	50	70
9	10.5	70	75
10	0	75	110
11	0	110	250
12	-48	250	310
13	48	310	70
14	0	70	40
15	- 48	40	20
16	48	20	30
17	0	30	30

Tabla 4.6. Reproducción de la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$.

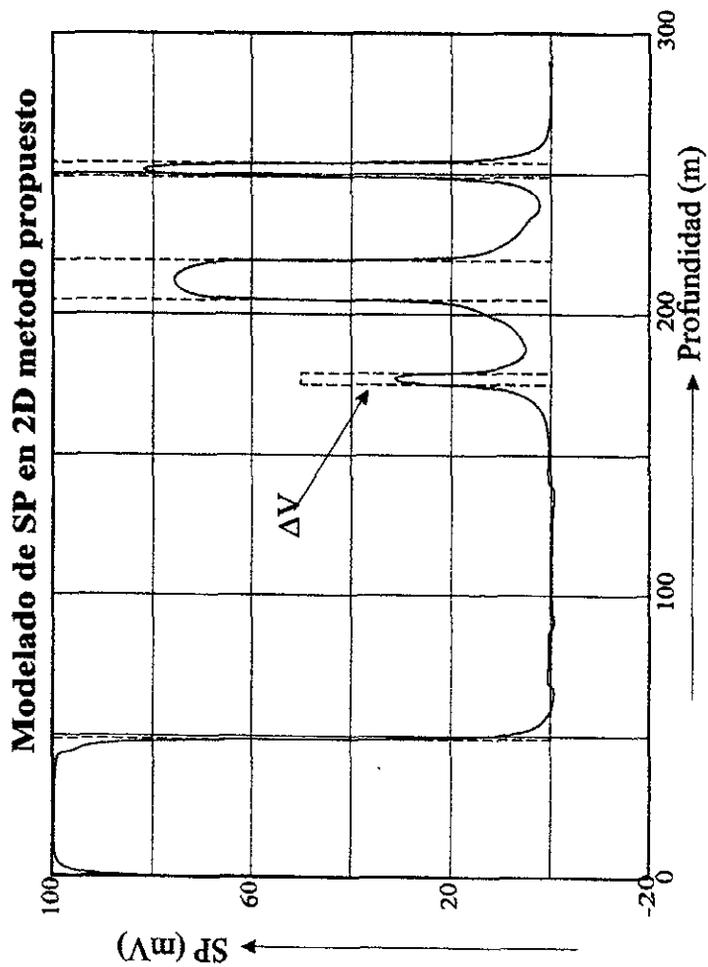


FIG. 4.7. Reproducción de la gráfica 19 de Doll (1945).

Capa	$\Delta V(mV)$	$z_d(m)$	$z_u(m)$	$R_t(\Omega - m)$
1	-50	0	44	8
2	-50	44	49	10
3	12	49	58	30
4	12	58	68	25
5	12	68	88	45
6	12	88	139	30
7	12	139	175	50
8	-50	175	179	70
9	12	179	189	75
10	12	189	198	110
11	12	198	205	250
12	-50	205	219	310
13	12	219	235	70
14	12	235	249	40
15	-50	249	254	20
16	12	254	298	30

Tabla 4.7. Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría cilíndrica considerando $d=1$ (2a. versión).

cada modelado en 1D y la suma que da el potencial en 2D. Se puede observar que según los valores ΔV que se asignen a cada capa dipolar, será la contribución a la forma de la curva de potencial.

La parte de validación de resultados es una de las más difíciles ya que se tienen que buscar datos correctos para verificar que coincidan el modelado propuesto con lo publicado por otros autores. En los párrafos siguientes se mostrarán los resultados obtenidos al procesar dos pozos reales; cabe recordar que no se hace inversión, por lo que sólo se podrá corregir la curva por tamaño del estrato, diámetro de pozo y por contraste de resistividad, es decir, los valores ΔV se han propuesto sin hacer un análisis de contenido de arcilla.

El siguiente ejemplo es el resultado de la realización del modelado del pozo A,

Capa	$\Delta V(mV)$	$R_{11}(\Omega - m)$	$R_{12}(\Omega - m)$
1	0	8	8
2	0	8	10
3	38	10	30
4	0	30	25
5	0	25	45
6	0	45	30
7	0	30	50
8	-0.5	50	70
9	0.5	70	75
10	0	75	110
11	0	110	250
12	-38	250	310
13	38	310	70
14	0	70	40
15	-38	40	20
16	38	20	30
17	0	30	30

Tabla 4.8. Datos para generar la figura 19 de Doll (1947). Datos para geometría plana considerando $d=1$ (2a versión).

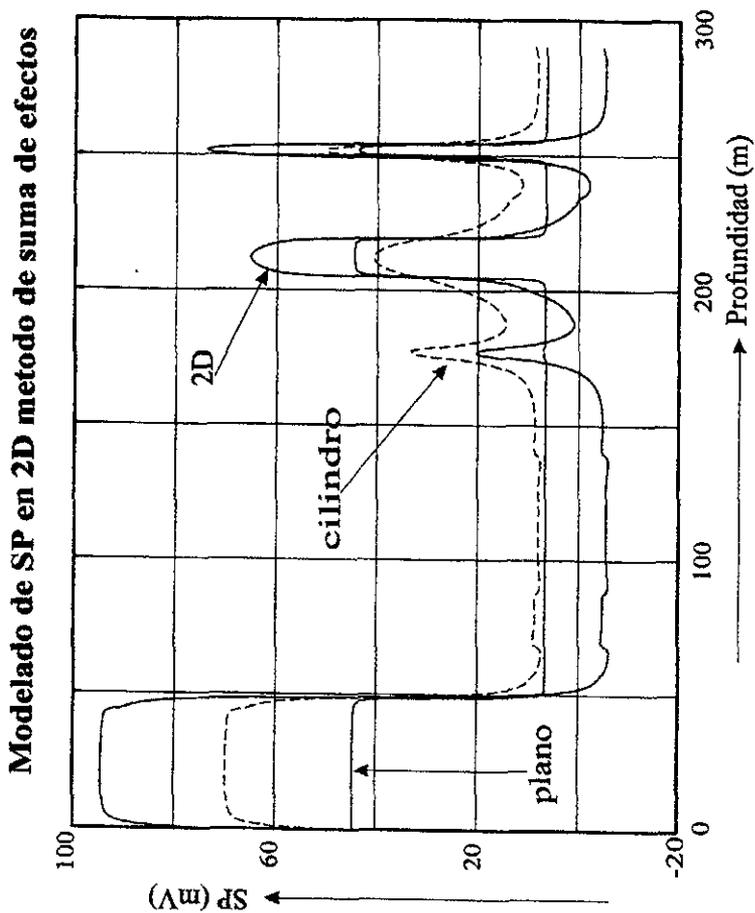


FIG. 4.8. Reproducción de la gráfica 19 de Doll (1945) con diferentes valores de diferencia de potencial.

que es una secuencia de arenas-lutitas, en este caso no se darán los datos de entrada en forma de tabla, sino que directamente, en las figuras, se muestran los límites de las capas y los valores de resistividad. El valor de $R_m = 0.75\Omega - m$ y el radio del pozo es $0.2020 m$. La figura 4.9 muestra una curva ΔV propuesta por el autor del presente trabajo para realizar el modelado, donde se puede observar, que en general, en el intervalo procesado no existe un alto contraste de resistividad ni capas muy delgadas (los espesores menores son de 2 metros).

Se considera que la curva modelada es adecuada ya que existe buena correspondencia entre los límites de las formaciones y algunos puntos de inflexión de la curva (sobre todo, en aprox. 1288 metros), ya que las capas son relativamente gruesas respecto al radio del pozo. También es importante comparar la curva modelada con la de campo; el resultado se muestra en la figura 4.10 donde se puede observar que en la primera se suaviza la curva de campo y además, es congruente ya que sigue la misma tendencia de la curva de campo.

Finalmente, se presenta el caso del pozo B mostrado en la figura 4.11, el modelado de éste es complicado ya que presenta capas delgadas y de alta resistividad en algunos intervalos. A primera vista, se puede decir que la curva modelada es congruente con los datos de resistividad, por ejemplo, en el intervalo 1947-1948 m las curvas de resistividad indican una capa arcillosa, lo cual es congruente con la curva modelada de potencial natural. En los tres intervalos donde la curva lateral marca alta resistividad, la curva de SP deflexiona muy bien y define los puntos de inflexión de la curva.

Sin embargo, a pesar de la supuesta buena correspondencia entre los datos de resistividad y la curva modelada de potencial natural, existen diferencias en amplitud respecto a la curva de SP de campo. Esto se puede deber a que no se caracterizan adecuadamente los valores ΔV .

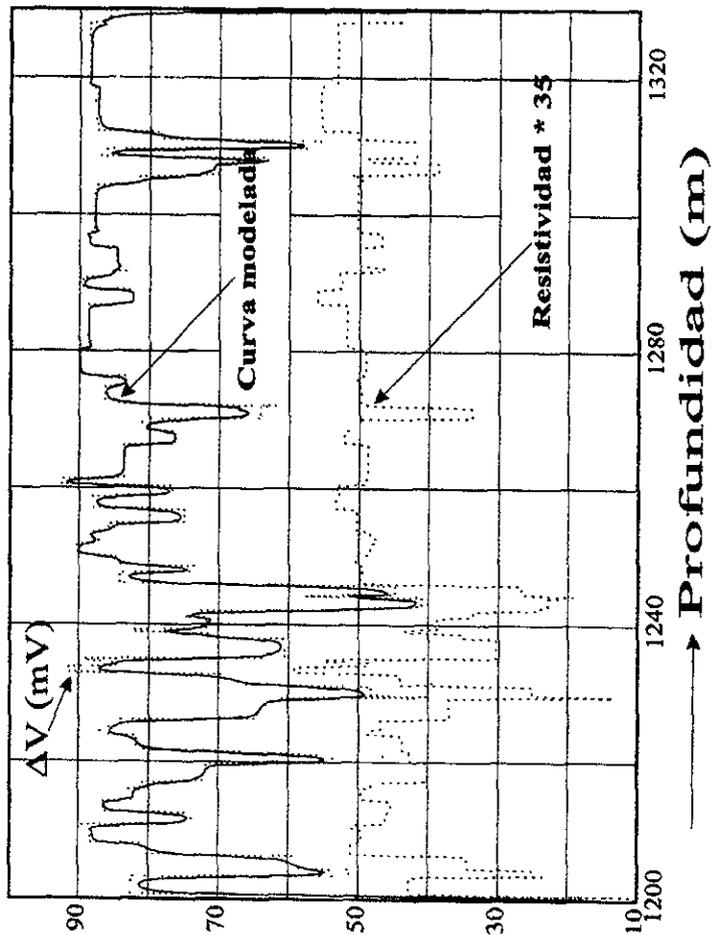


FIG. 4.9. Modelado en 2D del pozo A.

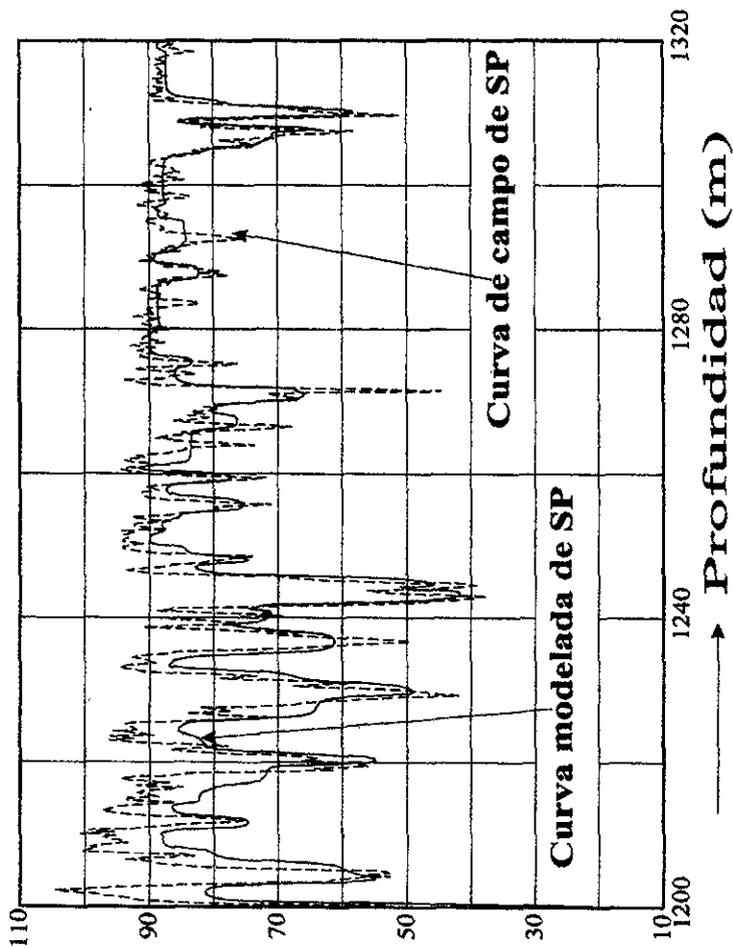


FIG. 4.10. Modelado en 2D del pozo A.

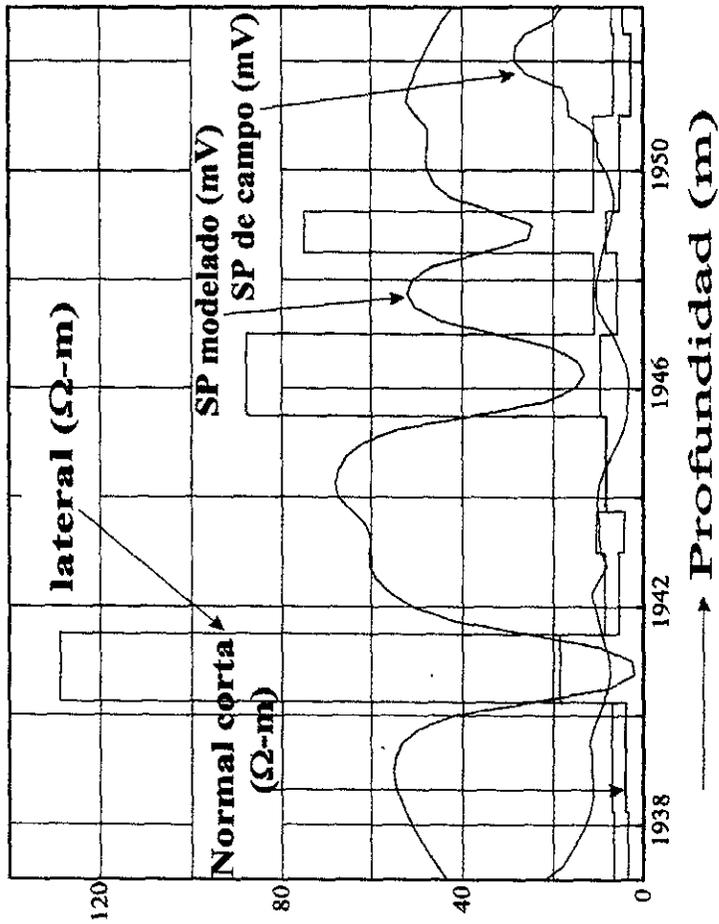


FIG. 4.11. Modelado del pozo B.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Existen conclusiones importantes en relación al trabajo realizado. Siguiendo la misma secuencia llevada a cabo hasta ahora, se hará énfasis en los usos del potencial natural y de porqué se ha realizado el presente trabajo. Posteriormente se hablará acerca de los métodos para encontrar la solución de la función potencial para los casos de geometría cilíndrica y de capas planas. Finalmente, se mencionarán las condiciones propuestas para el modelado en 2D y las suposiciones que se realizaron para poder realizar dicho modelado.

El interés actual del potencial natural se enfoca a la reinterpretación de los registros obtenidos hace muchos años, ya que en la actualidad, casi no se toman registros de SP; sin embargo, la información obtenida permite:

- distinguir formaciones arcillosas de las porosas,
- delimitar límites de estratos,
- obtener el valor de R_w ,
- correlacionar capas geológicas y,
- cuantificar el contenido de arcilla en capas permeables (siempre que se haga inversión).

Tradicionalmente se han aplicado correcciones a los registros obtenidos de campo para poder realizar una interpretación del registro. Sin embargo, es posible encontrar

una ecuación que modela la curva de SP , ésta no necesita ser corregida, ya que dentro de ella quedarán implícitas las correcciones a la curva de potencial natural; entre ellas se encuentra el efecto de diámetro de pozo, espesor de las capas, y contraste de resistividades. El objetivo de este trabajo ha sido modelar la curva, de forma tal, que no sea necesario realizar correcciones.

Sin embargo, el modelo geológico en 2D es muy difícil de plantear en una ecuación, por ello, se propone separar los efectos en 1D porque son relativamente fáciles de plantear. El modelo geológico que se supone para la realización del modelado en 2D considera que existe un pozo completamente vertical, el cual corta una secuencia de capas geológicas completamente horizontales. En la realidad, las condiciones anteriores son muy difíciles de encontrar, sin embargo, se propone que el modelo descrito es lo suficientemente bueno para tener una aproximación a las condiciones del problema real, pero con la facilidad de poder plantear soluciones analíticas.

En el caso de modelado de SP en geometría cilíndrica, se tiene una solución que tiene que ser calculada numéricamente mediante algún método numérico; se ha propuesto dividir el intervalo de integración en tres partes, el primero de ellos se resuelve mediante el método de cuadratura gaussiana, el segundo intervalo mediante el método de Filon y el último intervalo se desprecia. En realidad, la integración se pudo realizar debido a que la parte no oscilatoria del integrando en la ecuación 2.26 decae para valores grandes de la variable de integración.

Cuando no se supone contraste de resistividad entre R_t y R_m , es posible aplicar el método de ángulo sólido que tiene la ventaja de que su algoritmo es muy rápido. Al considerar contraste de resistividad (siempre que la relación R_t/R_m tienda a 1) se ha propuesto usar el método de ángulo sólido y adicionar un segundo término de aproximación propuesto por Anguiano (1998). El segundo término es otra integral

que necesita ser calculada mediante algún método numérico, sin embargo, Spurlin (1998) propuso una función polinomial cuyo comportamiento ha sido mostrado en el capítulo 2.

La propuesta para modelado en 1D para el caso de capas planas, supone una superficie circular plana de radio infinito, al cual se le resta otra superficie de radio r con las mismas características geométricas. Al realizar la resta descrita, habrá un reacomodo de cargas en el límite de ambas superficies. Tejero (1997) desarrolló la solución para encontrar el potencial debido a capas planas; ésta solución ha sido cotejada con la solución propuesta por Taberian et al. (1995).

Además de las suposiciones anteriores, se han planteado consideraciones para la realización del modelado en 2D; una de ellas es el planteamiento de que no existe invasión. En la realidad, las capas permeables, siempre están afectadas por el efecto de invasión; es decir, el filtrado de lodo penetra dentro de la formación debido a las diferencias de presión en la formación y el pozo.

Se ha propuesto que el modelado en 2D es el resultado de sumar los efectos debidos a diferentes geometrías, es decir, los modelados en 1D debidos a la geometría cilíndrica y a las capas planas. Esto cumple con el principio de superposición de causas y efectos para campos eléctricos, esto es, cuando se tiene un efecto debido a dos causas, éstas se pueden separar y ser sumadas y se obtendrá el efecto total; sin embargo, para el problema que se pretende resolver, el principio anterior funciona, sólo que se creará un campo secundario debido a la interacción de los dipolos eléctricos que generan el potencial para cada una de las geometrías.

El efecto de interacción se ha despreciado, ya que al ser dipolos, el campo eléctrico debido a la interacción de estos decae proporcionalmente a la relación $\frac{1}{R^3}$ donde R es la distancia a los centros de los dipolos; es decir, existe sólo una pequeña zona que

genera el campo secundario, ya que a distancias relativamente grandes, el campo debido a la interacción decae rápidamente.

Es pertinente recalcar, que el modelado propuesto permite hacer correcciones a la curva de SP por efecto de diámetro de pozo, contraste de resistividad y tamaño de estratos. Se tiene una solución adecuada, pero el algoritmo implementado en una computadora Hewlett-Packard, el cuál es muy tardado; sin embargo se han propuesto algunas aproximaciones cuyos algoritmos son rápidos, pero tienen limitantes, por ejemplo, suponen bajo contraste de resistividad a ambos lados de una membrana formada por dipolos eléctricos.

Finalmente, es pertinente hacer énfasis en que los resultados obtenidos para los ejemplos propuestos son razonablemente buenos, ya que algunos pudieron ser comprobados por diferentes métodos, y, en el caso de 2D, se compararon algunos casos con resultados obtenidos por Doll.

REFERENCIAS

- Abramowitz, M., and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1968.
- Anguiano, Rojas P., *Apuntes de Teoría Electromagnética para Registros de Pozos*, Reporte Interno I.M.P., 1998.
- Bronshstein, I., y Semendiaev, K., *Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes*, Ed. MIR, Moscú, 2a. ed., 1973.
- Dakhnov, V. N., *Geophysical Well Logging*, Quarterly of the Colorado School of Mines, Vol. 57, No. 2, 1962.
- Desbrandes R., *Encyclopedia of Well Logging*. Ed. Technip, Francia, 1985.
- Dewan, T. J., *essentials of Modern Open-Hole Log Interpretation*, PennWell Publishing Co., Tulsa, 1983.
- Doll, H. G., The SP Log: Theoretical Analysis and Principles of Interpretation, Transactions AIME. *Petroleum Branch*, Vol. 179, p.146-185, 1948.
- Doll, H. G., The SP Log in Shaly Sands. *Petroleum Transactions*, T.P. 2912, p. III.97 - III.106. Vol. 189, 1950.
- Gómez Rivero, O., *Registros de Pozos: Parte I. Teoría e Interpretación*, México, 1975.
- Halliday, D., Resnick R., *Physics: Parts 1 & 2*, Ed. John Wiley and Sons., 3rd ed., 1977.
- Hilchie, D. W., *Applied Openhole Log Interpretation*, Douglas W. Hilchie Inc., Golden Colorado, 1980.

- Kaufman, A. A., *Geophysical Field Theory and Methods, Part A*. Academic Press, Inc., San Diego, 1992.
- Leendert de Witte, A Study of Electric Log Interpretation Methods in Shaly Sands Formations, *Petroleum Branch*, TP4076, 1955.
- Linares Flores M. and Garza de la Garza R., Análisis de Registros Geofísicos en Arenas Arcillosas. Método de Fertl Modificado, *SPWLA, XIX, Annual Logging Symposium*, art. L, 1978.
- Log Interpretation Charts*, Schlumberger, 1989.
- Principios/Aplicaciones de la Interpretación de Registros*, Schlumberger Educational Service.
- Roig, Sampedro Francisco J., *Avances y Perspectivas en la Interpretación del Registro de Potencial Natural*, Tesis Profesional, U.N.A.M., 1987.
- Schlumberger, Grunner A., *The Schlumberger Adventure*, Arco Publishing Inc., E.U.A., 1982.
- Segesman, F., New SP Correction Charts, *Geophysics*; Vol.XXVII, No.6, 1962.
- Segesman, F., Well Logging Method, *Geophysics*, Vol. 45, No.11, p. 1667-1684, 1987.
- Silva P. and Bassiouni, Z., A New Approach to the Determination of Formation Water Resistivity From the SP Log, *XXII Annual Logging Symposium Transactions*, art. G, México 1981.
- Sistema de Servicios Eléctricos para Pozos*, Industrias Gearhart Inc. Ed. 1985.
- Smits, L. J. M., SP Log Interpretation in shaly Sands, *Society of Petroleum engineers*, Paper SPE 1863-B, 1967.

- Spurlin, J., Comunicación verbal, sin publicar, I.M.P., 1998.
- Taherian, Reza M., Habashy M. Tarek, Schroeder J., Mariani R. David, Chen Min-Yi, Spontaneous Potential: Laboratory Experiments and Modeling Results, *The log analyst*; Vol.36; No.5; 1995.
- Tejero, Andrade A., *Apuntes de clase de Teoría Electromagnética*, (sin publicar) U.N.A.M., 1997.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., Sheriff, R. E., *Applied Geophysics*, Cambridge University Press, 2nd. ed., 1990.
- Ucok H., A Laboratory study of the Effect of Temperature Gradient on the development of Spontaneous Potential in geothermal wellbore, *SPWLA*, art. K, 1981.
- Winsauer, W. O. and McCardell, W. O., Ionic Double-Layer Conductivity in Reservoir Rock, *Transactions AIME*, T.P. 3565, 1953.
- Wyllie, M.R.J., A Quantitative Analysis of the Electrochemical Component of the SP Curve, *Petroleum Transactions AIME*, 1949.
- Wyllie, M.R.J., An Investigation of the Electrokinetic Component of the Self Potential Curve, *Petroleum Transaction AIME*, Vol. 192, tp2940, 1951.
- Wyllie, M.R.J., An Experimental Investigation of the SP and Resistivity Phenomena in Dirty Sands, *Petroleum Branch*, T.P. 3750, 1953.

Apéndice A

ANGULO SOLIDO

En este apéndice se desarrolla el concepto de ángulo sólido, que permite resolver en forma sencilla ciertos problemas de campo eléctrico.

Una forma sencilla de iniciar es considerar una superficie S cualquiera y un punto P localizado fuera de ésta, si se une el punto P con cada uno de los puntos del contorno Γ se formará una superficie cónica Sc (figura A.1).

Este cono divide al espacio en dos partes, la parte interna D_i y la parte externa D_e . Para caracterizar el cono se necesitan evaluar cada una de sus partes. Al dibujar una superficie esférica de radio R con origen en el vértice del cono (figura A.2) se observa que la esfera es dividida en dos superficies S_i y S_e . Puede considerarse que S_i caracteriza a la parte interna D_i confinada por el cono.

Es un hecho que la superficie S , depende del cono, sin embargo, también depende del radio de la esfera. En la realidad la superficie S y sus partes S_i y S_e dependen de R^2 (donde el radio R es escogido arbitrariamente). Una forma de evaluar la parte interna del cono D_i es por medio de la relación:

$$\omega(P) = \frac{S_i}{R^2}, \quad (\text{A.1})$$

donde la ecuación es llamada ángulo sólido.

Suponiendo que se intenta ver el cono a partir del punto P y que la superficie cónica no es transparente, el ángulo sólido puede ser tratado como el ángulo visual sobre el cual la superficie S , es vista desde P .

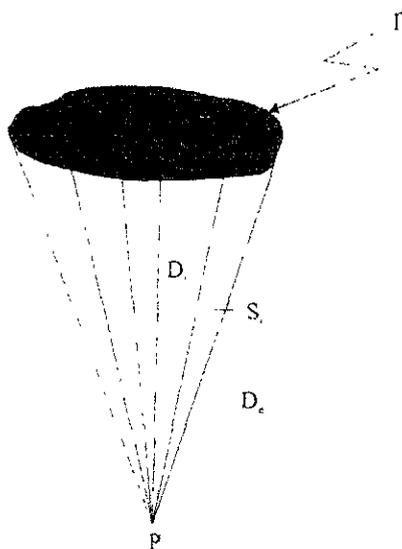


FIG. A.1. Parámetros necesarios para el cálculo del ángulo sólido.

A continuación se discutirán algunas situaciones referentes a la ecuación A.1:

1. $S_1 = 0$. Esta situación implicaría que el punto P se une con un punto, es decir, que la superficie S tiende a un punto. Bajo ésta situación, $\omega(P) = 0$.
2. Si la superficie S tiende a infinito y el radio R es muy pequeño, se tendría que $S_1 = 4\pi R^2$ y por tanto, $\omega(P) = 4\pi$. Los dos casos anteriores son los casos límite en el valor del ángulo sólido, por tanto, la desigualdad siguiente siempre se cumple:

$$0 \leq \omega(P) \leq 4\pi. \quad (\text{A.2})$$

3. En el caso de que la superficie cónica sea un plano, implica que $S_1 = 2\pi R^2$ y por tanto, $\omega(P) = 2\pi$.

A continuación se dará otra explicación del concepto de ángulo sólido. Al considerar una superficie elemental dS , un punto q contenido en ella y un punto de observación P (figura A.3) se pueden dibujar líneas de P a cada uno de los puntos del contorno que rodea a dS , obteniendo un cono, cuyo ángulo sólido es $d\omega(P)$.

Para calcular el ángulo descrito se proyecta el vector $dS\mathbf{n}$ en el vector \mathbf{L}_{qp} . La figura A.3 muestra que:

$$dS^* = dS \cos(\mathbf{L}_{qp}, \mathbf{n}), \quad (\text{A.3})$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie dS . De acuerdo a la ecuación A.1 se tiene:

$$d\omega(P) = \frac{dS^*}{L_{qp}^2} = \frac{dS \cos(\mathbf{dS} \cdot \mathbf{L}_{qp})}{L_{qp}^2}$$

ó

$$d\omega(P) = \frac{\mathbf{dS} \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^2}, \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{dS} = dS\mathbf{n}$.

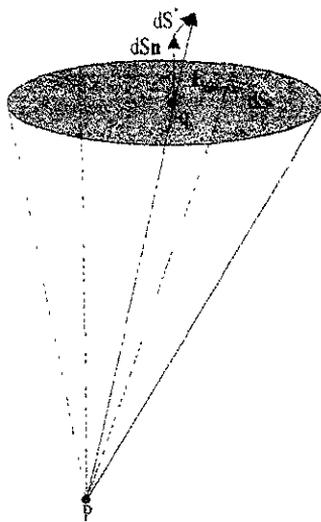


FIG. A.3. Parámetros para encontrar el ángulo sólido de una diferencial de superficie.

De la ecuación A.4 se tiene que el ángulo sólido $d\omega(P)$ queda expresada por dS que no siempre representa una superficie esférica, además, el valor puede ser positivo o negativo. De la misma ecuación, se tiene que el ángulo sólido es positivo cuando el lado posterior de la superficie dS es vista desde un punto de observación P y es negativo en caso contrario.

De acuerdo con la ecuación A.4 se puede decir que el ángulo sólido $d\omega$ es subtendido por la superficie dS , cuando es visto desde el punto de observación P . Al considerar a la superficie S como una suma de muchas diferenciales de superficie dS , el ángulo $\omega(P)$ subtendido por la superficie S visto desde el punto P puede ser expresado como:

$$\omega(P) = \int_S \frac{dS \cdot \mathbf{L}_{qp}}{L_{qp}^3}. \quad (\text{A.5})$$

Un cono es formado dibujando líneas desde el punto P a todos los puntos de la línea límite de la superficie S . Esto significa que cualquier superficie confinada por el cono y rodeada por las mismas líneas estará caracterizando el mismo ángulo sólido. El signo del ángulo sólido depende de la posición del vértice P respecto al lado anterior o posterior de la superficie. De acuerdo a lo anterior, se tiene que el ángulo sólido subtendido por cualquier superficie S con la misma línea límite no varía.

A continuación se discutirán algunas características de la ecuación A.5.

1. Al suponer que la superficie S es esférica y su radio igual a la distancia entre el punto P y la superficie, se tiene:

$$dS \cdot \mathbf{L}_{qp} = dSL_{qp}$$

ya que L_{qp} es constante, se tiene que:

$$\omega(P) = \frac{1}{L_{qp}^2} \int_S dS = \frac{S}{L_{qp}^2} \quad (\text{A.6})$$

que coincide con la ecuación A.1.

2. El siguiente análisis se hará suponiendo una superficie cerrada arbitraria S y que el punto P está localizado en cualquier lugar dentro del volumen V , rodeado por esta superficie (Figura A.4). Asumiendo que el vector normal \mathbf{n} está dirigido hacia afuera de la superficie y debido al hecho de que una superficie esférica con centro en el punto P está caracterizado por el ángulo sólido igual a 4π , se puede decir que el ángulo sólido, subtendido por cualquier superficie que se ve desde el punto P , localizado dentro del volumen, es igual a 4π . Si el vector normal \mathbf{n} tiene una dirección opuesta, el ángulo sólido es igual a -4π .
3. Al suponer que el punto P está localizado fuera de una superficie cerrada arbitraria S , se pueden dibujar líneas del punto P tangentes a la superficie S , que formarán un cono y la línea de dirección Γ divide a la superficie S en dos partes denominadas S_1 y S_2 (figura A.5). Todos los puntos de la superficie S_2 son función de $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{L}_{pq})$ y tienen signo positivo, mientras que los puntos de la superficie S_1 tienen el signo negativo (Kaufman, 1992). Al proponer que ambas superficies están rodeadas por la misma línea Γ se puede concluir que el ángulo sólido subtendido por estas superficies tienen la misma magnitud, pero de signo opuesto. De acuerdo a lo anteriormente expuesto, se obtiene que el ángulo sólido fuera de una superficie cerrada siempre es cero, independientemente de la posición del punto de observación.
4. El ángulo sólido subtendido por una superficie plana de extensión infinita S



FIG. A.1. Parámetros que muestran el ángulo sólido dentro de una superficie cerrada.

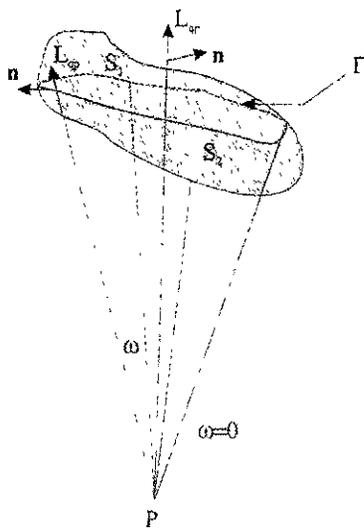


FIG. A.5. Cálculo del ángulo sólido fuera de una superficie cerrada.

se deduce del siguiente hecho. Ya que la superficie cónica llega a ser un plano paralelo a la superficie S , se concluye que el ángulo sólido es igual a 2π o -2π dependiendo si el punto de observación está arriba o abajo del plano.

5. Un problema frecuente es el tener que calcular el ángulo sólido subtendido por una superficie planar teniendo dimensiones finitas y localizada en el plano $z = 0$. Cuando la distancia del punto de observación es mucho más grande que la longitud del plano, la distancia entre el punto P a cualquier punto q de la superficie es prácticamente la misma y por tanto, la ecuación A.5 se puede simplificar como:

$$\omega(P) \simeq \frac{1}{L_{pq_0}} \int_S \mathbf{L}_{pq_0} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{L}_{pq_0} \cdot \mathbf{k}S}{L_{pq}^3} = \frac{S}{z^2} \quad (\text{A.7})$$

donde \mathbf{k} es un vector unitario a lo largo del eje z , y q_0 es cualquier punto de la superficie S . De ésta forma, cuando el punto de observación está muy lejos de la superficie, el ángulo sólido coincide con el de la superficie elemental y decrece como una relación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Cuando nos vamos aproximando a la superficie, debido al decremento de la distancia L_{pq} , el ángulo sólido se incrementa y cerca de la superficie ésta tiende a 2π ó -2π . De hecho, cuando el punto P está muy cerca de la superficie S , la superficie cónica también se transforma en un plano, y correspondientemente, $\omega(P) \rightarrow \pm 2\pi$ cuando $P \rightarrow q$. Un comentario interesante es el que el ángulo sólido subtendido por un plano finito tiende al de un plano infinito cuando el punto de observación está muy cerca del plano. El desarrollo anterior se realizó considerando el comportamiento del ángulo sólido a lo largo de una línea de observación que intersecta a la superficie. Al realizar un per-

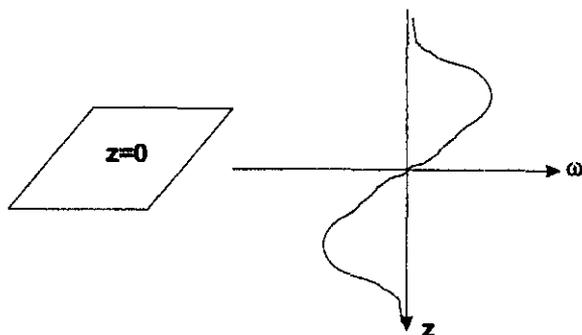


FIG. A.6. Perfil del comportamiento del ángulo sólido cuando el punto de observación no intersecta a la superficie.

fil de los puntos de observación que no intersectan a la superficie S , el ángulo sólido se comporta como lo muestra la figura A.6 (Kaufman, 1992). Se observa que cuando nos aproximamos al plano z , cuando $z < 0$, el ángulo se incrementa y alcanza el máximo a alguna distancia de la superficie S , y a partir de este punto, tiende a cero. Cuando llegamos al plano $z = 0$ y fuera de la superficie S , el ángulo sólido es igual a cero. De la figura A.6 es posible observar que el ángulo sólido es una función antisimétrica, es decir, $\omega(z) = -\omega(-z)$.

- Si se considera que la superficie plana S es un disco con radio a , y el punto de observación está localizado en el eje z que pasa através de sus centro, (figura A.7), entonces el ángulo sólido $\omega(z)$ subtendido por el disco puede ser determinado al calcular el área de la superficie esférica limitado por el perímetro del disco. De la figura A.7 se tiene que trabajando con coordenadas esféricas obtenemos:

$$r = R \operatorname{sen} \theta, \quad (\text{A.8})$$

$$dS = 2\pi r R d\theta = 2\pi R^2 \operatorname{sen} \theta d\theta. \quad (\text{A.9})$$

El ángulo θ varía de cero a α , pero se cumple que:

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} \frac{a}{R}. \quad (\text{A.10})$$

Integrando la ecuación A.9 se tiene:

$$S = 2\pi R^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen} \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha); \quad (\text{A.11})$$

substituyendo A.11 en A.1, se llega a la conclusión que el ángulo sólido subtendido por el disco con radio a visto desde el eje x es:

$$\omega(P) = 2\pi (1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right). \quad (\text{A.12})$$

7. Suponiendo una superficie S limitada por dos contornos Γ_1 y Γ_2 (figura A.8) se hará el siguiente análisis. Con las condiciones anteriores se tiene que la superficie cónica consta de dos partes, la parte externa S_e y la parte interna S_i . Bajo esta situación, el ángulo sólido puede ser presentado como una diferencia de dos ángulos sólidos formados por cada superficie cónica, es decir:

$$\omega(P) = \omega_e - \omega_i. \quad (\text{A.13})$$

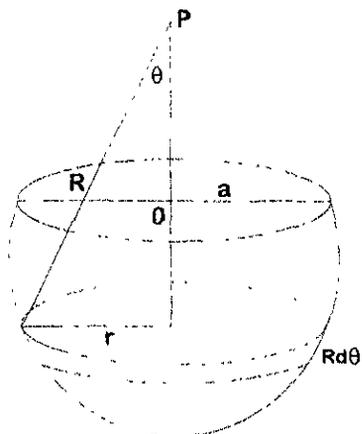


FIG. A.7. Ángulo sólido de un disco de radio "a"

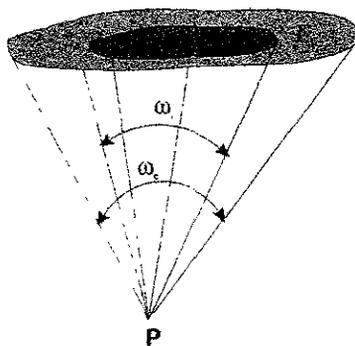


FIG. A.8. Cálculo del ángulo sólido cuando existen dos superficies.